Universidade Estadual de Campinas

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

Departamento de Matemática

TESE DE DOUTORADO

Existência e Estabilidade de Solitons Ópticos Periódicos para um Sistema de Equações do Tipo Schrödinger

por

Ademir Pastor Ferreira †

Doutorado em Matemática - Campinas - SP

Orientador: Prof. Dr. Jaime Angulo Pava

†Este trabalho contou com apoio financeiro da FAPESP processo 03/14011-2

Existência e Estabilidade de Solitons Ópticos Periódicos para um Sistema de Equações do tipo Schrödinger

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por **Ademir Pastor Ferreira** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 29 de Novembro de 2007.

Prof. Dr. Jaime Angulo Pava
Orientador

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Jaime Angulo Pava - IMECC/UNICAMP
Prof. Dr. Djairo Guedes de Figueiredo - IMECC/UNICAMP
Prof. Dr. Clodoaldo Grotta Ragazzo - IME/USP
Prof. Dr. Flavio Dickstein - DMA/UFRJ
Prof. Dr. José Felipe Linares Ramirez - IMPA

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de **Doutor em Matemática**.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP
Bibliotecária: Miriam Cristina Alves –CRB 5094

Ferreira, Ademir Pastor

F413e Existência e estabilidade de solitons ópticos periódicos para um sistema de equações do tipo Schrödinger / Ademir Pastor Ferreira -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2007.

Orientador : Jaime Angulo Pava

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Equações diferenciais parciais não-lineares. 2. Schrödinger, Equação de. 3. Ondas não-lineares. I. Pava, Jaime Angulo. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: Existence and stability of periodic optical solitons for a Schrödinger type system.

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Nonlinear partial differential equations. 2. Schrödinger Equation. 3. Nonlinear waves.

Área de concentração: Equações diferencias parciais

Titulação: Doutor em Matemática

Banca examinadora: Prof. Dr. Jaime Angulo Pava (IMECC-Unicamp)
Prof. Dr. Djairo Guedes de Figueiredo (IMECC-Unicamp)
Prof. Dr. Clodoaldo Grotta Ragazzo (IME-USP)
Prof. Dr. Flavio Dickstein (DMA-UFRJ)
Prof. Dr. Jose Felipe Linares Ramirez (IMPA)

Data da defesa: 29/11/2007

Programa de pós-graduação: Doutorado em Matemática

Tese de Doutorado defendida em 29 de novembro de 2007 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). JAIME ANGULO PAVA

Prof(a). Dr(a). DJAIRO GUEDES DE FIGUEIREDO

Prof(a). Dr(a). CLODOALDO GROTTA RAGAZZO

Prof(a). Dr(a). FLÁVIO DICKSTEIN

Prof(a). Dr(a). JOSÉ FELIPE LINARES RAMIREZ

Agradecimentos

À Deus, por ter me dado forças para suportar os momentos de dificuldades e tristezas.

Aos meus pais José Luiz Ferreira e Aparecida Pastor Ferreira que, apesar do pouco conhecimento científico, me fizeram aprender o maior de todos os ensinamentos: amar e respeitar o próximo.

Aos meus irmãos Odair Pastor Ferreira e Aguinaldo Pastor Ferreia e à minha cunhada Leila Conegero que sempre me apoiaram e acreditaram na concretização desse trabalho.

Ao professor Jaime Angulo Pava pela orientação e valorosas discussões, as quais me fizeram crescer como pessoa e como matemático.

À FAPESP, pelo apoio financeiro durante o período do doutorado.

Aos amigos que de forma pessoal ou científica contribuíram para a realização deste trabalho e projeto de vida.

Resumo

Nesta tese, estudamos o seguinte sistema não-linear de equações do tipo Schrödinger

$$\begin{cases} iu_t + u_{xx} - u + \left(\dfrac{1}{9}|u|^2 + 2|w|^2\right)u + \dfrac{1}{3}\overline{u}^2 w = 0 \\ i\sigma w_t + w_{xx} - \alpha w + \left(9|w|^2 + 2|u|^2\right)w + \dfrac{1}{9}u^3 = 0. \end{cases}$$

Provamos existência e estabilidade/instabilidade não-linear de várias famílias de soluções ondas viajantes periódicas que dependem das funções elípticas de Jacobi do tipo dnoidal e cnoidal. O estudo de estabilidade não-linear é feito dentro da teoria moderna desenvolvida por Grillakis, Shatah e Strauss mas adaptada ao caso periódico, cujo ingrediente central é a análise espectral de certos operadores que surgem na linearização do sistema em torno de uma solução periódica. Por outro lado, os resultados de instabilidade não-linear são obtidos no contexto da teoria desenvolvida por Grillakis, a qual analisa a instabilidade não-linear a partir da instabilidade linear. Também, utilizando a teoria denominada decomposição em ondas Bloch, estudamos estabilidade espectral no sentido das funções limitadas ou localizadas para uma classe mais geral de soluções. Finalmente, utilizando as técnicas desenvolvidas por Bourgain e Kenig, Ponce e Vega, mostramos que nosso sistema é localmente e globalmente bem posto nos espaços de Sobolev periódicos $H^s_{per} \times H^s_{per}$, $s \geq 0$.

Abstract

In this thesis we study the following nonlinear Schrödinger type system

$$\begin{cases} iu_t + u_{xx} - u + \left(\dfrac{1}{9}|u|^2 + 2|w|^2\right)u + \dfrac{1}{3}\overline{u}^2 w = 0 \\ i\sigma w_t + w_{xx} - \alpha w + \left(9|w|^2 + 2|u|^2\right)w + \dfrac{1}{9}u^3 = 0. \end{cases}$$

We prove existence and nonlinear stability/instability of several families of periodic travelling wave solutions depending on the Jacobi elliptic functions of *dnoidal* and *cnoidal* type. The study of nonlinear stability is done in the Grillakis, Shatah and Strauss framework in which the main ingredient is the spectral analysis for certain linear operators arising in the linearization around a periodic wave. On the other hand, the instability results are obtained in the framework established by Grillakis in which we get nonlinear instability from linear instability. Also, by using the so-called Bloch wave decomposition theory we study spectral stability in the sense of localized and bounded perturbations for a more general class of periodic solutions. Finally, by using the techniques established by Bourgain and Kenig, Ponce and Vega we show that our system is locally and globally well-posed in the classical periodic Sobolev spaces $H^s_{per} \times H^s_{per}$, $s \geq 0$.

SUMÁRIO

Introdução

De maneira geral, o estudo das equações diferenciais parciais é motivada pela necessidade de conhecer o comportamento das soluções que modelam fenômenos que surgem continuamente nas ciências naturais: teoria de ondas de água, engenharia, óptica, dinâmica de fluidos e outras. Embora a teoria associada a diversos aspectos dos problemas que surgem no estudo das equações diferenciais parciais não-lineares tenha se iniciado no século XIX, vários problemas matemáticos continuam até os dias de hoje e são estudados pela comunidade matemática.

Dentro de uma abordagem geral, as equações de evolução do tipo dispersivo podem ser escritas na forma abstrata (forma Hamiltoniana)

$$u_t = J\mathcal{H}'(u), \tag{1}$$

onde u representa alguma quantidade, J é um operador linear anti-simétrico, $\mathcal{H}$ é um funcional (sobre algum espaço de funções) chamado de energia e $\mathcal{H}'$ é a derivada de Fréchet de $\mathcal{H}$.

Várias equações de evolução do tipo dispersivo que são extensivamente encontrada na literatura, são colocadas na forma (1), das quais destacamos as seguintes:

(i) Equação de Schrödinger não-linear (NLS) 1-dimensional:

$$iu_t + u_{xx} + |u|^p u = 0, \tag{2}$$

onde $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $u(x,t) \in \mathbb{C}$ e $p \in \mathbb{R}$. A Eq. (2) pode ser escrita na forma (1) com $J = -i$ e

$$\mathcal{H}(u) = \int_\Omega \left[\frac{1}{2}|u_x|^2 - \frac{1}{p+2}|u|^{p+2}\right] dx,$$

onde $\Omega = \mathbb{R}$ ou $\Omega = [0, L]$ no caso em que u é x-periódica de período L.

(ii) Equação de Korteweg-de Vries generalizada (gKdV):

$$u_t + u_{xxx} + (u^p)_x = 0, \tag{3}$$

onde $u(x,t) \in \mathbb{R}$, $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. A Eq. (3) também pode ser posta na forma (1), onde $J = \partial_x$ é o operador derivação e

$$\mathcal{H}(u) = \int_\Omega \left[\frac{1}{2}u_x^2 - \frac{1}{p+1}u^{p+1}\right] dx.$$

(iii) Equação de Benjamin-Ono (BO):

$$u_t + uu_x + \sigma u_{xx} = 0, \tag{4}$$

onde $u(x,t) \in \mathbb{R}$, $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e σ é a transformada de Hilbert

$$\sigma f(x) = \frac{1}{\pi} p.v. \int_{\mathbb{R}} \frac{f(y)}{x-y} dy = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|y-x| \geq \varepsilon} \frac{f(y)}{x-y} dy,$$

ou, no caso em que u é x-periódica com período $2L$

$$\sigma f(x) = \frac{1}{2L} p.v. \int_{-L}^{L} \cot\left[\frac{\pi(x-y)}{2L}\right] f(y) dy.$$

Aqui, escrevemos (4) na forma (1), pondo $J = \partial_x$ e

$$\mathcal{H}(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left[u\sigma u_x - \frac{1}{3}u^3\right] dx$$

com $\Omega = \mathbb{R}$ ou $\Omega = [-L, L]$ no caso periódico.

Agora, assuma que a Eq. (1) seja invariante pela representação unitária T de um grupo de Lie G. É de grande interesse tanto matemático quanto físico conhecer o comportamento das soluções de (1) conhecidas como soluções *ondas viajantes*, a saber, aquelas que são do tipo

$$u(t) = T(e^{\omega t})\varphi_\omega, \tag{5}$$

onde ω pertence à álgebra de Lie do grupo G, φ_ω é algum elemento fixado de algum espaço de Hilbert X e $e^{(\cdot)} = exp(\cdot)$ denota a aplicação exponencial entre a álgebra de Lie de G e G. As soluções ondas viajantes em geral, de nosso interesse, podem ser divididas em dois grupos, a saber,

1. **Ondas Viajantes Solitárias:** É o nome que se dá às ondas viajantes tais que a função φ_ω, bem como todas as suas derivadas se anulam no infinito, i.e., satisfaz a condição de fronteira
$$\lim_{\xi \to \pm\infty} \varphi_\omega^{(n)}(\xi) = 0, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$
onde $\varphi_\omega^{(n)}$ denota a n-ésima derivada de φ_ω.

2. **Ondas Viajantes Periódicas:** Este nome é dado às ondas viajantes tais que a função φ_ω é uma função periódica com um período fixado $L > 0$, i.e., satisfaz a condição
$$\varphi_\omega(0) = \varphi_\omega(L), \quad \varphi_\omega'(0) = \varphi_\omega'(L).$$

Originalmente, as ondas viajantes foram descobertas por J. Scott Russel em 1834, primeiramente através de observações naturais em um canal de água e posteriormente através de experimentos realizados em laboratórios (ver [55]). Mais tarde, em 1871, J. Boussinesq mostrou em [16] que se uma onda de água propaga ao longo de um canal de fundo plano com uma profundidade constante h, com um grande comprimento de onda e pequena amplitude em relação a h, então a elevação u da água considerada como função da coordenada x ao longo do canal e do tempo t satisfaz (de forma aproximada) a equação não-linear
$$u_{tt} - ghu_{xx} - gh\left(\frac{3}{2h}u^2 + h^2 u_{xx}\right)_{xx} = 0, \tag{6}$$
onde g é a aceleração da gravidade (tal equação é conhecida como equação de Boussinesq). Supondo que $G = \mathbb{R}$ e notando que (6) é invariante por translações, i.e., $T(t)\varphi = \varphi(\cdot - t)$, Boussinesq obteve explicitamente uma solução onda viajante solitária, $u(x,t) = \varphi_\omega(x - \omega t)$, dada por
$$\varphi_\omega(\xi) = \frac{3\omega}{2} sech^2\left(\frac{\sqrt{\omega}}{2}\xi\right) \tag{7}$$
e de forma bastante formal estudou sua estabilidade no sentido que uma pequena perturbação de tal onda solitária irá evoluir de forma semelhante a uma onda solitária para todo tempo t (estabilidade em forma).

Entretanto, a primeira prova matemática de estabilidade foi apresentada por T. Benjamin em [11], um século mais tarde. A equação estudada por Benjamin foi a equação de Korteweg-de Vries

$$u_t + u_{xxx} + uu_x = 0. \tag{8}$$

Baseando-se nas idéias de Boussinesq, Benjamin estudou a estabilidade de uma onda viajante tendo a fórmula explícita (6) no sentido orbital, o que significa que se o perfil de uma condição inicial $u_0 = u(\cdot, 0)$ está perto de φ_ω (em algum sentido a ser precisado mais adiante) então o perfil da solução $u(\cdot, t)$, com dado inicial u_0, permanece perto de algum transladado de φ_ω para todo tempo t.

Após o trabalho de Benjamin, muita atenção tem se dado ao estudo de estabilidade não-linear de ondas viajantes solitárias para diversas equações de evolução do tipo dispersivo, por exemplo em [3], [10]–[13], [28]–[31], [61]–[62]. Já o estudo relacionado às ondas viajantes periódicas parece que ficou esquecido no tempo e poucos trabalhos completos de pesquisa sobre o tema foram escritos (veja [12], [54]). Benjamin [12] estudou inicialmente a estabilidade de ondas viajantes *cnoidal* para a equação (8), a saber, soluções da forma

$$\varphi_\omega(\xi) = \beta_2 + (\beta_3 - \beta_2)\, cn^2\left(\sqrt{\frac{\beta_3 - \beta_1}{12}}\,\xi; k\right), \tag{9}$$

onde cn representa a função elíptica de Jacobi do tipo *cnoidal*, $k \in (0,1)$ é o módulo elíptico e β_1, β_2 e β_3 são constantes reais satisfazendo $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 3\omega$. Benjamin afirmou que a onda viajante periódica dada em (9) era não-linearmente estável por perturbações de mesmo período, embora ele não tenha provado tal resultado. Recentemente, Angulo, Bona e Scialom [6] deram, definitivamente, uma resposta em afirmativo em relação à estabilidade não-linear das soluções (9). A abordagem para se obter tal resultado foi a teoria moderna de estabilidade não-linear desenvolvida por Weinstein [61], [62] e Grillakis, Shatah e Strauss [31], adaptada ao caso periódico.

O estudo de existência e estabilidade de soluções ondas viajantes periódicas tem grande importância em vários ramos da física, principalmente em óptica e propagação de ondas eletromagnéticas (para vários modelos e aplicações veja por exemplo [43], [63]). Além disso, o interesse em tal estudo tem crescido significativamente nos últimos anos e isso motiva nosso estudo apresentado nesta tese.

Agora, em óptica não-linear, se um feixe de luz se propaga em algum meio, uma placa por exemplo, sem estruturas de suporte, ele é comumente chamado pelos físicos de *soliton* *óptico espacial* ("spacial optical soliton"). Até a década de 90, a teoria dos solitons ópticos espaciais tinha sido baseada na equação Schrödinger não-linear cúbica,

$$iu_t + u_{xx} + |u|^2 u = 0. \tag{10}$$

É bem conhecido que a equação de Schrödinger cúbica é um bom modelo para feixes que se propagam, por exemplo, em uma fibra óptica (*solitons ópticos temporais*). Por outro lado, verifica-se experimentalmente que para o caso de solitons ópticos espaciais, a equação de Schrödinger torna-se um modelo não totalmente satisfatório. Tem-se ai, a necessidade de criar sistemas mais gerais do que a equação de Schrödinger para modelar tais feixes.

Assim, no decorrer de toda essa tese, estaremos interessados no seguinte sistema acoplado de equações do tipo Schrödinger

$$\begin{cases} iu_t + u_{xx} - u + \Big(\dfrac{1}{9}|u|^2 + 2|w|^2\Big)u + \dfrac{1}{3}\overline{u}^2 w = 0 \\ i\sigma w_t + w_{xx} - \alpha w + \Big(9|w|^2 + 2|u|^2\Big)w + \dfrac{1}{9}u^3 = 0, \end{cases} \tag{11}$$

onde $x, t \in \mathbb{R}$, $u(x,t), w(x,t) \in \mathbb{C}$ e α, σ são constantes reais. Tal sistema foi deduzido originalmente por Rowland A. Sammut, Alexander V. Buryak e Yuri S. Kivshar em [56] e [57] e descreve a interação entre um feixe linearmente polarizado e seu terceiro harmônico. Note que se $u \equiv 0$, o sistema (11) se reduz exatamente à equação de Schrödinger cúbica. Portanto, tal sistema generaliza e equação de Schrödinger para o estudo de solitons ópticos espaciais.

Nosso objetivo é o estudo de soluções ondas viajantes periódicas para o sistema (11). Mais precisamente, soluções do tipo

$$u(x,t) = e^{i\gamma t}\phi_\gamma(x), \qquad w(x,t) = e^{3i\gamma t}\psi_\gamma(x), \tag{12}$$

onde $\phi_\gamma, \psi_\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções periódicas com um mesmo período fundamental $L > 0$ e γ é um parâmetro real. Nossa principal ênfase, será o estudo de existência e estabilidade/instabilidade não-linear de soluções da forma (12) pelo fluxo periódico associado a (11). Até onde vai nosso conhecimento, nenhum estudo específico nessa direção tem sido feito para o sistema (11). Nossa idéia nesta tese é apresentar uma teoria mais completa possível da dinâmica do sistema (11) induzida pelas soluções periódicas (12).

Substituindo (12) em (11), segue-se que $\phi = \phi_\gamma$ e $\psi = \psi_\gamma$ devem satisfazer o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} \phi'' - (\gamma+1)\phi + \left(\frac{1}{9}\phi^2 + 2\psi^2\right)\phi + \frac{1}{3}\phi^2\psi = 0 \\ \psi'' - (\alpha+3\sigma\gamma)\psi + \left(9\psi^2 + 2\phi^2\right)\psi + \frac{1}{9}\phi^3 = 0. \end{cases} \tag{13}$$

Logo, nossa primeira tarefa será encontrar uma curva suave $\gamma \to (\phi_\gamma, \psi_\gamma)$ de soluções para o sistema (13). Este será o conteúdo do Capítulo 2. Em nosso estudo, sempre consideramos $\phi = a\psi$, onde $a \in \mathbb{R}$ (não conhecemos soluções explícitas fora desta restrição). Suponhamos inicialmente $a = 0$, assim o sistema (13) se reduz à única equação diferencial ordinária

$$\psi'' - (\alpha + 3\sigma\gamma)\psi + 9\psi^3 = 0. \tag{14}$$

Soluções periódicas reais para a equação (14) foram construídas em Angulo [5], portanto usaremos as mesmas idéias no nosso caso. A idéia para encontrar soluções é usar o método da quadratura (um outro método que pode ser utilizado é através do Teorema do Somatório de Poisson, veja [9] e [50]). De fato, a Eq. (14) pode ser reescrita na forma

$$[\psi']^2 = \frac{9}{2}[-\psi^4 + \frac{2}{9}(\alpha+3\sigma\gamma)\psi^2 + \frac{4}{9}B_\psi] = \frac{9}{2}F(\psi), \tag{15}$$

onde B_ψ é uma constante de integração e F é o polinômio dado por $F(t) = -t^4 + \frac{2}{9}(\alpha+3\sigma\gamma)t^2 + \frac{4}{9}B_\psi$. É claro que as soluções da equação (15) devem depender das raízes do polinômio F. Mostraremos nesta tese, a existência de várias famílias de soluções, a saber,

(i) Ondas do tipo Dnoidal: Se F tem raízes reais $\pm\eta_1$, $\pm\eta_2$ com $0 < \eta_2 < \eta_1$, obtemos uma curva suave de *ondas do tipo dnoidal*:

$$\gamma \in \left(\frac{2\pi^2}{L^2} - 1, +\infty\right) \mapsto \psi_\gamma \in H^n_{per}([0,L]),$$

dada por

$$\psi_\gamma(x) = \eta_1 dn\left(\frac{3\eta_1}{\sqrt{2}}x; k\right), \qquad k^2 = \frac{\eta_1^2 - \eta_2^2}{\eta_1^2} \tag{16}$$

e com período minimal L, onde $L > 0$ é fixado e arbitrário. Aqui, dn representa a função elíptica de Jacobi do tipo *dnoidal*.

(ii) Ondas do tipo Cnoidal: Se F tem raízes $\pm b$, $\pm ia$, com $a, b \in \mathbb{R}$, $b > 0$, podemos obter duas curvas suaves de *ondas do tipo cnoidal*: uma primeira

$$\gamma \in (-1, \infty) \mapsto \psi_{\gamma,1} \in H^n_{per}([0,L]),$$

dada por

$$\psi_{\gamma,1}(x) = b\ cn\left(3\sqrt{b^2-\omega}\ x; k\right), \qquad k^2 = \frac{b^2}{2b^2-2\omega} \tag{17}$$

e uma segunda

$$\gamma \in \left(-\frac{4\pi^2}{L^2} - 1, -1\right) \mapsto \psi_{\gamma,2} \in H^n_{per}([0,L]),$$

dadas por

$$\psi_{\gamma,2}(x) = \sqrt{a^2+2\omega}\ cn\left(3\sqrt{a^2+\omega}\ x.k\right), \qquad k^2 = \frac{a^2+2\omega}{2a^2+2\omega}. \tag{18}$$

Aqui novamente, para cada $L > 0$ fixado porém arbitrário, $\psi_{\gamma,1}$ e $\psi_{\gamma,2}$ têm período minimal L e $\omega = \frac{1}{9}(\gamma+1)$.

Agora, no caso $a \neq 0$, supondo que $\gamma + 1 = \alpha + 3\sigma\gamma$, reduzimos o sistema (13) à única equação

$$\phi'' - (\gamma+1)\phi + \left(2b^2 + \frac{1}{3}b + \frac{1}{9}\right)\phi^3 = 0, \tag{19}$$

onde b é a solução real da equação $63b^3 - 3b^2 + 17b + 1 = 0$. Como acima, a Eq. (19) pode ser reescrita como

$$[\phi']^2 = \frac{c}{2}\left(-\phi^4 + 2\frac{(\gamma+1)}{c}\phi^2 + \frac{4B_\phi}{c}\right) = \frac{c}{2}F_\phi(\phi), \tag{20}$$

onde B_ϕ é uma constante de integração e $F_\phi(t)$ é o polinômio $F_\phi(t) = -t^4 + 2\omega t^2 + \frac{4B_\phi}{c}$ e $\omega := \frac{1}{c}(\gamma+1)$. Neste caso, podemos obter a seguinte família de soluções ondas viajantes

(iii) Ondas do tipo Dnoidal: Se F_ϕ tem raízes $\pm\theta_1, \pm\theta_2$ com $0 < \theta_2 < \theta_1$, obtemos a curva suave de ondas do tipo dnoidal

$$\gamma \in \left(\frac{2\pi^2}{L^2} - 1, +\infty\right) \mapsto \phi_\gamma \in H^n_{per}([0,L]),$$

dada por

$$\phi_\gamma(x) = \theta_1 dn\left(\frac{\theta_1\sqrt{c}}{\sqrt{2}}x; k\right), \qquad k^2 = \frac{(\theta_1^2 - \theta_2^2)}{\theta_1^2} \tag{21}$$

e com período minimal L fixado.

No Capítulo 3, fazemos o estudo espectral dos operadores lineares, que são necessários para nossos estudos acerca da estabilidade/instabilidade não-linear das soluções descritas acima. Primeiramente, escrevemos o sistema (11) como um sistema Hamiltoniano do tipo (1), a saber,

$$\frac{\partial U}{\partial t}(t) = J\mathcal{H}'(U(t)), \tag{22}$$

onde $U = (P, R, Q, S)^t$ com $u = P + iQ$, $w = R + iS$, J é o operador linear matricial anti-simétrico definido por

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/\sigma \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/\sigma & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{23}$$

Aqui, $\mathcal{H}$ é o funcional energia dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(P,R,Q,S) = \frac{1}{2}\int &\{(P_x^2 + Q_x^2) + (R_x^2 + S_x^2) + (P^2 + Q^2) + \alpha(R^2 + S^2) \\ &- \frac{1}{18}(P^4 + 2P^2Q^2 + Q^4) - \frac{9}{2}(R^4 + 2R^2S^2 + S^4) \\ &- 2(P^2 + Q^2)(R^2 + S^2) - \frac{2}{9}(P^3R + 3P^2QS - 3PQ^2R - Q^3S)\}dx. \end{aligned} \tag{24}$$

Nossa análise espectral depende essencialmente de dois ingredientes básicos: o Teorema de Comparação (veja [23] ou o Apêndice A desta tese) e os problemas de autovalores periódico e semi-periódico associados à equação de Lamé (veja Observação 3.1.4) dados, respectivamente, por

$$\begin{cases} y'' + [\lambda - m(m+1)k^2 sn^2(x;k)]y = 0 \\ y(0) = y(2K(k)), \quad y'(0) = y'(2K(k)), \end{cases} \tag{25}$$

e

$$\begin{cases} y'' + [\lambda - m(m+1)k^2 sn^2(x;k)]y = 0 \\ y(0) = -y(2K(k)), \quad y'(0) = -y'(2K(k)), \end{cases} \tag{26}$$

onde $\lambda \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, sn denota a função elíptica de Jacobi do tipo *senoidal* e $K(k)$ representa a *integral elíptica completa do primeiro tipo* definida por

$$K(k) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \qquad k \in (0,1).$$

No Capítulo 4 estudamos as propriedades de estabilidade/instabilidade não-linear das soluções ondas viajantes periódicas dadas no Capítulo 2. Nosso primeiro resultado utilizando a teoria moderna desenvolvida por Grillakis, Shatah e Strauss em [31], é sobre a estabilidade não-linear das soluções ondas dnoidal dadas em (16), onde mostramos que tais soluções são orbitalmente estáveis (módulo translações e rotações) por perturbações periódicas de período L. Por outro lado, se vermos a onda dnoidal em (16) como uma função de período $2L$ então, usando as idéias em Angulo e Linares [7], mostramos que tal onda é orbitalmente instável (módulo rotações) por perturbações periódicas de período $2L$. Em relação às ondas dnoidal dadas em (21), utilizando novamente as idéias em Angulo e Linares [7], mostramos que tais soluções são orbitalmente instáveis (módulo rotações) por perturbações periódicas de período $2L$. Infelizmente, nossa análise espectral não nos permite utilizar nem a teoria de Grillakis *et al.* [31] nem a teoria de Grillakis [29] para mostrarmos algum resultado de estabilidade/instabilidade por perturbações periódicas de período L.

Em relação às ondas cnoidal, o problema é muito mais complexo. Apesar de termos uma completa teoria espectral em mãos, nem a teoria de Grillakis, Shatah e Strauss e nem a teoria de Grillakis pode ser aplicada neste caso. Portanto, assim como no caso da equação de Schrödinger cúbica (ver [5]), não sabemos responder se as ondas cnoidal são ou não estáveis em todo o espaço de energia $H^1_{per}([0,L])$. Uma primeira tentativa de obter um resultado estabilidade/instabilidade por perturbações periódicas de mesmo período L, foi começar investigando em espaços ″menores″ do que $H^1_{per}([0,L])$, onde gostaríamos de obter um tal resultado. Para ser mais preciso, vamos restringir nosso estudo ao subespaço das funções de média zero em $H^1_{per}([0,L])$, a saber,

$$\mathcal{X} = \{u \in H^1_{per}([0,L]);\ \int_0^L u\,dx = 0\}.$$

Neste subespaço podemos usar a teoria de Grillakis, Shatah e Strauss e obter um resultado de estabilidade para as ondas cnoidal dadas por (17) e (18) em relação a perturbações periódicas de período L e média zero sobre seu período minimal.

Ressaltemos que em relação a equação de Schrödinger (10), recentemente, T. Gallay e M. Hărăgus consideraram em [24] soluções ondas viajantes periódicas do tipo

$$u(x,t) = e^{-it}W(x), \tag{27}$$

onde $W(x) = e^{ipx}Q(2qx)$, $p = q = \pi/T$ (aqui $T > \pi$ é o período fundamental de $|W|$). Note que em particular W tem período fundamental $L = 2T$. Utilizando a teoria de Grillakis, Shatah e Strauss, foi mostrado que se Q é suficientemente pequena (no sentido da norma de

$H^1_{per}([0, L])$) então a solução dada em (27) é orbitalmente estável em relação a perturbações periódicas de período L, digamos V, com a condição de que

$$V(x + L/2) = -V(x), \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{28}$$

Nesse aspecto, nosso resultado é mais geral do que aquele em [24], uma vez que toda função que satisfaz (28) tem média zero sobre o intervalo fundamental $[0, L]$.

Uma segunda tentativa nos estudos das ondas cnoidal em (17) e (18), foi estabelecer algum resultado de estabilidade espectral, i.e., tentar localizar o espectro do problema linearizado em torno das ondas cnoidal e, por algum resultado de estabilidade/instabilidade linear, conseguir um resultado de estabilidade/instabilidade não-linear. Com essa idéia em mente, nos propomos no Capítulo 5 a estudar estabilidade espectral no espaço das funções limitadas ou localizadas. Análises nessa direção, foram consideradas, recentemente, por vários autores no estudo de várias equações de evolução (veja [24], [32], [33], [36], [37], [48], [54]). Por exemplo, estabilidade espectral para a equação de Schrödinger (10) foi considerado em [24], [36] e [54]. No caso da equação de Schrödinger focusing (quando consideramos o sinal $-$ em (10)) em [24] os autores mostraram que as ondas viajantes do tipo (27) são espectralmente estáveis em relação a perturbações limitadas ou localizadas, desde que a onda W seja de amplitude suficientemente pequena. Isto significa que o espectro da linearização em torno de uma tal onda periódica, considerado nos espaços $C_b(\mathbb{R})$ ou $L^2(\mathbb{R})$, está localizado sobre o eixo imaginário. Já para o caso da equação de Schrödinger defocusing (quando consideramos o sinal $+$ em (10)) foi mostrado que as ondas de pequenas amplitudes dadas em (27) são espectralmente instáveis também em relação a perturbações por funções limitadas ou localizadas, o que significa que o espectro do operador linearizado, considerado no espaço $C_b(\mathbb{R})$ ou no espaço $L^2(\mathbb{R})$, possui pelo menos um autovalor com parte real estritamente positiva.

Ainda no caso defocusing, em [36] os autores mostram que as ondas cnoidal do tipo $u(x, t) = k\delta e^{-i\alpha t}\, cn(\delta\, x; k)$ onde $\alpha = \delta^2(1 - 2k^2)$ são espectralmente estáveis com relação a perturbações periódicas, o que significa que o problema linearizado em torno da onda $u(x, t)$, considerado no espaço $L^2_{per}([0, L])$, possui seu espectro localizado sobre o eixo imaginário.

Embora nosso principal objetivo dentro do contexto de estabilidade espectral seja as ondas cnoidal, nossa análise vai mais longe. De fato, mostramos existência de soluções periódicas para o sistema (11) do tipo $(0, w)$, onde w tem a forma

$$w(x, t) = e^{-i\delta t} W(x), \tag{29}$$

com $W(x) = e^{ipx}V(x)$, δ e p são parâmetros reais e $V : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ é uma função periódica com um período fixado. Dessa forma, W deve satisfazer a seguinte equação diferencial

$$W_{xx} + \delta W + 9|W|^2 W = 0. \tag{30}$$

Através de seus invariantes, caracterizamos *todas* as soluções periódicas de (30) e encontramos regiões dependentes de tais invariantes para que a Eq. (30) admita soluções periódicas. Evidentemente, uma tal caracterização vai incluir também as soluções reais que encontramos no Capítulo 2 e nesse sentido, mostramos que quando W é uma solução real de (30), obtemos exatamente as soluções ondas cnoidal e dnoidal dadas no Capítulo 2.

No estudo da estabilidade espectral das soluções periódicas (29), vamos utilizar a chamada decomposição em ondas Bloch (″Bloch-wave decomposition″), a qual permite reduzir a análise espectral de operadores diferenciais com coeficientes periódicos definidos em $C_b(\mathbb{R})$ ou $L^2(\mathbb{R})$ para a análise espectral de operadores com resolvente compacto em $L^2_{per}([0, L])$ (veja [53]). Mais precisamente, se $\mathcal{A}$ é um operador diferencial linear fortemente elíptico e com coeficientes periódicos e $\sigma_{L^2}(\mathcal{A})$ e $\sigma_{C_b}(\mathcal{A})$ denotam, respectivamente, o espectro do operador $\mathcal{A}$ em $L^2(\mathbb{R})$ e em $C_b(\mathbb{R})$, então podemos provar que

$$\sigma_{L^2}(\mathcal{A}) = \sigma_{C_b}(\mathcal{A}) = \bigcup_{\beta \in (-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]} \sigma_{L^2_{per}}(\mathcal{A}_\beta), \tag{31}$$

onde o operador $\mathcal{A}_\beta$, denominado operador Bloch, é formado pela substituição de ∂_x por $(\partial_x + i\beta)$ em $\mathcal{A}$, e $\sigma_{L^2_{per}}(\mathcal{A}_\beta)$ denota o espectro do operador $\mathcal{A}_\beta$ em $L^2_{per}([0, L])$ com domínio $H^2_{per}([0, L])$. Com tal método, mostramos que as ondas periódicas dadas por $(0, w)$ onde w é dada por (29) são espectralmente instáveis por perturbações limitadas ou localizadas, com a condição de que a onda w tenha amplitude suficientemente pequena.

Infelizmente, assim como em [24], nosso estudo de estabilidade espectral se limita ao caso de soluções ondas periódicas com amplitude suficientemente pequena, posto que nossa análise depende de argumentos de perturbação de operadores lineares. Sendo assim, nosso resultado de instabilidade espectral não inclui as ondas cnoidal em (17), posto que para cada γ fixado uma tal onda não é arbitrariamente pequeno (veja pg. 78) e nesse caso não sabemos dizer se essas ondas cnoidal são ou não espectralmente estáveis por perturbações limitadas ou localizadas.

No Capítulo 6, estabelecemos nossos resultados de boa colocação local e global nos espaços $H^s_{per}([0, L]) \times H^s_{per}([0, L])$, $s \geq 0$, para o sistema (11), os quais são necessários na nossa teoria de estabilidade. Nossos resultados são baseados nos espaços $X_{s,b}$, os chamados espaços de Bourgain, primeiramente introduzidos por Bourgain em [14] no estudo da equação de Schrödinger

$$iu_t + u_{xx} + N(u,\overline{u}) = 0,$$

onde

$$N(u,\overline{u}) = \sum_{\alpha_1+\alpha_2=3} u^{\alpha_1}\overline{u}^{\alpha_2}.$$

Mais precisamente, definimos $X_{s,b}$ como segue:

Definição 0.0.1. *Seja $\mathcal{V}$ o espaço das funções f tais que*
(i) $f : \mathbb{T}\times\mathbb{R} \to \mathbb{C}$,
(ii) $f(x,\cdot) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ para cada $x \in \mathbb{T}$,
(iii) $f(\cdot,t) \in C^\infty(\mathbb{T})$ para cada $t \in \mathbb{R}$.
Para $s, b \in \mathbb{R}$ definimos o espaço de Bourgain $X_{s,b}$ como sendo o complemento de $\mathcal{V}$ em relação à norma

$$\|f\|_{X_{s,b}} \;\; = \;\; \|\langle n\rangle^s\langle\tau+n^2\rangle^b\widehat{f}(n,\tau)\|_{\ell^2_n L^2_\tau},$$

onde $\langle\cdot\rangle = 1 + |\cdot|$.

Para obtermos nosso resultado de boa colocação local, escrevemos o sistema (11) como um sistema integral equivalente, a saber,

$$\begin{cases} u(t) = U(t)u_0 - i\displaystyle\int_0^t U(t-t')F(u(t'),w(t'))dt', \\ w(t) = W(t)w_0 - i\displaystyle\int_0^t W(t-t')G(u(t'),w(t'))dt'. \end{cases}$$

onde $U(t) = e^{-it(\partial_x^2+1)}$, $W(t) = e^{-it(a\partial_x^2+\widetilde{\alpha})}$, $a = 1/\sigma$, $\widetilde{\alpha} = \alpha/\sigma$, são os grupos de Schrödinger associado ao sistema (11) linearizado,

$$F(u,w) = \Big(\frac{1}{9}|u|^2 + 2|w|^2\Big)u + \frac{1}{3}\overline{u}^2 w, \quad G(u,w) = a\Big(9|w|^2 + 2|u|^2\Big)w + \frac{a}{9}u^3.$$

Lembremos que Bourgain em [14] mostrou que para $s \geq 0$ e $b \in (3/8, 5/8)$ tem-se

$$\|N(u,\overline{u})\|_{X_{s,b-1}} \leq c\|u\|^3_{Xs,b}, \qquad u \in X_{s,b}. \tag{32}$$

No nosso caso, como em Angulo e Linares [7] introduzimos os espaços $X_{s,b}$ e $X^a_{s,b}$ (veja Definição 6.1.1) e usando as idéias de Bourgain, mostramos a nova estimativa não-linear

$$\|u^{\alpha_1}\overline{u}^{\alpha_2}w^{\alpha_3}\overline{w}^{\alpha_4}\|_X \leq c\|u\|^{\alpha_1+\alpha_2}_{X_{s,b}}\|w\|^{\alpha_3+\alpha_4}_{X^a_{s,b}}, \quad u \in X_{s,b}, \quad w \in X^a_{s,b}, \tag{33}$$

onde $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \in \mathbb{N}^4$ com $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 3$ e $X = X_{s,b-1}$ ou $X = X^a_{s,b-1}$, $b \in (1/2, 5/8)$.

Com a estimativa (33) em mãos e usando métodos *standard* (Bourgain [14], Kenig, Ponce e Vega [40], [41]) mostramos utilizando o Princípio de Contração que o sistema (11) é localmente bem posto nos espaçõs de Sobloev periódicos $H^s_{per}([0, L]) \times H^s_{per}([0, L])$, $s \geq 0$.

O resultado de boa colocação global para $s \geq 0$ segue da lei de conservação (veja Teorema 6.5.1).

$$\mathcal{F}(t) = \int \{|u(x,t)|^2 + 3\sigma|w(x,t)|^2\}dx = \mathcal{F}(0), \qquad \sigma > 0.$$

No Capítulo 7 apresentamos a conclusão dos resultados obtidos na tese e propomos novos problemas a serem estudados futuramente. Finalmente, no Capítulo 8 apresentamos, no Apêndice A, os principais elementos da Teoria de Floquet e, no Apêndice B, as principais propriedades das funções elípticas de Jacobi que são utilizadas no decorrer da tese e mostramos como a decomposição (31) pode ser obtida quando $\mathcal{A}$ é um operador de Schrödinger do tipo $-\partial_x^2 + q(x)$.

CAPÍTULO 1

Preliminares e Resultados Básicos

Neste primeiro capítulo, introduziremos as principais notações e os resultados básicos que serão utilizados ao longo da tese. Estabeleceremos as ferramentas básicas para se lidar com funções periódicas e introduziremos os espaços funcionais e suas principais propriedades que serão usadas nos capítulos seguintes. A maioria dos resultados contidos aqui podem ser encontrados em Iorio e Iorio [35].

Alguns fatos importantes utilizados na tese também estão contidos no Capítulo 8.

1.1 Transformada de Fourier

A transformada de Fourier será uma das principais ferramentas no nosso estudo de boa colocação. Denotaremos por C_{per} (resp. PC_{per}) o espaço das funções contínuas (resp. contínua por partes) periódicas de período $L = 2\ell$.

Definição 1.1.1. *Dado $f = f(x) \in PC_{per}$, a transformada de Fourier de f é a sequência de números complexos $\widehat{f} = \{\widehat{f}(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ definida por*

$$\widehat{f}(n) = c_n = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)e^{-i\pi nx/\ell}dx.$$

Os números $\widehat{f}(n)$ são chamados de coeficientes de Fourier e a série

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\pi nx/\ell}$$

é chamada a série de Fourier gerada por f.

Os espaços $L^p(I)$, onde $I \subseteq \mathbb{R}$ e $1 \leq p \leq \infty$ é definido como sendo o espaço de funções definidas em I à valores reais ou complexos e mensuráveis à Lebesgue tais que

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_I |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \qquad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|f\|_{L^\infty} = supess_{x\in I}|f(x)| < \infty, \qquad p = \infty.$$

Os espaços normados $(L^p(I), \|\cdot\|_{L^p})$ são espaços de Banach. Quando $p = 2$, $L^2(I)$ torna-se um espaço de Hilbert munido do produto interno,

$$(f,g)_{L^2} := (f,g) = \int_I f(x)\overline{g(x)}dx, \qquad f,g \in L^2(I).$$

Neste contexto definimos a transformada de Fourier como segue

Definição 1.1.2. *Seja $f = f(t) \in L^1(\mathbb{R})$, a transformada de Fourier de f é a função $\widehat{f} = \widehat{f}(\tau)$ definida por*

$$\widehat{f}(\tau) = c\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-it\tau}dt, \qquad \tau \in \mathbb{R}.$$

Definição 1.1.3. *Para uma função $f = f(x,t)$, que é periódica na variável x com período $L = 2\ell$, definimos a transformada de Fourier de f, $\widehat{f} = \widehat{f}(n,\tau)$ para $n \in \mathbb{Z}$ e $\tau \in \mathbb{R}$, por*

$$\widehat{f}(n,\tau) = c\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\ell}^{\ell} f(x,t)\ e^{-i\pi nx/\ell}\ e^{-it\tau}dxdt.$$

Notação. Observe que estamos utilizando a mesma notação para três tipos de transformada de Fourier. Entretanto, esperamos que isso não cause confusão, pois reservaremos a variável $n \in \mathbb{Z}$ para quando estivermos trabalhando com a transformada de Fourier de uma função periódica na variável x e a variável $\tau \in \mathbb{R}$ para a transformada de Fourier de uma função na variável $t \in \mathbb{R}$. Por exemplo a notação $[\widehat{f}(n,\cdot)]^\wedge(\tau)$, signica que estamos tomando a transformada de Fourier da função $t \in \mathbb{R} \mapsto \widehat{f}(n,t)$, onde $\widehat{f}(n,t)$ denota a transformada de de Fourier da função f na variável periódica x.

A tranformada de Fourier do produto fg onde $f = f(x,t)$ e $g = g(x,t)$ são periódicas na variável x com período 2ℓ é obtida através da convolução por

$$\widehat{fg}(n,\tau) = \widehat{f} * \widehat{g}(n,\tau) = c \sum_{n_1 \in \mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n-n_1, \tau-\tau_1)\widehat{g}(n_1,\tau_1)\, d\tau_1.$$

1.2 Distribuição e Espaços de Sobolev Periódicos

Nesta seção, definiremos os espaços de Sobolev periódicos, que serão os espaços onde provaremos nossos resultados de boa colocação e estabilidade. Seja $\mathcal{P} = C^{\infty}_{per}$ o conjunto de todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ que são infinitamente diferenciáveis e periódicas de período fixado $L = 2\ell$. O conjunto $\mathcal{P}$ pode ser transformado num espaço métrico completo introduzindo a distância por

$$d(\varphi,\psi) = \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} \frac{\|\varphi^{(j)} - \psi^{(j)}\|_{L^\infty}}{1 + \|\varphi^{(j)} - \psi^{(j)}\|_{L^\infty}}, \qquad \varphi,\psi \in \mathcal{P}.$$

O dual topológico de $\mathcal{P}$, denotado por $\mathcal{P}'$, que é o conjunto de todos os funcionais lineares contínuos definidos de $\mathcal{P}$ em $\mathbb{C}$ é denominado o conjunto das *distribuições periódicas*. Dado $f \in \mathcal{P}'$ o valor de f em $\varphi \in \mathcal{P}$ é denotado por,

$$f(\varphi) = \langle f, \varphi \rangle.$$

Seja $k \in \mathbb{Z}$ e considere $\Theta_k(x) = e^{i\pi kx/\ell}$ para $x \in \mathbb{R}$. Em analogia à definição 1.1.1, a *transformada de Fourier* de $f \in \mathcal{P}'$ é a função $\widehat{f} : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ dada por

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{2\ell}\langle f, \Theta_{-k}\rangle, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

O conjunto das *sequências rapidamente decrescentes*, denotado por $\mathcal{S}(\mathbb{Z})$, é o conjunto de todas as sequências com valores complexos $\alpha = (\alpha_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ tais que

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |k|^j |\alpha_k| < \infty, \qquad \forall\ j = 0,1,2,...$$

O conjunto $\mathcal{S}(\mathbb{Z})$ se transforma num espaço métrico completo quando munido da distância

$$\widehat{d}(\alpha,\beta) = \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} \frac{\|\alpha-\beta\|_{\infty,j}}{1+\|\alpha-\beta\|_{\infty,j}}, \qquad \alpha,\beta \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}),$$

onde $\|\alpha\|_{\infty,j} = \sup_{k\in\mathbb{Z}}(|\alpha_k||k|^j)$. A transformada de Fourier inversa de $\alpha = (\alpha_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{S}(\mathbb{Z})$ é a função $\check{\alpha} \in \mathcal{P}$ dada por,

$$\check{\alpha}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k \Theta_k(x).$$

O dual topológico de $\mathcal{S}(\mathbb{Z})$ denotado por $\mathcal{S}'(\mathbb{Z})$ é o espaço das *sequências de crescimento lento*, i.e., o conjunto das sequências $\alpha = (\alpha_k)$ tal que existem constantes $C > 0$ e $N \in \mathbb{N}$ tais que

$$|\alpha_k| \leq C|k|^N, \qquad \forall k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}.$$

$\mathcal{S}'(\mathbb{Z})$ está munido da topologia da convergência pontual. A transformada de Fourier é um isomorfismo linear entre $\mathcal{P}'$ e $\mathcal{S}'(\mathbb{Z})$.

Toda função $\psi \in L^p([-\ell,\ell])$, $p \geq 1$ pode ser vista como um elemento de $\mathcal{P}'$ definindo

$$\langle \psi, \varphi\rangle = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} \psi(x)\varphi(x)dx,$$

onde $\varphi \in \mathcal{P}$. Dessa forma, se $\psi \in L^p([-\ell,\ell])$, $p \geq 1$ para $k \in \mathbb{Z}$,

$$\widehat{\psi}(k) = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} \psi(x)e^{-i\pi kx/\ell}dx.$$

O espaço das sequências $\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de *quadrado somável* denotado por ℓ^2 é definido como sendo

$$\ell^2 = \left\{\alpha;\ \|\alpha\|_{\ell^2} := \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\alpha_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \infty\right\}.$$

Definição 1.2.1. *Para $s \in \mathbb{R}$, o espaço de Sobolev $H^s_{per}([-\ell,\ell]) := H^s_{per}$ é definido como sendo o conjunto das $f \in \mathcal{P}'$ tal que*

$$\|f\|^2_{H^s_{per}} = 2\ell \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+|k|^2)^s |\widehat{f}(k)|^2 < \infty.$$

O conjunto H^s_{per} é um espaço de Hilbert quando munido do produto interno,

$$(f,g)_s = 2\ell \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+|k|^2)^s \widehat{f}(k)\overline{\widehat{g}(k)}.$$

Quando $s = 0$, H^0_{per} é um conjunto isométricamente isomorfo a $L^2([-\ell,\ell])$ e será denotado por L^2_{per}. Note que $H^s_{per} \hookrightarrow L^2_{per}$ para todo $s \geq 0$, e, para cada $n \in \mathbb{Z}$, a norma $\|\cdot\|_{H^n_{per}}$, definida acima, de um função f é equivalente à norma,

$$\left(\sum_{j=0}^{n} ||f^{(j)}||^2_{L^2_{per}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{j=0}^{n} \int_{-l}^{l} |f^{(j)}(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

onde $f^{(j)}$ denota a j-ésima derivada de f tomada no sentido de $\mathcal{P}'$. Além disso, $(H^s_{per})'$, o dual topológico de H^s_{per}, é isometricamente isomorfo a H^{-s}_{per} para todo $s \in \mathbb{R}$. O par dualidade $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^{-s}_{per},\, H^s_{per}} := \langle \cdot, \cdot \rangle_s$ é representado para $f \in H^{-s}_{per}$ e $g \in H^s_{per}$ por,

$$\langle f, g \rangle_s = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)\overline{\widehat{g}(k)}.$$

Desta maneira, se $f \in L^2_{per}$ e $g \in H^s_{per}$, $s \geq 0$, então $\langle f, g \rangle_s = (f, g)_{L^2}$.

Sejam $\alpha = (\alpha_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ e $\beta = (\beta_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ duas sequências de números complexos e $s \in \mathbb{R}$. O espaço $\ell^2_{s,2l} := \ell^2_{s,2l}(\mathbb{Z})$ é definido por,

$$\ell^2_{s,2l}(\mathbb{Z}) := \left\{ \alpha = (\alpha_k)_{k\in\mathbb{Z}}\,;\ ||\alpha||_{\ell^2_{s,2l}} := \left(2l \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1 + |k|^2)^s |\alpha_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} < +\infty \right\}.$$

Notemos que $\ell^2_{s,2l}(\mathbb{Z})$ é um espaço de Hilbert com relação ao produto interno,

$$(\alpha, \beta)_{\ell^2_{s,2l}} = 2l \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1 + |k|^2)^s \alpha_k \overline{\beta_k}.$$

Segundo a notação dada anteriormente, vemos que $f \in H^s_{per}$ se, e somente se $\left(\widehat{f}(k)\right)_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^2_{s,2l}$ e, neste caso, tem-se ainda $\|f\|_s = \|\widehat{f}\|_{\ell^2_{s,2l}}$.

Teorema 1.2.2. (***Lema de Sobolev***) *Se $s > \frac{1}{2}$ então $H^s_{per} \hookrightarrow C_{per}$ e*

$$\|f\|_\infty \leq \|\widehat{f}\|_{\ell^1} \leq C\|f\|_s, \qquad f \in H^s_{per}.$$

Teorema 1.2.3. (***Fourier/Parseval***) *Seja $f \in C_{per}$ e suponha que $f' \in PC_{per}$. Então a série de Fourier gerada por f converge uniformemente a f sobre $\mathbb{R}$. Além disso, se verifica a identidade*

$$\|\widehat{f}\|^2_{\ell^2} = \frac{1}{2\ell}\|f\|^2_{L^2_{per}}. \qquad \textbf{\textit{(Parseval)}}$$

Ou equivalentemente,

$$(\widehat{f}, \widehat{g})_{\ell^2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)\overline{\widehat{g}(k)} = \frac{1}{2l}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\overline{g(x)}dx = \frac{1}{2\ell}(f, g)_{L^2_{per}}.$$

CAPÍTULO 2

Existência de Soluções Periódicas

Neste capítulo, estamos preocupados em mostrar existência de soluções periódicas explícitas para o sistema

$$\begin{cases} iu_t + u_{xx} - u + \Big(\dfrac{1}{9}|u|^2 + 2|w|^2\Big)u + \dfrac{1}{3}\overline{u}^2 w = 0 \\ i\sigma w_t + w_{xx} - \alpha w + \Big(9|w|^2 + 2|u|^2\Big)w + \dfrac{1}{9}u^3 = 0, \end{cases} \tag{2.1}$$

as quais serão objetos de estudo da maior parte desta tese. Entretanto, no Capítulo 5 mostraremos a existência de soluções periódicas tendo uma forma mais geral do que aquelas que encontraremos neste capítulo, mas que também incluem estas que consideraremos aqui.

Lembremos que em (2.1) u e w são funções complexas das variáveis $x, t \in \mathbb{R}$, σ e α são constantes reais e a barra sobre u denota conjugação complexa. Como já descrevemos na Introdução, o sistema (2.1) descreve, em variáveis adimensionais, a interação entre um feixe de luz linearmente polarizado e seu terceiro harmônico (ver [43], [56]).

Estamos interessados em soluções do sistema (2.1) que são da forma

$$u(x,t) = e^{i\gamma t}\phi_\gamma(x), \qquad w(x,t) = e^{3i\gamma t}\psi_\gamma(x), \tag{2.2}$$

onde $\phi_\gamma, \psi_\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções periódicas com um mesmo período fundamental $L > 0$ e γ é um parâmetro real. Substituindo (2.2) em (2.1), segue-se que $\phi = \phi_\gamma$ e $\psi = \psi_\gamma$ devem satisfazer o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} \phi'' - (\gamma+1)\phi + \left(\frac{1}{9}\phi^2 + 2\psi^2\right)\phi + \frac{1}{3}\phi^2\psi = 0 \\ \psi'' - (\alpha+3\sigma\gamma)\psi + \left(9\psi^2 + 2\phi^2\right)\psi + \frac{1}{9}\phi^3 = 0. \end{cases} \tag{2.3}$$

Encontrar soluções explícitas para o sistema não-linear (2.3) não é uma tarefa muito simples. Contudo, o problema, e portanto nossa busca por soluções explícitas, será reduzido ao caso em que $\phi = a\psi$, onde a é uma constante real. É com essa hipóteses que trabalharemos ao longo de toda essa tese e nosso objetivo a partir de agora é encontrar curvas suaves de soluções periódicas, dependendo do parâmetro γ, para o sistema (2.3).

2.1 Existência de soluções do tipo Ondas Dnoidal

Como já destacamos anteriormente, suponha que $\phi = a\psi$, com $a \in \mathbb{R}$. Inicialmente, vamos supor $a = 0$ (mais tarde veremos o caso $a \neq 0$). Assim, o sistema (2.3) se reduz à única equação diferencial ordinária

$$\psi'' - (\alpha+3\sigma\gamma)\psi + 9\psi^3 = 0. \tag{2.4}$$

Multiplicando (2.4) por ψ' e integrando uma vez, obtemos

$$[\psi']^2 = \frac{9}{2}[-\psi^4 + \frac{2}{9}(\alpha+3\sigma\gamma)\psi^2 + \frac{4}{9}B_\psi] = \frac{9}{2}F(\psi), \tag{2.5}$$

onde B_ψ é uma constante de integração e F é o polinômio dado por $F(t) = -t^4 + \frac{2}{9}(\alpha + 3\sigma\gamma)t^2 + \frac{4}{9}B_\psi$. Suponha que F tenha raízes $\pm\eta_1$, $\pm\eta_2$ (note que $F(t)$ é uma função par) com $0 < \eta_2 < \eta_1$ (veja Figura 2.1).

Assim, podemos escrever (2.5) na forma

$$[\psi']^2 = \frac{9}{2}(\psi^2 - \eta_2^2)(\eta_1^2 - \psi^2). \tag{2.6}$$

Observe que o lado esquerdo de (2.5) é não-negativo e assim deve ser também o lado direito. Portanto devemos ter $\eta_2 \le \psi \le \eta_1$ ou $-\eta_1 \le \psi \le -\eta_1$. Vamos aqui considerar o estudo de soluções positivas e assim vamos considerar $\eta_2 \le \psi \le \eta_1$ (o caso negativo é similar). Agora defina $\varphi = \psi/\eta_1$, $k^2 = (\eta_1^2 - \eta_2^2)/\eta_1^2$ e suponha que $\varphi(0) = 1$. Então podemos reescrever a equação (2.6) como

$$[\varphi']^2 = \frac{9\eta_1^2}{2}(1-\varphi^2)(\varphi^2 - 1 + k^2).$$

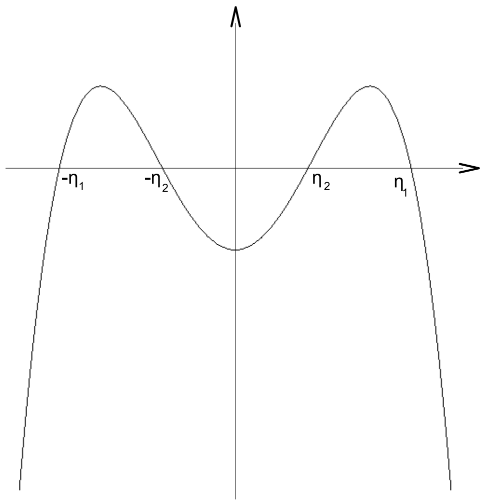

Figura 2.1: Gráfico do polinômio $F(t) = -t^4 + \frac{2}{9}(\alpha + 3\sigma\gamma)t^2 + \frac{4}{9}B_\psi$ com raízes $\pm\eta_1$ e $\pm\eta_2$.

Finalmente, definindo ζ pela relação $\varphi^2 = 1 - k^2 sen^2\zeta$, podemos escrever esta última equação acima da seguinte forma

$$[\zeta']^2 = \frac{9\eta_1^2}{2}(1 - k^2 sen^2\zeta),$$

portanto, via integração, obtemos

$$\int_0^{\zeta(x)} \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 sen^2 t}} = \frac{3\eta_1}{\sqrt{2}}x. \tag{2.7}$$

Disso segue, pela definição das funções elípticas de Jacobi, que $sen\,\zeta(x) = sn\left(\frac{3\eta_1}{\sqrt{2}}x; k\right)$ e portanto obtemos a solução positiva

$$\varphi(x) = \sqrt{1 - k^2 sn^2\left(\frac{3\eta_1}{2}x; k\right)} = dn\left(\frac{3\eta_1}{\sqrt{2}}x; k\right), \tag{2.8}$$

onde usamos que $k^2 sn^2 + dn^2 = 1$.

Assim, voltando à variável ψ, obtemos as então chamadas **ondas dnoidal**

$$\psi(x) = \eta_1 dn\left(\frac{3\eta_1}{\sqrt{2}}x; k\right). \tag{2.9}$$

Como dn tem período fundamental $2K$, onde $K = K(k)$ é a integral elíptica completa do primeiro tipo, segue que ψ tem período fundamental dado por

$$T_\psi = \frac{2\sqrt{2}}{3\eta_1}K(k).$$

Note que pela forma explícita de F, obtemos as relações

$$\begin{cases} \eta_1^2 + \eta_2^2 = \frac{2}{9}(\alpha + 3\sigma\gamma) = 2\omega \\ \\ -\eta_1^2\eta_2^2 = \dfrac{4}{9}B_\psi, \end{cases} \tag{2.10}$$

onde estamos definindo $\omega := \frac{1}{9}(\alpha + 3\sigma\gamma)$. Observe que de (2.10) devemos ter $\omega > 0$. Estudaremos agora o comportamento de T_ψ. Para $\omega > 0$ fixado, obtemos de (2.10) que $0 < \eta_2 < \sqrt{\omega} < \eta_1 < \sqrt{2\omega}$. Além disso, podemos ver T_ψ como uma função unicamente do parâmetro η_2,

$$T_\psi(\eta_2) = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{2\omega - \eta_2^2}}K(k(\eta_2)), \qquad \text{com} \qquad k^2(\eta_2) = \frac{2\omega - 2\eta_2^2}{2\omega - \eta_2^2}.$$

Notemos que quando $\eta_2 \to 0^+$ temos $k(\eta_2) \to 1^-$ donde vem que $K(k(\eta_2)) \to \infty$ e, consequentemente, $T_\psi(\eta_2) \to \infty$. Por outro lado, quando $\eta_2 \to \sqrt{\omega}$ obtemos que $k(\eta_2) \to 0^+$ e, portanto, $K(k(\eta_2)) \to \frac{\pi}{2}$ e daí segue que $T_\psi(\eta_2) \to \frac{\pi\sqrt{2}}{3\sqrt{\omega}}$. Finalmente, desde que a função $\eta_2 \in (0, \sqrt{\omega}) \mapsto T_\psi(\eta_2)$ é estritamente decrescente (conforme veremos abaixo) obtemos que

$$T_\psi > \frac{\pi\sqrt{2}}{3\sqrt{\omega}}.$$

Além disso, fixado $L > 0$, escolha $\omega > 0$ tal que $\sqrt{\omega} > \frac{\pi\sqrt{2}}{3L}$. Então segue da análise acima que existe um único $\eta_2 = \eta_2(\omega) \in (0, \sqrt{\omega})$ tal que a onda dnoidal $\psi = \psi(\cdot; \eta_1(\omega); \eta_2(\omega))$ tem período fundamental $L = T_\psi(\eta_2)$.

Observação 2.1.1. *A fórmula* (2.9) *contém, pelo menos formalmente a solução onda solitária do sistema* (2.1) *(com $u \equiv 0$) encontrada em* [56]. *De fato, se $\eta_2 \to 0^+$ obtemos que $\eta_1 \to \sqrt{2\omega} = \frac{\sqrt{2(\alpha+3\sigma\gamma)}}{3}$, $k(\eta_2) \to 1^-$ e $dn(x, 1^-) \sim sech(x)$. Consequentemente,*

$$\psi_\gamma(x) \sim \frac{\sqrt{2(\alpha + 3\sigma\gamma)}}{3} sech(\sqrt{\alpha + 3\sigma\gamma}x).$$

2.1.1 Existência de uma curva suave de Ondas Dnoidal

Mostraremos aqui que, para cada $L > 0$ fixado, existe uma curva suave de soluções ondas dnoidal para a equação (2.4), dependendo do parâmetro real γ, a qual será necessário no estudo de estabilidade não-linear das soluções do sistema (2.1). Por razões que ficarão claras mais tarde, vamos assumir daqui em diante que γ, σ e α satisfazem a relação $\gamma+1=\alpha+3\sigma\gamma$. Assim, temos o seguinte teorema.

Teorema 2.1.2. *Seja $L>0$ fixado. Considere $\omega_0>\frac{2\pi^2}{9L^2}$ e o único $\eta_{2,0}=\eta_{2,0}(\omega_0)\in(0,\sqrt{\omega_0})$ tal que $T_{\psi_{\omega_0}}=L$. Então,*

(i) *existe um intervalo $I(\omega_0)$ ao redor de ω_0, um intervalo $B(\eta_{2,0})$ ao redor de $\eta_{2,0}$ e uma única função suave $\Lambda: I(\omega_0)\to B(\eta_{2,0})$ tal que $\Lambda(\omega_0)=\eta_{2,0}$ e*

$$\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{2\omega-\eta_2^2}}K(k)=L,$$

onde $\omega\in I(\omega_0)$, $\eta_2=\Lambda(\omega)$ e $k^2=k^2(\omega)=\frac{2\omega-2\eta_2^2}{2\omega-\eta_2^2}$. Além disso, podemos escolher $I(\omega_0)=\left(\frac{2\pi^2}{9L^2},+\infty\right)$.

(ii) *Para $\gamma\in\left(\frac{2\pi^2}{L^2}-1,+\infty\right)$ e $\omega(\gamma)=\frac{1}{9}(\gamma+1)$, a onda dnoidal $\psi_\gamma=\psi_{\omega(\gamma)}$ tem período fundamental L e satisfaz a equação (2.4). Além disso, a aplicação*

$$\gamma\in\left(\frac{2\pi^2}{L^2}-1,+\infty\right)\mapsto\psi_\gamma\in H^n_{per}([0,L]),$$

é de classe C^∞.

Notação: Por questão de simplicidade e conveniência, as vezes denominaremos as ondas do tipo dnoidal no Teorema 2.1.2 como **ondas dnoidal do tipo I**.

Demonstração. A prova é basicamente uma aplicação do Teorema da Função Implícita. Para isso, definimos $\Omega=\{(\eta,\omega)\in\mathbb{R}^2;\omega>\frac{2\pi^2}{9L^2},\eta\in(0,\sqrt{\omega})\}$ e $\Gamma:\Omega\to\mathbb{R}$ por

$$\Gamma(\eta,\omega)=\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{2\omega-\eta^2}}K(k(\eta,\omega))-L, \tag{2.11}$$

onde $k^2(\eta,\omega)=\frac{2\omega-2\eta^2}{2\omega-\eta^2}$. Por hipótese, temos que $\Gamma(\eta_{2,0},\omega_0)=0$. Vamos agora mostrar que $\frac{\partial\Gamma}{\partial\eta}<0$ em Ω. Com efeito, usando que

$$\frac{d}{dk}K(k)=\frac{E(k)-k'^2K(k)}{kk'^2}, k\in(0,1) \tag{2.12}$$

onde $E = E(k)$ é a integral elíptica completa do segundo tipo e $k'^2 = 1 - k^2$ é o *módulo complementar*, e, pelo fato de

$$\frac{\partial k}{\partial \eta} = -\frac{2\eta\omega}{k(2\omega - \eta^2)^2},$$

obtemos que

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \eta} = \frac{2\sqrt{2}\eta}{3(2\omega - \eta^2)^{3/2}} K(k) - \frac{4\sqrt{2}\eta\omega}{3(2\omega - \eta^2)^{5/2}} \left[\frac{E(k) - k'^2 K(k)}{k^2 k'^2}\right].$$

Logo,

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial \Gamma}{\partial \eta} < 0 \quad &\Leftrightarrow \quad k^2 k'^2 (2\omega - \eta^2) K(k) + 2\omega k'^2 K(k) < 2\omega E(k) \\ &\Leftrightarrow \quad \eta^2 K(k) < \omega E(k) \\ &\Leftrightarrow \quad (1 + k'^2) E(k) - 2k'^2 K(k) > 0. \end{aligned}$$

Agora para $\beta \in (0,1]$ defina $f(\beta) := (1+\beta^2)E(\sqrt{1-\beta^2}) - 2\beta^2 K(\sqrt{1-\beta})$, portanto, $\frac{\partial \Gamma}{\partial \eta} < 0 \Leftrightarrow f(k') > 0$, donde é suficiente mostrar que $f(\beta) > 0$, se $\beta \in (0,1)$. Para isso, note que $f(1) = 0$ e portanto, basta mostrarmos que $f'(\beta) < 0$. Usando (2.12) e que

$$\frac{d}{dk} E(k) = \frac{E(k) - K(k)}{k}, \ k \in (0,1), \tag{2.13}$$

obtemos que

$$f'(\beta) < 0 \Leftrightarrow (1-\beta^2)E(\sqrt{1-\beta^2}) < (1+\beta^2)K(\sqrt{1-\beta^2})$$

e desde que $E(k) < K(k), \forall k \in (0,1)$ segue que $f'(\beta) < 0$ e portanto conclui nossa afirmação que $\frac{\partial \Gamma}{\partial \eta} < 0$. Em consequência, segue do Teorema da Função Implícita que existe um intervalo $I(\omega_0)$ ao redor de ω_0, um intervalo $B(\eta_{2,0})$ ao redor de $\eta_{2,0}$ e uma uma única aplicação suave $\Lambda : I(\omega_0) \to B(\eta_{2,0})$ tal que $\Lambda(\omega_0) = \eta_{2,0}$ e

$$\Gamma(\Lambda(\omega), \omega) = 0, \quad \forall \omega \in I(\omega_0).$$

Além disso, desde que ω_0 pode ser escolhido arbitrariamente no intervalo $I = \left(\frac{2\pi^2}{9L^2}, \infty\right)$ segue, pela unicidade da função Λ em $I(\omega_0)$, que podemos estende-la em I e portanto podemos tomar $I(\omega_0) = I$. A parte (ii) segue imediatamente da suavidade das funções em questão. $\square$

O próximo resultado nos dá uma idéia do comportamento das funções Λ e k em função do parâmetro ω.

Corolário 2.1.3. *Seja* $\Lambda : I(\omega_0) \to B(\eta_{2,0})$ *dada no Teorema* 2.1.2. *Então* Λ *é uma função estritamente decrescente. Além disso, o módulo*

$$k^2 = k^2(\omega) = \frac{2\omega - 2\eta^2}{2\omega - \eta^2}, \quad \eta = \eta(\omega) = \Lambda(\omega),$$

é uma função estritamente crescente.

Demonstração. Como $\Gamma(\Lambda(\omega), \omega) = 0$, $\omega \in I(\omega_0)$, derivando em ω, obtemos

$$\Lambda'(\omega) = -\frac{\partial\Gamma/\partial\omega}{\partial\Gamma/\partial\eta}.$$

Desde que $\frac{\partial\Gamma}{\partial\eta} < 0$, para mostrar que Λ é estritamente decrescente, basta mostrarmos que $\frac{\partial\Gamma}{\partial\omega} < 0$, já que neste caso teremos $\Lambda'(\omega) < 0$ em $I(\omega_0)$. Usando que $\eta^2 = (2\omega - \eta^2)k'^2$, obtemos

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial\omega} = \frac{-2\sqrt{2}(2\omega - 2\eta^2)^{1/2}K(k)}{3(2\omega - \eta^2)^{3/2}(2\omega - 2\eta^2)^{1/2}} + \frac{2\sqrt{2}\eta^2}{(2\omega - 2\eta^2)^{1/2}(2\omega - \eta^2)^2}\frac{dK}{dk}(k).$$

Assim,

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial\omega} < 0 \Leftrightarrow -kK(k) + k'^2\frac{dK}{dk}(k) < 0.$$

Usando novamente (2.12), obtemos

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial\omega} < 0 \Leftrightarrow k^2K(k) > E(k) - k'^2K(k) \Leftrightarrow (k^2 + k'^2)K(k) > E(k) \Leftrightarrow K(k) > E(k).$$

Como esta última equivalência é sempre verificada, isso conclui a afirmação.

Finalmente, derivando k em relação a ω, obtemos

$$\frac{dk}{d\omega} = \frac{1}{2k}\left[\frac{2\eta^2 - 4\omega\eta\eta'}{(2\omega - \eta^2)^2}\right] > 0,$$

donde segue que k é estritamente crescente. $\square$

2.2 Existência de soluções do tipo Ondas Cnoidal

Continuaremos aqui nossa busca por soluções do sistema (2.1) que são do tipo (2.2) com $\phi = \phi_\gamma \equiv 0$. Assim, de (2.5), temos que (para $\psi = \psi_\gamma$)

$$[\psi']^2 = \frac{9}{2}F(\psi), \tag{2.14}$$

onde $F(t)$ é o polinômio dado por $F(t) = -t^4 + \frac{2}{9}(\alpha + 3\sigma\gamma)t^2 + \frac{4}{9}B_\psi$ e B_ψ é uma constante de integração. Na obtenção das ondas dnoidal, fizemos a hipótese de que F possuia soluções $\pm\eta_1$ e $\pm\eta_2$. Consideraremos agora o caso quando F possui soluções $\pm b$ e $\pm ia$ (note que F é um polinômio par), com $b > 0$ (veja Figura 2.2). Assim, de (2.14) podemos escrever

$$[\psi']^2 = \frac{9}{2}(a^2 + \psi^2)(b^2 - \psi^2). \tag{2.15}$$

Segue diretamente daí que devemos ter $-b \le \psi \le b$ e

$$\begin{cases} b^2 - a^2 = \frac{2}{9}(\alpha + 3\sigma\gamma) = 2\omega \\ \\ a^2 b^2 = \dfrac{4}{9}B_\psi, \end{cases} \tag{2.16}$$

onde estamos definindo $\omega := \frac{1}{9}(\alpha + 3\sigma\gamma)$.

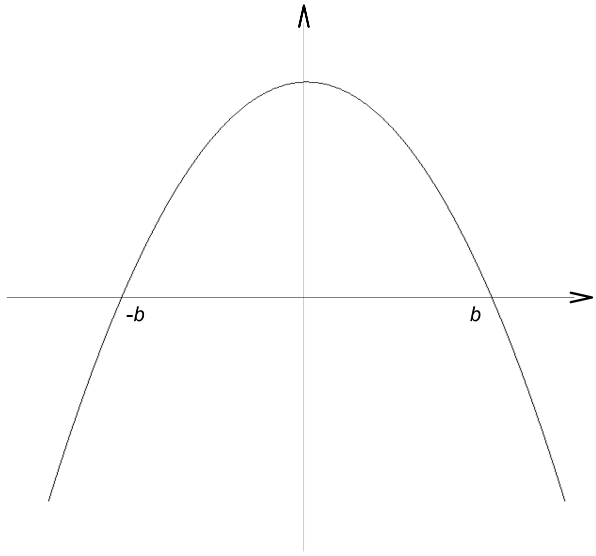

Figura 2.2: Gráfico do polinômio $F(t) = -t^4 + \frac{2}{9}(\alpha + 3\sigma\gamma)t^2 + \frac{4}{9}B$ com raízes $\pm b$ e $\pm ia$.

Definindo $\chi = \psi/b$ e supondo $\chi(0) = 1$, podemos reescrever (2.15) na seguinte forma

$$[\chi']^2 = \frac{9}{2}(1 - \chi^2)(\frac{a^2}{b^2} + \chi^2).$$

Finalmente, definindo ϕ implicitamente por $\chi^2 = 1 - sen^2\phi$ e pondo $k^2 = b^2/(a^2 + b^2)$, conseguimos

$$[\phi']^2 = \frac{9}{2}(a^2 + b^2)[1 - k^2 sen^2\phi].$$

Esta última equação pode ser resolvida implicitamente por

$$\int_0^{\phi(x)} \frac{dt}{\sqrt{1-k^2 sen^2 t}} = 3\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}x,$$

donde resulta, por definição das funções elípticas Jacobianas, que

$$sen\,\phi(x) = sn\left(3\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}x; k\right).$$

Consequentemente, obtemos as então chamadas **ondas cnoidal**

$$\psi(x) = b\,cn\left(3\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}x; k\right), \tag{2.17}$$

onde usamos que $sn^2 + cn^2 = 1$.

Desde que cn tem período fundamental $4K(k)$, vem que ψ definida por (2.17) tem período fundamental dado por

$$T_\psi \equiv \frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{a^2+b^2}}K(k). \tag{2.18}$$

Interessados em obter uma curva suave de ondas cnoidal com um mesmo período fixado $L > 0$, vamos fazer uma análise detalhada do comportamento do período T_ψ dado em (2.18). Note que de (2.16) podemos ter ω positivo ou negativo. Inicialmente, consideremos $\omega > 0$ fixado. Então de (2.16), temos $b^2 > 2\omega$ e $k^2 \in (1/2, 1)$. Portanto, podemos ver T_ψ como uma função do parâmetro b, a saber,

$$T_\psi(b) = \frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{2b^2-2\omega}}K(k), \quad \text{onde} \quad k^2(b) = \frac{b^2}{2b^2-2\omega}. \tag{2.19}$$

Agora note que se $b \to \infty$ então $k^2(b) \to 1/2$, consequentemente de (2.19) vem que $T_\psi(b) \to 0^+$, quando $b \to \infty$. Além disso, quando $b \to \sqrt{2\omega}$, temos $k^2(b) \to 1^-$, donde $K(k) \to \infty$ e daí vem de (2.19) que $T_\psi(b) \to \infty$, quando $b \to \sqrt{2\omega}$. Finalmente, conforme veremos no próximo teorema, a função $b \in (\sqrt{2\omega}, \infty) \mapsto T_\psi(b)$ é estritamente decrescente, o que implica que dado $L > 0$ fixado, para qualquer $\omega > 0$, existe um único $b = b(\omega)$ tal que $L = T_\psi(b)$.

Da mesma forma, se $\omega < 0$ está fixado, de (2.16) vem que $a^2 > -2\omega$ e $k^2 = (a^2 + 2\omega)/(2a^2 + 2\omega)$. Neste caso, podemos ver o período T_ψ como uma função somente de a, isto é,

$$T_\psi(a) = \frac{4}{3\sqrt{a^2+\omega}}K(k), \quad \text{onde} \quad k^2(a) = \frac{a^2+2\omega}{2a^2+2\omega}. \tag{2.20}$$

Notemos que quando $a \to \infty$, temos que $k^2(a) \to 1/2^-$ e portanto, de (2.20) resulta que $T_\psi(a) \to 0$, quando $a \to \infty$. Por outro lado, quando $a \to \sqrt{-2\omega}$, temos $k^2(a) \to 0^+$ e portanto $T_\psi(a) \to \frac{2\pi}{3\sqrt{-\omega}}$, quando $a \to \sqrt{-2\omega}$. Além disso, a função $a \in (\sqrt{-2\omega}, \infty) \mapsto T_\psi(a)$ é estritamente decrescente, o que implica que fixado $\omega < 0$ e $0 < L < \frac{2\pi}{3\sqrt{-\omega}}$, existe um único $a = a(\omega)$ tal que a onda cnoidal ψ, tem período fundamental $T_\psi(a) = L$.

2.2.1 Existência de uma curva suave de Ondas Cnoidal

De modo análogo como construímos uma curva suave de ondas dnoidal, dependendo do parâmetro γ, aqui também podemos construir uma curva suave de ondas cnoidal dependendo do parâmetro γ. Os dois próximos teoremas são aplicações do Teorema da Função Implícita, assim como no caso de ondas dnoidal. Como naquele caso, vamos também aqui supor que $\gamma + 1 = \alpha + 3\sigma\gamma$.

Teorema 2.2.1. *Seja $L > 0$ fixado. Então,*

(i) *Para cada $\omega > 0$, existe um único $b = b(\omega)$ com $b \in (\sqrt{2\omega}, \infty)$, tal que a aplicação $\omega \in (0, \infty) \mapsto b(\omega)$ é estritamente crescente e $L = \frac{4K(k)}{3\sqrt{b^2-\omega}}$. O módulo $k = k(\omega)$ é dado por $k^2 = b^2/(2b^2 - 2\omega)$ e satisfaz $k'(\omega) > 0$.*

(ii) *Para $\gamma \in (-1, \infty)$ e $\omega(\gamma) = \frac{1}{9}(\gamma + 1)$, a onda cnoidal*

$$\psi_{\gamma,1}(x) := \psi_{\omega(\gamma),1}(x) = b\, cn(3\sqrt{b^2 - \omega}\, x; k)$$

tem período fundamental L e satisfaz a equação (2.4). Além disso, a aplicação

$$\gamma \in (-1, \infty) \mapsto \psi_{\gamma,1} \in H^n_{per}([0, L])$$

é suave.

Demonstração. A prova é novamente uma aplicação do Teorema da Função Implícita. Neste caso definimos $\Omega = \{(b, \omega) \in \mathbb{R}^2; \omega > 0 \;\; e \;\; b > \sqrt{2\omega}\}$ e $\Gamma : \Omega \to \mathbb{R}$ por

$$\Gamma(b, \omega) = \frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{2b^2 - 2\omega}} K(k(b, \omega)),$$

onde $k^2(b, \omega) = \frac{b^2}{2b^2 - 2\omega}$. Pela nossa análise acima, para cada $\omega_0 > 0$ existe um único $b_0 = b_0(\omega_0)$ tal que $\Gamma(b_0, \omega_0) = L$. Agora, pela fórmula explícita de k, é fácil ver que

$$\frac{\partial k}{\partial b} = -\frac{2b\omega}{k(2b^2 - 2\omega)^2} < 0, \qquad \frac{\partial k}{\partial \omega} = \frac{b^2}{k(2b^2 - 2\omega)^2} > 0. \tag{2.21}$$

Logo,

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial b}(b,\omega) = \frac{1}{3}\left[-\frac{8\sqrt{2}b}{(2b^2-2\omega)^{3/2}}K(k) + \frac{4\sqrt{2}}{(2b^2-2\omega)^{1/2}}\frac{dK}{dk}\frac{\partial k}{\partial b}\right].$$

Desde que K é uma função estritamente crescente de $k \in (0,1)$, de (2.21) vemos que $\frac{\partial \Gamma}{\partial b} < 0$. Consequentemente, pelo Teorema da Função Implícita existe uma única função suave $b = b(\omega)$, numa vizinhança de ω_0, tal que $\Gamma(b(\omega),\omega) = L$. Pela unicidade de b e arbitrariedade de $\omega_0 > 0$, podemos definir tal função para todo $\omega > 0$.

Para ver que a aplicação $\omega \in (0,\infty) \mapsto b(\omega)$ é estritamente crescente, notemos que

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \omega}(b,\omega) = \frac{1}{3}\left[\frac{4\sqrt{2}}{(2b^2-2\omega)^{3/2}}K(k) + \frac{4\sqrt{2}}{(2b^2-2\omega)^{1/2}}\frac{dK}{dk}\frac{\partial k}{\partial b}\right].$$

Portanto, novamente pelo Teorema da Função Implícita, obtemos

$$\frac{db}{d\omega} = -\frac{\partial\Gamma/\partial\omega}{\partial\Gamma/\partial b} > 0.$$

Finalmente, pela fórmula de $k^2 = k^2(\omega)$, temos

$$2kk' = \frac{2b(b-2\omega b')}{(2b^2-2\omega)^2}.$$

Assim, para mostrar que $k'(\omega) > 0$, é suficiente mostrar que $b - 2\omega b' > 0$. Mas,

$$b\frac{\partial \Gamma}{\partial b} + 2\omega\frac{\partial \Gamma}{\partial \omega} = \frac{8\sqrt{2}(\omega - b^2)}{(2b^2-2\omega)^2 3/2}K < 0. \tag{2.22}$$

Usando novamente que $b' = -\frac{\partial\Gamma/\partial\omega}{\partial\Gamma/\partial b}$, vemos que

$$b - 2\omega b' > 0 \Leftrightarrow b\frac{\partial \Gamma}{\partial b} + 2\omega\frac{\partial \Gamma}{\partial \omega} < 0.$$

Portanto, de (2.22) segue o resultado. A parte (ii) segue da suavidade das funções envolvidas.

□

Analogamente, para o caso $\omega < 0$, temos

Teorema 2.2.2. *Seja $L > 0$ fixado. Então,*

(i) *Para cada $\omega \in \left(-\frac{4\pi^2}{9L^2}, 0\right)$, existe um único $a = a(\omega)$ com $a \in (\sqrt{-2\omega}, \infty)$, tal que a aplicação $\omega \in \left(-\frac{4\pi^2}{9L^2}, 0\right) \mapsto a(\omega)$ é uma função suave estritamente decrescente e $L = \frac{4K(k)}{3\sqrt{a^2+\omega}}$. Aqui, o módulo $k = k(\omega)$ é dado por $k^2 = (a^2+2\omega)/(2a^2+2\omega)$ e satisfaz $k'(\omega) > 0$.*

(ii) *Para* $\gamma \in \left(-\frac{4\pi^2}{L^2} - 1, -1\right)$ *e* $\omega(\gamma) = \frac{1}{9}(\gamma + 1)$, *a onda cnoidal*

$$\psi_{\gamma,2}(x) := \psi_{\omega(\gamma),2}(x) = \sqrt{a^2 + 2\omega}\, cn(3\sqrt{a^2 + \omega}\, x; k)$$

tem período fundamental L *e satisfaz a equação* (2.4). *Além disso, a aplicação*

$$\gamma \in \left(-\frac{4\pi^2}{L^2} - 1, -1\right) \mapsto \psi_{\gamma,2} \in H^n_{per}([0, L])$$

é suave.

Demonstração. A prova é análoga ao teorema anterior e portanto a omitiremos aqui. □

Observação 2.2.3. *Até agora, obtivemos soluções periódicas do sistema* (2.1) *que são tipo* $u \equiv 0$, $w(x,t) = e^{3i\gamma t}\phi_\gamma(x)$, *onde* ϕ_γ *é uma função periódica real, com um período* $L > 0$ *fixado, do tipo dnoidal ou cnoidal. No Capítulo* 5, *veremos uma outra maneira de se obter tais soluções, mais precisamente, consideraremos soluções da forma* $u \equiv 0$, $w(x,t) = e^{i\delta t}W(x)$, *onde* W *é uma função periódica que pode ser a valores complexos. Entretanto, quando* W *é a valores reais, mostraremos que tais soluções são exatamente aquelas do tipo ondas dnoidal ou cnoidal que encontramos aqui.*

2.3 O caso $a \neq 0$

Continuaremos agora nossa busca por soluções de (2.1) que são da forma

$$u(x,t) = e^{i\gamma t}\phi(x), \qquad w(x,t) = e^{3i\gamma t}\psi(x).$$

Já analisamos o caso em que $\phi = a\psi$, com $a = 0$. Consideramos agora o caso $a \neq 0$. Seja $b = 1/a$, então $\psi = b\phi$, $b \neq 0$. Assim, substituindo em (2.1), obtemos

$$\begin{cases} \phi'' - (\alpha + 3\sigma\gamma)\phi + \frac{1}{b}\left(9b^3 + 2b + \frac{1}{9}\right)\phi^3 = 0 \\ \phi'' - (1 + \gamma)\phi + \left(2b^2 + \frac{1}{3}b + \frac{1}{9}\right)\phi^3 = 0. \end{cases} \tag{2.23}$$

Supondo que $\frac{1}{b}(9b^3 + 2b + \frac{1}{9}) = 2b^2 + \frac{b}{3} + \frac{1}{9}$, isto é, b é a solução real da equação

$$63b^3 - 3b^2 + 17b + 1 = 0$$

(veja Figura 3.3) e que $\gamma + 1 = \alpha + 3\sigma\gamma$, o sistema (2.23) se reduz à única equação

$$\phi'' - (\gamma+1)\phi + \Big(2b^2 + \frac{1}{3}b + \frac{1}{9}\Big)\phi^3 = 0. \tag{2.24}$$

Note que $b < 0$, numericamente $b \approx -0,05753$. Agora escrevemos a equação (2.24) na forma

$$\phi'' - (\gamma+1)\phi + c\phi^3 = 0, \tag{2.25}$$

onde $c := 2b^2 + \frac{1}{3}b + \frac{1}{9}$. É fácil ver que $c > 0$, numericamente, $c \approx 0,09885$.

Multiplicando (2.25) por ϕ' e integrando uma vez, conseguimos

$$[\phi']^2 = \frac{c}{2}\left(-\phi^4 + 2\frac{(\gamma+1)}{c}\phi^2 + \frac{4B_\phi}{c}\right) = \frac{c}{2}F_\phi(\phi), \tag{2.26}$$

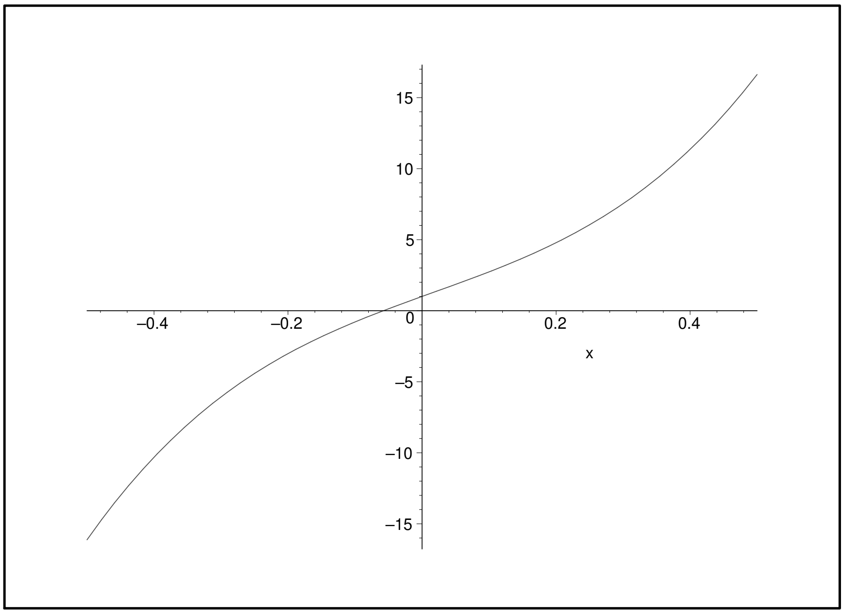

Figura 2.3: Gráfico da função $f(x) = 63x^3 - 3x^2 + 17x + 1$.

onde B_ϕ é uma constante de integração e $F_\phi(t)$ é o polinômio $F_\phi(t) = -t^4 + 2\omega t^2 + \frac{4B_\phi}{c}$, aqui $\omega := \frac{1}{c}(\gamma+1)$. Suponha que $F_\phi(t)$ tem raízes $\pm\theta_1$, $\pm\theta_2$ (note que $F_\phi(t)$ é uma função par). Assim, de (2.26) podemos escrever

$$[\phi']^2 = \frac{c}{2}(\theta_1^2 - \phi^2)(\phi^2 - \theta_2^2). \tag{2.27}$$

Suponha que $0 < \theta_2 < \theta_1$, então devemos ter $\theta_2 \leq \phi \leq \theta_1$ e

$$\begin{cases} \theta_1^2 + \theta_2^2 = 2\omega \\ \\ -\theta_1^2\theta_2^2 = \dfrac{4}{c}B_\phi, \end{cases} \tag{2.28}$$

Agora defina $\varphi = \phi/\theta_1$ e $k^2 = (\theta_1^2 - \theta_2^2)/\theta_1^2$ e suponha que $\varphi(0) = 1$. Então de (2.27) podemos escrever

$$[\varphi']^2 = \frac{\theta_1^2 c}{2}(1 - \varphi^2)(\varphi^2 - 1 + k^2).$$

Finalmente, definimos uma nova função ζ, implicitamente por, $\varphi^2 = 1 - k^2 sen^2\zeta$. Então

$$[\zeta']^2 = \frac{\theta_1^2 c}{2}(1 - k^2 sen^2\zeta).$$

Esta última equação pode ser resolvida implicitamente por

$$\int_0^{\zeta(x)} \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 sen^2 t}} = \frac{\theta_1\sqrt{c}}{\sqrt{2}}x =: u. \tag{2.29}$$

Mas, por definição das funções elípticas de Jacobi, temos

$$sen^2\zeta = sn^2(u;k),$$

donde vem que

$$\varphi(x) = \sqrt{1 - k^2 sn^2(u;k)} = dn(u;k).$$

Consequentemente, obtemos as soluções **ondas dnoidal** dadas por

$$\phi(x) = \theta_1 dn\left(\frac{\theta_1\sqrt{c}}{\sqrt{2}}x; k\right). \tag{2.30}$$

Desde que dn tem período fundamental $2K(k)$, segue que ϕ dada por (2.30) tem período fundamental

$$T_\phi = \frac{2\sqrt{2}}{\theta_1\sqrt{c}}K(k).$$

Vamos estudar o comportamento do período fundamental T_ϕ. Inicialmente, fixemos $\omega > 0$ e notemos que de (2.28) temos $0 < \theta_2 < \sqrt{\omega} < \theta_1 < \sqrt{2\omega}$ e k^2 pode ser vista como uma função de θ_2 dada por

$$k^2(\theta_2) = \frac{2\omega - 2\theta_2^2}{2\omega - \theta_2^2}. \tag{2.31}$$

Assim, também podemos ver T_ϕ como uma função unicamente de θ_2, a saber,

$$T_\phi(\theta_2) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{c}\sqrt{2\omega - \theta_2^2}} K(k(\theta_2)). \tag{2.32}$$

Agora, se $\theta_2 \to 0^+$ temos $k(\theta_2) \to 1^-$ e assim, $K(k(\theta_2)) \to \infty$. Logo, $T_\phi(\theta_2) \to \infty$. Por outro lado, quando $\theta_2 \to \sqrt{\omega}$, temos $k(\theta_2) \to 0^+$ e, portanto, $K(k(\theta_2)) \to \frac{\pi}{2}$. Logo $T_\phi(\theta) \to \frac{\pi\sqrt{2}}{\sqrt{c\omega}}$. Finalmente, não é difícil mostrar que a função $\theta_2 \in (0, \sqrt{\omega}) \mapsto T_\phi(\theta_2)$ é estritamente decrescente (como será visto abaixo), donde podemos concluir que

$$T_\phi > \frac{\pi\sqrt{2}}{\sqrt{c\omega}}. \tag{2.33}$$

Consequentemente, fixado $L > 0$ e escolhendo $\omega > 0$ tal que $\sqrt{\omega} > \frac{\pi\sqrt{2}}{\sqrt{c}L}$, segue que existe um único $\theta_2 = \theta_2(\omega) \in (0, \sqrt{\omega})$ tal que a onda dnoidal $\phi = \phi(\cdot; \theta_1(\omega); \theta_2(\omega))$ dada em (2.30) tem período fundamental $L = T_\phi(\theta_2(\omega))$.

Observação 2.3.1. *A equação* (2.30) *contém, pelo menos formalmente, a solução onda solitária de* (2.1) *encontrada em* [*56*] (*veja também* [*43*])*. Com efeito, quando $\theta_2 \to 0^+$ segue de* (2.28) *que $\theta_1 \to \sqrt{2(\gamma+1)}/\sqrt{c}$ e $dn(u; 1^-) \sim sech(u)$. Logo,*

$$\phi(x) \sim \theta sech(x), \qquad \psi(x) \sim b\theta sech(x),$$

onde

$$\theta := \frac{\sqrt{2(\gamma+1)}}{\sqrt{c}} = \frac{3\sqrt{2(\gamma+1)}}{\sqrt{18b^2 + 3b + 1}}.$$

Resumindo o que fizemos até agora, encontramos soluções de (2.1) do tipo

$$u(x,t) = e^{i\gamma t}\phi_\gamma(x), \qquad w(x,t) = e^{3i\gamma t}\psi_\gamma(x),$$

onde

$$\phi_\gamma(x) = \theta_1 dn\left(\frac{\theta_1\sqrt{c}}{\sqrt{2}}x; k\right), \qquad \psi_\gamma(x) = b\phi_\gamma(x), \tag{2.34}$$

b é a solução real da equação

$$63b^3 - 3b^2 + 17b + 1 = 0,$$

o módulo k é dado por

$$k^2 = \frac{\theta_1^2 - \theta_2^2}{\theta_1^2},$$

onde $0 < \theta_2 < \theta_1$ satisfazem $\theta_1^2 + \theta_2^2 = 2(\gamma+1)/c$ e $\gamma > \frac{2\pi^2}{L^2} - 1$, $\gamma + 1 = \alpha + 3\sigma\gamma$. Aqui $L > 0$ está fixado.

2.3.1 Existência de uma curva suave de Ondas Dnoidal

Analogamente ao Teorema 2.1.2, fixado $L > 0$, aqui também podemos construir uma curva suave de ondas dnoidal dependendo do parâmetro γ, a saber,

Teorema 2.3.2. *Seja $L > 0$ fixado. Considere $\omega_0 > \frac{2\pi^2}{cL^2}$ e o único $\theta_{2,0} = \theta_{2,0}(\omega_0) \in (0, \sqrt{\omega_0})$ tal que $T_{\phi_{\omega_0}} = L$. Então,*

(i) *existe um intervalo $I(\omega_0)$ ao redor de ω_0, um intervalo $B(\theta_{2,0})$ ao redor de $\theta_{2,0}$ e uma única função suave $\Gamma : I(\omega_0) \to B(\theta_{2,0})$ tal que $\Gamma(\omega_0) = \theta_{2,0}$ e*

$$\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{2\omega - \theta_2^2}} K(k) = L,$$

onde $\omega \in I(\omega_0)$, $\theta_2 = \Gamma(\omega)$ e $k^2 = k^2(\omega) = \frac{2\omega - 2\theta_2^2}{2\omega - \theta_2^2}$. Mais ainda, podemos escolher $I(\omega_0) = \left(\frac{2\pi^2}{cL^2}, +\infty\right)$.

(ii) *A função Γ em (i) é estritamente decrescente e o módulo $k = k(\omega)$ satisfaz*

$$\frac{dk}{d\omega} > 0$$

(iii) *Para $\gamma \in \left(\frac{2\pi^2}{L^2} - 1, +\infty\right)$ e $\omega(\gamma) = \frac{1}{c}(\gamma + 1)$, a onda dnoidal $\phi_\gamma = \phi_{\omega(\gamma)}$ tem período fundamental L e satisfaz a equação (2.25). Além disso, a aplicação*

$$\gamma \in \left(\frac{2\pi^2}{L^2} - 1, +\infty\right) \mapsto \phi_\gamma \in H^n_{per}([0, L]),$$

é de classe C^∞.

Demonstração. A demonstração desse teorema se faz com uma aplicação do Teorema da Função Implícita como no Teorema 2.1.2. Portanto a omitiremos aqui. $\square$

Notação: Sempre que for conveniente, denominaremos as ondas dnoidal do Teorema 2.3.2 como **ondas dnoidal do tipo II**.

Observação 2.3.3. *Assim como no caso em que $a = 0$, podemos aqui também obter soluções do tipo ondas cnoidal. Entretanto, nos limitaremos somente ao estudo das ondas dnoidal, já que a análise espectral necessária que faremos no próximo capítulo é ainda mais complicado do que no caso das ondas dnoidal.*

CAPÍTULO 3

Análise Espectral

Estudaremos agora as propriedades de certos operadores que serão necessárias na nossa análise de estabilidade não-linear, desde que esse estudo será feito dentro das teorias de Grillakis [29] e Grillakis, Shatah e Strauss [31]. Notemos inicialmente que o sistema (2.1) pode ser escrito numa forma Hamiltoniana. De fato, escrevendo $u = P + iQ$, $w = R + iS$ e separando as partes reais e imaginárias, o sistema (2.1) pode ser escrito na forma

$$\frac{\partial U}{\partial t}(t) = J\mathcal{H}'(U(t)), \tag{3.1}$$

onde $U = (P, R, Q, S)^t$, J é o operador linear matricial anti-simétrico definido por

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/\sigma \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/\sigma & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

e $\mathcal{H}$ é o funcional energia dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(P, R, Q, S) = \frac{1}{2}\int \{ &(P_x^2 + Q_x^2) + (R_x^2 + S_x^2) + (P^2 + Q^2) + \alpha(R^2 + S^2) \\ &- \frac{1}{18}(P^4 + 2P^2Q^2 + Q^4) - \frac{9}{2}(R^4 + 2R^2S^2 + S^4) \\ &- 2(P^2 + Q^2)(R^2 + S^2) - \frac{2}{9}(P^3R + 3P^2QS - 3PQ^2R - Q^3S)\}dx \end{aligned} \tag{3.3}$$

Uma simples análise mostra que $\mathcal{H}$ dado por (3.3) e $\mathcal{F}$ definido por

$$\mathcal{F}(P,R,Q,S) = \frac{1}{2}\int \{(P^2+Q^2)+3\sigma(R^2+S^2)\}dx,$$

são, formalmente, quantidades conservadas do sistema (2.1), o que significa que

$$\mathcal{H}(P(t),R(t),Q(t),S(t)) = \mathcal{H}(P(0),R(0),Q(0),S(0))$$

e

$$\mathcal{F}(P(t),R(t),Q(t),S(t)) = \mathcal{F}(P(0),R(0),Q(0),S(0))$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

3.1 Análise Espectral para Ondas Dnoidal do tipo I

Nesta seção estudaremos as propriedades espectrais dos operadores lineares que surgem na linearização do sistema (2.1) em uma onda periódica, onde uma tal onda será dada através das ondas dnoidal do tipo I dadas no Teorema 2.1.2. Nossa análise será baseada na teoria de Floquet associada à equação de Lamé (25) e (26) (veja Observação 3.1.4).

Inicialmente notemos que para $\psi_\gamma = \psi$ dada no Teorema 2.1.2, obtemos por (2.4)

$$\mathcal{H}'(0,\psi,0,0) + \gamma\mathcal{F}'(0,\psi,0,0) = 0,$$

e portanto, conforme veremos a teoria desenvolvida por Grillakis *et al.* em [31] pode ser aplicada no estudo de estabilidade não-linear das soluções de (2.1).

Agora, consideremos a seguinte linearização

$$\mathcal{L}_\gamma = \mathcal{H}''(0,\psi,0,0) + \gamma\mathcal{F}''(0,\psi,0,0) = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_R & 0 \\ 0 & \mathcal{L}_I \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

onde $\mathcal{L}_R$ e $\mathcal{L}_I$ são os operadores lineares matriciais diagonal e auto-adjunto dados por

$$\mathcal{L}_R = \begin{pmatrix} -\frac{d^2}{dx^2} + (\gamma+1) - 2\psi^2 & 0 \\ 0 & -\frac{d^2}{dx^2} + (\alpha+3\sigma\gamma) - 27\psi^2 \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

e

$$\mathcal{L}_I = \begin{pmatrix} -\frac{d^2}{dx^2} + (\gamma+1) - 2\psi^2 & 0 \\ 0 & -\frac{d^2}{dx^2} + (\alpha+3\sigma\gamma) - 9\psi^2 \end{pmatrix}. \tag{3.6}$$

Estamos interessados nas propriedades espectrais do operador $\mathcal{L}_\gamma$ dado em (3.4). Para isso, faremos um estudo separadamente das propriedades espectrais dos operadores $\mathcal{L}_R$ e $\mathcal{L}_I$. Antes de tudo, sejam

$$\mathcal{L}_1 = -\frac{d^2}{dx^2} + (\alpha + 3\sigma\gamma) - 27\psi^2, \tag{3.7}$$

$$\mathcal{L}_2 = -\frac{d^2}{dx^2} + (\alpha + 3\sigma\gamma) - 9\psi^2 \tag{3.8}$$

e

$$\mathcal{L}_3 = -\frac{d^2}{dx^2} + (\gamma + 1) - 2\psi^2. \tag{3.9}$$

Inicialmente, vamos estudar as propriedades espectrais dos operadores $\mathcal{L}_i, i = 1, 2, 3$. Lembremos que se $\sigma(\mathcal{L}_i)$ denota o espectro do operador linear $\mathcal{L}_i$ então $\sigma(\mathcal{L}_i) = \sigma_{ess}(\mathcal{L}_i) \cup \sigma_{disc}(\mathcal{L}_i)$, onde $\sigma_{ess}(\mathcal{L}_i)$ e $\sigma_{disc}(\mathcal{L}_i)$ denotam, respectivamente, o espectro essencial e o espectro pontual do operador $\mathcal{L}_i$ (veja [53]). Agora, pelo *Teorema do Espectro Essencial de Weyl* (veja [53]) temos que $\sigma_{ess}(\mathcal{L}_i) = \emptyset$ e portanto $\sigma(\mathcal{L}_i) = \sigma_{disc}(\mathcal{L}_i), i = 1, 2, 3$. Sendo assim vamos estudar $\sigma_{disc}(\mathcal{L}_i), i = 1, 2, 3$.

Teorema 3.1.1. *Seja $\psi = \psi_\gamma$ a onda dnoidal dada no Teorema* 2.1.2. *Então,*

(i) *o operador $\mathcal{L}_1$ em* (3.7) *definido em $L^2_{per}([0, L])$ e com domínio $H^2_{per}([0, L])$ tem seus três primeiros autovalores simples, sendo que zero é o segundo autovalor cuja autofunção associada é ψ'. Além disso, o restante do espectro é constituído por um conjunto discreto de autovalores que são duplos.*

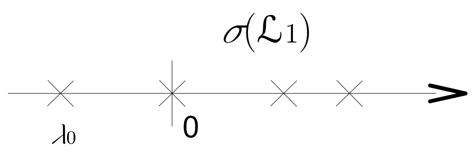

Figura 3.1: Espectro do operador $\mathcal{L}_1$ com domínio $H^2_{per}([0, L])$.

(ii) *O operador $\mathcal{L}_2$ em* (3.8) *definido em $L^2_{per}([0, L])$ e com domínio $H^2_{per}([0, L])$ tem zero como seu primeiro autovalor o qual é simples e cuja autofunção associada é ψ. Além disso, o restante do espectro é constituído por um conjunto discreto de autovalores.*

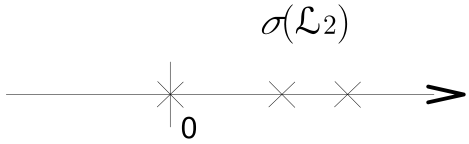

Figura 3.2: Espectro do operador $\mathcal{L}_2$ com domínio $H^2_{per}([0,L])$.

(iii) *Se* $\gamma+1=\alpha+3\sigma\gamma$, *então o operador* $\mathcal{L}_3$ *em* (3.9) *definido em* $L^2_{per}([0,L])$ *e com domínio* $H^2_{per}([0,L])$ *tem seu espectro constituído por um conjunto discreto de autovalores o qual não intercepta o semi-eixo não-positivo* $(-\infty,0]$.

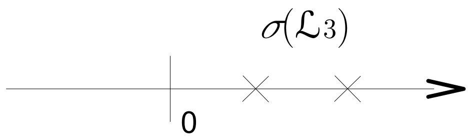

Figura 3.3: Espectro do operador $\mathcal{L}_3$ com domínio $H^2_{per}([0,L])$.

Demonstração. A demonstração do teorema se baseia na Teoria Floquet (veja [5], [8], Apêndice A).

(i) Derivando (2.4), é fácil ver que $\mathcal{L}_1\psi'=0$, o que significa que 0 é um autovalor de $\mathcal{L}_1$ com autofunção ψ' e desde que ψ' tem exatamente dois zeros em $[0,L)$, segue que 0 é o segundo ou o terceiro autovalor de $\mathcal{L}_1$. Vamos mostrar que ele é na verdade o segundo. Para isso, devemos estudar o problema periódico

$$\begin{cases} \mathcal{L}_1\chi=\lambda\chi \\ \chi(0)=\chi(L),\chi'(0)=\chi'(L). \end{cases} \tag{3.10}$$

Seja $\Lambda(x)=\chi(\eta x)$ onde $\eta=\frac{\sqrt{2}}{3\eta_1}$. Então pela forma explícita de ψ o problema (3.10) equivale ao problema

$$\begin{cases} \Lambda''+[\rho-6k^2sn^2(x;k)]\Lambda=0 \\ \Lambda(0)=\Lambda(2K),\Lambda'(0)=\Lambda'(2K), \end{cases} \tag{3.11}$$

onde

$$\rho=\frac{2}{9\eta_1^2}[-(\alpha+3\sigma\gamma)+27\eta_1^2+\lambda]. \tag{3.12}$$

A equação diferencial em (3.11) é conhecida como *forma Jacobiana da equação de Lamé*. É bem conhecido (ver [47]) que tal equação determina a existência de exatos três intervalos de instabilidade. Mostraremos que estes intervalos são os três primeiros. Inicialmente notemos que para $\rho_1 = 4+k^2$ e $\Lambda(x) = cn(x;k)sn(x;k)$ o problema (3.11) é satisfeito. Agora, seguindo [5], [34], as funções (denominadas *polinômios de Lamé*)

$$\Lambda_0(x) = 1 - (1 + k^2 - \sqrt{1 - k^2 + k^4})sn^2(x;k),$$

$$\Lambda_2(x) = 1 - (1 + k^2 + \sqrt{1 - k^2 + k^4})sn^2(x;k),$$

as quais tem período $2K$ são autofunções de (3.11), com respectivos autovalores dados por

$$\rho_0 = 2(1 + k^2 - \sqrt{1 - k^2 + k^4}) \quad \text{e} \quad \rho_2 = 2(1 + k^2 + \sqrt{1 - k^2 + k^4}).$$

Como Λ_0 não tem zeros em $[0, 2K]$ e Λ_2 tem exatamente dois zeros $[0, 2K)$ segue que ρ_0 é o primeiro autovalor de (3.11) e como $\rho_1 < \rho_2$ segue que ρ_1 e ρ_2 são respectivamente, o segundo e o terceiro autovalores de (3.11), e, além disso, são simples. Agora, como os autovalores de (3.10) e (3.11) estão relacionados por

$$2\lambda = 9\eta_1^2(\rho - 6) + 2(\alpha + 3\sigma\gamma),$$

podemos ver λ como uma função estritamente crescente de ρ. Desde que $\rho_1 = 4 + k^2$ corresponde a $\lambda_1 = 0$ e $\rho_0 < \rho_1 < \rho_2$ segue que $\lambda_0 < 0 = \lambda_1 < \lambda_2$.

(ii) Segue imediatamente de (2.4) que $\mathfrak{L}_2\psi = 0$, o que significa que 0 é autovalor de $\mathfrak{L}_2$ com autofunção ψ. Desde que ψ não tem zeros em $[0, L]$ segue que zero é o primeiro autovalor de $\mathfrak{L}_2$ e portanto é simples.

(iii) Desde que $\gamma + 1 = \alpha + 3\sigma\gamma$, temos

$$(\alpha + 3\sigma\gamma) - 9\psi^2 < (\gamma + 1) - 2\psi^2.$$

Portanto, pelo Teorema de Comparação, o primeiro autovalor de $\mathfrak{L}_3$ é estritamente maior que o primeiro autovalor de $\mathfrak{L}_2$ (veja [23], ou Apêndice A). Logo, segue de **(ii)** que o primeiro autovalor de $\mathfrak{L}_3$ é estritamente positivo. □

Observação 3.1.2. *Note que aqui estamos usando a condição de compatibilidade $\gamma + 1 = \alpha + 3\sigma\gamma$ para obter informações sobre o espectro do operador $\mathfrak{L}_3$. Sem esta condição não sabemos como analisar o espectro negativo de $\mathfrak{L}_3$,* ***já que a teoria associada à equação***

de Lamé, como estabelecida para o operador $\mathcal{L}_1$, não pode ser aplicada para $\mathcal{L}_3$. *De fato, neste caso o problema de autovalores periódico*

$$\begin{cases} \mathcal{L}_3\chi = \lambda\chi \\ \chi(0) = \chi(L), \chi'(0) = \chi'(L), \end{cases}$$

é equivalente ao seguinte

$$\begin{cases} \Lambda'' + [\rho - \frac{4}{9}k^2 sn^2(x;k)]\Lambda = 0 \\ \Lambda(0) = \Lambda(2K), \Lambda'(0) = \Lambda'(2K), \end{cases}$$

onde

$$\rho = \frac{2}{9\eta_1^2}[-(\gamma+1) + 2\eta_1^2 + \lambda].$$

Devido a presença do fator $4/9$ *este último problema não está associado a equação de Lamé* (25). *Neste caso não sabemos como lidar com esse problema.*

O Teorema 3.1.1 nos dá informações sobre o espectro dos operadores $\mathcal{L}_i$ quando vemos a função ψ como uma função de período L. Estaremos também interessados no estudo de estabilidade/instabilidade das soluções ondas dnoidal, quando vemos a função ψ como uma função de período $2L$. Nessa direção, temos a seguinte informação espectral em relação ao operador $\mathcal{L}_1$.

Corolário 3.1.3. *Sejam* ψ_γ *a onda dnoidal dada pelo Teorema* 2.1.2 *e* $\mathcal{L}_1$ *o operador em* (3.7) *definido em* $L^2_{per}([0,2L])$ *e com domínio* $H^2_{per}([0,2L])$. *Então* $\mathcal{L}_1$ *tem exatamente três autovalores negativos os quais são simples. Além disso, zero é o quarto autovalor o qual também é simples. Mais ainda, se* ξ_1 *e* ξ_2 *são as autofunções associadas ao segundo e ao terceiro autovalores, respectivamente, então* $\xi_i \perp \psi$, $i = 1, 2$.

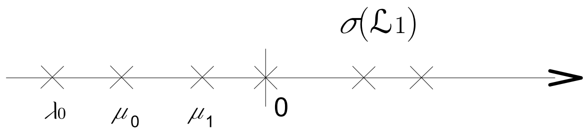

Figura 3.4: Espectro do operador $\mathcal{L}_1$ com domínio $H^2_{per}([0,2L])$.

Demonstração. É fácil ver que $\widetilde{\mu}_0 = 1 + k^2$ e $\widetilde{\mu}_1 = 1 + 4k^2$ são os dois primeiros autovalores do problema semi-periódico associado à equação de Lamé em (3.11), a saber,

$$\begin{cases} \Lambda'' + [\rho - 6k^2 sn^2(x;k)]\Lambda = 0 \\ \Lambda(0) = -\Lambda(2K), \Lambda'(0) = -\Lambda'(2K), \end{cases}$$

cujas autofunções são, respectivamente,

$$\widetilde{\Lambda}_{0,sm}(x) = cn(x;k)dn(x;k) \quad \text{e} \quad \widetilde{\Lambda}_{1,sm}(x) = sn(x;k)dn(x;k).$$

Como tais autovalores estão relacionados com os autovalores μ_i, do problema semi-periódico associado ao problema periódico (3.10) pela relação

$$\widetilde{\mu}_i = \frac{2}{9\eta_1^2}[-(\alpha + 3\sigma\gamma) + 27\eta_1^2 + \mu_i],$$

segue que os autovalores μ_0 e μ_1 são simples. Consequentemente, desde que

$$\lambda_0 < \mu_0 \leq \mu_1 < \lambda_1 \leq \lambda_2 < \mu_2 \leq \mu_3 < \dots,$$

segue que $\lambda_0 < \mu_0 < \mu_1 < \lambda_1 = 0$. Assim, $\xi_1(x) = \widetilde{\Lambda}_{0,sm}(\frac{1}{\eta}x)$ e $\xi_2(x) = \widetilde{\Lambda}_{1,sm}(\frac{1}{\eta}x)$. Finalmente, pelas fórmulas explícitas de ξ_i e ψ é fácil ver que $\xi_i \perp \psi$. Isso termina a prova do corolário. □

Observação 3.1.4. *A prova de (i) do Teorema* 3.1.1 *também pode ser obtida através da teoria espectral estabelecida em Angulo e Natali [9] e Natali [50]. Por outro lado, o Corolário* 3.1.3 *não pode ser obtido utilizando tal teoria, posto que neste caso, o coeficiente periódico ψ_γ não tem período minimal, como é exigido em [9], [50].*

Agora estamos em posição de analisar as propriedades espectrais dos operadores $\mathcal{L}_R$ e $\mathcal{L}_I$.

Teorema 3.1.5. *Seja $\gamma \in \left(\frac{2\pi^2}{L^2} - 1, \infty\right)$ e suponha que α, σ são tais que $\gamma + 1 = \alpha + 3\sigma\gamma$. Seja $\psi_\gamma = \psi$ a onda dnoidal dada no Teorema* 2.1.2. *Então,*

(i) *o operador linear auto-adjunto $\mathcal{L}_R$ definido em $L^2_{per}([0, L])$ com domínio $H^2_{per}([0, L])$ tem exatamente um autovalor negativo o qual é simples; zero é um autovalor simples com autofunção $(0, \psi')$. Além disso, o restante do espectro é constituído por um conjunto discreto de autovalores.*

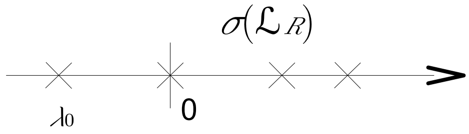

Figura 3.5: Espectro do operador $\mathcal{L}_R$ com domínio $H^2_{per}([0,L])$.

(ii) *O operador linear auto-adjunto $\mathcal{L}_I$ definido em $L^2_{per}([0,L])$ com domínio $H^2_{per}([0,L])$ não possui autovalor negativo; zero é um autovalor simples com autofunção $(0,\psi)$. Além disso, o restante do espectro é constituído por um conjunto discreto de autovalores.*

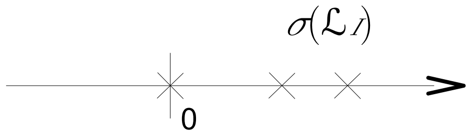

Figura 3.6: Espectro do operador $\mathcal{L}_I$ com domínio $H^2_{per}([0,L])$.

Demonstração. **(i)** Suponha que $\overrightarrow{f} = (f,g) \neq 0$ é tal que $\mathcal{L}_R\overrightarrow{f} = 0$. Então $\mathcal{L}_3 f = 0$ e $\mathcal{L}_1 g = 0$. Portanto segue do Teorema 3.1.1 que $f \equiv 0$ e $g = \beta\psi'$ para alguma constante β, o que mostra que zero é um autovalor simples com autofunção associada $(0,\psi')$.

Sejam agora $\lambda < 0$ e $\overrightarrow{f} = (f,g) \neq 0$ tal que $\mathcal{L}_R\overrightarrow{f} = \lambda\overrightarrow{f}$. Novamente pelo Teorema 3.1.1 devemos ter $f \equiv 0$ e $\lambda = \lambda_0$. Portanto, λ_0 é o único autovalor negativo de $\mathcal{L}_R$, cuja autofunção associada é $(0,\zeta_0)$, onde $\zeta_0 \neq 0$ é tal que $\mathcal{L}_1\zeta_0 = \lambda_0\zeta_0$.

(ii) Segue imediatamente dos fatos que $\mathcal{L}_3$ não possui autovalor negativo e zero é o primeiro autovalor de $\mathcal{L}_2$. Como $\mathcal{L}_2\psi = 0$ segue que $\mathcal{L}_I(0,\psi) = 0$, donde zero é o primeiro autovalor de $\mathcal{L}_I$, o qual é simples. □

Em relação ao espectro de $\mathcal{L}_R$ e $\mathcal{L}_I$ definidos em $L^2_{per}([0,2L])$, temos o seguinte resultado.

Teorema 3.1.6. *Seja $\gamma \in \left(\frac{2\pi^2}{L^2} - 1, \infty\right)$ tal que $\gamma + 1 = \alpha + 3\sigma\gamma$. Seja $\psi_\gamma = \psi$ a onda dnoidal dada no Teorema* 2.1.2. *Então,*

(i) *o operador linear auto-adjunto $\mathcal{L}_R$ definido em $L^2_{per}([0,2L])$ com domínio $H^2_{per}([0,2L])$ tem exatamente três autovalores negativos os quais são simples; zero é um autovalor* *simples com autofunção* $(0, \psi')$. *Além disso, o restante do espectro é constituído por um conjunto discreto de autovalores.*

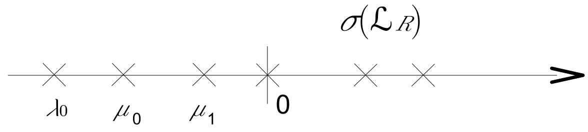

Figura 3.7: Espectro do operador $\mathcal{L}_R$ com domínio $H^2_{per}([0, 2L])$.

(ii) *O operador linear auto-adjunto* $\mathcal{L}_I$ *definido em* $L^2_{per}([0, 2L])$ *com domínio* $H^2_{per}([0, 2L])$ *não possui autovalor negativo; zero é um autovalor simples com autofunção* $(0, \psi)$. *Além disso, o restante do espectro é constituído por um conjunto discreto de autovalores.*

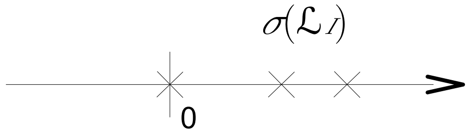

Figura 3.8: Espectro do operador $\mathcal{L}_I$ com domínio $H^2_{per}([0, 2L])$.

Demonstração. A prova é análoga à demostração do Teorema 3.1.5, substituindo o Teorema 3.1.1 pelo Corolário 3.1.3. □

3.2 Análise Espectral para Ondas Cnoidal

Aqui, estudaremos as propriedades espectrais de certos operadores que serão necessárias na nossa discussão sobre estabilidade não-linear das ondas cnoidal. Mais precisamente, desejamos conhecer as propriedades espectrais do seguinte operador linearizado

$$\mathcal{L}_{\gamma,i} = \mathcal{H}''(0, \psi_{\gamma,i}, 0, 0) + \gamma \mathcal{F}''(0, \psi_{\gamma,i}, 0, 0) = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{R,i} & 0 \\ 0 & \mathcal{L}_{I,i} \end{pmatrix}, \tag{3.13}$$

onde $\psi_{\gamma,i}, i = 1,2$ é a onda cnoidal dada pelos Teoremas 2.2.1 ou 2.2.2 e $\mathcal{L}_{R,i}$, $\mathcal{L}_{I,i}$ são os operadores lineares matriciais diagonal e auto-adjunto dado por

$$\mathcal{L}_{R,i} = \begin{pmatrix} -\frac{d^2}{dx^2} + (\gamma+1) - 2\psi_{\gamma,i}^2 & 0 \\ 0 & -\frac{d^2}{dx^2} + (\alpha + 3\sigma\gamma) - 27\psi_{\gamma,i}^2 \end{pmatrix} \tag{3.14}$$

e

$$\mathcal{L}_{I,i} = \begin{pmatrix} -\frac{d^2}{dx^2} + (\gamma+1) - 2\psi_{\gamma,i}^2 & 0 \\ 0 & -\frac{d^2}{dx^2} + (\alpha + 3\sigma\gamma) - 9\psi_{\gamma,i}^2 \end{pmatrix}. \tag{3.15}$$

Como na seção anterior, inicialmente, estudemos as propriedades espectrais dos seguintes operadores

$$\mathcal{L}_{1,i} = -\frac{d^2}{dx^2} + (\alpha + 3\sigma\gamma) - 27\psi_{\gamma,i}^2, \tag{3.16}$$

$$\mathcal{L}_{2,i} = -\frac{d^2}{dx^2} + (\alpha + 3\sigma\gamma) - 9\psi_{\gamma,i}^2, \tag{3.17}$$

e

$$\mathcal{L}_{3,i} = -\frac{d^2}{dx^2} + (\gamma+1) - 2\psi_{\gamma,i}^2. \tag{3.18}$$

Para os operadores $\mathcal{L}_{j,i}, j = 1,2,3$ e $i = 1,2$, temos

Teorema 3.2.1. *Seja $\psi_{\gamma,i}, i = 1,2$ a onda cnoidal dada pelos Teoremas 2.2.1 ou 2.2.2 e suponha que α, σ satisfazem $\gamma + 1 = \alpha + 3\sigma\gamma$. Então,*

(i) *o operador $\mathcal{L}_{1,i}$ em (3.16) definido em $L^2_{per}([0,L])$ e com domínio $H^2_{per}([0,L])$ tem exatamente dois autovalores negativos, os quais são simples; o autovalor zero é o terceiro, o qual é simples com autofunção associada $\psi'_{\gamma,i}$. Além disso, o restante do espectro é constituído por um conjunto discreto de autovalores.*

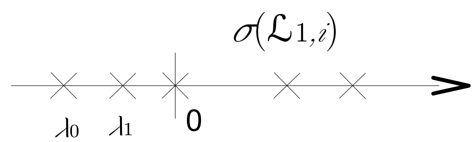

Figura 3.9: Espectro do operador $\mathcal{L}_{1,i}$ com domínio $H^2_{per}([0,L])$.

(ii) *O operador $\mathcal{L}_{2,i}$ em (3.17) definido em $L^2_{per}([0,L])$ e com domínio $H^2_{per}([0,L])$ tem exatamente um autovalor negativo o qual é simples; zero é também um autovalor simples com autofunção associada $\psi_{\gamma,i}$. Além disso, o restante do espectro é constituído por um conjunto discreto de autovalores.*

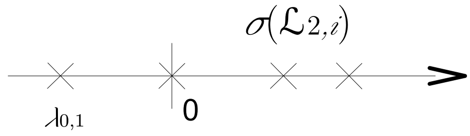

Figura 3.10: Espectro do operador $\mathfrak{L}_{2,i}$ com domínio $H^2_{per}([0,L])$.

(iii) *O operador* $\mathfrak{L}_{3,i}$ *em* (3.18) *definido em* $L^2_{per}([0,L])$ *e com domínio* $H^2_{per}([0,L])$ *possui no máximo um autovalor negativo o qual é simples (se existir). Além disso, o restante do espectro é constituído por um conjunto discreto de autovalores simples.*

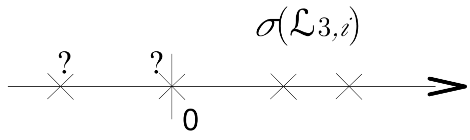

Figura 3.11: Espectro do operador $\mathfrak{L}_{3,i}$ com domínio $H^2_{per}([0,L])$.

Demonstração. A demonstração do teorema é novamente uma aplicação da Teoria de Floquet.

(i) Notemos inicialmente que de (2.4) temos $\mathfrak{L}_{1,i}\psi'_{\gamma,i} = 0$, donde vem que zero é um autovalor de $\mathfrak{L}_{1,i}$ com autofunção $\psi'_{\gamma,i}$. Como $\psi'_{\gamma,i}$ tem exatamente dois zeros em $[0,L)$ segue que zero é o segundo ou o terceiro autovalor. Mostraremos que na verdade zero é o terceiro autovalor. Para estudar o espectro de $\mathfrak{L}_{1,i}$ devemos estudar o problema de autovalores

$$\begin{cases} \mathfrak{L}_{1,i}\chi = \lambda\chi, \qquad i = 1,2, \\ \chi(0) = \chi(L), \chi'(0) = \chi'(L). \end{cases} \tag{3.19}$$

Seja $\Psi_1(x) = \chi(\gamma_1 x)$ onde $\gamma_1 = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{(a^2+b^2)}}$. Então usando a forma explícita de $\psi_{\gamma,i}$ o problema (3.19) é equivalente ao seguinte problema periódico associado à equação de Lamé

$$\begin{cases} \Psi_1'' + [\tilde{\mu} - 6k^2 sn^2(x;k)]\Psi_1 = 0 \\ \Psi_1(0) = \Psi_1(4K), \Psi_1'(0) = \Psi_1'(4K), \end{cases} \tag{3.20}$$

onde

$$\tilde{\mu} = \gamma_1^2[-(1+\gamma) + 27b^2 + \lambda]. \tag{3.21}$$

Agora desde que sn^2 tem período fundamental $2K$ e $4K = 2(2K)$, o Corolário 1.3.1 em [23] (veja Apêndice) nos diz que as soluções de (3.20) tem período $2K$ ou semi-período $2K$, o que significa que $\tilde{\mu}$ deve ser um autovalor do problema periódico

$$\begin{cases} \Psi_1'' + [\tilde{\mu} - 6k^2 sn^2(x;k)]\Psi_1 = 0 \\ \Psi_1(0) = \Psi_1(2K), \Psi_1'(0) = \Psi_1'(2K), \end{cases}$$

ou do problema semi-periódico

$$\begin{cases} \Psi_1'' + [\tilde{\mu} - 6k^2 sn^2(x;k)]\Psi_1 = 0 \\ \Psi_1(0) = -\Psi_1(2K), \Psi_1'(0) = -\Psi_1'(2K). \end{cases} \tag{3.22}$$

Mas conforme mostramos no Corolário 3.1.3, os dois primeiros autovalores do problema semi-periódico (3.22) são dados por $\tilde{\mu}_0 = 1 + k^2$ e $\tilde{\mu}_1 = 1 + 4k^2$, com respectivas autofunções dadas por

$$\widetilde{\Lambda}_{0,sm}(x) = cn(x;k)dn(x;k) \quad \text{e} \quad \widetilde{\Lambda}_{1,sm}(x) = sn(x;k)dn(x;k). \tag{3.23}$$

Além disso, de (3.21) obtemos que $\lambda = 0$ se, e somente se, $\tilde{\mu} = 1 + 4k^2$, o que significa que zero é o terceiro autovalor, o qual é portanto simples.

(ii) Desde que $\mathcal{L}_{2,i}\psi_{\gamma,i} = 0$ e $\psi_{\gamma,i}$ tem exatamente dois zeros em $[0, L)$ segue que zero é o segundo ou o terceiro autovalor de $\mathcal{L}_{2,i}$. Mostraremos que zero é na verdade o segundo autovalor. De fato, para o operador $\mathcal{L}_{2,1}$, é fácil ver que $\lambda_{0,1} = -\frac{9}{2}a^2$ (onde $a^2 = b^2 + 2\omega$ e $\omega = \frac{1}{9}(\gamma + 1)$) e $\lambda_{2,1} = \frac{9}{2}b^2$ são autovalores com respectivas autofunções dadas por

$$\zeta_{0,1}(x) = dn(3\sqrt{b^2 - \omega}x;k), \qquad \zeta_{2,1}(x) = sn(3\sqrt{b^2 - \omega}x;k), \quad k^2 = \frac{b^2}{2b^2 - 2\omega},$$

desde que $\lambda_{2,1} > 0$ e $\zeta_{2,1}$ tem exatamente dois zeros em $[0, L)$ segue que zero é o segundo autovalor de $\mathcal{L}_{2,1}$, o qual é portanto simples. Analogamente, para o operador $\mathcal{L}_{2,2}$ temos que $\lambda_{0,2} = -\frac{9}{2}a^2$ e $\lambda_{2,2} = \frac{9}{2}b^2$ são autovalores com autofunções dadas por

$$\zeta_{0,2}(x) = dn(3\sqrt{a^2 + \omega}x;k), \qquad \zeta_{2,2}(x) = sn(3\sqrt{a^2 + \omega}x;k), \quad k^2 = \frac{a^2 + 2\omega}{2a^2 + 2\omega},$$

respectivamente, donde segue que zero é o segundo autovalor de $\mathcal{L}_{2,2}$, o qual é também simples.

(iii) Aqui vamos usar novamente o Teorema de Comparação. Inicialmente notemos que desde que $\psi_{\gamma,i}$ é a onda cnoidal, temos $\psi_{\gamma,i}(x) = -\psi_{\gamma,i}(x + L/2)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ e portanto

$\psi^2_{\gamma,i}(x) = \psi^2_{\gamma,i}(x+L/2)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ o que significa que $\psi^2_{\gamma,i}$ tem período fundamental $L/2$. Portanto como em (i), as soluções do problema periódico

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{3,i}\chi = \widetilde{\lambda}\chi, & i = 1,2, \\ \chi(0) = \chi(L), \chi'(0) = \chi'(L). \end{cases} \tag{3.24}$$

são as soluções dos seguintes problemas

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{3,i}\chi = \widetilde{\lambda}\chi, & i = 1,2, \\ \chi(0) = \chi(L/2), \chi'(0) = \chi'(L/2), \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathcal{L}_{3,i}\chi = \widetilde{\mu}\chi, & i = 1,2, \\ \chi(0) = -\chi(L/2), \chi'(0) = -\chi'(L/2). \end{cases} \tag{3.25}$$

Sejam $\widetilde{\lambda}_0, \widetilde{\lambda}_1, \ldots$ e $\widetilde{\mu}_0, \widetilde{\mu}_1, \ldots$ os autovalores dos problemas periódicos e semi-periódicos, respectivamente, dados em (3.25), e, portanto os autovalores de (3.24) são dados por $\widetilde{\lambda}_k$ ou $\widetilde{\mu}_k$, $k = 0, 1 \ldots$. Agora, desde que $\gamma + 1 = \alpha + 3\sigma\gamma$ temos

$$(\alpha + 3\sigma\gamma) - 9\psi^2_{\gamma,i} < (\gamma + 1) - 2\psi^2_{\gamma,i}, \quad i = 1,2,$$

exceto para um conjunto finito de pontos em $[0, L]$, e portanto, pelo Teorema de Comparação, temos que $\tilde{\lambda}_0 > \lambda_0$ e $\tilde{\mu}_0 > \mu_0$, onde λ_0 e μ_0 são os respectivos autovalores dos problemas periódico e semi-periódico em $[0, L/2]$ associados ao operador $\mathcal{L}_{2,i}$. Mas por (ii) temos $\mu_0 = 0$, e portanto $\tilde{\mu}_0 > \mu_0 = 0$. Assim a relação $\widetilde{\lambda}_0 < \widetilde{\mu}_0 \leq \widetilde{\mu}_1 < \widetilde{\lambda}_1 \leq \widetilde{\lambda}_2 < \ldots$ implica que o único autovalor negativo possível de (3.24) é $\widetilde{\lambda}_0$, o qual é simples.

Finalmente, usando a forma explícita de $\psi_{\gamma,i}$, é fácil ver que o problema (3.24) é equivalente ao problema

$$\begin{cases} \Lambda''_i + [\rho - \frac{4}{9}k^2 sn^2(x;k)]\Lambda_i = 0 \\ \Lambda_i(0) = \Lambda_i(4K), \Lambda'_i(0) = \Lambda'_i(4K), \end{cases} \tag{3.26}$$

onde $\Lambda_i(x) = \chi(\gamma_i x)$, $\gamma_1 = \frac{1}{9(b^2-\omega)}$, $\gamma_2 = \frac{1}{9(a^2+\omega)}$ e

$$\rho = \gamma_i^2[-(1+\gamma) + 2b^2 + \lambda], i = 1,2.$$

Agora, da Teoria Floquet o problema (3.26) não admite coexistência de soluções de período $2K$ ou $4K$ (ver Teorema 7.8 de [47]), donde vem que (3.24) também não admite coexistência de soluções de período $L/2$ ou L. Em consequência, todos os autovalores de $\mathcal{L}_{3,i}$, $i = 1, 2$ são simples. $\square$

Observação 3.2.2. *Neste caso não sabemos dizer se o operador $\mathcal{L}_{3,i}$ possui um autovalor negativo nem se zero está em seu espectro. Entretanto, a informação sobre a parte negativa do espectro não é muito relevante neste caso, uma vez que nosso interesse mais tarde, será na verdade, no número de autovalores negativos do operador $\mathcal{L}_{\gamma,i}$ definido em* (3.13) *e portanto vemos que os autovalores de $\mathcal{L}_{\gamma,i}$ provenientes de $\mathcal{L}_{3,i}$ sempre vem em pares, ou seja, os autovalores de $\mathcal{L}_{3,i}$ sempre são autovalores duplos de $\mathcal{L}_{\gamma,i}$.*

Note ainda que a teoria desenvolvida por Natali [50] e Angulo e Natali [9] não pode ser aplicada neste caso, posto que a solução onda viajante periódica $\psi_{\gamma,i}$ possui partes positiva e negativa (veja seção 7.3 *de [50]).*

Conforme veremos mais tarde, há uma certa dificuldade no estudo de estabilidade das ondas cnoidal, quando analisamos estabilidade no espaço $H^1_{per}([0,L])$. Por isso, restringiremos nosso estudo de estabilidade ao seguinte espaço de Hilbert

$$\mathcal{X}_1 = \left\{ f \in H^1_{per}([0,L]); \int_0^L f dx = 0 \right\}. \tag{3.27}$$

Logo, usaremos os seguintes espaços

$$\mathcal{X}_0 = \left\{ f \in L^2_{per}([0,L]); \int_0^L f dx = 0 \right\} \quad \text{e} \quad \mathcal{X}_2 = \left\{ f \in H^2_{per}([0,L]); \int_0^L f dx = 0 \right\}.$$

Para estudar a estabilidade das ondas cnoidal em $\mathcal{X}_1$, devemos estudar primeiramente as propriedades espectrais dos operadores $\mathcal{L}_{j,i}$, $j = 1, 2, 3$ em $\mathcal{X}_2$, o que passaremos a fazer a partir de agora. Inicialmente, é fácil ver que $\psi_{\gamma,i} \in \mathcal{X}_2$, $i = 1, 2$.

Teorema 3.2.3. *Seja $\psi_{\gamma,i}, i = 1, 2$ a onda cnoidal dada pelos Teoremas* 2.2.1 *ou* 2.2.2 *e suponha que α, σ são tais que $\gamma + 1 = \alpha + 3\sigma\gamma$. Então,*

(i) *o operador $\mathcal{L}_{1,i}$ em* (3.16) *definido em $L^2_{per}([0,L])$ e com domínio $\mathcal{X}_2$ possui um único autovalor negativo, o qual é simples; zero é um autovalor simples com autofunção associada $\psi'_{\gamma,i}$. Além disso, o restante do espectro é constituído por um conjunto discreto de autovalores.*

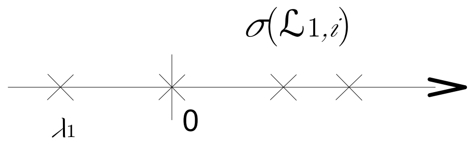

Figura 3.12: Espectro do operador $\mathcal{L}_{1,i}$ com domínio $\mathcal{X}_2$.

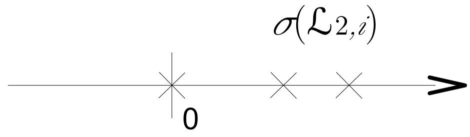

Figura 3.13: Espectro do operador $\mathcal{L}_{2,i}$ com domínio $\mathcal{X}_2$.

(ii) *O operador $\mathcal{L}_{2,i}$ em* (3.17) *definido em $L^2_{per}([0,L])$ e com domínio $\mathcal{X}_2$ não possui autovalor negativo; zero é um autovalor simples com autofunção associada $\psi_{\gamma,i}$. Além disso, o restante do espectro é constituído por um conjunto discreto de autovalores.*

(iii) *O operador $\mathcal{L}_{3,i}$ em* (3.18) *definido em $L^2_{per}([0,L])$ e com domínio $\mathcal{X}_2$ tem seu espectro constituído por um conjunto discreto de autovalores, o qual não intercepta o semi-eixo* $(-\infty, 0]$.

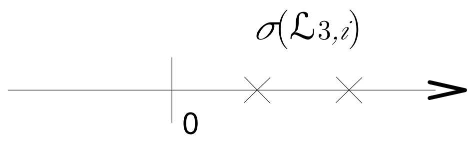

Figura 3.14: Espectro do operador $\mathcal{L}_{3,i}$ com domínio $\mathcal{X}_2$.

Demonstração. **(i)** Sabemos do Teorema 3.2.1 que $\mathcal{L}_{1,i}$ tem exatamente dois autovalores negativos em $H^2_{per}([0,L])$. Como a autofunção associada ao primeiro autovalor é estritamente positiva, esta evidentemente não está em $\mathcal{X}_2$. Agora conforme mostramos no Teorema 3.2.1, a autofunção associada ao segundo autovalor é dada por

$$\zeta(x) = cn\left(\frac{1}{\gamma_1}x; k\right) dn\left(\frac{1}{\gamma_1}x; k\right), \qquad \gamma_1^2 = \frac{2}{9(a^2+b^2)}$$

e como
$$\int_0^{4K} cn(u;k)dn(u;k)du = \int_0^{4K} sn(u;k)dn(u;k)du = 0,$$
segue que $\zeta \in \mathcal{X}_2$, o que prova a existência de um único autovalor negativo de $\mathcal{L}_{1,i}$ em $\mathcal{X}_2$, já que se existisse outro, este deveria ser também um autovalor de $\mathcal{L}_{1,i}$ em $H^2_{per}([0,L])$, cuja autofunção associada teria média zero e assim $\mathcal{L}_{1,i}$ teria três autovalores negativos, contradizendo o Teorema 3.2.1. Finalmente, desde que $\psi'_{\gamma,i}(\cdot) = -sn(\cdot)dn(\cdot)$ segue $\psi'_{\gamma,i} \in \mathcal{X}_2$, ou seja, zero é autovalor de $\mathcal{L}_{1,i}$ em $\mathcal{X}_2$.

(ii) Temos do Teorema 3.2.1 que $\mathcal{L}_{2,i}$ possui um único autovalor negativo em $H^2_{per}([0,L])$. Como a autofunção associada a este autovalor é estritamente positiva, esta não está em $\mathcal{X}_2$. Logo, $\mathcal{L}_{2,i}$ não possui autovalor negativo em $\mathcal{X}_2$. Além disso, desde que $\mathcal{L}_{2,i}\psi_{\gamma,i} = 0$ e $\psi_{\gamma,i} \in \mathcal{X}_2$ segue que zero é o primeiro autovalor de $\mathcal{L}_{2,i}$ em $\mathcal{X}_2$ com autofunção $\psi_{\gamma,i}$.

(iii) Desde que $\mathcal{L}_{3,i}$ possui no máximo um autovalor negativo em $H^2_{per}([0,L])$, assim como em (ii), a autofunção associada a este não está em $\mathcal{X}_2$. Além disso, desde que o segundo autovalor de $\mathcal{L}_{3,i}$ (em $H^2_{per}([0,L])$) é estritamente positivo, segue que o espectro de $\mathcal{L}_{3,i}$ em $\mathcal{X}_2$ não intercepta o semi-eixo $(-\infty, 0]$. □

Como uma consequência imediata, temos

Teorema 3.2.4. *Seja $\psi_{\gamma,i}, i = 1,2$ a onda cnoidal dada pelos Teoremas 2.2.1 ou 2.2.2 e suponha que α, σ satisfazem $\gamma + 1 = \alpha + 3\sigma\gamma$. Então,*

(i) *o operador linear $\mathcal{L}_{R,i}$ em (3.14) definido em $L^2_{per}([0,L])$ com domínio $\mathcal{X}_2$ possui um único autovalor negativo, o qual é simples; zero é um autovalor simples com autofunção associada $(0, \psi'_{\gamma,i})$. Além disso, o restante do espectro é constituído por um conjunto discreto de autovalores.*

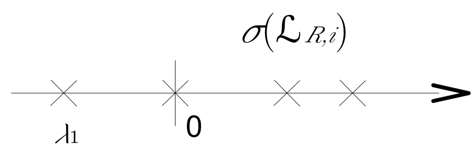

Figura 3.15: Espectro do operador $\mathcal{L}_{R,i}$ com domínio $\mathcal{X}_2$.

(ii) *O operador linear $\mathcal{L}_{I,i}$ em (3.15) definido em $L^2_{per}([0,L])$ com domínio $\mathcal{X}_2$ não possui autovalor negativo; zero é um autovalor simples com autofunção associada $(0,\psi_{\gamma,i})$. Além disso, o restante do espectro é constituído por um conjunto discreto de autovalores.*

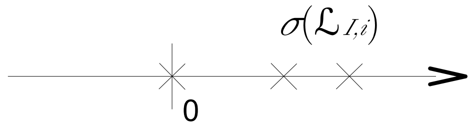

Figura 3.16: Espectro do operador $\mathcal{L}_{I,i}$ com domínio $\mathcal{X}_2$.

Isso completa nossa análise espectral para o caso das ondas cnoidal.

3.3 Análise Espectral para Ondas Dnoidal do tipo II

Estudaremos aqui as principais propriedades do espectro dos operadores lineares que surgem na linearização do sistema (2.1) em uma onda periódica, a qual depende da nossa onda dnoidal do tipo II encontradas no Teorema 2.3.2. A análise aqui se torna um pouco mais delicada.

Inicialmente, note que para $\phi=\phi_\gamma$ e $\psi=\psi_\gamma$ dadas em (2.34), temos

$$\mathcal{H}'(\phi,\psi,0,0)+\gamma\mathcal{F}'(\phi,\psi,0,0)=0. \tag{3.28}$$

Agora consideremos a linearização

$$\mathcal{T}_\gamma=\mathcal{H}''(\phi,\psi,0,0)+\gamma\mathcal{F}''(\phi,\psi,0,0)=\begin{pmatrix}\mathcal{T}_R & 0\\ 0 & \mathcal{T}_I\end{pmatrix}, \tag{3.29}$$

onde $\mathcal{T}_R$ e $\mathcal{T}_I$ são os operadores lineares matriciais e auto-adjuntos dado por

$$\mathcal{T}_R=\begin{pmatrix}-\frac{d^2}{dx^2}+(\gamma+1)-\left(\frac{1}{3}+2b^2+\frac{2}{3}b\right)\phi^2 & -\left(4b+\frac{1}{3}\right)\phi^2\\ \\ -\left(4b+\frac{1}{3}\right)\phi^2 & -\frac{d^2}{dx^2}+(\alpha+3\sigma\gamma)-(27b^2+2)\phi^2\end{pmatrix} \tag{3.30}$$

e

$$\mathcal{T}_I=\begin{pmatrix}-\frac{d^2}{dx^2}+(\gamma+1)-\left(\frac{1}{9}+2b^2-\frac{2}{3}b\right)\phi^2 & -\frac{1}{3}\phi^2\\ \\ -\frac{1}{3}\phi^2 & -\frac{d^2}{dx^2}+(\alpha+3\sigma\gamma)-(9b^2+2)\phi^2\end{pmatrix}. \tag{3.31}$$

Na análise de estabilidade/instabilidade não-linear, é necessário o conhecimento das propriedades espectrais do operador $\mathcal{T}_\gamma$ definido em (3.29). Da mesma forma como fizemos antes, vamos estudar primeiramente as propriedades espectrais dos operadores $\mathcal{T}_R$ e $\mathcal{T}_I$. Para tanto, será necessário o conhecimento das propriedades espectrais dos seguintes operadores

$$\mathcal{T}_1 = -\frac{d^2}{dx^2} + (\gamma+1) - 3\left(\frac{1}{9} + 2b^2 + \frac{1}{3}b\right)\phi^2, \tag{3.32}$$

$$\mathcal{T}_2 = -\frac{d^2}{dx^2} + (\gamma+1) - 3\left(\frac{1}{9} + 2b^2 + \frac{1}{3}b\right)\phi^2 + \frac{1}{b^2+1}\left(b^3(4b+\frac{1}{3}) + 2b(4b+\frac{1}{3}) + (4+\frac{1}{3b})\right)\phi^2, \tag{3.33}$$

$$\mathcal{T}_3 = -\frac{d^2}{dx^2} + (\gamma+1) - \left(\frac{1}{9} + 2b^2 + \frac{1}{3}b\right)\phi^2, \tag{3.34}$$

e

$$\mathcal{T}_4 = -\frac{d^2}{dx^2} + (\gamma+1) - \left(\frac{1}{9} + 2b^2 + \frac{1}{3}b\right)\phi^2 + \frac{9}{9b^2+1}\left(b^3 + \frac{2}{9}b + \frac{1}{81b}\right)\phi^2, \tag{3.35}$$

Os operadores $\mathcal{T}_i, i = 1\ldots 4$, surgem do seguinte fato: sejam

$$A_R = \begin{pmatrix} 1 & b \\ b & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad A_I = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & b \\ b & -\frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

de modo que

$$A_R^{-1} = \frac{1}{b^2+1}\begin{pmatrix} 1 & b \\ b & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad A_I^{-1} = \frac{1}{b^2+1/9}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & b \\ b & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Assim, se $\mathcal{T}_{DR}$ e $\mathcal{T}_{DI}$ são os operadores definidos por

$$\mathcal{T}_{DR} := A_R \mathcal{T}_R A_R^{-1} \qquad \text{e} \qquad \mathcal{T}_{DI} = A_I \mathcal{T}_I A_I^{-1}, \tag{3.36}$$

então

$$\mathcal{T}_{DR} := \begin{pmatrix} \mathcal{T}_1 & 0 \\ 0 & \mathcal{T}_2 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \mathcal{T}_{DI} = \begin{pmatrix} \mathcal{T}_3 & 0 \\ 0 & \mathcal{T}_4 \end{pmatrix}. \tag{3.37}$$

Dessa forma, analisar o espectro dos operadores $\mathcal{T}_R$ e $\mathcal{T}_I$ equivale a analisar o espectro dos operadores $\mathcal{T}_{DR}$ e $\mathcal{T}_{DI}$e para isso, necessitamos de uma análise espectral dos operadores $\mathcal{T}_i, i = 1, \ldots, 4$.

A principal dificuldade aqui é na determinação do número de autovalores negativos dos operadores $\mathcal{T}_2$ e $\mathcal{T}_4$. Iniciemos analisando os operadores $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_3$.

Teorema 3.3.1. *Sejam* $\gamma \in \left(\frac{2\pi^2}{L^2} - 1, \infty\right)$ *e* α, σ *tais que* $\gamma + 1 = \alpha + 3\sigma\gamma$. *Seja* $\phi_\gamma = \phi$ *a onda dnoidal dada no Teorema* 2.3.2. *Então,*

(i) *o operador* $\mathcal{T}_1$ *em* (3.32) *definido em* $L^2_{per}([0, L])$ *e com domínio* $H^2_{per}([0, L])$ *tem exatamente um autovalor negativo, sendo que zero é o segundo autovalor o qual é simples e cuja autofunção associada é* ϕ'. *Além disso, o restante do espectro é constituído por um conjunto discreto de autovalores.*

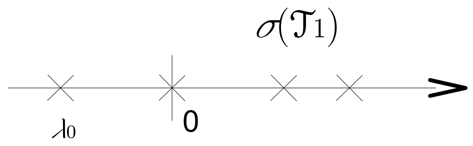

Figura 3.17: Espectro do operador $\mathcal{T}_1$ com domínio $H^2_{per}([0, L])$.

(ii) *O operador* $\mathcal{T}_3$ *em* (3.34) *definido em* $L^2_{per}([0, L])$ *e com domínio* $H^2_{per}([0, L])$ *tem zero como seu primeiro autovalor, o qual é simples e cuja autofunção associada é* ϕ. *Além disso, o restante do espectro é constituído por um conjunto discreto de autovalores.*

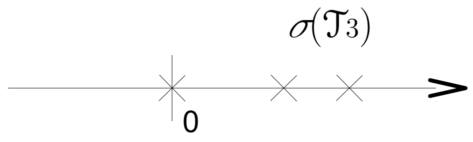

Figura 3.18: Espectro do operador $\mathcal{T}_3$ com domínio $H^2_{per}([0, L])$.

Demonstração. **(i)** É imediato de (2.24) que $\mathcal{T}_1\phi' = 0$, donde vem que zero é um autovalor de $\mathcal{T}_1$, cuja autofunção associada é ϕ'. Desde que ϕ' tem exatamente dois zeros em $[0, L)$ segue que zero é o segundo ou o terceiro autovalor. Usando a fórmula explícita de ϕ, é fácil ver que o problema periódico

$$\begin{cases} \mathcal{T}_1\chi = \lambda\chi \\ \chi(0) = \chi(L), \chi'(0) = \chi'(L). \end{cases}$$

é equivalente ao seguinte problema periódico (associado ao operador de Lamé)

$$\begin{cases} \Lambda'' + [\rho - 6k^2 sn^2(x;k)]\Lambda = 0 \\ \Lambda(0) = \Lambda(2K), \Lambda'(0) = \Lambda'(2K), \end{cases} \tag{3.38}$$

onde $\Lambda(x) = \chi(\eta x), \eta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{c}\theta_1}$ e

$$\rho = \frac{2}{\theta_1^2 c}[-(\gamma+1) + 3c\theta_1^2 + \lambda]. \tag{3.39}$$

É bem conhecido (já fizemos anteriormente no Teorema 3.1.1) que este último problema tem seus três primeiros autovalores dados, respectivamente, por

$$\rho_0 = 2(1 + k^2 - \sqrt{1 - k^2 + k^4}), \quad \rho_1 = 4 + k^2 \quad \text{e} \quad \rho_2 = 2(1 + k^2 + \sqrt{1 - k^2 + k^4})$$

com respectivas autofunções dadas por

$$\Lambda_0(x) = 1 - (1 + k^2 - \sqrt{1 - k^2 + k^4})sn^2(x;k),$$

$$\Lambda_1(x) = cn(x;k)sn(x;k),$$

$$\Lambda_2(x) = 1 - (1 + k^2 + \sqrt{1 - k^2 + k^4})sn^2(x;k),$$

as quais tem período $2K$. Note que tanto Λ_1 quanto Λ_2 possuem dois zeros em $[0, 2K)$. De (3.39) vemos que $\rho_1 = 4 + k^2$ implica que $\lambda_1 = 0$, donde segue que zero é o segundo autovalor de $\mathcal{T}_1$ e é portanto simples. Logo, $\mathcal{T}_1$ tem um único autovalor negativo, o qual é simples.

(ii) É fácil ver de (2.24) que $\mathcal{T}_3\phi = 0$, o que significa que 0 é autovalor de $\mathcal{T}_3$ com autofunção ϕ. Desde que ϕ não tem zeros em $[0, L]$ segue que zero é o primeiro autovalor de $\mathcal{T}_3$ e portanto é simples. □

Observação 3.3.2. *Note que*

$$\mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_1 + \frac{1}{b^2+1}\left(b^3(4b + \frac{1}{3}) + 2b(4b + \frac{1}{3}) + (4 + \frac{1}{3b})\right)\phi^2$$

e

$$\mathcal{T}_4 = \mathcal{T}_3 + \frac{9}{9b^2+1}\left(b^3 + \frac{2}{9}b + \frac{1}{81b}\right)\phi^2.$$

Utilizando o valor explícito de b, vemos que

$$d_1 := \frac{1}{b^2+1}\left(b^3(4b + \frac{1}{3}) + 2b(4b + \frac{1}{3}) + (4 + \frac{1}{3b})\right) \approx -1,80001 < 0$$

e

$$d_3 := \frac{9}{9b^2+1}\left(b^3 + \frac{2}{9}b + \frac{1}{81b}\right) \approx -1,988888 < 0$$

Portanto, o Teorema 3.3.1 *e o Teorema de Comparação implicam que* $\mathcal{T}_2$ *possui pelo menos dois autovalores negativos e que* $\mathcal{T}_4$ *possui pelo menos um autovalor, quando tais operadores são considerado no espaço* $H^2_{per}([0,L])$.

Conforme veremos mais tarde, nosso resultado de estabilidade/instabilidade das ondas dnoidal do Tipo II dadas no Teorema 2.3.2 será em relação a perturbações por funções de período $2L$. Para tanto, precisamos do seguinte resultado.

Corolário 3.3.3. *Sejam* $\gamma \in \left(\frac{2\pi^2}{L^2} - 1, \infty\right)$ *e* α, σ *tais que* $\gamma + 1 = \alpha + 3\sigma\gamma$. *Seja* $\phi_\gamma = \phi$ *a onda dnoidal dada no Teorema* 2.3.2. *Então o operador* $\mathcal{T}_1$ *em* (3.32) *definido em* $L^2_{per}([0,2L])$ *e com domínio* $H^2_{per}([0,2L])$ *tem exatamente três autovalores negativos, os quais são simples; zero é o quarto autovalor o qual é simples e cuja autofunção associada é* ϕ'. *Além disso, o restante do espectro é constituído por um conjunto discreto de autovalores.*

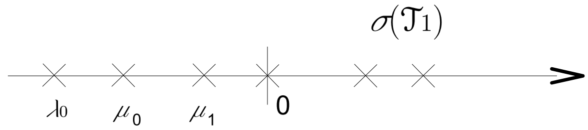

Figura 3.19: Espectro do operador $\mathcal{T}_1$ com domínio $H^2_{per}([0,2L])$.

Demonstração. Analogamente ao que fizemos no Teorema 3.3.1, usando a fórmula explícita de ϕ, vemos que o problema periódico

$$\begin{cases} \mathcal{T}_1\xi = \mu\xi \\ \xi(0) = \xi(2L), \xi'(0) = \xi'(2L). \end{cases} \tag{3.40}$$

é equivalente ao seguinte problema periódico (associado ao operador de Lamé)

$$\begin{cases} \tilde{\Lambda}'' + [\tilde{\mu} - 6k^2 sn^2(x;k)]\tilde{\Lambda} = 0 \\ \tilde{\Lambda}(0) = \tilde{\Lambda}(4K), \tilde{\Lambda}'(0) = \tilde{\Lambda}'(4K), \end{cases} \tag{3.41}$$

onde $\tilde{\Lambda}(x) = \xi(\eta x), \eta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{c}\theta_1}$ e

$$\tilde{\mu} = \frac{2}{\theta_1^2 c}[-(\gamma+1) + 3c\theta_1^2 + \mu]. \tag{3.42}$$

É fácil ver que os dois primeiros autovalores do problema (3.41) que não estão associados a autofunções de período $2K$, são $\tilde{\mu}_0 = 1 + k^2$ e $\tilde{\mu}_1 = 1 + 4k^2$, os quais são simples e cujas autofunções associadas são dadas, respectivamente, por

$$\tilde{\Lambda}_0(x) = cn(x;k)dn(x;k) \quad \text{e} \quad \tilde{\Lambda}_1(x) = sn(x;k)dn(x;k),$$

as quais possuem um único zero em $[0, 2K)$. De (3.42) vemos então que os dois primeiros autovalores de $\mathcal{T}_1$, digamos μ_0 e μ_1, cujas autofunções são de período $2L$ mas não são de período fundamental L, são simples e satisfazem $\mu_0 < \mu_1$. Da relação

$$\lambda_0 < \mu_0 \leq \mu_1 < \lambda_1 \leq \lambda_2 < \mu_2 \leq \mu_3 < \dots,$$

e do Teorema 3.3.1 segue que $\lambda_0 < \mu_0 < \mu_1 < \lambda_1 = 0$, ou seja, $\mathcal{T}_1$ tem exatamente três autovalores negativos em $H^2_{per}([0, 2L])$. Isso termina a demonstração. $\square$

No que segue, se $\mathcal{T}$ é um operador linear, então $n(\mathcal{T})$ denotará o número de autovalores negativos de $\mathcal{T}$, contando multiplicidades.

No nosso argumento de instabilidade (desenvolvido por Grillakis [29]), necessitamos conhecer uma relação entre $n(\mathcal{T}_R)$ e $n(\mathcal{T}_I)$, a qual passaremos a determinar. Iniciemos com o seguinte resultado.

Lema 3.3.4. *Sejam $\mathcal{T}_2$ e $\mathcal{T}_4$ os operadores em* (3.33) *e* (3.35)*, respectivamente, ambos definidos em $L^2_{per}([0, 2L])$ e com domínio $H^2_{per}([0, 2L])$. Se $n(\mathcal{T}_2)$ e $n(\mathcal{T}_4)$ denotam, respectivamente, o número de autovalores negativos* (*contando multiplicidades*) *de $\mathcal{T}_2$ e $\mathcal{T}_4$ então $n(\mathcal{T}_2) \geq n(\mathcal{T}_4)$. Além disso, tanto o espectro de $\mathcal{T}_2$ quanto o espectro de $\mathcal{T}_4$ é constituído por um conjunto discreto de autovalores, os quais são simples.*

Demonstração. O resultado segue como uma aplicação do Teorema de Comparação. Com efeito, de (3.33) e (3.35) podemos escrever

$$\mathcal{T}_2 = -\frac{d^2}{dx^2} + (\gamma + 1) + d_2\phi^2 \quad \text{e} \quad \mathcal{T}_4 = -\frac{d^2}{dx^2} + (\gamma + 1) + d_4\phi^2,$$

onde

$$d_2 := -3c + \frac{1}{b^2 + 1}\left(b^3(4b + \frac{1}{3}) + 2b(4b + \frac{1}{3}) + (4 + \frac{1}{3b})\right)$$

$$d_4 := -c + \frac{9}{9b^2 + 1}\left(b^3 + \frac{2}{9}b + \frac{1}{81b}\right).$$

Pelos valores explícitos de b e c vemos que $d_4 > d_2$ (numericamente temos $d_2 \approx -2,09567$ e $d_4 \approx -2,08744$). Consequentemente, desde que $\phi(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, temos

$$(\gamma+1) + d_2\phi^2 < (\gamma+1) + d_4\phi^2.$$

Assim, se $\lambda_k(\mathcal{T}_2)$ e $\lambda_k(\mathcal{T}_4)$ denotam, respectivamente, o k-ésimo autovalor de $\mathcal{T}_2$ e $\mathcal{T}_4$ (contando multiplicidades), segue pelo Teorema de Comparação que $\lambda_k(\mathcal{T}_2) < \lambda_k(\mathcal{T}_4)$ e portanto, $n(\mathcal{T}_2) \geq n(\mathcal{T}_4)$. Finalmente, usando novamente a fórmula explícita de ϕ, vemos que o problema periódico associado a $\mathcal{T}_2$

$$\begin{cases} \mathcal{T}_2\chi = \mu\chi \\ \chi(0) = \chi(2L), \chi'(0) = \chi'(2L). \end{cases} \tag{3.43}$$

é equivalente ao seguinte problema periódico (associado ao operador de Lamé)

$$\begin{cases} \Lambda'' + [\rho - rk^2 sn^2(x;k)]\Lambda = 0 \\ \Lambda(0) = \Lambda(4K), \Lambda'(0) = \Lambda'(4K), \end{cases} \tag{3.44}$$

onde $\Lambda(x) = \chi(\eta x)$, $\eta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{c}\theta_1}$ e

$$\rho = \frac{2}{\theta_1^2 c}[-(\gamma+1) + \theta_1^2(3c - d_1) + \mu], \quad r = 6 + \frac{2d_1}{c}, \quad d_1 = d_2 + 3c. \tag{3.45}$$

Desde que r não é um inteiro (numericamente $2d_1/c \approx -36,5285$), o problema (3.44) não admite coexistência de soluções (ver [47]), donde todos os seus autovalores são simples. Portanto, de (3.45) segue que todos os autovalores de $\mathcal{T}_2$ são simples. Analogamente, podemos mostrar que os autovalores de $\mathcal{T}_4$ são todos simples. $\square$

De posse dos resultados anteriores, podemos agora estimar o espectro negativo de $\mathcal{T}_R$ e $\mathcal{T}_I$. Este é o conteúdo do próximo teorema.

Teorema 3.3.5. *Sejam $\gamma \in \left(\frac{2\pi^2}{L^2} - 1, \infty\right)$ e suponha que α, σ são tais que $\gamma + 1 = \alpha + 3\sigma\gamma$. Seja $\phi_\gamma = \phi$ a onda dnoidal dada no Teorema* 2.3.2. *Então,*

(i) *o operador linear auto-adjunto $\mathcal{T}_I$ definido em $L^2_{per}([0,2L])$ com domínio $H^2_{per}([0,2L])$ tem exatamente $n(\mathcal{T}_4)$ autovalores negativos, isto é, $n(\mathcal{T}_I) = n(\mathcal{T}_4)$; zero é um autovalor de multiplicidade no máximo dois. Além disso, o restante do espectro é constituído por um conjunto discreto de autovalores.*

(ii) *O operador linear auto-adjunto $\mathcal{T}_R$ definido em $L^2_{per}([0,2L])$ com domínio $H^2_{per}([0,2L])$ é tal que*

$$n(\mathcal{T}_R) \geq n(\mathcal{T}_I) + 3.$$

Além disso, o restante do espectro é constituído por um conjunto discreto de autovalores.

Demonstração. **(i)** Conforme já observamos, o operador $\mathcal{T}_I$ é equivalente ao operador diagonal

$$\mathcal{T}_{DI} = \begin{pmatrix} \mathcal{T}_3 & 0 \\ 0 & \mathcal{T}_4 \end{pmatrix}.$$

Pelo Teorema 3.3.1, o operador $\mathcal{T}_3$ não possui autovalores negativo em $H^2_{per}([0,L])$ e portanto não possui também em $H^2_{per}([0,2L])$. Portanto, os autovalores negativos de $\mathcal{T}_{DI}$ são àqueles dados pelos autovalores negativos de $\mathcal{T}_4$, posto que $\sigma(\mathcal{T}_{DI}) = \sigma(\mathcal{T}_3) \cup \sigma(\mathcal{T}_4)$. Consequentemente,

$$n(\mathcal{T}_I) = n(\mathcal{T}_{DI}) = n(\mathcal{T}_4).$$

Além disso, pelo Teorema 3.3.1, zero é um autovalor de $\mathcal{T}_3$. Logo, pelo Lema 3.3.4 segue que

$$1 \leq \dim Ker(\mathcal{T}_I) \leq 2.$$

(ii) Já observamos também que o operador $\mathcal{T}_R$ é equivalente ao seguinte operador diagonal

$$\mathcal{T}_{DR} = \begin{pmatrix} \mathcal{T}_1 & 0 \\ 0 & \mathcal{T}_2 \end{pmatrix}.$$

Assim, $\sigma(\mathcal{T}_R) = \sigma(\mathcal{T}_1) \cup \sigma(\mathcal{T}_2)$ e daí, $n(\mathcal{T}_R) = n(\mathcal{T}_1) + n(\mathcal{T}_2)$. Mas pelo Corolário 3.3.3, temos $n(\mathcal{T}_1) = 3$ e pelo Lema 3.3.4, temos $n(\mathcal{T}_2) \geq n(\mathcal{T}_4) = n(\mathcal{T}_I)$. Consequentemente,

$$n(\mathcal{T}_R) \geq n(\mathcal{T}_I) + 3.$$

Isso completa a demonstração. □

O próximo resultado será útil na nossa análise em relação a estabilidade/instabilidade das ondas dnoidal do tipo II.

Lema 3.3.6. *Nas mesmas condições do Teorema* 3.3.5*, temos*

$$n\left(\mathcal{T}_R\,|_{[ker(\mathcal{T}_I)]^{\perp}}\right) \geq n(\mathcal{T}_R) - \dim Ker(\mathcal{T}_I),$$

onde $[Ker(\mathcal{T}_I)]^{\perp}$ denota o complemento ortogonal de $Ker(\mathcal{T}_I)$ em $L^2_{per}([0,2L])$.

Demonstração. A demonstração deste lema é baseada na demostração do Teorema 3.2 em [28] (veja também [66], pg. 1101). De fato, sejam $n = n(\mathcal{T}_R)$, $k = \dim Ker(\mathcal{T}_I)$ e $\lambda_1, \ldots \lambda_n$ os autovalores negativos de $\mathcal{T}_R$. Considere $v_1, \ldots, v_n$ funções ortonormais tais que

$$\mathcal{T}_R v_j = \lambda_j v_j, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Seja $\{w_1, \ldots, w_k\}$ uma base de $Ker(\mathcal{T}_I)$, escrevamos

$$w_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^i v_j + s_i, \quad s_i \perp v_j, \quad i = 1, \ldots, k;\ j = 1, \ldots, n$$

e defina o seguinte subespaço

$$V = \{\gamma_1 v_1 + \ldots + \gamma_n v_n;\ \gamma_1 \alpha_1^i + \ldots + \gamma_n \alpha_n^i = 0,\ i = 1, \ldots, k\}$$

Notemos as seguintes propriedades de V:

i) $\dim V \geq n - k$. De fato, sejam $\overrightarrow{\alpha^i} = (\alpha_1^i, \ldots, \alpha_n^i) \in \mathbb{R}^n, i = 1, \ldots, k$ e considere $\overrightarrow{\gamma^j} = (\gamma_1^j, \ldots, \gamma_n^j), j = 1, \ldots, m := n - k$ uma base do complemento ortogonal do subespaço gerado por $\overrightarrow{\alpha^1}, \ldots, \overrightarrow{\alpha^k}$ em $\mathbb{R}^n$. Vamos mostrar que o conjunto

$$\{\gamma_1^j v_1 + \ldots + \gamma_n^j v_n\},\ \ j = 1, \ldots, m$$

é linearmente independente. Com efeito, sejam $\beta_1, \ldots, \beta_m$ tais que

$$\beta_1(\gamma_1^1 v_1 + \ldots + \gamma_n^1 v_n) + \ldots + \beta_m(\gamma_1^m v_1 + \ldots + \gamma_n^m v_n) = 0.$$

Como $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é um conjunto linearmente independente, obtemos o sistema linear

$$\begin{pmatrix} \gamma_1^1 & \gamma_1^2 & \ldots & \gamma_1^m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \gamma_n^1 & \gamma_n^2 & \ldots & \gamma_n^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Agora note que a matriz dos coeficientes do sistema acima tem posto m. Portanto, a única solução é $\beta_1 = \ldots = \beta_m = 0$. Como consequência, $\dim V \geq m = n - k$.

ii) $V \subset [Ker(\mathcal{T}_I)]^{\perp}$. Basta notar que se $u = \gamma_1 v_1 + \ldots + \gamma_n v_n \in V$, então para $i = 1, \ldots k$, temos

$$\begin{aligned} (w_i, u)_{L^2_{per}} &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{p=1}^{n} \alpha_j^i \gamma_p (v_j, v_p)_{L^2_{per}} + \sum_{p=1}^{n} \gamma_p (s_i, v_p)_{L^2_{per}} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^i \gamma_j = 0. \end{aligned}$$

iii) $\mathcal{T}_R$ é negativo definido em V. De fato, para $u = \gamma_1 v_1 + \ldots + \gamma_n v_n \in V \backslash \{0\}$, temos

$$(\mathcal{T}_R u, u)_{L^2_{per}} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \gamma_i \gamma_j (v_i, v_j)_{L^2_{per}} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \gamma_j^2 < 0.$$

Como consequência de (i)–(iii), segue o desejado. $\square$

CAPÍTULO 4

Estabilidade/Instabilidade Não-linear

Discutiremos agora as propriedades de estabilidade das soluções ondas viajantes periódicas que encontramos no Capítulo 2. As teorias que usaremos serão aquelas desenvolvida por Grillakis, Shatah e Strauss em [31] ou por Grillakis em [29] para o estudo de estabilidade de sistemas Hamiltonianos abstratos mas adaptada ao caso periódico. Um dos ingredientes centrais da teoria será a análise espectral que estabelecemos no Capítulo 3.

Inicialmente, notemos que o sistema (2.1) possui duas simetrias básicas: translações e rotações. Isso significa que se $(u(x,t), w(x,t))$ é uma solução de (2.1) então os pares de funções $(u(x+x_0,t), w(x+x_0,t))$ e $(e^{is}u(x,t), e^{3is}w(x,t))$ também são, quaisquer que sejam as constantes reais x_0 e s. Tais transformações serão denotadas, respectivamente, por $T_{tr}(x_0)$ e $T_p(s)$. É fácil ver que $T_{tr}(x_0)$ e $T_p(s)$ são grupos unitários sobre $L^2_{per}([0,nL])$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Dessa forma nossa noção de estabilidade será módulo tais simetrias. Mais precisamente,

Definição 4.0.7. *Seja $X_n = H^1_{per}([0,nL]) \times H^1_{per}([0,nL]), n \in \mathbb{N}^*$. Uma solução onda viajante periódica para (2.1), $\Psi(x,t) = (e^{i\gamma t}\phi_\gamma(x), e^{3i\gamma t}\psi_\gamma(x))$, é dita orbitalmente estável em X_n se para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $z_0 \in X_n$ e $\|z_0 - (\phi_\gamma, \psi_\gamma)\|_{X_n} < \delta$, então a solução $z(t) = (u(t), w(t))$ de (2.1) com $z(0) = z_0$ existe globalmente e*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \inf_{s,r\in\mathbb{R}} \|z(t) - T_p(s)T_{tr}(r)(\phi,\psi)\|_{X_n} < \varepsilon.$$

Caso contrário, dizemos que $\Psi(x,t)$ é X_n-instável.

4.1 Estabilidade Não-linear das soluções Ondas Dnoidal do Tipo I por perturbações de período L

Estudaremos nessa seção as propriedades de estabilidade não-linear da solução onda viajante periódica $\Psi(x,t) = (0, e^{3i\gamma t}\psi_\gamma(x))$, onde ψ_γ é a onda dnoidal do tipo I dada pelo Teorema 2.1.2.

Seja $\psi = \psi_\gamma$ a onda dnoidal dada no Teorema 2.1.2 e consideremos o espaço de Hilbert real $X_{\mathbb{R}} = [H^1_{per}([0,L])]^4$. Do Teorema 3.1.5 podemos obter as seguintes informações em $X_{\mathbb{R}}$:

(1) Para $\overrightarrow{f} = (0, \psi', 0, 0)$ e $\overrightarrow{g} = (0,0,0,\psi)$ o conjunto $Z = \{k_1\overrightarrow{f} + k_2\overrightarrow{g}; k_1, k_2 \in \mathbb{R}\}$ é o núcleo do operador $\mathcal{L}_\gamma$.

(2) O operador $\mathcal{L}_\gamma$ tem um único autovalor negativo, a saber, λ_0 o qual é simples e a única (a menos de constantes) autofunção associada é $\overrightarrow{h} = (0, \zeta_0, 0, 0)$. Portanto $N = \{k\overrightarrow{h}; k \in \mathbb{R}\}$ é o autoespaço negativo de $\mathcal{L}_\gamma$.

(3) Existe um subespaço fechado P tal que $\langle \mathcal{L}_\gamma u, u\rangle \geq \delta_0 \|u\|^2_{X_{\mathbb{R}}}$ para todo $u \in P$ e algum $\delta_0 > 0$ (veja, por exemplo, Capítulos 3 e 5 de [38]).

Em consequências das afirmações acima, o espaço $X_{\mathbb{R}}$ admite a seguinte decomposição ortogonal

$$X_{\mathbb{R}} = N \oplus Z \oplus P, \tag{4.1}$$

a qual é necessária na nossa análise de estabilidade.

Agora para $I = \left(\frac{2\pi^2}{L^2} - 1, \infty\right)$ e $\overrightarrow{\psi_\gamma} = (0, \psi_\gamma, 0, 0)$ defina $d : I \to \mathbb{R}$ por

$$d(\gamma) = \mathcal{H}(\overrightarrow{\psi_\gamma}) + \gamma\mathcal{F}(\overrightarrow{\psi_\gamma}). \tag{4.2}$$

Assim, podemos formular nosso resultado de estabilidade da seguinte forma

Teorema 4.1.1. *Sejam $\gamma \in \left(\frac{2\pi^2}{L^2} - 1, \infty\right)$ e $\sigma > 0$ tais que $\gamma + 1 = \alpha + 3\sigma\gamma$. Então para $\psi = \psi_\gamma$ dada no Teorema 2.1.2, a onda viajante periódica $\Psi(x,t) = (0, e^{3i\gamma t}\psi_\gamma(x))$ é orbitalmente estável em X_1.*

Demonstração. Desde que $\overrightarrow{\psi_\gamma}$ satisfaz

$$\mathcal{H}'(\overrightarrow{\psi_\gamma}) + \gamma \mathcal{F}'(\overrightarrow{\psi_\gamma}) = 0, \tag{4.3}$$

$X_{\mathbb{R}}$ admite a decomposição (4.1) e $\mathcal{L}_\gamma$ tem um único autovalor negativo, seguindo Grillakis, Shatah e Strauss [31], o teorema estará demonstrado se mostrarmos que $d''(\gamma) > 0$. Mas, usando (4.3), obtemos inicialmente

$$d'(\gamma) = \mathcal{F}(\overrightarrow{\psi_\gamma}) = \frac{3\sigma}{2}\|\psi_\gamma\|^2_{L^2_{per}([0,L])}.$$

Agora, pela fórmula explícita de ψ_γ, usando que $L = \frac{2\sqrt{2}}{3\eta_1}K(k)$ e

$$\int_0^{K(k)} dn^2(x;k)dx = E(k),$$

obtemos

$$\|\psi_\gamma\|^2_{L^2_{per}([0,L])} = \frac{\sqrt{2}}{3}\eta_1 \int_0^{2K(k)} dn^2(x;k)dx = \frac{8}{9L}K(k)\int_0^{K(k)} dn^2(x;k)dx = \frac{8}{9L}K(k)E(k).$$

Assim, lembrando que $\omega(\gamma) = \frac{1}{9}(1+\gamma)$, $k^2 = k^2(\omega) = \frac{2\omega - 2\eta_2^2}{2\omega - \eta_2^2}$, $\eta_2 = \Lambda(\omega)$, temos

$$\frac{d}{d\gamma}\|\psi_\gamma\|^2_{L^2_{per}([0,L])} = \frac{8}{9L}\frac{d}{dk}[K(k)E(k)]\frac{dk}{d\omega}\frac{d\omega}{d\gamma}.$$

Mas pelo Corolário 2.1.3 temos $\frac{dk}{d\omega} > 0$. Portanto teremos $\frac{d}{d\gamma}\|\psi_\gamma\|_{L^2_{per}([0,L])} > 0$, consequentemente $d''(\gamma) > 0$, se mostrarmos que $\frac{d}{dk}[K(k)E(k)] > 0$. Usando que

$$\frac{d}{dk}E(k) = \frac{E(k) - K(k)}{k} \quad \text{e} \quad \frac{d}{dk}K(k) = \frac{E(k) - k'^2K(k)}{kk'^2},$$

vem

$$\frac{d}{dk}[E(k)K(k)] = \frac{E^2(k) - k'^2K(k)}{kk'^2}.$$

Assim,

$$\frac{d}{dk}[E(k)K(k)] > 0 \Leftrightarrow E^2(k) > (1-k^2)K^2(k) \Leftrightarrow G(k) := E(k) - \sqrt{1-k^2}K(k) > 0$$

Como $G(0) = 0$, para mostrarmos que $G(k) > 0$, é suficiente mostrar que $G'(k) > 0, k \in (0,1)$. De fato,

$$G'(k) = \frac{d}{dk}E(k) + \frac{k}{k'}K(k) - k'\frac{d}{dk}K(k) = \frac{k'E(k) - k'K(k) + K(k) - E(k)}{k'k}.$$

Portanto,

$$G'(k) > 0 \Leftrightarrow K(k) - E(k) - k'[K(k) - E(k)] > 0 \Leftrightarrow K(k) - E(k) > 0.$$

Isso completa a demostração $\square$

4.2 Instabilidade Não-Linear das soluções Ondas Dnoidal do Tipo I por perturbações de período 2L

Analisaremos aqui as propriedades de estabilidade/instabilidade da solução onda viajante periódica $\Psi(x,t) = (0, e^{3i\gamma t}\psi_\gamma(x))$, onde ψ_γ é a onda dnoidal do Teorema 2.1.2, por perturbações periódicas de período $2L$. Na verdade, mostraremos que $\Psi(x,t)$ é instável por perturbações periódicas de período $2L$, isto é, $\Psi(x,t)$ é X_2-instável, mas somente módulo fase. Portanto nossa definição de estabilidade requer uma pequena modificação em relação à Definição 4.0.7.

Definição 4.2.1. *Seja X um espaço de Hilbert qualquer, a órbita $\{T_p(\gamma s)(\phi_\gamma, \psi_\gamma); s \in \mathbb{R}\}$ é dita orbitalmente estável em X, ou X-estável, se para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $z_0 \in X$ e $\|z_0 - (\phi_\gamma, \psi_\gamma)\|_X < \delta$, então a solução $z(t) = (u(t), w(t))$ de (2.1) com $z(0) = z_0$ existe globalmente e satisfaz*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \inf_{s\in\mathbb{R}} \|z(t) - T_p(s)(\phi_\gamma, \psi_\gamma)\|_X < \varepsilon.$$

Caso contrário, dizemos que a órbita é X-instável.

A teoria de instabilidade a ser utilizada é aquela desenvolvida por Grillakis em [29], a qual obtem instabilidade não-linear a partir da análise de instabilidade da solução zero para a linearização de (2.1) em torno da órbita $\{T_p(\gamma s)(0, \psi_\gamma, 0, 0); s \in \mathbb{R}\}$. Esta linearização é feita escrevendo $\Psi = (0, \psi_\gamma, 0, 0)$ e definindo $v = v(t)$ como

$$v = T_p(-\gamma t)u - \Psi. \tag{4.4}$$

Então, se $T_p'(0)$ denota o gerador infinitesimal de $T_p(s)$, usando as propriedades de grupo de $T_p(s)$: $T_p(s)T_p'(0) = T_p'(0)T_p(s)$, $T_p(-s)JT_p(s) = J$, $\mathcal{H}'(T_p(s)u) = T_p(s)\mathcal{H}'(u)$, $J^{-1}T_p'(0)u = -\mathcal{F}'(u)$, obtemos via Teorema de Taylor

$$\begin{aligned}
\frac{dv}{dt} &= -\gamma T_p'(0)T_p(-\gamma t)u + T_p(-\gamma t)u_t \\
&= -\gamma T_p'(0)T_p(-\gamma t)u + T_p(-\gamma t)J\mathcal{H}'(u) \\
&= -\gamma T_p'(0)T_p(-\gamma t)u + T_p(-\gamma t)JT_p(\gamma t)T_p(-\gamma t)\mathcal{H}'(u) \\
&= -\gamma T_p'(0)T_p(-\gamma t)u + JT_p(-\gamma t)\mathcal{H}'(u) \\
&= -\gamma T_p'(0)T_p(-\gamma t)u + J\mathcal{H}'(T_p(-\gamma t)u) \\
&= J[-\gamma J^{-1}T_p'(0)T_p(-\gamma t)u + \mathcal{H}'(T_p(-\gamma t)u)] \\
&= J[\gamma \mathcal{F}'(T_p(-\gamma t)u) + \mathcal{H}'(T_p(-\gamma t)u)] \\
&= J[\mathcal{H}'(v+\Psi) + \gamma\mathcal{F}'(v+\Psi)] \\
&= J[\mathcal{H}''(\Psi)v + \gamma\mathcal{F}''(\Psi)v + \mathcal{H}'(\Psi) + \gamma\mathcal{F}'(\Psi) + O(\|v\|^2)] \\
&= J\mathcal{L}_\gamma v + O(\|v\|^2),
\end{aligned} \tag{4.5}$$

onde na última igualdade usamos que J é um operador limitado e $\mathcal{H}'(\Psi) + \gamma\mathcal{F}'(\Psi) = 0$.

Seguindo Grillakis, denotamos por $n(\mathcal{L})$ o número de autovalores negativos do operador auto-adjunto $\mathcal{L}_\gamma = \mathcal{L}$ e escrevemos

$$Y = [Ker(\mathcal{L}_\gamma)]^\perp = [Ker(\mathcal{L}_R) \cup Ker(\mathcal{L}_I)]^\perp. \tag{4.6}$$

Agora notemos que o operador

$$\begin{cases} \widetilde{\mathcal{L}}_I : H^2_{per}([0,2L]) \cap [Ker\mathcal{L}_I]^\perp \subset L^2_{per}([0,2L]) \to L^2_{per}([0,2L]) \\[2ex] \widetilde{\mathcal{L}}_I u = \mathcal{L}_I u, \quad \forall u \in H^2_{per}([0,2L]) \cap [Ker\mathcal{L}_I]^\perp \end{cases}$$

é uma bijeção, posto que $0 \notin \sigma(\widetilde{\mathcal{L}}_I)$. Assim estão bem definidos os seguintes operadores

$$\widehat{\mathcal{L}}_R = \text{restrição de } \mathcal{L}_R \text{ a } Y \cap H^2_{per}([0,2L]),$$

$$\widehat{\mathcal{L}}_I^{-1} = \text{restrição de } \mathcal{L}_I^{-1} \text{ a } Y.$$

De Grillakis [29], obtemos que $J\mathcal{L}$ tem exatamente

$$\max\{n(\widehat{\mathcal{L}}_R), n(\widehat{\mathcal{L}}_I^{-1})\} - d(C(\widehat{\mathcal{L}}_R) \cap C(\widehat{\mathcal{L}}_I^{-1})) \tag{4.7}$$

$\pm$ pares de autovalores reais não-nulos, onde $C(\mathcal{L}) = \{y \in Y; \langle \mathcal{L}y, y\rangle < 0\}$ denota o cone negativo do operador $\mathcal{L}$ e $d(C(\mathcal{L}))$ denota a dimensão de um subespaço maximal de Y que está contido em $C(\mathcal{L})$.

É bem conhecido que se $J\mathcal{L}$ possui um número finito de autovalores com parte real estritamente positiva então a solução zero de $v_t = J\mathcal{L}v + O(\|v\|^2)$ é linearmente instável (ver [31]), o que imediatamente implica que a órbita $\mathcal{O} = \{T_p(\gamma t)(0, \psi_\gamma, 0, 0); t \in \mathbb{R}\}$ é não-linearmente instável. Portanto, uma condição suficiente para que $\mathcal{O}$ seja não-linearmente instável é que o número definido em (4.7) seja estritamente positivo. Dessa forma, temos o seguinte resultado de instabilidade.

Teorema 4.2.2. *Seja* $\gamma \in \left(\frac{2\pi^2}{L^2} - 1, \infty\right)$ *tal que* $\gamma + 1 = \alpha + 3\sigma\gamma$. *Então para* $\psi = \psi_\gamma$ *dada no Teorema* 2.1.2*, a órbita*

$$\mathcal{O} = \{T_p(\gamma t)(0, \psi, 0, 0); t \in \mathbb{R}\}$$

é X_2*-instável pelo fluxo periódico do sistema* (2.1)*.*

Demonstração. Conforme já observamos acima, basta mostrarmos que

$$\max\{n(\widehat{\mathcal{L}}_R), n(\widehat{\mathcal{L}}_I^{-1})\} - d(C(\widehat{\mathcal{L}}_R) \cap C(\widehat{\mathcal{L}}_I^{-1})) > 0.$$

Inicialmente, notemos que pelo Teorema 3.1.5, o operador $\mathcal{L}_I$ é estritamente positivo em Y, donde segue que $n(\widehat{\mathcal{L}}_I^{-1}) = 0$ e $C(\widehat{\mathcal{L}}_I^{-1}) = \emptyset$. Logo,

$$\max\{n(\widehat{\mathcal{L}}_R), n(\widehat{\mathcal{L}}_I^{-1})\} - d(C(\widehat{\mathcal{L}}_R) \cap C(\widehat{\mathcal{L}}_I^{-1})) = n(\widehat{\mathcal{L}}_R).$$

Portanto, o teorema estará demonstrado se mostrarmos que $n(\widehat{\mathcal{L}}_R) > 0$. Desde que $\mathcal{L}_R$ é um operador auto-adjunto, seu autoespaço negativo é ortogonal ao seu núcleo. Assim, devemos somente verificar quais das autofunções associada a autovalores negativos de $\mathcal{L}_R$ estão em $[Ker\mathcal{L}_I]^\perp$. Mas pelo Corolário 3.1.3 segue que $n(\widehat{\mathcal{L}}_R) \geq 2$. Isso conclui a prova do teorema. $\square$

Observação 4.2.3. *A teoria de instabilidade para sistemas Hamiltonianos abstratos desenvolvida por Grillakis et al. não traz nenhuma informação conclusiva a respeito da instabilidade neste caso. De fato, se* $p(d'')$ *denota o número de autovalores positivos de* d''*, isto é,* $p(d'') = 1$ *se* $d''(\gamma) > 0$ *e* $p(d'') = 0$ *se* $d''(\gamma) \leq 0$ *então o critério em Grillakis et al. afirma que se* $n(\mathfrak{L}_\gamma) - p(d'')$ *é impar e,* $d''(\gamma) \neq 0$*, então* Ψ_γ *é instável. Como antes, aqui também temos* $d''(\gamma) > 0$ *e portanto* $p(d'') = 1$*. Logo, pelo Teorema* 3.1.6 *temos*

$$n(\mathfrak{L}_\gamma) - p(d'') = 3 - 1 = 2$$

o qual é par.

4.3 Estabilidade Não-linear das soluções Ondas Cnoidal

Nesta seção estudaremos as propriedades de estabilidade/instabilidade da onda viajante periódica $\Psi(x,t) = (0, e^{3i\gamma t}\psi_{\gamma,j}(x))$, $j = 1, 2$, onde $\psi_{\gamma,j}$ e uma onda cnoidal dada pelos Teoremas 2.2.1 ou 2.2.2. Entretanto, o estudo de estabilidade em X_1 parece ser um pouco mais complicado do que no caso das ondas dnoidal. Neste caso, não sabemos responder se a onda periódica $\Psi(x,t)$ é ou não estável em X_1, já que a teoria de Grillakis, Shatah e Strauss não funciona aqui. De fato, pelo Teorema 3.2.1, vemos que o operador $\mathfrak{L}_{\gamma,i}$, $i = 1, 2$ possui pelo menos três autovalores negativos em $H^2_{per}([0, L])$, digamos $n(\mathfrak{L}_{\gamma,i})$, e como $d'' > 0$ (aqui a função d é definida como em (4.2), veja Teorema 4.3.1 abaixo) não podemos concluir um resultado de estabilidade. Por outro lado, se $\mathfrak{L}_{3,i}$ não possui autovalor negativo então $n(\mathfrak{L}_{\gamma,i}) = 3$ e portanto a diferença $n(\mathfrak{L}_{\gamma,i}) - sign(d'') = 3 - 1 = 2$ é um número *par*, além disso, se $\mathfrak{L}_{3,i}$ possui um autovalor negativo então $n(\mathfrak{L}_{\gamma,i}) = 5$ e portanto a diferença $n(\mathfrak{L}_{\gamma,i}) - sign(d'') = 5 - 1 = 4$ é novamente um número par. Logo, em nenhum dos dois casos podemos concluir algum resultado sobre instabilidade.

Vamos agora mostrar que a teoria de Grillakis [29] também não pode ser aplicada aqui para mostrarmos um resultado de instabilidade não-linear (módulo rotações) das ondas $\Psi(x,t) = (0, e^{3i\gamma t}\psi_{\gamma,j}(x))$, $j = 1, 2$ no espaço X_1. De fato, vamos considerar somente o caso das ondas cnoidal $\psi_{\gamma,1}$, já que o caso das ondas $\psi_{\gamma,2}$ segue de maneira análoga. Como na seção 4.2, definimos

$$Y_1 = [Ker(\mathfrak{L}_{R,1}) \cup Ker(\mathfrak{L}_{I,1})]^\perp.$$

$$\widehat{\mathcal{L}}_{R,1} = \text{restrição de } \mathcal{L}_{R,1} \text{ a } Y_1 \cap H^2_{per}([0,L]),$$

$$\widehat{\mathcal{L}}^{-1}_{I,1} = \text{restrição de } \mathcal{L}^{-1}_{I,1} \text{ a } Y_1.$$

Vamos mostrar que neste caso temos

$$\max\{n(\widehat{\mathcal{L}}_{R,1}), n(\widehat{\mathcal{L}}^{-1}_{I,1})\} - d(C(\widehat{\mathcal{L}}_{R,1}) \cap C(\widehat{\mathcal{L}}^{-1}_{I,1})) = 0. \tag{4.8}$$

Suponha inicialmente que $n(\mathcal{L}_3) = 0$. Então pelo Teorema 3.2.1 o operador $\mathcal{L}_{R,1}$ possui exatamente dois autovalores negativos em $H^2_{per}([0,L])$, no qual a primeira e a segunda autofunções são dadas, respectivamente, por

$$\overrightarrow{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi_{0,1}(\eta x) \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \overrightarrow{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ \Lambda_{0,sm}(\eta x) \end{pmatrix}$$

onde $\eta = 3\sqrt{b^2 - \omega}$, $\omega = \gamma + 1$, $\chi_{0,1}(\eta x)$ e $\Lambda_{0,sm}(\eta x)$ são, respectivamente, a primeira e a segunda autofunção do operador $\mathcal{L}_{1,1}$ (veja (3.23)). Também, o operador $\mathcal{L}_{I,1}$ possui exatamente um autovalor negativo em $H^2_{per}([0,L])$, cuja única autofunção associada é dada por

$$\overrightarrow{h} = \begin{pmatrix} 0 \\ \zeta_{0,1}(x) \end{pmatrix},$$

onde $\zeta_{0,1}(x) = dn(\eta x)$ é a primeira autofunção do operador $\mathcal{L}_{2,1}$. Além disso, os núcleos de $\mathcal{L}_{R,1}$ e $\mathcal{L}_{I,1}$ são gerados, respectivamente, por

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \psi'_{\gamma,1} \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_{\gamma,1} \end{pmatrix}.$$

Agora note que

$$\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ \Lambda_{0,sm} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_{\gamma,1} \end{pmatrix} \right\rangle_{L^2_{per} \times L^2_{per}} = \langle \Lambda_{0,sm}, \psi_{\gamma,1} \rangle_{L^2_{per}} = b \int_0^L cn^2(\eta x) dn(\eta x)\; dx > 0,$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ \chi_{0,1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_{\gamma,1} \end{pmatrix} \right\rangle_{L^2_{per} \times L^2_{per}} = \langle \chi_{0,1}, \psi_{\gamma,1} \rangle_{L^2_{per}} = b \int_0^L cn(\eta x) \chi_{0,1}(\eta x)\; dx = 0,$$

onde na última igualdade usamos que $\chi_{0,1}$ tem período $L/2$ e cn tem semi-período $L/2$. Portanto $\overrightarrow{f} \notin Y_1$ e $\overrightarrow{g} \in Y_1$. Mais ainda

$$\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ \zeta_{0,1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \psi'_{\gamma,1} \end{pmatrix} \right\rangle_{L^2_{per} \times L^2_{per}} = \langle \zeta_{0,1}, \psi'_{\gamma,1} \rangle_{L^2_{per}} = -b\eta \int_0^L cn(\eta x) \chi_{0,1}(\eta x)\; dx = 0,$$

ou seja, $\overrightarrow{h} \in Y_1$. Desde que

$$\langle \mathcal{L}_{I,1} \overrightarrow{h}, \overrightarrow{h} \rangle_{L^2_{per}} < 0 \tag{4.9}$$

resulta que

$$\max\{n(\widehat{\mathcal{L}}_{R,1}), n(\widehat{\mathcal{L}}^{-1}_{I,1})\} = 1. \tag{4.10}$$

Também, utilizando que $\frac{d}{du}dn = -k^2 cn(u)sn(u)$ e $sn^2(u) = 1 - cn^2(u)$ (veja Apêndice), obtemos

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}_{R,1} \overrightarrow{h}, \overrightarrow{h} \rangle_{L^2_{per}} &= \langle \mathcal{L}_{1,1}\zeta_{0,1}, \zeta_{0,1} \rangle_{L^2_{per}} \\ &= -26b^2 \int_0^L cn^2(\eta x) dn^2(\eta x)\, dx + (\omega - \frac{b^2}{2}) \int_0^L dn^2(\eta x)\, dx < 0, \end{aligned} \tag{4.11}$$

uma vez que $b^2 > 2\omega$. Assim de (4.9) e (4.11), obtemos

$$d(C(\widehat{\mathcal{L}}_{R,1}) \cap C(\widehat{\mathcal{L}}^{-1}_{I,1})) = 1. \tag{4.12}$$

Finalmente de (4.10) e (4.12) obtemos (4.8). Analogamante, se $n(\mathcal{L}_3) = 1$ podemos mostrar que

$$\max\{n(\widehat{\mathcal{L}}_{R,1}), n(\widehat{\mathcal{L}}^{-1}_{I,1})\} - d(C(\widehat{\mathcal{L}}_{R,1}) \cap C(\widehat{\mathcal{L}}^{-1}_{I,1})) = 2 - 2 = 0.$$

Em concorrência com as observações acima, nos propomos a investigar as propriedades de estabilidade/instabilidade das ondas cnoidal no subespaço

$$\mathcal{X}_1 = \{f \in H^1_{per}([0, L]); \int_0^L f\, dx = 0\}.$$

Como consequência do Teorema 3.2.4, temos as seguintes propriedades espectrais para o operador $\mathcal{L}_{\gamma,i}$ (em $\mathcal{X}_2$):

(1) Para $\vec{f} = (0, \psi'_{\gamma,i}, 0, 0)$ e $\vec{g} = (0, 0, 0, \psi_{\gamma,i})$, o conjunto $Z = \{k_1\vec{f} + k_2\vec{g}; k_1, k_2 \in \mathbb{R}\}$ é o núcleo do operador $\mathcal{L}_{\gamma,i}$;

(2) o operador $\mathcal{L}_{\gamma,i}$ possui um único autovalor negativo em $\mathcal{X}_2$, portanto seu autoespaço negativo, digamos N, é 1-dimensional;

(3) existe um subespaço fechado P tal que $\langle \mathcal{L}_{\gamma,i} u, u \rangle \geq \delta_0 \|u\|^2$, para todo $u \in P$ e algum $\delta_0 > 0$.

Dessa forma, o espaço $\mathcal{X}_{\mathbb{R}} = \mathcal{X}_1^4$, admite a seguinte decomposição ortogonal

$$\mathcal{X}_{\mathbb{R}} = N \oplus Z \oplus P. \tag{4.13}$$

Agora para $I = (-1, \infty)$ ou $I = \left(-\frac{4\pi^2}{L^2} - 1, -1\right)$, de acordo com os Teoremas 2.2.1 e 2.2.2, e $\vec{\psi}_\gamma = (0, \psi_{\gamma,i}, 0, 0)$ defina $d : I \to \mathbb{R}$ por

$$d(\gamma) = \mathcal{H}(\vec{\psi}_\gamma) + \gamma \mathcal{F}(\vec{\psi}_\gamma).$$

Nosso resultado de estabilidade é o seguinte:

Teorema 4.3.1. *Seja $\psi_{\gamma,j}, j = 1, 2$ a onda cnoidal dada pelos Teoremas 2.2.1 ou 2.2.2 e suponha que $\gamma + 1 = \alpha + 3\sigma\gamma$, com $\sigma > 0$. Então a onda viajante periódica $\Psi_j(x,t) = (0, e^{3i\gamma t}\psi_{\gamma,j}(x))$ é orbitalmente estável em $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_1$.*

Demonstração. Notemos inicialmente que

$$\mathcal{H}'(\vec{\psi}_\gamma) + \gamma \mathcal{F}'(\vec{\psi}_\gamma) = 0. \tag{4.14}$$

Assim, desde que $\mathcal{X}_{\mathbb{R}}$ admite a decomposição (4.13) e $\mathcal{L}_{\gamma,i}$ possui um único autovalor negativo em $\mathcal{X}_2$, pelo teorema de estabilidade abstrato dado por Grillakis *et al.*, basta mostrarmos que $d''(\gamma) > 0$. Para isso, derivando d e usando (4.14), obtemos

$$d'(\gamma) = \mathcal{F}(\vec{\psi}_\gamma) = \frac{3\sigma}{2} \|\psi_{\gamma,i}\|^2_{L^2_{per}([0,L])}.$$

Portanto, como $\sigma > 0$ basta mostrarmos que $\frac{d}{d\gamma}(\|\psi_{\gamma,i}\|^2_{L^2_{per}([0,L])}) > 0$.

Mas usando que

$$\int_0^K cn^2(u;k)du = \frac{1}{k^2}[E(k) - (1-k^2)K(k)]$$

e

$$\frac{d}{dk}K(k) = \frac{1}{k(1-k^2)}[E(k) - (1-k^2)K(k)],$$

obtemos

$$\int_0^L \psi^2_{\gamma,i}(x)dx = \frac{32k^2K}{9L}\left[\frac{E(k) - (1-k^2)K(k)}{k^2}\right] = \frac{32}{9L}k(1-k^2)K(k)\frac{d}{dk}K(k).$$

Desde que $K(k)$ satisfaz a *equação diferencial hipergeométrica* (veja Apêndice A)

$$k(1-k^2)\frac{d^2}{dk^2}K + (1-3k^2)\frac{d}{dk}K - kK = 0$$

segue que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\gamma}\int_0^L \psi_{\gamma,i}^2(x)dx &= \frac{32}{9L}\frac{dk}{d\omega}\frac{d\omega}{d\gamma}\left\{K\left[(1-3k^2)\frac{dK}{dk}+k(1-k^2)\frac{d^2K}{dk^2}\right]+k(1-k^2)\left(\frac{dK}{dk}\right)\right\}\\
&= \frac{32}{9L}\frac{dk}{d\omega}\frac{d\omega}{d\gamma}\left\{kK^2+k(1-k^2)\left(\frac{dK}{dk}\right)\right\}.
\end{aligned}$$

Portanto, desde que pelos Teorema 2.2.1 e 2.2.2 temos $\frac{dk}{d\omega}>0$ e $\frac{d\omega}{d\gamma}=\frac{1}{9}>0$, segue que

$$\frac{d}{d\gamma}\|\psi_{\gamma,i}\|^2_{L^2_{per}([0,L])}=\frac{d}{d\gamma}\int_0^L \psi_{\gamma,i}^2(x)dx>0,$$

o que completa a demonstração do teorema. □

4.4 Instabilidade Não-Linear das soluções Ondas Dnoidal do Tipo II

Para finalizar nosso estudo sobre estabilidade/instabilidade não-linear das ondas viajantes periódicas que encontramos no Capítulo 2, consideraremos nesta seção as ondas dnoidal do tipo II. Na verdade, mostraremos que a órbita $\{T_p(\gamma s)(\phi_\gamma, b\phi_\gamma, 0, 0); s\in\mathbb{R}\}$, é instável por perturbações periódicas de período $2L$. A teoria a ser utilizada será novamente a teoria desenvolvida por Grillakis, assim como utilizamos na Seção 4.2. Iniciemos escrevendo $\Phi = (\phi_\gamma, b\phi_\gamma, 0, 0)$ e definindo $v = v(t)$ por

$$v = T_p(-\gamma t)u - \Phi.$$

Agora, desde que $\mathcal{H}'(\Phi)+\gamma\mathcal{F}'(\Phi)=0$, de maneira análoga ao que fizemos na seção 4.2, conseguimos a linearização de (2.1) para v,

$$\frac{dv}{dt} = J\mathcal{T}_\gamma v.$$

Nosso resultado de instabilidade é o seguinte,

Teorema 4.4.1. *Seja $\gamma\in\left(\frac{2\pi^2}{L^2}-1,\infty\right)$ tal que $\gamma+1=\alpha+3\sigma\gamma$. Então para $\phi=\phi_\gamma$ dada no Teorema 2.3.2, a órbita*

$$\widehat{\mathcal{O}} = \{T_p(\gamma s)(\phi_\gamma, b\phi_\gamma, 0, 0);\ s\in\mathbb{R}\}$$

é X_2-instável pelo fluxo periódico do sistema (2.1).

Demonstração. Como na Seção 4.2, iniciemos escrevendo

$$\widehat{Y} = [Ker(\mathfrak{T}_\gamma)]^\perp = [Ker(\mathfrak{T}_R) \cup Ker(\mathfrak{T}_I)]^\perp$$

e definindo

$$\widehat{\mathfrak{T}}_R = \text{restrição de } \mathfrak{T}_R \text{ a } \widehat{Y} \cap H^2_{per}([0, 2L]),$$

$$\widehat{\mathfrak{T}}_I^{-1} = \text{restrição de } \mathfrak{T}_I^{-1} \text{ a } \widehat{Y}.$$

Note que estes operadores estão bem definidos, posto que o operador $\mathfrak{T}_I$ é invertível em $[Ker(\mathfrak{T}_I)]^\perp$. Conforme já observamos na seção 4.2, uma condição suficiente para nosso resultado de instabilidade é que

$$\max\{n(\widehat{\mathfrak{T}}_R), n(\widehat{\mathfrak{T}}_I^{-1})\} - d(C(\widehat{\mathfrak{T}}_R) \cap C(\widehat{\mathfrak{T}}_I^{-1})) > 0.$$

Desde que $\mathfrak{T}_R$ é um operador auto-adjunto, seu auto-espaço negativo é ortogonal ao seu núcleo e portanto $n(\widehat{\mathfrak{T}}_R)$ depende somente da quantidade de autovetores associados à autovalores negativos de $\mathfrak{T}_R$ que são ortogonais a $Ker(\mathfrak{T}_I)$. Assim, pelo Lema 3.3.6

$$n(\widehat{\mathfrak{T}}_R) = n(\mathfrak{T}_R \mid_{[Ker(\mathfrak{T}_I)]^\perp}) \geq n(\mathfrak{T}_R) - \dim Ker(\mathfrak{T}_I).$$

Logo, pelo Teorema 3.3.5, obtemos

$$n(\widehat{\mathfrak{T}}_R) \geq n(\mathfrak{T}_I) + 3 - 2 = n(\mathfrak{T}_I) + 1.$$

Consequentemente,

$$\max\{n(\widehat{\mathfrak{T}}_R), n(\widehat{\mathfrak{T}}_I^{-1})\} = n(\widehat{\mathfrak{T}}_R) \geq n(\mathfrak{T}_I) + 1. \tag{4.15}$$

Da mesma forma, desde que $\mathfrak{T}_I$ é auto-adjunto, seu auto-espaço negativo é ortogonal ao seu núcleo e, portanto, $n(\widehat{\mathfrak{T}}_I^{-1})$ depende somente do número de autovetores associados à autovalores negativos de $\mathfrak{T}_I$ que são ortogonais ao núcleo de $\mathfrak{T}_R$, assim

$$n(\widehat{\mathfrak{T}}_I^{-1}) \leq n(\mathfrak{T}_I).$$

Agora,

$$\begin{aligned} d(C(\widehat{\mathfrak{T}}_R) \cap C(\widehat{\mathfrak{T}}_I^{-1})) &\leq \min\{d(C(\widehat{\mathfrak{T}}_R)), d(C(\widehat{\mathfrak{T}}_I^{-1}))\} \\ &= \min\{n(\widehat{\mathfrak{T}}_R), n(\widehat{\mathfrak{T}}_I^{-1})\} = n(\widehat{\mathfrak{T}}_I^{-1}) \leq n(\mathfrak{T}_I). \end{aligned} \tag{4.16}$$

Consequentemente, de (4.15) e (4.16), obtemos

$$\max\{n(\widehat{\mathfrak{T}}_R), n(\widehat{\mathfrak{T}}_I^{-1})\} - d(C(\widehat{\mathfrak{T}}_R) \cap C(\widehat{\mathfrak{T}}_I^{-1})) \geq n(\mathfrak{T}_I) + 1 - n(\mathfrak{T}_I) = 1.$$

Isso completa a demonstração do teorema. □

Observação 4.4.2. *Neste caso, não temos uma estimativa precisa sobre o número de autovalores negativos do operador* $\mathfrak{T}_\gamma$ *em* $H^2_{per}([0, L])$ *e portanto não conseguimos aplicar a Teoria de Grillakis et al. para provar algum resultado de estabilidade/instabilidade em* X_1.

Também, na tentativa de aplicarmos a Teoria de Grillakis para mostrar um resultado de instabilidade em X_1*, o análogo do Teorema* 3.3.5 *seria* $n(\mathfrak{T}_R) \geq n(\mathfrak{T}_I) + 1$. *Assim, como na demonstração do Teorema* 4.4.1 *conseguiríamos somente a estimativa*

$$\max\{n(\widehat{\mathfrak{T}}_R), n(\widehat{\mathfrak{T}}_I^{-1})\} - d(C(\widehat{\mathfrak{T}}_R) \cap C(\widehat{\mathfrak{T}}_I^{-1}) \geq -1,$$

a qual não nos possibilita a concluir um resultado de instabilidade em X_1.

CAPÍTULO 5

Estabilidade Espectral de Soluções Periódicas

Continuaremos aqui nosso estudo em relação ao sistema

$$\begin{cases} iu_t + u_{xx} - u + \Big(\dfrac{1}{9}|u|^2 + 2|w|^2\Big)u + \dfrac{1}{3}\overline{u}^2 w = 0 \\ i\sigma w_t + w_{xx} - \alpha w + \Big(9|w|^2 + 2|u|^2\Big)w + \dfrac{1}{9}u^3 = 0, \end{cases} \tag{5.1}$$

Neste capítulo estaremos interessados no estudo de estabilidade espectral de soluções que são do tipo $(u, w) = (0, w)$, ou seja, $u \equiv 0$ e $w : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$. Embora estabilidade espectral seja mais fraca do que estabilidade não-linear, ela nos dá a localização do espectro da linearização do sistema (5.1) em torno de uma onda periódica e portanto o estudo de estabilidade espectral pode ser útil na análise da estabilidade não-linear.

Notemos que com a hipótese $(u, w) = (0, w)$, o sistema (5.1) se reduz à seguinte equação de Schrödinger (focusing)

$$i\sigma w_t + w_{xx} - \alpha w + 9|w|^2 w = 0. \tag{5.2}$$

Tendo tal equação em vista, nosso estudo será baseado no estudo da equação de Schrödinger como em T. Gallay e M. Haragus [24]. Para simplificar nossa equação, faremos a seguinte hipótese:

HIPÓTESE: Assumimos que $\sigma = 1$ e $\alpha = 0$.

Observação 5.0.3. *A hipótese $\alpha = 0$ não é restritiva, a faremos aqui somente por conveniência, já que assim obtemos a equação de Schrödinger exatamente como estudada em[24].*

Como consequência da nossa hipótese, a equação (5.2) se reduz a

$$iw_t + w_{xx} + 9|w|^2 w = 0. \tag{5.3}$$

Nosso primeiro objetivo aqui será estabelecer a existência de soluções periódicas para a Eq. (5.3), tendo a forma mais geral do que àquelas do Capítulo 2. De fato, aqui vamos considerar soluções de (5.3) do tipo

$$w(x,t) = e^{i(px-\delta t)}V(x), \tag{5.4}$$

onde p e δ são parâmetros reais e $V : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ é uma função suave e periódica de seu argumento. Embora nossa análise de estabilidade espectral engloba a classe de soluções (5.4), nosso principal objetivo é estudar as soluções $(0, w)$ no caso em que w é uma onda cnoidal que encontramos no Capítulo 2.

As soluções periódicas de (5.3), do tipo (5.4), podem ser parametrizadas através dos invariantes da equação (5.3) (ver Seção 5.1). Entretanto, a dependência de tal parametrização não é suficientemente suave para o estudo de pequenas soluções, i.e., soluções de pequenas amplitudes. Para contornar tal dificuldade, como em [24] introduzemos uma parametrização através dos coeficientes de Fourier, a qual é suficientemente suave para nossos propósitos. Com efeito, tendo tal parametrização em mãos mostramos que se w é uma solução de (5.3) do tipo (5.4) então a solução $(0, w)$ de (5.1) é espectralmente instável (por perturbações localizadas ou limitadas), contanto que w tenha amplitude suficientemente pequena, isto significa que o espectro da linearização do sistema (5.1) em torno da onda $(0, w)$ não está localizado sobre o eixo imaginário do plano complexo, quando considerado no espaço das funções localizadas ou limitadas.

Para os argumentos que utilizaremos aqui, é essencial que a amplitude da onda w seja suficientemente pequena, já que utilizaremos argumentos da teoria de perturbação de operadores lineares. Na verdade, colocaremos nosso problema dentro do contexto estabelecido em Gallay e Hărăguş [24] no estudo da equação de Schrödinger.

5.1 Existência de Soluções e Parametrizações

Como já mencionado anteriormente, procuramos por soluções de (5.3) que são da forma

$$w(x,t) = e^{-i\delta t}W(x), \tag{5.5}$$

com $W(x) = e^{ipx}V(x)$. Assim, W deve ser solução da seguinte equação diferencial ordinária

$$W_{xx} + \delta W + 9|W|^2 W = 0. \tag{5.6}$$

Agora podemos ver a equação (5.6) como um sistema Hamiltoniano, o qual conserva o ″momento angular″ J e a energia E dados por

$$J = Im(\overline{W}W_x), \qquad E = \frac{1}{2}|W_x|^2 + \frac{\delta}{2}|W|^2 + \frac{9}{4}|W|^4. \tag{5.7}$$

De fato, seja $W = P + iQ$ uma solução de (5.6). Separando as partes reais e imaginárias, obtemos

$$\begin{cases} P_{xx} + \delta P + 9(P^2+Q^2)P = 0 \\ Q_{xx} + \delta Q + 9(P^2+Q^2)Q = 0. \end{cases} \tag{5.8}$$

Além disso,

$$J = PQ_x - P_xQ, \qquad E = \frac{1}{2}(P_x^2 + Q_x^2) + \frac{\delta}{2}(P^2+Q^2) + \frac{9}{4}(P^2+Q^2)^2.$$

Assim,

$$\frac{d}{dx}J = PQ_{xx} - P_{xx}Q.$$

Multiplicando a primeira equação em (5.8) por Q, a segunda por P e subtraindo, vemos que $PQ_{xx} - P_{xx}Q = 0$, i.e., $\frac{d}{dx}J = 0$. Também,

$$\frac{d}{dx}E = P_xP_{xx} + Q_xQ_{xx} + \delta PP_x + \delta QQ_x + 9(P^2+Q^2)(PP_x + QQ_x).$$

Multiplicando a primeira equação em (5.8) por P_x e a segunda por Q_x, obtemos

$$\begin{aligned} P_xP_{xx} &= -\delta PP_x + 9(P^2+Q^2)PP_x \\ Q_xQ_{xx} &= -\delta QQ_x + 9(P^2+Q^2)QQ_x. \end{aligned}$$

Segue-se daí que $\frac{d}{dx}E = 0$.

Desde que J é quantidade conservada, notemos que se $J \neq 0$ então $W(x) \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Dessa forma, podemos introduzir as novas variáveis $W(x) = r(x)e^{i\varphi(x)}$, com $\varphi(x) \in [0, 2\pi)$, $r(x) > 0$ se $J \neq 0$ e $r(x) \in \mathbb{R}$ se $J = 0$. Daí, os invariantes em (5.7) se transformam em

$$J = \varphi_x r^2, \qquad E = \frac{1}{2}r_x^2 + V_J(r), \tag{5.9}$$

onde o potencial $V_J(r)$ é dado por

$$V_J(r) = \begin{cases} \dfrac{J^2}{2r^2} + \dfrac{\delta}{2}r^2 + \dfrac{9}{4}r^4, & \text{se} \quad J \neq 0 \\ \\ \dfrac{\delta}{2}r^2 + \dfrac{9}{4}r^4, & \text{se} \quad J = 0 \end{cases}$$

Vamos agora caracterizar *todas* as soluções periódicas de (5.6) em termos dos invariantes J e E. Para tanto, uma análise detalhada do comportamento do potencial V_J deve ser feita. É claro que o comportamento do potencial V_J depende do sinal do parâmetro δ. Portanto, vamos considerar os sinais de δ separadamente.

CASO 1: $\delta > 0$.

Neste caso, o potencial V_J é estritamente convexo para qualquer $J \in \mathbb{R}$ (veja Figura 5.1 para o caso em que $J \neq 0$ e Figura 5.2 para o caso em que $J = 0$).

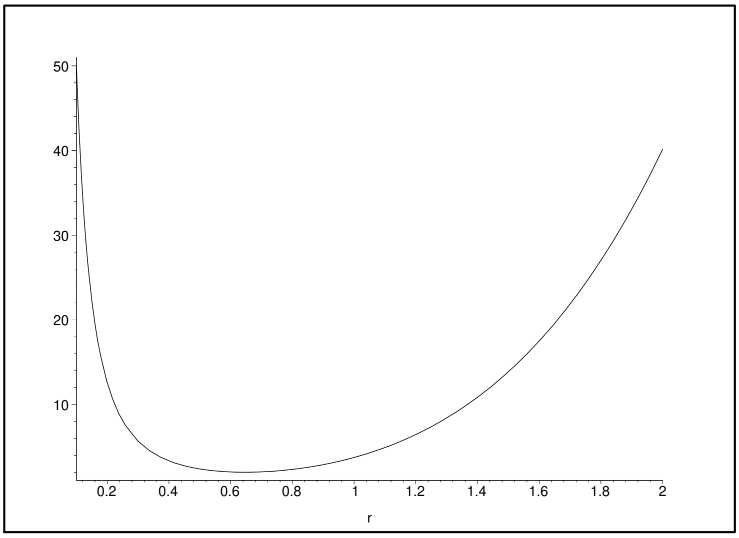

Figura 5.1: Gráfico do potencial $V_J(r) = \frac{J^2}{2r^2} + \frac{\delta}{2}r^2 + \frac{9}{4}r^4$ com $J = 1$ e $\delta = 2$.

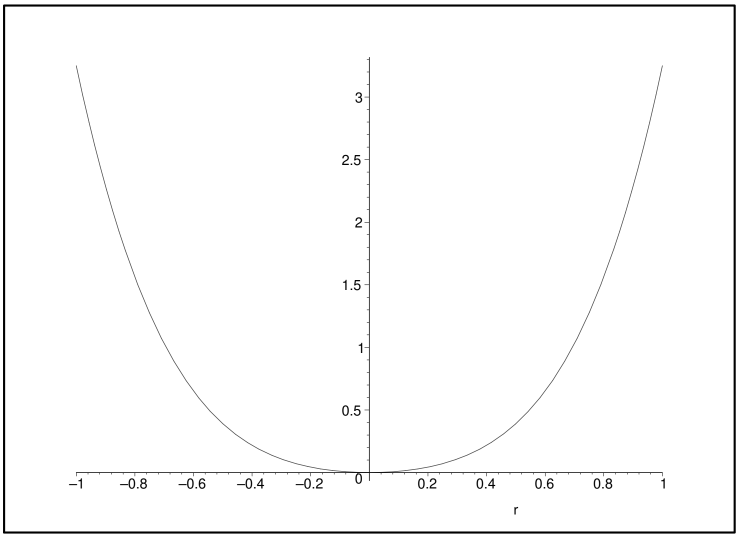

Figura 5.2: Gráfico do potencial $V_0(r) = \frac{\delta}{2}r^2 + \frac{9}{4}r^4$ com $J = 0$ e $\delta = 2$.

Note que no caso $J \neq 0$, $V_J(r) \to +\infty$ quando $r \to +\infty$ ou quando $r \to 0^+$ e no caso em que $J = 0$, $V_0(r) \to +\infty$ quando $r \to \pm\infty$, o que nos indica que V_J tem um mínimo local (ou global). Para localizar tal mínimo, é conveniente a seguinte parametrização: seja $\Omega = \{q \in \mathbb{R}; |q| \geq 1,\ q \neq -1\}$, assim a função $f : \Omega \to \mathbb{R}$ definida por $f(q) = q(q^2 - 1)$ é um homeomorfismo. Logo, para cada $J \in \mathbb{R}$ existe um único $q \in \Omega$ tal que $J = q(q^2 - 1)$. Com essa parametrização, vemos que V_J possui um único mínimo (em $(0, +\infty)$ se $J \neq 0$ e em $\mathbb{R}$ se $J = 0$), o qual é atingido em $r_q = \sqrt{q^2 - 1}$ e nesse caso V_J assume o valor

$$E^-(J) = V_J(r_q) = \frac{1}{2}(q^2 - 1)(q^2 + \delta + \frac{9}{2}(q^2 - 1)).$$

Seja $W : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ uma solução periódica não constante de (5.6). De (5.9) devemos ter

$$-\frac{1}{2}r_x^2 = V_J(r) - E. \tag{5.10}$$

Como o lado esquerdo de (5.10) é não positivo, vemos que o lado direito é não positivo se, e somente se, $E \geq \min V_J(r)$. Agora note que desde que W é limitada temos de (5.10) que se tivéssemos $E = \min V_J(r)$ então W deveria ser constante, o que estamos excluindo por hipótese. Logo devemos ter $E > \min V_J(r)$, i.e., $E > E^-(J)$. Isso significa que se W é uma solução periódica não constante de (5.6) então $(J, E) \in D$, onde D é a **região ilimitada** dada por (veja Figura 5.3)

$$D = \{(J, E) \in \mathbb{R}^2;\ E > E^-(J)\}. \tag{5.11}$$

Reciprocamente, vamos mostrar que dado $(J,E) \in D$ existe uma solução periódica não constante de (5.6) que satisfaz (5.9) (ou equivalentemente (5.7)). De fato, fixe $(J,E) \in D$, $J \neq 0$. Como $E > E^-(J)$ e $V_J(r)$ é convexa, a função $r \mapsto E - V_J(r)$ possui extamente dois zeros, digamos r_1, r_2. Agora defina

$$T := \int_{r_1}^{r_2} \frac{ds}{\sqrt{2(E - V_J(s))}}.$$

Para definirmos a função $r(x)$, sem perda de generalidade suponha que $r(0) = r_2$ e defina $r(x)$, para $x \in [0,T]$, implicitamente por

$$\int_{r_1}^{r(x)} \frac{ds}{\sqrt{2(E - V_J(s))}} = T - x. \tag{5.12}$$

Observe que

$$\int_{r_1}^{r(T)} \frac{ds}{\sqrt{2(E - V_J(s))}} = 0$$

e desde que o integrando é positivo (no intervalo considerado), devemos ter $r(T) = r_1$. Pela regra de Leibniz segue de (5.12) que $r(x)$ é diferenciável e satisfaz

$$r_x^2 = 2(E - V_J(r)).$$

Assim, $r_x^2(T) = 2(E - V_J(r_1)) = 0 = r_x^2(0)$. Daí, podemos definir $r(x)$ (suavemente) no intervalo $[T, 2T]$ por $r(x) = r(2T - x)$ e consequentemente $r(x)$ pode ser estendida suavemente em toda a reta real como uma função periódica de período $L = 2T$. Finalmente, defina $\varphi(x)$ (módulo 2π) por

$$\varphi(x) = \int_0^x \frac{J}{r^2(s)} ds.$$

Dessa forma obtemos que $W(x) = r(x)e^{i\varphi(x)}$ é uma solução de (5.6) tal que

$$J = r^2 \varphi_x, \qquad \text{e} \qquad E = \frac{1}{2} r_x^2 + V_J(r).$$

Essa análise mostra que (5.6) possui uma solução periódica não constante se, e somente se, $(J,E) \in D$, onde D é dada por (5.11).

Notemos que substituindo $W(x)$ por $W(x)e^{i\varphi}$ para algum $\varphi \in [0, 2\pi)$ temos que (5.6) possui solução real se, e somente se, $J = 0$. De fato, se W é real é claro que $J = 0$ (veja (5.7)). Por outro lado, se $J = 0$ então pela nossa construção acima $\varphi(x)$ é constante. Além disso, neste caso, de (5.9), a solução real $r(x)$ deve satisfazer

$$r_x^2 = \frac{9}{2}\left(-r^4 - \frac{2\delta}{9} r^2 + \frac{4}{9} E\right) = \frac{9}{2} F(r), \tag{5.13}$$

onde $F(t) = -t^4 - \frac{2\delta}{9}t^2 + \frac{4}{9}E$ é **exatamente o polinômio dado em (2.5) com** $\alpha = 0$**,** $\sigma = 1$**,** $\delta = -3\gamma$ **e** B_ψ **substituído por** E (veja (2.5)). Neste caso, o único mínimo do potencial $V_0(r)$ é atingido em $r = 0$ com $V_0(0) = 0$ e portanto devemos ter $E > 0$. Desde que $\delta, E > 0$, é fácil ver que o polinômio $F(t)$ possui duas raízes reais não nulas e outras duas puramente imaginárias (veja Figura 2.2). Consequentemente, neste caso, obtemos as **ondas cnoidal** dadas no Teorema 2.2.2. Isso completa nossa análise no CASO 1.

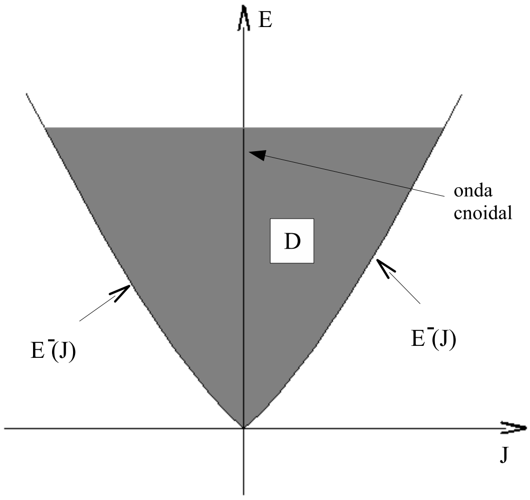

Figura 5.3: Região de existência de soluções periódicas, $\delta > 0$.

Observação 5.1.1. *A análise acima nos permite na verdade caracterizar todas as soluções limitadas de* (5.6) *com* $\delta > 0$*. Mais precisamente, a* (5.6) *possui uma solução limitada se, e somente se,* $(J, E) \in \overline{D}$*, onde* $\overline{D}$ *denota o fecho de* D*. Note ainda que se* $E = 0$ *então a única solução de* (5.6) *é a solução trivial nula.*

CASO 2: $\delta < 0$.

Aqui, é conveniente introduzir a seguinte parametrização: note que a função $g(q) = q(q^2 + 1)$, $q \in \mathbb{R}$ é um homeomorfismo de $\mathbb{R}$. Logo para cada $J \in \mathbb{R}$ existe um único $q \in \mathbb{R}$ tal que $J = q(q^2 + 1)$.

Suponha inicialmente que $J \neq 0$. Note que o potencial $V_J(r) = \frac{J^2}{2r^2} + \frac{\delta}{2}r^2 + \frac{9}{4}r^4$, $\delta < 0$, $r > 0$, novamente satisfaz $V_J(r) \to +\infty$ quando $r \to +\infty$ ou $r \to 0^+$. Utilizando a parametrização acima, vemos que V_J assume um único mínimo em $(0,+\infty)$ dado por $r_q = \sqrt{q^2+1}$ (veja Figura 5.4) e o valor de V_J em r_q vem dado por

$$E^+(J) = V_J(r_q) = \frac{1}{2}(q^2+1)(q^2+\omega+\frac{9}{2}(q^2+1)).$$

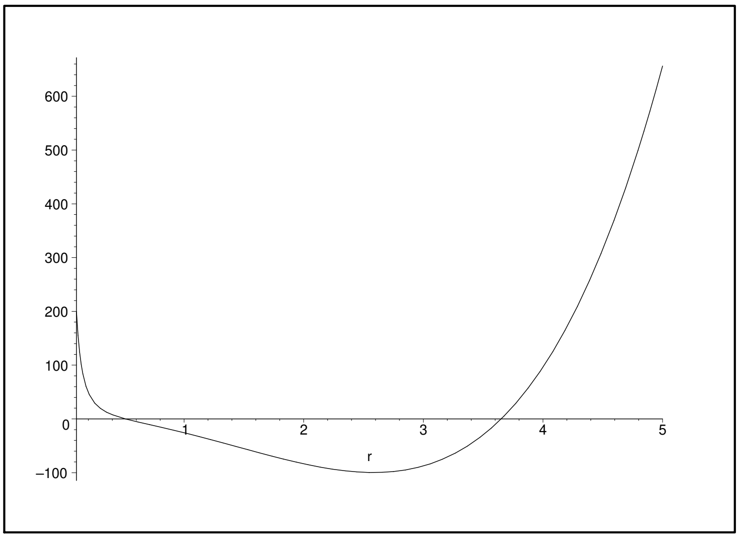

Figura 5.4: Gráfico do potencial $V_J(r) = \frac{J^2}{2r^2} + \frac{\delta}{2}r^2 + \frac{9}{4}r^4$ com $J = 2$ e $\delta = -60$.

Assim, como no CASO 1 vemos de (5.10) que se a Eq. (5.6) possui solução periódica não constante então $E > \min V_J(r) = E^+(J)$.

Suponha agora que $J = 0$. Neste caso, novamente o potencial $V_J = V_0$ satisfaz $V_0(r) \to +\infty$ quando $r \to \pm\infty$. Além disso, é fácil ver que V_0 possui dois mínimos locais em $r = \pm\sqrt{-\delta}/3$, um máximo local em $r = 0$ (veja Figura 5.5), $V_0(\pm\sqrt{-\delta}/3) = -\delta^2/36$ e $V_0(0) = 0$. Portanto, de (5.10) vemos que a Eq. (5.6) possui solução periódica (real) se $E > V_0(r)$, $\forall r \in \mathbb{R}$ e daí segue que $E > \min V_0(r)$ com $E \neq 0$ (pois se $E = 0$ teríamos $E = 0 = V_0(0)$ e não teríamos $E > V_0(r)$, $\forall r \in \mathbb{R}$, veja Observação 5.1.2), isto é, a Eq. (5.6) admite solução periódica real se $-\delta^2/36 < E < 0$ ou $E > 0$. Agora de (5.9), temos novamente

$$r_x^2 = \frac{9}{2}\left(-r^4 - \frac{2\delta}{9}r^2 + \frac{4}{9}E\right) = \frac{9}{2}F(r), \tag{5.14}$$

onde $F(t)$ é novamente o polinômio dado em (2.5) com $\alpha = 0$, $\sigma = 1$, $\delta = -3\gamma$ e B_ψ substituído por E (veja (2.5)). Analisemos as raízes do polinômio F. Desde que F é um

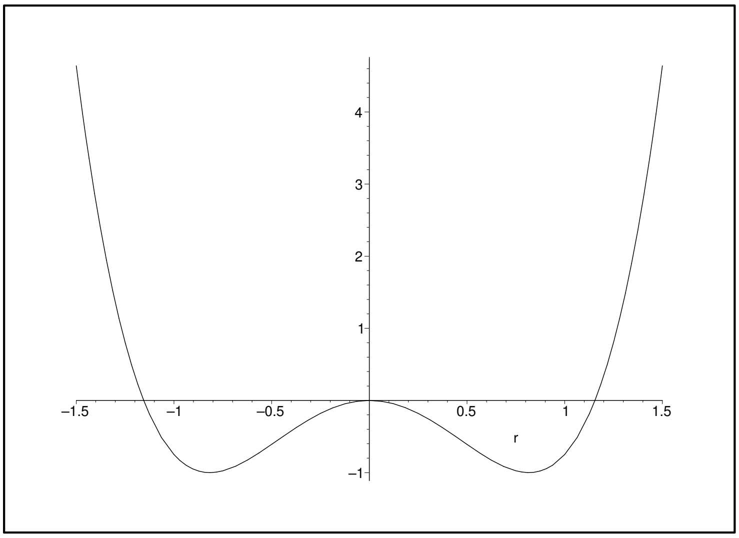

Figura 5.5: Gráfico do potencial $V_0(r) = \frac{\delta}{2}r^2 + \frac{9}{4}r^4$ com $\delta = -6$.

polinômio bi-quadrático, façamos $s = r^2$. Assim, devemos analisar quando

$$-s^2 - \frac{2\delta}{9}s + \frac{4}{9}E = 0. \tag{5.15}$$

Se $-\delta^2/36 < E < 0$ é fácil ver que as duas soluções de (5.15) são reais e positivas e, portanto, o polinômio F possui suas quatro raízes como sendo reais. Por outro lado, se $E > 0$ então é simples mostrar que (5.15) possui duas soluções reais não nulas, sendo uma positiva e outra negativa. Daí, o polinômio F possui duas soluções reais (simétricas) e duas outras puramente imaginárias. Como consequência da análise acima, quando $-\delta^2/36 < E < 0$ obtemos as **ondas dnoidal** dadas pelo Teorema 2.1.2 (veja seção 2.1) e quando $E > 0$ obtemos as **ondas cnoidal** dadas pelo Teorema 2.2.1 (veja seção 2.2).

Obtemos assim que se a Eq. (5.6) possui uma solução periódica não constante $W : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, então $(J, E) \in D$, onde D é a **região ilimitada** dada por (veja Figura 5.6).

$$D = \{(J, E) \in \mathbb{R}^2; E > E^+(J)\} \backslash \{(0, 0)\}.$$

Reciprocamente, uma construção análoga a que fizemos no CASO 1 mostra que para cada $(J, E) \in D$, existe uma solução periódica não constante de (5.6) que satisfaz (5.9). Isso completa nossa análise no CASO 2.

Observação 5.1.2. *Quando $J = E = 0$, a Eq.* (5.14) *se reduz a*

$$r_x^2 = \frac{9}{2}\left(-r^4 - \frac{2\delta}{9}r^2\right).$$

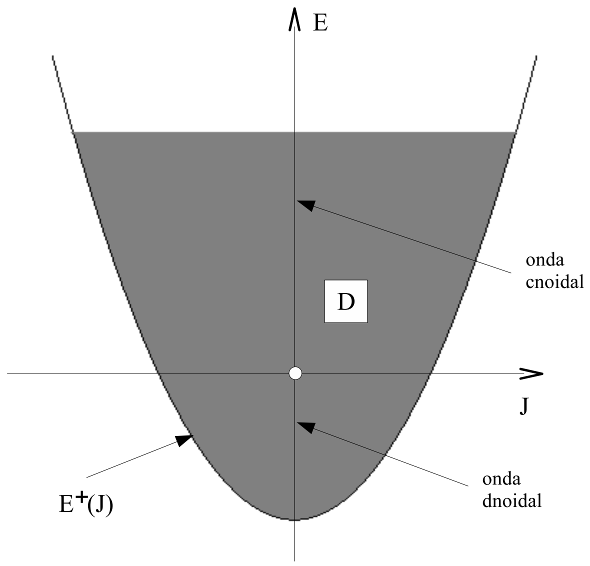

Figura 5.6: Região de existência de soluções periódicas, $\delta < 0$.

Portanto, neste caso obtemos

$$r(x) = \frac{\sqrt{-2\delta}}{3} sech(\sqrt{-\delta}x),$$

que é a onda solitária para o sistema (5.1) *com* $u \equiv 0$ (*veja Observação* 2.1.1).

Conforme já mencionamos na introdução deste capítulo, estamos interessados em soluções pequenas, i.e., soluções que são de pequenas amplitudes. Entretanto, as soluções do CASO 2 (ou seja o caso quando $\delta < 0$) não são arbitrariamente pequenas. De fato, no caso de soluções reais, temos (se $E > 0$) $r(x) = \psi(x)$, onde

$$\psi(x) = b\, cn\left(3\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}x; k\right),$$

é a onda cnoidal dada em (2.17). Além disso, fixado $\delta < 0$ vemos de (2.16) que

$$b^2 = -\frac{2}{9}\delta + a^2 > -\frac{2}{9}\delta.$$

Portanto,

$$\|\psi\|_\infty = b > \frac{\sqrt{-2\delta}}{3},$$

o que significa que ψ não pode ser abritariamente pequena (fixado $\delta < 0$). Sendo assim, daqui em diante direcionaremos nossa atenção somente para o região D do CASO 1. Lembramos que neste caso, obtemos as soluções ondas cnoidal

$$\psi_{\gamma,2}(x) = \sqrt{a^2 + 2\omega}\; cn(3\sqrt{a^2 + \omega}\; x; k)$$

dada no Teorema 2.2.2, onde $\omega = \frac{1}{9}(\gamma + 1)$, $\gamma \in (-4\pi^2/L^2 - 1, -1)$ (note que neste caso se a^2 está suficientemente perto de -2ω então a onda cnoidal $\psi_{\gamma,2}$ tem amplitude suficientemente pequena).

Fixe $(J, E) \in D$, onde D é a região descrita no CASO 1 anteriormente e seja $W : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ a solução periódica de (5.6) satisfazendo (5.7) tal que $|W|$ tenha período (minimal) $L = L(J, E)$. Considere $e^{i\Phi}$, $\Phi = \Phi(J, E)$ o chamado multiplicador de Floquet de W, i.e., $W(x + L) = e^{i\Phi}W(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Considere também a fase renormalizada

$$\Psi(J, E) = \begin{cases} \Phi(J, E) - \pi sign(J) & \text{se} \quad J \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad J = 0. \end{cases}$$

Agora definimos os parâmetros $k, \ell \in \mathbb{R}$ por

$$\ell = \frac{\Psi(J, E)}{L(J, E)} \qquad \text{e} \qquad k = \frac{\pi}{L(J, E)}. \tag{5.16}$$

e considere $P : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definida pela relação

$$P(kx) = e^{-i\ell x}W(x). \tag{5.17}$$

Desde que $|W(x)| = |P(kx)|$ tem período L, é fácil ver que $|P(y)|$ tem período π. Além disso, como $W(x + L) = e^{i\Phi}W(x) = -e^{i\Psi}W(x)$, usando (5.17) e (5.16), temos

$$P(y + \pi) = P(y + kL) = e^{-i\ell(y/k+L)}W(y/k + L) = -e^{-i\ell(y/k+L)}e^{i\Psi}W(y/k) = -P(y)$$

o que significa que $P(y)$ é semi-periódica com semi-período π, ou seja, $P(y)$ tem período 2π.

Com isso, obtemos nossa solução

$$w(x, t) = e^{i(\ell x - \delta t)}P(kx),$$

onde $P(y)$ é periódica com período 2π, a qual está de acordo com nossa solução geral que propomos para nosso estudo de estabilidade espectral (veja (5.4)).

Tendo em vista a invariancia por dilatações $u(x,t) \mapsto \eta u(\eta x, \eta^2 t)$ de (5.3), somente o sinal de δ em (5.5) é importante. Portanto, de agora em diante vamos nos restringir, por simplicidade, ao caso $\delta = 1$.

Para finalizar nossa parametrização de soluções pequenas, introduzimos como em [24] os parâmetros

$$a = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(y)e^{iy}dy \qquad \text{e} \qquad b = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(y)e^{-iy}dy,$$

e escrevemos nossa solução $W(x) = W_{a,b}(x)$ dada em (5.17) como

$$W_{a,b}(x) = e^{i\ell_{a,b}x}P_{a,b}(k_{a,b}x)$$

onde $P_{a,b}$ tem expansão em série de Fourier dada por

$$P_{a,b}(y) = ae^{-iy} + be^{iy} + \mathcal{O}(|ab|(|a|+|b|)).$$

Note que desde que $P_{a,b}$ é semi-periódica de semi-período π, os termos de ordem par na série de Fourier de $P_{a,b}$ são nulos.

Finalmente, para o estudo de estabilidade espectral, é conveniente escrever

$$W_{a,b}(x) = e^{i\ell_{a,b}x}P_{a,b}(k_{a,b}x) = e^{ip_{a,b}x}Q_{a,b}(2k_{a,b}x),$$

onde

$$p_{a,b} = k_{a,b} + \ell_{a,b}, \quad \text{e} \quad Q_{a,b}(z) = e^{-iz/2}P_{a,b}(z/2).$$

Note que assim, obtemos

$$Q_{a,b}(z) = b + ae^{-iz} + \mathcal{O}(|ab|(|a|+|b|)).$$

5.2 Estabilidade Espectral

Passaremos agora ao estudo de estabilidade espectral das soluções $(0, w_{a,b})$, onde

$$w_{a,b}(x,t) = e^{i(p_{a,b}x - t)}Q_{a,b}(2k_{a,b}x). \tag{5.18}$$

Antes de tudo notemos que se considerarmos soluções de (5.3) do tipo

$$w(x,t) = e^{i(p_{a,b}x - t)}U(2k_{a,b}x, t),$$

onde $U(z,t)$ é periódica de período 2π na variável z que é solução de

$$iU_t + 4ip_{a,b}k_{a,b}U_z + 4k_{a,b}^2U_{zz} + (1-p_{a,b}^2)U + 9|U|^2U = 0, \tag{5.19}$$

então por construção $Q_{a,b}$ é uma solução estacionária de (5.19).

Introduziremos agora as principais ferramentas bem como os principais fatos estabelecidos em [24], necessários para o estudo de estabilidade espectral. O próximo lema foi provado em [24]. A prova é essencialmente uma aplicação do Teorema da Função Implícita.

Lema 5.2.1. *A solução estacionária $Q_{a,b}$ é um membro de uma família a dois parâmetros*

$$U(z,t) = e^{-i\omega t}Q_{a,b}^{\omega,c}(z+ct), \tag{5.20}$$

onde (ω,c) está numa vizinhança da origem de $\mathbb{R}^2$, $Q_{a,b}^{\omega,c}$ é uma função suave de (ω,c) e periódica com período 2π. Além disso, $Q_{a,b}^{0,0} = Q_{a,b}$.

Agora para $u = P + iQ$ e $w = R + iS$, onde P, Q, R e S são funções com valores em $\mathbb{R}$, consideremos os funcionais

$$N(P,R,Q,S) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\{(P^2+Q^2) + 3(R^2+S^2)\}dx,$$

$$M(P,R,Q,S) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\{(QP_x - PQ_x) + (SR_x - RS_x)\}dx,$$

e

$$\begin{aligned} H(P,R,Q,S) = \frac{1}{2}\int &\{4k_{a,b}^2(P_x^2+Q_x^2) + 4k_{a,b}^2((R_x^2+S_x^2) + (P^2+Q^2) \\ &- \frac{1}{18}(P^4+2P^2Q^2+Q^4) - \frac{9}{2}(R^4+2R^2S^2+S^4) \\ &- 2(P^2+Q^2)(R^2+S^2) - \frac{2}{9}(P^3R+3P^2QS-3PQ^2R-Q^3S)\}dx \end{aligned}$$

Definimos

$$\mathcal{E}_{a,b}(P,R,Q,S) = H(P,R,Q,S) - \frac{1}{3}(1-p_{a,b}^2)N(P,R,Q,S) - 4k_{a,b}p_{a,b}M(P,R,Q,S).$$

Assim, é fácil ver que

$$\frac{\partial\mathcal{E}_{a,b}}{\partial P}(0,R,0,S) = \frac{\partial\mathcal{E}_{a,b}}{\partial Q}(0,R,0,S) = 0,$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}_{a,b}}{\partial R}(0,R,0,S) = -4k_{a,b}^2 R_{xx} - 9R(R^2+S^2) - (1-p_{a,b}^2)R + 4k_{a,b}p_{a,b}S_x$$

e

$$\frac{\partial \mathcal{E}_{a,b}}{\partial S}(0,R,0,S) = -4k_{a,b}^2 S_{xx} - 9S(R^2+S^2) - (1-p_{a,b}^2)S - 4k_{a,b}p_{a,b}R_x.$$

Por outro lado, desde que $Q_{a,b}$ é solução estacionária de (5.19), se escrevermos $Q_{a,b} = R_{a,b} + iS_{a,b}$ vemos que $R = R_{a,b}$ e $S = S_{a,b}$ satisfazem o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} 4k_{a,b}^2 R_{xx} - 4k_{a,b}p_{a,b}S_x + (1-p_{a,b}^2)R + 9R(R^2+S^2) = 0 \\ \\ 4k_{a,b}^2 S_{xx} + 4k_{a,b}p_{a,b}R_x + (1-p_{a,b}^2)S + 9S(R^2+S^2) = 0. \end{cases}$$

Como consequência, o elemento $(0, R_{a,b}, 0, S_{a,b})$ é um ponto crítico do funcional $\mathcal{E}_{a,b}$, i.e.,

$$\mathcal{E}'_{a,b}(0, R_{a,b}, 0, S_{a,b}) = 0.$$

Finalmente, linearizando o sistema (5.1) em torno da onda periódica $(0, w_{a,b})$ (veja seção 4.2 e (4.5)), onde $w_{a,b}(x,t) = e^{i(p_{a,b}x-t)}Q_{a,b}(2k_{a,b}x)$ e escrevendo $Q_{a,b} = R_{a,b} + iS_{a,b}$, chegamos ao seguinte operador linear matricial

$$\mathcal{A}_{a,b} = \begin{pmatrix} -4k_{a,b}p_{a,b}\partial_x & 0 & \mathcal{L}_3 & 0 \\ 0 & -18R_{a,b}S_{a,b} - 4k_{a,b}p_{a,b}\partial_x & 0 & \mathcal{L}_2 \\ -\mathcal{L}_3 & 0 & -4k_{a,b}p_{a,b}\partial_x & 0 \\ 0 & -\mathcal{L}_1 & 0 & 18R_{a,b}S_{a,b} - 4k_{a,b}p_{a,b}\partial_x \end{pmatrix} \quad (5.21)$$

onde $\mathcal{A}_{a,b} = J\mathcal{E}''_{a,b}$ e

$$\mathcal{L}_1 = -4k_{a,b}^2\partial_x^2 + (p_{a,b}^2 - 1) - 27R_{a,b}^2 - 9S_{a,b}^2,$$

$$\mathcal{L}_2 = -4k_{a,b}^2\partial_x^2 + (p_{a,b}^2 - 1) - 27S_{a,b}^2 - 9R_{a,b}^2,$$

$$\mathcal{L}_3 = -4k_{a,b}^2\partial_x^2 + 1 + \frac{1}{3}(p_{a,b}^2 - 1) - 2S_{a,b}^2 - 2R_{a,b}^2,$$

e J é a matriz simplética canônica dada por

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sendo assim, **estudar estabilidade espectral, significa estudar o espectro do operador linearizado $\mathcal{A}_{a,b}$.**

5.2.1 Decomposição em Ondas Bloch

Estaremos agora, interessados no estudo do espectro do operador linear matricial $\mathcal{A}_{a,b}$ no espaço de Hilbert $L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^4)$ (perturbações localizadas) ou no espaço de Banach $C_b(\mathbb{R},\mathbb{C}^4)$ (perturbações limitadas), o espaço das funções limitadas e uniformemente contínuas definidas sobre toda a reta real e com valores em $\mathbb{C}^4$. Em $L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^4)$ consideramos $\mathcal{A}_{a,b}$ com domínio natural $H^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^4)$, enquanto que em $C_b(\mathbb{R},\mathbb{C}^4)$ o consideramos com domínio natural $C_b^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^4)$.

A análise espectral do operador $\mathcal{A}_{a,b}$ será baseada na teoria denominada ″**decomposição em ondas Bloch**″ para operadores diferenciais com coeficientes periódicos. Esta teoria nos permite mostrar que o espectro do operador $\mathcal{A}_{a,b}$, nos espaços $L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^4)$ ou $C_b(\mathbb{R},\mathbb{C}^4)$, é obtida através dos autovalores de uma família de operadores $\mathcal{A}_{a,b,\beta}$, $\beta \in (-1/2, 1/2]$. Mais precisamente, se $\sigma_{L^2}(\mathcal{A}_{a,b})$ denota o espectro de $\mathcal{A}_{a,b}$ em $L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^4)$ e $\sigma_{C_b}(\mathcal{A}_{a,b})$ denota o espectro de $\mathcal{A}_{a,b}$ em $C_b(\mathbb{R},\mathbb{C}^4)$, então

$$\sigma_{L^2}(\mathcal{A}_{a,b}) = \sigma_{C_b}(\mathcal{A}_{a,b}) = \bigcup_{\beta\in(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]} \sigma_{L^2_{per}}(\mathcal{A}_{a,b,\beta}), \tag{5.22}$$

(veja [24], [32], [33], [48], [53], [59]), onde o operador $\mathcal{A}_{a,b,\beta}$, denominado operador Bloch, é formado pela substituição de ∂_x por $(\partial_x + i\beta)$ em $\mathcal{A}_{a,b}$ e $\sigma_{L^2_{per}}(\mathcal{A}_{a,b,\beta})$ denota o espectro do operador $\mathcal{A}_{a,b,\beta}$ em $L^2_{per}([0,2\pi],\mathbb{C}^4)$ com domínio $H^2_{per}([0,2\pi],\mathbb{C}^4)$. No Apêndice A, estabelecemos (5.22) para o caso de operadores do tipo Schrödinger. Na literatura em geral, as autofunções de $\mathcal{A}_{a,b,\beta}$ são chamadas de *ondas Bloch.*

Observação 5.2.2. *A decomposição* (5.22) *pode ser feita para um operador fortemente elíptico de qualquer ordem* $2m, m \in \mathbb{N}$ (*ver* [*48*]). *O estudo de estabilidade espectral de ondas periódicas para diversas equações tais como a equação de Schrödinger* (*veja* [*24*]), *a equação de Kawahara* (*veja* [*32*]) *e a equação de Korteweg-de Vries generalizada* (*veja* [*33*]), *tem sido feito utilizando-se tal decomposição.*

Observação 5.2.3. *Considere o problema de autovalores periódico associado a* $\mathcal{A}_{a,b,\beta}$, *ou seja,*

$$\begin{cases} \mathcal{A}_{a,b,\beta}u = \lambda u \\ u(0) = u(2\pi), \;\; u'(0) = u'(2\pi). \end{cases} \tag{5.23}$$

Fazendo a mudança de variável $v(x) = e^{i\beta x}u(x)$, *o problema* (5.23) *é equivalente ao seguinte* *problema de valor de fronteira associado ao operador* $\mathcal{A}_{a,b}$

$$\begin{cases} \mathcal{A}_{a,b}v = \lambda v \\ v(0) = e^{-2\pi i\beta}v(2\pi), \ \ v'(0) = e^{-2\pi i\beta}v'(2\pi). \end{cases} \tag{5.24}$$

Assim, encontrar um autovalor de $\mathcal{A}_{a,b,\beta}$ *equivale a encontrar um autovalor do problema de fronteira* (5.24) (*veja Apêndice A*).

A grande vantagem de se estabelecer a decomposição (5.22) é que a imersão compacta de $H^2_{per}([0,2\pi],\mathbb{C}^4)$ em $L^2_{per}([0,2\pi],\mathbb{C}^4)$ implica que a família de operadores $\mathcal{A}_{a,b,\beta}$, $\beta \in (-1/2, 1/2]$ tem resolvente compacto e portanto seu espectro é constituído por um conjunto discreto de autovalores, todos com multiplicidade finita (veja seção 6.8 do capítulo 3 de [38]). Nosso objetivo então é localizar tais autovalores.

A partir de agora, denotaremos simplesmente por $\sigma(\mathcal{A}_{a,b})$ os espectros $\sigma_{L^2}(\mathcal{A}_{a,b})$ e $\sigma_{C_b}(\mathcal{A}_{a,b})$, uma vez que estes coincidem. Além disso, denotaremos simplesmente por $\sigma(\mathcal{A}_{a,b,\beta})$ o espectro $\sigma_{L^2_{per}}(\mathcal{A}_{a,b,\beta})$, ja que estará implícito onde estamos considerando o operador $\mathcal{A}_{a,b,\beta}$. O espaço $L^2_{per}([0,2\pi],\mathbb{C}^4)$ será considerado como um espaço de Hilbert com seu produto interno usual, a saber,

$$\langle (P_1,P_2,P_3,P_4)^t, (Q_1,Q_2,Q_3,Q_4)^t \rangle = \int_0^{2\pi} \sum_{i=1}^{4} P_i(z)\overline{Q_i(z)}dz.$$

Definição 5.2.4. *Uma solução onda viajante periódica para o sistema* (5.1) *da forma* $(0, w)$ *será dita espectralmente instável se existe algum* $\lambda \in \sigma(\mathcal{A}_{a,b})$ *tal que* $\Re e(\lambda) > 0$. *Caso contrário, dizemos que uma tal solução é espectralmente estável.*

Observação 5.2.5. *Observe que em virtude da decomposição* (5.22), *uma solução do sistema* (5.1) *será espectralmente instável se existe* $\beta \in (-1/2, 1/2]$ *tal que o operador* $\mathcal{A}_{a,b,\beta}$ *possui pelo menos um autovalor* $\lambda = \lambda(\beta)$ *com* $\Re e(\lambda(\beta)) > 0$. *Em geral, os autovalores de* $\mathcal{A}_{a,b,\beta}$ *estão localizados sobre o eixo imaginário e portanto, na prática, os problemas que surgem é determinar quando o operador* $\mathcal{A}_{a,b,\beta}$ *possui um autovalor fora do eixo imaginário.*

Agora, notemos algumas simetrias no espectro dos operadores $\mathcal{A}_{a,b}$ e $\mathcal{A}_{a,b,\beta}$: desde que $\mathcal{A}_{a,b}$ é um operador com coeficientes reais, seu espectro é simétrico em relação ao eixo real, i.e., $\sigma(\mathcal{A}_{a,b}) = \overline{\sigma(\mathcal{A}_{a,b})}$. Para o operador $\mathcal{A}_{a,b,\beta}$, uma simples análise mostra que $\sigma(\mathcal{A}_{a,b,\beta}) = \overline{\sigma(\mathcal{A}_{a,b,-\beta})}$, $\beta \neq 1/2$. Além disso, é fácil ver que $\mathcal{A}_{a,b}$ anti-comuta com a isometria definida por

$$S\begin{pmatrix} P_1(s) \\ P_2(s) \\ P_3(s) \\ P_4(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1(-s) \\ P_2(-s) \\ -P_3(-s) \\ -P_4(-s) \end{pmatrix},$$

ou seja, $S\mathcal{A}_{a,b} = -\mathcal{A}_{a,b}S$, o que significa que o espectro de $\mathcal{A}_{a,b}$ é simétrico em relação a origem e como consequência, é simétrico também em relação ao eixo imaginário. Para o operador Bloch, temos a relação $S\mathcal{A}_{a,b,\beta} = -\mathcal{A}_{a,b,-\beta}S$, $\beta \neq 1/2$, e portanto $\sigma(\mathcal{A}_{a,b,\beta}) = -\sigma(\mathcal{A}_{a,b,-\beta})$, $\beta \neq 1/2$. Logo,

$$\sigma(\mathcal{A}_{a,b,\beta}) = \overline{\sigma(\mathcal{A}_{a,b,-\beta})} = -\sigma(\mathcal{A}_{a,b,-\beta}) = -\overline{\sigma(\mathcal{A}_{a,b,\beta})},$$

o que implica que o espectro de $\mathcal{A}_{a,b,\beta}$ é simétrico em relação ao eixo imaginário e assim podemos nos restringir aos valores $\beta \in [0, 1/2]$.

5.2.2 O Operador $\mathcal{A}_{a,b,\beta}$ como um Operador Perturbado

Com o objetivo de estudar o espetro de $\mathcal{A}_{a,b,\beta}$, definimos

$$\mathcal{A}^0_{a,b,\beta} = \begin{pmatrix} -4k_{a,b}p_{a,b}(\partial_x + i\beta) & 0 & \widetilde{\mathfrak{L}}_3 & 0 \\ 0 & -4k_{a,b}p_{a,b}(\partial_x + i\beta) & 0 & \widetilde{\mathfrak{L}}_2 \\ -\widetilde{\mathfrak{L}}_3 & 0 & -4k_{a,b}p_{a,b}(\partial_x + i\beta) & 0 \\ 0 & -\widetilde{\mathfrak{L}}_1 & 0 & -4k_{a,b}p_{a,b}(\partial_x + i\beta) \end{pmatrix},$$

onde

$$\widetilde{\mathfrak{L}}_1 = -4k^2_{a,b}(\partial_x + i\beta)^2 + (p^2_{a,b} - 1),$$

$$\widetilde{\mathfrak{L}}_2 = -4k^2_{a,b}(\partial_x + i\beta)^2 + (p^2_{a,b} - 1),$$

$$\widetilde{\mathfrak{L}}_3 = -4k^2_{a,b}(\partial_x + i\beta)^2 + 1 + \frac{1}{3}(p^2_{a,b} - 1),$$

Assim, $\mathcal{A}^1_{a,b} := \mathcal{A}_{a,b,\beta} - \mathcal{A}^0_{a,b,\beta}$ é um operador linear limitado em $L^2_{per}([0, 2\pi], \mathbb{C}^4)$ tal que

$$\|\mathcal{A}^1_{a,b}\| = \mathcal{O}(a^2 + b^2), \qquad \text{quando} \quad (a, b) \to (0, 0).$$

A idéia então para estudar o espectro do operador $\mathcal{A}_{a,b,\beta}$ é vê-lo como o espectro perturbado do operador $\mathcal{A}^0_{a,b,\beta}$.

Inicialmente notemos algumas relações do nosso problema com àquele para o caso da equação de Schrödinger,

$$iu_t + u_{xx} + |u|^2 u = 0$$

conforme descrito em [24]. Defina $Y \subset L^2_{per}([0,2\pi],\mathbb{C}^4)$ por

$$Y := \{(u_1,u_2,u_3,u_4) \in L^2_{per}([0,2\pi],\mathbb{C}^4); u_1 = u_3 = 0\}.$$

Então Y é um subespaço fechado de $L^2_{per}([0,2\pi],\mathbb{C}^4)$ e portanto é um espaço de Hilbert. Notemos que a ação do operador $\mathcal{A}^0_{a,b,\beta}$ sobre o espaço Y é dada por

$$\mathcal{A}^0_{a,b,\beta}\begin{pmatrix} 0 \\ u \\ 0 \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4k_{a,b}p_{a,b}(\partial_x + i\beta)u + [-4k^2_{a,b}(\partial_x + i\beta)^2 + (p^2_{a,b} - 1)]v \\ 0 \\ -4k_{a,b}p_{a,b}(\partial_x + i\beta)v + [4k^2_{a,b}(\partial_x + i\beta)^2 - (p^2_{a,b} - 1)]u \end{pmatrix}, \quad (5.25)$$

de tal forma que o problema espectral

$$\mathcal{A}^0_{a,b,\beta}\begin{pmatrix} 0 \\ u \\ 0 \\ v \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ u \\ 0 \\ v \end{pmatrix}, \quad (5.26)$$

é equivalente ao problema espectral para o caso da equação de Schrödinger conforme descrito em [24], a saber,

$$\widetilde{\mathcal{A}}^0_{a,b,\beta}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

onde

$$\widetilde{\mathcal{A}}^0_{a,b,\beta} = \begin{pmatrix} -4k_{a,b}p_{a,b}(\partial_x + i\beta) & -4k^2_{a,b}(\partial_x + i\beta)^2 + (p^2_{a,b} - 1) \\ 4k^2_{a,b}(\partial_x + i\beta)^2 - (p^2_{a,b} - 1) & -4k_{a,b}p_{a,b}(\partial_x + i\beta) \end{pmatrix}.$$

Assim, após uma simples análise de Fourier, podemos calcular explicitamente o espectro de $\mathcal{A}^0_{a,b,\beta}$ em Y, a saber,

$$\sigma_Y(\mathcal{A}^0_{a,b,\beta}) = \{i\omega^{\pm,n}_{a,b,\beta};\ \omega^{\pm,n}_{a,b,\beta} = -4k_{a,b}p_{a,b}(n+\beta) \pm (4k^2_{a,b}(n+\beta)^2 + p^2_{a,b} - 1), n \in \mathbb{Z}\}. \quad (5.27)$$

Mais ainda, a autofunção associada ao autovalor $i\omega_{a,b,\beta}^{\pm,n}$ é dada por

$$e^{\pm,n} = e^{inx}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \pm i \end{pmatrix}.$$

Da mesma forma, o problema de autovalores

$$\mathcal{A}_{a,b,\beta}\begin{pmatrix} 0 \\ u \\ 0 \\ v \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ u \\ 0 \\ v \end{pmatrix}, \tag{5.28}$$

é equivalente (a menos de constantes) ao problema de autovalores

$$\widetilde{\mathcal{A}}_{a,b,\beta}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \tag{5.29}$$

onde

$$\widetilde{\mathcal{A}}_{a,b,\beta} = \begin{pmatrix} -4k_{a,b}p_{a,b}(\partial_x + i\beta) - 2R_{a,b}S_{a,b} & \widetilde{\mathfrak{L}}_2 - R_{a,b}^2 - 3S_{a,b}^2 \\ -\widetilde{\mathfrak{L}}_1 + 3R_{a,b}^2 + S_{a,b}^2 & -4k_{a,b}p_{a,b}(\partial_x + i\beta) + 2R_{a,b}S_{a,b} \end{pmatrix}.$$

Como consequência, **estudar o espectro de $\mathcal{A}_{a,b,\beta}$ em Y equivale a estudar o espectro de $\widetilde{\mathcal{A}}_{a,b,\beta}$ em $L^2_{per}([0,2\pi],\mathbb{C}^2)$.**

Definindo $\widetilde{\mathcal{A}}^1_{a,b} := \widetilde{\mathcal{A}}_{a,b,\beta} - \widetilde{\mathcal{A}}^0_{a,b,\beta}$ e utilizando-se do fato que $w_{a,b}$ tem amplitude pequena, i.e., $\|\mathcal{A}^1_{a,b}\| \to 0$ quando $(a,b) \to (0,0)$, foi mostrado em [24], via método de perturbação, que o problema de autovalores (5.29) possui um autovalor $\lambda = \lambda(\beta)$ com $\mathfrak{Re}(\lambda) > 0$ e β suficientemente pequeno, ou seja, existe $\lambda \in \sigma(\widetilde{\mathcal{A}}_{a,b,\beta})$ com $\mathfrak{Re}(\lambda) > 0$ para algum β suficientemente pequeno. Agora, desde que o problema de autovalores associado a $\widetilde{\mathcal{A}}_{a,b,\beta}$ em $L^2_{per}([0,2\pi],\mathbb{C}^2)$ é equivalente ao problema de autovalores associado a $\mathcal{A}_{a,b,\beta}$ em Y, segue que para algum β suficientemente pequeno, o operador $\mathcal{A}_{a,b,\beta}$ possui um autovalor $\lambda = \lambda(\beta)$ tal que $\mathfrak{Re}(\lambda) > 0$ e cuja autofunção está em Y (e portanto em $L^2_{per}([0,2\pi],\mathbb{C}^4)$. Mais precisamente, acabamos de provar o seguinte teorema.

Teorema 5.2.6. *Seja $Z = L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^4)$ ou $Z = C_b(\mathbb{R},\mathbb{C}^4)$. Então a linearização do sistema (5.1) em torno da onda periódica $(0, w_{a,b})$ onde $w_{a,b} = e^{i(p_{a,b}x-t)}Q_{a,b}(2k_{a,b}x)$, dada por (5.21),* *possui pelo menos um ponto de seu espectro com parte real estritamente positiva, quando considerado em Z, contanto que $\|(a,b)\|$ sejam suficientemente pequeno. Logo, a solução $(0, w_{a,b})$ é espectralmente instável.*

Observação 5.2.7. *Utilizando-se novamente do fato que $\|\mathcal{A}^1_{a,b}\| \to 0$ quando $(a,b) \to (0,0)$, podemos mostrar que existe uma constante pequena β_0 com $0 < \beta_0 < 1/4$ tal que o espectro $\sigma_Y(\mathcal{A}_{a,b,\beta})$, $\beta \in [\beta_0, 1/2]$ está inteiramente sobre o eixo imaginário (veja Proposições 4.4 e 4.10 de [24]). Mais ainda, para $\beta \in [0, \beta_0)$ o espectro $\sigma_Y(\mathcal{A}_{a,b,\beta})$ pode ser dividido em*

$$\sigma_Y(\mathcal{A}_{a,b,\beta}) = \sigma^1_Y(\mathcal{A}_{a,b,\beta}) \cup \sigma^2_Y(\mathcal{A}_{a,b,\beta}),$$

onde $\sigma^1_Y(\mathcal{A}_{a,b,\beta}) \subset B(0;2)$ e $\sigma^2_Y(\mathcal{A}_{a,b,\beta}) \cap B(0;3) = \emptyset$, aqui $B(0,c)$ denota a bola de $\mathbb{C}$ com centro na origem e raio c. Além disso, $\sigma^2_Y(\mathcal{A}_{a,b,\beta})$ está sobre o eixo imaginário (veja Proposiçao 4.6 de [24]).

CAPÍTULO 6

Boa Colocação

Para completar nossa teoria em relação à estabilidade não-linear, estabeleceremos nesse capítulo os resultados de boa colocação para o sistema (2.1). Nossos resultados serão baseados nos trabalhos introduzidos por Kenig, Ponce e Vega em [41] no estudo do problema de Cauchy associado a equação de Korteweg-de Vries e por Bourgain em [14] no estudo do problema de Cauchy associado a equação de Schrödinger cúbica. Estabeleceremos resultados de boa colocação local e global nos espaços de Sobolev periódicos $H^s_{per}([0,L]) \times H^s_{per}([0,L])$, para $s \geq 0$. Nosso principal propósito é estabelecer um resultado de boa colocação global no espaço $H^1_{per}([0,L]) \times H^1_{per}([0,L])$ (nosso espaço natural onde provamos os resultados de estabilidade), já que nossa teoria de estabilidade não-linear exige um tal resultado. Mais precisamente provamos a seguinte:

Teorema: Sejam $s \geq 0$, $\sigma > 0$ e $(u_0, w_0) \in H^s([0,L]) \times H^s([0,L])$. Então o problema de Cauchy (6.1) é globalmente bem colocado, ou seja, (6.1) possui uma única solução $(u,w) \in C(\mathbb{R}; H^s_{per}([0,L]) \times H^s_{per}([0,L]))$.

Por todo esse capítulo, c denotará uma constante que pode variar com cada desigualdade. Além disso, para simplificar a notação em alguns casos denotaremos $H^s_{per}([0,L])$ simplesmente por H^s_{per}.

6.1 Preliminares

Estamos aqui interessados no estudo do problema de Cauchy associado ao sistema (2.1), a saber,

$$\begin{cases} iu_t + u_{xx} - u + \Big(\frac{1}{9}|u|^2 + 2|w|^2\Big)u + \frac{1}{3}\overline{u}^2 w = 0, \\ i\sigma w_t + w_{xx} - \widetilde{\alpha} w + \Big(9|w|^2 + 2|u|^2\Big)w + \frac{1}{9}u^3 = 0, \qquad x \in [0,L], \;\; t \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad w(x,0) = w_0(x), \end{cases} \tag{6.1}$$

onde $\widetilde{\alpha}, \sigma \in \mathbb{R}$ e $u_0, w_0 \in H^s_{per}([0,L])$. Para simplificar a notação, vamos considerar $L = 2\pi$, identificar o intervalo $[0,L]$ com o toro unidimensional $\mathbb{T}$ e reescrever o sistema (6.1) como

$$\begin{cases} u_t + i(-u_{xx} + u) = iF(u,w), \\ w_t + i(-aw_{xx} + \alpha w) = iG(u,w), \qquad x \in \mathbb{T}, \;\; t \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad w(x,0) = w_0(x), \end{cases} \tag{6.2}$$

onde $a = 1/\sigma$, $\alpha = \widetilde{\alpha}/\sigma$ e

$$F(u,w) = \Big(\frac{1}{9}|u|^2 + 2|w|^2\Big)u + \frac{1}{3}\overline{u}^2 w, \qquad G(u,w) = a\Big(9|w|^2 + 2|u|^2\Big)w + \frac{a}{9}u^3.$$

Consideremos agora o problema linear associado ao sistema (6.2), a saber,

$$\begin{cases} u_t + i(-u_{xx} + u) = 0, \\ w_t + (-aw_{xx} + \alpha w) = 0, \qquad x \in \mathbb{T}, \;\; t \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad w(x,0) = w_0(x). \end{cases} \tag{6.3}$$

Utilizando análise de Fourier, é fácil ver que a solução do sistema (6.3) é dada por

$$u(x,t) = U(t)u_0(x), \qquad w(x,t) = W(t)w_0(x), \tag{6.4}$$

onde $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ e $\{W(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ são os grupos unitários em $H^s_{per}(\mathbb{T})$ definidos por

$$U(t)g = (e^{-i(n^2+1)t}\widehat{g})^\vee, \qquad W(t)g = (e^{-i(an^2+\alpha)t}\widehat{g})^\vee.$$

Note que assim as soluções em (6.4) são dadas por

$$u(x,t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{u}_0(n)e^{i(nx-(n^2+1)t)}, \qquad w(x,t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{w}_0(n)e^{i(nx-(an^2+\alpha)t)}.$$

A seguir, vamos considerar o sistema de equações integral equivalente associado ao sistema (6.2). Pelo principio de Duhamel o problema (6.2) é equivalente a

$$\begin{cases} u(t) = U(t)u_0 - i\displaystyle\int_0^t U(t-t')F(u(t'),w(t'))dt', \\ w(t) = W(t)w_0 - i\displaystyle\int_0^t W(t-t')G(u(t'),w(t'))dt'. \end{cases} \tag{6.5}$$

Desde que queremos usar espaços de funções definidos em termos da transformada de Fourier tanto na variável espacial quanto na variável temporal, para resolver o problema de Cauchy localmente no tempo, é conveniente introduzir a seguinte versão do sistema (6.5): seja $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ tal que *supp* $\psi \subset [-2,2]$ e $\psi \equiv 1$ em $[-1,1]$. Para $\delta > 0$, defina $\psi_\delta(t) = \psi(t/\delta)$. Então introduzimos o sistema "corte"

$$\begin{cases} u(t) = \psi_\delta(t)U(t)u_0 - i\psi_\delta(t)\displaystyle\int_0^t U(t-t')F(u(t'),w(t'))dt', \\ w(t) = \psi_\delta(t)W(t)w_0 - i\psi_\delta(t)\displaystyle\int_0^t W(t-t')G(u(t'),w(t'))dt'. \end{cases} \tag{6.6}$$

Nossos espaços de funções básicos serão os chamados espaços de Bourgain $X_{s,b}$, primeiramente introduzidos por Bourgain em [14] e posteriomente por Kenig, Ponce e Vega em [40].

Definição 6.1.1. *Seja $\mathcal{V}$ o espaço das funções f tais que*
(i) $f : \mathbb{T} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$,
(ii) $f(x,\cdot) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ para cada $x \in \mathbb{T}$,
(iii) $f(\cdot,t) \in C^\infty(\mathbb{T})$ para cada $t \in \mathbb{R}$.
Para $s,b \in \mathbb{R}$ definimos o espaço de Bourgain $X_{s,b}$ como sendo o complemento de $\mathcal{V}$ em relação à norma

$$\begin{aligned} \|f\|_{X_{s,b}} &= \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_{-\infty}^{\infty}(1+|n|)^{2s}(1+|\tau+n^2+1|)^{2b}|\widehat{f}(n,\tau)|^2 d\tau\right)^{1/2} \\ &= \|\langle n\rangle^s\langle\tau+n^2+1\rangle^b\widehat{f}(n,\tau)\|_{\ell_n^2L_\tau^2}, \end{aligned}$$

onde $\langle\cdot\rangle = 1 + |\cdot|$. Similarmente, para $s,b,a \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$ definimos o espaço $X_{s,b}^a$ como sendo o complemento de $\mathcal{V}$ em relação à norma

$$\begin{aligned} \|f\|_{X_{s,b}^a} &= \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_{-\infty}^{\infty}(1+|n|)^{2s}(1+|\tau+an^2+\alpha|)^{2b}|\widehat{f}(n,\tau)|^2 d\tau\right)^{1/2} \\ &= \|\langle n\rangle^s\langle\tau+an^2+\alpha\rangle^b\widehat{f}(n,\tau)\|_{\ell_n^2L_\tau^2}. \end{aligned}$$

Observação 6.1.2. *Note que*

$$\|f\|_{X_{s,b}} = \|U(-t)f\|_{H^b(\mathbb{R}_t;H^s_{per})}, \qquad \|f\|_{X^a_{s,b}} = \|W(-t)f\|_{H^b(\mathbb{R}_t;H^s_{per})}$$

Portanto, utilizando que $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ *é grupo unitário em* H^s_{per}*, o Teorema de Imersão de Sobolev implica que se* $b > 1/2$ *então*

$$\|f\|_{C(\mathbb{R}_t;H^s_{per})} = \|U(-t)f\|_{C(\mathbb{R}_t;H^s_{per})} \leq c\|U(-t)f\|_{H^b(\mathbb{R}_t;H^s_{per})} = \|f\|_{X_{s,b}},$$

o que significa que $X_{s,b} \hookrightarrow C(\mathbb{R}_t; H^s_{per})$*. Analogamente* $X^a_{s,b} \hookrightarrow C(\mathbb{R}_t; H^s_{per})$*.*

De forma clássica, nossos resultados dependem de estimativas lineares e não-lineares nos espaços $X_{s,b}$ e $X^a_{s,b}$. As estimativas linares estão essencialmente contidas nos trabalhos de Kenig, Ponce e Vega [40], [41]. Por outro lado, as estimativas não-lineares estão contidas no trabalho de Bourgain [14] (veja também [15]).

6.2 Estimativas Lineares

Apresentaremos aqui as estimativas em relação ao problema linear necessárias para nosso resultado de boa colocação.

Lema 6.2.1. *Sejam* $s \in \mathbb{R}$, $b \in (1/2, 1)$ *e* $\delta \in (0, 1]$*. Então,*

(i) $\|\psi_\delta U(t)u_0\|_{X_{s,b}} \leq c\|u_0\|_{H^s_{per}}$,

(ii) $\|\psi_\delta u\|_{X_{s,b}} \leq c\delta^\gamma\|u\|_{X_{s,b}}$,

(iii) $\left\|\psi_\delta \int_0^t U(t-t')f(t')dt'\right\|_{X_{s,b}} \leq c\delta^\gamma\|f\|_{X_{s,b-1}}$,

onde $\gamma > 0$*. Similarmente,*

(iv) $\|\psi_\delta W(t)w_0\|_{X^a_{s,b}} \leq c\|w_0\|_{H^s_{per}}$,

(v) $\|\psi_\delta w\|_{X^a_{s,b}} \leq c\delta^\gamma\|w\|_{X^a_{s,b}}$,

(vi) $\left\|\psi_\delta \int_0^t W(t-t')f(t')dt'\right\|_{X^a_{s,b}} \leq c\delta^\gamma\|f\|_{X^a_{s,b-1}}$.

Demonstração. A prova está essencialmente contida em Kenig, Ponce e Vega [41] (veja também Kenig, Ponce e Vega [40], Angulo e Linares [7]), por isso daremos somente os principais passos da demonstração.

(i) Desde que

$$U(t)u_0(x) = (e^{-it(n^2+1)}\widehat{u}_0(n))^{\vee}(x),$$

temos

$$\psi_\delta(t)U(t)u_0(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{u}_0(n)e^{i(nx+t\tau)}\widehat{\psi}(\delta(\tau+n^2+1))d\tau.$$

Agora observe que

$$[\psi_\delta(t)U(t)u_0]^{\wedge}(n,\tau) = \delta\widehat{\psi}(\delta(\tau+n^2+1))\widehat{u}_0(n).$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\|\psi_\delta U(t)u_0\|^2_{X_{s,b}} &= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_{-\infty}^{\infty}(1+|n|)^{2s}(1+|\tau+n^2+1|)^{2b}\left|[\psi_\delta(t)U(t)u_0]^{\wedge}(n,\tau)\right|^2 d\tau \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}}(1+|n|)^{2s}|\widehat{u}_0(n)|^2\left(\delta^2\int_{-\infty}^{\infty}(1+|\tau+n^2+1|)^{2b}\left|\widehat{\psi}(\delta(\tau+n^2+1))\right|^2 d\tau\right).
\end{aligned}$$

Usando que $b > 1/2$ e $\delta \in (0,1]$, obtemos

$$\begin{aligned}
&\delta^2\int_{-\infty}^{\infty}(1+|\tau+n^2+1|)^{2b}\left|\widehat{\psi}(\delta(\tau+n^2+1))\right|^2 d\tau \\
&\leq c\delta^2\int_{-\infty}^{\infty}\left|\widehat{\psi}(\delta(\tau+n^2+1))\right|^2 d\tau + c\delta^2\int_{-\infty}^{\infty}|\tau+n^2+1|^{2b}\left|\widehat{\psi}(\delta(\tau+n^2+1))\right|^2 d\tau \\
&\leq c\delta + c\delta^{1-2b} \leq c\delta^{1-2b}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\|\psi_\delta U(t)u_0\|^2_{X_{s,b}} \leq c\delta^{1-2b}\sum_{n\in\mathbb{Z}}(1+|n|)^{2s}|\widehat{u}_0(n)|^2 \leq c\delta^{1-2b}\|u_0\|^2_{H^s_{per}}$$

(ii) Inicialmente notemos que

$$(\psi_\delta(t)u)^{\wedge}(n,\tau) = \delta\widehat{\psi}(\delta\tau) *_\tau \widehat{u}(n,\tau),$$

onde $f *_\tau g$ denota a convolução em τ. Assim,

$$\|\psi_\delta(t)u\|^2_{X_{s,b}} = \sum_{n\in\mathbb{Z}}(1+|n|)^{2s}\left(\int_{-\infty}^{\infty}(1+|\tau+n^2+1|)^{2b}\left|\delta\widehat{\psi}(\delta\tau) *_\tau \widehat{u}(n,\tau)\right|^2 d\tau\right). \tag{6.7}$$

Denote
$$F(n) = \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |\tau + n^2 + 1|)^{2b} \left| \delta\widehat{\psi}(\delta\tau) *_\tau \widehat{u}(n,\tau) \right|^2 d\tau.$$
Como para qualquer função $g = g(t)$ (suficientemente suave)

$$(e^{it(n^2+1)} g)^\wedge(\tau) = \widehat{g}(\tau - n^2 - 1),$$

temos para $g_n(t) = \psi_\delta(t)\widehat{u}(n,t)$

$$(e^{it(n^2+1)} g_n)^\wedge(\tau) = \delta\widehat{\psi}(\delta\cdot) *_\tau \widehat{u}(n,\cdot)(\tau - n^2 - 1).$$

Daí, via Teorema de Plancherel, obtemos

$$\begin{aligned} F(n) &= \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |\tau|)^{2b} \left| (e^{it(n^2+1)} g_n)^\wedge(\tau) \right|^2 d\tau \leq c\|g_n\|_{L_t^2}^2 + c\int_{-\infty}^{\infty} |\tau|^{2b} \left| (e^{it(n^2+1)} g_n)^\wedge(\tau) \right|^2 d\tau \\ &= c\|\widehat{u}(n,\cdot)\|_{L_t^2}^2 + c\|D_t^b(e^{it(n^2+1)} g_n)\|_{L_t^2}^2. \end{aligned} \tag{6.8}$$

Para estimar este último termo, usamos a regra de Leibniz (veja Kenig *et al.* [42])

$$\|D_t^b(fg) - fD_t^b g\|_{L_t^2} \leq c\|g\|_{L_t^\infty} \|D_t^b f\|_{L_t^2}, \qquad 0 < b < 1.$$

Pelo Teorema de Plancherel, temos

$$\|D_t^b(e^{it(n^2+1)} g_n)\|_{L_t^2} \leq c\||\tau + n^2 + 1|^b \widehat{u}(n,\tau)\|_{L_\tau^2} + c\|f_n\|_{L_t^\infty} \|D_t^b g\|_{L_t^2}$$

onde $f_n(t) = e^{it(n^2+1)}\widehat{u}(n,t)$ e $g(t) = \psi_\delta(t)$. Pelo Teorema de Imersão de Sobolev, obtemos

$$\|f_n\|_{L_t^\infty} \leq c\|(1 + |\tau + n^2 + 1|)^b \widehat{u}(n,\tau)\|_{L_\tau^2}.$$

Por outro lado, novamente via Teorema de Plancherel,

$$\|D_t^b g\|_{L_t^2} \leq c\delta^{1-2b}.$$

Consequentemente,

$$\|D_t^b(e^{it(n^2+1)} g_n)\|_{L_t^2} \leq c\delta^{1-2b} \|(1 + |\tau + n^2 + 1|)^b \widehat{u}(n,\tau)\|_{L_\tau^2}.$$

Substituindo em (6.8), resulta que

$$F(n) \leq c\delta^{1-2b} \|(1 + |\tau + n^2 + 1|)^b \widehat{u}(n,\tau)\|_{L_\tau^2}.$$

Logo, de (6.7)

$$\begin{aligned}
\|\psi_\delta(t)u\|^2_{X_{s,b}} &\leq c\delta^{1-2b}\sum_{n\in\mathbb{Z}}(1+|n|)^{2s}\int_{-\infty}^{\infty}(1+|\tau+n^2+1|)^{2b}\left|\widehat{u}(n,\tau)\right|^2 d\tau \\
&\leq c\delta^{1-2b}\|u\|_{X_{s,b}}.
\end{aligned}$$

(iii) Seja

$$g(x,t)=\int_0^t U(t-t')f(\cdot,t')dt'.$$

Então,

$$\begin{aligned}
\widehat{g(\cdot,t)}(n) &= c\int_0^{2\pi} e^{-inx}\int_0^t U(t-t')f(\cdot,t)dt'dx \\
&= \int_0^t e^{-i(t-t')(n^2+1)}\widehat{f(\cdot,t')}(n)dt'.
\end{aligned}$$

Usando a relação

$$\int_0^t h(t')dt' = c\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{it\tau}-1}{i\tau}\widehat{h}(\tau)d\tau$$

podemos escrever

$$\begin{aligned}
g(x,t) &= c\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{inx}\widehat{g(\cdot,t)}(n) = c\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{inx}\widehat{f}(n,\tau)\frac{e^{it\tau}-e^{-it(n^2+1)}}{i(\tau+n^2+1)}d\tau \\
&= c\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{inx}\widehat{f}(n,\tau)\frac{e^{it\tau}-e^{-it(n^2+1)}}{i(\tau+n^2+1)}\varphi(\tau+n^2+1)d\tau \\
&\quad +c\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{inx}\widehat{f}(n,\tau)\frac{e^{it\tau}-e^{-it(n^2+1)}}{i(\tau+n^2+1)}[1-\varphi(\tau+n^2+1)]d\tau \\
&= I+II,
\end{aligned}$$

onde $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ é tal que $supp\ \varphi \subset [-1,1]$ e $\varphi \equiv 1$ em $[-1/2, 1/2]$. Agora,

$$\begin{aligned}
\psi_\delta(t)I &= c\psi_\delta(t)\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{inx}e^{-it(n^2+1)}\widehat{f}(n,\tau)\frac{e^{it(\tau+n^2+1)}-1}{i(\tau+n^2+1)}\varphi(\tau+n^2+1)d\tau \\
&= c\psi_\delta(t)\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{inx}e^{-it(n^2+1)}\widehat{f}(n,\tau)\varphi(\tau+n^2+1)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{i^{k-1}t^k(\tau+n^2+1)^{k-1}}{k!}d\tau \\
&= c\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{inx}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-it(n^2+1)}}{k!}t^k\psi_\delta(t)g_k(n)
\end{aligned}$$

onde

$$g_k(n) = \int_{-\infty}^{\infty} i^{k-1}(\tau+n^2+1)^{k-1}\widehat{f}(n,\tau)\varphi(\tau+n^2+1)d\tau.$$

Denotando

$$h(n,t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-it(n^2+1)}t^k\psi_\delta(t)g_k(n) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-it(n^2+1)}\delta^k\psi_k(\delta^{-1}t)g_k(n)$$

onde $\psi_k(t) = t^k\psi(t)$, obtemos

$$\psi_\delta(t)I = c\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{inx}h(n,t).$$

Assim,

$$\widehat{\psi_\delta I}(n,\tau) = \widehat{h(n,\cdot)}(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\delta^k}{k!}g_k(n)\delta\widehat{\psi}_k(\delta(\tau+n^2+1)).$$

Portanto,

$$\|\psi_\delta(t)I\|_{X_{s,b}} \leq \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\delta^k}{k!}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}(1+|n|)^{2s}|g_k(n)|^2\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty}(1+|\tau|)^{2b}|\delta\widehat{\psi}_k(\delta\tau)|^2d\tau\right) \tag{6.9}$$

Mas, usando a Desigualdade de Cauchy-Schwartz e o fato que $supp\ \varphi \subset [-1,1]$, obtemos

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}(1+|n|)^{2s}|g_k(n)|^2 \leq c\|f\|_{X_{s,b-1}}. \tag{6.10}$$

Por outro lado, desde que $b \in (1/2, 1)$ e $\delta \in (0,1)$, como em (i), obtemos

$$\int_{-\infty}^{\infty}(1+|\tau|)^{2b}|\delta\widehat{\psi}_k(\delta\tau)|^2d\tau \leq c\delta^{(1-2b)/2}(k+1)^2. \tag{6.11}$$

Como consequência de (6.10) e (6.11), conseguimos

$$\|\psi_\delta(t)I\|_{X_{s,b}} \leq c\delta^{(1-2b)/2}\|f\|_{X_{s,b-1}}$$

Para estimar II, escrevemos

$$\begin{aligned}
II &= c\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{inx}\widehat{f}(n,\tau)\frac{e^{it\tau}}{i(\tau+n^2+1)}[1-\varphi(\tau+n^2+1)]d\tau \\
&\quad -c\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{inx}\widehat{f}(n,\tau)\frac{e^{-it(n^2+1)}}{i(\tau+n^2+1)}[1-\varphi(\tau+n^2+1)]d\tau \\
&= II_2 + II_1
\end{aligned}$$

Seja $u_0 = u_0(x)$ tal que

$$\widehat{u}_0(n) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{[1-\varphi(\tau+n^2+1)]}{i(\tau+n^2+1)}\widehat{f}(n,\tau)d\tau.$$

Então,

$$II_1 = -c(e^{-it(n^2+1)}\widehat{u}_0(n))^{\vee}(x) = -cU(t)u_0(x).$$

Por (i), obtemos

$$\|\psi_\delta(t)II_1\|_{X_{s,b}} \leq c\delta^{(1-2b)/2}\|u_0\|_{H^s_{per}} \leq c\delta^{(1-2b)/2}\|f\|_{X_{s,b-1}}. \tag{6.12}$$

Por outro lado, de (ii)

$$\|\psi_\delta(t)II_2\|_{X_{s,b}} \leq c\delta^{(1-2b)/2}\|II_2\|_{X_{s,b}} \leq c\delta^{(1-2b)/2}\|f\|_{X_{s,b-1}}. \tag{6.13}$$

De (6.12) e (6.13), resulta

$$\|\psi_\delta(t)II\|_{X_{s,b}} \leq c\delta^{(1-2b)/2}\|f\|_{X_{s,b-1}}$$

e portanto o resultado segue.

As demonstrações de (iv), (v) e (vi) seguem de maneira análoga. □

6.3 Estimativas Não-lineares

Nesta seção mostraremos as estimativas sobre os termos não-lineares do nosso sistema. As principais ferramentas são as imersões $X_{0,3/8} \subset L^4_{x,t}$ e $X^a_{0,3/8} \subset L^4_{x,t}$, as quais apresentamos a seguir

Lema 6.3.1. *Sejam* $u : \mathbb{R} \times \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ *e* $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. *Então,*

(i) $\|u\|_{L^4_{x,t}} \leq c\|u\|_{X_{0,3/8}}$,

(ii) $\|u\|_{L^4_{x,t}} \leq c\|u\|_{X^a_{0,3/8}}$.

Demonstração. A estimativa em (i) foi essencialmente provada em Bourgain [14], mas para uma prova alternativa veja Molinet [49]. A prova de (ii) é feita de maneira similar a (i), uma vez que a presença do fator $an^2 + \alpha$, $n \in \mathbb{Z}$, na definição de $X^a_{s,b}$ implica somente uma translação e uma dilatação de $\mathbb{N}$. □

Agora apresentamos as estimativas não-lineares.

Lema 6.3.2. *Sejam* $s \geq 0$ *e* $b \in (3/8, 5/8)$. *Então,*

(i) $\||u|^2u\|_{X_{s,b-1}} \leq c\|u\|^3_{X_{s,b}}$,

(ii) $\||w|^2u\|_{X_{s,b-1}} \leq c\|u\|_{X_{s,b}}\|w\|^2_{X^a_{s,b}}$,

(iii) $\|\overline{u}^2w\|_{X_{s,b-1}} \leq c\|u\|^2_{X_{s,b}}\|w\|_{X^a_{s,b}}$,

(iv) $\||w|^2w\|_{X^a_{s,b-1}} \leq c\|w\|^3_{X^a_{s,b}}$,

(v) $\||u|^2w\|_{X^a_{s,b-1}} \leq c\|u\|^2_{X_{s,b}}\|w\|_{X^a_{s,b}}$,

(vi) $\|u^3\|_{X^a_{s,b-1}} \leq c\|u\|^3_{X_{s,b}}$

Demonstração. As demonstrações são análogas à aquelas feitas por Bourgain para o caso da equação de Schrödinger (veja Bourgain [15]). As mais delicadas são (ii), (iii) e (v). Todas as estimativas são feitas utilizando argumentos de dualidade.
(i) Seja $f_1 = |u|^2u$. Como

$$\|f\|_{X_{s,b-1}} = \|\langle n\rangle^s\langle \tau + n^2 + 1\rangle^{b-1}\widehat{f}_1(n,\tau)\|_{\ell^2_n L^2_\tau},$$

e o espaço $\ell_n^2 L_\tau^2$ é um espaço de Hilbert, tomamos $\theta = \theta(n,\tau)$ tal que $\|\theta\|_{\ell_n^2 L_\tau^2} \leq 1$ e basta mostrarmos que

$$|I_1| := \left| \sum_n \int \langle n\rangle^s \langle \tau + n^2 + 1\rangle^{b-1} \overline{\theta}(n,\tau) \widehat{f_1}(n,\tau) d\tau \right| \leq c\|u\|_{X_{s,b}}^3.$$

Agora

$$\begin{aligned}
\widehat{f_1}(n,\tau) &= \widehat{u\overline{u}u}(n,\tau) = \widehat{u} * \widehat{\overline{u}} * \widehat{u}(n,\tau) \\
&= \sum_{n_1,n_2} \int \widehat{u}(n-n_1, \tau-\tau_1) \widehat{\overline{u}}(n_2-n_1, \tau_2-\tau_1) \widehat{u}(n_2,\tau_2) d\tau_1 d\tau_2.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
I_1 &= \sum_{n,n_1,n_2} \int \frac{\langle n\rangle^s}{\langle \tau + n^2 + 1\rangle^{1-b}} \overline{\theta}(n,\tau) \widehat{u}(n-n_1,\tau-\tau_1) \widehat{\overline{u}}(n_2-n_1,\tau_2-\tau_1) \widehat{u}(n_2,\tau_2) d\tau d\tau_1 d\tau_2 \\
&= \sum_{n_1,n_2,n_3} \int \frac{\langle n\rangle^s}{\langle \tau + n^2 + 1\rangle^{1-b}} \overline{\theta}(n,\tau) \widehat{u}(n_1,\tau_1) \widehat{\overline{u}}(n_2,\tau_2) \widehat{u}(n_3,\tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3,
\end{aligned}$$

onde $n = n_1 - n_2 + n_3$ e $\tau = \tau_1 - \tau_2 + \tau_3$. Note que

$$\langle n\rangle^s \leq c \ \max\{\langle n_1\rangle^s, \langle n_2\rangle^s, \langle n_3\rangle^s\}.$$

Sem perda de generalidade, suponha que $\langle n\rangle^s \leq c\ \langle n_1\rangle^s$. Portanto,

$$|I_1| \leq c \sum_{n_1,n_2,n_3} \int \frac{|\theta(n,\tau)|}{\langle \tau + n^2 + 1\rangle^{1-b}} \langle n_1\rangle^s |\widehat{u}(n_1,\tau_1)| |\widehat{u}(n_2,\tau_2)| |\widehat{u}(n_3,\tau_3)| d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3.$$

Defina as funções

$$F(x,t) = \sum_n \int \frac{|\theta(n,\tau)|}{\langle \tau + n^2 + 1\rangle^{1-b}} e^{i(nx+t\tau)} d\tau,$$

$$G(x,t) = \sum_n \int |\widehat{u}(n,\tau)| e^{i(nx+t\tau)} d\tau,$$

$$H(x,t) = \sum_n \int \langle n\rangle^s |\widehat{u}(n,\tau)| e^{i(nx+t\tau)} d\tau.$$

Logo,

$$|I_1| \leq c \sum_{n_1,n_2,n_3} \int \widehat{F}(n,\tau) \widehat{H}(n_1,\tau_1) \widehat{G}(n_2,\tau_2) \widehat{G}(n_3,\tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3.$$

Aplicando o Teorema de Fubini, a Identidade de Plancherel e a Desigualdade de Cauchy-Schwartz, obtemos

$$\begin{aligned} |I_1| &\le c\int F(x,t)H(x,t)G^2(x,t)dxdt \\ &\le c\|F\|_{L^4_{x,t}}\|H\|_{L^4_{x,t}}\|G\|^2_{L^4_{x,t}}. \end{aligned} \tag{6.14}$$

Pelo Lema 6.3.1, resulta que

$$\|G\|_{L^4_{x,t}} \le c\left(\sum_n \int \langle \tau+n^2+1\rangle^{3/4}|\widehat{G}(n,\tau)|^2 d\tau\right)^{1/2} = c\|u\|_{X_{0,3/8}} \le c\|u\|_{X_{s,b}}. \tag{6.15}$$

$$\|H\|_{L^4_{x,t}} \le c\left(\sum_n \int \langle \tau+n^2+1\rangle^{3/4}|\widehat{H}(n,\tau)|^2 d\tau\right)^{1/2} = c\|u\|_{X_{s,3/8}} \le c\|u\|_{X_{s,b}}. \tag{6.16}$$

$$\begin{aligned} \|F\|_{L^4_{x,t}} &\le c\left(\sum_n \int \langle \tau+n^2+1\rangle^{3/4}|\widehat{F}(n,\tau)|^2 d\tau\right)^{1/2} \\ &= c\left(\sum_n \int \langle \tau+n^2+1\rangle^{2(3/8-(1-b))}|\theta(n,\tau)|^2 d\tau\right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Desde que $b<5/8$ temos que $3/8-(1-b)<0$. Portanto,

$$\|F\|_{L^4_{x,t}} \le c\left(\sum_n \int |\theta(n,\tau)|^2 d\tau\right)^{1/2} \le c. \tag{6.17}$$

De (6.14)–(6.17) segue (i).

(ii) Seja $f_2 = |w|^2 u$. Então

$$\widehat{f_2}(n,\tau) = \sum_{n_1,n_2}\int \widehat{w}(n-n_1,\tau-\tau_1)\overline{\widehat{w}}(n_2-n_1,\tau_2-\tau_1)\widehat{u}(n_2,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2.$$

Assim, para $\|\theta\|_{\ell^2_n L^2_\tau} \le 1$, temos

$$\begin{aligned} I_2 &:= \sum_n \int \langle n\rangle^s \langle \tau+n^2+1\rangle^{b-1}\overline{\theta}(n,\tau)\widehat{f_2}(n,\tau)d\tau \\ &= \sum_{n_1,n_2,n_3}\int \frac{\langle n\rangle^s}{\langle \tau+n^2+1\rangle^{1-b}}\overline{\theta}(n,\tau)\widehat{w}(n_1,\tau_1)\overline{\widehat{w}}(n_2,\tau_2)\widehat{u}(n_3,\tau_3)d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3, \end{aligned}$$

onde $n = n_1 - n_2 + n_3$ e $\tau = \tau_1 - \tau_2 + \tau_3$. Suponha novamente que $\langle n\rangle^s \le c\,\langle n_1\rangle^s$ e defina

$$F(x,t) = \sum_n \int \frac{|\theta(n,\tau)|}{\langle \tau + n^2 + 1\rangle^{1-b}} e^{i(nx+t\tau)} d\tau,$$

$$G(x,t) = \sum_n \int |\widehat{w}(n,\tau)| e^{i(nx+t\tau)} d\tau,$$

$$G_1(x,t) = \sum_n \int |\widehat{u}(n,\tau)| e^{i(nx+t\tau)} d\tau,$$

$$H(x,t) = \sum_n \int \langle n\rangle^s |\widehat{w}(n,\tau)| e^{i(nx+t\tau)} d\tau.$$

Logo, aplicando novamente o Teorema de Fubini, a Identidade de Plancherel e a Desigualdade de Cauchy-Schwartz, obtemos

$$|I_2| \le c\|F\|_{L^4_{x,t}} \|H\|_{L^4_{x,t}} \|G\|_{L^4_{x,t}} \|G_1\|_{L^4_{x,t}}$$

Como em (i) temos que $\|F\|_{L^4_{x,t}} \le c$, $\|G\|_{L^4_{x,t}} \le c\|w\|_{X^a_{s,b}}$, $\|G_1\|_{L^4_{x,t}} \le c\|u\|_{X_{s,b}}$ e $\|H\|_{L^4_{x,t}} \le c\|w\|_{X^a_{s,b}}$ e portanto daqui segue (ii).

(iii) Seja agora $f_3 = \overline{u}^2 w$. Então

$$\begin{aligned} I_3 &:= \sum_n \int \langle n\rangle^s \langle \tau + n^2 + 1\rangle^{b-1} \overline{\theta}(n,\tau) \widehat{f_3}(n,\tau) d\tau \\ &= \sum_{n_1,n_2,n_3} \int \frac{\langle n\rangle^s}{\langle \tau + n^2 + 1\rangle^{1-b}} \overline{\theta}(n,\tau) \overline{\widehat{u}}(n_1,\tau_1) \overline{\widehat{u}}(n_2,\tau_2) \widehat{w}(n_3,\tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3, \end{aligned}$$

onde agora $n = n_3 - n_2 - n_1$ e $\tau = \tau_3 - \tau_2 - \tau_1$. Supondo $\langle n\rangle^s \le c\,\langle n_3\rangle^s$ e definindo F, G_1 e H como em (ii), obtemos

$$|I_3| \le c\,\|F\|_{L^4_{x,t}} \|H\|_{L^4_{x,t}} \|G_1\|^2_{L^4_{x,t}} \le c\|u\|^2_{X_{s,b}} \|w\|_{X^a_{s,b}}.$$

As demonstrações de (iv) e (v) seguem de forma análoga a (i) e (ii) respectivamente, com as modificações óbvias. Portanto no restante provaremos somente (vi).

(vi) seja $f_6 = u^3$. Assim,

$$\begin{aligned} I_6 &:= \sum_n \int \langle n\rangle^s \langle \tau + an^2 + \alpha\rangle^{b-1} \overline{\theta}(n,\tau) \widehat{f_6}(n,\tau) d\tau \\ &= \sum_{n_1,n_2,n_3} \int \frac{\langle n\rangle^s}{\langle \tau + an^2 + \alpha\rangle^{1-b}} \overline{\theta}(n,\tau) \widehat{u}(n_1,\tau_1) \widehat{u}(n_2,\tau_2) \widehat{u}(n_3,\tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3, \end{aligned}$$

onde agora $n = n_1 + n_2 + n_3$ e $\tau = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3$. Sejam

$$F(x,t) = \sum_n \int \frac{|\theta(n,\tau)|}{\langle \tau + an^2 + \alpha \rangle^{1-b}} e^{i(nx+t\tau)} d\tau,$$

$$G(x,t) = \sum_n \int |\widehat{u}(n,\tau)| e^{i(nx+t\tau)} d\tau,$$

$$H(x,t) = \sum_n \int \langle n \rangle^s |\widehat{u}(n,\tau)| e^{i(nx+t\tau)} d\tau.$$

Fazendo as mesmas estimativas como em (i), obtemos

$$|I_6| \leq c\,\|F\|_{L^4_{x,t}} \|H\|_{L^4_{x,t}} \|G\|^2_{L^4_{x,t}} \leq c\|u\|^3_{X_{s,b}}.$$

Isso completa a prova do Lema. □

Observação 6.3.3. *Observe que as mesmas idéias do lema anterior podem ser aplicadas para provar que*

$$\|u^{\alpha_1} \overline{u}^{\alpha_2} w^{\alpha_3} \overline{w}^{\alpha_4}\|_X \leq c\|u\|^{\alpha_1+\alpha_2}_{X_{s,b}} \|w\|^{\alpha_3+\alpha_4}_{X^a_{s,b}}$$

onde $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ *com* $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 3$ *e* $X = X_{s,b-1}$ *ou* $X = X^a_{s,b-1}$.

Agora podemos provar

Corolário 6.3.4. *Sejam* $s \geq 0$ *e* $b \in (3/8, 5/8)$. *Então,*

(i) $\||u_1|^2 u_1 - |u_2|^2 u_2\|_{X_{s,b-1}} \leq c \left(\|u_1\|^2_{X_{s,b}} + \|u_1\|_{X_{s,b}} \|u_2\|_{X_{s,b}} + \|u_2\|^2_{X_{s,b}} \right) \|u_1 - u_2\|_{X_{s,b}}$,

(ii) $\||w_1|^2 u_1 - |w_2|^2 u_2\|_{X_{s,b-1}} \leq c\|w_1\|^2_{X^a_{s,b}} \|u_1 - u_2\|_{X_{s,b}}$

$$+c \left(\|w_1\|_{X^a_{s,b}} \|u_2\|_{X_{s,b}} + \|u_2\|_{X_{s,b}} \|w_2\|_{X^a_{s,b}} \right) \|w_1 - w_2\|_{X^a_{s,b}},$$

(iii) $\|\overline{u}_1^2 w_1 - \overline{u}_2^2 w_2\|_{X_{s,b-1}} \leq c\|u_1\|^2_{X_{s,b}} \|w_1 - w_2\|_{X^a_{s,b}}$

$$+c \left(\|u_1\|_{X_{s,b}} \|w_2\|_{X^a_{s,b}} + \|u_2\|_{X_{s,b}} \|w_2\|_{X^a_{s,b}} \right) \|u_1 - u_2\|_{X_{s,b}},$$

(iv) $\||w_1|^2 w_1 - |w_2|^2 w_2\|_{X^a_{s,b-1}} \leq c \left(\|w_1\|^2_{X^a_{s,b}} + \|w_1\|_{X^a_{s,b}} \|w_2\|_{X^a_{s,b}} + \|w_2\|^2_{X^a_{s,b}} \right) \|w_1 - w_2\|_{X^a_{s,b}}$,

(v) $\||u_1|^2 w_1 - |u_2|^2 w_2\|_{X^a_{s,b-1}} \leq c\|u_1\|^2_{X_{s,b}} \|w_1 - w_2\|_{X^a_{s,b}}$

$$+c \left(\|u_1\|_{X_{s,b}} \|w_2\|_{X^a_{s,b}} + \|u_2\|_{X_{s,b}} \|w_2\|_{X^a_{s,b}} \right) \|u_1 - u_2\|_{X_{s,b}},$$

(vi) $\|u_1^3 - u_2^3\|_{X^a_{s,b-1}} \leq c\left(\|u_1\|^2_{X_{s,b}} + \|u_1\|_{X_{s,b}}\|u_2\|_{X_{s,b}} + \|u_2\|^2_{X_{s,b}}\right)\|u_1 - u_2\|_{X_{s,b}}.$

Demonstração. A demonstração segue como uma consequência da Observação 6.3.3. De fato, em cada um dos casos (i)–(vi) basta escrevermos

(i) $|u_1|^2u_1 - |u_2|^2u_2 = |u_1|^2(u_1 - u_2) + \overline{u}_1u_2(u_1 - u_2) + u_2^2(\overline{u}_1 - \overline{u}_2)$.

(ii) $|w_1|^2u_1 - |w_2|^2u_2 = |w_1|^2(u_1 - u_2) + \overline{w}_1u_2(w_1 - w_2) + u_2w_2(\overline{w}_1 - \overline{w}_2)$.

(iii) $\overline{u}_1^2w_1 - \overline{u}_2^2w_2 = \overline{u}_1^2(w_1 - w_2) + \overline{u}_1w_2(\overline{u}_1 - \overline{u}_2) + \overline{u}_2w_2(\overline{u}_1 - \overline{u}_2)$.

(iv) $|w_1|^2w_1 - |w_2|^2w_2 = |w_1|^2(w_1 - w_2) + \overline{w}_1w_2(w_1 - w_2) + w_2^2(\overline{w}_1 - \overline{w}_2)$.

(v) $|u_1|^2w_1 - |u_2|^2w_2 = |u_1|^2(w_1 - w_2) + \overline{u}_1w_2(u_1 - u_2) + u_2w_2(\overline{u}_1 - \overline{u}_2)$.

(vi) $u_1^3 - u_2^3 = u_1^2(u_1 - u_2) + u_1u_2(u_1 - u_2) + u_2^2(u_1 - u_2)$.
Uma simples aplicação da Observação 6.3.3 conclui o corolário. □

6.4 Boa Colocação Local

Agora podemos provar nosso resultado de boa colocação local, a saber,

Teorema 6.4.1. (*Boa Colocação Local*) *Sejam* $s \geq 0$ *e* $b \in (1/2, 5/8)$. *Para cada* $(u_0, w_0) \in H^s_{per}(\mathbb{T}) \times H^s_{per}(\mathbb{T})$ *existe* $T = T(\|(u_0, w_0)\|_{H^s_{per}\times H^s_{per}}) > 0$ *e uma única solução do problema de Cauchy* (6.2) *no intervalo de tempo* $[-T, T]$ *tal que*

$$(u, w) \in C([-T, T]; H^s_{per}(\mathbb{T}) \times H^s_{per}(\mathbb{T}))$$

$$(\psi_T u, \psi_T w) \in X_{s,b} \times X^a_{s,b},$$

Além disso, para cada $T' \in (0, T)$, *a aplicação* $(u_0, w_0) \mapsto (u(t), w(t))$ *é Lipschitz de uma vizinhança de* (u_0, w_0) *em* $H^s_{per}(\mathbb{T}) \times H^s_{per}(\mathbb{T})$ *para* $C([-T', T']; H^s_{per}(\mathbb{T}) \times H^s_{per}(\mathbb{T}))$.

Demonstração. Seguimos argumentos análogos à aqueles desenvolvidos por Bourgain e Kenig *et al.* (veja também Angulo e Linares [7]).

Começamos definindo o espaço métrico de funções

$$\mathcal{X}_M = \{(u, w) \in X_{s,b} \times X^a_{s,b}; \|(u, w)\|_{X_{s,b}\times X^a_{s,b}} := \|u\|_{X_{s,b}} + \|w\|_{X^a_{s,b}} \leq M\},$$

onde $M > 0$ será escolhido posteriormente. Note que na verdade, $\mathcal{X}_M$ é a bola de raio M em $X = X_{s,b} \times X^a_{s,b}$. Agora defina a aplicação $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$, onde

$$\Phi_1(u,w)(t) = \psi_T(t)U(t)u_0 - i\psi_T(t)\int_0^t U(t-t')F(u(t'),w(t'))dt',$$

$$\Phi_2(u,w)(t) = \psi_T(t)W(t)w_0 - i\psi_T(t)\int_0^t W(t-t')G(u(t'),w(t'))dt',$$

onde $T \in (0,1)$, $F(u,w) = \Big(\frac{1}{9}|u|^2 + 2|w|^2\Big)u + \frac{1}{3}\overline{u}^2 w$ e $G(u,w) = a\Big(9|w|^2 + 2|u|^2\Big)w + \frac{a}{9}u^3$.

Suponha que $(u,w) \in \mathcal{X}_M$. Pelos Lemas 6.2.1 e 6.3.2, temos

$$\begin{aligned}
\|\Phi_1(u,w)\|_{X_{s,b}} &\leq c\|u_0\|_{H^s_{per}} + cT^\gamma \|F(u,w)\|_{X_{s,b-1}} \\
&\leq c\|u_0\|_{H^s_{per}} + cT^\gamma \left(\|u\|^3_{X_{s,b}} + \|u\|_{X_{s,b}}\|w\|^2_{X^a_{s,b}} + \|u\|^2_{X_{s,b}}\|w\|_{X^a_{s,b}}\right) \\
&\leq c\|u_0\|_{H^s_{per}} + cT^\gamma M^3
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\|\Phi_2(u,w)\|_{X^a_{s,b}} &\leq c\|w_0\|_{H^s_{per}} + cT^\gamma \|G(u,w)\|_{X^a_{s,b-1}} \\
&\leq c\|w_0\|_{H^s_{per}} + cT^\gamma \left(\|u\|^3_{X_{s,b}} + \|u\|^2_{X_{s,b}}\|w\|_{X^a_{s,b}} + \|w\|^3_{X^a_{s,b}}\right) \\
&\leq c\|w_0\|_{H^s_{per}} + cT^\gamma M^3.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\|\Phi(u,w)\|_{X_{s,b}\times X^a_{s,b}} &= \|\Phi_1(u,w)\|_{X_{s,b}} + \|\Phi_2(u,w)\|_{X^a_{s,b}} \\
&\leq c(\|u_0\|_{H^s_{per}} + \|w_0\|_{H^s_{per}}) + 2cT^\gamma M^3.
\end{aligned} \tag{6.18}$$

Escolha $M = 2c(\|u_0\|_{H^s_{per}} + \|w_0\|_{H^s_{per}})$ e fixe $T > 0$ suficientemente pequeno tal que $2cT^\gamma M^2 \leq 1/2$. Então

$$\|\Phi(u,w)\|_{X_{s,b}\times X^a_{s,b}} \leq \frac{M}{2} + \frac{M}{2} = M, \tag{6.19}$$

o que significa que $\Phi : \mathcal{X}_M \to \mathcal{X}_M$. Vamos agora mostrar que T pode ainda ser escolhido de tal forma que Φ seja uma contração. De fato, aplicando o Lema 6.2.1 e o Corolário 6.3.4, obtemos

$$\begin{aligned}\|\Phi_1(u_1,w_1)-\Phi_1(u_2,w_2)\|_{X_{s,b}} &\leq cT^{\gamma}\|F(u_1,w_1)-F(u_2,w_2)\|_{X_{s,b-1}}\\ &\leq cT^{\gamma}M^2\left(\|u_1-u_2\|_{X_{s,b}}+\|w_1-w_2\|_{X^a_{s,b}}\right).\end{aligned} \tag{6.20}$$

Analogamente,

$$\|\Phi_2(u_1,w_1)-\Phi_2(u_2,w_2)\|_{X^a_{s,b}} \leq cT^{\gamma}M^2\left(\|u_1-u_2\|_{X_{s,b}}+\|w_1-w_2\|_{X^a_{s,b}}\right). \tag{6.21}$$

Portanto, de (6.20) e (6.21), obtemos

$$\|\Phi(u_1,w_1)-\Phi(u_2,w_2)\|_{X_{s,b}\times X^a_{s,b}} \leq cT^{\gamma}M^2\|(u_1,w_1)-(u_2,w_2)\|_{X_{s,b}\times X^a_{s,b}}. \tag{6.22}$$

Escolha ainda $T>0$ suficientemente pequeno tal $cT^{\gamma}M^2\leq 1/2$ (note que essa última constante em (6.22) é possivelmente diferente daquela acima onde já escolhemos T). Isso mostra que para cada $(u_0,w_0)\in H^s_{per}(\mathbb{T})\times H^s_{per}(\mathbb{T})$ podemos escolher um $T>0$ dependendo somente da norma $\|(u_0,w_0)\|_{H^s_{per}\times H^s_{per}}$ tal que $\Phi:\mathfrak{X}_M\to\mathfrak{X}_M$ é uma contração. Como consequência, pelo Princípio de Contração, Φ possui um único ponto fixo em $\mathfrak{X}_M$, ou seja, existe única (u,w) em $\mathfrak{X}_M$ que resolve a equação integral

$$u(t)=\psi_T(t)U(t)u_0-i\psi_T(t)\int_0^t U(t-t')F(u(t'),w(t'))dt',$$

$$w(t)=\psi_T(t)W(t)w_0-i\psi_T(t)\int_0^t W(t-t')G(u(t'),w(t'))dt'.$$

Desde que $b>1/2$, a imersão $X_{s,b}\times X^a_{s,b}\hookrightarrow C(\mathbb{R}_t;H^s_{per}(\mathbb{T})\times H^s_{per}(\mathbb{T}))$ mostra que para $T\in(0,1)$ e $t\in(0,T)$

$$(u,w)\in C([-T,T];H^s_{per}(\mathbb{T})\times H^s_{per}(\mathbb{T})).$$

Note que de (6.18) a solução (u,w) satisfaz a estimativa

$$\|(u,w)\|_{X_{s,b}\times X^a_{s,b}}\leq 2c\|(u_0,w_0)\|_{H^s_{per}\times H^s_{per}}. \tag{6.23}$$

Observemos que na aplicação do Princípio de Contração, a unicidade ficou restrita à bola $\mathfrak{X}_M$. Para ver a unicidade em $X_{s,b}\times X^a_{s,b}$, procedemos como segue: seja $(u_1,w_1)\in X_{s,b}\times X^a_{s,b}$ uma outra solução com $(u_1(0),w_1(0))=(u_0,w_0)$. Para $T>0$ definido acima, seja

$$T_1:=\sup\{t\in[0,T];\ (u_1(t),w_1(t))=(u(t),w(t))\}$$

e suponha por absurdo que $T_1 < T$. Considere $(\widetilde{u}(t+T_1), \widetilde{w}(t+T_1))$ e $(\widetilde{u}_1(t+T_1), \widetilde{w}_1(t+T_1))$ as soluções com dados iniciais $(u(T_1), w(T_1))$ e $(u_1(T_1), w_1(T_1))$, respectivamente. Agora se $0 < t < \delta < T - T_1$, temos

$$\widetilde{u}(t) - \widetilde{u}_1(t) = i\int_0^t U(t-t')[F(\widetilde{u}_1(t'), \widetilde{w}_1(t')) - F(\widetilde{u}(t'), \widetilde{w}(t'))]dt',$$

$$\widetilde{w}(t) - \widetilde{w}_1(t) = i\int_0^t W(t-t')[G(\widetilde{u}_1(t'), \widetilde{w}_1(t')) - G(\widetilde{u}(t'), \widetilde{w}(t'))]dt'.$$

Assim, como em (6.22), podemos estimar

$$\|(\widetilde{u}, \widetilde{w}) - (\widetilde{u}_1, \widetilde{w}_1)\|_{X_{s,b}\times X^a_{s,b}} \;\leq\; c\delta^\gamma \widetilde{M}^2 \|(\widetilde{u}, \widetilde{w}) - (\widetilde{u}_1, \widetilde{w}_1)\|_{X_{s,b}\times X^a_{s,b}}. \tag{6.24}$$

Logo, se δ é suficientemente pequeno tal que $c\delta^\gamma\widetilde{M}^2 \leq 1/2$, vemos que $(\widetilde{u}(t), \widetilde{w}(t)) = (\widetilde{u}_1(t), \widetilde{w}_1(t))$ se $0 < t < \delta$ e, portanto, (u, w) e (u_1, w_1) coincidem além de T_1, o que contradiz a definição de T_1.

Finalmente, para ver que a aplicação $(u_0, w_0) \mapsto (u(t), w(t))$ é Lipschitz nos espaços afirmados, fixamos $(u_0, w_0) \in H^s_{per}(\mathbb{T}) \times H^s_{per}(\mathbb{T})$ e $T' \in (0, T)$, onde T é dado acima. Tome

$$0 < \varepsilon < \left(\frac{T^{\gamma/2}}{(T')^{\gamma/2}} - 1\right) \|(u_0, w_0)\|_{H^s_{per}\times H^s_{per}}$$

e seja $(\widetilde{u}_0, \widetilde{w}_0) \in H^s_{per}(\mathbb{T}) \times H^s_{per}(\mathbb{T})$ tal que $\|(u_0, w_0) - (\widetilde{u}_0, \widetilde{w}_0)\|_{H^s_{per}\times H^s_{per}} < \varepsilon$. Assim, se $(\widetilde{u}, \widetilde{w})$ é a solução de (6.2) com dado inicial $(\widetilde{u}_0, \widetilde{w}_0)$, as mesmas estimativas que fizemos anteriormente são válidas com T' no lugar de T, de forma que (u, w) e $(\widetilde{u}, \widetilde{w})$ estão bem definidas em $[-T', T']$. Mais ainda, para $t \in [-T', T']$

$$\|u - \widetilde{u}\|_{X_{s,b}} \leq c\|u_0 - \widetilde{u}_0\|_{H^s_{per}} + c(T')^\gamma M^2 \left(\|u - \widetilde{u}\|_{X_{s,b}} + \|w - \widetilde{w}\|_{X^a_{s,b}}\right).$$

$$\|w - \widetilde{w}\|_{X^a_{s,b}} \leq c\|w_0 - \widetilde{w}_0\|_{H^s_{per}} + c(T')^\gamma M^2 \left(\|u - \widetilde{u}\|_{X_{s,b}} + \|w - \widetilde{w}\|_{X^a_{s,b}}\right).$$

Daí,

$$\|(u, w) - (\widetilde{u}, \widetilde{w})\|_{X_{s,b}\times X^a_{s,b}} \leq c\|(u_0, w_0) - (\widetilde{u}_0, \widetilde{w}_0)\|_{H^s_{per}\times H^s_{per}} + 2cT^\gamma M^2 \|(u, w) - (\widetilde{u}, \widetilde{w})\|_{X_{s,b}\times X^a_{s,b}}$$

Desde que $2cT^\gamma M^2 \leq 1/2$, vemos que se $t \in [-T', T']$ então

$$\|(u, w) - (\widetilde{u}, \widetilde{w})\|_{X_{s,b}\times X^a_{s,b}} \leq 2c\|(u_0, w_0) - (\widetilde{u}_0, \widetilde{w}_0)\|_{H^s_{per}\times H^s_{per}} \tag{6.25}$$

Agora pela imersão $X_{s,b} \times X^a_{s,b} \hookrightarrow C(\mathbb{R}_t; H^s(\mathbb{T}) \times H^s(\mathbb{T}))$, obtemos de (6.25),

$$\sup_{t\in[-T', T']} \|(u, w) - (\widetilde{u}, \widetilde{w})\|_{H^s(\mathbb{T})\times H^s(\mathbb{T})} \leq 2c\|(u_0, w_0) - (\widetilde{u}_0, \widetilde{w}_0)\|_{H^s_{per}\times H^s_{per}}.$$

o que mostra o afirmado. $\square$

Observação 6.4.2. *Pelo Teorema* 6.4.1 *segue que a aplicação dado-solução,* $(u_0, w_0) \mapsto (u(t), w(t))$, *é localmente uniformemente contínua de* $H^s_{per} \times H^s_{per}$ *para* $C([-T', T']; H^s_{per} \times H^s_{per})$. *Nesse sentido, o resultado do Teorema* 6.4.1 *é o melhor possível, ou seja, se* $s < 0$ *então a aplicação dado-solução não é localmente uniformemente contínua. De fato, a prova se baseia num resultado análogo estabelecido para a equação de Schrödinger em [19]. Fixe* $s < 0$ *e* $\kappa \in (0, 1)$. *Para* $n \in \mathbb{N}$ *defina*

$$u_{\kappa,n}(x,t) \equiv 0, \qquad w_{\kappa,n}(x,t) = \kappa n^{-s} \exp(-it(n^2 - 9\kappa^2 n^{-2s})) \exp{(inx)}.$$

Assim, é fácil ver que $(u_{\kappa,n}, w_{\kappa,n})$ *é solução do problema de Cauchy* (6.1) *com dados iniciais*

$$u_0(x) = u_{\kappa,n}(x,0) \equiv 0, \qquad w_0(x) = w_{\kappa,n}(x,0) = \kappa n^{-s} \exp{(inx)}.$$

Considere qualquer sequência de números reais $(\kappa_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tal que* $\kappa_n \to \kappa$ *quando* $n \to \infty$ *e note que*

$$(u_{\kappa,n}(\cdot,0), w_{\kappa,n}(\cdot,0)) - (u_{\kappa_n,n}(\cdot,0), w_{\kappa_n,n}(\cdot,0)) \to (0,0), \quad em \quad H^s_{per} \times H^s_{per}.$$

Agora, para $t > 0$, *existem constantes* $C > 0$ *e* $\delta > 0$, *independentes de* n, *tais que*

$$\|\,(u_{\kappa,n}(\cdot,t), w_{\kappa,n}(\cdot,t)) - (u_{\kappa_n,n}(\cdot,t), w_{\kappa_n,n}(\cdot,t))\|_{H^s_{per}\times H^s_{per}}$$

$$= \|w_{\kappa,n}(\cdot,t) - w_{\kappa_n,n}(\cdot,t)\|_{H^s_{per}} \geq C|\exp(-9itn^{-2s}(\kappa^2 - \kappa_n^2)) - 1| - Cn^{-\delta}.$$

Logo, se a aplicação dado-solução fosse localmente uniformemente contínua então deveríamos ter

$$\lim_{n\to\infty} |\exp(-9itn^{-2s}(\kappa^2 - \kappa_n^2)) - 1| = 0,$$

o que certamente não ocorre se escolhermos κ_n *tal que*

$$(\kappa^2 - \kappa_n^2)n^{-2s} = \alpha n^\beta,$$

para $\alpha > 0$ *e* $\beta > 0$ *satisfazendo* $2s + \beta < 0$.

6.5 Boa Colocação Global

Finalmente podemos provar nosso resultado de boa colocação global.

Teorema 6.5.1. (*Boa Colocação Global*) *Sejam* $s \geq 0$, $\sigma > 0$ *e* $(u_0, w_0) \in H^s(\mathbb{T}) \times H^s(\mathbb{T})$. *Então a solução* (u, w) *dada no Teorema* 6.4.1 *pode ser estendida para qualquer intervalo de tempo.*

Demonstração. A demonstração é clássica e segue da Lei de Conservação

$$\int (|u|^2 + 3\sigma|w|^2)dx = \int (|u_0|^2 + 3\sigma|w_0|^2)dx. \tag{6.26}$$

De fato, inicialmente consideremos $s = 0$. Pelo Teorema 6.4.1 podemos escolher $T_0 = T_0(\|(u_0, w_0)\|_{L^2_{per} \times L^2_{per}})$ tal que a solução $(u(t), w(t))$ existe no intervalo de tempo $[-T_0, T_0]$. Seja agora $(\widetilde{u}, \widetilde{w})$ a solução com dado inicial $(u(T_0), w(T_0))$. Novamente pelo Teorema 6.4.1 existe um $T_1 = T_1(\|(u(T_0), w(T_0))\|_{L^2_{per} \times L^2_{per}})$ tal que a solução $(\widetilde{u}(t), \widetilde{w}(t))$ existe no intervalo $[T_0, T_0 + T_1]$. Mas por (6.26), temos (suponha sem perda de generalidade que $\sigma = 1/3$) $\|(u(T_0), w(T_0))\|_{L^2_{per} \times L^2_{per}} = \|(u_0, w_0)\|_{L^2_{per} \times L^2_{per}}$, o que significa que podemos tomar $T_1 = T_0$ e portanto podemos estender $(u(t), w(t))$ ao intervalo $[-T_0, 2T_0]$. Repetindo o mesmo argumento podemos estender (u, w) para qualquer intervalo de tempo.

Seja agora $s > 0$. Dado $(u_0, w_0) \in H^s_{per}(\mathbb{T}) \times H^s_{per}(\mathbb{T})$, seja $(u(t), w(t))$ a correspondente solução local. Desde que $H^s_{per}(\mathbb{T}) \subset L^2_{per}(\mathbb{T})$ segue que $(u(t), w(t))$ é também a solução local com dado inicial $(u_0, w_0) \in L^2_{per}(\mathbb{T}) \times L^2_{per}(\mathbb{T})$ e portanto de (6.23) vale a estimativa

$$\|(u, w)\|_{X_{0,b} \times X^a_{0,b}} \leq 2c\|(u_0, w_0)\|_{L^2_{per} \times L^2_{per}}. \tag{6.27}$$

Agora, pelo que fizemos anteriormente, a solução $(u(t), w(t))$ pode ser definida em $[-T_0, T_0]$ onde $T_0 = T_0(\|(u_0, w_0)\|_{L^2_{per} \times L^2_{per}})$ é dado acima. Além disso, pela demonstração do Corolário 6.3.4 segue que

$$\|(u(t), w(t))\|_{X_{s,b} \times X^a_{s,b}} \leq c\|(u(t), w(t))\|^2_{X_{0,b} \times X^a_{0,b}} \|(u(t), w(t))\|_{X_{s,b} \times X^a_{s,b}}$$

Assim, para $t \in [-T_0, T_0]$, vemos de (6.27) que $(u(t), w(t)) \in X_{s,b} \times X^a_{s,b}$. Logo a imersão $X_{s,b} \times X^a_{s,b} \hookrightarrow C(\mathbb{R}_t; H^s(\mathbb{T}) \times H^s(\mathbb{T}))$ implica que $(u(t), w(t)) \in H^s_{per}(\mathbb{T}) \times H^s_{per}(\mathbb{T})$, $t \in [-T_0, T_0]$. Repetindo esse mesmo argumento podemos definir $(u(t), w(t))$ em qualquer intervalo de tempo. Isso finaliza a prova do teorema. $\square$

CAPÍTULO 7

Conclusões e Trabalhos Futuros

De acordo com os resultados obtidos nesta tese, podemos concluir e ressaltar os seguintes pontos:

(i) O estudo de estabilidade/instabilidade das soluções ondas viajantes periódicas $\Psi = (0, w)$, onde $w(x,t) = e^{3i\gamma t}\psi_\gamma(x)$ e ψ_γ é a onda dnoidal do tipo I com um período fixado L dada no Teorema 2.1.2 está completa. Neste caso, a Teoria de Floquet é eficiente de modo que nossa análise espectral é satisfatória para aplicarmos as teorias de Grillakis *et al.* [31], Grillakis [29] e mostrarmos, respectivamente, um resultado de estabilidade não-linear por perturbações periódicas de período L e um resultado de instabilidade não-linear por perturbações periódicas de período $2L$.

(ii) Já o estudo de estabilidade/instabilidade das soluções ondas viajantes periódicas $\Phi = (u, w)$, onde $u(x,t) = e^{i\gamma t}\phi_\gamma(x)$, $w(x,t) = be^{3i\gamma t}\phi_\gamma(x)$ e ϕ_γ é a onda dnoidal do tipo II com um período L fixado dada no Teorema 2.3.2, não está totalmente completo. Nosso resultado de instabilidade é somente em relação a perturbações periódicas de período $2L$ e não sabemos se tais ondas são ou não instáveis por perturbações periódicas de período L (veja previsão trabalhos futuros abaixo). Neste caso, a Teoria de Floquet não é totalmente satisfatória para obtermos um resultado conclusivo.

(iii) No caso das ondas viajantes cnoidal $\Psi(x,t) = (0, e^{3i\gamma t}\psi_\gamma(x))$, onde ψ_γ é a onda cnoidal com um período L fixado dada no Teorema 2.2.1, nossos estudos não são completamente satisfatório, posto que não sabemos responder se tais soluções são ou não não-linearmente estáveis por perturbações periódicas de período nL, $n = 1, 2, \ldots$ em todo o espaço energia $H^1_{per}([0, nL])$. Por outro lado, nosso resultado de estabilidade no espaço $\mathcal{X}_1$ contribui, juntamente com os trabalhos de Gallay e Hărăguş ([24], [25]), e Ivey e Lafortune ([36]), para acreditarmos que tais soluções são não-linearmente estáveis por perturbações periódicas de período L.

(iv) No que concerne a estabilidade espectral das ondas cnoidal dadas no Teorema 2.2.2, apesar de nosso resultado não implicar um resultado de estabilidade/instabilidade não-linear, ele tem seu próprio valor no entendimento da dinâmica do sistema (11).

Algumas questões levantadas nessa tese ainda merece nossa atenção para eventuais extensões ou trabalhos futuros, os quais colocamos abaixo:

- Nossa primeira proposta de estudos futuros é a análise de estabilidade/instabilidade das ondas dnoidal $\Phi = (u, w)$, onde $u(x,t) = e^{i\gamma t}\phi_\gamma(x)$, $w(x,t) = be^{3i\gamma t}\phi_\gamma(x)$ e ϕ_γ é a onda dnoidal do tipo II com um período L fixado dada no Teorema 2.3.2, com relação a perturbações periódicas de período L. Do ponto de vista de ondas solitárias, conforme indicado por Sammut *et al.* [56], a onda viajante solitária dada na Observação 2.3.1 pertence a uma família de soluções ″multi-humped″ cuja única solução ″one-humped″ é aquela dada na Observação 2.3.1. Desde que em geral soluções multi-humped são instáveis (veja [51], [66]) acredita-se, baseando-se ainda em simulações numéricas realizadas por Sammut *et al.* [56], que as ondas viajantes solitárias dadas na Observação 2.3.1 são não-linearmente instáveis. Assim, uma alternativa para mostrar um resultado de instabilidade para as ondas periódicas Φ por perturbações periódicas de período L, pelo menos para L suficientemente grande, seria mostrar que as referidas ondas solitárias são realmente instáveis em $H^1(\mathbb{R})$ e depois utilizando os resultados de Gardner [27] ou Sandstede e Scheel [58], tentar ″importar″ a instabilidade das ondas solitárias para nossas ondas periódicas, posto que tais ondas periódicas de período L se aproximam das ondas solitárias quando $L \to \infty$.

- Uma outra proposta é continuar investigando a estabilidade/instabilidade não-linear das soluções ondas cnoidal dadas no Teorema 2.2.1 por perturbações periódicas de período nL, $n = 1, 2, \ldots$. Um tal estudo talvez possa ser feito utilizando-se do fato que o operador $\mathcal{A}_{a,b,\beta}$, para β suficientemente pequeno, possui um autovalor λ com $\Re e(\lambda) > 0$, ou seja, o problema de fronteira

$$\begin{cases} \mathcal{A}_{a,b}v = \lambda v \\ v(0) = e^{-i\beta L}v(L), \;\; v'(0) = e^{-i\beta L}v'(L) \end{cases} \tag{7.1}$$

possui pelo menos um autovalor com parte real estritamente positiva para β suficientemente pequeno. Isso poderia indicar que pelo menos para alguns valores de n teríamos instabilidade espectral nos espaços $L^2_{per}([0, nL])$, se relacionarmos o espectro de $\mathcal{A}_{a,b}$ em $H^2_{per}([0, L])$ com o problema de autovalores (7.1). Uma tal relação é bem conhecida para operadores auto-adjuntos do tipo Schrödinger (veja [23]). A dificuldade aqui é que o operador $\mathcal{A}_{a,b}$ não é auto-adjunto.

- No Capítulo 5 estudamos existência de soluções periódicas para o sistema (11) do tipo (u, w) com $u = 0$ e estudamos sua estabilidade no sentido espectral quando a onda w é suficientemente pequena. Uma primeira questão que surge aqui é a seguinte: será que as soluções de grande amplitude ainda são espectralmente instáveis? Tal resultado talvez possa ser respondido utilizando os trabalhos de Hărăguş e Kapitula [33] e Ivey e Lafortune [36]. Uma outra questão que merece atenção é estabelecer a existência de soluções para o caso em que $u \neq 0$ e posteriomente estudar suas propriedades de estabilidade/instabilidade.

- Do ponto de vista matemático, nosso sistema pode ser generalizado para o seguinte sistema
$$\begin{cases} iu_t + u_{xx} - \beta_1 u + \Big(\beta_2|u|^2 + \beta_3|w|^2\Big)u + \beta_4\overline{u}^2 w = 0 \\ i\sigma w_t + w_{xx} - \alpha_1 w + \Big(\alpha_2|w|^2 + \alpha_3|u|^2\Big)w + \alpha_4 u^3 = 0, \end{cases} \tag{7.2}$$
onde $u, w : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ e $\sigma, \alpha_i, \beta_i$ são parâmetros reais. O sistema (7.2) tem sido bastante estudado para valores especiais dos parâmetros σ, α_i, β_i tanto por matemáticos quanto por físicos (veja [4], [22], [46], [51], [60], [64]), por exemplo para $\sigma = 1$, $\alpha_4 = \beta_4 = 0$ e $\alpha_2 = \beta_3$, existência e estabilidade de soluções ondas viajantes solitárias tem sido estudado em [22], [51]. Em [22] foi feito uma interessante análise sobre os parâmetros para que o sistema admita soluções ondas viajantes solitárias do tipo (u, w) com $u \neq 0$, $w \neq 0$ (veja também [4], [60]). Em [51] foi considerado o sistema simplificado
$$\begin{cases} iu_t + u_{xx} + \Big(|u|^2 + \gamma|w|^2\Big)u = 0 \\ iw_t + w_{xx} + \Big(\gamma|w|^2 + |u|^2\Big)w = 0, \end{cases} \tag{7.3}$$

onde $\gamma \in \mathbb{R}, \gamma > -1$. Neste trabalho, soluções ondas viajantes solitárias do tipo $u(x,t) = e^{i\beta t}\phi_1(x)$, $w(x,t) = e^{i\beta t}\phi_2(x)$, $\beta > 0$ foram encontradas na forma

$$\phi_1(x) = \phi_2(x) = \sqrt{\frac{2\beta}{1+\gamma}} sech(\sqrt{\beta}x)$$

e um critério foi estabelecido para a estabilidade linear de tais soluções. Até onde sabemos, nenhuma abordagem periódica no sentido dessa tese tem sido feita para o sistema (7.3), mas acreditamos que usando as técnicas desta tese, um estudo de estabilidade/instabilidade não-linear de ondas viajantes periódicas possa ser feito.

Gostaríamos ainda de aplicar as mesmas idéias desenvolvidas nessa tese para outros problemas da física matemática que modelam a propagação de um feixe de luz num determinado meio, dentre o quais destacamos o seguinte sistema:

- O sistema (veja Kivshar *et al.* [44])

$$\begin{cases} iw_t + w_{xx} - w + \overline{w}v + \overline{v}u = 0 \\ 2iv_t + v_{xx} - \alpha v + \dfrac{1}{2}w^2 + \overline{w}u = 0 \\ 3iu_t + u_{xx} - \alpha_1 u + \chi vw = 0, \end{cases} \tag{7.4}$$

onde α, α_1 e χ são constantes reais. Note que quando $u \equiv 0$, $\chi = 0$ o sistema (7.4) se reduz ao sistema Second-Harmonic-Genereting (SHG)

$$\begin{cases} iw_t + w_{xx} - w + \overline{w}v = 0 \\ 2iv_t + v_{xx} - \alpha v + \dfrac{1}{2}w^2 = 0, \end{cases} \tag{7.5}$$

estudado por Angulo e Linares [7] e Yew [66]. Soluções ondas solitárias para o sistema (7.4), com $\alpha = \alpha_1 = 1$, do tipo $w = w_0 sech^2(x/2)$, $v = v_0 sech^2(x/2)$ e $u = u_0 sech^2(x/2)$, onde w_0, v_0 e u_0 são constantes que satisfazem as relações

$$w_0^2 = \frac{9v_0}{3 + 4\chi v_0}, \qquad 4\chi v_0^2 + 6v_0 = 9, \qquad u_0 = \frac{2}{3}\chi w_0 v_0,$$

foram mostradas em Kivshar *et al.* [44]. Nenhum resultado de estabilidade/instabilidade não-linear é conhecido tanto para ondas viajantes solitárias quanto para ondas viajantes periódicas.

CAPÍTULO 8

Apêndice

8.1 Apêndice A

Daremos aqui as principais propriedades do operador de Schrödinger

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x), \tag{8.1}$$

onde $q(x) \in \mathbb{R}$ é suave e tem período minimal $L > 0$. Estamos interessados no espectro do operador H no espaço $L^2_{per}([0, L])$ ou nos espaços $L^2(\mathbb{R})$ e $C_b(\mathbb{R})$, o espaço das funções limitadas e uniformemente contínuas sobre $\mathbb{R}$.

Nosso primeiro objetivo será estudar o espectro de H no espaço $L^2_{per}([0, L])$. Considerando a equação diferencial ordinária

$$Hv = \lambda v, \qquad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{8.2}$$

Todas as soluções periódicas de (8.2) podem ser caracterizadas da seguinte forma: sejam $\phi_1(x, \lambda)$ e $\phi_2(x, \lambda)$ as soluções de (8.2) satisfazendo

$$\phi_1(0, \lambda) = 1, \phi_1'(0, \lambda) = 0, \qquad \phi_2(0, \lambda) = 0, \phi_2'(0, \lambda) = 1,$$

respectivamente, e defina

$$D = D(\lambda) = \phi_1(L, \lambda) + \phi_2'(L, \lambda).$$

Então o seguinte teorema, conhecido como Teorema de Floquet, pode ser encontrado em [23], pg 6:

Teorema 8.1.1. *Nas condições acima tem-se:*

(i) *Se $D > 2$. Existem duas soluções linearmente independentes do tipo*

$$\psi_1(x) = e^{mx}p_1(x), \qquad \psi_2(x) = e^{-mx}p_2(x),$$

onde $m \in \mathbb{R}$ e $p_k, k = 1, 2$, são periódicas de período L.

(ii) *Se $D < -2$. Análogo ao caso (i) com m substituído por $m + \frac{\pi i}{L}$.*

(iii) *Se $-2 < D < 2$. Existem $\alpha \in \mathbb{R}$ com $0 < \alpha L < \pi$ (ou $-\pi < \alpha L < 0$) e duas soluções linearmente independentes da forma*

$$\psi_1(x) = e^{i\alpha x}p_1(x), \qquad \psi_2(x) = e^{-i\alpha x}p_2(x),$$

onde p_1 e p_2 são periódicas de período L.

(iv) *Se $D = 2$. Existem duas soluções linearmente independentes do tipo*

$$\psi_1(x) = p_1(x), \qquad \psi_2(x) = p_2(x)$$

ou do tipo

$$\psi_1(x) = p_1(x), \qquad \psi_2(x) = xp_1(x) + p_2(x),$$

onde p_1 e p_2 são periódicas de período L.

(v) *Se $D = -2$. Existem duas soluções linearmente independentes do tipo*

$$\psi_1(x) = e^{\frac{i\pi}{L}x}p_1(x) = P_1(x), \qquad \psi_2(x) = e^{\frac{i\pi}{L}x}p_2(x) = P_2(x)$$

ou do tipo

$$\psi_1(x) = P_1(x), \qquad \psi_2(x) = xP_1(x) + P_2(x),$$

onde p_1 e p_2 são periódicas de período L.

Note que no caso (v) as funções P_1 e P_2 são semi-periódicas com semi-período L, ou seja, satisfazem $P_k(x + L) = -P_k(x), k = 1, 2$.

Observação 8.1.2. *Nos casos (iii)-(v) sempre existe uma solução do tipo*

$$v(x) = e^{i\alpha x}p(x),$$

onde $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{L}, \frac{\pi}{L}\right]$ *e* p *é periódica de período* L. *Além disso,* ***nestes casos e, somente nestes casos, o problema (8.2) possui uma solução limitada****.*

No que segue, denotaremos por $\sigma_{L^2_{per}([0,L])}(H)$, $\sigma_{L^2(\mathbb{R})}(H)$ e $\sigma_{C_b(\mathbb{R})}(H)$, respectivamente, o espectro de H em $L^2_{per}([0,L])$, $L^2(\mathbb{R})$ e $C_b(\mathbb{R})$.

Consideremos o *problema de autovalores periódico*

$$\begin{cases} Hu = \lambda u \\ u(0) = u(L), \;\; u'(0) = u'(L). \end{cases} \tag{8.3}$$

Dessa forma, determinar o espectro de H em $L^2_{per}([0,L])$ equivale a encontrar os valores de λ para os quais o problema (8.3) possui uma solução não trivial. Da teoria dos operadores compactos simétricos segue que $\sigma_{L^2_{per}([0,L])}(H)$ é constituído por uma sequência de autovalores $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ satisfazendo $\lambda_0 \le \lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots$, onde autovalores duplos são enumerados duas vezes e $\lambda_n \to \infty$ quando $n \to \infty$. Denotaremos por ζ_n a autofunção associada a λ_n. O problema (8.3) está relacionado com o *problema de autovalores semi-periódico*

$$\begin{cases} Hu = \mu u \\ u(0) = -u(L), \;\; u'(0) = -u'(L). \end{cases} \tag{8.4}$$

Os autovalores de (8.4) podem ser enumerados numa sequência $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ com $\mu_0 \le \mu_1 \le \mu_2 \le \ldots$, e $\mu_n \to \infty$ quando $n \to \infty$. Novamente autovalores duplos são enumerados duas vezes. Denotaremos por ξ_n a autofunção associada a μ_n.

A Eq. (8.2) possui uma solução de período L se, e somente se, $\lambda = \lambda_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ e possui uma solução de período $2L$ se, e somente se, $\lambda = \lambda_n$ ou $\lambda = \mu_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Se todas as soluções de (8.2) são limitadas dizemos que (8.2) é *estável*. Se (8.2) possui pelo menos uma solução não trivial limitada, dizemos que (8.2) é *condicionalmente estável*. Caso contrário, dizemos que a Eq. (8.2) é *instável*. Além disso, o Teorema de Oscilação (veja Teorema 2.1 em [47]) nos diz que os autovalores λ_n e μ_n satisfazem a relação:

$$\lambda_0 < \mu_0 \le \mu_1 < \lambda_1 \le \lambda_2 < \mu_2 \le \mu_3 < \lambda_3 \le \lambda_4 \le \ldots.$$

Os intervalos $(\lambda_0, \mu_0), (\mu_1, \lambda_1), \ldots$ são chamados *intervalos de estabilidade*, posto que todas as soluções de (8.2) são limitadas se $\lambda \in (\lambda_0, \mu_0) \cup (\mu_1, \lambda_1) \cup \ldots$. Os intervalos $[\lambda_0, \mu_0], [\mu_1, \lambda_1], \ldots,$

são chamados de *intervalos de estabilidade condicional*, posto que (8.2) possui pelo menos uma solução não trivial limitada se $\lambda \in [\lambda_0, \mu_0] \cup [\mu_1, \lambda_1] \cup \ldots$ e, finalmente os intervalos $(-\infty, \lambda_0), (\mu_0, \mu_1), (\lambda_1, \lambda_2), \ldots$ são chamados *intervalos de instabilidade* posto que todas as soluções de (8.2) são ilimitadas se $\lambda \in (-\infty, \lambda_0) \cup (\mu_0, \mu_1) \cup (\lambda_1, \lambda_2) \cup \ldots$, sendo que alguns destes intervalos são omitidos sempre que temos um autovalor duplo. Note que o intervalo de instabilidade $(-\infty, \lambda_0)$ sempre aparece na sequência acima.

Teorema de Comparação: o Teorema de Comparação pode ser enunciado como segue: *Seja* $H_1 = -\frac{d^2}{dx^2} + q_1(x)$, *onde* q_1 *é suave e tem período minimal* L. *Denote por* $\lambda_{1,n}$ *os autovalores do problema periódico* (8.3) *com* H *substituído por* H_1. *Se* $q_1(x) \geq q(x)$ *então*

$$\lambda_{1,n} \geq \lambda_n, \qquad n = 0, 1, 2. \ldots . \tag{8.5}$$

Além disso, a desigualdade em (8.5) *é estrita, a menos que* $q_1(x) = q(x)$ *em quase toda parte.*

Um resultado análogo também é válido para os autovalores do problema semi-periódico (8.4).

Agora temos a caracterização do número de zeros das autofunções ζ_n e ξ_n associadas aos problemas de autovalores (8.3) e (8.4), a saber,

(i) ζ_0 não tem zeros em $[0, L)$,

(ii) ζ_{2n+1} e ζ_{2n+2} tem exatamente $2n + 2$ zeros em $[0, L)$,

(iii) ξ_{2n} e ξ_{2n+1} tem exatamente $2n + 1$ zeros em $[0, L)$.

Exemplo 8.1.3. (***A Equação de Lamé***) *Consideremos a equação de Lamé*

$$v'' + [\lambda - m(m+1)k^2 sn^2(x; k)]v = 0, \tag{8.6}$$

onde m *é um parâmetro real,* sn *denota a Função Elíptica Jacobiana denominada senoidal e* k^2 *é o módulo elíptico (veja Apêndice B). Então a Eq.* (8.6) *possui soluções de período* $2K$ *ou* $4K$ *se, e somente se,* m *é um inteiro. Se* l *é definido por* $l = m$ *se* m *é um inteiro não-negativo e por* $l = -m - 1$ *se* m *é um inteiro negativo então a equação de Lamé* (8.6) *terá no máximo* $l + 1$ *intervalos de instabilidade (incluindo o intervalo* $(-\infty, \lambda_0)$*). Mais ainda, se* m *é um inteiro não-negativo então* (8.6) *possui exatamente* $m + 1$ *intervalos de instabilidade (veja [47]).*

Estaremos agora preocupados com o espectro de H em $L^2(\mathbb{R})$ e $C_b(\mathbb{R})$, bem como a decomposição de H em operadores do tipo Bloch. O próximo resultado pode ser encontrado na demonstração da Proposição 2.1 em [26].

Teorema 8.1.1. *Tem-se que $\lambda \in \sigma_{C_b(\mathbb{R})}(H)$ se, e somente se, o operador $(H - \lambda I)$ tem núcleo não trivial em $C_b(\mathbb{R})$.*

Como um resultado imediato do Teorema 8.1.1 e da Observação 8.1.2 anterior, temos

Corolário 8.1.4. *$\lambda \in \sigma_{C_b(\mathbb{R})}(H)$ se, e somente se, a Eq. (8.2) tem uma solução do tipo $v(x) = e^{i\alpha x}p(x)$ com $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{L}, \frac{\pi}{L}\right]$ e p periódica com período L.*

Seja S a união de todos os intervalos de estabilidade, i.e.,

$$S = [\lambda_0, \mu_0] \cup [\mu_1, \lambda_1] \cup [\lambda_2, \mu_2] \cup \ldots . \tag{8.7}$$

Segue do Teorema 8.1.1 e do Corolário 8.1.4 que

$$\sigma_{C_b(\mathbb{R})}(H) = S. \tag{8.8}$$

Por outro lado, é bem conhecido que $\sigma_{L^2(\mathbb{R})}$ é puramente essencial e (ver [53], pg. 297)

$$\sigma_{L^2(\mathbb{R})}(H) = S. \tag{8.9}$$

Como uma consequência de (8.8) e (8.9), temos o importante teorema

Teorema 8.1.5.

$$\sigma_{L^2(\mathbb{R})}(H) = \sigma_{C_b(\mathbb{R})}(H) = S.$$

Notemos agora que para $v(x) = e^{i\alpha x}p(x)$, com p periódica de período L, temos as seguintes equivalências

$$\begin{aligned} -v'' + q(x)v - \lambda v = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad -(\partial_x + i\alpha)^2 p + q(x)p - \lambda p = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad [-(\partial_x + i\alpha)^2 + q(x)]p = \lambda p \qquad (8.10) \\ &\Leftrightarrow \quad \lambda \in \sigma_{L^2_{per}([0,L])}(H_\alpha), \end{aligned}$$

onde $H_\alpha = -(\partial_x + i\alpha)^2 + q(x)$. Assim,

$$\lambda \in \sigma_{C_b(\mathbb{R})}(H) \quad \Leftrightarrow \quad \lambda \in \sigma_{L^2_{per}([0,L])}(H_\alpha), \ \text{ para algum } \ \alpha \in \left(-\tfrac{\pi}{L}, \tfrac{\pi}{L}\right]$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda \in \bigcup_{\alpha \in \left(-\frac{\pi}{L}, \frac{\pi}{L}\right]} \sigma_{L^2_{per}([0,L])}(H_\alpha).$$

Na verdade, acabamos de provar o seguinte resultado fundamental

Corolário 8.1.6.

$$\sigma_{L^2(\mathbb{R})}(H) = \sigma_{C_b(\mathbb{R})}(H) = \bigcup_{\alpha \in \left(-\frac{\pi}{L}, \frac{\pi}{L}\right]} \sigma_{L^2_{per}([0,L])}(H_\alpha).$$

Observação 8.1.7. *O Corolário* 8.1.6 *nos dá uma caracterização do conjunto S em* (8.7) *como uma união de espectros de operadores sobre $L^2_{per}([0,L])$. Uma outra caracterização similar pode ser feita estudando o problema de autovalores θ-periódico (em $L^2_{per}([0,L])$)*

$$\begin{cases} -y'' + q(x)y = \lambda y \\ \\ y(L) = e^{i\pi\theta} y(0), \ \ y'(L) = e^{i\pi\theta} y'(0), \end{cases}$$

onde $\theta \in (-1,1]$. É fácil verificar que, assim como no caso periódico, o problema acima é auto-adjunto para todo $\theta \in (-1,1]$ e que existe uma sequência enumerável de autovalores, digamos $\lambda_n(\theta), n = 0, 1, \dots,$ convergindo para $+\infty$. Assim, para

$$\mathcal{S} = \{\lambda_n(\theta); \ \ \theta \in (-1,1] \ \ e \ \ n = 0, 1, \dots\}$$

temos $\mathcal{S} = S$ (ver [23], pg. 32).

Observação 8.1.8. *Note que* (8.10) *mostra que os problemas*

$$\begin{cases} H_\alpha p = \mu p \\ p(0) = p(L), \ \ p'(0) = p'(L). \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} Hv = \mu v \\ v(0) = e^{-i\alpha L} v(L), \ \ v'(0) = e^{-i\alpha L} v'(L). \end{cases}$$

são equivalentes pela transformação $v(x) = e^{i\alpha x} p(x)$.

8.2 Apêndice B

Estabeleceremos algumas propriedades básicas das integrais elípticas Jacobianas (veja [20]). A *integral elíptica de primeiro tipo* é definida por

$$\int_0^y \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \int_0^\varphi \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} \equiv F(\varphi,k),$$

onde $y = \text{sen}\varphi$ e $k \in (0,1)$. A *integral elíptica de segundo tipo* é definida por

$$\int_0^y \sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}}\, dt = \int_0^\varphi \sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\, d\theta \equiv E(\varphi,k).$$

O número k é chamado de módulo elíptico. O número $k' = \sqrt{1-k^2}$ é chamado de módulo elíptico complementar. O parâmetro φ é chamado o argumento das integrais elípticas. É usualmente entendido que $0 \leq y \leq 1$ ou ainda que $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. Para $y = 1$, as integrais acima são ditas ser completas. Neste caso, escrevemos,

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} \equiv F\left(\frac{\pi}{2},k\right) \equiv K(k) \equiv K,$$

e

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}}\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\, d\theta \equiv E\left(\frac{\pi}{2},k\right) \equiv E(k) \equiv E.$$

Claramente temos que $K(0) = E(0) = \frac{\pi}{2}$, enquanto que $E(1) = 1$ e $K(1) = +\infty$. Para $k \in (0,1)$, temos $\frac{dK}{dk} > 0$, $\frac{d^2K}{dk^2} > 0$, $\frac{dE}{dk} < 0$, $\frac{d^2E}{dk^2} < 0$ e $E(k) < K(k)$. Além disso, $E(k) + K(k)$ e $E(k)K(k)$ são funções estritamente crescentes de $k \in (0,1)$. As integrais elípticas completas K e E satisfazem as seguintes *equações diferenciais hipergeométricas*

$$\begin{cases} kk'^2\dfrac{d^2K}{dk^2} + (1-3k^2)\dfrac{dK}{dk} - kK = 0, \\[2ex] kk'^2\dfrac{d^2E}{dk^2} + k'^2\dfrac{dE}{dk} + kE = 0 \end{cases}$$

e suas derivadas são dadas pelas relações

$$\begin{cases} \dfrac{dK}{dk} = \dfrac{E - k'^2K}{kk'^2}, \\[2ex] \dfrac{dE}{dk} = \dfrac{E-K}{k}. \end{cases}$$

As funções Jacobianas elípticas serão definidas como segue. Considere a integral elíptica,

$$u(y_1;k) \equiv u = \int_0^{y_1} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \int_0^{\varphi} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} \equiv F(\varphi,k),$$

que é uma função estritamente crescente na variável y_1. Sua inversa é escrita como sendo $y_1 = \mathrm{sen}\varphi \equiv \mathrm{sn}(u;k)$ onde $\varphi = \mathrm{am}(u;k)$. A função $\mathrm{sn}(u;k)$ é chamada **senoidal** e a função $\mathrm{am}(u;k)$ é chamada função **amplitude** de u. Podemos escrever ainda, $y_1 = \mathrm{sn}u$ quando não é necessário enfatizar o módulo k. As outra duas funções elípticas básicas, as funções **cnoidal** e **dnoidal**, são definidas em termos de sn por,

$$\begin{cases} \mathrm{cn}(u;k) = \sqrt{1-y_1^2} = \sqrt{1-\mathrm{sn}^2(u;k)}, \\ \\ \mathrm{dn}(u;k) = \sqrt{1-k^2y_1^2} = \sqrt{1-k^2\mathrm{sn}^2(u;k)}. \end{cases}$$

Notemos que estas funções são normalizadas fazendo-se uso de $\mathrm{sn}(0;k)=0,\ \mathrm{cn}(0;k)=1$ e $\mathrm{dn}(0;k)=1$. As funções $\mathrm{cn}(\cdot;k)$ e $\mathrm{dn}(\cdot;k)$ são pares enquanto $\mathrm{sn}(\cdot;k)$ é ímpar. Estas funções são periódicas com respectivos períodos minimais dados por $4K$, $4K$ e $2K$, ou seja,

$$\mathrm{sn}(u+4K;k) = \mathrm{sn}(u;k),\ \mathrm{cn}(u+4K;k) = \mathrm{cn}(u;k),\ \mathrm{dn}(u+2K;k) = \mathrm{dn}(u;k).$$

Além disso, as relações,

$$\begin{cases} \mathrm{sn}^2u + \mathrm{cn}^2u = 1,\ k^2\mathrm{sn}^2u + \mathrm{dn}^2u = 1, k'^2\mathrm{sn}^2u + \mathrm{cn}^2u = \mathrm{dn}^2u, \\ \\ -1 \le \mathrm{sn}(u;k) \le 1,\ -1 \le \mathrm{cn}(u;k) \le 1,\ k'^2 \le \mathrm{dn}(u;k) \le 1, \\ \\ \mathrm{sn}(u+2K;k) = -\mathrm{sn}(u;k),\ \mathrm{cn}(u+4K;k) = -\mathrm{cn}(u;k), \end{cases}$$

ocorrem para todo $k \in (0,1)$ e $u \in \mathbb{R}$. Alguns valores específicos são dados abaixo

$$\mathrm{sn}(0) = 0,\ \mathrm{cn}(0) = 1,\ \mathrm{sn}(K) = 1,\ \mathrm{cn}(K) = 0,$$

$$\mathrm{sn}(u+2K) = -\mathrm{sn}u, \mathrm{cn}(u+2K) = -\mathrm{cn}u.$$

Para os valores específicos de $k = 0, 1$, temos

$$\mathrm{sn}(u;0) = \sin u,\ \mathrm{cn}(u;0) = \cos u,\ \mathrm{dn}(u,0) = 1,$$

$$\mathrm{sn}(u;1) = \tanh u,\ \mathrm{cn}(u;1) = \mathrm{sech}u, \mathrm{dn}(u,1) = \mathrm{sech}u.$$

Finalmente, tem-se as fórmulas para as derivadas,

$$\frac{\partial}{\partial u}\mathrm{sn}u = \mathrm{cn}u\ \mathrm{dn}u,\ \frac{\partial}{\partial u}\mathrm{cn}u = -\mathrm{sn}u\ \mathrm{dn}u,\ \frac{\partial}{\partial u}\mathrm{dn}u = -k^2\mathrm{cn}u\ \mathrm{sn}u.$$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Akhmediev, N., Ankiewicz, A., *Solitons, Nonlinear Pulses and Beams*, Shapman&Hall, London, 1997.

[2] Akhmediev, N., Ankiewicz, A., Partially coherent solitons on a finite background, *Phys. Rev. Lett.* **82** (1999), 2261-2264.

[3] Albert, J. P., Bona, J. L., Henry, D., Sufficient conditions for stability of solitary-waves solutions of model equations for long waves, *Physica D* **24** (1987), 343-366.

[4] Ambrosetti, A., Colorado, E., Bound and ground states of coupled nonlinear Schrödinger equations, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* **342** (2006), 453-458.

[5] Angulo, J., Stability of periodic traveling waves solutions for the Schrödinger and Modified Korteweg-de Vries equations, *J. Diff. Equations* **235** (2007),1-30.

[6] Angulo, J., Bona, J. L., Scialom, M., Stability of cnoidal waves, *Adv. Differential Equations* **11** (2006), 1321-1374.

[7] Angulo, J., Linares, F., Periodic pulses of coupled nonlinear Schrödinger equations in optics, *Indiana Univ. Math. J.* **56** (2007) 847-878.

[8] Angulo, J., *Existence and stability of solitary wave solutions to nonlinear dispersive evolution equations*, Publicações Matemáticas, IMPA, (2003).

[9] Angulo, J., Natali, F., Positivity properties and stability of periodic travelling-wave solutions, *preprint,* (2007).

[10] Benjamin, T. B., Internal waves of permanent form in fluids of great depth, *J. Fluid Mech.* **29** (1967), 559-592.

[11] Bejamin, T. B., The stability of solitary waves, *Proc. Royal Soc. London* **A 338** (1972), 153-183.

[12] Bejamin, T. B., Lectures on nonlinear motion. In *Nonlinear Wave Motion*, American Math. Soc., Providence, R. I. *Lectures Notes in Applied Mathematics* **15** (1974), 3-47.

[13] Bona, J. L., On the stability theory of solitary waves, *Proc. Royal Soc. London* **A 344** (1975), 363-374.

[14] Bourgain, J., Fourier transform restriction phenomena for certain lattice subsets and applications to nonlinear evolution equations I, II, *Geom. Funct. Anal.* **3** (1993), 107-156, 209-262.

[15] Bourgain, J., *Global Solutions of Nonlinear Schrödinger Equations*, Amer. Math. Soc. Coll. Publ., vol. **46**, American Mathematical Society, Providence (1999).

[16] Boussinesq, J., Théorie de l'intumescence liquide appeleé onde solitaire ou de translation se propageant dans un canal re rectangular, *Comptes Rendus* **72** (1871), 755-759.

[17] Boussinesq, J., Théorie des ondes et des remous qui se propageant le long d'un canal rectangular horizontal en communiquant au liquide contenu dans ce canal des vitesse sensiblement pareilles de la surface au fond, *J. Math. Pure Appl.* (2) **17** (1872), 55-108.

[18] Bragança, L. M. M., *O Problema de Cauchy para um sistema de equações do tipo Schrödinger não-linear de terceira ordem*, Tese de Doutorado, Universidade Estadual de Campinas, 2007.

[19] Burg, N., Gérard, P., Tzvetkov, N., An instability property of the nonlinear Schrödinger equation on S^d, *Math. Res. Lett.* **9** (2002), 323-335.

[20] Byrd, P. F., Friedman, M. D., *Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Scientists*, Springer Verlag, Nova York (1971).

[21] Cazenave, T., *An Introduction to Nonlinear Schrödinger Equation*, Textos de Métodos Matemáticos, vol. **26**, Universidade Federal do Rio de Janeiro (1989).

[22] de Figueiredo, D. G., Lopes, O., Solitary waves for some nonlinear Schrödinger systems, *Ann. Inst. H. Poincare*, AN (2007), doi:10.1016/j.anihpc.2006.11.006.

[23] Eastham, M. S. P., *The Spectral Theory of Periodic Differential Equtions*, Scottish Academic Press, London (1973).

[24] Gallay, T., Hărăguş, M., Stability of small periodic waves for nonlinear Schrödinger equation, *J. Differential Equations* **234** (2007), 544-581.

[25] Gallay, T., Hărăguş, M., Orbital Stability of periodic waves for nonlinear Schrödinger equation, *aceito no J. Dyn. Diff. Eqns.*

[26] Gardner, R. A., On the structure of the spectra of periodic travelling waves, *J. Math. Pures Appl.* **72** (1993), 415-439.

[27] Gardner, R. A., Spectral analysis of long wavelength periodic waves and applications, *J. Für Die Reine und Angewandte Mathematik*, **491** (1997), 149-181.

[28] Grillakis, M., Linearized instability for nonlinear Schrödinger and Klein-Gordon equations, *Comm. Pure Appl. Math.* **41** (1988), 747-774.

[29] Grillakis, M., Analysis of the linearization around a critical point of an infinite-dimensional Hamiltonian system, *Comm. Pure Appl. Math.* **43** (1990), 299-333.

[30] Grillakis, M., Shatah J., Strauss, W., Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry I, *J. Funct. Anal.* **74** (1987), 160-197.

[31] Grillakis, M., Shatah J., Strauss, W., Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry II, *J. Funct. Anal.* **94** (1990), 308-348.

[32] Hărăguş, M., Lombardi, E., Scheel, A., Spectral stability of wave trains in the Kawahara equation, *J. Math. Fluid Mech.* **8** (2006), 482-509.

[33] Hărăguş, M., Kapitula, T., On the spectra of periodic waves for infinite-dimensional Hamiltonian systems, *preprint* (2007).

[34] Ince, E. L., The periodic Lamé functions, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh* **60** (1940), 47-63.

[35] Iorio, R., Iorio, V. M. V., *Fourier Analysis and Partial Differential Equations*, 70, Cambridge Stud. in Advan. Math. 2001.

[36] Ivey, T., Lafortune, S., Spectral stability of periodic NLS and CGL solutions, *preprint.*

[37] Kapitula, T., Kevrekidis, P. G., Sandstede, B., Counting eigenvalues via the Krein signature in infinite-dimensional Hamiltonian systems, *Physica D* **195** (2004), 263-282.

[38] Kato, T., *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer-Verlag, 1976.

[39] Kenig, C. E., Ponce, G., Vega, L., A bilinear estimate with applications to the KdV equation, *J. Amer. Math. Soc.* **9** (1996), 573-603.

[40] Kenig, C. E., Ponce, G., Vega, L., Quadratic forms for the 1-D semilinear Schrödinger equation, *Trans. Amer. Math. Soc.* **348** (1996), 3323-3353.

[41] Kenig, C. E., Ponce, G., Vega, L., The Cauchy problem for the Korteweg-de Vries equation in Sobolev spaces of negative indices, *Duke Math. J.* **71** (1993), 1-21.

[42] Kenig, C. E., Ponce, G., Vega, L., Well-Posedness and scattering results for the generalized Korteweg-de Vries equations via Contraction Principle, *Comm. Appl. Math.* **46** (1993), 527-620.

[43] Kivshar, Y. S., Bright and dark spatial solitons in non-Kerr media, *J. Opt. Quantum Electron.* **30** (1998), 571-614.

[44] Kivshar, Y. S., *et al.*, Multi-component optical solitary waves, *Physica A* **288** (2000), 152-173.

[45] Korteweg, D. J., de Vries, G., On the change of form of long waves advancing in a rectangular channel and a new type of long stationary waves , *Phil. Mag.* **39** (1895), 422-443.

[46] Lin, T. C., Wei, J., Ground states of N coupled nonlinear Schrödinger equations in $\mathbb{R}^n, n \leq 3$, *Commun. Math. Phys.* **255** (2005), 629-653.

[47] Magnus, W., Winkler, S., *Hill's equation*, vol **20**, Interscience, Tracts in Pure and Appl. Math., 1976.

[48] Mielke, A., Instability and stability of rolls in the Swift-Hohenberg equation, *Comm. Math. Phys.* **189** (1997), 829-853.

[49] Molinet, L., Global well-posedness in the energy space for the Benjamin-Ono equation on the circle, *Math. Ann.* **337** (2007), 353-383.

[50] Natali, F.; *Propriedades de Positividade e Estabilidade de Ondas Viajantes Periódicas*, Tese de Doutorado, Universidade Estadual de Campinas, 2007.

[51] Pelinovsky, D. E., Kivshar, Y., Stability criterion for multicomponent solitary waves, *Phys. Rev. E* **62** (2000), 8668-8676.

[52] Pelinovsky, D. E., Yang, J., A normal form for nonlinear resonance of embedded solitons, *Proc. R. Soc. Lond. A* (2002), 1469-1497.

[53] Reed, S., Simon, B., *Methods of Modern Mathematical Phisics: Analisys of Operators*, vol IV, Academic Press, 1978.

[54] Rowlands, G., On the stability of solutions of the nonlinear Schrödinger equation, *IMA J. Math. Appl.* **13** (1974), 367-377.

[55] Russel, J. S., Reports on waves, *Rep 14th Meet. Brit. Assoc. Adv. Sci.* (1834), 311-390.

[56] Sammut, A. R., Buryak, A. V., Kivshar, Y. S., Bright and dark solitary waves in the presence of the third-harmonic generation, *J. Opt. Soc. Am. B* **15** (1998), 1488-1496.

[57] Sammut, A. R., Buryak, A. V., Kivshar, Y. S., Modification of solitary waves by third-harmonic generation, *Opt. Lett.* **22** (1997), 1385-1387.

[58] Sandstede, B, Scheel, A., On the stability of periodic travelling waves with large spatial period, *J. Differential Equations* **172** (2001), 134-188.

[59] Scarpellini, B., L^2-perturbations of periodic equilibria of reaction diffusion systems, *Nonlinear Diff. Eqns. Appl.* (NoDEA) **3** (1994), 281-311.

[60] Sun, J. Q., Gu, X. Y., Ma, Z. Q., Numerical study of the soliton waves of the coupled nonlinear Schrödinger system, *Physica D* **196** (2004), 311-328.

[61] Weinstein, M. I., Liapunov stability of ground states of nonlinear dispersive evolution equations, *Comm. Pure Appl. Math.* **39** (1986), 51-68.

[62] Weinstein, M. I., Existence and dynamic stability of solitary wave solutions of equations arinsing in long wave propagation, *Comm. Partial Differential Equations* **12** (1987), 1133-1173.

[63] Whitam, G. B., *Linear and nonlinear waves*, John wiley, New York, 1974.

[64] Wright, O. C., The stationary equations of coupled nonlinear Schrödinger system, *Physica D* **126** (1999), 275-289.

[65] Yang, J., Malomed, B. A., Kaup, D. J., Embedded solitons in second-harmonic-generating systems, *Phys. Rev. Lett.* **83** (1999), 1958-1961.

[66] Yew, A. C., Stability analysis of multipulses in nonlinearly-coupled Schrödinger equations, *Indiana Univ. Math. J.* **49** (2000), 1079-1124.