

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E
COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

Estimação Não-Paramétrica de Volatilidade em Modelos Contínuos

Neale Ahmed El-Dash

Dissertação de Mestrado orientada pelo
Prof.Dr. Aluísio Pinheiro

Estimação Não-Paramétrica de Volatilidade em Modelos Contínuos

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por Neale Ahmed El-Dash e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 17 de junho de 2002.

Prof. Dr. Aluísio Pinheiro

Banca Examinadora:

1. Prof. Dr. Aluísio Pinheiro (IMECC - UNICAMP)
2. Prof. Dr. Pedro Alberto Morettin (IME - USP)
3. Prof. Dr. Pedro Luiz Valls Pereira (IME - USP)

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de MESTRE em Estatística.

Resumo

Séries financeiras apresentam problemas sérios para as técnicas mais tradicionais de modelagem por séries temporais. Alguns dos seus aspectos empíricos impedem sua correta compreensão por análises lineares. Por outro lado, técnicas não-paramétricas vêm conseguindo, nas últimas décadas, resultados expressivos na análise de dados dependentes.

Essa dissertação tem por ponto inicial os trabalhos de Bertrand(1996), Avesani e Bertrand(1997) e Genon-Catalot et al (1992), que versam sobre estimação não-paramétrica da volatilidade vista como coeficiente de modelos de difusão.

Apresentamos uma comparação de quatro famílias de estimadores não-paramétricos, três dela por função-núcleo e uma por ondaletas. As comparações são realizadas por suas propriedades teóricas, quando conhecidas, e por simulação, além de uma ilustração em série real.

Encontramos fortes evidências favoráveis aos estimadores por função-núcleo normal e por ondaletas, quando as verdadeiras volatilidades são suaves e apenas a esses últimos, quando as funções de volatilidade têm saltos. Confirma-se nas simulações a superioridade computacional das ondaletas sobre os demais métodos.

Abstract

Financial series present serious problems for more traditional techniques of modeling temporal series, because these linear models do not account for certain empirical aspects. On the other hand, in the past few decades, non-parametric techniques have been obtaining impressive results in the analysis of dependent data.

The present thesis is based on the work of Bertrand (1996), Avesani and Bertrand (1997), and Genon-Catalot et al. (1992), who discuss non-parametric estimation of volatility as a coefficient in diffusion models.

We present a comparison of four families of non-parametric estimators, three of them using kernel functions and one using wavelets. The comparisons include theoretical properties, when known, as well as simulation and application on a real series.

All four estimators seem adequate as long as the true volatility is smooth, but when there are irregular peaks, only wavelets were found to reproduce the volatility accurately. The computational superiority of wavelets was confirmed by the simulations.

Agradecimentos

Ao professor Aluísio, pela amizade e dedicação.

À minha mãe, que sempre acreditou em mim e me apoiou incondicionalmente.

À Camila, minha companheira inseparável durante anos. Sem você, tudo teria sido mais difícil e muuuuito mais chato!

Às minhas irmãs, Camilla e Shari, por sempre estarem ao meu lado.

Ao pessoal do Mestrado, em especial Tatiana e ao Benilton, que sempre me ajudaram, ao Clécio, mineiro da melhor qualidade, e a Roberta, amiga nas horas boas e ruins.

Aos meus amigos. Sem vocês, a cerveja e o futebol, que graça teria?! Brutus, você também é meu "Brother". Mariu, você foi o ponto de equilíbrio da casa. Fá e Val, minhas amigonas desde a escola do Sítio. Flávia, não faz muito tempo, mas já é inesquecível!. Maurício, longe ou perto, sempre você será meu irmão.

À banca examinadora, pelas sugestões e correções.

À CAPES pelo suporte financeiro.

Conteúdo

Introdução	1
1 Volatilidade em Séries Financeiras	3
1.1 Séries Financeiras	3
1.2 Fatos Estilizados	5
1.3 Modelos de Volatilidade	8
1.3.1 Modelos de Volatilidade em Tempos Discretos	9
2 Modelos de Difusão	13
2.1 Equações Diferenciais Estocásticas	13
2.2 Integral de Itô	16
2.3 Processo de Itô	19
2.4 Modelos de Difusão	21
2.5 Volatilidade nos Modelos de Difusão	21
2.6 Simulação de um Modelo de Difusão	22
3 Estimação por Função-Núcleo	25
3.1 Introdução	25
3.1.1 Restrição nas Funções-Núcleo	27
3.1.2 Parâmetro de Alisamento	29
3.2 O Estimador de Nadaraya-Watson	30
3.2.1 Erro do Estimador de Nadaraya-Watson	32
3.3 Resultados Assintóticos	34
3.4 Validação Cruzada	38
4 Estimação por Ondaletas	41
4.1 Introdução à Análise de Fourier	41
4.1.1 Transformada de Fourier	42

4.1.2	Transformada de Fourier Janelada	44
4.1.3	Transformada de Fourier Discreta	46
4.2	Análise de Ondaletas	48
4.2.1	Transformada Contínua de Ondaletas	48
4.2.2	Propriedades da Transformada Contínua de Ondaletas	50
4.2.3	Transformada de Ondaletas Discretizada	51
4.3	Análise de Multi-Resolução	53
4.3.1	Operadores de Translação e Dilatação	54
4.3.2	Análise de Multi-Resolução no $L_2(\mathbb{R})$	55
4.3.3	Função-escala e Propriedades	56
4.3.4	Ondaleta-mãe (Mother Wavelet)	59
4.3.5	Regularidade das Ondaletas	63
4.4	Bases de Ondaletas com Suporte Compacto	65
4.4.1	Base de Haar	66
4.4.2	Família de Bases de Daubechies	68
4.5	Estimação Não-paramétrica dos Coeficientes	70
4.5.1	Níveis de Resolução Mínimo e Máximo	71
4.5.2	Algoritmo de Cascata	72
4.6	Encolhimento da Estimativa por Ondaletas	73
4.6.1	Técnica de Encolhimento por Limiar	74
4.6.2	Encolhimento por Limiar Usando a <i>Curva de Lorentz</i>	74
5	Estimação da Volatilidade	81
5.1	Estimador de $\sigma^2(t)$ por Função-núcleo	81
5.2	Estimador Linear de $\sigma^2(t)$ por Ondaletas	86
5.3	Estimador Não-Linear de $\sigma^2(t)$ por Ondaletas	93
6	Aplicações	95
6.1	Estudo de Simulação	96
6.2	Estudo de uma Série Real	102
6.3	Conclusões	104
	Apêndices	105
A	Condições de Regularidade	107
A.1	Definições Gerais	107
A.2	Condições de Regularidade 1	108
A.3	Condições de Regularidade 2	109

A.4	Condições de Regularidade 3	109
A.5	Condições de Regularidade 4	110
A.6	Condições de Regularidade 5	110
A.7	Condições de Regularidade 6	110
A.8	Condições de Regularidade 7	111
B	Resultados da Simulação	113
B.1	Estimativas das Volatilidades	113
B.2	Tabelas de Resumo	118
B.3	Distribuição dos Erros Integrados	129
B.4	Comparação dos Erros Integrados	138
C	Estimador por Ondaletas	147
C.1	Convergência em Distribuição	150
C.1.1	Convergência do termo T_n	151
C.1.2	Fatoração do termo Z_n	152
C.1.3	Fatoração do termo D_n	153
C.1.4	Convergência do termo C_n	154
C.1.5	Fatoração do termo $Z_n - C_n$	157
C.1.6	Convergência do termo $A_{n,1}$	160
C.1.7	Convergência do termo $A_{n,2}$	161
C.1.8	Convergência do termo $A_{n,3}$	164
C.1.9	Convergência do termo $A_{n,4}$	165
C.1.10	Convergência do termo $A_{n,5}$	167
C.1.11	Condições Finais	170
C.2	Convergência do EQMI	171
C.2.1	Fatoração do Termo B_n^2	172
C.2.2	Cota Superior para $\int_{\mathbb{R}} B_1^2(t)\gamma(t)dt$	174
C.2.3	Cota Superior para $\int_{\mathbb{R}} B_2^2(t)\gamma(t)dt$	175
C.2.4	Cota Superior para $\int_{\mathbb{R}} B_3^2(t)\gamma(t)dt$	177
C.2.5	Cota Superior para $\int_{\mathbb{R}} B_1(t)B_2(t)\gamma(t)dt$	178
C.2.6	Cota Superior para termo B_n^2	178
C.2.7	Fatoração do Termo D_n	179
C.2.8	Cota Superior do Termo D_n	183
	Bibliografia	183

Lista de Figuras

1.1	Valor de Abertura das Ações da Telebrás-PN	5
1.2	Série dos Retornos da Telebrás-PN	5
1.3	Histograma dos Retornos - Telebrás PN	7
1.4	Gráfico de Simetria dos Retornos	8
1.5	Efeito da Volatilidade em uma Série Financeira	9
3.1	Funções-Núcleo Admissíveis	28
3.2	Efeito do parâmetro de Alisamento h	30
4.1	Base de Haar	68
4.2	Bases de Daubechies com $N = 2, 5, 8$	70
6.1	Funções $\theta(\cdot)$ Descontínuas (com Saltos)	97
6.2	Funções $\theta(\cdot)$ Contínuas	97
6.3	Diferença dos Erros Integrados dos Estimadores	99
6.4	Diferença dos EQI Locais com $Quant0$	101
6.5	Diferença na Eficiência do Estimador de Ondaletas	102
6.6	Série do Índice de fechamento	102
6.7	Série dos Retornos do Índice	103
6.8	Estimativa da Volatilidade - Índice de fechamento	103
6.9	Tempos de Execução dos Estimadores	105
B.1	Estimativas da Volatilidade Tipo 1	113
B.2	Estimativas da Volatilidade Tipo 2	114
B.3	Estimativas da Volatilidade Tipo 3	114
B.4	Estimativas da Volatilidade Tipo 4	115
B.5	Estimativas da Volatilidade Tipo 5	115
B.6	Estimativas da Volatilidade Tipo 6	116
B.7	Estimativas da Volatilidade Tipo 7	116

B.8	Estimativas da Volatilidade Tipo 8	117
B.9	DISTRIBUIÇÃO DOS EQI - Volatilidade 1	129
B.10	DISTRIBUIÇÃO DOS EQI - Volatilidade 2	130
B.11	DISTRIBUIÇÃO DOS EQI - Volatilidade 3	130
B.12	DISTRIBUIÇÃO DOS EQI - Volatilidade 4	131
B.13	DISTRIBUIÇÃO DOS EQI - Volatilidade 5	131
B.14	DISTRIBUIÇÃO DOS EQI - Volatilidade 6	132
B.15	DISTRIBUIÇÃO DOS EQI - Volatilidade 7	132
B.16	DISTRIBUIÇÃO DOS EQI - Volatilidade 8	133
B.17	DISTRIBUIÇÃO DOS EAI - Volatilidade 1	133
B.18	DISTRIBUIÇÃO DOS EAI - Volatilidade 2	134
B.19	DISTRIBUIÇÃO DOS EAI - Volatilidade 3	134
B.20	DISTRIBUIÇÃO DOS EAI - Volatilidade 4	135
B.21	DISTRIBUIÇÃO DOS EAI - Volatilidade 5	135
B.22	DISTRIBUIÇÃO DOS EAI - Volatilidade 6	136
B.23	DISTRIBUIÇÃO DOS EAI - Volatilidade 7	136
B.24	DISTRIBUIÇÃO DOS EAI - Volatilidade 8	137
B.25	Comparação dos EQI's - Volatilidade 1	138
B.26	Comparação dos EQI's - Volatilidade 2	139
B.27	Comparação dos EQI's - Volatilidade 3	139
B.28	Comparação dos EQI's - Volatilidade 4	140
B.29	Comparação dos EQI's - Volatilidade 5	140
B.30	Comparação dos EQI's - Volatilidade 6	141
B.31	Comparação dos EQI's - Volatilidade 7	141
B.32	Comparação dos EQI's - Volatilidade 8	142
B.33	Comparação dos EAI's - Volatilidade 1	142
B.34	Comparação dos EAI's - Volatilidade 2	143
B.35	Comparação dos EAI's - Volatilidade 3	143
B.36	Comparação dos EAI's - Volatilidade 4	144
B.37	Comparação dos EAI's - Volatilidade 5	144
B.38	Comparação dos EAI's - Volatilidade 6	145
B.39	Comparação dos EAI's - Volatilidade 7	145
B.40	Comparação dos EAI's - Volatilidade 8	146

Lista de Tabelas

1.1	Índices de Cauda para a Série Telebrás-PN	7
3.1	Exemplos de Funções-Núcleo Admissíveis	28
3.2	Ordem das Medidas de Erro	38
4.1	Propriedades da Transformada de Fourier	43
6.1	Parâmetros do Limiar	96
B.1	Parâmetros do Limiar	118
B.2	Média dos Erros Integrados - Vol1-Vol4	119
B.3	Média dos Erros Integrados - Vol5-Vol8	119
B.4	Mediana dos Erros Integrados - Vol1-Vol4	120
B.5	Mediana dos Erros Integrados - Vol5-Vol8	120
B.6	Média dos Erros Quadráticos Integrados - Vol1-Vol2	121
B.7	Média dos Erros Quadráticos Integrados - Vol3-Vol4	121
B.8	Média dos Erros Quadráticos Integrados - Vol5-Vol6	122
B.9	Média dos Erros Quadráticos Integrados - Vol7 - Vol8	122
B.10	Mediana dos Erros Quadráticos Integrados - Vol1-Vol2	123
B.11	Mediana dos Erros Quadráticos Integrados - Vol3-Vol4	123
B.12	Mediana dos Erros Quadráticos Integrados - Vol5-Vol6	124
B.13	Mediana dos Erros Quadráticos Integrados - Vol7-Vol8	124
B.14	Média dos Erros Absolutos Integrados - Vol1-Vol2	125
B.15	Média dos Erros Absolutos Integrados - Vol3-Vol4	125
B.16	Média dos Erros Absolutos Integrados - Vol5-Vol6	126
B.17	Média dos Erros Absolutos Integrados - Vol7-Vol8	126
B.18	Mediana dos Erros Absolutos Integrados - Vol1-Vol2	127
B.19	Mediana dos Erros Absolutos Integrados - Vol3-Vol4	127
B.20	Mediana dos Erros Absolutos Integrados - Vol5-Vol6	128

B.21 Mediana dos Erros Absolutos Integrados - Vol7-Vol8	128
---	-----

Introdução

Séries financeiras apresentam problemas sérios para as técnicas mais tradicionais de modelagem por séries temporais. Alguns dos seus aspectos empíricos, conhecidos na literatura como fatos estilizados, impedem sua correta compreensão por análises lineares. Veja, por exemplo, (Herencia 1997) e (Gouriéroux 1997).

Por outro lado, técnicas não-paramétricas vêm conseguindo, nas últimas décadas, resultados expressivos na análise de dados dependentes. Veja, por exemplo, (Bosq 1998) e (Antoniadis and Oppenheim 1995), para resultados relativos a funções-núcleo e ondaletas.

Estudos vêm mostrando a importância fundamental da volatilidade, a variância condicional instantânea, na correta percepção e predição de valores de séries correlacionados.

A correta modelagem da volatilidade depende, entre outras coisas, de um bom modelo (no caso paramétrico) e de boas estimativas de valores aberrantes. Os valores aberrantes se mostram extremamente problemáticos para modelos tradicionais, mas a capacidade adaptativa das ondaletas os trata de forma natural e automática ((Walter 1992b) e (Walter 1992a)).

Várias aplicações de métodos não-paramétricos em séries financeiras têm aparecido na literatura desde predição por simulação histórica a modificações do método de sieves (Darolles and Gouriéroux 2001), passando por técnicas semiparamétricas (Han and Wei 2000), suavização por polinômios locais ((Härdle and Tsybakov 1997) e (Yang, Härdle and Nielsen 1999)) e estimação de quantis da distribuição condicional por função-núcleo (Abberger 1997).

Podemos destacar (Hoffmann 1999), que utiliza técnicas não-lineares de ondaletas para um caso específico: modelo AR(1) não-linear e demonstra a capacidade adaptativa das ondaletas a espaços de Besov, no espírito de (Donoho and Johnstone 1993), para séries de dados dependentes.

Séries de alta frequência trazem ainda outros desafios às técnicas es-

tatíticas: além de potencializarem os efeitos da dependência, também evidenciam o custo computacional da técnica empregada. Nesse ponto, as ondaletas levam evidente vantagem sobre as demais.

Essa dissertação tem por ponto inicial os trabalhos de (Bertrand 1996), (Avesani and Bertrand 1997) e, principalmente, de (Genon-Catalot, Laredo and Picard 1992), cujos resultados teóricos motivam a aplicação das ondaletas nesse problema.

No primeiro capítulo, discutimos as séries financeiras e os fatos estilizados, evidenciando a dificuldade dos modelos tradicionais ARMA em modelar tais séries. No segundo capítulo, introduzimos a integral estocástica de Itô para depois definir formalmente os modelos de difusão. No terceiro e quarto capítulos, apresentamos as técnicas não-paramétricas de estimação por Função-núcleo e Ondaletas, respectivamente. Discutimos em cada um deles os detalhes das técnicas e de suas utilizações. No quinto capítulo, adaptam-se os estimadores não-paramétricos para modelos de difusão e estudam-se suas principais propriedades teóricas conhecidas. Ilustrações das técnicas comparadas são realizadas no sexto capítulo, por simulação e uma série real. As conclusões são apresentadas ao final desse capítulo. Alguns resultados teóricos são expostos no apêndice, onde também são apresentados alguns outros detalhes das simulações.

Capítulo 1

Volatilidade em Séries Financeiras

1.1 Séries Financeiras

O mercado financeiro envolve diversas taxas de juros, de câmbio, ações, bônus etc. que são negociados em diferentes períodos de tempo. Existe uma enorme variedade de maneiras de negociar tais *produtos*. A seqüência dos valores negociados de um desses é chamada de uma série financeira.

Os dois principais motivos pra se estudar uma série financeira são *interpretação* e *previsão*. O primeiro tem por objetivo entender como os preços se comportam ao longo do tempo, quais fatores influenciam mais na flutuação dos preços, ou seja, entender diferentes aspectos do mercado financeiro. O segundo tem por objetivo prever a evolução das séries e, conseqüentemente, fazer investimentos assumindo riscos calculados.

Para analisarmos uma série financeira e dela extraírmos essas informações de interesse, geralmente recorremos a um modelo. Um tipo de modelagem muito utilizada para processos observados ao longo do tempo, conhecidos como *séries temporais*, são os conhecidos modelos ARMA. Esses modelos são muito difundidos na literatura, pela facilidade e eficiência de implementação. Nesse tipo de modelagem, valores atuais da série são modelados como uma função linear dos valores passados e de um processo de ruídos, que pode ser

interpretado como um processo de inovações. Um modelo $ARMA(p, q)$ pode ser escrito como:

$$X_t = \alpha + \alpha_1 X_{t-1} + \dots + \alpha_p X_{t-p} + \epsilon_t - \beta_1 \epsilon_{t-1} - \dots - \beta_q \epsilon_{t-q}, \quad (1.1)$$

onde $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ e $\beta_1, \dots, \beta_q$ são os parâmetros do modelo e ϵ_t , $t \in \mathcal{T}$, é um ruído branco, sendo $\mathcal{T}$ um conjunto de índices, com certas condições pouco restritivas em $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ e $\beta_1, \dots, \beta_q$.

Apesar da grande utilidade de tais modelos, verificou-se que os mesmos eram incapazes de retratar corretamente o comportamento de séries financeiras. Em grande parte, porque séries financeiras têm uma natureza não-linear, principalmente devido a os preços serem não estacionários. Para amenizar o efeito dessa correlação e tornar a série estacionária, freqüentemente modela-se a série dos retornos, que é construída utilizando-se uma transformação da família Box-Cox na série original. Normalmente, utiliza-se a série dos retornos compostos, definida por:

$$Y_t = \log(X_t) - \log(X_{t-1}) \quad \forall t, \quad (1.2)$$

onde X_t é a observação da série original no tempo t .

Utiliza-se a transformação em (1.2), principalmente porque ela representa, aproximadamente, a variação percentual dos preços:

$$\log(X_t) - \log(X_{t-1}) \cong \frac{X_t - X_{t-1}}{X_{t-1}}.$$

Essas séries dos retornos compostos têm algumas características empíricas as quais os modelos ARMA também não conseguem reproduzir. Tais características são conhecidas como *fatos estilizados*, que serão discutidos em mais detalhes na seção 1.2.

Existem outros tipos de modelos que são utilizados para séries financeiras. Para a implementação de alguns desses, é importante conhecer o valor de uma variável latente (não-observável), conhecida como **volatilidade**. A volatilidade pode ser interpretada, grosseiramente, como a variabilidade dos retornos. Discutiremos a volatilidade em mais detalhes na seção 1.3, juntamente com alguns possíveis modelos.

Entre os modelos onde a volatilidade é parte integral, existem aqueles que são definidos para observações discretas, ou seja, o conjunto de índices $\mathcal{T}$ está contido em $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$. Nesse caso, os mais difundidos na literatura

são os modelos *Autoregressivos de Volatilidade Condicional Heteroscedástica* (ARCH) e os *Modelos de Volatilidade Estocástica* (SV). Já na formulação teórica em tempo contínuo, ou seja, o conjunto de índices $\mathcal{T}$ é contínuo, os modelos mais utilizados são os *Modelos de Difusão*. Esses modelos serão discutidos na seção 1.3 e no capítulo 2.

1.2 Fatos Estilizados

Como foi mencionado na seção 1.1, verificou-se empiricamente que os modelos ARMA não conseguiam reproduzir algumas características das séries de retornos, os *Fatos Estilizados*. Vamos discutir algumas delas nesta seção e para isso, utilizaremos como exemplo um série real: os valores de abertura das ações da Telebrás-PN, na Bolsa de Valores de São Paulo, do dia 30 de junho de 1994 até o dia primeiro de julho de 1998.

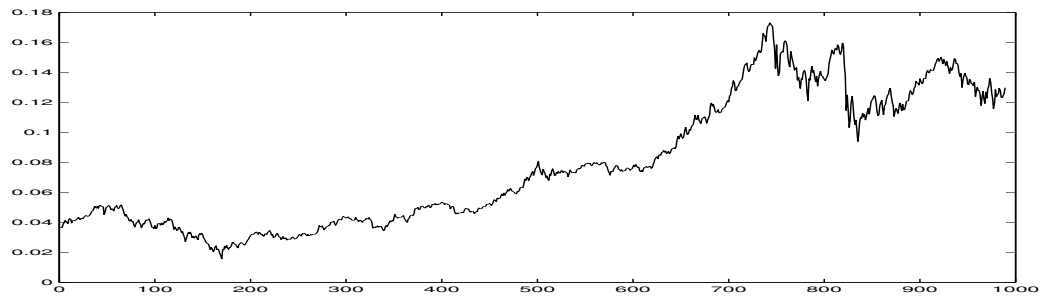


Figura 1.1: Valor de Abertura das Ações da Telebrás-PN

Os retornos, definidos por 1.2, são ilustrados na figura 1.2.

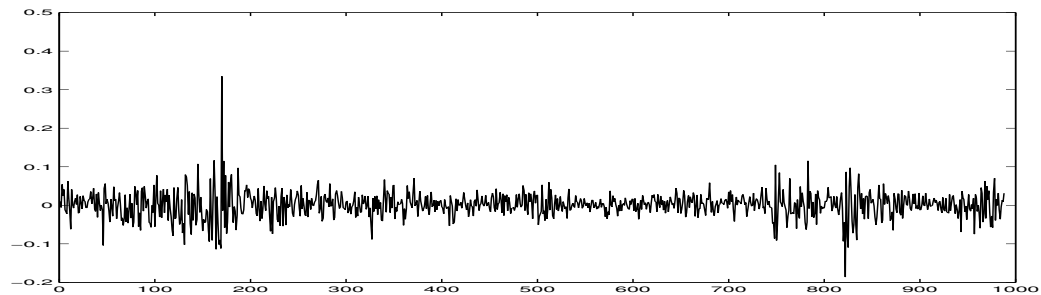


Figura 1.2: Série dos Retornos da Telebrás-PN

A primeira característica que discutiremos aqui é a de que *grandes retornos são seguidos de grandes retornos, em valor absoluto, e que pequenos retornos são seguidos de pequenos retornos, em valor absoluto*. Ou seja, os *choques* que ocorrem na série levam algum tempo para serem absorvidos pela mesma. Esses conjuntos de retornos são chamados de **conglomerados de volatilidade**. Este fenômeno está sempre presente nas séries dos retornos, como podemos observar na figura 1.2. Se simularmos uma série temporal utilizando um modelo ARMA, na série resultante dos retornos, não observaremos esse comportamento, indicando a incapacidade dos mesmos em reproduzir essa importante característica da série de retornos.

Outra característica muito observada é que a distribuição dos retornos tem **caudas pesadas**, tornando a presença de valores extremos bem mais comum do que os modelos ARMA admitiriam. Podemos observar essa característica graficamente, na figura 1.3, ou podemos utilizar um índice não-paramétrico para medir o peso das caudas, como o Índice de Cauda definido em 1.2.1.

Definição 1.2.1 (Índice de Cauda).

Definimos o índice de cauda, com parâmetro α , $\tau_D(F, \alpha)$ para a cauda direita e $\tau_E(F, \alpha)$ para a cauda esquerda, por:

$$\begin{aligned}\tau_D(F, \alpha) &= \left(\frac{1}{C}\right) \frac{F^{-1}(1 - \alpha) - F^{-1}(0, 5)}{F^{-1}(0, 75) - F^{-1}(0, 5)} \quad e \\ \tau_E(F, \alpha) &= \left(\frac{1}{C}\right) \frac{F^{-1}(0, 5) - F^{-1}(\alpha)}{F^{-1}(0, 5) - F^{-1}(0, 25)}, \quad 0 < \alpha < 0, 5,\end{aligned}$$

onde F é a distribuição empírica e a constante C é dada por

$$\frac{\Phi^{-1}(1 - \alpha) - \Phi^{-1}(0, 5)}{\Phi^{-1}(0, 75) - \Phi^{-1}(0, 5)}.$$

Para estabelecer uma escala de referência, se a distribuição dos retornos fosse normal, obteríamos como índice 1; se fosse uma Cauchy-padrão, seria maior que 8,4. Os índices de cauda da série exemplo são expressos na tabela 1.1.

Tabela 1.1: Índices de Cauda para a Série Telebrás-PN

α	Índice de Cauda	
	τ_E	τ_D
0,01	1,5774	1,3994
0,05	1,2887	1,1041
0,10	1,2105	1,0712

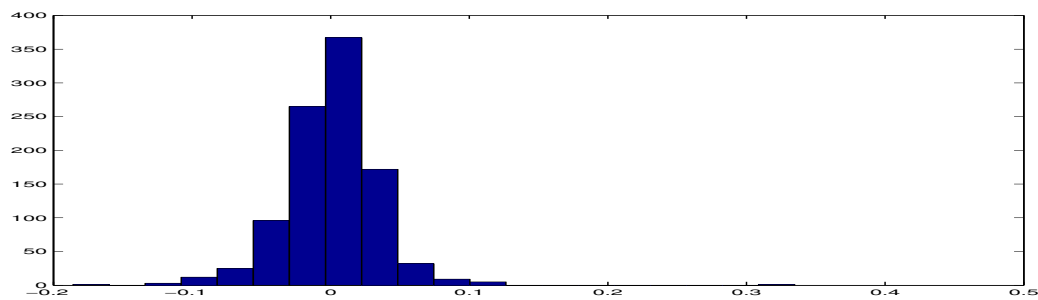


Figura 1.3: Histograma dos Retornos - Telebrás PN

Uma terceira característica importante é a simetria dos retornos. Esse fato estilizado fere as condições dos modelos ARMA pois, por construção, a série dos retornos de um modelo ARMA teria uma distribuição assimétrica. Uma maneira interessante de avaliar a simetria da série Telebrás-PN é construindo-se um gráfico de simetria, que se baseia na comparação das distâncias quantis $Q(\alpha)$ e $Q(1 - \alpha)$. Se a distribuição em questão for simétrica, essas distâncias têm o mesmo valor. Para a série Telebrás-PN, vê-se o gráfico de simetria na figura 1.4.

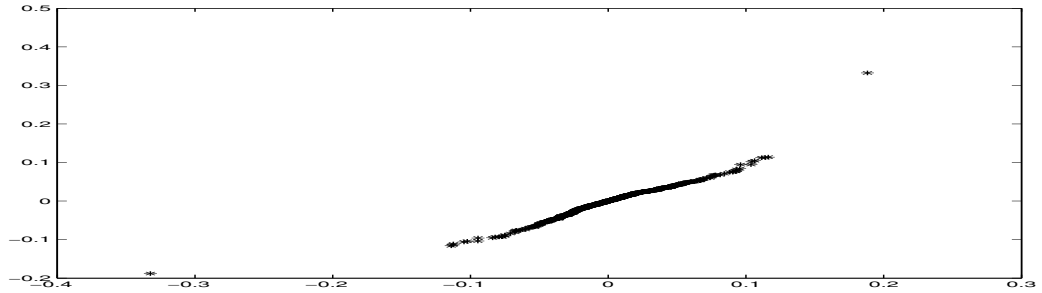


Figura 1.4: Gráfico de Simetria dos Retornos

Podemos notar no gráfico 1.4 que os pontos mostrados realmente se aproximam de uma reta, com exceção dos pontos extremos, que podem ser facilmente interpretados como consequência das caudas pesadas da distribuição dos retornos. Assim, na nossa série exemplo, temos bastante evidência da simetria dos retornos.

Existem muitos outros fatos estilizados e para o leitor interessado, indicamos (Herencia 1997). O importante é entender que devido a eles, a metodologia tradicional dos modelos ARMA não é adequada para modelar séries financeiras, havendo então a necessidade de se utilizarem os modelos de volatilidade.

1.3 Modelos de Volatilidade

Os modelos de volatilidade são aqueles em que a volatilidade é explicitamente utilizada. A volatilidade pode ser interpretada como a variação dos retornos; assim, quando nos referimos a um mercado volátil, queremos dizer que os preços do mercado estão variando muito. Nos modelos que serão introduzidos a seguir, tanto naqueles com tempos contínuos quanto naqueles com tempos discretos, a volatilidade é modelada como a variância condicionada em toda a informação anterior àquele momento, ou seja, a volatilidade no instante de tempo t_i , $\sigma_{t_i}^2$, de uma série $\{X_t\}_{t \in T}$, é dada por

$$\sigma_{t_i}^2 = \text{Var}(X_{t_i} | \{X_t\}_{t < t_i}).$$

Para exemplificar como uma mudança na volatilidade afeta a série, iremos ilustrar uma série simulada ¹ e seus retornos, com a respectiva função de

¹A série simulada é um modelo de difusão com funções $h = 1$, $b = 0,75 - X_t$

volatilidade determinística utilizada em sua construção, na figura 1.5.

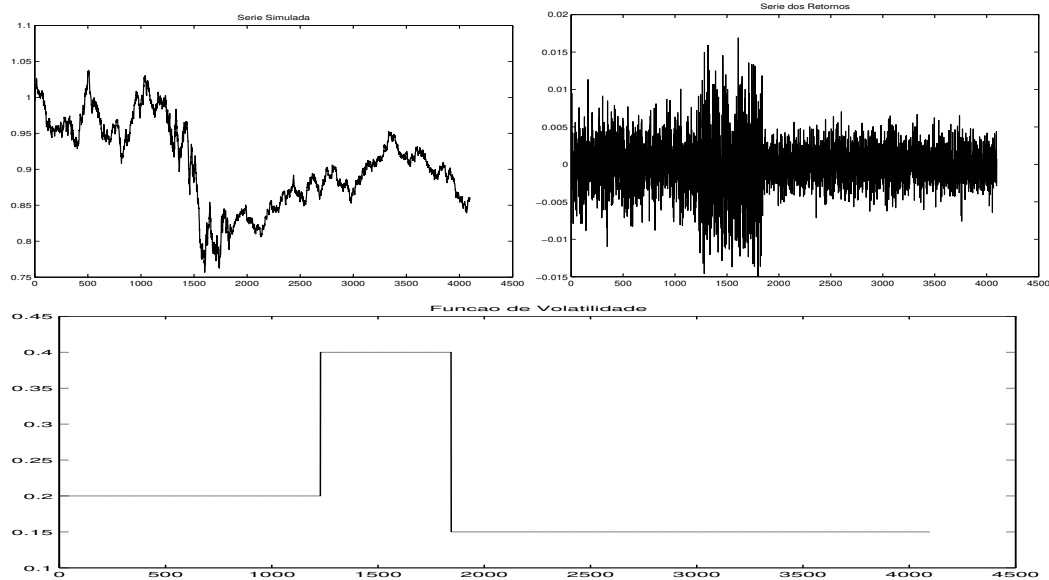


Figura 1.5: Efeito da Volatilidade em uma Série Financeira

Na figura 1.5, percebe-se claramente como a volatilidade influencia na estrutura de série, e como um aumento na volatilidade implica um aumento na variação dos retornos. Nos modelos de volatilidade, é esse tipo de estrutura que será imposta, sendo o interesse em se estimar e entender a volatilidade de uma série.

Na próxima subseção, fazemos uma breve introdução aos modelos de volatilidade em tempos discretos. Os modelos de volatilidade contínuos, foco deste trabalho, são apresentados no capítulo 2.

1.3.1 Modelos de Volatilidade em Tempos Discretos

Primeiramente, iremos definir os modelos Autoregressivos de Volatilidade Condicional Heteroscedástica (ARCH). Existem diversas generalizações desse modelo. Por simplicidade, discutiremos somente o modelo ARCH(q); para outros modelos, indicamos (Gouriéroux 1997). Um detalhe interessante desse tipo de modelo é que a volatilidade é observável.

Definição 1.3.1 (Modelo ARCH(q)).

O modelo ARCH, de ordem q , é definido por:

$$\begin{aligned} X_t | I_{t-1} &\sim \mathcal{N}(0, \sigma_t^2) \quad e \\ \sigma_t^2 &= \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i X_{t-i}^2, \end{aligned} \quad (1.3)$$

onde σ_t^2 é a volatilidade no instante t , $I_t = \{X_t, X_{t-1}, \dots, X_1\}$, ω é uma constante positiva e $\{\alpha_i\}_{i=1, \dots, q}$, com $\alpha_i > 0$, são os parâmetros do modelo.

Note que, modelando-se a volatilidade como dependente dos quadrados das observações passadas, reproduzem-se os conglomerados de volatilidade. Para obter algumas propriedades do modelo ARCH(q), é interessante expressá-lo como

$$X_t = \sigma_t \epsilon_t,$$

onde as variáveis $\epsilon_t = X_t/\sigma_t$ constituem um processo de inovações padronizado, ou seja, são ruídos brancos. Podemos agora citar algumas propriedades do modelo ARCH(q).

Proposição 1.3.1 (Propriedades do Modelo ARCH(q)).

Se o processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ segue um modelo ARCH, de ordem q , podemos expressar $X_t = \sigma_t \epsilon_t$, com $\epsilon_t = X_t/\sigma_t \forall t$. Nessa formulação, podemos obter as seguintes propriedades para o processo ϵ_t :

$$\begin{aligned} E[\epsilon_t | I_{t-1}] &= 0, \\ E[\epsilon_t \epsilon_{t-k}] &= 0, \quad \forall k \neq 0 \\ Var[\epsilon_t | I_{t-1}] &= 1, \end{aligned}$$

onde $I_t = \{X_t, X_{t-1}, \dots, X_1\}$.

Para mais propriedades sobre os modelos ARCH e como obter estimativas para os mesmos, indicamos ao leitor interessado (Gouriéroux 1997).

Definiremos agora os modelos de Volatilidade Estocástica (SV). Existem diversas formulações e generalizações destes modelos. Discutiremos aqui, por

simplicidade, somente o modelo *log-normal*, também conhecido com AR(1)-SV. Nesse tipo de modelo, em contraste com os modelos ARCH, a volatilidade não é observável.

Definição 1.3.2 (Modelo AR(1)-SV).

O modelo AR(1)-SV é definido como:

$$\begin{aligned} X_t | \sigma_t &\sim \mathcal{N}(0, \sigma_t^2) & e \\ \log(\sigma_t^2) &= \delta + \gamma \log(\sigma_{t-1}^2) + \eta_t, \end{aligned} \quad (1.4)$$

onde σ_t^2 é a volatilidade no instante t , δ e γ são parâmetros do modelo, com $|\gamma| < 1$, e $\eta_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\eta)$ i.i.d. para todo t .

Para obter algumas propriedades do modelo AR(1)-SV, é interessante expressá-lo como

$$X_t = \sigma_t \epsilon_t,$$

onde as variáveis $\epsilon_t = X_t / \sigma_t$ constituem um processo de inovações padronizado, ou seja, são ruídos brancos. Podemos agora citar algumas propriedades do modelo AR(1)-SV.

Proposição 1.3.2 (Propriedades do Modelo AR(1)-SV).

Se o processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ segue um modelo AR(1)-SV podemos expressar $X_t = \sigma_t \epsilon_t$, com $\epsilon_t = X_t / \sigma_t \forall t$. Nessa formulação, podemos obter as seguintes propriedades para o processo ϵ_t :

$$\begin{aligned} \log(\epsilon_t^2) &\sim \log \chi_1^2 & \text{com} \\ E[\log(\epsilon_t^2)] &= -1,27 & e \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$Var[\log(\epsilon_t^2)] = \frac{\pi^2}{2}. \quad (1.6)$$

Para outras propriedades sobre os modelos AR(1)-SV e como obter estimativas para os mesmos, indicamos ao leitor interessado (Herencia 1997).

Os modelos dessas duas famílias SV e ARCH conseguem, tanto teórica como empiricamente, reproduzir os fatos estilizados, descritos na seção 1.2.

Capítulo 2

Modelos de Difusão

Neste capítulo, iremos definir os modelos de difusão, onde a volatilidade é uma função de tempo contínuo. Primeiramente, iremos introduzir os conceitos de equações diferenciais estocásticas e de integrais estocásticas, especificamente de **Integrais de Itô**. Posteriormente, utilizando essas ferramentas, iremos definir os modelos de difusão e comentar a respeito de sua utilização para modelar séries financeiras de alta frequência.

2.1 Equações Diferenciais Estocásticas

Como uma motivação para as equações diferenciais estocásticas, vamos utilizar uma equação diferencial clássica para modelar o crescimento populacional:

$$\frac{dN(t)}{dt} = a(t)N(t), \quad (2.1)$$

com condição inicial $N(0) = A$, onde $N(t)$ é o tamanho da população no tempo t e $a(t)$ é a razão de crescimento relativa, no instante t . Esse modelo simples definido em (2.1) é razoável, porém também pode ser razoável supor que a função $a(t)$ não seja totalmente determinística e esteja sujeita a uma variação causada pelo ambiente, satisfazendo a seguinte relação:

$$a(t) = r(t) + \epsilon, \quad (2.2)$$

onde $r(t)$ é uma função determinística e ϵ é um elemento aleatório, do qual conhecemos somente o comportamento probabilístico.

Assim, seria interessante desenvolver uma teoria de equações diferenciais que admitisse uma função com comportamento aleatório, como aquele definido em (2.2). Tais equações são conhecidas como **equações diferenciais estocásticas**. Note que, utilizando (2.2), podemos reescrever (2.1) como:

$$\frac{dN(t)}{dt} = r(t)N(t) + N(t)\epsilon. \quad (2.3)$$

Em (2.3), devemos procurar um processo estocástico para representar ϵ . Primeiramente, vamos definir:

Definição 2.1.1 (Processo Estocástico).

Um processo estocástico é um conjunto parametrizado de variáveis aleatórias $\{X_t\}_{t \in T}$, definidas no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ e que assumem valores no $\mathbb{R}^n$. O espaço paramétrico T pode ser qualquer conjunto no $\mathbb{R}^n$. Para cada $t \in T$ fixo, $X_t(w)$ é uma variável aleatória e, para cada $w \in \Omega$ fixo, $\{X_t(w)\}_{t \in T}$ é chamado de trajetória do processo.

Intuitivamente, queremos encontrar um processo estocástico $\{V_t\}_{t \in T}$ bem comportado, tal que:

$$\frac{dN(t)}{dt} = r(t)N(t) + N(t)V_t \quad (2.4)$$

e que satisfaça às seguintes propriedades básicas:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{(i)} & \text{Se } t_1 \neq t_2, \text{ então } V_{t_1} \text{ e } V_{t_2} \text{ são independentes;} \\ \text{(ii)} & V_t \text{ é um processo estocástico estacionário,} \\ & \text{ou seja, a distribuição conjunta de } \{V_{t_1+t}, \dots, V_{t_k+t}\} \\ & \text{não depende de } t; \text{ e} \\ \text{(iii)} & E(V_t) = 0 \text{ para todo } t. \end{array} \right\} \quad (2.5)$$

Pode-se provar, no entanto, que não existe um processo estocástico $\{V_t\}_{t \in T}$ que satisfaça (2.4) e as condições (2.5), pois o mesmo não pode ter uma trajetória contínua. Indicamos para o leitor mais interessado (Oskendal 1995). Uma solução é utilizar uma versão discreta de (2.4), dada por:

$$\frac{N(t_{k+1}) - N(t_k)}{t_{k+1} - t_k} = r(t_k)N(t_k) + N(t_k)V_{t_k}. \quad (2.6)$$

Caso existisse o limite do termo da esquerda, com $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k \rightarrow 0$, obteríamos $dN(t)/dt$ com $t = t_{k+1}$. Porém, é importante notar que o conceito de limite em (2.6) serve somente como motivação para reescrevermos (2.4), pois tal limite não existe ¹. Utilizando $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$, podemos escrever (2.6) como:

$$N(t_{k+1}) - N(t_k) = r(t_k)N(t_k)\Delta t_k + N(t_k)V_{t_k}\Delta t_k. \quad (2.7)$$

Note que, utilizando a seguinte partição dos tempos, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k < \dots < t_m = t$, e trabalhando recursivamente com (2.7), obtemos:

$$N(t) - N(0) = \sum_{k=0}^{m-1} r(t_k)N(t_k)\Delta t_k + \sum_{k=0}^{m-1} N(t_k)V_{t_k}\Delta t_k. \quad (2.8)$$

Até o momento, apenas colocamos (2.3) numa maneira matematicamente correta. Agora vamos modificar ligeiramente a expressão (2.8), utilizando um processo $\Delta W_{t_k} = W_{t_{k+1}} - W_{t_k}$ em lugar de $V_{t_k}\Delta t_k$.

$$N(t) = N(0) + \sum_{k=0}^{m-1} r(t_k)N(t_k)\Delta t_k + \sum_{k=0}^{m-1} N(t_k)\Delta W_{t_k}. \quad (2.9)$$

O único processo estocástico $\{W_t\}_{t \in T}$ que pode ser utilizado em (2.9) e que satisfaz as condições (2.5), tendo uma trajetória contínua é o **Processo Estocástico de Wiener**. Para obter mais detalhes, indicamos (Oskendal 1995).

¹Estamos tratando de elementos aleatórios, para os quais a noção matemática de limite nunca existe, a não ser em casos triviais.

Definição 2.1.2 (Processo Estocástico de Wiener).

Um Processo Estocástico de Wiener é um processo estocástico $\{W_t(w)\}_{t \geq 0}$ Gaussiano contínuo com incrementos independentes tal que:

$$i. \quad P(W_0 = 0) = 1 \quad (2.10)$$

$$ii. \quad E(W_t) = 0 \quad \forall t > 0 \quad (2.11)$$

$$iii. \quad W_t - W_s \stackrel{\mathcal{L}}{=} Y \quad \forall 0 \leq s \leq t \quad (2.12)$$

$$iv. \quad W_{t_2} - W_{t_1} \perp\!\!\!\perp W_{t_4} - W_{t_3}, \quad (2.13)$$

$$\forall 0 \leq t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4, \quad (2.14)$$

onde Y é uma variável aleatória com distribuição $\mathcal{N}(0, t - s)$.

O processo de Wiener é a descrição matemática do **Movimento Browniano**, descoberto pelo botânico escocês Robert Brown, ao observar que grãos de pólen suspensos na água realizavam movimento irregulares.

Supondo que exista o limite da expressão em (2.9) quando $\Delta t_k \rightarrow 0$, para todo $k \geq 0$, obtemos:

$$N(t) = N(0) + \int_0^t r(t)N(t)dt + \int_0^t N(t)dW_t, \quad (2.15)$$

onde a segunda integral em (2.15) é uma integral estocástica. Sua existência, num certo sentido, será discutida na seção 2.2. Assim, partindo do conceito de equação diferencial estocástica em (2.3), encontramos a necessidade de lidar com integração estocástica. Note que podemos utilizar uma outra notação para representar (2.15), de forma a torná-la parecida com (2.3), mas que fique claro que é apenas uma liberdade notacional:

$$dN(t) = r(t)N(t)dt + N(t)dW_t. \quad (2.16)$$

2.2 Integral de Itô

Quando falamos de integrais estocásticas, estamos geralmente interessados na integral de uma função $f : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ com relação a ΔW_t . Procedendo de forma semelhante a uma integral de Riemann-Stieltjes, a integral estocástica é definida como o limite de (2.17), quando $\Delta_t \rightarrow 0$, onde, sem perda de generalidade, supomos que $0 \leq A < B$:

$$\int_A^B f(t, w) dW_t = \lim_{\Delta_t \rightarrow 0} \sum_j f(t_j^*, w) [W_{t_{j+1}} - W_{t_j}](w). \quad (2.17)$$

No caso da integral de Riemann-Stieltjes, qualquer que seja $t_j^* \in [t_j, t_{j+1}]$ escolhido, o limite obtido será o mesmo. No caso das integrais estocásticas, como também ocorre com a integral de Lebesgue, a escolha de t_j^* em (2.17) modifica o resultado. Assim, dependendo da escolha de t_j^* , definimos diferentes integrais estocásticas. As escolhas que se têm mostrado mais úteis são $t_j^* = t_j$, que leva à definição da integral de Itô, e $t_j^* = \frac{t_j + t_{j+1}}{2}$, que leva à definição da integral de Stratonovich. Ao longo desta dissertação, utilizaremos somente as integrais de Itô.

Necessitamos, para a definição precisa da integral de Itô, de dois conceitos adicionais. Eles serão introduzidos nas definições 2.2.1 e 2.2.2.

Definição 2.2.1 (Mensurabilidade).

Dado o espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, uma função $g(\cdot, \cdot) : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é $\mathcal{F}_t$ -mensurável se

$$g^{-1}(t, U) = \{w \in \Omega; g(t, w) \in U\} \in \mathcal{F}_t, \quad (2.18)$$

para todos os Borelianos $U \subset \mathbb{R}$.

Definição 2.2.2 (Processo Adaptado).

Seja $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ uma família crescente de σ -álgebras de subconjuntos de Ω . Um processo $g(\cdot, \cdot) : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é $\mathcal{F}_t$ -adaptado, se para cada $t \geq 0$, a função $g(t, \cdot)$ é $\mathcal{F}_t$ -mensurável.

Agora, podemos definir a integral estocástica de Itô.

Definição 2.2.3 (Integral Estocástica de Itô).

Seja $f(\cdot, \cdot)$ uma função $[0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaça:

i- $(t, w) \rightarrow f(\cdot, \cdot)$ é $\mathcal{B} \times \mathcal{F}$ -mensurável.

ii- $f(t, \cdot)$ é $\mathcal{F}_t$ -adaptada.

iii- $E[\int_S^B f(t, w)^2 dt] < \infty$,

onde $\mathcal{F}_t$ é a σ -álgebra gerada pelo processo estocástico $W_s(\cdot)$, com $s \leq t$ ($\mathcal{F}_t = \sigma\{W_s, s \leq t\}$), $\mathcal{F}$ é a menor σ -álgebra que contém $\mathcal{F}_t, \forall t$ e $\mathcal{B}$ denota a σ -álgebra de Borel no segmento $[0, \infty)$.

Utilizando $\Delta_j = t_{j+1} - t_j$, a integral estocástica de Itô é definida como:

$$\int_A^B f(t, w) dW_t = \lim_{|\Delta_j| \rightarrow 0} \sum_j f(t_j, w) [W_{t_{j+1}} - W_{t_j}](w), \quad (2.19)$$

onde $\{t_j\}_{j=0,1,\dots}$ é uma partição qualquer de $[A, B] \subseteq [0, \infty)$, $W_{t_j}(w)$ é um processo de Wiener definido em 2.1.2.

A integral de Itô possui diversas propriedades. Apresentaremos algumas, a seguir.

Proposição 2.2.1. *Sejam f e g duas funções que satisfaçam as condições da definição 2.2.3, com $0 \leq A < U < B$ e c uma constante qualquer. Então:*

$$\int_A^B f dW_t = \int_A^U f dW_t + \int_U^B f dW_t, \quad (2.20)$$

$$\int_A^B (cf + g) dW_t = c \int_A^B f dW_t + \int_A^B g dW_t \quad e \quad (2.21)$$

$$E \left[\int_A^B f dW_t \right] = 0. \quad (2.22)$$

Iremos enunciar a seguir um resultado muito utilizado:

Teorema 2.2.1 (Isometria de Itô).

Para toda função f que satisfaz as condições de existência da integral de Itô, temos:

$$E \left[\left(\int_A^B f(t, w) dW_t \right)^2 \right] = E \left[\int_A^B f^2(t, w) dt \right]. \quad (2.23)$$

O teorema 2.2.1 é conhecido como isometria de Itô, pois mostra a igualdade da esperança de duas normas definidas diferentemente, uma com a integral de Itô e outra com a integral de Riemann-Stieltjes.

Como a integral de Itô é aleatória, é razoável que ela tenha uma distribuição conhecida, principalmente levando-se em conta sua construção.

Teorema 2.2.2. Para toda função h determinística que pertença ao espaço funcional $L_2(\mathbb{R})$ e que satisfaça as condições de existência da integral de Itô, ou seja, nesse caso, $\forall t, h(t)$ seja um segmento de Borel em $\mathbb{R}$ e $\mathcal{F}_t$ -adaptada:

$$\int_A^B h(t) dW_t \sim N \left(0, \int_A^B h^2(t) dt \right). \quad (2.24)$$

2.3 Processo de Itô

Combinando uma integral de Riemann-Stieltjes com uma integral de Itô obtemos um processo estocástico conhecido como **processo de Itô**.

Definição 2.3.1 (Processo de Itô).

Para todas as funções $u : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ e $v : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $v(\cdot, \cdot)$ satisfaça as condições de existência da integral de Itô, definimos como um processo de Itô, X_t , por:

$$X_t = X_0 + \int_0^t u(s, w) ds + \int_0^t v(s, w) dW_s. \quad (2.25)$$

Para qualquer processo de Itô, podemos definir a seguinte regra de integração por partes:

Teorema 2.3.1 (Integração por Partes).

Sejam $\{X_t\}_{t \in T}$ e $\{Y_t\}_{t \in T}$ dois processos de Itô quaisquer. Então

$$\int_0^t X_s dY_s = X_t Y_t - X_0 Y_0 - \int_0^t Y_s dX_s - \int_0^t dX_s dY_s. \quad (2.26)$$

Analisando o caso específico do teorema 2.3.1 para o caso $X_t = Y_t$, $\forall t$ e utilizando a definição 2.3.2, obtemos a seguinte regra de integração por partes:

$$\int_0^t X_s dX_s = \frac{X_t^2}{2} - \frac{\int_0^t (dX_s)^2}{2} \quad (2.27)$$

e percebemos que a integração por partes de um integral estocástica é diferente da integração por partes usual, de uma integral de Riemann, que é definida da seguinte forma:

$$\int_0^t x dx = \frac{x^2}{2}, \quad (2.28)$$

pois subtrai-se o termo $\int_0^t (dX_s)^2/2$.

Motivado por esse termo restante, um processo estocástico interessante e bastante utilizado na derivação de resultados envolvendo modelos de difusão pode ser construído. Esse processo é conhecido como *Variação Quadrática* e é definido em 2.3.2.

Definição 2.3.2 (Processo de Variação Quadrática).

Seja $\{X_t\}_{t \in T}$ um processo de Itô qualquer. Definimos como processo de variação quadrática o seguinte processo estocástico:

$$\langle X, X \rangle_t = \lim_{\Delta t_k \rightarrow 0} \sum_{t_k \leq t} |X_{t_{k+1}} - X_{t_k}|^2, \quad (2.29)$$

onde $0 = t_1 < \dots < t_n = t$ é uma partição de $[0, t]$ e $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$.

2.4 Modelos de Difusão

Um modelo de difusão é um caso especial de processo de Itô, utilizando-se funções $b : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ e $\sigma : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, que satisfaçam as condições de existência da integral de Itô.

Definição 2.4.1 (Modelo de Difusão).

Para todas as funções $b : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ e $\sigma : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaçam as condições de existência da integral de Itô, definimos como Modelo de Difusão o seguinte processo estocástico:

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s. \quad (2.30)$$

A função $b(\cdot, \cdot)$ é chamada de *coeficiente de nível*, já que ela é responsável pela mudança de nível da série, e a função $\sigma(\cdot, \cdot)$ é chamada de *coeficiente de difusão*, pois a mesma define a velocidade e o tamanho das oscilações da série.

O mesmo modelo de difusão definido em (2.30) pode ser reescrito como:

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t. \quad (2.31)$$

A notação utilizada em (2.31) é mais utilizada na literatura, sendo adotada neste texto.

2.5 Volatilidade nos Modelos de Difusão

Nesta seção, vamos mostrar que a volatilidade dos modelos de Difusão é o quadrado da função $\sigma : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Para isso, utilizando a definição de volatilidade e lembrando que a função $\sigma(\cdot, \cdot)$ satisfaz as condições de existência da integral de Itô, temos que:

$$\begin{aligned} E(dX_t / \{X_s\}_{s \leq t}) &= E(dX_t / \mathcal{F}_t) \\ &= E(b(t, X_t)dt / \mathcal{F}_t) + E(\sigma(t, X_t)dW_t / \mathcal{F}_t) \\ &= b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)E(dW_t / \mathcal{F}_t) \\ &= b(t, X_t)dt. \end{aligned} \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned}
E((dX_t)^2/\{X_s\}_{s \leq t}) &= E((dX_t)^2/\mathcal{F}_t) \\
&= E((b(t, X_t)dt)^2/\mathcal{F}_t) + E((\sigma(t, X_t)dW_t)^2/\mathcal{F}_t) \\
&\quad + 2E(b(t, X_t)dt\sigma(t, X_t)dW_t/\mathcal{F}_t) \\
&= (b(t, X_t)dt)^2 + \sigma^2(t, X_t)E((dW_t)^2/\mathcal{F}_t) \\
&\quad + 2b(t, X_t)dt\sigma(t, X_t)E(dW_t/\mathcal{F}_t) \\
&= (b(t, X_t)dt)^2 + \sigma^2(t, X_t). \tag{2.33}
\end{aligned}$$

Assim, de (2.32) e (2.33), temos que a volatilidade dos modelos de difusão é definida por:

$$\begin{aligned}
Var(dX_t/\{X_s\}_{s \leq t}) &= Var(dX_t/\mathcal{F}_t) \\
&= E((dX_t)^2/\mathcal{F}_t) - (E(dX_t/\mathcal{F}_t))^2 \\
&= (b(t, X_t)dt)^2 + \sigma^2(t, X_t) - (b(t, X_t)dt)^2 \\
&= \sigma^2(t, X_t). \tag{2.34}
\end{aligned}$$

2.6 Simulação de um Modelo de Difusão

Nas simulações de processos de difusão realizadas nesta dissertação, utilizamos o método de Euler, que é definido simplesmente como:

Definição 2.6.1 (Método de Euler).

Seja $\{X_t\}_{t \in T}$ o processo estocástico definido pelo modelo de difusão $dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t$ com $t \in [T_0, T]$. O método de Euler para simulação deste processo, utilizando uma partição fina qualquer (discretização) do tempo definida por $T_0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ é recursivamente dado por:

$$X_{t_{n+1}} = X_{t_n} + b(t_n, X_{t_n})\Delta_{n+1} + \sigma(t_n, X_{t_n})Y_{t_{n+1}} \tag{2.35}$$

onde $X_{t_0} = x_0$ é a condição inicial, σ é a variância da distribuição normal, $\Delta_n = t_n - t_{n-1}$ e a variável aleatória $Y_{t_{n+1}}$ tem distribuição $\mathcal{N}(0, \sigma^2|\Delta_{n+1}|)$.

Este método é claramente derivado de uma versão discreta, como em (2.6), para a equação (2.31).

Capítulo 3

Estimação por Função-Núcleo

Neste capítulo, introduzimos o conceito de estimação não paramétrica por função-núcleo e enunciamos algumas de suas principais propriedades. A devida adaptação dessa técnica para a volatilidade é feita no capítulo 5.

3.1 Introdução

A origem dos estimadores por função-núcleo está associada à estimação de densidades. Já era conhecido um estimador *ótimo* para a função de distribuição, a distribuição empírica. No entanto, não é possível sua adaptação direta para a densidade. Como veremos a seguir, os estimadores por função-núcleo fazem essa adaptação de forma parcial.

Definição 3.1.1 (Distribuição Empírica).

Seja $\{X_1, \dots, X_n\}$ uma amostra aleatória (ou seja, $X_1, \dots, X_n$ independentes e identicamente distribuídos) da distribuição F_X . O estimador empírico de F_X é dado por:

$$\hat{F}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{(-\infty, x]}(X_i), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (3.1)$$

Note que o estimador $\hat{F}_n$ não é diferenciável nos pontos amostrais, sendo sua derivada nula caso contrário. Portanto, não é viável utilizá-lo direta-

mente para estimar a densidade de X . A solução encontrada foi utilizar um estimador funcionalmente parecido com (3.1).

Definição 3.1.2. *Seja $\{X_1, \dots, X_n\}$ uma amostra aleatória da distribuição $F_X(\int f_X)$. O estimador empírico de f_X é dado por:*

$$\hat{f}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{[x]}(X_i), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (3.2)$$

Note que o estimador em (3.2) é inútil, pois a probabilidade de o evento $[X_i = x]$ ocorrer é nula se X_i é uma variável aleatória contínua, o que é conflitante, pois esta é a única razão para se estimar uma densidade. Assim, houve a necessidade de se fazer uma pequena modificação em (3.2). Note que (3.2) pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \hat{f}_n(x) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{[x]}(X_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{[0]}(X_i - x) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K(X_i - x), \end{aligned} \quad (3.3)$$

onde $K(\cdot) = \mathbf{1}_{[0]}(\cdot)$. Utilizando-se (3.3) para uma função $K(\cdot)$ com propriedades de regularidade mais desejáveis, criamos uma família de estimadores que podem ter um desempenho próximo ao *ótimo*.

Definição 3.1.3 (Estimador de Densidade).

Seja $\{X_1, \dots, X_n\}$ uma amostra aleatória da distribuição $F_X(\int f_X)$. O estimador por função-núcleo de $f_X(x)$ é dado por:

$$\hat{f}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K(X_i - x), \quad (3.4)$$

onde $K(\cdot)$ é uma função conhecida e chamada de função-núcleo.

Para que o estimador definido por (3.4) tenha boas propriedades, devemos restringir-nos a funções $K(\cdot)$ que gozem de certas propriedades de regularidade. Chamaremos tais funções de funções-núcleo admissíveis. Pela observação feita sobre (3.3), é natural que $K(\cdot) = \mathbf{1}_{[0]}(\cdot)$ não seja considerada admissível, servindo (3.3) apenas como motivação para a utilização de funções-núcleo na estimativa da densidade. As restrições que definem funções-núcleo admissíveis de forma sistemática são apresentadas na subseção 3.1.1.

É importante salientar que além da maior utilidade prática do estimador definido em (3.4) com relação ao estimador empírico, aquele reproduz as propriedades ótimas do estimador empírico de F_X . Essas propriedades serão enunciadas na seção 3.3.

3.1.1 Restrição nas Funções-Núcleo

A função $K(X_i - \cdot)$ pode ser interpretada como o peso de cada variável aleatória X_i no estimador da densidade num ponto específico $x \in \mathbb{R}$. Assim, faz sentido que a função $K(\cdot)$ seja simétrica, de forma que observações que estejam à mesma distância de x tenham o mesmo peso na estimativa de $f_X(x)$ ¹. Como estamos interessados em estimar uma função que é contínua, é interessante que a função-núcleo também seja contínua e integrável.

Levando-se em conta os argumentos acima e algumas outras propriedades que ficarão claras posteriormente, exige-se que as funções-núcleo satisfaçam às seguintes condições:

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x)dx = 1 \quad (3.5)$$

e, como consequência da simetria, também que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} xK(x)dx = 0. \quad (3.6)$$

Alguns exemplos bastante utilizados de funções-núcleos são dados na tabela 3.1.1.

Para visualizar o comportamento das funções-núcleo descritas em 3.1.1 e entender o seu efeito na estimativa de densidade f_X , desenhamos algumas delas na figura 3.1.

¹Podemos argumentar que para séries financeiras, tal simetria não é tão natural.

Tabela 3.1: Exemplos de Funções-Núcleo Admissíveis

$K(x)$	Nome
$\mathbf{1}_{[-1/2, 1/2]}(x)$	Uniforme
$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$	Normal
$0,75(1-x^2)\mathbf{1}_{(x \leq 1)}$	Epanechnikov
$\frac{15}{16}(1-x^2)^2\mathbf{1}_{(x \leq 1)}$	Biponderada
$(1- x)\mathbf{1}_{(x \leq 1)}$	Triangular
$\frac{1}{2}\mathbf{1}_{(x \leq 1)}$	Retangular

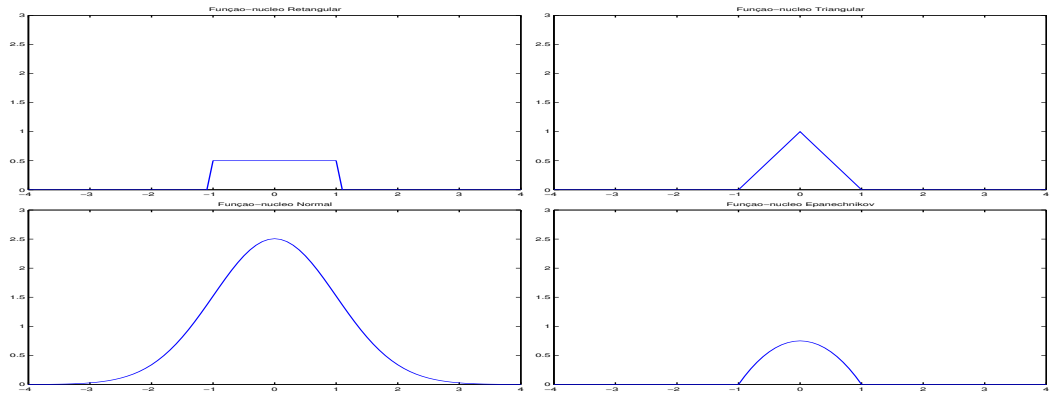


Figura 3.1: Funções-Núcleo Admissíveis

O efeito das diferentes funções-núcleo é evidente observando os gráficos acima. Utilizando-se a função retangular, as observações que são utilizadas na estimativa do ponto x têm o mesmo peso. Com a função Triangular, quanto mais distante a observação for de x , menor será o seu peso, e se a distância for maior que um, o peso é nulo. A função de Epanechnikov é similar à triangular, porém sem o pico da mesma. Já, na função normal, todas as observações são utilizadas para se estimar qualquer ponto x , mas observações distantes vão tendo seu peso diminuído significativamente.

3.1.2 Parâmetro de Alisamento

Para dar maior flexibilidade à estimativa, introduziu-se um novo parâmetro h no estimador (3.4), conhecido como parâmetro de escala. Assim, de forma mais geral, o estimador por função-núcleo de densidade é definido por:

$$\hat{f}_h(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{X_i - x}{h}\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_h(X_i - x), \quad (3.7)$$

onde $K_h(\cdot) = K(\cdot/h)/h$. O parâmetro de alisamento influencia diretamente no peso dado a cada observação na estimativa de $f_X(x)$. Se utilizarmos um h *grande*, observações mais distantes de x passarão a ter um peso mais significativo enquanto que, utilizando um h *pequeno*, somente observações próximas de x vão ter um peso significativo, definindo então h o grau de alisamento de $\hat{f}_n$. De forma mais clara, quanto maior for h , mais alisada e regular torna-se a estimativa da densidade e, quanto menor for h , mais detalhada e irregular. A influência de cada h na análise está relacionada à função-núcleo utilizada, sendo assim a escolha de ambos fundamental.

Ilustramos estimativas por função-núcleo na figura 3.2, utilizando função-núcleo uniforme para diferentes parâmetros de alisamento, onde o efeito do parâmetro h na estimativa se torna bastante claro.

A grosso modo, o parâmetro h define a quantidade *factual* de observações que serão utilizadas na estimativa de cada $f_X(x)$. Note que as condições definidas para que a função $K(\cdot)$ seja uma função-núcleo são atendidas por $K_h(\cdot)$.

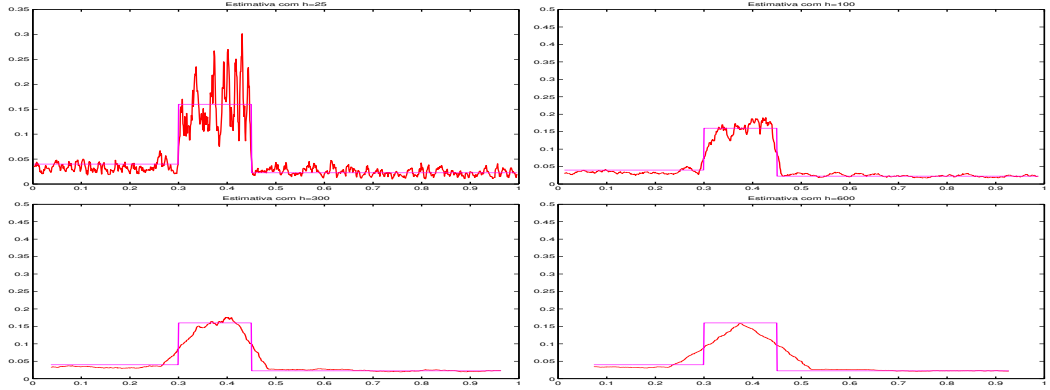


Figura 3.2: Efeito do parâmetro de Alisamento h

3.2 O Estimador de Nadaraya-Watson

Suponha que queiramos analisar um conjunto de dados independentes e identicamente distribuídos de (X, Y) , de tamanho n , $\{(X_i, Y_i)\}_{i=1}^n$, e estejamos interessados num estimador da esperança condicional $E(Y/X = x)$, para modelar a relação das variáveis aleatórias X e Y da seguinte forma:

$$Y_i = E(Y_i/X_i) + \epsilon_i \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.8)$$

onde ϵ_i é o erro amostral de cada observação.

Seja $m(x) = E(Y/X = x)$. Supondo que Y e X sejam conjuntamente absolutamente contínuas, temos:

$$m(x) = E(Y/X = x) = \int_{\mathbb{R}} y f_{Y/X=x}(y) dy = \int_{\mathbb{R}} y \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_X(x)} dy. \quad (3.9)$$

Utilizando-se o método da substituição (também conhecido como método "Plug-in" na literatura), ou seja, substituindo-se as funções desconhecidas por suas estimativas, obtemos de (3.9) que:

$$\hat{m}(x) = \int_{\mathbb{R}} y \frac{\hat{f}_{X,Y}(x, y)}{\hat{f}_X(x)} dy. \quad (3.10)$$

Em (3.7), já discutimos um estimador por função-núcleo para a densidade f_X , faltando agora encontrarmos um estimador por função-núcleo para $f_{X,Y}$. Utilizando raciocínio análogo, obtemos:

$$\begin{aligned}
\widehat{f}_{X,Y}(x, y) &= \frac{1}{nh^2} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{X_i - x}{h}\right) K\left(\frac{Y_i - y}{h}\right) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_h(X_i - x) K_h(Y_i - y),
\end{aligned} \tag{3.11}$$

onde $K_h(\cdot) = K(\cdot/h)/h$. Substituindo (3.7) e (3.11) em (3.10), temos que:

$$\begin{aligned}
\widehat{m}(x) &= \int_{\mathbb{R}} y \frac{\widehat{f}_{X,Y}(x, y)}{\widehat{f}_X(x)} dy = \int_{\mathbb{R}} y \frac{\sum_{i=1}^n K_h(X_i - x) K\left(\frac{Y_i - y}{h}\right)}{\sum_{i=1}^n K\left(\frac{X_i - x}{h}\right)} dy \\
&= \frac{\sum_{i=1}^n K_h(X_i - x) \int_{\mathbb{R}} y K\left(\frac{Y_i - y}{h}\right) dy}{\sum_{i=1}^n K\left(\frac{X_i - x}{h}\right)}.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Pela transformação de variáveis $v = (Y_i - y)/h$ e lembrando que uma função-núcleo admissível $K(\cdot)$ deve ser simétrica e ter norma 1, obtemos, de (3.12), que:

$$\begin{aligned}
\widehat{m}(x) &= \frac{\sum_{i=1}^n K_h(X_i - x) \int_{\mathbb{R}} (vh + Y_i) K(v) h dv}{\sum_{i=1}^n K\left(\frac{X_i - x}{h}\right)} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^n K_h(X_i - x) Y_i}{\sum_{i=1}^n K_h(X_i - x)}.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

O estimador de $m(\cdot)$ definido em (3.13) é conhecido como o **Estimador de Nadaraya-Watson** que será o **estimador de regressão por função-**

núcleo nesta dissertação. É interessante salientar que esse estimador pode ser reescrito como:

$$\hat{m}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n W_{n,i}(x) Y_i, \quad (3.14)$$

onde

$$W_{n,i}(x) = \frac{n K_h(X_i - x)}{\sum_{i=1}^n K_h(X_i - x)}. \quad (3.15)$$

Percebe-se claramente de (3.14) que o estimador de Nadaraya-Watson nada mais é do que uma média ponderada das observações $\{Y_i, i = 1, \dots, n\}$, pela seqüência de pesos $\{W_{n,i}(x), i = 1, \dots, n\}$, definida em (3.15).

3.2.1 Erro do Estimador de Nadaraya-Watson

Estamos interessados em avaliar a eficiência do estimador de Nadaraya-Watson, definido em (3.13). Uma medida clássica para isso é o Erro Quadrático Médio (EQM), pois o mesmo avalia o vício e a variância do estimador simultaneamente. Para facilitar a notação, utilizaremos $EQM(x)$ em lugar de $EQM(\hat{m}(x), m(x))$ e nenhuma confusão a isso deve ser associada.

$$\begin{aligned} EQM(x) &= EQM_{\hat{m},m}(x) = E(\hat{m}(x) - m(x))^2 \\ &= Var(\hat{m}(x)) + (E(\hat{m}(x)) - m(x))^2 \\ &= Var(\hat{m}(x)) + \text{Vício}^2(\hat{m}(x)). \end{aligned} \quad (3.16)$$

A medida (3.16) tem caracterização local, isto é, mede a qualidade local de $\hat{m}(\cdot)$ como estimador de $m(\cdot)$ num específico ponto $x \in \mathbb{R}$. Essa caracterização nos é problemática por não responder de forma sintética à questão de $\hat{m}(\cdot)$ ser um bom estimador de $m(\cdot)$. Para tanto, seria interessante uma medida global, que fosse similar a (3.16) mas que avaliasse $\hat{m}(\cdot)$ em todos os pontos. É importante frisar que mesmo que essas medidas globais sejam pequenas, pode haver pontos em que o erro cometido na estimativa seja grande, tendo porém o conjunto de tais pontos medida nula, no sentido de Lebesgue. Diversas dessas medidas são propostas na literatura e apresentamos algumas delas a seguir.

Definição 3.2.1 (Erro Absoluto Integrado).

Seja $\hat{m}$ um estimador da função m . O Erro Absoluto Integrado(EAI) desse estimador é:

$$EAI = \int_{\mathbb{R}} |\hat{m}(x) - m(x)| w(x) dx, \quad (3.17)$$

onde $w(\cdot)$ é uma função-peso não-negativa.

Definição 3.2.2 (Erro Quadrático Integrado).

Seja $\hat{m}$ um estimador da função m . O Erro Quadrático Integrado(EQI) desse estimador é:

$$EQI = \int_{\mathbb{R}} (\hat{m}(x) - m(x))^2 w(x) dx, \quad (3.18)$$

onde $w(\cdot)$ é uma função-peso não-negativa.

Definição 3.2.3 (Erro Quadrático Médio Integrado).

Seja $\hat{m}$ um estimador da função m . O Erro Quadrático Médio Integrado(EQMI) desse estimador é:

$$EQMI = E \left(\int_{\mathbb{R}} (\hat{m}(x) - m(x))^2 w(x) dx \right), \quad (3.19)$$

onde $w(\cdot)$ é uma função-peso não-negativa.

Uma versão discreta do EQI é definida a seguir.

Definição 3.2.4 (Erro Quadrático Discreto).

Seja $\hat{m}$ um estimador da função m . O Erro Quadrático Discreto(EQD) desse estimador é:

$$EQD = n^{-1} \sum_{i=1}^n (\hat{m}(X_i) - m(X_i))^2 w(X_i), \quad (3.20)$$

onde $w(\cdot)$ é uma função-peso não-negativa.

Note que o EQD é igual ao EQI condicionado à amostra. Podemos definir também mais uma medida discreta, muito utilizada no método de validação cruzada, discutido na seção 3.4.

Definição 3.2.5 (Erro Quadrático Discreto Condicionado).

Seja $\hat{m}$ um estimador da função m . O Erro Quadrático Discreto Condicionado (EQDC) desse estimador é:

$$EQDC = E [EQD(\hat{m}(x), m(x)) | \{X_1, \dots, X_n\}], \quad (3.21)$$

onde $w(\cdot)$ é uma função-peso não-negativa.

Note que as medidas de erro globais definidas de 3.2.1 a 3.2.5 não podem ser calculadas na prática pois claramente não conhecemos a função m que queremos estimar. Assim a mais normalmente utilizada é o erro quadrático médio integrado pois, sendo função de uma esperança, podemos avaliá-la utilizando métodos de reamostragem, e também devido a sua relação com o erro quadrático médio. Por motivos semelhantes, as medidas discretizadas acima podem ser estimadas, tornando-as mais úteis na prática.

O estimador definido por (3.13) goza de excelentes propriedades. No entanto, pela natureza dos dados de volatilidade, as hipóteses usuais não são satisfeitas. Por nosso interesse residir em séries financeiras, iremos postergar o enunciado das propriedades do estimador de Nadaraya-Watson para a seção 3.3, mesmo para dados i.i.d..

3.3 Resultados Assintóticos do Estimador de Nadaraya-Watson

Enunciaremos alguns resultados assintóticos do estimador de regressão por função-núcleo, para processos de tempo contínuo e as respectivas *taxas de convergência ótimas*. Quando nos referimos a uma taxa como ótima, queremos dizer que essa taxa é de mesma ordem que aquela obtida no caso em que as observações são independentes e identicamente distribuídas. Para podermos enunciar tais resultados, teremos que recorrer a algumas definições.

Mesmo com o elevado número de definições, muitas suposições sobre o processo e restrições não serão comentadas. Para detalhes, indicamos (Bosq 1998) e (Härdle 1990).

Primeiramente, precisamos definir o processo do qual estaremos mostrando. Os resultados abaixo dizem respeito a qualquer processo estocástico estacionário $\{X_t, Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, definido em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, onde $m(\cdot)$, definida em (3.8), é uma função boreliana tal que $m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $E(|m(Y_0)|) < \infty$.

Nesta dissertação, estamos interessados no processo estocástico contínuo definido na seção 2.4 por (2.31). Porém, como não se observa tal processo continuamente, condicionado a uma amostra, podemos supor que o processo de difusão seja um processo estocástico discreto, como especificado no parágrafo anterior. Nos enunciados abaixo, trocamos a notação do estimador definido em (3.13) para $\hat{m}_n(x)$, deixando clara sua dependência no comprimento da série amostrada.

Definição 3.3.1 (Mistura Forte).

Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo estocástico. $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ satisfaz a condição de **mistura forte** se :

$$\alpha_k = \sup_{t \in \mathbb{Z}} \alpha(\sigma(X_s, s \leq t), \sigma(X_s, s \geq t + k)) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0, \quad (3.22)$$

onde $\sigma(X)$ é a σ -álgebra gerada pelo processo $\{X\}_{t \in T}$ e $\alpha(\cdot, \cdot)$ é:

$$\alpha(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \sup_{A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}} |P(A \cap B) - P(A)P(B)|, \quad (3.23)$$

onde $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são σ -álgebras.

Note que o *coeficiente de mistura forte* α_k , definido em (3.22), pode ser interpretado como uma medida de quão *próximo* o processo está de ser independente, para observações separadas por uma distância k . A seguir, iremos enunciar um resultado assintótico para o erro quadrático dos estimadores de regressão por função-núcleo.

Teorema 3.3.1. *Se $m(\cdot)$ e $f_X(\cdot)$ satisfizerem as condições de regularidade 1 na seção A.2, se $\beta > 0$, se $f_X(x) > 0$ e se $\beta > \max \left\{ \frac{2(p-1)}{p-2}, 3 \right\}$, escolhendo-se*

$$h = c_n n^{-1/5},$$

com $c_n \rightarrow c > 0$, então:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{4/5} E(\hat{m}_n(x) - m(x))^2 = C(x, c, K, f, m), \quad (3.24)$$

onde $C(x, c, K, f, m)$ é uma constante que depende da função-núcleo utilizada, de uma constante c , da densidade $f_X(\cdot)$, da função de interesse $m(\cdot)$ e do ponto x que estamos estimando, n é o tamanho da amostra e o parâmetro p é definido nas condições de regularidade 1, na seção A.2.

O teorema 3.3.1 é importante pois mostra que para o erro quadrático esperado é possível obter uma taxa de convergência ótima. Sabemos, porém, que avaliar o erro esperado do estimador em cada ponto não é o suficiente para avaliar a capacidade do estimador em estimar a função $m(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, como foi mencionado na seção 3.2.1. A seguir, enunciaremos o teorema 3.3.2 que diz respeito à convergência uniforme e quase-certa do estimador em questão. Nesse caso, porém, não é possível atingir a taxa de convergência ótima.

Definição 3.3.2. *Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo estocástico. O processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é uma **mistura geometricamente forte** (M.G.F.) se existir $C_0 > 0$ tal que :*

$$\alpha_k \leq C_0 \rho^k, \quad \rho \in [0, 1), \quad k \geq 1. \quad (3.25)$$

Teorema 3.3.2. *Se $m(\cdot)$, $f_X(\cdot)$ e $K(\cdot)$ satisfizerem as condições de regularidade 2, na seção A.3, se o processo $Z_t = (X_t, Y_t) \forall t$ for um processo estocástico estacionário M.G.F., se existir um conjunto compacto S tal que*

$$\inf_{x \in S} f_X(x) > 0,$$

se

$$E(\exp a|m(Y_0)|^\tau) < \infty,$$

para $a > 0$ e $\tau > 0$ e se

$$\frac{nh_n}{\log(n)^{2+1/\tau}} \rightarrow \infty,$$

então:

$$\sup_{x \in S} |\hat{m}_n(x) - m(x)| \rightarrow 0 \quad q.c.. \quad (3.26)$$

Se, além disso, tomarmos $h_n \simeq \left(\frac{\log(n)^{2-1/\tau}}{n}\right)^{1/5}$, então, para cada k inteiro,

$$\frac{n^{2/5}}{\log_k(n)(\log(n))^{\frac{1}{\tau}+(1-\frac{1}{\tau})\frac{2}{5}}} \sup_{x \in S} |\hat{m}_n(x) - m(x)| \rightarrow 0 \quad q.c., \quad (3.27)$$

onde $\log_k(\cdot)$ é definido de forma que $\log_k(\cdot) = \log(\log_{k-1}(\cdot))$.

O teorema a seguir versa sobre a convergência em distribuição do estimador $\hat{m}_n(x)$:

Teorema 3.3.3. *Se a função $f_X(\cdot)$ e os processos X_t e Z_t satisfizerem as condições de regularidade 3, na seção A.4, se $f(x)v(x) > 0$ e se $nh_n^3 \rightarrow 0$ então:*

$$\frac{\sqrt{nh_n} \sqrt{f_n(x)}}{\int K^2(x) dx \sqrt{v_n(x)}} (\hat{m}_n(x) - m(x)) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1), \quad (3.28)$$

onde $v(x) = \int m^2(y) \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} dy - \left(\int m(y) \frac{f_Z(x,y)}{f_X(x)} dy \right)^2$ e $f_n(x)$ e $v_n(x)$ são, respectivamente, o estimadores por função-núcleo de $f_X(x)$ e $v(x)$.

Para facilitar a comparação das razões de convergência, construímos a tabela 3.2, contendo as razões do estimador $\hat{m}_n(x)$ com o estimador de densidades, no caso de as observações serem independentes e identicamente distribuídas.

Tabela 3.2: Ordem das Medidas de Erro

Medidas de Erro	$\hat{f}$	
	obs. iid	obs. dependentes
E.Q.I.	$O\left(n^{-\frac{4}{5}}\right)$	$O\left(n^{-\frac{4}{5}}\right)$
E.A.I.	$O\left(\left(\frac{\log(n)}{n}\right)^{\frac{2}{5}}\right)$	$o\left(\log_k(n) \left(\frac{\log(n)}{n}\right)^{\frac{2}{5}}\right)$

3.4 Validação Cruzada

Como vimos na seção 3.3, a escolha do parâmetro h influencia diretamente no erro cometido na estimativa da função $m(x)$, $x \in \mathbb{R}$, sendo que cada medida de erro utilizada é afetada de uma forma semelhante pelo parâmetro h . Em geral, um h grande diminui a variância do estimador porém aumenta seu vício, sendo o inverso verdade para um h pequeno. Ou seja, seria interessante obter um h ótimo, que nos permitisse estimar da melhor maneira possível $m(x)$ (de forma a minimizar a medida de erro utilizada).

Existem diversas técnicas para se escolher o h ótimo, uma das principais sendo a da validação cruzada, que discutiremos nesta seção. Essa técnica é baseada na função de validação cruzada, definida como:

Definição 3.4.1 (Validação Cruzada).

Seja $\hat{m}(x)$ um estimador de $m(x) = E(Y/X = x)$. Definimos a função de Validação Cruzada de $\hat{m}(x)$ por:

$$CV(h) = n^{-1} \sum_{j=1}^n [Y_j - \hat{m}_{h,j}(X_j)]^2 w(X_j), \quad (3.29)$$

onde $w(\cdot)$ é uma função-peso não-negativa e

$$\hat{m}_{h,j}(X_j) = \frac{\sum_{i \neq j} K_h(X_i - X_j) Y_i}{\sum_{i \neq j} K_h(X_i - X_j)}. \quad (3.30)$$

A função de validação cruzada em (3.29) pode ser interpretada como uma estimativa de *Jackknife* da $E[EQD]$, que é equivalente a $E[EQI/\{x_1, \dots, x_n\}]$, pois Y_i seria uma boa estimativa para a função desconhecida $m(X_i)$ se não houvesse erro.

Assim, considerando-se a função de validação cruzada para diversos valores de h , temos uma idéia de como h influencia na $E[EQI/\{x_1, \dots, x_n\}]$, sendo essa uma forma razoável de se definir o parâmetro ótimo.

Definição 3.4.2 (Parâmetro de Alisamento Ótimo).

Seja $\hat{m}(x)$ o estimador por função-núcleo de regressão para função $m(x)$. Definimos o h ótimo utilizando o método de validação cruzada como sendo:

$$\hat{h}_{otm} = \arg \min_h CV(h) \quad (3.31)$$

onde $CV(\cdot)$ é a função de validação cruzada definida em (3.29).

Na prática, definimos uma sequência de candidatos $\{h_j\}_{j=1}^m$ e avaliamos a função $CV(h)$ para cada um deles. Note que essa técnica é extremamente cara computacionalmente e inviável para problemas médios e grandes. Por isso, ela foi utilizada somente para os estimadores MM e MMC, definidos em 5.1.2 e 5.1.3, respectivamente, mas não pôde ser utilizada para a função-núcleo normal.

Capítulo 4

Estimação por Ondasletas

4.1 Introdução à Análise de Fourier

A análise de Fourier é uma ferramenta muito importante para a exploração de fenômenos nos domínios da frequência e do tempo. Suponha que X tenha distribuição normal, com média μ e variância σ^2 . A transformada de Fourier (função característica) de sua densidade é dada por:

$$\hat{f}(w) = \mathcal{F} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}} \right] = E \left(e^{-itX} \right) = e^{it\mu - \frac{t^2\sigma^2}{2}}. \quad (4.1)$$

Utilizando-se a transformada de Fourier da distribuição normal, é fácil derivar, por exemplo, a distribuição da soma de duas variáveis aleatórias normais, X e Y , independentes e identicamente distribuídas:

$$\begin{aligned} E \left(e^{-it(X+Y)} \right) &= E \left(e^{-itX} \right) E \left(e^{-itY} \right) \\ &= e^{it\mu - \frac{t^2\sigma^2}{2}} e^{it\mu - \frac{t^2\sigma^2}{2}} = e^{it2\mu - \frac{t^22\sigma^2}{2}}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

que tem uma distribuição normal com média 2μ e variância $2\sigma^2$. Derivar esse resultado sem a utilização da transformada de Fourier é mais trabalhoso. Pouca complexidade será adicionada se falarmos em n variáveis aleatórias independentes na Análise de Fourier, diferentemente da análise

tradicional. Existem diversas propriedades da transformada de Fourier que são interessantes no contexto de funções características, como por exemplo a propriedade de momentos, que é definida na subseção 4.1.1, pois ela nos permite calcular os diferentes momentos de uma variável aleatória. Na teoria de Ondaletas, utiliza-se a transformada de Fourier para obter diversos resultados de maneira relativamente simples, como será visto na seção 4.2.

4.1.1 Transformada de Fourier

Primeiramente, definiremos o espaço funcional $L_2(\mathbb{R})$, a transformada de Fourier e a sua inversa, para depois citarmos algumas de suas principais propriedades.

Definição 4.1.1 (Espaço $L_2(\mathbb{R})$).

O espaço funcional $L_2(\mathbb{R})$ é composto por todas as funções quadrado-integráveis, isto é:

$$L_2(\mathbb{R}) = \left\{ f, \int_{\mathbb{R}} f^2(x) dx < \infty \right\}. \quad (4.3)$$

A norma de uma função f no $L_2(\mathbb{R})$ é definida como:

$$\|f\|_{L_2} = \sqrt{\langle f, f \rangle_{L_2}} = \sqrt{\int_{\mathbb{R}} f^2(x) dx}. \quad (4.4)$$

Definição 4.1.2. *A transformada de Fourier de uma função $f \in L_2(\mathbb{R})$ é definida por:*

$$\widehat{f}(w) = \mathcal{F}[f(\cdot)] = \langle f(\cdot), e^{iw\cdot} \rangle_{L_2} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iwx} dx. \quad (4.5)$$

Definição 4.1.3. *Se $\widehat{f}(w) \in L_2(\mathbb{R})$ é a transformada de Fourier de uma função $f \in L_2(\mathbb{R})$, então a **transformada inversa de Fourier** é definida por:*

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}[\widehat{f}(w)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(w) e^{iwx} dw. \quad (4.6)$$

Algumas das principais propriedades da transformada de Fourier são apresentadas na tabela 4.1:

Tabela 4.1: Propriedades da Transformada de Fourier

Propriedade de Linearidade $\mathcal{F}[\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha \mathcal{F}[f(x)] + \beta \mathcal{F}[g(x)]$	Propriedade Derivativa $\mathcal{F}[f^{(n)}(x)] = (iw)^n \hat{f}(w)$
Identidade de Plancherel $\ f\ _{L_2}^2 = \frac{1}{2\pi} \ \hat{f}\ _{L_2}^2$	Propriedade de locação $\mathcal{F}[f(ax)] = \frac{1}{ a } \hat{f}\left(\frac{w}{a}\right)$
Propriedade de escala $\mathcal{F}[f(ax)] = \frac{1}{ a } \hat{f}\left(\frac{w}{a}\right)$	Propriedade de Simetria $\mathcal{F}[\mathcal{F}[f(x)]] = 2\pi f(-x)$
Propriedade de Convolução $\mathcal{F}\left[\int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t)dt\right] = \hat{f}(w)\hat{g}(w)$	Propriedade dos Momentos $\int_{\mathbb{R}} x^n f(x)dx = i^n \frac{d^n \hat{f}(w)}{dw^n} \Big _{w=0}$

Apesar de suas qualidades teóricas, a transformada de Fourier tem problemas do ponto de vista prático. Ela não é local pela natureza da transformação. Lembrando-se da fórmula de Euler

$$e^{-iwx} = \cos(wx) - i \sin(wx),$$

percebemos que a transformada de Fourier é a sobreposição de diversas funções periódicas, com períodos diferentes e que oscilam infinitamente. Assim, se estamos trabalhando com uma função que tem um pico severo no domínio do tempo, como por exemplo a *função* delta-Dirac definida em (4.1.4), necessitaríamos de muitas exponenciais para conseguir reproduzir o mesmo e, como essas exponenciais oscilam, necessitaríamos de ainda mais exponenciais para cancelar as oscilações impostas antes e depois do pico de interesse. Essa natureza de sobreposição exponencial da transformada de Fourier demonstra o quão ineficiente ela é para representar o comportamento local de funções. De forma mais clara, uma pequena alteração na função sendo analisada causará a mudança de todos os coeficientes da transformada de Fourier.

Definição 4.1.4 (Função Delta-Dirac).

Seja f uma função integrável qualquer. A **função Delta-Dirac**

$\delta(\cdot)$ satisfaz:

$$\int_{\mathbb{R}} \delta(a)f(x)dx = f(a), \quad (4.7)$$

para qualquer ponto a pertencente ao domínio da função f .

Devemos salientar que a função *Delta-Dirac* não é realmente uma função. Utilizamo-na como exemplo extremo da má localização da Transformada de Fourier.

No fundo, esse problema da falta de localização da transformada de Fourier se deve ao *Princípio da Incerteza*, o qual afirma que, se uma função qualquer $g(\cdot)$ não-nula é pequena fora de um intervalo de comprimento T e a sua transformada de Fourier $\widehat{g}(\cdot)$ é pequena fora de um intervalo de comprimento Ω , então a desigualdade $T \geq c/\Omega$ vale, para uma constante c próxima de 1. Ou seja, se temos uma função com um pico severo no domínio do tempo e conseqüentemente um T bem pequeno, o suporte da sua transformada de Fourier no domínio da frequência terá que ser grande: assim, ela não será bem localizada no domínio da frequência, o que acarretará na mudança de diversos coeficientes da transformada.

Uma forma de contornar esse problema de localização é a utilização da transformada de Fourier Janelada, discutida na subseção 4.1.2.

4.1.2 Transformada de Fourier Janelada

Tendo em mente os problemas discutidos na subseção 4.1.1, seria interessante definir uma transformada que se utiliza somente de valores até o instante t (tempo real) e também que tivesse *memória* finita de tamanho T , ou seja, utilizaríamos somente valores no intervalo finito $[t - T, t]$ para definir um ponto no domínio da frequência. Outra característica interessante seria que valores em diferentes trechos desse intervalo influenciassem de maneira diferente na definição dessa transformada, ou seja, utilizaríamos uma função-peso.

A transformada de Fourier Janelada é uma transformada desse tipo, cuja diferença básica com relação à transformada de Fourier é a utilização de uma função-janela (ou peso) g , que tem suporte compacto em $[-T, 0]$ e que possa assumir valores complexos. Na verdade, a função g não precisa ter suporte compacto; basta que pertença a L_2 , servindo a restrição do suporte meramente para dar uma motivação física, pois essa transformada foi formulada numa tentativa de imitar como o ouvido humano *processa* o som. Então, definindo-se a função f_t como:

$$f_t(x) = \overline{g(x-t)}f(x) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (4.8)$$

podemos agora definir a transformada de Fourier Janelada.

Definição 4.1.5. *A transformada de Fourier Janelada de uma função $f \in L_2(\mathbb{R})$, utilizando como função peso g , é:*

$$\tilde{f}(w, t) = \mathcal{F}[f_t(x)] = \int_{\mathbb{R}} \overline{g(x-t)}f(x)e^{-iwx}dx. \quad (4.9)$$

Definição 4.1.6. *A transformada inversa de Fourier Janelada de uma função $f \in L_2(\mathbb{R})$ que tem transformada de Fourier Janelada $\tilde{f}(w, t)$ é:*

$$f(x) = \frac{1}{\|g\|^2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} g(x-t)\tilde{f}(w, t)e^{iwx}dw dt. \quad (4.10)$$

Para ver em detalhes como essa transformação inversa é obtida, uma boa referência é (Kaiser 1994). A transformada de Fourier Janelada parece muito diferente da transformada de Fourier. Pode-se mostrar, porém, que elas são razoavelmente parecidas e muitas das propriedades definidas na seção anterior podem ser adaptadas para a transformada de Fourier Janelada. A inversa desta transformada é obtida integrando-se no $\mathbb{R}^2$ porque introduzimos uma nova variável t , que não existe na função original f e quando integramos com relação a t seu *efeito* é retirado.

A utilização da função-peso g acaba funcionando como um balanceamento entre uma boa localização no tempo e na frequência pois, se a função analisada possuir comportamentos definidos em intervalos de tempo maiores que T , esses aparecerão no comportamento temporal de $\tilde{f}(w, t)$; se, por outro lado, a função possuir comportamentos definidos em intervalos menores que T , eles aparecerão no comportamento frequencial de $\tilde{f}(w, t)$.

Mesmo a transformada de Fourier Janelada (T.F.J.) sendo melhor localizada no tempo e na frequência que a transformada de Fourier, continua persistindo o problema da falta de localização, porque as medições de frequências e tempo são fundamentalmente incompatíveis, já que uma frequência não

pode ser medida instantaneamente, o que resulta no princípio da incerteza comentado anteriormente.

Além disso, para que a T.F.J. fosse realmente local, seria necessário controle externo, para que a função peso g tivesse suporte do tamanho da amplitude $(1/w_0)$ da respectiva frequência (w_0) . Ou seja, se utilizamos uma janela com um suporte compacto de largura T estamos introduzindo uma escala na análise, com o objetivo de *deformar* a função no domínio do tempo ou da frequência, dependendo da relação com T .

A análise de Ondaletas é justamente uma transformação que permite manipulações na escala sem *deformar* a função. Antes de discutirmos essa nova análise, iremos apresentar a Transformada de Fourier Discreta, a forma operacional da Transformada de Fourier.

4.1.3 Transformada de Fourier Discreta

Como a transformada de Fourier consiste em superposições de funções exponenciais, ela é altamente redundante, ou seja, a mesma informação acaba sendo usada diversas vezes. A seguir, vamos enunciar o teorema de amostragem de Shannon, pelo qual é possível obter, $\forall t \in \mathbb{R}$, o valor de uma função $f \in L_2(\mathbb{R})$ que satisfaça certas condições, apenas conhecendo valores amostrados, numa determinada frequência, dessa função.

Teorema 4.1.1. *Seja $f \in L_2(\mathbb{R})$ e $\hat{f}(w) = \mathcal{F}[f(x)] = 0$ para $|w| > \Omega$. Então, f pode ser reconstruída a partir de seus valores amostrados nos tempos $t_n = n/2\Omega$, $n \in \mathbb{Z}$, pela seguinte fórmula:*

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\text{sen}[2\pi\Omega(t - t_n)]}{2\pi\Omega(t - t_n)} f(t_n). \quad (4.11)$$

Vamos dar uma interpretação intuitiva desse teorema. Primeiramente, se a transformada de Fourier de f tem suporte compacto em $[-\Omega, \Omega]$ é razoável assumir que f mude suavemente, isto é, seja uma função bem comportada, sendo que o seu grau de suavidade é controlado pelo tamanho de Ω : quanto menor, mais suave é f . Isto é claramente observado na seguinte desigualdade

$$|f^{(n)}(t)| \leq (2\pi\Omega C)^n,$$

que é uma consequência do suporte compacto de $\hat{f}(w)$, onde C é uma constante apropriada.

Quanto mais suave é a função f , menor é a frequência de amostragem necessária para podermos recuperar a função para todo t através de interpolação, já que ela não terá nenhum pico repentino. Assim, é razoável que a frequência de amostragem seja uma função de Ω e, pelo teorema, sabemos que esta frequência é de 2Ω amostras por unidade de tempo. Por exemplo, a audição humana percebe sons numa frequência máxima de $20000Hz$. Assim, em aparelhos de som digitais e afins, utiliza-se uma frequência de amostragem de somente $44100Hz$, pois não há necessidade teórica de uma amostragem maior.

Essa frequência de amostragem definida pelo teorema de Shannon é a menor frequência possível de amostragem que possibilita recuperar a função de forma única e é conhecida como *razão de Nyquist* ou *amostragem crítica*. Qualquer frequência de amostragem maior que 2Ω é claramente aceitável, bastando notar que podemos definir Ω' tal que $[-\Omega, \Omega] \subset [-\Omega', \Omega']$ e assim obtendo uma frequência de amostragem de $2\Omega'$.

Se é admissível conhecermos somente valores amostrados de uma função f , seria interessante calcular a transformada de Fourier dessa função utilizando tal amostra. Assim, podemos definir a transformada de Fourier discreta como:

Definição 4.1.7 (Transformada de Fourier Discreta).

A Transformada de Fourier Discreta da sequência $\{f(t_n) : n = 0, 1, \dots, N - 1\}$ é:

$$F(k) = \sum_{n=0}^{N-1} f(t_n) e^{-ink}, \quad k = 0, 1, \dots, N - 1. \quad (4.12)$$

Definição 4.1.8 (Transf. de Fourier Discreta Inversa).

A Transformada de Fourier Discreta Inversa de uma sequência $\{F(k) : k = 0, 1, \dots, N - 1\}$ é:

$$f(t_n) = \sum_{k=0}^{N-1} F(k) e^{ink}, \quad n = 0, 1, \dots, N - 1. \quad (4.13)$$

Note que a sequência $\{f(t_n) : n = 0, 1, \dots, N - 1\}$ não precisa ser amostrada com frequência de Nyquist ou maior, podendo ser qualquer sequência para a qual faça sentido calcular a transformada de Fourier.

4.2 Análise de Ondaletas

A Análise de Ondaletas é uma ferramenta nova e muito importante em diversas áreas do conhecimento. Aqui, daremos enfoque apenas às partes matemática e estatística. Primeiramente, definiremos a transformada contínua de Ondaletas, pois ela forma a base dessa teoria. Posteriormente, descreveremos a transformada discretizada, sendo essa de muita importância em Estatística pela natureza discreta de uma amostra e finalmente introduziremos a Análise de Multi-Resolução e alguns conceitos teóricos e estatísticos envolvidos na mesma.

4.2.1 Transformada Contínua de Ondaletas

Embora tenhamos utilizado a transformada de Fourier e a T.F.J. como motivação para o desenvolvimento da transformada de Ondaletas, pois, como veremos, esta não impõe uma escala na análise e é local, é importante salientar que a transformada de Ondaletas representa uma análise de tempo-escala, diferentemente da análise de tempo-frequência representada pelas transformadas de Fourier. É justamente essa distinção que permite que a transformada de Ondaletas seja bem localizada, pois já vimos que, pelo princípio da Incerteza, é impossível que as transformadas de Fourier o sejam. Trabalhando no domínio tempo-escala, não é necessário aumentar as oscilações da transformada para representar picos no domínio do tempo. Na verdade, o número de oscilações é sempre o mesmo, independentemente do comportamento da função sendo analisada e, por isso, a transformada de Ondaletas não precisa impor qualquer forma de escala na análise.

A transformada de Ondaletas se baseia em uma função $\psi(\cdot)$, conhecida como ondaleta-mãe ou *mother wavelet*, e todos os seus possíveis reescalamentos, para um p fixo ($p > 0$). Todos esses reescalamentos são definidos como:

$$\psi_a(x) = |a|^{-p} \psi\left(\frac{x}{a}\right), \quad a \neq 0. \quad (4.14)$$

Há algumas nomenclaturas específicas para $\psi_a(\cdot)$, de acordo com os valores de a . Se $a > 1$, $\psi_a(\cdot)$ é uma versão *esticada* de $\psi(\cdot)$ ao longo do eixo horizontal; se $0 < a < 1$, $\psi_a(\cdot)$ é uma versão *comprimida* de $\psi(\cdot)$. Para $a = -1$, $\psi_a(\cdot)$ é uma versão *refletida* de $\psi(\cdot)$. Se $-1 < a < 0$, então $\psi_a(\cdot)$ é uma versão *refletida e comprimida* e, finalmente, se $a < -1$, então $\psi_a(\cdot)$ é uma versão *refletida e esticada* de $\psi(\cdot)$. Devido a essa relação com $\psi_a(\cdot)$, a é chamada de parâmetro de escala. Já o termo $|a|^p$ tem efeito parecido ao de a só que no eixo vertical; assim, se $p > 0$ e $-1 < a < 1$, a função $\psi_a(\cdot)$ é *esticada* ao longo deste eixo. Já, se $|a| > 1$, a função $\psi_a(\cdot)$ é *comprimida* ao longo do eixo vertical.

Na análise de Ondaletas pode-se utilizar qualquer p , mas utilizaremos a partir de agora $p = 1/2$, pois essa escolha apresenta algumas propriedades interessantes, sendo a mais utilizada na literatura. Com $p = 1/2$, por exemplo, as normas $\|\psi\|$ e $\|\psi_a\|$ no $L_2(\mathbb{R})$ são iguais.

Como mencionamos anteriormente, a análise de Ondaletas representa uma análise tempo-escala e tal representação é obtida deslocando-se a ondaleta $\psi_a(\cdot)$ ao longo do eixo horizontal. Para isso criamos um parâmetro de translação b e definimos uma nova ondaleta, reescalada e transladada $\psi_{a,b}(x)$, definida como:

$$\psi_{a,b}(x) = \psi_a(x - b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{x - b}{a}\right), \quad a \neq 0, \quad b \in \mathbb{R} \quad (4.15)$$

Da mesma forma que as transformadas de Fourier são definidas como sobreposições de função exponenciais e periódicas, a transformada contínua de Ondaletas é definida como reescalamentos e translações da ondaleta-mãe $\psi(x)$, como segue:

Definição 4.2.1 (Transformada Contínua de Ondaletas).

A transformada contínua de Ondaletas de uma função $f \in L_2(\mathbb{R})$ é definida por:

$$\mathcal{TCO}_f(a, b) = \langle f, \psi_{a,b} \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{\psi_{a,b}(x)} dx. \quad (4.16)$$

De uma forma muito parecida com a utilizada para se obter a transformação inversa de Fourier Janelada, pode-se obter a transformada inversa de Ondaletas, que é definida como:

Definição 4.2.2 (Transf. Inversa Contínua de Ondaletas).

A transformada inversa contínua de Ondaletas de uma função $\mathcal{TCO}_f(a, b)$ é definida por:

$$f(x) = \frac{1}{C_\psi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{TCO}_f(a, b) \psi_{a,b}(x) \frac{da db}{a^2}, \quad (4.17)$$

onde a constante C_ψ é dada por:

$$C_\psi = \int_{\mathbb{R}} \frac{|\Psi(w)|^2}{w} dw, \quad (4.18)$$

sendo $\Psi(w)$ a transformada de Fourier de ψ .

Até aqui, não fizemos nenhuma restrição sobre a ondaleta-mãe $\psi(x)$. A primeira condição, imposta por causa da forma da transformada inversa de Ondaletas em (4.17), é conhecida como *condição de admissibilidade*. ψ é uma ondaleta-mãe se:

$$C_\psi = \int_{\mathbb{R}} \frac{|\Psi(w)|^2}{w} dw < \infty \quad (4.19)$$

Note que, na condição de admissibilidade, temos implícito que $\int_{\mathbb{R}} \psi(x) dx = \Psi(0) = 0$, ou seja, a ondaleta-mãe tem que oscilar em torno do eixo horizontal para que esta integral seja nula. Assim, ela realmente tem que ser uma *onda*.

4.2.2 Propriedades da Transformada Contínua de Ondaletas

A transformada de Ondaletas possui muitas propriedades, algumas semelhantes às da transformada de Fourier. A seguir, vamos listar algumas delas, supondo sempre que exista a transformada de Ondaletas da função f , dada por $\mathcal{TCO}_f(a, b)$.

Propriedade de Translação: Se $g(x) = f(x - \beta)$, então

$$\mathcal{TCO}_g(a, b) = \mathcal{TCO}_f(a, b - \beta). \quad (4.20)$$

Propriedade de Escala: Se $g(x) = (1/\sqrt{s})f(x/s)$, então

$$\mathcal{TC}\mathcal{O}_g(a, b) = \mathcal{TC}\mathcal{O}_f\left(\frac{a}{s}, \frac{b}{s}\right). \quad (4.21)$$

Propriedade de Localização: Se f é função Delta-Dirac no ponto x_0 , então

$$\mathcal{TC}\mathcal{O}_f(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}}\psi\left(\frac{x_0 - b}{a}\right). \quad (4.22)$$

É interessante comparar essa propriedade de Localização, que nada mais é do que a transformada de Ondas de função Delta-Dirac no ponto x_0 , onde percebe-se sua boa localização, com relação à transformada de Fourier da mesma função, que facilmente é encontrada como sendo e^{-iwx_0} . Claramente, existe uma grande falta de localização, já que a função Delta-Dirac tem suporte *nulo* no domínio do tempo e suporte infinito no domínio da frequência (em concordância com o princípio da incerteza) no caso de Fourier.

Propriedade da Conservação de energia:

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{C_\psi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{TC}\mathcal{O}_f(a, b)|^2 \frac{da db}{a^2}. \quad (4.23)$$

Propriedade da regularidade:

Se $f \in \mathbb{C}^\alpha$ e $\int (1 + |x|)|\psi(x)|dx < \infty$

$$|\mathcal{TC}\mathcal{O}_f(a, b)| \leq C|a|^{\alpha+1/2}. \quad (4.24)$$

A propriedade da regularidade vale também no sentido contrário, ou seja, se uma função f satisfaz (4.24), então ela pertence a $\mathbb{C}^\alpha$.

4.2.3 Transformada de Ondas de Discretizada

Quando trabalhamos com a transformada de Fourier, vimos que, pelo teorema de amostragem, a recuperação total da função original se fazia por apenas alguns pontos amostrais, devido em grande parte à redundância da transformada.

O mesmo ocorre para a transformada de Ondaletas e a T.F.J, só que ambas pertencem a uma classe maior, conhecida como *frames*, se escolhermos a função-peso e a ondaleta-mãe corretamente. Como pertencem a essa classe já estudada na literatura, existem diversos resultados que podem ser utilizados, principalmente no que se refere a teoremas de amostragens e conseqüentes discretizações dessas transformadas.

Não entraremos em mais detalhes no que se refere aos teoremas de discretização da transformada de Ondaletas. Para o leitor mais interessado, indicamos (Kaiser 1994) e (Daubechies 1992).

Existem obviamente diversas freqüências de amostragem que podem ser utilizadas, como no caso da transformada de Fourier. Porém, utilizamos a amostragem crítica, ou seja, a de menor freqüência que possibilita uma recuperação única da função original, que é definida como:

$$a = 2^{-j}, \quad b = k2^{-j}, \quad j, k \in \mathbb{Z}. \quad (4.25)$$

Note que a amostragem crítica aqui se refere aos parâmetros a e b , não mais a valores discretos da função f . Ou seja, conhecer $\psi_{a,b}$ nos pontos amostrais $a = 2^{-j}$ e $b = k2^{-j}$ é suficiente para encontrar de forma única a transformada inversa de Ondaletas. Além de (4.25) ser a amostragem crítica, também é possível mostrar que, sob condições mínimas, podemos obter que $\{\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\psi(2^jx - k) : j, k \in \mathbb{Z}\}$ é uma base ortonormal de $L_2(\mathbb{R})$, ou seja, não há redundância nenhuma, além da ótima interpretabilidade obtida pela análise de Ondaletas utilizando tal amostragem.

É interessante notar que a análise de Ondaletas não causa nenhuma distorção de escala, justamente pelo padrão de amostragem utilizado, pois, para cada nova escala $a = 2^{-j}$, muda-se automaticamente a velocidade de amostragem para $b = k2^{-j}$.

Agora, podemos definir a transformada de Ondaletas discretizada, na qual utilizaremos a seguinte reparametrização de $\psi_{a,b}(x)$:

$$\psi_{2^{-j},k2^{-j}}(x) = 2^{j/2}\psi(2^{-j}x - k) \stackrel{def}{=} \psi_{j,k}(x), \quad (4.26)$$

onde os parâmetros a e b são aqueles definidos pela amostragem crítica.

Utilizando a parametrização em (4.26), podemos definir:

Definição 4.2.3 (Transf. Inv. de Ondaletas Discretizada).

A transformada inversa de Ondaletas discretizada de uma seqüência $\{\mathcal{TCO}_f(2^{-j}, k2^{-j}) : j, k \in \mathbb{Z}\}$ é definida por:

$$f(t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{TCO}_f(2^{-j}, k2^{-j}) \psi_{j,k}(t). \quad (4.27)$$

O leitor pode achar que na definição (4.2.3) faltam os termos relativos a C_ψ e $dadb/a^2$ da transformada contínua. Porém, eles foram utilizados para se encontrar a frequência de amostragem crítica, utilizando *frames*. Na seção 4.3, mostraremos uma outra forma muito mais intuitiva de se chegar ao mesmo resultado.

4.3 Análise de Multi-Resolução

A análise de multi-resolução (A.M.R.) foi formulada em 1986, por Mallat e Meyer. Esta nova formulação criou um *ambiente natural* para o entendimento da transformada de Ondaletas discretizada, além de possibilitar a criação de novos exemplos de bases pois, anteriormente ao seu advento, a criação de bases ortonormais bem comportadas era extremamente complicada. Diferentemente de como vínhamos tratando a transformada de Ondaletas até aqui, a Análise de Multi-Resolução se inicia utilizando uma função $\phi(x)$, conhecida como *função-escala* ou *ondaleta-pai*. Como referências, indicamos (Daubechies 1992), (Vidakovic 1999), (Kaiser 1994) e (Morettin 1999).

Nessa seção, a A.M.R. será formalmente apresentada, juntamente com os operadores T e D, de translação e dilatação do tempo, respectivamente, e a função-escala, assim estimulando a utilização dos estimadores de Ondaletas. Ao apresentarmos a A.M.R. não mencionaremos mais a transformada discreta de Ondaletas. Agiremos como se a A.M.R. fosse uma teoria nova, mas deve ficar claro que ela apenas é uma nova interpretação da transformada de Ondaletas discretizada que a torna mais intuitiva e que facilita diversos aspectos da análise.

4.3.1 Operadores de Translação e Dilatação

Antes de definirmos os operadores de translação e dilatação, é importante ressaltar que a translação de uma unidade de tempo e a dilatação pelo fator 2 são utilizadas por sua interpretação e pelo fato de ser razoável e prático dobrar ou reduzir pela metade a resolução em que se está trabalhando. Dito isto, podemos definir $T : L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$ e $D : L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$, respectivamente, por:

$$T^n f(t) = f(t - n), \quad n \in (\mathbb{Z}), \quad (4.28)$$

$$D^m f(t) = 2^{\frac{m}{2}} f(2^m t), \quad m \in (\mathbb{Z}). \quad (4.29)$$

Ambos os operadores são claramente inversíveis. Com relação ao operador D , temos que $D^1 f(t)$ é uma versão comprimida de $f(t)$ e $D^{-1} f(t)$ é uma versão esticada de $f(t)$. Quando ambos os operadores são utilizados numa mesma função, a ordem em que são utilizados modifica o resultado. Duas igualdades são apresentadas abaixo:

$$D^{-1}T = T^2D^{-1} \quad \text{e} \quad DT = T^{\frac{1}{2}}D.$$

Proposição 4.3.1. *Seja $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$. Então, $\forall m \in \mathbb{Z}$ e $\forall n \in \mathbb{Z}$, vale a seguinte igualdade :*

$$\|f(\cdot)\|_{L_2} = \|D^m T^n f(\cdot)\|_{L_2} = \|2^{\frac{m}{2}} f(2^m \cdot -n)\|_{L_2} \quad (4.30)$$

A igualdade em (4.30) é facilmente demonstrada fazendo-se a transformação $y = 2^m t - n$. Assim, num certo sentido, as funções $2^{\frac{m}{2}} f(2^m \cdot -n)$ e $f(\cdot)$ têm o mesmo *tamanho*.

Outra propriedade interessante dos operadores D e T é que, para qualquer função $f(\cdot)$ que tenha suporte compacto num intervalo $[a, b]$, ou seja,

$$f(t) = 0, \text{ se } t < a \text{ ou } t > b,$$

e que seja centrada em $c \in (a, b)$, pode-se mostrar que $D^j T^k f(\cdot)$ tem suporte compacto em $[(a+k)2^{-j}, (b+k)2^{-j}]$, com comprimento $2^{-j}(b-a)$ e é centrada em $2^{-j}(c+k)$.

4.3.2 Análise de Multi-Resolução no $L_2(\mathbb{R})$

Abaixo, definimos formalmente uma análise de multi-resolução no espaço das funções quadrado-integráveis.

Definição 4.3.1 (Análise de Multi-Resolução).

Uma Análise de Multi-Resolução em $L_2(\mathbb{R})$ é uma seqüência aninhada de subespaços fechados $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$, que tenham as seguintes propriedades:

i- Hierarquia

$$V_j \subset V_{j+1} \subset L_2(\mathbb{R}) \quad \forall j \in \mathbb{Z} \quad (4.31)$$

ii- União Densa e Intersecção Trivial

$$\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L_2(\mathbb{R}) \quad e \quad \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\} \quad (4.32)$$

iii- Auto-Similaridade

$$f(2^j t) \in V_j \Leftrightarrow f(t) \in V_0 \quad \forall j \in \mathbb{Z} \quad (4.33)$$

iv - Exista uma função $\phi \in V_0$ tal que $T^k \phi(t) = \phi(t - k) \quad \forall k \in \mathbb{Z}$ gere o espaço V_0 , ou seja:

$$V_0 = \left\{ f \in L_2(\mathbb{R}) / f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \phi(t - k) \right\} \quad (4.34)$$

para uma seqüência c_k apropriada e o conjunto $\{\phi(\cdot - k), k \in \mathbb{Z}\}$ seja uma base ortonormal.

Note que a condição (4.33) é aquela que se refere à resolução, já que existem muitas seqüências de subespaços que satisfazem as condições (4.31) e (4.32). É interessante salientar também que, das condições (4.33) e (4.34), obtemos:

$$f(t - k) \in V_0 \Leftrightarrow f(t) \in V_0, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad e \quad (4.35)$$

$$f(t) \in V_j \Leftrightarrow f(t - 2^j k) \in V_j, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad \forall j \in \mathbb{Z}. \quad (4.36)$$

A seguir vamos definir a regularidade de uma A.M.R., que será utilizada nas próximas seções e é um dos pontos mais importantes para análises estatísticas baseadas em ondaletas.

Definição 4.3.2. Uma A.M.R. de $L_2(\mathbb{R})$ é r -regular, $r \in \mathbb{N}$, se a função-escala $\phi(\cdot)$ definida em (4.34) for tal que:

$$|\phi^{(k)}(t)| \leq \frac{C_m}{(1+|t|)^m}, \quad \forall k \leq r \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \forall m \in \mathbb{N}. \quad (4.37)$$

4.3.3 Função-escala e Propriedades

A função $\phi(t)$, da condição (4.34), é conhecida como função-escala ou *ondaletapai*. Definiremos a seguir a função $\phi_{j,k}(t)$, que é uma versão transladada e dilatada de $\phi(t)$:

$$\phi_{j,k}(t) = D^j T^k \phi(t) = 2^{j/2} \phi(2^j t - k), \quad j \in \mathbb{Z} \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (4.38)$$

Da definição da A.M.R., especificamente da condição (4.34), sabemos que $\{\phi_{0,k}(\cdot), k \in \mathbb{Z}\}$ forma uma base ortonormal de V_0 . Mas, utilizando-se a condição (4.33) e o resultado (4.30), podemos mostrar que:

$$V_j = \left\{ f \in L_2(\mathbb{R}) / f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_{j,k} \phi_{j,k}(t) \right\}, \quad \forall j \in \mathbb{Z}, \quad (4.39)$$

para uma seqüência $\{\alpha_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ apropriada, onde o conjunto $\{\phi_{j,k}(\cdot), k \in \mathbb{Z}\}$ é uma base ortonormal de V_j . Como consequência imediata desse resultado e do fato de $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ ser denso em $L_2(\mathbb{R})$ por ser uma A.M.R., qualquer f em $L_2(\mathbb{R})$ pode ser representada da seguinte forma:

$$f(t) = \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_{j,k} \phi_{j,k}(t) = \lim_{j \rightarrow \infty} P_j f(t), \quad (4.40)$$

onde $\alpha_{j,k} = \langle f, \phi_{j,k} \rangle_{L_2} = \int_{\mathbb{R}} f(t) \phi_{j,k}(t) dt$, já que $\phi_{j,k}(t)$ é uma base ortonormal e $P_j f(t)$ é a projeção ortogonal de f em V_j .

Seguindo a mesma linha de raciocínio, podemos mostrar que:

$$\lim_{j \rightarrow -\infty} P_j f(t) = 0. \quad (4.41)$$

O resultado (4.41) é intuitivo pois, se olharmos f com cada vez menos resolução (*de mais longe*), ela deverá eventualmente se tornar uma função constante e a única constante que pertence ao $L_2(\mathbb{R})$ é o 0.

Devido à A.M.R., onde a seqüência de subespaços aninhados $\{V_j\}$ é gerada pela seqüência de funções $\{\phi_{j,k}(t) : k \in \mathbb{Z}\}$, que formam uma base ortonormal, por definição temos:

$$\langle \phi_{j,b}, \phi_{j,a} \rangle_{L_2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{j,b}(t) \overline{\phi_{j,a}(t)} dt = \delta_b^a, \quad (4.42)$$

onde $\delta_b^a = 0$ se $a \neq b$ e $\delta_b^a = 1$ se $a = b$.

4.3.3.1 Filtro $\{h_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ da função-escala

Como o subespaço $V_0 \subset V_1$, sabemos que $\phi(t) \equiv \phi_{0,0}(t)$ também pertence a V_1 ; sendo assim:

$$\phi(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \phi_{1,k}(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \sqrt{2} \phi(2t - k), \quad (4.43)$$

onde a seqüência

$$h_k = \sqrt{2} \int_{\mathbb{R}} \phi(t) \phi(2t - k) dt, k \in \mathbb{Z}$$

pois $\{\phi_{1,k}(t) : k \in \mathbb{Z}\}$ é uma base ortonormal de V_1 .

Esta seqüência $\{h_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ é conhecida como filtro da função-escala. Muitos resultados e algoritmos utilizados na decomposição de Ondas se baseiam nessa seqüência. Além disso $\{h_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ reproduz muitas das restrições de $\phi(t)$, como veremos a seguir.

Primeiramente, de (4.43), temos que:

$$\begin{aligned} 1 &= \int \phi(t) dt = \int \sqrt{2} \sum_k h_k \phi(2t - k) dt = \sqrt{2} \sum_k h_k \int \phi(2t - k) dt \\ &= \sqrt{2} \sum_k h_k \frac{1}{2} \int \phi(2t - k) d(2t - k) = \frac{\sum_k h_k}{\sqrt{2}} \int \phi(t) dt \\ &\iff \sum_k h_k = \sqrt{2}. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Assim, em (4.44), supondo que $\int \phi(t)dt \neq 0$, encontramos a *propriedade da normalização*. Utilizando o mesmo raciocínio de (4.44), sabemos que $\phi(t-l)$ também pertence a V_1 ; então, utilizando-se a função δ_a^b definida em (4.42), obtemos:

$$\begin{aligned}
 \delta_l^0 &= \int \phi(t)\phi(t-l)dt \\
 &= \int \left(\sqrt{2} \sum_k h_k \phi(2t-k) \right) \left(\sqrt{2} \sum_m h_m \phi(2(t-l)-m) \right) dt \\
 &= 2 \sum_k \sum_m h_k h_m \frac{1}{2} \int \phi(2(t-l)-m)\phi(2(t-l)-m)d(2t) \\
 &= \sum_k \sum_m h_k h_m \delta_k^{2l+m} = \sum_k h_k h_{k-2l}.
 \end{aligned} \tag{4.45}$$

A propriedade em (4.45) é conhecida como *propriedade da ortogonalidade*, onde existem os dois casos especiais: $l=0 \implies \sum_k h_k^2 = 1$; e $l=1 \implies \sum_k h_k h_{k-2} = 0$.

4.3.3.2 Função de transferência $m_0(w)$ do Filtro $\{h_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$

Uma função muito utilizada na A.M.R. é a função de transferência do filtro $\{h_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$, geralmente denotada por $m_0(w)$. Veremos nas próximas seções que essa função tem um papel fundamental na obtenção de bases de Ondaletas. Definimos:

$$m_0(w) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{h_k}{\sqrt{2}} e^{-ikw}. \tag{4.46}$$

Veremos, a seguir, que a função $m_0(w)$ meramente descreve o comportamento da transformada de Fourier da função $\phi(t)$. Usando (4.5) e as propriedades de translação, escala e momentos da transformada de Fourier, descritas na tabela 4.1, temos:

$$\begin{aligned}
\Phi(w) &= \widehat{\phi}(w) = \int_{\mathbb{R}} \phi(t) e^{-iwt} dt = \sum_k h_k \sqrt{2} \int_{\mathbb{R}} \phi(2t - k) e^{-iwt} dt \\
&= \sum_k \frac{h_k}{\sqrt{2}} e^{-ikw/2} \int_{\mathbb{R}} \phi(2t - k) e^{-i(2t-k)w/2} d(2t - k) \\
&= \sum_k \frac{h_k}{\sqrt{2}} e^{-ikw/2} \Phi\left(\frac{w}{2}\right) = m_0\left(\frac{w}{2}\right) \Phi\left(\frac{w}{2}\right).
\end{aligned} \tag{4.47}$$

Finalmente, por iteração de (4.47), obtemos :

$$\Phi(w) = \int_{\mathbb{R}} \phi(t) e^{-iwt} dt = \prod_{n=1}^{\infty} m_0\left(\frac{w}{2^n}\right). \tag{4.48}$$

Como a função de transferência representa $\phi(t)$ no domínio da frequência, podemos utilizá-la para representar as propriedades da função-escala também no domínio da frequência e veremos adiante que essa representação facilitará tremendamente a obtenção de bases de Ondaletas. Assim, lembrando-se da ortogonalidade da função-escala, dada por (4.42), mostra-se que, no domínio da frequência, ela equivale a:

$$|m_0(w)|^2 + |m_0(w + \pi)|^2 = 1. \tag{4.49}$$

4.3.4 Ondaleta-mãe (Mother Wavelet)

Uma função $\psi(x)$, com versão dilatada e transladada dada por:

$$\psi_{j,k}(t) = D^j T^k \psi(t) = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j t - k), \quad j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z},$$

é uma ondaleta-mãe se o conjunto das funções $\{\psi_{j,k}(t) : k \in \mathbb{Z}\}, \forall j \in \mathbb{Z}$ for uma base ortonormal e se satisfizer:

$$P_{j+1}f(t) = P_j f(t) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \beta_{j,k} \psi_{j,k}(t), \tag{4.50}$$

onde $\beta_{j,k} = \langle f, \psi_{j,k} \rangle_{L_2} = \int_{\mathbb{R}} f(t) \psi_{j,k}(t) dt$, já que $\{\psi_{j,k}(t)\}_{j,k}$ é uma base ortonormal de $L_2(\mathbb{R})$.

A fórmula (4.50) faz sentido, já que sabemos que $V_j \subset V_{j+1}, \forall j$. Assim, a projeção de f em V_{j+1} tem que ser a soma da projeção de f em V_j ao seu

complemento ortogonal. Definindo W_j como esse complemento ortogonal de V_j , obtemos:

$$W_j = \left\{ f \in L_2(\mathbb{R}) / f(t) \stackrel{L_2}{=} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \beta_{j,k} \psi_{j,k}(t) \right\} \quad \forall j \in \mathbb{Z} \quad (4.51)$$

e

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j, \quad \forall j \in \mathbb{Z}. \quad (4.52)$$

Por construção, sendo $V_j \subset V_{j+1}$, $W_j \perp V_j$ e $W_{j+1} \perp V_{j+1}$, $\forall j$, temos que:

$$W_j \perp W_k, \quad j \neq k, \forall j \in \mathbb{Z}, \forall k \in \mathbb{Z}. \quad (4.53)$$

Por (4.52), (4.53) e lembrando-se da condição (4.32) da A.M.R., temos:

$$V_j = \bigoplus_{k \leq j} W_k, \quad \forall k \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{Z} \quad (4.54)$$

e

$$L_2(\mathbb{R}) = \overline{\bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j}. \quad (4.55)$$

Note que W_j herda muitas das propriedades de V_j , por construção. Um resultado interessante obtido de (4.32), (4.54) e (4.55) é o de que, fixando-se um nível qualquer de resolução $j_0 \in \mathbb{Z}$, podemos escrever qualquer função f em $L_2(\mathbb{R})$ como:

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \beta_{j,k} \psi_{j,k}(t) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_{j_0,k} \phi_{j_0,k}(t) + \sum_{j \geq j_0} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \beta_{j,k} \psi_{j,k}(t), \end{aligned} \quad (4.56)$$

onde as igualdades acima têm o sentido de norma L_2 e não o sentido pontual. Note que a primeira linha da igualdade acima é justamente a transformada de Ondaletas discretizada definida em (4.27). Já em (4.56), o primeiro termo é a projeção de f no espaço V_{j_0} e, para cada $j \geq j_0$, o segundo é a projeção de f no espaço W_j . O índice j está associado à resolução, sendo j_0 a escala de resolução mais baixa. Assim, (4.56) é na realidade apenas uma forma de reescrever a transformada de Ondaletas discretizada.

4.3.4.1 Filtro $\{g_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ da ondaleta-mãe

Seguindo o mesmo princípio de (4.43), sabemos que $\psi(t) \equiv \psi_{0,0}(t)$ pertence a $W_0 \subset V_1$. Assim, podemos escrever:

$$\psi(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \phi_{1,k}(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \sqrt{2} \phi(2t - k), \quad (4.57)$$

onde a seqüência

$$g_k = \sqrt{2} \int_{\mathbb{R}} \psi(t) \phi(2t - k) dt \quad \forall k \in \mathbb{Z},$$

pois $\{\phi_{1,k}(t) : k \in \mathbb{Z}\}$ é uma base ortonormal de V_1 .

A seqüência $\{g_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ é chamada de filtro da ondaleta-mãe. Claramente, existe uma forte relação entre $\{h_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ e $\{g_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$, principalmente pela forma como foram construídos: mais detalhes serão dados nas próximas seções.

4.3.4.2 Função de transferência $m_1(w)$ do filtro $\{g_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$

Definimos como função de transferência $m_1(w)$ da seqüência $\{g_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ a seguinte função:

$$m_1(w) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{g_k}{\sqrt{2}} e^{-ikw}. \quad (4.58)$$

Analogamente à obtenção da função de transferência $m_0(w)$ do filtro $\{h_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$, veremos a seguir que a função $m_1(w)$ também descreve o comportamento da transformada de Fourier da função $\psi(t)$. Assim, lembrando de (4.5), (4.1), (4.1) e (4.57), temos:

$$\begin{aligned} \Psi(w) &= \widehat{\psi}(w) = \int_{\mathbb{R}} \psi(t) e^{-iwt} dt = \sum_k g_k \sqrt{2} \int_{\mathbb{R}} \phi(2t - k) e^{-iwt} dt \\ &= \sum_k \frac{g_k}{\sqrt{2}} e^{-ikw/2} \int_{\mathbb{R}} \phi(2t - k) e^{-i(2t-k)w/2} d(2t - k) \\ &= \sum_k \frac{g_k}{\sqrt{2}} e^{-ikw/2} \Phi\left(\frac{w}{2}\right) = m_1\left(\frac{w}{2}\right) \Phi\left(\frac{w}{2}\right) \end{aligned} \quad (4.59)$$

Finalmente, por iteração de (4.59), obtemos:

$$\Psi(w) = \int_{\mathbb{R}} \psi(t) e^{-iwt} dt = \prod_{n=1}^{\infty} m_1\left(\frac{w}{2^n}\right). \quad (4.60)$$

Como a função de transferência representa ψ no domínio da frequência, podemos utilizá-la para representar as propriedades da ondaleta-mãe e principalmente sua relação com a função-escala ϕ nesse domínio.

Por construção, já que $V_j \perp W_j \forall j \in \mathbb{Z}$, em particular para $j = 0$, temos:

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(t-l) \overline{\phi(t-k)} dt = 0 \quad \forall l, k \in \mathbb{Z}. \quad (4.61)$$

Assim, utilizando-se a ortogonalidade da função-escala e da ondaleta-mãe, dada em (4.61), para o caso específico de $l = 0$, mostra-se que, no domínio da frequência, ela equivale a:

$$m_1(w) \overline{m_0(w)} + m_1(w + \pi) \overline{m_0(w + \pi)} = 0. \quad (4.62)$$

Das condições de ortogonalidade (4.49) e (4.62), verifica-se que uma possível solução para esse sistema é dada pela relação:

$$m_1(w) = -e^{-iw} \overline{m_0(w + \pi)}. \quad (4.63)$$

Utilizamos especificamente essa relação pela facilidade e conveniência de relacionar os filtros $\{h_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ e $\{g_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$, mas é importante ressaltar que podemos definir diferentes relações entre $m_0(w)$ e $m_1(w)$. Como consequência dessa definição, temos que $|m_1(w)| = |m_0(w + \pi)|$. Assim, a condição de ortogonalidade da função-escala no domínio da frequência (4.49) pode ser reescrita como:

$$|m_0(w)|^2 + |m_0(w + \pi)|^2 = |m_0(w)|^2 + |m_1(w)|^2 = 1. \quad (4.64)$$

4.3.4.3 Relação de Quadratura Espelhada entre os Filtros

Nas seções anteriores, definimos quais são os filtros $\{g_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ e $\{h_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ e suas respectivas funções de transferência $m_1(w)$ e $m_0(w)$. A relação entre eles é conhecida como *relação de quadratura espelhada* e, por isso, os filtros $\{g_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ e $\{h_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ são conhecidos como filtros de quadratura espelhada. Utilizando (4.63), temos:

$$\begin{aligned}
m_1(w) &= -e^{-iw} \overline{m_0(w + \pi)} = -e^{-iw} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{h_k}{\sqrt{2}} e^{-ikw} \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{h_k}{\sqrt{2}} (-1)^{1-k} e^{-iw(1-k)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^n h_{1-n}}{\sqrt{2}} e^{-iwn}. \quad (4.65)
\end{aligned}$$

Comparando (4.58) e (4.65), claramente temos que $g_n = (-1)^n h_{1-n}$. Note que o filtro $\{g_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ é uma reflexão de $\{h_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$, daí ser chamada a relação de espelhada. Essa relação também pode ser obtida sem utilizarmos as funções de transferência, ou seja, podemos encontrá-la no domínio do tempo. Utilizando a relação (4.61), com $l = k = 0$, temos:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \overline{\psi(t)} \phi(t) dt &= \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \phi_{1,k}(t) \right) \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \phi_{1,k}(t) \right) dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k g_k \phi_{1,k}^2(t) + \sum_{k \in \mathbb{Z}, k \neq j} \sum_{j \in \mathbb{Z}} h_k g_j \phi_{1,k}(t) \phi_{1,j}(t) \right) dt \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k g_k \int_{\mathbb{R}} \phi_{1,k}^2(t) dt + \sum_{k \in \mathbb{Z}, k \neq j} \sum_{j \in \mathbb{Z}} h_k g_j \int_{\mathbb{R}} \phi_{1,k}(t) \phi_{1,j}(t) dt \\
&= \sum_{x \in \mathbb{Z}} h_x g_x = 0. \quad (4.66)
\end{aligned}$$

Note que, fazendo-se $g_k = (-1)^{k+1} h_{1-k}$, (4.66) é satisfeita.

4.3.5 Regularidade das Ondaletas

Um dos maiores interesses nas bases de Ondaletas é sua grande variedade, cada uma com suas características específicas, seja ortogonalidade, simetria, regularidade ou suporte compacto. Nessa seção, estamos interessados na regularidade, que é um fator muito importante na utilização e escolha da ondaleta-mãe. O conceito de regularidade de uma função está intimamente relacionado com o seu número de momento finitos. Quanto maior o número de momentos finitos que uma função possuir, mais rapidamente suas caudas têm que decrescer e conseqüentemente mais suave será. Definindo $\mathcal{M}_k$ como o k -ésimo momento da ondaleta-mãe, temos:

$$\mathcal{M}_k = \int_{\mathbb{R}} t^k \psi(t) dt. \quad (4.67)$$

A seguir enunciaremos um teorema que nos ajudará a obter condições nos filtros $\{h_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ e $\{g_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ para que a respectiva ondaleta tenha uma determinada regularidade.

Teorema 4.3.1 ((Vidakovic 1999) pág. 80).

Seja $\{\psi_{j,k} = 2^{j/2} \psi(2^j t - k)\} : j, k \in \mathbb{Z}$ um sistema ortonormal de funções em $L_2(\mathbb{R})$ satisfazendo:

$$|\psi(t)| \leq \frac{C_1}{(1 + |t|)^\alpha}, \quad \alpha > N \quad (4.68)$$

e $\psi \in C^{N-1}(\mathbb{R})$, onde as derivadas $\psi^{(k)}(t)$ são limitadas, para $k \leq N - 1$. Então, ψ tem N momentos nulos:

$$\mathcal{M}_k = \int_{\mathbb{R}} t^k \psi(t) dt = 0 \quad 0 \leq k \leq N - 1. \quad (4.69)$$

Essa restrição sobre ψ para que ela possua N momentos nulos pode ser expressa em termos de m_0 ou do filtro $\{h_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$. Lembrando a propriedade de momentos da transformada de Fourier, definida na tabela (4.1), e de (4.63), temos:

$$\mathcal{M}_k = i^k \frac{d^k \Psi(w)}{dw^k} \Big|_{w=0} = i^k \frac{d^k}{dw^k} \left(\prod_{n=1}^{\infty} m_1 \left(\frac{w}{2^n} \right) \right) \Big|_{w=0} = 0. \quad (4.70)$$

A igualdade definida em (4.70) implica, por indução, que

$$m_1^{(k)}(0) = 0$$

para $k = 0, 1, \dots, N - 1$. Usando a definição de $m_1(w)$, (4.58) e a relação entre $\{g_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ e $\{h_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$, dada por (4.65), temos a seguinte restrição no filtro $\{h_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ para que ψ possua N momentos nulos:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} n^k g_n = \sum_{n \in \mathbb{Z}} n^k (-1)^n h_n = 0, \quad k = 0, 1, \dots, N - 1. \quad (4.71)$$

4.3.5.1 Tamanho dos filtros $\{g_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ e $\{h_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$

Se não fizermos nenhuma restrição nas bases de Ondaletas, os filtros podem ser séries infinitas, claramente criando uma grande barreira para aplicações da análise de Ondaletas. Porém, criando-se restrições interessantes, como o número de momentos nulos da ondaleta-mãe, ou exigindo que a mesma tenha suporte compacto, reduz-se o número de coeficientes dos filtros $\{h_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ e $\{g_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$.

Se trabalharmos com uma A.M.R. N -regular, podemos mostrar que o número de coeficientes não-nulos do filtro $\{h_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ se reduz a $2N$, e conseqüentemente, o mesmo ocorre com o filtro $\{g_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ devido à relação de quadratura espelhada. Assim, podemos reescrever as propriedades do filtro $\{h_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$.

Propriedade de Normalização:

$$\sum_{k=0}^{2N-1} h_k = \sqrt{2}. \quad (4.72)$$

Conseqüência de ψ ter N momentos nulos:

$$\sum_{k=0}^{2N-1} (-1)^k k^n h_k = 0, \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (4.73)$$

Propriedade de Ortogonalidade:

$$\sum_{k=0}^{2N-1} h_k h_{k+2n} = \delta_n, \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (4.74)$$

4.4 Bases de Ondaletas com Suporte Compacto

Como dito anteriormente, um dos maiores atrativos da análise de ondaletas é a grande variedade de bases existentes, cada uma com sua própria característica de interesse. Podemos utilizar: bases simétricas, quando queremos que observações equidistantes tenham pesos iguais; bases com suporte

compacto para diminuirmos o tamanho dos filtros e tornar mais rápida a obtenção das estimativas; bases com boa regularidade, que também diminuem o tamanho dos filtros além de aproximar melhor funções regulares e; por fim, bases ortogonais, pelas propriedades já descritas anteriormente.

Pelo grande número de bases e diversidade qualitativa das propriedades desejáveis, não existe uma base que tenha todas as propriedades descritas acima. Na verdade, é possível mostrar, por exemplo, que não é possível construir bases que sejam ortogonais e simétricas.

Nesta dissertação, trabalharemos somente com a família de bases de DAUBECHIES, que são bases ortogonais, com regularidade e suporte determinados, sendo por esses motivos as mais difundidas na literatura. Primeiramente, apresentaremos a base de *Haar* e mostraremos como utilizar as ferramentas discutidas nas seções anteriores para derivá-la. A base de Haar é a única base ortogonal com suporte compacto para qual as funções ψ e ϕ podem ser obtidas explicitamente. Por isso, é de grande utilidade didática, contrastando com sua limitada utilidade prática, já que não é, em geral, interessante aproximar funções contínuas por funções descontínuas. Posteriormente, apresentaremos a família de bases de Daubechies e discutiremos algumas de suas qualidades.

4.4.1 Base de Haar

Para derivarmos a base de Haar, começamos com a função-escala que, nesse caso, é definida como:

$$\phi(t) = 1_{[0,1]}(t). \quad (4.75)$$

Lembrando da definição do filtro $\{h_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ em (4.43), obtemos:

$$\begin{aligned} 1_{[0,1]}(t) &= \sum_k \sqrt{2} h_k 1_{[0,1]}(2t - k) \\ &= \sum_k \sqrt{2} h_k 1_{[\frac{k}{2}, \frac{k}{2} + \frac{1}{2}]}(t). \end{aligned} \quad (4.76)$$

Assim, de (4.76), percebemos que $0 \leq k \leq 1$ e, como $k \in \mathbb{Z}$, concluímos que $k = 0$ ou 1 . Portanto, os filtros têm tamanho 2 e, para que a identidade em (4.76) seja verdadeira, temos:

$$h_0 = h_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (4.77)$$

Lembrando a relação entre $\{h_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ e $\{g_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$, definida por (4.65), temos também que

$$g_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad e \quad g_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Utilizando-se o filtro definido em (4.77) e a definição da função de transferência $m_0(w)$, temos:

$$m_0(w) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{h_k}{\sqrt{2}} e^{-ikw} = \frac{(1 + e^{-iw})}{2}. \quad (4.78)$$

Utilizando-se a relação das funções de transferência $m_0(w)$ e $m_1(w)$, obtemos:

$$m_1(w) = -e^{-iw} \overline{m_0(w + \pi)} = \frac{1 - e^{-iw}}{2}. \quad (4.79)$$

Como a transformada de Fourier da ondaleta-mãe pode ser escrita como em (4.59), obtemos que:

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1 - e^{-iw}}{2} \right) \Phi\left(\frac{w}{2}\right) e^{iwt} dw \\ &= \phi(2t) - \phi(2t - 1) \\ &= 1_{[0, \frac{1}{2}]}(t) - 1_{[\frac{1}{2}, 1]}(t). \end{aligned} \quad (4.80)$$

Assim, temos que a base de Haar é definida por:

$$\begin{aligned} \phi(t) &= 1_{[0, 1]}(t) \\ e \\ \psi(t) &= 1_{[0, \frac{1}{2}]}(t) - 1_{[\frac{1}{2}, 1]}(t). \end{aligned} \quad (4.81)$$

Para ilustrar como são as funções ϕ e ψ , desenhamos ambas na figura 4.1.

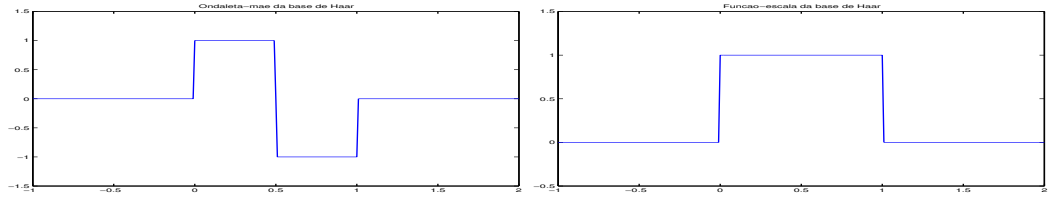


Figura 4.1: Base de Haar

4.4.2 Família de Bases de Daubechies

As bases de Daubechies foram as primeiras bases ortogonais, com suporte compacto e um nível de regularidade previamente definido, representando um avanço fundamental na análise de Ondaletas. Essas bases não possuem em geral forma explícita, sendo construídas numericamente a partir dos filtros $\{h_k\}_{k \in \mathbb{R}}$: a única exceção é a $Daubechies(1)$, que também é conhecida como base de Haar.

As bases de Daubechies são indexadas pelo número de momentos ($N \geq 1$) nulos da ondaleta-mãe, denotada por $Daubechies(N)$ e são construídas levando-se em conta o Teorema 4.4.1.

Teorema 4.4.1. *Seja ψ uma ondaleta-mãe possuindo N momentos nulos e*

$$|\phi(t)| \leq \frac{C_2}{(1 + |t|)^\alpha}, \quad \alpha > N. \quad (4.82)$$

Então, a função de transferência $m_0(w)$ associada a $\phi(t)$ é necessariamente da forma:

$$m_0(w) = \left(\frac{(1 + e^{-iw})}{2} \right)^N \mathcal{L}(w), \quad (4.83)$$

onde a função $\mathcal{L}(w)$ tem período 2π e pertence à classe de regularidade $\mathbb{C}^{N-1}$.

Não entraremos nos detalhes técnicos da obtenção dos filtros $\{h_k\}_{k \in \mathbb{R}}$ e $\{g_k\}_{k \in \mathbb{R}}$. É possível mostrar que a base $Daubechies(N)$ possui filtro $\{h_k\}_{k \in \mathbb{R}}$

de tamanho $2N$ e tem suporte compacto $[0, 2N - 1]$. Como ilustração, os filtros da base Daubechies(2) são definidos por:

$$\begin{aligned} h_0 &= \frac{1 + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, & h_1 &= \frac{3 + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \\ h_2 &= \frac{3 - \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, & h_3 &= \frac{1 - \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}. \end{aligned} \quad (4.84)$$

O Teorema 4.4.2 explica como utilizar $\{h_k\}_{k \in \mathbb{R}}$ para avaliar as funções ψ e ϕ em qualquer ponto $t \in \mathbb{R}$, com um nível de precisão pré-determinado.

Teorema 4.4.2 (Daubechies-Lagarias).

Seja ϕ a função-escala da base Daubechies(N) e a seqüência $\{h_k\}_{k \in \mathbb{R}}$ o seu respectivo filtro. Para $t \in (0, 1)$ e $\{d_1, d_2, \dots\}$ o conjunto de dígitos 0 e 1 da representação diádica de t , definida por $t = \sum_{j=1}^{\infty} d_j 2^{-j}$ e, definindo as matrizes T_0 e T_1 como:

$$T_0 = (\sqrt{2}h_{2i-j-1})_{1 \leq i, j \leq 2N-1} \quad T_1 = (\sqrt{2}h_{2i-j})_{1 \leq i, j \leq 2N-1}, \quad (4.85)$$

temos, para um subgrupo $\{d_1, d_2, \dots, d_n\}$, que:

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} T_{d_1} \dots T_{d_n} \\ &= \begin{bmatrix} \phi(t) & \phi(t) & \dots & \phi(t) \\ \phi(t+1) & \phi(t+1) & \dots & \phi(t+1) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \phi(t+2N-2) & \phi(t+2N-2) & \dots & \phi(t+2N-2) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.86)$$

A partir de (4.86), podemos encontrar $\phi(t)$, $\phi(t+1)$, ..., e $\phi(t+2N-2)$ e, lembrando a relação entre ϕ e ψ , definida em (4.57), podemos conseqüentemente encontrar $\psi(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, de forma numérica, como mencionado anteriormente.

Para ilustrar como são as funções ϕ e ψ , para $N = 2, 5, 8$, desenhamo-nas na figura 4.2.

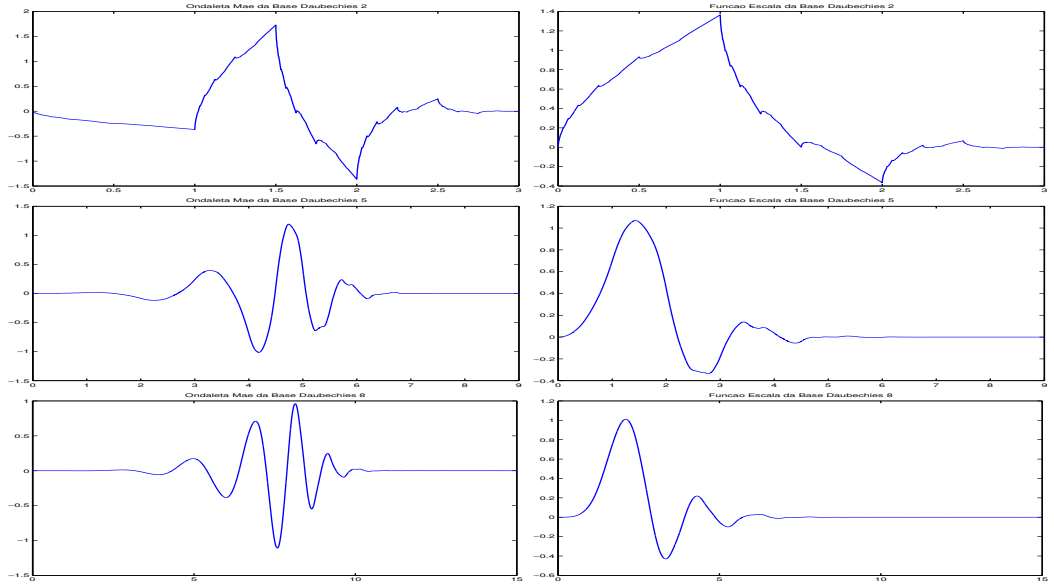


Figura 4.2: Bases de Daubechies com $N = 2, 5, 8$

Note que, a medida em que aumentamos a regularidade, isto é, de $N = 2$ para $N = 8$, as funções ψ e ϕ oscilam mais. Uma observação importante é de que qualquer aparente descontinuidade de ψ e ϕ (principalmente para $N = 2$) é apenas um artifício numérico, devido a aproximação.

4.5 Estimação Não-paramétrica dos Coeficientes

Até agora, a discussão sobre Ondaletas se manteve em suas características matemáticas. Nesta e na próxima seção, discorreremos sobre o procedimento estatístico de estimação não-paramétrica baseada em ondaletas. Relembrando o que foi discutido na seção 4.3.4, sabemos que podemos decompor qualquer função f quadrado-integrável da seguinte forma:

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_{j_0, k} \phi_{j_0, k}(t) + \sum_{j \geq j_0 \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \beta_{j, k} \psi_{j, k}(t). \quad (4.87)$$

Então, estimar essa função f de interesse equivale a estimar os coeficientes

em questão. Portanto, estamos interessados em encontrar estimadores para os coeficientes $\alpha_{j,k}$ e $\beta_{j,k}$. A construção de algoritmos para obter tais estimadores depende da natureza da amostra $\{X_{t_i}\}_{i=1,\dots,n}$ de uma função $f(\cdot)$, com $t_0 = 0$ e $t_n = T$. Vamos supor, nesta dissertação, que o esquema amostral utilizado foi de amostragem regular, com um intervalo de amostragem fixo, definido por Δ e que o tamanho da amostra é uma potência de 2, ou seja, $n = 2^J$, para algum $J \in \mathbb{N}$. É importante salientar que tratamos a amostra $X_{t_i} = f(t_i)$ como se não houvesse ruído. Antes de definirmos o algoritmo utilizado para obter estimativas dos coeficientes, iremos discutir a questão do nível de resolução quando se trabalha com uma amostra.

4.5.1 Níveis de Resolução Mínimo e Máximo

Quando estamos utilizando uma amostra para estimar os coeficientes, diferentemente do que ocorre teoricamente, existe um nível máximo j_1 de resolução, que é definido como sendo a própria amostra, ou seja, não podemos obter uma resolução maior do que aquela definida pela amostra em si. Como consequência do tamanho finito da amostra, também existe um número máximo de coeficientes que podem ser estimados, limitando-se a escolha do nível j_0 definido em (4.87). Na prática, porém, essas restrições causadas pela amostra não trazem grande prejuízo. Baseando-se em uma amostra, podemos reescrever (4.87) como:

$$f(t) \simeq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_{j_0,k} \phi_{j_0,k}(t) + \sum_{j=j_0}^{j_1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \beta_{j,k} \psi_{j,k}(t). \quad (4.88)$$

onde j_0 e j_1 são, respectivamente, os níveis mínimo e máximo de resolução. Para definir o nível mínimo de resolução j_0 , ou seja, em qual subespaço V_{j_0} vamos projetar a função f , podemos utilizar diversos critérios, que em sua maioria, dependem da base de Ondaletas utilizada. Nessa dissertação, utilizamos como critério escolher o nível j_0 tal que o suporte da função-escala $\phi_{j_0,k}(t)$ contenha o intervalo de amostragem, ou seja, utilizando as suposições que fizemos no início dessa seção, com relação à amostragem utilizada, queremos que j_0 seja o menor valor de j cujo suporte de $\phi_{j,k}(t)$ contenha o intervalo $[0, T]$. Trabalhando especificamente com as bases Daubechies(N) e lembrando que o suporte da função-escala nesse caso é de tamanho $2N - 1$, é fácil ver que escolhemos o nível j_0 tal que:

$$j_0 = \lceil \log_2(2N - 1) \rceil. \quad (4.89)$$

4.5.2 Algoritmo de Cascata

Levando-se em conta que existe um nível mínimo (j_0) e máximo (j_1) de resolução, vamos, a seguir, definir o *algoritmo de cascata* para estimar os coeficientes $\alpha_{j,k}$ e $\beta_{j,k}$. Na prática utiliza-se o algoritmo piramidal, que é uma caso especial do algoritmo de cascata e é extremamente eficiente.

Primeiramente, é necessário escolher qual base de Ondaletas vai ser utilizada. Assim, podemos considerar que os seus respectivos filtros $\{h_k\}_{k \in \mathbb{R}}$ e $\{g_k\}_{k \in \mathbb{R}}$ sejam conhecidos e têm tamanho $2N$, além de conhecermos $\phi(t)$ e $\psi(t)$, para todo ponto t de interesse.

O algoritmo de cascata é um algoritmo recursivo, que depende das duas igualdades básicas definidas em (4.91) e (4.92). Lembrando que, em (4.43), temos:

$$\begin{aligned} \phi_{j-1,k}(t) &= 2^{\frac{j-1}{2}} \phi(2^{j-1}t - k) = 2^{\frac{j-1}{2}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_l \phi_{1,l}(2^{j-1}t - k) \\ &= 2^{\frac{j}{2}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_l \phi(2^j t - 2k - l) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_l \phi_{j,2k-l}(t), \end{aligned} \quad (4.90)$$

fazendo-se a transformação $y = 2k + l$, obtemos de (4.90):

$$\phi_{j-1,k}(t) = \sum_{y \in \mathbb{Z}} h_{y-2k} \phi_{j,y}(t). \quad (4.91)$$

De forma análoga a (4.91), obtemos:

$$\psi_{j-1,k}(t) = \sum_{y \in \mathbb{Z}} g_{y-2k} \phi_{j,y}(t). \quad (4.92)$$

Denotando $P_{V_j} f(t)$ como a projeção ortogonal de $f(t)$ em V_j e $P_{W_j} f(t)$ como a projeção ortogonal de $f(t)$ em W_j temos que:

$$\begin{aligned} P_{V_j} f(t) &= \sum_l \alpha_{j,l} \phi_{j,l}(t) = P_{V_{j-1}} f(t) + P_{W_{j-1}} f(t) \\ &= \sum_k \alpha_{j-1,k} \phi_{j-1,k}(t) + \sum_k \beta_{j-1,k} \psi_{j-1,k}(t). \end{aligned} \quad (4.93)$$

Utilizando-se as equações (4.91) e (4.93) e a ortogonalidade entre $\phi_{j,k}$ e $\psi_{j,k}$, obtemos a seguinte equação recursiva para os *coeficientes de aproximação*:

$$\begin{aligned}
 \alpha_{j-1,k} &= \langle P_{V_j} f, \phi_{j-1,k} \rangle_{L_2} \\
 &= \langle P_{V_j} f, \sum_{y \in \mathbb{Z}} h_{y-2k} \phi_{j,y} \rangle_{L_2} \\
 &= \sum_{y \in \mathbb{Z}} h_{y-2k} \langle P_{V_j} f, \phi_{j,y} \rangle_{L_2} \\
 &= \sum_{y \in \mathbb{Z}} h_{y-2k} \alpha_{j,y}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1.
 \end{aligned} \tag{4.94}$$

De forma análoga a (4.94), obtemos a equação recursiva para os *coeficientes de detalhe*:

$$\beta_{j-1,k} = \sum_{y \in \mathbb{Z}} g_{y-2k} \alpha_{j,y}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \tag{4.95}$$

Podemos obter também equações iguais a (4.94) e (4.95) só que para reconstrução, ou seja, se conhecemos os coeficientes de um nível inferior, podemos obter os coeficientes do próximo nível.

Note que, utilizando (4.94) e (4.95) e com o auxílio dos filtros $\{h_k\}_{k \in \mathbb{R}}$ e $\{g_k\}_{k \in \mathbb{R}}$ podemos encontrar recursivamente todos os coeficientes $\alpha_{j,k}$ e $\beta_{j,k}$. No entanto, primeiramente, temos que estimar os coeficientes $\alpha_{j_1,k}$ do nível máximo de resolução, j_1 . Para isso, utilizamo-nos dos estimadores empíricos desses coeficientes, definidos por:

$$\alpha_{j_1,k} = \sum_{i=1}^n X_{t_i} \phi_{j_1,k}(t_i), \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \tag{4.96}$$

4.6 Encolhimento da Estimativa por Ondaletas

O encolhimento da estimativa de Ondaletas se refere à reconstrução da função f que fora decomposta, utilizando os coeficientes de Ondaletas encolhidos, ou seja, criando-se um critério para reduzir o tamanho dos coeficientes

estimados e, a partir destes, reconstruir-se a função. Na prática, o encolhimento da função no domínio de Ondaletas equivale a uma suavização da função no domínio do tempo.

4.6.1 Técnica de Encolhimento por Limiar

O encolhimento da estimativa de Ondaletas é muito utilizado na prática, seja para retirar o ruído de um sinal ou suavizar a estimativa, entre outras utilidades. Nesta dissertação, limitar-nos-emos a discutir a técnica de encolhimento não-linear mais simples, conhecida como *encolhimento por limiar*. A técnica consiste basicamente em duas regras de encolhimento por limiar, a dura e a suave.

Definição 4.6.1 (Encolhimento Duro).

O encolhimento duro de um coeficiente qualquer $c_{i,j}$ utilizando o limiar $\lambda > 0$ é:

$$\delta^d(c_{i,j}, \lambda) = c_{i,j} \mathbf{1}_{(|c_{i,j}| > \lambda)}. \quad (4.97)$$

Definição 4.6.2 (Encolhimento Suave).

O encolhimento suave de um coeficiente qualquer $c_{i,j}$ utilizando o limiar $\lambda > 0$ é:

$$\delta^s(c_{i,j}, \lambda) = (c_{i,j} - \text{sign}(c_{i,j})\lambda) \mathbf{1}_{(|c_{i,j}| > \lambda)}. \quad (4.98)$$

Podemos determinar o limiar λ de diversas maneiras, dependendo do interesse, para detalhes veja (Vidakovic 1999) e (Donoho, Johnstone, Kerkycharian and Pickard 1993). Um limiar muito utilizado, conhecido como limiar universal, é $\sigma\sqrt{2\log n}$, onde σ é o desvio-padrão dos coeficientes utilizados. Na subseção 4.6.2, definimos um outro limiar, de grande utilidade e interpretabilidade.

4.6.2 Encolhimento por Limiar Usando a Curva de Lorentz

Para a definição do limiar discutido nesta subseção, utiliza-se basicamente a noção de retenção de energia do sinal. Definimos a energia total de um sinal f como sendo $\|f\|_{L_2}^2$. Assim, na transformação de Ondaletas, a energia

total do sinal equivale à soma de todos os coeficientes $\beta_{j,k}$ ao quadrado, como podemos ver pela seguinte igualdade, que é obtida de maneira similar à *identidade de Parseval*:

$$\|f\|_{L_2}^2 = \int_{\mathbb{R}} f^2(t) dt = \sum_j \sum_k \beta_{j,k}^2. \quad (4.99)$$

De (4.99), fica claro que cada nível da decomposição de Ondaletas é responsável por uma parcela da energia total. Para analisar a energia da transformação, é interessante utilizar a *curva de Lorentz*, em termos dos componentes da energia, já que a mesma representa a distribuição da contribuição relativa de cada nível para a energia total.

Definição 4.6.3 (Curva de Lorentz).

Sejam $\{\beta_{j,k} : j = 0, \dots, n, k \in \mathbb{Z}\}$ os coeficientes de um sinal f . A Curva de Lorentz baseada nos componentes de energia é:

$$L(p) = \frac{\sum_{j=0}^{\lfloor np \rfloor} \sum_k \beta_{j,k}^2}{\sum_{j=0}^{\lfloor np \rfloor} \sum_k \beta_{j,k}^2} = \frac{\sum_{j=0}^{\lfloor np \rfloor} d_j^2}{\sum_{j=0}^{\lfloor np \rfloor} d_j^2}, \quad p \in [0, 1], \quad (4.100)$$

onde $d_j^2 = \sum_k \beta_{j,k}^2$.

Teorema 4.6.1 (Meyer).

Uma função f pertence à classe funcional $C^s(\mathbb{R})$ se e somente se os coeficientes de Ondaletas de uma análise de Multi-Resolução de regularidade r satisfazem:

$$|\beta_{j,k}| \leq C 2^{-j/2} 2^{-j(r \wedge s)}. \quad (4.101)$$

Pelo Teorema 4.6.1, percebe-se que a transformação de Ondaletas concentra quase toda a energia nos primeiros níveis da transformação. Em princípio, segundo a concepção do teorema de Meyer, deveríamos observar nas aplicações concentrações extremas de energia no primeiros níveis. No entanto, temos a situação descrita a seguir.

Proposição 4.6.1. *Seja $\psi(\cdot)$ a ondaleta-mãe da base Daubechies N . Então:*

$$B_N = \min_{x \in \mathbb{R}} \max_k \psi_{0,k}^2(x) \quad (4.102)$$

é estritamente positivo.

Teorema 4.6.2. *Seja $\widehat{d}_j^2$ o estimador por Ondaletas de $\overline{d}_j^2$. Então, para j grande:*

$$\widehat{d}_j^2 \geq \frac{B_N 2^j}{Cn}, \quad (4.103)$$

onde B_N está definido em (4.102), n é o tamanho da amostra, C

é uma constante e $\widehat{d}_j^2 = \frac{\sum_k \widehat{\beta}_{j,k}^2}{n}$.

A primeira vista, os teoremas 4.6.1 e 4.6.2 parecem contraditórios, mas, na realidade, o teorema 4.6.1 mostra como os coeficientes da decomposição por Ondaletas deveriam se comportar idealmente, enquanto o teorema 4.6.2 mostra a penalização que ocorre nas estimativas se estimarmos muitos níveis. Ou seja, os erros das estimativas dos coeficientes se concentram nas estimativas dos níveis W_j com j muito grande, causando o interesse de manter alguns níveis W_j e não todos os possíveis níveis.

Levando-se em consideração os teoremas 4.6.1 e 4.6.2, discutidos em (Pineiro and Vidakovic 1997), podemos definir um método simples para determinar quais níveis W_j permanecerão na análise, utilizando a curva de Lorentz empírica.

Definição 4.6.4 (Curva de Lorentz Empírica).

Sejam $\{\widehat{\beta}_{j,k} : j = 0, \dots, n, k \in \mathbb{Z}\}$ os coeficientes estimados de um sinal f , a curva de Lorentz empírica baseada nos componentes de

energia é:

$$\widehat{L}(p) = \frac{\sum_{j=0}^{\lfloor np \rfloor} \sum_k \widehat{\beta}_{j,k}^2}{\sum_{j=0} \sum_k \widehat{\beta}_{j,k}^2} = \frac{\sum_{j=0}^{\lfloor np \rfloor} \widehat{d}_j^2}{\sum_{j=0} \widehat{d}_j^2}, \quad p \in [0, 1], \quad (4.104)$$

onde $\widehat{d}_j^2 = \sum_k \widehat{\beta}_{j,k}^2$.

A curva de Lorentz empírica tem um comportamento diferente da curva teórica, justamente por causa do teorema 4.6.2. Assim, se desenharmos $\widehat{L}(p)$ para todos os possíveis níveis, os menores níveis se comportarão como na curva teórica. Conforme aumentamos os níveis, a curva começará a se comportar conforme o teorema 4.6.2, crescendo exponencialmente. Então, o método para escolher quais níveis W_j devem ser mantidos na análise, utilizando a curva de Lorentz empírica, consiste basicamente em determinar qual o nível W_j onde se inicia o crescimento exponencial da curva e definir esse nível como máximo. Denotaremos tal nível por W_{j_1} . Para evitar que poucos níveis sejam mantidos na análise, pode-se determinar um número mínimo de níveis mantidos. Podemos determinar o número mínimo de níveis de maneira automática, utilizando como critério um limite para razão das energias de cada nível subsequente, pois quando essa razão é maior que 1, a curva de Lorentz cresce. No capítulo 6, utilizamos os valores 1 e 3 como limites para essa razão.

Após a definição de quantos níveis serão mantidos na reconstrução, temos a tarefa de *ajustar* os coeficientes desses níveis restantes.

Definição 4.6.5 (Limiar 1 pela Curva de Lorentz).

Definimos o limiar baseado na curva de Lorentz, utilizando um parâmetro κ , para uma seqüência de coeficientes $\{\beta_{j,k} : j = 0, \dots, n, k \in \mathbb{Z}\}$ como:

$$\beta_{j,k}^{lim} = \delta^d(\beta_{j,k}, \kappa \bar{d}^2) = \beta_{j,k} \mathbf{1}_{(\beta_{j,k}^2 > \kappa \bar{d}^2)}, \quad (4.105)$$

$$\text{onde } \bar{d}^2 = \frac{\sum_{j=0}^n \sum_k \beta_{j,k}^2}{n}.$$

O parâmetro κ utilizado no limiar definido em 4.6.5 é muito importante para obtenção de bons resultados. Ele pode ser interpretado como uma forma de ponderar dois objetivos conflitantes, ao se realizar a limiarização dos coeficientes: preservar ao máximo a energia da transformação ou obter a máxima parcimônia ¹, ou seja, se temos dois limiares concorrendo, e ambos produzem resultados semelhantes, ficamos com aquele mais simples, que neste caso é aquele que resultar em menos coeficientes.

Claramente, para preservar a energia da transformação, utilizamos $\kappa < 1$, admitindo que coeficientes menores também continuem na análise e, conseqüentemente, preservando a energia da mesma. Já para atingir o objetivo de máxima parcimônia, devemos utilizar um $\kappa > 1$, dificultando que coeficientes pequenos sejam preservados, tornando a análise mais simples. Note que podemos repartir o domínio do parâmetro κ em três casos, $[0, 1)$ que prioritariamente preserva a energia, $(1, \infty)$ que torna a análise mais parcimoniosa e $\{1\}$, que não outorga preferência à parcimônia ou retenção de energia. Por exemplo, $\kappa = 0.5$ tem motivação com relação à energia equivalente a $\kappa = 2$ para a parcimônia.

O limiar definido em 4.6.5 não leva em consideração a qual nível o coeficiente a ser encolhido pertence. Seria interessante estudar também um limiar que levasse em conta a diferença de tamanho dos coeficientes de diferentes níveis, exatamente o que é proposto pelo limiar definido abaixo.

Definição 4.6.6 (Limiar 2 pela Curva de Lorentz).

Definimos o limiar baseado na curva de Lorentz, utilizando os parâmetros κ e κ_j , para uma seqüência de coeficientes $\{\beta_{j,k} : j = 0, \dots, n, k \in \mathbb{Z}\}$ como:

$$\beta_{j,k}^{lim} = \delta^d(\beta_{j,k}, \kappa \bar{d}^2) = \beta_{j,k} \mathbf{1}_{(\beta_{j,k}^2 > \kappa \bar{d}^2 + \kappa_j \bar{d}_j^2)}, \quad (4.106)$$

$$\text{onde } \bar{d}^2 = \frac{\sum_{j=0}^n \sum_k \beta_{j,k}^2}{n} \text{ e } \bar{d}_j^2 = \frac{\sum_k \beta_{j,k}^2}{n}.$$

Para interpretar esta reparametrização utilizada no limiar 4.6.6, é interessante desenvolver a seguinte igualdade para um j' qualquer:

¹Nesse contexto, parcimônia significa economizar coeficientes.

$$\kappa \bar{d}^2 + \kappa_j \bar{d}_{j'}^2 = \left(\frac{n_{j'}}{n} \kappa + \kappa_j \right) \bar{d}_{j'}^2 + \kappa \bar{d}_{-j'}^2, \quad (4.107)$$

onde n_j é o número de coeficientes no nível W_j , n é o número total de coeficientes, $\bar{d}_{j'}^2 = \frac{\sum_k \beta_{j',k}^2}{n}$ e $\bar{d}_{-j'}^2 = \frac{\sum_{j=0; j \neq j'}^n \sum_k \beta_{j,k}^2}{n}$.

Assim, de (4.107), é fácil perceber que, ao incluir o parâmetro κ_j na análise, estamos aumentando a influência da média dos coeficientes do nível $W_{j'}$ ao quadrado ($\bar{d}_{j'}^2$) no limiar. Logo, para cada nível $W_{j'}$ mudamos o peso dessa média pelo fator $\frac{n_{j'}}{n} \kappa$, o que é bastante razoável, pois os coeficientes de cada nível têm maior influência na definição de quais coeficientes desse mesmo nível devem permanecer.

Assim, utilizando os métodos definidos na subseção 4.6.2 e utilizando o nível mínimo W_{j_0} definido em (4.89), a estimativa definitiva por Ondaletas de uma função $f(\cdot)$ em $L_2(\mathbb{R})$ é:

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{\alpha}_{j_0,k} \phi_{j_0,k}(t) + \sum_{j=j_0}^{j_1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{\beta}_{j,k}^{lim} \psi_{j,k}(t) \quad (4.108)$$

Capítulo 5

Estimação Não-Paramétrica da Volatilidade

Neste capítulo, discutiremos alguns métodos não-paramétricos por ondas-letas e por função-núcleo, para se estimar a volatilidade do modelo de difusão definido por (2.31). Como mostramos na seção 2.5, a volatilidade desse modelo de difusão é justamente a função $\sigma^2(t)$. Nesta dissertação, trabalharemos com a volatilidade determinística, isto é, $\sigma^2(t)$ em vez de $\sigma^2(t, X_t)$. As demonstrações estão resumidamente expostas em (Genon-Catalot et al. 1992) e (Florens-Zmirou 1993) e desenvolveremos seus detalhes no apêndice.

5.1 Estimador de $\sigma^2(t)$ por Função-núcleo

Suponha o seguinte modelo de difusão :

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t, \quad t \in [0, T], \quad (5.1)$$

com funções $b(\cdot, \cdot)$ e $\sigma(\cdot, \cdot)$ desconhecidas e $P(X_0 = x_0) = 1$.

Supondo que observamos o processo X_t definido por (5.1), com $T = 1$, nos instantes $(t_1, \dots, t_n)$ para $t_i = i\Delta$, onde Δ é o intervalo amostral, podemos definir, sem perda de generalidade (em T), o estimador de $\sigma^2(\cdot)$ a seguir, que foi proposto por (Florens-Zmirou 1993).

Definição 5.1.1 (Estimador por Função-núcleo).

O estimador por função-núcleo para a volatilidade $\sigma^2(t)$, definida em (5.1), é dado por:

$$S_n(t) = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} K_h(X_{t_i} - t) n^{-1} [X_{t_{i+1}} - X_{t_i}]^2}{\sum_{i=1}^n K_h(X_{t_i} - t)}. \quad (5.2)$$

Note que o estimador definido em (5.2) é equivalente ao estimador de Nadaraya-Watson de Regressão por função-núcleo, fazendo-se $Y_i = n^{-1}[X_{t_{i+1}} - X_{t_i}]^2$. Esse resultado de certa forma é intuitivo pois não observamos o processo continuamente e a melhor estimativa para a variância instantânea é obtida utilizando-se observações subseqüentes. Nesse caso, a melhor estimativa é $[X_{t_{i+1}} - X_{t_i}]^2$. A seguir, enunciaremos um resultado assintótico desse estimador e algumas condições necessárias.

Teorema 5.1.1. *Seja $\sigma^2(t)$ dada por (5.1) e $S_n(t)$ por (5.2). Suponha que $b(\cdot)$ é limitada, duas vezes diferenciável, com derivadas limitadas e que a função $\sigma(\cdot)$ tenha três derivadas contínuas e limitadas e que existam duas constantes k e K tais que $0 < k \leq \sigma(t) \leq K$. Se $nh^3 \rightarrow 0$, então:*

$$\sqrt{nh} \left(\frac{S_n(t)}{\sigma^2(t)} - 1 \right) \xrightarrow{\mathcal{D}} L^{-1/2}(t)Z, \quad (5.3)$$

onde Z é uma distribuição normal padrão independente de $L(t)$ e

$$L(t) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{2\delta} \int_0^1 1_{(|X_s - t| < \delta)} ds. \quad (5.4)$$

Não são conhecidos resultados assintóticos envolvendo o erro quadrático integrado, para o estimador em (5.2), tão gerais quanto o teorema 5.1.1. Assim, enunciaremos um resultado que vale somente para funções-núcleo definidas por funções indicadoras simples, como por exemplo, $\mathbf{1}_{[-1,0]}(t)$ e $\mathbf{1}_{[-1/2,1/2]}(t)$, que reduzem o estimador em (5.2), respectivamente, aos estimadores de média móvel $S_n^{MM}(t)$ e de média móvel centrada $S_n^{MMC}(t)$, definidos a seguir. Ambos esses estimadores foram propostos por (Bertrand 1996).

Definição 5.1.2 (Estimador de Média Móvel).

O estimador $S_n^{MM}(\cdot)$ de média móvel, da função de volatilidade $\sigma^2(\cdot)$, definida em (5.1), é:

$$S_n^{MM}(t) = \frac{\sum_{j=0}^{n-1} \left(\sum_{i=1}^{A-1} [X_{t_{j-i+1}} - X_{t_{j-i}}]^2 \right) \mathbf{1}_{[t_j, t_{j+1})}(t)}{A\Delta}, \quad (5.5)$$

onde A indica quantas observações serão utilizadas para se estimar um único ponto da função $\sigma^2(\cdot)$ e Δ é o intervalo amostral.

Definição 5.1.3 (Estimador de Média Móvel Centrada).

O estimador $S_n^{MMC}(\cdot)$ de média móvel centrada, da função de volatilidade $\sigma^2(\cdot)$, definida em (5.1), é:

$$S_n^{MMC}(t) = \frac{\sum_{j=0}^{n-1} \left(\sum_{i=-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}-1} [X_{t_{j-i+1}} - X_{t_{j-i}}]^2 \right) \mathbf{1}_{[t_j, t_{j+1})}(t)}{A\Delta}, \quad (5.6)$$

onde A indica quantas observações serão utilizadas para se estimar um único ponto da função $\sigma^2(\cdot)$ e Δ é o intervalo amostral.

Os resultados a seguir serão definidos para $S_n^{MMC}(t)$, porém é interessante salientar que valem também para $S_n^{MM}(t)$, já que

$$S_n^{MM}\left(t + \frac{A}{2\Delta}\right) = S_n^{MMC}(t).$$

Primeiramente, utilizaremos a seguinte decomposição do estimador $S_n^{MMC}(t)$, obtida através da decomposição de Itô, definida em (2.3.1), do termo $[X_s - X_{t_i}]^2$.

Proposição 5.1.1. *Seja $S_n^{MMC}(\cdot)$ o estimador de média móvel centrada da função de volatilidade $\sigma^2(\cdot)$ definida em (5.1). Se $b(\cdot, \cdot)$ e $\sigma(\cdot)$ satisfizerem as condições de regularidade 4, na seção A.5, então podemos decompor $S_n^{MMC}(\cdot)$ da seguinte forma:*

$$S_n^{MMC}(t) = S_{A,\Delta}^{MMC}(t) = M_{A,\Delta}(t) + N_{A,\Delta}(t) + D_{A,\Delta}(t), \quad (5.7)$$

onde:

$$M_{A,\Delta}(t) = \frac{\sum_{j=0}^{n-1} \left(\sum_{i=-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}} \int_{t_{i+j}}^{t_{i+j+1}} \sigma^2(s) ds \right) \mathbf{1}_{[t_j, t_{j+1})}(t)}{A\Delta},$$

$$N_{A,\Delta}(t) = 2 \frac{\sum_{j=0}^{n-1} \left(\sum_{i=-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}} \int_{t_{i+j}}^{t_{i+j+1}} \sigma(s) \left[\int_{t_{i+j}}^s \sigma(u) dW_u \right] dW_s \right) \mathbf{1}_{[t_j, t_{j+1})}(t)}{A\Delta}$$

e

$$D_{A,\Delta}(t) = \frac{\sum_{j=0}^{n-1} \left(\sum_{i=-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}} \int_{t_{i+j}}^{t_{i+j+1}} b(s, X_s)(X_s - X_{t_i}) ds \right) \mathbf{1}_{[t_j, t_{j+1})}(t)}{A\Delta}$$

$$+ \frac{\sum_{j=0}^{n-1} \left(\sum_{i=-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}} \int_{t_{i+j}}^{t_{i+j+1}} \sigma(s) \left[\int_{t_{i+j}}^s b(u, X_u) du \right] dW_s \right) \mathbf{1}_{[t_j, t_{j+1})}(t)}{A\Delta}.$$

O parâmetro A indica quantas observações serão utilizadas para se estimar um único ponto da função $\sigma^2(\cdot)$ e Δ é o intervalo amostral.

Na decomposição descrita na proposição 5.1.1, o termo $M_{A,\Delta}(t)$ é a soma das médias de $\sigma^2(t)$ nos intervalos amostrais $[t_i, t_{i+1})$. Se o coeficiente de nível $b(\cdot, \cdot) = 0$, então o termo $M_{A,\Delta}(t)$ representa o vício do erro quadrático médio integrado. Na proposição 3.2 de (Bertrand 1996), temos que,

$$\forall t, \quad \lim_{A\Delta \rightarrow 0} |M_{A,\Delta}(t) - \sigma^2(t)| = 0,$$

se a função $\sigma(\cdot)$ satisfaz as condições de regularidade 5, na seção A.6.

O termo $N_{A,\Delta}(t)$, da mesma decomposição, também pode ser interpretado como a soma das médias de $\sigma^2(t)$, porém em intervalos infinitesimais. Se o coeficiente de nível $b(\cdot, \cdot) = 0$, então o termo $N_{A,\Delta}(t)$ representa a variância do erro quadrático médio integrado. Na proposição 3.4 de (Bertrand 1996), temos que,

$$\forall t, \quad \lim_{A \rightarrow \infty} E|N_{A,\Delta}(t)|^2 = 0,$$

se as funções $\sigma(\cdot)$ e $b(\cdot, \cdot)$ satisfizerem as condições de regularidade 4, na seção A.5.

Finalmente, $D_{A,\Delta}(t)$ possui todos os termos referentes ao coeficiente de nível; assim, se $b(\cdot, \cdot) = 0$, ele também é nulo. Na proposição 3.3 de (Bertrand 1996), temos que,

$$\forall t, \quad \lim_{\Delta \rightarrow 0} E|D_{A,\Delta}(t)|^2 = 0,$$

se as funções $\sigma(\cdot)$ e $b(\cdot, \cdot)$ satisfizerem as condições de regularidade 4 e 6, nas seções A.5 e A.7, respectivamente.

É importante ressaltar que, com esses resultados descritos nos parágrafos anteriores, a consistência do estimador $S_n^{MMC}(t)$ é bastante clara, para todo ponto de continuidade $\sigma^2(t)$ e para aqueles pontos onde exista o limite à esquerda, ou seja, $\sigma^2(t_-) = \lim_{x \nearrow t} \sigma^2(x)$.

Para derivar um resultado assintótico do erro quadrático médio integrado (EQMI) do estimador $S_n^{MMC}(t)$, é preciso tomar mais uma restrição. Vamos supor que a função $\sigma(\cdot, X_t)$ seja determinística, ou seja, ela é uma função somente do tempo, e ela será reescrita como $\sigma(\cdot)$.

Proposição 5.1.2. *Seja $S_n^{MMC}(t)$ o estimador por função-núcleo de $\sigma^2(t)$. Se $b(\cdot, \cdot)$ e $\sigma(\cdot)$ satisfizerem as condições de regularidade 4 e 6, nas seções A.5 e A.7, respectivamente, e a função peso $w(\cdot)$ do EQMI definida em (3.2.3) for constante em todo intervalo amostral $[t_i, t_{i+1})$, então:*

$$\begin{aligned} EQMI_{A,\Delta} &= E \left(\int_0^T w(t) [M_{A,\Delta}(t) - \sigma^2(t)]^2 dt \right) \\ &+ E \left(\int_0^T w(t) N_{A,\Delta}^2(t) dt \right) + \epsilon \\ &= E_1^{A,\Delta} + E_2^{A,\Delta} + \epsilon, \end{aligned} \tag{5.8}$$

com

$$|\epsilon| \leq C\Delta\sqrt{E_1^{A,\Delta} + E_2^{A,\Delta}}, \quad (5.9)$$

onde C é uma constante apropriada.

Assim, utilizando o resultado da proposição 5.1.2 e das proposições 3.2, 3.4 e 4.3 de (Bertrand 1996), podemos obter o seguinte resultado.

Proposição 5.1.3. *Seja $S_n^{MMC}(t)$ o estimador por função-núcleo de $\sigma^2(t)$. Se $\sigma(\cdot)$ satisfizer as condições de regularidade 7, na seção A.8, e a função peso $w(\cdot)$ do E.Q.M.I. definida em (3.2.3) for constante em todo intervalo amostral $[t_i, t_{i+1})$, então:*

$$\begin{aligned} EQMI_{A,\Delta} &= \Delta \sum_{j=A}^{n-A} \left[\sigma^2(t_j) - \frac{\sum_{i=j-\frac{A}{2}}^{j+\frac{A}{2}} \sigma^2(t_i)}{A} \right]^2 \\ &\quad + \frac{2\Delta \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=j-\frac{A}{2}}^{j+\frac{A}{2}} w(t_i) \sigma^4(t_j)}{A^2}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Assim, podemos ver que, pela proposição 5.1.3, se $\Delta \rightarrow 0$, $A \rightarrow \infty$ e $A\Delta \rightarrow 0$,

$$EQMI_{A,\Delta} \rightarrow 0.$$

5.2 Estimador Linear de $\sigma^2(t)$ por Ondaletas

No capítulo 4, introduzimos a teoria de Ondaletas e discutimos como utilizá-las para obter estimativas para uma função f que pertença a $L_2(\mathbb{R})$. Agora, discutiremos como obter estimativas para a volatilidade $\sigma^2(t)$, de uma equação diferencial estocástica definida da seguinte forma:

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t)dW_t, \quad (5.11)$$

onde $P(X_0 = x_0) = 1$.

Na equação (5.11), assume-se que as funções $\sigma(t)$ (coeficiente de difusão) e $b(t, X_t)$ sejam determinísticas e desconhecidas. Estamos interessados em obter um estimador não-paramétrico $\hat{\sigma}^2(t)$ de $\sigma^2(t)$, para $t \in [0, T]$, a partir de uma amostra discreta do processo contínuo definido em (5.11). Uma amostra de tamanho n é observada em intervalos de tempo equidistantes, $t_i = i2^{-n}$, onde $i = 0, 1, \dots, N = [2^n T]$, ou seja, observamos o processo no intervalo de tempo $[0, T]$ com intervalo de amostragem definido por $\Delta_n = 2^{-n}$.

É importante salientar que os resultados teóricos que serão enunciados nesta seção têm validade considerando as suposições (5.13) abaixo, com respeito às funções $b(\cdot, \cdot)$ e $\sigma(\cdot)$, da equação diferencial estocástica definida em (5.11). Primeiramente, vamos definir o espaço funcional C^m :

Definição 5.2.1 (Espaço Funcional C^m).

O espaço funcional C^m , para $m > 0$, é tal que:

$$C^m = \left\{ f \in L_2(\mathbb{R}), \int |\hat{f}(w)|(1 + |w|)^{1+m} dw < \infty \right\}, \quad (5.12)$$

onde $\hat{f}(w)$ representa a transformada de Fourier da função f .

Pela definição 5.2.1, qualquer função que pertença ao espaço C^m , com $m \in \mathbb{N}$, é m vezes diferenciável.

Imporemos, a seguir, um conjunto de condições em $b(\cdot, \cdot)$ e $\sigma(\cdot)$ que nos permite utilizar resultados assintóticos para $\hat{\sigma}^2(t)$, encontrados em (Genon-Catalot et al. 1992).

$$\left. \begin{array}{ll} \text{(i)} & \text{- A função } b(\cdot, \cdot) \text{ pertence à classe } C^1([0, +\infty) \times \mathbb{R}); \\ \text{(ii)} & \text{- Para todo } T, \text{ existe uma constante } K_T \text{ tal que} \\ & \quad \forall t \in [0, T], |b(t, u)| \leq K_T(1 + |u|); \\ \text{(iii)} & \text{- A função } \sigma(\cdot) \text{ pertence à classe } C^m([0, \infty)), \\ & \quad \text{com } m \geq 1, \text{ e } \sigma(t) \text{ é positiva, para todo } t \geq 0. \end{array} \right\} \quad (5.13)$$

Sob (5.13), com $m \geq 0$, a solução de (5.11) é única no intervalo $[0, \infty)$. Como estaremos trabalhando com uma A.M.R r -regular em $L_2(\mathbb{R})$ e a função $\sigma(\cdot)$ não precisa necessariamente pertencer a $L_2(\mathbb{R})$, iremos substituí-la por uma nova função $\bar{\sigma}(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$, tal que:

$$\bar{\sigma}(t) = \sigma(t), \quad \forall t \in [0, T]. \quad (5.14)$$

Mantendo a relação entre estas duas funções, vamos supor que a nova função $\bar{\sigma}(t)$ também pertença a $C^m(\mathbb{R})$ e que seu suporte esteja contido em $[-\epsilon, T + \epsilon]$, para algum $\epsilon \geq 0$. Para efeitos práticos, as duas funções são iguais, sendo que a difusão do processo X_t definida por (5.11) é a mesma que aquela do processo $\bar{X}_t$ definida por:

$$d\bar{X}_t = b(t, \bar{X}_t)dt + \bar{\sigma}(t)dW_t, \quad \bar{X}_0 = x. \quad (5.15)$$

A fim de simplificar a notação, utilizaremos simplesmente $\sigma(\cdot)$. Na sequência desta seção, iremos obter um estimador para a projeção de $\sigma(t)$ em $V_{j(n)}$, onde o nível $j(n)$ é associado com cada tamanho de amostra, com $j(n) \rightarrow +\infty$, conforme $n \rightarrow +\infty$. Utilizando o resultado obtido em (4.56), com $j_0 = j(n)$, podemos decompor a função $\sigma^2(\cdot)$ da seguinte forma:

$$\sigma^2(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mu_{j(n),k} \phi_{j(n),k}(t) + \sum_{j \geq j(n)} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \nu_{j,k} \psi_{j,k}(t). \quad (5.16)$$

O estimador empírico de $\mu_{j,k}$ é dado por:

$$\hat{\mu}_{j,k} = \sum_{i=0}^{N-1} \phi_{j,k}(t_i) (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 \quad (5.17)$$

Desta forma, definimos o estimador de $\sigma^2(t)$ no nível $j(n)$ como sendo:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}^2(t) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{\mu}_{j(n),k} \phi_{j(n),k}(t) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{i=0}^{N-1} \phi_{j,k}(t_i) (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 \right) \phi_{j(n),k}(t). \end{aligned} \quad (5.18)$$

O estimador, definido em 5.18, foi proposto por (Genon-Catalot et al. 1992). Enunciaremos a seguir dois resultados importantes que dizem respeito a esse estimador, detalhando algumas passagens das respectivas provas.

5.2.0.1 Distribuição Assintótica de $2^{\frac{n}{2}} \int h(t)(\hat{\sigma}^2(t) - \sigma^2(t))dt$

Estamos interessados em estudar a distribuição assintótica da quantidade $2^{\frac{n}{2}} \int h(t)(\hat{\sigma}^2(t) - \sigma^2(t))dt$, onde $h(\cdot)$ é uma função arbitrária qualquer, que pode ser interpretada como uma função peso e que satisfaça:

$$\left. \begin{array}{l} \text{(iv)} - \text{A função } h(\cdot) \text{ é contínua em } [0, T], \text{ com suporte compacto} \\ \text{incluído em } (0, T), \text{ e pertence ao espaço de Sobolev} \\ H^{m'}(\mathbb{R}), \text{ com } m' \geq 1/2. \end{array} \right\} \quad (5.19)$$

Definição 5.2.2 (Espaço Funcional $H^m(\mathbb{R})$).

O espaço funcional de Sobolev $H^m(\mathbb{R})$, para $m \geq 0$, é definido por:

$$H^m(\mathbb{R}) = \left\{ f \in L_2(\mathbb{R}), \int |\hat{f}(w)|^2 (1 + |w|^2)^m dw < \infty \right\}, \quad (5.20)$$

onde $\hat{f}(w)$ representa a transformada de Fourier da função $f(\cdot)$.

Como a função $h(\cdot)$ pertence ao espaço funcional $H^{m'}$, podemos escrever sua projeção ortogonal no nível $j(n)$ como sendo:

$$h(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_{j(n),k} \phi_{j(n),k}(t) + \sum_{j \geq j(n)} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \beta_{j,k} \psi_{j,k}(t). \quad (5.21)$$

Das expressões (5.16), (5.18) e (5.17), podemos fatorar $\int h(t)(\hat{\sigma}^2(t) - \sigma^2(t))dt$ da seguinte forma, utilizando as propriedades da decomposição de Ondaletas descrita no capítulo 4.

Proposição 5.2.1. *Seja $h(\cdot)$ a função-peso definida em (C4) e $\hat{\sigma}^2(\cdot)$ o estimador definido em (5.18). Podemos realizar a seguinte decomposição de $\int h(t)(\hat{\sigma}^2(t) - \sigma^2(t))dt$:*

$$\int h(t)(\hat{\sigma}^2(t) - \sigma^2(t))dt = Z_n + T_n, \quad (5.22)$$

onde:

$$Z_n = \sum_{k \in \mathbb{N}} \alpha_{j(n),k} (\hat{\mu}_{j(n),k} - \mu_{j(n),k}) \quad (5.23)$$

e

$$T_n = - \sum_{j \geq j(n)} \sum_{k \in \mathbb{N}} \beta_{j,k} \nu_{j,k}. \quad (5.24)$$

Em (Genon-Catalot et al. 1992), mostra-se que o termo $2^{\frac{n}{2}} T_n$ da fatoração definida em 5.2.1 converge para 0 se a condição

$$2^{\frac{n}{2} - j(n)(r \wedge m + r \wedge m')} = O(1)$$

for satisfeita, onde o parâmetro r refere-se à regularidade da análise de multi-resolução utilizada. Para obter tal resultado, o Teorema 5.2.1 é muito útil.

Teorema 5.2.1. *Seja $r \in \mathbb{N}$ e $(V_j, j \in \mathbb{Z})$ uma análise de multi-resolução r -regular de $L_2(\mathbb{R})$. Se uma função f pertence ao espaço funcional $H^m(\mathbb{R})$, com $-r \leq m \leq r$, então:*

$$\|f - P_j f\|_m \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0, \quad (5.25)$$

onde $P_j f$ é a projeção ortogonal de f no nível V_j .

Assim, temos que trabalhar agora somente com o termo restante Z_n da fatoração definida na proposição 5.2.1. Podemos fatorá-lo também, utilizando a **decomposição de Itô** em (2.3.1), no capítulo 2, para o termo $(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2$.

Proposição 5.2.2. *Seja Z_n o processo definido na proposição 5.2.1. Este processo pode ser fatorado em:*

$$Z_n = 2 \sum_{i=1}^{N-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} (X_s - X_{t_i}) dX_s h_{j(n)}(t_i) + C_n, \quad (5.26)$$

onde

$$C_n = \sum_{i=1}^{N-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma^2(s) ds h_{j(n)}(t_i) - \int_0^T h_{j(n)}(s) \sigma^2(s) ds, \quad (5.27)$$

sendo $h_{j(n)}$ a projeção ortogonal da função h no nível $V_{j(n)}$.

Em (Genon-Catalot et al. 1992), mostra-se que o termo $2^{\frac{n}{2}}C_n$ da proposição 5.2.2 converge para 0 se a condição

$$2^{2j(n)-\frac{n}{2}} = o(1)$$

for satisfeita, condição essa equivalente a $j(n) - \frac{n}{4} \rightarrow -\infty$ conforme $n \rightarrow \infty$. Portanto, temos que trabalhar somente com o termo restante da fatoração $Z_n - C_n$. Mais uma vez, iremos decompor esse termo, utilizando para isso o **processo de variação quadrática** em (2.3.2) e substituindo o processo $\{X_t\}_{t \in [0, T]}$ por $X_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s$.

Proposição 5.2.3. *Seja $Z_n - C_n$ o processo definido pela fatoração na proposição 5.2.2. Esse processo pode ser fatorado como:*

$$Z_n - C_n = \sum_{i=1}^5 A_{n,i}, \quad (5.28)$$

onde

$$\begin{aligned} A_{n,1} &= 2 \sum_{i=0}^{N-1} h_{j(n)}(t_i) \int_{t_i}^{t_{i+1}} b(s, X_s) \left(\int_{t_i}^s b(u, X_u) du \right) ds, \\ A_{n,2} &= 2 \sum_{i=0}^{N-1} h_{j(n)}(t_i) \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma(u)(t_{i+1} - u) dW_u b(t_i, X_{t_i}), \\ A_{n,3} &= 2 \sum_{i=0}^{N-1} h_{j(n)}(t_i) \int_{t_i}^{t_{i+1}} (b(s, X_s) - b(t_i, X_{t_i})) \left(\int_{t_i}^s \sigma(u) dW_u \right) ds, \\ A_{n,4} &= 2 \sum_{i=0}^{N-1} h_{j(n)}(t_i) \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left(\int_{t_i}^s b(u, X_u) du \right) \sigma(s) dW_s \quad e \\ A_{n,5} &= \sum_{i=0}^{N-1} h_{j(n)}(t_i) \left[\left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma(u) dW_u \right)^2 - \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma^2(u) du \right]. \end{aligned}$$

Em (Genon-Catalot et al. 1992), mostra-se que os termos $2^{\frac{n}{2}} \sum_{i=1}^4 A_{n,i}$ da fatoração definida em 5.2.3 convergem para 0 em probabilidade conforme $n \rightarrow \infty$, impondo-se a condição de que $m' > 1/2$ para garantir a convergência

do termo $2^{\frac{n}{2}} A_{n,1}$. Portanto, temos que verificar a convergência em distribuição do termo restante da fatoração, $2^{\frac{n}{2}} A_{n,5}$, para obtermos o resultado de interesse. Note que podemos reescrever esse termo da seguinte forma:

$$2^{\frac{n}{2}} A_{n,5} = \sum_{i=0}^{N-1} \xi_{i,n}, \quad (5.29)$$

onde

$$\xi_{i,n} = \Delta_n^{-1/2} h_{j(n)}(t_i) \left[\left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma(u) dW_u \right)^2 - \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma^2(u) du \right]. \quad (5.30)$$

Utilizando-se da proposição 2.2.2 do capítulo 2, referente à distribuição da integral de Itô, e do **Teorema Central do Limite de Liapunov**, com $\delta = 1$, obtemos que:

Proposição 5.2.4. *Seja $A_{n,5}$ o termo da decomposição definida na proposição 5.2.3. Então:*

$$2^{\frac{n}{2}} A_{n,5} = \sum_{i=0}^{N-1} \xi_{i,n} \xrightarrow{\mathcal{D}} N \left(0, 2 \int_0^T \sigma^4(t) h^2(t) dt \right). \quad (5.31)$$

Assim, obtemos a distribuição assintótica da quantidade $2^{\frac{n}{2}} \int h(t) (\hat{\sigma}^2(t) - \sigma^2(t)) dt$.

Teorema 5.2.2 (Convergência do EQI).

Suponha que as condições (C1)-(C4) sejam satisfeitas, que $r \wedge m + r \wedge m' > 2$ e que $j(n) = [\alpha n]$ onde $\frac{1}{2(r \wedge m + r \wedge m')} \leq \alpha < \frac{1}{4}$. Temos a seguinte convergência em distribuição:

$$2^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}} h(t) (\hat{\sigma}^2(t) - \sigma^2(t)) dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathcal{N} \left(0, 2 \int_0^T h^2(t) \sigma^4(t) dt \right) \quad (5.32)$$

5.2.0.2 Propriedades Assintóticas do EQMI de $\hat{\sigma}^2(t)$

Estamos interessados no erro quadrático médio integrado (EQMI) do estimador (5.18), onde a função $\gamma(t)$ é uma função contínua não-negativa, com suporte $[\alpha, \beta] \subset [0, T]$. Inicialmente, o EQMI pode ser fatorado da maneira usual em:

$$\begin{aligned}
 R_n &= E \left(\int_{\mathbb{R}} (\hat{\sigma}^2(t) - \sigma^2(t))^2 \gamma(t) dt \right) \\
 &= \int_{\mathbb{R}} ((E\hat{\sigma}^2(t)) - \sigma^2(t))^2 \gamma(t) dt + E \left(\int_{\mathbb{R}} (\hat{\sigma}^2(t) - E(\hat{\sigma}^2(t)))^2 \gamma(t) dt \right) \\
 &\leq B_n^2 + \sup_{t \in \mathbb{R}} \gamma(t) E \left(\int_{\mathbb{R}} (\hat{\sigma}^2(t) - E(\hat{\sigma}^2(t)))^2 dt \right) \\
 &= B_n^2 + \sup_{t \in \mathbb{R}} \gamma(t) D_n.
 \end{aligned} \tag{5.33}$$

Utilizando a fatoração definida em (5.33), enunciaremos o seguinte teorema:

Teorema 5.2.3 (Convergência do EQMI).

Sob as condições (A1)-(A3) e se $j(n) - (\frac{n}{2}) \rightarrow -\infty$ quando $n \rightarrow \infty$, valem as seguintes relações para a fatoração do EQMI :

$$\begin{aligned}
 B_n^2 &\leq C(2^{4j(n)-2n} + 2^{-2j(n)(m \wedge r)} + 2^{-n}) \quad e \\
 D_n &= 2^{j(n)-n} 2 \int_0^T \sigma^4(t) dt + o(2^{j(n)-n}),
 \end{aligned}$$

onde a constante C depende somente das funções ϕ , γ e σ^2 .

5.3 Estimador Não-Linear de $\sigma^2(t)$ por Ondaletas

No estudo de simulação, na seção 6.1, utilizamos um outro estimador de $\sigma^2(t)$ por Ondaletas. Ele é parecido com aquele proposto em 5.18, porém utilizamos um limiar não-linear na estimativas dos coeficientes da decomposição

por ondaletas, segundo o discutido na seção 4.6. Assim, esse estimador, proposto por nós, é definido como:

Definição 5.3.1 (Estimador Não-Linear por Ondaletas).

O estimador não-linear da volatilidade, por ondaletas, é definido como:

$$\hat{\sigma}^2(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{\mu}_{j_0,k} \phi_{j_0,k}(t) + \sum_{j=j_0}^{j_1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{\beta}_{j,k}^{lim} \psi_{j,k}(t), \quad (5.34)$$

onde

$$\hat{\mu}_{j_0,k} = \sum_{i=0}^{N-1} \phi_{j_0,k}(t_i) (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2$$

e $\hat{\beta}_{j,k}^{lim}$ é a estimativa do parâmetro $\beta_{j,k}$ utilizando o limiar proposto na definição 4.6.6.

Capítulo 6

Aplicações

Aplicamos comparativamente as técnicas não-paramétricas em duas situações: numa série real; e num estudo de simulação. Os resultados para a série real são apresentados na subseção 6.2. A seguir, descrevemos como o estudo de simulação foi realizado.

Foram comparados três estimadores por função-núcleo com estimadores por ondaletas. Os estimadores por função-núcleo são o estimador de médias móveis (MM) e o estimador de médias móveis centrado (MMC), apresentados na seção 5.1, e o estimador por função-núcleo normal. Devemos fazer duas observações importantes:

Observação 1

Realizamos validação cruzada para os estimadores MM e MMC, mas não para o núcleo normal, pois este é extremamente caro computacionalmente e a validação cruzada seria praticamente impossível. Utilizamos nesse caso o parâmetro de escala $h = 120$, considerado bom por algumas análises preliminares.

Observação 2

Os resultados assintóticos da seção 5.1 têm condições que não são atendidas pelos estimadores de função-núcleo normal mas, mesmo assim, tornou-se interessante utilizá-lo por suas excelentes propriedades em geral.

Os estimadores por ondaletas foram baseados nas bases: Daubechies 2, Daubechies 5 e Daubechies 8. O processo de encolhimento segue a descrição

Tabela 6.1: Parâmetros do Limiar

Combinações	κ_1	κ_2	κ_3	κ
Comb 1	2	2	2	2
Comb 2	1	2	3	1
Comb 3	1	3	5	3
Comb 4	.5	0,75	1	1

da seção 4.6.2. Para definição automática do número de níveis mantidos na reconstrução utilizamos dois critérios, com razão 1 e 3. Quanto aos limiares, definimos quatro combinações de parâmetros $\{\kappa_j\}_{j=1,2,3}$ e κ , descritos na tabela 6.1. Embora definamos o parâmetro κ_j somente para três níveis, o parâmetro κ_3 é utilizado para todos os outros níveis mantidos, assim $\kappa_j = \kappa_3$, para $j = 4, \dots, j_1$.

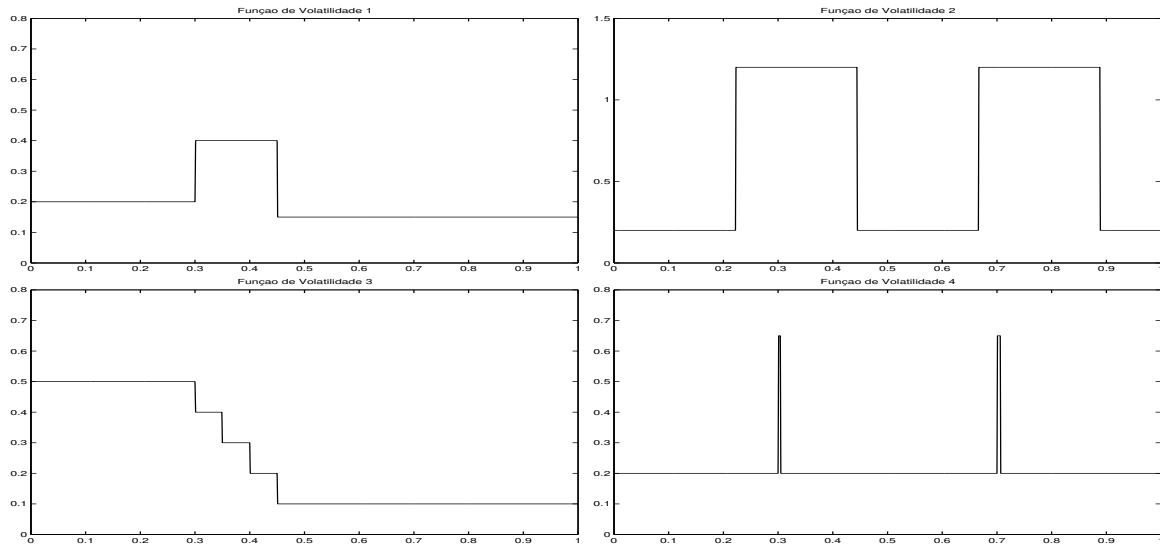
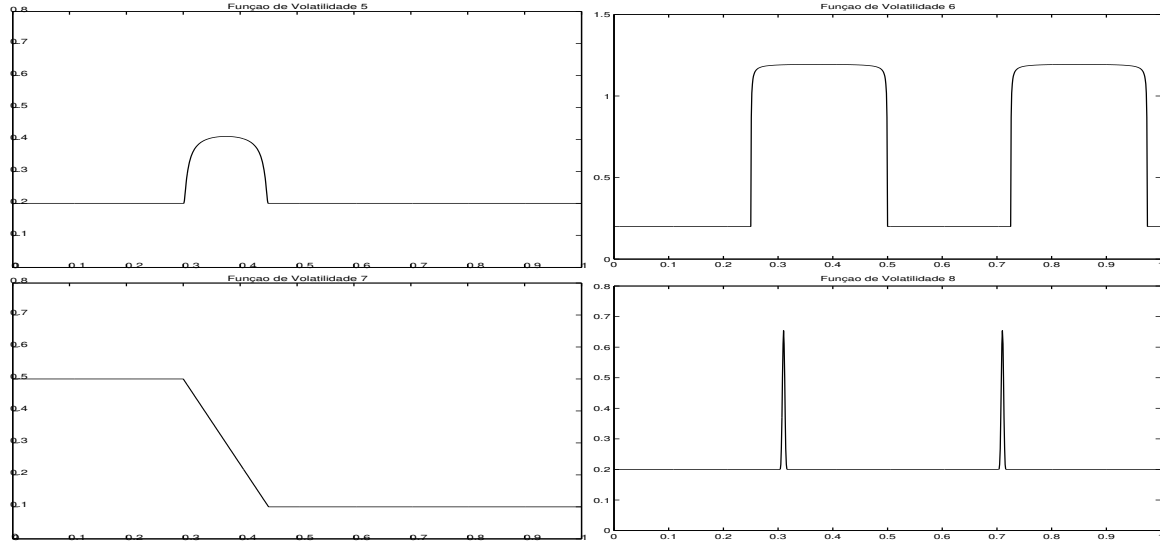
6.1 Estudo de Simulação

Nosso objetivo nesta seção é comparar os estimadores não-paramétricos da volatilidade, por ondaletas e por função-núcleo, no seguinte modelo de difusão:

$$dX_t = b(X_t)dt + \theta(t)h(X_t)dW_t \quad X_0 = x_0 \quad t \in [0, T], \quad (6.1)$$

com funções $h(\cdot)$, $b(\cdot)$ e $\theta(\cdot)$ desconhecidas. No nosso caso, $h = 1$, $b = 0,75 - X_t$ e θ é definida pelo tipo de volatilidade.

Como citamos no capítulo 2, neste caso a volatilidade é a função $\theta^2(t)$. Na literatura, em específico (Bertrand 1996), sabe-se que estimadores não-paramétricos de volatilidade diferem principalmente nos saltos de volatilidade. Com isto em mente, decidimos definir diferentes funções $\theta(\cdot)$ na definição do modelo de difusão em (6.1) para comparar o desempenho de tais estimadores. Usamos dois grupos *equivalentes* de funções $\theta(\cdot)$, um contendo somente versões contínuas e o outro as respectivas *discretizações* dessas funções. A seguir, ilustramos os dois grupos de funções, num total de oito funções.

Figura 6.1: Funções $\theta(\cdot)$ Descontínuas (com Saltos)Figura 6.2: Funções $\theta(\cdot)$ Contínuas

Foram geradas mil (1000) séries, segundo (6.1), para cada uma das oito funções de volatilidade. Cada série contém 4096 ($= 2^{12}$) observações.

É importante observar que algumas dessas funções de volatilidade não satisfazem as condições de regularidade necessárias para garantir a convergência dos estimadores. Para comparar os estimadores, utilizamos quatro medidas de interesse. Duas delas, o erro quadrático integrado e o erro absoluto integrado já foram discutidas na seção 3.2.1. Essas medidas são muito gerais, dificultando a comparação dos estimadores nos pontos de maior interesse, justamente onde ocorre uma mudança na função de volatilidade $\theta^2(\cdot)$. Essas medidas não conseguem captar o erro cometido nesses saltos em grande parte pelo *tamanho* do salto (quando existe), que é muito pequeno, assim acrescentando muito pouco as mesmas. Assim, utilizamos também duas medidas de erro mais localizadas, variações das duas definidas anteriormente, onde integramos os respectivos erros somente nas regiões de interesse, ou seja, nas proximidades das mudanças na volatilidade (seja por saltos ou por mudanças contínuas de nível). Para tornar o estudo um pouco mais flexível, definimos três regiões de interesse, uma exatamente nos saltos (ou mudanças contínuas) de volatilidade, uma contendo os saltos e mais 50 observações antes e depois, e por fim, uma contendo 100 observações antes e depois. Nomeamos estas regiões, respectivamente, de *quant0*, *quant50* e *quant100*.

Resumiremos esses erros em tabelas e gráficos, para comentá-los, utilizando a média e a mediana como estatísticas descritivas. Em todas as tabelas, que estão na seção B.2, os menores erros integrados foram destacados em negrito. Nos gráficos dos erros integrados, que estão na seção B.3, as letras (a),(b),(c) e (d) referem-se, respectivamente, aos erros integrados locais *Quant0*, *Quant50* e *Quant100* e ao erro integrado. Na seção B.4, as letras (a),(b),(c) e (d) referem-se, respectivamente, aos estimadores por Ondas e aos estimadores por função-núcleo Normal, MMC e MM. Esse estudo de simulação foi realizado utilizando o *software* MATLAB.

Para verificar o desempenho dos estimadores em estimar os diferentes tipos de volatilidade, também desenhamos algumas estimativas, as melhores e as piores, para cada um dos tipos de volatilidade. Ilustramos as estimativas individuais das várias volatilidades, utilizando os diferentes estimadores. Procuramos desenhar a melhor e a pior estimativa para cada estimador, sob o critério de EQI, na seção B.1; porém, isso não implica em boas estimativas nos saltos da volatilidade, pela generalidade do critério. Note que na volatilidade tipo 4, a pior estimativa de cada estimador não parece estimar os saltos. Isso pode acontecer por não serem observados saltos na amostra ou pelo fato

de o critério de seleção da estimativa ser o EQI. Já na volatilidade tipo 8, podemos perceber que os estimadores por função-núcleo não conseguem reproduzir os picos com a mesma eficiência que os estimadores por ondaletas, devido principalmente à natureza dos estimadores. Porém, mesmo que visualmente possamos detectar essa diferença entre os estimadores, ela pode não aparecer nas medidas de erro utilizadas, pois a área dos saltos em questão é muito pequena.

Analisando as tabelas B.2 a B.5, percebe-se que nas funções de volatilidade do tipo 1, 2, 3, 5, 6 e 7, o estimador por função-núcleo normal teve um desempenho melhor que os outros, tanto em relação ao EQI quanto ao EAI. Os estimadores por Ondaletas têm desempenho próximo ao do núcleo normal e ambos são bem melhores do que os das outras duas técnicas. Ilustramos esta diferença no gráfico 6.3, onde desenhamos os erros do melhor estimador de Ondaletas e os estimadores por função núcleo para cada tipo de Volatilidade. Note que em todos os gráficos dos erros integrados nessa seção, os símbolos o , $\cdot$, $*$ e $+$ representam, respectivamente, o estimador por função núcleo-normal, o MM, o MMC e o estimador de ondaletas.

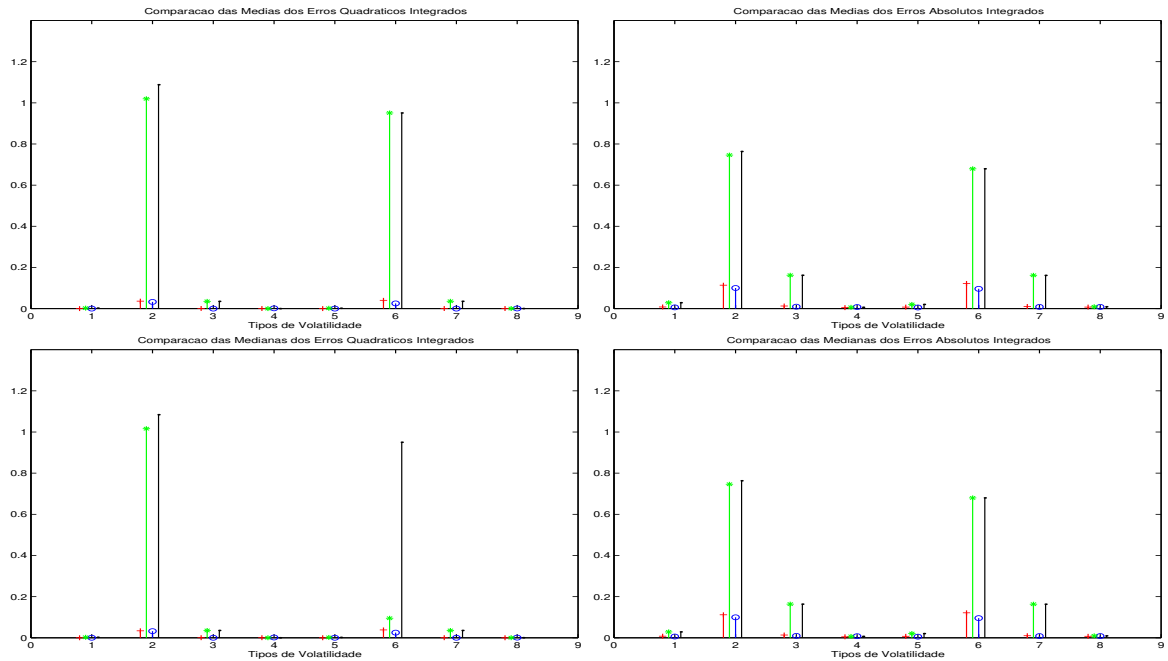


Figura 6.3: Diferença dos Erros Integrados dos Estimadores

Também percebemos que o estimador de Ondaletas que obteve melhor desempenho para os tipos de volatilidade 1,2,5 e 6, para os dois tipos de erros integrados, sem exceção, foi aquele utilizando a razão 1 e a combinação 4, mesmo sendo essas diferenças não muito críticas em várias situações.

No caso da volatilidade do tipo 8, os estimadores por Ondaletas obtiveram melhor desempenho que os de função-núcleo, principalmente se utilizarmos os erros integrados locais. Nesse tipo de volatilidade, os estimadores MM e MMC obtiveram os piores resultados, como esperado. Notamos também que para a volatilidade tipo 4, os estimadores por função-núcleo MM e MMC foram os melhores com relação ao EQI, com uma diferença bastante considerável para os estimadores de Ondaletas, e surpreendentemente, foram ainda melhores se considerarmos o estimador por função-núcleo normal, sendo este o pior de todos para esse tipo de volatilidade. Esse resultados também indicaram a necessidade de utilizarmos o erro integrado local.

Outra ocorrência que merece destaque é que o estimador MM foi melhor que estimador MMC na volatilidade tipo 8, contrariando os resultados obtidos em (Bertrand 1996), onde se observou que o estimador de MMC era melhor que o estimador MM toda vez que havia um salto de volatilidade.

Analisando as tabelas B.6 à B.13, novamente percebe-se que nas funções de volatilidade do tipo 1, 2, 3, 5, 6 e 7 o estimador por função-núcleo normal tem o melhor desempenho. Porém, a diferença nos erros quadráticos integrados locais é, em geral, menor do que aquela observada nos erros integrados gerais.

Novamente percebemos que o estimador de Ondaletas que obteve melhor desempenho, com relação ao EQI, para os tipos de volatilidade 1,2,5 e 6, sem exceção, foi aquele utilizando a razão 1 e a combinação 4.

Para a volatilidade do tipo 4, com essas novas medidas de erro, observamos que, em geral, o erro do estimador por ondaletas é 2 vezes menor do que aquele obtido pelo estimador de função-núcleo normal. Esse estimador foi o melhor estimador de função-núcleo, dessa vez confirmando o que se esperava desse tipo de estimador. Já para a volatilidade do tipo 8, observamos que, em geral, o erro do estimador por ondaletas é 1,5 vezes menor do que aquele obtido pelo estimador de função-núcleo normal. Esse último foi novamente o melhor estimador de função-núcleo. A diferença média de 0,5, dos erros dos estimadores de Ondaleta com relação aos estimadores por função-núcleo, nas volatilidades do tipo 4 e 8, provavelmente ocorre porque o salto da volatilidade do tipo 4 é mais brusco que aquele da volatilidade tipo 8, sendo assim mais difícil desse salto ser *captado* pelos estimadores por função-núcleo.

Outra ocorrência que merece destaque é que o estimador de Ondaletas obteve um erro menor do que os estimadores MM e MMC em todos os tipos de volatilidade, novamente contrariando os resultados obtidos em (Bertrand 1996), onde se observou que o estimador de MMC era o melhor estimador, tanto em relação aos estimadores de Ondaletas quanto ao MM. Contudo, utilizando essas medidas de erro, observou-se também em nosso estudo que o estimador MMC foi mais eficiente que o estimador MM.

Ilustramos, no gráfico 6.4, os menores erros de cada tipo de estimador para cada tipo de volatilidade, em específico para o Erro Quadrático Integrado Local com *Quant0*.

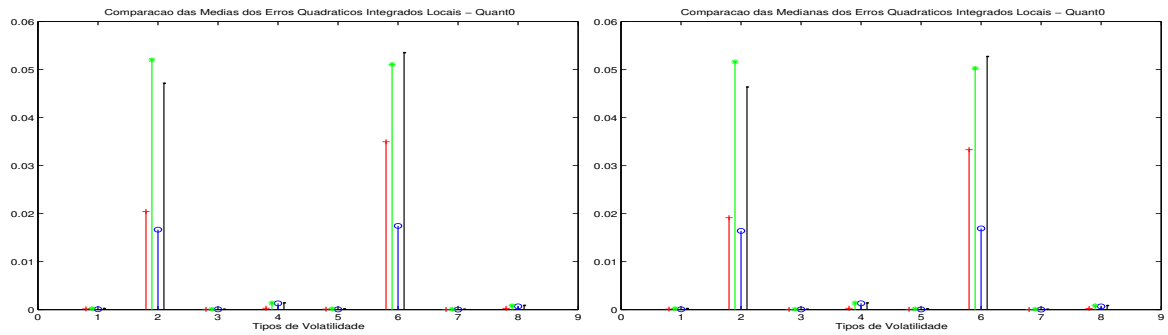


Figura 6.4: Diferença dos EQI Locais com *Quant0*

Analisando as tabelas B.14 à B.21, observam-se resultados muito similares àqueles obtidos nas tabelas B.6 à B.13. Uma diferença que merece destaque é que, para a volatilidade do tipo 4, observamos que, em geral, o erro do estimador por ondaletas é 4 vezes menor do que aquele obtido pelo estimador de função-núcleo normal, e para o caso da volatilidade do tipo 8, esse erro é em geral 2 vezes menor. Assim, utilizando a medida de erro EAI Local observamos que o estimador de Ondaletas é ainda mais eficiente, comparado com a sua eficiência usando o EQI Local. Ilustramos, no gráfico 6.5, essa diferença observada utilizando essas medidas de erros para o caso *Quant0*. Nesse gráfico, os símbolos * e . representam, respectivamente, o EQI e o EAI.

Nesse estudo de simulação também podemos observar que o método de seleção automática dos coeficientes é confiável, em especial porque o processo de escolha de κ e κ_j e do nível máximo de resolução não muda consideravelmente os resultados.

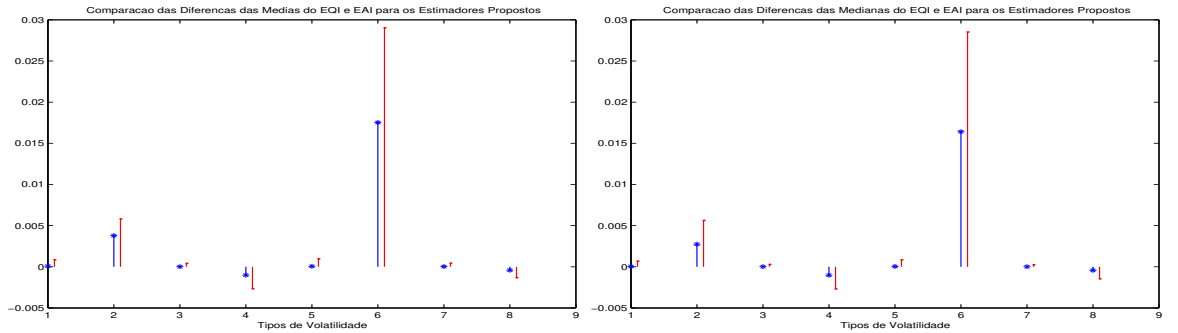


Figura 6.5: Diferença na Eficiência do Estimador de Ondaletas

6.2 Estudo de uma Série Real

Nesta seção iremos estimar a volatilidade em uma série real. A série é o Índice de fechamento da Bolsa de Valores de São Paulo¹, observado minuto a minuto, das 11 horas do dia 18/12/01 até as 18 horas do dia 18/02/02². Essa série de fechamento é ilustrada na figura 6.6. Agradecemos ao *Finance Lab*, do *Ibmec Business School*, por ceder os dados.

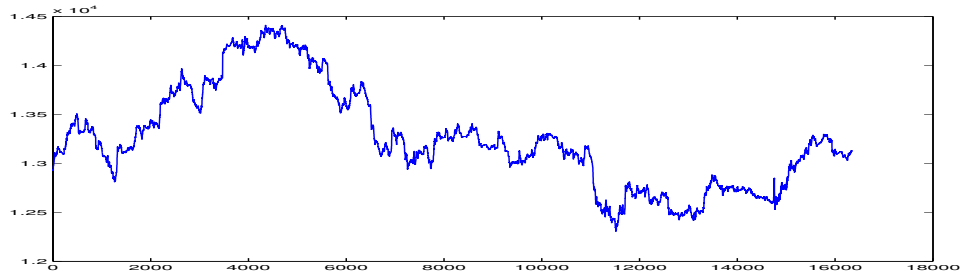


Figura 6.6: Série do Índice de fechamento

Estamos interessados em estimar a volatilidade da série dos retornos, desenhada na figura 6.7.

È importante salientar que o pico observado no gráfico 6.7 não é real,

¹No dia 31/1/2002 houve um problema de coleta onde os dados dos primeiros trinta minutos foram perdidos

²Essa série tem 16348 observações, sendo necessário alguns ajustes para que possamos utilizar os métodos tradicionais da decomposição de Ondaletas, já que $2^{14} = 16384$. Optamos, nesse estudo, por replicar as últimas observações da série em questão.

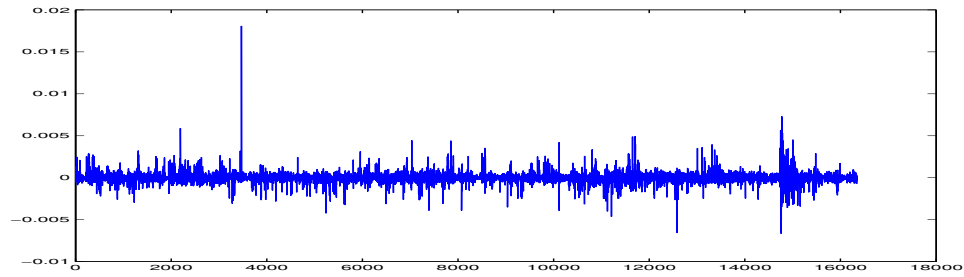


Figura 6.7: Série dos Retornos do Índice

sendo consequência do problema de coleta de dados comentado anteriormente.

Utilizando os diferentes estimadores propostos ao longo desta dissertação, obtivemos as estimativas apresentadas no gráfico 6.8 para a volatilidade da série dos retornos. É importante salientar que não foi possível obter a estimativa utilizando a função-núcleo normal, devido ao tamanho da série utilizada, por problema de *falta de memória*.

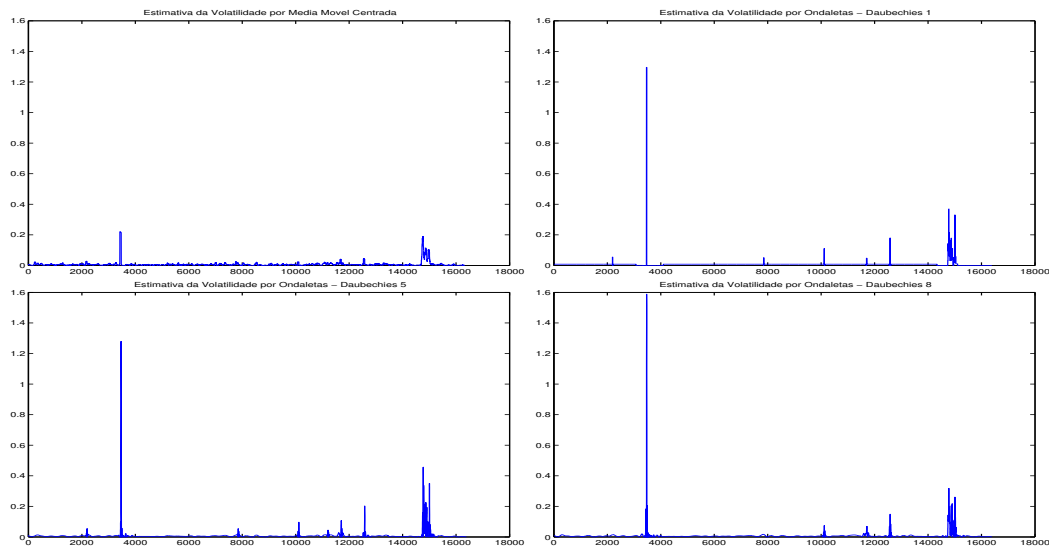


Figura 6.8: Estimativa da Volatilidade - Índice de fechamento

Podemos observar nessas estimativas, da mesma forma que nas séries simuladas, que os picos estimados pela estimadores de Ondaletas são maiores do que aqueles detectados pelos estimadores por função-núcleo. Além disso,

estimativas para baixas volatilidades parecem menos ruidosas por Ondaletas do que por função-núcleo.

6.3 Conclusões

Concluimos das seções 6.1 e 6.2 que os estimadores de ondaletas são mais eficientes na estimativa de funções de volatilidade, de modelos de difusão, quando essas apresentam picos repentinos, sendo essa eficiência ressaltada quando se utiliza uma medida de erro local. Já na estimativa de funções de volatilidade com outro comportamento, o estimador por função-núcleo normal apresenta os melhores resultados, sendo porém a diferença entre a sua eficiência e a dos estimadores de Ondaletas muito pequena. É importante lembrar que não existem resultados assintóticos para o estimador por função-núcleo normal; assim, não podemos comprovar sua eficiência teoricamente. Finalmente, os estimadores por função-núcleo MM e MMC, embora comprovadamente eficientes, têm o pior desempenho entre os estimadores comparados nessa dissertação, com destaque negativo para o estimador MM.

É importante salientar que além de todos os resultados discutidos nas seções anteriores, deve ficar claro a grande superioridade, com relação a esforço computacional, dos estimadores de Ondaletas. Esse fato é ilustrado na figura 6.9. Note que os tempos de execução não levam em conta o algoritmo de validação cruzada utilizado nos estimadores MM e MMC, e também a diferença de velocidade dos diferentes computadores utilizados para o estudo de simulação. Os procedimentos por Ondaletas são em geral cem vezes mais rápidos do que seus equivalentes MM e MMC (os três foram rodados no mesmo equipamento). O estimador por função-núcleo normal, que é ainda mais lento do que MM e MMC, teve que ser rodado num equipamento bem mais rápido, por problemas de memória ³.

Podemos resumir nossas considerações sobre o desempenho dos estimadores nos seguintes cinco pontos:

- O estimador de ondaletas é excepcionalmente mais rápido do que qualquer um dos três outros, além de necessitar de menos recursos de memória, o que o torna atraente para situações de decisão imediata;

³Mesmo nesse equipamento, as estimativas só eram obtidas em quatro blocos.

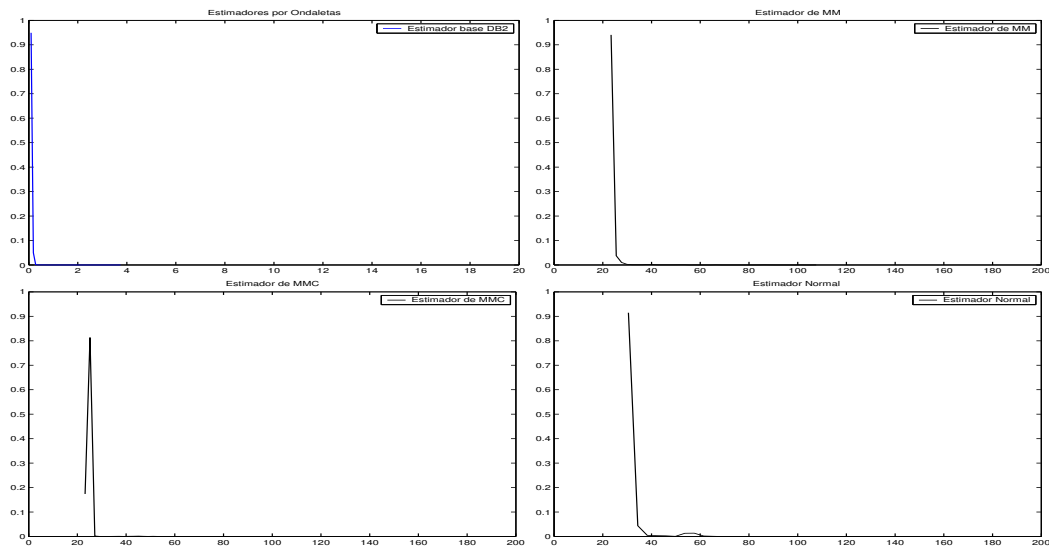


Figura 6.9: Tempos de Execução dos Estimadores

- O estimador de função-núcleo normal, mesmo sem desempenho teoricamente demonstrado, apresenta resultados empíricos que evidenciam sua capacidade de estimar funções de volatilidade regulares;
- O estimador de ondaletas pode ser automatizado sem que seu desempenho sofra de forma expressiva, o que o torna versátil;
- O estimador de ondaletas tem inegável capacidade de representar funções na presença de descontinuidades (ou mudanças bruscas de nível), como ilustrado pelas volatilidades tipos 4 e 8, e ;
- A diferença entre o desempenho das estimativas por ondaletas e função-núcleo é pequena, tanto quanto quando favorável as últimas quanto às primeiras.

Essa considerações nos levam ao entendimento que incursões teóricas na eficiência relativa de estimadores por função-núcleo e ondaletas devem ser realizadas e que, as estimativas de ondaletas têm, entre todas as comparadas, maior valor prático.

Apêndice A

Condições de Regularidade

A.1 Definições Gerais

Definições gerais utilizadas nas condições de regularidade abaixo:

Definição A.1.1 (Espaço Funcional $C_{2,1}(b)$).

Definimos como $C_{2,1}(b)$ o espaço das funções reais f duas vezes diferenciáveis contínuas, definidas no $\mathbb{R}$ tais que :

$$\|f\|_{\infty} \leq b \quad e \quad \|f^{(2)}\|_{\infty} \leq b. \quad (\text{A.1})$$

Definição A.1.2 (Processo Estocástico $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$).

Definimos o processo estocástico $Z_t = (X_t, Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$. Supomos que ele é estritamente estacionário e que Z_0 admite uma densidade $f_Z(x, y)$. Além disso, supomos que $f_Z(x, \cdot)$ e $m(\cdot)f_Z(x, \cdot)$ pertencem a $L_2(\mathbb{R})$ para cada $x \in \mathbb{R}$.

Definição A.1.3. *Supomos que m é uma função boreliana $m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $E(|m(Y_0)|) < \infty$.*

Definição A.1.4. Definimos as seguintes funções:

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f_Z(x, y) dy \\ \varphi(x) &= \int m(y) f_Z(x, y) dy \\ r(x) &= \frac{\varphi(x)}{f(x)} \quad \text{se} \quad f(x) > 0 \\ &E(m(Y_0)) \quad \text{se} \quad f(x) = 0 \end{aligned}$$

A.2 Condições de Regularidade 1

Definição A.2.1 (Condição de Regularidade 1. a).

A densidade f_{X_s, X_t} existe, para $s \neq t$, pertence ao espaço $C_{2,1}(b)$ e satisfaz:

$$\sup_{t \neq s} \|f_{X_s, X_t} - f_X \otimes f_X\|_p \leq \infty, \quad (\text{A.2})$$

para algum $p \in (2, \infty]$.

Definição A.2.2 (Condição de Regularidade 1. b).

As funções f_X e φ pertencem ao espaço $C_{2,1}(b)$ e f_Z pertence a $C_{2,2}(b)$, para algum b .

Definição A.2.3 (Condição de Regularidade 1. c).

Existe uma constante $a > 0$ tal que:

$$E(\exp\{a|m(Y_t)|\}) < \infty. \quad (\text{A.3})$$

Definição A.2.4 (Condição de Regularidade 1. d).

O coeficiente de mistura forte $\alpha(\cdot)$ do processo $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ satisfaz:

$$\alpha(k) \leq \gamma k^{-\beta}, \quad k \geq 1, \quad (\text{A.4})$$

com $\gamma > 0$ e $\beta > 0$.

A.3 Condições de Regularidade 2

Definição A.3.1 (Condições de Regularidade 2).

As funções f_X e φ pertencem ao espaço $C_{2,1}(b)$, para algum b , e a função-núcleo K é Lipschitz.

A.4 Condições de Regularidade 3

Definição A.4.1 (Condições de Regularidade 3.a).

As funções f_X e φ pertencem ao espaço $C_{2,1}(b)$, para algum b . Além disso, $f(\cdot)E(Y_0^2|X_0 = \cdot)$ é contínua em x .

Definição A.4.2 (Condições de Regularidade 3.b).

O processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é α -mistura com $\alpha(k) = O(k^{-\beta})$, onde $\beta > \frac{\delta^2+4}{2\delta}$, e também:

$$E|X_0|^{4+\delta} < \infty, \quad (\text{A.5})$$

para algum $\delta > 0$.

Definição A.4.3 (Condições de Regularidade 3.c).

$$\sup_{t \geq k} \|f_{(X_0, X_t)}\|_{\infty} \leq \infty. \quad (\text{A.6})$$

Definição A.4.4 (Condições de Regularidade 3.d).

$$\begin{aligned} \|E(|Y_0|^{4+\delta}|X_0 = \cdot)\|_{\infty} &< \infty \quad e \\ \sup_{t \in \mathbb{Z}} \|E(Y_0^i Y_t^j | X_t = \cdot, X_0 = \cdot)\|_{\infty} &\leq \infty \end{aligned}$$

onde $i \geq 0$, $j \geq 0$ e $i + j = 2$.

A.5 Condições de Regularidade 4

Definição A.5.1 (Condições de Regularidade 4.a).

A função $\sigma(t)$ é adaptada à filtragem $\mathcal{F}_t$. Existe $L_T > 0$ tal que, $\forall t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned} E(\sigma^4(t)) &\leq L_T & e \\ E(\sigma^8(t)) &\leq L_T. \end{aligned}$$

Definição A.5.2 (Condições de Regularidade 4.b).

A função $b(t, \cdot)$ é um mapa não antecipativo e $b \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$.

A.6 Condições de Regularidade 5

Definição A.6.1 (Condições de Regularidade 5).

Existe $m > 0$ tal que $\sigma^2(\cdot)$ é q.c.Hölder contínua de ordem m , com uma constante $K(\omega)$ tal que :

$$E(K^2(\omega)) < \infty. \tag{A.7}$$

A.7 Condições de Regularidade 6

Definição A.7.1 (Condições de Regularidade 6).

Existe $K_T > 0$ tal que, $\forall t$:

$$E(b^4(t, X_t)) \leq K_T. \tag{A.8}$$

A.8 Condições de Regularidade 7

Definição A.8.1 (Condições de Regularidade 7).
A função $\sigma(\cdot)$ satisfaz:

$$\sigma(\cdot) = \sum_{i=1}^N \sigma_i 1_{[t_i, t_{i+1})}(\cdot), \quad (\text{A.9})$$

onde $\sigma_i \forall i$ é uma constante qualquer.

Apêndice B

Resultados da Simulação

B.1 Estimativas das Volatilidades

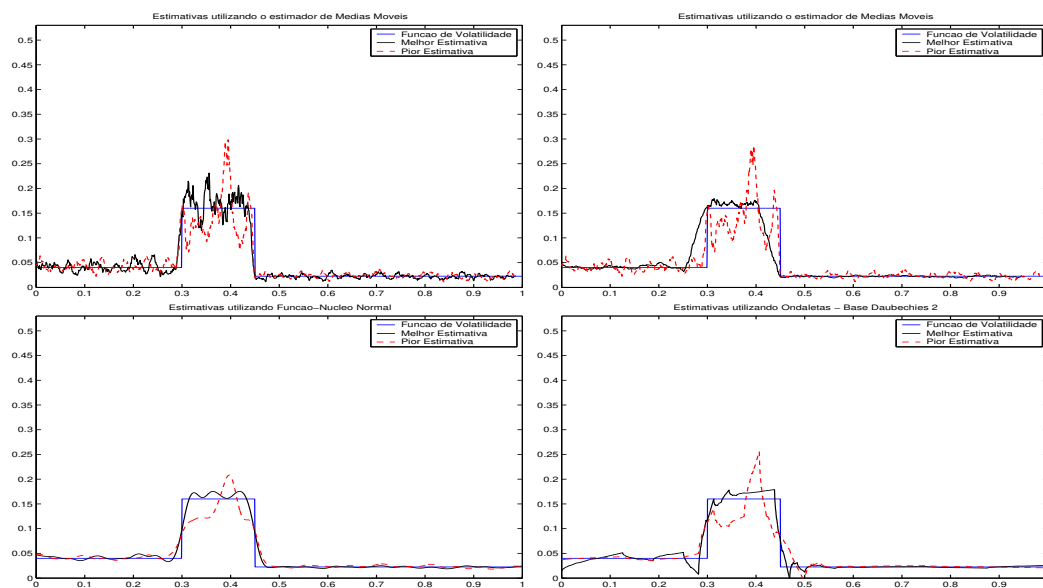


Figura B.1: Estimativas da Volatilidade Tipo 1

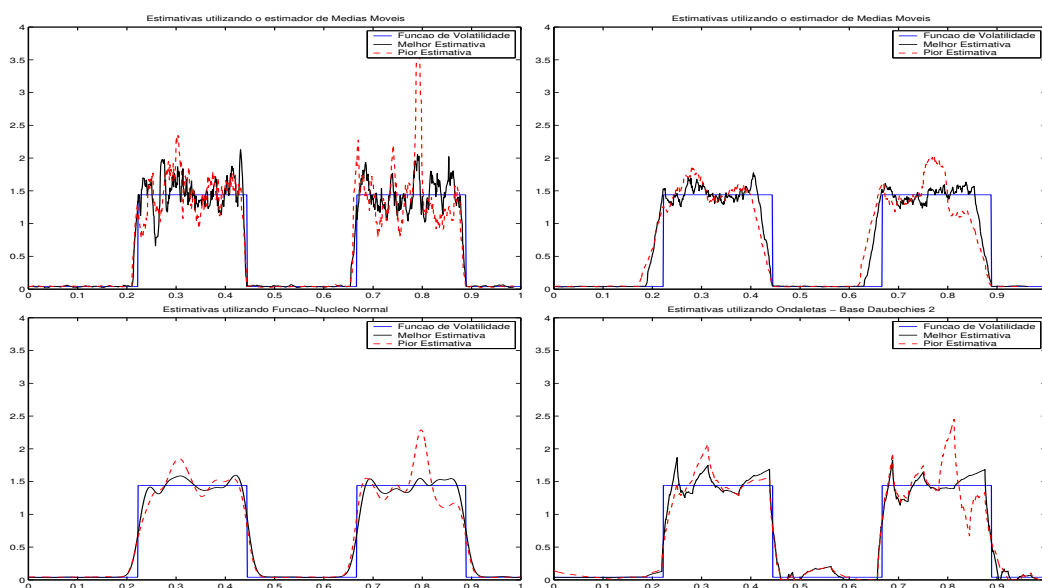


Figura B.2: Estimativas da Volatilidade Tipo 2

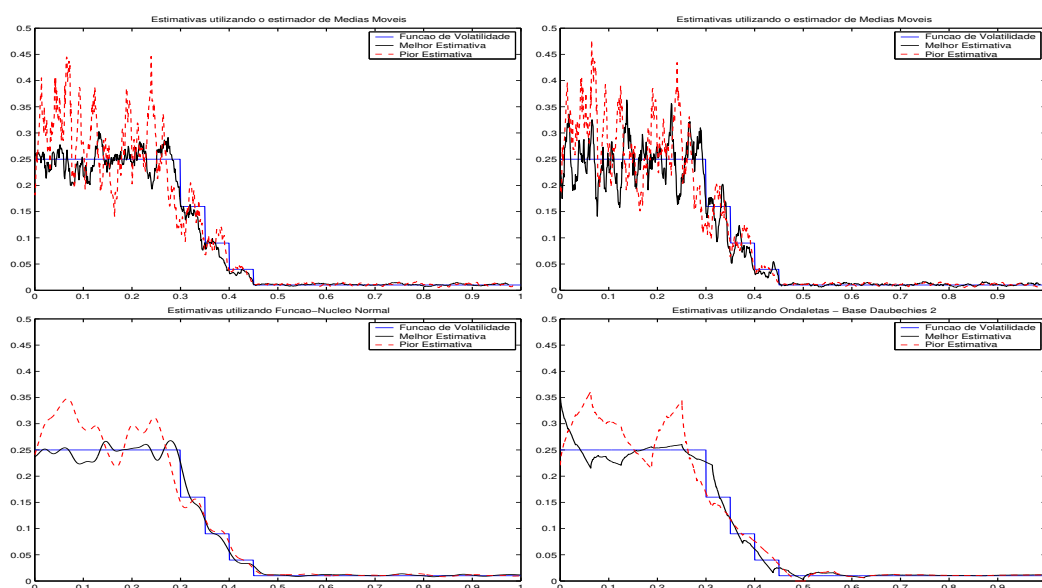


Figura B.3: Estimativas da Volatilidade Tipo 3

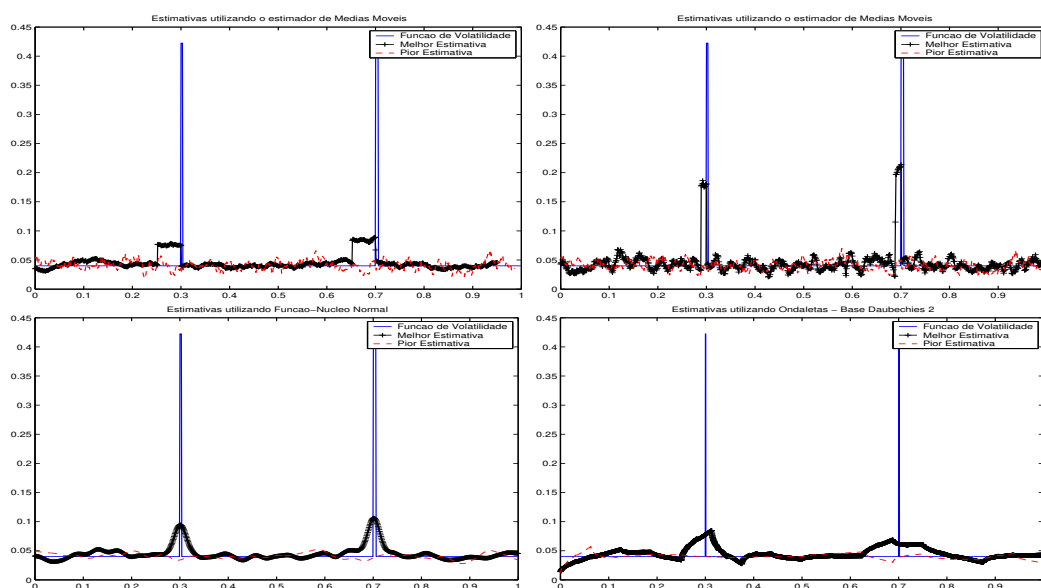


Figura B.4: Estimativas da Volatilidade Tipo 4

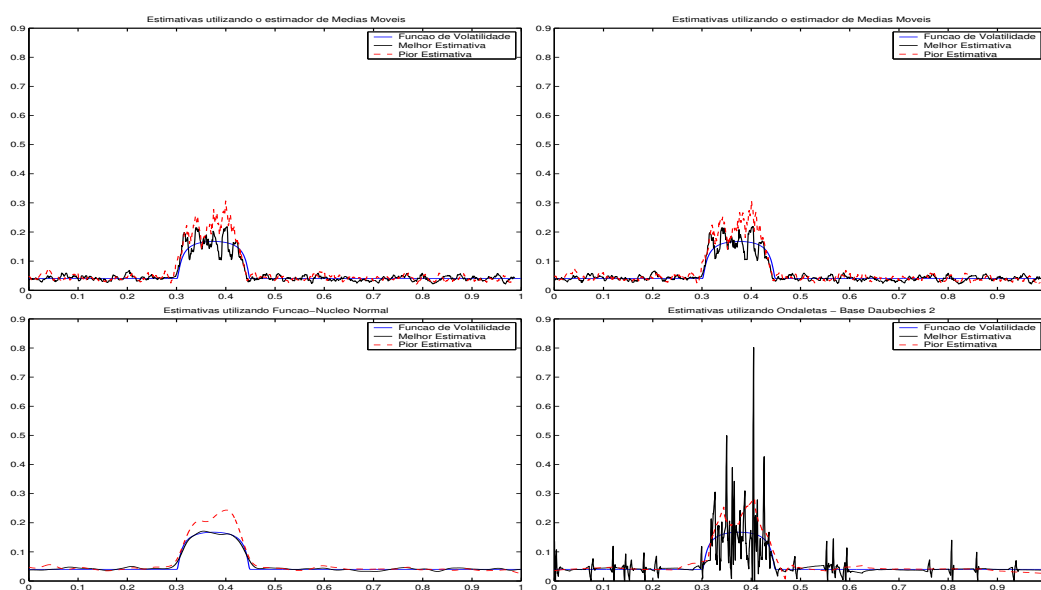


Figura B.5: Estimativas da Volatilidade Tipo 5

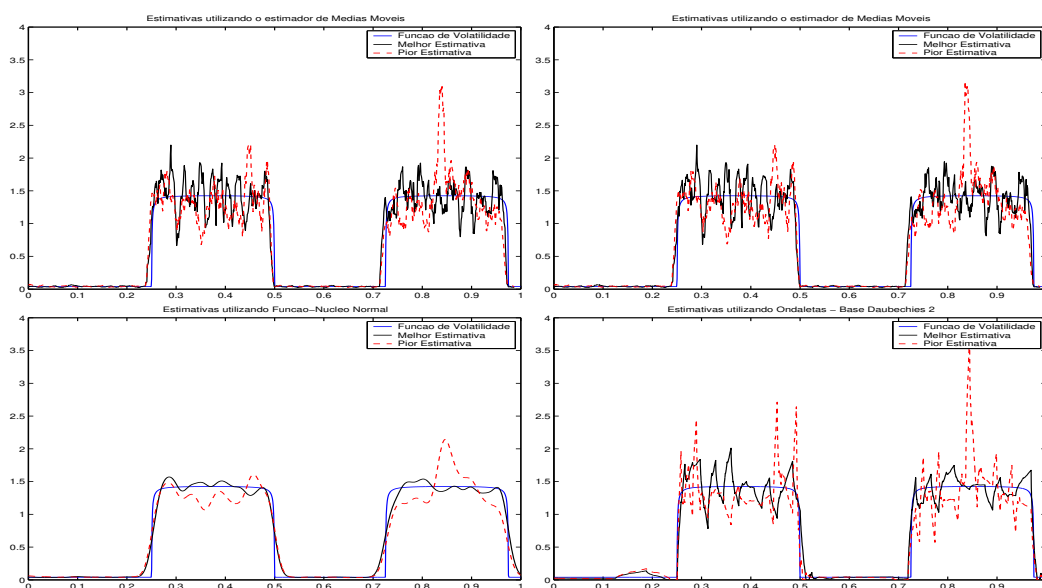


Figura B.6: Estimativas da Volatilidade Tipo 6

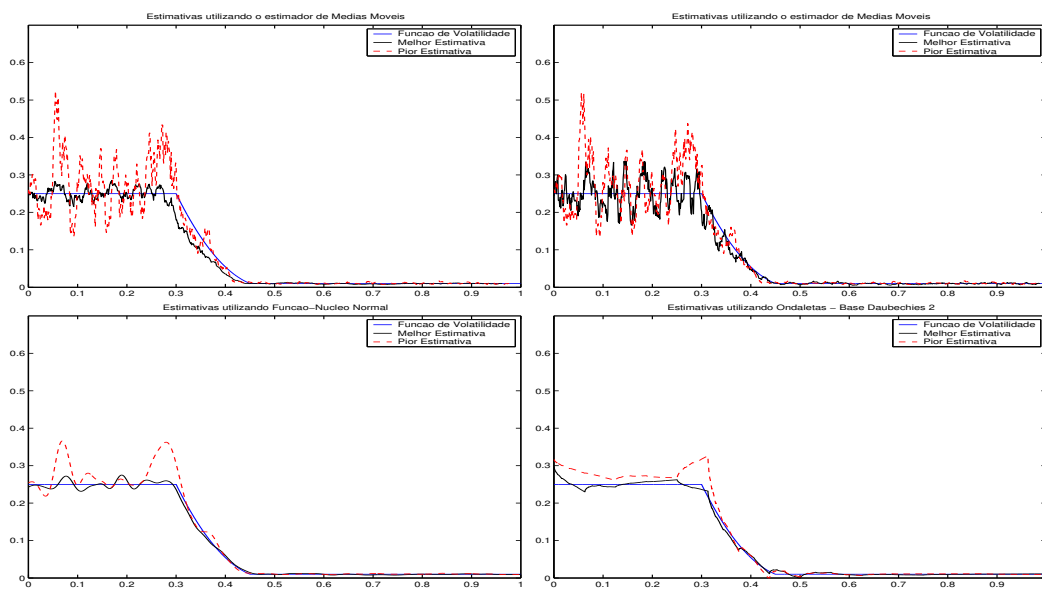


Figura B.7: Estimativas da Volatilidade Tipo 7

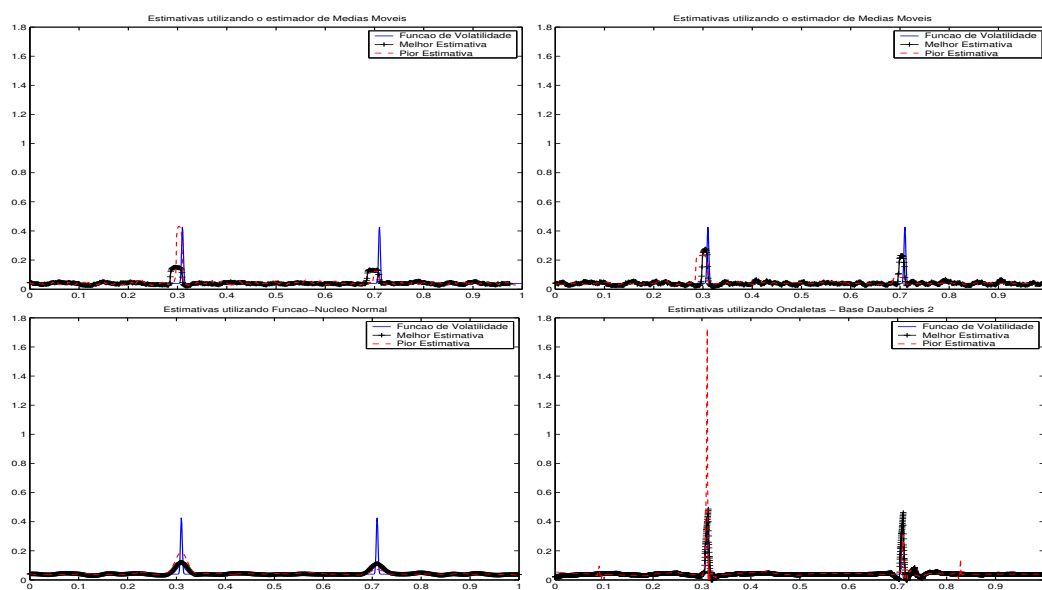


Figura B.8: Estimativas da Volatilidade Tipo 8

Tabela B.1: Parâmetros do Limiar

Combinações	κ_1	κ_2	κ_3	κ
Comb 1	2	2	2	2
Comb 2	1	2	3	1
Comb 3	1	3	5	3
Comb 4	.5	0,75	1	1

B.2 Tabelas de Resumo

Nessa seção, são apresentadas as tabelas de resumo dos erros integrados dos estimadores: por função-núcleo Normal, de MM e de MMC; por ondaletas nas bases Daubechies 2, Daubechies 5 e Daubechies 8, onde processo de encolhimento segue a descrição da seção 4.6.2. Para definição automática do número de níveis mantidos na reconstrução utilizamos dois critérios, com razão 1 e 3. Quanto aos limiares, definimos quatro combinações de parâmetros $\{\kappa_j\}_{j=1,2,3}$ e κ , descritos na tabela B.1. Embora definamos o parâmetro κ_j somente para três níveis, o parâmetro κ_3 é utilizado para todos os outros níveis mantidos, assim $\kappa_j = \kappa_3$, para $j = 4, \dots, j_1$.

Nas tabelas foram utilizadas duas estatísticas descritivas, a média e a mediana. Em todas as tabelas, os menores erros integrados foram destacados em negrito. Tabelamos os erros integrados e os erros integrados locais, com *Quant0*, *Quant50* e *Quant100*, em diferentes tabelas.

Tabela B.2: Média dos Erros Integrados - Vol1-Vol4

Tabela Média Parte 1				Vol1		Vol2		Vol3		Vol4	
				EQI	EAI	EQI	EAI	EQI	EAI	EQI	EAI
O N D A L E T A S	DB2	RAZÃO 1	C1	0,000295	0,009270	0,046933	0,137911	0,000723	0,013344	0,000391	0,005242
			C2	0,000290	0,009127	0,037344	0,118098	0,000700	0,013089	0,000387	0,005213
			C3	0,000291	0,009237	0,039345	0,122318	0,000670	0,012791	0,000381	0,005027
			C4	0,000271	0,008005	0,036403	0,113867	0,000726	0,013420	0,000407	0,005982
		RAZÃO 3	C1	0,000467	0,012873	0,088894	0,206950	0,001023	0,014666	0,000382	0,004795
			C2	0,000466	0,012833	0,086042	0,201064	0,001023	0,014674	0,000383	0,004941
			C3	0,000467	0,012840	0,086791	0,202439	0,001023	0,014674	0,000383	0,004941
			C4	0,000455	0,012207	0,085486	0,199308	0,001023	0,014671	0,000383	0,005048
	DB5	RAZÃO 1	C1	0,000338	0,010380	0,064358	0,142644	0,001349	0,019378	0,000445	0,009876
			C2	0,000338	0,010385	0,064377	0,142658	0,001349	0,019378	0,000447	0,009936
			C3	0,000338	0,010383	0,064377	0,142658	0,001349	0,019378	0,000446	0,009910
			C4	0,000339	0,010391	0,064388	0,142670	0,001349	0,019379	0,000451	0,010044
		RAZÃO 3	C1	0,000331	0,010339	0,064177	0,142489	0,001345	0,019361	0,000428	0,009829
			C2	0,000331	0,010339	0,064177	0,142489	0,001345	0,019361	0,000428	0,009829
			C3	0,000331	0,010339	0,064177	0,142489	0,001345	0,019361	0,000428	0,009829
			C4	0,000331	0,010339	0,064177	0,142489	0,001345	0,019361	0,000428	0,009829
	DB8	RAZÃO 1	C1	0,000340	0,010431	0,064074	0,143106	0,001356	0,019403	0,000437	0,009948
			C2	0,000340	0,010435	0,064078	0,143110	0,001357	0,019410	0,000440	0,010017
			C3	0,000340	0,010435	0,064077	0,143109	0,001354	0,019397	0,000438	0,009978
			C4	0,000340	0,010441	0,064081	0,143111	0,001361	0,019428	0,000445	0,010145
		RAZÃO 3	C1	0,000334	0,010393	0,064028	0,143060	0,001331	0,019303	0,000428	0,009874
			C2	0,000334	0,010393	0,064028	0,143060	0,001331	0,019303	0,000428	0,009874
			C3	0,000334	0,010393	0,064028	0,143060	0,001331	0,019303	0,000428	0,009874
			C4	0,000334	0,010393	0,064028	0,143060	0,001331	0,019303	0,000428	0,009874
Função Núcleo			MM	0,002407	0,028735	1,088038	0,763558	0,035343	0,162041	0,000100	0,006470
			MMC	0,002402	0,028724	1,019810	0,746068	0,035367	0,162174	0,000098	0,006426
			Normal	0,000152	0,006263	0,032621	0,100089	0,000290	0,009509	0,001345	0,007789

Tabela B.3: Média dos Erros Integrados - Vol5-Vol8

Tabela Média Parte 2				Vol5		Vol6		Vol7		Vol8	
				EQI	EAI	EQI	EAI	EQI	EAI	EQI	EAI
O N D A L E T A S	DB2	RAZ1	C1	0,000190	0,007967	0,084912	0,210090	0,000596	0,011907	0,000421	0,007427
			C2	0,000174	0,007676	0,054389	0,152625	0,000552	0,010873	0,000426	0,007371
			C3	0,000178	0,007824	0,061328	0,164332	0,000525	0,010575	0,000444	0,007436
			C4	0,000168	0,007408	0,040228	0,122519	0,000570	0,011015	0,000419	0,007682
		RAZ3	C1	0,000240	0,009505	0,181187	0,288150	0,000838	0,014272	0,000993	0,012054
			C2	0,000229	0,009287	0,179337	0,284312	0,000827	0,013956	0,000994	0,012058
			C3	0,000230	0,009305	0,179900	0,285052	0,000827	0,013957	0,000996	0,012077
			C4	0,000225	0,009064	0,177607	0,280755	0,000825	0,013880	0,000992	0,012042
	DB5	RAZ1	C1	0,000304	0,011292	0,062924	0,148024	0,001367	0,019312	0,000433	0,010575
			C2	0,000304	0,011298	0,062924	0,148024	0,001367	0,019314	0,000439	0,010747
			C3	0,000304	0,011298	0,062924	0,148024	0,001367	0,019313	0,000437	0,010691
			C4	0,000305	0,011310	0,062924	0,148024	0,001367	0,019315	0,000453	0,011094
		RAZ3	C1	0,000300	0,011259	0,062924	0,148024	0,001362	0,019295	0,000395	0,010596
			C2	0,000300	0,011259	0,062924	0,148024	0,001362	0,019295	0,000395	0,010596
			C3	0,000300	0,011259	0,062924	0,148024	0,001362	0,019295	0,000395	0,010596
			C4	0,000300	0,011259	0,062924	0,148024	0,001362	0,019295	0,000395	0,010596
	DB8	RAZ1	C1	0,000305	0,011292	0,062422	0,147767	0,001379	0,019370	0,000439	0,010791
			C2	0,000305	0,011304	0,062422	0,147767	0,001380	0,019377	0,000447	0,011007
			C3	0,000305	0,011303	0,062422	0,147767	0,001375	0,019356	0,000445	0,010954
			C4	0,000306	0,011315	0,062422	0,147767	0,001385	0,019397	0,000461	0,011394
		RAZ3	C1	0,000300	0,011257	0,062422	0,147767	0,001356	0,019275	0,000445	0,011001
			C2	0,000300	0,011257	0,062422	0,147767	0,001356	0,019275	0,000445	0,011001
			C3	0,000300	0,011257	0,062422	0,147767	0,001356	0,019275	0,000445	0,011001
			C4	0,000300	0,011257	0,062422	0,147767	0,001356	0,019275	0,000445	0,011001
Função Núcleo			MM	0,001914	0,020448	0,950875	0,679425	0,035510	0,161699	0,000450	0,008997
			MMC	0,001916	0,020481	0,950900	0,679457	0,035535	0,161861	0,000457	0,009078
			Normal	0,000073	0,005605	0,025502	0,096325	0,000250	0,008486	0,000745	0,008410

Tabela B.4: Mediana dos Erros Integrados - Vol1-Vol4

Tabela Mediana				Vol1		Vol2		Vol3		Vol4		
Parte 1				EQI	EAI	EQI	EAI	EQI	EAI	EQI	EAI	
O N D A L E T A S	DB2	RAZ1	C1	0,000270	0,009196	0,043628	0,135312	0,000548	0,012997	0,000373	0,005005	
			C2	0,000267	0,009051	0,035339	0,116857	0,000539	0,012780	0,000374	0,005089	
			C3	0,000270	0,009188	0,037753	0,121924	0,000529	0,012593	0,000373	0,004967	
			C4	0,000242	0,007845	0,033917	0,111744	0,000541	0,012903	0,000378	0,005325	
		RAZ3	C1	0,000352	0,011488	0,106234	0,233163	0,000517	0,013422	0,000373	0,004656	
			C2	0,000351	0,011419	0,106234	0,233163	0,000517	0,013370	0,000374	0,004829	
			C3	0,000352	0,011468	0,106234	0,233163	0,000517	0,013370	0,000374	0,004826	
			C4	0,000330	0,010395	0,106234	0,233163	0,000517	0,013340	0,000375	0,004940	
	DB5	RAZ1	C1	0,000320	0,010278	0,063370	0,142746	0,001319	0,019272	0,000419	0,009817	
			C2	0,000320	0,010278	0,063370	0,142746	0,001319	0,019272	0,000419	0,009828	
			C3	0,000320	0,010278	0,063370	0,142746	0,001319	0,019272	0,000419	0,009826	
			C4	0,000320	0,010278	0,063370	0,142746	0,001319	0,019272	0,000419	0,009828	
		RAZ3	C1	0,000317	0,010269	0,063327	0,142721	0,001319	0,019272	0,000419	0,009803	
			C2	0,000317	0,010269	0,063327	0,142721	0,001319	0,019272	0,000419	0,009803	
			C3	0,000317	0,010269	0,063327	0,142721	0,001319	0,019272	0,000419	0,009803	
			C4	0,000317	0,010269	0,063327	0,142721	0,001319	0,019272	0,000419	0,009803	
	DB8	RAZ1	C1	0,000320	0,010346	0,063103	0,143466	0,001297	0,019221	0,000418	0,009871	
			C2	0,000320	0,010346	0,063103	0,143466	0,001297	0,019221	0,000418	0,009874	
			C3	0,000320	0,010346	0,063103	0,143466	0,001297	0,019221	0,000418	0,009874	
			C4	0,000320	0,010346	0,063103	0,143466	0,001297	0,019221	0,000419	0,009874	
		RAZ3	C1	0,000319	0,010332	0,063103	0,143466	0,001294	0,019195	0,000418	0,009828	
			C2	0,000319	0,010332	0,063103	0,143466	0,001294	0,019195	0,000418	0,009828	
			C3	0,000319	0,010332	0,063103	0,143466	0,001294	0,019195	0,000418	0,009828	
			C4	0,000319	0,010332	0,063103	0,143466	0,001294	0,019195	0,000418	0,009828	
	Função Núcleo			MM	0,002384	0,028721	1,083921	0,763057	0,035533	0,163453	0,000091	0,006884
				MMC	0,002382	0,028746	1,015966	0,745898	0,035570	0,163629	0,000089	0,006862
				Normal	0,000147	0,006203	0,032301	0,099561	0,000273	0,009454	0,001347	0,007740

Tabela B.5: Mediana dos Erros Integrados - Vol5-Vol8

Tabela Mediana Parte 2				Vol5		Vol6		Vol7		Vol8		
				EQI	EAI	EQI	EAI	EQI	EAI	EQI	EAI	
O N D A L E T A S	DB2	RAZÃO 1	C1	0,000158	0,007806	0,083097	0,208147	0,000451	0,011623	0,000329	0,007235	
			C2	0,000150	0,007576	0,052386	0,149995	0,000403	0,010524	0,000333	0,007207	
			C3	0,000155	0,007751	0,060101	0,163394	0,000396	0,010246	0,000359	0,007252	
			C4	0,000143	0,007240	0,038186	0,121290	0,000414	0,010471	0,000326	0,007407	
		RAZÃO 3	C1	0,000168	0,008368	0,190021	0,295113	0,000499	0,013748	0,001063	0,012465	
			C2	0,000165	0,008251	0,190021	0,295113	0,000486	0,013526	0,001063	0,012464	
			C3	0,000166	0,008271	0,190021	0,295113	0,000486	0,013526	0,001063	0,012464	
			C4	0,000162	0,008070	0,190021	0,295113	0,000481	0,013357	0,001063	0,012464	
	DB5	RAZÃO 1	C1	0,000289	0,011255	0,061827	0,146949	0,001324	0,019245	0,000371	0,010532	
			C2	0,000289	0,011255	0,061827	0,146949	0,001324	0,019245	0,000374	0,010653	
			C3	0,000289	0,011255	0,061827	0,146949	0,001324	0,019245	0,000373	0,010618	
			C4	0,000289	0,011255	0,061827	0,146949	0,001324	0,019245	0,000379	0,010780	
		RAZÃO 3	C1	0,000288	0,011246	0,061827	0,146949	0,001323	0,019245	0,000371	0,010548	
			C2	0,000288	0,011246	0,061827	0,146949	0,001323	0,019245	0,000371	0,010548	
			C3	0,000288	0,011246	0,061827	0,146949	0,001323	0,019245	0,000371	0,010548	
			C4	0,000288	0,011246	0,061827	0,146949	0,001323	0,019245	0,000371	0,010548	
	DB8	RAZÃO 1	C1	0,000293	0,011252	0,061354	0,147026	0,001319	0,019222	0,000407	0,010786	
			C2	0,000293	0,011252	0,061354	0,147026	0,001319	0,019222	0,000408	0,010931	
			C3	0,000293	0,011252	0,061354	0,147026	0,001319	0,019222	0,000408	0,010906	
			C4	0,000293	0,011252	0,061354	0,147026	0,001319	0,019222	0,000414	0,011203	
		RAZÃO 3	C1	0,000292	0,011240	0,061354	0,147026	0,001312	0,019200	0,000423	0,010953	
			C2	0,000292	0,011240	0,061354	0,147026	0,001312	0,019200	0,000423	0,010953	
			C3	0,000292	0,011240	0,061354	0,147026	0,001312	0,019200	0,000423	0,010953	
			C4	0,000292	0,011240	0,061354	0,147026	0,001312	0,019200	0,000423	0,010953	
	Função Núcleo			MM	0,001898	0,020510	0,950139	0,679709	0,035731	0,163177	0,000410	0,009287
				MMC	0,001906	0,020565	0,950113	0,679890	0,035729	0,163322	0,000431	0,009362
				Normal	0,000068	0,005563	0,024979	0,095630	0,000230	0,008364	0,000741	0,008384

Tabela B.6: Média dos Erros Quadráticos Integrados - Vol1-Vol2

Tabela Média EQI				Vol1			Vol2		
Parte 1				Quant0	Quant50	Quant100	Quant0	Quant50	Quant100
O N D A L E T A S	DB2	RAZÃO 1	C1	0,000168	0,000227	0,000241	0,024634	0,035657	0,041380
			C2	0,000172	0,000228	0,000240	0,021284	0,032370	0,035687
			C3	0,000164	0,000224	0,000238	0,020444	0,032551	0,037393
			C4	0,000181	0,000231	0,000241	0,022252	0,033547	0,035068
		RAZÃO 3	C1	0,000200	0,000294	0,000350	0,042182	0,059808	0,072024
			C2	0,000208	0,000298	0,000352	0,041256	0,058914	0,070346
			C3	0,000208	0,000298	0,000352	0,041203	0,059152	0,071013
			C4	0,000214	0,000303	0,000355	0,041274	0,059013	0,069889
	DB5	RAZÃO 1	C1	0,000264	0,000285	0,000287	0,056197	0,063968	0,064147
			C2	0,000264	0,000285	0,000288	0,056215	0,063987	0,064165
			C3	0,000264	0,000285	0,000287	0,056215	0,063987	0,064165
			C4	0,000264	0,000285	0,000288	0,056224	0,063999	0,064177
		RAZÃO 3	C1	0,000257	0,000278	0,000281	0,056019	0,063789	0,063966
			C2	0,000257	0,000278	0,000281	0,056019	0,063789	0,063966
			C3	0,000257	0,000278	0,000281	0,056019	0,063789	0,063966
			C4	0,000257	0,000278	0,000281	0,056019	0,063789	0,063966
	DB8	RAZÃO 1	C1	0,000261	0,000286	0,000289	0,056270	0,063721	0,063894
			C2	0,000261	0,000287	0,000289	0,056273	0,063724	0,063898
			C3	0,000261	0,000287	0,000289	0,056272	0,063724	0,063897
			C4	0,000261	0,000287	0,000290	0,056276	0,063728	0,063901
		RAZÃO 3	C1	0,000255	0,000281	0,000284	0,056224	0,063674	0,063848
			C2	0,000255	0,000281	0,000284	0,056224	0,063674	0,063848
			C3	0,000255	0,000281	0,000284	0,056224	0,063674	0,063848
			C4	0,000255	0,000281	0,000284	0,056224	0,063674	0,063848
Função Núcleo		MM	0,000249	0,000335	0,000350	0,047148	0,070416	0,072778	
		MMC	0,000241	0,000321	0,000338	0,052031	0,087954	0,100654	
		Normal	0,000088	0,000137	0,000141	0,016660	0,029329	0,032472	

Tabela B.7: Média dos Erros Quadráticos Integrados - Vol3-Vol4

Tabela Média EQI Parte 2				Vol3			Vol4		
				Quant0	Quant50	Quant100	Quant0	Quant50	Quant100
O N D A L E T A S	DB2	RAZÃO 1	C1	0,000091	0,000136	0,000166	0,000356	0,000369	0,000371
			C2	0,000088	0,000129	0,000156	0,000355	0,000368	0,000370
			C3	0,000087	0,000127	0,000154	0,000354	0,000367	0,000369
			C4	0,000087	0,000126	0,000153	0,000358	0,000373	0,000376
		RAZÃO 3	C1	0,000076	0,000131	0,000168	0,000353	0,000355	0,000357
			C2	0,000077	0,000131	0,000167	0,000353	0,000355	0,000357
			C3	0,000077	0,000131	0,000167	0,000353	0,000355	0,000357
			C4	0,000077	0,000130	0,000166	0,000352	0,000355	0,000357
	DB5	RAZÃO 1	C1	0,000127	0,000173	0,000221	0,000310	0,000356	0,000362
			C2	0,000127	0,000173	0,000221	0,000310	0,000356	0,000362
			C3	0,000127	0,000173	0,000221	0,000310	0,000356	0,000362
			C4	0,000127	0,000173	0,000221	0,000311	0,000357	0,000363
		RAZÃO 3	C1	0,000127	0,000173	0,000221	0,000313	0,000346	0,000351
			C2	0,000127	0,000173	0,000221	0,000313	0,000346	0,000351
			C3	0,000127	0,000173	0,000221	0,000313	0,000346	0,000351
			C4	0,000127	0,000173	0,000221	0,000313	0,000346	0,000351
	DB8	RAZÃO 1	C1	0,000129	0,000176	0,000225	0,000308	0,000350	0,000357
			C2	0,000129	0,000176	0,000225	0,000308	0,000351	0,000357
			C3	0,000129	0,000176	0,000225	0,000308	0,000350	0,000357
			C4	0,000130	0,000177	0,000227	0,000309	0,000352	0,000359
		RAZÃO 3	C1	0,000128	0,000174	0,000223	0,000301	0,000344	0,000350
			C2	0,000128	0,000174	0,000223	0,000301	0,000344	0,000350
			C3	0,000128	0,000174	0,000223	0,000301	0,000344	0,000350
			C4	0,000128	0,000174	0,000223	0,000301	0,000344	0,000350
Função Núcleo			MM	0,000106	0,000164	0,000197	0,001417	0,001459	0,001465
			MMC	0,000103	0,000157	0,000189	0,001393	0,001431	0,001437
			Normal	0,000059	0,000076	0,000085	0,001319	0,001327	0,001329

Tabela B.8: Média dos Erros Quadráticos Integrados - Vol5-Vol6

Tab.Média EQI				Vol5			Vol6		
Parte 3				Quant0	Quant50	Quant100	Quant0	Quant50	Quant100
O N D A L E T A S	DB2	RAZÃO 1	C1	0,000126	0,000141	0,000149	0,056541	0,063975	0,067467
			C2	0,000118	0,000130	0,000136	0,040123	0,048443	0,050515
			C3	0,000118	0,000130	0,000139	0,041552	0,053624	0,057716
			C4	0,000115	0,000126	0,000132	0,034977	0,039887	0,039992
		RAZÃO 3	C1	0,000112	0,000145	0,000162	0,145329	0,158127	0,165910
			C2	0,000109	0,000139	0,000154	0,144502	0,157320	0,165036
			C3	0,000109	0,000139	0,000154	0,144771	0,157768	0,165613
			C4	0,000108	0,000138	0,000153	0,143507	0,156182	0,163781
	DB5	RAZÃO 1	C1	0,000211	0,000214	0,000217	0,061530	0,062872	0,062914
			C2	0,000211	0,000214	0,000217	0,061530	0,062872	0,062914
			C3	0,000211	0,000214	0,000217	0,061530	0,062872	0,062914
			C4	0,000211	0,000214	0,000217	0,061530	0,062872	0,062914
		RAZÃO 3	C1	0,000207	0,000210	0,000213	0,061530	0,062872	0,062914
			C2	0,000207	0,000210	0,000213	0,061530	0,062872	0,062914
			C3	0,000207	0,000210	0,000213	0,061530	0,062872	0,062914
			C4	0,000207	0,000210	0,000213	0,061530	0,062872	0,062914
	DB8	RAZÃO 1	C1	0,000212	0,000215	0,000218	0,061117	0,062313	0,062399
			C2	0,000212	0,000215	0,000218	0,061117	0,062313	0,062399
			C3	0,000212	0,000215	0,000218	0,061117	0,062313	0,062399
			C4	0,000212	0,000215	0,000218	0,061117	0,062313	0,062399
		RAZÃO 3	C1	0,000207	0,000210	0,000213	0,061117	0,062313	0,062399
			C2	0,000207	0,000210	0,000213	0,061117	0,062313	0,062399
			C3	0,000207	0,000210	0,000213	0,061117	0,062313	0,062399
			C4	0,000207	0,000210	0,000213	0,061117	0,062313	0,062399
Função Núcleo			MM	0,000183	0,000201	0,000207	0,053513	0,063653	0,063675
			MMC	0,000179	0,000198	0,000204	0,051080	0,059332	0,059355
			Normal	0,000047	0,000054	0,000055	0,017451	0,024999	0,025487

Tabela B.9: Média dos Erros Quadráticos Integrados - Vol7 - Vol8

Tabela Média EQI Parte 4				Vol7			Vol8		
				Quant0	Quant50	Quant100	Quant0	Quant50	Quant100
O N D A L E T A S	DB2	RAZÃO 1	C1	0,000085	0,000105	0,000122	0,000359	0,000378	0,000385
			C2	0,000056	0,000073	0,000088	0,000365	0,000387	0,000394
			C3	0,000054	0,000069	0,000083	0,000383	0,000407	0,000412
			C4	0,000051	0,000068	0,000084	0,000351	0,000364	0,000371
		RAZÃO 3	C1	0,000122	0,000155	0,000178	0,000811	0,000823	0,000835
			C2	0,000113	0,000145	0,000167	0,000811	0,000824	0,000835
			C3	0,000113	0,000145	0,000167	0,000813	0,000826	0,000837
			C4	0,000110	0,000142	0,000163	0,000810	0,000822	0,000833
	DB5	RAZÃO 1	C1	0,000153	0,000200	0,000247	0,000308	0,000323	0,000328
			C2	0,000153	0,000200	0,000248	0,000308	0,000323	0,000329
			C3	0,000153	0,000200	0,000248	0,000308	0,000323	0,000328
			C4	0,000153	0,000200	0,000248	0,000308	0,000324	0,000330
		RAZÃO 3	C1	0,000153	0,000199	0,000247	0,000272	0,000290	0,000295
			C2	0,000153	0,000199	0,000247	0,000272	0,000290	0,000295
			C3	0,000153	0,000199	0,000247	0,000272	0,000290	0,000295
			C4	0,000153	0,000199	0,000247	0,000272	0,000290	0,000295
	DB8	RAZÃO 1	C1	0,000154	0,000202	0,000252	0,000303	0,000322	0,000328
			C2	0,000154	0,000202	0,000253	0,000304	0,000322	0,000329
			C3	0,000154	0,000201	0,000252	0,000303	0,000322	0,000329
			C4	0,000155	0,000203	0,000254	0,000304	0,000322	0,000330
		RAZÃO 3	C1	0,000153	0,000200	0,000250	0,000306	0,000329	0,000335
			C2	0,000153	0,000200	0,000250	0,000306	0,000329	0,000335
			C3	0,000153	0,000200	0,000250	0,000306	0,000329	0,000335
			C4	0,000153	0,000200	0,000250	0,000306	0,000329	0,000335
Função Núcleo			MM	0,000105	0,000132	0,000161	0,000889	0,000968	0,000983
			MMC	0,000107	0,000134	0,000162	0,000827	0,000887	0,000901
			Normal	0,000028	0,000037	0,000047	0,000685	0,000723	0,000727

Tabela B.10: Mediana dos Erros Quadráticos Integrados - Vol1-Vol2

Tabela Mediana EQI				Vol1			Vol2		
Parte 1				Quant0	Quant50	Quant100	Quant0	Quant50	Quant100
O N D A L E T A S	DB2	RAZÃO 1	C1	0,000123	0,000189	0,000211	0,021533	0,032525	0,038372
			C2	0,000137	0,000193	0,000211	0,019431	0,030326	0,033700
			C3	0,000133	0,000192	0,000211	0,019150	0,031004	0,035824
			C4	0,000141	0,000193	0,000212	0,019678	0,031084	0,032651
		RAZÃO 3	C1	0,000164	0,000233	0,000261	0,047989	0,068090	0,083591
			C2	0,000186	0,000241	0,000266	0,047914	0,068090	0,083591
			C3	0,000186	0,000242	0,000267	0,047914	0,068090	0,083591
			C4	0,000190	0,000248	0,000272	0,047914	0,068090	0,083591
	DB5	RAZÃO 1	C1	0,000245	0,000265	0,000267	0,055291	0,062888	0,063028
			C2	0,000245	0,000265	0,000267	0,055291	0,062888	0,063028
			C3	0,000245	0,000265	0,000267	0,055291	0,062888	0,063028
			C4	0,000245	0,000265	0,000267	0,055291	0,062888	0,063028
		RAZÃO 3	C1	0,000242	0,000264	0,000266	0,055203	0,062870	0,062993
			C2	0,000242	0,000264	0,000266	0,055203	0,062870	0,062993
			C3	0,000242	0,000264	0,000266	0,055203	0,062870	0,062993
			C4	0,000242	0,000264	0,000266	0,055203	0,062870	0,062993
	DB8	RAZÃO 1	C1	0,000243	0,000267	0,000270	0,055356	0,062765	0,062943
			C2	0,000243	0,000267	0,000270	0,055356	0,062765	0,062943
			C3	0,000243	0,000267	0,000270	0,055356	0,062765	0,062943
			C4	0,000243	0,000267	0,000270	0,055356	0,062765	0,062943
		RAZÃO 3	C1	0,000243	0,000267	0,000270	0,055356	0,062765	0,062943
			C2	0,000243	0,000267	0,000270	0,055356	0,062765	0,062943
			C3	0,000243	0,000267	0,000270	0,055356	0,062765	0,062943
			C4	0,000243	0,000267	0,000270	0,055356	0,062765	0,062943
Função Núcleo			MM	0,000238	0,000316	0,000321	0,046375	0,069704	0,072220
			MMC	0,000230	0,000300	0,000305	0,051611	0,089524	0,104547
			Normal	0,000083	0,000131	0,000135	0,016410	0,029063	0,032176

Tabela B.11: Mediana dos Erros Quadráticos Integrados - Vol3-Vol4

Tabela Mediana EQI				Vol3			Vol4		
Parte 2				Quant0	Quant50	Quant100	Quant0	Quant50	Quant100
O N D A L E T A S	DB2	RAZÃO 1	C1	0,000078	0,000125	0,000156	0,000353	0,000355	0,000356
			C2	0,000075	0,000120	0,000148	0,000352	0,000354	0,000356
			C3	0,000075	0,000118	0,000145	0,000352	0,000354	0,000356
			C4	0,000074	0,000115	0,000140	0,000351	0,000354	0,000356
		RAZÃO 3	C1	0,000065	0,000127	0,000166	0,000353	0,000355	0,000356
			C2	0,000065	0,000126	0,000165	0,000353	0,000354	0,000356
			C3	0,000065	0,000126	0,000165	0,000353	0,000354	0,000356
			C4	0,000066	0,000126	0,000165	0,000352	0,000354	0,000356
	DB5	RAZÃO 1	C1	0,000118	0,000162	0,000202	0,000306	0,000334	0,000339
			C2	0,000118	0,000162	0,000202	0,000306	0,000334	0,000339
			C3	0,000118	0,000162	0,000202	0,000306	0,000334	0,000339
			C4	0,000118	0,000162	0,000202	0,000306	0,000334	0,000340
		RAZÃO 3	C1	0,000118	0,000162	0,000202	0,000307	0,000334	0,000340
			C2	0,000118	0,000162	0,000202	0,000307	0,000334	0,000340
			C3	0,000118	0,000162	0,000202	0,000307	0,000334	0,000340
			C4	0,000118	0,000162	0,000202	0,000307	0,000334	0,000340
	DB8	RAZÃO 1	C1	0,000118	0,000163	0,000207	0,000298	0,000332	0,000338
			C2	0,000118	0,000163	0,000207	0,000298	0,000332	0,000338
			C3	0,000118	0,000163	0,000207	0,000298	0,000332	0,000338
			C4	0,000118	0,000163	0,000207	0,000298	0,000332	0,000338
		RAZÃO 3	C1	0,000117	0,000162	0,000206	0,000297	0,000332	0,000339
			C2	0,000117	0,000162	0,000206	0,000297	0,000332	0,000339
			C3	0,000117	0,000162	0,000206	0,000297	0,000332	0,000339
			C4	0,000117	0,000162	0,000206	0,000297	0,000332	0,000339
Função Núcleo			MM	0,000100	0,000157	0,000184	0,001418	0,001449	0,001454
			MMC	0,000098	0,000153	0,000178	0,001400	0,001428	0,001434
			Normal	0,000052	0,000071	0,000078	0,001324	0,001329	0,001331

Tabela B.12: Mediana dos Erros Quadráticos Integrados - Vol5-Vol6

Tab.Mediana EQI Parte 3				Vol5			Vol6		
				Quant0	Quant50	Quant100	Quant0	Quant50	Quant100
O N D A L E T A S	DB2	RAZÃO 1	C1	0,000094	0,000110	0,000116	0,055464	0,062740	0,066004
			C2	0,000088	0,000103	0,000109	0,038408	0,046635	0,048508
			C3	0,000091	0,000105	0,000113	0,040714	0,052768	0,057072
			C4	0,000085	0,000100	0,000106	0,033330	0,037881	0,037945
		RAZÃO 3	C1	0,000088	0,000113	0,000121	0,153032	0,166433	0,174828
			C2	0,000086	0,000109	0,000116	0,153032	0,166433	0,174828
			C3	0,000087	0,000109	0,000117	0,153032	0,166433	0,174828
			C4	0,000086	0,000109	0,000117	0,153032	0,166433	0,174828
	DB5	RAZÃO 1	C1	0,000196	0,000200	0,000202	0,060327	0,061785	0,061813
			C2	0,000196	0,000200	0,000202	0,060327	0,061785	0,061813
			C3	0,000196	0,000200	0,000202	0,060327	0,061785	0,061813
			C4	0,000196	0,000200	0,000202	0,060327	0,061785	0,061813
		RAZÃO 3	C1	0,000195	0,000198	0,000201	0,060327	0,061785	0,061813
			C2	0,000195	0,000198	0,000201	0,060327	0,061785	0,061813
			C3	0,000195	0,000198	0,000201	0,060327	0,061785	0,061813
			C4	0,000195	0,000198	0,000201	0,060327	0,061785	0,061813
	DB8	RAZÃO 1	C1	0,000195	0,000199	0,000202	0,059964	0,061246	0,061313
			C2	0,000195	0,000199	0,000202	0,059964	0,061246	0,061313
			C3	0,000195	0,000199	0,000202	0,059964	0,061246	0,061313
			C4	0,000195	0,000199	0,000202	0,059964	0,061246	0,061313
		RAZÃO 3	C1	0,000195	0,000198	0,000201	0,059964	0,061246	0,061313
			C2	0,000195	0,000198	0,000201	0,059964	0,061246	0,061313
			C3	0,000195	0,000198	0,000201	0,059964	0,061246	0,061313
			C4	0,000195	0,000198	0,000201	0,059964	0,061246	0,061313
Função Núcleo		MM	0,000173	0,000186	0,000189	0,052721	0,062973	0,062993	
		MMC	0,000168	0,000180	0,000182	0,050278	0,058597	0,058619	
		Normal	0,000043	0,000049	0,000050	0,016916	0,024479	0,024963	

Tabela B.13: Mediana dos Erros Quadráticos Integrados - Vol7-Vol8

Tabela Mediana EQI				Vol7			Vol8		
Parte 4				Quant0	Quant50	Quant100	Quant0	Quant50	Quant100
O N D A L E T A S	DB2	RAZÃO 1	C1	0,000073	0,000080	0,000088	0,000276	0,000293	0,000298
			C2	0,000031	0,000042	0,000054	0,000284	0,000301	0,000305
			C3	0,000029	0,000037	0,000050	0,000306	0,000327	0,000329
			C4	0,000029	0,000036	0,000047	0,000268	0,000278	0,000285
		RAZÃO 3	C1	0,000130	0,000175	0,000201	0,000863	0,000875	0,000887
			C2	0,000129	0,000173	0,000198	0,000863	0,000875	0,000887
			C3	0,000129	0,000173	0,000198	0,000863	0,000875	0,000887
			C4	0,000129	0,000172	0,000198	0,000863	0,000875	0,000887
	DB5	RAZÃO 1	C1	0,000136	0,000182	0,000227	0,000250	0,000265	0,000271
			C2	0,000136	0,000182	0,000227	0,000249	0,000265	0,000271
			C3	0,000136	0,000182	0,000227	0,000249	0,000265	0,000270
			C4	0,000136	0,000182	0,000227	0,000249	0,000265	0,000272
		RAZÃO 3	C1	0,000136	0,000182	0,000227	0,000248	0,000265	0,000271
			C2	0,000136	0,000182	0,000227	0,000248	0,000265	0,000271
			C3	0,000136	0,000182	0,000227	0,000248	0,000265	0,000271
			C4	0,000136	0,000182	0,000227	0,000248	0,000265	0,000271
	DB8	RAZÃO 1	C1	0,000136	0,000180	0,000228	0,000270	0,000290	0,000297
			C2	0,000136	0,000180	0,000228	0,000270	0,000290	0,000298
			C3	0,000136	0,000180	0,000228	0,000270	0,000290	0,000297
			C4	0,000136	0,000180	0,000228	0,000271	0,000290	0,000298
		RAZÃO 3	C1	0,000135	0,000180	0,000227	0,000284	0,000307	0,000313
			C2	0,000135	0,000180	0,000227	0,000284	0,000307	0,000313
			C3	0,000135	0,000180	0,000227	0,000284	0,000307	0,000313
			C4	0,000135	0,000180	0,000227	0,000284	0,000307	0,000313
Função Núcleo			MM	0,000094	0,000117	0,000144	0,000866	0,000930	0,000951
			MMC	0,000093	0,000120	0,000148	0,000826	0,000880	0,000899
			Normal	0,000022	0,000030	0,000037	0,000681	0,000718	0,000722

Tabela B.14: Média dos Erros Absolutos Integrados - Vol1-Vol2

Tabela Média EAI				Vol1			Vol2		
Parte 1				Quant0	Quant50	Quant100	Quant0	Quant50	Quant100
O N D A L E T A S	DB2	RAZÃO 1	C1	0,003661	0,004684	0,005126	0,077812	0,097602	0,109309
			C2	0,003725	0,004712	0,005129	0,070453	0,090532	0,099784
			C3	0,003636	0,004693	0,005154	0,069322	0,090459	0,102559
			C4	0,003846	0,004782	0,005146	0,072120	0,092016	0,097929
		RAZÃO 3	C1	0,004164	0,005636	0,006718	0,101866	0,129429	0,151395
			C2	0,004271	0,005710	0,006767	0,099765	0,127410	0,148578
			C3	0,004270	0,005711	0,006770	0,099684	0,127597	0,149559
			C4	0,004351	0,005777	0,006829	0,099801	0,127431	0,147558
	DB5	RAZÃO 1	C1	0,004946	0,005431	0,005617	0,122450	0,136209	0,138212
			C2	0,004947	0,005432	0,005618	0,122465	0,136224	0,138226
			C3	0,004947	0,005431	0,005617	0,122465	0,136224	0,138226
			C4	0,004949	0,005433	0,005619	0,122476	0,136237	0,138238
		RAZÃO 3	C1	0,004905	0,005391	0,005577	0,122299	0,136055	0,138057
			C2	0,004905	0,005391	0,005577	0,122299	0,136055	0,138057
			C3	0,004905	0,005391	0,005577	0,122299	0,136055	0,138057
			C4	0,004905	0,005391	0,005577	0,122299	0,136055	0,138057
	DB8	RAZÃO 1	C1	0,004928	0,005470	0,005676	0,122650	0,136208	0,138346
			C2	0,004930	0,005471	0,005677	0,122654	0,136212	0,138350
			C3	0,004929	0,005471	0,005677	0,122653	0,136211	0,138349
			C4	0,004930	0,005471	0,005677	0,122655	0,136213	0,138351
		RAZÃO 3	C1	0,004891	0,005433	0,005639	0,122606	0,136162	0,138300
			C2	0,004891	0,005433	0,005639	0,122606	0,136162	0,138300
			C3	0,004891	0,005433	0,005639	0,122606	0,136162	0,138300
			C4	0,004891	0,005433	0,005639	0,122606	0,136162	0,138300
Função Núcleo			MM	0,004453	0,005376	0,005686	0,107761	0,130340	0,134166
			MMC	0,004400	0,005275	0,005601	0,099036	0,130691	0,144715
			Normal	0,002777	0,003790	0,004054	0,063504	0,086472	0,096512

Tabela B.15: Média dos Erros Absolutos Integrados - Vol3-Vol4

Tabela Média EAI				Vol3			Vol4		
Parte 2				Quant0	Quant50	Quant100	Quant0	Quant50	Quant100
O N D A L E T A S	DB2	RAZÃO 1	C1	0,002818	0,003632	0,004197	0,001943	0,002271	0,002479
			C2	0,002773	0,003546	0,004090	0,001928	0,002267	0,002485
			C3	0,002758	0,003531	0,004078	0,001903	0,002232	0,002443
			C4	0,002749	0,003493	0,004036	0,002045	0,002429	0,002692
		RAZÃO 3	C1	0,002618	0,003571	0,004265	0,001812	0,002029	0,002231
			C2	0,002626	0,003570	0,004258	0,001820	0,002058	0,002281
			C3	0,002626	0,003570	0,004258	0,001821	0,002058	0,002281
			C4	0,002626	0,003566	0,004250	0,001828	0,002080	0,002317
	DB5	RAZÃO 1	C1	0,003093	0,003748	0,004379	0,002895	0,003634	0,004051
			C2	0,003093	0,003748	0,004379	0,002905	0,003646	0,004066
			C3	0,003093	0,003748	0,004379	0,002900	0,003640	0,004059
			C4	0,003094	0,003748	0,004379	0,002924	0,003668	0,004094
		RAZÃO 3	C1	0,003092	0,003747	0,004378	0,002911	0,003634	0,004051
			C2	0,003092	0,003747	0,004378	0,002911	0,003634	0,004051
			C3	0,003092	0,003747	0,004378	0,002911	0,003634	0,004051
			C4	0,003092	0,003747	0,004378	0,002911	0,003634	0,004051
	DB8	RAZÃO 1	C1	0,003102	0,003764	0,004406	0,002852	0,003670	0,004106
			C2	0,003105	0,003767	0,004409	0,002861	0,003682	0,004120
			C3	0,003104	0,003765	0,004407	0,002856	0,003674	0,004111
			C4	0,003110	0,003772	0,004416	0,002884	0,003709	0,004155
		RAZÃO 3	C1	0,003097	0,003754	0,004393	0,002834	0,003666	0,004103
			C2	0,003097	0,003754	0,004393	0,002834	0,003666	0,004103
			C3	0,003097	0,003754	0,004393	0,002834	0,003666	0,004103
			C4	0,003097	0,003754	0,004393	0,002834	0,003666	0,004103
Função Núcleo			MM	0,002950	0,003695	0,004243	0,004794	0,005689	0,006053
			MMC	0,002910	0,003630	0,004174	0,004748	0,005590	0,005958
			Normal	0,002205	0,002703	0,003018	0,004489	0,004900	0,005155

Tabela B.16: Média dos Erros Absolutos Integrados - Vol5-Vol6

Tab.Média EAI				Vol5			Vol6		
Parte 3				Quant0	Quant50	Quant100	Quant0	Quant50	Quant100
O N D A L E T A S	DB2	RAZÃO 1	C1	0,003314	0,003794	0,004161	0,135260	0,149517	0,158893
			C2	0,003206	0,003658	0,004006	0,109020	0,123622	0,129968
			C3	0,003233	0,003713	0,004102	0,111237	0,130572	0,140927
			C4	0,003136	0,003575	0,003865	0,101356	0,111114	0,112887
		RAZÃO 3	C1	0,003321	0,004139	0,004665	0,201535	0,221634	0,237687
			C2	0,003258	0,004044	0,004546	0,220006	0,220066	0,235938
			C3	0,003264	0,004054	0,004556	0,200301	0,220565	0,236642
			C4	0,003238	0,004029	0,004534	0,198451	0,218303	0,233900
	DB5	RAZÃO 1	C1	0,004326	0,004541	0,004742	0,139011	0,143670	0,144722
			C2	0,004327	0,004542	0,004744	0,139011	0,143670	0,144722
			C3	0,004327	0,004542	0,004744	0,139011	0,143670	0,144722
			C4	0,004328	0,004543	0,004745	0,139011	0,143670	0,144722
		RAZÃO 3	C1	0,004296	0,004511	0,004712	0,139011	0,143670	0,144722
			C2	0,004296	0,004511	0,004712	0,139011	0,143670	0,144722
			C3	0,004296	0,004511	0,004712	0,139011	0,143670	0,144722
			C4	0,004296	0,004511	0,004712	0,139011	0,143670	0,144722
	DB8	RAZÃO 1	C1	0,004329	0,004547	0,004752	0,138482	0,142883	0,144373
			C2	0,004331	0,004549	0,004754	0,138482	0,142883	0,144373
			C3	0,004331	0,004549	0,004754	0,138482	0,142883	0,144373
			C4	0,004332	0,004550	0,004755	0,138482	0,142883	0,144373
		RAZÃO 3	C1	0,004297	0,004515	0,004720	0,138482	0,142883	0,144373
			C2	0,004297	0,004515	0,004720	0,138482	0,142883	0,144373
			C3	0,004297	0,004515	0,004720	0,138482	0,142883	0,144373
			C4	0,004297	0,004515	0,004720	0,138482	0,142883	0,144373
Função Núcleo		MM	0,004185	0,004597	0,004840	0,125845	0,138581	0,139306	
		MMC	0,004140	0,004537	0,004779	0,123944	0,135070	0,135769	
		Normal	0,002165	0,002529	0,002645	0,072324	0,090311	0,094546	

Tabela B.17: Média dos Erros Absolutos Integrados - Vol7-Vol8

Tabela Média EAI				Vol7			Vol8		
Parte 4				Quant0	Quant50	Quant100	Quant0	Quant50	Quant100
O N D A L E T A S	DB2	RAZÃO 1	C1	0,002798	0,003262	0,003670	0,002432	0,003136	0,003580
			C2	0,002022	0,002454	0,002837	0,002486	0,003249	0,003647
			C3	0,001989	0,002411	0,002781	0,002602	0,003380	0,003730
			C4	0,001845	0,002274	0,002659	0,002377	0,002969	0,003393
		RAZÃO 3	C1	0,003690	0,004364	0,004898	0,003381	0,004090	0,004758
			C2	0,003413	0,004080	0,004608	0,003385	0,004104	0,004766
			C3	0,003414	0,004081	0,004609	0,003395	0,004114	0,004774
			C4	0,003322	0,003986	0,004512	0,003379	0,004073	0,004739
	DB5	RAZÃO 1	C1	0,003122	0,003746	0,004376	0,002327	0,002987	0,003399
			C2	0,003122	0,003746	0,004376	0,002325	0,002984	0,003403
			C3	0,003122	0,003746	0,004376	0,002326	0,002984	0,003400
			C4	0,003123	0,003746	0,004376	0,002324	0,002990	0,003425
		RAZÃO 3	C1	0,003120	0,003743	0,004373	0,002384	0,003103	0,003511
			C2	0,003120	0,003743	0,004373	0,002384	0,003103	0,003511
			C3	0,003120	0,003743	0,004373	0,002384	0,003103	0,003511
			C4	0,003120	0,003743	0,004373	0,002384	0,003103	0,003511
	DB8	RAZÃO 1	C1	0,003133	0,003762	0,004408	0,002375	0,003125	0,003577
			C2	0,003135	0,003764	0,004410	0,002371	0,003108	0,003569
			C3	0,003133	0,003761	0,004406	0,002372	0,003111	0,003570
			C4	0,003140	0,003771	0,004417	0,002369	0,003105	0,003581
		RAZÃO 3	C1	0,003127	0,003753	0,004395	0,002596	0,003442	0,003894
			C2	0,003127	0,003753	0,004395	0,002596	0,003442	0,003894
			C3	0,003127	0,003753	0,004395	0,002596	0,003442	0,003894
			C4	0,003127	0,003753	0,004395	0,002596	0,003442	0,003894
Função Núcleo			MM	0,002862	0,003339	0,003836	0,004249	0,005339	0,005849
			MMC	0,002876	0,003357	0,003851	0,004123	0,005074	0,005574
			Normal	0,001402	0,001700	0,001995	0,003701	0,004905	0,005235

Tabela B.18: Mediana dos Erros Absolutos Integrados - Vol1-Vol2

Tabela Mediana EAI				Vol1			Vol2		
Parte 1				Quant0	Quant50	Quant100	Quant0	Quant50	Quant100
O N D A L E T A S	DB2	RAZÃO 1	C1	0,003396	0,004474	0,004973	0,074735	0,094603	0,106559
			C2	0,003579	0,004551	0,005012	0,069015	0,089068	0,098364
			C3	0,003471	0,004524	0,005001	0,068704	0,089457	0,101894
			C4	0,003679	0,004624	0,005034	0,069558	0,089733	0,095819
		RAZÃO 3	C1	0,004117	0,005371	0,006154	0,108103	0,138814	0,165603
			C2	0,004217	0,005441	0,006196	0,107997	0,138778	0,165603
			C3	0,004239	0,005447	0,006212	0,107997	0,138778	0,165603
			C4	0,004253	0,005516	0,006270	0,107997	0,138778	0,165603
	DB5	RAZÃO 1	C1	0,004892	0,005345	0,005541	0,122225	0,136363	0,138363
			C2	0,004892	0,005345	0,005541	0,122225	0,136363	0,138363
			C3	0,004892	0,005345	0,005541	0,122225	0,136363	0,138363
			C4	0,004892	0,005345	0,005541	0,122225	0,136363	0,138363
		RAZÃO 3	C1	0,004873	0,005326	0,005514	0,122210	0,136343	0,138348
			C2	0,004873	0,005326	0,005514	0,122210	0,136343	0,138348
			C3	0,004873	0,005326	0,005514	0,122210	0,136343	0,138348
			C4	0,004873	0,005326	0,005514	0,122210	0,136343	0,138348
	DB8	RAZÃO 1	C1	0,004870	0,005411	0,005584	0,123142	0,136487	0,138699
			C2	0,004870	0,005411	0,005584	0,123142	0,136487	0,138699
			C3	0,004870	0,005411	0,005584	0,123142	0,136487	0,138699
			C4	0,004870	0,005411	0,005584	0,123142	0,136487	0,138699
		RAZÃO 3	C1	0,004862	0,005387	0,005571	0,123142	0,136487	0,138699
			C2	0,004862	0,005387	0,005571	0,123142	0,136487	0,138699
			C3	0,004862	0,005387	0,005571	0,123142	0,136487	0,138699
			C4	0,004862	0,005387	0,005571	0,123142	0,136487	0,138699
Função Núcleo			MM	0,004394	0,005306	0,005543	0,107976	0,130633	0,134436
			MMC	0,004347	0,005203	0,005455	0,098698	0,129915	0,143945
			Normal	0,002705	0,003730	0,003991	0,063071	0,086116	0,095919

Tabela B.19: Mediana dos Erros Absolutos Integrados - Vol3-Vol4

Tabela Mediana EAI				Vol3			Vol4		
Parte 2				Quant0	Quant50	Quant100	Quant0	Quant50	Quant100
O N D A L E T A S	DB2	RAZÃO 1	C1	0,002701	0,003536	0,004130	0,001881	0,002138	0,002351
			C2	0,002676	0,003479	0,004031	0,001877	0,002149	0,002376
			C3	0,002659	0,003473	0,004023	0,001858	0,002124	0,002343
			C4	0,002652	0,003420	0,003971	0,001913	0,002204	0,002461
		RAZÃO 3	C1	0,002460	0,003491	0,004226	0,001778	0,001989	0,002175
			C2	0,002466	0,003491	0,004215	0,001774	0,002009	0,002223
			C3	0,002466	0,003491	0,004215	0,001774	0,002009	0,002223
			C4	0,002472	0,003489	0,004214	0,001780	0,002032	0,002256
	DB5	RAZÃO 1	C1	0,003067	0,003717	0,004330	0,002869	0,003600	0,003994
			C2	0,003067	0,003717	0,004330	0,002879	0,003604	0,004011
			C3	0,003067	0,003717	0,004330	0,002878	0,003604	0,004005
			C4	0,003067	0,003717	0,004330	0,002887	0,003609	0,004022
		RAZÃO 3	C1	0,003066	0,003716	0,004330	0,002880	0,003596	0,003992
			C2	0,003066	0,003716	0,004330	0,002880	0,003596	0,003992
			C3	0,003066	0,003716	0,004330	0,002880	0,003596	0,003992
			C4	0,003066	0,003716	0,004330	0,002880	0,003596	0,003992
	DB8	RAZÃO 1	C1	0,003067	0,003733	0,004350	0,002818	0,003622	0,004047
			C2	0,003067	0,003733	0,004350	0,002820	0,003627	0,004055
			C3	0,003067	0,003733	0,004350	0,002817	0,003621	0,004053
			C4	0,003069	0,003733	0,004350	0,002825	0,003636	0,004060
		RAZÃO 3	C1	0,003065	0,003726	0,004346	0,002804	0,003616	0,004034
			C2	0,003065	0,003726	0,004346	0,002804	0,003616	0,004034
			C3	0,003065	0,003726	0,004346	0,002804	0,003616	0,004034
			C4	0,003065	0,003726	0,004346	0,002804	0,003616	0,004034
Função Núcleo			MM	0,002900	0,003625	0,004164	0,004831	0,005735	0,006087
			MMC	0,002864	0,003580	0,004089	0,004773	0,005644	0,005991
			Normal	0,002168	0,002645	0,002940	0,004465	0,004869	0,005122

Tabela B.20: Mediana dos Erros Absolutos Integrados - Vol5-Vol6

Tab.Mediana EAI				Vol5			Vol6		
Parte 3				Quant0	Quant50	Quant100	Quant0	Quant50	Quant100
O N D A L E T A S	DB2	RAZÃO 1	C1	0,003091	0,003634	0,003999	0,134962	0,149626	0,158924
			C2	0,003025	0,003514	0,003868	0,108100	0,122262	0,128938
			C3	0,003061	0,003583	0,003973	0,110986	0,130246	0,140633
			C4	0,002948	0,003474	0,003791	0,099903	0,109790	0,111528
		RAZÃO 3	C1	0,003063	0,003780	0,004186	0,206959	0,227665	0,244654
			C2	0,003009	0,003688	0,004084	0,206959	0,227665	0,244654
			C3	0,003009	0,003698	0,004102	0,206959	0,227665	0,244654
			C4	0,002991	0,003688	0,004101	0,206959	0,227665	0,244654
	DB5	RAZÃO 1	C1	0,004275	0,004484	0,004682	0,137946	0,142482	0,143548
			C2	0,004275	0,004484	0,004682	0,137946	0,142482	0,143548
			C3	0,004275	0,004484	0,004682	0,137946	0,142482	0,143548
			C4	0,004275	0,004484	0,004682	0,137946	0,142482	0,143548
		RAZÃO 3	C1	0,004268	0,004475	0,004671	0,137946	0,142482	0,143548
			C2	0,004268	0,004475	0,004671	0,137946	0,142482	0,143548
			C3	0,004268	0,004475	0,004671	0,137946	0,142482	0,143548
			C4	0,004268	0,004475	0,004671	0,137946	0,142482	0,143548
	DB8	RAZÃO 1	C1	0,004268	0,004475	0,004690	0,137785	0,142123	0,143670
			C2	0,004268	0,004475	0,004690	0,137785	0,142123	0,143670
			C3	0,004268	0,004475	0,004690	0,137785	0,142123	0,143670
			C4	0,004268	0,004475	0,004690	0,137785	0,142123	0,143670
		RAZÃO 3	C1	0,004265	0,004467	0,004684	0,137785	0,142123	0,143670
			C2	0,004265	0,004467	0,004684	0,137785	0,142123	0,143670
			C3	0,004265	0,004467	0,004684	0,137785	0,142123	0,143670
			C4	0,004265	0,004467	0,004684	0,137785	0,142123	0,143670
Função Núcleo		MM	0,004133	0,004519	0,004699	0,125264	0,138108	0,138823	
		MMC	0,004078	0,004420	0,004611	0,123184	0,134434	0,135165	
		Normal	0,002106	0,002481	0,002595	0,071384	0,089460	0,093797	

Tabela B.21: Mediana dos Erros Absolutos Integrados - Vol7-Vol8

Tabela Mediana EAI				Vol7			Vol8		
Parte 4				Quant0	Quant50	Quant100	Quant0	Quant50	Quant100
O N D A L E T A S	DB2	RAZÃO 1	C1	0,002883	0,003202	0,003536	0,002274	0,002935	0,003341
			C2	0,001652	0,002029	0,002420	0,002322	0,003036	0,003399
			C3	0,001598	0,001980	0,002363	0,002448	0,003162	0,003493
			C4	0,001565	0,001936	0,002313	0,002217	0,002760	0,003179
		RAZÃO 3	C1	0,003873	0,004719	0,005383	0,003471	0,004143	0,004801
			C2	0,003826	0,004684	0,005352	0,003470	0,004147	0,004803
			C3	0,003826	0,004684	0,005352	0,003471	0,004148	0,004810
			C4	0,003818	0,004678	0,005351	0,003471	0,004144	0,004799
	DB5	RAZÃO 1	C1	0,003074	0,003698	0,004348	0,002255	0,002938	0,003344
			C2	0,003074	0,003698	0,004348	0,002255	0,002934	0,003339
			C3	0,003074	0,003698	0,004348	0,002255	0,002935	0,003341
			C4	0,003074	0,003698	0,004348	0,002254	0,002942	0,003364
		RAZÃO 3	C1	0,003072	0,003696	0,004347	0,002299	0,003001	0,003420
			C2	0,003072	0,003696	0,004347	0,002299	0,003001	0,003420
			C3	0,003072	0,003696	0,004347	0,002299	0,003001	0,003420
			C4	0,003072	0,003696	0,004347	0,002299	0,003001	0,003420
	DB8	RAZÃO 1	C1	0,003059	0,003710	0,004369	0,002431	0,003187	0,003616
			C2	0,003059	0,003710	0,004369	0,002430	0,003183	0,003614
			C3	0,003059	0,003707	0,004369	0,002431	0,003185	0,003615
			C4	0,003063	0,003710	0,004369	0,002426	0,003183	0,003615
		RAZÃO 3	C1	0,003054	0,003700	0,004365	0,002520	0,003349	0,003798
			C2	0,003054	0,003700	0,004365	0,002520	0,003349	0,003798
			C3	0,003054	0,003700	0,004365	0,002520	0,003349	0,003798
			C4	0,003054	0,003700	0,004365	0,002520	0,003349	0,003798
Função Núcleo			MM	0,002699	0,003169	0,003688	0,004253	0,005303	0,005794
			MMC	0,002663	0,003148	0,003670	0,004108	0,005005	0,005479
			Normal	0,001329	0,001632	0,001916	0,003686	0,004860	0,005194

B.3 Distribuição dos Erros Integrados

Nessa seção, são apresentados os histogramas alisados dos erros quadráticos e absolutos integrados das simulações. Cada figura contém os histogramas relativos a uma função de volatilidade, sendo composta por quatro gráficos:

- (a) Erro local nas observações do(s) ponto(s) de salto(s);
- (b) Erro local nas observações do(s) ponto(s) de salto(s) e nos cinquenta (50) vizinhos de cada lado;
- (c) Erro local nas observações do(s) ponto(s) de salto(s) e nos cem (100) vizinhos de cada lado; e
- (d) Erro integrado em todas as observações.

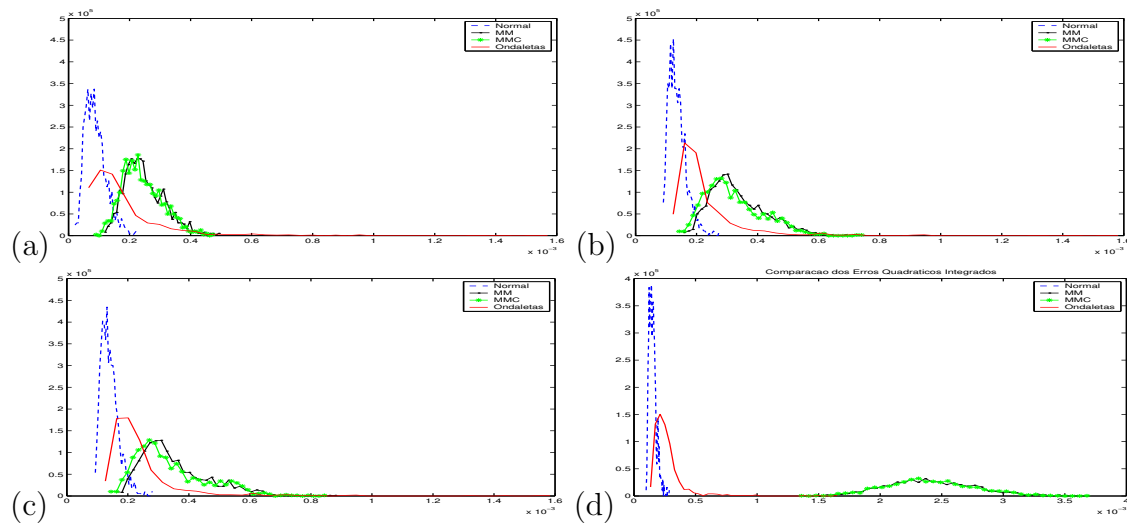


Figura B.9: DISTRIBUIÇÃO DOS EQI - Volatilidade 1

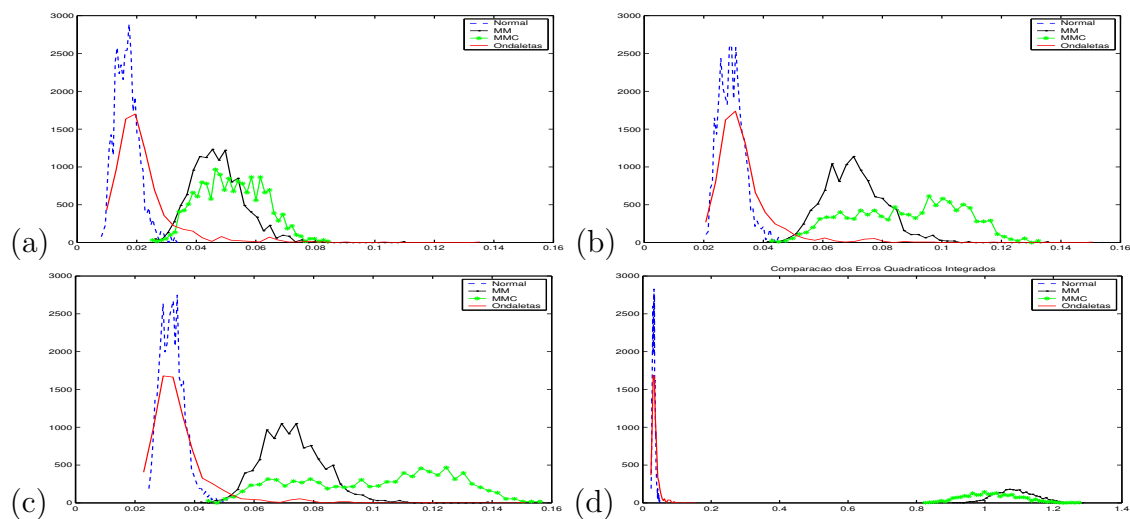


Figura B.10: DISTRIBUIÇÃO DOS EQI - Volatilidade 2

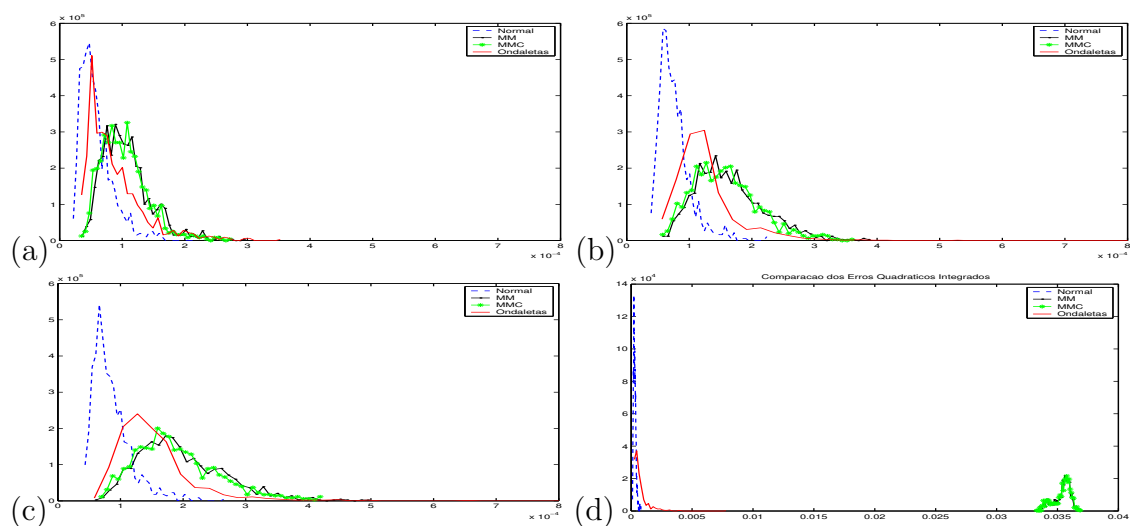


Figura B.11: DISTRIBUIÇÃO DOS EQI - Volatilidade 3

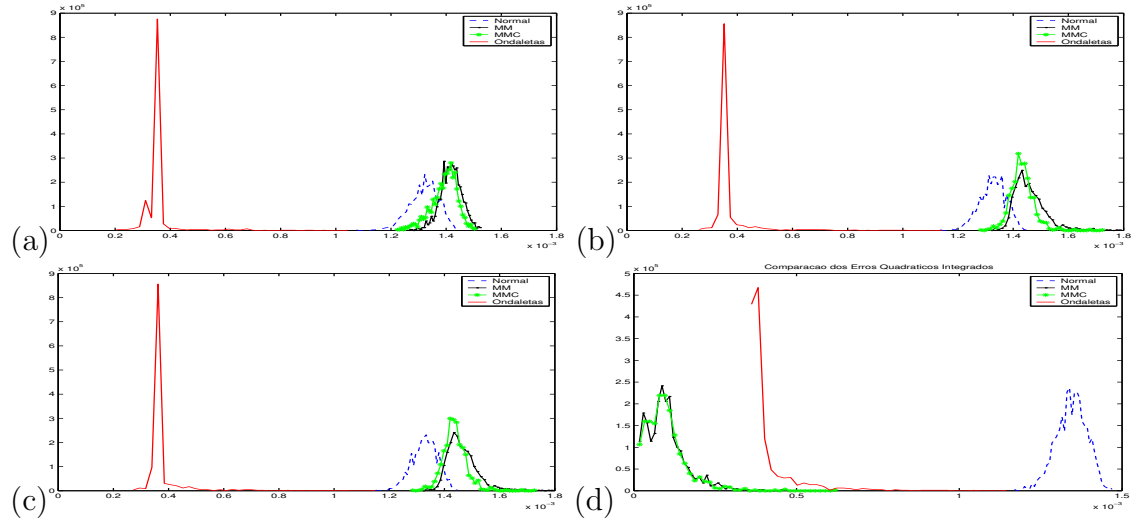


Figura B.12: DISTRIBUIÇÃO DOS EQI - Volatilidade 4

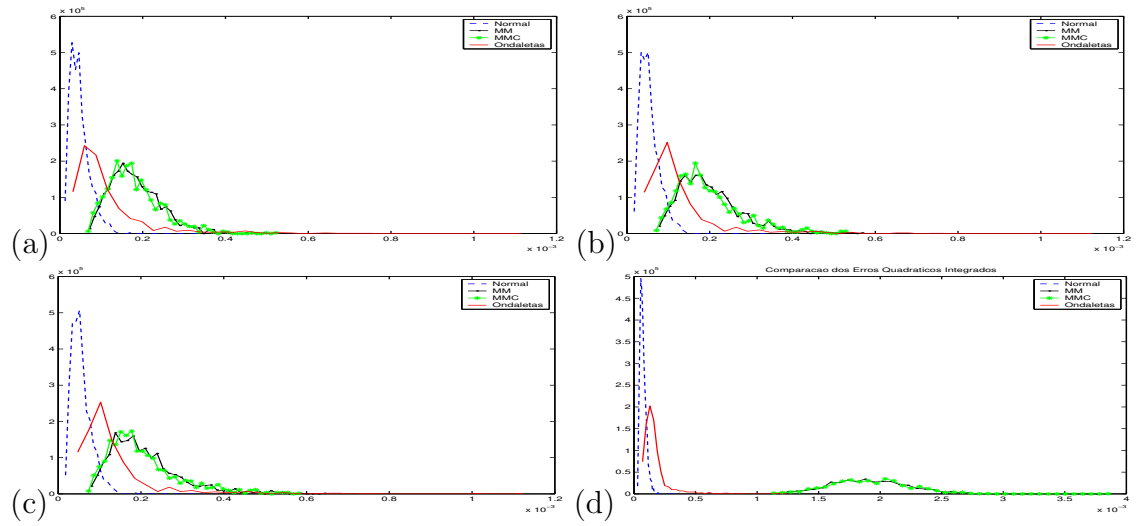


Figura B.13: DISTRIBUIÇÃO DOS EQI - Volatilidade 5

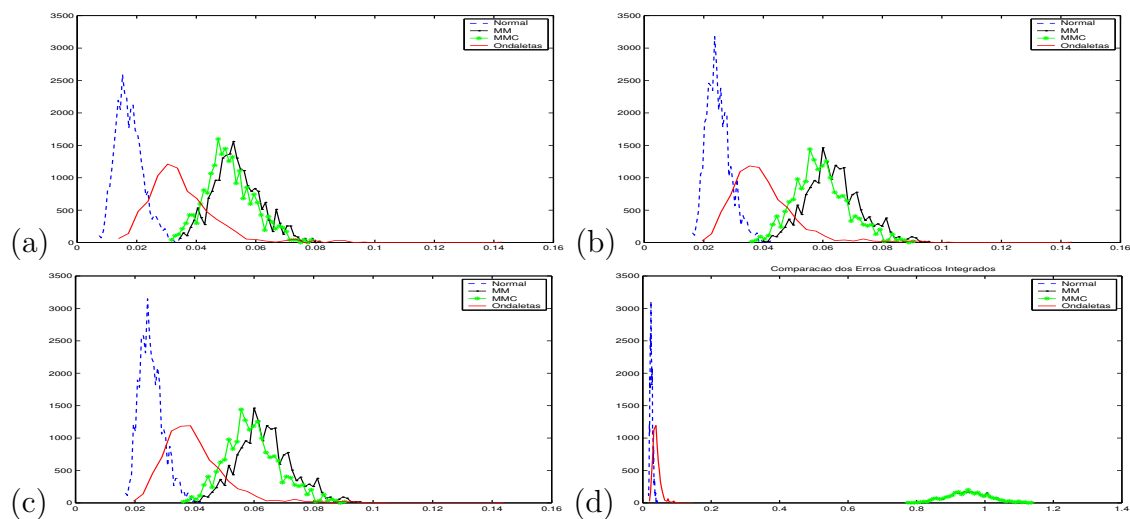


Figura B.14: DISTRIBUIÇÃO DOS EQI - Volatilidade 6

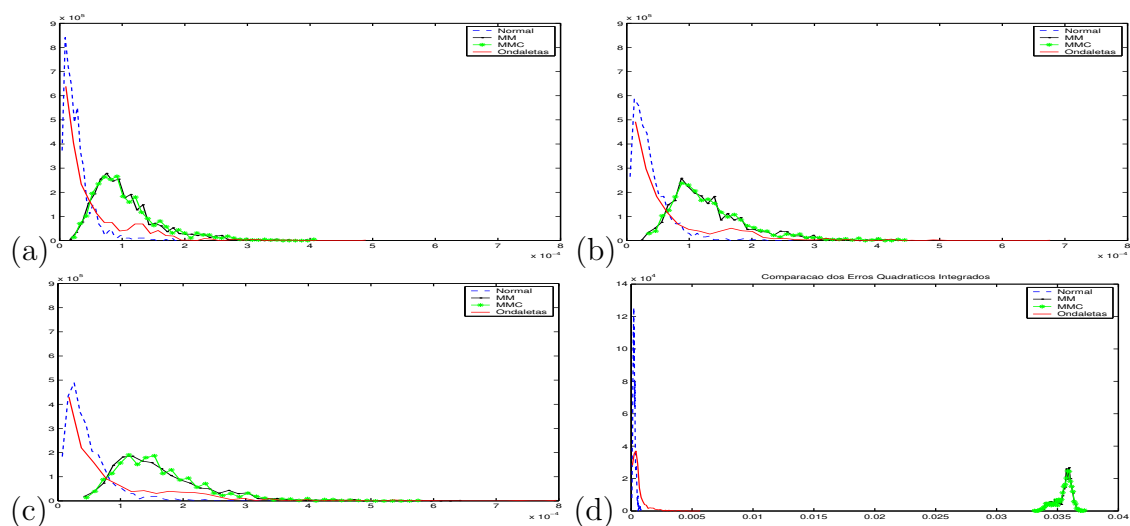


Figura B.15: DISTRIBUIÇÃO DOS EQI - Volatilidade 7

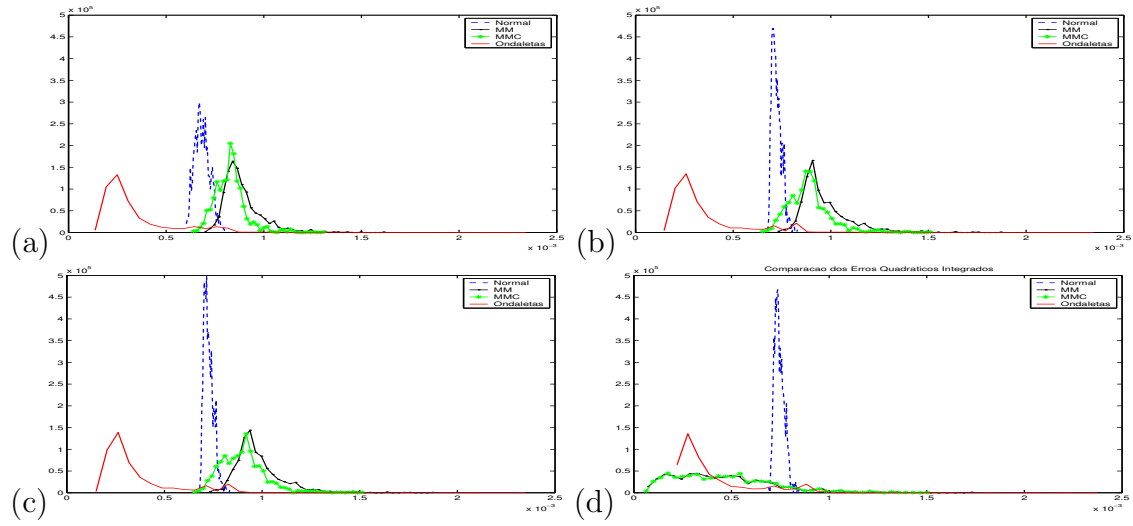


Figura B.16: DISTRIBUIÇÃO DOS EQI - Volatilidade 8

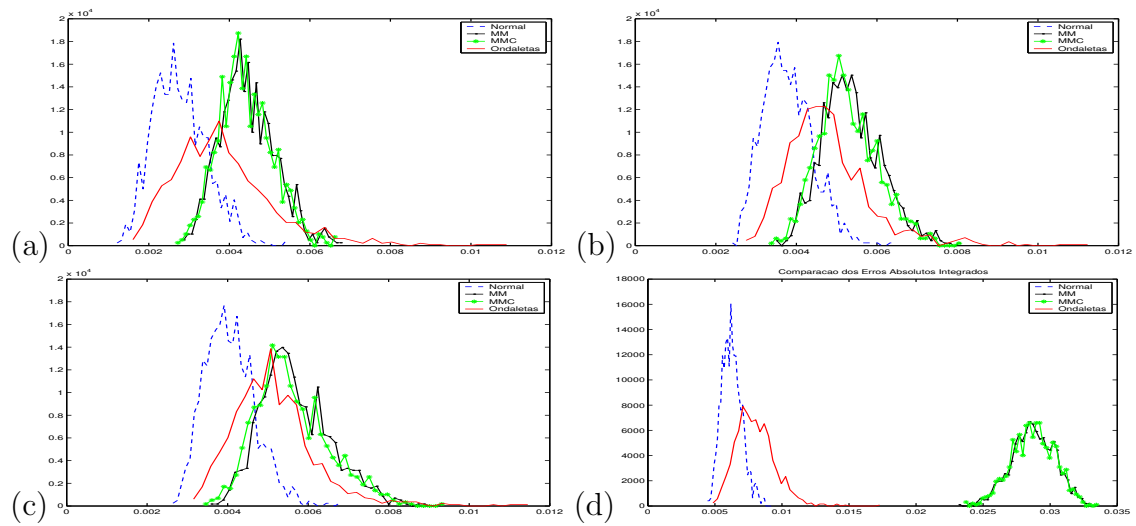


Figura B.17: DISTRIBUIÇÃO DOS EAI - Volatilidade 1

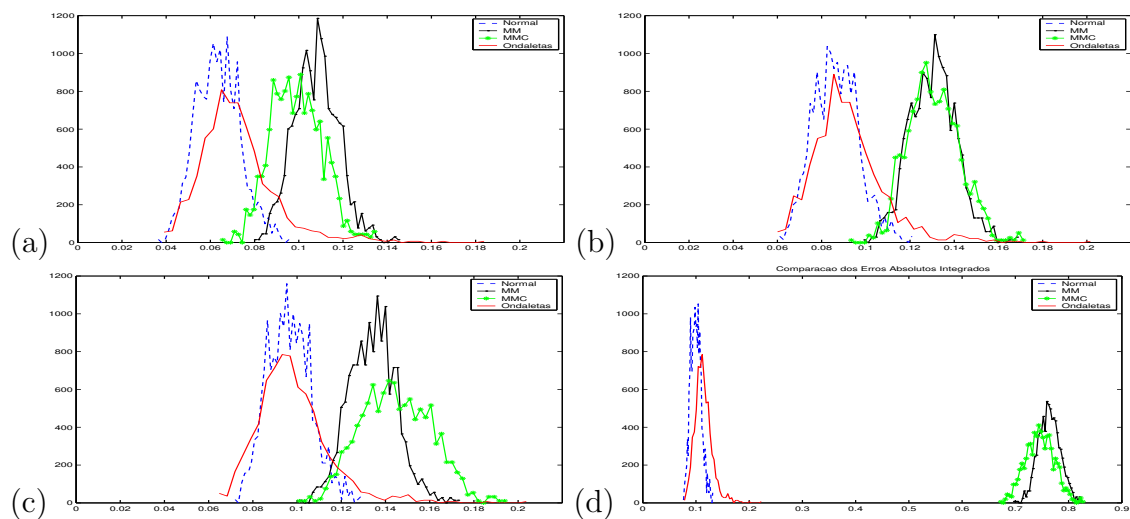


Figura B.18: DISTRIBUIÇÃO DOS EAI - Volatilidade 2

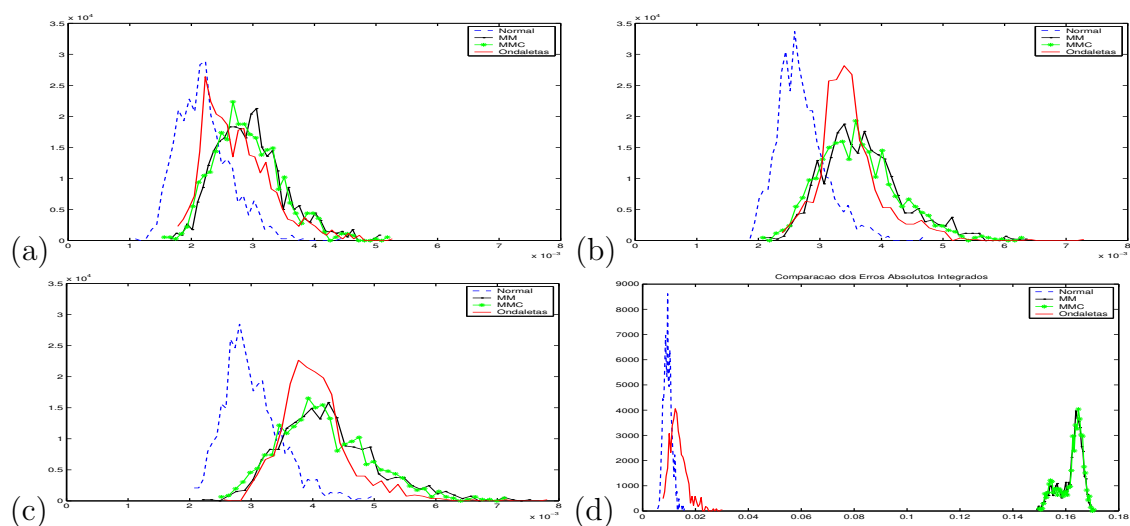


Figura B.19: DISTRIBUIÇÃO DOS EAI - Volatilidade 3

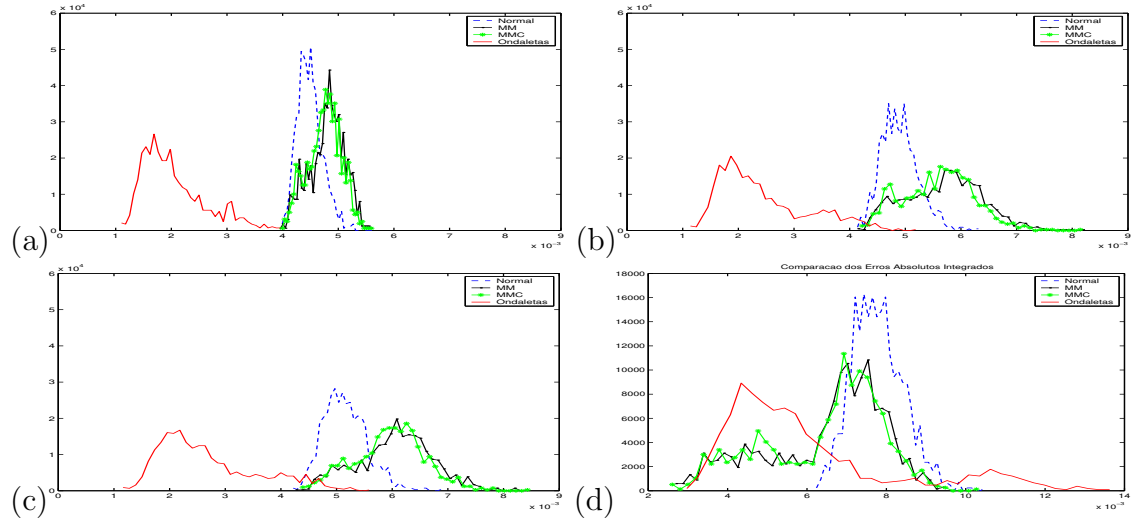


Figura B.20: DISTRIBUIÇÃO DOS EAI - Volatilidade 4

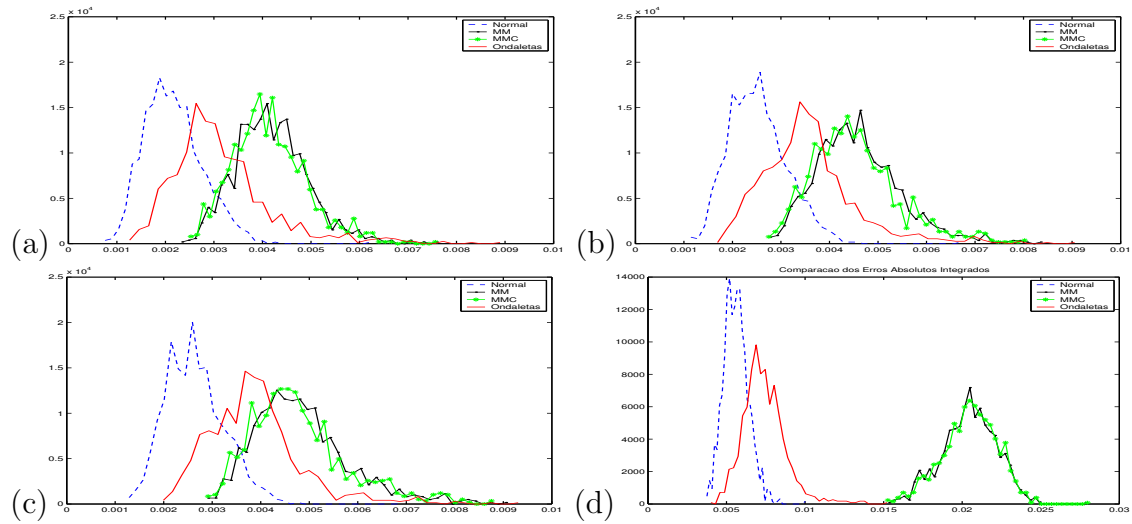


Figura B.21: DISTRIBUIÇÃO DOS EAI - Volatilidade 5

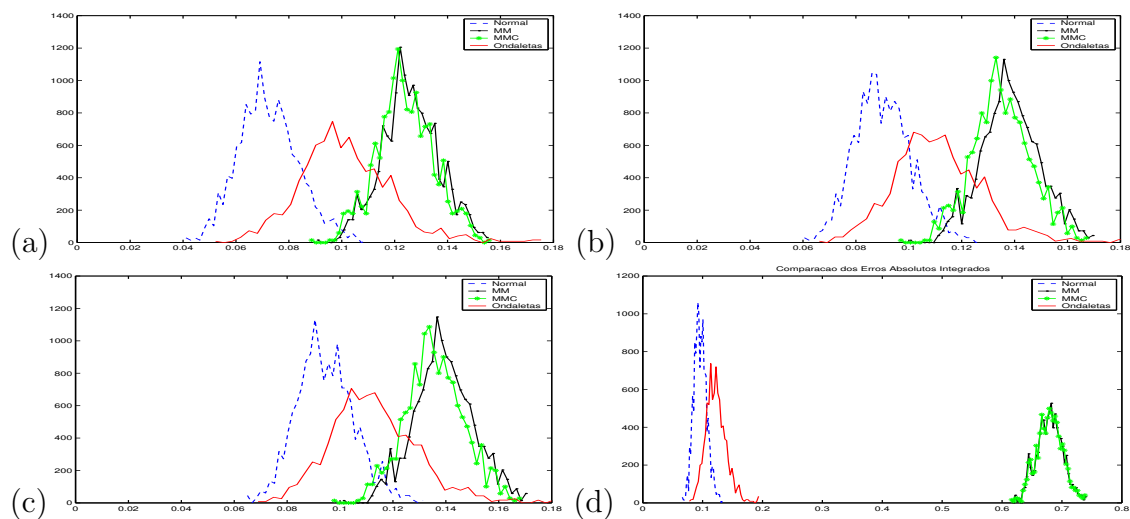


Figura B.22: DISTRIBUIÇÃO DOS EAI - Volatilidade 6

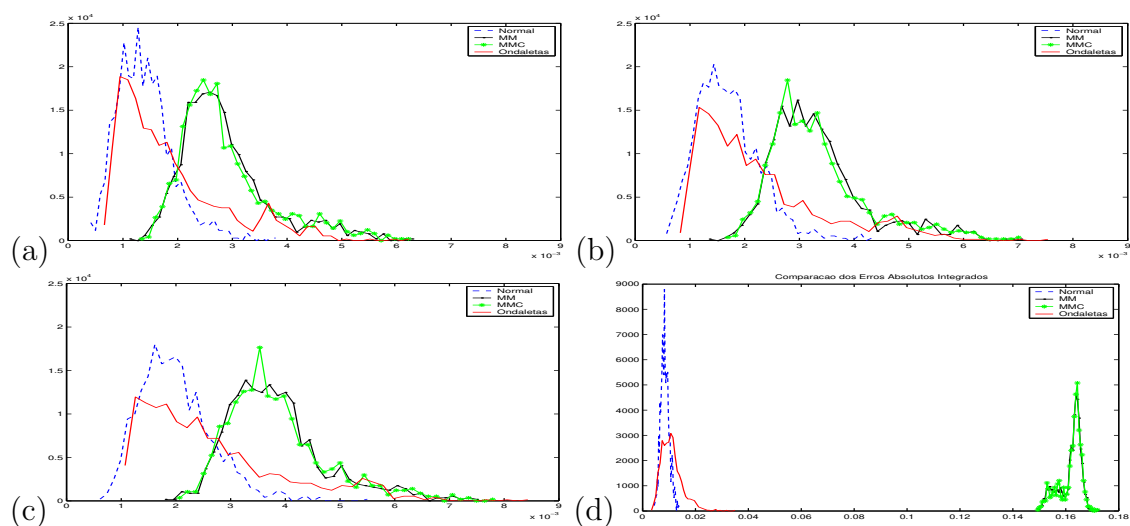


Figura B.23: DISTRIBUIÇÃO DOS EAI - Volatilidade 7

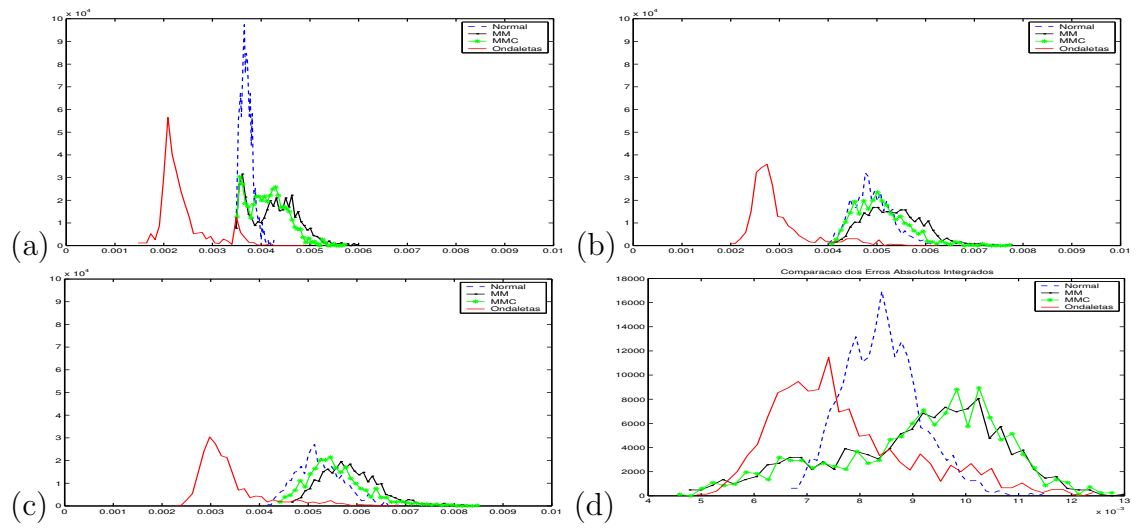


Figura B.24: DISTRIBUIÇÃO DOS EAI - Volatilidade 8

B.4 Comparação dos Erros Integrados

Nessa seção, são apresentados os histogramas alisados comparativos dos erros quadráticos e absolutos integrados das simulações. Cada figura contém os histogramas relativos a uma função de volatilidade, sendo composta por quatro gráficos:

- (a) Estimador por Ondaletas;
- (b) Estimador por função-núcleo com núcleo Normal;
- (c) Estimador por função-núcleo MMC;
- (d) Estimador por função-núcleo MM.

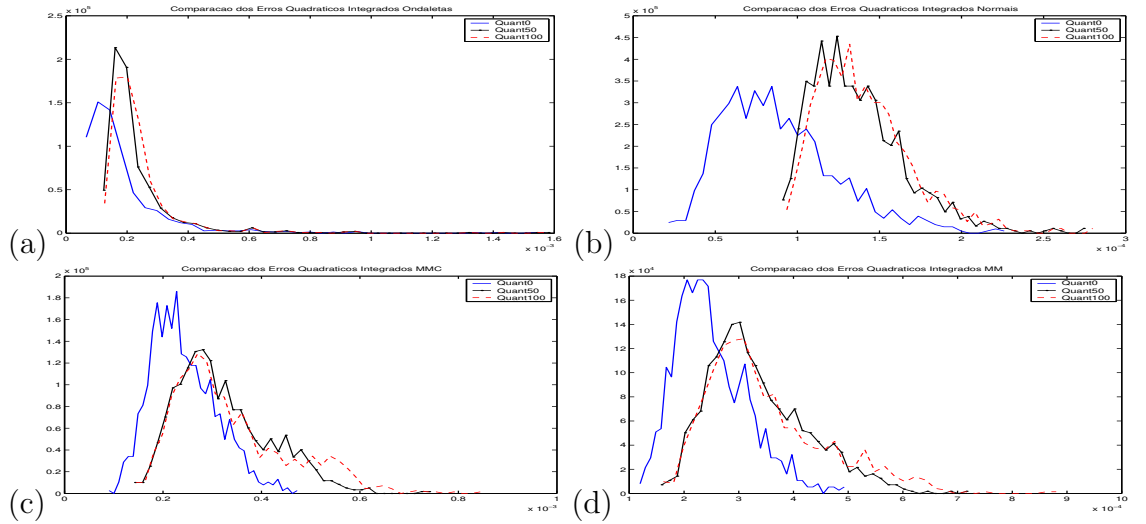


Figura B.25: Comparação dos EQI's - Volatilidade 1

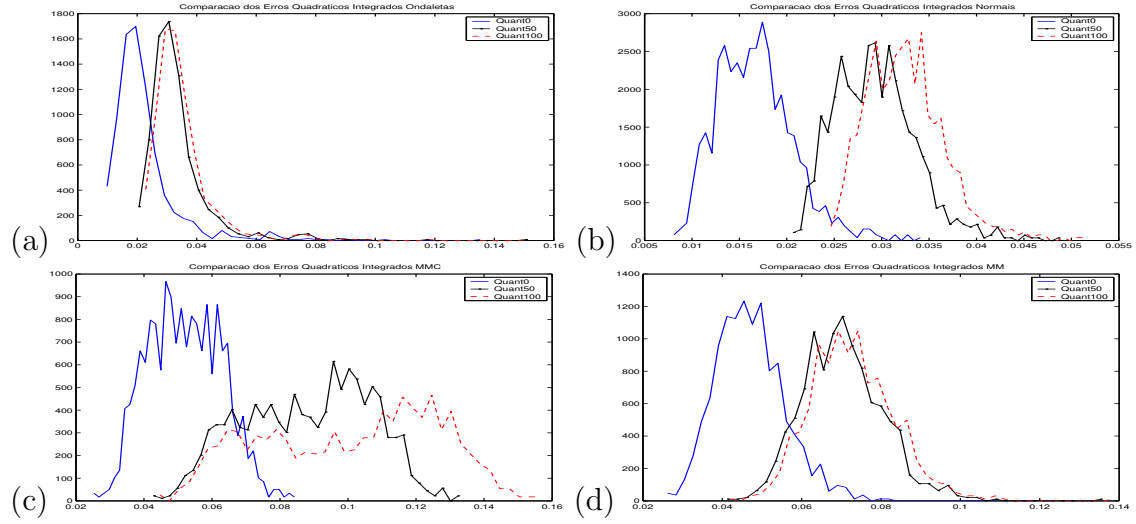


Figura B.26: Comparação dos EQI's - Volatilidade 2

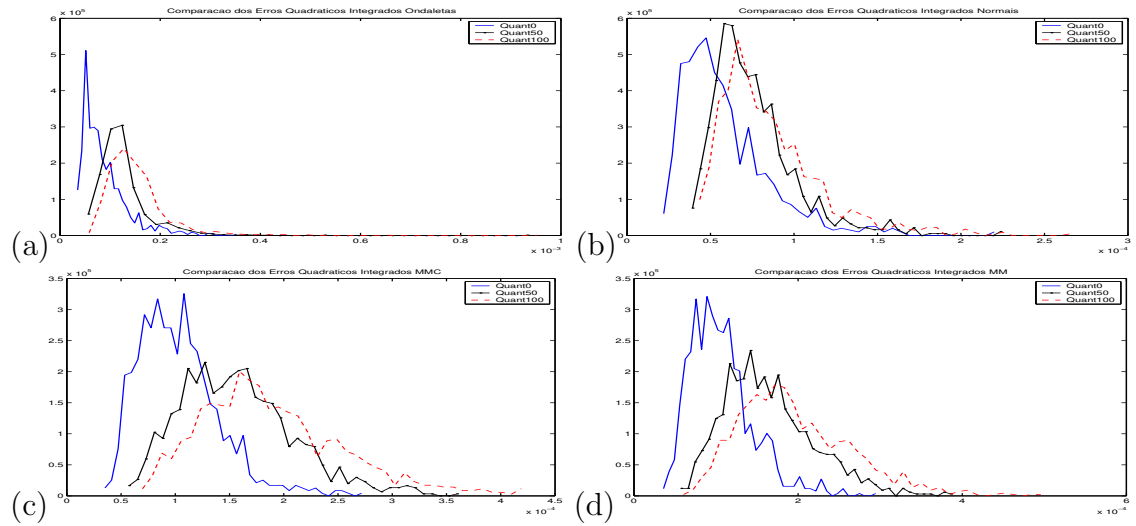


Figura B.27: Comparação dos EQI's - Volatilidade 3

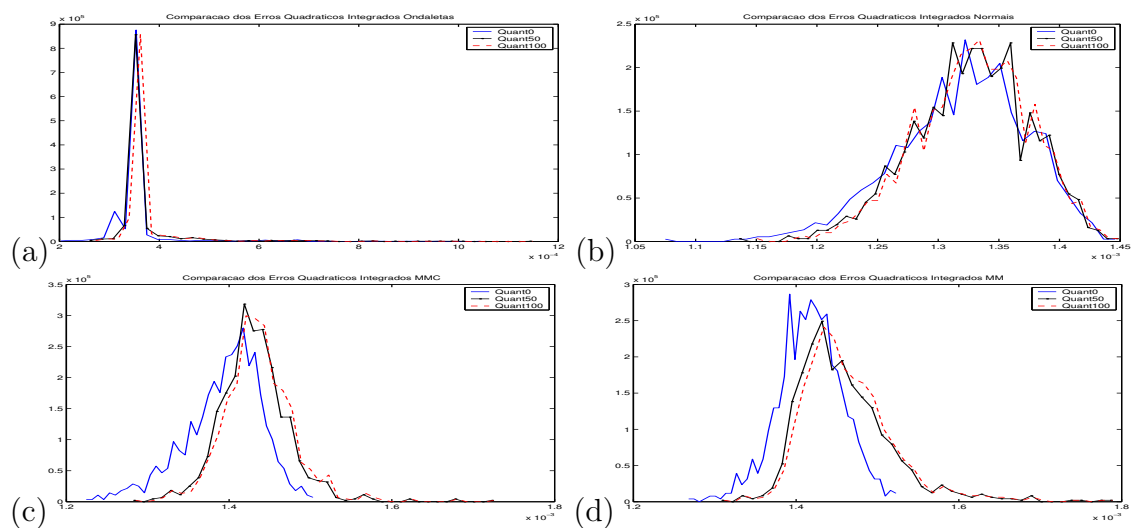


Figura B.28: Comparação dos EQI's - Volatilidade 4

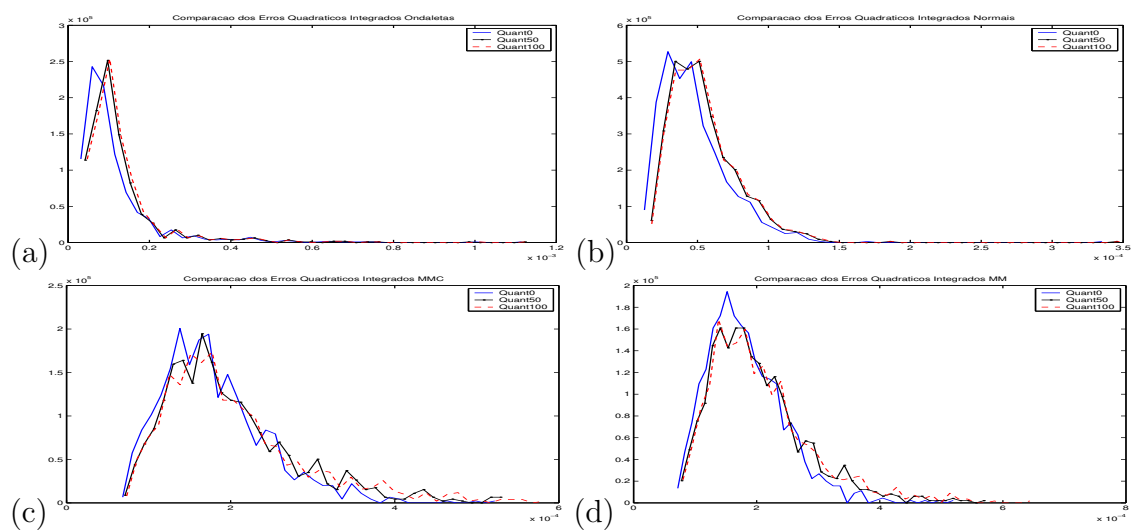


Figura B.29: Comparação dos EQI's - Volatilidade 5

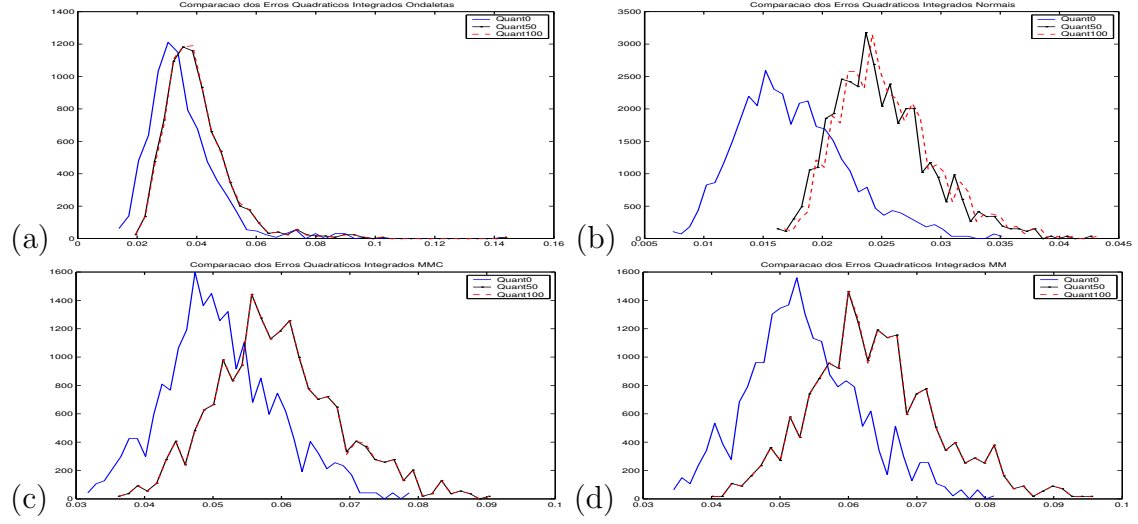


Figura B.30: Comparação dos EQI's - Volatilidade 6

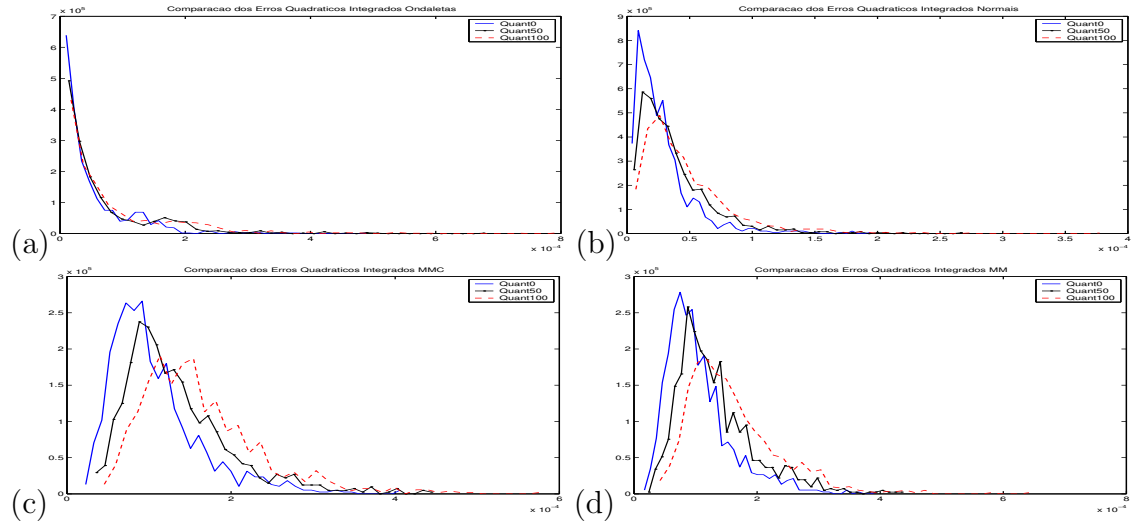


Figura B.31: Comparação dos EQI's - Volatilidade 7

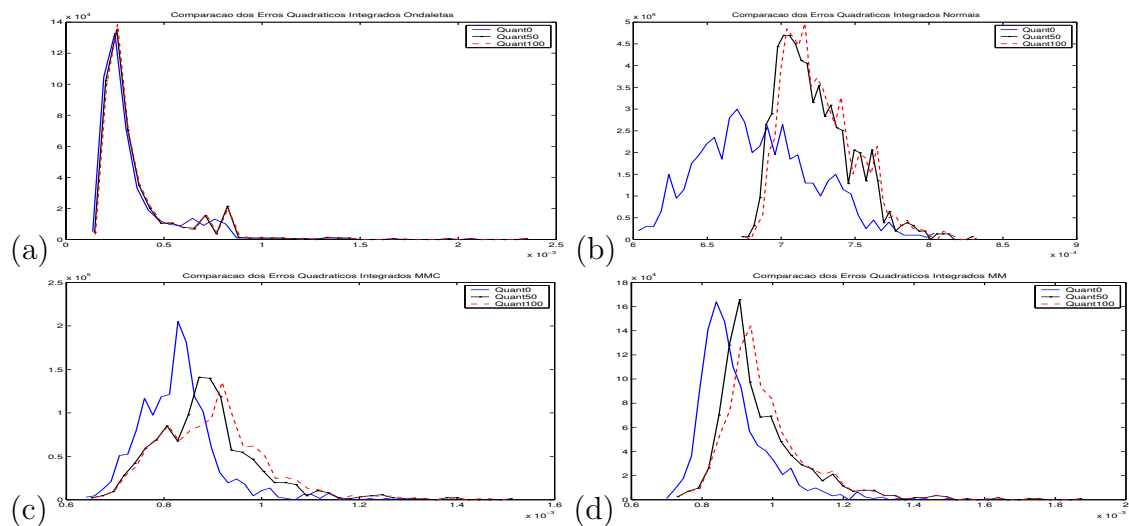


Figura B.32: Comparação dos EQI's - Volatilidade 8

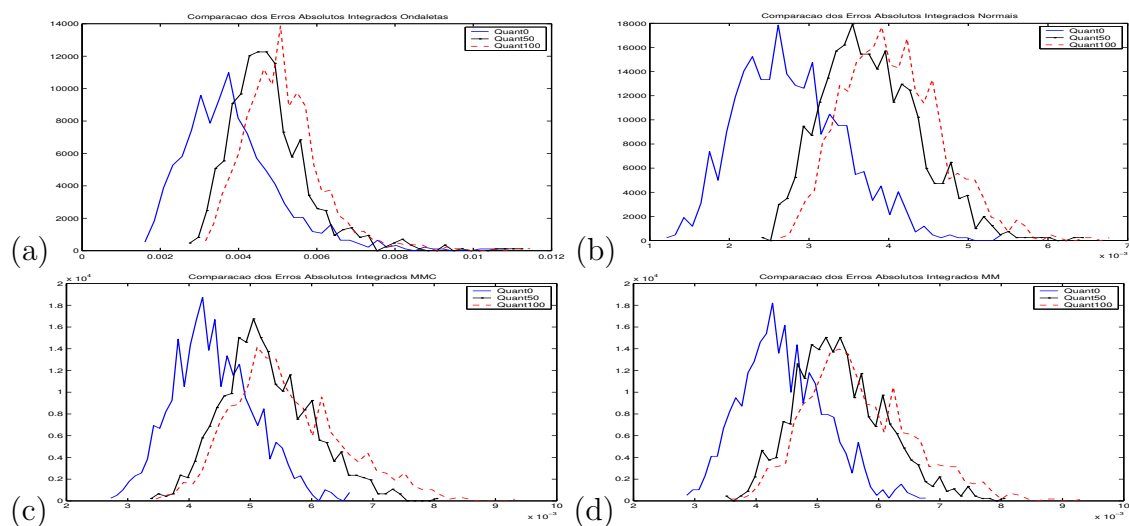


Figura B.33: Comparação dos EAI's - Volatilidade 1

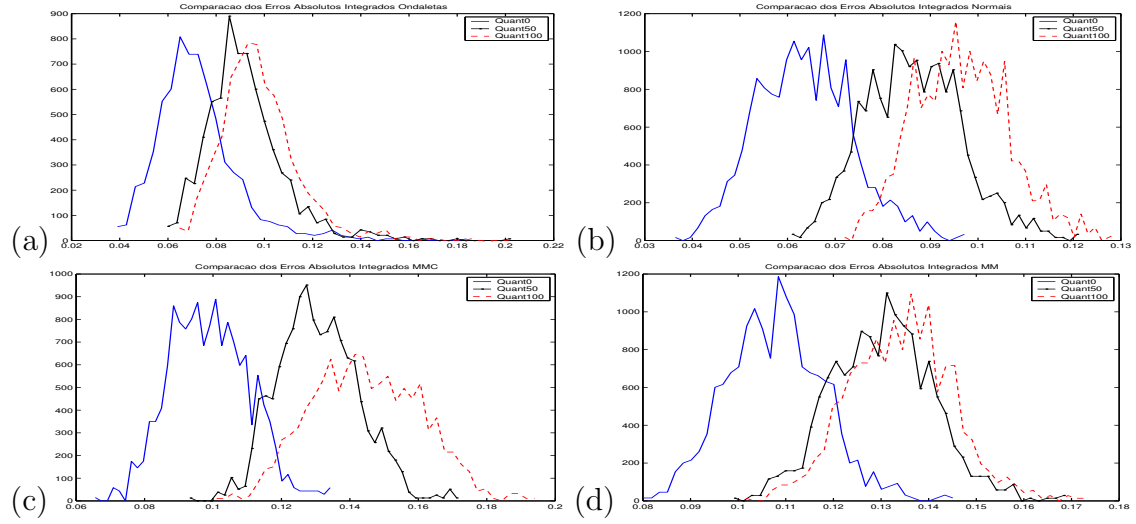


Figura B.34: Comparação dos EAI's - Volatilidade 2

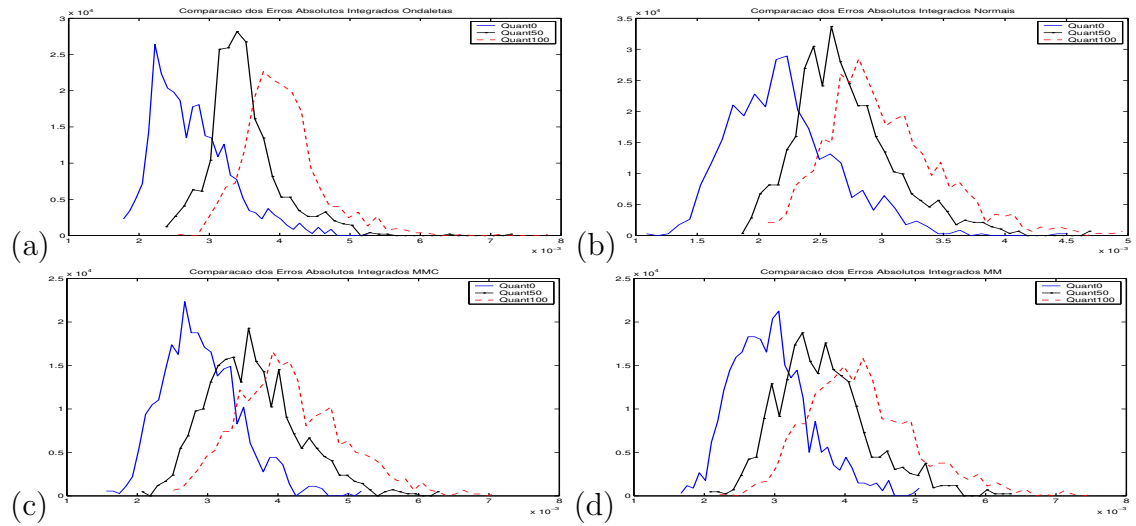


Figura B.35: Comparação dos EAI's - Volatilidade 3

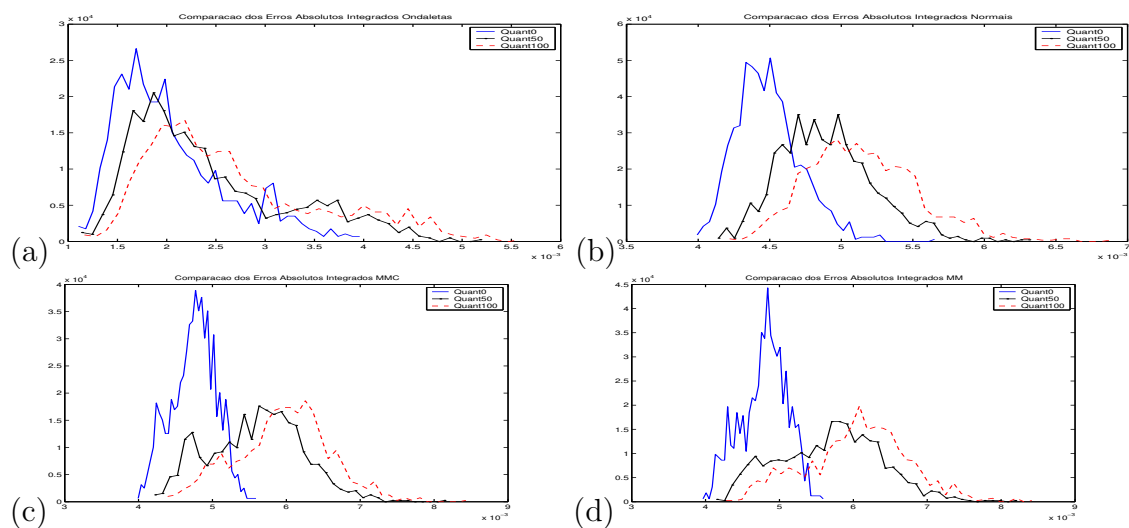


Figura B.36: Comparação dos EAI's - Volatilidade 4

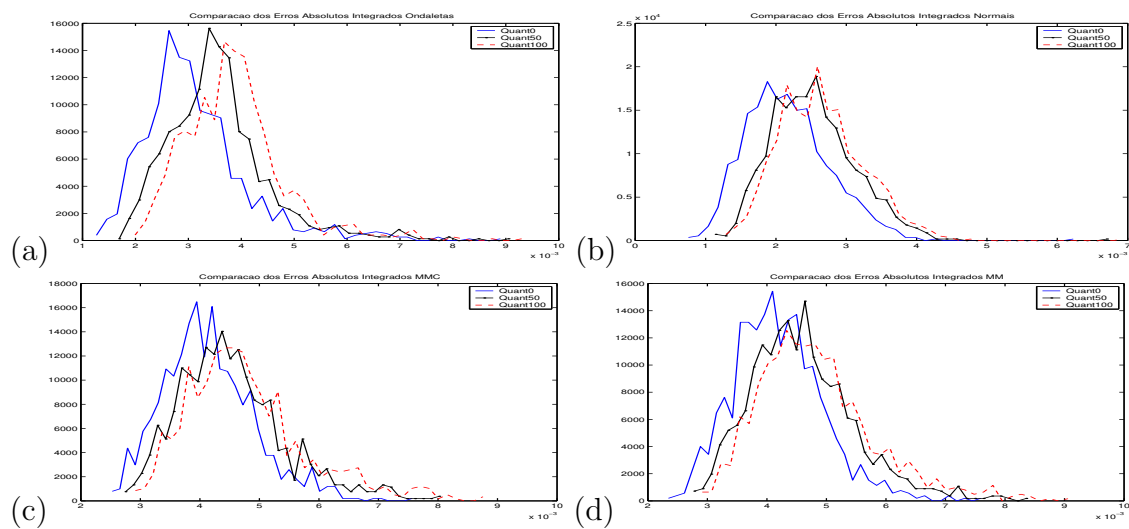


Figura B.37: Comparação dos EAI's - Volatilidade 5

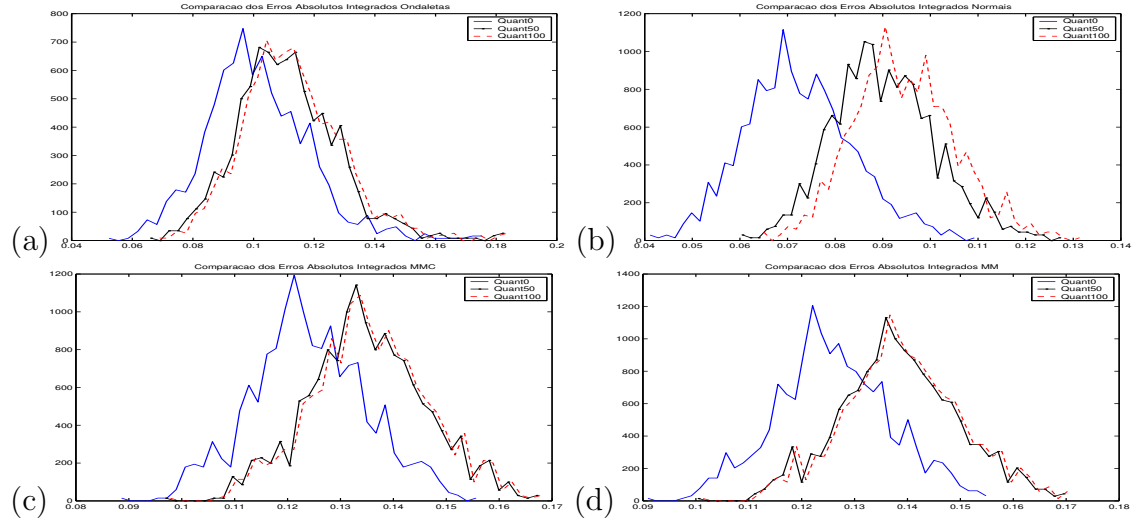


Figura B.38: Comparação dos EAI's - Volatilidade 6

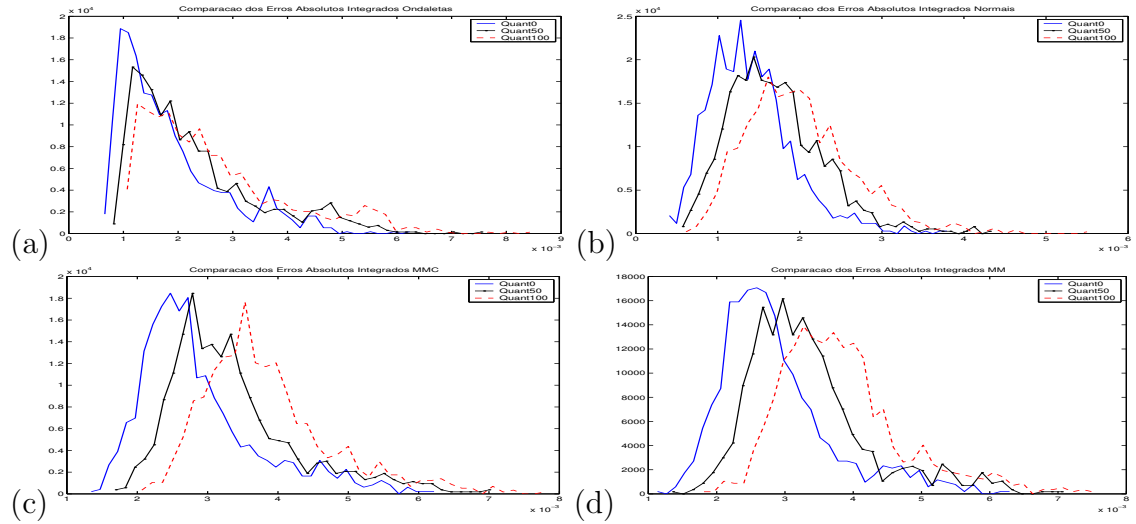


Figura B.39: Comparação dos EAI's - Volatilidade 7

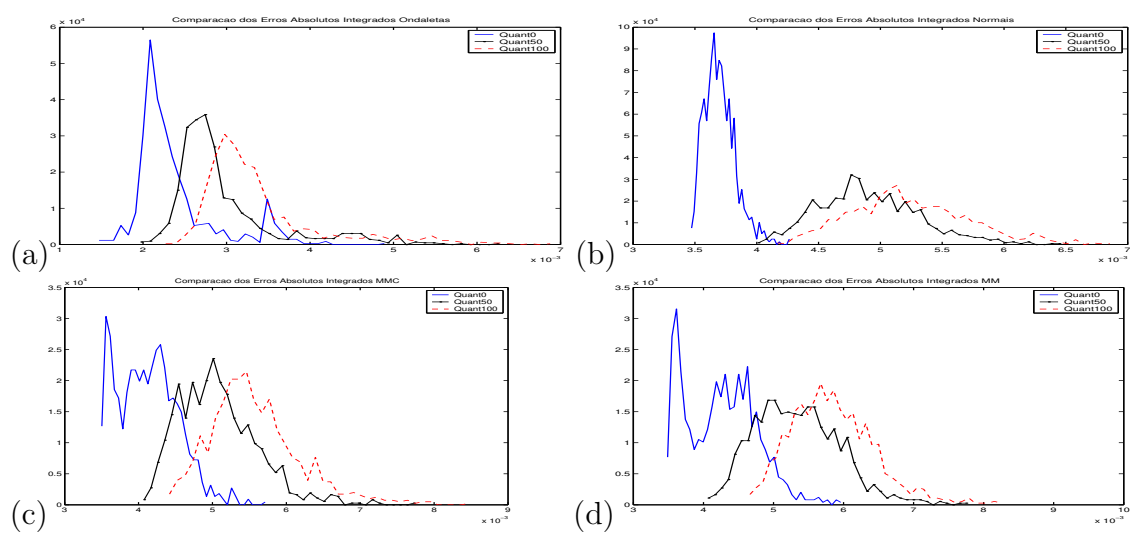


Figura B.40: Comparação dos EAI's - Volatilidade 8

Apêndice C

Estimador de Volatilidade por ondaletas

Neste apêndice haverá repetições com relação ao texto principal. Pode ser visto como um capítulo à parte, onde discutimos detalhadamente o artigo (Genon-Catalot et al. 1992), que versa sobre propriedades do estimador de ondaletas da volatilidade de um modelo de difusão.

Discutiremos como podemos obter estimativas para a volatilidade (coeficiente de difusão) de uma equação diferencial estocástica (E.D.E) definida da seguinte forma:

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \theta(t)dW_t, X_0 = x \quad (\text{C.1})$$

Na equação (C.1), assume-se que as funções $\theta(t)$ (coeficiente de difusão) e $b(t, X_t)$ sejam determinísticas e desconhecidas. Estamos interessados em obter um estimador não-paramétrico $\hat{\theta}^2(t)$ de $\theta^2(t)$ para $t \in [0, T]$, a partir de uma amostra discreta do processo contínuo definido em (C.1). Uma amostra de tamanho n é observada em intervalos de tempo equidistantes $t_i = i2^{-n}$ onde $i = 0, 1, \dots, [2^n T]$, ou seja, observamos o processo no intervalo de tempo $[0, T]$ com intervalo de amostragem definido como $\Delta_n = 2^{-n}$.

É importante salientar que, para os resultados teóricos que serão enunciados e provados nesta seção terem validade, são feitas as seguintes suposições com respeito as funções $b(\cdot, \cdot)$ e $\theta(\cdot)$ da equação diferencial estocástica definida em (C.1):

(C1) - A função $b(t, u)$ pertence à classe $C^1([0, +\infty) \times \mathbb{R})$.

(C2) - Para todo T existe uma constante K_T tal que $\forall t, 0 \leq t \leq T$ a seguinte relação seja satisfeita: $|b(t, u)| \leq K_T(1 + |u|)$.

(C3) - A função $\theta(t)$ pertence a classe $C^m([0, \infty))$ com $m \geq 1$ e $\theta(t)$ é positiva para todo $t \geq 0$.

Sob as suposições (C1)-(C3), com $m \geq 0$, a solução de (C.1) é única no intervalo $[0, \infty)$. Como estaremos trabalhando com A.M.R r -regular no $L_2(\mathbb{R})$ e a função $\theta(t)$ não precisa necessariamente pertencer ao $L_2(\mathbb{R})$, iremos substituí-la por uma nova função $\bar{\theta}(t) \in L_2(\mathbb{R})$ tal que:

$$\bar{\theta}(t) = \theta(t) \quad \forall t \in [0, T] \quad (\text{C.2})$$

Mantendo a relação entre estas duas funções, vamos supor que a nova função $\bar{\theta}(t)$ também pertence a $C^m(\mathbb{R})$ e também que seu suporte pertence a $[-\epsilon, T + \epsilon]$, para algum $\epsilon \geq 0$. Para efeitos práticos, as duas funções são iguais, sendo que a difusão do processo X_t definida por (C.1) é a mesma que aquela do processo $\bar{X}_t$ definida por:

$$d\bar{X}_t = b(t, \bar{X}_t)dt + \bar{\theta}(t)dW_t, \bar{X}_0 = x \quad (\text{C.3})$$

Na sequência desta seção, iremos obter um estimador para a projeção de $\bar{\theta}(t)$ em $V_{j(n)}$, onde o nível $j(n)$ é associado com cada tamanho de amostra, sendo que $j(n) \rightarrow +\infty$ conforme $n \rightarrow +\infty$. Utilizando o resultado obtido em (4.51)-(4.52) com $j_0 = j(n)$, podemos decompor o $L_2(\mathbb{R})$ da seguinte forma:

$$L_2(\mathbb{R}) = V_{j(n)} \oplus \left(\bigoplus_{j \geq j(n)} W_j \right) \quad (\text{C.4})$$

Como $\bar{\theta}(t)$ é uma função do $L_2(\mathbb{R})$, podemos escrever:

$$\bar{\theta}^2(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mu_{j(n),k} \phi_{j(n),k}(t) + \sum_{j \geq j(n)} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \nu_{j,k} \psi_{j,k}(t), \quad (\text{C.5})$$

onde sabemos pelas propriedades das bases de ondaletas que:

$$\mu_{j,k} = \langle \bar{\theta}^2(t), \phi_{j,k}(t) \rangle = \int_{\mathbb{R}} \bar{\theta}^2(t) \phi_{j,k}(t) dt \quad (\text{C.6})$$

e

$$\nu_{j,k} = \langle \bar{\theta}^2(t), \psi_{j,k}(t) \rangle = \int_{\mathbb{R}} \bar{\theta}^2(t) \psi_{j,k}(t) dt. \quad (C.7)$$

O estimador empirico de $\mu_{j,k}$ é dado por:

$$\hat{\mu}_{j,k} = \sum_{i=0}^{N-1} \phi_{j,k}(t_i) (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 \quad (C.8)$$

Se definirmos a medida Delta-Dirac do ponto t_i como δ_{t_i} , sabemos que, para um nível j suficientemente grande, obtemos:

$$\hat{\mu}_{j,k} = \sum_{i=0}^{N-1} \phi_{j,k}(t_i) (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 \approx \sum_{i=0}^{N-1} \delta_{t_i} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2. \quad (C.9)$$

De (C.9) e escolhendo-se uma função $g(t)$ razoável, pode-se mostrar que:

$$\begin{aligned} \int_0^T g(t) \hat{\mu}_{j,k} dt &\approx \sum_{i=0}^{N-1} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 \int_0^T g(t) \delta_{t_i} dt \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 g(t_i) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \int_0^T g(t) \theta^2(t) dt. \end{aligned} \quad (C.10)$$

Desta forma, definimos o estimador de $\theta^2(t)$ no nível $j(n)$ como sendo:

$$\hat{\theta}^2(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{\mu}_{j(n),k} \phi_{j(n),k}(t) = \sum_{k \in \mathbb{K}} \hat{\mu}_{j(n),k} \phi_{j(n),k}(t) \quad (C.11)$$

onde $\mathbb{K}$ é o conjunto $\{\hat{\mu}_{j(n),k} \text{ não nulos } \forall k \in \mathbb{Z}\}$, sendo que a cardinalidade deste conjunto é claramente $O(2^{j(n)})$. O conjunto $\mathbb{K}$ pode ser encontrado lembrando-se que o suporte de $\phi(t) \in [-A, A]$ e calculando as restrições com relação a k , como segue:

$$\begin{aligned} \text{supp}(\hat{\mu}_{j(n),k}) &= \text{supp} \left(\sum_{i=0}^{N-1} \phi_{j(n),k}(t_i) \right) = \bigcup_{i=1}^{N-1} [\text{supp} \phi_{j(n),k}(t_i)] \\ &= \bigcup_{i=1}^{N-1} [-A \leq 2^{j(n)} t_i - k \leq A] = \bigcup_{i=1}^{N-1} [2^{j(n)} t_i - A \leq k \leq 2^{j(n)} t_i + A] \\ &\subseteq [-A, 2^{j(n)} T + A]. \end{aligned} \quad (C.12)$$

Procedendo da mesma forma com relação ao suporte de $\phi_{j(n),k}$, vemos que o seu suporte contém o suporte de $\hat{\mu}_{j(n),k}$, pois o suporte de $\hat{\theta}^2(t)$ pertence a $[-\epsilon, T + \epsilon]$, para algum $\epsilon > 0$. Assim o conjunto $\mathbb{K}$ é simplesmente o mesmo que o suporte de $\hat{\mu}_{j(n),k}$. De (C.9) e de (C.10), percebe-se que (C.11) é um estimador razoável de $\theta^2(t)$.

C.1 Convergência em Distribuição do Estimador da Volatilidade

Estamos interessados em estudar as propriedades assintóticas da quantidade $\int h(t)\hat{\theta}(t)dt$, onde h é uma função arbitrária, que pode ser interpretada como uma função-peso, que satisfaça:

(C4) - A função h é contínua em $[0, T]$, com suporte compacto incluído em $(0, T)$ e pertence ao espaço de Sobolev $H^{m'}(\mathbb{R})$, com $m' \geq 1/2$.

Teorema C.1.1. *Supondo que as condições (C1)-(C4) sejam satisfeitas, que $r \wedge m + r \wedge m' > 2$ e que $j(n) = [\alpha n]$ onde $\frac{1}{2(r \wedge m + r \wedge m')} \leq \alpha < \frac{1}{4}$ temos que:*

$$2^{n/2} \int_{\mathbb{R}} h(t) \left(\hat{\theta}^2(t) - \theta^2(t) \right) dt \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} \mathcal{N} \left(0, 2 \int_0^T h^2(t) \theta^4(t) dt \right). \quad (\text{C.13})$$

Provaremos esse teorema por partes e, inicialmente, apresentaremos algumas notações. A projeção ortogonal em V_j será denotada por P_j , de forma que $h_j = P_j h$. Utilizando a decomposição em (C.4), podemos escrever h como:

$$h(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_{j(n),k} \phi_{j(n),k}(t) + \sum_{j \geq j(n)} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \beta_{j,k} \psi_{j,k}(t). \quad (\text{C.14})$$

Sabemos, de (C.5) e (C.8), que o estimador de $\bar{\theta}(t)$ e sua projeção no nível $j(n)$ são, respectivamente:

$$\hat{\bar{\theta}}^2(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{\mu}_{j(n),k} \phi_{j(n),k}(t) \quad (\text{C.15})$$

e

$$\bar{\theta}^2(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mu_{j(n),k} \phi_{j(n),k}(t). \quad (\text{C.16})$$

De (C.14)-(C.16) e das relações entre $\psi_{j,k}(t)$ e $\phi_{j,k}(t)$, é fácil ver que:

$$\int_{\mathbb{R}} h(t) \left(\hat{\theta}^2(t) - \bar{\theta}^2(t) \right) dt = Z_n + T_n, \quad (\text{C.17})$$

onde

$$Z_n = \sum_{k \in \mathbb{N}} \alpha_{j(n),k} (\hat{\mu}_{j(n),k} - \mu_{j(n),k}) \quad (\text{C.18})$$

e

$$T_n = - \sum_{j \geq j(n)} \sum_{k \in \mathbb{N}} \beta_{j,k} \nu_{j,k}. \quad (\text{C.19})$$

C.1.1 Convergência do termo T_n

Vamos mostrar $T_n \rightarrow 0$. Para isso, teremos que utilizar o seguinte resultado:

Proposição C.1.1. *Para qualquer função $f \in H^s(\mathbb{R})$, onde r é a regularidade da A.M.R., vale a seguinte desigualdade*

$$\|f - P_j f\|_{L_2} \leq 2^{-j(r \wedge s)} \epsilon_j \quad (\text{C.20})$$

com $\epsilon_j \rightarrow 0$, quando $j \rightarrow \infty$.

Pelas propriedades da decomposição de ondaletas e pela proposição acima, temos:

$$\|h - h_j\|_{L_2} = \sqrt{\sum_{j \geq j(n)} \sum_{k \in \mathbb{N}} \beta_{j,k}^2} \leq 2^{-j(n)(m' \wedge r)} \epsilon_{j(n)} \quad (\text{C.21})$$

e

$$\|\bar{\theta}^2 - P_j \bar{\theta}^2\|_{L_2} = \sqrt{\sum_{j \geq j(n)} \sum_{k \in \mathbb{N}} \nu_{j,k}^2} \leq 2^{-j(n)(m \wedge r)} \epsilon_{j(n)}. \quad (\text{C.22})$$

Assim, de (C.21) e (C.22), temos que:

$$|T_n| = \left| \sum_{j \geq j(n)} \sum_{k \in \mathbb{N}} \nu_{j,k}^2 \beta_{j,k}^2 \right| = \|h - h_j\|_{L_2} \|\bar{\theta}^2 - P_j \bar{\theta}^2\|_{L_2} \leq 2^{-j(n)[(m \wedge r)(m' \wedge r)]} \epsilon_{j(n)}^2. \quad (\text{C.23})$$

Estamos interessados também na velocidade de convergência de T_n . Pelo teorema C.1.1 queremos que $\Delta_n^{-1/2} T_n \rightarrow 0$. Utilizando os resultados em (C.23), temos que:

$$|\Delta_n^{-1/2} T_n| = 2^{\frac{n}{2}} |T_n| \leq 2^{\frac{n}{2} - j(n)[(m \wedge r)(m' \wedge r)]} \epsilon_{j(n)}^2. \quad (\text{C.24})$$

Então, para que a convergência $\Delta_n^{-1/2} T_n \rightarrow 0$ ocorra, é necessário impor a condição de que $2^{\frac{n}{2} - j(n)[(m \wedge r)(m' \wedge r)]} = O(1)$.

C.1.2 Fatoração do termo Z_n

Nesta subseção, vamos dividir Z_n em dois termos, mas primeiramente observamos que

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_{j(n),k} \mu_{j(n),k} = \int_0^T h_{j(n)}(t) \bar{\theta}^2(t) dt = \int_0^T h_{j(n)}(t) \theta^2(t) dt, \quad (\text{C.25})$$

onde (C.25) é facilmente estabelecida, usando (C.5) e (C.14) e também as relações entre $\psi_{j,k}(t)$ e $\phi_{j,k}(t)$. De (C.8), obtemos também:

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_{j(n),k} \hat{\mu}_{j(n),k} &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_{j(n),k} \sum_{i=1}^{N-1} \phi_{j(n),k}(t_i) (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 \\ &= \sum_{i=1}^{N-1} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_{j(n),k} \phi_{j(n),k}(t_i) \\ &= \sum_{i=1}^{N-1} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 h_{j(n)}(t_i). \end{aligned} \quad (\text{C.26})$$

Assim, de (C.25) e (C.26), podemos escrever Z_n como segue:

$$\begin{aligned}
Z_n &= \sum_{i=1}^{N-1} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 h_{j(n)}(t_i) - \int_0^T h_{j(n)}(t) \theta^2(t) dt \\
&= D_n - \int_0^T h_{j(n)}(t) \theta^2(t) dt.
\end{aligned} \tag{C.27}$$

C.1.3 Fatoração do termo D_n

Para decompor o termo D_n , utilizaremos um caso específico da decomposição de Itô, descrita no Capítulo 2, na definição 2.3.1:

$$2 \int_{t_i}^{t_{i+1}} X_s dX_s = X_{t_{i+1}}^2 - X_{t_i}^2 - \int_{t_i}^{t_{i+1}} (dX_s)^2. \tag{C.28}$$

Se o processo X_t é da forma descrita em (C.1), a variação quadrática deste processo pode ser definida como:

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} (dX_s)^2 = \int_{t_i}^{t_{i+1}} |\theta(s)|^2 ds = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \theta^2(s) ds. \tag{C.29}$$

Utilizando as igualdades (C.28) e (C.29), encontraremos a partição desejada do termo D_n :

$$\begin{aligned}
2 \int_{t_i}^{t_{i+1}} (X_s - X_{t_i}) dX_s &= 2 \int_{t_i}^{t_{i+1}} X_s dX_s - 2X_{t_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} dX_s \\
&= X_{t_{i+1}}^2 - X_{t_i}^2 - \int_{t_i}^{t_{i+1}} \theta^2(s) ds - 2X_{t_i} (X_{t_i} - X_{t_{i+1}}) \\
&= (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 - \int_{t_i}^{t_{i+1}} \theta^2(s) ds.
\end{aligned} \tag{C.30}$$

Finalizando, de (C.27) e (C.30), temos que o termo D_n pode ser particionado da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
D_n &= \sum_{i=1}^{N-1} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 h_{j(n)}(t_i) \\
&= 2 \sum_{i=1}^{N-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} (X_s - X_{t_i}) dX_s h_{j(n)}(t_i) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{N-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \theta^2(s) ds h_{j(n)}(t_i). \tag{C.31}
\end{aligned}$$

Utilizando a decomposição do termo D_n mostrada em (C.31), podemos reescrever o termo Z_n como:

$$Z_n = 2 \sum_{i=1}^{N-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} (X_s - X_{t_i}) dX_s h_{j(n)}(t_i) + C_n, \tag{C.32}$$

onde

$$C_n = \sum_{i=1}^{N-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \theta^2(s) ds h_{j(n)}(t_i) - \int_0^T h_{j(n)}(s) \theta^2(s) ds. \tag{C.33}$$

C.1.4 Convergência do termo C_n

Vamos mostrar $C_n \rightarrow 0$. Para isso, definiremos o módulo de continuidade $\omega(\cdot)$.

Definição C.1.1. *Seja f uma função contínua e δ uma constante real qualquer. O módulo de continuidade é:*

$$\omega(f, \delta) = \sup_{|s-t| \leq \delta} \{|f(s) - f(t)|\}. \tag{C.34}$$

Inicialmente, vamos mostrar que $|C_n| \leq C \omega(h_{j(n)}, \Delta_n)$.

$$\begin{aligned}
|C_n| &= \left| \sum_{i=1}^{N-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \theta^2(s) ds h_{j(n)}(t_i) - \int_0^T h_{j(n)}(s) \theta^2(s) ds \right| \\
&= \left| \sum_{i=1}^{N-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \theta^2(s) (h_{j(n)}(t_i) - h_{j(n)}(s)) ds \right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{N-1} \left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} \theta^2(s) \omega(h_{j(n)}, \Delta_n) ds \right| \\
&= \omega(h_{j(n)}, \Delta_n) \sum_{i=1}^{N-1} \left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} \theta^2(s) ds \right| \\
&= \omega(h_{j(n)}, \Delta_n) C.
\end{aligned} \tag{C.35}$$

O resultado (C.35) mostra que $|C_n| \rightarrow 0$. No entanto, estamos novamente interessados na velocidade de tal convergência e, pelo teorema C.1.1 queremos que $|\Delta^{-1/2} C_n| \rightarrow 0$ e, para isso, teremos que mostrar a seguinte desigualdade:

$$\omega(\phi_{j(n),k}, \Delta_n) \leq 2^{3j(n)/2} \Delta_n C. \tag{C.36}$$

Utilizando apenas a definição do módulo de continuidade e da função-escala, temos:

$$\begin{aligned}
\omega(\phi_{j(n),k}, \Delta_n) &= \sup_{|s-t| \leq \Delta_n} \{ |\phi_{j(n),k}(s) - \phi_{j(n),k}(t)| \} \\
&= 2^{j(n)/2} \sup_{|s-t| \leq \Delta_n} \{ |\phi(2^{j(n)}s - k) - \phi(2^{j(n)}t - k)| \}.
\end{aligned}$$

Como $\Delta_n \leq \Delta_n 2^{j(n)}$, temos $\omega(\cdot, \Delta_n) \leq \omega(\cdot, \Delta_n 2^{j(n)})$. Além disso, sabemos que $|s - t| \leq \Delta_n 2^{j(n)} = \left| \frac{s}{2^{j(n)}} - \frac{t}{2^{j(n)}} \right| \leq \Delta_n$:

$$\begin{aligned}
\omega(\phi_{j(n),k}, \Delta_n) &\leq 2^{j(n)/2} \sup_{|s-t| \leq \Delta_n 2^{j(n)}} \{ |\phi(s - k) - \phi(t - k)| \} \\
&= 2^{j(n)/2} \sup_{|s-t| \leq \Delta_n 2^{j(n)}} \{ |\phi(s) - \phi(t)| \}.
\end{aligned}$$

Como $\phi \in C^1$, sabemos que $|\phi(s) - \phi(t)| \leq C|s - t|$, então:

$$\omega(\phi_{j(n),k}, \Delta_n) \leq 2^{j(n)/2} C \Delta_n 2^{j(n)} = 2^{3j(n)/2} \Delta_n C.$$

Para completar a demonstração de que $|\Delta^{-1/2}C_n| \rightarrow 0$, teremos que mostrar a seguinte desigualdade:

$$\omega(h_{j(n)}, \Delta_n) \leq \|h\|_2 (Card[\mathbb{K}]) 2^{3j(n)/2} \Delta_n C. \quad (C.37)$$

Primeiramente, sabemos que $h_{j(n)}(t) = \sum_k \alpha_{j(n),k} \phi_{j(n),k}(t)$; então, por definição, temos que:

$$\begin{aligned} \omega(h_{j(n)}, \Delta_n) &= \sup_{|s-t| \leq \Delta_n} \{|h_{j(n)}(s) - h_{j(n)}(t)|\} \\ &= \sup_{|s-t| \leq \Delta_n} \left\{ \left| \sum_k \alpha_{j(n),k} (\phi_{j(n),k}(s) - \phi_{j(n),k}(t)) \right| \right\} \\ &\leq \sup_{|s-t| \leq \Delta_n} \left\{ \sum_k |\alpha_{j(n),k}| |\phi_{j(n),k}(s) - \phi_{j(n),k}(t)| \right\} \\ &\leq \sum_k |\alpha_{j(n),k}| \sup_{|s-t| \leq \Delta_n} \{|\phi_{j(n),k}(s) - \phi_{j(n),k}(t)|\} \\ &\leq \sum_k |\alpha_{j(n),k}| \omega(\phi_{j(n),k}, \Delta_n). \end{aligned}$$

Assim, de (C.36), obtemos a seguinte desigualdade:

$$\omega(h_{j(n)}, \Delta_n) \leq 2^{3j(n)/2} \Delta_n C \sum_k |\alpha_{j(n),k}|. \quad (C.38)$$

Para completar a prova de (C.37), temos que achar uma cota superior para $\sum_k |\alpha_{j(n),k}|$. Pela desigualdade de Cauchy-Schwartz e pela identidade de Parseval, temos:

$$|\alpha_{j(n),k}| = |\langle h_{j(n)}, \phi_{j(n),k} \rangle| \leq \|h_{j(n)}\| \|\phi_{j(n),k}\| = \sqrt{\sum_k \alpha_{j(n),k}^2}. \quad (C.39)$$

Pelas propriedades da decomposição de ondaletas C.1.1 e pela identidade de Parseval, sabemos que $\|h\|_2^2 \geq \sum_k \alpha_{j(n),k}^2$ e, combinando esse resultado com (C.39) e com o fato de a soma em (C.38) ter apenas $Card[\mathbb{K}]$ termos não nulos, obtemos o resultado em (C.37).

Utilizando os resultados (C.35) e (C.37) e lembrando que $Card[\mathbb{K}] \leq C2^{j(n)}$, temos:

$$\begin{aligned} |\Delta^{-1/2}C_n| &\leq \|h\|_2 (Card[\mathbb{K}])^{1/2} 2^{3j(n)/2} 2^{-n/2} C \\ &\leq \|h\|_2 2^{j(n)/2} 2^{3j(n)/2} 2^{-n/2} C_1 \\ &= C_1 2^{2j(n)-n/2}. \end{aligned} \quad (C.40)$$

De (C.40), é fácil ver que, para garantir a convergência desejada, temos que impor a condição (suficiente) de que $2^{2j(n)-n/2}$ seja $o(1)$, que é equivalente a impor a condição de que $j(n) - n/4 \rightarrow -\infty$, quando $n \rightarrow \infty$.

C.1.5 Fatoração do termo $Z_n - C_n$

Como o termo $C_n \rightarrow 0$, estamos interessados agora somente na parcela $Z_n - C_n$ e, como veremos a seguir, podemos fatorá-la em cinco partes, usando as propriedades da Integral Estocástica de Itô de um processo X_t que satisfaz a E.D.E. definida em (C.1), sendo esta decomposição da forma $Z_n - C_n = \sum_{i=1}^5 A_{n,i}$. Para demonstrar essa fatoração, trabalharemos somente com a parte estocástica do termo $Z_n - C_n$:

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} (X_s - X_{t_i}) dX_s. \quad (C.41)$$

Lembrando que o processo X_t deve satisfazer (C.1),

$$dX_s = b(s, X_s)ds + \theta(s)dW_s. \quad (C.42)$$

Dessa forma usando (C.1), a integral de Itô definida em (C.41) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \int_{t_i}^{t_{i+1}} (X_s - X_{t_i}) dX_s &= \int_{t_i}^{t_{i+1}} (X_s - X_{t_i}) (b(s, X_s)ds + \theta(s)dW_s) \\ &= \int_{t_i}^{t_{i+1}} (X_s - X_{t_i}) b(s, X_s)ds \\ &\quad + \int_{t_i}^{t_{i+1}} (X_s - X_{t_i}) \theta(s)dW_s. \end{aligned} \quad (C.43)$$

Como X_t satisfaz (C.1), vale:

$$(X_s - X_{t_i}) = \int_{t_i}^s b(u, X_u) du + \int_{t_i}^s \theta(u) dW_u. \quad (\text{C.44})$$

Substituindo (C.44) em (C.43), temos:

$$\begin{aligned} \int_{t_i}^{t_{i+1}} (X_s - X_{t_i}) dX_s &= \int_{t_i}^{t_{i+1}} b(s, X_s) \left(\int_{t_i}^s b(u, X_u) du \right) ds \\ &+ \int_{t_i}^{t_{i+1}} b(s, X_s) \left(\int_{t_i}^s \theta(u) dW_u \right) ds \\ &+ \int_{t_i}^{t_{i+1}} \theta(s) \left(\int_{t_i}^s b(u, X_u) du \right) dW_s \\ &+ \int_{t_i}^{t_{i+1}} \theta(s) \left(\int_{t_i}^s \theta(u) dW_u \right) dW_s \\ &= A'_{n,1} + B_n + A'_{n,4} + A'_{n,5}. \end{aligned} \quad (\text{C.45})$$

Agora, basta decompor o termo B_n de (C.45) em $A'_{2,n}$ e $A'_{3,n}$ que a fatoração de (C.41) estará completa. Para decompor o termo B_n , iremos apenas somar e subtrair $b(t_i, X_{t_i})$, como segue:

$$\begin{aligned} B_n &= \int_{t_i}^{t_{i+1}} b(s, X_s) \left(\int_{t_i}^s \theta(u) dW_u \right) ds \\ &= \int_{t_i}^{t_{i+1}} (b(s, X_s) - b(t_i, X_{t_i}) + b(t_i, X_{t_i})) \left(\int_{t_i}^s \theta(u) dW_u \right) ds \\ &= \int_{t_i}^{t_{i+1}} (b(s, X_s) - b(t_i, X_{t_i})) \left(\int_{t_i}^s \theta(u) dW_u \right) ds \\ &+ \int_{t_i}^{t_{i+1}} b(t_i, X_{t_i}) \left(\int_{t_i}^s \theta(u) dW_u \right) ds \\ &= A'_{3,n} + \int_{t_i}^{t_{i+1}} b(t_i, X_{t_i}) \left(\int_{t_i}^s \theta(u) dW_u \right) ds. \end{aligned} \quad (\text{C.46})$$

Para finalizar a fatoração de (C.41), utilizamos a seguinte igualdade:

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} b(t_i, X_{t_i}) \left(\int_{t_i}^s \theta(u) dW_u \right) ds = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \theta(u) (t_{i+1} - u) dW_u b(t_i, X_{t_i}). \quad (\text{C.47})$$

Assim, utilizando a decomposição de (C.41) que é definida por (C.45), (C.46) e (C.47), temos que a fatoraço de $Z_n - C_n$ é dada por:

$$Z_n - C_n = \sum_{i=1}^5 A_{n,i}, \quad (\text{C.48})$$

onde

$$\begin{aligned} A_{n,1} &= 2 \sum_{i=0}^{N-1} h_{j(n)}(t_i) \int_{t_i}^{t_{i+1}} b(s, X_s) \left(\int_{t_i}^s b(u, X_u) du \right) ds \\ A_{n,2} &= 2 \sum_{i=0}^{N-1} h_{j(n)}(t_i) \int_{t_i}^{t_{i+1}} \theta(u)(t_{i+1} - u) dW_u b(t_i, X_{t_i}) \\ A_{n,3} &= 2 \sum_{i=0}^{N-1} h_{j(n)}(t_i) \int_{t_i}^{t_{i+1}} (b(s, X_s) - b(t_i, X_{t_i})) \left(\int_{t_i}^s \theta(u) dW_u \right) ds \\ A_{n,4} &= 2 \sum_{i=0}^{N-1} h_{j(n)}(t_i) \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left(\int_{t_i}^s b(u, X_u) du \right) \theta(s) dW_s \\ A_{n,5} &= 2 \sum_{i=0}^{N-1} h_{j(n)}(t_i) \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left(\int_{t_i}^s \theta(u) dW_u \right) \theta(s) dW_s. \end{aligned}$$

Com relação ao termo $A_{n,5}$, utilizando a seguinte transformação de variáveis:

$$\begin{aligned} Y_s &= \int_{t_i}^s \theta(u) dW_u \\ dZ_s &= \theta(s) dW_s, \end{aligned}$$

temos que $dY_s = dZ_s$ e $Y_s = Z_s$ e a parte estocástica do termo $A_{n,5}$ pode ser reescrita da seguinte forma:

$$2 \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left(\int_{t_i}^s \theta(u) dW_u \right) \theta(s) dW_s = 2 \int_{t_i}^{t_{i+1}} Y_s dZ_s = 2 \int_{t_i}^{t_{i+1}} Y_s dY_s.$$

Utilizando as igualdades (C.28) e (C.29), já que a variação quadrática do processo definido por (C.1) e dY_s são iguais, temos que o termo $A_{n,5}$ pode

ser reescrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
A_{n,5} &= 2 \sum_{i=0}^{N-1} h_{j(n)}(t_i) \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left(\int_{t_i}^s \theta(u) dW_u \right) \theta(s) dW_s \\
&= \sum_{i=0}^{N-1} h_{j(n)}(t_i) 2 \int_{t_i}^{t_{i+1}} Y_s dY_s \\
&= \sum_{i=0}^{N-1} h_{j(n)}(t_i) \left[Y_{t_{i+1}}^2 - \int_{t_i}^{t_{i+1}} (dY_s)^2 \right] \\
&= \sum_{i=0}^{N-1} h_{j(n)}(t_i) \left[\left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} \theta(u) dW_u \right)^2 - \int_{t_i}^{t_{i+1}} \theta^2(u) du \right].
\end{aligned}$$

C.1.6 Convergência do termo $A_{n,1}$

Vamos mostrar nesta seção a convergência em probabilidade do termo $A_{n,1}$ com velocidade $\Delta_n^{-1/2}$, ou seja, que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\Delta_n^{-1/2} |A_{n,1}| \geq \epsilon) = 0 \quad \forall \epsilon > 0,$$

que é equivalente a dizer que $\Delta_n^{-1/2} A_{n,1} = o_p(1)$.

Primeiramente, temos que:

$$\int_{t_i}^s b(u, X_u) du \leq (s - t_i) \sup_{0 \leq u \leq T} b(u, X_u) \leq \Delta_n \sup_{0 \leq u \leq T} b(u, X_u). \quad (\text{C.49})$$

Então, usando a desigualdade (C.49), temos que:

$$\begin{aligned}
|\Delta_n^{-1/2} A_{n,1}| &\leq 2\Delta_n^{1/2} \left| \sup_{0 \leq u \leq T} b(u, X_u) \sum_{i=0}^{N-1} h_{j(n)}(t_i) \int_{t_i}^{t_{i+1}} b(s, X_s) ds \right| \\
&\leq 2\Delta_n^{1/2} \sup_{0 \leq u \leq T} b^2(u, X_u) \left| \sum_{i=0}^{N-1} h_{j(n)}(t_i) \Delta_n \right| \\
&\leq 2\Delta_n^{1/2} \sup_{0 \leq u \leq T} b^2(u, X_u) \sum_{i=0}^{N-1} |h_{j(n)}(t_i)| \Delta_n. \quad (\text{C.50})
\end{aligned}$$

Como a função $b(\cdot, \cdot)$ pertence à classe $C^1([0, T] * \mathbb{R})$, num intervalo compacto, a função $b(\cdot, \cdot)$ é limitada; assim, $P(|\sup_{0 \leq t \leq T} b(t, X_t)| \geq M_T) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$ e, da mesma forma, $P(|\sup_{0 \leq t \leq T} b^2(t, X_t)| \geq M_T^2) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$. Desta forma, em (C.50), temos que $\sup_{0 \leq u \leq T} b^2(u, X_u) = O_p(1)$ e, para mostrar que $\Delta_n^{-1/2} A_{n,1} = o_p(1)$, basta mostrar agora que $\sum_{i=0}^{N-1} |h_{j(n)}(t_i)| \Delta_n \rightarrow \int_0^T |h(t)| dt$. Portanto,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=0}^{N-1} |h_{j(n)}(t_i)| \Delta_n - \int_0^T |h(t)| dt \right| &\leq \left| \sum_{i=0}^{N-1} |h_{j(n)}(t_i)| \Delta_n - \int_0^T |h_{j(n)}(t)| dt \right| \\ &+ \left| \int_0^T |h_{j(n)}(t)| dt - \int_0^T |h(t)| dt \right| \quad (\text{C.51}) \end{aligned}$$

Assim, lembrando que $\int_0^T |h_{j(n)}(t)| dt = \lim \sum_i |h_{j(n)}(t_i^*)| |t_{i+1} - t_i|$, onde t_i^* é qualquer $t \in [t_i, t_{i+1})$, podemos interpretar o termo da esquerda em (C.51) como o erro cometido por uma aproximação discreta para esta integral. Desta forma:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=0}^{N-1} |h_{j(n)}(t_i)| \Delta_n - \int_0^T |h(t)| dt \right| &\leq T \omega(|h_{j(n)}|, \Delta_n) + \left| \int_0^T (|h_{j(n)}(t)| - |h(t)|) dt \right| \\ &\leq T \omega(|h_{j(n)}|, \Delta_n) + T \sup_{t \in \mathbb{R}} ||h_{j(n)}(t)| - |h(t)||. \end{aligned}$$

Como $\omega(|h_{j(n)}|, \Delta_n) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$, temos que verificar a convergência do termo à direita. Supondo que $s' = m' \wedge r \geq 1/2$, o espaço $C_0(\mathbb{R})$ é incluso em $H^{s'}(\mathbb{R})$ e, por propriedades de ondaletas, temos:

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} ||h_{j(n)}(t)| - |h(t)|| \leq C ||h_{j(n)}| - |h|| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (\text{C.52})$$

Então, de (C.52), temos que $\sum_{i=0}^{N-1} |h_{j(n)}(t_i)| \Delta_n \rightarrow \int_0^T |h(t)| dt$ e, conseqüentemente, sabemos que $\Delta_n^{-1/2} A_{n,1} = o_p(1)$.

C.1.7 Convergência do termo $A_{n,2}$

Primeiramente, o termo $A_{n,2}$ pode ser escrito como:

$$A_{n,2} = \int_0^T \xi_u dW_u, \quad (\text{C.53})$$

onde

$$\xi_u = 2 \sum_{i=0}^{N-1} h_{j(n)}(t_i) b(t_i, X_{t_i}) \theta(u) (t_{i+1} - u) \mathbf{1}_{(t_i, t_{i+1}]}(u). \quad (\text{C.54})$$

Para verificar a convergência do termo $A_{n,2}$, teremos que utilizar um resultado conhecido como **Propriedade de dominação de Lengart**.

Proposição C.1.2 (Dominação de Lengart).

Se X é um processo adaptado que admite limite à esquerda e é contínuo à direita, onde $E(|X|) \leq E(|A|)$ e $\Delta A_s = A_s - \lim_{t \nearrow s} A_t$, sendo A um processo adaptado crescente, vale a seguinte desigualdade:

$$P\left(\sup_{s \leq T} |X_s| \geq \epsilon\right) \leq \frac{1}{\epsilon} \left[\eta + E\left(\sup_{s \leq T} \Delta A_s\right) \right] + P(A_T \geq \eta). \quad (\text{C.55})$$

Para utilizar a proposição acima, vamos definir os seguintes processos:

$$X_s = \Delta_n^{-1} \left(\int_0^s \xi_u dW_u \right)^2 \quad e \quad A_s = \Delta_n^{-1} \int_0^s \xi_u^2 du. \quad (\text{C.56})$$

Assim, utilizando a propriedade das integrais de Itô conhecida como Isometria de Itô, obtemos a seguinte igualdade:

$$\begin{aligned} E(|X_s|) &= E\left(\Delta_n^{-1} \left(\int_0^s \xi_u dW_u \right)^2\right) = E\left(\Delta_n^{-1} \left| \int_0^s \xi_u^2 du \right|\right) \\ &= E(|A_s|). \end{aligned} \quad (\text{C.57})$$

Assim, vemos que os dois processos X_s e A_s satisfazem as suposições da proposição, pois claramente o processo A_s é crescente e o limite ΔA é dado por:

$$\Delta A_s = A_s - \lim_{t \uparrow s} A_t = 0. \quad (\text{C.58})$$

Utilizando o resultado em (C.58), temos:

$$E\left(\sup_{0 \leq s \leq T} \Delta A_s\right) = 0. \quad (\text{C.59})$$

Para utilizarmos o resultado da proposição C.1.2, precisamos apenas encontrar $P(A_T \geq \eta)$. Temos que:

$$\begin{aligned} A_T &= 4\Delta_n^{-1} \int_0^T \sum_{i=0}^{N-1} h_{j(n)}^2(t_i) b^2(t_i, X_{t_i}) \theta^2(u) (t_{i+1} - u)^2 \mathbf{1}_{(t_i, t_{i+1}]}(u) du \\ &= 4 \sum_{i=0}^{N-1} h_{j(n)}^2(t_i) b^2(t_i, X_{t_i}) \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Delta_n^{-1} \theta^2(u) (t_{i+1} - u)^2 du \\ &\leq 4 \sum_{i=0}^{N-1} h_{j(n)}^2(t_i) b^2(t_i, X_{t_i}) \Delta_n^2 \sup_{0 \leq u \leq T} \theta^2(u) \\ &\leq 4 \sup_{0 \leq u \leq T} b^2(u, X_u) \Delta_n \sup_{0 \leq u \leq T} \theta^2(u) \sum_{i=0}^{N-1} h_{j(n)}^2(t_i) \Delta_n \\ &= C \Delta_n \sup_{0 \leq u \leq T} b^2(u, X_u) \sum_{i=0}^{N-1} h_{j(n)}^2(t_i) \Delta_n. \end{aligned} \quad (\text{C.60})$$

Como $\sum_{i=0}^{N-1} h_{j(n)}^2(t_i) \Delta_n \rightarrow \int_0^T h^2(t) dt$ e $\sup_{0 \leq u \leq T} b^2(u, X_u) = O_p(1)$, pelos mesmos motivos utilizados na convergência do termo $A_{n,1}$, temos em (C.60) que $A_T = o_p(1)$, que é equivalente a dizer que $\lim_{n \rightarrow 0} P(A_T \geq \eta) \rightarrow 0$, $\forall \eta > 0$. Então, utilizando a proposição acima e (C.58), temos:

$$\begin{aligned} P(|A_{n,2}| \geq \epsilon) &= P(|\Delta_n^{-1/2} A_{n,2}| \geq \Delta_n^{-1/2} \epsilon) = P(\Delta_n^{-1} |A_{n,2}|^2 \geq \Delta_n^{-1} \epsilon^2) \\ &\leq P\left(\Delta_n^{-1} \sup_{0 \leq s \leq T} \left(\int_0^s \xi_u dW_u\right)^2 \geq \Delta_n^{-1} \epsilon^2\right) \\ &\leq \frac{\Delta_n}{\epsilon^2} \left[\eta + E\left(\sup_{0 \leq s \leq T} \Delta A_s\right) \right] + P(A_T \geq \eta) \\ &= \frac{\eta \Delta_n}{\epsilon^2} + P(A_T \geq \eta). \end{aligned} \quad (\text{C.61})$$

Então, de (C.60) e (C.61), temos que $\Delta_n^{-1/2} A_{n,2} = o_p(1)$.

C.1.8 Convergência do termo $A_{n,3}$

Para provar a convergência do termo $A_{n,3}$, primeiramente provaremos a seguinte proposição:

Proposição C.1.3. *Seja $\theta(\cdot)$ uma função contínua, adaptada à filtragem gerada por W e seja $M_t = \int_0^t \theta(u) dW_u$. Se $w_T(M, \Delta) = \sup_{|u-v| \leq \Delta} |M_u - M_v|$ denota o módulo de continuidade de M_t em $[0, T]$, com $u > v$, então, para qualquer $\beta < 1/2$, temos que:*

$$\Delta^{-\beta} w_T(M, \Delta) \xrightarrow{\Delta \rightarrow 0} 0. \quad (\text{C.62})$$

Para provar a proposição (C.1.3), iremos utilizar o resultado (Revuz and Yor 1988), teorema 1.6, pág. 170, onde mostra-se que $M_t = W_{A_t}$ é um processo de Wiener padrão, sendo $A_t = \int_0^t \theta^2(u) du$, se W_t é um processo de Wiener padrão. Utilizando esse resultado e lembrando que $\langle W, W \rangle_t = \sqrt{\langle M, M \rangle_t} = \sqrt{t}$, obtemos que:

$$\begin{aligned} w_T(M, \Delta) &= \sup_{|u-v| \leq \Delta} |M_u - M_v| = \sup_{|u-v| \leq \Delta} |W_{A_u} - W_{A_v}| \\ &= \sup_{|u-v| \leq \Delta} \langle W, W \rangle_{A_u - A_v} = \sup_{|u-v| \leq \Delta} \sqrt{\int_v^u \theta^2(s) ds} \\ &\leq \Delta^{1/2} \sup_{0 \leq s \leq T} \theta^2(s) = \Delta^{1/2} C. \end{aligned} \quad (\text{C.63})$$

Assim, de (C.63) fica provado que $\Delta^{-\beta} w_T(M, \Delta) \rightarrow 0$, para qualquer $\beta < 1/2$. Agora, lembrando das restrições em β e notando que $\Delta_n^{3/2} = \frac{1}{2^{3n/2}} \leq \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2^{2\beta n}} = \Delta_n^{2\beta}$, obtemos a seguinte desigualdade para $A_{n,3}$:

$$\begin{aligned}
|A_{n,3}| &= 2 \left| \sum_{i=0}^{N-1} h_{j(n)}(t_i) \int_{t_i}^{t_{i+1}} (b(s, X_s) - b(t_i, X_{t_i})) \left(\int_{t_i}^s \theta(u) dW_u \right) ds \right| \\
&\leq C \Delta_n w_T(M, \Delta_n) \sum_{i=0}^{N-1} |h_{j(n)}(t_i)| \int_{t_i}^{t_{i+1}} |b(s, X_s) - b(t_i, X_{t_i})| ds \\
&\leq C \Delta_n w_T(M, \Delta_n) \sum_{i=0}^{N-1} |h_{j(n)}(t_i)| \Delta_n 2 \sup_{0 \leq s \leq T} |b(s, X_s)| \\
&\leq C_1 \Delta_n \Delta_n^{1/2} \sup_{0 \leq s \leq T} |b(s, X_s)| \sum_{i=0}^{N-1} |h_{j(n)}(t_i)| \Delta_n \\
&\leq C_1 \Delta_n^{2\beta} \sup_{0 \leq s \leq T} |b(s, X_s)| \sum_{i=0}^{N-1} |h_{j(n)}(t_i)| \Delta_n. \tag{C.64}
\end{aligned}$$

De (C.64), escolhendo qualquer β entre $(1/4, 1/2)$, procedendo da mesma forma utilizada para mostrar a convergência de $A_{n,1}$ já que

$$\sup_{0 \leq s \leq T} |b(s, X_s)| = O_p(1)$$

e

$$\sum_{i=0}^{N-1} |h_{j(n)}(t_i)| \Delta_n \rightarrow \int_0^T |h_{j(n)}(t)| dt,$$

obtemos que $\Delta_n^{-1/2} A_{n,3} = o_p(1)$.

C.1.9 Convergência do termo $A_{n,4}$

Primeiramente, o termo $A_{n,4}$ pode ser escrito como:

$$A_{n,4} = \int_0^T \xi_u dW_u, \tag{C.65}$$

onde

$$\xi_u = 2 \sum_{i=0}^{N-1} h_{j(n)}(t_i) \theta(u) \left(\int_{t_i}^u b(s, X_s) ds \right) \mathbf{1}_{(t_i, t_{i+1}]}(u). \tag{C.66}$$

Para provar a convergência do termo $A_{n,4}$, utilizaremos novamente a propriedade de dominação de Lengart, definida na subseção C.1.7. Para tanto, vamos definir os seguintes processos:

$$X_s = \Delta_n^{-1} \left(\int_0^s \xi_u dW_u \right)^2 \quad e \quad A_s = \Delta_n^{-1} \int_0^s \xi_u^2 du. \quad (\text{C.67})$$

Assim, utilizando a propriedade das integrais de Itô conhecida como Isometria de Itô, obtemos a seguinte igualdade:

$$\begin{aligned} E(|X_s|) &= E \left(\Delta_n^{-1} \left(\int_0^s \xi_u dW_u \right)^2 \right) = E \left(\Delta_n^{-1} \left| \int_0^s \xi_u^2 du \right| \right) \\ &= E(|A_s|). \end{aligned} \quad (\text{C.68})$$

Assim, vemos que os dois processos X_s e A_s satisfazem as suposições da proposição de Lengart, pois claramente o processo ξ_u é crescente e o limite ΔA é dado por:

$$\Delta A_s = A_s - \lim_{t \uparrow s} A_t. \quad (\text{C.69})$$

Utilizando o resultado em (C.69), temos:

$$E \left(\sup_{0 \leq s \leq T} \Delta A_s \right) = 0. \quad (\text{C.70})$$

Para utilizarmos o resultado da proposição, precisamos apenas encontrar $P(A_T \geq \eta)$. Temos que:

$$\begin{aligned} A_T &= 4\Delta_n^{-1} \int_0^T \sum_{i=0}^{N-1} h_{j(n)}^2(t_i) \theta^2(u) \left(\int_{t_i}^u b(s, X_s) ds \right)^2 \mathbf{1}_{(t_i, t_{i+1}]}(u) du \\ &= 4 \sum_{i=0}^{N-1} h_{j(n)}^2(t_i) \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} \theta^2(u) \Delta_n^{-1} \left(\int_{t_i}^u b(s, X_s) ds \right)^2 du \right) \\ &\leq 4 \sum_{i=0}^{N-1} h_{j(n)}^2(t_i) \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} \theta^2(u) \Delta_n \sup_{0 \leq s \leq T} b^2(s, X_s) du \right) \\ &\leq 4 \sum_{i=0}^{N-1} h_{j(n)}^2(t_i) \sup_{0 \leq u \leq T} \theta^2(u) \Delta_n^2 \sup_{0 \leq s \leq T} b^2(s, X_s) \\ &= C \Delta_n \sup_{0 \leq s \leq T} b^2(s, X_s) \sum_{i=0}^{N-1} h_{j(n)}^2(t_i) \Delta_n. \end{aligned} \quad (\text{C.71})$$

Como

$$\sum_{i=0}^{N-1} h_{j(n)}^2(t_i) \Delta_n \rightarrow \int_0^T h^2(t) dt$$

e

$$\sup_{0 \leq u \leq T} b^2(u, X_u) = O_p(1),$$

pelos mesmos motivos utilizados na convergência do termo $A_{n,1}$, temos em (C.71) que $A_T = o_p(1)$, que é equivalente a dizer que

$$\lim_{n \rightarrow 0} P(A_T \geq \eta) \rightarrow 0 \quad \forall \eta > 0.$$

Então, utilizando a proposição de Lengart e (C.69), temos:

$$\begin{aligned} P(|A_{n,4}| \geq \epsilon) &= P(|\Delta_n^{-1/2} A_{n,4}| \geq \Delta_n^{-1/2} \epsilon) = P(\Delta_n^{-1} |A_{n,4}|^2 \geq \Delta_n^{-1} \epsilon^2) \\ &\leq P\left(\Delta_n^{-1} \sup_{0 \leq s \leq T} \left(\int_0^s \xi_u dW_u\right)^2 \geq \Delta_n^{-1} \epsilon^2\right) \\ &\leq \frac{\Delta_n}{\epsilon^2} \left[\eta + E\left(\sup_{0 \leq s \leq T} \Delta A_s\right)\right] + P(A_T \geq \eta) \\ &= \frac{\eta \Delta_n}{\epsilon^2} + P(A_T \geq \eta). \end{aligned} \quad (C.72)$$

Então, de (C.71) e (C.72), temos que $\Delta_n^{-1/2} A_{n,4} = o_p(1)$.

C.1.10 Convergência do termo $A_{n,5}$

Nesta seção, queremos mostrar que o termo $\Delta_n^{-1/2} A_{n,5}$ converge em distribuição para uma $N(0, 2 \int_0^T \theta^4(t) h^2(t) dt)$. Nas seções anteriores, foi visto que o termo $\Delta_n^{-1/2} A_{n,5}$ pode ser escrito da seguinte forma:

$$\Delta_n^{-1/2} A_{n,5} = \sum_{i=0}^{N-1} \xi_{i,n}, \quad (C.73)$$

onde

$$\xi_{i,n} = \Delta_n^{-1/2} h_{j(n)}(t_i) \left[\left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} \theta(u) dW_u \right)^2 - \int_{t_i}^{t_{i+1}} \theta^2(u) du \right]. \quad (C.74)$$

Para obter a convergência desejada de (C.73), aplicaremos o Teorema Central de Liapunov.

Teorema C.1.2 (TCL de Liapunov).

Sejam $\xi_{i,n} : i \geq 1$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes tais que $E(\xi_{i,n}) = \mu_{i,n}$ e $Var(\xi_{i,n}) = \sigma_{i,n}^2 < \infty$, com pelo menos um $\sigma_{i,n}^2 > 0$. Seja $s_n^2 = Var(S_n) = \sum_{i=0}^{2^n-1} \sigma_{i,n}^2$. Então,

$$\frac{S_n - E(S_n)}{s_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathcal{N}(0, 1),$$

se existir $\delta > 0$ tal que :

$$\frac{1}{s_n^{2+\delta}} \sum_{i=0}^{2^n-1} E|\xi_{i,n} - \mu_{i,n}|^{2+\delta} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (C.75)$$

Um resultado importante para encontrar os momentos das v.a.'s $\xi_{i,n}$, que pode ser provado utilizando a função característica e o fato de $\theta \in C^1([0, \infty))$, é:

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \theta(u) dW_u \sim N\left(0, \sigma^2 \int_{t_i}^{t_{i+1}} \theta^2(u) du\right). \quad (C.76)$$

Utilizaremos a partir de agora $\sigma = 1$. Assim, utilizando (C.76) e lembrando que $(N(0, 1))^2 \sim \chi_1^2$, é fácil mostrar que:

$$E(\xi_{i,n}) = 0 \quad e \quad Var(\xi_{i,n}) = 2\Delta_n^{-1} h_{j(n)}^2(t_i) \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} \theta^2(u) du \right) \quad (C.77)$$

Utilizaremos o Teorema Central de Liapunov, com $\delta = 1$. Vamos trabalhar com o numerador e o denominador da condição de Liapunov separadamente. Começando pelo numerador, sabemos que $\mu_{i,n} = 0$; assim, temos:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{N-1} E|\xi_{i,n}|^3 &= \sum_{i=0}^{N-1} E \left| \Delta_n^{-1/2} h_{j(n)}(t_i) \left[\left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} \theta(u) dW_u \right)^2 - \int_{t_i}^{t_{i+1}} \theta^2(u) du \right] \right|^3 \\
&= \Delta_n^{-3/2} \sum_{i=0}^{N-1} |h_{j(n)}(t_i)|^3 E \left| \left[\left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} \theta(u) dW_u \right)^2 - \int_{t_i}^{t_{i+1}} \theta^2(u) du \right] \right|^3 \\
&\leq \Delta_n^{-3/2} \sum_{i=0}^{N-1} |h_{j(n)}(t_i)|^3 E \left| \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} \theta(u) dW_u \right)^2 \right|^3 \\
&= \Delta_n^{-3/2} \sum_{i=0}^{N-1} |h_{j(n)}(t_i)|^3 E \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} \theta(u) dW_u \right)^6.
\end{aligned}$$

Utilizando a fórmula para o cálculo de qualquer momento de uma distribuição normal, obtemos:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{N-1} E|\xi_{i,n}|^3 &\leq \Delta_n^{-3/2} \sum_{i=0}^{N-1} |h_{j(n)}(t_i)|^3 10395 \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} \theta^2(u) du \right)^3 \\
&\leq 10395 \Delta_n^{-3/2} \sum_{i=0}^{N-1} |h_{j(n)}(t_i)|^3 \left(\Delta_n \sup_{0 \leq u \leq T} \theta^2(u) \right)^3 \\
&= C \Delta_n^{1/2} \sum_{i=0}^{N-1} |h_{j(n)}(t_i)|^3 \Delta_n. \tag{C.78}
\end{aligned}$$

Como

$$\sum_{i=0}^{N-1} |h_{j(n)}(t_i)|^3 \Delta_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^T |h(t)|^3 dt,$$

de (C.78), temos que

$$\sum_{i=0}^{N-1} E|\xi_{i,n}|^3 \rightarrow 0.$$

Para que a condição de Liapunov seja satisfeita, basta mostrar que o limite do denominador é finito, neste caso $(2 \int_0^T \theta^4(t) h^2(t) dt)^{3/2}$. Para mostrar que isso ocorre, trabalharemos somente com s_n^2 pois se $s_n^2 \rightarrow C$, então $(s_n^2)^{3/2} \rightarrow C^{3/2}$. Lembrando que $\int_a^b f(t) dt = (b-a)f(t^*)$, para algum $t^* \in [a, b]$, temos:

$$\begin{aligned}
\left| s_n^2 - 2 \int_0^T \theta^4(t) h^2(t) dt \right| &= \left| \sum_{i=0}^{N-1} 2\Delta_n^{-1} h_{j(n)}^2(t_i) \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} \theta^2(u) du \right) - 2 \int_0^T \theta^4(t) h^2(t) dt \right| \\
&= \left| \sum_{i=0}^{N-1} 2\Delta_n^{-1} h_{j(n)}^2(t_i) (\Delta_n \theta^2(t^*))^2 - 2 \int_0^T \theta^4(t) h^2(t) dt \right| \\
&\leq \left| 2 \sum_{i=0}^{N-1} h_{j(n)}^2(t_i) \theta^4(t^*) \Delta_n - 2 \int_0^T \theta^4(t) h_{j(n)}^2(t) dt \right| \\
&+ \left| 2 \int_0^T \theta^4(t) h_{j(n)}^2(t) dt - 2 \int_0^T \theta^4(t) h^2(t) dt \right|.
\end{aligned}$$

Lembrando que $\int_0^T \theta^4(t) h_{j(n)}^2(t) dt = \lim \sum_i h_{j(n)}^2(t_i^*) \theta^4(t_i^*) |t_{i+1} - t_i|$ e utilizando o módulo de continuidade definido anteriormente, temos:

$$\begin{aligned}
\left| s_n^2 - 2 \int_0^T \theta^4(t) h^2(t) dt \right| &\leq Tw(h_{j(n)}^2 \theta^4, \Delta_n) \\
&+ \left| 2 \int_0^T \theta^4(t) (h_{j(n)}^2(t) - h^2(t)) dt \right| \\
&\leq Tw(h_{j(n)}^2 \theta^4, \Delta_n) \\
&+ 2T \sup_{0 \leq t \leq T} \theta^4(t) \sup_{0 \leq t \leq T} |h_{j(n)}^2(t) - h^2(t)| \quad (C.79)
\end{aligned}$$

Assim, por propriedades de ondaletas C.1.1 e do módulo de continuidade, temos que $(s_n^2) \rightarrow 2 \int_0^T \theta^4(t) h^2(t) dt$. Consequentemente, a sequência de variáveis aleatórias $\xi_{i,n} : i \geq 1$ satisfaz o Teorema Central de Liapunov e, combinando esse resultado com (C.79), obtemos:

$$\Delta_n^{-1/2} A_{n,5} = \sum_{i=0}^{N-1} \xi_{i,n} \rightarrow^D N \left(0, 2 \int_0^T \theta^4(t) h^2(t) dt \right). \quad (C.80)$$

C.1.11 Condições Finais

Para verificar a convergência de alguns termos, tivemos que impor condições sobre a regularidade das funções e sobre o nível $j(n)$ em que estamos projetando a volatilidade. Relembrando:

$$\begin{aligned}
T_n &\rightarrow 2^{n/2-j(n)(r \wedge m + r \wedge m')} = O(1) \\
C_n &\rightarrow 2^{2j(n)-n/2} = o(1) \\
A_{n,1} &\rightarrow m' > 1/2.
\end{aligned}$$

Impondo que o nível $j(n)$ seja da forma $[\alpha n]$, das condições acima obtemos:

$$\begin{aligned}
2[\alpha n] < \frac{n}{2} &\rightarrow \alpha < \frac{1}{4} \\
\frac{n}{2} \leq [\alpha n](r \wedge m + r \wedge m') &\rightarrow \frac{1}{2(r \wedge m + r \wedge m')} \leq \alpha.
\end{aligned}$$

Assim todas as condições impostas no teorema C.1.1 foram esclarecidas.

C.2 Convergência do EQMI

Nesta seção, estamos interessados em provar um teorema com respeito ao erro quadrático médio integrado (EQMI), onde γ é uma função contínua não-negativa com suporte $[\alpha, \beta] \subset [0, T]$. Inicialmente, mostraremos que o EQMI pode ser fatorado da maneira usual em:

$$\begin{aligned}
R_n &= E \left(\int_{\mathbb{R}} (\hat{\theta}^2(t) - \theta^2(t))^2 \gamma(t) dt \right) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left((E\hat{\theta}^2(t)) - \theta^2(t) \right)^2 \gamma(t) dt + E \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\hat{\theta}^2(t) - E(\hat{\theta}^2(t)) \right)^2 \gamma(t) dt \right) \\
&\leq B_n^2 + \sup_{t \in \mathbb{R}} \gamma(t) E \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\hat{\theta}^2(t) - E(\hat{\theta}^2(t)) \right)^2 dt \right) \\
&= B_n^2 + \sup_{t \in \mathbb{R}} \gamma(t) D_n.
\end{aligned} \tag{C.81}$$

Utilizando a fatoração definida em (C.81), enunciaremos o seguinte teorema:

Teorema C.2.1. *Sob as condições (A1)-(A3) e se $j(n) - (\frac{n}{2}) \rightarrow -\infty$, quando $n \rightarrow \infty$, valem as seguintes relações para a fatoração do EQMI :*

$$B_n^2 \leq C(2^{4j(n)-2n} + 2^{-2j(n)(m \wedge r)} + 2^{-n}) \quad e$$

$$D_n = 2^{j(n)-n} 2 \int_0^T \theta^4(t) dt + o(2^{j(n)-n}), \quad (C.82)$$

onde a constante C depende somente das funções ϕ , γ e θ^2 .

C.2.1 Fatoração do Termo B_n^2

Primeiramente iremos fatorar o termo B_n^2 e, para isso, é preciso usar (C.11), obtendo a seguinte igualdade:

$$\hat{\theta}^2(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{\mu}_{j(n),k} \phi_{j(n),k}(t) = \sum_{-A \leq k \leq 2^{j(n)}T + A} \hat{\mu}_{j(n),k} \phi_{j(n),k}(t) \quad (C.83)$$

e, lembrando também que o suporte de $\bar{\theta}^2(t)$ está contido em $[-\epsilon, T + \epsilon]$ para algum $\epsilon \geq 0$, obtemos também que:

$$\begin{aligned} \bar{\theta}^2(t) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mu_{j(n),k} \phi_{j(n),k}(t) + \sum_{j \geq j(n)} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \nu_{j,k} \psi_{j,k}(t) \\ &= \sum_{\mathbb{K}} \mu_{j(n),k} \phi_{j(n),k}(t) + \sum_{j \geq j(n)} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \nu_{j,k} \psi_{j,k}(t), \end{aligned} \quad (C.84)$$

onde $\mathbb{K} = -A - 2^{j(n)}\epsilon \leq k \leq 2^{j(n)}(T + \epsilon) + A$.

Se limitarmos $0 \leq t \leq T$, temos que $\phi_{j(n),k}(t) = 0$ para $k \in [-A - 2^{j(n)}\epsilon, -A] \cup (2^{j(n)}T + A, 2^{j(n)}(T + \epsilon) + A]$. Utilizando esta restrição nos inteiros k , é claro nas equações (C.83) e (C.84) que estamos utilizando os mesmos termos em ambos os somatórios, ou seja, $k \in \mathbb{K}$.

Fatoraremos inicialmente o termo $E(\hat{\theta}^2(t) - \theta^2(t))$ e, utilizando as definições (C.83) e (C.84), obtemos:

$$\begin{aligned} E(\hat{\theta}^2(t) - \theta^2(t)) &= \sum_{k \in \mathbb{K}} \phi_{j(n),k}(t) [E(\hat{\mu}_{j(n),k}) - \mu_{j(n),k}] \\ &\quad - \sum_{j \geq j(n)} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \nu_{j,k} \psi_{j,k}(t). \end{aligned} \quad (C.85)$$

Calculando a esperança em (C.85), utilizando a definição (C.8) e (C.30), temos:

$$\begin{aligned}
 E(\hat{\mu}_{j(n),k}) &= \sum_{i=0}^{N-1} \phi_{j(n),k}(t_i) E((X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2) \\
 &= \sum_{i=0}^{N-1} \phi_{j(n),k}(t_i) E\left(2 \int_{t_i}^{t_{i+1}} (X_s - X_{t_i}) dX_s + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \theta^2(s) ds\right) \\
 &= \sum_{i=0}^{N-1} \phi_{j(n),k}(t_i) \left(2E\left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} (X_s - X_{t_i}) dX_s\right) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \theta^2(s) ds\right).
 \end{aligned}$$

Novamente, trabalhando só com a parte da esperança e utilizando que o processo X_t satisfaz (C.1), temos:

$$\begin{aligned}
 E\left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} (X_s - X_{t_i}) dX_s\right) &= E\left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} (X_s - X_{t_i}) b(s, X_s) ds\right) \\
 &\quad + E\left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} (X_s - X_{t_i}) \theta(s) dW_s\right) \\
 &= E\left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} (X_s - X_{t_i}) b(s, X_s) ds\right),
 \end{aligned}$$

pois o termo $E\left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} (X_s - X_{t_i}) \theta(s) dW_s\right)$ é nulo, o que é facilmente verificado utilizando a definição de $(X_s - X_{t_i})$ e lembrando que W_s é um movimento Browniano.

Assim, utilizando os resultados acima e (C.85), temos que:

$$\begin{aligned}
 E(\hat{\theta}^2(t) - \theta^2(t)) &= \sum_{k \in \mathbb{K}} \phi_{j(n),k}(t) \left(\sum_{i=0}^{N-1} \phi_{j(n),k}(t_i) \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} \theta^2(s) ds \right) - \mu_{j(n),k} \right) \\
 &\quad + 2 \sum_{k \in \mathbb{K}} \phi_{j(n),k}(t) \sum_{i=0}^{N-1} \phi_{j(n),k}(t_i) E\left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} (X_s - X_{t_i}) b(s, X_s) ds\right) \\
 &\quad + \sum_{j \geq j(n)} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \nu_{j,k} \psi_{j,k}(t) = B_1(t) + B_2(t) + B_3(t). \tag{C.86}
 \end{aligned}$$

Então, utilizando a fatoração de $E \left(\hat{\theta}^2(t) - \theta^2(t) \right)$, temos que o termo B_n^2 pode ser fatorado como $\int_{\mathbb{R}} (B_1(t) + B_2(t) + B_3(t))^2 \gamma(t) dt$. Definida a partição do termo B_n^2 , agora estamos interessados em encontrar cotas superiores para cada uma dos termos.

C.2.2 Cota Superior para $\int_{\mathbb{R}} B_1^2(t) \gamma(t) dt$

Para encontrar uma cota superior para $B_1(t)$, primeiramente temos que lembrar da definição de $\mu_{j(n),k}$ e assim obtemos:

$$\begin{aligned}
 B_1(t) &= \sum_{k \in \mathbb{K}} \phi_{j(n),k}(t) \left(\sum_{i=0}^{N-1} \phi_{j(n),k}(t_i) \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} \theta^2(t) dt \right) - \mu_{j(n),k} \right) \\
 &= \sum_{k \in \mathbb{K}} \phi_{j(n),k}(t) \left(\sum_{i=0}^{N-1} \phi_{j(n),k}(t_i) \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} \theta^2(t) dt \right) - \int_{\mathbb{R}} \theta^2(t) \phi_{j(n),k}(t) dt \right) \\
 &= \sum_{k \in \mathbb{K}} \phi_{j(n),k}(t) \left(\sum_{i=0}^{N-1} \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} \theta^2(t) \phi_{j(n),k}(t_i) dt - \int_{t_i}^{t_{i+1}} \theta^2(t) \phi_{j(n),k}(t) dt \right) \right) \\
 &\quad - \sum_{k \in \mathbb{K}} \phi_{j(n),k}(t) \int_{\mathbb{R} \cap [0,T]^C} \theta^2(t) \phi_{j(n),k}(t) dt \\
 &= \sum_{k \in \mathbb{K}} \phi_{j(n),k}(t) \left(\sum_{i=0}^{N-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \theta^2(t) (\phi_{j(n),k}(t_i) - \phi_{j(n),k}(t)) dt \right) - R(t) \\
 &= \sum_{k \in \mathbb{K}} \phi_{j(n),k}(t) \lambda_k - R(t). \tag{C.87}
 \end{aligned}$$

Pela definição de λ_k em (C.87) e lembrando da relação entre os módulos de continuidade definida em (C.36), obtemos:

$$\begin{aligned}
 |\lambda_k| &= \left| \sum_{i=0}^{N-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \theta^2(t) (\phi_{j(n),k}(t_i) - \phi_{j(n),k}(t)) dt \right| \\
 &\leq \left| \sum_{i=0}^{N-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \theta^2(t) w(\phi_{j(n),k}, \Delta_n) dt \right| \leq \left| w(\phi_{j(n),k}, \Delta_n) \int_0^T \theta^2(t) dt \right| \\
 &\leq C_1 2^{\frac{3j(n)}{2}} \Delta_n C_2 = C_3 2^{\frac{3j(n)}{2} - n}. \tag{C.88}
 \end{aligned}$$

Lembrando que o suporte de $\gamma(t)$ é $[\alpha, \beta]$, podemos mostrar que $R(t) = 0$ $\forall t \in [\alpha, \beta]$. Assim, ao considerarmos o termo $\int B_1^2(t)\gamma(t)dt$ da fatoração de B_n^2 , não precisamos utilizar o termo $R(t)$ de $B_1(t)$. Assim, de (C.87) e (C.88), pelo fato que $\text{Card}(\mathbb{K}) \leq C2^{j(n)}$ e lembrando das propriedades das bases de ondaletas C.1.1, temos:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} B_1^2(t)\gamma(t)dt &= \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{k \in \mathbb{K}} \phi_{j(n),k}(t)\lambda_k \right)^2 \gamma(t)dt \leq \sup_{t \in \mathbb{R}} \gamma(t) \sum_{k \in \mathbb{K}} \lambda_k^2 \\ &\leq C_1(\text{Card}\mathbb{K}) \left(C_2 2^{\frac{3j(n)}{2} - n} \right)^2 \leq C_3 2^{4j(n) - 2n} \end{aligned} \quad (\text{C.89})$$

Assim, em (C.89), obtivemos a cota superior desejada para $\int_{\mathbb{R}} B_1^2(t)\gamma(t)dt$.

C.2.3 Cota Superior para $\int_{\mathbb{R}} B_2^2(t)\gamma(t)dt$

Para trabalhar com o termo $B_2(t)$, utilizaremos a definição de $(X_s - X_{t_i})$ dada em (C.44):

$$\begin{aligned} B_1(t) &= 2 \sum_{k \in \mathbb{K}} \phi_{j(n),k}(t) \sum_{i=0}^{N-1} \phi_{j(n),k}(t_i) E \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} (X_s - X_{t_i}) b(s, X_s) ds \right) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{K}} \phi_{j(n),k}(t) 2 \sum_{i=0}^{N-1} \phi_{j(n),k}(t_i) E \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} b(s, X_s) \left(\int_{t_i}^s b(u, X_u) du \right) ds \right) \\ &\quad + \sum_{k \in \mathbb{K}} \phi_{j(n),k}(t) 2 \sum_{i=0}^{N-1} \phi_{j(n),k}(t_i) E \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} b(s, X_s) \left(\int_{t_i}^s \theta(u) dW_u \right) ds \right) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{K}} \phi_{j(n),k}(t) (S'_k + S''_k). \end{aligned} \quad (\text{C.90})$$

Vamos encontrar agora cotas superiores para as duas esperanças em (C.90). Para isso, basta usarmos a desigualdade de Cauchy-Schwartz, a propriedade de isometria das integrais de Itô e a condição (C2). Assim:

$$\begin{aligned}
& \left| E \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} b(s, X_s) \left(\int_{t_i}^s b(u, X_u) du \right) ds \right) \right| \\
& \leq \int_{t_i}^{t_{i+1}} E \left(\left| b(s, X_s) \left(\int_{t_i}^s b(u, X_u) du \right) \right| \right) ds \\
& \leq \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sqrt{E(b(s, X_s))^2 E \left(\int_{t_i}^s |b(u, X_u)| du \right)^2} ds \\
& \leq K_T^2 \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sqrt{E(1 + |X_s|)^2 E \left(\int_{t_i}^s (1 + |X_u|) du \right)^2} ds \\
& \leq K_T^2 \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sqrt{E(1 + |X_s|)^2 E \left(\Delta_n \sup_{0 \leq u \leq T} (1 + |X_u|) \right)^2} ds \\
& \leq K_T^2 \Delta_n \sqrt{E \left(\sup_{0 \leq u \leq T} (1 + |X_u|)^2 \right)} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sqrt{E(1 + |X_s|)^2} ds \\
& \leq C_1 \Delta_n^2 \sup_{0 \leq u \leq T} \sqrt{E(1 + |X_u|)^2} = C \Delta_n^2 \tag{C.91}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
& \left| E \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} b(s, X_s) \left(\int_{t_i}^s \theta(u) dW u \right) ds \right) \right| \\
& \leq \int_{t_i}^{t_{i+1}} E \left| b(s, X_s) \left(\int_{t_i}^s \theta(u) dW u \right) \right| ds \\
& \leq \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sqrt{E(b(s, X_s)^2) E \left(\int_{t_i}^s \theta(u) dW u \right)^2} ds \\
& = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sqrt{E(b(s, X_s)^2) \left(\int_{t_i}^s \theta^2(u) du \right)} ds \\
& \leq \Delta_n^{1/2} \sup_{0 \leq u \leq T} (\theta^2(u)) \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sqrt{E(b(s, X_s)^2)} ds \\
& \leq \Delta_n^{3/2} \sup_{0 \leq u \leq T} (\theta^2(u)) \sqrt{\sup_{0 \leq u \leq T} (E(1 + |X_u|)^2)} \\
& = C \Delta_n^{3/2}. \tag{C.92}
\end{aligned}$$

De (C.91) e (C.92), temos que :

$$\begin{aligned}
|S'_k + S''_k| &\leq 2 \left| \sum_{i=0}^{N-1} \phi_{j(n),k}(t_i) (C_1 \Delta_n^2 + C_2 \Delta_n^{3/2}) \right| \\
&\leq C_3 \Delta_n^{3/2} \left| \sum_{i=0}^{N-1} \phi_{j(n),k}(t_i) \right| \leq C_3 \Delta_n^{1/2} \sum_{i=0}^{N-1} |\phi_{j(n),k}(t_i)| \Delta_n \\
&= C_3 \Delta_n^{1/2} \sum_{i=0}^{N-1} 2^{j(n)/2} |\phi(2^{j(n)} t_i - k)| \Delta_n.
\end{aligned}$$

Fazendo $u_i = 2^{j(n)} t_i - k$, temos que $\Delta_n = (u_{i+1} - u_i) 2^{-j(n)}$:

$$|S'_k + S''_k| \leq C_3 \Delta_n^{1/2} 2^{-j(n)/2} \sum_{i=0}^{N-1} (u_{i+1} - u_i) |\phi(u_i)|$$

e, como $\sum_{i=0}^{N-1} (u_{i+1} - u_i) |\phi(u_i)| \rightarrow \int_0^T |\phi(t)| dt \leq \sqrt{\int_{\mathbb{R}} \phi^2(t) dt} = 1$, temos:

$$|S'_k + S''_k| \leq C_3 \Delta_n^{1/2} 2^{-j(n)/2}. \quad (\text{C.93})$$

Utilizando (C.92), $\text{Card}(\mathbb{K}) \leq C 2^{j(n)}$ e lembrando das propriedades das bases de ondaletas, obtemos que:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} B_2^2(t) \gamma(t) dt &= \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{k \in \mathbb{K}} \phi_{j(n),k}(t) (S'_k + S''_k) \right)^2 \gamma(t) dt \\
&\leq \sup_{t \in \mathbb{R}} \gamma(t) \sum_{k \in \mathbb{K}} (S'_k + S''_k)^2 \leq C_1 (\text{Card} \mathbb{K}) (C_2 \Delta_n^{1/2} 2^{-j(n)/2})^2 \\
&= C \Delta_n.
\end{aligned} \quad (\text{C.94})$$

Assim, em (C.94), obtemos a cota superior desejada para $\int_{\mathbb{R}} B_2^2(t) \gamma(t) dt$.

C.2.4 Cota Superior para $\int_{\mathbb{R}} B_3^2(t) \gamma(t) dt$

Utilizando a proposição C.1.1, é fácil ver que:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} B_3^2(t) \gamma(t) dt &\leq \sup_{t \in \mathbb{R}} \gamma(t) \int_{\mathbb{R}} B_3^2(t) dt = \|\bar{\theta}^2(t) - P_{j(n)} \bar{\theta}^2(t)\|^2 \\
&\leq 2^{-2j(n)(m \wedge r)} \epsilon_{j(n)} \leq \sup_n \{\epsilon_{j(n)}\} 2^{-2j(n)(m \wedge r)} \\
&= C 2^{-2j(n)(m \wedge r)}.
\end{aligned} \quad (\text{C.95})$$

Assim, em (C.95), obtemos a cota superior desejada para $\int_{\mathbb{R}} B_3^2(t)\gamma(t)dt$.

C.2.5 Cota Superior para $\int_{\mathbb{R}} B_1(t)B_2(t)\gamma(t)dt$

Primeiramente, vamos ver que lembrando-se da desigualdade de Cauchy-Schwartz, de (C.89) e de (C.94), o termo $\int_{\mathbb{R}} B_1(t)B_2(t)\gamma(t)dt$ tem a seguinte cota superior:

$$\begin{aligned} |B_{12}| &= \left| \int_{\mathbb{R}} B_1(t)B_2(t)\gamma(t)dt \right| \leq \sup_{t \in \mathbb{R}} \gamma(t) \left| \int_{\mathbb{R}} B_1(t)B_2(t)dt \right| \\ &\leq C_1 \sqrt{\int_{\mathbb{R}} B_1^2(t)dt \int_{\mathbb{R}} B_2^2(t)dt} \\ &\leq C_2 \Delta_n^{1/2} C_3 2^{2j(n)-n} = C 2^{2j(n)-3n/2}. \end{aligned} \quad (\text{C.96})$$

Pela forma como esta cota superior foi encontrada, utilizando a desigualdade de Cauchy-Schwartz, ela é menor que as cotas encontradas para os termos $\int_{\mathbb{R}} B_1^2(t)\gamma(t)dt$ e $\int_{\mathbb{R}} B_2^2(t)\gamma(t)dt$; assim, ela não precisa ser utilizada para encontrar a cota superior de B_n^2 pois ela não acrescenta nada assintoticamente.

C.2.6 Cota Superior para termo B_n^2

Utilizando os resultados em (C.89), (C.94), (C.95) e (C.96) e lembrando da propriedade das bases de ondaletas C.1.1, obtemos facilmente que:

$$\begin{aligned} B_n^2 &= \int_{\mathbb{R}} \left((E\hat{\theta}^2(t)) - \theta^2(t) \right)^2 \gamma(t)dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} (B_1(t) + B_2(t) + B_3(t))^2 \gamma(t)dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} (B_1^2(t) + B_2^2(t) + B_3^2(t) + B_1(t)B_2(t))\gamma(t)dt \\ &\leq C_1 2^{4j(n)-2n} + C_2 \Delta_n + C_3 2^{-2j(n)(m \wedge r)} \\ &\leq \sup(C_1, C_2, C_3) (2^{4j(n)-2n} + 2^{-n} + 2^{-2j(n)(m \wedge r)}) \\ &= C (2^{4j(n)-2n} + 2^{-n} + 2^{-2j(n)(m \wedge r)}). \end{aligned} \quad (\text{C.97})$$

Assim, completamos a prova da primeira parte do teorema (C.2.1).

C.2.7 Fatoração do Termo D_n

Primeiramente, vamos verificar que $D_n = \sum_{k \in \mathbb{K}} \text{Var}(\hat{\mu}_{j(n),k})$. Utilizando a definição (C.83) e lembrando da propriedade das bases de ondaletas C.1.1, temos:

$$\begin{aligned}
 D_n &= E \left(\int_{\mathbb{R}} \left\{ \sum_{k \in \mathbb{K}} \hat{\mu}_{j(n),k} \phi_{j(n),k}(t) - E \left(\sum_{k \in \mathbb{K}} \hat{\mu}_{j(n),k} \phi_{j(n),k}(t) \right) \right\}^2 dt \right) \\
 &= E \left(\int_{\mathbb{R}} \left\{ \sum_{k \in \mathbb{K}} \phi_{j(n),k}(t) (\hat{\mu}_{j(n),k} - E(\hat{\mu}_{j(n),k})) \right\}^2 dt \right) \\
 &= \sum_{k \in \mathbb{K}} E (\hat{\mu}_{j(n),k} - E(\hat{\mu}_{j(n),k}))^2 \\
 &= \sum_{k \in \mathbb{K}} \text{Var}(\hat{\mu}_{j(n),k}). \tag{C.98}
 \end{aligned}$$

Agora, abrindo o termo $\hat{\mu}_{j(n),k}$ definido em (C.8) e utilizando a decomposição de $(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2$ definida por (C.44), obtemos:

$$\begin{aligned}
 \hat{\mu}_{j(n),k} &= \sum_{i=0}^{N-1} \phi_{j,k}(t_i) (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 \\
 &= \sum_{i=0}^{N-1} \phi_{j,k}(t_i) \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} b(u, X_u) du + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \theta(u) dW_u \right)^2 \\
 &= \sum_{i=0}^{N-1} \phi_{j,k}(t_i) \left[\left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} b(u, X_u) du \right)^2 + 2 \int_{t_i}^{t_{i+1}} b(u, X_u) du \int_{t_i}^{t_{i+1}} \theta(u) dW_u \right] \\
 &\quad + \sum_{i=0}^{N-1} \phi_{j,k}(t_i) \left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} \theta(u) dW_u \right]^2 \\
 &= \sum_{i=0}^{N-1} \phi_{j,k}(t_i) (Z_i + Y_i). \tag{C.99}
 \end{aligned}$$

Utilizando a decomposição descrita em (C.99) e lembrando que as variáveis aleatórias Y_i são independentes e que Z_i e Y_j são independentes se $i \neq j$, podemos escrever D_n como:

$$\begin{aligned}
D_n &= \sum_{k \in \mathbb{K}} \text{Var}(\hat{\mu}_{j(n),k}) = \sum_{k \in \mathbb{K}} \text{Var} \left(\sum_{i=0}^{N-1} \phi_{j(n),k}(t_i)(Z_i + Y_i) \right) \\
&= \sum_{k \in \mathbb{K}} \text{Var} \left(\sum_{i=0}^{N-1} \phi_{j(n),k}(t_i)Y_i \right) + \sum_{k \in \mathbb{K}} \text{Var} \left(\sum_{i=0}^{N-1} \phi_{j(n),k}(t_i)Z_i \right) \\
&\quad + \sum_{k \in \mathbb{K}} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{i=0}^{N-1} \phi_{j(n),k}(t_i)\phi_{j(n),k}(t_j)\text{Cov}(Y_i, Z_j) \\
&= \sum_{k \in \mathbb{K}} \sum_{i=0}^{N-1} \phi_{j(n),k}^2(t_i)\text{Var}(Y_i) + \sum_{k \in \mathbb{K}} \sum_{i=0}^{N-1} \phi_{j(n),k}^2(t_i)\text{Var}(Z_i) \\
&\quad + 2 \sum_{k \in \mathbb{K}} \sum_{i=0}^{N-1} \phi_{j(n),k}^2(t_i)\text{Cov}(Y_i, Z_i) \\
&= \sum_{k \in \mathbb{K}} \sum_{i=0}^{N-1} \phi_{j(n),k}^2(t_i)\text{Var}(Y_i) + \sum_{k \in \mathbb{K}} \sum_{i=0}^{N-1} \phi_{j(n),k}^2(t_i) (\text{Var}(Z_i) + 2\text{Cov}(Z_i, Y_i)) \\
&= E_n + F_n.
\end{aligned} \tag{C.100}$$

C.2.7.1 Cota Superior do Termo F_n

Para encontrarmos uma cota superior para F_n precisaremos encontrar cotas superiores para $\text{Var}(Z_i)$ e $\text{Cov}(Z_i, Y_i)$. Trabalhando inicialmente com $\text{Var}(Z_i)$, obtemos :

$$\begin{aligned}
Var(Z_i) &\leq E(Z_i^2) \\
&= E \left[\left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} b(u, X_u) du \right)^2 + 2 \int_{t_i}^{t_{i+1}} b(u, X_u) du \int_{t_i}^{t_{i+1}} \theta(u) dW_u \right]^2 \\
&= E \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} b(u, X_u) du \right)^4 \\
&\quad + 2E \left[\left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} b(u, X_u) du \right)^3 \int_{t_i}^{t_{i+1}} \theta(u) dW_u \right] \\
&\quad + 4E \left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} b(u, X_u) du \int_{t_i}^{t_{i+1}} \theta(u) dW_u \right]^2 \\
&= U_{1,n} + U_{2,n} + U_{3,n}.
\end{aligned} \tag{C.101}$$

Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwartz em $U_{1,n}$, temos:

$$\begin{aligned}
U_{1,n} &= E \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} b(u, X_u) du \right)^4 \leq \Delta_n^4 E \left(\sup_{0 \leq s \leq T} (1 + |X_s|) \right)^4 \\
&= C_1 \Delta_n^4
\end{aligned} \tag{C.102}$$

De forma análoga, de $U_{2,n}$ e $U_{3,n}$, usando a propriedade de isometria das integrais de Itô e que todos os momentos da distribuição normal são finitos, obtemos:

$$\begin{aligned}
U_{2,n} &\leq \sqrt{E \left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} b(u, X_u) du \right]^6 E \left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} \theta(u) dW_u \right]^2} \\
&\leq \Delta_n^3 \sqrt{E \left(\sup_{0 \leq s \leq T} (1 + |X_s|)^6 \right)} \sqrt{\int_{t_i}^{t_{i+1}} \theta(s) ds} \leq C_2 \Delta_n^{7/2}
\end{aligned} \tag{C.103}$$

e

$$\begin{aligned}
U_{3,n} &\leq \sqrt{E \left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} b(u, X_u) du \right]^4 E \left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} \theta(u) dW_u \right]^4} \\
&\leq \Delta_n^2 \sqrt{E \left(\sup_{0 \leq s \leq T} (1 + |X_s|)^4 \right)} \sqrt{E \left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} \theta(u) dW_u \right]^4} \\
&= C \Delta_n^2 \int_{t_i}^{t_{i+1}} \theta^2(u) du \leq C_3 \Delta_n^3.
\end{aligned} \tag{C.104}$$

De (C.101), (C.102), (C.103) e (C.104), obtemos a seguinte cota superior para $Var(Z_i)$:

$$Var(Z_i) \leq U_{1,n} + U_{2,n} + U_{3,n} \leq C_1 \Delta_n^4 + C_2 \Delta_n^{7/2} + C_3 \Delta_n^3 \leq C \Delta_n^3. \quad (C.105)$$

Agora, para encontrar uma cota superior para $Cov(Z_i, Y_i)$, utilizamos (C.104) e $Var(Y_i) = 2 \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} \theta^2(u) du \right)^2$:

$$\begin{aligned} Cov(Z_i, Y_i) &\leq \sqrt{Var(Z_i) Var(Y_i)} \\ &\leq K \Delta_n^{3/2} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \theta^2(u) du \leq C \Delta_n^{5/2}. \end{aligned} \quad (C.106)$$

De (C.101), (C.106) e por $Card(\mathbb{K}) \leq C 2^{j(n)}$, obtemos a seguinte cota superior para F_n :

$$\begin{aligned} |F_n| &= \left| \sum_{k \in \mathbb{K}} \sum_{i=0}^{N-1} \phi_{j(n),k}^2(t_i) (Var(Z_i) + 2Cov(Z_i, Y_i)) \right| \\ &\leq C \sum_{k \in \mathbb{K}} \sum_{i=0}^{N-1} \phi_{j(n),k}^2(t_i) \Delta_n^{5/2} \leq C \Delta_n^{5/2} Card(\mathbb{K}) N \sup_{x \in \mathbb{R}} \phi^2(x) \\ &= C_1 \Delta_n^{-1} \Delta_n^{5/2} 2^{j(n)} = C_1 2^{j(n)-3n/2} = o(2^{j(n)-n}). \end{aligned} \quad (C.107)$$

C.2.7.2 Cota Superior do Termo E_n

Lembrando que $Y_i = \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} \theta(u) dW_u \right)^2$ tem distribuição $\int_{t_i}^{t_{i+1}} \theta^2(u) du \times \chi_1^2$, temos que $Var(Y_i) = 2 \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} \theta^2(u) du \right)^2$ e, assim, E_n pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} E_n &= \sum_{k \in \mathbb{K}} \sum_{i=0}^{N-1} \phi_{j(n),k}^2(t_i) Var(Y_i) \\ &= 2 \sum_{k \in \mathbb{K}} \sum_{i=0}^{N-1} \phi_{j(n),k}^2(t_i) \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} \theta^2(u) du \right)^2. \end{aligned} \quad (C.108)$$

Proposição C.2.1. *Se h pertence a $C^1([0, T])$, então:*

$$\begin{aligned} S_n(h) &= \sum_{k \in \mathbb{K}} \sum_{i=0}^{N-1} \Delta_n \phi^2(2^{j(n)} t_i - k) h(t_i) \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^T h(s) ds. \end{aligned} \quad (\text{C.109})$$

Definindo

$$E'_n = 2 \sum_{k \in \mathbb{K}} \sum_{i=0}^{N-1} \phi_{j(n),k}^2(t_i) \Delta_n^2 \theta^4(t_i) \quad (\text{C.110})$$

e utilizando a proposição C.2.1, obtemos que

$$\frac{E'_n}{2^{j(n)} \Delta_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2 \int_0^T \theta^4(s) ds. \quad (\text{C.111})$$

Também utilizando essa proposição e a fórmula de Taylor, chegamos a

$$\frac{(E_n - E'_n)}{2^{j(n)} \Delta_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (\text{C.112})$$

C.2.8 Cota Superior do Termo D_n

Para obtermos a cota superior do termo D_n , utilizamos que

$$\frac{D_n}{2^{j(n)} \Delta_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2 \int_0^T \theta^4(t) dt,$$

que é facilmente verificado utilizando os resultados (C.111) e (C.112) e lembrando que:

$$D_n = E \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\hat{\theta}^2(t) - E(\hat{\theta}^2(t)) \right)^2 dt \right). \quad (\text{C.113})$$

Bibliografia

- Abberger, K. (1997). Quantile smoothing in financial time series, *Statist. Papers* **38**(2): 125–148.
- Antoniadis, A. and Oppenheim, G. (eds) (1995). *Wavelets and statistics*, Springer-Verlag, New York. Papers from the conference held in Villard de Lans, November 16–18, 1994.
- Avesani, R. G. and Bertrand, P. (1997). Does volatility jump or just diffuse? A statistical approach, *Numerical methods in finance*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, pp. 270–289.
- Bertrand, P. (1996). Estimation of the stochastic volatility of a diffusion process i. comparison of haar basis estimator and kernel estimators, *Technical Report - Inria Sophia Antipolis*.
- Bosq, D. (1998). *Nonparametric Statistics for Stochastic Processes: Estimation and Prediction*, Lecture Notes in Statistics, Springer-Verlag.
- Chui, C. K. (ed.) (1992). *A Tutorial in Theory and Applications*, Academic Press.
- Darolles, S. and Gouriéroux, C. (2001). Truncated dynamics and estimation of diffusion equations, *J. Econometrics* **102**(1): 1–22.
- Daubechies, I. (1988). Orthonormal bases of compactly supported wavelets, *Communications on Pure and Applied Mathematics* **XLI**: 909–996.
- Daubechies, I. (1992). *Ten Lectures on Wavelets*, SIAM, CBMS-NSF Conference Series.

- Daubechies, I. and Lagarias, J. (1992). Two-scale difference equations ii. Local regularity, infinite products of matrices and fractals, *SIAM J. Math. Anal.* **61**: 1031–1079.
- Delyon, B. and Juditsky, A. (1993). Wavelet estimators, global error measures: Revisited, *Publication interne no. 782, IRISA-INRIA*.
- Donoho, D. and Johnstone, I. (1993). Adapting to unknown smoothness via wavelet shrinkage, *Technical Report. Statistical Department, Stanford University*.
- Donoho, D., Johnstone, I., Kerkyacharian, G. and Pickard, D. (1993). Density estimation by wavelet thresholding, *Technical Report. Statistical Department, Stanford University*.
- Donoho, D., Johnstone, I., Kerkyacharian, G. and Pickard, D. (1995). Wavelet shrinkage: Asymptopia?, *JRSS* **57**(2): 301–369.
- Florens-Zmirou, D. (1993). On estimating the diffusion coefficient from discrete observations, *Journal of Applied Probability* **30**: 790–804.
- Gao, H.-Y. (1993). Choice of thresholds for wavelet estimation of the log-spectrum, *Tech. Report, Statistics, Stanford University*.
- Genon-Catalot, V., Laredo, C. and Picard, D. (1992). Nonparametric estimation the diffusion coefficient by wavelet methods, *Scandinavian Journal of Statistics* **19**(4): 317–335.
- Gouriéroux, C. (1997). *ARCH Models and Financial Applications*, Springer Series in Statistics, Springer-Verlag.
- Han, C.-P. and Wei, W. W. S. (eds) (2000). *Selected papers from the 1999 Applied Statistical Symposium of the International Chinese Statistical Association*, Marcel Dekker Inc., Monticello, NY. Held at Georgetown University, Washington, DC, June 18–20, 1999, *Comm. Statist. Theory Methods* **29** (2000), no. 5-6.
- Härdle, W. (1990). *Applied Non-parametric Regression*, Cambridge University Press.

- Härdle, W. and Tsybakov, A. (1997). Local polynomial estimators of the volatility function in nonparametric autoregression, *J. Econometrics* **81**(1): 223–242.
- Herencia, M. E. Z. (1997). Volatilidade nos modelos arch e variância estocástica: um estudo comparativo, *Tese de Mestrado - IMECC/UNICAMP*.
- Hoffmann, M. (1999). On nonparametric estimation in nonlinear ar(1)-models, *Statist. Probab. Lett.* **44**(1): 29–45.
- Jacob, J. and Shiryaev, A. N. (1987). *Limit Theorems for Stochastic Processes*, Springer-Verlag.
- Kaiser, G. (1994). *A Friendly Guide to Wavelets*, Birkhäuser.
- Kloeden, P. E., Platen, E. and Schurz, H. (1991). *Numerical Solution of SDE Through Computer Experiments*, Springer-Verlag.
- Morettin, P. A. (1999). *Ondas e Ondaletas. Da Análise de Fourier à Análise de Ondaletas*, Edusp - Editora da Universidade de São Paulo.
- Oskendal, B. (1995). *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications*, Springer.
- Pinheiro, A. and Vidakovic, B. (1997). Estimating the square root of a density via compactly supported wavelets, *Computational Statistics and Data Analysis* **25**: 399–415.
- Revuz, D. and Yor, M. (1988). *Continuous Martingales and Brownian Motion*, Springer-Verlag.
- Schuss, Z. (1980). *Theory and Applications of Stochastic Differential Equations*, Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics, John Wiley & Sons.
- Silverman, B. W. (1986). *Density Estimation for Statistics and Data Analysis*, Chapman and Hall, New York.
- Vidakovic, B. (1999). *Statistical Modeling by Wavelets*, John Wiley & Sons.

- Walter, G. (1992a). Approximating of the delta function by wavelets, *Journal of Approximation Theory* **71**: 329–343.
- Walter, G. (1992b). Wavelets and generalized functions, in C. K. Chui (ed.), *Wavelets - A Tutorial in Theory and Applications*, Academic Press, pp. 51–70.
- Walter, G. (1994). *Wavelets and Other Orthogonal Systems With Applications*, CRC Press, Boca Raton, FL.
- Yang, L., Härdle, W. and Nielsen, J. P. (1999). Nonparametric autoregression with multiplicative volatility and additive mean, *J. Time Ser. Anal.* **20**(5): 579–604.