UMA CARACTERIZAÇÃO DA DISTRIBUIÇÃO EXPONENCIAL

ROSWILCIO JOSÉ MOREIRA GÓIS

ORIENTADORA

LILIAN TORNG SHENG

Tese apresentada no Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Ciências.

DEZEMBRO - 1981

CONTEÚDO

AGRADECIMENTOS

Cumpre-me apresentar à Professora Lilian Torng Sheng, orientadora deste trabalho, os meus mais efusivos agradecimentos, pela orientação segura, inspiração e estímulo na preparação desta tese.

O muito obrigado também aos amigos e colegas, que compartilharam e viveram com o autor os momentos difíceis e os alegres, especialmente à Sueli Ap. Mingoti, cujo interesse pelo tema de caracterização de distribuições permitiu proveitosa associação profissional na pesquisa deste tema.

SUMMARY

In this work, we present a new characterization of exponencial distribution by using the technique of conditional expectation and permutations, which are parallel to that used in the paper of Wang & Srivastava (1980) |9|, we generalize their result especially in the part of exponencial distribution.

For this purpose, we consider a random sample $X_1, X_2, \ldots, X_n$, where $n \geq 2$, and their corresponding order statistics $Y_1 < Y_2 < \ldots < Y_n$; we define two statistics

$$Z_k = \frac{1}{n-k} \sum_{i=k+1}^{n} (Y_i - Y_k)^{\alpha} \quad , 1 \leq k \leq n-1$$

and

$$W_k = \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^{k-1} (Y_k - Y_i)^{\alpha} \quad , 2 \leq k \leq n$$

where α is a positive integer,
and we characterize the exponencial distribution by the following properties.

$$E[Z_k / Y_k = y] = \beta \qquad ,\text{q.c.}(dF)$$

or

$$E[W_k / Y_k = y] = \beta \qquad ,\text{q.c.}(dF)$$

respectively, where β is a positive constant.

The way to present this work is divided in three parts which are from chapter 1 through chapter 3.

Chapter 1 is an introduction of the inicial ideas which motivates this study and sketches the way through which the work develops.

Chapter 2 presents the basic tools which are necessary to the development of the principle theorems. In section 2.1 , varias notations and definitions which are foundamental to the technique to be used in the next chapter. In section 2.2, we establish the basic properties and preliminary lemmas will be used later in the development of the proofs.

Chapter 3 contains the presentation of own work,with two principles theorems of the characterization of the exponencial distribution expressed, and as well as their proofs. We first develop several lemmas to prove theorem 3.2.1. Then, the proof of the sufficient condition of theorem 3.2.2 is parallel to theorem 3.2.1 while to necessary condition is proved by applying theorem 3.2.1 .

SUMÁRIO

Pretendemos neste trabalho apresentar uma nova caracterização da distribuição exponencial utilizando técnica que envolve esperança condicional e permutações, paralela àquela usada por Wang e Srivastava(1980) |9|, mas generalizando o seu resultado na parte específica da distribuição exponencial.

Para este fim consideramos uma amostra aleatória $X_1,\ldots,X_n$ onde $n \geq 2$, as suas correspondentes estatísticas de ordem $Y_1 < Y_2 < \ldots < Y_n$, definimos as estatísticas

$$Z_k = \frac{1}{n-k} \sum_{i=k+1}^{n} (Y_i - Y_k)^\alpha \quad , \quad 1 \leq k \leq n-1$$

e

$$W_k = \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^{k-1} (Y_k - Y_i)^\alpha \quad , \quad 2 \leq k \leq n$$

onde α é um inteiro positivo

Então caracterizamos a distribuição exponencial pelas seguintes propriedades:

$$E[Z_k / Y_k = y] = \beta \quad , \text{ q.c. (dF)}$$

ou

$$E[W_k / Y_k = y] = \beta \quad , \text{ q.c. (dF)}$$

O esquema de apresentação do presente trabalho, foi dividido em três partes que são as constituídas pelos capí

tulos 1 a 3.

O capítulo 1 é introdutório das idéias iniciais que motivaram o estudo ora apresentado e delineia o caminho através do qual será ele desenvolvido.

O capítulo 2 apresenta as ferramentas básicas necessárias ao desenvolvimento do tema principal, ou seja, coloca na secção 2.1 as notações e definições que fundamentam a técnica a ser desenvolvida no próximo capítulo; na secção 2.2, estabelece as propriedades básicas e lemas preliminares que serão usadas no desenvolvimento de provas posteriores.

O capítulo 3 encerra a apresentação de nosso trabalho com o enunciado dos dois teoremas principais à caracterização da distribuição exponencial, bem como desenvolve suas demonstrações.

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Sejam X_1, $X_2, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com função de distribuição $F(x)$ contínua. Sem perda de generalidade podemos assumir suas estatísticas de ordem como

(1.1) $$Y_1 < Y_2 < \ldots < Y_n$$

Existem muitos trabalhos publicados referentes à caracterização de distribuição exponencial por propriedades da estatística de ordem. FISZ (1958) provou o seguinte teorema:

<u>TEOREMA 1.1</u> Sejam X_1, X_2 variáveis aleatórias independentes com uma comum função de distribuição contínua $F(x)$. Assuma que $F(0) = 0$ e que $F(x)$ é estritamente crescente pata todo $x > 0$. Então, $Y_2 - Y_1$ e Y_1 são independentes, se e somente se

(1.2) $$F(x) = 1 - e^{-bx}, \quad \text{q.c.}(dF)^{*}$$

com algum $b > o$.

Motivado pelo teorema acima, T.S. FERGUSON (1967) [3] estendeu o teorema acima usando a condição

(1.3) $$E[Y_2 - Y_1 / Y_1 = y] = \text{constante}, \quad \text{q.c.}(dF)$$

ao invés da independência de $Y_2 - Y_1$ e Y_1. Ferguson realmente obte

* q.c.(dF) = quase certamente em distribuição

ve a mesma conclusão quando o tamanho da amostra não está restrito a n = 2, isto é, em lugar de usar (1.3), tomou

$$(1.4) \qquad E\left[Y_{m+1}-Y_m \;/\; Y_m = y\right] = \text{constante, q.c.(dF)}$$

Em [2], DALLAS mostrou o seguinte teorema:

<u>TEOREMA 1.2</u> Se a distribuição F(x) de X é contínua com E(X) finita, então

$$(1.5) \qquad E\left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=2}^{n}(Y_2-Y_1) \;/\; Y_1=y\right] = \text{constante, q.c.(dF)}$$

é uma propriedade caracterizadora da distribuição exponencial, isto é,

$$(1.6) \qquad F(x) = 1 - e^{-\frac{1}{\theta}(x-\mu)} \quad , \; x > \mu$$

$$= 0 \quad , \text{ em outros casos}$$

onde $-\infty < \mu < \infty$, $\theta > 0$, são parâmetros.

Y.H. WANG e R.C. SRIVASTAVA (1980) [9] generalizaram os resultados acima considerando condições sobre

$$(1.7) \qquad E\left[Z_k \;/\; Y_k=y\right] = \alpha y + \beta \qquad , \text{ q.c.(dF)}$$

onde $-\infty < \alpha < \infty$, $\beta >$, são constantes e

$$(1.8) \qquad Z_k = \frac{1}{n-k}\sum_{i=k+1}^{n}(Y_i - Y_k)$$

No mesmo artigo, além de (1.7), também foi provado paralelamente um outro teorema utilizando

$$(1.9) \qquad E\left[W_k \,/\, Y_k = y\right] = \alpha y + \beta \qquad , \text{ q.c.}(dF)$$

quando α e β são constantes e

$$(1.10) \qquad W_k = \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^{k-1} (Y_k - Y_i)$$

Agora, neste trabalho, tentamos generalizar o trabalho de Wang e Srivastava tomando em consideração as estatísticas Z_k e W_k definidas como

$$(1.11) \qquad Z_k = \frac{1}{n-k} \sum_{i=k+1}^{n} (Y_i - Y_k)^\alpha$$

e

$$(1.12) \qquad W_k = \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^{k-1} (Y_k - Y_i)^\alpha$$

onde α é um inteiro positivo

A técnica empregada neste trabalho é paralela à utilizada no trabalho de Wang e Srivastava (1980). Nós decompomos o conjunto $\{Y_k = y\}$ em uma sequência finita de conjuntos disjuntos $A_{\sigma,S}$ os quais definem alguma permutação específica de $X_1, \ldots, X_n$ e então ao invés de considerar $E\left[Z_k / Y_k = y\right]$, consideramos cada uma das $E\left[Z_k / A_{\sigma,S}\right]$. Isto permite reduzir nosso problema para a seguinte relação:

$$(1.13) \qquad E\left[Z_k / Y_k = y\right] = E\left[(X_n - y)^\alpha / X_n > y\right] = \beta \ , \text{ q.c.}(dF)$$

Desenvolvendo a seguir o lado direito desta expressão estabelecemos a equação diferencial

(1.14) $\beta F^{(\alpha)}(y) = \alpha! \; [F(y)-1]$

Resolvendo então esta equação diferencial junto com algumas condições limitativas e propriedades da função de distribuição chegamos finalmente a determinar F(x).

Por simples substituição direta obtemos a prova da condição necessária e por um método semelhante resolvemos a outra parte de nosso trabalho.

CAPITULO 2

NOTAÇÕES E DEFINIÇÕES PRELIMINARES E PROPRIEDADES BÁSICAS

RESUMO - Apresentaremos, no presente capítulo, as notações e definições que serão utilizadas na exposição do presente trabalho, bem como as propriedades básicas, algumas das quais com suas demonstrações, necessárias ao seu desenvolvimento.

2.1 - DEFINIÇÕES E NOTAÇÕES

Preliminarmente apresentaremos algumas definições

Definição 2.1.1 A função de distribuição F(x) é absolutamente contínua se e somente se ela é diferenciável quase certamente e sua derivada f(x) é uma função de densidade.

Definição 2.1.2 Uma variável aleatória **X** tem uma distribuição exponencial se

$$(2.1.1) \qquad F(x) = P(X < x) = 1 - e^{-b(x-a)}, \quad x \geq a,\ b > 0$$
$$= 0 \quad , \text{ caso contrário}$$

onde $-\infty < a < \infty$, $b > 0$ são constantes.

Através de todo este trabalho, quando dizemos que a variável aleatória X é contínua, deve ser entendido que sua função de distribuição $F_X(x)$ é absolutamente contínua, ou, equivalentemente, a função de densidade $f_X(x)$ existe e

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \quad , \forall x \in R \tag{2.1.2}$$

Definição 2.1.3 - Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias independentes e com função de distribuição comum $F(x)$. Rearranjemos os X's em ordem crescente

$$Y_1 \leq Y_2 \leq \ldots \leq Y_n.$$

Então denominamos Y_r a r-ésima estatística de ordem.

Agora iremos introduzir algumas notações especificamente relativas à técnica que utilizaremos neste trabalho

NOTAÇÃO 2.1.1 Para k fixo tal que $1 \leq k \leq n-1$ seja

$$\sigma \subset \{1,2,\ldots,n\}$$

um subconjunto de tamanho k e tomemos um particular σ

$$\sigma_0 = \{1,2,\ldots,k\}$$

NOTAÇÃO 2.1.2 $S \in \sigma$, denotamos

$$A_{\sigma,S} = \left\{ (X_1,\ldots,X_n) : \begin{array}{l} X_j < y, \text{se } j \in \sigma \text{ e } j \neq S \\ X_S = y \\ X_j > y, \text{se } j \notin \sigma \end{array} \right\}$$

Para efeito de familiarização com estas noções apresentaremos o seguinte exemplo

<u>Exemplo 2.1.1</u> Sejam X_1,X_2,X_3 , $n = 3$, $k=2$

Temos

$$\sigma_0 = \{1,2\} \ , \ \sigma_1 = \{1,3\} \ \text{ e } \ \sigma_2 = \{2,3\}$$

Então construimos, os seguintes conjuntos disjuntos

$$A_{\sigma_0,1} = \{(X_1,X_2,X_3):\ X_2 < y,\ X_1=y,\ X_3 > y\ \}$$

$$A_{\sigma_0,2} = \{(X_1,X_2,X_3):\ X_1 < y,\ X_2=y,\ X_3 > y\ \}$$

$$A_{\sigma_1,1} = \{(X_1,X_2,X_3):\ X_3 < y,\ X_1=y,\ X_2 > y\ \}$$

$$A_{\sigma_1,3} = \{(X_1,X_2,X_3):\ X_1 < y,\ X_3=y,\ X_2 > y\ \}$$

$$A_{\sigma_2,2} = \{(X_1,X_2,X_3):\ X_3 < y,\ X_2=y,\ X_1 > y\ \}$$

$$A_{\sigma_2,3} = \{(X_1,X_2,X_3):\ X_2 < y,\ X_3=y,\ X_1 > y\ \}$$

É interessante notar que

$$\underset{\sigma,S}{U} A_{\sigma,S} = \{Y_2=y\}$$

$$= \{X_1=y,X_2<y,X_3\ y \text{ ou } X_1=y,X_3<y,X_2>y \text{ ou }$$

$$X_2=y,X_1<y,X_3>y \text{ ou } X_2=y,X_3<y,X_1>y \text{ ou }$$

$$X_3=y,X_1<y,X_2>y \text{ ou}>X_3=y,X_2<y,X_1>y\}$$

2.2 - PROPRIEDADES BÁSICAS

Nesta seção vamos apresentar algumas propriedades da distribuição exponencial e alguns Lemas que vamos usar no desenvolvimento de nossos teoremas do Capítulo 3.

LEMA 2.2.1 Seja $X \geq \mu$ uma variável aleatória com a função de distribuição $F(x)$. Assuma que $E(x^j)$ é finita para algum $j > 0$. Então, para qualquer $\mu < y < \infty$,

$$\int_y^\infty x^j \, dF(x) = y^j[1-F(y)]+j\int_y^\infty x^{j-1}[1-F(x)]\, dx \tag{2.2.1}$$

PROVA

Seja $y < N < +\infty$ arbitrário. Então a integração por partes dá

$$\int_y^N x^j dF(x) = N^j F(N) - y^j F(y) -j\int_y^N x^{j-1}F(x)\, dx$$

porque

$$-j\int_y^N x^{j-1}\, dx = y^j - N^j \text{ . Então temos}$$

$$\int_y^N x^j dF(x) = y^j[1-F(y)] - N^j[1-F(N)]+ j\int_y^N x^{j-1}[1-F(x)]dx$$

Assim, para provar 2.2.1 basta provar que

$$\lim_{N\to\infty} \{N^j[1-F(N)]\}= 0$$

Por hipótese

$$\infty > E(x^j) = \int_Y^{\infty} x^j \, dF(x)$$

$$= \int_Y^{N} x^j dF(x) + \int_N^{\infty} x^j dF(x)$$

e tomando o limite quando $N \to \infty$, em ambos os lados da equação acima, temos como implicação que

$$\lim_{N\to\infty} \int_N^{\infty} x^j dF(x) = 0 \tag{2.2.2}$$

e por outro lado temos

$$\int_N^{\infty} x^j dF(x) \geq N^j \int_N^{\infty} dF(x) = N^j [1-F(N)] \geq 0 \tag{2.2.3}$$

Tendo em vista (2.2.2) e (2.2.3) obtemos

$$\lim_{N\to\infty} N^j [1-F(N)] = 0$$

Isto completa a prova do Lema 2.2.1

Tendo em vista que a estatística de ordem é ferramenta essencial a ser utilizada neste trabalho, daremos, a seguir a função de distribuição da r-ésima estatística de ordem Y_r ,ou seja

$$F_r(y) = P[Y_r < y)] = \tag{2.2.4}$$
$$= \sum_{j=r}^{n} \binom{n}{j} [F(y)]^j [1-F(y)]^{n-j}$$
$$= r\binom{n}{r} \int_0^{F(y)} t^{r-1}(1-t)^{n-r} dt, 1 \leq r \leq n$$

e também colocaremos sua função de densidade conjunta.

Para isto, sejam $1 \leq r_1 < r_2 < \ldots < r_k \leq n$ inteiros; seja $F(x)$ absolutamente contínua; então a densidade conjunta do vetor $(Y_{r_1}, Y_{r_2}, \ldots, Y_{r_k})$, onde Y é uma estatística de ordem, existe e é dada por

$$(2.2.5) \quad f_k(\underset{\sim}{y}, \underset{\sim}{r}) = n! \left[\prod_{j=1}^{k} f(y_j)\right] \prod_{j=0}^{k} \frac{\left[F(y_{j+1}) - F(y_j)\right]^{r_{j+1}-r_j-1}}{(r_{j+1}-r_j-1)!}$$

sempre que $y_1 \leq y_2 \leq \ldots \leq y_k$ e

$$f_k(\underset{\sim}{y}, \underset{\sim}{r}) = 0, \text{ em outros casos}$$

onde $\underset{\sim}{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_k)$ e $\underset{\sim}{r} = (r_1, r_2, \ldots, r_k)$

$$y_0 = -\infty, \quad y_{k+1} = +\infty, \quad r_0 = 0 \quad \text{e} \quad r_{k+1} = n+1$$

Para a distribuição exponencial padronizada, uma direta substituição em (2.2.5) produz o seguinte resultado que foi inicialmente observado por P.V. SUKHATME (1937) [8]

<u>LEMA 2.2.2</u> Seja $F(x) = 1 - e^{-bx}$, $x \geq 0$.

Então as diferenças

$$d_r = Y_{r+1} - Y_r, \quad r \geq 0, \quad Y_0 = 0$$

são variáveis independentes exponenciais com

$$P(d_r < y) = 1 - e^{-b(n-r)y}, \quad y \geq 0$$

Este Lema capacita-nos verificar que qualquer estatística baseada em $\{d_r: r > k \geq 1\}$ é independente da estatística baseada em $\{d_r: 1 \leq r \leq k\}$. Então se nos apresenta uma questão interessante: Seria esta uma propriedade característica da distribuição exponencial quando temos alguma estatística específica sob consideração? Responderemos parte desta questão no presente trabalho.

LEMA 2.2.3 Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias contínuas. Então, sem perda de generalidade, podemos escrever as suas estatísticas de ordem como

$$Y_1 < Y_2 < \ldots < Y_n$$

PROVA

É suficiente mostrar que

$$P(X_i = X_j) = 0 \quad \forall_i, j \quad \text{tal que } i \neq j$$

De fato

$$P(X_i = X_j) = \int_{\{X=y\}} dF_{i,j}(x,y)$$

$$= \int\int_{\{X=y\}} f(x).f(y)\ dx\ dy = 0$$

onde $F_{ij}(x,y)$ é a distribuição conjunta de (X_i, X_j) e $f(x)$ é a densidade de X, porque a medida bidimensional de Lebesque de uma linha X=y é zero.

Isto completa a prova do Lema 2.2.3.

O seguinte Lema é fácil de ser observado através do exemplo 2.1.1.

LEMA 2.2.4 Todos os conjuntos em $\{A_{\sigma,S}\}_{\sigma,S}$ são disjuntos e

$$\bigcup_{\sigma,S} A_{\sigma,S} = \{Y_k = y\}$$

Claramente, para S fixado existem $\binom{n-1}{k-1}$ disjuntos $A_{\sigma,S}$ todos equiparáveis, e portanto podemos estabelecer o seguinte

LEMA 2.2.5 $$P|A_{\sigma,S} / Y_k = y| = \frac{1}{n\binom{n-1}{k-1}}$$

PROVA

$$P(A_{\sigma,S}/Y_k=y) = \frac{P\left[A_{\sigma,S} \cap \{Y_k = y\}\right]}{P[Y_k=y]}$$

$$= \frac{P(A_{\sigma,S})}{P[Y_k=y]} = \frac{1}{n\binom{n-1}{k-1}}$$

CAPÍTULO 3

CARACTERIZAÇÃO DA DISTRIBUIÇÃO EXPONENCIAL

RESUMO Dois teoremas de caracterização da distribuição exponencial são discutidos aqui, usando-se a técnica da esperança condicional e permutações. A técnica desenvolvida neste trabalho é paralela à usada no trabalho de Wang e Srivastava (1980) [9]

3.1 - INTRODUÇÃO

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n (n \geq 2)$ uma amostra aleatória de uma variável aleatória cuja função de distribuição é $F(x)$ e $Y_1 < Y_2 < \ldots < Y_n$ as correspondentes estatísticas de ordem.

Consideremos a função de distribuição

$$(3.1.1)\quad F(x) = 1 - e^{-\frac{1}{\theta}(x-\mu)}, \quad x > \mu$$
$$= 0$$

onde $-\infty < \mu < \infty$, $\theta > 0$ são parâmetros.

Definamos as estatísticas:

$$(3.1.2)\quad Z_k = \frac{1}{n-k} \sum_{i=k+1}^{n} (Y_i - Y_k)^{\alpha}, \quad k = 1, \ldots, n-1$$

$$(3.1.3)\quad W_k = \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^{k-1} (Y_k - Y_i)^{\alpha}, \quad k = 2, \ldots, n$$

Wang e Srivastava (1980) [9] provaram um resultado mais geral do que o obtido por Dallas (1937) [2] ,usando

$E\left[Z_k / Y_k = y\right] = ay + b$, q.c. (dF) quando $\alpha = 1$, onde a, b são constantes. Especialmente quando a = 0 é caracterizada a distribuição exponencial. Nosso trabalho de caracterização da distribuição exponencial é uma generalização daquele trabalho de Wang e Srivastava.

3.2 - CARACTERIZAÇÃO DA DISTRIBUIÇÃO EXPONENCIAL

Nesta secção apresentaremos e provaremos dois teoremas de caracterização da distribuição exponencial.

TEOREMA 3.2.1 Suponha a função de distribuição F da variável aleatória X, $X > \mu$,contínua, e que existe a $E(X^{\alpha})$ para algum α inteiro positivo. Então para algum $1 \leq k \leq n - 1$

$$E\left[Z_k / Y_k = y\right] = \beta \quad , \quad \text{q.c.}(dF) \tag{3.2.1}$$

onde $\beta > 0$ é uma constante, se e somente se F é dada por (3.1.1) com $\theta = (\alpha!/\beta)^{1/\alpha}$ e μ finito

TEOREMA 3.2.2 Suponha a função de distribuição F da variável aleatória X, $-X > \mu$, continua, e que existe a $E(X^{\alpha})$ para algum α inteiro positivo. Então para algum $2 \leq k \leq n$

$$E\left[W_k / Y_k = y\right] = \beta \quad , \quad \text{q.c.}(dF) \tag{3.2.2}$$

onde $\beta > 0$ é uma constante, se e somente se, a função de distribuição de -X é como especîficada em (3.1.1), isto é

$$F_{-X}(x) = 1 - e^{-\frac{1}{\theta}(x-\mu)}, \quad -x > \mu > -\infty$$

A fim de monstrar estes teoremas precisamos preliminarmente estabelecer e provar os Lemas a seguir:

LEMA 3.2.1 Para Y_k e $A_{\sigma,S}$ como definidos anteriormente,

(3.2.3) $E\left[\sum_{i=k+1}^{n} (Y_i-Y_k)^{\alpha}/Y_k = y\right] =$

$$= \sum_{\sigma,S} E\left[\sum_{j\notin\sigma} (X_j-Y)^{\alpha}/A_{\sigma,S}\right] P\left[A_{\sigma,S}/Y_k = y\right]$$

PROVA Desde que, pelo Lema 2.2.4 $\{Y_k=y\} = \cup_{\sigma,S} A_{\sigma,S}$ onde $\{A_{\sigma,S}\}_{\sigma,S}$ são disjuntos, então sobre $A_{\sigma,S}$ temos a seguinte relação

(3.2.4) $\sum_{i=k+1}^{n} (Y_i-Y_k)^{\alpha} = \sum_{j\notin\sigma} (X_j-y)^{\alpha}$

e isto possibilita-nos calcular a $E\left[\sum_{i=k+1}^{n} (Y_i-Y_k)^{\alpha}/Y_k = y\right]$ pelo seguinte caminho:

$$E\left[\sum_{i=k+1}^{n} (Y_i-Y_k)^{\alpha}/Y_k=y\right]$$

$$= \int_{\{Y_k=y\}} \sum_{i=k+1}^{n} (Y_i-y)^{\alpha} \frac{dP(X_1,\ldots,X_n)}{P[Y_k=y]}$$

$$= \int_{\cup_{\sigma,S} A_{\sigma,S}} \sum_{i=k+1}^{n} (Y_i-y)^{\alpha} \frac{dP[X_1,\ldots,X_n]}{P[Y_k=y]}$$

$$= \sum_{\sigma,S} \int_{A_{\sigma,S}} \sum_{i=k+1}^{n} (Y_i-y)^{\alpha} \frac{dP[X_1,\dots,X_n]}{P[Y_k=y]}$$

$$= \sum_{\sigma,S} \int_{A_{\sigma,S}} \sum_{j\notin\sigma} (X_j-y)^{\alpha} \frac{dP\{X_j;j\notin\sigma\}}{P[Y_k=y]}$$

$$= \sum_{\sigma,S} \int_{A_{\sigma,S}} \sum_{j\notin\sigma} (X_j-y)^{\alpha} \frac{dP\{X_j;j\notin\sigma\}}{P(A_{\sigma,S})} \cdot \frac{P(A_{\sigma,S})}{P[Y_k=y]}$$

$$= \sum_{\sigma,S} \left[\int_{A_{\sigma,S}} \sum_{j\notin\sigma} (X_j-y)^{\alpha} \frac{dP\{X_j;j\notin\sigma\}}{P(A_{\sigma,S})} \right] \frac{P[A_{\sigma,S}\cap \{Y_k=y\}]}{P\{Y_k=y\}}$$

$$= \sum_{\sigma,S} E\left[\sum_{j\notin\sigma} (X_j-y)^{\alpha}/ A_{\sigma,S}\right] \cdot P\left[A_{\sigma,S}/Y_k = y\right]$$

Isto prova o Lema 3.2.1 .

Agora desde que $X_1,\dots,X_n$ são independentes e identicamente distribuidas, observamos aqui os dois seguintes fatos:

$$\text{(a)}\quad E\{\sum_{j\notin\sigma} (X_j-y)^{\alpha}/A_{\sigma,S}\} = E\{\sum_{j\notin\sigma_0} (X_j-y)^{\alpha}/A_{\sigma_0 k}$$

$$\text{(b)}\quad E\{(X_j-y)^{\alpha}/A_{\sigma_0 k}\} = E\{(X_n-y)^{\alpha}/A_{\sigma_0 k}\} \qquad \text{para } j>k$$

onde $\sigma_0 = \{1,2,\dots,k\}$.

Na parte (a) o resultado é imediato porque $\{X_j; 1 \leq j \leq n\}$ são identicamente distribuidas

A parte (b) vem do fato que

$$E\ \{(X_j-y)^{\alpha}\ /A_{\sigma_0,k}\}$$

$$= E\ \{(X_j-y)^{\alpha}\ /X_1<y,\ldots,X_{k-1}<y,X_k=y,X_{k+1}>y,\ldots,X_j>y,\ldots,X_n>y\}$$

$$= E\ \{(X_n-y)^{\alpha}\ /X_1<y,\ldots,X_{k-1}<y,X_k=y,X_{k+1}>y,\ldots,X_j>y,\ldots,X_n>y\}$$

$$= E\ \{(X_n-y)^{\alpha}/A_{\sigma_0,k}\}$$

Observe-se que no Lema 2.2.5 mencionamos que

$$P\ [A_{\sigma,S}/Y_k=y] = 1/n\binom{n-1}{k-1}$$

isto junto com os dois fatos acima permite-nos provar o seguinte lema:

<u>LEMA 3.2.2</u> Para Z_k, Y_k como definido anteriormente, temos

(3.2.5) $$E[Z_k/Y_k = y] = E[(X_n-y)^{\alpha}/X_n > y]$$

<u>PROVA</u> Usando o Lema 3.2.1, obtemos

$$E[Z_k/Y_k=y]$$

$$= \frac{1}{n-k}\ E\Big[\sum_{i=k+1}^{n}(Y_i-Y_k)^{\alpha}/Y_k= y\Big]$$

$$= \frac{1}{n-k}\sum_{\sigma,S} E\Big[\sum_{j\notin\sigma}(X_j-y)^{\alpha}\ /A_{\sigma,S}\Big]\cdot P(A_{\sigma,S}/Y_k=y)$$

$$= \frac{1}{n-k} \left[n \binom{n-1}{k-1} \right]^{-1} \sum_{\sigma, S} E \left[\sum_{j \notin \sigma} (X_j - y)^{\alpha} / A_{\sigma, S} \right]$$

$$= \frac{1}{n-k} \left[n \binom{n-1}{k-1} \right]^{-1} \left[n \binom{n-1}{k-1} \right] \cdot E \left[\sum_{j \notin \sigma_0} (X_j - y)^{\alpha} / A_{\sigma_0, k} \right]$$

$$= \frac{1}{n-k} \; E \left[\sum_{j \notin \sigma_0} (X_j - y)^{\alpha} / A_{\sigma_0, k} \right]$$

$$= \frac{1}{n-k} (n-k) \; E \left[(X_n - y)^{\alpha} / A_{\sigma_0, k} \right]$$

$$= E \left[(X_n - y)^{\alpha} / X_1 < y, \ldots, X_{k-1} < y, X_k = y, X_{k+1} > y, \ldots, X_n > y \right]$$

$$= E \left[(X_n - y)^{\alpha} / X_n > y \right]$$

Observe-se aqui que existem (n-k) termos sob o somatório ${}_{\sigma,S}\Sigma$ e que a última igualdade decorre do fato de X_n ser independente de todos os $X_1, \ldots, X_{n-1}$.

Isto completa a prova do presente Lema.

LEMA 3.2.3 Se F é função de distribuição contínua de X, onde $X > \mu > 0$ e β é uma constante positiva e

$$E \left[(X_n - y)^{\alpha} / X_n > y \right] = \beta \quad \text{q.c. (dF)}$$

Então

$$\beta F^{(\alpha)}(y) = \alpha! \left[F(y) - 1 \right] \tag{3.2.6}$$

PROVA - Para fazer sentido, suponhamos que $P(X_n > y) > 0$ ou $F(y) \neq 1$. Então

$$E\left[(X_n-y)^{\alpha}/X_n > y\right] = \int_{[x>y]} (X-y)^{\alpha} \frac{dF_{X_n}(x)}{P(x>y)}$$

Tomando $F_{X_n} = F$ porque as variáveis aleatórias $X_1,\ldots,X_n$ são identicamente distribuidas com função de distribuição F e, como α é um inteiro positivo, podemos escrever $(X-y)^{\alpha}$ em uma expansão Binomial e obteremos então

$$E\left[(X_n-y)^{\alpha}/X_n > y\right]$$

$$= \frac{1}{1-F(y)} \int_y^{\infty} \sum_{j=0}^{\alpha} (-1)^j \binom{\alpha}{j} x^j y^{\alpha-j} dF(x)$$

$$= \frac{1}{1-F(y)} \sum_{j=0}^{\alpha} (-1)^j \binom{\alpha}{j} y^{\alpha-j} \int_y^{\infty} x^j \, dF(x)$$

Desde que $E(X^{\alpha})$ existe, usando o Lema 2.2.1 podemos escrever

$$E\left[(X_n-y)^{\alpha}/X_n > y\right]$$

$$= \frac{1}{1-F(y)} \sum_{j=0}^{\alpha} (-1)^j \binom{\alpha}{j} y^{\alpha-j} \{y^j [1-F(y)] + j \int_y^{\infty} x^{j-1} [1-F(x)] dx\}$$

$$= y^{\alpha} \sum_{j=0}^{\alpha} (-1) \binom{\alpha}{j} + \frac{1}{1-F(y)} \sum_{j=1}^{\alpha} (-1)^j \binom{\alpha}{j} j y^{\alpha-j} \int_y^{\infty} x^{j-1} |1-F(x)| dx$$

Considerando, no entanto, que

$$\sum_{j=0}^{\alpha} (-1)^j \binom{\alpha}{j} = 0 \qquad \text{e que}$$

$$\binom{\alpha}{j} j = \frac{\alpha!}{j!(\alpha-j)!} \cdot j = \frac{\alpha(\alpha-1)!}{(j-1)!(\alpha-j)!} = \alpha\binom{\alpha-1}{j-1}$$

e, ainda mais, pela hipótese dada que

$$E\left[(X_n-y)^{\alpha}/X_n > y\right] = \beta \quad , \text{q.c.}(dF)$$

obteremos a expressão

$$\beta = \frac{\alpha}{1-F(y)} \sum_{j=1}^{\alpha} (-1)^j \binom{\alpha-1}{j-1} \int_y^{\infty} x^{j-1}\left[1-F(x)\right] dx$$

ou, equivalente

$$\beta\left[1-F(y)\right] = \alpha \sum_{j=1}^{\alpha} (-1)^j \binom{\alpha-1}{j-1} y^{\alpha-j} \int_y^{\infty} x^{j-1} \left[1-F(x)\right] dx \tag{3.2.7}$$

onde $\alpha > 1$.

Como $F(x)$ é contínua, então $x^{j-1}\left[1-F(x)\right]$ também é contínua e isto significa que $\int_y^{\infty} x^{j-1}\left[1-F(x)\right] dx$ é uma função absolutamente contínua de y. O lado direito de (3.2.7) é uma combinação linear de funções absolutamente contínuas de y e novamente é uma função absolutamente contínua; isto significa que o lado esquerdo ou ainda $F(y)$ é absolutamente contínua em y e logo podemos diferenciar ambos os lados de (3.2.7) com respeito a y e temos

$$- \beta F'(y)$$

$$= \alpha \sum_{j=1}^{\alpha} (-1)^j \binom{\alpha-1}{j-1} \{ y^{\alpha-j} y^{j-1} [F(y)] +$$

$$(\alpha-j) y^{\alpha-j-1} \int_y^{\infty} x^{j-1} [1-F(x)] \, dx \}$$

$$= y^{\alpha-1} [F(y)-1] \, \alpha \sum_{j=1}^{\alpha} (-1)^j \binom{\alpha-1}{j-1} +$$

$$\alpha \sum_{j=1}^{\alpha} (-1)^j \binom{\alpha-1}{j-1} (\alpha-j) y^{\alpha-j-1} \int_y^{\infty} x^{j-1} [1-F(x)] \, dx$$

Como o primeiro termo da expressão acima é obviamente nulo e no segundo termo podemos usar

$$\binom{\alpha-1}{j-1} (\alpha-j) = \binom{\alpha-2}{j-1} (\alpha-1)$$

podemos escrever

$$(3.2.8) \qquad -\beta F'(y) = \alpha(\alpha-1) \sum_{j=1}^{\alpha-1} (-1)^j \binom{\alpha-2}{j-1} y^{\alpha-j-1} \int_y^{\infty} x^{j-1} [1-F(x)] dx$$

Pela mesma razão desenvolvida antes, o lado direito da equação supra é absolutamente contínuo o que implica que $F'(y)$ é absolutamente contínua e portanto $F''(y)$ existe.

Seja agora para y fixo

$$(3.2.9) \qquad G_y(\alpha) = \alpha \sum_{j=1}^{\alpha} (-1)^j \binom{\alpha-1}{j-1} y^{\alpha-j} \int_y^{\infty} x^{j-1} [1-F(x)] \, dx$$

Então (3.2.7) e (3.2.8) ficam como

$$\beta[1-F(y)] = G_y(\alpha)$$

$$-\beta F'(y) = \alpha G_y(\alpha-1)$$

respectivamente.

Diferenciando, pelas razões anteriores, ambos os lados da última equação, em relação a y, obteremos

$$-\beta F''(y) = \alpha(\alpha-1)\ G_y(\alpha-2)$$

Desde que $G_y(t)$ é absolutamente contínua para $t \geq 1$ continuaremos diferenciando ambos os lados até obtermos

$$-\beta F^{(\alpha-1)}(y) = \alpha(\alpha-1)\ldots 2\ G_y(1)$$

onde $G_y(1) = -\int_y^{\infty}[1-F(x)]\,dx$

ou seja

$$-\beta F^{(\alpha-1)}(y) = -\alpha!\int_y^{\infty}[1-F(x)]dx$$

Como, ainda $F^{(\alpha-1)}$ é absolutamente contínua, obteremos finalmente

$$\beta F^{(\alpha)}(y) = \alpha!\ [F(y)-1]$$

Isto completa a prova do presente Lema.

LEMA 3.2.4 - A equação diferencial

(3.2.10) $$F^{(\alpha)}(y) = \alpha!\ |F(y) - 1|$$

onde F(y) é uma função de distribuição tem a seguinte solução para F(y)

$$F(y) = 1 - e^{-\sqrt[\alpha]{(\alpha!/\beta)}\ (y-\mu)}, \quad y > \mu > -\infty$$

PROVA De (3.2.6) obtemos

$$F^{(\alpha)}(y) - \frac{\alpha!}{\beta} F(y) = - \frac{\alpha!}{\beta}$$

ou fazendo $\frac{\alpha!}{\beta} = C$ e tomando $F^{(\alpha)}(y) = D^{\alpha}F(y)$, temos a expressão (3.2.10) como

(3.2.11) $$(D^{\alpha}-C)\ F(y) = -C.$$

Resolvendo a equação homogênea

(3.2.12) $$(D^{\alpha}-C)\ \tilde{F}\ (y) = 0$$

obtemos

(3.2.13) $$\tilde{F}\ (y) = \sum_{k=1}^{\alpha-1} C_k\ e^{\sqrt[\alpha]{C}\ (\cos \frac{2k\pi}{\alpha} + i \text{ sen } \frac{2k\pi}{\alpha})\ y}$$

e a solução geral da equação não homogênea é, portanto,

(3.2.14) $$F\ (y) = \tilde{F}\ (y) + b$$

onde b é uma constante. Assim temos que

(3.2.15) $\quad \tilde{F}^{(\alpha)}(y) = F^{(\alpha)}(y)$

Substituindo agora a solução geral em (3.2.11) ficamos com

$$(D^{\alpha}-C)\left[\tilde{F}(y) + b\right] = -C$$

ou

(3.2.16) $\quad (D^{\alpha}-C)\tilde{F}(y) + (D^{\alpha}-C)b = -C$

Considerando o primeiro termo da expressão acima como nulo (conforme 3.2.12) e que $D^{\alpha}b = 0$, ficamos com

(3.2.17) $\quad -Cb = -C$

o que implica b = 1. Obtemos, assim a solução da equação não homogênea

(3.2.18) $\quad F(y) = 1 + \sum_{k=0}^{\alpha-1} C_k e^{\sqrt[\alpha]{C}\,(\cos \frac{2k\pi}{\alpha} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{\alpha})y}$

ou seja

(3.2.19) $\quad F(y) = 1 + C_0 e^{\sqrt[\alpha]{C}\,y} + \sum_{k=1}^{\alpha-1} C_k e^{\sqrt[\alpha]{C}\,(\cos \frac{2k\pi}{\alpha} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{\alpha})y}$

se α é impar

$$= 1 + C_0 e^{\sqrt[\alpha]{C}\,y} + C_{\alpha/2} e^{\sqrt[\alpha]{C}\,y}$$

$$+ \sum_{k\neq\alpha/2}^{\alpha-1} C_k e^{\sqrt[\alpha]{C}\,(\cos \frac{2k\pi}{\alpha} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{\alpha})y}$$

se α é par

É fácil observar que o segundo termo da última expressão para $F(y)$ quando α é par se justifica pois temos

$$\text{sen}\ \frac{2k\pi}{\alpha} = 0 \ \text{se}\ k = 0\ ,\ \text{sen}\ \frac{2k\pi}{\alpha} = 0 \ \text{e}\ \cos\frac{2k\pi}{\alpha} = -1 \ \text{se}\ k = \frac{\alpha}{2}\ .$$

Considerando por outro lado, que $F(y)$ somente assume valores reais, então $C_k = 0$ para $k = 1,\ldots,\alpha-1, k \neq \alpha/2$ e podemos desprezar os termos

$$\sum_{k=1}^{\alpha-1} C_k\, e^{\sqrt[\alpha]{C}\,(\cos\frac{2k\pi}{\alpha} + i\ \text{sen}\ \frac{2k\pi}{\alpha})\, y}$$

e

$$\sum_{\substack{k=1\\ k\neq\alpha/2}}^{\alpha-1} C_k\, e^{\sqrt[\alpha]{C}\,(\cos\frac{2k\pi}{\alpha} + i\ \text{sen}\ \frac{2k\pi}{\alpha})\, y}$$

Sob estas considerações e tomando $C = \frac{\alpha!}{\beta}$, podemos escrever

$$\text{(3.2.20)}\qquad F(y) = 1+C_0\, e^{\sqrt[\alpha]{\alpha!/\beta}\, y}\ ,\ \text{se}\ \alpha\ \text{é impar}$$

$$= 1+C_0\, e^{\sqrt[\alpha]{\alpha!/\beta}\, y} + C_{\alpha/2}\, e^{\sqrt[\alpha]{\alpha!/\beta}\, y}\ ,\ \text{se}\ \alpha\ \text{é par}$$

Determinaremos agora os valores das constantes C_0 e $C_{\alpha/2}$.

Considerando que $X > \mu > -\infty$ então $F(\mu) = 0$ e que o limite de $F(y)$ quando y tende a $+\infty$ é 1, temos em (3.2.20) para α impar

$$\text{(3.2.21)}\qquad 0 = 1 + C_0\, e^{\sqrt[\alpha]{\alpha!/\beta}\ \mu}$$

e isto implica

(3.2.22) $\quad C_0 = e^{-(\alpha!/\beta)^{1/\alpha}\mu}$

Também para α por temos

$F(\mu) = 0$, e logo por (3.2.20), obtemos

(3.2.23) $\quad -1 = C_0\, e^{\sqrt[\alpha]{\alpha!/\beta}} + C_{\alpha/2}\, e^{-\sqrt[\alpha]{\alpha!/\beta}\,\mu}$

Como $\lim\limits_{y\to\infty} F(y) = 1$, obtemos por (3.2.20)

(3.2.24) $\quad 0 = \lim\limits_{y\to\infty} C_0 e^{\sqrt[\alpha]{\alpha!/\beta}\; y} + \lim\limits_{y\to\infty} C_{\alpha/2}\, e^{-\sqrt[\alpha]{\alpha!/\beta}}$

Como o segundo termo do lado direito desta expressão é zero, temos

$$\lim_{y\to\infty} C_0 e^{\sqrt[\alpha]{\alpha!/\beta}\; y} = 0$$

o que implica que

(3.2.25) $\quad C_0 = 0$

Agora substituindo este valor de C_0 em (3.2.23), obtemos

$$C_{\alpha/2}\, e^{-\sqrt[\alpha]{\alpha!/\beta}} = 1$$

o que implica

(3.2.26) $\quad C_{\alpha/2} = -\, e^{\sqrt[\alpha]{\alpha!/\beta}\,\mu}$

Finalmente, substituindo os valores das constantes C_0 e $C_{\alpha/2}$ em (3.2.20) para α par, obtemos

$$(3.2.27) \qquad F(y) = 1 - e^{-\sqrt[\alpha]{\alpha!/\beta}\,(y-\mu)}$$

que é a mesma expressão encontrada para α impar em (3.2.20) tomando como (3.2.22) $C_0 = -e^{-(\alpha!/\beta)^{(1/\alpha)}\mu}$

Portanto, para algum α inteiro positivo podemos escrever finalmente

$$(3.2.28) \qquad F(y) = 1 - e^{-(\alpha!/\beta)^{1/\alpha}(y-\mu)}, \quad y>\mu>-\infty$$

$$= 0 \ , \text{ em outros casos}$$

Isto completa a prova do presente Lema.

Agora, com os Lemas apresentados e provados anteriormente, neste capítulo, poderemos efetuar a demonstração da condição suficiente do Teorema 3.2.1.

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 3.2.1

(I) CONDIÇÃO SUFICIENTE

Parte(A): quando $\mu > 0$. Considerando que, por hipótese, a função de distribuição F das X_i, $1 \leq i \leq n$, é contínua e

$$(3.2.29) \qquad E[\, Z_k/Y_k = y \,] = \beta \qquad \text{q.c.}(dF)$$

onde $\beta > 0$ é uma constante, e tendo em vista os Lemas 3.2.2 e 3.2.3 obtemos a equação diferencial

$$(3.2.30) \qquad \beta F^{(\alpha)}(y) = \alpha! \; [F(y)-1]$$

Através do Lema 3.2.4, conhecemos que esta equação diferencial tem a solução para uma função de distribuição

$$(3.2.31) \qquad F(y) = 1 - e^{-(\alpha!/\beta)^{1/\alpha}(y-\mu)}, \; y > \mu > -\infty$$

$$= 0 \quad , \text{ em outros casos}$$

<u>Parte (B)</u>: quando $\mu < 0$

Neste caso consideramos as variáveis aleatórias $X_i - \mu$, $1 \leq i \leq n$, cujas estatísticas de ordem são

$$Y_1 - \mu < Y_2 - \mu < \ldots < Y_n - \mu$$

Agora, usando a parte (A), desde que $X_i - \mu > 0$ obteremos

$$(3.2.29') \qquad E\left\{\frac{1}{n-k} \sum_{i=k+1}^{n} |(Y_i-\mu)-(Y_k-\mu)|^{\alpha} / Y_k-\mu=y-\mu\right\} = \beta \quad \text{q.c.}(dF)$$

o que implica que $X - \mu$ tem distribuição exponencial com parâmetro $(\alpha!/\beta)^{1/\alpha}$ ou seja

$$F_{X-\mu}(y) = 1 - e^{-(\alpha!/\beta)^{1/\alpha} y}, \; y > 0$$

Isto é equivalente a dizer que a condição

$$(3.2.30') \qquad E\left\{\frac{1}{n-k} \sum_{i=k+1}^{n} (Y_i-Y_k)^{\alpha} / Y_k = y\right\} = \beta \quad , \text{ q.c.}(dF)$$

o que implica que X tem a distribuição

(3.2.31') $F(y) = 1- e^{-(\alpha!/\beta)^{1/\alpha} y}$

As partes (A) e (B) juntas completam a prova da condição suficiente

(II) - CONDIÇÃO NECESSÁRIA

Podemos verificar por cálculo direto que com F definida por (3.2.31) a equação (3.2.7) é verdadeira.

De fato, substituindo (3.2.31) no lado direito de (3.2.7) temos

(3.2.32) $$\beta[1-F(y)] = \alpha \sum_{j=1}^{\alpha} (-1)^j \binom{\alpha-1}{j-1} y^{\alpha-j} \int_y^{\infty} x^{j-1} e^{-\left(\frac{\alpha!}{\beta}\right)^{\frac{1}{\alpha}}(x-\mu)} dx$$

fazendo $(\alpha!/\beta)^{\frac{1}{\alpha}} = C$ para simplificar e utilizando a integração por partes sucessivamente obtemos

$$\beta[1-F(y)]$$

$$= \alpha \sum_{j=1}^{\alpha} (-1)^j \binom{\alpha-1}{j-1} e^{C\mu} \{ \frac{e^{-Cx}}{(-C)} \Big[x^{j-1} - \frac{(j-1)x^{j-2}}{(-C)} + \frac{(j-1)(j-2)x^{j-3}}{(-C)^2} - \dots + \frac{(-1)^{j-1}(j-1)!}{(-C)^{j-1}} \Big] \}$$

$$= \alpha \sum_{j=1}^{\alpha} (-1)^j \binom{\alpha-1}{j-1} e^{C\mu} \{ \frac{-e^{-Cx}}{C} \Big[x^{j-1} + \frac{(j-1)x^{j-2}}{C} + \frac{(j-1)(j-2)x^{j-3}}{C^2} + \dots + \frac{(j-1)!}{C^{j-1}} \Big] \Big|_y^{\infty} \}$$

$$= \alpha e^{C\mu} \cdot \sum_{j=1}^{\alpha} (-1)^j \binom{\alpha-1}{j-1} y^{\alpha-1} \{ \frac{e^{-Cy}}{C} \left[y^{j-1} + \frac{(j-1)y^{j-2}}{C} + \frac{(j-1)(j-2)y^{j-3}}{C^2} + \ldots + \frac{(j-1)!y^{j-\alpha}}{C^{j-1}} \right] \}$$

ou distribuindo o somatório

$$1-F(y)$$

$$= \alpha e^{C\mu} \frac{e^{-Cy}}{C} \{ y^{\alpha-1} \sum_{j=1}^{\alpha} (-1)^j \binom{\alpha-1}{j-1} + \frac{-1}{C} y^{\alpha-2} \sum_{j=2}^{\alpha} (-1)^j \binom{\alpha-1}{j-1} + \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)}{C^2} y^{\alpha-3} \sum_{j=3}^{\alpha} \binom{\alpha-3}{j-3} + \ldots + \frac{(\alpha-1)!}{C^{\alpha-1}} \}$$

É evidente que, com excessão do ultimo termo $\frac{(\alpha-1)!}{C^{\alpha-1}}$, todos os demais são nulos e, portanto, podemos escrever

$$\beta \left[1 - F(y) \right] = \frac{\alpha!}{C^{\alpha}} e^{-C(y-\mu)}$$

ou tomando C pelo seu valor

$$\beta \left[1 - F(y) \right] = \beta \; e^{-\left(\frac{\alpha!}{\beta}\right)^{\frac{1}{\alpha}} (y-\mu)}$$

Tomando no lado esquerdo F(y) pelo seu valor em(3.2.31) obtemos uma identidade e isto completa a prova da condição suficiente, ficando portanto completamente demonstrado o Teorema 3.2.1.

Agora iremos estabelecer condições preliminares para a prova do teorema 3.2.2.

O processo que utilizaremos na demonstração do teorema 3.2.2 é análogo ao utilizado para o teorema 3.2.1. Precisamos semelhantemente estabelecer alguns lemas que servirão de base para sua demonstração, a saber:

<u>LEMA 3.2.5</u> Para Y_k e $A_{\sigma,S}$ como definido anteriormente

(3.2.33) $$E\left[\sum_{i=1}^{k-1} (Y_k - Y_i)^{\alpha} / Y_k = y\right]$$

$$= \sum_{\sigma,S} E\left[\sum_{j\varepsilon\sigma} (y - X_j)^{\alpha} / A_{\sigma,S}\right] \cdot P(A_{\sigma,S} / Y = y)$$

<u>PROVA</u> Desde que, pelo lema 2.2.4, $\{Y_k = y\} = U_{\sigma,S}\, A_{\sigma,S}$ onde $\{A_{\sigma,S}\}_{\sigma,S}$ são disjuntas, então sob $A_{\sigma,S}$ temos a seguinte relação

(3.2.34) $$\sum_{i=1}^{k-1} (Y_k - Y_i)^{\alpha} = \sum_{j\varepsilon\sigma} (y - X_j)^{\alpha}$$

e então é fácil saber que

$$E\left[\sum_{i=1}^{k-1} (Y_k - Y_i)^{\alpha} / Y_k = y\right]$$

$$= \int_{\{Y_k = y\}} \sum_{i=1}^{k-1} (y - Y_i)^{\alpha} \, \frac{dP(X_1, \ldots, X_n)}{P(Y_k = y)}$$

$$= \int_{\underset{\sigma,S}{U} A_{\sigma,S}} \sum_{i=1}^{k-1} (y - Y_i)^{\alpha} \, \frac{dP(X_1, \ldots, X_n}{P(Y_k = y)}$$

$$= \sum_{\sigma,S} \int_{A_{\sigma,S}} \sum_{i=1}^{k-1} (y-Y_i)^\alpha \frac{dP(X_1,\ldots,X_n)}{P(Y_k=y)}$$

$$= \sum_{\sigma,S} \int_{A_{\sigma,S}} \sum_{j\varepsilon\sigma} (y-X_j)^\alpha \frac{dP\{X_j;j\varepsilon\sigma\}}{P(Y_k=y)}$$

$$= \sum_{\sigma,S} \int_{A_{\sigma,S}} \sum_{j\varepsilon\sigma} (y-X_j)^\alpha \frac{dP\{X_j;j\varepsilon\sigma\}}{P(A_{\sigma,S})} \frac{P(A_{\sigma,S})}{P(Y_k=y)}$$

$$= \sum_{\sigma,S} \int_{A_{\sigma,S}} \sum_{j\varepsilon\sigma} (y-X_j)^\alpha \frac{dP\{X_j;j\varepsilon\sigma\}}{P(A_{\sigma,S})} \frac{P(A_{\sigma,S}\ \{Y_k=y\})}{P(Y_k=y)}$$

$$= \sum_{\sigma,S} E\left[\sum_{j\varepsilon\sigma} (y-X_j)^\alpha / A_{\sigma,S}\right] \cdot P(A_{\sigma,S}/Y_k=y)$$

Isto prova o lema 3.2.5

Por analogia as explicações utilizadas para o desenvolvimento do lema 3.2.2, temos, também, evidentemente, os fatos

(a) $$E\left[\sum_{j\varepsilon\sigma} (y-X_j)^\alpha / A_{\sigma,S}\right] = E\left[\sum_{j\varepsilon\sigma_0} (y-X_j)^\alpha / A_{\sigma_0 k}\right]$$

(b) $$E\left[(y-X_j)^\alpha / A_{\sigma_0 k}\right] = E\left[(y-X_1)^\alpha / A_{\sigma_0 k}\right]$$

para $j < k$ e $\sigma_0 = \{1,2,\ldots,k\}$

Também aqui utilizaremos o fato demonstrado no lema 2.2.5 que

$$P(A_{\sigma,S}/Y_k=y) = \left\{n \binom{n-1}{k-1}\right\}^{-1}$$

Tudo isto possibilita-nos enunciar e demonstrar o seguinte lema

<u>LEMA 3.2.6</u> Para W_k, Y_k já definidos temos

(3.2.25) $$E\left[W_k/Y_k=y\right] = E\left[(y-X_1)^{\alpha}/X_1 < y\right]$$

<u>PROVA</u> Usando o lema 3.2.5, obtemos

$$E[W_k/Y_k = y]$$

$$= \frac{1}{k-1} E\left[\sum_{i=1}^{k-1} (Y_k-Y_i)^{\alpha}/Y_k = y\right]$$

$$= \frac{1}{k-1} \sum_{\sigma,S} E\left[\sum_{j\varepsilon\sigma} (y-X_j)^{\alpha}/A_{\sigma,S}\right] \cdot P(A_{\sigma,S}/Y_k=y)$$

$$= \frac{1}{k-1} \left[1/n\binom{n-1}{k-1}\right]^{-1} \sum_{\sigma,S} E\left[\sum_{j\varepsilon\sigma} (y-X_j) /A_{\sigma,S}\right]$$

$$= \frac{1}{k-1} \left[n\binom{n-1}{k-1}\right]^{-1} \left[n\binom{n-1}{k-1}\right] \cdot E\left[\sum_{j\varepsilon\sigma} (y-X_j)^{\alpha}/A_{\sigma_0 k}\right]$$

$$= \frac{1}{k-1} E\left[\sum_{j\varepsilon\sigma} (y-X_j)^{\alpha}/A_{\sigma_0 k}\right]$$

$$= \frac{1}{k-1} E\left[(k-1) E (y-X_1)^{\alpha}/A_{\sigma_0 k}\right]$$

$$= E\left[(y-X_1)^{\alpha}/X_1<y,\ldots,X_i<y,\ldots,X_{k-1}<y,X_k=y,X_{k+1}>y,\ldots X_n>y\right]$$

$$= E\left[(y-X_1)^{\alpha}/X_1 < y\right]$$

Isto completa a prova do lema 3.2.6

Antes de prosseguirmos e para efeito de simplificação de análise e dos cálculos posteriores, vamos comparar as expressões (3.2.5) e (3.2.35) que rescreveremos abaixo

$$(3.2.5) \quad E[Z_k/Y_k=y] = E[(X_n-y)^{\alpha}/X_n > y)]$$

$$(3.2.35) \quad E[W_k/Y_k=y] = E[(-X_1-(-y))^{\alpha}/-X_1 > (-y)]$$

Verifica-se, facilmente, que as expressões acima são perfeitamente semelhantes diferindo essencialmente apenas no sinal das variáveis e, consequentemente tudo que se aplicou na demonstração do teorema 3.2.1 para a variável X_n de (3.2.5) também se aplica à variável $-X_1$ de (3.2.35). Então o Lema 3.2.3 pode agora ser expresso como

<u>LEMA 3.2.7</u> Se F é uma função de distribuição contínua de $-X_1$, onde $-X_1 > \mu$ e β é uma constante positiva e

$$(3.2.36) \quad E\left[(y-X_1)^{\alpha}/X_1 < y\right] = \beta \qquad , \text{ q.c. (dF)}$$

Então

$$(3.2.37) \quad \beta F_{-X}^{(\alpha)}(y) = \alpha!\left[F_{-X}(y) - 1\right]$$

Consequentemente, também o lema 3.2.4 pode ser escrito como

<u>LEMA 3.2.8</u> A equação diferencial (3.2.37) onde $F_{-X}(y)$ é uma função de distribuição tem a seguinte solução para $F_{-X}(y)$

(3.2.38) $\quad F_{-X}(y) = 1 - e^{-(\alpha!/\beta)^{(1/\alpha)}(y-\mu)}, \qquad y > \mu$

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 3.2.2

(I) CONDIÇÃO SUFICIENTE

Considerando que, por hipótese, a função de distribuição F das $-X_i$, $1 \leq i \leq n$, é contínua e

(3.2.39) $\quad E[W_k/Y_k = y] = \beta \qquad$,q.c.(dF)

onde $\beta > 0$ é uma constante, e tendo em vista os lemas 3.2.6 e 3.2.7 obtemos as equações diferenciais

(3.2.40) $\quad \beta F_{-X}^{(\alpha)}(-y) = \alpha! \, [F_{-X}(-y)-1]$

Através do lema 3.2.8 reconhecemos que esta equação diferencial tem a solução para a função de distribuição

(3.2.41) $\quad F_{-X}(y) = 1 - e^{-(\alpha!/\beta)^{1/\alpha}(y-\mu)}, \; y > \mu$

$= 0$, em outros casos

Isto completa a prova da condição suficiente

(II) CONDIÇÃO NECESSÁRIA

Sabemos que a variável aleatória -X tem a distribuição da forma (3.2.38), por hipótese do teorema 3.2.2.

Por outro lado, também conhecemos pelo lema 3.2.6

que é verdadeira a expressão (3.2.35), ou seja

$$E[W_k/Y_k=y] = E[(y-X_1)^{\alpha}/X_1< y]$$

Então é suficiente mostrar que

(3.2.42) $E[(y-X_1)^{\alpha}/X_1< y] = \beta$, q.c.(dF)

é verdadeira.

Mas, pelo teorema 3.2.1 já sabemos que é verdadeiro que

(3.2.43) $E[Z_k/Y_k = y] = \beta$, q.c.(dF)

onde Z_k é a estatística correspondente das variáveis $-X_1,\ldots,-X_n$.

Então usando o lema 3.2.2 obtemos

(3.2.44) $E\{[(-X_n)-y]^{\alpha}/(-X_n) > y\} = \beta$, q.c.(dF)

que é verdadeira para todo y.

Agora colocamos -y por y e tendo em vista que X_1 e X_n são identicamente distribuidos, (3.2.44) fica como

(3.2.45) $E[(y-X_1)^{\alpha}/ X_1 < y] = \beta$, q.c.(dF)

Isto completa a prova da condição necessária.

BIBLIOGRAFIA

|1| Beg,M.I. & Kirmani,S.N.V.A. (1974) On characterization of exponential and related distributions. Austral J. Statist.,16, 163-166.

|2| Dallas,A.C. (1973) A characterization of the exponential distribution. Bull. Soc. Math. Grece, 14,172-175.

|3| Ferguson,T.S. (1967) On characterization distributions by properties of order statistics. Sankhya, Ser.A, 29, 265-278.

|4| Fisz,M. (1958) Characterization of some probability distributions. Skand. Aktuarietdskr, 1-2,65-70.

|5| Balambos,J. & Kotz,S. (1978) Characterizations of probability. Berlin, Springer. (lecture notes in mathematics).

|6| Rao,C.R. (1965) Linear statistical inference and its applications. New york, Wiley.

|7| Spiegel, M.R. (1979) Manual de fórmulas e tabelas matemáticas. São Paulo, McGraw-Hill.

|8| Sukhatme,P.V. (1937) Tests of significance for sample of the χ^2 popu lation with two degrees of freedom. Ann. of Eugenics, 8,52-56.

|9| Wang,Y.H. & Srivastava,R.C. (1980) A characterization of the exponential and related distributions by linear regression. Ann. of Statistics, 8, No.1, 217-220.