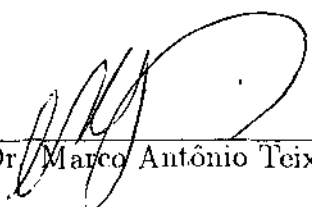


"Teorema de Kupka-Smale para sistemas dinâmicos reversíveis"

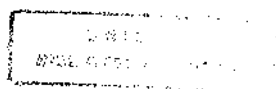
Este exemplar corresponde a redação final da tese devidamente corrigida e defendida pelo Sr. Claudio Aguialdo Buzzi e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 19 de Janeiro de 1995.



Prof. Dr. Marco Antônio Teixeira

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática.



UNIDADE	3C
N.º CHAMADA:	T/UNICAMP
	B988t
V. E.	
DTA DO REG.	24/4/94
PAGO	433,95
C I	D X
PAGO	788,11,00
DATA	12/07/95
N.º CPD	

CN-00072059-1

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Buzzi, Claudio Aguinaldo

B988t

Teorema de Kupka-Smale para sistemas dinâmicos
reversíveis / Claudio Aguinaldo Buzzi. - Campinas,
[SP : s. n.], 1995.

Orientador : Marco Antônio Teixeira.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de
Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Ciência
da Computação.

1. Sistemas dinâmicos. I. Teixeira, Marco Antônio. II.
Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática,
Estatística e Ciência da Computação. III. Título.

Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática, Estatística e
Ciência da Computação

Tese de Mestrado

**Teorema de Kupka-Smale para Sistemas
Dinâmicos Reversíveis**

Claudio Aguinaldo Buzzi

Prof. Dr. Marco Antônio Teixeira
orientador

Janeiro de 1995

Aos meus pais,

José Aurélio

e Claudenir

Agradecimentos

Agradeço a todas as pessoas que de uma forma ou de outra contribuíram para que este trabalho se realizasse. Em especial gostaria de agradecer:

- Marco Antonio Teixeira, pelo competente trabalho de orientação;
- João Carlos da Rocha Medrado, pelas proveitosas discussões;
- Alexandre, Ryuichi, Emerson, Nailson e Martin pelas reflexões sobre a cultura geral;
- Gisele, Luciane, Pedro e Junior, pelos momentos de descontração ;
- Todas as pessoas do "predinho" , pela convivência;
- Minha família, que sempre estimulou-me a prosseguir;
- CNPq, pelo apoio financeiro.

Conteúdo

Introdução	iii
1 Difeomorfismos Reversíveis	1
2 Campos Reversíveis	18
3 Difeomorfismos e Campos Lineares Reversíveis	27
4 Genericidade de Difeomorfismos Reversíveis	43
5 Genericidade de Campos Reversíveis	57
Bibliografia	72

Introdução

O objetivo deste trabalho é abordar propriedades genéricas de sistemas dinâmicos reversíveis. Tais sistemas podem ser campos de vetores ou difeomorfismos. O texto básico usado é o artigo de Devaney [De] onde é apresentado o teorema de Kupka-Smale para tais sistemas.

Destacamos que no teorema clássico de Kupka-Smale, a hiperbolicidade é uma propriedade genérica, mas no conjunto de campos e difeomorfismos reversíveis não é. Portanto temos que procurar propriedades que são genéricas no conjunto dos sistemas reversíveis.

Veremos que essa propriedade principal procurada é o conceito de singularidades e órbitas elementares. Definiremos campos ou difeomorfismos elementares e provaremos que o conjunto dos campos ou difeomorfismos elementares é residual no espaço dos sistemas reversíveis.

Outro problema abordado no trabalho é a relação que existe entre difeomorfismos reversíveis e difeomorfismos que preservam a área no plano. Veremos que existem difeomorfismos que preservam a área e são reversíveis, difeomorfismos reversíveis que não preservam a área e difeomorfismos que preservam a área e não são reversíveis.

O trabalho é apresentado na seguinte forma:

No capítulo 1, tratamos dos difeomorfismos reversíveis, apresentamos uma aplicação do teorema de Montgomery-Bochner [Mo,Zi] para mostrar que toda involução localmente é $\varphi(x, y) = (x, -y)$, definimos difeomorfismo reversível com relação a uma involução, apresentamos vários exemplos e tratamos das suas propriedades. Neste capítulo também discutimos a relação entre difeomorfismos que preservam a área e difeomorfismos reversíveis [Ro,Ca].

No capítulo 2, definimos e tratamos das propriedades dos campos de vetores reversíveis. Veremos que apesar de tratarmos de campos sobre uma variedade de dimensão $2n$, existem sistemas reversíveis [Qi] modelados a partir de fenômenos concretos, nem todos eles de dimensão par.

No capítulo 3, tratamos do caso linear. Definimos difeomorfismo linear elementar e campo vetorial linear elementar. Provamos que o conjunto dos difeomorfismos lineares reversíveis é subvariedade dos difeomorfismos lineares e os campos lineares reversíveis é uma fibra do fibrado tangente dos difeomorfismos lineares reversíveis. Finalmente concluímos o capítulo mostrando que o conjunto dos campos lineares reversíveis elementares é residual no conjunto dos campos lineares reversíveis, o mesmo ocorrendo com os difeomorfismos lineares reversíveis.

No capítulo 4, provamos o teorema de Kupka-Smale para difeomorfismos reversíveis onde usamos as propriedades da pseudotransversalidade [Ro].

No capítulo 5, demonstramos o teorema de Kupka-Smale para os campos reversíveis, destacamos que a prova apresentada é apenas para o caso em que a dimensão da variedade é quatro, pois usamos o teorema da Aplicação de Whitney do plano no plano [So]. Mas ressaltamos que o teorema é verdadeiro para toda dimensão par [De].

Capítulo 1

Difeomorfismos Reversíveis

Nesta secção trataremos de difeomorfismos reversíveis com relação a uma involução R .

Para isso considere uma variedade de classe C^∞ de dimensão $2n$. Um difeomorfismo $f : M \longrightarrow M$ de classe C^∞ é chamado involução se $f^2 = id$, ou seja, se a inversa de f é ela mesma.

Um exemplo de involução é quando $M = \mathbb{R}^2$ e $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $f(x, y) = (x, -y)$.

Vamos denotar o conjunto das involuções de M de classe C^s por $Inv^s(M)$.

Consideremos agora um subconjunto de $Inv^s(M)$ constituído das involuções cujo conjunto dos pontos fixos é uma subvariedade de M com dimensão n , ou seja, a metade da dimensão de M . Denotaremos esse conjunto por $I^s(M)$.

A involução $f(x, y) = (x, -y)$ citada acima, pertence a $I^s(\mathbb{R}^2)$, pois o conjunto dos pontos fixos de f , ou seja, $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = (x, y)\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$ é o eixo x que tem dimensão 1.

Nosso objetivo neste momento é mostrar que toda involução φ , na vizinhança de um ponto fixo, podemos escolher as coordenadas tal que $\varphi(x, y) = (x, -y)$.

Para isso enunciaremos o teorema de Montgomery-Bochner, cuja demonstração está em [Mo,Zi].

Teorema 1.1

Seja G um grupo compacto de difeomorfismos de uma variedade M de classe C^k ($k \geq 1$) ou analítica e suponha que cada difeomorfismo de G é de classe C^k ou analítico. Então na vizinhança de um ponto fixo estacionário, coordenadas admissíveis podem ser escolhidas tais que os difeomorfismos sejam lineares.

Como consequência do teorema 1.1, se considerarmos $G = \{Id, \varphi\}$, temos que em uma vizinhança de um ponto fixo de φ podemos supor que

$$\varphi : \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$$

é linear.

O conjunto $\{x \in \mathbb{R}^{2n} : \varphi(x) = x\} = Fix(\varphi)$ é um subespaço vetorial de dimensão n . Daí

$$\mathbb{R}^{2n} = Fix(\varphi) \oplus (Fix(\varphi))^\perp$$

Sejam $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ base de $Fix(\varphi)$ e $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ base de $(Fix(\varphi))^\perp$. Defina $g_i = f_i - \varphi(f_i)$, e observe que $\varphi(g_i) = -g_i$.

Afirmção: " $\{e_1, \dots, e_n, g_1, \dots, g_n\}$ é linearmente independente".

De fato,

$$a_1 e_1 + \dots + a_n e_n + b_1 g_1 + \dots + b_n g_n = 0 \quad (1.1)$$

Aplicando φ ,

$$a_1 e_1 + \dots + a_n e_n - b_1 g_1 - \dots - b_n g_n = 0 \quad (1.2)$$

Somando 1.1 com 1.2 e dividindo por 2 temos:

$$a_1 e_1 + \dots + a_n e_n = 0$$

e como $\{e_1, \dots, e_n\}$ é base, segue que:

$$a_1 = \dots = a_n = 0$$

Daí a equação 1.1 se reduz à:

$$b_1 g_1 + \dots + b_n g_n = 0$$

$$b_1(f_1 - \varphi(f_1)) + \dots + b_n(f_n - \varphi(f_n)) = 0$$

pela linearidade de φ

$$(b_1 f_1 + \dots + b_n f_n) - \varphi(b_1 f_1 + \dots + b_n f_n) = 0$$

como $Fix(\varphi) \cap (Fix(\varphi))^\perp = \{0\}$ temos que

$$b_1 f_1 + \dots + b_n f_n = 0$$

donde concluímos o afirmado.

Portanto se $(x, y) \in \mathbb{R}^{2n}$ então:

$$(x, y) = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n + y_1 g_1 + \dots + y_n g_n$$

e daí

$$\varphi(x, y) = x_1 \varphi(e_1) + \dots + x_n \varphi(e_n) + y_1 \varphi(g_1) + \dots + y_n \varphi(g_n) =$$

$$x_1 e_1 + \dots + x_n e_n - y_1 g_1 - \dots - y_n g_n = (x, -y)$$

A conclusão que tiramos é que na vizinhança de um ponto fixo de uma involução, no conjunto $I^s(M)$, as coordenadas podem ser escolhidas tal que a involução fique na forma $\varphi(x, y) = (x, -y)$.

Vamos definir agora o que é um difeomorfismo reversível com relação a involução R . Para facilitar a notação chamaremos tal difeomorfismo de R -reversível.

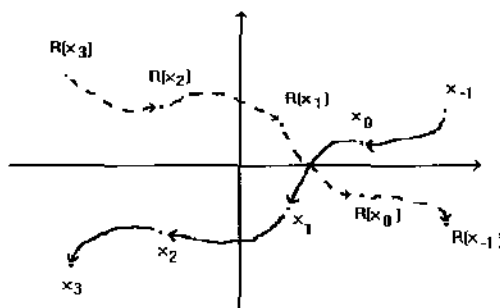


Figura 1.1: R-reversibilidade

Definição 1.2

Se $R \in I^s(M)$ e $L : M \longrightarrow M$ é difeomorfismo, dizemos que L é R -reversível se a equação:

$$x_{i+1} = L(x_i) \quad (1.3)$$

é invariante sobre $i \longrightarrow -i$ e $x \longrightarrow R(x)$

A figura 1.1 nos dá uma certa idéia geométrica do que significa ser R -reversível quando $R(x, y) = (x, -y)$ e a subvariedade de pontos fixos de R é o eixo x .

Escrevendo de uma forma explícita, nós temos que $R(x_{-i-1}) = L \circ R(x_{-i})$ e $x_{-i} = L(x_{-i-1})$. Daí nós concluimos que $R(x_{-i-1}) = L \circ R \circ L(x_{-i-1})$.

Essas observações nos levam a uma definição puramente algébrica de R -reversibilidade que é a seguinte: " L é reversível com relação a involução R se $L \circ R \circ L = R$ e $R \circ R = id$ ".

Observe que $(L \circ R \circ L) \circ R = R \circ R = id$, portanto $L \circ R$ é involução e $L = (L \circ R) \circ R$, ou seja, L é a composição de duas involuções. Portanto de agora por diante vamos adotar como definição de R-reversibilidade o seguinte:

Definição 1.3

Fixado $R \in I^s(M)$, um difeomorfismo $L \in Diff^s(M)$ é R-reversível se $L = U \circ R$, onde $U \in I^s(M)$.

Denotaremos o conjunto de todos os difeomorfismos de classe C^s R-reversíveis em M , por $Diff_R^s(M)$.

Vejamos agora algumas propriedades de sistemas R-reversíveis. Se L é R-reversível, então sabemos que $L \circ R \circ L = R$. Seja Γ uma órbita de L , ou seja, $\Gamma = (\dots, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots)$ onde $x_{i+1} = L(x_i)$. Pela propriedade anterior $L \circ R \circ L(x_n) = R(x_n)$, o que implica $L \circ R(x_{n+1}) = R(x_n)$, e finalmente $R(x_{n+1}) = L^{-1}(R(x_n))$; Portanto

$$R(\Gamma) = (\dots, R(x_{-1}), R(x_0), R(x_1), R(x_2), \dots)$$

é uma órbita de L .

Se Γ possui um ponto que está no eixo de simetria, ou seja, $\text{Fix}(R)$, então $\Gamma = R(\Gamma)$. Nesse caso chamaremos Γ de *órbita simétrica*, como na figura 1.2.

Outra propriedade interessante é que torna-se, de certo modo, mais fácil encontrar órbitas periódicas simétricas. Se x_0 e x_n estão no eixo de simetria, é fácil mostrar que x_0 é periódico de período $2n$. Como $R(x_0) = x_0$ e $R(x_n) = x_n$, temos que $L^{2n}(x_0) = L^n \circ L^n(x_0) = L^n(x_n) = L^n \circ R(x_n)$. Observe que $L \circ R \circ L = R$ implica $L^n \circ R \circ L^n = R$, daí $L^n \circ R = R \circ L^{-n}$. Portanto:

$$L^{2n}(x_0) = L^n \circ R(x_n) = R \circ L^{-n}(x_n) = R(x_0) = x_0$$

Logo, para encontrar órbitas periódicas simétricas, é suficiente analisar o sistema próximo das linhas de simetria.

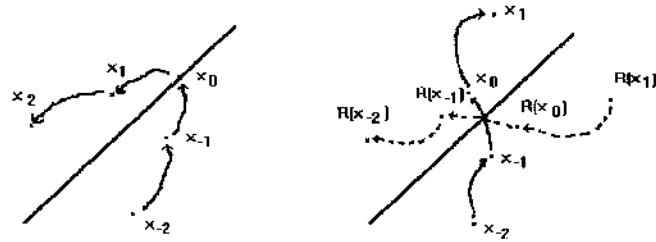


Figura 1.2: Órbita Simétrica e não Simétrica

Vejamos agora alguns exemplos de aplicações reversíveis.

Exemplo 1.4

$$U : \begin{cases} x' = x \\ y' = -y + \alpha x + x^2 \end{cases}$$

e

$$R : \begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$$

Daí temos então :

$$L = U \circ R : \begin{cases} x' = y \\ y' = -x + \alpha y + y^2 \end{cases}$$

Observe que a matriz jacobiana de L é:

$$Jac(L) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \alpha + 2y \end{bmatrix}$$

daí $|\det Jac(L)| = 1$. Portanto, a aplicação L acima, chamada aplicação de Hénon, preserva a área.

Exemplo 1.5 (Aplicação de Chirikov-Taylor)

$$U : \begin{cases} x' = x \\ y' = -y + k \operatorname{sen} x \end{cases}$$

e

$$R : \begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$$

daí:

$$L : \begin{cases} x' = y \\ y' = -x + k \operatorname{sen} y \end{cases}$$

que também preserva área.

Duas perguntas que surgem naturalmente são:

1. Como obter as involuções?
2. Aplicações reversíveis bidimensionais sempre preservam a área?

A primeira dessas questões pode ser respondida considerando uma construção geral de uma involução. Tome uma involução I e aplique uma transformação coordenada arbitrária C . Daí a composição $H = C \circ I \circ C^{-1}$ é uma involução. Por exemplo, considere:

$$I : \begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$

e considere a transformação coordenada

$$C : \begin{cases} x' = x \\ y' = y + \frac{\alpha}{2}x + \frac{x^2}{2} \end{cases}$$

logo

$$H = C \circ I \circ C^{-1} : \begin{cases} x' = x \\ y' = -y + \alpha x + x^2 \end{cases}$$

que é a involução associada à aplicação de Hénon.

Quanto à segunda questão nós observamos que a maioria das aplicações reversíveis são conservativas e em particular preservam a área. Reciprocamente, quase sem exceção, todas aplicações que preservam área estudadas numericamente na literatura são reversíveis.

Exemplo 1.6

$$M : \begin{cases} x' = x + f(y) \\ y' = y + g(x') \end{cases}$$

preserva área, pois

$$Jac(M) = \begin{bmatrix} 1 & f'(y) \\ g'(x + f(y)) & 1 + g'(x + f(y))f'(y) \end{bmatrix}$$

e $|\det Jac(M)| = 1$. Se f ou g é uma função ímpar, a aplicação é também reversível. No caso de f ser ímpar uma involução é

$$R : \begin{cases} x' = x + f(y) \\ y' = -y \end{cases}$$

Facilmente se verifica que $M \circ R \circ M = R$.

Se nós escolhermos $f(y) = kseny$ e $g(x') = x'$, nós temos a conhecida aplicação de Chirikov-Taylor ou aplicação padrão.

Mostraremos agora que existem aplicações reversíveis que não preservam área. A técnica é construir uma involução que não preserva área e compor com uma que preserva. Podemos tomar a involução

$$U_1 : \begin{cases} x' = y(1 + (y' - 1)^2) \\ y' = \frac{x}{1 + (y - 1)^2} \end{cases}$$

que não preserva área e compor com

$$R_1 : \begin{cases} x' = x \\ y' = C - y \end{cases}$$

que preserva área. O resultado é

$$L_1 = U_1 \circ R_1 : \begin{cases} x' = (C - y)(1 + (y' - 1)^2) \\ y' = \frac{x}{1 + (C - y - 1)^2} \end{cases}$$

reversível e que não preserva área.

Construiremos agora uma aplicação que preserva área e mostraremos que ela não é reversível.

$$P : \begin{cases} x' = x + y^2 + y^3 \\ y' = y + (x')^2 \end{cases}$$

claramente P preserva a área pois é como no exemplo 1.6.

Observe que se uma aplicação L é R-reversível e $x_0 \in \text{Fix}(L)$ então $R(x_0) \in \text{Fix}(L)$, pois $L \circ R \circ L = R$ e em x_0 teremos $L(R(x_0)) = R(x_0)$. Derivando, temos

$$dL_{R(x_0)} \circ dR_{x_0} \circ dL_{x_0} = dR_{x_0}$$

suponha que $dL_{x_0} = Id$, então $dL_{R(x_0)} = Id$.

A consequência é que se x_0 é o único ponto fixo tal que $dL_{x_0} = Id$, então x_0 é simétrico, ou seja, $R(x_0) = x_0$.

Suponhamos que P definida anteriormente é reversível. Observe que os únicos pontos fixos de P são $(0, 0)$ e $(0, -1)$ e

$$dP_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad dP_{(0,-1)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Temos que $(0, 0)$ é simétrico.

Seja

$$R \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by + a_1x^2 + a_2xy + a_3y^2 + o^3(x, y) \\ cx - ay + b_1x^2 + b_2xy + b_3y^2 + o^3(x, y) \end{pmatrix}$$

com $a^2 + bc = 1$.

Façamos $P \circ R \circ P = R$ para ordem 2.

$$RL \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x + y^2 + o^3(x, y) \\ y + x^2 + o^3(x, y) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} ax + by + (b + a_1)x^2 + a_2xy + (a + a_3)y^2 + o^3(x, y) \\ cx - ay + (-a + b_1)x^2 + b_2xy + (c + b_3)y^2 + o^3(x, y) \end{pmatrix}$$

finalmente temos que

$$PRP \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} ax + by + (b + a_1 + c^2)x^2 + (a_2 - 2ac)xy + (a + a_3 + a^2)y^2 + o^3(x, y) \\ cx - ay + (-a + b_1 + a^2)x^2 + (b_2 + 2ab)xy + (c + b_3 + b^2)y^2 + o^3(x, y) \end{pmatrix}$$

como

$$P \circ R \circ P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

temos as seguintes possibilidades $a = b = c = 0$ ou $a = 0$ e $b = c = -1$, mas $a = b = c = 0$ não satisfaz $a^2 + bc = 0$. Portanto a involução R fica

$$R \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -y + a_1x^2 + a_2xy + a_3y^2 + c_1x^3 + c_2x^2y + c_3xy^2 + c_4y^3 + o^4(x, y) \\ -x + b_1x^2 + b_2xy + b_3y^2 + d_1x^3 + d_2x^2y + d_3xy^2 + d_4y^3 + o^4(x, y) \end{pmatrix}$$

Substituindo novamente na equação $PRP = R$ para grau 3, chegamos às seguintes condições para os coeficientes de grau dois

$$a_2 - 2b_1 - 1 = 0 \quad (1)$$

$$2a_3 = 0 \quad (2)$$

$$2a_1 - 2 = 0 \quad (3)$$

$$a_2 = 0 \quad (4)$$

$$b_2 = 0 \quad (5)$$

$$2b_3 - 2a_1 = 0 \quad (6)$$

$$2b_1 = 0 \quad (7)$$

$$-1 + b_3 = 0 \quad (8)$$

das equações (1), (4) e (7) vemos que a involução R não existe. Logo P não é reversível. Para um caso mais geral ver [Ro,Ca].

Podemos então concluir que a relação entre aplicações que preservam área e aplicações reversíveis é dada pelo diagrama de Venn da figura 1.3.

Como uma ilustração de aplicações reversíveis daremos agora dois exemplos de situação física descrita por modelos discretos que são reversíveis [Qi].

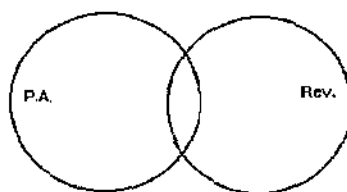


Figura 1.3: Diagrama de Venn

Exemplo 1.7 (Base Química da Morfogenese)

A difusão de duas diferentes substâncias químicas convergem para uma média que pode ser descrita por

$$\frac{d}{dt}x_i = D_1(x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}) + x_i y_i - y_i - \alpha$$

$$\frac{d}{dt}y_i = D_2(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}) + \beta - x_i y_i$$

onde x_i é a concentração da substância A na célula i e y_i é a concentração da substância B na célula i ; D_1 e D_2 são constantes de difusão e α e β são parâmetros. Soluções estacionárias dessas equações são

$$\begin{cases} x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1} = \frac{\alpha + y_i - x_i y_i}{D_1} \\ y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} = \frac{(x_i y_i - \beta)}{D_2} \end{cases}$$

que é simétrico sobre $i \longrightarrow -i$.

Exemplo 1.8 (Quasicristal)

Um quasicristal é representado pela equação

$$x_{i+1} + x_{i-2} = x_i x_{i-1}$$

onde x_i é o traço da matriz transferência na posição i do quasicristal. A equação acima é invariante sobre $i \longrightarrow -i$.

Seja $L \in \text{Diff}_R^s(M)$, ou seja, $L = U \circ R$ onde U e R são involuções cujo conjunto de pontos fixos é uma subvariedade de M de dimensão metade, ou seja, n .

Defina agora $U_k = L^k \circ R$, onde k é inteiro e observe que U_k é involução, pois :

$$(U_k)^2 = L^k \circ R \circ L^k \circ R = L^{k-1} \circ U \circ R \circ R \circ U \circ R \circ L^{k-1} \circ R =$$

$$L^{k-1} \circ R \circ L^{k-1} \circ R = \dots = L^0 \circ R \circ L^0 \circ R = id$$

Seja ainda $\text{Fix}(U_k)$ o conjunto dos pontos fixos de U_k . A seguir provaremos que $\text{Fix}(U_k)$ é subvariedade de M de dimensão n , sendo assim $U_k \in I^s(M)$. Mas para isso precisaremos de duas proposições:

Proposição 1.9

$$i) \text{Fix}(U_k) = L(\text{Fix}(U_{k-2}))$$

$$ii) R(\text{Fix}(U_k)) = \text{Fix}(U_{-k})$$

Demonstração : Para a parte $i)$ considere $x \in \text{Fix}(U_k)$, então

$$x = U_k(x) = L^k(R(x)) = L(L^{k-1}(R(x)))$$

Provaremos que $L^{k-1}(R(x)) \in \text{Fix}(U_{k-2})$.

$$U_{k-2}(L^{k-1}(R(x))) = L^{k-2} \circ R \circ L^{k-1} \circ R(x) =$$

$$L^{k-2} \circ R \circ L^{k-2} \circ R \circ R \circ L \circ R(x) = R \circ L \circ R(x)$$

Como $x = L^k \circ R(x)$, temos que

$$R \circ L \circ R(x) = R \circ L \circ R \circ L^k \circ R(x) = R \circ L \circ R \circ L \circ L^{k-1} \circ R(x) = L^{k-1} \circ R(x)$$

Portanto $x \in L(Fix(U_{k-2}))$. Reciprocamente se $x \in L(Fix(U_{k-2}))$, então $x = L(y)$ onde y é tal que $U_{k-2}(y) = y$. Nós queremos provar que $U_k(x) = x$, para isso, $U_k(x) = U_k(L(y)) = L^k \circ R \circ L(y)$. Como $U_{k-2}(y) = y$, temos que

$$L^k \circ R \circ L(y) = L^k \circ R \circ L \circ L^{k-2} \circ R(y) = L(y) = x$$

o que demonstra a primeira parte da proposição.

Para a parte *ii*) considere $x \in R(Fix(U_k))$, daí $x = R(y)$ onde y é tal que $U_k(y) = L^k \circ R(y) = y$. Queremos mostrar que $U_{-k}(x) = x$. Para isso

$$U_{-k}(x) = L^{-k} \circ R(x) = L^{-k} \circ R \circ R(y) = L^{-k}(y) = L^{-k} \circ L^k \circ R(y) = R(y) = x$$

Reciprocamente se $x \in Fix(U_{-k})$ então $U_{-k}(x) = x$, ou seja,

$$x = R \circ R \circ L^{-k} \circ R(x)$$

Queremos mostrar que $R \circ L^{-k} \circ R(x) \in Fix(U_k)$. Para isso

$$U_k(R \circ L^{-k} \circ R(x)) = L^k \circ R \circ R \circ L^{-k} \circ R(x) = R(x) = R \circ L^{-k} \circ R(x)$$

o que completa a demonstração da proposição. $\square$

Proposição 1.10

$$i) Fix(U_{2k}) = L^k(Fix(R))$$

$$ii) Fix(U_{2k+1}) = L^k(Fix(U))$$

Demonstração : Para a primeira parte, considere $x \in \text{Fix}(U_{2k})$, ou seja, $x = L^{2k} \circ R(x) = L^k(L^k \circ R(x))$. Mostraremos que $L^k \circ R(x) \in \text{Fix}(R)$, para isso

$$R(L^k \circ R(x)) = R \circ L^k \circ R \circ L^k \circ R(x) = L^k \circ R(x)$$

Reciprocamente, se $x \in L^k(\text{Fix}(R))$, então $x = L^k(y)$ onde y é tal que $R(y) = y$. Queremos provar que $x \in \text{Fix}(U_{2k})$, para isso

$$U_{2k}(x) = L^k \circ L^k \circ R(x) = L^k \circ L^k \circ R \circ L^k(y) = L^k \circ L^k \circ R \circ L^k \circ R(y) = L^k(y) = x$$

o que termina a primeira parte da proposição.

Para a segunda parte, considere $x \in \text{Fix}(U_{2k+1})$, daí $x = U_{2k+1}(x) = L^{2k+1} \circ R(x) = L^k(L^{k+1} \circ R(x))$. Queremos mostrar que $L^{k+1} \circ R(x) \in \text{Fix}(U)$, para isso

$$U(L^{k+1} \circ R(x)) = U \circ L^{k+1} \circ R \circ L^{2k+1} \circ R(x) =$$

$$U \circ L^{k+1} \circ R \circ L^{k+1} \circ R \circ R \circ L^k \circ R(x) = U \circ R \circ L^k \circ R(x) = L^{k+1} \circ R(x)$$

Reciprocamente, se $x \in L^k(\text{Fix}(U))$, então $x = L^k(y)$ onde y é tal que $U(y) = y$. Mostraremos que $x \in \text{Fix}(U_{2k+1})$, para isso observe que

$$U_{2k+1}(x) = L^{2k+1} \circ R(x) = L^{2k+1} \circ R \circ L^k(y) = L^{2k+1} \circ R \circ L^k \circ U(y) =$$

$$L^{k+1} \circ L^k \circ R \circ L^k \circ R \circ R \circ U(y) = L^{k+1} \circ L^{-1}(y) = L^k(y) = x$$

o que completa a demonstração da proposição. $\square$

Como L^k é difeomorfismo e $\text{Fix}(R)$ e $\text{Fix}(U)$ são subvariedades n -dimensionais, então $\text{Fix}(U_k)$ é subvariedade n -dimensional e portanto $U_k \in I^s(M)$. Como $L^k = U_k \circ R$ segue que $L^k \in \text{Diff}_R^s(M)$. Chamamos $\text{Fix}(U_k)$ a k -ésima *subvariedade de simetria de L* . A importância dessas subvariedades está descrita na próxima proposição.

Proposição 1.11

- i) Se $j \neq k$, $Fix(U_j) \cap Fix(U_k) \subset Per(L)$
- ii) Reciprocamente, se $p \in Fix(U_j)$ é um ponto periódico de L , então $p \in Fix(U_k)$ para algum $k \neq j$.

Demonstração : Para a parte i) considere $x \in Fix(U_j) \cap Fix(U_k)$, então $U_j(x) = L^j \circ R(x) = x$ e $U_k(x) = L^k \circ R(x) = x$, ou seja,

$$x = L^j \circ R \circ L^k \circ R(x) = L^{j-k} \circ L^k \circ R \circ L^k \circ R(x) = L^{j-k}(x)$$

Daí x é um ponto periódico de L .

Para a parte ii) temos que $L^j \circ R(p) = p$ e $L^s(p) = p$ para algum s , então

$$p = L^j \circ R(p) = L^j \circ R \circ L^s(p) =$$

$$L^{j-s} \circ L^s \circ R \circ L^s \circ R \circ R(p) = L^{j-s} \circ R(p) = U_{j-s}(p)$$

daí $x \in Fix(U_{j-s})$. $\square$

Alguns pontos periódicos de L interseptom as subvariedades de simetria. Nós chamamos esses pontos de *pontos periódicos simétricos*.

A classificação dos pontos periódicos simétricos é dada pela próxima proposição devida à De Vogelaere [Vo].

Proposição 1.12

Seja x um ponto periódico simétrico de L . Então uma das iteradas de x pertence à pelo menos um dos seguintes conjuntos:

- i) $Fix(U_{2k}) \cap Fix(R)$
- ii) $Fix(U_{2k+1}) \cap Fix(R)$
- iii) $Fix(U_{2k+1}) \cap Fix(U)$

Demonstração: Se x é periódico simétrico, então temos $U_n(x) = x$ para algum n e $L^j(x) = x$ com $L^s(x) \neq x \forall 0 \leq s < j$.

Temos duas possibilidades, n é par ou n é ímpar.

Se $n = 2i$, temos $L^j(x) = x$ e $L^{2i}R(x) = x$. Daí

$$L^{2i}R(x) = L^j(L^{2i-j}R(x)) = x = L^j(x)$$

ou seja

$$x = L^{2i-j}R(x) = RL^{j-2i}(x)$$

daí

$$L^{j-i}(x) = L^{j-i}RL^{j-2i}(x) = L^{j-i}RL^{j-2i}L^j(x) = R(L^{j-i}(x))$$

portanto

$$L^{j-i}(x) \in \text{Fix}(R) \quad (1.4)$$

Escolha $k \neq 0$ tal que $2k$ seja múltiplo de j , daí

$$U_{2k}(L^{j-i}(x)) = L^{2k}RL^{j-i}(x) = L^{2k}L^{j-i}(x) = L^{j-i}L^{2k}(x) = L^{j-i}(x)$$

Portanto, nesse caso, de 1.4 e da equação acima concluímos o item i).

Escolha agora um k tal que $2k + 1$ seja um múltiplo de j , mas observe que se j é par esta escolha é impossível. Daí temos

$$U_{2k+1}(L^{j-i}(x)) = L^{2k+1}RL^{j-i}(x) = L^{j-i}(x)$$

a expressão acima e 1.4 conclui o item ii).

Vejamos agora se $n = 2i + 1$. Temos $L^j(x) = x$ e $L^{2i+1}R(x) = x$. Daí

$$L^{2i+1}R(x) = L^{2i}U(x) = x$$

ou seja

$$x = U(L^{j-2i}(x))$$

daí

$$L^{j-i}(x) = L^{j-i}UL^{j-2i}L^j(x) = U(L^{j-i}(x))$$

portanto

$$L^{j-i}(x) \in Fix(U) \quad (1.5)$$

Escolha k tal que $2k$ seja múltiplo de j . Daí

$$U_{2k+1}(L^{j-i}(x)) = L^{2k+1}RL^{j-i}(x) = L^{j-i}(x)$$

Pela equação acima e por 1.5 concluímos o item iii). $\square$

Capítulo 2

Campos Reversíveis

Algumas pessoas dizem que física é o estudo das simetrias da natureza. Essa afirmação é um pouco exagerada, mas num certo sentido ela é verdadeira. As simetrias sustentam algumas das propriedades fundamentais de sistemas físicos ajudando na formulação matemática e na interpretação da natureza.

Discutiremos um tipo particular de simetria que é a "*time symmetrical reversing*" em sistemas dinâmicos. Vamos nos referir a sistemas que possuem "time symetrical reversing" como reversíveis.

A "time symetrical reversing" desempenha importante papel em vários ramos da física. Exemplos são [Qi]:

- Equações de Maxwell no eletromagnetismo;
- Equações de Einsten na gravitação;
- Equações de Schrödinger na mecânica quântica;
- Teorema C. P. T. na teoria dos Campos.

O que significa reversibilidade?

Considere o exemplo

$$x'' = F(x)$$

é invariante por $t \longrightarrow -t$. Escrevendo como um sistema de primeira ordem temos

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = F(x) \end{cases}$$

com invariância

$$t \longrightarrow -t$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

Aplicando uma transformação coordenada não linear

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

as derivadas de primeira ordem são dadas por

$$\begin{aligned} u' &= g(u, v) \\ v' &= h(u, v) \end{aligned}$$

A T-invariância implica que a equação acima é invariante sobre

$$t \longrightarrow -t$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \longrightarrow R \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = C \circ T \circ C^{-1} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

o operador R é uma involução.

Definição 2.1

O campo

$$x' = X(x) \quad \text{com} \quad X : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad (2.1)$$

é reversível, se existe uma involução R no espaço de fase tal que a equação acima é invariante sobre $t \longrightarrow -t$ e $x \longrightarrow R(x)$.

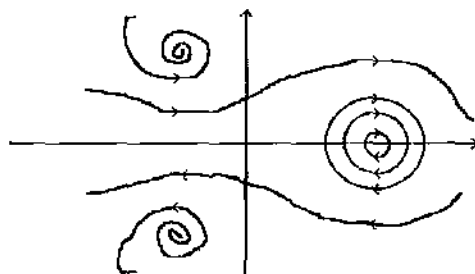


Figura 2.1: Espaço de fase de um sistema reversível

Uma idéia geométrica de como é o espaço de fase de um sistema reversível com relação à $\varphi(x, y) = (x, -y)$ é mostrado pela figura 2.1.

Observe que se $x(t)$ é solução do sistema 2.1, então $x(-t)$ é solução de $x' = -X(x)$, e se 2.1 é invariante por $t \rightarrow -t$ e $x \rightarrow R(x)$ significa que $(R(x(-t)))' = X(R(x(-t)))$, ou seja, $DR(x(-t))' = X \circ R(x(-t))$ o que implica

$$DR(-X(x(-t))) = X(R(x(-t))) \implies DR(X) = -X \circ R$$

isso nos leva a uma definição alternativa, a qual usaremos daqui por diante :

Definição 2.2

Um campo $X : M \rightarrow TM$ e C^∞ é reversível se existe $R \in I^s(M)$ tal que $DR(X) = -X \circ R$. Nesse caso dizemos que X é R -reversível.

Se R está fixo, denotaremos o conjunto dos campos R -reversíveis de M por $\Gamma_R^s(M)$.

Veremos agora alguns exemplos de sistemas reversíveis [Qi] modelados a partir de fenômenos concretos, nem todos eles de dimensão par. Isto nos leva a crer que o estudo que estamos fazendo para dimensão par pode ser generalizado para dimensões ímpares.

Exemplo 2.3 (Alguns sistemas hamiltonianos)

Todos os sistemas hamiltonianos com um hamiltoniano par no momento é reversível, nesse caso a involução é $R(x, p) = (x, -p)$.

Exemplo 2.4 (Equação diferencial logística)

A equação diferencial logística é a equação

$$x' = x(1 - x)$$

cuja involução é

$$G(x) = 1 - x$$

esse sistema tem dois pontos críticos, um em 0 outro em 1. Em $x = 0$ é um repulsor e em $x = 1$ é um atrator.

Exemplo 2.5 (Fluxo ABC na hidrodinâmica)

A equação é

$$\begin{cases} x' = A \operatorname{sen} z + C \cos y \\ y' = B \operatorname{sen} x + A \cos z \\ z' = C \operatorname{sen} y + B \cos x \end{cases}$$

onde A , B e C são parâmetros. A involução é dada por

$$R(x, y, z) = (\pi - x, -y, z).$$

Exemplo 2.6 (Um exemplo não linear)

A involução não precisa ser linear, por exemplo

$$X : \begin{cases} x' = xy - x^3 \\ y' = x + y^2 - x^4 \end{cases}$$

considere a involução:

$$R \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y + 2x^2 \end{pmatrix}$$

a derivada de R no ponto (x, y) é

$$DR_{(x,y)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4x & -1 \end{bmatrix}$$

logo

$$DR_{(x,y)} \circ X \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4x & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} xy - x^3 \\ x + y^2 - x^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xy - x^3 \\ -x - y^2 + 4x^2y - 3x^4 \end{bmatrix}$$

por outro lado

$$-X \circ R \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -X \begin{pmatrix} x \\ -y + 2x^2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} xy - x^3 \\ -x - y^2 + 4x^2y - 3x^4 \end{bmatrix}$$

portanto $DR(X) = -X \circ R$.

Exemplo 2.7 (Um exemplo em dimensões altas)

Tome um sistema de primeira ordem de dimensão $n + m$:

$$X : \begin{cases} x' = f(x, y) & x \in \mathbb{R}^n \\ y' = g(x, y) & y \in \mathbb{R}^m \end{cases}$$

onde f é par em x e g é ímpar em x . A involução é dada por $R(x, y) = (-x, y)$. Daí:

$$DR_{(x,y)} = \begin{bmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

logo

$$DR_{(x,y)} \circ X \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f(x, y) \\ g(x, y) \end{bmatrix}$$

por outro lado

$$-X \circ R \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -X \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} = - \begin{bmatrix} f(-x, y) \\ g(-x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f(x, y) \\ g(x, y) \end{bmatrix}$$

Portanto $DR(X) = -X \circ R$

Existem diversos fenômenos físicos modelados por um sistema reversível. Veja por exemplo alguns exemplos em [Qi]:

Exemplo 2.8 (Lasers externamente injetados Rubi e CO_2)

A dinâmica desse sistema é descrita pelas seguintes equações:

$$\begin{cases} \phi' = C_1 - \frac{1}{E} \sin \phi \\ E' = W E + \cos \phi \\ W' = C_2 - E^2 \end{cases}$$

onde E é a amplitude da cavidade do campo (na escala da frequência externa), ϕ é a fase, W é a inversão da população (em escala) e C_1 e C_2 são parâmetros. Temos que a involução é:

$$R \begin{pmatrix} \phi \\ E \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi - \phi \\ E \\ -W \end{pmatrix}$$

Exemplo 2.9 (Oscilador isotérmico)

Um modelo para um oscilador harmônico mergulhado em água quente é :

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x - zy \\ z' = \alpha(y^2 - kT) \end{cases}$$

o termo kT é o produto da constante de Boltzmann pela temperatura e α é um parâmetro. A involução nesse caso é:

$$R \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$$

Enunciaremos agora uma importante proposição que relaciona o fluxo do sistema reversível com a involução.

Proposição 2.10

Seja $X \in \Gamma_R^s(M)$ com fluxo ϕ_t . Então

$$\phi_t \circ R = R \circ \phi_{-t}$$

Demonstração: Seja ϕ_t o fluxo de X , logo para $x \in M$ fixo, nós temos que $f(t) = \phi_t(x)$ é solução do sistema:

$$\begin{cases} x' = X(x) \\ x(0) = x \end{cases}$$

de fato

$$\begin{cases} f'(t) = X(\phi_t(x)) \\ f(0) = \phi_0(x) = x \end{cases}$$

Seja $y(t) = R \circ \phi_{-t} \circ R(x)$, daí

$$\begin{aligned} y'(t) &= DR(\phi_{-t}(R(x)))' = DR(-X(\phi_{-t}(R(x)))) = -DR(X(\phi_{-t}(R(x)))) = \\ &= -(-X \circ R(\phi_{-t}(R(x)))) = X(y(t)) \end{aligned}$$

e

$$y(0) = R \circ \phi_0 \circ R(x) = R^2(x) = x$$

daí por unicidade de solução nós temos que $\phi_t(x) = R \circ \phi_{-t} \circ R(x)$. Como esta relação vale para todo x , segue que $\phi_t = R \circ \phi_{-t} \circ R$, ou seja,

$$\phi_t \circ R = R \circ \phi_{-t}. \quad \square$$

Consideremos agora $U_t = \phi_t \circ R$, U_t é involução, pois pela proposição anterior nós temos que:

$$U_t^2 = (\phi_t \circ R) \circ (\phi_t \circ R) = (\phi_t \circ R) \circ (R \circ \phi_{-t}) = \phi_0 = id$$

A próxima proposição diz que o conjunto dos pontos fixos de U_t é difeomorfa ao conjunto dos pontos fixos de R .

Proposição 2.11

$$Fix(U_t) = \phi_{\frac{t}{2}}(Fix(R))$$

Demonstração: Consideremos $x \in Fix(U_t)$, daí $\phi_t \circ R(x) = x$, ou seja, $x = \phi_{\frac{t}{2}}(\phi_{\frac{t}{2}} \circ R(x))$. Queremos mostrar que $\phi_{\frac{t}{2}} \circ R(x)$ é um ponto fixo de R . Para isso

$$R(\phi_{\frac{t}{2}} \circ R(x)) = RR\phi_{-\frac{t}{2}}(x) = \phi_{-\frac{t}{2}}(x)$$

e como $x = \phi_t \circ R(x)$ temos $\phi_{-\frac{t}{2}}(x) = \phi_{-\frac{t}{2}}(\phi_t \circ R(x)) = \phi_{\frac{t}{2}} \circ R(x)$. Portanto $x \in \phi_{\frac{t}{2}}(Fix(R))$.

E reciprocamente, considerando $x \in \phi_{\frac{t}{2}}(Fix(R))$ implica que $x = \phi_{\frac{t}{2}}(y)$, onde y é tal que $R(y) = y$. Queremos provar que $U_t(x) = x$, ou seja,

$$U_t(x) = \phi_t \circ R(x) = \phi_t \circ R(\phi_{\frac{t}{2}}(y)) = \phi_t \circ \phi_{-\frac{t}{2}} \circ R(y) = \phi_t(y) = x$$

o que demonstra a proposição. $\square$

Na definição que demos de campos reversíveis é que $R \in I^s(M)$, ou seja, R é involução e a dimensão de $Fix(R)$ é n , portanto a dimensão de $Fix(U_t)$ é n , pois $\phi_{\frac{t}{2}}$ é difeomorfismo, com isso $U_t \in I^s(M)$. A conclusão que tiramos disso tudo é que U_t é um difeomorfismo R -reversível para cada t .

Um elemento crítico γ , ou seja, um ponto singular ou uma órbita fechada é chamado *simétrico* se $R(\gamma) = \gamma$. Observe que todos os pontos críticos simétricos devem estar em $Fix(R)$, enquanto que todas as órbitas periódicas simétricas tem exatamente duas intersecções com $Fix(R)$. O restante dos elementos críticos são chamados *não simétricos*, eles sempre ocorrem aos pares γ e $R(\gamma)$, como se pode ver na figura 2.2.

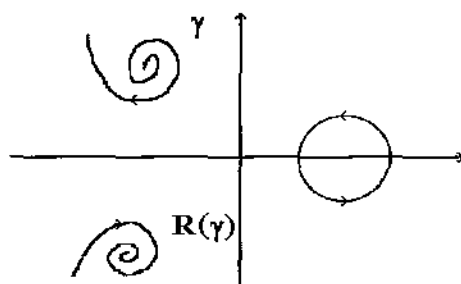


Figura 2.2: Retrato de fase de um campo reversível

Capítulo 3

Difeomorfismos e Campos Lineares Reversíveis

Nesta secção estudaremos os campos lineares reversíveis e os difeomorfismos lineares reversíveis. Para fixar a notação, nós consideraremos V um espaço vetorial real de dimensão $2n$. $I(V)$ será denotado o conjunto das involuções lineares de V que possuem polinômio característico da forma $(x+1)^n(x-1)^n$. Nós observamos que esta restrição do polinômio característico é equivalente a exigir que a dimensão de $\text{Fix}(R)$ seja n . Para ver isso, basta observar que toda involução linear pode se escrita, em coordenadas convenientes, como $\varphi(x, y) = (x, -y)$.

Fixe $R \in I(V)$.

Definição 3.1

O difeomorfismo linear L é reversível com relação à involução R se $L = U \circ R$ para algum $U \in I(V)$.

Nesse caso diremos que L é aplicação linear R -reversível.

Definição 3.2

O campo linear A é reversível com relação à involução R se $RA = -AR$.

Observe que este é um caso particular dos campos reversíveis discutidos no capítulo 2, pois nesse caso $DR = R$ devido ao fato de R ser linear. Nesse caso diremos que A é uma *aplicação linear infinitesimalmente R-reversível*.

Denotaremos por $D_R(V)$ o conjunto das aplicações lineares R-reversíveis e por $d_R(V)$ o conjunto das aplicações lineares infinitesimalmente R-reversíveis. A próxima proposição diz que $D_R(V)$ é uma variedade e que $d_R(V)$ é a fibra da identidade, do fibrado tangente de $D_R(V)$.

Proposição 3.3

- i) $D_R(V)$ é uma subvariedade C^∞ de $GL(V)$ de dimensão $2n^2$.
- ii) $T_I(D_R(V)) = d_R(V)$

Demonstração : Seja

$$\begin{array}{ccc} \Phi : GL(V) & \longrightarrow & GL(V) \\ S & \longmapsto & S^{-1} \end{array}$$

Daí $\Phi^2 = Id$, ou seja, Φ é involução.

Seja $S \in GL(V)$ tal que $S^2 = Id$, daí $S \in Fix(\Phi)$. Pelo teorema de Montgomery-Bochner [Mo,Zi], escolhemos um sistema de coordenadas tal que $D\Phi_S = g^{-1} \circ \Phi \circ g$ em uma vizinhança de S .

Como $Fix(D\Phi_S)$ é subespaço vetorial de $T_S(GL(V))$, temos que

$$g|_{Fix(D\Phi_S)} : Fix(D\Phi_S) \longrightarrow Fix(\Phi)$$

é uma carta local C^∞ para $Inv(V)$. Logo $Inv(V)$ é uma subvariedade C^∞ de $GL(V)$.

Observe que $I(V)$ é aberto em $Inv(V)$. De fato, seja $f \in I(V)$, daí os autovalores de f são $\{+1, \dots, +1, -1, \dots, -1\}$. Portanto existe uma vizinhança $\mathcal{N}$ de f em $GL(V)$ tal que $\forall \bar{g} \in \mathcal{N}$ temos metade dos autovalores de $\bar{g}$ positivos e a outra metade negativos. Tome $\overline{\mathcal{N}} = \mathcal{N} \cap Inv(V)$ vizinhança de $f \in I(V)$. Mas se $g \in \overline{\mathcal{N}}$, então g é uma involução e portanto em

uma base conveniente $g(x, y) = (x, -y)$, daí o seu polinômio característico é $(x + 1)^n(y - 1)^n$. Logo $g \in I(V)$, ou seja, $\overline{\mathcal{N}} \subset I(V)$. Daí $I(V)$ é aberto como afirmado.

Chegamos à conclusão de que $I(V)$ é subvariedade C^∞ de $GL(V)$.

Escolha uma curva $c : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow GL(V)$ tal que $c(0) = A$ e $c'(0) = B$.

Daí:

$$D\Phi_A(B) = \frac{d}{dt}\Phi \circ c(t) \big|_{t=0} = \frac{d}{dt}([c(t)]^{-1}) \big|_{t=0}$$

mas $c(t)[c(t)]^{-1} = I \ \forall t$. Derivando em relação a t

$$\frac{d}{dt}[c(t)]^{-1} = -[c(t)]^{-1}c'(t)[c(t)]^{-1}$$

em $t = 0$

$$\frac{d}{dt}[c(t)]^{-1} \big|_{t=0} = -A^{-1}BA^{-1}$$

portanto temos que

$$D\Phi_A(B) = -A^{-1}BA^{-1}$$

Seja $S \in Inv(V)$ portanto em uma base conveniente podemos supor $S(x, y) = (x, -y)$. Estamos querendo saber a dimensão de $Fix(D\Phi_S)$.

$$D\Phi_S(B) = B \iff -SBS = B \iff SB + BS = 0$$

Denotando

$$B = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad S = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}$$

Temos que

$$\begin{aligned} SB + BS = 0 &\iff \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ -B_3 & -B_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 & -B_2 \\ B_3 & -B_4 \end{bmatrix} = 0 \\ &\iff \begin{bmatrix} 2B_1 & 0 \\ 0 & 2B_4 \end{bmatrix} = 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Como B_1 e B_4 são matrizes $n \times n$ temos que

$$\dim(\text{Fix}(D\Phi_S)) = \dim(I(V)) = 2n^2$$

Como

$$\begin{aligned} L_R : GL(V) &\longrightarrow GL(V) \\ X &\longmapsto X \circ R \end{aligned}$$

é difeomorfismo e $D_R(V) = L_R(I(V))$, temos que $D_R(V)$ é subvariedade C^∞ de $GL(V)$ de dimensão $2n^2$ como afirma o item i) da proposição.

Para a segunda parte, primeiro observe que $\dim(d_R(V)) = 2n^2$. Pois R pode ser escrito $R(x, y) = (x, -y)$ e daí:

$$B \in d_R(V) \iff RB = -BR$$

e pela equação 3.1 temos que $\dim(d_R(V)) = 2n^2$.

Como $\dim(T_I[D_R(V)]) = 2n^2$, basta mostrarmos que $T_I[D_R(V)] \subset d_R(V)$. Para isso, seja $B \in T_I[D_R(V)]$, daí existe $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow D_R(V)$ tal que $\gamma(0) = I$ e $\gamma'(0) = B$. Sabemos que $\gamma(t) = \sigma(t) \circ R$ onde $\sigma(t) \in I(V)$ e $\sigma(0) = R$. $\gamma'(t) = \sigma'(t)R$. Como $(\sigma(t))^2 = Id$ então $\sigma'(t)\sigma(t) + \sigma(t)\sigma'(t) = 0$. Em $t = 0$

$$\sigma'(0)R = -R\sigma'(0)$$

logo $\gamma'(0) = -R\sigma'(0) = -R\gamma'(0)R$, ou seja,

$$\gamma'(0)R = -R\gamma'(0) \implies BR = -RB$$

donde $B \in d_R(V)$. Portanto $T_I[D_R(V)] = d_R(V)$. $\square$

Enunciaremos agora uma proposição que traz uma interessante propriedade dos autovalores de aplicações lineares reversíveis e infinitesimalmente reversíveis.

Proposição 3.4

i) Seja $L \in D_R(V)$ o conjunto das aplicações lineares R -reversíveis. Se λ é um autovalor de L de multiplicidade k , então λ^{-1} é um autovalor de L de multiplicidade k . Além disso, os autovalores $+1$ e -1 tem multiplicidade par quando eles ocorrem.

ii) Seja $A \in d_R(V)$ o conjunto das aplicações infinitesimalmente R -reversíveis. Se λ é autovalor de A de multiplicidade k , então $-\lambda$ é autovalor de A de multiplicidade k . Além disso, se o autovalor 0 ocorre ele tem multiplicidade par.

Demonstração: Para a primeira parte, seja $L = U \circ R \in D_R(V)$. Como $U^2 = Id$, temos $\det(U) \cdot \det(U) = 1$, logo

$$\det(UR - xI) = \det(U(UR - xI)U) = \det(RU - xI)$$

daí, se x é autovalor de L , x é autovalor de L^{-1} e então o inverso de x , x^{-1} é autovalor de L . Portanto os autovalores -1 e os autovalores 1 , quando ocorrem, ocorrem aos pares.

Para a segunda parte considere $A \in d_R(V)$, ou seja, $AR = -RA$, ou ainda, $A = -RAR$.

$$\det(A - xI) = \det(R(A - xI)R) = \det(-A - xI)$$

o polinômio característico de A é o mesmo de $-A$, isto quer dizer que se λ é autovalor de A então $-\lambda$ também é e com a mesma multiplicidade. Como a dimensão é par segue que 0 , quando ocorre, tem multiplicidade par. $\square$

Estamos procurando condições genéricas para os difeomorfismos lineares, para isso, vamos a algumas definições:

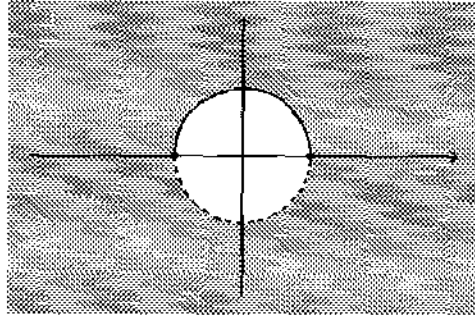


Figura 3.1: Autovalores Principais

Definição 3.5

Os n autovalores principais de um difeomorfismo $L \in D_R(V)$ são os autovalores de módulo maior do que 1 ou de módulo 1 e parte imaginária maior ou igual a 0. Tomando exatamente metade dos autovalores 1 e metade dos autovalores -1 .

A região do plano complexo em que ficam os autovalores principais de um difeomorfismo R-reversível está na figura 3.1.

Definição 3.6

$L \in D_R(V)$ é N -elementar se os seus autovalores principais $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ são multiplicativamente independentes sobre os inteiros entre $-N$ e N , isto é:

$$\rho_1^{e_1} \cdot \rho_2^{e_2} \cdot \dots \cdot \rho_n^{e_n} = 1 \iff e_i = 0 \quad \forall i$$

onde $e_i \in \mathbb{Z}$ e $|e_i| \leq N$

Definição 3.7

$L \in D_R(V)$ é elementar se for N -elementar para todo N .

Uma consequência imediata dessa definição é que se um difeomorfismo L é elementar, então:

1. Todos os autovalores principais são distintos.
2. Nenhum é raiz da unidade.

Para ver 1), observe que se $\rho_i = \rho_j = \lambda$, tome $e_i = -e_j = c$ e daí $\lambda^c \lambda^{-c} = 1$ com $c \neq 0$. Para a parte 2) $\rho_i^c = 1$ com $c \neq 0$. Ambos os casos contrariam o fato de serem independentes sobre os inteiros.

Daremos agora definições semelhantes para os campos lineares, que são chamados infinitesimalmente R-reversíveis.

Definição 3.8

Os n autovalores principais de $A \in d_R(V)$ são aqueles autovalores com parte real maior do que zero ou parte real zero e parte imaginária maior ou igual a zero. Tomando metade dos autovalores zero.

A região do plano complexo onde ficam os autovalores principais de uma aplicação linear infinitesimalmente R-reversível está na figura 3.2

Definição 3.9

$A \in d_R(V)$ é N -elementar se os seus autovalores principais (módulo $2\pi i$) são aditivamente independentes sobre os inteiros entre $-N$ e N .

Nós denotaremos por $D_R^N(V)$ as aplicações lineares N -elementares em $D_R(V)$ e por $d_R^N(V)$ as aplicações lineares N -elementares em $d_R(V)$.

Enunciaremos e demonstraremos agora o teorema principal deste capítulo.

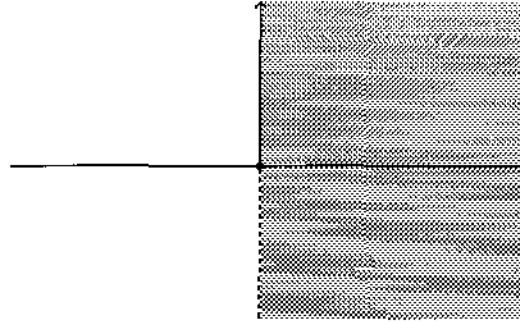


Figura 3.2: Autovalores Principais

Teorema 3.10

$D_R^N(V)$ e $d_R^N(V)$ são abertos e densos em $D_R(V)$ e $d_R(V)$ respectivamente.

Corolário 3.11

O conjunto das aplicações elementares em $D_R(V)$ e $d_R(V)$ é residual e portanto denso.

Demonstração do teorema 3.10 : Faremos a prova para $d_R(V)$, $D_R(V)$ é análoga.

Aberto é, pois se $A \in d_R(V)$ então os autovalores principais $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ satisfazem

$$a_1 \lambda_1 + a_2 \lambda_2 + \dots + a_n \lambda_n \neq 0 \pmod{2\pi i}$$

para todo $a_1, a_2, \dots, a_n \in \Gamma_N$, onde $\Gamma_N = \mathbb{Z} \cap [-N, N]$. Como Γ_N é finito, podemos encontrar uma vizinhança $\mathcal{V}$ de A , tal que para todo $A' \in \mathcal{V}$ os seus autovalores principais $\lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_n$ satisfazem:

$$a_1 \lambda'_1 + \dots + a_n \lambda'_n \neq 0 \pmod{2\pi i} \quad \forall a_1, \dots, a_n \in \Gamma_N$$

Para a densidade, construiremos um processo recursivo que permite-nos perturbar os autovalores principais tal que se $A \in d_R(V)$, arbitrariamente próximo de A existe um A' que é N-elementar.

Seja $\alpha + i\beta$ um autovalor e $v_1 + iv_2$ o autovetor associado, logo:

$$A(v_1 + iv_2) = (\alpha + i\beta)(v_1 + iV_2)$$

ou seja

$$\begin{cases} Av_1 = \alpha v_1 - \beta v_2 \\ Av_2 = \beta v_1 + \alpha v_2 \end{cases} \quad (3.2)$$

caso 1 $\alpha \neq 0$

caso 1.1 $\beta = 0$

Afirmção 1 $[v_1, Rv_1]$ tem dimensão 2.

De fato, temos que $Av_1 = \alpha v_1$, suponhamos por absurdo que $Rv_1 = \lambda v_1$, daí:

$$ARv_1 = \lambda Av_1 \implies -RAv_1 = \lambda \alpha v_1 \implies$$

$$-\alpha Rv_1 = \lambda \alpha v_1 \implies -\lambda \alpha v_1 = \lambda \alpha v_1 \implies \lambda = 0$$

logo $Rv_1 = 0$ (absurdo pois R é difeomorfismo linear)

Definamos então ϕ por:

$$\begin{cases} \phi v_1 = \epsilon v_1 \\ \phi Rv_1 = -\epsilon Rv_1 \\ \phi x = 0 \quad \text{se } x \notin [v_1, Rv_1] \end{cases}$$

logo $R\phi = -\phi R$, ou seja, $\phi \in d_R(V)$

Observe que $(\phi + A)v_1 = \phi v_1 + Av_1 = \epsilon v_1 + \alpha v_1$. De acordo com a proposição 3.4 temos que os autovalores de $(\phi + A)$ são $\pm(\epsilon + \alpha)$.

caso 1.2 $\alpha \neq 0$ e $\beta \neq 0$.

Afirmção 2 v_1 e v_2 são L. I.

De fato, suponhamos por absurdo que $v_2 = \lambda v_1$ com $\lambda \neq 0$, de acordo com a equação 3.2 temos:

$$\begin{cases} Av_1 = \alpha v_1 - \beta v_2 \\ Av_2 = \frac{\beta + \lambda \alpha}{\lambda} v_1 \end{cases}$$

o que implica $(\alpha - \beta \lambda) \lambda = \beta + \lambda \alpha$, ou seja, $\beta = 0$ o que é uma contradição.

Afirmção 3 dimensão de $[v_1, v_2, Rv_1, Rv_2]$ é 4.

De fato, seja $av_1 + bv_2 + cRv_1 + dRv_2 = 0$. Se $c=d=0$ então $a=b=0$ e v_1, v_2, Rv_1, Rv_2 são L. I.

Se $(c = 0 \text{ e } d \neq 0)$ ou $(c \neq 0 \text{ e } d = 0)$ são casos análogos e podemos supor $d = 0$ e $c = -1$, ou seja, $Rv_1 = av_1 + bv_2$. Da primeira parte da equação 3.2 podemos tirar $RAv_1 = \alpha Rv_1 - \beta Rv_2$, e usando a R-reversibilidade temos $-A(av_1 + bv_2) = \alpha(av_1 + bv_2) - \beta Rv_2$, ou seja,

$$Rv_2 = \frac{2a\alpha + b\beta}{\beta} v_1 + \frac{2b\alpha - a\beta}{\beta} v_2$$

Usando a segunda parte da equação 3.2, temos que $RAv_2 = \beta Rv_1 + \alpha Rv_2$, e pela R-reversibilidade:

$$-A\left(\frac{2a\alpha + b\beta}{\beta} v_1 + \frac{2b\alpha - a\beta}{\beta} v_2\right) = \beta(av_1 + bv_2) + \alpha\left(\frac{2a\alpha + b\beta}{\beta} v_1 + \frac{2b\alpha - a\beta}{\beta} v_2\right)$$

ou seja,

$$\left(-4a\frac{\alpha^2}{\beta} - 4b\alpha\right)v_1 + \left(4a\alpha - 4b\frac{\alpha^2}{\beta}\right)v_2 = 0$$

Como v_1 e v_2 são L. I. segue que $a = b\frac{\alpha}{\beta}$ e $b = -a\frac{\alpha}{\beta}$. Logo $b = 0$ e $a = 0$, ou seja, $Rv_1 = 0$ o que é um absurdo, portanto os casos $(c = 0 \text{ e } d \neq 0)$ ou $(c \neq 0 \text{ e } d = 0)$ não ocorrem.

Se $c \neq 0$ e $d \neq 0$, podemos supor sem perda de generalidade que $d = -1$, ou seja, $Rv_2 = av_1 + bv_2 + cRv_1$ daí $ARv_2 = aAv_1 + bAv_2 + cARv_1$ pela R-reversibilidade e por 3.2 temos:

$$-R(\beta v_1 + \alpha v_2) =$$

$$\begin{aligned} a(\alpha v_1 - \beta v_2) + b(\beta v_1 + \alpha v_2) - cR(\alpha v_1 - \beta v_2) - \beta Rv_1 - \alpha(av_1 + bv_2 + cRv_1) = \\ a(\alpha v_1 - \beta v_2) + b(\beta v_1 + \alpha v_2) - c\alpha Rv_1 + c\beta(av_1 + bv_2 + cRv_1) \end{aligned}$$

ou seja,

$$Rv_1 = \frac{2a\alpha + b\beta + ac\beta}{-\beta(1+c^2)}v_1 + \frac{2b\alpha - a\beta + bc\beta}{-\beta(1+c^2)}v_2$$

o que é um absurdo e portanto o caso $c \neq 0$ e $d \neq 0$ não ocorre.

Com isso terminamos a demonstração da afirmação 3. Nesse caso defina ϕ por:

$$\begin{cases} \phi v_i &= \epsilon v_i \\ \phi Rv_i &= -\epsilon Rv_i \\ \phi x &= 0 \quad \text{se } x \notin [v_1, v_2, Rv_1, Rv_2] \end{cases}$$

Temos que $\phi R = -R\phi$, ou seja, $\phi \in d_R(V)$ e os autovalores de $(\phi + A)$ são $\pm((\alpha + \epsilon) + i\beta)$.

caso 2 $\alpha = 0$, ou seja, A tem autovalor $i\beta$ com $\beta \neq 0$. Nesse caso v_1 e v_2 são L. I.

caso 2.1 $Rv_1 \notin [v_1, v_2]$

Afirmação 4 A dimensão de $[v_1, v_2, Rv_1, Rv_2]$ é 4.

De fato, como v_1 e v_2 são L. I. e $Rv_1 \notin [v_1, v_2]$, a única forma de negar a afirmação é $Rv_2 = av_1 + bv_2 + cRv_1$. Mas nós temos que:

$$\begin{cases} Av_1 = -\beta v_2 \\ Av_2 = \beta v_1 \end{cases} \quad (3.3)$$

Se $Rv_2 = av_1 + bv_2 + cRv_1$, então $ARv_2 = aAv_1 + bAv_2 + cARv_1$ e pela R-reversibilidade e equação 3.3 temos $-R(\beta v_1) = -a\beta v_2 + b\beta v_1 - cR(-\beta v_2)$ ou seja,

$$Rv_1 = \frac{-b - ac}{1 + c^2}v_1 + \frac{a - bc}{1 + c^2}v_2$$

Logo $Rv_1 \in [v_1, v_2]$. Esta contradição demonstra a afirmação 4.

Neste caso, como a dimensão de $[v_1, v_2, Rv_1, Rv_2]$ é 4, nós aplicamos o caso 1.2 e teremos que os autovalores de $(\phi + A)$ serão $\pm(\epsilon + i\beta)$.

caso 2.2 $Rv_1 \in [v_1, v_2]$

Afirmção 5 Podemos supor $Rv_1 = v_1$ e $Rv_2 = -v_2$.

De fato, como $Rv_1 = av_1 + bv_2$ temos $Av_1 = -\beta v_2$ e aplicando R , $RAv_1 = -\beta Rv_2$ e pela R-reversibilidade $-A(av_1 + bv_2) = -\beta Rv_2$ daí $\beta Rv_2 = a(-\beta v_2) + b\beta v_1$. Logo:

$$Rv_2 = bv_1 - av_2$$

Como $v_1 = R.Rv_1 = R(av_1 + bv_2) = a(av_1 + bv_2) + b(bv_1 - av_2) = (a^2 + b^2)v_1$ temos que

$$a^2 + b^2 = 1$$

Queremos achar λ e μ tal que $R(\lambda v_1 + \mu v_2) = \lambda v_1 + \mu v_2$ nesse caso temos $\lambda(av_1 + bv_2) + \mu(bv_1 - av_2) = \lambda v_1 + \mu v_2$

$$\begin{cases} (a-1)\lambda + b\mu = 0 \\ b\lambda + (-a-1)\mu = 0 \end{cases}$$

e

$$\det \begin{bmatrix} a+1 & b \\ b & -a+1 \end{bmatrix} = -a^2 + 1 - b^2 = 0$$

tem solução não trivial (λ_0, μ_0) .

Queremos achar ainda $\bar{\lambda}$ e $\bar{\mu}$ tal que $R(\bar{\lambda}v_1 + \bar{\mu}v_2) = -(\bar{\lambda}v_1 + \bar{\mu}v_2)$. Fazendo-se as contas como acima temos que existe um par $(\bar{\lambda}_0, \bar{\mu}_0)$ que satisfaz a equação.

Trocando-se v_1 por $\lambda_0 v_1 + \mu_0 v_2$ e v_2 por $\bar{\lambda}_0 v_1 + \bar{\mu}_0 v_2$ temos

$$\begin{cases} Rv_1 = v_1 \\ Rv_2 = -v_2 \end{cases}$$

Nesse caso defina ϕ como sendo:

$$\begin{cases} \phi v_1 = \epsilon v_2 \\ \phi v_2 = -\epsilon v_1 \\ \phi x = 0 \quad \text{se } x \notin [v_1, v_2] \end{cases}$$

Daí $\phi \in d_R(V)$ e os autovalores de $(\phi + A)$ são $\pm i(\epsilon \mp \beta)$.

caso 3 0 é autovalor de A .

caso 3.1 se dimensão de $[v_1, Rv_1]$ é 2, então faça como em 1.1.

caso 3.2 se $Rv_1 = \lambda v_1$, nesse caso $v_1 = RRv_1 = \lambda^2 v_1$, ou seja, $\lambda = \pm 1$.

Faremos para $Rv_1 = v_1$ ($Rv_1 = -v_1$ é análogo). Como A é difeomorfismo, tome v_2 tal que $Av_2 = v_1$. Temos duas possibilidades:

caso 3.2.1 $Rv_2 \in [v_1, v_2]$. Como $Av_2 = v_1$, aplicando R temos $RAv_2 = Rv_1 = v_1$, daí $-ARv_2 = v_1 = Av_2$, como A é difeomorfismo segue que $Rv_2 = -v_2$. Temos que

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

na base $\{v_1, v_2\}$.

Defina

$$\begin{cases} \phi v_1 &= \epsilon v_2 \\ \phi v_2 &= -\epsilon v_1 \\ \phi x &= 0 \quad \text{se } x \notin [v_1, v_2] \end{cases}$$

daí $\phi \in d_R(V)$ e é igual ao caso 2.2.

caso 3.2.2 $Rv_2 \notin [v_1, v_2]$

Nesse caso a dimensão de $[v_1, v_2, Rv_2]$ é 3, defina ϕ como sendo:

$$\phi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon \\ 0 & -\epsilon & 0 \end{bmatrix}$$

na base $\{v_1, v_2, Rv_2\}$, logo $\phi \in d_R(V)$ e os autovalores de $(\phi + A)$ são $0, \pm i\epsilon$.

Dado uma aplicação $A \in d_R(V)$ e uma vizinhança $\mathcal{V}$ de raio ϵ , seguimos os seguintes passos:

Passo 1: usando o processo descrito acima, perturbamos o autovalor principal λ_1 em uma vizinhança de raio $\frac{\epsilon}{2}$ para que $\lambda_1 \neq 0$.

Passo 2: perturbamos o autovalor principal λ_2 em uma vizinhança de raio $\frac{\epsilon}{4}$ para que $a_1 \lambda_1 + a_2 \lambda_2 \neq 0 \pmod{2\pi i}$ para todos inteiros $a_1, a_2 \in \Gamma_N$ isto é possível pois Γ_N é finito.

E assim por diante até:

Passo n : perturbamos o n -ésimo autovalor principal λ_n em uma vizinhança de raio $\frac{\epsilon}{2^n}$ para que $a_1\lambda_1 + \dots + a_n\lambda_n \neq 0 \pmod{2\pi i}$ para todos inteiros $a_1, \dots, a_n \in \Gamma_n$.

Finalmente depois do n -ésimo passo nós achamos uma aplicação A' tal que $A' \in \mathcal{V} \cap d_R(V)$, o que completa a demonstração da proposição. $\square$

Vamos denotar a partir de agora por $E^\lambda R$, o autoespaço associado ao autovalor λ . Fixe $v \in E^{-1}R$, isto é, $Rv = -v$. Seja

$$J_v = \{L \in D_R(V) : v \in E^{-1}U \text{ onde } L = UR\} = \{L \in D_R(V) : Uv = -v\}$$

Observe que para toda aplicação $L \in J_v$ tem v como autovetor associado ao autovalor $+1$.

$$Lv = URv = U(-v) = -(-v) = v$$

Definição 3.12

$L \in J_v$ é chamado sub- N -elementar se os $(n-1)$ autovalores principais restantes são independentes multiplicativamente sobre todos os inteiros entre $-N$ e N .

Denotaremos por J_v^N o conjunto dos difeomorfismos lineares $L \in J_v$ que não são sub- N -elementares.

Proposição 3.13

- (i) J_v é subvariedade de $D_R(V)$ de codimensão n .
- (ii) J_v^N é uma união finita de subvariedades de J_v cada uma tendo no mínimo codimensão 1 em J_v .

Demonstração: Defina

$$\begin{aligned} \pi : GL(V) &\longrightarrow I(V) \\ g &\longmapsto gRg^{-1} \end{aligned}$$

Está bem definida pois $[\pi(g)]^2 = Id$ e $\det(gRg^{-1} - xI) = \det(R - xI) = (x+1)^n(x-1)^n$.

Vamos provar que π é uma submersão.

Afirmção 1 $D\pi_A(B) = BRA^{-1} - ARA^{-1}BA^{-1}$

De fato, tome $c : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow GL(V)$ tal que $C(0) = A$ e $c'(0) = B$. Daí

$$D\pi_A(B) = \frac{d}{dt}\pi(c(t)) \big|_{t=0} = \frac{d}{dt}[c(t)R(c(t))^{-1}] \big|_{t=0} =$$

$$c'(t)R[c(t)]^{-1} - c(t)R[c(t)]^{-1}c'(t)[c(t)]^{-1} \big|_{t=0} = BRA^{-1} - ARA^{-1}BA^{-1}$$

donde conclui-se o afirmado.

Seja $C \in T_{ARA^{-1}}[I(V)]$. Daí existe $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow I(V)$ tal que $\alpha(0) = ARA^{-1}$ e $\alpha'(0) = C$. Como $\alpha(t)\alpha(t) = Id$ derivando em relação a t em 0, temos:

$$C = -(ARA^{-1})C(ARA^{-1})$$

Tome $B = \frac{1}{2}CAR$, daí temos que

$$D\pi_A(B) = C$$

Portanto π é submersão.

Defina agora

$$\begin{aligned} \Phi : GL(V) &\longrightarrow E^1R \\ g &\longmapsto (Rg^{-1} + g^{-1})(v) \end{aligned}$$

Afirmção 2: 0 é valor regular de Φ .

De fato, seja $A \in GL(V)$ tal que $\Phi(A) = 0$, vamos mostrar que

$$D\Phi_A : T_A[GL(V)] \longrightarrow T_0[E^1R]$$

é sobrejetora. Seja $c : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow GL(V)$ tal que $c(0) = A$ e $c'(0) = B$ logo temos

$$D\Phi_A(B) = \frac{d}{dt}\Phi(c(t)) \big|_{t=0}$$

ou seja

$$D\Phi_A(B) = -(RA^{-1}BA^{-1} + A^{-1}BA^{-1})(v)$$

Portanto, dado $u \in T_0[E^1R]$ temos que existe $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow E^1R$ tal que $\alpha(0) = 0$ e $\alpha'(0) = u$. Mas $R(\alpha(t)) = \alpha(t)$ para todo t . Derivando e substituindo em $t = 0$, temos que $R(u) = u$.

Tome C linear tal que $C(v) = u$ e defina $B = -\frac{1}{2}ACA$. Portanto

$$D\Phi_A(B) = u$$

concluindo a afirmação de que 0 é valor regular.

Como a dimensão de E^1R é n , então $\Phi^{-1}(0)$ tem codimensão n .

$$\begin{aligned} g \in \Phi^{-1}(0) &\iff Rg^{-1}(v) = -g^{-1}(v) \iff \\ &\iff gRg^{-1}(v) = -v \iff v \in E^{-1}(gRg^{-1}) \end{aligned}$$

Observe que

$$U = gRg^{-1} = \pi(g) \iff g = \pi^{-1}(U)$$

ou seja

$$U \in \pi(\Phi^{-1}(0)) \iff v \in E^{-1}U \iff U \in J_v$$

Portanto $J_v = \pi(\Phi^{-1}(0))$.

Como $\Phi^{-1}(0)$ tem codimensão n e π é submersão então J_v é subvariedade de $D_R(V)$ de codimensão n .

Uma aplicação do método de Abraham-Robbin [Ab,Rb], página 99, mostra que J_v^N é uma união finita de subvariedades de J_v .

A codimensão de J_v^N ser no mínimo 1, vem do fato que $J_v = J_v^N$ ser denso em J_v e a prova é análoga à proposição anterior. $\square$

Capítulo 4

Genericidade de Difeomorfismos Reversíveis

Como no caso linear, hiperbolicidade não é uma propriedade genérica em $Diff_R^s(M)$, pois em pontos periódicos simétricos, os autovalores, quando perturbados, não escapam do círculo unitário. Portanto nós enfraquecemos a noção de hiperbolicidade para obtermos propriedades genéricas.

Vamos definir agora as noções de ponto periódico elementar e ponto periódico genérico.

Estamos considerando M uma variedade compacta, de classe C^∞ e $2n$ -dimensional.

Definição 4.1

Se x é um ponto periódico simétrico de $L \in Diff_R^s(M)$, isto é, $L^k(x) = x$ para algum k e $x \in Fix(U_i)$ para algum i , então diremos que:

- i) x é ponto periódico simétrico N -elementar de período k se $(DL^k)_x$ é N -elementar.*
- ii) x é N -genérico se:*
 - a) x é periódico simétrico N -elementar de período k , ou*
 - b) x é periódico hiperbólico não simétrico.*

Se x for periódico simétrico N -elementar de período k para todo N , então diremos que x é *periódico simétrico elementar de período k* .

E se x é N -genérico para todo N , diremos que x é *genérico*.

Denotaremos por $G^s(k, N)$ o conjunto dos difeomorfismos R -reversíveis de classe C^s cujos pontos periódicos de período menor ou igual a k são N -genéricos. Seja ainda:

$$G^s(k) = \bigcap_{N=0}^{\infty} G^s(k, N)$$

e

$$G^s = \bigcap_{k=1}^{\infty} G^s(k)$$

Enunciaremos agora um lema que será útil nas demonstrações subsequentes:

Lema 4.2

Seja $\bar{L} : M \longrightarrow M$ um difeomorfismo reversível, ou seja, $\bar{L} = \bar{U} \circ \bar{R}$. Seja ainda $\bar{U}_k = \bar{L}^k \bar{R}$. Se $\text{Fix}(\bar{U}_k)$ é tangente à $\text{Fix}(\bar{R})$ em p , então os autovalores de $D(\bar{L}^k)_p$ são $+1$ e -1 .

Demonstração: Escolha um sistema de coordenadas

$$g : V \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$$

onde V é uma vizinhança de p e $g(p) = 0$ tal que $R(x, y) = g\bar{R}g^{-1}(x, y) = (x, -y)$. Seja ainda $U = g\bar{U}g^{-1}$, daí $L = g\bar{L}g^{-1}$.

Escrevamos

$$U \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + o^2(x, y)$$

Daí

$$L \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = U \circ R \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A & -B \\ C & -D \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + o^2(x, y)$$

logo

$$L^k \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A & -B \\ C & -D \end{bmatrix}^k \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + o^2(x, y)$$

Portanto

$$U_k \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = L^k R \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A & -B \\ C & -D \end{bmatrix}^k \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} + o^2(x, y)$$

Chamemos

$$\begin{bmatrix} A & -B \\ C & -D \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix}$$

Portanto ficamos com

$$U_k \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A' & -B' \\ C' & -D' \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + o^2(x, y) \quad (4.1)$$

Como estamos supondo que $Fix(U_k)$ é tangente à $Fix(R) = \{(x, 0)\}$ temos que localmente $Fix(U_k)$ é gráfico de uma aplicação que tem apenas termos de grau maior ou igual a dois. Substituindo na equação 4.1 temos

$$\begin{bmatrix} A' & -B' \\ C' & -D' \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + o^2(x) = \begin{pmatrix} x \\ o^2(x) \end{pmatrix}$$

Daí temos $A' = Id$ e $C' = 0$. Portanto

$$DL_0^k = \begin{bmatrix} I & B' \\ 0 & D' \end{bmatrix}$$

mas como o polinômio característico de DU_0^k é $(x+1)^n(x-1)^n$, nós temos que o polinômio característico de $-D'$ é $(x+1)^n$, logo o polinômio característico de DL_0^k é $(x-1)^n(x+1)^n$. $\square$

O objetivo deste capítulo é demonstrar o teorema de Kupka-Smale para difeomorfismos reversíveis que diz G^s é residual. Mas para isso precisaremos de mais algumas definições.

Definição 4.3

Seja $L \in \text{Diff}_R^s(M)$, isto é, $L = U \circ R$ e seja ainda $U_k = L^k \circ R$. Diremos que L é k -transversal se:

- i) k é par e $\text{Fix}(U_k) \cap \text{Fix}(R), \text{Fix}(U_{k+1}) \cap \text{Fix}(U)$
- ii) k é ímpar e $\text{Fix}(U_k) \cap \text{Fix}(R)$

Denotaremos por $\Lambda^s(k)$ o conjunto dos difeomorfismos C^s R -reversíveis e k -transversais.

Para as demonstrações que faremos a seguir, precisaremos das noções de pseudotransversalidade e suas propriedades, sobre as quais trataremos logo abaixo:

Definição 4.4

Sejam:

A um espaço topológico com a propriedade de Baire

M, N variedades

$K \subset M$ um subconjunto

$V \subset N$ uma subvariedade e

$F : A \longrightarrow C^1(M, N)$

Dizemos que F é C^1 -pseudorepresentação se a aplicação abaixo é contínua.

$$\begin{aligned} \text{ev}(F^{(1)}) : A \times TM &\longrightarrow TN \\ (a, q) &\longmapsto \text{ev}(F^{(1)})(a, q) \end{aligned}$$

dada por $\text{ev}(F^{(1)})(a, q) = D(Fa)q$.

E diremos que F é C^r -pseudotransversa a V em K se :

a) F é C^1 -pseudorepresentação

b) Existe um subconjunto denso $D \subset A$ tal que para cada $a \in D$ existe um subconjunto aberto B_a em um espaço de Banach separável, $\psi_a : B_a \longrightarrow A$

contínua e $a' \in B_a$ tal que:

$$\begin{aligned} i) \quad & \psi_a(a') = a \\ ii) \quad & \begin{aligned} ev(F\psi_a) : B_a \times M &\longrightarrow N \\ (y, x) &\longmapsto (F \circ \psi_a(y))(x) \end{aligned} \end{aligned}$$

é C^r e transversa a V em $\{a'\} \times K$.

Uma das propriedades mais importantes da pseudotransversalidade é o próximo teorema, cuja prova está contida em [Rb].

Teorema 4.5

Com os espaços e aplicações da definição 4.4 suponha que a aplicação

$$F : A \longrightarrow C^1(M, N)$$

é C^r -pseudotransversal a V em K tal que $r \geq \max\{1, 1 + \dim M - \text{codim} V\}$.

Seja

$$R = \{a \in A : F(a) \text{ é transversal a } V \text{ em pontos de } K\}$$

Se $K = M \implies R$ é residual em A . Se V é subvariedade fechada e $K \subset M$ é compacto $\implies R$ é aberto e denso em A .

Para a demonstração do teorema de Kupka-Smale precisaremos de quatro lemas.

Lema 4.6

Suponha $s \geq 1$, $k \geq 0$ e $G^s(2k)$ denso em $\text{Diff}_R^s(M)$, então o conjunto $\{L \in \text{Diff}_R^s(M) : \text{Fix}(U_{2k+1}) \cap \text{Fix}(R)\}$ é aberto e denso em $\text{Diff}_R^s(M)$.

Demonstração: Considere a ação de $\text{Diff}_R^s(M)$ em $I^s(M)$ dada por:

$$\begin{aligned} \text{Diff}^s(M) \times I^s(M) &\longrightarrow I^s(M) \\ (g, U) &\longmapsto gUg^{-1} \end{aligned}$$

Por um resultado de [Pa] dado $U \in I^s(M)$, existe uma vizinhança $\mathcal{V}$ de U em $I^s(M)$ e uma aplicação contínua $\mathcal{X} : \mathcal{V} \longrightarrow \text{Diff}^s(M)$ tal que $\mathcal{X}(U) = Id$ e $[\mathcal{X}(S)]U[\mathcal{X}(S)]^{-1} = S$ para todo $S \in \mathcal{V}$.

Fixe $\bar{U} \in I^s(M)$. Seja $\text{orb}(\bar{U})$ a órbita de $\bar{U}$ sobre essa ação. Afirmamos que $\text{orb}(\bar{U})$ é aberto.

De fato, devido ao resultado acima, se $U \in \text{orb}(\bar{U})$ então $U = g\bar{U}g^{-1}$ e daí existe uma vizinhança $\mathcal{V}$ de U tal que para todo $S \in \mathcal{V}$,

$$S = [\mathcal{X}(S)]U[\mathcal{X}(S)]^{-1} = [\mathcal{X}(S)]g\bar{U}g^{-1}[\mathcal{X}(S)]^{-1} \in \text{orb}(\bar{U})$$

Defina :

$$\begin{aligned} \pi : \text{Diff}^s(M) &\longrightarrow \text{orb}(\bar{U}) \\ g &\longmapsto g\bar{U}g^{-1} \end{aligned}$$

e

$$D_k = \{g \in \text{Diff}^s(M) : (g\bar{U}g^{-1}R) \in G^s(k)\}$$

Seja

$$\begin{aligned} \rho^k : \text{Diff}^s(M) &\longrightarrow C^s(\text{Fix}(\bar{U}), M) \\ g &\longmapsto \rho^k(g) \end{aligned}$$

onde $\rho^k(g)(p) = (g\bar{U}g^{-1}R)^k g(p)$.

Afirmação 1: $\rho^k(g)(\text{Fix}(\bar{U})) = \text{Fix}((g\bar{U}g^{-1})_{2k+1})$.

De fato, pela proposição 1.10 $\text{Fix}(U_{2k+1}) = L^k(\text{Fix}(U))$ onde $L = U \circ R$ e $U_k = L^k \circ R$. Mas se $U = g\bar{U}g^{-1}$, então temos :

$$\text{Fix}((g\bar{U}g^{-1})_{2k+1}) = L^k(\text{Fix}(g\bar{U}g^{-1})) = (g\bar{U}g^{-1}R)^k(\text{Fix}(g\bar{U}g^{-1}))$$

mas observe que

$$x \in \text{Fix}(g\bar{U}g^{-1}) \iff x = g\bar{U}g^{-1}(x) \iff g^{-1}(x) = \bar{U}g^{-1}(x) \iff$$

$$g^{-1}(x) \in \text{Fix}(\bar{U}) \iff x \in g(\text{Fix}(\bar{U}))$$

e daí a afirmação 1 segue.

Mostraremos que ρ^k é C^s -pseudotransversa a $Fix(R)$. Na notação de pseudotransversalidade da definição 4.4 sejam:

$$\begin{aligned} F &\longleftarrow \rho^k \\ A &\longleftarrow Diff^s(M) \\ M &\longleftarrow Fix(\overline{U}) \\ N &\longleftarrow M \\ V &\longleftarrow Fix(R) \\ K &\longleftarrow Fix(\overline{U}) \\ D &\longleftarrow D_{2k} \end{aligned}$$

Observe que $D_{2k} = \{g \in Diff^s(M) : (g\overline{U}g^{-1}R) \in G^s(2k)\}$ é denso por hipótese.

Seja $\Gamma^s(M)$ o espaço de Banach das perturbações e

$$\begin{aligned} \psi_g : \Gamma^s(M) &\longrightarrow Diff^s(M) \\ X &\longmapsto \phi_{1g} \end{aligned}$$

onde ϕ_t é o fluxo de X .

Temos que ρ^k é uma C^1 -pseudorepresentação, ou seja, a aplicação abaixo é contínua:

$$\begin{aligned} ev(\rho^{k(1)}) : Diff^s(M) \times T(Fix(\overline{U})) &\longrightarrow TM \\ (g, p) &\longmapsto D(\rho^k(g)).q \end{aligned}$$

onde $\rho^k(g)(p) = (g\overline{U}g^{-1}R)^k g(p)$.

Para a condição b) de pseudotransversalidade, temos que existe o conjunto $D_{2k} \subset Diff^s(M)$ denso, tal que para cada $g \in D_{2k}$ existe um aberto $\Gamma^s(M)$ num espaço de Banach separável, que é ele mesmo, e existe a aplicação $\psi_g : \Gamma^s(M) \longrightarrow Diff^s(M)$ contínua, e $a' = 0 \in \Gamma^s(M)$ tal que $\psi_g(a') = g$.

Resta apenas provar que:

$$\begin{aligned} ev(\rho^k \psi_g) : \Gamma^s(M) \times Fix(\overline{U}) &\longrightarrow M \\ (X, p) &\longmapsto \rho^k(\phi_{1g})(p) \end{aligned}$$

é transversa à $Fix(R)$ em $\{0\} \times Fix(\overline{U})$.

Para isso seja $U = g\overline{U}g^{-1}$ e $L = U \circ R$. E de acordo com a afirmação 1, mostrar que $L^k g(\text{Fix}(\overline{U})) \cap \text{Fix}(R)$ é equivalente a mostrar que

$$\text{Fix}(U_{2k+1}) \cap \text{Fix}(R)$$

Temos dois casos:

caso 1 $\rho^k g(p) = g(p)$, ou seja, $L^k g(p) = g(p)$, mas $g \in D_{2k}$ e portanto $L \in G^s(2k)$.

Se $g(p) \in \text{Fix}(R)$ temos:

$$\begin{cases} L^k g(p) = g(p) \\ Rg(p) = g(p) \\ U_{2k+1}g(p) = L^{2k+1}Rg(p) = g(p) \end{cases} \implies Lg(p) = g(p)$$

Suponhamos por absurdo que $\text{Fix}(U_{2k+1})$ é tangente a $\text{Fix}(R)$, daí pelo lema 4.2 temos autovalores de $D(L^{2k+1})_{g(p)}$ são ± 1 . Mas se λ_i é autovalor principal de $D L_{g(p)}$, pelo fato acima temos que $\lambda_i^{2k+1} = \pm 1$ e daí $g(p)$ não é ponto periódico simétrico elementar, contrariando o fato de $L \in G^s(2k)$.

caso 2 $L^k g(p) = q \in \text{Fix}(R)$ com $q \neq g(p)$. Nesse caso podem ocorrer dois casos:

caso 2.1 $L^i g(p) = q$ com $i < k$. Daí $L^k g(p) = q = L^i g(p) \implies L^{k-i}(q) = q$. Mas como $g \in D_{2k}$, então $L \in G^s(2k)$, logo q é genérico e daí $D(L^{k-i})_q$ é elementar.

Suponhamos por contradição que $\text{Fix}(U_{2k+1})$ é tangente à $\text{Fix}(R)$, mas pelo lema 4.2, implica que os autovalores de $D(L^{2k+1})_q$ são ± 1 . Chamando os autovalores principais de $D(L^{k-i})_q$ de λ_s com $s = 1, 2, \dots, n$ e considerando $m = \text{mmc}\{k-i, 2k+1\}$ nós teremos que:

$$\lambda_s^{\frac{m}{k-i}} \quad s = 1, 2, \dots, n$$

são autovalores de $D(L^m)_q$.

Mas por outro lado:

$$(\pm 1)^{\frac{m}{2k+1}} = \pm 1$$

são autovalores de $D(L^m)_q$, ou seja os autovalores principais de $D(L^{k-i})_q$ são raízes da unidade, o que é uma contradição, pois $D(L^{k-i})_q$ é elementar.

caso 2.2 $L^i g(p) \neq q \forall i < k$. Nesse caso $U(q) \neq q$ e $L^i(q) \neq q \forall i$. De fato, como $R(q) = q$ teríamos $L(q) = q$ e se $L^i(q) = q$ para algum $0 < i < k$ teríamos $L^{k-i}g(p) = q$ o que são contradições.

Portanto nós podemos escolher uma vizinhança $\mathcal{N}$ de q de tal modo que $U(\mathcal{N}) \cap \mathcal{N} = \emptyset$ e $L^i(\mathcal{N}) \cap \mathcal{N} = \emptyset \forall i \leq k$. Tome um campo $X \in \Gamma^s(M)$ com $\text{supp}(X) \subset \mathcal{N}$ então vamos mostrar que

$$D(\text{ev} \circ \rho^k \psi_g)_{(0,p)}(X, 0_p) = X_q$$

Tome a seguinte curva:

$$\begin{aligned} \alpha : (-\delta, \delta) &\longrightarrow \Gamma^s(M) \times \text{Fix}(\overline{U}) \\ c &\longmapsto (\epsilon X, p) \end{aligned}$$

observe que $c(0) = (0, p)$ e $c'(0) = (X, 0_p)$ e daí basta provarmos que:

$$\frac{d}{d\epsilon}((\phi_1^\epsilon U \phi_{-1}^\epsilon R)^k \phi_1^\epsilon g(p))|_{\epsilon=0} = X_q \quad (4.2)$$

onde ϕ_t^ϵ é o fluxo de ϵX .

Como ϵX possui suporte em $\mathcal{N}$ o primeiro membro da equação 4.2 fica apenas

$$\frac{d}{d\epsilon} \phi_1^\epsilon(q)|_{\epsilon=0}$$

mas

$$\frac{d}{d\epsilon} \phi_t^\epsilon(q)|_{\epsilon=0} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\phi_t^\epsilon(q) - \phi_t^0(q)}{\epsilon}$$

derivando em relação a t temos

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon X(\phi_t^\epsilon(q))}{\epsilon} = X(\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \phi_t^\epsilon(q)) = X(\phi_t^0(q)) = X(q)$$

Portanto

$$\frac{d}{d\epsilon}\phi_t^\epsilon(q) \big|_{\epsilon=0} = tX(q) + C$$

em $t = 0$ tiramos que $C = 0$. Portanto:

$$\frac{d}{d\epsilon}\phi_t^\epsilon(q) \big|_{\epsilon=0} = tX(q)$$

e para $t = 1$ conclui a equação 4.2.

Portanto $T_{(0,p)}(ev \circ \rho^k \circ \psi_g)$ é sobrejetora.

E com esses dois casos nós concluímos a demonstração de que a aplicação ρ^k é C^r -pseudotransversa à $Fix(R)$. De acordo com o teorema 4.5, como $Fix(R)$ é subvariedade fechada e $Fix(\overline{U})$ é compacto, temos que:

$$\{g \in Diff^s(M) : (g\overline{U}g^{-1}R)^k g(Fix(\overline{U})) \cap Fix(R)\} = \\ \{g \in Diff^s(M) : Fix(U_{2k+1}) \cap Fix(R)\}$$

é aberto e denso em $Diff^s(M)$.

Como π é aberta, temos que :

$$\{U \in orb(\overline{U}) : Fix(U_{2k+1}) \cap Fix(R)\}$$

é aberto e denso.

Como as órbitas são abertas e existe no máximo um número enumerável delas [Pa], o lema segue. $\square$

Lema 4.7

Suponha $s \geq 1$, $k \geq 1$ e $G^s(2k-1)$ é denso em $Diff_R^s(M)$ então o conjunto $\{L \in Diff_R^s(M) : Fix(U_{2k}) \cap Fix(R)\}$ é aberto e denso em $Diff_R^s(M)$.

Demonstração: Seja como no lema anterior D_{2k-1} o conjunto denso e

$$\begin{aligned} \rho^k : Diff^s(M) &\longrightarrow C^s(Fix(R), M) \\ g &\longmapsto \rho^k(g) \end{aligned}$$

onde $\rho^k(g)(p) = (gUg^{-1}R)^k(p)$. Nesse caso ρ^k é pseudotransversa à $Fix(R)$ como antes e o lema segue. $\square$

Lema 4.8

Suponha $s \geq 1$, $k \geq 1$ e $G^s(2k-1)$ é denso em $Diff_R^s(M)$, então o conjunto $\{L \in Diff_R^s(M) : Fix(U_{2k+1}) \bar{\cap} Fix(U)\}$ é aberto e denso em $Diff_R^s(M)$.

Demonstração: Nós vimos que na demonstração da afirmação 1 que $Fix(U) = gFix(\bar{U})$ e como

$$Fix(U_{2k+1}) \bar{\cap} Fix(U) \iff L^k(Fix(U)) \bar{\cap} Fix(U) \iff$$

$$(g\bar{U}g^{-1}R)^k g(Fix(\bar{U})) \bar{\cap} g(Fix(\bar{U})) \iff (\bar{U}g^{-1}Rg)^k(Fix(\bar{U})) \bar{\cap} Fix(\bar{U})$$

e como $[(\bar{U}g^{-1}Rg)^k]^{-1} = [(\bar{U}g^{-1}Rg)^{-1}]^k = (g^{-1}Rg\bar{U})^k$ segue que

$$Fix(U_{2k+1}) \bar{\cap} Fix(U) \iff (g^{-1}Rg\bar{U})^k(Fix(\bar{U})) \bar{\cap} Fix(\bar{U})$$

Trocando no lema 4.7 $\bar{U}$ por R e R por U , o lema segue. $\square$

Como consequência desses três lemas, podemos dizer que se $s \geq 1$ e $G^s(k-1)$ é denso em $Diff_R^s(M)$, então $\Lambda^s(k)$ é aberto e denso em $Diff_R^s(M)$.

Definição 4.9

Seja $\tilde{\Lambda}^s(k) \subset \Lambda^s(k)$ o conjunto dos difeomorfismos R -reversíveis de classe C^s satisfazendo $D(L^k)_x$ não tem autovalor 1 em pontos periódicos simétricos de período primeiro k .

Lema 4.10

Seja $s \geq 1$ e suponha $G^s(k-1)$ é denso em $Diff_R^s(M)$, então $\tilde{\Lambda}^s(k)$ é aberto e denso em $Diff_R^s(M)$.

Demonstração: Como $\Lambda^s(k)$ é aberto, então $\tilde{\Lambda}^s(k)$ é aberto.

Para a densidade, tome uma vizinhança $\mathcal{N}$ qualquer em $Diff_R^s(M)$, pelo fato de $\Lambda^s(k)$ ser denso existe $L \in \Lambda^s(k) \cap \mathcal{N}$.

Seja p um ponto periódico simétrico de período k , então pelo teorema de classificação 1.12, alguma iterada de p , ou seja, $L^s(p) = q$ pertence à $Fix(U_k) \cap Fix(R)$ ou pertence à $Fix(U_{k+1}) \cap Fix(U)$.

Como M é compacta e $L \in \Lambda^s(k)$ temos que $Fix(U_k) \cap Fix(R)$ e $Fix(U_{k+1}) \cap Fix(U)$. Logo esses conjuntos são finitos. Portanto o conjunto de pontos periódicos simétricos de período primeiro k é finito.

caso 1 $q \in Fix(U_k) \cap Fix(R)$

O fato de $Fix(U_k) \cap Fix(R)$ ser finito, podemos achar uma vizinhança $\mathcal{V}$ de q que satisfaz:

- i) $Fix(U_k) \cap Fix(R) \cap \mathcal{V} = \{q\}$
- ii) $L^i(\mathcal{V}) \cap \mathcal{V} = \emptyset \quad i = 1, 2, \dots, k$

Pelo teorema 3.10, arbitrariamente próximo da identidade existe uma aplicação $A \in \mathcal{L}(T_q M, T_q M)$ tal que $A \circ (dU_k)_q \circ A^{-1} \circ dR_q$ é elementar. Escolha um campo $X \in \Gamma^s(M)$ com fluxo ϕ_t satisfazendo:

- i) $\text{supp}(X) \subset \mathcal{V}$
- ii) $X(q) = 0$
- iii) $(D\phi_1)_q = A$
- iv) norma C^s de X "pequena"

Defina $\tilde{U} = \phi_1 U \phi_{-1}$ e $\tilde{L} = \tilde{U} R$. Então $\tilde{L}$ está arbitrariamente próxima de L , pois A está próximo da identidade e $\tilde{L}^k(q) = q$ e $(D(\phi_1 U \phi_{-1} R))_q$ é elementar. Portanto p será um ponto periódico simétrico elementar e daí $D(\tilde{L}^k)_p$ não possui autovalor 1.

Repetindo-se o processo para todos os pontos periódicos simétricos de período primeiro k , teremos uma aplicação $\bar{L} \in \mathcal{V} \cap \tilde{\Lambda}^s(k)$.

caso 2 $q \in Fix(U_{k+1}) \cap Fix(U)$ é análogo. $\square$

Finalmente vamos ao teorema de Kupka-Smale.

Teorema 4.11

Seja M uma variedade compacta, C^∞ , com dimensão $2n$. Se $s \geq 1$, então $G^s(k)$ é residual em $Diff_R^s(M)$ e portanto G^s é residual.

Demonstração: Demonstraremos por indução.

Suponha que $G^s(k-1)$ é residual, então $G^s(k-1)$ é denso. Daí pelo lema 4.10 $\tilde{\Lambda}^s(k)$ é aberto e denso em $Diff_R^s(M)$.

Defina:

$$\begin{aligned} \rho : Diff_R^s(M) &\longrightarrow C^s(M, M \times M) \\ L &\longmapsto \rho(L) \end{aligned}$$

onde $\rho(L)(x) = (x, L^k(x))$.

ρ é C^1 -pseudorepresentação.

Mostraremos que ρ é C^s -pseudotransversa à diagonal $\Delta \subset M \times M$. Na notação de pseudotransversalidade, definida em 4.4 seja:

$$\begin{aligned} A &\longleftarrow Diff_R^s(M) \\ M &\longleftarrow M \\ N &\longleftarrow M \times M \\ V &\longleftarrow \Delta \\ D &\longleftarrow G^s(k-1) \cap \tilde{\Lambda}^s(k) \\ B_a &\longleftarrow \Gamma^s(M) \end{aligned}$$

Se $L = UR \in G^s(k-1) \cap \tilde{\Lambda}^s(k)$. Defina:

$$\begin{aligned} \Psi_L : \Gamma^s(M) &\longrightarrow Diff_R^s(M) \\ X &\longmapsto \phi_1 U \phi_{-1} R \end{aligned}$$

onde ϕ_t é o fluxo do campo X .

Seja $a' = 0 \in \Gamma^s(M)$. Devemos provar que $ev \circ \rho \circ \Psi_L \not\cap \Delta$ em $\{0\} \times M$ onde

$$\begin{aligned} ev \circ \rho \circ \Psi_L : \Gamma^s(M) \times M &\longrightarrow M \times M \\ (X, x) &\longmapsto (x, (\phi_1 U \phi_{-1} R)^k(x)) \end{aligned}$$

Seja x tal que $L^k(x) = x$.

Se $L^i(x) = x$ com $1 \leq i \leq k-1$, então $D(L^i)_x$ é genérico, logo

$$ev \circ \rho \circ \Psi_L \not\cap \Delta$$

em $(0, x)$ como na demonstração do lema 4.6.

Se x é periódico simétrico de período primeiro k , $D(L^k)_x$ não tem autovalor 1 e daí pelo lema 4.2 $ev \circ \rho \circ \Psi_L \not\cap \Delta$ em $(0, x)$.

Se x é periódico não simétrico de período primeiro k , existe uma vizinhança $\mathcal{N}$ de x tal que $R(\mathcal{N}) \cap \mathcal{N} = \emptyset$ e $L^i(\mathcal{N}) \cap \mathcal{N} = \emptyset$ para $1 \leq i \leq k$. Tome $X \in \Gamma^s(M)$ com $\text{supp}(X) \subset \mathcal{N}$, logo :

$$D(ev \circ \rho \circ \Psi_L)_{(0,x)}(X, 0_x) = X_{(x, L^k(x))}$$

como na demonstração do lema 4.10 e portanto a aplicação é sobrejetora e $ev \circ \rho \circ \Psi_L \not\cap \Delta$ em $\{0\} \times M$.

Do teorema 4.5 segue que $B_k = \{L \in Diff_R^s(M) : \rho(L) \not\cap \Delta\}$ é aberto e denso em $Diff_R^s(M)$.

Pelo mesmo argumento da prova do lema 4.10 nós temos que $G^s(k)$ é denso em $B_k \cap G^s(k-1)$.

Dado $\mathcal{V}_1$ vizinhança em $Diff_R^s(M)$, temos que $\mathcal{V}_1 \cap B_k \cap G^s(k-1)$ é vizinhança em $B_k \cap G^s(k-1)$ e não vazia pois $B_k \cap G^s(k-1)$ é denso. Como $G^s(k)$ é denso em $G^s(k-1) \cap B_k$ segue que $\mathcal{V}_1 \cap G^s(k) \neq \emptyset$. Portanto $G^s(k)$ é denso em $Diff_R^s(M)$.

Como $G^s(k, N)$ é aberto, segue que $G^s(k)$ é residual, o que completa a demonstração do teorema de Kupka-Smale para difeomorfismos reversíveis.

Capítulo 5

Genericidade de Campos Reversíveis

Nesta secção provaremos o teorema de Kupka-Smale para campos vetoriais R -reversíveis.

Seja M uma variedade compacta, C^∞ e de dimensão $2n$ e R uma involução C^∞ fixada, com $\dim \text{Fix}(R) = n$ e $X \in \Gamma_R^s(M)$, ou seja, $DR \circ X = -X \circ R$.

Vamos definir agora os conceitos de ponto crítico simétrico N -elementar, para isso recordemos que $p \in M$ é um *ponto crítico simétrico* se $X(p) = 0$ e $p \in \text{Fix}(R)$.

Definição 5.1

Um ponto crítico simétrico é chamado N -elementar se a derivada do campo em p , $DX(p)$ é N -elementar infinitesimalmente R -reversível.

Lembremos que infinitesimalmente R -reversível quer dizer $DX(p) \circ R = -R \circ DX(p)$.

Definição 5.2

Seja $H^s(N)$ o conjunto dos campos $X \in \Gamma_R^s(M)$ tais que:

- i) Todos os pontos críticos simétricos de X são N -elementares.*
- ii) Todos os pontos críticos não simétricos de X são hiperbólicos.*

Seja

$$H^s = \bigcap_{N=1}^{\infty} H^s(N)$$

Para demonstrarmos que H^s é residual, precisaremos antes de um lema.

Lema 5.3

Seja $X \in \Gamma_R^s(M)$ tendo um zero isolado em $p \in \text{Fix}(R)$. Se $s \geq 1$, existe um campo $\bar{X} \in \Gamma_R^s(M)$ arbitrariamente próximo de X tendo p como ponto crítico simétrico N -elementar.

Demonstração: Tome coordenadas $C^\infty (x_i, y_i)$ em uma vizinhança N de p satisfazendo:

i) $x_i(p) = y_i(p) = 0$

ii) O representante local de R é dado por $(x_i, y_i) \mapsto (x_i, -y_i)$.

A condição ii) é possível pelo teorema de Montgomery-Bochner.

Tome uma "bump-function" g de classe C^∞ com norma C^s "pequena" com suporte em N e $g \equiv 1$ em uma vizinhança de p em N .

Considere o campo

$$Y_1 = -\epsilon g y_j \frac{\partial}{\partial x_i} + \epsilon g x_i \frac{\partial}{\partial y_j}$$

Observe que $DR = R$, e daí teremos

$$DR \circ Y_1(x_1, \dots, y_n) = DR(-\epsilon g y_j \frac{\partial}{\partial x_i} + \epsilon g x_i \frac{\partial}{\partial y_j}) = -\epsilon g y_j \frac{\partial}{\partial x_i} - \epsilon g x_i \frac{\partial}{\partial y_j} =$$

$$-Y_1(x_1, \dots, x_n, -y_1, \dots, -y_n) = -Y_1 \circ R(x_1, \dots, y_n)$$

ou seja, $Y_1 \in \Gamma_R^s(M)$.

Tome agora $W_{ij} \subset T_p M$ o espaço gerado por $\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial y_j}$

$$DY_1(p) = \begin{pmatrix} 0 & -\epsilon \\ \epsilon & 0 \end{pmatrix}$$

na base $\{\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial y_j}\}$.

Seja agora $z_{ij} = x_i + y_j$ e $\bar{z}_{ij} = x_i - y_j$. Defina $Y_2 = \epsilon g z_{ij} \frac{\partial}{\partial z_{ij}} - c g \bar{z}_{ij} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_{ij}}$.

Analogamente temos que $Y_2 \in \Gamma_R^s(M)$ e

$$DY_2(p) = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & -\epsilon \end{pmatrix}$$

na base $\{\frac{\partial}{\partial z_{ij}}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_{ij}}\}$.

Dado o campo X , usamos Y_1 e Y_2 como perturbação, e com uma combinação dessas perturbações, como foi feito no teorema 3.10 conseguimos fazer de p um ponto crítico simétrico elementar. $\square$

Teorema 5.4

Se $s \geq 1$, $H^s(N)$ é aberto e denso em $\Gamma_R^s(M)$, ou seja, H^s é residual.

Gostaríamos de ressaltar que este teorema é verdadeiro para M com dimensão $2n$ para todo n [De]. Mas a demonstração que faremos aqui é para o caso $n = 2$, onde usaremos o teorema da Aplicação de Whitney do plano no plano [So] que diz toda aplicação diferenciável $f_0 : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ pode ser aproximada por uma outra denominada "excelente" tal que:

- i) singularidades de f , $S(f)$ é uma curva regular diferenciável dada por $\Delta = 0$, onde $\Delta(x) = \det(Df_x)$ e $D\Delta \neq 0$ em $S(f)$.
- ii) os pontos singulares de $g = f|_{S(f)}$, isto é, os $\alpha \in U$ tais que $g'(\alpha) = 0$ satisfazem a $g''(\alpha) \neq 0$.

Para as aplicações excelentes, $S(g)$ é formado por pontos isolados em $S(f)$ denominados *pontos cuspidais*. Deve-se a Whitney o seguinte resultado. Se α é um ponto cuspidal de f , então f em α é diferenciavelmente equivalente à $g_1(x, y) = (x, xy - y^3)$ em $0 \in \mathbb{R}^2$; nos pontos regulares de g denominados *pontos de dobra*, f é diferenciavelmente equivalente à $g_2(x, y) = (x, y^2)$ em $0 \in \mathbb{R}^2$.

Demonstração do Teorema 5.4: Dado um campo $X \in \Gamma_R^s(M)$ podemos supor que localmente $R(x, y) = (x, -y)$, temos que $X = (f, g)$. Como $X \in \Gamma_R^s(M)$ segue que $DR \circ X = -X \circ R$, ou seja:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, y_1, y_2) \\ f_2(x_1, x_2, y_1, y_2) \\ g_1(x_1, x_2, y_1, y_2) \\ g_2(x_1, x_2, y_1, y_2) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, -y_1, -y_2) \\ f_2(x_1, x_2, -y_1, -y_2) \\ g_1(x_1, x_2, -y_1, -y_2) \\ g_2(x_1, x_2, -y_1, -y_2) \end{bmatrix}$$

Em $Fix(R) = \{(x_1, x_2, 0, 0)\}$ temos que:

$$f_1(x_1, x_2, 0, 0) = f_2(x_1, x_2, 0, 0) = 0$$

queremos localizar os zeros de

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2) &\longmapsto (g_1(x_1, x_2, 0, 0), g_2(x_1, x_2, 0, 0)) \end{aligned}$$

Pelo Teorema de Whitney, g pode ser aproximado por uma $\bar{g}$ que é "excelente" e somente possui pontos de dobra ou cúspide.

Daí o campo $\bar{X} = (f, \bar{g})$ possui apenas singularidades isoladas e pelo lema 5.3 segue que $H^s(N)$ é denso.

O fato de ser aberto é imediato. $\square$

Nosso próximo passo é encontrar condições genéricas para as órbitas periódicas, para isso vamos construir a transformação primeiro retorno de Poincaré e a partir dela definiremos as órbitas elementares.

Seja $X \in \Gamma_R^s(M)$ tendo γ como órbita periódica simétrica de período 2τ passando por $p \in Fix(R)$. Escolha uma vizinhança R -invariante $\mathcal{N}$ de p com coordenadas (x_i, y_i) satisfazendo:

i) O representante local de R em $\mathcal{N}$ é dado por:

$$(x_i, y_i) \longmapsto (x_i, -y_i)$$

ii) $X = \frac{\partial}{\partial y_n}$ em $\mathcal{N}$

A condição i) é possível pelo teorema de Montgomery-Bochner. Então $y_n = 0$ define uma secção local R-invariante Σ_p para X em p . Pelo Teorema da função implícita existem vizinhanças $\mathcal{V}$ de $X \in \Gamma_R^s(M)$ e V de $p \in \Sigma_p$ e aplicações C^s :

$$T : \mathcal{V} \times V \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad \Phi : \mathcal{V} \times V \longrightarrow \Sigma_p$$

satisfazendo $\Phi(Y, q) = \phi_{T(Y, q)}^Y(q)$ onde ϕ_t^Y é o fluxo de Y . Esta é a *aplicação de Poincaré*.

Como γ é simétrica periódica de período 2τ , $q = \phi_\tau(p) \in \text{Fix}(R)$, escolhendo $\mathcal{V}$ suficientemente pequeno, existe uma vizinhança aberta W de q em $\text{Fix}(R)$ e uma aplicação C^s

$$\begin{aligned} \Psi : \mathcal{V} \times W &\longrightarrow \Sigma_p \quad \text{satisfazendo} \\ \Psi(Y, y) = x &\iff \phi_{\frac{1}{2}T(Y, \Phi_Y^{-1}(x))}^Y(\Phi_Y^{-1}(x)) = y \end{aligned} \quad (5.1)$$

onde $\Phi_Y(x) = \Phi(Y, x)$. Ψ é chamada *aplicação semi-Poincaré*.

Para $Y \in \mathcal{V}$ fixo, a aplicação Φ_Y é um difeomorfismo C^s , observe que $\Phi_Y^{-1}(x) = \phi_{-T(Y, \Phi_Y^{-1}(x))}^Y(x)$. A reversibilidade nos dá que

$$T(Y, R(x)) = T(Y, \Phi_Y^{-1}(x))$$

Daí temos:

$$\Phi_Y(R(x)) = \phi_{T(Y, R(x))}^Y(R(x)) = R\phi_{-T(Y, R(x))}^Y(x) =$$

$$R\phi_{-T(Y, \Phi_Y^{-1}(x))}^Y(x) = R\Phi_Y^{-1}(x)$$

Portanto temos que $(\Phi_Y \circ R)^2 = \text{Id}$ em uma vizinhança de p em V . Logo temos $\Phi_Y = U_Y \circ R$. Contudo não diremos que Φ_Y é R-reversível, pois a dimensão de Σ_p é $2n - 1$ ímpar.

Por outro lado o resultado abaixo vai nos garantir que $\dim \text{Fix}(U_Y)$ é igual à $\dim \text{Fix}(R)$ que é igual à n .

Afirmção:

$$x \in \text{Fix}(U_Y) \iff \phi_{-\frac{1}{2}T(Y, \Phi_Y^{-1}(x))}^Y(x) \in \text{Fix}(R)$$

De fato, se $x \in \text{Fix}(U_Y) \implies x = R\phi_{-T(Y, \Phi_Y^{-1}(x))}^Y(x)$. Daí

$$\begin{aligned} R\phi_{-\frac{1}{2}T(Y, \Phi_Y^{-1}(x))}^Y(x) &= \phi_{\frac{1}{2}T(Y, \Phi_Y^{-1}(x))}^Y R(x) = \phi_{\frac{1}{2}T(Y, \Phi_Y^{-1}(x))}^Y R R \phi_{-T(Y, \Phi_Y^{-1}(x))}^Y(x) = \\ &\quad \phi_{-\frac{1}{2}T(Y, \Phi_Y^{-1}(x))}^Y(x) \end{aligned}$$

Portanto $\phi_{-\frac{1}{2}T(Y, \Phi_Y^{-1}(x))}^Y(x) \in \text{Fix}(R)$.

Reciprocamente, suponhamos que

$$R(\phi_{-\frac{1}{2}T(Y, \Phi_Y^{-1}(x))}^Y(x)) = \phi_{-\frac{1}{2}T(Y, \Phi_Y^{-1}(x))}^Y(x)$$

Daí temos que

$$\begin{aligned} U_Y(x) &= R\phi_{-T(Y, \Phi_Y^{-1}(x))}^Y(x) = R\phi_{-\frac{1}{2}T(Y, \Phi_Y^{-1}(x))}^Y \phi_{-\frac{1}{2}T(Y, \Phi_Y^{-1}(x))}^Y(x) = \\ &\quad \phi_{\frac{1}{2}T(Y, \Phi_Y^{-1}(x))}^Y R \phi_{-\frac{1}{2}T(Y, \Phi_Y^{-1}(x))}^Y(x) = \phi_{\frac{1}{2}T(Y, \Phi_Y^{-1}(x))}^Y \phi_{-\frac{1}{2}T(Y, \Phi_Y^{-1}(x))}^Y(x) = x \end{aligned}$$

mostrando que $x \in \text{Fix}(U_Y)$. $\square$

Vamos denotar por $\Psi_Y(w) = \Psi(Y, w)$.

Combinando os resultados da equação 5.1 e da afirmação anterior nós podemos concluir que :

$$\Psi_Y(W) \subset \text{Fix}(U_Y) \tag{5.2}$$

De fato: se $x \in \Psi_Y(W) \implies x = \Psi_Y(y)$ com $y \in W \subset \text{Fix}(R)$ então da equação 5.1:

$$\phi_{\frac{1}{2}T(Y, \Phi_Y^{-1}(x))}^Y(\Phi_Y^{-1}(x)) = y \in \text{Fix}(R)$$

mas

$$\begin{aligned} \phi_{\frac{1}{2}T(Y, \Phi_Y^{-1}(x))}^Y(\Phi_Y^{-1}(x)) &= \phi_{\frac{1}{2}T(Y, \Phi_Y^{-1}(x))}^Y \phi_{-T(Y, \Phi_Y^{-1}(x))}^Y(x) = \\ &\quad \phi_{-\frac{1}{2}T(Y, \Phi_Y^{-1}(x))}^Y(x) \in \text{Fix}(R) \end{aligned}$$

e usando a afirmação anterior temos que $x \in \text{Fix}(U_Y)$.

Definição 5.5

Uma órbita periódica simétrica γ de X passando por $p \in \text{Fix}(R)$ é chamada 0-elementar se existir uma secção transversal local R -invariante Σ_p na qual Ψ_X é transversa à $\text{Fix}(R) \cap \Sigma_p$. Nesse caso diremos que γ é 0-elementar em Σ_p .

Uma outra maneira de ver se uma órbita é 0-elementar é dada pela próxima proposição.

Proposição 5.6

γ é 0-elementar $\iff \text{Fix}(U_X) \bar{\cap} \text{Fix}(R)$ em p

Demonstração: Precisamos demonstrar a seguinte equivalência

$$D(\Psi_X)_q[T_q W] + T_p \text{Fix}(R) = T_p M \iff T_p \text{Fix}(U_X) + T_p \text{Fix}(R) = T_p M$$

mas da equação 5.2 temos $\Psi_X(W) \subset \text{Fix}(U_X)$ daí

$$D(\Psi_X)_q[T_q W] \subset T_p \text{Fix}(U_X)$$

mas Ψ_X é difeomorfismo e $\dim W = \dim \text{Fix}(U_X) = n$, ou seja,

$$D(\Psi_X)_q[T_q W] = T_p \text{Fix}(U_X)$$

e daí a proposição segue. $\square$

Esta definição independe da particular secção escolhida e não se aplica à órbitas que se fecham somente depois de duas ou mais iteradas da aplicação de Poincaré.

Proposição 5.7

Seja $s \geq 1$, $X \in \Gamma_R^s(M)$, γ uma órbita periódica simétrica passando por $p \in \text{Fix}(R)$. Então

(i) Existe uma secção local transversal Σ_p , uma vizinhança $\mathcal{V}$ do campo $X \in \Gamma_R^s(M)$ e um subconjunto aberto e denso D_s de $\mathcal{V}$ tal que todo $Y \in D_s$ tem somente órbitas 0-elementares em Σ_p .

(ii) Se γ_0 é uma órbita fechada 0-elementar de Y em Σ_p então existe uma família a um parâmetro diferenciável de órbitas periódicas de Y contendo γ_0 .

Demonstração: Escolha $\mathcal{V}$, Σ_p e W como anteriormente. Afirmamos que se $s \geq 2$ então Ψ é transversa à $\text{Fix}(R) \cap \Sigma_p = \Sigma_R$. De fato, observe que:

$$\Psi : \mathcal{V} \times W \longrightarrow \Sigma_p$$

Suponha que $\Psi(Y, y) = x$. Seja $\tau = T(Y, x)$ e tome qualquer função

$$g : [0, \frac{\tau}{2}] \longrightarrow \mathbb{R}$$

de classe C^∞ e satisfazendo $g^{(k)}(0) = g^{(k)}(\frac{\tau}{2}) = 0$ para todo k entre 0 e s e

$$\int_0^{\frac{\tau}{2}} g(s) ds = 1$$

Seja $\dot{x} \in T_x \Sigma_p$. Defina o campo $\xi : \gamma \longrightarrow TM$ por $\phi_{-s}(x) \longmapsto g(s) \cdot (D\phi_s)_x(\dot{x})$ e $\xi(\phi_s(x)) = -DR(\xi(\phi_{-s}(\dot{x})))$.

Observe que sobre a órbita γ , ξ é C^s R-reversível, pois

$$DR(\xi(\phi_{-s}(x))) = -\xi(\phi_s(x)) = -\xi(\phi_s(R(x))) = -\xi(R(\phi_{-s}(x)))$$

ou seja,

$$DR \circ \xi = -\xi \circ R$$

Usando uma partição da unidade, extenda ξ para M e defina η por:

$$\eta(y) = \frac{1}{2}(\xi(y) - DR \circ \xi(R(y)))$$

Observe que

$$DR\eta(y) = \frac{1}{2}(DR\xi(y) - \xi(R(y))) = -\frac{1}{2}(\xi(R(y)) - DR\xi(R(R(y)))) = -\eta R(y)$$

ou seja $\eta \in \Gamma_R^s(M)$. Note agora que

$$\begin{aligned}\eta(\phi_s(x)) &= \frac{1}{2}(\xi(\phi_s(x)) - DR\xi R(\phi_s(x))) = \frac{1}{2}(\xi(\phi_s(x)) - DR\xi(\phi_{-s}(x))) - \\ &\quad \frac{1}{2}(\xi(\phi_s(x)) + \xi(\phi_s(x))) = \xi(\phi_s(x))\end{aligned}$$

portanto $\eta = \xi$ em γ .

Seja ϕ_t^λ o fluxo de $Y + \lambda\eta$ onde $\lambda \in \mathbb{R}$. Podemos definir a curva

$$\begin{aligned}\alpha : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathcal{V} \times W \\ \lambda &\longmapsto (Y + \lambda\eta, y)\end{aligned}$$

daí $\alpha'(0) \in T_{(Y,y)}[\mathcal{V} \times W]$. Logo

$$\begin{aligned}D\Psi_{(Y,y)}(\alpha'(0)) &= D(\psi \circ \alpha) |_{\lambda=0} = \frac{d}{d\lambda}(\phi_{\frac{\tau}{2}}^\lambda(y)) |_{\lambda=0} = \int_0^{\frac{\tau}{2}} T\phi_s^0 \circ \eta \circ \phi_{-s+\frac{\tau}{2}}(y) ds = \\ &\quad \int_0^{\frac{\tau}{2}} g(s) \cdot \dot{x} ds = \dot{x}\end{aligned}$$

Para a igualdade acima ver [Ab,Rb] páginas 109-110.

Portanto Ψ_Y é C^s transversa a Σ_R e daí (i) segue.

Observe que codimensão de Σ_R é $n - 1$ pois dimensão Σ_R é n e dimensão Σ_p é $2n - 1$. Portanto $\Psi_Y^{-1}(\Sigma_R)$ tem codimensão $n - 1$ em W , ou seja, é uma sub-variedade de dimensão 1 e portanto gera uma família a um parâmetro de órbitas fechadas e isso prova (ii).

A prova para $s = 1$, nós usaremos um típico argumento que nós chamaremos de *indiferença de s* , para mostrar que se $D_2 \subset \Gamma_R^2(M) \cap \mathcal{V} = \Gamma^2$ é denso, implica que $D_1 \subset \Gamma_R^1(M) \cap \mathcal{V} = \Gamma^1$.

Escolha $X \in \Gamma^1$ e uma vizinhança aberta $N \subset \Gamma^1$ de X . Então, como $\Gamma^2 \subset \Gamma^1$ é denso na topologia C^1 , existe um $X_1 \in N \cap \Gamma^2$. Mas a topologia C^1 é mais fraca do que a topologia C^2 , daí $N \cap \Gamma^2$ é aberto em Γ^2 . Daí para o caso $s \geq 2$, existe $X_2 \in N \cap D_2$, ou $N \cap D_1 \neq \emptyset$. Isso mostra que D_1 é denso em Γ^1 . $\square$

Definição 5.8

Uma órbita periódica simétrica γ é chamada N-elementar se os $(n-1)$ multiplicadores característicos principais são N-elementares, isto é, tomamos a transformação de Poincaré Φ associada a γ e verificamos se os autovalores principais de $D\Phi$, com exceção do 1, são multiplicativamente independentes sobre os inteiros entre $-N$ e N .

Observação: Na definição de [De] sobre órbitas N-elementares não está mencionado a retirada do 1, e isto tem que ser feito, pois o 1 sempre é autovalor da transformação de Poincaré [Se], e se ele não for retirado nunca será N-elementar.

No caso hamiltoniano, nenhuma órbita periódica simétrica é N-elementar, pois em [Pa,Me] está mostrado que pelo menos dois dos multiplicadores característicos deve ser $+1$.

Definição 5.9

Se $\pi : E \longrightarrow B$ é um fibrado, uma "cross-section" é uma aplicação

$$v : B \longrightarrow E$$

tal que $v \circ \pi = id$.

Se X tem γ como órbita periódica simétrica 0-elementar, nós podemos escolher uma vizinhança R -invariante de $p \in Fix(R) \cap \gamma$ com coordenadas como anteriormente.

Para alguma vizinhança $\bar{V}$ de X , o fibrado:

$$\bar{V} \times TN \longrightarrow \bar{V} \times N$$

dado por $\pi^{-1}(Y, x) = (Y, T_x N)$ admite $2n$ "cross-sections" dadas por:

$$\begin{aligned} v_i(Y, x) &= (Y, \frac{\partial}{\partial x_i}) & i = 1, 2, \dots, n \\ v_{n+i}(Y, x) &= (Y, \frac{\partial}{\partial y_i}) & i = 1, 2, \dots, n-1 \\ v_{2n}(Y, x) &= (Y, Y(x)) \end{aligned}$$

Para $\bar{\mathcal{V}}$ pequeno se necessário, podemos assumir:

(i) Todas as órbitas correspondentes aos pontos fixos da transformação de Poincaré são 0-elementares.

(ii) $\Psi : W \longrightarrow \Sigma_p$ está definida e é C^s .

(iii) As $2n$ "cross-sections" definidas acima são ponto a ponto linearmente independentes.

Podemos assumir (i) devido a proposição 5.7, (ii) é óbvio e (iii) lembremos que $X(x) = \frac{\partial}{\partial y_n}$ e Y é uma pequena perturbação de X .

Defina o fibrado $\pi : L_R(TM) \longrightarrow M$ por:

$$\pi^{-1}(x) = \{f \in L(T_x M, T_{R(x)} M) : f \circ DR = DR \circ f^{-1}\}$$

isto é

$$L_R(TM) = \bigcup_{x \in M} \{f_x : T_x M \longrightarrow T_{R(x)} M, \text{ lineares e tal que } DR \circ f_x^{-1} = f_x \circ DR\}$$

Seja $D_R = D_R(\mathbb{R}^{2n})$ o conjunto das aplicações lineares R-reversíveis de $\mathbb{R}^{2n}$.

As "cross-sections" anteriores induzem uma aplicação:

$$\begin{aligned} \rho_1 : \bar{\mathcal{V}} \times L_R(TM) &\longrightarrow M \times D_R \\ (X, f_x) &\longmapsto (x, g) \end{aligned}$$

onde g é dada da seguinte maneira: tomamos a base

$$\beta = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_{n-1}}, X(x) \right\}$$

de $T_x M$ e a base

$$DR(\beta) = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}, -\frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, -\frac{\partial}{\partial y_{n-1}}, R(X(x)) \right\}$$

em $T_{R(x)} M$, daí f_x tem uma matriz A^β em relação a essas bases, sendo assim $g : \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ é dada por $g(x) = A^\beta x$.

Defina $\rho_2 : \bar{\mathcal{V}} \times W \longrightarrow \bar{\mathcal{V}} \times L_R(TM)$ por $\rho_2(Y, w) = (Y, D(\phi_{T(Y,x)}^Y)_x)$ onde $x = \Phi_Y^{-1}(\Psi(w))$.

Definamos agora $\hat{\Psi} = \rho_1 \circ \rho_2$.

Observe que $\hat{\Psi}$ toma valores em $\Sigma_p \times J$, onde $J = J_{\frac{\partial}{\partial y_n}}$ foi definido no capítulo 3.

Temos que observar que $A^\beta(0, \dots, 0, 1) = (0, \dots, 0, 1)$, ou seja

$$D(\phi_{T(Y,x)}^Y)_x(Y(x)) = DR(Y(x)) = -Y(R(x))$$

Lembremos que J^N é o conjunto das aplicações lineares R-reversíveis que não são sub-N-elementares.

Definição 5.10

Uma órbita periódica simétrica dada pela intersecção transversal de $\hat{\Psi}$ com J^N é chamada órbita de bifurcação.

Proposição 5.11

Seja $s \geq 2$, $X \in \Gamma_R^s(M)$ e γ uma órbita fechada 0-elementar de X . Então existe uma secção transversal R-invariante Σ_p para X , uma vizinhança $\mathcal{V}$ de X e um subconjunto aberto denso S^N de $\mathcal{V}$ tal que:

(i) Todas, mas em número finito, as órbitas correspondentes aos pontos fixos da transformação de Poincaré em Σ_p são N-elementares.

(ii) As órbitas simétricas periódicas não N-elementares são órbitas de bifurcação.

Demonstração: Escolha $\mathcal{V}$ como antes e defina $\rho : \mathcal{V} \longrightarrow C^s(W, \Sigma_p \times J)$ por $ev \circ \rho = \hat{\Psi}$

Sabemos que pela proposição 3.13 J^N é uma união finita de sub-variedades J_i^N de codimensão pelo menos 1 em J .

Mostraremos que ρ é C^{s-1} transversa à $\Sigma_R \times J_i^N$ para cada i onde

$$\Sigma_R = \Sigma_p \cap \text{Fix}(R)$$

Como Σ_R tem codimensão $n - 1$ em Σ_p e cada J_i^N tem codimensão pelo menos 1 em J , segue que $\Sigma_R \times J_i^N$ tem codimensão no mínimo n e daí $\hat{\Psi}_Y^{-1}(\Sigma_R \times J_i^N)$ é uma sub-variedade de dimensão 0, e portanto é um conjunto finito de pontos em W . Daí a aplicação de Poincaré tem um número finito de pontos fixos.

Para vermos que ρ é C^{s-1} transversa à $\Sigma_R \times J_i^N$, observe que $\hat{\Psi} \cap \Sigma_R$ pois todas as órbitas periódicas simétricas são 0-elementares. O próximo lema mostrará que $\hat{\Psi} \cap J_i^N$.

O próximo lema está mostrando que se Y é um campo que possui uma órbita que não é N-elementar e não é de bifurcação, "perto" dele terá um campo tal que as órbitas são de bifurcação ou são N-elementares.

Lema 5.12

Seja $Y \in \Gamma_R^s(M)$ um campo que possui uma órbita periódica simétrica γ passando por $p \in \text{Fix}(R)$, e seja U uma vizinhança de γ em M . Seja τ o período de γ e ϕ_t o fluxo de Y . Seja $L = D(\phi_\tau)_p \in D_R(T_p M)$ e escolha $A \in T_L[D_R(T_p M)]$ tal que $A(Y_p) = 0$. Então se $s \geq 2$ existe $\xi \in \Gamma_R^s(M)$ tal que

- (i) $\xi|_\gamma = 0$
- (ii) $\xi|_{M-U} = 0$
- (iii) $\frac{\partial}{\partial \lambda}(T_p \phi_\tau^\lambda)|_{\lambda=0} = A$ onde ϕ_t^λ é o fluxo de $Y + \lambda \xi$.

Demonstração: Em [Ab,Rb p. 111] está mostrado como construir um campo $\eta \in \Gamma^s(M)$ satisfazendo (i), (ii) e (iii).

Defina $\xi(y) = \frac{1}{2}(\eta(y) - DR(\eta(R(y))))$.

Daí $\xi \in \Gamma_R^s(M)$ e satisfaz (i),(ii), e como na prova em [Ab,Rb] temos :

$$H(x, DR(\dot{x})) = D^2(R\phi_{-\tau})H(x, D_x\phi_{-\tau}(\dot{x}))$$

e

$$B(\dot{y}) = -D^2R \circ B \circ DR(\dot{y})$$

Daí o lema segue. $\square$

Finalmente a prova da proposição para $s = 2$ usa o argumento usado na demonstração da proposição 5.7 que chamamos de indiferença de s . $\square$

Vamos definir agora o que é um campo N-genérico.

Definição 5.13

$X \in \Gamma_R^s(M)$ é chamado N-genérico (com órbitas de período $\leq \tau$) se:

- (i) $X \in H^s(N)$
- (ii) Todas as órbitas periódicas simétricas (de período $\leq \tau$) possui secção transversal com as conclusões da proposição 5.11.
- (iii) As órbitas periódicas que não são simétricas (de período $\leq \tau$) são hiperbólicas.

Denotaremos por $K^s(N)$ ($K^s(N, \tau)$) o conjunto dos campos R-reversíveis que são N-genéricos (para órbitas de período $\leq \tau$). Seja

$$K^s = \bigcap_{N=1}^{\infty} K^s(N)$$

Finalmente vamos ao teorema de Kupka-Smale para campos R-reversíveis.

Teorema 5.14

Se M é compacta e $s \geq 2$, $K^s(N)$ é residual em $\Gamma_R^s(M)$ e portanto K^s é também residual.

Demonstração: Basta provarmos que $K^s(N, \tau)$ é aberto e denso em $\Gamma_R^s(M)$.

Tome $X \in K^s(N, \tau)$, logo $X \in H^s(N)$ daí pelo teorema 5.4 existe $\mathcal{V}_1$ vizinhança de X em $\Gamma_R^s(M)$ tal que $\mathcal{V}_1 \subset H^s(N)$. Pelo teorema clássico de Kupka-Smale, existe uma vizinhança $\mathcal{V}_2 \subset \mathcal{V}_1 \subset \Gamma_R^s(M)$ tal que para todo $Y \in \mathcal{V}_2$, Y satisfaz (iii).

Pelas proposições 5.7 e 5.11 temos que existe $\mathcal{V}_3 \subset \mathcal{V}_2$ vizinhanças de X tal que para todo $Y \in \mathcal{V}_3$, Y satisfaz (i), (ii) e (iii). Daí $K^s(N, \tau)$ é aberto.

Dado X um campo qualquer $X \in \Gamma^s(M)$, pelo teorema 5.4 existe X_1 "próximo" de X tal que $X_1 \in H^s(N)$. Como $H^s(N)$ é aberto, e pelo teorema clássico de Kupka-Smale, existe X_2 "próximo" de X_1 tal que X_2 satisfaz (i) e (iii).

Pela proposição 5.7, "próximo" de X_2 existe $X_3 \in D_s$ que satisfaz (i) e (iii). E pela proposição 5.11, "próximo" de X_3 existe $X_4 \in S^N$ que satisfaz (i), (ii) e (iii). Isso demonstra a densidade e conclui a demonstração do teorema de Kupka-Smale para campos vetoriais R-reversíveis.

Bibliografia

- [Ab,Rb] R. Abraham e J. Robbin, *Transversal Mappings and Flows*, Benjamin, New York, 1967.
- [De] R. L. Devaney, *Reversible Diffeomorphisms and Flows*, Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 218 (1976)
- [Mo,Zi] D. Montgomery e L. Zippin, *Topological Transformations Groups*, Interscience, New York, 1955.
- [Pa] R. S. Palais, *Equivalence of Nearby Differentiable Actions of a Compact Group*, Bull. Amer. Math. Soc., 67 (1961)
- [Pa,Me] K. R. Meyer e J. Palmore, *A Generic Phenomenon in Conservative Hamiltonian Systems*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 14, Amer. Math. Soc., Providence, 1970.
- [Qi] G. R. W. Quispel, *Chaos and Time Reversal Symmetry: an introduction*, in: *Nonlinear Dynamics and Chaos*, Proc. Fourth Physics Summer School (Cambera, 1991) eds. R. L. Dewar e B. I. (World Scientific, Singapore) pp 135-151.
- [Ro,Ca] J. A. G. Roberts e H. W. Capel, *Area Preserving Mappings that are not Reversible*, Phys. Lett. A, 162 (1992).
- [Rb] R. C. Robinson, *A Global Approximation Theorem for Hamiltonian Systems*, Proc. Sympos. Pure Math., Vol 14, Amer. Math. Soc., Providence, (1970).
- [Se] M. B. Sevryuk, *Reversible Systems*, Lectures Notes in Mathematics, Vol. 1211, Springer, Berlin, 1986.

- [So] J. Sotomayor, *Singularidades de Aplicações diferenciáveis*, Rio de Janeiro, IMPA, 1976.
- [Vo] R. De Vogelaere, *On the Structure of Symmetric Periodic Solutions of Conservative Systems, with Applications*, Contributions to the Theory of Nonlinear Oscillations, vol. IV, Ann. of Math. Studies, n^o 41. Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1958.