A DISTRIBUIÇÃO EXATA DO CRITÉRIO DE BARTLETT PARA TESTAR A IGUALDADE DE MATRIZES DE COVARIÂNCIA

NELSON FERNANDES DE OLIVEIRA

Orientador:
Prof. Dr. Pushpa Narayan Rathie

Dissertação apresentada no Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Estatística.

Junho/1982

RESUMO

O objetivo deste trabalho é a determinação da distribuição exata do Critério sugerido por Bartlett (1937), para testar a hipótese de igualdade de matrizes de covariância em populações normais multivariadas independentes.

Para isto, parte-se dos momentos do critério e através da utilização da Transformada de Mellin com o auxílio do Teorema dos Resíduos chega-se a função densidade do critério e daí a sua distribuição acumulada. Os resultados são apresentados em termos de funções especiais (a função H e a função G-de Meijer) e em forma computável, para o caso em que o número de variáveis é maior ou igual que o número de populações.

AGRADECIMENTOS

O Autor agradece especialmente ao Prof. Dr. Pushpa N. Rathie, pela segura orientação durante a elaboração deste trabalho. Agradece também o apoio dos Professores do Departamento de Estatística do IMECC-UNICAMP, particularmente à Profª Drª Lilian T. Sheng. Agradece ainda, pelo apoio, aos Colegas do Departamento de Estatística do Instituto de Matemática da UFBa.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

Para testar a hipótese de igualdade das matrizes de covariância em q populações normais p-variadas independentes, Bartlett (1937) sugeriu um critério, que é uma modificação do critério da razão de verossimilhança de Wilks.

Anderson (1958, Cap. 10), apresenta detalhadamente o teste e os critérios de Wilks e Bartlett, bem como os momentos do critério de Bartlett. A partir dos momentos ele apresenta a distribuição exata do critério para os casos em que há apenas duas populações (q=2) e uma ou duas (p=1 ou p=2) variáveis. Para os demais casos ele dá a distribuição assintótica do critério baseado numa teoria geral para a distribuição assintótica do critério da razão de verossimilhança (Box, 1939).

Aqui, neste trabalho, será apresentada a distribuição exata do critério de Bartlett, quando a hipótese é verdadeira. Para isto será utilizada a transformada de Mellin.

A transformada de Mellin tem sido bastante usada na determinação de distribuições exatas na Estatística, desde que Nair (1938) a utilizou para obter a função densidade de uma variável aleatória através de sua sequência de momentos.

A transformada de Mellin tem sido usada na determinação da distribuição exata de produtos de variáveis aleatórias independentes (Epstein (1948), Springer e Thompson (1966), Lomnicki (1967), Rathie e Pederzoli (1980) e outros).

Particularmente, na determinação de distribuição exata de critérios de testes de razão de verossimilhança a transformada de Mellin tem sido de grande importância. Mathai (1970, 1971), Mathai e Rathie (1970, 1971a, 1971b), Jain, Rathie e Shah (1975), a utilizam na determinação da distribuição exata de critérios de vários testes.

Recentemente, com o auxílio de programas de computador, foram calculados os pontos percentuais a partir da distribui ção exata de produto de variáveis aleatórias independentes (Rathie e Rohrer, 1980) e de critérios de testes da razão de verossimilhança (Katyiar e Mathai, (1979a, 1979b, 1980).

A distribuição exata do critério de Bartlett será apresentada inicialmente em termos das funções especiais Função H e Função G-de Meijer (Capítulo 1), onde são discutidos dois casos especiais e em seguida (Capítulo 2), é apresentada a distribuição exata numa forma computável, a partir da qual podem ser calculados os pontos percentuais através da função distribuição acumulada. Por conveniência do método e para simplificação computacional os resultados serão apresentados para tamanhos de amostras iguais e subdivididos em 4 casos: 1) p par, q par; 2) p ímpar, q ímpar ; 3) p par, q ímpar e 4) p ímpar, q par. Será discutido o caso em que o número de variáveis é maior ou igual que o número de populações, $p \geq q$. O caso, mais simples, em que $p \leq q$ foi estudado por Mathai (1971).

CAPÍTULO I

A DENSIDADE DO CRITÉRIO DE BARTLETT EM TERMOS DE FUNÇÕES ESPECIAIS

1.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo, é apresentado o critério de Bartlett para testar a hipótese de igualdade de matrizes de covariância. A partir dos momentos do critério e usando-se a transformada inversa de Mellin, encontra-se a função densidade do critério, que é apresentada em termos das funções especiais G-de Meijer e H. Alguns casos especiais são dados em termos de funções especiais elementares.

1.2 - O CRITÉRIO DE BARTLETT PARA TESTAR A IGUALDADE DE MATRIZES DE COVARIÂNCIA

Sejam q populações normais p-variadas independentes com matrizes de covariância $\Sigma_1,\ldots,\Sigma_q$. Extrai-se uma amostra de cada população. Seja $\underset{\sim}{x}_\alpha^{(g)}$ $(\alpha=1,\ldots,N_g;\ g=1,\ldots,q)$ uma observação da g-ésima população $N(\underset{\sim}{\mu}^{(g)},\ \Sigma_g)$.

Para testar a hipótese

(1.2.1) $$H:\Sigma_1=\Sigma_2=\ldots=\Sigma_q\ ,$$

o critério da razão de verossimilhança dado por Wilks (1932) é

(1.2.2) $$\lambda = \frac{\prod_{g=1}^{q} |A_g|^{(1/2)N_g}}{|A|^{(1/2)N}} \quad \frac{N^{(1/2)pN}}{\prod_{g=1}^{q} N_g^{(1/2)pN_g}}$$

onde,

$$A_g = \sum_{\alpha=1}^{N_g} (\underset{\sim}{x}_\alpha^{(g)} - \bar{\underset{\sim}{x}}^{(g)})(\underset{\sim}{x}_\alpha^{(g)} - \bar{\underset{\sim}{x}}^{(g)})', \qquad g=1,\ldots,q$$

$$A = \sum_{g=1}^{q} A_g , \quad \bar{\underset{\sim}{x}}^{(g)} = \frac{1}{N_g} \sum_{i=1}^{N_g} \underset{\sim}{x}_i^{(g)}$$

$$\underset{\sim}{x}_i^{(g)} = \begin{pmatrix} x_{1i} \\ \vdots \\ x_{pi} \end{pmatrix} \quad \text{para a g-ésima amostra}$$

$\underset{\sim}{x}_{ji}$ é uma observação da j-ésima variável no i-ésimo elemento da g-ésima amostra.

N_g, $g=1,\ldots,q$ são os tamanhos das amostras e

$$N = \sum_{g=1}^{q} N_g \quad .$$

Bartlett (1937), propôs um critério, que é uma modificação do critério de Wilks e é dado por

$$(1.2.3) \qquad V = \frac{\prod_{g=1}^{q} |A_g|^{(1/2)n_g}}{|A|^{(1/2)n}} \ , \quad 0 \leq V \leq 1$$

onde

$$n_g = N_g - 1 \quad \text{e} \quad n = \sum_{g=1}^{q} n_g = N-q \ .$$

O h-ésimo momento de V, quando H é verdadeira, foi achado por Wilks (1932) e é dado por (ver Anderson (1958), pg 253):

$$(1.2.4) \qquad E(V^h) = \prod_{i=1}^{p} \left\{ \prod_{g=1}^{q} \frac{\Gamma[\frac{1}{2}(n_g+h.n_g+1-i)]}{\Gamma[\frac{1}{2}(n_g+1-i)]} \right\} . \frac{\Gamma[\frac{1}{2}(n+1-i)]}{\Gamma[\frac{1}{2}(n+hn+1-i)]}$$

Como $0 \leq V \leq 1$, os momentos determinam unicamente a distribuição.

1.3 - AS FUNÇÕES ESPECIAIS H E G-DE MEIJER

A Função H foi introduzida por Fox (1961) e é definida na forma de uma integral do tipo Mellin-Barnes, como (ver, por exemplo, Mathai e Saxena (1978))

$$H^{m,n}_{p,q}\left[z\left|\begin{matrix}(a_1,\alpha_1),\ldots,(a_p,\alpha_p)\\(b_1,\beta_1),\ldots,(b_q,\beta_q)\end{matrix}\right.\right]=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(b_j+\beta_j s)\,.\,\prod_{j=1}^{n}\Gamma(1-a_j-\alpha_j s)}{\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-b_j-\beta_j s)\prod_{j=n+1}^{p}\Gamma(a_j+\alpha_j s)}\,z^{-s}\,ds \tag{1.3.1}$$

onde,

$i=\sqrt{-1}$; p,q,m,n são inteiros tais que $1\leq m\leq q$, $0\leq n\leq p$;

α_j $(j=1,\ldots,p)$, β_j $(j=1,\ldots,q)$ são positivos; e

a_j $(j=1,\ldots,p)$, b_j $(j=1,\ldots,q)$ são complexos tais que

$\alpha_j(b_h+\nu)\neq\beta_h(a_j-1-\lambda)$, para $\nu,\lambda=0,1,\ldots$; $h=1,\ldots,m$; $j=1,\ldots,n$.

L é um contorno separando os pontos

$-s=(b_j+\nu)/\beta_j$ $j=1,\ldots,m$; $\nu=0,1\ldots$

e

$-s=(a_j-1-\nu)/\alpha_j$, $j=1,\ldots,n$; $\nu=0,1,\ldots$.

Para um estudo detalhado das condições de existência, expansões assintóticas e continuações analíticas, ver Braaksma (1964).

A função G-de Meijer, na forma de uma integral do tipo Mellin-Barnes foi definida por Meijer (1941, 1946) e é dada por (Erdelyi e outros (1953) pg. 206-208, Luke (1969), pg. 143)

$$G^{m,n}_{p,q}\left[z\left|\begin{matrix}a_1,\ldots,a_p\\b_1,\ldots,b_q\end{matrix}\right.\right]=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(b_j+s)\prod_{j=1}^{n}\Gamma(1-a_j-s)}{\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-b_j-s)\prod_{j=n+1}^{p}\Gamma(a_j+s)}\,z^{-s}\,ds \tag{1.3.2}$$

onde o produto vazio é igual a 1, $0\leq m\leq q$, $0\leq n\leq p$ e os parâmetros são tais que nenhum polo de $\Gamma(b_j+s)$, $j=1,\ldots,m$, coincide com qualquer polo de $\Gamma(1-a_k-s)$, $k=1,\ldots,n$.

Há três contornos L de integração:

a) L vai de $-i\infty$ a $+i\infty$ de tal modo que todos os polos de $\Gamma(b_j+s)$, $j=1,\ldots,m$, fiquem a direita e todos os polos de $\Gamma(1-a_k-s)$, $k=1,\ldots,n$ à esquerda, de L. A integral converge se $p+q<2(m+n)$ e $|\arg x|<(m+n-(1/2)p-(1/2)q)\pi$. Se $|\arg x|=(m+n-(1/2)p-(1/2)q)\pi$, a integral converge absolutamente quando $p=q$ se $\mathrm{Re}(\nu)<-1$; e quando $p\neq q$, se com $s=\sigma+i\tau$, σ e τ reais, σ é escolhido de tal modo que para $\tau\to\pm\infty$, $(q-p)\sigma>\mathrm{Re}(\nu)+1+(1/2)p-(1/2)q$, onde $\nu=\sum_{j=1}^{q} b_j-\sum_{j=1}^{p} a_j$.

b) L é um ciclo começando e terminando em $+\infty$, no sentido anti-horário, englobando todos os polos de $\Gamma(b_j+s)$, $j=1,\ldots,m$, mas nenhum dos polos de $\Gamma(1-a_k-s)$, $k=1,\ldots,n$. A integral converge se $q\geq 1$ e, ou $p<q$ ou $p=q$ e $|z|<1$.

c) L é um ciclo começando e terminando em $-\infty$, no sentido horário, englobando todos os polos de $\Gamma(1-a_k-s)$, $k=1,\ldots,n$, porém nenhum de $\Gamma(b_j+s)$, $j=1,\ldots,m$. A integral converge se $p\geq 1$ e, ou $p>q$ ou $p=q$ e $|z|>1$.

A função G-de Meijer é um caso especial da Função H, quando α_i, $i=1,\ldots,p$ e β_j, $j=1,\ldots,q$ são racionais.

1.4 - A DENSIDADE DE V, EM TERMOS DAS FUNÇÕES H E G-DE MEIJER

Por uma questão de simplicidade de cálculos, principalmente na expressão da densidade de V em forma computável, será considerado, neste trabalho, o caso em que

(1.4.1) $\qquad n_1=n_2=\ldots n_q=n'$

Neste caso, $\sum_{g=1}^{q} n_g=n'q=n$, e de (1.2.4)

$$(1.4.2)\qquad E(V^h) = \prod_{i=1}^{p}\left\{\frac{\Gamma^q[(1/2)(n'+hn'+1-i)]}{\Gamma^q[(1/2)(n'+1-i)]}\cdot\frac{\Gamma[(1/2)(n'q+1-i)]}{\Gamma[(1/2)(n'q+hn'q+1-i)]}\right\}$$

Esta expressão pode ser reescrita como

$$(1.4.3)\qquad E(V^h) = C_{p,q}\prod_{i=1}^{p}\left\{\frac{\Gamma^q[(1/2)(n'+hn'+1-i)]}{\Gamma[(1/2)(n'q+hn'q+1-i)]}\right\}$$

onde

$$(1.4.4)\qquad C_{p,q} = \prod_{i=1}^{p}\left\{\frac{\Gamma[(1/2)(n'q+1-i)]}{\Gamma^q[(1/2)(n'+1-i)]}\right\}$$

Para determinar a densidade de V, será usada a transformada inversa de Mellin cuja definição é

$$(1.4.5)\qquad f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L E(Z^{h-1})\,z^{-h}dh\ .$$

onde L é um contorno apropriado e $i=\sqrt{-1}$.

Cordeiro (1980), apresenta uma descrição detalhada sobre a transfornada e a transformada inversa de Mellin com os resultados e propriedades que as tornam úteis em aplicações na Estatística. Ele também demonstra que existe uma relação um-a-um entre a transformada e a distribuição de probabilidade que a define.

Aplicando a transformada inversa de Mellin ao h-ésimo momento de V dado por (1.4.3), obtém-se

$$(1.4.6)\qquad f(v)=C_{p,q}\,\frac{1}{2\pi i}\int_L\prod_{i=1}^{p}\left\{\frac{\Gamma^q[(1/2)(n'+hn'+1-i)]}{\Gamma[(1/2)(n+hn+1-i)]}\right\}v^{-h-1}dh,\quad 0\leq v\leq 1$$

Fazendo a mudança de variável $s=(1/2)(n'+hn'+1)$,

$$(1.4.7)\qquad f(v)=C'_{p,q}\,\frac{1}{2\pi i}\cdot v^{\frac{1}{n'}}\int_L\prod_{i=1}^{p}\left\{\frac{\Gamma^q(s-(i/2))}{\Gamma[q(s+\frac{1-i-q}{2q})]}\right\}v^{-\frac{2}{n'}s}ds,\qquad 0\leq v\leq 1$$

onde,

$$(1.4.8) \qquad C'_{p,q} = \frac{2}{n'} C_{p,q}.$$

Tendo em vista a definição (1.3.1)

$$(1.4.9) \qquad f(v) = C'_{p,q} v^{\frac{1}{n'}} H^{pq,0}_{p,pq} \left[v^{\frac{1}{n'}} \middle| \begin{matrix} [\frac{1}{2}(1-q-i),q]; \ i=1,\ldots,p \\ (-\frac{i}{2},1); \ i=1,\ldots,p \\ \text{repetido } q \text{ vezes} \end{matrix} \right], \quad 0 \leq v \leq 1$$

que é a expressão da densidade de V em termos da Função H. Aplicando em (1.4.7) a fórmula de Gauss-Legendre de multiplicação de funções gama dada por (ver, por exemplo, Luke (1969))

$$(1.4.10) \qquad \Gamma(mz) = (2\pi)^{\frac{1-m}{2}} m^{mz-(1/2)} \prod_{j=0}^{m-1} (z+(j/m)), \quad m=2,3,\ldots$$

obtém-se,

$$(1.4.11) \qquad f(v) = C''_{p,q} v^{\frac{1}{n'}} \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\prod_{i=1}^{p} \Gamma^q(s-\frac{i}{2})}{\prod_{i=1}^{p} \prod_{j=0}^{q-1} \Gamma(s-\frac{1}{2}+\frac{2j-i+1}{2q})} (v^{\frac{2}{n'}} q^{pq})^{-s} ds, \quad 0 \leq v \leq 1$$

onde

$$(1.4.12) \qquad C''_{p,q} = \frac{C'_{p,q}}{\prod_{i=1}^{p} \left[(2\pi)^{\frac{1-q}{2}} q^{\frac{-q-i}{2}} \right]}$$

Tendo em vista a definição (1.3.2), a densidade de V em termos da função G-de Meijer fica como:

$$(1.4.13) \qquad f(v) = C''_{p,q} v^{\frac{1}{n'}} G^{pq,0}_{pq,pq} \left[q^{pq} v^{\frac{1}{n'}} \middle| \begin{matrix} \frac{2j-i+1}{2q} - \frac{1}{2}, \ i=1,\ldots p; \ j=0,\ldots q-1 \\ -(i/2), \ i=1,\ldots p, \text{repetido } q \text{ vezes} \end{matrix} \right], \quad 0 \leq v \leq 1$$

1.5 - A DENSIDADE DE V EM CASOS ESPECIAIS

Para alguns valores de p e q a função G-de Meijer pode ser escrita em termos de funções especiais elementares. Aqui, para p=1, q=2 e para p=2 e q=2 são apresentados dois destes casos.

Para p=1, q=2

$$f(v)=C''_{1,2}v^{\frac{1}{n'}}\ G^{2,0}_{2,2}\left[4v^{\frac{2}{n'}}\left|\begin{matrix}-(1/2),\ 0\\ -(1/2),-(1/2)\end{matrix}\right.\right],\qquad 0\le v\le 1$$

Mas, (Mathai e Saxena (1978), pg. 74):

$$(1.5.1)\qquad G^{2,0}_{2,2}\left[z\left|\begin{matrix}\alpha_1+\beta_1-1,\alpha_2+\beta_2-1\\ \alpha_1-1\qquad \alpha_2-1\end{matrix}\right.\right]=\frac{z^{\alpha_2-1}(1-z)^{\beta_1+\beta_2-1}}{\Gamma(\beta_1+\beta_2)}\cdot {}_2F_1(\alpha_2+\beta_2-\alpha_1,\beta_1;\beta_1+\beta_2;1-z)$$

onde ${}_2F_1(.,.;.;.)$ é a função hipergeométrica de Gauss. Usando este resultado, após simplificação, obtém-se

$$(1.5.2)\qquad f(v)=\frac{2^{n'+1}\Gamma(\frac{n'+1}{2})}{\sqrt{\pi}\,n'\,\Gamma(\frac{n'}{2})}\ 1-4v^{\frac{2}{n'}}\ ^{-\frac{1}{2}}\qquad 0\le 4v^{\frac{2}{n'}}\le 1$$

Para p=2, q=2

$$f(v)=C''_{2,2}v^{\frac{1}{n'}}G^{4,0}_{4,4}\left[16v^{\frac{2}{n'}}\left|\begin{matrix}-\frac{1}{2},0,-\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\\ -\frac{1}{2}-1,-\frac{1}{2},-1\end{matrix}\right.\right],\quad 0\le v\le 1$$

Usando o resultado (Erdélyi (1954), pg. 209):

$$(1.5.3)\qquad G^{m,n}_{p,q}\left[z\left|\begin{matrix}a_r\\ b_s\end{matrix}\right.\right]=(2\pi)^{\frac{1}{2}p+\frac{1}{2}q-m-n}\ .2^{\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}q+1-a_1-\ldots-a_p+b_1+\ldots+b_q}\ .$$

$$.G^{2m,2n}_{2p,2q}\left[2^{2p-2q}z^2\left|\begin{matrix}\frac{1}{2}a_r,\frac{1}{2}a_r+\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}b_s,\frac{1}{2}b_s+\frac{1}{2}\end{matrix}\right.\right]$$

Obtém-se,

$$f(v)=C''_{2,2}\,v^{\frac{1}{n'}}\,2^{\frac{1}{2}}\;G^{2,0}_{2,2}\left[4v^{\frac{1}{n'}}\;\middle|\;\begin{matrix}-1,-\frac{3}{2}\\ -\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\end{matrix}\right]\quad,\qquad 0\leq v\leq 1$$

Usando o resultado (1.5.1) e simplificando

$$(1.5.4)\qquad f(v)=2^{n'+1}\left(\frac{n'-1}{n'}\right)\frac{\Gamma(n'-\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{n'}{2})\,\Gamma(\frac{n'}{2}-\frac{1}{2})}\,.\,v^{-\frac{1}{n'}}\left(1-4v^{\frac{1}{n'}}\right)^{\frac{1}{2}}\;{}_2F_1\left(\frac{1}{2},1;\frac{3}{2};1-4v^{\frac{1}{n'}}\right)\;,$$

$$0\leq 4v^{\frac{1}{n'}}\leq 1\quad.$$

CAPÍTULO II

A DISTRIBUIÇÃO DO CRITÉRIO DE BARTLETT EM FORMA COMPUTÁVEL

2.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo é apresentada a distribuição exata do critério de Bartlett numa forma computável. Isto será feito para os 4 casos possíveis: a) p par, q par; b) p ímpar, q ímpar; c) p par, q ímpar e d) p ímpar, q par, pois em cada caso, os polos e as ordens dos polos do integrando em (1.4.11) são diferentes. Será usado o teorema dos resíduos para o cálculo de integral complexa de (1.4.11). Para todos os casos será considerado $p \geq q$. O caso mais simples $p \leq q$ foi estudado por Mathai (1971).

2.2 - DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

A função densidade de V, como aparece em (1.4.13), não se presta a cálculos dos pontos percentuais de sua função distribuição. Para colocar a densidade de V numa forma computável, será usado o teorema dos resíduos no cálculo da integral

$$(2.2.1) \qquad I=\frac{1}{2\pi i}\int_L \left(V^{\frac{2}{n'}} q^{pq}\right)^{-s} \frac{\prod_{i=1}^{p} \Gamma^q\left(s-\frac{i}{2}\right)}{\prod_{i=1}^{p}\prod_{j=0}^{q-1} \Gamma\left(s-\frac{1}{2}+\frac{2j-i+1}{2q}\right)}\, ds \quad .$$

Pelo teorema dos resíduos (Ahlfors (1966), pg. 149)

$$(2.2.2) \qquad I=\sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{Res}_{s=a_i}\left[\left(V^{\frac{2}{n'}} q^{pq}\right)^{-s} \frac{\prod_{i=1}^{q} \Gamma^q\left(s-\frac{i}{2}\right)}{\prod_{i=1}^{p}\prod_{j=0}^{q-1} \Gamma\left(s-\frac{1}{2}+\frac{2j-i+1}{2q}\right)}\right]$$

Onde, $Res_{s=a_i}(f(s))$ é o resíduo de f(s) no polo $s=a_i$. Se o polo a_i tem ordem n_i o resíduo de f(s) é dado por

$$(2.2.3) \qquad Res_{s=a_i}(f(s)) = \frac{1}{(n_i-1)!} \lim_{s \to a_i} \frac{\partial^{n_i-1}}{\partial s^{n_i-1}} (s-a_i)^{n_i} f(s)$$

Com o propósito de identificar os polos e suas ordens, do integrando em (2.2.1), deve ser observado que

$$\frac{2j-i+1}{2q} < 1 \;, \quad i=1,\ldots,p; \quad j=0,\ldots,q-1$$

e, quando,

$$\frac{2j-i+1}{2q} = \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, -1, -\frac{3}{2}, \ldots$$

haverá cancelamentos de funções gama no numerador e denominador do integrando em (2.2.1).

A Tabela 1, a seguir, dá as funções gama canceláveis no denominador de acordo com os possíveis valores de $(2j-i+1)/2q$, para p par e q par.

Da Tabela 1, pode-se ver que os cancelamentos de funções gama e consequentemente as ordens dos polos, variam de acordo com as restrições entre os valores de p e q. Pode-se ver que, para

$$q \le p \le 2q \quad e \quad \frac{2j-i+1}{2q} = -1, -\frac{3}{2}, \ldots, i=1,\ldots,p; j=0,\ldots,q-1 \;,$$

não há cancelamentos.

Assim, neste trabalho, a densidade de V em forma computável, será apresentada para

$$q \le p \le 2q \;.$$

Nos casos $2q < p \le 3q$, $3q < p \le 4q$, etc., a densidade é achada da mesma maneira.

TABELA 1

Funções Gama Canceláveis, para p par, q par

(2j-i+1)/2q	Gamas Canceláveis	Restrições
$\frac{1}{2}$	$\Gamma^{\frac{q}{2}}(s)=(s-1)^{\frac{q}{2}}\ \Gamma^{\frac{q}{2}}(s-1)$	$p \geq q$
0	$\Gamma^{(p/2)}(s-(1/2))$	$q \leq p \leq 2q$
	$\Gamma^{q}(s-(1/2))$	$p > 2q$
$-\frac{1}{2}$	$\Gamma^{(p-q/2)}(s-1)$	$q \leq p \leq 3q$
	$\Gamma^{q}(s-1)$	$p > 3q$
-1	$\Gamma^{0}(s-(3/2))$	$q \leq p \leq 2q$
	$\Gamma^{(p-q/2)}(s-(3/2))$	$2q < p \leq 4q$
	$\Gamma^{q}(s-(3/2))$	$p > 4q$
$-\frac{3}{2}$	$\Gamma^{0}(s-2)$	$q \leq p \leq 3q$
	$\Gamma^{(p-3q/2)}(s-2)$	$3q < p \leq 5q$
	$\Gamma^{q}(s-2)$	$p > 5q$
-2	$\Gamma^{0}(s-(5/2))$	$q \leq p \leq 4q$
	$\Gamma^{(p-4q/2)}(s-(5/2))$	$4q < p \leq 6q$
	$\Gamma^{q}(s-(5/2))$	$p > 6q$

2.3 - A DENSIDADE DE V NO CASO $q \leq p \leq 2q$, p PAR, q PAR

Neste caso, de acordo com a Tabela 1, após os cancelamentos das funções gama, no integrando de (2.2.1) tem-se

$$(2.3.1) \qquad I = \frac{1}{2\pi i}\int_L (v^{\frac{2}{n'}} q^{pq})^{-s} \frac{\Gamma^{q-\frac{p}{2}}(s-\frac{1}{2}) \prod_{i=0}^{\frac{p}{2}-2} \Gamma^q(s-\frac{p}{2}+i)\Gamma^{q-\frac{p}{2}}(s-1)^{\frac{p}{2}-2} \prod_{i=0}^{\frac{p}{2}-2} \Gamma(s-\frac{p-1}{2}+i)}{(s-1)^{\frac{q}{2}} Q(s)} ds$$

onde

$$(2.3.2) \qquad Q(s) = \prod_{(u,w)\in U} \Gamma(s-\frac{1}{2}+\frac{2w-u+1}{2q}) \qquad e$$

$$U = \left\{ \begin{array}{l} (u,w): u=1,\ldots,p;\ w=0,\ldots,q-1; \\ \qquad u\neq 2w-q+1,\ u\neq 2w+1,\ u\neq 2w+q+1 \end{array} \right\}$$

Como a função gama não tem zeros, os polos são os anulantes dos vários fatores dos produtos

$$\prod_{j=0}^{\infty} (s-\frac{p}{2}+j)^{a_j} \quad e \quad \prod_{j=0}^{\infty} (s-\frac{p-1}{2}+j)^{b_j} \quad ,$$

onde a_j e b_j são as ordens dos polos respectivamente dos tipos $(\frac{p}{2}-j)$ e $(\frac{p-1}{2}-j)$.

Os valores de a_j e b_j, neste caso, são

$$(2.3.3) \qquad a_j = \begin{cases} q(j+1) & \text{para } j=0,1,\ldots,\frac{p}{2}-2 \\ (q-1)(p+1)/2+1/2 & \text{para } j=p/2-1 \\ p(q-1)/2 & \text{para } j\geq p/2 \end{cases}$$

$$(2.3.4) \qquad b_j = \begin{cases} q(j+1) & \text{para } j=0,1,\ldots,\frac{p}{2}-2 \\ p(q-1)/2 & \text{para } j\geq p/2-1 \end{cases} \quad .$$

Sejam:

R_j=resíduos nos polos do tipo $\frac{p}{2}-j$, de ordem a_j,

T_j=resíduos nos polos do tipo $\frac{p-1}{2}-j$, de ordem b_j, e

$$(2.3.5)\qquad A_j=(s-\frac{p}{2}+j)^{a_j}\frac{\Gamma^{q-\frac{p}{2}}(s-\frac{1}{2})\,\Gamma^{q-\frac{p}{2}}(s-1)\prod_{i=0}^{\frac{p}{2}-2}\Gamma^{q}(s-\frac{p}{2}+i)\prod_{i=0}^{\frac{p}{2}-2}\Gamma^{q}(s-\frac{p-1}{2}+i)}{(s-1)^{\frac{q}{2}}\,Q(s)}\ .$$

Tem-se, de (2.2.3)

$$(2.3.6)\qquad R_j=\frac{1}{(a_j-1)!}\lim_{s\to\frac{p}{2}-j}\frac{\partial^{a_j-1}}{\partial s^{a_j-1}}\left[(v^{\frac{2}{n'}}q^{pq})^{-s}\,.\,A_j\right]$$

Usando-se o fato

$$(2.3.7)\qquad \frac{\partial^n}{\partial s^n}\left[x^{-s}.f(s)\right]=x^{-s}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\ln\, x)^k\frac{\partial^{n-k}}{\partial s^{n-k}}f(s)\ ,$$

obtém-se,

$$(2.3.8)\qquad R_j=\frac{1}{(a_j-1)!}\lim_{s\to\frac{p}{2}-j}(v^{\frac{2}{n'}}q^{pq})^{-s}\sum_{k=0}^{a_j-1}\binom{a_j-1}{k}(-\ln(v^{\frac{2}{n'}}q^{pq}))^k\frac{\partial^{a_j-1-k}}{\partial s^{a_j-1-k}}A_j.$$

Seja agora

$$(2.3.9)\qquad C_j=\frac{\partial}{\partial s}\ln\, A_j$$

Então,

$$(2.3.10)\qquad \frac{\partial^2}{\partial s^2}A_j=\frac{\partial}{\partial s}A_j\,.\,C_j\ ,$$ e de modo geral

$$(2.3.11) \qquad A_j^{(k)} = \sum_{r=0}^{k-1} \binom{k-1}{r} A_j^{(k-1-r)} C_j^{(r)}$$

Onde $A_j^{(k)}$ denota a k-ésima derivada de A_j e $A_j^{(0)} \equiv A_j$.

A relação de recorrência (2.3.11), permite o cálculo da k-ésima derivada de A_j em função das derivadas de ordem inferior e da r-ésima derivada de C_j.

Denotando agora,

$$A_{0j}^{(r)} = \lim_{s \to \frac{p}{2}-j} A_j^{(r)} \quad e \quad C_{0j}^{(r)} = \lim_{s \to \frac{p}{2}-j} C_j^{(r)} \quad ,$$

pode-se escrever

$$(2.3.12) \qquad R_j = \frac{(v^{\frac{2}{n'}} q^{pq})^{j-\frac{p}{2}}}{(a_j-1)!} \left[\sum_{k=0}^{a_j-1} \binom{a_j-1}{k} (-\ln(v^{\frac{2}{n'}} q^{pq}))^k A_{0j}^{(a_j-1-k)} \right]$$

Analogamente, obtém-se

$$(2.3.13) \qquad T_j = \frac{(v^{\frac{2}{n'}} q^{pq})^{j-\frac{p-1}{2}}}{(b_j-1)!} \left[\sum_{k=0}^{b_j-1} \binom{b_j-1}{k} (-\ln(v^{\frac{2}{n'}} q^{pq}))^k B_{0j}^{(b_j-1-k)} \right] ,$$

onde,

$$B_{0j} = \lim_{s \to \frac{p-1}{2}-j} B_j \quad , \quad D_j = \frac{\partial}{\partial s} \ln B_j \quad ,$$

$$(2.3.14) \qquad B_j = (s-\tfrac{p-1}{2}+j)^{b_j} \frac{\Gamma^{q-\frac{p}{2}}(s-\frac{1}{2})\, \Gamma^{q-\frac{p}{2}}(s-1) \prod_{i=0}^{\frac{p}{2}-2} \Gamma^q(s-\frac{p}{2}+i) \prod_{i=0}^{\frac{p}{2}-2} (s-\frac{p-1}{2}+i)}{(s-1)^{\frac{q}{2}}\, Q(s)}$$

e,

$$(2.3.15) \quad B_j^{(k)} = \sum_{r=0}^{k-1} \binom{k-1}{r} B_j^{(k-1-r)} D_j^{(r)}$$

Do mesmo modo que em (2.3.11), a relação de recorrência (2.3.15) permite o cálculo da k-ésima derivada de B_j, a partir de derivadas de ordem inferior e da r-ésima derivada de D_j.

Portanto, de acordo com (2.2.2)

$$(2.3.16) \quad I = \sum_{j=0}^{\infty} (R_j + T_j)$$

Onde, R_j e T_j são dados respectivamente por (2.3.8) e (2.3.13). Resta então, calcular $A_{0j}^{(a_j-1-k)}$ e $B_{0j}^{(b_j-1-k)}$. Como as expressões são diferentes para diferentes valores de j elas serão apresentadas por partes.

a) Para $j=0,1,\ldots,\frac{p}{2}-2$.

De (2.3.5), tendo em vista (2.3.3) e (2.3.4) e usando-se a propriedade da função gama

$$(2.3.17) \quad \Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha), \quad \alpha \neq 0,-1,-2,\ldots$$

obtém-se,

$$(2.3.18) \quad A_j = \frac{\Gamma^{q-\frac{p}{2}}(s-\frac{1}{2})\Gamma^{q-\frac{p}{2}}(s-1)\Gamma^{q(j+1)}(s-\frac{p}{2}+j+1)\prod_{i=j+1}^{\frac{p}{2}-2}\Gamma^{q}(s-\frac{p}{2}+i)\prod_{i=0}^{\frac{p}{2}-2}\Gamma^{q}(s-\frac{p-1}{2}+i)}{(s-1)^{\frac{q}{2}}.Q(s).\prod_{i=0}^{j-1}(s-\frac{p}{2}+i)^{q(i+1)}}$$

$$(2.3.19) \quad A_{0j} = \frac{\Gamma^{q-\frac{p}{2}}(\frac{p-1}{2}-j)\Gamma^{q-\frac{p}{2}}(\frac{p-2}{2}-j)\prod_{i=j+1}^{\frac{p}{2}-2}\Gamma^{q}(i-j)\prod_{i=0}^{\frac{p}{2}-2}\Gamma^{q}(i-j+\frac{1}{2})}{(\frac{p-2}{2}-j)^{\frac{q}{2}}.Q(\frac{p}{2}-j)\prod_{i=0}^{j-1}(i-j)^{q(i+1)}}$$

$$(2.3.20)\quad C_j=(q-\tfrac{p}{2})\psi(s-\tfrac{1}{2})+(q-\tfrac{p}{2})\psi(s-1)+q(j+1)\psi(s-\tfrac{p}{2}+j+1)\;+$$

$$+q\sum_{i=j+1}^{\frac{p}{2}-2}\psi(s-\tfrac{p}{2}+i)+q\sum_{i=0}^{\frac{p}{2}-2}\psi(s-\tfrac{p-1}{2}+i)-\frac{q/2}{s-1}-\sum_{i=0}^{j-1}\frac{q(i+1)}{s-\frac{p}{2}+i}-Q^*(s)\;.$$

onde, a função $\psi(.)$ é definida como (Erdélyi e outros 1953, pg. 15)

$$(2.3.21)\quad \psi(z)=\frac{d}{dz}\ln\Gamma(z)=-\gamma+(z-1)\sum_{t=0}^{\infty}\{(t+1)(z+t)\}^{-1}\;,$$

$$z\neq 0,-1,-2,\ldots \quad e \quad \gamma=0{,}5772156\ldots \text{ (constante de Euler)}\;.$$

e,

$$(2.3.22)\quad Q^*(s)=\frac{d}{ds}\ln Q(s)=\sum_{(u,w)\in U}\psi(s-\tfrac{1}{2}+\tfrac{2w-u+1}{2q})\;.$$

$$(2.3.23)\quad C_j^{(r)}=(-1)^{r+1}r!\{(q-\tfrac{p}{2})\zeta(r+1,s-\tfrac{1}{2})+(q-\tfrac{p}{2})\zeta(r+1,s-1)\;+$$

$$+q(j+1)\zeta(r+1),s-\tfrac{p}{2}+j+1)+q\sum_{i=j+1}^{\frac{p}{2}-2}\zeta(r+1,s-\tfrac{p}{2}+i)\;+$$

$$+q\sum_{i=0}^{\frac{p}{2}-2}\zeta(r+1,s-\tfrac{p-1}{2}+i)+\frac{q/2}{(s-1)^{r+1}}+\sum_{i=0}^{j-1}\frac{q(i+1)}{(s-\frac{p}{2}+i)^{r+1}}-Q^{**}(r,s)\}$$

onde, (Titchmarch, 1951)

$$(2.3.24)\quad \zeta(n,z)=\sum_{r=0}^{\infty}(z+r)^{-n};\ \mathrm{Re}(n)>1,\ z\neq 0,-1,-2,\ldots$$

é a função Zeta de Riemann generalizada, e

$$(2.3.25)\quad Q^{**}(r,s)=\sum_{(u,w)\in U}\zeta(r+1,s-\tfrac{1}{2}+\tfrac{2w-u+1}{2q})\;.$$

Na expressão de $C_j^{(r)}$, também foi usado o seguinte resultado

$$(2.3.26)\quad \frac{d^k}{dz^k}\ln\Gamma(a+z) = \psi(a+z) \qquad \text{para } k=1 \ .$$
$$= (-1)^k (k-1)!\,\zeta(k,a+z) \qquad \text{para } k\geq 2 \ .$$

$$(2.3.27)\quad C_{0j} = (q-\tfrac{p}{2})\,\psi(\tfrac{p-1}{2}-j) + (q-\tfrac{p}{2})\,\psi(\tfrac{p-2}{2}-j) - \gamma q(j+1) + q\sum_{i=j+1}^{\frac{p}{2}-2}\psi(i-j) \ +$$
$$+q\sum_{i=0}^{\frac{p}{2}-2}\psi(i-j+\tfrac{1}{2}) - \frac{q/2}{\frac{p-2}{2}-j} - \sum_{i=0}^{j-1}\frac{q(i+1)}{i-j} - Q^*(\tfrac{p}{2}-j)$$

$$(2.3.28)\quad C_{0j}^{(r)} = (-1)^{r+1} r!\,\{(q-\tfrac{p}{2})\,\zeta(r+1,\tfrac{p-1}{2}-j) + (q-\tfrac{p}{2})\,\zeta(r+1,\tfrac{p-2}{2}-j) \ +$$
$$+q(j+1)\,\zeta(r+1,1) + q\sum_{i=j+1}^{\frac{p}{2}-2}\zeta(i-j) + q\sum_{i=0}^{\frac{p}{2}-2}\zeta(r+1,i-j+\tfrac{1}{2}) \ +$$
$$+\frac{q/2}{(\frac{p-2}{2}-j)^{r+1}} + \sum_{i=0}^{j-1}\frac{q(i+1)}{(i-j)^{r+1}} - Q^{**}(r,\tfrac{p}{2}-j)\} \ .$$

Partindo-se agora de (2.3.14) e usando-se a propriedade (2.3.17), obtém-se

$$(2.3.29)\quad B_j = \frac{\Gamma^{q-\frac{p}{2}}(s-\frac{1}{2})\,\Gamma^{q-\frac{p}{2}}(s-1)\,\Gamma^{q(j+1)}(s-\frac{p-1}{2}+j+1)\displaystyle\prod_{i=j+1}^{\frac{p}{2}-2}\Gamma^{q}(s-\tfrac{p-1}{2}+i)\prod_{i=0}^{\frac{p}{2}-2}\Gamma^{q}(s-\tfrac{p}{2}+i)}{(s-1)^{\frac{q}{2}}\displaystyle\prod_{i=0}^{j-1}(s-\tfrac{p-1}{2}+i)^{q(i+1)}\,.Q(s)}$$

$$(2.3.30)\quad B_{0j} = \frac{\Gamma^{q-\frac{p}{2}}(\frac{p-2}{2}-j)\,\Gamma^{q-\frac{p}{2}}(\frac{p-3}{2}-j)\displaystyle\prod_{i=0}^{\frac{p}{2}-2}\Gamma^{q}(i-j-\tfrac{1}{2})\prod_{i=j+1}^{\frac{p}{2}-2}\Gamma^{q}(i-j)}{(\frac{p-3}{2}-j)^{\frac{q}{2}}\displaystyle\prod_{i=0}^{j-1}(i-j)^{q(i+1)}\,.Q(\tfrac{p-1}{2}-j)}$$

$$(2.3.31)\quad D_j=(q-\tfrac{p}{2})\psi(s-\tfrac{1}{2})+(q-\tfrac{p}{2})\psi(s-1)+q\sum_{i=0}^{\frac{p}{2}-2}\psi(s-\tfrac{p}{2}+i)\ +$$
$$+q(j+1)\psi(s-\tfrac{p-1}{2}+j+1)+q\sum_{i=j+1}^{\frac{p}{2}-2}\psi(s-\tfrac{p-1}{2}+i)-\frac{q/2}{s-1}\ -$$
$$-\sum_{i=0}^{j-1}\frac{q(i+1)}{(s-\frac{p-1}{2}+i)}-Q^*(s)$$

$$(2.3.32)\quad D_j^{(r)}=(-1)^{r+1}r!\{(q-\tfrac{p}{2})\zeta(r+1,s-\tfrac{1}{2})+(q-\tfrac{p}{2})\zeta(r+1,s-1)\ +$$
$$+q\sum_{i=0}^{\frac{p}{2}-2}\zeta(r+1,s-\tfrac{p}{2}+i)+q(j+1)\zeta(r+1,s-\tfrac{p-1}{2}+j+1)\ +$$
$$+q\sum_{i=j+1}^{\frac{p}{2}-2}\zeta(r+1,s-\tfrac{p-1}{2}+i)+\frac{q/2}{(s-1)^{r+1}}+\sum_{i=0}^{j-1}\frac{q(i+1)}{(s-\frac{p-1}{2}+i)^{r+1}}-Q^{**}(r,s)\}$$

$$(2.3.33)\quad D_{0j}=(q-\tfrac{p}{2})\psi(\tfrac{p-2}{2}-j)+(q-\tfrac{p}{2})\psi(\tfrac{p-3}{2}-j)+q\sum_{i=0}^{\frac{p}{2}-2}\psi(i-j-\tfrac{1}{2})-\gamma.q(j+1)\ +$$
$$+q\sum_{i=j+1}^{\frac{p}{2}-2}\psi(i-j)-\frac{q/2}{(\frac{p-3}{2}-j)}-\sum_{i=0}^{j-1}\frac{q(i+1)}{(i-j)}-Q^*(s)$$

$$(2.3.34)\quad D_{0j}^{(r)}=(-1)^{r+1}r!\{(q-\tfrac{p}{2})\zeta(r+1,\tfrac{p-2}{2}-j)+(q-\tfrac{p}{2})\zeta(r+1,\tfrac{p-3}{2}-j)\ +$$
$$+q\sum_{i=0}^{\frac{p}{2}-2}\zeta(r+1,i-j-\tfrac{1}{2})+q(j+1)\zeta(r+1,1)+q\sum_{i=j+1}^{\frac{p}{2}-2}\zeta(r+1,i-j)\ +$$
$$+\frac{q/2}{(\frac{p-3}{2}-j)^{r+1}}+\sum_{i=0}^{j-1}\frac{q(i+1)}{(i-j)^{r+1}}-Q^{**}(r,\tfrac{p}{2}-j)\}\quad .$$

b) Para $j=\frac{p}{2}-1$.

Semelhantemente à parte a) obtém-se,

(2.3.35) $$A_j = \frac{\Gamma^{q-\frac{p}{2}}(s-\frac{1}{2})\,\Gamma^{\frac{p(q-1)}{2}}(s)\prod_{i=0}^{\frac{p}{2}-2}\Gamma^{q}(s-\frac{p-1}{2}+i)}{\prod_{i=0}^{\frac{p}{2}-2}(s-\frac{p}{2}+i)^{q(i+1)}.Q(s)},$$

(2.3.36) $$A_{0j}=\frac{\Gamma^{q-\frac{p}{2}}(\frac{1}{2})\prod_{i=0}^{\frac{p}{2}-2}\Gamma^{q}(i-\frac{p-3}{2})}{\prod_{i=0}^{\frac{p}{2}-2}(i-\frac{p-2}{2})^{q(i+1)}.Q(1)},$$

(2.3.37) $$C_j=(q-\frac{p}{2})\psi(s-\frac{1}{2})+\frac{p(q-1)}{2}\psi(s)+q\sum_{i=0}^{\frac{p}{2}-2}\psi(s-\frac{p-1}{2}+i)-\sum_{i=0}^{\frac{p}{2}-2}\frac{q(i+1)}{(s-\frac{p}{2}+i)}-Q^*(s),$$

(2.3.38) $$C_j^{(r)}=(-1)^{r+1}r!\{(q-\frac{p}{2})\zeta(r+1,s-\frac{1}{2})+\frac{p(q-1)}{2}\zeta(r+1,s)+$$
$$+q\sum_{i=0}^{\frac{p}{2}-2}\zeta(r+1,s-\frac{p-1}{2}+i)+\sum_{i=0}^{\frac{p}{2}-2}\frac{q(i+1)}{(s-\frac{p}{2}+i)^{r+1}}-Q^{**}(r,s)\},$$

(2.3.39) $$C_{0j}=(q-\frac{p}{2})\psi(\frac{1}{2})-\gamma\frac{p(q-1)}{2}+q\sum_{i=0}^{\frac{p}{2}-2}\psi(i-\frac{p-3}{2})-\sum_{i=0}^{\frac{p}{2}-2}\frac{q(i+1)}{(i-\frac{p-2}{2})}-Q^*(1),$$

(2.3.40) $$C_{0j}^{(r)}=(-1)^{r+1}r!\{(q-\frac{p}{2})\zeta(r+1,\frac{1}{2})+\frac{p(q-1)}{2}\zeta(r+1,1)+$$

$$+q\sum_{i=0}^{\frac{p}{2}-2}\zeta(r+1,i-\frac{p-3}{2})+\sum_{i=0}^{\frac{p}{2}-2}\frac{q(i+1)}{(i-\frac{p-2}{2})^{r+1}}-Q^{**}(r,1)\}\quad .$$

As expressões para B_j, B_{0j}, D_j, $D_j^{(r)}$, D_{0j} e $D_{0j}^{(r)}$ são as mesmas que na parte c) a seguir.

c) Para $j=\frac{p}{2}, \frac{p}{2}+1, \frac{p}{2}+2, \ldots$

Semelhantemente às partes a) e b) obtém-se,

$$A_j=\frac{\Gamma^{q-\frac{p}{2}}(s-\frac{1}{2})\,\Gamma^{\frac{p(q-1)}{2}}(s-\frac{p}{2}+j+1)\prod_{i=0}^{\frac{p}{2}-2}\Gamma^{q}(s-\frac{p-1}{2}+i)}{(s-1)^{\frac{q}{2}}\prod_{i=0}^{\frac{p}{2}-2}(s-\frac{p}{2}+i)^{q(i+1)}\prod_{i=\frac{p}{2}-1}^{j-1}(s-\frac{p}{2}+i)^{\frac{p(q-1)}{2}}.Q(s)}\,, \tag{2.3.41}$$

$$A_{0j}=\frac{\Gamma^{q-\frac{p}{2}}(\frac{p-1}{2}-j)\,.\prod_{i=0}^{\frac{p}{2}-2}\Gamma^{q}(i-j+\frac{1}{2})}{(\frac{p-2}{2}-j)^{\frac{q}{2}}\prod_{i=0}^{\frac{p}{2}-2}(i-j)^{q(i+1)}\prod_{i=\frac{p}{2}-1}^{j-1}(i-j)^{\frac{p(q-1)}{2}}Q(\frac{p}{2}-j)}\,, \tag{2.3.42}$$

$$C_j=(q-\frac{p}{2})\,\psi(s-\frac{1}{2})+\frac{p(q-1)}{2}\psi(s-\frac{p}{2}+j+1)+q\sum_{i=0}^{\frac{p}{2}-2}\psi(s-\frac{p-1}{2}+i)-\frac{q/2}{s-1}-$$
$$-\sum_{i=0}^{\frac{p}{2}-2}\frac{q(i+1)}{(s-\frac{p}{2}+i)}-\sum_{i=\frac{p}{2}-1}^{j-1}\frac{p(q-1)/2}{(s-\frac{p}{2}+i)}-Q^{*}(s)\quad , \tag{2.3.43}$$

$$C_j^{(r)}=(-1)^{r+1}r!\{(q-\frac{p}{2})\,\zeta(r+1,s-\frac{1}{2})+\frac{p(q-1)}{2}\zeta(r+1,s-\frac{p}{2}+j+1)\;+ \tag{2.3.44}$$

$$+q\sum_{i=0}^{\frac{p}{2}-2}\zeta(r+1,s-\frac{p-1}{2}+i)+\frac{q/2}{(s-1)^{r+1}}+\sum_{i=0}^{\frac{p}{2}-2}\frac{q(i+1)}{(s-\frac{p}{2}+i)^{r+1}}+$$

$$+\sum_{i=\frac{p}{2}-1}^{j-1}\frac{p(q-1)/2}{(s-\frac{p}{2}+i)^{r+1}}-Q^{**}(r,s)\quad ,$$

(2.3.45) $$C_{0j}=(q-\frac{p}{2})\psi(\frac{p-1}{2}-j)-\gamma\frac{p(q-1)}{2}+q\sum_{i=0}^{\frac{p}{2}-2}\psi(i-j+\frac{1}{2})-\frac{q/2}{(\frac{p-2}{2}-j)}-$$

$$-\sum_{i=0}^{\frac{p}{2}-2}\frac{q(i+1)}{(i-j)}-\sum_{i=\frac{p}{2}-1}^{j-1}\frac{p(q-1)/2}{(i-j)}-Q^{*}(\frac{p}{2}-j)\quad ,$$

(2.3.46) $$C_{0j}^{(r)}=(-1)^{r+1}r!\{(q-\frac{p}{2})\zeta(r+1,\frac{p-1}{2}-j)+\frac{p(q-1)}{2}\zeta(r+1,1)+$$

$$+q\sum_{i=0}^{\frac{p}{2}-2}\zeta(r+1,i-j+\frac{1}{2})+\frac{q/2}{(\frac{p-2}{2}-j)^{r+1}}+\sum_{i=0}^{\frac{p}{2}-2}\frac{q(i+1)}{(i-j)^{r+1}}+$$

$$+\sum_{i=\frac{p}{2}-1}^{j-1}\frac{p(q-1)/2}{(i-j)^{r+1}}-Q^{**}(r,\frac{p}{2}-j)\}\quad ,$$

(2.3.47) $$B_j=\frac{\Gamma^{q-\frac{p}{2}}(s-1)\,\Gamma^{\frac{p(q-1)}{2}}(s-\frac{p-1}{2}+j+1)\prod_{i=0}^{\frac{p}{2}-2}\Gamma^{q}(s-\frac{p}{2}+i)}{(s-1)^{\frac{q}{2}}\prod_{i=0}^{\frac{p}{2}-2}(s-\frac{p-1}{2}+i)^{q(i+1)}\prod_{i=\frac{p}{2}-1}^{j-1}(s-\frac{p-1}{2}+i)^{\frac{p(q-1)}{2}}.Q(s)}\quad ,$$

(2.3.48) $$B_{0j}=\frac{\Gamma^{q-\frac{p}{2}}\left(\frac{p-3}{2}-j\right)\prod_{i=0}^{\frac{p}{2}-2}\Gamma^{q}\left(i-j-\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{p-3}{2}-j\right)^{\frac{p}{2}}\prod_{i=0}^{\frac{p}{2}-2}(i-j)^{q(i+1)}\prod_{i=\frac{p}{2}-1}^{j-1}(i-j)^{\frac{p(q-1)}{2}}\cdot Q\left(\frac{p-1}{2}-j\right)}$$

(2.3.49) $$D_j=(q-\tfrac{p}{2})\,\psi(s-1)+\frac{p(q-1)}{2}\psi\left(s-\frac{p-1}{2}+j+1\right)+q\sum_{i=0}^{\frac{p}{2}-2}\psi\left(s-\frac{p}{2}+i\right)-\frac{q/2}{s-1}-$$
$$-\sum_{i=0}^{\frac{p}{2}-2}\frac{q(i+1)}{\left(s-\frac{p-1}{2}+i\right)}-\sum_{i=\frac{p}{2}-1}^{j-1}\frac{p(q-1)/2}{\left(s-\frac{p-1}{2}+i\right)}-Q^{*}(s)\quad,$$

(2.3.50) $$D_j^{(r)}=(-1)^{r+1}r!\left\{(q-\tfrac{p}{2})\,\zeta(r+1,s-1)+\frac{p(q-1)}{2}\zeta\left(r+1,s-\frac{p-1}{2}+j+1\right)\right.+$$
$$+q\sum_{i=0}^{\frac{p}{2}-2}\zeta\left(r+1,s-\frac{p}{2}+i\right)+\frac{q/2}{(s-1)^{r+1}}+\sum_{i=0}^{\frac{p}{2}-2}\frac{q(i+1)}{(i-j)^{r+1}}+$$
$$\left.+\sum_{i=\frac{p}{2}-1}^{j-1}\frac{p(q-1)/2}{(i-j)^{r+1}}-Q^{**}(r,s)\right\}\quad,$$

(2.3.51) $$D_{0j}=(q-\tfrac{p}{2})\,\psi\left(\frac{p-3}{2}-j\right)-\gamma.\frac{p(q-1)}{2}+q\sum_{i=0}^{\frac{p}{2}-2}\psi\left(i-j-\frac{1}{2}\right)-\frac{q/2}{\frac{p-3}{2}-j}-$$
$$-\sum_{i=0}^{\frac{p}{2}-2}\frac{q(i+1)}{(i-j)}-\sum_{i=\frac{p}{2}-1}^{j-1}\frac{p(q-1)/2}{(i-j)}-Q\left(\frac{p-1}{2}-j\right)\quad,$$

(2.3.52) $$D_{0j}^{(r)}=(-1)^{r+1}r!\left\{(q-\tfrac{p}{2})\,\zeta\left(r+1,\frac{p-3}{2}-j\right)+\frac{p(q-1)}{2}\zeta(r+1,1)\right.+$$

$$+q\sum_{i=0}^{\frac{p}{2}-2}\zeta\left(r+1,i-j-\frac{1}{2}\right)+\frac{q/2}{\left(\frac{p-3}{2}-j\right)^{r+1}}+\sum_{i=0}^{\frac{p}{2}-2}\frac{q(i+1)}{(i-j)^{r+1}}+$$

$$+\sum_{i=\frac{p}{2}-1}^{j-1}\frac{p(q-1)/2}{(i-j)^{r+1}}Q^{**}\left(r,\frac{p-1}{2}-j\right)\Big\} \quad .$$

De posse destes resultados, pode-se finalmente escrever a densidade de V, neste caso, p par e q par:

$$(2.3.53) \qquad f(v)=C''_{p,q}v^{-\frac{1}{n'}}\left\{\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\left(v^{\frac{2}{n'}}q^{pq}\right)^{j-\frac{p}{2}}}{(a_j-1)!}\left[\sum_{k=0}^{a_j-1}\binom{a_j-1}{k}\left(-\ln\left(v^{\frac{2}{n'}}q^{pq}\right)\right)^k A_{0j}^{(a_j-1-k)}\right]+\right.$$

$$\left.+\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\left(v^{\frac{2}{n'}}q^{pq}\right)^{j-\frac{p-1}{2}}}{(b_j-1)!}\left[\sum_{k=0}^{b_j-1}\binom{b_j-1}{k}\left(-\ln\left(v^{\frac{2}{n'}}q^{pq}\right)\right)^k B_{0j}^{(b_j-1-k)}\right]\right\},$$

$$0\leq v\leq 1 \quad .$$

Onde, $A_{0j}^{(a_j-1-k)}$ e $B_{0j}^{(b_j-1-k)}$ são calculados através, respectivamente, das expressões (2.3.11) e (2.3.15) fazendo-se uso, conforme o caso e dependendo dos vários valores de j, das expressões (2.3.18) a (2.3.52). a_j e b_j são dados respectivamente por (2.3.3) e (2.3.4).

2.4 - A FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO ACUMULADA DE V PARA $q\leq p\leq 2q$, p PAR, q PAR.

Para calcular a função distribuição acumulada, F(x), será utilizado o seguinte resultado (ver Mathai e Rathie, 1971b)

$$(2.4.1) \qquad \int_0^x u^{\alpha}(-\ln\, u)^{m-1}du = x^{\alpha+1}\sum_{t=1}^{m}\frac{m(m-1)\ldots(m-t+1)(-\ln\, x)^{m-t}}{m(\alpha+1)^t},$$

$$\alpha>0;\ m=1,2,\ldots\ ;\ 0<u<1 \quad .$$

Assim, de (2.3.53)

$$(2.4.2)\qquad F(x)=C''_{p,q}\left\{\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(q^{pq})^{-\frac{1}{2}}}{(a_j-1)!}\left[\sum_{k=0}^{a_j-1}\binom{a_j-1}{k}A_{0j}^{(a_j-1-k)}\right.\right.$$

$$\left.\int_0^x (v^{\frac{2}{n'}}q^{pq})^{j-\frac{p}{2}+\frac{1}{2}}(-\ln(v^{\frac{2}{n'}}q^{pq}))^k dv\right]+\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(q^{pq})^{-\frac{1}{2}}}{(b_j-1)!}\left[\sum_{k=0}^{a_j-1}\ b_j-1\atop k\right.$$

$$\left.\left. .B_{0j}^{(b_j-1-k)}\int_0^x (v^{\frac{2}{n'}}q^{pq})^{j-\frac{p}{2}+1}(-\ln(v^{\frac{2}{n'}}q^{pq}))^k dv\right]\right\},\quad 0<x\leq 1\quad .$$

Fazendo a mudança de variável $u=v^{\frac{2}{n'}}q^{pq}$ e usando o resultado (2.4.1), obtém-se,

$$(2.4.3)\qquad F(x)=C''_{p,q}\,\frac{n'}{2}\left\{\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(q^{pq})^{j-\frac{p}{2}}}{(a_j-1)!}\left[\sum_{k=0}^{a_j-1}\binom{a_j-1}{k}A_{0j}^{(a_j-1-k)}\right.\right.$$

$$\left. .x^{\frac{2j}{n'}-\frac{p-1}{n'}+1}\sum_{t=1}^{r+1}\frac{(r+1)r(r-1)\ldots(r-t+2)\,(-\ln(v^{\frac{2}{n'}}q^{pq}))^{r-t+1}}{(r+1)\,(\frac{n'}{2}-\frac{p-1}{2}+j)}\right]+$$

$$+\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(q^{pq})^{j-\frac{p-1}{2}}}{(b_j-1)!}\left[\sum_{k=0}^{b_j-1}\binom{b_j-1}{k}B_{0j}^{(b_j-1-k)}\ .x^{\frac{2j}{n'}-\frac{p-2}{n'}+1}\right. .$$

$$\left.\left.\sum_{t=1}^{r+1}\frac{(r+1)r(r-1)\ldots(r-t+2)\,(-\ln(v^{\frac{2}{n'}}q^{pq}))^{r-t-+1}}{(r+1)\,(\frac{n'}{2}-\frac{p-2}{2}+j)}\right]\right\},\quad 0<x\leq 1\ .$$

2.5 - A DENSIDADE E DISTRIBUIÇÃO DE V PARA $q\leq p\leq 2q$, p ÍMPAR, q ÍMPAR

Neste caso, bem como nos seguintes, os resultados serão apresentados sem maiores comentários, devido à perfeita analogia com o caso anterior.

Assim, após os cancelamentos das funções gama no integrando de (2.2.1) obtém-se

$$(2.5.1)\qquad I=\frac{1}{2\pi i}\int_L (v^{\frac{2}{n'}}q^{pq})^{-s}\frac{\Gamma^{q-\frac{p+1}{2}}(s-\frac{1}{2})\Gamma^{q-\frac{p-1}{2}}(s-1)\prod_{i=0}^{\frac{p-3}{2}}\Gamma^q(s-\frac{p}{2}+i)\prod_{i=0}^{\frac{p-5}{2}}\Gamma^q(s-\frac{p-1}{2}+i)}{(s-1)^{(q-1)/2}Q(s)}\,.$$

As ordens a_j e b_j dos polos respectivamente dos tipos $s=\frac{p}{2}-j$ e $s=\frac{p-1}{2}-j$ são

$$(2.5.2)\qquad a_j=\begin{cases} q(j+1) & j=0,1,\dots,\frac{p-3}{2}\\ \frac{(q-1)(p+1)}{2} & j\geq\frac{p-1}{2}\end{cases}$$

$$(2.5.3)\qquad b_j=\begin{cases} q(j+1) & j=0,1,\dots,\frac{p-5}{2}\\ \frac{p(q-1)}{2} & j=\frac{p-3}{2}\\ \frac{(q-1)(p-1)}{2} & j\geq\frac{p-1}{2}\end{cases}\,.$$

Agora, analogamente ao caso anterior, obtém-se

a) Para $j=0,1,\dots,\frac{p-5}{2}$

$$(2.5.4)\qquad A_j=\frac{\Gamma^{q-\frac{p+1}{2}}(s-\frac{1}{2})\Gamma^{q-\frac{p-1}{2}}(s-1)\Gamma^{q(j+1)}(s-\frac{p}{2}+j+1)\prod_{i=j+1}^{\frac{p-3}{2}}\Gamma^q(s-\frac{p}{2}+i)\prod_{i=0}^{\frac{p-5}{2}}\Gamma^q(s-\frac{p-1}{2}+i)}{(s-1)^{\frac{q-1}{2}}\prod_{i=0}^{j}(s-\frac{p}{2}+i)^{q(i+1)}\cdot Q(s)}\,,$$

$$(2.5.5)\qquad C_j=(q-\frac{p+1}{2})\psi(s-\frac{1}{2})+(q-\frac{p-1}{2})\psi(s-1)+q(j+1)\psi(s-\frac{p}{2}+j+1)\ +$$

$$+q\sum_{i=j+1}^{\frac{p-3}{2}}\psi(s-\tfrac{p}{2}+i)+q\sum_{i=0}^{\frac{p-5}{2}}\psi(s-\tfrac{p-1}{2}+i)-\frac{(q-1)/2}{s-1}-\sum_{i=0}^{j-1}\frac{q(i+1)}{s-\frac{p}{2}+i}-Q^*(s),$$

(2.5.6) $$C_j^{(r)}=(-1)^{r+1}r!\{(q-\tfrac{p+1}{2})\zeta(r+1,s-\tfrac{1}{2})+(q-\tfrac{p-1}{2})\zeta(r+1,s-1)+$$

$$+q(j+1)\zeta(r+1,s-\tfrac{p}{2}+1)+q\sum_{i=j+1}^{\frac{p-3}{2}}\zeta(r+1,s-\tfrac{p}{2}+i)+$$

$$+q\sum_{i=0}^{\frac{p-5}{2}}\zeta(r+1,s-\tfrac{p-1}{2}+i)+\frac{(q-1)/2}{(s-1)^{r+1}}+\sum_{i=0}^{j-1}\frac{q(i+1)}{(s-\frac{p}{2}+i)^{r+1}}-Q^{**}(r,s)\},$$

(2.5.7) $$A_{0j}=\frac{\Gamma^{q-\frac{p+1}{2}}(\frac{p-1}{2}-j)\,\Gamma^{q-\frac{p-1}{2}}(\frac{p-2}{2}-j)\prod_{i=j+1}^{\frac{p-3}{2}}(i-j)\prod_{i=0}^{\frac{p-5}{2}}\Gamma^{q}(i-j+\frac{1}{2})}{(\frac{p-2}{2}-j)^{\frac{q-1}{2}}\prod_{i=0}^{j-1}(i-j)^{q(i+1)}\cdot Q(\frac{p}{2}-j)},$$

(2.5.8) $$C_{0j}=(q-\tfrac{p+1}{2})\psi(\tfrac{p-1}{2}-j)+(q-\tfrac{p-1}{2})\psi(\tfrac{p-2}{2}-j)-\gamma q(j+1)+$$

$$+q\sum_{i=j+1}^{\frac{p-3}{2}}\psi(i-j)+q\sum_{i=0}^{\frac{p-5}{2}}\psi(i-j+\tfrac{1}{2})-\frac{(q-1)/2}{(\frac{p-2}{2}-j)}-\sum_{i=0}^{j-1}\frac{q(i+1)}{(i-j)}-Q^*(\tfrac{p}{2}-j),$$

(2.5.9) $$C_{0j}^{(r)}=(-1)^{r+1}r!\{(q-\tfrac{p+1}{2})\zeta(r+1,\tfrac{p-1}{2}-j)+(q-\tfrac{p-1}{2})\zeta(r+1,\tfrac{p-2}{2})+$$

$$+q(j+1)\zeta(r+1,1)+q\sum_{i=j+1}^{\frac{p-3}{2}}\zeta(r+1,i-j)+q\sum_{i=0}^{\frac{p-5}{2}}\zeta(r+1,i-j+\tfrac{1}{2})+$$

$$+\frac{(q-1)/2}{(\frac{p-2}{2}-j)^{r+1}}+\sum_{i=0}^{j-1}\frac{q(i+1)}{(i-j)^{r+1}}-Q^{**}(r,\tfrac{p}{2}-j)\},$$

$$(2.5.10)\qquad B_j=\frac{\Gamma^{q-\frac{p+1}{2}}(s-\frac{1}{2})\Gamma^{q-\frac{p-1}{2}}(s-1)\prod_{i=0}^{\frac{p-3}{2}}\Gamma^q(s-\frac{p}{2}+i)\prod_{i=j+1}^{\frac{p-5}{2}}\Gamma^q(s-\frac{p-1}{2}+i)\Gamma^{q(j+1)}(s-\frac{p-1}{2}+j+1)}{(s-1)^{\frac{q-1}{2}}\prod_{i=0}^{j-1}(s-\frac{p-1}{2}+i)^{q(i+1)}\cdot Q(s)},$$

$$(2.5.11)\qquad D_j=(q-\frac{p+1}{2})\psi(s-\frac{1}{2})+(q-\frac{p-1}{2})\psi(s-1)+q\sum_{i=0}^{\frac{p-3}{2}}\psi(s-\frac{p}{2}+i)+$$
$$+q\sum_{i=j+1}^{\frac{p-5}{2}}\psi(s-\frac{p-1}{2}+i)+q(j+1)\psi(s-\frac{p-1}{2}+j+1)-\frac{(q-1)/2}{s-1}-$$
$$-\sum_{i=0}^{j-1}\frac{q(i+1)}{s-\frac{p-1}{2}+i}-Q^*(s)\quad ,$$

$$(2.5.12)\qquad D_j^{(r)}=(-1)^{r+1}r!\{(q-\frac{p+1}{2})\zeta(r+1,s-\frac{1}{2})+(q-\frac{p-1}{2})\zeta(r+1,s-1)+$$
$$+q\sum_{i=0}^{\frac{p-3}{2}}\zeta(r+1,s-\frac{p}{2}+i)+q\sum_{i=j+1}^{\frac{p-5}{2}}\zeta(r+1,s-\frac{p-1}{2}+i)+$$
$$+q(j+1)\zeta(r+1,s-\frac{p-1}{2}+j+1)+\frac{(q-1)/2}{(s-1)^{r+1}}+\sum_{i=0}^{j-1}\frac{q(i+1)}{(s-\frac{p-1}{2}+i)^{r+1}}-Q^{**}(r,s)\},$$

$$(2.5.13)\qquad B_{0j}=\frac{\Gamma^{q-\frac{p+1}{2}}(\frac{p-2}{2}-j)\Gamma^{q-\frac{p-1}{2}}(\frac{p-3}{2}-j)\prod_{i=0}^{\frac{p-3}{2}}\Gamma^q(i-j-\frac{1}{2})\prod_{i=j+1}^{\frac{p-5}{2}}(i-j)}{(\frac{p-3}{2}-j)^{\frac{q-1}{2}}\prod_{i=0}^{j-1}(i-j-\frac{1}{2})^{q(i+1)}\;Q(\frac{p-1}{2}-j)}\quad ,$$

$$(2.5.14)\qquad D_{0j}=(q-\frac{p-1}{2})\psi(\frac{p-2}{2}-j)+(q-\frac{p-1}{2})\psi(\frac{p-3}{2}-j)+q\sum_{i=0}^{\frac{p-3}{2}}\psi(i-j-\frac{1}{2})+$$

$$+q\sum_{i=j+1}^{\frac{p-5}{2}}\psi(i-j)-\gamma q(j+1)-\frac{(q-1)/2}{\frac{p-3}{2}-j}\sum_{i=0}^{j-1}\frac{q(i+1)}{i-j}-Q^*(\tfrac{p-1}{2}-j)\quad,$$

(2.5.15) $$D_{0j}^{(r)}=(-1)^{r+1}r!\{(q-\tfrac{p+1}{2})\zeta(r+1,\tfrac{p-2}{2}-j)+(q-\tfrac{p-1}{2})\zeta(r+1,\tfrac{p-3}{2}-j)+$$

$$+q\sum_{i=0}^{\frac{p-3}{2}}\zeta(r+1,i-j-\tfrac{1}{2})+q\sum_{i=j+1}^{\frac{p-5}{2}}\zeta(r+1,i-j)+q(j+1)\zeta(r+1,1)+$$

$$+\frac{(q-1)/2}{(\frac{p-3}{2}-j)^{r+1}}+\sum_{i=0}^{j-1}\frac{q(i+1)}{(i-j)^{r+1}}-Q^{**}(r,\tfrac{p-1}{2}-j)\}\quad.$$

b) Para $j=\frac{p-3}{2}$

As expressões de A_j, A_{0j}, C_j, $C_j^{(r)}$, C_{0j} e $C_{0j}^{(r)}$ são as mesmas da parte a), e

(2.5.16) $$B_j=\frac{\Gamma^{q-\frac{p+1}{2}}(s-\frac{1}{2})\,\Gamma^{\frac{(q-1)(p-1)}{2}}(s)\prod_{i=0}^{\frac{p-5}{2}}\Gamma^q(s-\frac{p}{2}+i)}{\prod_{i=0}^{\frac{p-5}{2}}(s-\frac{p-1}{2}+i)^{q(i+1)}\cdot Q(s)}\quad,$$

(2.5.17) $$D_j=(q-\tfrac{p+1}{2})\psi(s-\tfrac{1}{2})+\frac{(q-1)(p-1)}{2}\psi(s)+q\sum_{i=0}^{\frac{p-5}{2}}\psi(s-\tfrac{p}{2}+i)-\sum_{i=0}^{\frac{p-5}{2}}\frac{q(i+1)}{s-\frac{p-1}{2}+i}-Q^*(s)\quad,$$

(2.5.18) $$D_j^{(r)}=(-1)^{r+1}r!\{(q-\tfrac{p+1}{2})\zeta(r+1,s-\tfrac{1}{2})+\frac{(q-1)(p-1)}{2}\zeta(r+1,s)\quad+$$

$$+q\sum_{i=0}^{\frac{p-5}{2}}\zeta(r+1,s-\tfrac{p}{2}+i)+\sum_{i=0}^{\frac{p-5}{2}}\frac{q(i+1)}{(s-\frac{p-1}{2}+i)^{r+1}}-Q^{**}(r,s)\}\quad,$$

(2.5.19) $$B_{0j}=\frac{\Gamma^{q-\frac{p+1}{2}}(\frac{p-2}{2}-j)\,\Gamma^{\frac{(q-1)(p-1)}{2}}(\frac{p-1}{2}-j)\prod_{i=0}^{\frac{p-5}{2}}\Gamma^{q}(i-j-\frac{1}{2})}{\prod_{i=0}^{\frac{p-5}{2}}(i-j)^{q(i+1)}\;Q(\frac{p-1}{2}-j)}\quad,$$

(2.5.20) $$D_{0j}=(q-\frac{p+1}{2})\,\psi(\frac{p-2}{2}-j)+\frac{(q-1)(p-1)}{2}\psi(\frac{p-1}{2}-j)+q\sum_{i=0}^{\frac{p-5}{2}}\psi(i-j-\frac{1}{2})\;-$$
$$-\sum_{i=0}^{\frac{p-5}{2}}\frac{q(i+1)}{i-j}-Q^{*}(\frac{p-1}{2}-j)\quad,$$

(2.5.21) $$D_{0j}^{(r)}=(-1)^{r+1}r!\,\{(q-\frac{p+1}{2})\,\zeta(r+1,\frac{p-2}{2}-j)+\frac{(q-1)(p-1)}{2}\zeta(r+1,\frac{p-1}{2}-j)+$$
$$+\sum_{i=0}^{\frac{p-5}{2}}\zeta(r+1,i-j-\frac{1}{2})+\sum_{i=0}^{\frac{p-5}{2}}\frac{q(i+1)}{(i-j)^{r+1}}-Q^{**}(r,\frac{p-1}{2}-j)\}\quad.$$

c) Para $j=\frac{p-1}{2},\ \frac{p+1}{2},\ldots$

(2.5.22) $$A_j=\frac{\Gamma^{q-\frac{p-1}{2}}(s-1)\,\Gamma^{\frac{(q-1)(p+1)}{2}}(s-\frac{p}{2}+j+1)\prod_{i=0}^{\frac{p-5}{2}}\Gamma^{q}(s-\frac{p-1}{2}+i)}{(s-1)^{\frac{q-1}{2}}\prod_{i=0}^{\frac{p-3}{2}}(s-\frac{p}{2}+i)^{q(i+1)}\prod_{i=\frac{p-1}{2}}^{j-1}(s-\frac{p}{2}+i)^{\frac{(q-1)(p+1)}{2}}\;Q(s)}$$

(2.5.23) $$C_j=(q-\frac{p-1}{2})\,\psi(s-1)+\frac{(q-1)(p+1)}{2}\psi(s-\frac{p}{2}+j+1)+q\sum_{i=0}^{\frac{p-5}{2}}\psi(s-\frac{p-1}{2}+i)\;-$$

$$-\frac{(q-1)/2}{s-1}-\sum_{i=0}^{\frac{p-3}{2}}\frac{q(i+1)}{s-\frac{p}{2}+i}-\sum_{i=\frac{p-1}{2}}^{j-1}\frac{(q-1)(p+1)/2}{s-\frac{p}{2}+i}-Q^*(s)\quad,$$

(2.5.24)
$$C_j^{(r)}=(-1)^{r+1}r!\{(q-\frac{p-1}{2})\zeta(r+1,s-1)+\frac{(q-1)(p+1)}{2}\zeta(r+1,s-\frac{p}{2}+j+1)+$$
$$+q\sum_{i=0}^{\frac{p-5}{2}}\zeta(r+1,s-\frac{p-1}{2}+i)+\frac{(q-1)/2}{(s-1)^{r+1}}+\sum_{i=0}^{\frac{p-3}{2}}\frac{q(i+1)}{(s-\frac{p}{2}+i)^{r+1}}+$$
$$+\sum_{i=\frac{p-1}{2}}^{j-1}\frac{(q-1)(p-1)/2}{(s-\frac{p}{2}+i)^{r+1}}-Q^{**}(r,s)\}\quad,$$

(2.5.25)
$$A_{0j}=\frac{\Gamma^{q-\frac{p-1}{2}}(\frac{p-2}{2}-j)\prod_{i=0}^{\frac{p-5}{2}}\Gamma^{q}(i-j+\frac{1}{2})}{(\frac{p-2}{2}-j)^{\frac{q-1}{2}}\prod_{i=0}^{\frac{p-3}{2}}(i-j)^{q(i+1)}\prod_{i=\frac{p-1}{2}}^{j-1}(i-j)^{\frac{(q-1)(p-1)}{2}}Q(\frac{p}{2}-j)}\quad,$$

(2.5.26)
$$C_{0j}=(q-\frac{p-1}{2})\psi(\frac{p-2}{2}-j)-\gamma\frac{(q-1)(p+1)}{2}+q\sum_{i=0}^{\frac{p-5}{2}}\psi(i-j+\frac{1}{2})-\frac{(q-1)/2}{\frac{p-2}{2}-j}-$$
$$-\sum_{i=0}^{\frac{p-3}{2}}\frac{q(i+1)}{i-j}-\sum_{i=\frac{p-1}{2}}^{j-1}\frac{(q-1)(p+1)/2}{i-j}-Q^*(\frac{p}{2}-j)\quad,$$

(2.5.27)
$$C_{0j}^{(r)}=(-1)^{r+1}r!\{(q-\frac{p-1}{2})\zeta(r+1,\frac{p-2}{2}-j)+\frac{(q-1)(p+1)}{2}\zeta(r+1,1)\quad+$$
$$+q\sum_{i=0}^{\frac{p-5}{2}}\zeta(r+1,i-j+\frac{1}{2})+\frac{(q-1)/2}{(\frac{p-2}{2}-j)^{r+1}}+\sum_{i=0}^{\frac{p-3}{2}}\frac{q(i+1)}{(i-j)^{r+1}}\quad+$$

$$+\sum_{i=\frac{p-1}{2}}^{j-1}\frac{(q-1)(p+1)/2}{(i-j)^{r+1}}-Q^{**}(r,\tfrac{p}{2}-j)\}\quad,$$

(2.5.28)
$$B_j=\frac{\Gamma^{q-\frac{p+1}{2}}(s-\frac{1}{2})\,\Gamma^{\frac{(q-1)(p-1)}{2}}(s-\frac{p-1}{2}+j+1)\prod_{i=0}^{\frac{p-5}{2}}\Gamma^{q}(s-\frac{p}{2}+i)}{(s-1)^{\frac{q-1}{2}}\prod_{i=0}^{\frac{p-5}{2}}(s-\frac{p-1}{2}+i)^{q(i+1)}\prod_{i=\frac{p-3}{2}}^{j-1}(s-\frac{p-1}{2}+i)^{\frac{(q-1)(p-1)}{2}}Q(s)}\ ,$$

(2.5.29)
$$D_j=(q-\tfrac{p+1}{2})\psi(s-\tfrac{1}{2})+q\sum_{i=0}^{\frac{p-5}{2}}\psi(s-\tfrac{p}{2}+i)+\frac{(q-1)(p-1)}{2}\psi(s-\tfrac{p-1}{2}+j+1)\ -$$
$$-\frac{(q-1)/2}{s-1}-\sum_{i=0}^{\frac{p-5}{2}}\frac{q(i+1)}{s-\frac{p-1}{2}+i}-\sum_{i=\frac{p-3}{2}}^{j-1}\frac{(q-1)(p-1)/2}{s-\frac{p-1}{2}+i}-Q^{*}(s)\quad,$$

(2.5.30)
$$D_j^{(r)}=(-1)^{r+1}r!\{(q-\tfrac{p+1}{2})\zeta(r+1,s-\tfrac{1}{2})+q\sum_{i=0}^{\frac{p-5}{2}}\zeta(r+1,s-\tfrac{p}{2}+i)\ +$$
$$+\frac{(q-1)(p-1)}{2}\zeta(r+1,s-\tfrac{p-1}{2}+j+1)+\frac{(q-1)/2}{(s-1)^{r+1}}+\sum_{i=0}^{\frac{p-5}{2}}\frac{q(i+1)}{(s-\frac{p-1}{2}+i)^{r+1}}+$$
$$+\sum_{i=\frac{p-3}{2}}^{j-1}\frac{(q-1)(p-1)/2}{(s-\frac{p-1}{2}+i)^{r+1}}-Q^{**}(r,s)\}\quad,$$

(2.5.31)
$$B_{0j}=\frac{\Gamma^{q-\frac{p+1}{2}}(\frac{p-2}{2}-j)\prod_{i=0}^{\frac{p-5}{2}}\Gamma^{q}(i-j-\frac{1}{2})}{(\frac{p-3}{2}-j)^{\frac{q-1}{2}}\prod_{i=0}^{\frac{p-5}{2}}(i-j)^{q(i+1)}\prod_{i=\frac{p-3}{2}}^{j-1}(i-j)^{\frac{(q-1)(p-1)}{2}}Q(\frac{p-1}{2}-j)}\ ,$$

$$(2.5.32)\qquad D_{0j}=(q-\frac{p+1}{2})\,\psi(\frac{p-2}{2}-j)+q\sum_{i=0}^{\frac{p-5}{2}}\psi(i-j-\frac{1}{2})-\gamma\frac{(q-1)(p-1)}{2}-\frac{(q-1)/2}{\frac{p-3}{2}-j}-$$

$$-\sum_{i=0}^{\frac{p-5}{2}}\frac{q(i+1)}{i-j}-\sum_{i=\frac{p-3}{2}}^{j-1}\frac{(q-1)(p-1)/2}{i-j}-Q^{*}(\frac{p-1}{2}-j)\quad ,$$

$$(2.5.33)\qquad D_{0j}^{(r)}=(-1)^{r+1}r!\{(q-\frac{p+1}{2})\,\zeta(r+1,\frac{p-2}{2}-j)+q\sum_{i=0}^{\frac{p-5}{2}}\zeta(r+1,i-j-\frac{1}{2})\;+$$

$$+\frac{(q-1)(p-1)}{2}\zeta(r+1,1)+\frac{(q-1)/2}{(\frac{p-3}{2}-j)^{r+1}}+\sum_{i=0}^{\frac{p-5}{2}}\frac{q(i+1)}{(i-j)^{r+1}}\;+$$

$$+\sum_{i=\frac{p-3}{2}}^{j-1}\frac{(q-1)(p-1)/2}{(i-j)^{r+1}}-Q^{**}(r,\frac{p-1}{2}-j)\}\quad .$$

A densidade e a distribuição de V, neste caso, tem as mesmas expressões que (2.3.53) e (2.4.3) respectivamente, agora com a_j e b_j dados por (2.5.2) e (2.5.3) e $A_{0j}^{(.)}$ e $B_{0j}^{(.)}$ sendo calculados através das expressões (2.5.4) a (2.5.33) conforme o caso.

2.6 - A DENSIDADE E DISTRIBUIÇÃO DE V PARA $q\leq p\leq 2q$, p PAR, q ÍMPAR

Neste caso, após os cancelamentos de funções gama no integrando de (2.2.1) obtém-se

$$(2.6.1)\qquad I=\frac{1}{2\pi i}\int_L (v^{\frac{2}{n'}}\,q^{pq})^{-s}\,\frac{\Gamma^{q-\frac{p}{2}}(s-\frac{1}{2})\,\Gamma^{q-\frac{p}{2}}(s-1)\prod_{i=0}^{\frac{p}{2}-2}\Gamma^{q}(s-\frac{p}{2}+i)\prod_{i=0}^{\frac{p}{2}-2}\Gamma^{q}(s-\frac{p-1}{2}+i)}{(s-1)^{\frac{q-1}{2}}\,Q(s)}$$

As ordens a_j e b_j respectivamente dos polos $s=\frac{p}{2}-j$ e $s=\frac{p-1}{2}-j$ são

$$(2.6.2)\qquad a_j=\begin{cases} q(j+1) & j=0,1,\ldots,\frac{p}{2}-2 \\ \frac{(q-1)(p+1)}{2} & j=\frac{p}{2}-1 \\ \frac{p(q-1)}{2} & j\geq\frac{p}{2} \end{cases}$$

$$(2.6.3)\qquad b_j=\begin{cases} q(j+1) & j=0,1,\ldots,\frac{p}{2}-2 \\ \frac{p(q-1)}{2} & j\geq\frac{p}{2}-1 \end{cases}$$

Obtém-se, analogamente aos casos anteriores

a) Para $j=0,1,\ldots,\frac{p}{2}-2$.

$$(2.6.4)\qquad A_j=(A_j \text{ em } (2.3.18)).(s-1)^{1/2}$$

$$(2.6.5)\qquad C_j=(C_j \text{ em } (2.3.20))+\frac{1/2}{s-1}$$

$$(2.6.6)\qquad C_j^{(r)}=(C_j^{(r)} \text{ em } (2.3.23))+(-1)^r r!\left[\frac{1/2}{(s-1)^{r+1}}\right]$$

$$(2.6.7)\qquad A_{0j}=(A_{0j} \text{ em } (2.3.19)).(\tfrac{p-2}{2}-j)^{1/2}$$

$$(2.6.8)\qquad C_{0j}=(C_{0j} \text{ em } (2.3.27))+\frac{1/2}{\frac{p-2}{2}-j}$$

$$(2.6.9)\qquad C_{0j}^{(r)}=(C_{0j}^{(r)} \text{ em } (2.3.28))+(-1)^r r!\left[\frac{1/2}{(\frac{p-2}{2}-j)^{r+1}}\right]$$

$$(2.6.10)\qquad B_j=(B_j \text{ em } (2.3.29)).(s-1)^{1/2}$$

$$(2.6.11)\qquad D_j=(D_j \text{ em } (2.3.31))+\frac{1/2}{s-1}$$

$$(2.6.12)\qquad D_j^{(r)}=(D_j^{(r)} \text{ em } (2.3.32))+(-1)^r r!\left[\frac{1/2}{(s-1)^{r+1}}\right]$$

$$(2.6.13)\qquad B_{0j}=(B_{0j} \text{ em } (2.3.30)).(\tfrac{p-3}{2}-j)^{1/2}$$

(2.6.14) $D_{0j}=(D_{0j}$ em $(2.3.33))-\frac{1/2}{\frac{p-3}{2}-j}$

(2.6.15) $D_{0j}^{(r)}=(D_{0j}^{(r)}$ em $(2.3.34))+(-1)^r r!\left[\frac{1/2}{(\frac{p-3}{2}-j)^{r+1}}\right]$

b) Para $j=\frac{p}{2}-1$

As expressões de A_j, C_j, $C_j^{(r)}$, A_{0j}, C_{0j}, $C_{0j}^{(r)}$, B_j, D_j, $D_j^{(r)}$, B_{0j}, D_{0j} e $D_{0j}^{(r)}$ são as mesmas do caso p par, q par.

c) Para $j=\frac{p}{2},\frac{p}{2}+1,\ldots$

(2.6.16) $A_j=(A_j$ em $(2.3.41)).(s-1)^{1/2}$

(2.6.17) $C_j=(C_j$ em $(2.3.43))+\frac{1/2}{s-1}$

(2.6.18) $C_j^{(r)}=(C_j^{(r)}$ em $(2.3.44))+(-1)^r r!\left[\frac{1/2}{(s-1)^{r+1}}\right]$

(2.6.19) $A_{0j}=(A_{0j}$ em $(2.3.42))\ (\frac{p-2}{2}-j)^{1/2}$

(2.6.20) $C_{0j}=(C_{0j}$ em $(2.3.45))+\frac{1/2}{\frac{p-2}{2}-j}$

(2.6.21) $C_{0j}^{(r)}=(C_{0j}^{(r)}$ em $(2.3.46))+(-1)^r r!\left[\frac{1/2}{(\frac{p-2}{2}-j)^{r+1}}\right]$

(2.6.22) $B_j=(B_j$ em $(2.3.47)).(s-1)^{1/2}$

(2.6.23) $D_j=(D_j$ em $(2.3.49))+\frac{1/2}{s-1}$

(2.6.24) $D_j^{(r)}=(D_j^{(r)}$ em $(2.3.50))+(-1)^r r!\left[\frac{1/2}{(s-1)^{r+1}}\right]$

(2.6.25) $B_{0j}=(B_{0j}$ em $(2.3.48)).(\frac{p-3}{2}-j)^{1/2}$

(2.6.26) $D_{0j} = (D_{0j} \text{ em } (2.3.51)) + \frac{1/2}{\frac{p-3}{2}-j}$

(2.6.27) $D_{0j}^{(r)} = (D_{0j}^{(r)} \text{ em } (2.3.52)) + (-1)^r r! \left[\frac{1/2}{(\frac{p-3}{2}-j)^{r+1}}\right]$

A densidade e distribuição de V, neste caso, tem as mesmas expressões que (2.3.53) e (2.4.3) respectivamente com a_j e b_j dados por (2.6.2) e (2.6.3) e $A_{0j}^{(.)}$ e $B_{0j}^{(.)}$ sendo calculados através das expressões (2.6.4) a (2.6.27) conforme o caso.

2.7 - A DENSIDADE E A DISTRIBUIÇÃO DE V PARA $q<p\leq 2q$, p ÍMPAR, q PAR

Neste caso, após as simplificações das funções gama no integrando de (2.2.1), obtém-se

(2.7.1) $$I = \frac{1}{2\pi i}\int_L (v^{\frac{2}{n'}} q^{pq})^{-s} \frac{\Gamma^{q-\frac{p+1}{2}}(s-\frac{1}{2})\,\Gamma^{q-\frac{p+1}{2}}(s-1) \prod_{i=0}^{\frac{p-3}{2}} (s-\frac{p}{2}+i) \prod_{i=0}^{\frac{p-5}{2}} (s-\frac{p-1}{2}+i)}{(s-1)^{q/2}\, Q(s)}$$

As ordens a_j e b_j dos polos respectivamente dos tipos $s=\frac{p}{2}-j$ e $s=\frac{p-1}{2}-j$ são

(2.7.2) $$a_j = \begin{cases} q(j+1) & j=0,1,\ldots,\frac{p-3}{2} \\ \frac{(q-1)(p+1)}{2} & j\geq\frac{p-1}{2} \end{cases}$$

(2.7.3) $$b_j = \begin{cases} q(j+1) & j=0,1,\ldots,\frac{p-5}{2} \\ \frac{p(q-1)}{2}-\frac{1}{2} & j=\frac{p-3}{2} \\ \frac{(q-1)(p-1)}{2}-1 & j\geq\frac{p-1}{2} \end{cases}$$

Analogamente aos casos anteriores, obtém-se

a) Para $j=0,1,\ldots,\frac{p-5}{2}$

$$A_j=(A_j \text{ em } (2.5.4))/[(s-1)^{1/2}\Gamma(s-1)] \tag{2.7.4}$$

$$C_j=(C_j \text{ em } (2.5.5))-\psi(s-1)-\frac{1/2}{s-1} \tag{2.7.5}$$

$$C_j^{(r)}=(C_j^{(r)} \text{ em } (2.5.6))+(-1)^r r!\left[\zeta(r+1,s-1)-\frac{1/2}{(s-1)^{r+1}}\right] \tag{2.7.6}$$

$$A_{0j}=(A_{0j} \text{ em } (2.5.7))/\left[(\tfrac{p-3}{2}-j)^{1/2}\Gamma(\tfrac{p-3}{2}-j)\right] \tag{2.7.7}$$

$$C_{0j}=(C_{0j} \text{ em } (2.5.8))-\psi(\tfrac{p-3}{2}-j)-\frac{1/2}{\frac{p-3}{2}-j} \tag{2.7.8}$$

$$C_{0j}^{(r)}=(C_{0j}^{(r)} \text{ em } (2.5.9))+(-1)^r r!\left[\zeta(r+1,\tfrac{p-2}{2}-j)-\frac{1/2}{(\frac{p-3}{2}-j)^{r+1}}\right] \tag{2.7.9}$$

$$B_j=(B_j \text{ em } (2.5.10))/[(s-1)^{1/2}\Gamma(s-1)] \tag{2.7.10}$$

$$D_j=(D_j \text{ em } (2.5.11))-\psi(s-1)-\frac{1/2}{s-1} \tag{2.7.11}$$

$$D_j^{(r)}=(D_j^{(r)} \text{ em } (2.5.12))+(-1)^r r!\left[\zeta(r+1,s-1)-\frac{1/2}{(s-1)^{r+1}}\right] \tag{2.7.12}$$

$$B_{0j}=(B_{0j} \text{ em } (2.5.13))/\left[(\tfrac{p-3}{2}-j)^{1/2}\Gamma(\tfrac{p-3}{2}-j)\right] \tag{2.7.13}$$

$$D_{0j}=(D_{0j} \text{ em } (2.5.14))-\psi(\tfrac{p-3}{2}-j)-\frac{1/2}{\frac{p-3}{2}-j} \tag{2.7.14}$$

$$D_{0j}^{(r)}=(D_{0j}^{(r)} \text{ em } (2.5.15))+(-1)^r r!\left[\zeta(r+1,\tfrac{p-3}{2}-j)-\frac{1/2}{(\frac{p-3}{2}-j)^{r+1}}\right] \tag{2.7.15}$$

b) Para $j=\frac{p-3}{2}$

As expressões de A_j, C_j, $C_j^{(r)}$, A_{0j}, C_{0j}, $C_{0j}^{(r)}$, são as mesmas da parte a) acima, e

(2.7.16) $B_j = (B_j \text{ em } (2.5.16))/\Gamma(s)$

(2.7.17) $D_j = (D_j \text{ em } (2.5.17)) - \psi(s)$

(2.7.18) $D_j^{(r)} = (D_j^{(r)} \text{ em } (2.5.18)) + (-1)^r r! [\zeta(r+1,s)]$

(2.7.19) $B_{0j} = (B_{0j} \text{ em } (2.5.19))/\Gamma(\frac{p-1}{2}-j)$

(2.7.20) $D_{0j} = (D_{0j} \text{ em } (2.5.20)) - \psi(\frac{p-1}{2}-j)$

(2.7.21) $D_{0j}^{(r)} = (D_{0j}^{(r)} \text{ em } (2.5.21)) + (-1)^r r! \left[\zeta(r+1,\frac{p-1}{2}-j)\right]$

c) Para $j=\frac{p-1}{2},\frac{p-1}{2},\ldots$

(2.7.22) $A_j = (A_j \text{ em } (2.5.22))/[(s-1)^{1/2}\Gamma(s-1)]$

(2.7.23) $C_j = (C_j \text{ em } (2.5.23)) - \psi(s-1) - \frac{1/2}{s-1}$

(2.7.24) $C_j^{(r)} = (C_j^{(r)} \text{ em } (2.5.24)) + (-1)^r r! \left[\zeta(r+1,s-1) - \frac{1/2}{(s-1)^{r+1}}\right]$

(2.7.25) $A_{0j} = (A_{0j} \text{ em } (2.5.25))/\left[(\frac{p-3}{2}-j)^{1/2}\Gamma(\frac{p-3}{2}-j)\right]$

(2.7.26) $C_{0j} = (C_{0j} \text{ em } (2.5.26)) - \psi(\frac{p-3}{2}-j) - \frac{1/2}{\frac{p-3}{2}-j}$

(2.7.27) $C_{0j}^{(r)} = (C_{0j}^{(r)} \text{ em } (2.5.27)) + (-1)^r r! \left[\zeta(r+1,\frac{p-3}{2}-j) - \frac{1/2}{(\frac{p-3}{2}-j)^{r+1}}\right]$

(2.7.28) $B_j = (B_j \text{ em } (2.5.28)) . \frac{\prod_{i=\frac{p-3}{2}}^{j-1} (s-\frac{p-1}{2}+1)}{(s-1)^{1/2}\Gamma(s-\frac{p-1}{2}+j+1)}$

(2.7.29) $D_j = (D_j \text{ em } (2.5.29)) + \sum_{i=\frac{p-3}{2}}^{j-1} \frac{1}{s-\frac{p-1}{2}+i} \quad \psi(s-\frac{p-1}{2}+j+1) - \frac{1/2}{s-1}$

$$(2.7.30)\qquad D_j^{(r)} = (D_j^{(r)} \text{ em } (2.5.30)) + (-1)^r r! \left[\sum_{i=\frac{p-3}{2}}^{j-1} \frac{1}{(s-\frac{p-1}{2}+i)^{r+1}} - \right.$$

$$\left. - \frac{1/2}{(s-1)^{r+1}} + \zeta(r+1, s-\frac{p-1}{2}+j+1) \right]$$

$$(2.7.31)\qquad B_{0j} = (B_{0j} \text{ em } (2.5.31)) . \frac{\prod_{i=\frac{p-3}{2}}^{j-1} (i-j)}{(\frac{p-3}{2}-j)^{1/2}}$$

$$(2.7.32)\qquad D_{0j} = (D_{0j} \text{ em } (2.5.32)) + \sum_{i=\frac{p-3}{2}}^{j-1} \frac{1}{i-j}$$

$$(2.7.33)\qquad D_{0j}^{(r)} = (D_{0j}^{(r)} \text{ em } (2.5.33)) + (-1)^r r! \left[\sum_{i=\frac{p-3}{2}}^{j-1} \frac{1}{(i-j)^{r+1}} - \right.$$

$$\left. - \frac{1/2}{(\frac{p-3}{2}-j)^{r+1}} + \zeta(r+1, 1) \right]$$

A densidade e a distribuição de V tem as mesmas expressões de (2.3.53) e (2.4.3) respectivamente, com a_j e b_j dados por (2.7.2) e (2.7.3) e $A_{0j}^{(.)}$ e $B_{0j}^{(.)}$ sendo calculados através das expressões (2.7.4) a (2.7.33) conforme o caso.

BIBLIOGRAFIA

[1] Ahlfors, L.V. (1966). Complex Analysis. McGraw-Hill, New Iork.

[2] Anderson, T.W. (1958). Introduction to Multivariate Statistical Analysis. Wiley, New York.

[3] Bartlett, M.S. (1937). Properties of Sufficiency and Statistical Tests. Proc. Roy. Soc. A, 160, 268-282.

[4] Box, G.E.P. (1949). A General Distribution Theory for a Class of Likelihood Criteria. Biometrika 36, 317-346.

[5] Braaksma, B.L.J. (1964). Asymptotic Expansions and Analytic Continuations for Barnes Integrals. Compositio Matematica, 15 , 239-341.

[6] Cordeiro, J.A. (1980). Distribuições Exatas de Testes de Hipótese Multivariados. Tese de Doutoramento, IMECC-UNICAMP, Campinas.

[7] Epstein, B. (1948). Some Applications of Mellin Transform in Statistics. Ann. Math. Statist. 19, 370-379.

[8] Erdélyi, A., Magnus, W., Oberhettinger, F. e Tricomi, G.F. (1953). Higher Transcendental Functions, Vol. I. McGraw-Hill, New York.

[9] Fox, C. (1961). The G and H Functions as Symmetric Fourier Kernels. Trans. Amer. Math. Soc., 98.

[10] Jain, S.K., Rathie, P.N. e Shah, M.C. (1975). The Exact Distributions of Certain Likelihood Ratio Criteria. Sankhyā, A, 37, 150-163.

[11] Katyiar, R.S. e Mathai, A.M. (1979a). Exact Percentage Points for the Problem of Testing Independence. Biometrika 66, 353-356.

[12] ——— (1979b). The Distribution and the Exact Percentage Points for Wilks' L_{mvc} Criterion. Ann. Inst. Statist. Math., 31, 215-223.

[13] ——— (1980). Exact Percentage Points for Three Tests As-

sociated with Exponential Populations. Sankhyā, B, 42, 33-41.

[14] Lomnicki, Z.A. (1967). On the Distribution of Products of Random Variables. J. Royal Statist. Association, B, 29, 513-524.

[15] Luke, Y.L. (1969). The Special Functions and Their Approximations. Academic Press, New York.

[16] Mathai, A.M. (1970). Exact Distribution of a Criterion for Testing the Hypothesis that Several Multivariate Populations are Identical. J. Indian Statist. Assoc., 8, 1-17.

[17] ———— (1971). The Exact Distribution of Bartlett's Criterion for Testing Equality of Covariance Matrices. Publ. L' ISUP, Paris, 19, 1-15, 1970.

[18] Mathai, A.M. e Rathie, P.N. (1970). The Exact Distribution of Votaw's Criteria. Ann. Inst. Statist. Math., 23, 89-116.

[19] ———— (1971a). The Exact Distribution of Wilk's Generalized Variance in the Non-Central Linear Case. Sankhyā, A, 33 , 45-60.

[20] ———— (1971b). The Exact Distribution of Wilk's Criterion. Ann. Math. Statist., 42, 1010-1019.

[21] Mathai, A.M. e Saxena, R.K. (1978). Generalizes Hypergeometric Functions with Applications in Statistics and Physical Sciences. Springer-Verlag, New York.

[22] Meijer, C.S. (1941). On the G-Function. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. 44, 1062-1070.

[23] ———— (1946). On the G-Function I a VIII. Idem. 49, 227-237, 344-356, 457-469, 632-641, 765-772, 936-943, 1063-1072, 1165-1175.

[24] Rathie, P.N. e Pederzoli, G. (1980). Distribution of Product and Quocient of Pareto Variables. Metrika, 27, 165-179.

[25] Rathie, P.N. e Rohrer, H.G. (1979). The Exact Distribution of Products of Independent Random Variables. Multivariate Statistical Analysis and its Applications. IMECC-UNICAMP. Cam