Manuela da Silva Souza

Propriedade de Specht e crescimento das identidades polinomiais graduadas de sl_2

CAMPINAS
2013

Universidade Estadual de Campinas

Instituto de Matemática, Estatística
e Computação Científica

Manuela da Silva Souza

Propriedade de Specht e crescimento das identidades polinomiais graduadas de sl_2

Orientador: Prof. Dr. Plamen Emilov Kochloukov

Tese de doutorado apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Unicamp para obtenção do título de Doutora em Matemática.

Este exemplar corresponde à versão final da tese defendida pela aluna Manuela da Silva Souza, e orientada pelo Prof. Dr. Plamen Emilov Kochloukov.

Assinatura do Orientador

P Kochloukov

Campinas
2013

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA POR
MARIA FABIANA BEZERRA MULLER - CRB8/6162
BIBLIOTECA DO INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E
COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA - UNICAMP

Souza, Manuela da Silva, 1985-
So89p Propriedade de Specht e crescimento das identidades polinomiais graduadas de sl_2 / Manuela da Silva Souza. – Campinas, SP : [s.n.], 2013.

Orientador: Plamen Emilov Kochloukov.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Álgebras não-associativas. 2. PI-álgebras. 3. Lie, Álgebra de. 4. Identidade polinomial graduada. I. Kochloukov, Plamen Emilov,1958-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em inglês: Specht property and growth of the graded polynomial identities of sl_2
Palavras-chave em inglês:
Nonassociative algebras
PI-algebras
Lie algebra
Graded polynomial identity
Área de concentração: Matemática
Titulação: Doutora em Matemática
Banca examinadora:
Plamen Emilov Kochloukov [Orientador]
Henrique Guzzo Júnior
Irina Sviridova
Victor Mikhaylovich Petrogradsky
Adriano Adrega de Moura
Data de defesa: 28-02-2013
Programa de Pós-Graduação: Matemática

Tese de Doutorado defendida em 28 de fevereiro de 2013 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). PLAMEN EMILOV KOCHLOUKOV

Prof(a). Dr(a). HENRIQUE GUZZO JÚNIOR

Prof(a). Dr(a). IRINA SVIRIDOVA

Prof(a). Dr(a). VICTOR MIKHAYLOVICH PETROGRADSKY

Prof(a). Dr(a). ADRIANO ADREGA DE MOURA

À minha mãe.

Nem sempre podemos escolher a música que a vida toca.
Mas podemos escolher o jeito de dançar.
(Autor desconhecido)

Agradecimentos

Agradeço a Deus por conduzir a minha caminhada e me capacitar.

Aos meus pais, Maria Dalva e Manoel, aos meus irmãos, Ivânia e Ney e à minha madrinha Rhana, pelo amor e carinho. Em especial, à “mainha”por estar comigo sempre (seja em presença ou em pensamento) e acreditar nos meus sonhos com muito mais força que eu. Mainha, eu devo tudo isso a você!

Aos meus tios, Nilson e Aninha, e primos de Diadema, pelo apoio e carinho com que me acolheram no estado de São Paulo.

Ao meu orientador, professor Plamen, pela disponibilidade, paciência e generosidade ao longo da orientação. Professor, muito obrigada por tudo!

Ao professor Antonio Giambruno, pela valiosa contribuição na tese e pelo apoio durante a minha permanência na Itália. Professore, grazie mille!

Aos professores Henrique Guzzo, Irina Sviridova, Victor Petrogradsky e Adriano Adrega, pelas sugestões feitas a tese.

Aos irmãos acadêmicos, Alda, Gustavo, Júlio e Thiago, pelas nossas discussões em PI teoria e ao Igor, pelas discussões em álgebra e também pelas nossas “brigas de mentirinha”. Em especial, ao Júlio, pelo companherismo diário ao longo desses 4 anos, pela nossa sintonia matemática e pelos sábios conselhos. Julhão, a nossa amizade foi um presente que a vida me deu!

À minha turma do doutorado (a mais unida do mundo) e à toda a galera que fez parte do grupo de estudos do primeiro semestre de 2009, pelos nossos sábados, domingos e feriados juntos. Sem vocês, eu não teria conseguido!

À toda a galera do predinho, pelos nossos momentos de descontração e pelas nossas idas e vindas do RU. Em especial, aos amigos e companheiros de sala, Elisa, Régis e Paulinho, por tornar a rotina de estudos muito mais leve e à Graziele pela generosidade de ter me acolhido em seu quarto nos últimos 2 meses.

À equipe de professores do departamento de matemática da UFBA, pelo incentivo desde os primeiros anos de graduação e às minhas amigas Fa, Liu e Vanessinha, também conhecidas na UFBA como “as meninas super poderosas”, pela nossa amizade que vai além de qualquer distância. Em especial, à Liu, por pacientemente me ouvir sempre.

Aos amigos de Palermo, por me receberem com tanto carinho e alegria na cidade.

Aos professores do departamento de matemática da UNICAMP, aos funcionários da secretária da Pós-Graduação do IMECC e a todos os familiares e amigos que contribuiram de forma direta ou indireta nessa conquista ou que torceram por mim, MUITO OBRIGADA!

Para finalizar, à CAPES e ao CNPq, pelo suporte financeiro.

Resumo

A álgebra de Lie sl_2 das matrizes 2×2 de traço zero sobre um corpo $\mathbb{K}$ pode ser munida, a menos de isomorfismo, de somente três G-graduações não triviais distintas, induzidas pelos grupos $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ e $\mathbb{Z}$.

Nesta tese, prova-se que quando $\mathrm{char}(\mathbb{K}) = 0$, a álgebra sl_2, munida com cada uma das três graduações acima, tem o ideal das identidades graduadas $\mathrm{Id}^G(sl_2)$ satisfazendo a propriedade de Specht, i.e, todo ideal de identidades graduadas que contém $\mathrm{Id}^G(sl_2)$ é finitamente gerado.

Além disso, prova-se que o expoente graduado da variedade das álgebras graduadas geradas por sl_2, em cada caso, é igual a 3. Para $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ e $\mathbb{Z}$, toda subvariedade própria tem crescimento polinomial e para $\mathbb{Z}_2$, o expoente graduado superior é no máximo 2.

Palavras-chave: PI-álgebras, álgebra de Lie, identidade polinomial graduada.

Abstract

The Lie algebra sl_2 of 2×2 traceless matrices over a field $\mathbb{K}$ can be endowed up to isomorphism, with only three distinct non-trivial G-gradings induced by the groups $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ and $\mathbb{Z}$.

In this PhD thesis we prove that when $\mathrm{char}(\mathbb{K}) = 0$, the algebra sl_2 endowed with each of the above three gradings has an ideal of graded identities $\mathrm{Id}^G(sl_2)$ satisfying the Specht property i.e, every ideal of graded identities containing $\mathrm{Id}^G(sl_2)$ is finitely based.

Moreover we prove that the graded exponent of the variety of graded algebras generated by sl_2 in each case is equal to 3. For $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ and $\mathbb{Z}$ any proper subvariety has polynomial growth and for $\mathbb{Z}_2$ has upper graded exponent at most 2.

Keywords: PI-algebras, Lie algebra, graded polynomial identity.

Sumário

Introdução

A teoria de álgebras com identidades polinomiais, também conhecida como PI teoria, é uma parte importante e bem desenvolvida da teoria de anéis. Sob o ponto de vista clássico (associativo), uma identidade polinomial em uma álgebra é um polinômio em variáveis não comutativas que se anula quando avaliado nos elementos da álgebra. As álgebras que possuem no mínimo uma identidade polinomial não trivial são chamadas PI-álgebras. Nesse contexto, álgebras comutativas e de dimensão finita são exemplos dessa classe.

Os primeiros trabalhos que envolvem identidades polinomiais, ainda de forma implícita, apareceram com Sylvester no século XIX e posteriormente com Dehn [5] e Wagner [31] entre as décadas de 20 e 30. Um interesse mais geral em PI teoria deu-se a partir de 1948, depois do trabalho de Kaplansky ([19]). Neste trabalho foi provado que toda PI-álgebra primitiva é uma álgebra simples de dimensão finita, o que sugeriu que a existência de uma identidade polinomial para uma álgebra pode ser usada para entender a estrutura da mesma. Dois anos depois, Amitsur e Levitsky provaram usando metódos combinatórios que o polinômio standard de grau $2k$ é a identidade de grau mínimo da álgebra de matrizes de ordem k ([1]). Esse teorema iniciou uma nova abordagem na área: descrever as identidades satisfeitas por álgebras interessantes.

Se denotamos por $\mathbb{K}\langle X\rangle$ a álgebra associativa livre em um conjunto enumerável de variáveis X, as identidades polinomiais satisfeitas por uma álgebra é um ideal invariante por endomorfismos de $\mathbb{K}\langle X\rangle$, chamado T-ideal. Mais ainda, todo T-ideal de $\mathbb{K}\langle X\rangle$ é dessa forma. Uma vez que duas álgebras podem ter o mesmo ideal de identidades, a teoria de T-ideais está intimamente ligada a teoria de variedades de álgebras. Uma variedade de álgebras é uma classe de álgebras que satisfazem um conjunto de identidades. Birkhoff provou que variedades coincidem com classes abstratas de álgebras, fechadas quando se toma subálgebras, imagens homomórficas e produtos diretos de seus elementos ([4]). Estudar o T-ideal de uma álgebra A equivale a estudar a variedade das álgebras que satisfazem as mesmas identidades de A.

A descrição de T-ideais, dada em função de um conjunto gerador (também chamado de base), é em geral um problema muito difícil. Uma base de identidades concretas para a álgebra de matrizes de ordem k sobre um corpo é conhecida somente para $k \leq 2$. Specht, em 1950, conjecturou que sobre um corpo de característica zero, todo T-ideal da álgebra associativa livre é finitamente gerado, como T-ideal. Muitos exemplos dessa conjectura foram provados nos anos seguintes mas, uma prova completa foi dada somente em 1987 por Kemer (veja [20] ou a monografia [21]). Os teoremas e técnicas desenvolvidas tornaram-se, nos últimos anos, algumas das ferramentas básicas no estudo das identidades de uma álgebra. O estudo das identidades graduadas iniciou-se a partir daí.

O método de investigação das identidades de uma PI-álgebra depende da característica do corpo base. Se o corpo tem característica 0, então todas as identidades seguem daquelas multilineares. Neste caso, a teoria de representações do grupo simétrico S_n é uma poderosa ferramenta. É possível obter informações sobre a base do T-ideal de uma PI-álgebra usando a descrição das representações irredutíveis de S_n. Muitas vezes, elas são usadas para calcular efetivamente a base das identidades. Em outras, associa-se ao T-ideal da álgebra uma sequência de caracteres de S_n, $n = 0, 1, \ldots$, chamada de sequência de codimensões, e essa sequência é usada para medir o crescimento do T-ideal em função de n variáveis fixadas.

O ponto de partida na investigação do crescimento de T-ideais é um teorema de Regev que estabelece que a sequência de codimensões de uma PI-álgebra associativa é limitada exponencialmente. Giambruno e Zaicev, em 1999, resolveram em afirmativo a conjectura de Amitsur que o expoente da taxa de crescimento de um T-ideal próprio é um inteiro, chamado de expoente da PI-álgebra ([11, 12, 13]). Tendo em mãos essa escala de inteiros derivados do expoente, a teoria tem sido desenvolvida nos últimos anos na direção de obter uma classificação dos T-ideais de acordo com o comportamento assintótico da sua sequência de codimensões.

O estudo de identidades polinomiais não se restringe apenas ao ambiente das álgebras associativas. Muitas classes de álgebras não associativas, como as álgebras de Lie e de Jordan são definidas por meio de polinômios não associativos. As álgebras citadas são importantes também devido a suas conexões com outras áreas da Matemática e Física. Muitas propriedades importantes da PI teoria clássica (associativa) falham para álgebras não associativas. Por exemplo, a sequência de codimensões de uma PI-álgebra não associativa não é em geral exponencialmente limitada.

A álgebra de Lie $sl_2 = sl_2(\mathbb{K})$ tem um papel singular na teoria de álgebras de Lie. As classes das representações irredutíveis de dimensão finita de sl_2 ficam completamente definidas, a menos de isomorfismo, por inteiros não negativos e isso se generaliza a álgebras semissimples sobre corpos algebricamente fechados. Na teoria de identidades polinomiais, sua relevância é também bem conhecida. Em 1973, Razmyslov descreveu uma base das identidades satisfeitas por sl_2 quando o corpo $\mathbb{K}$ é de característica 0. Como consequência, obteve uma base das identidades da álgebra $M_2(\mathbb{K})$ (veja a monografia [25]). Razmyslov provou ainda que a variedade das álgebras de Lie gerada por sl_2 tem a propriedade de Specht, i.e., as identidades de toda subvariedade tem base finita. Sobre um corpo de característica 2, existem exemplos de variedades de álgebras de Lie que não satisfazem a propriedade de Specht. O primeiro contraexemplo foi dado por Vaughan-Lee ([30]) em 1970. Em 1974, Drensky ([7]) e Kleiman (não publicado) deram contraexemplos quando o corpo tem qualquer caracterítica positiva.

Seja G um grupo e suponha $L = sl_2$ graduada por G. Denotando por

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a base usual de sl_2, a menos de isomorfismo, existem 4 graduações para sl_2 (veja [2]):

1. $G = \{0\}$: a graduação trivial;

2. $G = \mathbb{Z}_2$:

   $L_0 = \mathbb{K}h$, $L_1 = \mathbb{K}e \oplus \mathbb{K}f$;

3. $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$:

   $L_{(0,0)} = 0,\ L_{(1,0)} = \mathbb{K}h,\ L_{(0,1)} = \mathbb{K}(e+f),\ L_{(1,1)} = \mathbb{K}(e-f)$;

4. $G = \mathbb{Z}$:

   $L_{-1} = \mathbb{K}e,\ L_0 = \mathbb{K}h,\ L_1 = \mathbb{K}f,\ L_i = 0,\ i \notin \{-1, 0, 1\}$.

As identidades graduadas em cada um dos casos também são conhecidas. No primeiro caso (a graduação trivial), elas foram descritas por Razmyslov [25] em característica 0, e por Vasilovskii [29] quando $\mathbb{K}$ é infinito e de característica $p \neq 2$. Essas são as identidades ordinárias de sl_2. Nos demais três casos, as identidades graduadas foram descritas por Koshlukov em [22]. Tem-se informação sobre a estrutura das respectivas álgebras graduadas relativamente livres em característica 0 ([26]).

A presente tese estuda, sob o ponto de vista graduado, a finitude da base das identidades das subvariedades de sl_2 (propriedade de Specht) e o crescimento assintótico dessas subvariedades, quando o corpo base tem característica 0. Ela está dividida em 3 capítulos, organizados da seguinte forma.

O primeiro capítulo contém boa parte dos pré-requisitos necessários para a leitura dos próximos. É recheado de exemplos elucidativos (na medida do possível, mantemos esse espírito nos demais capítulos). Iniciamos com o conceito de álgebra dando ênfase a duas grandes classes: associativas e de Lie. A primeira, por questões históricas e a segunda, por ser tratar da classe de nosso interesse. Relembramos os principais conceitos da teoria de álgebras com identidades polinomiais graduadas. Dentre eles: álgebras livres graduadas, T_G-ideais, variedades, codimensões graduadas, etc. As principais ferramentas na abordagem dos problemas desta tese, a teoria de representações do grupo simétrico e do grupo geral linear e a propriedade da base finita para conjuntos, são abordadas nas seções 1.5 e 1.6 e merecem uma atenção especial, principalmente daqueles que se deparam com essas ferramentas pela primeira vez. Ressaltamos que neste capítulo, nenhum resultado é demonstrado, mas as referências são dadas.

O segundo capítulo mostra a propriedade de Specht para a variedade gerada por sl_2, graduada pelos grupos $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ e $\mathbb{Z}$, quando o corpo base tem característica 0. Em outras palavras, todo T_G-ideal que contém o ideal das identidades G-graduadas de sl_2 tem base finita, para todo grupo G (o caso G trivial foi provado por Razmyslov).

No terceiro e último capítulo provamos que a variedade gerada por sl_2 tem a minimalidade em relação ao expoente graduado (se ele existe), para os mesmos grupos do capítulo anterior e também em característica 0. Mais precisamente, enquanto o expoente graduado de sl_2, em cada caso, é igual a 3, para $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ e $\mathbb{Z}$, toda subvariedade própria tem crescimento polinomial e para $\mathbb{Z}_2$, o expoente graduado superior é no máximo 2.

Os resultados do capítulo 2 já foram submetidos para publicação em um trabalho intitulado "Graded polynomial identities and Specht property of the Lie algebra sl_2"([10]).

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, fazemos uma breve discussão dos principais conceitos e resultados que serão utilizados nesta tese. O leitor com algum conhecimento em teoria de álgebras com identidades polinomiais e teoria de representações poderá usuá-lo apenas para eventuais consultas. Para evitar repetições, $\mathbb{K}$ denotará sempre um corpo.

1.1 Álgebras associativas, de Lie e graduadas

Nesta seção, apresentamos a noção de álgebra e alguns conceitos relacionados: subálgebra, ideal, homomorfismo e graduação. Nossa atenção está voltada àlgumas classes de álgebras onde é interessante desenvolver teoria de identidades polinomiais, a saber, álgebras associativas e de Lie, munidas (ou não) de uma graduação. As álgebras associativas serão abordadas apenas para fins de exemplos. Já as álgebras de Lie graduadas é a classe onde os interesses desta tese se concentram.

Definição 1.1.1. *Um $\mathbb{K}$-espaço vetorial A munido de uma operação binária $* : A \times A \to A$, denominada produto, é uma* $\mathbb{K}$-álgebra*, se $*$ é uma operação bilinear, ou seja, se para quaisquer a, b, $c \in A$ e $\alpha \in \mathbb{K}$, valem as seguintes propriedades:*

i) $a * (b + c) = a * b + a * c$;

ii) $(a + b) * c = a * c + b * c$;

iii) $(\alpha a) * b = a * (\alpha b) = \alpha(a * b)$.

Para simplificar a notação, omitiremos o símbolo $*$ e denotaremos $a * b$ por ab. Também por simplicidade, diremos apenas que A é uma álgebra.

Uma álgebra A é dita:

- *associativa*, se $(ab)c = a(bc)$, para quaisquer a, b, $c \in A$;
- *comutativa*, se $ab = ba$, para quaisquer a, $b \in A$;
- *com unidade*, se existe $1 \in A$ tal que $1a = a1 = a$, para todo $a \in A$.

Antes de apresentar alguns exemplos, vejamos a noção óbvia de subálgebra. Uma subálgebra de A nada mais é do que um subconjunto com a estrutura de álgebra herdada de A.

Definição 1.1.2. *Seja A uma álgebra. Um subespaço vetorial B de A é uma* subálgebra*, se é fechado com respeito ao produto de A, ou seja, $BB \subseteq B$. Se A tem unidade 1, exigimos também que $1 \in B$. Um subespaço vetorial I de A é um* ideal*, se $AI \subseteq I$ e $IA \subseteq I$.*

Exemplo 1.1.3. *O espaço vetorial $M_n(\mathbb{K})$ das matrizes de ordem n com entradas em $\mathbb{K}$ com o produto dado pelo produto usual de matrizes é uma álgebra associativa com unidade.*

Exemplo 1.1.4. *O conjunto $U_n(\mathbb{K})$ das matrizes triangulares superiores de ordem n é uma subálgebra de $M_n(\mathbb{K})$.*

Exemplo 1.1.5. *O espaço vetorial dos polinômios nas n variáveis x_1, ..., x_n, $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, é uma álgebra associativa e comutativa.*

Exemplo 1.1.6. *O espaço vetorial dos polinômios não comutativos em n variáveis $\mathbb{K}\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ é uma álgebra associativa.*

Exemplo 1.1.7. *Seja V um espaço vetorial de dimensão infinita com base $\{e_1, e_2, e_3, \ldots\}$. Definimos a* álgebra de Grassmann ou álgebra exterior de V*, denotada por $E = E(V)$, como sendo a álgebra associativa com base*

$$\{1, e_{i_1}e_{i_2}\ldots e_{i_k} : i_1 < i_2 < \cdots < i_k, k \geq 1\},$$

cujo produto satisfaz, para quaisquer $i, j > 0$,

$$e_i^2 = 0 \text{ e } e_ie_j = -e_je_i.$$

Se char$(\mathbb{K}) = 2$, então a álgebra de Grassmann é comutativa.

Ao longo deste texto, estamos interessados em um tipo especial de álgebra ainda não tratada anteriormente.

Definição 1.1.8. *Seja L uma álgebra. Dizemos que L é uma* álgebra de Lie *, se satisfaz, para todo $a, b, c \in L$:*

$$aa = 0; \tag{1.1.1}$$

$$(ab)c + (bc)a + (ca)b = 0. \tag{1.1.2}$$

As relações (1.1.1) e (1.1.2) são chamadas de *anticomutatividade* e *identidade de Jacobi*, respectivamente. Note que se char$(\mathbb{K}) \neq 2$, (1.1.1) é equivalente a

$$ab = -ba. \tag{1.1.3}$$

Se L é uma álgebra de Lie, L não é necessariamente associativa, já que $(aa)b = 0$ e no entanto $a(ab)$ nem sempre se anula. Pela identidade de Jacobi,

L é associativa se, e somente se, o produto de três elementos de L é igual a zero.

Ademais, segue imediatamente da anticomutatividade que se $L \neq 0$, L não possui unidade.

Exemplo 1.1.9. *O espaço vetorial* $\mathbb{R}^3$ *com o produto vetorial usual* $\times$ *é uma álgebra de Lie.*

Exemplo 1.1.10. *Seja* A *uma álgebra associativa. Denote por* $A^{(-)}$ *o espaço vetorial* A *munido com o produto* $[a, b] = ab - ba$. *É possível verificar facilmente que* $A^{(-)}$ *é uma álgebra de Lie.*

Exemplo 1.1.11. *A álgebra* $sl_n(\mathbb{K})$ *das matrizes de ordem* n *com traço* 0 *munida do produto* $[a, b] = ab - ba$ *é uma subálgebra de Lie de* $M_n(\mathbb{K})^{(-)}$.

Note que $sl_n(\mathbb{K})$ *com o produto usual de matrizes não é uma subálgebra de* $M_n(\mathbb{K})$, *já que o produto (usual) de matrizes de traço zero pode não ser uma matriz de traço zero.*

A noção de homomorfismo de álgebras é natural: uma transformação linear que preserva o produto.

Definição 1.1.12. *Sejam* A *e* B *álgebras. Uma transformação linear* $\varphi : A \longrightarrow B$ *é um* homomorfismo *de álgebras, se para todo* a, $b \in A$

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$$

(e $\varphi(1_A) = 1_B$, *se as álgebras são unitárias).*

Se $\varphi : A \longrightarrow B$ é um homomorfismo injetivo, dizemos que φ é um *monomorfismo* e se é sobrejetivo, dizemos que é um *epimorfismo*. Ainda, se φ é um homomorfismo biunívoco, φ é um *isomorfismo*. Neste último caso, dizemos que A e B são álgebras isomorfas e denotamos $A \cong B$. Um homomorfismo $\varphi : A \longrightarrow A$ é dito um *endomorfismo*. Se além disso é bijetor, é denominado um *automorfismo*.

Definição 1.1.13. *Uma álgebra associativa* U *é uma* álgebra universal envolvente *de uma álgebra de Lie* L, *se* L *é uma subálgebra de* $U^{(-)}$ *e* U *satisfaz a seguinte propriedade universal: para qualquer álgebra associativa* B *e qualquer homomorfismo de álgebras de Lie* $\varphi : L \longrightarrow B^{(-)}$, *existe um único homomorfismo de álgebras associativas* $\psi : U \longrightarrow B$ *que estende* φ, *isto é,* $\psi|_L = \varphi$. *Em geral, exige-se* $1 \in B$ *e* $1 \in U(L)$.

O resultado a seguir, de natureza combinatória, fornece uma base para a álgebra universal envolvente em função da base da álgebra de Lie.

Teorema 1.1.14 (Poincaré-Birkhoff-Witt)**.** *Toda álgebra de Lie* L *sobre um corpo* $\mathbb{K}$ *possui, a menos de isomorfismo, uma única álgebra universal envolvente* $U(L)$. *Se* $\{e_i : i \in I\}$ *é uma base de* L *ordenada por uma ordem no conjunto de índices* I, *então os elementos do tipo*

$$e_{i_1} \dots e_{i_k} \text{ com } i_1 \leq \dots \leq i_k$$

e 1 *formam uma base de* $U(L)$.

Se $\varphi : A \longrightarrow B$ é um homomorfismo de álgebras, o conjunto

$$\mathrm{Nuc}(\varphi) = \{a \in A : \varphi(a) = 0\},$$

chamado *núcleo* de φ, é um ideal de A, e o conjunto

$$\mathrm{Im}(\varphi) = \{\varphi(a) : a \in A\},$$

chamado *imagem* de A, é uma subálgebra de B.

Definição 1.1.15. *Seja A uma álgebra e I um ideal de A. O espaço vetorial quociente $\dfrac{A}{I}$ munido do produto*

$$(a+I)(b+I) = ab + I, \text{ para todo } a, b \in A,$$

faz de $\dfrac{A}{I}$ uma álgebra, chamada de álgebra quociente de A por I.

Um fato bem conhecido é o Teorema do isomorfismo: se $\varphi : A \longrightarrow B$ é um homomorfismo de álgebras, então

$$\frac{A}{\mathrm{Nuc}(\varphi)} \cong \mathrm{Im}(\varphi).$$

Graduar uma álgebra consiste em quebrá-la em subespaços dotados de um peso. A ideia é que os pesos se somem quando multiplicamos os elementos.

Definição 1.1.16. *Seja G um grupo abeliano aditivo. Uma álgebra A é G-*graduada*, se existe uma família de subespaços $\{A_g : g \in G\}$ de A tal que*

$$A = \bigoplus_{g\in G} A_g,$$

com $A_g A_h \subseteq A_{g+h}$, para todo $g, h \in G$.

Um elemento $a \in \bigcup_{g\in G} A_g$ é chamado elemento homogêneo*. Se $a \in A_g$, dizemos que a é* homogêneo de grau g.

A condição do grupo ser abeliano é apenas uma questão de conveniência. Ressaltamos que no caso das álgebras de Lie torna-se necessário considerar graduações com grupos abelianos devido a anticomutatividade do produto. Em outras palavras, se G é um grupo multiplicativo, L uma álgebra de Lie e se $a \in L_g$, $b \in L_h$, então $ab = -ba \in L_{gh} \cap L_{hg}$. Logo, $L_{gh} = L_{hg}$ e disso, $gh = hg$ (ou o produto de a por b é trivial). Portanto, no caso das álgebras de Lie graduadas por um grupo G, consideramos exclusivamente G abeliano.

Definição 1.1.17. *Um subespaço B de uma álgebra G-graduada A é G-graduado, se é soma direta das interseções $B \cap A_g$.*

As próximas proposições podem ser verificadas facilmente.

Proposição 1.1.18. *Sejam A uma álgebra G-graduada e B uma subálgebra de A. São equivalentes:*

(i) B é subálgebra G-graduada de A;

(ii) B é uma álgebra G-graduada tal que, para todo $g \in G$, $B_g \subseteq A_g$;

(iii) As componentes homogêneas de cada elemento de B pertencem a B;

(iv) B é gerado por elementos homogêneos.

Proposição 1.1.19. *Se I é um ideal G-graduado de uma álgebra A, então $\dfrac{A}{I}$ é uma álgebra G-graduada considerando $\left(\dfrac{A}{I}\right)_g = \{a + I \ : \ a \in A_g\}$.*

O conceito de homomorfismo se estende para álgebras graduadas.

Definição 1.1.20. *Sejam A e B duas álgebras G-graduadas. Um homomorfismo $\varphi : A \longrightarrow B$ é G-graduado se, para todo $g \in G$, $\varphi(A_g) \subseteq B_g$.*

De forma análoga, define-se monomorfismo, epimorfismo, isomorfismo, automorfismo e endomorfismo G-graduado.

Exemplo 1.1.21. *Toda álgebra A admite a seguinte graduação sobre um grupo G qualquer: $A_0 = A$ e $A_g = 0$, para todo $g \in G - \{0\}$. Por este motivo, essa graduação é chamada* graduação trivial *de A.*

Exemplo 1.1.22. *A álgebra de polinômios $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_k]$ é $\mathbb{Z}$-graduada, assumindo que os polinômios homogêneos de grau k geram as componentes homogêneas de grau k, se $k \geq 0$, e as demais componentes são nulas. Analogamente, $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_k]$ é $\mathbb{Z}^k$-graduada, contando o grau de cada variável $x_1, \ldots, x_k$ nos monômios. Neste caso, a componente homogênea da graduação é chamada de componente multihomogênea e o o grau $(n_1, \ldots, n_k)$ é chamado multigrau. De forma similar, define-se $\mathbb{Z}$-graduação e $\mathbb{Z}^k$-graduação para $\mathbb{K}\langle x_1, \ldots, x_k\rangle$.*

Exemplo 1.1.23. *A álgebra de Grassmann E definida no Exemplo 1.1.7 possui uma $\mathbb{Z}_2$-graduação natural*

$$E = E_0 \oplus E_1,$$

em que

$$E_0 = span\{1,\, e_{i_1}e_{i_2}\ldots e_{i_{2k}} \ : \ i_1 < i_2 < \cdots < i_{2k}, k \geq 1\},$$
$$E_1 = span\{e_{i_1}e_{i_2}\ldots e_{i_{2k+1}} \ : \ i_1 < i_2 < \cdots < i_{2k+1}, k \geq 1\}.$$

A matriz elementar $e_{ij} \in M_n(\mathbb{K})$ é a matriz cuja entrada (i, j) é igual a 1 e as demais são iguais a 0.

Exemplo 1.1.24. *A álgebra de matrizes $M_n(\mathbb{K})$ possui uma $\mathbb{Z}_n$-graduação*

$$M_n(\mathbb{K}) = \bigoplus_{t \in \mathbb{Z}_n} M_n(\mathbb{K})_t,$$

em que $M_n(\mathbb{K})_t = span\{e_{ij} \ : \ j - i \equiv t \ (mod\ n)\ \}$.

Uma mesma álgebra pode ser munida de várias graduações, todas distintas da graduação trivial. A seguir, um exemplo que será útil nos capítulos seguintes.

Exemplo 1.1.25. *Seja*

$$h = e_{11} - e_{22}, \quad e = e_{12}, \quad f = e_{21}$$

a base usual da álgebra de Lie $L = sl_2(\mathbb{K})$.

- $G = \mathbb{Z}_2 : \quad L = L_0 \oplus L_1$,
  $L_0 = span\{h\}$, $L_1 = span\{e, f\}$;
- $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 : \quad L = L_{(0,0)} \oplus L_{(1,0)} \oplus L_{(0,1)} \oplus L_{(1,1)}$,
  $L_{(0,0)} = 0$, $L_{(1,0)} = span\{h\}$, $L_{(0,1)} = span\{e + f\}$, $L_{(1,1)} = span\{e - f\}$);
- $G = \mathbb{Z}; \quad L = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} L_i$,
  $L_{-1} = span\{e\}$, $L_0 = span\{h\}$, $L_1 = span\{f\}$, $L_i = 0$, $i \notin \{-1, 0, 1\}$.

No exemplo anterior, a álgebra de Lie $sl_2(\mathbb{K})$ quando munida da $\mathbb{Z}$-graduação efetivamente possui apenas três componentes: $sl_2(\mathbb{K})_{-1}$, $sl_2(\mathbb{K})_0$ e $sl_2(\mathbb{K})_1$. Isso nos leva a próxima definição.

Definição 1.1.26. *Seja A uma álgebra G-graduada. O* suporte *da G-graduação de A é o conjunto*

$$Supp(A) = \{g \in G \, : \, A_g \neq 0\}.$$

1.2 Álgebras livres

Seja $\mathfrak{V}$ uma classe de álgebras. Uma álgebra F de $\mathfrak{V}$ gerada por um conjunto X é uma *álgebra livre* nesta classe, se todo homomorfismo de F em uma álgebra A de $\mathfrak{V}$ fica completamente determinado pelas imagens dos elementos de X. Essa propriedade é chamada propriedade universal das álgebras livres e garante, a menos de isomorfismo, a unicidade da álgebra livre, fixada a cardinalidade do conjunto X. Por exemplo, $\mathbb{K}[X]$ é a álgebra livre gerada por X na classe das álgebras associativas e comutativas.

Partiremos da classe mais ampla possível: a classe de todas as álgebras. Para evitar ambiguidades, o adjetivo "não associativo"será sempre ressaltado. Maiores detalhes podem ser encontrados em [33].

Seja $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ um conjunto enumerável o qual chamamos conjunto de variáveis. Muitas vezes iremos usar outros símbolos, como por exemplo z, y, y_i, z_j para os elementos de X. A esse conjunto, adicionamos dois símbolos "("e ")", obtendo assim o conjunto $X^* = X \cup \{(,)\}$. Definimos indutivamente um conjunto $V[X]$ de sequências finitas de X^* que chamaremos de palavras não associativas (ou monômios não associativos) de elementos de X. Um monômio não associativo de grau 1 é um elemento de X. Dado um número natural $n > 1$, um monômio não associativo de grau n é uma expressão da forma $(u)(v)$, em que u é um monômio não associativo de grau i e v um monômio não associativo de grau $n - i$. Para simplificar a notação, não vamos escrever parênteses na expressão $(u)(v)$, em torno de u (de v), se u (se v) é um monômio de grau 1. O grau de um monômio v será denotado por $\deg(v)$. Disso, é natural definir

$$\deg((u)(v)) = \deg(u) + \deg(v).$$

Proposição 1.2.1. *Seja v uma palavra não associativa de elementos de X. Então:*

1. *O número de símbolos "("que aparece em v é igual ao número de símbolos ")";*

2. *Em qualquer subsequência inicial de v o número de símbolos "("que aparece não é menor que o número de símbolos ")".*

Demonstração. Veja [33], pg. 2, Proposição 1. □

No conjunto $V[X]$ definimos uma operação binária, denotada por $\cdot$, satisfazendo, para todo $x_1, x_2 \in X$ e $u, v \in V[X] - X$:

- $x_1 \cdot x_2 = x_1 x_2$;
- $x_1 \cdot u = x_1(u)$;
- $v \cdot x_2 = (v)x_2$;
- $u \cdot v = (u)(v)$.

Proposição 1.2.2. *Toda palavra não associativa v com $deg(v) \geq 2$ tem uma única representação como produto de duas palavras não associativas de grau menor.*

Demonstração. Veja [33], pg. 2, Proposição 2. □

Denotamos por $\mathbb{K}\{X\}$ o espaço vetorial com base no conjunto $V[X]$. Considere o produto em $\mathbb{K}\{X\}$ dado pela extensão natural do produto $\cdot$ em $V[X]$. Munido deste produto, não é difícil ver que $\mathbb{K}\{X\}$ é a *álgebra não associativa livre gerada por X*.

Os elementos de $\mathbb{K}\{X\}$ são chamamos *polinômios não associativos*. Um polinômio não associativo da forma αv com $\alpha \in \mathbb{K}$ e $v \in V[X]$ é dito um *monômio não associativo*.

Seja G um grupo abeliano enumerável. Se escrevemos o conjunto de variáveis X como sendo uma união disjunta de conjuntos infinitos $X^{(g)} = \{x_i^{(g)} \,:\, i \geq 1\}$ com $g \in G$, mais precisamente,

$$X = \bigcup_{g \in G} X^{(g)},$$

a álgebra não associativa livre $\mathbb{K}\{X\}$ possui uma G-graduação natural. Se $x \in X^{(g)}$, definimos o grau de x (com respeito a graduação) como sendo g. O grau do monômio $\alpha(u)(v)$ com $\alpha \in \mathbb{K}$ e $u, v \in V[X]$, é a soma dos graus de u com v. Pela Proposição 1.2.2, isso define o grau de um monômio qualquer. Assim, se denotamos por $\mathbb{K}\{X\}_g$ o subespaço de $\mathbb{K}\{X\}$ gerado pelo monômios de grau g, tem-se que

$$\mathbb{K}\{X\} = \bigoplus_{g \in G} \mathbb{K}\{X\}_g$$

é uma G-graduação para $\mathbb{K}\{X\}$. Dotada dessa graduação, a álgebra $\mathbb{K}\{X\}$ é chamada *álgebra não associativa livre G-graduada*.

1.3 Identidades graduadas, T_G-ideais e variedades

Nesta seção, introduzimos a noção de identidades polinomiais, T_G-ideais, PI-álgebras G-graduadas e variedades graduadas dentro do ambiente dos polinômios não associativos, visto na seção anterior.

Definição 1.3.1. *Seja A uma álgebra G-graduada. Um polinômio não associativo $f = f(x_1^{(g_1)}, \ldots, x_n^{(g_n)}) \in \mathbb{K}\{X\}$ é uma* identidade polinomial graduada de A *se, para todo elemento homogêneo $a_i \in A_{g_i}$, com $i \in \{1, \ldots, n\}$, tem-se que*

$$f(a_1, \ldots, a_n) = 0.$$

Em outras palavras, f é uma identidade graduada de A, se f se anula em toda avaliação de elementos de A que respeita a graduação.

Usualmente, dizemos que $f \equiv 0$ é uma identidade polinomial de A, ou ainda, que A satisfaz $f \equiv 0$. Se ϕ denota o conjunto de todos os homomorfismos G-graduados $\varphi : \mathbb{K}\{X\} \longrightarrow A$, é fácil ver que f é uma identidade polinomial G-graduada se, e somente se, $f \in \bigcap_{\varphi \in \phi} \mathrm{Nuc}(\varphi)$.

Em particular, se a graduação é trivial, temos a noção de identidade polinomial ordinária que se reduz a seguinte:

Definição 1.3.2. *Seja A uma álgebra. Um polinômio $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}\{X\}$ é uma* identidade polinomial de A *se, para quaisquer $a_1, \ldots, a_n \in A$,*

$$f(a_1, \ldots, a_n) = 0.$$

Uma vez que toda álgebra G-graduada satisfaz o polinômio nulo $f = 0$, temos a seguinte definição:

Definição 1.3.3. *Uma álgebra G-graduada A é uma* PI-álgebra G-graduada *("PI"= "Polynomial Identity"), se satisfaz uma identidade polinomial não trivial (i.e., uma f não nula em $\mathbb{K}\{X\}$). Se a graduação é trivial, dizemos simplesmente que A é uma* PI-álgebra.

Exemplo 1.3.4. *No ambiente das álgebras não associativas, toda álgebra associativa é uma PI-álgebra (satisfaz a identidade $(x_1x_2)x_3 - x_1(x_2x_3) \equiv 0$), assim como toda álgebra de Lie (satisfaz $x_1x_1 \equiv 0$ e $(x_1x_2)x_3 + (x_2x_3)x_1 + (x_3x_1)x_2 \equiv 0$).*

Dada uma álgebra G-graduada A, definimos

$$\mathrm{Id}^G(A) = \{f \in \mathbb{K}\{X\} \ : \ f \equiv 0 \text{ em } A\}$$

como sendo o conjunto de todas as identidades polinomiais G-graduadas de A. É fácil ver que $\mathrm{Id}^G(A)$ é um T_G-ideal de $\mathbb{K}\{X\}$, ou seja, é um ideal invariante por endomorfismos G-graduados de $\mathbb{K}\{X\}$. Dizemos que $\mathrm{Id}^G(A)$ é o *T_G-ideal de A*. Se a graduação é trivial, denotamos $\mathrm{Id}^G(A)$ simplesmente por $\mathrm{Id}(A)$ e, neste caso, dizemos que $\mathrm{Id}(A)$ é o *T-ideal de A*.

Dado um conjunto $S \subseteq \mathbb{K}\{X\}$, o T_G-ideal gerado por S, denotado por $\langle S \rangle^{T_G}$, é a interseção de todos os T_G-ideais de $\mathbb{K}\{X\}$ que contêm S. Se $S \subseteq \mathrm{Id}^G(A)$ é tal que $\mathrm{Id}^G(A) = \langle S \rangle^{T_G}$, dizemos que S é uma *base das identidades polinomiais G-graduadas de A* .

Toda álgebra G-graduada A determina um T_G-ideal. Por outro lado, duas álgebras distintas (não isomorfas) podem possuir o mesmo T_G-ideal de $\mathbb{K}\{X\}$. A fim de estabelecer uma correspondência biunívoca, necessitamos do conceito de variedade de álgebras.

Definição 1.3.5. *Seja $S = \{f_i : i \in I\}$ um subconjunto de $\mathbb{K}\{X\}$. A classe $\mathfrak{V}$ das álgebras que satisfazem todas as identidades G-graduadas de S é chamada de* variedade *das álgebras definidas pelas identidades de S. Uma variedade $\mathfrak{W}$ é dita uma* subvariedade *de $\mathfrak{V}$, se $\mathfrak{W} \subseteq \mathfrak{V}$.*

A variedade que consiste somente da álgebra nula é chamada *variedade trivial*.

Exemplo 1.3.6. *Temos que:*

- *O conjunto $S_1 = \{f(x_1, x_2, x_3) = (x_1x_2)x_3 - x_1(x_2x_3)\}$ define a variedade das álgebras associativas.*
- *O conjunto $S_2 = S_1 \cup \{g(x_1, x_2) = x_1x_2 - x_2x_1\}$ define a variedade das álgebras associativas e comutativas.*
- *O conjunto $S = \{f(x_1) = x_1x_1,\ g(x_1, x_2, x_3) = (x_1x_2)x_3 + (x_2x_3)x_1 + (x_3x_1)x_2\}$ define a variedade das álgebras de Lie.*

O conjunto das identidades satisfeitas por todas as álgebras de uma variedade $\mathfrak{V}$ é também um T_G-ideal de $\mathbb{K}\{X\}$ e é denotado por $\mathrm{Id}^G(\mathfrak{V})$. Se $S \subseteq \mathbb{K}\{X\}$ define a variedade $\mathfrak{V}$, dizemos que S é uma *base das identidades polinomiais graduadas de* $\mathfrak{V}$. Os elementos de $\mathrm{Id}^G(\mathfrak{V})$ são chamados consequências das identidades polinomiais graduadas da base S.

Definição 1.3.7. *Uma álgebra $F_Y(\mathfrak{V})$ na variedade $\mathfrak{V}$ é chamada* álgebra relativamente livre de *$\mathfrak{V}$ gerada pelo conjunto Y, se $\mathfrak{V}$ é uma álgebra livre na classe $\mathfrak{V}$.*

Seja A uma álgebra G-graduada. Se $I \subseteq \mathbb{K}\{X\}$ denotamos por $I^G(A)$ o ideal G-graduado da álgebra A gerado por todos os elementos da forma

$$f(a_1, \ldots, a_n) \text{ com } f(x_1^{(g_1)}, \ldots, x_n^{(g_n)}) \in I \text{ e } a_i \in A_{g_i}, \text{ para todo } i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Teorema 1.3.8. *Seja $\mathfrak{V}$ uma variedade não trivial de álgebras cuja base é o conjunto $I \subseteq \mathbb{K}\{X\}$. Então, para todo conjunto Y, a restrição a Y do homomorfismo canônico $\sigma : \mathbb{K}\{Y\} \longrightarrow \dfrac{\mathbb{K}\{Y\}}{I^G(\mathbb{K}\{Y\})}$ é injetiva e*

$$F_{\sigma(Y)}(\mathfrak{V}) \cong \frac{\mathbb{K}\{Y\}}{I^G(\mathbb{K}\{Y\})}.$$

Além disso, quaisquer duas álgebras relativamente livres em $\mathfrak{V}$ geradas por conjuntos de mesma cardinalidade são isomorfas.

Demonstração. É análoga à feita em [33], pg. 4, Teorema 2. □

Corolário 1.3.9. *Se a variedade $\mathfrak{V}$ é determinada pelo conjunto I, então $Id^G(\mathfrak{V}) = I^G(\mathbb{K}\{X\})$. Em particular, se I é um T_G-ideal, $Id^G(\mathfrak{V}) = I$.*

Demonstração. É análoga à feita em [33], pg. 6, Corolário 1. □

Segue do corolário anterior que existe uma correspondência biunívoca entre os T_G-ideais de $\mathbb{K}\{X\}$ e as variedades de álgebras não associativas G-graduadas. Com efeito, dado um T_G-ideal I a ele associamos a variedade definida por I. Reciprocamente, cada variedade $\mathfrak{V}$ tem um correspondente T_G-ideal $\mathrm{Id}^G(\mathfrak{V})$.

Se $\mathfrak{V}$ é uma variedade e A é uma álgebra G-graduada tal que $\mathrm{Id}^G(A) = \mathrm{Id}^G(\mathfrak{V})$, dizemos que $\mathfrak{V}$ é a *variedade gerada por* A.

Denotamos por $\mathbb{K}\langle X\rangle$ a álgebra relativamente livre gerada por

$$X = \{x_i^{(g)} \ : \ i \geq 0,\, g \in G\}$$

da variedade das álgebras associativas G-graduadas e por $\mathcal{L}(X)$ a álgebra relativamente livre da variedade das álgebras de Lie G-graduadas. Segue dos resultados anteriores que se $Y = \{y_j^{(g)} \ : \ j \geq 0,\, g \in G\}$, então

$$\mathbb{K}\langle X\rangle \cong \frac{\mathbb{K}\{Y\}}{\langle (y_1y_2)y_3 - y_1(y_2y_3) \ : \ y_j \in Y^{(g)},\ \forall g \in G\rangle^{T_G}}$$

e

$$\mathcal{L}(X) \cong \frac{\mathbb{K}\{Y\}}{\langle y_1^2,\, (y_1y_2)y_3 + (y_2y_3)y_1 + (y_3y_1)y_2 \ : \ y_j \in Y^{(g)},\ \forall g \in G\rangle^{T_G}}.$$

Se $\mathfrak{W} \subseteq \mathfrak{V}$, então $\mathrm{Id}^G(\mathfrak{W}) \supseteq \mathrm{Id}^G(\mathfrak{V})$. Assim, podemos considerar as identidades polinomiais graduadas de $\mathfrak{W}$ módulo $\mathrm{Id}^G(\mathfrak{V})$. Portanto, se conhecemos as identidades polinomiais graduadas de $\mathfrak{V}$ e queremos estudar as identidades polinomiais graduadas de $\mathfrak{W}$, podemos trabalhar na álgebra relativamente livre $F(\mathfrak{V})$. Disso, se estamos interessados em subvariedades G-graduadas de álgebras associativas ou álgebras de Lie trabalhamos em $\mathbb{K}\langle X\rangle$ ou $\mathcal{L}(X)$, respectivamente, ao invés de $\mathbb{K}\{X\}$.

1.3.1 Identidades multihomogêneas e multilineares

A álgebra dos polinômios não associativos $\mathbb{K}\{x_1, \dots, x_n\}$ é $\mathbb{Z}$-graduada, assumindo que os polinômios homogêneos de grau n geram as componentes homogêneas de grau n, se $n \geq 0$, e as demais componentes são nulas. Analogamente, $\mathbb{K}\{x_1, \dots, x_n\}$ é $\mathbb{Z}^n$-graduada, contando o grau de cada variável $x_1, \dots, x_n$ nos monômios. Dado um polinômio não associativo $f = f(x_1, \dots, x_n)$ denotamos por $\deg_{x_i} f$ o grau de x_i em f. A componente homogênea da graduação é chamada de *componente multihomogênea* e o o grau $(k_1, \dots, k_n)$ é chamado *multigrau*.

Definição 1.3.10. *Um polinômio não associativo $f = f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}\{X\}$ é* multihomogêneo *se o é em $\mathbb{K}\{x_1, \dots, x_n\}$. Se o multigrau de f é $(1, \dots, 1)$, dizemos que f é* multilinear*.*

Proposição 1.3.11. *Seja*

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=0}^{m} f_i \in \mathbb{K}\{X\},$$

em que f_i é a componente homogênea de f de grau i em x_1.

(i) *Se o corpo* $\mathbb{K}$ *contém mais que* m *elementos, então* $f_i(x_1, \ldots, x_n) \in \langle f \rangle^{T_G}$*;*

(ii) *Se o corpo* $\mathbb{K}$ *tem característica* 0*, então* $\langle f \rangle^{T_G}$ *admite uma base composta por polinômios multilineares.*

Demonstração. Veja [6], pg. 39, Proposição 4.2.3. □

Corolário 1.3.12. *Seja* A *uma álgebra* G*-graduada sobre um corpo infinito.*

(i) *Se* f *é uma identidade polinomial graduada de* A*, então toda componente multihomogênea de* f *é uma identidade polinomial graduada de* A*.*

(ii) *Se o corpo* $\mathbb{K}$ *tem característica* 0*, então todo* T_G*-ideal é gerado por suas identidades multilineares graduadas.*

1.4 Codimensões e expoente graduado

Seja $\mathbb{K}$ um corpo de característica 0, $\mathcal{L}(X)$ a álgebra de Lie livre G-graduada gerada pelo conjunto $X = \{x_i^{(g)} \ : \ i \geq 1, \, g \in G\}$ e L uma PI-álgebra de Lie G-graduada sobre $\mathbb{K}$. Pelo Corolário 1.3.12, o T_G-ideal $\mathrm{Id}^G(L)$ é gerado pelas suas identidades graduadas multilineares. Uma vez que P_n^G denota o espaço dos polinômios multilineares de grau n nas variáveis $x_1^{(g_1)}, \ldots, x_n^{(g_n)}$ com g_1, …, $g_n \in G$, segue que $\mathrm{Id}^G(L)$ é gerado pelo subespaço

$$(P_1^G \cap \mathrm{Id}^G(L)) \oplus (P_2^G \cap \mathrm{Id}^G(L)) \oplus \cdots \oplus (P_n^G \cap \mathrm{Id}^G(L)) \oplus \cdots$$

na álgebra $\mathcal{L}(X)$. É imediato que se L satisfaz todas as identidades polinomiais graduadas de uma PI-álgebra G-graduada A, então

$$P_n^G \cap \mathrm{Id}^G(L) \supseteq P_n^G \cap \mathrm{Id}^G(A)$$

e disso

$$\dim(P_n^G \cap \mathrm{Id}^G(L)) \geq \dim(P_n^G \cap \mathrm{Id}^G(A)),$$

para todo $n = 1, 2, \ldots$. Portanto, a dimensão dos espaços $P_n^G \cap \mathrm{Id}^G(L)$ nos dá, em certo sentido, o crescimento das identidades G-graduadas da álgebra L. Como a interseção $P_n^G \cap \mathrm{Id}^G(L)$ costuma ser grande e difícil de estudar, trabalhamos com o quociente

$$P_n^G(L) = \frac{P_n^G}{P_n^G \cap \mathrm{Id}^G(L)}.$$

Definição 1.4.1. *O inteiro não negativo*

$$c_n^G(L) = \dim P_n^G(L) = \dim \frac{P_n^G}{P_n^G \cap Id^G(L)}$$

é chamado n-ésima codimensão G-graduada *da álgebra de Lie* L*.*

Se G é um grupo finito, não é difícil ver que

$$\dim P_n^G \cap \mathrm{Id}^G(L) = |G|^n (n-1)! - c_n^G(L),$$

em que $|G|$ é o número de elementos de G.

Se $\mathfrak{V}$ é uma variedade gerada por L, definimos $c_n^G(\mathfrak{V}) = c_n^G(L)$.

Vamos comparar a sequência de codimensões G-graduadas com a sequência de codimensões ordinárias (considerando a graduação trivial). Quando a graduação é trivial, denotamos P_n^G simplesmente por P_n e c_n^G por c_n.

Identificando $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_n$ com o polinômio $f(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) \in P_n^G$ temos que $P_n \subseteq P_n^G$ e

$$P_n \cap \mathrm{Id}^G(L) = P_n \cap \mathrm{Id}(L).$$

Lema 1.4.2. *Para todo $n \geq 1$, $c_n(L) \leq c_n^G(L)$.*

Demonstração. Veja [13], pg. 256, Lema 10.1.2. □

Se $c_n^G(L)$ é limitado exponencialmente, a sequência $\sqrt[n]{c_n^G(L)}$ é limitada. Neste caso, definimos o limite superior e inferior

$$\overline{\exp}^G(L) = \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n^G(L)} \quad \text{e} \quad \underline{\exp}^G(L) = \underline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n^G(L)}, \tag{1.4.1}$$

chamados de *expoente G-graduado superior* e *expoente G-graduado inferior*. Se eles coincidem, temos o limite usual

$$\exp^G(L) = \overline{\exp}^G(L) = \underline{\exp}^G(L) \tag{1.4.2}$$

chamado simplesmente de *expoente G-graduado*. Se $\mathfrak{V}$ é uma variedade gerada por L, definimos $\overline{\exp}^G(\mathfrak{V}) = \overline{\exp}^G(L)$, $\underline{\exp}^G(\mathfrak{V}) = \underline{\exp}^G(L)$ e $\exp^G(\mathfrak{V}) = \exp^G(L)$. Como de costume, quando a graduação é trivial, omitimos o "G"da notação e o adjetivo G-graduado(a) das denominações.

Se $G = \{0 = g_1, g_2, \ldots, g_s\}$ é um grupo finito, o estudo de $P_n^G(L)$ pode ser reduzido ao estudo de subespaços menores. Para todo $n \geq 1$, escreva $n = n_1 + \ldots + n_s$, uma soma de inteiros não negativos. Defina

$$P_{n_1,\ldots,n_s} \subseteq P_n^G$$

como sendo o subespaço dos polinômios graduados multilineares em que as n_1-primeiras variáveis são homogêneas de grau g_1, as n_2-próximas variáveis são homogêneas de grau g_2 e assim por diante, ou seja, se $f \in P_{n_1,\ldots,n_s}$, é da forma

$$f = f(x_1^{(g_1)}, \ldots, x_{n_1}^{(g_1)}, \ldots, x_1^{(g_s)}, \ldots, x_{n_s}^{(g_s)}).$$

Note que dados n_1, …, n_s existem $\binom{n}{n_1,\ldots,n_s}$ subespaços de P_n^G isomorfos a $P_{n_1,\ldots,n_s}$, em que

$$\binom{n}{n_1, \ldots, n_s} = \frac{n!}{n_1! \cdots n_s!}$$

denota o coeficiente multimonomial. É claro que P_n^G é a soma direta de tais subespaços com $n = n_1 + \cdots + n_s$. Além disso, tal decomposição é herdada por $P_{n_1,\ldots,n_s} \cap \mathrm{Id}^G(L)$.

Se definimos

$$P_{n_1,\ldots,n_s}(L) = \frac{P_{n_1,\ldots,n_s}}{P_{n_1,\ldots,n_s} \cap \mathrm{Id}^G(L)} \quad \text{e} \quad c_{n_1,\ldots,n_s}(L) = \dim P_{n_1,\ldots,n_s}(L),$$

obtemos

$$c_n^G(L) = \sum_{n_1+\ldots+n_s=n} \binom{n}{n_1,\ldots,n_s} c_{n_1,\ldots,n_s}(L). \tag{1.4.3}$$

1.5 Representações do grupo simétrico e do grupo geral linear

Nesta seção, fazemos um breve apanhado da teoria de representações do grupo simétrico e do grupo geral linear na teoria de PI-álgebras. Para uma abordagem mais detalhada da teoria de representações dos grupos citados sugerimos [18]. Um resumo um pouco completo daquele que damos aqui pode ser encontrado no capítulo 2 de [13] e no capítulo 12 de [6]. Estamos assumindo $\mathbb{K}$ um corpo de característica 0.

Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{K}$ e seja $GL(V)$ o grupo dos endomorfismos invertíveis de V.

Definição 1.5.1. *Uma* representação *de um grupo G (não abeliano em geral) em V é um homomorfismo de grupos $\rho : G \longrightarrow GL(V)$. A dimensão de ρ é a dimensão do espaço vetorial V.*

Denotamos por $\mathrm{End}(V)$ a álgebra dos $\mathbb{K}$-endomorfismos de V. Se $\mathbb{K}G$ é a álgebra de grupo de G sobre $\mathbb{K}$ e ρ é uma representação de G em V, segue que ρ induz um homomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras $\rho' : \mathbb{K}G \longrightarrow \mathrm{End}(V)$ tal que $\rho'(1_G) = 1$. Uma representação de um grupo G determina unicamente um $\mathbb{K}G$-módulo (ou G-módulo) de dimensão finita da seguinte forma. Se $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ é uma representação de G, V torna-se um G-módulo (à esquerda) definindo $gv = \rho(g)v$, para todo $g \in G$, $v \in V$. Reciprocamente, se M é um G-módulo que é ao mesmo tempo um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{K}$, então $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ tal que $\rho(g)(m) = gm$, para $g \in G$, $m \in M$, define uma representação de G em M.

Definição 1.5.2. *Uma representação $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ é* irredutível *se V é um G-módulo irredutível. Diz-se que ρ é* completamente redutível *se V é soma direta de submódulos irredutíveis.*

O conhecido Teorema de Maschke afirma que toda representação de dimensão finita de um grupo finito sobre um corpo $\mathbb{K}$ de característica 0 (ou $p > 0$ mas tal que p não divide $|G|$) é completamente redutível. Além disso, se $\mathbb{K}$ é algebricamente fechado, $\mathbb{K}G$ é semissimples. Como consequência do Teorema de Wedderburn e Artin,

$$\mathbb{K}G \cong M_{n_1}(D^{(1)}) \oplus \cdots \oplus M_{n_k}(D^{(k)}) \tag{1.5.1}$$

em que $D^{(1)}, \ldots, D^{(k)}$ são álgebras com divisão sobre $\mathbb{K}$ de dimensão finita.

Um elemento $e \in \mathbb{K}G$ é *idempotente* se $e^2 = e$. Como $\mathbb{K}G$ é semissimples, todo ideal à esquerda (resp. à direita) de $\mathbb{K}G$ é gerado por um idempotente. Dizemos que um idempotente é minimal se gera um ideal à esquerda (resp. à direita) minimal.

Proposição 1.5.3. *Se M é uma representação irredutível (de dimensão finita) de G, então $M \cong J_i$, em que J_i é um ideal à esquerda minimal de $M_{n_i}(D^{(i)})$, para algum $i \in \{1, \ldots, k\}$. Consequentemente, existe um idempotente minimal $e \in \mathbb{K}G$ tal que $M \cong \mathbb{K}Ge$.*

Demonstração. Veja [15], pg. 98, Lema 4.3.2 e pg. 29, Teorema 1.4.2. □

Uma ferramenta importante na teoria de representações é fornecida pela teoria de caracteres.

Definição 1.5.4. *Seja $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ uma representação e $tr : End(V) \longrightarrow \mathbb{K}$ a função traço. Então, a função*

$$\chi_\rho : G \longrightarrow \mathbb{K} \text{ em que } \chi_\rho(g) = tr(\rho(g))$$

é chamado de caracter *da representação ρ e $\dim V = deg\chi_\rho$ é chamado o* grau de χ_ρ. *Dizemos que o caracter χ_ρ é* irredutível*, se ρ é irredutível.*

1.5.1 Representações do grupo simétrico

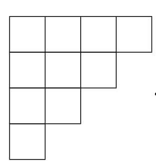
Definição 1.5.5. *Seja $n \geq 1$ um inteiro. Uma* partição *λ de n (em não mais que r partes) é uma r-upla de inteiros não negativos $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ tal que $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_r \geq 0$ e $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i = n$. Neste caso, escrevemos $\lambda \vdash n$.*

Identificamos duas partições, $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ e $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_s)$, $r \leq s$, se $\lambda_i = \mu_i$, para todo $1 \leq i \leq r$ e $\mu_i = 0$, caso contrário. Por exemplo, $\lambda = (4, 2, 1) = (4, 2, 1, 0) = (4, 2, 1, 0, 0) \vdash 7$.

Definição 1.5.6. *Se $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \vdash n$, o* diagrama de Young *associado a λ é o subconjunto finito de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definido como*

$$[\lambda] = \{(i, j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \; : \; i = 1, \ldots, r, \; j = 1, \ldots, \lambda_i\}.$$

Usualmente para denotar um diagrama de Young desenhamos diagramas substituindo pontos por quadrados. Adotamos a seguinte convenção: a primeira coordenada i (índice das linhas) aumenta de cima para baixo e a segunda coordenada (índice das colunas) aumenta da esquerda para a direita. A i-ésima linha contém λ_i-quadrados. Por exemplo, o diagrama $[\lambda]$ associado a $\lambda = (4, 3, 2, 1) \vdash 10$ é representado por

$[\lambda] =$  .

Teorema 1.5.7. *Seja $\mathbb{K}$ um corpo de característica 0 e $n \geq 1$. Existe uma correspondência biunívoca entre os S_n-caracteres irredutíveis e as partições de n. Além disso, se $\{\chi_\lambda : \lambda \vdash n\}$ é o conjunto de todos os caracteres irredutíveis de S_n e $d_\lambda = \chi_\lambda(1)$ é o grau de χ_λ, $\lambda \vdash n$, então*

$$\mathbb{K}S_n = \bigoplus_{\lambda \vdash n} I_\lambda \cong \bigoplus_{\lambda \vdash n} M_{d_\lambda}(\mathbb{K}),$$

em que $I_\lambda \cong M_{d_\lambda}(\mathbb{K})$ é o ideal bilateral de $\mathbb{K}S_n$ associado a λ.

Demonstração. Veja [18], pg. 109, Teorema 3.1.24. □

Observamos aqui que as representações de S_n sobre os racionais são absolutamente irredutíveis. Em outras palavras, elas permanecem irredutíveis sob extensões de corpos.

Para uma partição $\lambda \vdash n$, denotamos por λ' a *partição conjugada* de λ; $\lambda' = (\lambda'_1, \ldots, \lambda'_s)$ é uma partição tal que $\lambda'_1, \ldots, \lambda'_s$ são as alturas das colunas de $[\lambda]$. O diagrama $[\lambda']$ é obtido de $[\lambda]$ através de uma reflexão de $[\lambda]$ em torno da diagonal principal.

Definição 1.5.8. *Para cada $(i, j) \in [\lambda]$, definimos o* número de hook *de (i, j) como*

$$h_{ij} = \lambda_i + \lambda'_j - i - j + 1,$$

em que $\lambda' = (\lambda'_1, \ldots, \lambda'_s)$ é a partição conjugada de λ.

Note que h_{ij} conta o número de quadrados do "gancho"com aresta em (i, j), ou seja, os quadrados a direita e abaixo de (i, j). No exemplo a seguir, escrevemos dentro de cada quadrado o número de hook (gancho) correspondente:

6	4	3	1
4	2	1	
1			

Definição 1.5.9. *Seja $\lambda \vdash n$. Uma* tabela de Young T_λ *do diagrama $[\lambda]$ consiste em preencher os quadrados do diagrama com os números 1, ..., n. Dizemos que T_λ é uma tabela de forma λ.*

Definição 1.5.10. *Uma tabela T_λ de forma λ é* standard, *se os inteiros em cada linha e em cada coluna de T_λ crescem da direita para a esquerda e de cima para baixo, respectivamente.*

O grau dos S_n-caracteres irredutíveis pode ser obtido de duas formas.

Teorema 1.5.11. *Seja λ uma partição de n.*

(i) O grau d_λ do S_n-caracter irredutível correspondente a λ é igual ao número de tabelas standard de forma λ.

(ii) (Hook fórmula ou fórmula dos ganchos)

$$d_\lambda = \frac{n!}{\prod_{i,j} h_{ij}},$$

em que o produto percorre todos os quadrados do diagrama $[\lambda]$.

Demonstração. Veja [18], pg. 107, Corolário 3.1.13 (item (i)) e pg. 56, Teorema 2.3.21 (item (ii)). $\square$

Definição 1.5.12. *O* estabilizador de linhas R_{T_λ} *de* T_λ *é o subgrupo de* S_n *que consiste de todas as permutações que fixam, como conjunto, as entradas das linhas de* T_λ*. Similarmente, o* estabilizador de colunas C_{T_λ} *é o subgrupo de* S_n *que fixa as colunas.*

Por exemplo, se

$$T_{(2,2)} = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline \end{array},$$

então $R_{T_{(3,2)}} = \langle(12)\rangle \times \langle(34)\rangle$ e $C_{T_{(3,2)}} = \langle(13)\rangle \times \langle(24)\rangle$.

Definição 1.5.13. *Para uma dada tabela* T_λ*, defina*

$$e_{T_\lambda} = \sum_{\sigma \in R_{T_\lambda}} \sum_{\tau \in C_{T_\lambda}} (sign\ \tau)\sigma\tau,$$

em que sign τ *é o sinal da permutação* τ*.*

O teorema a seguir descreve, a menos de isomorfismo, as representações irredutíveis de S_n

Teorema 1.5.14. *Para toda tabela* T_λ *de forma* $\lambda \vdash n$*, o elemento* e_{T_λ} *é múltiplo escalar de um idempotente minimal de* $\mathbb{K}S_n$ *e* $\mathbb{K}S_n e_{T_\lambda}$ *é o ideal minimal à esquerda com caracter* χ_λ*. Além disso, se* $\mu \vdash n$*, então*

$$\mathbb{K}S_n e_{T_\lambda} \cong \mathbb{K}S_n e_{T_\mu} \text{ se, e somente se, } \lambda = \mu.$$

Dizemos que e_{T_λ} *é um* idempotente essencial *de* $\mathbb{K}S_n$ *(vale resaltar que* e_{T_λ} *não é um idempotente, é múltiplo escalar de um idempotente).*

Demonstração. Veja [18], pg. 106, Teorema 3.1.10. $\square$

Definição 1.5.15. *Para cada* $\lambda \vdash n$*, denotamos por* M_λ *o* S_n*-módulo irredutível associado a* λ*.*

Proposição 1.5.16. *Se* $T_1, \ldots, T_{d_\lambda}$ *são todas as tabelas standards de forma* λ*, então* I_λ*, o ideal minimal bilateral de* $\mathbb{K}S_n$ *associado a* λ*, possui a seguinte decomposição:*

$$I_\lambda = \bigoplus_{i=1}^{d_\lambda} \mathbb{K}S_n e_{T_i}.$$

Demonstração. Veja [18], pg. 109, Teorema 3.1.24. $\square$

1.5.2 S_n-ações nos polinômios multilineares P_n

Nesta seção, introduzimos uma ação do grupo simétrico S_n no espaço dos polinômios multilineares, em n variáveis fixadas, na álgebra de Lie $\mathcal{L}(X)$. Aqui, estamos considerando $\mathcal{L}(X)$ com a graduação trivial.

Seja P_n o espaço dos polinômios multilineares em $x_1, \ldots, x_n$ na álgebra de Lie livre $\mathcal{L}(X)$. Dado $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_n$ e $\sigma \in S_n$, definindo

$$\sigma f(x_1, \ldots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$$

temos que o espaço vetorial P_n tem uma estrutura de S_n-módulo. Uma vez que os T-ideais de $\mathcal{L}(X)$ são invariantes pela permutação de variáveis, $P_n \cap \mathrm{Id}(L)$ é um S_n-submódulo de P_n, para toda álgebra de Lie L. Portanto,

$$P_n(L) = \frac{P_n}{P_n \cap \mathrm{Id}(L)}$$

tem uma estrutura induzida de S_n-módulo à esquerda.

Definição 1.5.17. *Para $n \geq 1$, o S_n-caracter de $P_n(L)$ é chamado de n-*ésimo cocaracter *de L (ou do T-ideal Id(L)) e é denotado por $\chi_n(L)$.*

Se decompomos o n-ésimo caracter em irredutíveis, obtemos

$$\chi_n(L) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda, \tag{1.5.2}$$

em que χ_λ é o S_n-caracter associado a partição $\lambda \vdash n$ e $m_\lambda \geq 0$ é a correspondente multiplicidade.

O próximo teorema auxilia o cálculo do n-ésimo cocaracter.

Teorema 1.5.18. *Seja L uma PI-álgebra com o n-ésimo cocaracter $\chi_n(L)$ dado por 1.5.2. Para uma partição $\mu \vdash n$, a multiplicidade m_μ é igual a zero se, e somente se, para toda tabela T_μ de forma μ e para todo polinômio $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in P_n$, a álgebra de Lie L satisfaz a identidade $e_{T_\mu} f \equiv 0$.*

Demonstração. Veja [13], pg. 55, Teorema 2.4.5. □

Segue imediatamente do teorema anterior que se existem $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in P_n$, uma tabela T_λ de forma λ e $a_1, \ldots, a_n \in L$ tais que $e_{T_\mu} f(a_1, \ldots, a_n) \neq 0$, então $m_\lambda \neq 0$.

1.5.3 $S_{n_1} \times \cdots \times S_{n_s}$ ações nos polinômios multilineares $P_{n_1,\ldots,n_s}$

Como visto na seção 1.4, para cada $n \geq 0$, $n_1, \ldots, n_s \geq 0$ tal que $n = n_1 + \cdots + n_s$, $P_{n_1,\ldots,n_s}$ é o espaço dos polinômios multilineares de grau n nas variáveis

$$x_1^{(g_1)}, \ldots, x_{n_1}^{(g_1)}, \ldots, x_1^{(g_s)}, \ldots, x_{n_s}^{(g_s)},$$

$g_1, \ldots, g_s \in G$.

Como antes, o espaço $P_{n_1,\ldots,n_s}$ é naturalmente equipado com uma estrutura de $S_{n_1}\times\cdots\times S_{n_s}$-módulo quando munido da ação

$$(\sigma_1,\ldots,\sigma_s)f(x_1^{(g_1)},\ldots,x_{n_1}^{(g_1)},\ldots,x_1^{(g_s)},\ldots,x_{n_s}^{(g_s)}) = f(x_{\sigma_1(1)}^{(g_1)},\ldots,x_{\sigma_1(n_1)}^{(g_1)},\ldots,x_{\sigma_s(1)}^{(g_s)},\ldots,x_{\sigma_s(n_s)}^{(g_s)})$$

para todo $(\sigma_1,\ldots,\sigma_s)\in S_{n_1}\times\cdots\times S_{n_s}$ e $f(x_1^{(g_1)},\ldots,x_{n_1}^{(g_1)},\ldots,x_1^{(g_s)},\ldots,x_{n_s}^{(g_s)})$ em $P_{n_1,\ldots,n_s}$. Uma vez que os T_G-ideais são invariantes pela permutação de variáveis de uma mesma componente homogênea, $P_{n_1,\ldots,n_s}\cap \mathrm{Id}^G(L)$ é um $S_{n_1}\times\cdots\times S_{n_s}$-submódulo de $P_{n_1,\ldots,n_s}$ para toda álgebra de Lie G-graduada L. Disso,

$$P_{n_1,\ldots,n_s}(L) = \frac{P_{n_1,\ldots,n_s}}{P_{n_1,\ldots,n_s}\cap \mathrm{Id}^G(L)}$$

também tem uma estrutura induzida de $S_{n_1}\times\cdots\times S_{n_s}$-módulo à esquerda.

Definição 1.5.19. *Para $n\geq 1$, o $S_{n_1}\times\cdots\times S_{n_s}$-caracter de $P_{n_1,\ldots,n_s}(L)$ é chamado de $(n_1,\ldots,n_s)$-*cocaracter *de L (ou do T_G-ideal $Id^G(L)$) e é denotado por $\chi_{n_1,\ldots,n_s}(L)$.*

Decompondo o $(n_1,\ldots,n_s)$-cocaracter em soma de caracteres irredutíveis, obtemos

$$\chi_{n_1,\ldots,n_s}(L) = \sum_{\langle\lambda\rangle\vdash(n_1,\ldots,n_s)} m_{\langle\lambda\rangle}\chi_{\lambda(1)}\otimes\cdots\otimes\chi_{\lambda(s)}, \tag{1.5.3}$$

em que $\chi_{\lambda(1)}\otimes\cdots\otimes\chi_{\lambda(s)}$ é o $S_{n_1}\times\cdots\times S_{n_s}$-caracter associado a s-upla de partições $\langle\lambda\rangle = (\lambda(1),\ldots,\lambda(s))$ em que $\lambda(1)\vdash n_1$, …, $\lambda(s)\vdash n_s$ e $m_{\langle\lambda\rangle}\geq 0$ é a correspondente multiplicidade.

De forma análogo ao Teorema 1.5.18, o teorema a seguir auxilia no cálculo do $(n_1,\ldots,n_s)$-cocaracter.

Teorema 1.5.20. *Seja L uma PI-álgebra G-graduada com o $(n_1,\ldots,n_s)$-cocaracter $\chi_{n_1,\ldots,n_s}(L)$ dado por 1.5.3. Para uma s-upla de partições $\lambda(1)\vdash n_1$, …, $\lambda(s)\vdash n_s$, a multiplicidade $m_{\langle\lambda\rangle}$ é igual a zero se, e somente se, para toda s-upla de tabelas $T_{\lambda(1)},\ldots,T_{\lambda(s)}$ de forma $\lambda(1)$, …, $\lambda(s)$, respectivamente, e para todo polinômio $f = f(x_1^{(g_1)},\ldots,x_{n_1}^{(g_1)},\ldots,x_1^{(g_s)},\ldots,x_{n_s}^{(g_s)})\in P_{n_1,\ldots,n_s}$, a álgebra de Lie L satisfaz a identidade $e_{\langle\lambda\rangle}f\equiv 0$, em que $e_{\langle\lambda\rangle} = e_{\lambda(1)}\ldots e_{\lambda(s)}$.*

1.5.4 A ação do grupo geral linear GL_m

Esta subseção tem como base a seção 4 do capítulo 12 de [6]. As demonstrações não indicadas explicitamente no texto poderão ser encontradas no capítulo 8 de [18].

Dado um espaço vetorial W, o *grupo geral linear*, denotado por $GL(W)$, é o grupo das transformações lineares invertíveis de W. Quando $\dim W = m < \infty$, escrevemos

$$GL_m = GL_m(\mathbb{K}) = GL(W)$$

e identificamos GL_m com o grupo das matrizes invertíveis de ordem m com entradas em $\mathbb{K}$, fixada uma base.

Definição 1.5.21. *Seja ϕ uma representação do grupo geral linear GL_m, digamos*

$$\phi : GL_m \longrightarrow GL_s,$$

para algum s. A representação ϕ é dita polinomial *se as entradas $(\varphi(g))_{pq}$ da matriz $\varphi(g)$ de ordem s são polinômios nas entradas a_{kl} de g para $g \in GL_m$, k, $l = 1, \ldots, m$ e p, $q = 1, \ldots, s$. Uma representação polinomial φ é* homogênea de grau d *se os polinômios $(\varphi(g))_{pq}$ são homogêneos de grau d. Um GL_m-módulo W é polinomial, se a representação correspondente é polinomial. De forma análoga, definimos módulos polinomiais homogêneos.*

Fixemos o espaço vetorial V_m com base $\{x_1, \ldots, x_m\}$ e com a ação canônica de GL_m. Assumimos que

$$\mathcal{L}(V_m) = \mathcal{L}(x_1, \ldots, x_m)$$

é a álgebra de Lie livre gerada por $\{x_1, \ldots, x_m\}$. O espaço vetorial $\mathcal{L}(V_m)$ é um GL_m-módulo à esquerda quando munido da ação

$$gf(x_1, \ldots, x_n) = f(g(x_1), \ldots, g(x_n)),\ g \in GL_m,\ f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{L}(V_m).$$

Proposição 1.5.22. *(i) $\mathcal{L}(V_m)$ é a soma direta dos GL_m-submódulos $(\mathcal{L}(V_m))^{(n)}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ em que $(\mathcal{L}(V_m))^{(n)}$ é a componente homogênea de grau n de $\mathcal{L}(V_m)$;*

(ii) Para todo T-ideal U de $\mathcal{L}(X)$, os espaços vetoriais $U \cap \mathcal{L}(V_m)$ e $U \cap \mathcal{L}(V_m)^{(n)}$ são submódulos de $\mathcal{L}(V_m)$;

(iii) Todo submódulo W de $\mathcal{L}(V_m)$ é a soma direta de suas componentes homogêneas $W \cap \mathcal{L}(V_m)^{(n)}$.

Demonstração. Um esquema de uma prova análoga pode ser encontrado em [6], pg. 218, Exercício 12.4.2. □

Teorema 1.5.23. *(i) Toda representação polinomial de GL_m é soma direta de subrepresentações polinomiais homogêneas irredutíveis;*

(ii) Todo GL_m-módulo polinomial homogêneo irredutível de grau $n \geq 0$ é isomorfo a um submódulo de $(\mathcal{L}(V_m))^{(n)}$.

De forma similar às representações de S_n irredutíveis, as representações polinomiais homogêneas irredutíveis de grau n de GL_m são descritas pelas partições de n em não mais que m partes e pelos diagramas de Young.

Teorema 1.5.24. *(i) As GL_m-representações irredutíveis de grau $n \geq 0$, duas a duas não isomorfas, estão em correspondência biunívoca com as partições $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ de n. Denotamos por $W_m(\lambda)$ o GL_m-módulo irredutível correspondente a λ;*

(ii) Seja $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ uma partição de n. O GL_m-módulo $W_m(\lambda)$ é isomorfo a um submódulo de $(\mathcal{L}(V_m))^{(n)}$. Mais ainda, $(\mathcal{L}(V_m))^{(n)}$ pode ser escrito na forma

$$(\mathcal{L}(V_m))^{(n)} \cong \sum d_\lambda W_m(\lambda);$$

em que d_λ é a dimensão do S_n-módulo irredutível M_λ e a soma percorre todas as partições λ de n em não mais que m partes.

Uma representação de $GL_{m_1} \times \cdots \times GL_{m_s}$ é polinomial, se o é em cada GL_{m_i}, para cada $i \in \{1, \ldots, s\}$.

Como consequência, obtemos a descrição completa das representações irredutíveis de $GL_{m_1} \times \cdots \times GL_{m_s}$.

Teorema 1.5.25. *Fixados inteiros $n_1, \ldots, n_s > 0$, as representações polinomiais irredutíveis de $GL_{m_1} \times \cdots \times GL_{m_s}$, duas a duas não isomorfas, são da forma $W_m(\lambda_1) \otimes \cdots \otimes W_m(\lambda_s)$ com λ_i partição de n_i em não mais que m_i partes, para todo $i \in \{1, \ldots, s\}$.*

Existe uma estreita relação entre as representações polinomiais irredutíveis de $GL_{m_1} \times \cdots \times GL_{m_s}$ e as representações irredutíveis de $S_{n_1} \times \cdots \times S_{n_s}$. Para entender essa relação, podemos supor, sem perda da generalidade, $s = 1$.

A fim de estabelecer um análogo do Teorema 1.5.14, definimos a ação à direita de S_n em $\mathcal{L}(V_m)$ por

$$(x_{i_1} \cdots x_{i_n})\sigma^{-1} = x_{i_{\sigma(1)}} \cdots x_{i_{\sigma(n)}} \in (\mathcal{L}(V_m))^{(n)},\ \sigma \in S_n.$$

Por simplicidade, omitimos os parênteses do monômio, já que a ação não interfere na posição deles.

Note que a ação à esquerda de S_n em P_n é uma ação que permuta os índices das variáveis enquanto a ação à direita troca as posições das mesmas.

A proposição seguinte pode ser verificada sem muito esforço.

Proposição 1.5.26. *Munido da ação acima, $(\mathcal{L}(V_m))^{(n)}$ é um S_n-módulo à direita.*

Sejam $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ uma partição de n em não mais que m partes e q_1, …, q_k as alturas das colunas do diagrama $[\lambda]$ (i.e., $k = \lambda_1$ e $q_j = \lambda'_j$). Denotamos por $s_\lambda = s_\lambda(x_1, \ldots, x_q)$, $q = q_1$, o polinômio de $\mathcal{L}(V_m)$ definido por

$$s_\lambda(x_1, \ldots, x_q) = \prod_{j=1}^{k} s_{q_j}(x_1, \ldots, x_{q_j}), \tag{1.5.4}$$

em que $s_p(x_1, \ldots, x_p) = \sum(\text{sign } \sigma)x_1 x_{\sigma(2)} \ldots x_{\sigma(p)}$ com o somatório percorrendo todas as permutações σ do conjunto $\{2, \ldots, p\}$. Esse polinômio é chamado *polinômio standard de Lie.*

Teorema 1.5.27. *Seja $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ uma partição de n em não mais que m partes e seja $(\mathcal{L}(V_m))^{(n)}$ a componente homogênea de grau n em $\mathcal{L}(V_m)$.*

(i) O elemento $s_\lambda(x_1, \ldots, x_q)$, definido em 1.5.4, gera um GL_m-submódulo de $(\mathcal{L}(V_m))^{(n)}$ isomorfo a $W_m(\lambda)$;

(ii) Todo $W_m(\lambda) \subseteq (\mathcal{L}(V_m))^{(n)}$ é gerado por um elemento não nulo

$$w_\lambda(x_1, \ldots, x_q) = s_\lambda(x_1, \ldots, x_q) \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma \sigma,\ \alpha_\sigma \in \mathbb{K}.$$

O elemento $w_\lambda(x_1, \ldots, x_q)$ é chamado de vetor de peso máximo *de $W_m(\lambda)$, é único a menos de multiplicação por constante e está contido no espaço vetorial unidimensional dos elementos homogêneos de multigrau $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ em $W_m(\lambda)$;*

(iii) *Se os GL_m-submódulos W' e W'' de $(\mathcal{L}(V_m))^{(n)}$ são isomorfos a $W_m(\lambda)$ e possuem vetores de peso máximo w' e w'', respectivamente, então a função $\phi_\alpha : w' \longrightarrow \alpha w''$, $0 \neq \alpha \in \mathbb{K}$, pode ser estendido unicamente a um isomorfismo de GL_m-módulos. Todo isomorfismo $W' \cong W''$ é obtido dessa forma.*

Proposição 1.5.28. *Sejam $m \geq n$, $\lambda \vdash n$ e $W_m(\lambda) \subseteq \mathcal{L}(V_m)$. O conjunto $M = W_m(\lambda) \cap P_n$ de todos os elementos multilineares de $W_m(\lambda)$ é um S_n-submódulo de P_n isomorfo a M_λ. Todo submódulo M_λ de P_n pode ser obtido dessa forma.*

Demonstração. Uma prova análoga pode ser encontrado em [6], pg. 227, Proposição 12.4.18. □

Uma consequência da proposição anterior é que a linearização completa do vetor de peso máximo w_λ gera o S_n-módulo $W_m(\lambda) \cap P_n \cong M_\lambda$

1.6 Propriedade da base finita para conjuntos

Nesta seção, tratamos do conceito e de alguns resultados sobre a propriedade da base finita para conjuntos quaseordenados. O leitor interessado pode encontrar mais detalhes no trabalho de Higman [16].

Um conjunto quaseordenado é um conjunto não vazio munido de uma relação reflexiva e transitiva. Satisfazer a propriedade da base finita implica em todo subconjunto não vazio possuir uma coleção finita de elementos minimais. Tal propriedade, de certa forma, generaliza o conceito de boa ordem para conjuntos totalmente ordenados.

Definição 1.6.1. *Uma relação $\leq$ em um conjunto não vazio A é uma* quaseordem *se:*

(i) *$a \leq a$ (reflexividade);*

(ii) *Se $a \leq b$ e $b \leq c$ então $a \leq c$ (transitividade);*

para todo a, b, $c \in A$.

Neste caso, dizemos que A é um conjunto quaseordenado e denotamos $(A, \leq)$.

Se para todo $a, b \in A$, toda vez que $a \leq b$ e $b \leq a$ implicar em $a = b$ (antissimetria), a relação é chamada de *ordem parcial* e o conjunto A é dito *parcialmente ordenado*. Se além disso, quaisquer dois elementos do conjunto são comparáveis, ou seja, $a \leq b$ ou $b \leq a$, dizemos que a ordem é *total* e o conjunto é *totalmente ordenado*.

Exemplo 1.6.2. *O conjunto dos números inteiros não negativos $\mathbb{N}$ munido da ordem usual é totalmente ordenado.*

Seja B um subconjunto de um conjunto A munido de uma quaseordem $\leq$. O *fecho* de B é o conjunto

$$\overline{B} = \{a \in A \ : \ \text{existe} \ \ b \in B \text{ tal que } b \leq a\}.$$

Dizemos que B é fechado, se

$$\overline{B} = B.$$

Um conjunto quaseordenado $(A, \leq)$ tem a *propriedade da base finita*, se todo subconjunto fechado de A é fecho de um conjunto finito.

A seguir, apresentamos algumas definições alternativas dessa propriedade.

Teorema 1.6.3. *Seja $(A, \leq)$ um conjunto quaseordenado. São equivalentes:*

i) Todo subconjunto fechado de A é fecho de um conjunto finito;

ii) Toda cadeia ascendente de subconjuntos fechados de A estabiliza;

iii) Se B é um subconjunto de A, existe um conjunto finito B_0 tal que

$$B_0 \subseteq B \subseteq \overline{B_0};$$

iv) Toda sequência $\{a_i\}_{i \geq 0}$ de elementos de A possui uma subsequência

$$a_{i_1} \leq a_{i_2} \leq \cdots \leq a_{i_k} \leq \cdots ;$$

v) Se $\{a_i\}_{i \geq 0}$ é uma sequência de elementos de A, existem índices i, j com $i < j$ tais que $a_i \leq a_j$;

vi) Não existe uma sequência infinita de elementos estritamente decrescente, nem um conjunto infinito de elementos não comparáveis.

Demonstração. Veja [16], pg. 328, Teorema 2.1. □

Todo subconjunto B de um conjunto quaseordenado A que satisfaz uma das condições equivalentes acima, possui um número finito de elementos minimais, ou seja, existem b_1, b_2, ..., $b_k \in B$ tais que se para algum $1 \leq i \leq k$, existe $b \in B$ tal que $b \leq b_i$, então $b = b_i$. De fato, basta reduzir o conjunto finito B_0 do item *iii*) a um conjunto de elementos minimais.

Se $(A, \leq)$ é totalmente ordenado, então satisfaz a propriedade da base finita se, e somente se, é *bem ordenado* (ou seja, todo subconjunto não vazio possui um elemento minimal).

Se $(A, \leq)$ é parcialmente ordenado e satisfaz a propriedade da base finita, dizemos que $(A, \leq)$ é *parcialmente bem ordenado.*

A propriedade da base finita é preservada pelo produto cartesiano finito. Mais precisamente

Proposição 1.6.4. *Sejam $(A_1, \leq_{A_1})$ e $(A_2, \leq_{A_2})$ conjuntos quaseordenados. Se $\leq$ é a quaseordem em $A = A_1 \times A_2$ definida coordenada a coordenada (i.e., $(a_1, a_2) \leq (b_1, b_2)$ se, e somente se, $a_1 \leq_{A_1} b_1$ e $a_2 \leq_{A_2} b_2$). Se $(A_1, \leq_{A_1})$ e $(A_2, \leq_{A_2})$ satisfazem a propriedade da base finita, então $(A, \leq)$ também satisfaz.*

Indutivamente, se $(A_1, \leq_{A_1})$, ..., $(A_k, \leq_{A_k})$ são conjuntos quaseordenados e $\leq$ é a quaseordem em $A = A_1 \times \cdots \times A_k$ definida coordenada a coordenada, $(A, \leq)$ satisfaz a propriedade da base finita, se cada um dos conjuntos $(A_1, \leq_{A_1})$, ..., $(A_k, \leq_{A_k})$ satisfaz.

Exemplo 1.6.5. *O conjunto $(\mathbb{N}^k, \leq)$, em que $(a_1, \ldots, a_k) \leq (b_1, \ldots, b_k)$ se, e somente se, $a_1 \leq b_1$, ..., $a_k \leq b_k$, satisfaz a propriedade da base finita. Note que apesar de $\mathbb{N}$ ser um conjunto totalmente ordenado, não podemos afirmar o mesmo para $(\mathbb{N}^k, \leq)$.*

Exemplo 1.6.6. *Seja $m \in \mathbb{N}$. Defina a relação $\leq_m$ em $\mathbb{N}$ como segue:*

$$a_1 \leq_m a_2 \text{ se, e somente se, } a_1 \leq a_2 \text{ e } a_2 - a_1 \equiv 0 \text{ (mod } 2m\text{)}.$$

$(\mathbb{N}, \leq_m)$ satisfaz a propriedade da base finita. De fato, seja $\{a_i\}_{i \geq 0}$ uma sequência de elementos de $\mathbb{N}$. Podemos supor, sem perda da generalidade, que essa sequẽncia é não decrescente, ou seja, $a_1 \leq a_2 \leq \cdots$. Se para cada a_i associamos um r_i, em que $r_i \in \{0, 1, 2, \ldots, 2m-1\}$ é o resto da divisão de a_i por $2m$, existe uma subsequência $\{a_{i_j}\}_{j \geq 0}$ tal que $a_{i_1} \equiv a_{i_2} \equiv \cdots$ (mod 2m), e isso conclui a afirmação.

Capítulo 2

Propriedade de Specht das Identidades Graduadas de sl_2

Uma variedade $\mathfrak{V}$ em uma classe de álgebras (associativas, de Lie) tem a propriedade de Specht, se todas as subvariedades de $\mathfrak{V}$ podem ser definidas por um sistema finito de identidades polinomiais. Quando isso ocorre, dizemos também que o ideal das identidades de $\mathfrak{V}$ satisfaz a propriedade de Specht. Em 1987, Kemer provou que toda variedade de álgebras associativas sobre um corpo de característica 0 tem essa propriedade: o famoso problema de Specht. Se o corpo é infinito e de característica positiva, foram construídos contraexemplos, por Belov ([3]), Grishin ([14]) e Shchigolev ([28]). Para álgebras de Lie, pouco se sabe a respeito. Um resultado de Iltyakov afirma que o T-ideal de toda álgebra de Lie de dimensão finita é finitamente gerado, em característica zero ([17]). Se a característica do corpo é positiva, como já mencionamos, há contraexemplos.

Neste capítulo, provamos que a propriedade de Specht é satisfeita para o ideal das identidades G-graduadas da álgebra de Lie $sl_2(\mathbb{K})$ para todo grupo G não trivial quando $\mathbb{K}$ é um corpo de característica 0.

De agora em diante, para simplificar a notação, escrevemos simplesmente sl_2 para denotar $sl_2(\mathbb{K})$, i.e., o conjunto das matrizes 2×2 de traço zero com entradas em $\mathbb{K}$, um corpo de característica 0. Para evitar ambiguidades, sempre que necessário, denotamos a álgebra sl_2 por sl_2^G para evidenciar a graduação considerada.

Seja

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a base usual de sl_2. Verifica-se facilmente que

$$he = 2e, \quad hf = -2f \quad \text{e} \quad ef = h.$$

É importante observar que o produto entre os elementos de sl_2 não é o produto usal e sim o produto de Lie (neste caso, o colchete dos elementos).

A menos de isomorfismo, $L = sl_2$ possui três graduações não triviais (veja [2]):

1. $G = \mathbb{Z}_2$:

$L_0 = \mathbb{K}h,\ L_1 = \mathbb{K}e \oplus \mathbb{K}f$;

2. $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$:

   $L_{(0,0)} = 0,\ L_{(1,0)} = \mathbb{K}h,\ L_{(0,1)} = \mathbb{K}(e+f),\ L_{(1,1)} = \mathbb{K}(e-f)$;

3. $G = \mathbb{Z}$:

   $L_{-1} = \mathbb{K}e,\ L_0 = \mathbb{K}h,\ L_1 = \mathbb{K}f,\ L_i = 0,\ i \notin \{-1, 0, 1\}$.

Nosso interesse é investigar a propriedade de Specht para a variedade gerada por sl_2. Nessa direção, convém definir a propriedade somente em termos dos T_G-ideais da álgebra de Lie livre G-graduada.

Definição 2.0.7. *Seja L uma algebra de Lie G-graduada. Dizemos que $Id^G(L)$ tem a* propriedade de Specht *se todo T_G-ideal I tal que $I \supseteq Id^G(L)$ tem uma base finita, ou seja, I é finitamente gerado como T_G-ideal.*

De forma sucinta, nosso objetivo é provar o seguinte resultado:

Teorema 2.0.8. *Se $char(\mathbb{K}) = 0$ e G é um grupo qualquer, então $Id^G(sl_2)$ tem a propriedade de Specht.*

Note que se G é trivial, o resultado vale devido a um trabalho de Razmyslov de 1973 ([24]). De agora em diante, assumimos G não trivial. O ponto de partida para demonstrar o Teorema 2.0.8 consiste em estudar separadamente cada uma das três graduações de sl_2 dadas por $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ e $\mathbb{Z}$.

Seja $Z = \{z_i^{(g)} \ :\ i \geq 0,\ g \in G\}$. Se B é um conjunto de polinômios da álgebra de Lie livre G-graduada $\mathcal{L}(Z)$, dizemos que $f \in \mathcal{L}(Z)$ é uma consequência dos polinômios de B, se f pertence ao T_G-ideal gerado por B, $\langle B \rangle^{T_G}$. Em particular, se $g \in \mathcal{L}(Z)$, g é consequência de f se g pertence ao T_G-ideal gerado por f. Dizemos que f é equivalente a g e denotamos $f \equiv g$, se g é consequência de f e f é consequência de g.

A álgebra de Lie livre G-graduada $\mathcal{L}(Z)$ é um conjunto quaseordenado se definimos para f, $g \in \mathcal{L}(Z)$, $f \leq g$ se, e somente se, g é consequência de f. Se J é um T_G-ideal de $\mathcal{L}(Z)$, a quaseordem em $\mathcal{L}(Z)$ é herdada por $\dfrac{\mathcal{L}(Z)}{J}$. Para os nossos fins, $J = \mathrm{Id}^G(sl_2)$, ou seja, consideramos $\dfrac{\mathcal{L}(Z)}{\mathrm{Id}^G(sl_2)}$ como um conjunto quaseordenado. Disso, se f, $g \in \mathcal{L}(Z)$, definimos

$$f \leq g \text{ se, e somente se, } g \text{ é consequência de } f \,(\mathrm{mod}\ \mathrm{Id}^G(sl_2)), \tag{2.0.1}$$

e dizemos que $f \equiv g$, se $f \leq g$ e $g \leq f$.

Note que se I é um T_G-ideal de $\mathcal{L}(Z)$ tal que $I \supseteq \mathrm{Id}^G(sl_2)$, então I é um conjunto fechado com respeito à quaseordem (2.0.1).

Daqui para frente, omitiremos os parênteses no caso da normalização à esquerda, ou seja,

$$abc = (ab)c.$$

Para simplificar de forma significativa a escrita, os seguintes abusos de notação serão adotados:

$$ab^2 = abb,$$

e por indução,

$$ab^n = (ab^{n-1})b \text{ para todo } n \geq 2.$$

Observação 2.0.9. *Segundo a nossa convenção, em geral*

$$ab^n \neq a(\underbrace{b \cdots b}_{n-vezes}) = 0,$$

para todo $n \geq 2$.

2.1 A $\mathbb{Z}_2$-graduação de sl_2

Nesta seção, supomos que a álgebra $L = sl_2$ é $\mathbb{Z}_2$-graduada, ou seja,

$$L = L_0 \oplus L_1, \text{ com } L_0 = \mathbb{K}h \text{ e } L_1 = \mathbb{K}e \oplus \mathbb{K}f.$$

Na álgebra de Lie livre $\mathbb{Z}_2$-graduada $\mathcal{L}(Z)$, escrevemos o conjunto de variáveis Z como sendo a união disjunta de dois conjuntos enumeráveis, digamos $Z = X \cup Y$ em que as variáveis $x_i \in X$ tem grau 0 e as variáveis $y_i \in Y$ tem grau 1. Denotamos por $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 \oplus \mathcal{L}_1$ a decomposição de $\mathcal{L}$ em componentes homogêneas em que $\mathcal{L}_0$ é o subespaço gerado pelos monômios que possuem um número par de elementos de Y e $\mathcal{L}_1$ é o subespaço gerado pelos monômios que possuem um número ímpar de elementos de Y.

Para todo $n \geq 1$ e $k \geq 0$, $P_{k,n-k}$ denota o espaço dos polinômios multilineares de grau n nas variáveis $x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_{n-k}$. Uma vez que o módulo quociente

$$P_{k,n-k}(sl_2^{\mathbb{Z}_2}) = \frac{P_{k,n-k}}{P_{k,n-k} \cap \mathrm{Id}^{\mathbb{Z}_2}(sl_2)}$$

é escrito como soma direta de $S_k \times S_{n-k}$-módulos irredutíveis, seu caracter é da forma

$$\chi_{k,n-k}(sl_2^{\mathbb{Z}_2}) = \chi_{k,n-k}(P_{k,n-k}(sl_2^{\mathbb{Z}_2})) = \sum_{\sigma \vdash k,\, \tau \vdash n-k} m_{\sigma,\tau} \chi_\sigma \otimes \chi_\tau$$

em que $\chi_\sigma \otimes \chi_\tau$ é o $S_k \times S_{n-k}$-caracter associado ao par de partições (σ, τ) e $m_{\sigma,\tau}$ é a respectiva multiplicidade.

A próxima proposição descreve a sequência de cocaracteres $\mathbb{Z}_2$-graduados de sl_2.

Proposição 2.1.1 ([26])**.** *Seja*

$$\chi_{k,n-k}(sl_2^{\mathbb{Z}_2}) = \sum_{\sigma \vdash k,\, \tau \vdash n-k} m_{\sigma,\tau} \chi_\sigma \otimes \chi_\tau$$

o $(k, n-k)$*-cocaracter de* sl_2*. Então, para todo* $\sigma \vdash k$ *e* $\tau \vdash n-k$*,* $m_{\sigma,\tau} \leq 1$*. Além disso,* $m_{\sigma,\tau} = 1$ *se, e somente se,* $\sigma = (k)$*,* $\tau = (q + r, q)$ *e as seguintes condições são satisfeitas:*

1. *$k \neq n$;*
2. *$r \neq n$;*
3. *$r \equiv 1$ ou $k + q \equiv 1 (mod\ 2)$.*

Para simplificar a notação, denotaremos $\chi_\sigma \otimes \chi_\tau$ simplesmente por $\sigma \otimes \tau$.

Exemplo 2.1.2. *Para $n = 3$, temos:*

$$\chi_{0,3}(sl_2^{\mathbb{Z}_2}) = \emptyset \otimes \begin{array}{|c|c|}\hline & \\ \hline & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array},\ \chi_{1,2}(sl_2^{\mathbb{Z}_2}) = \begin{array}{|c|}\hline \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|}\hline & \\ \hline \end{array} \text{ e } \chi_{2,1}(sl_2^{\mathbb{Z}_2}) = \begin{array}{|c|c|}\hline & \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|}\hline \\ \hline \end{array}.$$

No que segue, usaremos a convenção que símbolos iguais (barras ou tils) sobre variáveis significam que uma alternância é feita com respeito as mesmas. Por exemplo,

$$\overline{y_1} y_2 \overline{y_3} = y_1 y_2 y_3 - y_3 y_2 y_1.$$

Seja $\mathrm{ad}(z) : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ a representação adjunta aplicada a um elemento $z \in \mathcal{L}$, ou seja, $\mathrm{ad}z : w \mapsto wz$. Dados $y_1,\ y_2 \in \mathcal{L}_1$, defina $Y_1 = \mathrm{ad}y_1$ e $Y_2 = \mathrm{ad}y_2$.

Considere o operador

$$d(y_1, y_2) = \overline{Y}_1 \widetilde{Y}_1 \widetilde{Y}_2 \overline{Y}_2 = Y_1Y_1Y_2Y_2 - Y_1Y_2Y_1Y_2 - Y_2Y_1Y_2Y_1 + Y_2Y_2Y_1Y_1 \tag{2.1.1}$$

Defina a sequência de polinômios $g_0, g_1, \ldots$ da seguinte forma:

$$g_0(y_1, y_2) = y_1 y_2$$

e indutivamente, para todo $l \geq 1$,

$$g_l(y_1, y_2) = g_{l-1}(y_1, y_2) d(y_1, y_2). \tag{2.1.2}$$

Exemplo 2.1.3. *Para $l = 1$,*

$$g_1(y_1, y_2) = y_1 y_2 d(y_1, y_2) = y_1 y_2 \overline{y}_1 \widetilde{y}_1 \widetilde{y}_2 \overline{y}_2 =$$
$$y_1y_2y_1y_1y_2y_2 - y_1y_2y_1y_2y_1y_2 - y_1y_2y_2y_1y_2y_1 + y_1y_2y_2y_2y_1y_1.$$

Pelo teorema anterior, se $\sigma \otimes \tau$ aparece com multiplicidade não nula (consequentemente igual a 1) em $\chi_{k,n-k}(sl_2^{\mathbb{Z}_2})$, então $\sigma = (k)$ e $\tau = (q + r, q)$ e além disso, os parâmetros k, q e r satisfazem certas condições. Usando a dualidade existente entre $S_k \times S_{n-k}$-representações e $GL_1 \times GL_2$-representações, já vimos que cada $S_k \times S_{n-k}$-módulo irredutível associado a $\sigma \otimes \tau$ é gerado pela linearização completa do vetor de peso máximo associado ao mesmo módulo.

A seguir, uma lista de vetores de peso máximo que geram os $GL_1 \times GL_2$-módulos irredutíveis cujos caracteres aparecem com multiplicidade não nula na decomposição de $\chi_{k,n-k}(sl_2^{\mathbb{Z}_2})$.

(1a) $f_{0,q,r}(y_1, y_2) = g_l(y_1, y_2) y_1^r$, com $q = 2l + 1$, $l \geq 0$, $r \geq 0$;

(1b) $f_{0,q,r}(y_1, y_2) = g_{l-1}(y_1, y_2) y_1^r \overline{y}_1 \overline{y}_2$, com $q = 2l$, $l > 0$, $r = 2s + 1$, $s \geq 0$;

(2a) $f_{k,q,r}(x, y_1, y_2) = g_l(y_1, y_2)y_1^r x^k$, com $k > 0$, $q = 2l + 1$, $l \geq 0$, $r = 2s + 1$, $s \geq 0$;

(2b) $f_{k,q,r}(x, y_1, y_2) = x[d(y_1, y_2)]^l y_1^r x^{k-1}$, com $k > 0$, $q = 2l$, $l \geq 0$, $r = 2s + 1$, $s \geq 0$;

(3a) $f_{k,q,r}(x, y_1, y_2) = x[d(y_1, y_2)]^l \overline{y}_1 x^{k-1}\overline{y}_2 y_1^r$, com k par > 0, $q = 2l + 1$, $l \geq 0$, $r = 2s$, $s \geq 0$;

(3b) $f_{k,q,r}(x, y_1, y_2) = g_{l-1}(y_1, y_2)\overline{y}_1 x^k \overline{y}_2 y_1^r$, com k ímpar, $q = 2l$, $l > 0$, $r = 2s$, $s \geq 0$;

(3c) $f_{k,0,r}(x, y_1) = xy_1x^{k-1}y_1^{r-1}$, com k ímpar, r par > 0.

Note que cada vetor de peso máximo $f_{k,q,r}$ está associado a uma única tripla de inteiros não negativos (k, q, r). Reciprocamente, uma tripla (k, q, r) de inteiros não negativos satisfazendo $k \neq n$, $r \neq n$ (n denota a soma $k + q + r$) e uma das condições $r \equiv 1$ ou $k + q \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2)$ está associada a um único vetor de peso máximo $f_{k,q,r}$. Disso, temos a seguinte correspondência:

$$(k, q, r) \longleftrightarrow f_{k,q,r}$$

Abaixo, ilustramos essa correspondência, no caso $n = 3$.

Exemplo 2.1.4.

$$\begin{array}{lcl}
\emptyset \otimes \begin{smallmatrix}\square & \square \\ \square & \end{smallmatrix} & \longleftrightarrow & (0,1,1) \longleftrightarrow f_{0,1,1}(y_1, y_2) = y_1y_2y_1 \\
\square \otimes \square\square & \longleftrightarrow & (1,0,2) \longleftrightarrow f_{1,0,2}(x, y_1) = xy_1{}^2 \\
\square\square \otimes \square & \longleftrightarrow & (2,0,1) \longleftrightarrow f_{2,0,1}(x, y_1) = xy_1x
\end{array}$$

Denote por

$$M_{1a},\ M_{1b},\ M_{2a},\ M_{2b},\ M_{3a},\ M_{3b},\ M_{3c}$$

os conjuntos de vetores de peso máximo associados a $(1a)$, $(1b)$, $(2a)$, $(2b)$, $(3a)$, $(3b)$ e $(3c)$, respectivamente, e defina

$$M = M_{1a} \cup M_{1b} \cup M_{2a} \cup M_{2b} \cup M_{3a} \cup M_{3b} \cup M_{3c}. \tag{2.1.3}$$

Para cada $i \in \{(1a), (1b), (2a), (2b), (3a), (3b), (3c)\}$, denote por A_i o subconjunto de triplas de $\mathbb{N}^3$ associado a M_i (aqui $\mathbb{N}$ denota o conjunto dos inteiros não negativos). Disso,

$$\begin{array}{rcl}
A_{1a} & = & \{(0, q, r) \ : \ q = 2l + 1, l \geq 0, r \geq 0\}; \\
A_{1b} & = & \{(0, q, r) \ : \ q = 2l, l > 0, r \text{ ímpar}\}; \\
A_{2a} & = & \{(k, q, r) \ : \ k > 0, q = 2l + 1, l \geq 0, r \text{ ímpar}\}; \\
A_{2b} & = & \{(k, q, r) \ : \ k > 0, q = 2l, l \geq 0, r \text{ ímpar}\}; \\
A_{3a} & = & \{(k, q, r) \ : \ k \text{ par}, \ q = 2l + 1, l \geq 0, r \text{ par}\}; \\
A_{3b} & = & \{(k, q, r) \ : \ k \text{ ímpar}, \ q = 2l, l > 0, r \text{ par}\}; \\
A_{3c} & = & \{(k, 0, r) \ : \ k \text{ ímpar}, \ q = 0, r \text{ par} > 0\}.
\end{array}$$

Dado um $T_{\mathbb{Z}_2}$-ideal I que contém o ideal das identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas de sl_2, existem duas possibilidades:

- $I = \mathrm{Id}^{\mathbb{Z}_2}(sl_2)$;
- $I \supsetneqq \mathrm{Id}^{\mathbb{Z}_2}(sl_2)$.

Se o primeiro caso ocorre, I é finitamente gerado (veja [22]). Caso $I \supsetneqq \mathrm{Id}^{\mathbb{Z}_2}(sl_2)$, uma vez que M gera $\mathcal{L}(Z)$ (mod $\mathrm{Id}^{\mathbb{Z}_2}(sl_2)$), como $T_{\mathbb{Z}_2}$-ideal, existe um subconjunto M' de M tal que $I = \langle M' \rangle^{\mathbb{Z}_2}$ (mod $\mathrm{Id}^{\mathbb{Z}_2}(sl_2)$). Nosso principal objetivo neste capítulo é refinar o conjunto M' a um conjunto finito de elementos que ainda gere I. Dados dois vetores de peso máximo $f_{k,q,r}$ e $f_{k',q',r'}$ em M' tais que $f_{k',q',r'}$ é consequência de $f_{k,q,r}$ (mod $\mathrm{Id}^{\mathbb{Z}_2}(sl_2)$), a ideia consiste em eliminar $f_{k',q',r'}$ de M', já que $M' - \{f_{k',q',r'}\}$ continua gerando I. O procedimento adotado será o seguinte: mostraremos que não existe um conjunto infinito de vetores de peso máximo não comparáveis (com respeito a quaseordem (2.0.1)). Ou seja, é possível reduzir M' a um conjunto finito de geradores. Uma vez que M é uma união finita, bastará verificar isso em cada M_i.

Para os nossos fins, em cada um dos conjuntos A_i, definiremos uma quaseordem $\leq_{A_i}$ de forma que: $(A_i, \leq_{A_i})$ satisfaça a propriedade da base finita e $\leq_{A_i}$ induza a quaseordem (2.0.1) da álgebra de Lie livre graduada $\mathcal{L}(Z)$. Aqui a palavra induzir significa que se duas triplas de um mesmo conjunto estão relacionadas pela quaseordem do mesmo, então os polinômios associados estão relacionados pela quase ordem de $\mathcal{L}(Z)$. Para isso, em seis dos sete conjuntos (A_{1a}, A_{2a}, A_{2b}, A_{3a}, A_{3b}, A_{3c}) a quaseordem natural de $\mathbb{N}^3$ definida coordenada a coordenada será suficiente. Apenas em A_{1b} definiremos uma quaseordem mais sofisticada.

Precisamente, para cada conjunto A_i, com $i \in \{1a, 2a, 2b, 3a, 3b, 3c\}$, defina a seguinte quaseordem $\leq_{A_i}$:

$$(k, q, r) \leq_{A_i} (k', q', r') \text{ se, e somente se, } k \leq k',\ q \leq q' \text{ e } r \leq r'. \tag{2.1.4}$$

Já que em cada conjunto A_i fixo a quaseordem $\leq_{A_i}$ coincide com a quaseordem de $\mathbb{N}^3$ definida coordenada a coordenada, para simplificar a notação e induzir o leitor ao uso da ordem usual, denotaremos $\leq_{A_i}$ simplesmente por $\leq$.

Uma consequência imediata de (2.1.4), observada no Exemplo 1.6.5, é a seguinte proposição.

Proposição 2.1.5. *Para todo $i \in \{1a, 2a, 2b, 3a, 3b, 3c\}$, $(A_i, \leq)$ satisfaz a propriedade da base finita.*

Como $f_{k,q,r}$ é um vetor de peso máximo, existe uma substituição em sl_2 que não anula $f_{k,q,r}$ (caso contrário, $f_{k,q,r}$ seria uma identidade de sl_2). Afirmamos que a substituição $x = h$, $y_1 = e + f$ e $y_2 = f$ funciona para todo $f_{k,q,r} \in M$. Tal substituição é usada em [26] para mostrar que $f_{k,q,r}$ é de fato um vetor de peso máximo.

Antes de iniciarmos cálculos efetivos envolvendo os elementos de sl_2, chamamos atenção novamente que o produto de elementos de sl_2 se trata do produto dado pelo comutador, não do produto usual de matrizes. O leitor deve estar atento que segundo a notação adotada no início do capítulo $ab^n \neq a(\underbrace{b \cdots b}_{n-vezes}) = 0$, para todo $n \geq 2$.

Para mostrar $f_{k,q,r}(h, e + f, f) \neq 0$, será necessário o seguite lema.

Lema 2.1.6. *Sejam $g_l(y_1, y_2)$ e $x[d(y_1, y_2)]^l$ os polinômios definidos segundo (2.1.1) e (2.1.2). Então:*

1. $g_l(\alpha y_1, y_2) = \alpha^{2l+1} g_l(y_1, y_2)$, $g_l(y_1, \alpha y_2) = \alpha^{2l+1} g_l(y_1, y_2)$;
2. $h[d(e+f,f)]^l = g_l(e+f,f) = (-8)^l h$;
3. $g_l(e+f,f)(e+f)^{2s} = (-8)^l 4^s h$, $g_l(e+f,f)(e+f)^{2s+1} = (-8)^l 4^s 2(e-f)$.

Demonstração. O item 1 segue do fato que g_l é multihomogêneo de grau $2l+1$ em y_1 e y_2. Como

$$h\overline{e}\,\widetilde{e}\,\widetilde{\overline{f}}\,\overline{f} = -hfefe - hefef = (-8)h \quad \text{e} \quad h(e+f)^2 = (h(e+f))(e+f) = 4h,$$

a substituição $y_1 = e+f$ e $y_2 = f$ resulta em

$$g_0(e+f,f) = (e+f)f = h$$

e, consequentemente,

$$g_l(e+f,f) = h[d(e+f,f)]^l = h[d(e,f)]^l = (-8)^l h.$$

Portanto,

$$g_l(e+f,f)(e+f)^{2s} = (-8)^l h(e+f)^{2s} = (-8)^l 4^s h$$

e disso segue que $g_l(e+f,f)(e+f)^{2s+1} = (-8)^l 4^s h(e+f) = (-8)^l 4^s 2(e-f)$. □

Proposição 2.1.7. *Para todo $f_{k,q,r} \in M$, $f_{k,q,r}(h, e+f, f) \neq 0$.*

Demonstração. (1a) Segue do item 3 do lema anterior.

(1b)

$$\begin{aligned} f_{0,q,r}(h,e+f,f) &= \\ & g_{l-1}(e+f,f)(e+f)^r(e+f)f - g_{l-1}(e+f,f)(e+f)^r f(e+f) \\ &= (-8)^{l-1}4^s 2[(e-f)(e+f)f - (e-f)f(e+f)] \\ &= (-8)^{l-1}4^s(-4)(e+f) \neq 0. \end{aligned}$$

(2a) $f_{k,q,r}(h,e+f,f) = g_l(e+f,f)(e+f)^r h^k = (-8)^l 4^s 2(e-f)h^k$.

$$\begin{aligned} f_{k,q,r}(h,e+f,f) &= (-8)^l 4^s 2(-2)^k(e-f) \neq 0, \quad \text{se} \quad k \text{ é par;} \\ f_{k,q,r}(h,e+f,f) &= (-8)^l 4^s 2(-2)^k(e+f) \neq 0, \quad \text{se} \quad k \text{ é ímpar.} \end{aligned}$$

(2b) $f_{k,q,r}(h,e+f,f) = h[d(e+f,f)]^l(e+f)^r h^{k-1} = (-8)^l 4^s 2(e-f)h^{k-1}$.

$$\begin{aligned} f_{k,q,r}(h,e+f,f) &= (-8)^l 4^s 2(-2)^{k-1}(e+f) \neq 0, \quad \text{se} \quad k \text{ é par;} \\ f_{k,q,r}(h,e+f,f) &= (-8)^l 4^s 2(-2)^{k-1}(e-f) \neq 0, \quad \text{se} \quad k \text{ é ímpar.} \end{aligned}$$

(3a)

$$\begin{aligned} f_{k,q,r}(h,e+f,f) &= h[d(e+f,f)]^l\overline{(e+f)}h^{k-1}\overline{f}(e+f)^r \\ &= (-8)^l h\overline{(e+f)}h^{k-1}\overline{f}(e+f)^r \\ &= (-8)^l(-2)2^k h(e+f)^r \\ &= (-8)^l(-2)2^k 4^s h \neq 0. \end{aligned}$$

$(3b)$

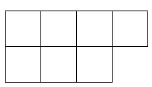
$$\begin{aligned} f_{k,q,r}(h, e+f, f) &= g_{l-1}(e+f,f)\overline{(e+f)}h^k\overline{f}(e+f)^r \\ &= (-8)^{l-1}h\overline{(e+f)}h^k\overline{f}(e+f)^r \\ &= (-8)^{l-1}(-2)2^{k+1}h(e+f)^r \\ &= (-8)^{l-1}(-2)2^{k+1}4^s h \neq 0. \end{aligned}$$

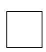
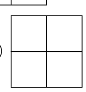
$(3c)$

$$\begin{aligned} f_{k,0,r}(h, e+f) &= h(e+f)h^{k-1}(e+f)^{r-1} \\ &= 2(e-f)h^{k-1}(e+f)^{r-1} \\ &= 2(-2)^{k-1}2^{r-1}h \neq 0. \end{aligned}$$

$\square$

Note que cada vetor de peso máximo $f_{k,q,r}$ é um polinômio multihomogêneo com $\deg_x f_{k,q,r} = k$, $\deg_{y_1} f_{k,q,r} = q+r$, $\deg_{y_2} f_{k,q,r} = q$ e mais uma particularidade: o parâmetro q indica o número de pares distintos (y_1, y_2) que são alternados. Para exemplificar, vejamos as seguintes correspondências:

$\emptyset \otimes$  $\longleftrightarrow \quad (0,3,1) \longleftrightarrow f_{0,3,1}(y_1,y_2) = g_1(y_1,y_2)y_1 = y_1y_2\overline{y}_1\widetilde{y}_1\widetilde{y}_2\overline{y}_2y_1$

 $\otimes$  $\longleftrightarrow \quad (1,2,0) \longleftrightarrow f_{1,2,0}(x,y_1,y_2) = xd(y_1,y_2) = x\overline{y}_1\widetilde{y}_1\widetilde{y}_2\overline{y}_2$

Observe que o grau de x do polinômio $f_{k,q,r}$ corresponde ao número de quadrados do diagrama a esquerda do produto tensorial. Já os graus em y_1 e y_2 correspondem ao número de quadrados da primeira e segunda linha, respectivamente, do diagrama a direita. Note que como $g_1(y_1,y_2)y_1 = y_1y_2\overline{y}_1\widetilde{y}_1\widetilde{y}_2\overline{y}_2y_1 = -y_2y_1\overline{y}_1\widetilde{y}_1\widetilde{y}_2\overline{y}_2y_1$, o primeiro par (y_1,y_2) que aparece neste polinômio é alternado.

A seguir, ficará evidente a escolha de $f_{k,q,r}$ para vetor de peso máximo.

Lema 2.1.8. *Seja $f = f(x,y_1,y_2)$ um polinômio multihomogêneo em que $\deg_x f = k$, $\deg_{y_1} f = q+r$ e $\deg_{y_2} f = q$. Se f não é uma identidade de $sl_2^{\mathbb{Z}_2}$ e f é alternado em q pares distintos (y_1,y_2), então f gera (mod $Id^{\mathbb{Z}_2}(sl_2)$) um $GL_1 \times GL_2$-módulo irredutível cujo $S_k \times S_{n-k}$-caracter correspondente é $\chi_{(k)} \otimes \chi_{(q+r,q)}$.*

Demonstração. Suponha que exista uma permutação σ e transposições disjuntas $\tau_1 = (m_1n_1), \ldots, \tau_q = (m_qn_q)$ do grupo simétrico S_n, com $n = k+2q+r$, tais que

$$f(x,y_1,y_2) = (x^k y_1^{q+r} y_2^q)\sigma\pi_1\ldots\pi_q = (x\ldots xy_1\ldots y_1y_2\ldots y_2)\sigma\pi_1\ldots\pi_q$$

com $\pi_i = 1-\tau_i$. Recordamos que S_n age à direita em um monômio permutando a posição de suas variáveis e a ação é estendida a $\mathbb{K}S_n$ por linearidade. Note que cada transposição indica as posições das variáveis y_1, y_2 em f, não necessariamente nessa ordem, que são alternadas. Suponha, sem perda da generalidade, que m_i é a posição de y_1 e que n_i é a posição de y_2, para todo $i \in \{1,\ldots,q\}$.

Defina $g = g(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_{n-k}) \in P_{k,n-k}$ como segue. No monômio $(x \ldots x y_1 \ldots y_1 y_2 \ldots y_2)\sigma$ troque as variáveis x por $x_1, \ldots, x_k$. Para cada i, troque y_1 na posição m_i por y_{2i-1} e y_2 na posição n_i por y_{2i}. Finalmente, troque os r-restantes y_1 por $y_{2q+1}, \ldots, y_{n-k}$. Definindo

$$T_{(k)} = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & \ldots & k \\ \hline \end{array} \quad \text{e} \quad T_{(q+r,q)} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\hline 1 & 3 & \ldots & 2q-1 & 2q+1 & \ldots & n-k \\ \hline 2 & 4 & \ldots & 2q \\ \cline{1-4} \end{array}$$

não é difícil ver que $e_{T_{(k)}} e_{T_{(q+r,q)}} g$, renomeando as variáveis se necessário, é a linearização de f, em que $e_{T_{(k)}}$, $e_{T_{(q+r,q)}}$ são os idempotentes essenciais de $\mathbb{K}S_k$, $\mathbb{K}S_{n-k}$ que correspondem às tabelas $T_{(k)}, T_{(q+r,q)}$, respectivamente. Portanto, f gera um $GL_1 \times GL_2$-módulo irredutível cujo $S_k \times S_{n-k}$-caracter correspondente é $\chi_{(k)} \otimes \chi_{(q+r,q)}$. Para generalizar esse argumento para um f arbitrário, escreva $f = \alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_r f_r$ com α_i em $\mathbb{K}$ e f_i como antes, e repita o argumento para cada f_i. $\square$

Para tornar claro o procedimento anterior, vejamos o próximo exemplo.

Exemplo 2.1.9. *O polinômio $xd(y_1, y_2) = x\overline{y}_1\widetilde{y}_1\widetilde{y}_2\overline{y}_2$ é alternado em 2 pares distintos (y_1, y_2). Definindo $g(x_1, y_1, y_2, y_3, y_4) = x_1 y_1 y_3 y_4 y_2$,*

$$T_{(1)} = \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline \end{array} \quad e \quad T_{(2,2)} = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline \end{array}$$

obtemos que $e_{T_{(1)}} e_{T_{(2,2)}} g$, a menos de uma renomeação das variáveis, é a linearização de $xd(y_1, y_2)$.

Agora, estamos aptos a relacionar, para cada i fixo, a quaseordem de A_i com a quaseordem de M_i. Em outras palavras, vamos mostrar que

$$f_{k,q,r} \text{ tem como consequência } f_{k',q',r'} (\text{mod } \mathrm{Id}^{\mathbb{Z}_2}(sl_2)), \text{ desde que } (k, q, r) \leq_{A_i} (k', q', r')$$

Devido a transitividade da quaseordem será suficiente mostrar:

$$\begin{array}{lll} (k, q, r) \leq_{A_i} (k', q, r) & \text{implica em} & f_{k,q,r} \leq f_{k',q,r}; \\ (k, q, r) \leq_{A_i} (k, q', r) & \text{implica em} & f_{k,q,r} \leq f_{k,q',r}; \\ (k, q, r) \leq_{A_i} (k, q, r') & \text{implica em} & f_{k,q,r} \leq f_{k,q,r'}. \end{array}$$

Em geral, não é um trabalho fácil decidir, dados dois polinômios, quando um deles é consequência do outro. Nessa direção, o lema 2.1.8 é uma poderosa ferramenta. Ele será aplicado da seguinte forma: dados $f_{k,q,r}$ e $f_{k',q',r'}$, para mostrar que $f_{k,q,r} \leq f_{k',q',r'}$ será suficiente encontrar uma consequência de $f_{k,q,r}$, digamos g, satisfazendo:

- g é um polinômio multihomogêneo;
- $\deg_x g = k'$, $\deg_{y_1} g = q' + r'$ e $\deg_{y_2} g = q'$;
- g é alternado em q' pares distintos (y_1, y_2);

- g não é uma identidade de sl_2.

Pelo Lema 2.1.8, g e $f_{k',q',r'}$ geram módulos irredutíveis isomorfos. Como a multiplicidade de cada módulo irredutível que aparece na decomposição de caracteres de sl_2 é 1, isso garante que g é equivalente a $f_{k',q',r'}$.

Com o intuito de familiarizar o leitor com algumas técnicas, começaremos com A_{2a} e M_{2a}.

Lema 2.1.10. *Sejam (k,q,r), $(k',q',r') \in A_{2a}$. Se $(k,q,r) \leq (k',q',r')$ então $f_{k,q,r} \leq f_{k',q',r'}$.*

Demonstração. O vetor de peso máximo associado a (k,q,r) é

$$f_{k,q,r}(x,y_1,y_2) = g_l(y_1,y_2)y_1^r x^k,$$

com $q = 2l+1$ para algum $l \geq 0$. É fácil ver que $(k,q,r) \leq (k',q,r)$ implica em $f_{k,q,r} \leq f_{k',q,r}$, já que $g_l(y_1,y_2)y_1^r x^{k'}$ pode ser obtido multiplicando a direita $g_l(y_1,y_2)y_1^r x^k$ por x $(k'-k)$-vezes.

Agora, consideremos os demais casos, isto é, $(k,q,r) \leq (k,q',r)$ e $(k,q,r) \leq (k,q,r')$, ou equivalentemente, $q \leq q'$ e $r \leq r'$ (com os demais paramêtros fixos).

Suponha $r \leq r'$. Sejam $g_l(y_1,y_2)y_1^r x^k$ e $g_l(y_1,y_2)y_1^{r'} x^k$ os vetores de peso máximo associados a (k,q,r) e (k,q,r'), respectivamente. Como $r'-r \equiv 0 \pmod 2$ e a quaseordem é transitiva, basta mostrar o caso $r' = r+2$. Substituindo x por $x + x_1$ em $g_l(y_1,y_2)y_1^r x^k$ e usando a identidade $wx_1x \equiv wxx_1$ de $sl_2^{\mathbb{Z}_2}$, válida para todo $w \in \mathcal{L}(Z)$, na componente homogênea de grau 1 em x_1, obtemos como consequência o polinômio $g_l(y_1,y_2)y_1^{r'}x_1x^{k-1}$. Trocando no polinômio anterior x_1 por xy_1^2, tem-se

$$g(x,y_1,y_2) = g_l(y_1,y_2)y_1^r(xy_1^2)x^{k-1}.$$

Considerando a substituição $x = h$, $y_1 = e+f$ e $y_2 = f$, pelo Lema 2.1.6 temos

$$\begin{aligned} g(h,e+f,f) &= g_l(e+f,f)(e+f)^r(h(e+f)^2)h^{k-1} \\ &= (-8)^l 4^s 2(e-f)(4h)h^{k-1} \\ &= 8(-8)^l 4^s (e-f)h^k \neq 0. \end{aligned}$$

Assim, g não é uma identidade de sl_2. Uma vez que g satisfaz as hipóteses do Lema 2.1.8, $g \equiv f_{k,q,r'}$. Portanto, $f_{k,q,r} \leq f_{k,q,r'}$, já que $f_{k,q,r} \leq g$.

Por último, suponha $q \leq q'$, i.e., $l \leq l'$. Sejam $g_l(y_1,y_2)y_1^r x^k$ e $g_{l'}(y_1,y_2)y_1^r x^k$ os polinômios associados a (k,q,r) e (k,q,r'), respectivamente. Como no caso anterior, podemos assumir $l' = l+1$ e temos que $g_l(y_1,y_2)y_1^r x_1 x^{k-1}$ é uma consequência de $g_l(y_1,y_2)y_1^r x^k$. Substituindo x_1 por $xd(y_1,y_2)$, obtemos

$$g_l(y_1,y_2)y_1^r(xd(y_1,y_2))x^{k-1}.$$

Com um cálculo semelhante ao feito anteriormente, é possível verificar facilmente que esse polinômio não se anula quando avaliado em $x = h$, $y_1 = e+f$ e $y_2 = f$. Como no caso anterior, o resultado desejado é obtido. Isso completa a prova. □

A prova do próximo lema segue exatamente o mesmo raciocínio do anterior. Optamos em demonstrá-lo, para fixar os argumentos.

Lema 2.1.11. *Seja (k,q,r), $(k',q',r') \in A_{2b}$. Se $(k,q,r) \leq (k',q',r')$ então $f_{k,q,r} \leq f_{k',q',r'}$.*

Demonstração. O vetor de peso máximo associado a $(k,q,r) \in A_{2b}$ é

$$f_{kqr}(x, y_1, y_2) = x[d(y_1, y_2)]^l {y_1}^r x^{k-1},$$

com $q = 2l$. É fácil ver que $(k,q,r) \leq (k',q,r)$ implica em $f_{k,q,r} \leq f_{k',q,r}$, quando $k \leq k'$.

Suponha $r \leq r'$. Sejam $x[d(y_1,y_2)]^l y_1^r x^{k-1}$ e $x[d(y_1,y_2)]^l y_1^{r'} x^{k-1}$ os vetores de peso máximo associados a (k,q,r) e (k,q,r'), respectivamente. Basta mostrar o caso $r' = r+2$. Substituindo x por $x + x_1$ em $g_l(y_1,y_2)y_1^r x^k$ e usando a identidade de $sl_2^{\mathbb{Z}_2}$, $wx_1x \equiv wxx_1$, para todo $w \in \mathcal{L}(Z)$ na componente homogênea de grau 1 em x_1, obtemos como consequência $x_1[d(y_1,y_2)]^l y_1^r x^{k-1} + (k-1)x[d(y_1,y_2)]^l y_1^r x_1 x^{k-2}$. Substituindo no último polinômio x_1 por xy_1^2, temos:

$$g(x,y_1,y_2) = (x{y_1}^2)[d(y_1,y_2)]^l y_1^r x^{k-1} + (k-1)x[d(y_1,y_2)]^l y_1^r (xy_1^2)x^{k-2}.$$

A substituição $x = h$, $y_1 = e + f$, $y_2 = f$ e $r = 2s+1$ resulta em

$$\begin{aligned} g(h, e+f, f) = {} & (h(e+f)^2)[d(e+f,f)]^l (e+f)^r h^{k-1} + \\ & (k-1)h[d(e+f,f)]^l (e+f)^r (h(e+f)^2)h^{k-2} \\ = {} & 4(-8)^l 4^s 2(e-f)h^{k-1} + (k-1)4(-8)^l 4^s 2(e-f)h^{k-1} \\ = {} & 4k(-8)^l 4^s 2(e-f)h^{k-1} \neq 0. \end{aligned}$$

Assim, g não é uma identidade de sl_2. Pelo Lemma 2.1.8, $g \equiv f_{k,q,r'}$. Portanto, $f_{k,q,r} \leq f_{k,q,r'}$.

Suponha $q \leq q'$, i.e., $l \leq l'$. Sejam $x[d(y_1,y_2)]^l y_1^r x^{k-1}$ e $x[d(y_1,y_2)]^{l'} y_1^r x^{k-1}$ os polinômios associados a (k,q,r) e (k,q',r), respectivamente. Como no caso anterior, podemos assumir $l' = l+1$. Substituindo x_1 por $xd(y_1,y_2)$ em $x_1[d(y_1,y_2)]^l y_1^r x^{k-1} + (k-1)x[d(y_1,y_2)]^l y_1^r x_1 x^{k-2}$, temos

$$x[d(y_1,y_2)]^{l+1} y_1^r x^{k-1} + (k-1)x[d(y_1,y_2)]^l y_1^r (xd(y_1,y_2))x^{k-2}.$$

Como esse polinômio não se anula em $x = h$, $y_1 = e+f$ e $y_2 = f$, obtemos o desejado. $\square$

Até agora, sem muito esforço, foi possível enxergar a propriedade de alternância entre as variáveis y_1 e y_2 em certos polinômios multihomogêneos. Isso se deve ao fato que, até então, trabalhamos apenas com polinômios que sofreram uma pequena variação de um vetor de peso máximo $f_{k,q,r}$. O exemplo seguinte, trata de um polinômio multihomogêneo no qual verificar a propriedade de alternância não é imediato.

Exemplo 2.1.12. *Seja* $xd(y_1,y_2) = x\overline{y}_1\widetilde{y}_1\widetilde{y}_2\overline{y}_2$. *Considere* $d' = d'(x,y_1,y_2,y)$ *a componente homogênea de grau* 1 *em* y *de* $x[d(y_1+y,y_2)]$ *e* $d'' = d''(x,y_1,y_2,y)$ *a componente homogênea de grau* 1 *em* y *de* $x[d(y_1,y_2+y)]$. *Um cálculo simples resulta em*

$$\begin{aligned} d'(x,y_1,y_2,y) &= x\overline{y}\widetilde{y}_1\widetilde{y}_2\overline{y}_2 + x\overline{y}_1\widetilde{y}\widetilde{y}_2\overline{y}_2, \\ d''(x,y_1,y_2,y) &= x\overline{y}_1\widetilde{y}_1\widetilde{y}\overline{y}_2 + x\overline{y}_1\widetilde{y}_1\widetilde{y}_2\overline{y}. \end{aligned}$$

Somando $d'(x,y_1,y_2,y_1x^2)$ *e* $d''(x,y_1,y_2,y_2x^2)$ *obtemos o polinômio multihomogêneo*

$$\begin{aligned} g(x,y_1,y_2) &= d'(x,y_1,y_2,y_1x^2) + d''(x,y_1,y_2,y_2x^2) \\ &= x\overline{(y_1x^2)}\widetilde{y}_1\widetilde{y}_2\overline{y}_2 + x\overline{y}_1\widetilde{(y_1x^2)}\widetilde{y}_2\overline{y}_2 + x\overline{y}_1\widetilde{y}_1\widetilde{(y_2x^2)}\overline{y}_2 + x\overline{y}_1\widetilde{y}_1\widetilde{y}_2\overline{(y_2x^2)} \\ &= x(\overline{y}_1x^2)\widetilde{y}_1\widetilde{y}_2\overline{y}_2 + x\overline{y}_1(\widetilde{y}_1x^2)\widetilde{y}_2\overline{y}_2 + x\overline{y}_1\widetilde{y}_1(\widetilde{y}_2x^2)\overline{y}_2 + x\overline{y}_1\widetilde{y}_1\widetilde{y}_2(\overline{y}_2x^2), \end{aligned}$$

que é alternado em 2 *pares distintos* (y_1,y_2), *assim como* $xd(y_1,y_2)$.

Lema 2.1.13. *Sejam* (k, q, r), $(k', q', r') \in A_{3a}$. *Se* $(k, q, r) \leq (k', q', r')$ *então* $f_{k,q,r} \leq f_{k',q',r'}$.

Demonstração. O polinômio associado a (k, q, r) é

$$f_{k,q,r}(x, y_1, y_2) = x[d(y_1, y_2)]^l \overline{y}_1 x^{k-1} \overline{y}_2 y_1^r.$$

É imediato que $f_{k,q,r} \leq f_{k,q,r'}$, se $r \leq r'$. A prova que $f_{k,q,r} \leq f_{k,q',r}$, quando $q \leq q'$, é análoga à feita no Lema 2.1.11.

Agora, suponha $k \leq k'$. Sejam $x[d(y_1, y_2)]^l \overline{y}_1 x^{k-1} \overline{y}_2 y_1^r$ e $x[d(y_1, y_2)]^l \overline{y}_1 x^{k+1} \overline{y}_2 y_1^r$ os vetores de peso máximo associados a (k, q, r) e $(k + 2, q, r)$, respectivamente. Sejam $f' = f'(x, y_1, y_2, y)$ e $f'' = f''(x, y_1, y_2, y)$ as componentes homogêneas de grau 1 em y dos polinômios $f_{k,q,r}(x, y_1 + y, y_2)$ e $f_{k,q,r}(x, y_1, y_2 + y)$, respectivamente. Substituindo y por $y_1 x^2$ em f' e y por $y_2 x^2$ em f'', temos as seguintes consequências de $f_{k,q,r}$:

$$\begin{gathered} f'(x, y_1, y_2, y_1x^2) = d'(x, y_1, y_2, y_1x^2) \overline{y}_1 x^{k-1} \overline{y}_2 y_1^r + x[d(y_1, y_2)]^l \overline{y_1 x^2} x^{k-1} \overline{y}_2 y_1^r + \\ x[d(y_1, y_2)]^l \overline{y}_1 x^{k-1} \overline{y}_2 (y_1 x^2) {y_1}^{r-1} + \cdots + x[d(y_1, y_2)]^l \overline{y}_1 x^{k-1} \overline{y}_2 {y_1}^{r-1} (y_1 x^2) \end{gathered}$$

e

$$f''(x, y_1, y_2, y_2x^2) = d''(x, y_1, y_2, y_2x^2) \overline{y}_1 x^{k-1} \overline{y}_2 {y_1}^r + x[d(y_1, y_2)]^l \overline{y}_1 x^{k-1} \overline{y_2 x^2} {y_1}^r,$$

em que $d' = d'(x, y_1, y_2, y)$ é a componente homogênea de grau 1 em y de $x[d(y_1 + y, y_2)]^l$ e $d'' = d''(x, y_1, y_2, y)$ é a componente homogênea de grau 1 em y de $x[d(y_1, y_2 + y)]^l$. A soma dos polinômios anteriores juntamente com a igualdade

$$\begin{gathered} x[d(y_1, y_2)]^l \overline{y}_1 x^{k-1} \overline{y_2 x^2} {y_1}^r + x[d(y_1, y_2)]^l \overline{y_1 x^2} x^{k-1} \overline{y}_2 y_1^r = \\ x[d(y_1, y_2)]^l (\overline{y}_1 x^2) x^{k-1} \overline{y}_2 y_1^r + x[d(y_1, y_2)]^l \overline{y}_1 x^{k-1} (\overline{y}_2 x^2) {y_1}^r \end{gathered}$$

resulta em

$$\begin{aligned} & g(x, y_1, y_2) = f'(x, y_1, y_2, y_1x^2) + f''(x, y_1, y_2, y_2x^2) = \\ & [d'(x, y_1, y_2, y_1x^2) + d''(x, y_1, y_2, y_2x^2)] \overline{y}_1 x^{k-1} \overline{y}_2 y_1^r + \\ & x[d(y_1, y_2)]^l (\overline{y}_1 x^2) x^{k-1} \overline{y}_2 y_1^r + x[d(y_1, y_2)]^l \overline{y}_1 x^{k-1} (\overline{y}_2 x^2) {y_1}^r + \\ & x[d(y_1, y_2)]^l \overline{y}_1 x^{k-1} \overline{y}_2 (y_1 x^2) {y_1}^{r-1} + \cdots + x[d(y_1, y_2)]^l \overline{y}_1 x^{k-1} \overline{y}_2 {y_1}^{r-1} (y_1 x^2). \end{aligned}$$

Note que $d'(x, y_1, y_2, y_1x^2) + d''(x, y_1, y_2, y_2x^2)$ é um polinômio multihomogêneo de grau 3 em x e de grau $q - 1$ em y_1 e y_2. Além disso, é alternado em $q - 1$ pares distintos (y_1, y_2). Uma vez que $f'(x, y_1, y_2, y)$ e $f''(x, y_1, y_2, y)$ são componentes de grau 1 em y de $f_{k,q,r}(x, y_1 + y, y_2)$ e $f_{k,q,r}(x, y_1, y_2 + y)$, respectivamente, temos

$$\begin{aligned} g(h, e + f, f) &= f'(h, e + f, f, 4(e + f)) + f''(h, e + f, f, 4f) \\ &= 4(q + r) f_{k,q,r}(h, e + f, f) + 4q f_{k,q,r}(h, e + f, f) \\ &= 4(2q + r) f_{k,q,r}(h, e + f, f) \neq 0, \end{aligned}$$

em que o fato do resultado ser não nulo é obtido usando a Proposição 2.1.7. Assim, $g = f'(x, y_1, y_2, y_1x^2) + f''(x, y_1, y_2, y_2x^2)$ não é uma identidade de sl_2. Como g é multihomogêneo de grau $k + 2$ em x, $q + r$ em y_1 e q em y_2, pelo Lema 2.1.8, concluímos que $g \equiv f_{k+2,q,r}$. Portanto, $f_{k,q,r} \leq f_{k+2,q,r}$. □

Lema 2.1.14. *Sejam (k,q,r), $(k',q',r') \in A_{3b}$. Se $(k,q,r) \leq (k',q',r')$ então $f_{k,q,r} \leq f_{k',q',r'}$.*

Demonstração. Já que o vetor de peso máximo associado a um elemento de A_{3b} é

$$g_{l-1}(y_1,y_2)\overline{y}_1 x^k \overline{y}_2 y_1^r = y_1y_2[d(y_1,y_2)]^{l-1}\overline{y}_1 x^k \overline{y}_2 y_1^r,$$

a prova é análoga à do lema anterior. □

O lema a seguir relaciona a quaseordem de A_{3c} com a quaseordem de M_{3c} e tem uma prova simples, se comparado aos anteriores.

Lema 2.1.15. *Sejam $(k,0,r)$, $(k',0,r') \in A_{3c}$. Se $(k,0,r) \leq (k',0,r')$ então $f_{k,0,r} \leq f_{k',0,r'}$.*

Demonstração. Como o polinômio associado a $(k,0,r) \in A_{3c}$ é

$$f_{k,0,r}(x,y_1) = xy_1x^{k-1}y_1^{r-1},$$

é imediato que $f_{k,0,r} \leq f_{k,0,r'}$, se $r \leq r'$. Para provar que $f_{k,0,r} \leq f_{k',0,r}$ basta proceder da seguinte forma: troque y_1 por $y_1 + y$ em $xy_1x^{k-1}y_1^{r-1}$, no novo polinômio troque y por y_1x^2 na componente homogênea de grau 1 em y. Finalmente, conclua que o polinômio resultante não se anula quando avaliado em $x = h$, $y_1 = e + f$ e $y_2 = f$. □

Uma consequência imediata dos lemas anteriores é o seguinte corolário:

Corolário 2.1.16. *Para todo $k > 0$ e a, b, $c \geq 0$, se $f_{k,q,r}, f_{k+2a,q+2b,r+2c} \in M_i$ com $i \in \{2a, 2b, 3a, 3b, 3c\}$, então $f_{k,q,r} \leq f_{k+2a,q+2b,r+2c}$.*

Lema 2.1.17. *Sejam $(0,q,r)$, $(0,q',r') \in A_{1a}$. Se $(0,q,r) \leq (0,q',r')$ então $f_{0,q,r} \leq f_{0,q',r'}$.*

Demonstração. Como o vetor de peso máximo associado a $(0,q,r)$ é

$$f_{0,q,r}(y_1,y_2) = g_l(y_1,y_2)y_1^r$$

é suficiente mostar que $f_{0,q+2,r}$ é uma consequência de $f_{0,q,r}$. Se r é par, multiplique a direita $g_l(y_1,y_2)y_1^r$ por $d(y_1,y_2)$ e se r é ímpar, multiplique duas vezes por (y_1y_2). Isso resultará em

$$g_l(y_1,y_2)y_1^r d(y_1,y_2) \text{ e } g_l(y_1,y_2)y_1^r(y_1y_2)^2,$$

respectivamente. Pela Proposição 2.1.7, é fácil ver que ambos não se anulam em $x = h$, $y_1 = e + f$ e $y_2 = f$. □

Considere a quaseordem $\leq_{A_{1b}}$ em A_{1b} definida por:

$$\begin{aligned} (0,q,r) \leq_{A_{1b}} (0,q',r') &\text{ se, e somente se,} \\ q < q' &\text{ e } r = r' \text{ ou } q < q' \text{ e } r < r' \text{ ou} \\ q = q' &\text{ e } r' - r \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\ 2q). \end{aligned}$$

Proposição 2.1.18. *$(A_{1b}, \leq_{1b})$ satisfaz a propriedade da base finita.*

Demonstração. Seja $\{(0, q_i, r_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ uma sequência em A_{1b} tal que $q_i \leq q_j$ e $r_i \leq r_j$, para todo $i < j$ (toda sequência $\{(0, q_i, r_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência dessa forma). Então, existe uma subsequência que satisfaz: $q_i < q_j$ e $r_i = r_j$ ou $q_i < q_j$ e $r_i < r_j$ ou $q_i = q_j$ e $r_j - r_i \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\ 2q_i)$, para todo $i < j$ (veja o Exemplo 1.6.6). Em qualquer um dos casos

$$(0, q_1, r_1) \leq_{1b} (0, q_2, r_2) \leq_{1b} (0, q_3, r_3) \leq_{1b} \cdots .$$

□

A quaseordem anterior também induz a quaseordem de $\mathcal{L}(Z)$.

Lema 2.1.19. *Sejam $(0, q, r)$, $(0, q', r') \in A_{1b}$. Se $(0, q, r) \leq_{A_{1b}} (0, q', r')$ então $f_{0,q,r} \leq f_{0,q',r'}$.*

Demonstração. Existem três possibilidades:

1) $q < q'$ e $r = r'$;

2) $q < q'$ e $r < r'$;

3) $q = q'$ e $r' - r \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\ 2q)$.

1) Suponha $q' = q + 2$ e $r = r'$. Seja

$$g_{l-1}(y_1, y_2)y_1^r\overline{y}_1\overline{y}_2$$

o vetor de peso máximo associado a $(0, q, r) \in A_{1b}$. Multiplicando à direita o elemento $g_{l-1}(y_1, y_2)y_1^r\overline{y}_1\overline{y}_2$ duas vezes por (y_1y_2) obtemos

$$g_{l-1}(y_1, y_2)y_1^r\overline{y}_1\overline{y}_2(y_1y_2)^2,$$

que não é uma identidade de sl_2.

2) Suponha $q' = q + 2$ com $q + 2l$ e $r < r'$. Para mostrar que $f_{0,q,r} \leq f_{0,q',r'}$, já que $q + 1$ é ímpar, pelo lema anterior e pela transitividade da quaseordem, basta mostrar que $f_{0,q,r} \leq f_{0,q+1,r}$ e $f_{0,q+1,r'} \leq f_{0,q+2,r'}$. Com efeito, sejam

$$g_{l-1}(y_1, y_2)y_1^r\overline{y}_1\overline{y}_2 \text{ e } g_l(y_1, y_2)y_1^{r'}$$

os vetores de peso máximo associados a $(0, q, r)$ e $(0, q + 1, r')$, respectivamente. Multiplicando à direita por (y_1y_2), obtemos como resultado

$$g_{l-1}(y_1, y_2)y_1^r\overline{y}_1\overline{y}_2(y_1y_2) \text{ e } g_l(y_1, y_2)y_1^{r'}(y_1y_2).$$

Ambos não se anulam quando avaliados em $x = h$, $y_1 = e + f$ e $y_2 = f$.

3) Finalmente, considere o caso $q = q'$ e $r' - r = 2q$. Substituindo y_2 por $y_1y_2y_1$ em $g_{l-1}(y_1, y_2)y_1^r\overline{y}_1\overline{y}_2$ (o vetor de peso máximo associado a $(0, q, r)$), obtemos o polinômio

$$g(y_1, y_2) = g_{l-1}(y_1, y_1y_2y_1)y_1^r\overline{y}_1\overline{y_1y_2y_2},$$

de grau r' em y_1 e de grau $q = 2l$ em y_2. Substituímos $y_1 = e + f$ e $y_2 = f$:

$$\begin{aligned} g(e + f, f) &= g_{l-1}(e + f, 2(e - f))(e + f)^r\overline{e + f}\,\overline{2(e - f)} \\ &= 2^q g_{l-1}(e + f, e - f)(e + f)^r\overline{e + f}\,\overline{e - f} \neq 0, \end{aligned}$$

usando que $g_{l-1}(e + f, e - f)(e + f)^r$ é múltiplo de $e - f$, já que r é ímpar, e também que $g_{l-1}(e + f, e - f)$ é múltiplo de h (não nulo). □

Recordamos que cada conjunto A_i de $\mathbb{N}^3$ está em correspondência biunívoca com o conjunto dos vetores de peso máximo M_i. Se denotamos por A a união disjunta

$$A = A_{1a} \cup A_{1b} \cup A_{2a} \cup A_{2b} \cup A_{3a} \cup A_{3b} \cup A_{3c},$$

então A também está em correspondência biunívoca com M.

Como A é a união dos A_i's e cada A_i é quaseordenado, existe uma quaseordem natural em A que é induzida pelas quaseordens dos A_i's. Em outras palavras, definimos a quaseordem $\leq_A$ em A como segue:

$$u \leq_A v \text{ se, e somente se, } \exists\, i \text{ tal que } u, v \in A_i \text{ e } u \leq_{A_i} v \tag{2.1.5}$$

em que $\leq_{A_i}$ é a quaseordem de A_i e $i \in \{1a, 1b, 2a, 2b, 3a, 3b, 3c\}$.

As proposições subsequentes funcionam como conexões entre a existência de uma base finita para os $T_{\mathbb{Z}_2}$-ideais que contém o ideal das identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas de sl_2 e a propriedade da base finita sob o ponto de vista de teoria de conjuntos.

Proposição 2.1.20. *$(A, \leq_A)$ satisfaz a propriedade da base finita.*

Demonstração. Uma vez que $A = A_{1a} \cup A_{1b} \cup A_{2a} \cup A_{2b} \cup A_{3a} \cup A_{3b} \cup A_{3c}$, o resultado segue de (2.1.5) e das proposições 2.1.5 e 2.1.18. □

Proposição 2.1.21. *Se $(k, q, r) \leq_A (k', q', r')$ então $f_{k,q,r} \leq f_{k',q',r'}$.*

Demonstração. Segue imediatamente de (2.1.5) e dos lemas 2.1.10, 2.1.11, 2.1.13, 2.1.14, 2.1.15, 2.1.17 e 2.1.19. □

A seguir, daremos a prova do Teorema 2.0.8, no caso $G = \mathbb{Z}_2$.

Teorema 2.1.22. *Se $char(\mathbb{K}) = 0$, então o ideal $Id^{\mathbb{Z}_2}(sl_2)$ das identidades graduadas de $sl_2^{\mathbb{Z}_2}$ satisfaz a propriedade de Specht.*

Demonstração. Por [22],

$$\mathrm{Id}^{\mathbb{Z}_2}(sl_2) = \langle x_1 x_2 \rangle^{T_{\mathbb{Z}_2}},$$

isto é, o ideal da identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas de sl_2 é gerado como $T_{\mathbb{Z}_2}$-ideal pelo polinômio x_1x_2.

Seja I um $T_{\mathbb{Z}_2}$-ideal de $\mathcal{L}(Z)$ tal que $I \supsetneq \mathrm{Id}^{\mathbb{Z}_2}(sl_2)$. Recordamos que M é o conjunto dos vetores de peso máximo correspondentes aos caracteres que aparecem com multiplicidade não nula (consequentemente, igual a 1) em $\chi_{k,n-k}(sl_2)$, $n \geq 1$, $0 < k \leq n$; portanto $\mathcal{L}(Z)$ é gerado por M (mod $\mathrm{Id}^{\mathbb{Z}_2}(sl_2)$).

Uma vez que $\mathcal{L}(Z) \supseteq I \supsetneq \mathrm{Id}^{\mathbb{Z}_2}(sl_2)$, existe $M' \subseteq M$ tal que I é gerado por M' (mod $\mathrm{Id}^{\mathbb{Z}_2}(sl_2)$). Seja A' o subconjunto de $A \subseteq \mathbb{N}^3$ correspondente a M'. Como A satisfaz a propriedade da base finita (Proposição 2.1.20), existe um conjunto finito B_0 tal que

$$B_0 \subseteq A' \subseteq \overline{B_0}. \tag{2.1.6}$$

Denote por N_0 o subconjunto de M' correspondente a B_0. Como consequência de (2.1.6)

$$N_0 \subseteq M' \subseteq \overline{N_0},$$

em que $\overline{N_0}$ é o conjunto dos polinômios que são consequências dos polinômios de N_0. Com efeito, se $f_{k,q,r} \in M'$, então $(k,q,r) \in A'$. Já que $A' \subseteq \overline{B_0}$, existe $(k_0, q_0, r_0) \in B_0$ tal que $(k_0, q_0, r_0) \leq_A (k,q,r)$. Pela Proposição 2.1.21, $f_{k_0,q_0,r_0} \leq f_{k,q,r}$ e consequentemente $f_{k,q,r} \in \overline{N_0}$. Segue que

$$I = \left\langle N_0, \mathrm{Id}^{\mathbb{Z}_2}(sl_2)\right\rangle^{T_{\mathbb{Z}_2}} = \langle N_0, x_1x_2\rangle^{T_{\mathbb{Z}_2}},$$

o que completa a prova do teorema. $\square$

2.2 A $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$-graduação de sl_2

Nesta seção, consideramos a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$-graduação de $L = sl_2$, ou seja,

$$L = L_{(0,0)} \oplus L_{(1,0)} \oplus L_{(0,1)} \oplus L_{(1,1)},$$

com

$$L_{(0,0)} = 0,\ L_{(1,0)} = \mathbb{K}h,\ L_{(0,1)} = \mathbb{K}(e+f) \text{ e } L_{(1,1)} = \mathbb{K}(e-f).$$

Assim, na álgebra de Lie livre $\mathcal{L}(Z)$ decompomos Z na união de quatro conjuntos infinitos disjuntos exigindo que seus elementos tenham grau homogêneo $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$, respectivamente. Como antes, isso induz uma $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$-graduação em $\mathcal{L}(Z)$ e a álgebra resultante é a álgebra de Lie livre $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$-graduada.

Como $\mathrm{Supp}(sl_2^{\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2}) = \{(1,0),(0,1),(1,1)\}$, vamos trabalhar apenas com as variáveis dessas componentes homogêneas. Denote por x_i, y_i e z_i as variáveis de grau homogêneo $(1,0)$, $(0,1)$ e $(1,1)$, respectivamente.

Para todo $p \geq 0$, $q \geq 0$ e $r \geq 0$, seja $P_{p,q,r}$ o espaço dos polinômios multilineares de grau $n = p+q+r$ nas variáveis $x_1, \ldots, x_p$, $y_1, \ldots, y_q$, $z_1, \ldots, z_r$. Como o $S_p \times S_q \times S_r$-módulo

$$P_{p,q,r}(sl_2^{\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2}) = \frac{P_{p,q,r}}{P_{p,q,r} \cap \mathrm{Id}^{\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2}(sl_2)}$$

pode ser escrito como soma direta de $S_p \times S_q \times S_r$-módulos irredutíveis, seu caracter tem a forma

$$\chi_{p,q,r}(sl_2^{\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2}) = \chi_{p,q,r}(P_{p,q,r}(sl_2^{\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2})) = \sum_{\substack{\sigma\vdash p,\, \tau\vdash q\\ \pi\vdash r}} m_{\sigma,\tau,\pi}\chi_\sigma \otimes \chi_\tau \otimes \chi_\pi,$$

em que $p+q+r = n$, $\chi_\sigma \otimes \chi_\tau \otimes \chi_\pi$ é o $S_p \times S_q \times S_r$-caracter associado a tripla de partições (σ,τ,π) e $m_{\sigma,\tau,\pi}$ é a correspondente multiplicidade.

A próxima proposição descreve a sequência de cocaracteres $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$-graduados de sl_2.

Proposição 2.2.1 ([26]). *Seja*

$$\chi_{p,q,r}(sl_2^{\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2}) = \sum_{\substack{\sigma\vdash p,\, \tau\vdash q\\ \pi\vdash r}} m_{\sigma,\tau,\pi}\chi_\sigma \otimes \chi_\tau \otimes \chi_\pi$$

o (p,q,r)-cocaracter de sl_2 e $n = p+q+r$. Então, para todo $\sigma \vdash p, \tau \vdash q$, $\pi \vdash r$, $m_{\sigma,\tau,\pi} \leq 1$. Além disso, $m_{\sigma,\tau,\pi} = 1$ se, e somente se, $\sigma = (p), \tau = (q), \pi = (r)$ e as seguintes condições são satisfeitas:

1. $p \neq n$, $q \neq n$, $r \neq n$;

2. $p + q \equiv 1$ *ou* $q + r \equiv 1$*(mod 2).*

Exemplo 2.2.2. *Para* $n = 3$, *os módulos que aparecem na decomposição são aqueles associados às seguintes triplas de partições:*

$$\emptyset \otimes \square \otimes \square\square,\ \emptyset \otimes \square\square \otimes \square,\ \square \otimes \emptyset \otimes \square\square,$$

$$\square \otimes \square\square \otimes \emptyset,\ \square\square \otimes \emptyset \otimes \square,\ \square\square \otimes \square \otimes \emptyset.$$

A seguir, escrevemos uma lista dos vetores de peso máximo que geram os $GL_1 \times GL_1 \times GL_1$-módulos irredutíveis cujos caracteres aparecem com multiplicidade não nula na decomposição de $\chi_{p,q,r}(sl_2^{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2})$.

(1) $g_{0,q,r}(x, y, z) = zy^q z^{r-1}$, com q ímpar, $r > 0$;

(2) $g_{0,q,r}(x, y, z) = yz^q y^{r-1}$, com q par > 0, r ímpar;

(3) $g_{p,q,r}(x, y, z) = xy^q x^{p-1} z^r$, com p par > 0, q ímpar, $r \geq 0$;

(4) $g_{p,q,r}(x, y, z) = xz^r x^{p-1} y^q$, com p par > 0, q par, r ímpar;

(5) $g_{p,0,r}(x, y, z) = zx^p z^{r-1}$, com p ímpar, $r > 0$;

(6) $g_{p,q,r}(x, y, z) = yx^p y^{q-1} z^r$, com p ímpar, q par > 0, $r \geq 0$;

(7) $g_{p,q,r}(x, y, z) = xz^r y^q x^{p-1}$, com p ímpar, q ímpar, r par.

Note que cada vetor de peso máximo $g_{p,q,r}$ está associado a uma única tripla $(p, q, r) \in \mathbb{N}^3$, que, neste caso, coincide com o multigrau de $g_{p,q,r}$. Disso, se (p, q, r) satisfaz as condições da Proposição 2.2.1, temos a seguinte correspondência:

$$(p, q, r) \longleftrightarrow g_{p,q,r}$$

Abaixo, ilustramos tal correspondência, quando $n = 3$.

Exemplo 2.2.3.

$$\begin{array}{lcl}
\emptyset \otimes \square \otimes \square\square \longleftrightarrow (0,1,2) & \longleftrightarrow & g_{0,1,2}(y, z) = zyz; \\
\emptyset \otimes \square\square \otimes \square \longleftrightarrow (0,2,1) & \longleftrightarrow & g_{0,2,1}(y, z) = yzy; \\
\square \otimes \emptyset \otimes \square\square \longleftrightarrow (1,0,2) & \longleftrightarrow & g_{1,0,2}(x, z) = zxz; \\
\square \otimes \square\square \otimes \emptyset \longleftrightarrow (1,2,0) & \longleftrightarrow & g_{1,2,0}(x, y) = yxy; \\
\square\square \otimes \emptyset \otimes \square \longleftrightarrow (2,0,1) & \longleftrightarrow & g_{2,0,1}(x, z) = xzx; \\
\square\square \otimes \square \otimes \emptyset \longleftrightarrow (2,1,0) & \longleftrightarrow & g_{0,2,1,0}(x, y) = xyx.
\end{array}$$

O lema a seguir é análogo ao Lema 2.1.8.

Lema 2.2.4. *Seja $g = g(x,y,z)$ um polinômio multihomogêneo em que $\deg_x g = p$, $\deg_y g = q$ e $\deg_z g = r$. Se g não é uma identidade de $sl_2^{\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2}$, então g gera (mod $Id^{\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2}(sl_2)$) um $GL_1 \times GL_1 \times GL_1$-módulo irredutível cujo $S_p \times S_q \times S_r$-caracter correspondente é $\chi_{(p)} \otimes \chi_{(q)} \otimes \chi_{(r)}$.*

Denote por

$$N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6 \text{ e } N_7$$

os conjuntos de vetores de peso máximo associados a (1), (2), (3), (4), (5), (6) e (7), respectivamente e considere

$$N = N_1 \cup N_2 \cup N_3 \cup N_4 \cup N_5 \cup N_6 \cup N_7. \tag{2.2.1}$$

Para cada $i \in \{1,2,3,4,5,6,7\}$, denote por B_i o subconjunto de $\mathbb{N}^3$ associado a N_i. Mais precisamente,

$$\begin{aligned}
B_1 &= \{(0,q,r) : q \text{ ímpar}, r > 0\};\\
B_2 &= \{(0,q,r) : q \text{ par} > 0, r \text{ ímpar}\};\\
B_3 &= \{(p,q,r) : p \text{ par} > 0, q \text{ ímpar}, r \geq 0\};\\
B_4 &= \{(p,q,r) : p \text{ par} > 0, q \text{ par}, r \text{ ímpar}\};\\
B_5 &= \{(p,q,0) : p \text{ ímpar}, q > 0\};\\
B_6 &= \{(p,q,r) : p \text{ ímpar}, , q \text{ par} > 0, r \geq 0\};\\
B_7 &= \{(p,q,r) : p \text{ ímpar}, q \text{ ímpar}, r \text{ par}\}.
\end{aligned}$$

Considere a quaseordem natural $\leq$ de $\mathbb{N}^3$ em cada um dos conjuntos, como segue:

$$(p,q,r) \leq (p',q',r') \text{ se, e somente se, } p \leq p',\ q \leq q' \text{ e } r \leq r'. \tag{2.2.2}$$

Proposição 2.2.5. $(B_i, \leq)$ *satisfaz a propriedade da base finita.*

Uma vez que $g_{p,q,r}$ é um vetor de peso máximo, $g_{p,q,r}$ não é uma identidade de sl_2. Consequentemente, $g_{p,q,r}(h, e+f, e-f) \neq 0$. A demonstração do próximo resultado segue diretamente dessa observação.

Proposição 2.2.6. *Para todo $g_{p,q,r} \in N$, $g_{p,q,r}(h, e+f, e-f) \neq 0$.*

Para fins técnicos, provemos a seguinte proposição.

Proposição 2.2.7. *Seja $g = g(x,y,z)$ um polinômio não nulo multihomogêneo cujo multigrau é (p,q,r), em que $p = \deg_x g$, $q = \deg_y g$ e $r = \deg_z g$. Suponha $p > 0$. Se $g' = g'(x, x_1, y, z)$ é a componente homogênea de $g(x + x_1, y, z)$ de grau 1 em x_1, então $g'(a, \alpha a, b, c) = p\alpha g(a,b,c)$ para todo elemento homogêneo a, b, $c \in L$ na componente homogênea adequada e $\alpha \in \mathbb{K}, \alpha \neq 0$.*

Demonstração. A componente de grau 1 em x_1 de $g(x + x_1, y, z)$ é multihomogênea de multigrau $(p-1, 1, q, r)$, já que g é multihomogêneo de multigrau (p,q,r). A prova segue dessa observação. □

Observação 2.2.8. *Na prova da proposição anterior foi usado o fato que $p > 0$. No entanto, fazendo modificações óbvias, ela também vale se $q > 0$, ou $r > 0$.*

Para fixar as ideias, vejamos um exemplo.

Exemplo 2.2.9. *Seja* $g_{3,2,0}(x,y) = yx^3y$ *um polinômio multihomogêneo cujo multigrau é* $(3,2,0)$. *Um cálculo simples mostra que*

$$g'_{3,2,0}(x, x_1, y) = yx_1x^2y + yxx_1xy + yx^2x_1y.$$

A substituição $x = h, x_1 = \alpha h, y = e + f$, *resulta em*

$$\begin{aligned} g'_{3,2,0}(h, \alpha h, e+f) &= \alpha g_{3,2,0}(h, \alpha h, e+f) + \alpha g_{3,2,0}(h, \alpha h, e+f) + \alpha g_{3,2,0}(h, \alpha h, e+f) \\ &= 3\alpha g_{3,2,0}(h, \alpha h, e+f). \end{aligned}$$

Lema 2.2.10. *Se* (p,q,r), $(p',q',r') \in B_i$, $1 \leq i \leq 7$, *então* $(p,q,r) \leq (p',q',r')$ *implica em* $g_{p,q,r} \leq g_{p',q',r'}$.

Demonstração. Como (p,q,r), $(p',q',r') \in B_i$, existem a, b, $c \geq 0$ tais que $p' = p+2a$, $q' = q+2b$ e $r' = r+c$. Suponha $a = c = 0$, $b = 1$. Seja $g_{p,q,r} = g_{p,q,r}(x,y,z)$ o vetor de peso máximo associado a (p,q,r). Uma vez que $p+q+r = n$ e $q \neq n$, temos que $p > 0$ ou $r > 0$.

Suponha $p > 0$. Se $g' = g(x, x_1, y, z)$ é o polinômio descrito na Proposição 2.2.7, então

$$g_{p,q,r} \leq g'(x, xy^2, y, z),$$

em que $g'(x, xy^2, y, z)$ é um polinômio multihomogêneo de multigrau $(p, q+2, r)$ ($p = \deg_x g'$, $q+2 = \deg_y g'$ e $r = \deg_z g'$). Considerando $x = h$, $y = e+f, z = e-f$, pelas proposições 2.2.7 e 2.2.6 temos:

$$g'(h, 4h, e+f, e-f) = 4pg_{p,q,r}(h, e+f, e-f) \neq 0.$$

Assim, $g'(x, xy^2, y, z) \equiv g_{p,q+2,r}$ (Lema 2.2.4). Portanto, $g_{p,q,r} \leq g_{p,q+2,r}$. As provas nos casos, $a = b = 0$, $c = 2$ e $a = 1$, $b = c = 0$, são análogas. Se $a = b = 0$ e $c = 1$, $g_{p,q,r}, g_{p,q,r+1} \in B_i$, $i \in \{1,3,6\}$. Disso, é imediato que $g_{p,q,r} \leq g_{p,q,r+1}$. □

O lema anterior tem uma consequência imediata.

Corolário 2.2.11. *Para todo* a, b, $c \geq 0$, *se* $g_{p,q,r}$, $g_{p+2a,q+2b,r+2c} \in N_i$, $1 \leq i \leq 7$, *então* $g_{p,q,r} \leq g_{p+2a,q+2b,r+2c}$.

Como cada conjunto B_i está em correspondência biunívoca com o conjunto de vetores de peso máximo N_i, denotando por B o conjunto

$$B_{1a} \cup B_{1b} \cup B_{2a} \cup B_{2b} \cup B_{3a} \cup B_{3b} \cup B_{3c},$$

então B está em correspondência biunívoca com N.

Defina a quaseordem $\leq_B$ em B como segue:

$$u \leq v \text{ se, e somente se, existe } i \text{ tal que } u, v \in B_i \text{ e } u \leq v.$$

As proposições seguintes são uma consequência imediata da definição da quaseordem de B e do Lema 2.2.10.

Proposição 2.2.12. *$(B, \leq_B)$ satisfaz a propriedade da base finita.*

Proposição 2.2.13. *Se $(p, q, r) \leq_B (p', q', r')$, então $f_{p,q,r} \leq f_{p',q',r'}$.*

A seguir, o Teorema 2.0.8 para a graduação induzida por $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Teorema 2.2.14. *Se $char(\mathbb{K}) = 0$, então o ideal $Id^{\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2}(sl_2)$ das identidades graduadas de $sl_2^{\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2}$ satisfaz a propriedade de Specht.*

Demonstração. É conhecido (veja [22]) que $\mathrm{Id}^{\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2}(sl_2) = \langle t \rangle^{T_{\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2}}$ em que t é a variável de $\mathcal{L}(Z)$ de grau homogêneo $(0, 0)$. Usando este fato, a prova é análoga à feita no Teorema 2.1.22. $\square$

2.3 A $\mathbb{Z}$-graduação de sl_2

Na última seção deste capítulo, estudamos a $\mathbb{Z}$-graduação de $L = sl_2$, ou seja,

$$L = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} L_i$$

com

$$L_{-1} = \mathbb{K}h,\ L_0 = \mathbb{K}h,\ \mathbb{K}f \text{ e } L_i = 0, \text{ para todo } i \notin \{-1, 0, 1\}.$$

Considere a álgebra de Lie livre $\mathbb{Z}$-graduada $\mathcal{L}(Z)$. Aqui, decompomos Z na união disjunta de conjuntos infinitos de variáveis $Z^{(i)}$ de grau homogêneo $i \in \mathbb{Z}$. Como $\mathrm{Supp}(sl_2^{\mathbb{Z}}) = \{-1, 0, 1\}$, vamos trabalhar apenas com as variáveis dessas componentes homogêneas. Denotamos por x_i, y_i e z_i, $i \geq 1$, as variáveis de grau homogêneo -1, 0 e 1, respectivamente. Para todo $p \geq 0$, $q \geq 0$ e $r \geq 0$, seja $P_{p,q,r}$ o espaço dos polinômios multilineares de grau $n = p+q+r$, nas variáveis $x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q, z_1, \ldots, z_r$. O módulo quociente

$$P_{p,q,r}(sl_2^{\mathbb{Z}}) = \frac{P_{p,q,r}}{P_{p,q,r} \cap \mathrm{Id}^{\mathbb{Z}}(sl_2)}$$

pode ser escrito como soma direta de $S_p \times S_q \times S_r$-módulos irredutíveis. Disso, seu caracter $\chi_{p,q,r}(sl_2^{\mathbb{Z}})$ é decomposto em uma soma de irredutíveis

$$\chi_{p,q,r}(sl_2^{\mathbb{Z}}) = \chi_{p,q,r}(P_{p,q,r}(sl_2^{\mathbb{Z}})) = \sum_{\substack{\sigma\vdash p,\, \tau\vdash q \\ \pi\vdash r}} m_{\sigma,\tau,\pi}\chi_\sigma \otimes \chi_\tau \otimes \chi_\pi,$$

em que $p+q+r = n$, $\chi_\sigma \otimes \chi_\tau \otimes \chi_\pi$ é o $S_p \times S_q \times S_r$-caracter associado a tripla de partições (σ, τ, π) e $m_{\sigma,\tau,\pi}$ é a multiplicidade correspondente.

A proposição seguinte descreve a sequência de caracteres $\mathbb{Z}$-graduados de sl_2.

Proposição 2.3.1 ([26]). *Seja*

$$\chi_{p,q,r}(sl_2^{\mathbb{Z}}) = \sum_{\substack{\sigma\vdash p,\, \tau\vdash q \\ \pi\vdash r}} m_{\sigma,\tau,\pi}\chi_\sigma \otimes \chi_\tau \otimes \chi_\pi$$

a (p, q, r)-cocaracter de sl_2 e $n = p + q + r$. Então, para todo $\sigma \vdash p, \tau \vdash q$, $\pi \vdash r$, $m_{\sigma,\tau,\pi} \leq 1$. Além disso, $m_{\sigma,\tau,\pi} = 1$ se, e somente se, $\sigma = (p), \tau = (q), \pi = (r)$ e as seguintes condições são satisfeitas:

1. $p \neq n$, $q \neq n$, $r \neq n$;

2. $|p - r| \leq 1$.

Exemplo 2.3.2. *Para $n = 3$, os módulos que aparecem na decomposição são aqueles associados às seguintes partições:*

$$\square\square \otimes \emptyset \otimes \square,\ \square \otimes \emptyset \otimes \square\square,\ \square \otimes \square \otimes \square,$$

$$\emptyset \otimes \square\square \otimes \square,\ \square \otimes \square\square \otimes \emptyset.$$

A seguir, descrevemos uma lista completa de vetores de peso máximo que geram os $GL_1 \times GL_1 \times GL_1$-módulos irredutíveis cujos caracteres aparecem com multiplicidade não nula na decomposição de $\chi_{p,q,r}(sl_2^{\mathbb{Z}})$.

(1) $h_{r+1,q,r}(x, y, z) = x(xz)^r y^q$, em que $q^2 + r^2 \neq 0$;

(2) $h_{p,q,p}(x, y, z) = x(xz)^{p-1} y^q z$, em que $p \geq 0$;

(3) $h_{p,q,p+1}(x, y, z) = z(xz)^p y^q$, em que $p^2 + q^2 \neq 0$.

Observe que cada vetor de peso máximo $h_{p,q,r}$ está associado a uma tripla (p, q, r) de $\mathbb{N}^3$, que, como no caso $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, coincide com o multigrau de $g_{p,q,r}$. Assim, se (p, q, r) satisfaz as condições da Proposição 2.3.1, temos a seguinte correspondência:

$$(p, q, r) \longleftrightarrow h_{p,q,r}.$$

Abaixo, um exemplo, quando $n = 3$.

Exemplo 2.3.3.

$$\begin{array}{rcl}
\square\square \otimes \emptyset \otimes \square \longleftrightarrow (2, 0, 1) & \longleftrightarrow & h_{2,0,1}(x, y, z) = x(xz); \\
\square \otimes \emptyset \otimes \square\square \longleftrightarrow (1, 0, 2) & \longleftrightarrow & h_{1,0,2}(x, y, z) = z(xz); \\
\square \otimes \square \otimes \square \longleftrightarrow (1, 1, 1) & \longleftrightarrow & h_{1,1,1}(x, y, z) = xyz; \\
\emptyset \otimes \square\square \otimes \square \longleftrightarrow (0, 2, 1) & \longleftrightarrow & h_{0,2,1}(x, y, z) = zy^2; \\
\square \otimes \square\square \otimes \emptyset \longleftrightarrow (1, 2, 0) & \longleftrightarrow & h_{1,2,0}(x, y, z) = xy^2.
\end{array}$$

O lema a seguir é análogo ao Lema 2.1.8.

Lema 2.3.4. *Seja $h = h(x, y, z)$ um polinômio multihomogêneo em que $\deg_x h = p$, $\deg_y h = q$ e $\deg_z h = r$. Se h não é uma identidade de $sl_2^{\mathbb{Z}}$, então h gera (mod $Id^{\mathbb{Z}}(sl_2)$) um $GL_1 \times GL_1 \times GL_1$-módulo irredutível cujo $S_p \times S_q \times S_r$-caracter correspondente é $\chi_{(p)} \otimes \chi_{(q)} \otimes \chi_{(r)}$.*

Denote por

$$P_1, P_2 \text{ e } P_3$$

o conjunto de vetores de peso máximo associados a (1), (2) e (3), respectivamente, e escreva

$$P = P_1 \cup P_2 \cup P_3. \tag{2.3.1}$$

Para cada $i \in \{1, 2, 3\}$, seja C_i o subconjunto de $\mathbb{N}^3$ correspondente a P_i. Disso,

$$\begin{aligned} C_1 &= \{(r+1, q, r) \ : \ q^2 + r^2 \neq 0\}; \\ C_2 &= \{(p, q, p) \ : \ p > 0\}; \\ C_3 &= \{(p, q, p+1) \ : \ p^2 + q^2 \neq 0\}. \end{aligned}$$

Em cada um dos conjuntos acima, considere a quaseordem natural $\leq$. Mais precisamente,

$$(p, q, r) \leq (p', q', r') \text{ se, e somente se, } p \leq p',\ q \leq q' \text{ e } r \leq r'. \tag{2.3.2}$$

Segue da definição acima

Proposição 2.3.5. $(C_i, \leq_C)$ *satisfaz a propriedade da base finita.*

Lema 2.3.6. *Seja* $(r+1, q, r)$, $(r'+1, q', r') \in C_1$. *Então,* $(r+1, q, r) \leq (r'+1, q', r')$ *implica em* $h_{r+1,q,r} \leq h_{r'+1,q',r'}$.

Demonstração. Seja $h_{r+1,q,r} = h_{r+1,q,r}(x, y, z)$ o vetor de peso máximo associado a $(r+1, q, r)$. Como o grau de h em x é $r+1 > 0$, é fácil ver que considerando

$$h_1 = h'(x, x(xz), y, z) \text{ e } h_2 = h'(x, xy, y, z),$$

em que $h' = h'(x, x_1, y, z)$ é o polinômio definido na Proposição 2.2.7 temos

$$h_{r+1,q,r} \leq h_{r+2,q,r+1} \text{ e } h_{r+1,q,r} \leq h_{r+1,q+1,r}.$$

Isso completa a prova do lema. □

Usando uma argumentação semelhante a anterior, temos:

Lema 2.3.7. *Seja* (p, q, p), $(p', q', p') \in C_2$. *Então,* $(p, q, p) \leq (p', q', p')$ *implica em* $h_{p,q,p} \leq h_{p',q',p'}$.

Lema 2.3.8. *Seja* $(p, q, p+1)$, $(p', q', p'+1) \in C_3$. *Então,* $(p, q, p) \leq (p', q', p'+1)$ *implica em* $f_{p,q,p} \leq f_{p',q',p'+1}$.

Os lemas anteriores têm como consequência imediata

Corolário 2.3.9. *Se* $p \leq p'$, $q \leq q'$, $r \leq r'$ *e* $h_{p,q,r}, h_{p',q',r'} \in P_i$, $1 \leq i \leq 3$, *então* $h_{p,q,r} \leq h_{p',q',r'}$.

Se C é o conjunto

$$C = C_1 \cup C_2 \cup C_3,$$

já que C_i está em correspondência biunívoca com P_i, então P está em correspondência biunívoca com C.

Defina a quaseordem $\leq_C$ em C da seguinte forma:

$$u \leq_C v \text{ se, e somente se, } \exists\, i \text{ tal que } u, v \in C_i \text{ e } u \leq_{C_i} v,$$

As proposições a seguir são uma consequência imediata do que foi visto antes.

Proposição 2.3.10. *$(C, \leq_C)$ satisfaz a propriedade da base finita.*

Proposição 2.3.11. *Se $(p, q, r) \leq_C (p', q', r')$, então $f_{p,q,r} \leq f_{p',q',r'}$.*

Por fim, provamos o Teorema 2.0.8, quando $G = \mathbb{Z}$. Denotamos por $z^{(i)}$ as variáveis de $\mathcal{L}(Z)$ de grau homogêneo $i \notin \{-1, 0, 1\}$.

Teorema 2.3.12. *Se $char(\mathbb{K}) = 0$, então o ideal $Id^{\mathbb{Z}}(sl_2)$ das identidades graduadas de $sl_2^{\mathbb{Z}}$ satisfaz a propriedade de Specht módulo o $T_{\mathbb{Z}}$-ideal gerado por $\{z^{(i)} : i \notin \{-1, 0, 1\}\}$.*

Demonstração. Usando o fato que $\mathrm{Id}^{\mathbb{Z}}(sl_2) = \left\langle x_1 x_2,\, z^{(i)} : i \notin \{-1, 0, 1\} \right\rangle^{T_{\mathbb{Z}}}$ (veja [22]), a prova segue como no Teorema 2.1.22. $\square$

Capítulo 3

Crescimento das Identidades Graduadas de sl_2

A sequência de codimensões $c_n^G(L)$ de uma álgebra de Lie G-graduada L sobre um corpo de característica 0 mede, em certo sentido, o crescimento das identidades G-graduadas de L. Se $c_n^G(L)$ é polinomial, isso significa, grosso modo, que o T_G-ideal das identidades G-graduadas de L é bem grande, já que em característica 0 todas as identidades graduadas seguem daquelas multilineares. Em geral, não é um trabalho fácil calcular a sequência $c_n^G(L)$. Para contornar essa dificuldade, se $c_n^G(L)$ é limitada exponencialmente, calculamos o limite superior da sequência $\sqrt[n]{c_n^G(L)}$, denotado por $\overline{\exp}^G(L)$ e chamado de expoente G-graduado superior, obtendo assim uma estimativa superior para o crescimento de L.

Em [8], Drensky descreve a sequência de codimensões de sl_2 (sem graduação) e o comportamento das subvariedades da variedade gerada por essa álgebra na linguagem de codimensões. Neste capítulo, provamos que o expoente graduado da variedade gerada por sl_2 é sempre igual a 3 (para a graduacão trivial, veja [32]). Além disso, para $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ e $\mathbb{Z}$ toda subvariedade própria tem crescimento polinomial e para $\mathbb{Z}_2$, o expoente G-graduado superior é no máximo 2.

Recomendamos ao leitor consultar, sempre que necessário, as listas de vetores de peso máximo definidas em (2.1.3), (2.2.1) e (2.3.1), para as graduações em $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ e $\mathbb{Z}$, respectivamente.

De forma concisa, nosso principal objetivo é provar:

Teorema 3.0.13. *Seja $\mathfrak{V}$ uma subvariedade própria de sl_2^G. Então:*

1. $\exp^G(sl_2) = 3$;
2. $\overline{\exp}^{\mathbb{Z}_2}(\mathfrak{V}) \leq 2$;
3. $\exp^G(\mathfrak{V}) = 0$ *ou* 1*, para* $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ *e* $G = \mathbb{Z}$.

A fim de provar o Teorema 3.0.13, estudamos separadamente cada uma das três graduações não triviais de sl_2 dadas por $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ e $\mathbb{Z}$.

3.1 A $\mathbb{Z}_2$-graduação de sl_2

Começamos mostrando que o expoente $\mathbb{Z}_2$-graduado de sl_2 é igual a 3.

Proposição 3.1.1. $\exp^{\mathbb{Z}_2}(sl_2) = 3$.

Demonstração. Como visto em (1.4.3),

$$c_n^{\mathbb{Z}_2}(sl_2) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} c_{k,n-k}(sl_2), \text{ em que } c_{k,n-k}(sl_2) = \dim P_{k,n-k}(sl_2).$$

Se M_σ e M_τ são os módulos irredutíveis associados às partições $\sigma \vdash k$ e $\tau \vdash n-k$, respectivamente, então

$$P_{k,n-k}(sl_2) = \bigoplus_{\substack{\sigma=(k) \\ \tau=(q+r,q)}} M_\sigma \otimes M_\tau,$$

com os parâmetros k, q e r satisfazendo $k \neq n$, $r \neq n$ e uma das condições $r \equiv 1$ ou $k + q \equiv 1 (\text{mod } 2)$. Pela fórmula dos ganchos (Teorema 1.5.11),

$$\dim M_\sigma = 1 \text{ e } \dim M_\tau = \binom{n-k}{q} \frac{r+1}{q+r+1},$$

e disso,

$$c_{k,n-k}(sl_2) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{q=0}^{\frac{n-k-1}{2}} \binom{n-k}{q} \frac{r+1}{q+r+1}, & \text{se } n+k \equiv 1 \,(\text{mod } 2); \\[2ex] \displaystyle\sum_{\substack{q=0 \\ q \text{ ímpar}}}^{\frac{n-k}{2}} \binom{n-k}{q} \frac{r+1}{q+r+1}, & \text{se } n \equiv 0 \text{ e } k \equiv 0 \,(\text{mod } 2); \\[2ex] \displaystyle\sum_{\substack{q=0 \\ q \text{ par}}}^{\frac{n-k}{2}} \binom{n-k}{q} \frac{r+1}{q+r+1}, & \text{se } n \equiv 1 \text{ e } k \equiv 1 \,(\text{mod } 2). \end{cases}$$

Assim,

$$c_{k,n-k}(sl_2) \leq \sum_{q=0}^{n-k} \binom{n-k}{q} \leq 2^{n-k}$$

e isso implica em

$$c_n^{\mathbb{Z}_2}(sl_2) \leq 3^n.$$

Por outro lado, pelo Lema 1.4.2,

$$c_n(sl_2) \leq c_n^{\mathbb{Z}_2}(sl_2).$$

Com isso,

$$c_n(sl_2) \leq c_n^{\mathbb{Z}_2}(sl_2) \leq 3^n.$$

Usando o Teorema 1 de [32] (pg. 486) que diz que

$$\exp(sl_2) = \dim(sl_2) = 3,$$

obtemos $\exp^{\mathbb{Z}_2}(sl_2) = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n^{\mathbb{Z}_2}(sl_2)} = 3.$ □

Dada uma subvariedade própria $\mathfrak{V}$ de sl_2, existe um vetor de peso máximo $f_{k,q,r}$ tal que $f_{k,q,r} \in \mathrm{Id}^{\mathbb{Z}_2}(\mathfrak{V})$, já que $\mathcal{L}(Z) \supseteq \mathrm{Id}^{\mathbb{Z}_2}(\mathfrak{V}) \supsetneqq \mathrm{Id}^{\mathbb{Z}_2}(sl_2)$ e os vetores de peso máximo geram, como $T_{\mathbb{Z}_2}$-ideal, $\mathcal{L}(Z)\,(\mathrm{mod}\ \mathrm{Id}^{\mathbb{Z}_2}(sl_2))$. Queremos determinar um número significativo de vetores de peso máximo $f_{k',q',r'}$ que são consequências de $f_{k,q,r}$ e, por sua vez, não contribuem com o expoente de $\mathfrak{V}$.

No capítulo 2, para provar a propriedade de Specht para o ideal das identidades graduadas de sl_2, foi suficiente comparar (com respeito a quaseordem (2.0.1)) vetores de peso máximo, digamos $f_{k,q,r}$ e $f_{k',q',r'}$, de um mesmo conjunto M_i. A condição de pertencer ao mesmo conjunto, restringe a escolha dos parâmetros k, k', q, q', r, r' e, muitas vezes, limita a paridade daqueles de mesmo nome (por exemplo, q e q' simultaneamente pares ou ímpares). Aqui, estamos interessados em encontrar condições, um pouco mais gerais, com respeito aos parâmetros k, q, r, a, b e c tais que

$$f_{k,q,r} \leq f_{k+a,q+b,r+c}.$$

Consequentemente, iremos tratar de vetores de peso máximo que não necessariamente pertencem ao mesmo conjunto M_i e que, por sua vez, são definidos de forma diferente. Para contornar essa dificuldade, novamente o Lema 2.1.8 será de grande valia.

Os próximos lemas são consequências imediatas da definição do polinômio $f_{k,q,r}$, em cada caso.

Lema 3.1.2. *Para todo q ímpar, r ímpar e $k \geq 0$, temos $f_{0,q,r} \leq f_{k,q,r}$.*

Demonstração. Segue do fato que $f_{0,q,r}(y_1,y_2) = g_l(y_1,y_2)y_1^r$ e $f_{k,q,r}(x,y_1,y_2) = g_l(y_1,y_2)y_1^r x^k$. □

Lema 3.1.3. *Para todo q ímpar e b par, $f_{0,q,0} \leq f_{0,q+b,0}$.*

Demonstração. Segue do fato que $f_{0,q,0}(y_1,y_2) = g_l(y_1,y_2)$, em que $q = 2l+1$. □

Lema 3.1.4. *Para todo q ímpar, $r \geq 0$ e $c \geq 0$, $f_{0,q,r} \leq f_{0,q,r+c}$.*

Demonstração. Segue do fato que $f_{0,q,r}(y_1,y_2) = g_l(y_1,y_2)y_1^r$, para todo $r \geq 0$. □

A seguir, apresentamos alguns lemas cuja prova não é imediata.

Lema 3.1.5. *Para todo r ímpar, $b \geq 0$, $f_{0,q,r} \leq f_{0,q+b,r}$.*

Demonstração. Suponha q ímpar. Multiplicando à direita $f_{0,q,r}(y_1,y_2) = g_l(y_1,y_2)y_1^r$ b-vezes por (y_1y_2) obtemos

$$g = g_l(y_1,y_2)y_1^r(y_1y_2)^b,$$

que não se anula considerando $x = h$, $y_1 = e+f$ e $y_2 = f$. Como g é um polinômio multihomogêneo de grau $q+b+r$ em y_1 e $q+b$ em y_2 e além disso é alternado em $q+b$ pares distintos (y_1,y_2), pelo Lema 2.1.8, $g \equiv f_{0,q+b,r}$. Portanto $f_{0,q,r} \leq f_{0,q+b,r}$, já que $f_{0,q,r} \leq g$. O caso q par é análogo. □

Apenas para relembrar, se $f_{k,q,r}$ é um vetor de peso máximo, então a tripla (k, q, r) de inteiros não negativos satisfaz $k \neq n$, $r \neq n$ (n denota a soma $k + q + r$) e uma das condições $r \equiv 1$ ou $k + q \equiv 1(\text{mod } 2)$. O lema a seguir mostra que se o parâmetro r em $f_{k,q,r}$ é fixo e satisfaz $r \equiv 1$ (mod 2), os demais podem ser acrescidos de qualquer quantidade que o resultado ainda será uma consequência de $f_{k,q,r}$.

Lema 3.1.6. *Para todo $k > 0$, r ímpar e a, $b \geq 0$, $f_{k,q,r} \leq f_{k+a,q+b,r}$.*

Demonstração. Como para todo $k > 0$, $f_{k,q,r}(x, y_1, y_2) = g_l(y_1, y_2)y_1^r x^k$, se q é ímpar, e $f_{k,q,r}(x, y_1, y_2) = x[d(y_1, y_2)]^l y_1^r x^{k-1}$, se q é par, é imediato que $f_{k,q,r} \leq f_{k+a,q,r}$. De forma análoga ao lema anterior, concluímos que $f_{k,q,r} \leq f_{k,q+b,r}$. Portanto, temos que $f_{k,q,r} \leq f_{k+a,q+b,r}$, como desejado. □

O mesmo vale quando os parâmetros fixos são k e q em $f_{k,q,r}$ satisfazendo $k + q \equiv 1(\text{mod } 2)$.

Lema 3.1.7. *Para todo $k > 0$, $k + q \equiv 1(\text{mod } 2)$ e $c \geq 0$, $f_{k,q,r} \leq f_{k,q,r+c}$.*

Demonstração. Temos duas possibilidades: $q = 2l + 1$ e k par ou $q = 2l$ e k ímpar. Suponha que a primeira ocorre. Neste caso,

$$f_{k,q,r} \equiv f'_{k,q,r} \text{ com } f'_{k,q,r}(x, y_1, y_2) = x[d(y_1, y_2)]^l \overline{y}_1 x^{k-1} \overline{y}_2 y_1^r.$$

De fato, se r é par, $f_{k,q,r} = f'_{k,q,r}$. Caso r seja ímpar, como $f'_{k,q,r}$ não é uma identidade de $sl_2^{\mathbb{Z}_2}$, então $f_{k,q,r} \equiv f'_{k,q,r}$. O resultado é obtido observando que $f'_{k,q,r} \leq f'_{k,q,r+c}$. □

Lema 3.1.8. *Para todo k ímpar, q par > 0, $f_{k,q-1,1} \leq f_{k,q,0}$.*

Demonstração. Uma vez que $q - 1$ é ímpar, $f_{k,q-1,1}(x, y_1, y_2) = g_l(y_1, y_2)y_1 x^k$, com $q - 1 = 2l + 1$. Escrevendo

$$\begin{aligned} f_{k,q,0}(x, y_1, y_2) &= g_l(y_1, y_2)\overline{y}_1 x^k \overline{y}_2 \\ &= g_l(y_1, y_2)y_1 x^k y_2 - g_l(y_1, y_2)y_2 x^k y_1 \end{aligned}$$

e observando que $g_l(y_1, y_2)y_2 x^k y_1$ é obtido de $f_{k,q-1,1}(x, y_1, y_2)y_2$ trocando y_1 por y_2 e usando que $g_l(y_1, y_2) = -g_l(y_2, y_1)$, concluímos a prova. □

O lema a seguir tem uma prova análoga ao Lema 2.1.13. Por esse motivo, faremos uma demonstração mais simplificada.

Lema 3.1.9. *Para todo k par, q ímpar, $f_{0,q,0} \leq f_{k,q,0}$.*

Demonstração. Sendo $f_{0,q,0}(y_1, y_2) = g_l(y_1, y_2)$, seja $f' = f'(y_1, y_2, y)$, $f'' = f''(y_1, y_2, y)$ as componentes de grau 1 em y de $f_{0,q,0}(y_1 + y, y_2)$ e $f_{0,q,0}(y_1, y_2 + y)$, respectivamente. Substituindo y por $y_1 x^k$ em f' e por $y_2 x^k$ em f'', obtemos que

$$g(x, y_1, y_2) = f'(y_1, y_2, y_1 x^k) + f''(y_1, y_2, y_2 x^k)$$

é uma consequência de $f_{0,q,0}$. Não é difícil ver que $f'(y_1, y_2, y_1 x^k) + f''(y_1, y_2, y_2 x^k)$ é um polinômio multihomogêneo de grau k em x, q em y_1 e y_2 e, além disso, é alternado em q pares distintos (y_1, y_2).

Uma vez que $f'(y_1, y_2, y)$, $f''(y_1, y_2, y)$ são as componentes de grau 1 em y de $f_{k,q,0}(y_1 + y, y_2)$ e $f_{k,q,0}(y_1, y_2 + y)$, respectivamente, temos:

$$\begin{aligned} g(h, e+f, f) &= f'(e+f, f, 2^k(e+f)) + f''(e+f, f, 2^k f) \\ &= 2^k q f_{0,q,0}(e+f, f) + 2^k q f_{k,q,0}(e+f, f) \\ &= 2^k 2q f_{0,q,0}(e+f, f) \neq 0. \end{aligned}$$

Assim, g não é uma identidade de sl_2 e disso concluímos que $g \equiv f_{k,q,0}$. Portanto, $f_{0,q,0} \leq f_{k,q,0}$. □

Como consequência dos lemas anteriores temos:

Proposição 3.1.10. *Seja I um $T_{\mathbb{Z}_2}$-ideal tal que $I \supsetneqq Id^{\mathbb{Z}_2}(sl_2)$. Então, existe um inteiro positivo ímpar a tal que $f_{0,a,0} \in I$. Mais ainda, $f_{k,q,r} \in I$ para todo k, $r \geq 0$ e $q \geq a$.*

Demonstração. A primeira parte é um resultado de [23] (pg. 663, Proposição 3). Para a segunda parte, temos seis possibilidades para $f_{k,q,r}$:

1) Se q é ímpar e $k = 0$, então $f_{0,a,0} \leq f_{0,q,0} \leq f_{0,q,r}$ segue do lemas 3.1.3 e 3.1.4.

2) Se q é par, r é ímpar e $k = 0$, então $f_{0,a,0} \leq f_{0,a,r} \leq f_{0,q,r}$ segue dos lemas 3.1.4 e 3.1.5.

3) Se $k > 0$ e r é ímpar, então $f_{0,a,0} \leq f_{0,a,1} \leq f_{k,a,1} \leq f_{k,q,1} \leq f_{k,q,r}$ segue dos Lemas 3.1.4, 3.1.2, 3.1.6 e do Corolário 2.1.16.

4) Se $k > 0$ e r é par > 0, então $f_{0,a,0} \leq f_{0,a,1} \leq f_{k,a,1} \leq f_{k,q,1} \leq f_{k,q,r}$ segue dos lemas 3.1.4, 3.1.2, 3.1.6 e 3.1.7.

5) Se k é ímpar, q é par e $r = 0$, então $f_{0,a,0} \leq f_{0,a,1} \leq f_{k,a,1} \leq f_{k,q-1,1} \leq f_{k,q,0}$ segue dos lemas 3.1.4, 3.1.2, 3.1.6 e 3.1.8.

6) Se k é par, q é ímpar e $r = 0$, então $f_{0,a,0} \leq f_{0,q,0} \leq f_{k,q,0}$ segue dos lemas 3.1.3 e 3.1.9. □

Em suma, a proposição anterior diz que os vetores de peso máximo $f_{k,q,r}$ que possivelmente contribuem com a sequência de codimensões graduadas de uma subvariedade própria de sl_2 possuem o parâmetro q limitado. Isso será suficiente para diminuir o expoente, como veremos a seguir.

Teorema 3.1.11. *Seja $\mathfrak{V}$ uma subvariedade própria de $sl_2^{\mathbb{Z}_2}$. Então,*

$$\overline{\exp}^{\mathbb{Z}_2}(\mathfrak{V}) \leq 2.$$

Demonstração. Denote por I o ideal das identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas de $\mathfrak{V}$. Como $\mathfrak{V}$ é uma subvariedade própria de $sl_2^{\mathbb{Z}_2}$, então $I \supsetneqq \mathrm{Id}^{\mathbb{Z}_2}(\mathfrak{V})$. Se M_σ e M_τ são os módulos irredutíveis associados as partições $\sigma \vdash k$ e $\tau \vdash n-k$, respectivamente, e $m_{\sigma,\tau} \leq 1$ é a multiplicidade do $S_k \times S_{n-k}$-módulo $M_\sigma \otimes M_\tau$, então

$$P_{k,n-k}(I) = \bigoplus_{\substack{\sigma=(k) \\ \tau=(q+r,q)}} m_{\sigma,\tau} M_\sigma \otimes M_\tau$$

com os parâmetros k, q e r satisfazendo $k \neq n$, $r \neq n$, uma das condições $r \equiv 1$ ou $k+q \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2)$ e $q \leq a$, para algum inteiro positivo a. Disso,

$$c_{k,n-k}(I) \leq \sum_{\substack{q=0 \\ q \leq a}}^{n-k} \binom{n-k}{q} \frac{r+1}{q+r+1},$$

com $r = n - k - 2q$. Uma vez que $\dfrac{r+1}{q+r+1} \leq 1$ e $\dfrac{1}{q!} \leq 1$, para todo $q \in \{0, \ldots, n-k\}$, temos

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{q=0\\ q\leq a}}^{n-k} \binom{n-k}{q} \frac{r+1}{q+r+1} \quad &\leq \quad \sum_{\substack{q=0\\ q\leq a}}^{n-k} \frac{(n-k)!}{(n-k-q)!} \leq \\ \sum_{\substack{q=0\\ q\leq a}}^{n-k} \frac{(n-k)!}{(n-k-a)!} \quad &\leq \quad \sum_{\substack{q=0\\ q\leq a}}^{n-k} (n-k)^a \leq (a+1)(n-k)^a\end{aligned}$$

e consequentemente,

$$c_n(I) \quad \leq \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (a+1)(n-k)^a \leq \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (a+1)n^a = (a+1)n^a 2^n.$$

Portanto, $\overline{\exp}^{\mathbb{Z}_2}(I) \leq 2$. □

3.2 A $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$-graduação de sl_2

A próxima proposição calcula o expoente $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$-graduado de sl_2. Vale ressaltar que a prova é muito semelhante ao caso $\mathbb{Z}_2$.

Proposição 3.2.1. $\exp^{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2}(sl_2) = 3$.

Demonstração. Temos que

$$c_n^{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2}(sl_2) = \sum_{p+q+r=n} \binom{n}{p, q, r} c_{p,q,r}(sl_2) = \sum_{p+q+r=n} \binom{n}{p, q, r},$$

com p, q e r satisfazendo $p \neq n$, $q \neq n$, $r \neq n$ e uma das condições $p + q \equiv 1$ ou $q + r \equiv 1$ (mod 2), já que, neste caso, $c_{p,q,r}(sl_2) = \dim P_{p,q,r}(sl_2^{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2}) = 1$. Disso,

$$c_n^{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2}(sl_2) \leq \sum_{p+q+r=n} \binom{n}{p, q, r} = 3^n.$$

Por outro lado, uma vez que

$$c_n(sl_2) \leq c_n^{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2}(sl_2),$$

usando um resultado de [32] que diz que

$$\exp(sl_2) = \dim(sl_2) = 3,$$

concluímos a demonstração. □

Nosso objetivo nos lemas seguintes consiste, grosso modo, em identificar subconjuntos totalmente ordenados “convenientes”no conjunto de vetores de peso máximo N.

Lema 3.2.2. *Para todo $p, p', q, q', r, r' \geq 0$ com $p \leq p'$, $q \leq q'$ e $r \leq r'$ temos que:*

1. (a) *Se q é ímpar, então $g_{0,q,r} \leq g_{0,q,r'}$,*
   (b) *Se r é ímpar, então $g_{0,q,r} \leq g_{0,q',r}$;*
2. (a) *If p é ímpar, então $g_{p,0,r} \leq g_{p,0,r'}$*
   (b) *If r é ímpar, então $g_{p,0,r} \leq g_{p',0,r}$*
3. (a) *Se p é ímpar, então $g_{p,q,0} \leq g_{p,q',0}$,*
   (b) *Se q é ímpar, então $g_{p,q,0} \leq g_{p',q,0}$.*

Demonstração. 1a) É uma consequência imediata do fato que

$$g_{0,q,r}(y,z) = zy^q z^{r-1}, \text{ para todo } r > 0.$$

1b) Neste caso, temos que

$$g_{0,q,r} \equiv yz^r y^{q-1}, \text{ para todo } q > 0.$$

De fato, já que a substituição $y = e + f$ e $z = e - f$ não anula $yz^r y^{q-1}$, o resultado segue do Lema 2.2.4.

Os outros itens são análogos. □

Como consequência temos:

Lema 3.2.3. *Para todo p, p', q, q', r, $r' \geq 0$ tais que $p \leq p'$, $q \leq q'$ e $r \leq r'$ temos que:*

1. *Se $q' + r' \equiv 1\,(mod\ 2)$, então $g_{0,q,r} \leq g_{0,q',r'}$;*
2. *Se $p' + r' \equiv 1\,(mod\ 2)$, então $g_{p,0,r} \leq g_{p',0,r'}$;*
3. *Se $p' + q' \equiv 1\,(mod\ 2)$, então $g_{p,q,0} \leq g_{p',q',0}$.*

Demonstração. 1) Suponha q' ímpar e r' par. Existem três possibilidades para o par (q, r): q ímpar e r par ou q par e r ímpar ou ambos q e r ímpares. Se a primeira possibilidade acontece, o resultado segue do Corolário 2.2.11. Se a segunda ou a terceira possibilidade ocorre, então

$$g_{0,q,r} \leq g_{0,q',r} \leq g_{0,q',r'},$$

fazendo uso do lema anterior.

As provas dos itens 2 e 3 são análogas. □

Lema 3.2.4. *Para todo p, q, $r \geq 0$ temos que:*

1. *Se $q + r \equiv 1\,(mod\ 2)$, então $g_{0,q,r} \leq g_{p,q,r}$;*
2. *Se $p + r \equiv 1\,(mod\ 2)$, então $g_{p,0,r} \leq g_{p,q,r}$;*
3. *Se $p + q \equiv 1\,(mod\ 2)$, então $g_{p,q,0} \leq g_{p,q,r}$.*

Demonstração. 1) Suponha q ímpar e r par. Definindo

$$g'_{p,q,r}(x,y,z) = zy^q z^{r-1} x^p,$$

é suficiente provar que

$$g_{p,q,r} \equiv g'_{p,q,r}, \text{ para todo } p > 0.$$

Com efeito, substituindo $x = h$, $y = e + f$ e $z = e - f$ em $g'_{p,q,r}$, uma vez que $zy^q z^{r-1} \in \mathcal{L}_{01}$, $g'_{p,q,r}(h, e+f, e-f)$ é um múltiplo de $e+f$, quando p é par ou é um múltiplo de $e-f$, quando p é ímpar.

Se q é par e r é ímpar, com cálculos semelhantes é fácil ver que

$$g_{p,q,r} \equiv yz^r y^{q-1} x^p, \text{ para todo } p > 0.$$

A prova do item 2 é semelhante e da do item 3 segue imediatamente da definição de $g_{p,q,r}$. □

A próxima proposição é a ferramenta principal para o cálculo da cota superior do expoente $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$-graduado das subvariedades próprias de sl_2. Relembramos que se $g_{p,q,r}$ é um vetor de peso máximo, então em particular, p, q e r satisfazem $p + q \equiv 1$ ou $q + r \equiv 1 \pmod 2$.

Proposição 3.2.5. *Seja I um $T_{\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2}$-ideal tal que $I \supsetneqq Id^{\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2}(sl_2)$. Existem inteiros $a, b, c > 0$ tais que $g_{p,q,r} \in I$, se p, q e r satisfazem uma das seguintes condições:*

1. *$q + r \equiv 1\,(mod\ 2)$, $q \geq c$ e $r \geq a$;*

2. *$p + r \equiv 1\,(mod\ 2)$, $p \geq c$ e $r \geq b$;*

3. *$p + q \equiv 1\,(mod\ 2)$, $p \geq a$ e $q \geq b$.*

Demonstração. Seja I um $T_{\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2}$-ideal. Como $I \supsetneqq \mathrm{Id}^{\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2}(sl_2)$, existe um vetor de peso máximo g_{p_0,q_0,r_0} em I, para alguma tripla (p_0, q_0, r_0). A substituição $x = yz$ em $g_{p_0,q_0,r_0}(x,y,z)$, tem como consequência

$$g_{0,q_0+p_0,r_0+p_0} \in I.$$

De forma análoga, $g_{p_0+q_0,0,r_0+q_0}$, $g_{p_0+r_0,q_0+r_0,0} \in I$.

Defina $a = p_0 + r_0$, $b = q_0 + r_0$ e $c = p_0 + q_0$. Se $q + r \equiv 1 \pmod 2$, $q \geq c$ e $r \geq a$, usando os Lemas 3.2.3 e 3.2.4 obtemos

$$g_{0,q_0+p_0,r_0+p_0} = g_{0,c,a} \leq g_{0,q,r} \leq g_{p,q,r}.$$

O outros casos são análogos. □

Proposição 3.2.6. *Seja I um $T_{\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2}$-ideal tal que $I \supsetneqq Id^{\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2}(sl_2)$, a, b, c os inteiros positivos dados na proposição anterior e $d = \max\{a,b,c\}$. Então, $g_{p,q,r} \in I$, se p, q e r satisfazem uma das seguintes condições:*

1. *$q \geq d+1$ e $r \geq d+1$;*

2. *$p \geq d+1$ e $r \geq d+1$;*

3. $p \geq d+1$ *e* $q \geq d+1$.

Demonstração. Suponha sem perda da generalidade $q \geq d+1$ e $r \geq d+1$. Se $q+r \equiv 1 \pmod 2$, o resultado segue da proposição anterior. Caso contrário, $(q-1)+r \equiv 1 \pmod 2$. Disso,

$$g_{0,c,a} \leq g_{p,q-1,r} \leq g_{p,q,r}$$

em que a última desigualdade é obtida na demonstração do item 2 do Lema 3.2.4. □

Teorema 3.2.7. *Seja* $\mathfrak{V}$ *uma subvariedade própria de* $sl_2^{\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2}$. *Então,*

$$\exp^{\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2}(\mathfrak{V}) \leq 1.$$

Demonstração. Se $I = \mathrm{Id}^{\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2}(\mathfrak{V})$, como $\mathfrak{V}$ é uma subvariedade própria de $sl_2^{\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2}$, então $I \supsetneqq \mathrm{Id}^{\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2}(sl_2)$. Pela proposição anterior,

$$c_n(I) \leq \sum_{\substack{p+q+r=n \\ p,q\leq d}} \binom{n}{p,q,r} + \sum_{\substack{p+q+r=n \\ q,r\leq d}} \binom{n}{p,q,r} + \sum_{\substack{p+q+r=n \\ p,r\leq d}} \binom{n}{p,q,r}.$$

Denotando por

$$c'_n(I) = \sum_{\substack{p+q+r=n \\ p,q\leq d}} \binom{n}{p,q,r}$$

tem-se

$$\begin{aligned} c'_n(I) &= \sum_{\substack{p+q+r=n \\ p,q\leq d}} \frac{n!}{p!q!(n-(p+q))!} \leq \sum_{\substack{p+q+r=n \\ p,q\leq d}} \frac{n!}{(n-(p+q))!} \\ &\leq \sum_{\substack{p+q+r=n \\ p,q\leq d}} \frac{n!}{(n-(2d))!} \leq (d+1)^2 \frac{n!}{(n-(2d))!} \leq (d+1)^2 n^{2d}, \end{aligned}$$

já que $\dfrac{1}{p!} \leq 1$, $\dfrac{1}{q!} \leq 1$ e $p+q \leq 2d$, para todo $p \in \{0,1,\ldots,d\}$ e $q \in \{0,1,\ldots,d\}$. Assim,

$$c_n(I) \leq 3(d+1)^2 n^{2d}$$

e portanto, $\exp^{\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2}(\mathfrak{V}) \leq 1$ (para a existência do limite, veja [9]). □

3.3 A $\mathbb{Z}$-graduação de sl_2

Como antes, o expoente $\mathbb{Z}$-graduado de sl_2 é igual a 3. Vale também que toda subvariedade própria tem expoente no máximo 1.

Proposição 3.3.1. $\exp^{\mathbb{Z}}(sl_2) = 3$.

Demonstração. Uma vez que

$$c_n^{\mathbb{Z}}(sl_2) = \sum_{p+q+r=n} \binom{n}{p,q,r} c_{p,q,r}(sl_2),$$

com $c_{p,q,r}(sl_2) = \dim P_{p,q,r}(sl_2^{\mathbb{Z}}) \leq 1$, então

$$c_n^{\mathbb{Z}}(sl_2) \leq \sum_{p+q+r=n} \binom{n}{p,q,r} = 3^n.$$

Além disso, como $c_n(sl_2) \leq c_n^{\mathbb{Z}}(sl_2)$, usando que $\exp(sl_2) = \dim(sl_2) = 3$ (ver [32]), concluímos $\exp^{\mathbb{Z}}(sl_2) = 3$, como desejado. ☐

Lema 3.3.2. *Para todo p, p', q, r, $r' \geq 0$ com $p \leq p'$, $q \geq 0$ e $r \leq r'$ temos que:*

1. $h_{p,q,p} \leq h_{p+1,q,p}$ *e* $h_{p,q,p} \leq h_{p,q,p+1}$;
2. $h_{r+1,q,r} \leq h_{r+1,q,r+1}$;
3. $h_{p,q,p+1} \leq h_{p+1,q,p+1}$.

Demonstração. Como

$$h_{p,q,p}(x,y,z) = x(xz)^{p-1}y^q z,$$

a multiplicação à direita por x e z resulta em

$$x(xz)^{p-1}y^q zx \quad \text{e} \quad x(xz)^{p-1}y^q z^2,$$

respectivamente. Um cálculo simples mostra que ambos não se anulam quando avaliados em $x = e$, $y = h$ e $z = f$. Portanto, pelo Lema 2.3.4, o resultado vale. Os outros itens são análogos. ☐

Recordamos que se $h_{p,q,r}$ é um vetor de peso máximo, então $p = r$ ou $p = r + 1$ ou $r = p + 1$.

Proposição 3.3.3. *Seja I um $T_{\mathbb{Z}}$-ideal tal que $I \supsetneq Id^{\mathbb{Z}}(sl_2)$. Então, existem inteiros $a, c > 0$ tais que, para todo $p \geq a$, $q \geq 0$ e $r \geq c$, $h_{p,q,r} \in I$.*

Demonstração. Seja I um $T_{\mathbb{Z}}$-ideal. Como $I \supsetneq T_{\mathbb{Z}}(sl_2(\mathbb{K}))$, existe um h_{p_0,q_0,r_0} em I. Suponha $r_0 = p_0 + 1$. Substituindo $y = xz$ em $h_{p_0,q_0,p_0+1}(x,y,z)$, resulta em

$$h_{p_0+q_0,0,p_0+q_0+1} \in I.$$

Defina $a = p_0 + q_0$ e $c = r_0 + q_0$. Note que $c = a + 1$. Temos três possibilidades para $h_{p,q,r}$: 1) $r = p + 1$ ou 2) $p = r$ ou 3) $p = r + 1$:

1) Se $r = p + 1$, então $h_{a,0,a+1} \leq h_{p,q,p+1}$ segue do Corolário 2.3.9.

2) Se $p = r$, então $h_{a,0,a+1} \leq h_{a+1,0,a+1} \leq h_{p,q,p}$ segue do Corolário 2.3.9 e do Lema 3.3.2.

3) Se $r = p + 1$, então $h_{a,0,a+1} \leq h_{a+1,0,a+1} \leq h_{a+2,0,a+1} \leq h_{r+1,q,r}$ segue do Lema 3.3.2 e do Corolário 2.3.9.

Os outros casos são análogos. ☐

Teorema 3.3.4. *Seja $\mathfrak{V}$ é uma subvariedade própria de $sl_2^{\mathbb{Z}}$. Então,*

$$\exp^{\mathbb{Z}}(\mathfrak{V}) \leq 1.$$

Demonstração. Se $I = \mathrm{Id}^{\mathbb{Z}}(\mathfrak{V})$, como $\mathfrak{V}$ é uma subvariedade própria de $sl_2^{\mathbb{Z}}$, então $I \supsetneqq \mathrm{Id}^{\mathbb{Z}}(\mathfrak{V})$. Seja $d = \max\{a, c\}$, a e c dados na proposição anterior. Note que se $h_{p,q,r}$ é um vetor de peso máximo, então $p \geq d+1 \geq a$ implica em $q \geq d \geq c$ e analogamente, $q \geq d+1 \geq c$ implica em $p \geq d \geq a$. Portanto, pela proposição anterior,

$$c_n(I) \leq \sum_{\substack{p+q+r=n \\ p,r \leq d}} \binom{n}{p,q,r}.$$

Disso,

$$\begin{aligned} c_n(I) &\leq \sum_{\substack{p+q+r=n \\ p,r \leq d}} \frac{n!}{p!r!(n-(p+r))!} \leq \sum_{\substack{p+q+r=n \\ p,r \leq d}} \frac{n!}{(n-(p+r))!} \\ &\leq \sum_{\substack{p+q+r=n \\ p,r \leq d}} \frac{n!}{(n-(2d))!} \leq (d+1)^2 \frac{n!}{(n-(2d))!} \leq (d+1)^2 n^{2d}, \end{aligned}$$

já que $\dfrac{1}{p!} \leq 1$, $\dfrac{1}{r!} \leq 1$ e $p + r \leq 2d$, para todo $p \in \{0, 1, \ldots, d\}$ e $r \in \{0, 1, \ldots, d\}$. Consequentemente,

$$c_n(I) \leq (d+1)^2 n^{2d},$$

e portanto, $\exp^{\mathbb{Z}}(\mathfrak{V}) \leq 1$ (para a existência do limite, veja [9]). $\square$

Referências Bibliográficas

[1] S. A. Amitsur and J. Levitzki, *Minimal identities for algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **1**, 449-463 (1950).

[2] Y. Bahturin and M. Kochetov, *Classification of group gradings on simple Lie algebras of types A, B, C and D*, J. Algebra, **324 (11)**, 2971–2989 (2010).

[3] A. Ya. Belov, *Counterexamples to the Specht problem*, Sb. Math. **191**, 329–340 (2000).

[4] G. Birkhoff, *On the structure of abstract algebras*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **31**, 433–454 (1935).

[5] M. Dehn, *Über die Grundlagen der projektiven Geometrie und allgemeine Zahlsysteme*, (German) Math. Ann. **85**, 184–194 (1922).

[6] V. Drensky, *Free Algebras and PI-Algebras, Springer-Verlag*, Singapore (1999)

[7] V. Drensky, *Identities in Lie Algebras* (Russian), Algebra i Logika **13**, 265-290 (1974). Translation: Algebra and Logic **13**, 150-165 (1974).

[8] V. Drensky, *Codimensions of T-Ideals and Hilbert Series of Relatively Free Algebras*, J. Algebra **91**, 1–17 (1984).

[9] V. Drensky, *Relations for the cocharacter sequences of T-ideals*, Contemporary Mathematics **(131)**, 285-299 (1992).

[10] A. Giambruno and M. da S. Souza, *Graded polynomial identities and Specht property of the Lie algebra sl_2* (submited).

[11] A. Giambruno, M. Zaicev, *On codimension growth of finitely generated associative algebras*, Adv. Math. **140**, no. 2, 145–155 (1998).

[12] A. Giambruno, M. Zaicev, *Exponential codimension growth of PI algebras: an exact estimate*, Adv. Math. **142**, no. 2, 221–243 (1999).

[13] A. Giambruno and M. Zaicev, *Polynomial Identities and Asymptotic Methods*, Math. Surveys and Monog. **122**, (2005).

[14] A. V. Grishin, *Examples of T-spaces and T-ideals in characteristic 2 without the finite basis property*, Fundam. Prikl. Mat. **5 (1)**, no. 6, 101–118 (1999)(Russian).

[15] I. N. Herstein, *Noncommutative rings*, Carus Monograph No. **15**, MAA Utreck (1968).

[16] G. Higman, *Ordering by divisibility in abstract algebras*, Proc. London Math. Soc. (3), **2**, 326–336(1952).

[17] A. V. Iltyakov *Finiteness of the basis of identities of a finitely generated alternative PI-algebra over a field of characteristic zero*, Sibirsk. Mat. Zh. **32**, no.6, 61–76 (1991) (Russian); translation in Siberian Math. J. **32**, no. 6, 948–961 (1991).

[18] G. James and A. Kerber, *The Representation Theory of the Symmetric Group*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Vol. **16**, Addison-Wesley, London (1981).

[19] I. Kaplansky, *Rings with polynomial identity*, revised, Amer. Math. Soc. **54**, 496–500 (1948).

[20] A. R. Kemer, *Finite basis property of identities of associative algebras*, Algebra and Logic **5**, 362–397 (1987).

[21] A. R. Kemer, *Ideals of Identities of Associative Algebras*, Translations of Math. Monographs **87**, AMS, Providence, RI (1991).

[22] P. Koshlukov, *Graded polynomial identities for the Lie algebra $sl_2(K)$*, Internat. J. Algebra Comput. **18 (5)**, 825–836 (2008).

[23] S. P. Mishchenko and M. V. Zaicev, *Growth of some varieties of Lie superalgebras*, Izv.: Math., **71**:4, 657–672 (2007).

[24] Y. Razmyslov, *Finite basing of the identities of a matrix algebra of second order over a field of characteristic zero*, Algebra i Logika **12**, No. 1, 83–1113 (1973)(in Russian); Algebra and Logic **12**, 47–3 (1973)(Engl. transl.).

[25] Y. Razmyslov, *Identities of Algebras and Their Representations*, Translations of Mathematical Monographs, Vol. 138, American Mathematical Society, Providence, RI,(1994).

[26] D. V. Repin, *Graded identities of a simple three-dimensional Lie algebra*, Vestn. Samar. Gos. Univ. Estestvennonauchn. Ser. , Special Issue **2**, 5–16(2004)(Russian).

[27] E. P. Rezende, *Identidades Polinomiais Graduadas de Algumas Algebras Matriciais*, Ph.D thesis, UnB, (2010).

[28] V. V. Shchigolev, *Examples of infinitely basable T-spaces*, Sb. Math. **191** , no. 3–4, 459–476 (2000).

[29] S. Yu. Vasilovskii, *The basis of identities of a three-dimensional simple Lie algebra over an infinite field*, Algebra i Logika **28**, No. 5, 534–554 (1989) (Russian); English transl. Algebra and Logic **28**, No.5, 355–368 (1989).

[30] M. R. Vaughan-Lee, *Varieties of Lie algebras*, Quart. J. Math. Oxford Ser. **(2) 21**, 297-308 (1970).

[31] W. Wagner, *Über die Grundlagen der projektiven Geometrie und allgemeine Zahlsysteme*, (German) Math. Ann. **113**, 528–567 (1936).

[32] M. V. Zaicev, *Integrality of exponents of codimension growth of finite-dimensional Lie algebras*, Izv Math, **66** (3), 463-487 (2002).

[33] K. A. Zhevlakov, A. M. Slin'ko, I. P. Shestakov, A. I. Shirshov, *Rings that are nearly associative*, Academic Press, Inc., 1982. J. London math Soc. **(2) 11**, 263-266 (1975).

Índice Remissivo