TRANSFERENCIA DE CALOR ENTRE DISCOS ROTATIVOS

ELIANE PASTORE

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

CAMPINAS - SÃO PAULO
BRASIL

TRANSFERÊNCIA DE CALOR ENTRE DISCOS ROTATIVOS

ELIANE PASTORE

ORIENTADOR

PROF.DR. RAKESH KUMAR BHATNAGAR

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatítica e Ciência da Computação como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada.

Novembro - 1980

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, quero agradecer ao Mestre Bhatnagar pelo incentivo à continuação dos meus estudos na Engenharia Mecânica, pela paciência e dedicação que teve para comigo durante o desenvolvimento dessa pesquisa.

Aos meus pais pelo carinho imenso e confiança que refletem em mim em todo instante da minha vida.

Aos meus irmãos, e, em especial à Emília, pela ajuda material para a realização deste trabalho.

À D. Maria pela força e coragem durante os tempos de Campinas.

Aos meus amigos de República, e a todos os outros que não ouso nominá-los, nem enumerá-los aqui, pois precisaria de muitas folhas.

Ao Prof. Zago pelo incentivo e ensinamentos no decorrer dos meus cursos.

Ao Antonio Carlos pelo enriquecimento espiritual e ajuda na parte computacional desse trabalho.

Ao Eduardo pela amizade e os bons momentos.

À Glau, em particular, quero agradecer por ser a grande amiga do dia a dia, e pela colaboração na parte física e revisão deste trabalho.

E, ao "Very Old"...

Para meus pais e Fernando

com carinho.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O objetivo fundamental desse trabalho é discutir e apresentar soluções para o problema da transferência de calor em um escoamento de fluidos newtonianos entre dois discos rotativos.

Para tal problema, necessitamos das equações que descrevem o movimento do fluido, equações da continuidade, de Navier-Stokes e da Energia que apresentamos no Capítulo I. Temos também nesse capítulo, uma introdução elementar à teoria de perturbação e a técnica fundamental que utilizamos nas soluções das equações diferenciais resultantes do problema abordado. Devido a não-linearidade das equações e consequentemente não possuirem soluções análiticas exatas, obtemos soluções aproximadas para as equações propostas. Escolhemos como parâmetro de perturbação, o número admensional de Reynolds, $|R| < 1$.

O Capítulo II caracteriza o problema principal dessa pesquisa e apresenta as soluções para a distribuição de velocidade para o escoamento proposto entre os discos rotativos.

No capítulo III, analisamos o comportamento da temperatura para o escoamento permanente, laminar entre discos rotativos submetidos a várias condições térmicas. Discutimos a variação da temperatura para diversos valores da velocidade angular do disco superior. Podemos notar que, quando os discos giram com velocidades angulares iguais, o sistema todo roda como um corpo rígido.

Ainda nesse capítulo, temos os resultados discutidos e graficamente expostos para o problema da transferência de calor entre discos na ausência de forças externas.

No Capítulo IV, apresentamos a solução para a equação da energia no escoamento entre discos rotativos quando aplica-se um campo magnético constante numa direção perpendicular aos discos.

O disco superior, nesse caso, permanece parado e estudamos o comportamento da temperatura para diversas condições de contorno dos discos. Analisamos os dados obtidos e esboçamos os perfis da distribuição de temperatura.

No Apêndice A, fazemos a dedução da equação da energia que utilizamos nos capítulos III e IV.

E, finalmente nos Apêndices B e C, temos os coeficientes relativos às soluções obtidas para a equação da energia, capítulos III e IV, respectivamente.

CAPITULO I

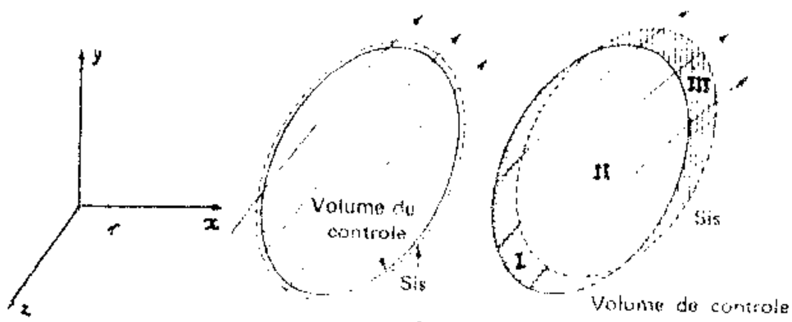
EQUAÇÕES GERAIS

Este capítulo introduz os conceitos necessários para a análise do movimento do fluido. Serão deduzidas aqui, as equações básicas que permitem prever o comportamento dos fluidos. Tais equações são: da continuidade, do movimento e da energia. Para deduzir estas equações será utilizado o método do volume de controle.

Um volume de controle refere-se a uma região no espaço e é útil em situações nas quais haja escoamento através desta região. A fronteira do volume de controle é a superfície de controle. A forma e o tamanho do volume de controle são arbitrários , no entanto, pode-se fazer com que uma parte do seu volume coincida com paredes sólidas e as outras paredes são tomadas como normais ao escoamento para simplificar o estudo. O volume de controle é chamado, as vezes, de sistema aberto.

Um sistema é caracterizado por uma quantidade da massa fixa de matéria, que difere do restante da massa para a qual dá-se o nome de "meio". A fronteira do sistema pode variar com o tempo desde que sua massa permaneça constante.

A título de visualizar melhor o que foi descrito mostramos a variação de um sistema num volume de controle (t), fig. a, e no instante (t+ Δt), fig. b.



Instante t
(a)

Instante $t+\Delta t$
(b)

O sistema se ocupa no instante (t), dos volumes I e II e no instante (t+Δt) dos volumes II e III.

A seguir, vamos introduzir algumas das leis básicas necessárias ao estudo do movimento de um fluido, aplicáveis às situações físicas que são descritas pelas equações integrais, obtidas no decorrer deste trabalho. São elas:

a) Lei da conservação da massa,

b) Segunda Lei de Newton aplicada ao movimento,

e

c) Lei da conservação da energia

1.1 - Equação da Continuidade

Lei da conservação da massa.

Essa lei nos diz que a massa de um sistema permanece constante com o tempo e é representada matematicamente como:

$$\frac{dm}{dt} = 0 \quad , \tag{1-1}$$

ou ainda,

$$\frac{dm}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{v.c.} \rho d\upsilon + \int_{s.c.} \rho u_i dA_i = 0 \quad , \tag{1-2}$$

onde

m é a massa,

ρ a densidade volumétrica de massa

e u_i as componentes de velocidade

A equação (1-2) afirma que a taxa de variação da massa no volume de controle mais o saldo dos fluxos de massa através da superfície de controle, deve ser nula.

Aplicando o teorema de Gauss na equação (1-2), temos

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{v.c.} \rho d\upsilon + \int_{v.c.} \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i)\ d\upsilon = 0 \tag{1-3}$$

ou

$$\int_{v,c,} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i)\right] d\upsilon = 0 \ . \tag{1-4}$$

Como o volume é arbitrário, o integrando deve ser nulo, isto é,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}\ (\rho u_i) = 0 \ . \tag{1-5}$$

Em se tratando de um fluido incompreensível onde densidade se mantém constante, a equação (1-5) torna-se

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\ u_i = 0 \ . \tag{1-6}$$

Em coordenadas cartezianas a equação (1-6) pode ser escrita como

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{1-7}$$

onde u, v, w, são as componentes de velocidade nas direções de x, y e z, respectivamente.

1.2 - Equações do Movimento

A segunda lei de Newton afirma que a resultante de todas as forças externas que agem num sistema é diretamente proporcional ao produto da massa pela aceleração do sistema. Em linguagem matemática,

$$\Sigma\vec{F} = m.\vec{a} \tag{1-8}$$

ou ainda

$$\Sigma F_i = \frac{Du_i}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{v.c} u_i \; \rho d\upsilon + \int_{s.c} u_i \rho u_j . dA_j \tag{1-9}$$

Traduzindo em palavras, a força resultante que a ge num volume de controle é igual à taxa de variação, com o tempo da quantidade de movimento v.c., mais o saldo dos fluxos da quantidade de movimento através da superfície de controle.

Aplicando o teorema de Gauss na equação(1-9) temos,

$$F_i = \frac{d(m\ u_i)}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{v.c.} \rho u_i d\upsilon + \int_{v.c.} \frac{\partial}{\partial x_j} u_i \; \rho u_j \, d\upsilon \tag{1-10}$$

ou seja ,

$$\Sigma F_i = \frac{d(m\, u_i)}{dt} = \int_{v.c.} \left[\rho . \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial \rho}{\partial t} + u_i \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j) + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] d\nu. \tag{1-11}$$

Como o volume é arbitrário e fazendo-se uso da equação da continuidade (1-5), a equação (1-11) torna-se

$$\Sigma F_i = \frac{Du_i}{Dt} = \rho \left[\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] \tag{1-12}$$

De outra forma a força resultante que age num sistema pode ser escrito como

$$\Sigma F_i = f_i + T_{ij,j} \tag{1-13}$$

onde

f_i são as forças externas que atuam sobre o sistema,

T_{ij}, o tensor de tensão para um fluido newtoniano,

sendo

$$T_{ij} = - p\, \delta_{ij} + 2\mu\, E_{ij} \tag{1-14}$$

onde

p é uma pressão isotrópica ,

δ_{ij}, o delta de Kronecker,

μ, a viscosidade

e

$$E_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) , \qquad (1\text{-}15)$$

o tensor de deformação. Este tensor é de ordem dois é simétrico isto é,

$$E_{ij} = E_{ji}. \qquad (1\text{-}16)$$

Conclui-se então , da equação (1-14) que

$$T_{ij} = T_{ji} . \qquad (1\text{-}17)$$

Substituindo a equação (1-15) na equação (1-14) obtemos

$$\Sigma F_i = f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] \qquad (1\text{-}18)$$

Expandindo os termos e utilizando-se a equação (1-6) , a equação (1-18) torna-se,

$$\Sigma F_i = f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} (u_i) \qquad (1\text{-}19)$$

Igualando-se as equações (1-19) e (1-12) temos,

$$\rho\left[\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j\,\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right] = \frac{-\partial p}{\partial x_i} + \mu\,\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}(u_i) + f_i \qquad (1\text{-}20)$$

Em coordenadas cartezianas a equação (1-20) é expressa como:

$$\rho\left[\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right] = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\,\nabla^2 u + f_x, \qquad (1\text{-}21)$$

$$\rho\left[\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right] = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu\,\nabla^2 v + f_y, \qquad (1\text{-}22)$$

$$\rho\left[\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right] = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu\,\nabla^2 w + f_z, \qquad (1\text{-}23)$$

onde

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z^2} \qquad (1\text{-}24)$$

e

u, v, w, são as componentes de velocidade nas direções crescentes de x, y, e z, respectivamente.

As equações (1-21),(1-22) e (1-23) são chamadas de Navier-Stokes.

1.3 - Equações da Energia

A primeira lei da termodinâmica afirma que o calor fornecido ao sistema menos o trabalho realizado pelo sistema, depende somente dos estados inicial e final do próprio.

Em linguagem matemática,

$$Q - W = E_f - E_i \tag{1-25}$$

Utilizando o método de volume de controle, temos,

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{v.c.} \rho e_i d\upsilon + \int_{s.c.} \rho e u_i dA_i \ . \tag{1-26}$$

Na ausência de efeitos nucleares, elétricos, magnéticos e tensão superficial a energia e, (energia por unidade de massa), é a soma das energias potencial, cinética e interna do sistema. Isto é,

$$e = gz + \frac{v^2}{2} + u \ , \tag{1-27}$$

onde

gz é a energia potencial gravitacional,

$\frac{v^2}{2}$ é a energia cinética

e u , a energia interna associada ao comportamento molecular ou atômica.

Por outro lado, temos,

$$\frac{dQ}{dt} = - \int_{s.c.} q \; d \, A \quad = \quad - \int_{s.c.} q_i d \, A_i \; , \tag{1-28}$$

onde

q , representa o fluxo de calor por condução e radiação.

O trabalho (W) realizado pelo sistema sobre o meio, pode ser dividido em duas partes: o trabalho das forças de pressão aplicadas nas partes móveis da fronteira e o trabalho das forças das tensões de cisalhamento na superfície.

Em termos do tensor de tensão, o trabalho w, ê

$$\frac{dw}{dt} = - \int_{s.c.} u_i \; T_{ij} . \; dA_j \; . \tag{1-29}$$

Fazendo-se o balanço da energia total, no sistema, incluindo-se as energias cinética, potencial e gravitacional, obtém -se que

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{v.c.} \rho e d\upsilon + \int_{s.c.} \rho e u_i \; dA_i = - \int_{s.c.} q_i \; dA_i + \int_{s.c.} u_i \; T_{ij} dA_i + \int_{v.c.} q' dv \tag{1-30}$$

onde

q' é a geração interna de calor por unidade de volume.

Aplicando-se o teorema de Gauss na equação (1-29), temos

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{v.c.} \rho e \; d\upsilon + \int_{v.c.} \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho e u_i)\; d\upsilon + \int_{v.c.} \frac{\partial}{\partial x_i} q_i d\upsilon$$

$$+ \int_{v.c.} q' \; d\upsilon + \int_{v.c.} \frac{\partial}{\partial x_i}(u_i T_{ij})\; d\upsilon = 0. \qquad (1\text{-}31)$$

Substituindo-se o tensor de tensão,(1-15), na equação (1-31), obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{v.c.} \rho e \; d\upsilon + \int_{v.c.} \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho e u_i)\; d\upsilon + \int_{v.c.} \frac{\partial}{\partial x_i} q_i d\upsilon + \int_{v.c.} q' d\upsilon$$

$$+ \int_{v.c} \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i) d\upsilon - \int_{v.c.} \frac{\partial}{\partial x_i} \; u_j(\mu E_{ij})\; d\upsilon = 0 \qquad (1\text{-}32)$$

ou ainda,

$$\int_{v.c.} \left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho e u_i) + \frac{\partial}{\partial x_i}(q_i) + q' + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i) \right.$$

$$\left. - \frac{\partial}{\partial x_i}(u_j \mu E_{ij}) \right] d\upsilon = 0. \qquad (1\text{-}33)$$

Como o volume é arbitrário, devemos ter:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho e u_i) + \frac{\partial}{\partial x_i}(q_i) + q' + \frac{\partial}{\partial x_i}(p u_i) - \frac{\partial}{\partial x_i}(u_j \mu \varepsilon_{ij}) = 0,$$

(1-34)

Utilizando-se a equação (1-6), a equação (1-34) torna-se

$$\rho\frac{De}{Dt} = - \frac{\partial}{\partial x_i} q_i - p \frac{\partial u_i}{\partial x_i} - u_i \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu(u_i\frac{\partial}{\partial x_j}\varepsilon_{ij}) + \mu\varepsilon_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}u_j + q'.$$

(1-35)

Consideremos agora, a equação do movimento(1-19) ; multiplicando ambos os lados desta equação por u_i obtém-se a equação da energia mecânica, a saber

$$\rho u_i\frac{Du_i}{Dt} = u_i \frac{\partial p}{\partial x_i} + u_i\frac{\partial}{\partial x_j} \mu\varepsilon_{ij} . \qquad (1-36)$$

Na equação acima, (1-36) desprezou-se a energia potencial gravitacional. Subtraindo-se a equação (1-36) da equação (1-35), temos a expressão final para a equação da energia :

$$\rho \frac{Du}{Dt} = - \frac{\partial u_i}{\partial x_i} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \mu\Phi + q' , \qquad (1-37)$$

onde u é a energia interna por unidade de massa e

$\Phi = \varepsilon_{ij}\frac{\partial u_j}{\partial x_j}$, a função de dissipação de energia.

A equação (1-37) pode ser escrita em termos térmicos e para tal é necessário utilizar-se a lei da condução de calor de Fourier,

$$q = - k \nabla T , \qquad (1\text{-}38)$$

e assumindo ainda a condutividade térmica como constante e o gaz como perfeito, $du = c_v \, dT$, temos então

$$\rho c_v \frac{DT}{Dt} = - p \frac{\partial}{\partial x_i} u_i + K \nabla^2 T + \frac{\partial}{\partial x_i} q_r + q' , \qquad (1\text{-}39)$$

onde q_r é o vetor fluxo de calor por irradiação.

Fazendo-se uso da entalpia, admitindo o fluido como incompressível , $\frac{\partial}{\partial x_i} u_i = 0$, e desprezando-se os termos q_r e q', a equação (1-39) reduz-se a

$$\rho c_p \, V.T = k \nabla^2 T + \mu \Phi , \qquad (1\text{-}40)$$

onde c_p é a capacidade calorífica à pressão constante.

Em coordenadas cartesianas a equação (1-40) é expressa como

$$\rho c_p \left[u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} + w\frac{\partial T}{\partial z} \right] = k\nabla^2 T + \mu\Phi \ , \tag{1-41}$$

onde

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z^2}$$

e

$$\Phi = 2\left\{ \Bigg[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right]^2 + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right]^2 + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right]^2 \right\} . \tag{1-42}$$

1.4 - INTRODUÇÃO À TEORIA REGULAR DE PERTURBAÇÃO .

Muitos problemas que aparecem em Engenharia, Física e Matemática Aplicada apresentam dificuldades devido às equações resultantes serem não-lineares , equações cujos coeficientes são variáveis, problemas que envolvem formas complicadas de contorno ou ainda equações diferenciais com condições de contorno não-lineares.

Levando-se em consideração que esses problemas não possuem soluções analíticas exatas, somos forçados a recorrer às formas de soluções aproximadas.

Vamos introduzir uma técnica de aproximação baseada na teoria fundamental de perturbação de parâmetros em equações diferenciais tendo-se a expansão da solução de uma equação em uma série de potências de um parâmetro.

1.4 1 - TÉCNICA FUNDAMENTAL.

Suponhamos que estamos interessados em resolver a equação

$$F(x) = y \ , \tag{1-43}$$

onde F é um operador linear.

Consideremos uma equação auxiliar da seguinte forma diferencial linear

$$L(x) = y. \tag{1-44}$$

Essa equação apresenta uma forma de solução explícita unicamente da seguinte maneira.

$$x = T(y) \tag{1-45}$$

Utilizando-se as equações (1-44) e (1-45) temos a equação (1-43) escrita como segue:

$$L(x) + \left[F(x) - L(x) \right] = y \ . \tag{1-46}$$

Introduzindo-se uma nova função

$$N(x) = L(x) - F(x) \tag{1-47}$$

e um parâmetro ε de tal forma que possamos escrever

$$L(x) = y + \varepsilon\, N(x). \qquad (1\text{-}48)$$

Para $\varepsilon = 0$, tem-se a solução de aproximação linear,

$$L(x_0) = y \qquad (1\text{-}49)$$

ou ainda,

$$x = T(y) \equiv x_0\ . \qquad (1\text{-}50)$$

Consideremos agora que a solução da equação(1-48) possa ser expandida em uma série de potências em torno de $\varepsilon = 0$, isto é,

$$x = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \varepsilon^3 x_3 + \ldots.. \qquad (1\text{-}51)$$

sendo os termos x_i independentes do parâmetro ε.

A equação (1-48) admite portanto a seguinte forma:

$$L(x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \varepsilon^3 x_3 + \ldots..) = y$$
$$+ \varepsilon\, N(x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \varepsilon^3 x_3 + \ldots. \qquad (1\text{-}52)$$

e assumindo N(x) analítica em x, temos

$$N\ (x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \varepsilon^3 x_3 + \ldots\ ) =$$
$$= N(x_0) + \varepsilon N_1(x_0,x_1) + \varepsilon^2\ N_2(x_0,x_1,x_2)$$
$$+ \varepsilon^3 N_3(x_0,x_1,x_2,x_3) + \ldots.. \qquad (1\text{-}53)$$

sendo que o coeficiente de ε^k depende unicamente das variáveis x_0 ,

x_1, $x_2,\ldots,x_k$.

Combinando-se as expressões (1-53) e (1-54) e igualando-se os coeficientes de mesma potência de ε, obtemos um sistema infinito de equações como segue

$$
\begin{aligned}
L(x_0) &= y \\
L(x_1) &= N(x_0) \\
L(x_2) &= N_1(x_0,x_2) \\
L(x_3) &= N_2(x_0,x_1,x_2) \\
&\vdots \\
L(x_{k+1}) &= N_k(x_0,x_1,x_2,\ldots,x_k).
\end{aligned}
$$

É importante notar que esse sistema infinito de equações pode ser resolvido recursivamente, isto é, a determinação de x_k envolve o conhecimento de x_n para $0 \leq n \leq k-1$.

CAPITULO II

FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

EQUAÇÕES DAS COMPONENTES DA VELOCIDADE E SOLUÇÕES

2.1 - FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Consideremos um escoamento permanente de um fluido viscoso newtoniano que ocupa o espaço entre dois discos infinitos coaxiais giratórios.

O sistema de coordenadas usado será o sistema de coordenadas cilíndricas polares (r, θ, z).

As componentes de velocidade serão (u, v, w) nas direções crescentes de r, θ e z, respectivamente. (Ω) será a velocidade angular do disco inferior, (no plano $z = 0$) e $(s\Omega)$ será a velocidade angular do disco superior, (no plano $z = d$), sendo s uma constante qualquer que indicará o sentido do movimento do disco superior.

Passemos agora, a descrever as equações que regem o escoamento deste fluido a fim de obtermos a temperatura do fluido quando os discos estão submetidos a certas condições térmicas, considerando três situações distintas:

a) quando os discos rodam no mesmo sentido,

b) quando o disco superior mantém-se parado, $(s = 0)$

e

c) quando os discos rodam em sentido contrário.

2.2 - EQUAÇÕES DO PROBLEMA

Para descrever o escoamento do fluido utilizaremos as equações da continuidade (1-7)e do movimento (1-20),(1-21) (1-22) e (1-23), deduzidas no capítulo anterior, escritas agora em coordenadas cilíndricas polares. Com estas equações teremos as componentes de velocidade u, v, w que posteriormente serão necessárias para a obtenção da temperatura.

São elas:

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{2-1}$$

$$\rho\left[u\frac{\partial u}{\partial r} + w\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{v^2}{r}\right] = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu\left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{u}{r^2}\right] \tag{2-2}$$

$$\rho\left[u\frac{\partial v}{\partial r} + w\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{uv}{r}\right] = \mu\left[\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{v}{r^2}\right] \tag{2-3}$$

$$\rho\left[u\frac{\partial w}{\partial r} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right] = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu\left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right]. \tag{2-4}$$

As condições de contorno do problema são:

$$\left.\begin{array}{llll} u = 0 & v = r\Omega & w = 0 & \text{para } z = 0 \\ u = 0 & v = sr\Omega & w = 0 & \text{para } z = d \end{array}\right\} \qquad (2-5)$$

As quatro equações acima formam um conjunto de equações diferenciais parciais não lineares envolvendo dez incógnitas: seis componentes do tensor de tensão, três componentes da velocidade e a pressão isotrônica.

Para resolvê-las usaremos as seguintes transformações de variáveis com o objetivo de adimensionalizá-las e reduzi-las a um outro conjunto de equações. Estas relações satisfazem a equação da continuidade,(2-1):

$$\left.\begin{array}{l} u = r\ \Omega F(\xi)\ , \\ v = r\ \Omega G(\zeta)\ , \\ w = d\ \Omega H(\xi)\ , \end{array}\right\} \qquad (2-6)$$

onde $\xi = \dfrac{z}{d}$.

Derivando as relações acima em relação a r,ζ e substituindo-as nas equações (2-1),(2-2),(2-3),(2-4) e (2-5) obtemos

de (2-1) :

$$F = -\frac{H'}{2}\ , \qquad (2-7)$$

de (2-3) :

$$G'' = R(H'G-G'H) = 0\ , \qquad (2-8)$$

e eliminando a pressão

de (2-2) e (2-4):

$$H^{IV} - R\,(H'''H - 4GG') = 0 \qquad (2\text{-}9)$$

onde $R = \dfrac{\rho\Omega d^2}{\mu}$ é o número de Reynolds.

Este novo conjunto de equações diferenciais ordinárias não lineares será resolvido com as seguintes condições de contorno:

$$\left.\begin{array}{ll} G(0) = s \quad , & G(1) = 1 \\ H(0) = 0 \quad , & H(1) = 0 \\ H'(0) = 0 \quad , & H'(1) = 0 \end{array}\right\} \qquad (2\text{-}10)$$

Para resolver o sistema das equações (2-8)e(2-9), assumimos o número de Reynolds R menor que 1. Assim, podemos usar a teoria de perturbações regulares, expandindo as funções G e H em série de potências de R. Isto é;

$$\left.\begin{array}{l} G(\xi) = G_0(\xi) + RG_1(\xi) + R^2G_2(\xi) + \ldots\ldots. \\ H(\xi) = H_0(\xi) + RH_1(\xi) + R^2H_2(\xi) + \ldots\ldots. \end{array}\right\}.$$

Substituindo estas funções G e H nas equações (2-8),(2-9) e (2-10) teremos equações de várias ordens escritas abaixo:

de (2-8):

$$\left.\begin{array}{l} G_0''(\xi) = 0 \\ G_1''(\xi) + H_0'(\xi)G_0(\xi) + G_0'(\xi)\,H_0(\xi) = 0 \\ G_2''(\xi) - H_0'(\xi)G_1(\xi) - H_1'(\xi)G_0(\xi) + H_0(\xi)G_1'(\xi) \\ \qquad + H_1(\xi)G_0'(\xi) = 0 \end{array}\right\} \qquad (2\text{-}11)$$

e de (2-9)

$$\left.\begin{aligned}
&H_0^{iv}(\xi) = 0\\
&H_1^{iv}(\xi) - \left[H_0'''(\xi)H_0(\xi) + 4G_0(\xi)G_0'(\xi)\right] = 0\\
&H_2^{iv}(\xi) - \left[H_0'''(\xi)H_1(\xi) + H_1'''(\xi)H_0 + 4G_0(\xi)G_1'(\xi)\right.\\
&\qquad\left. + 4G_1(\xi)G_0'(\xi)\right] = 0 \;,
\end{aligned}\right\} \qquad (2\text{-}12)$$

sujeitas às condições de contorno:

$$\left.\begin{aligned}
&G_0(0) = s \;;\; G_0(1) = 1 \;;\; G_n(0) = G_n(1) = 0 \;; \quad \text{para } n \geq 1\\
\text{e}\quad &H_n(0) = H_n(1) = 0, \quad H_n'(1) = 0 \qquad \text{para } n \geq 0 \;.
\end{aligned}\right\} \qquad (2\text{-}13)$$

2.3 - SOLUÇÕES

As soluções obtidas para as equações de ordem zero são

$$G_0(\xi) = (1-s)\,\xi^2 + s \;, \qquad (2\text{-}14)$$

$$H_0(\xi) = 0 \qquad (2\text{-}15)$$

e é facilmente verificável que estas soluções satisfazem às condições de contorno

$$\left.\begin{aligned}
&G_0(0) = s \quad , \quad G_0(1) = 1\\
\text{e}\quad &H_0(0) = H_0(1) = 0 \quad , \; H_0'(0) = H_0'(1) = 0 \;.
\end{aligned}\right\} \qquad (2\text{-}16)$$

Fazendo-se uso das funções (2-14) e (2-15) juntamente com as condições de contorno:

$$G_1(0) = G_1(1) = 0$$

e

$$H_1(0) = H_1(1) = 0 \ , \ H_1'(0) = H_1'(1) = 0 \qquad (2\text{-}17)$$

obtemos as seguintes soluções para as equações de ordem um,

$$G_1(\xi) = 0 \quad , \qquad (2\text{-}18)$$

$$H_1(\xi) = a_1\,\xi^5 + a_2\,\xi^4 + a_3\,\xi^3 + a_4\,\xi^2 \ . \qquad (2\text{-}19)$$

Para a obtenção das soluções das equações de ordem 2, utilizaremos (2-14),(2-15),(2-18) e (2-19) com o auxílio das condições de contorno

$$G_2(0) = G_2(1) = 0 \ , \qquad (2\text{-}20)$$

$$H_2(0) = H_2(1) = 0 \ , \ H_2'(0) = H_2'(1) = 0$$

teremos

$$G_2(\xi) = b_1\,\xi^7 + b_2\,\xi^6 + b_3\,\xi^5 + b_4\,\xi^4 + b_5\,\xi^3 + b_6\,\xi \ , \qquad (2\text{-}21)$$

$$H_2(\xi) = 0 \ . \qquad (2\text{-}22)$$

E com as soluções (2-14),(2-5),(2-17),(2-18),(2-21) e (2-22) teremos as funções G e H ,

$$G(\xi) = (1-s)\,\xi^2 + s + R^2\left[b_1\,\xi^7 + b_2\,\xi^6 + b_3\,\xi^5 + b_4\,\xi^4 + b_5\,\xi^3 + b_6\xi\right]$$

e (2-23)

$$H(\xi) = R\left[a_1\,\xi^5 + a_2\,\xi^4 + a_3\,\xi^3 + a_4\,\xi^2\right] \ , \qquad (2\text{-}24)$$

obtendo portanto, as componentes de velocidade, equações (2-6)

$$u = -\,r\,\Omega\frac{R}{2}\left[5a_1\,\xi^4 + 4a_2\,\xi^3 + 3a_3\,\xi^2 + 2a_4\xi\right] , \qquad (2\text{-}25)$$

$$v = r\Omega \left\{ \left[(1-s)\xi^2 + s \right] + R^2 \left[b_1\xi^7 + b_2\xi^6 + b_3\xi^5 + b_4\xi^4 + b_5\xi^3 + b_6 \right] \right\} \qquad (2\text{-}26)$$

e

$$w = rdR \left[a_1\xi^5 + a_2\xi^4 + a_3\xi^3 + a_4\xi^2 \right] . \qquad (2\text{-}27)$$

Os coeficientes a_i, b_i,($i = 1,6$) estão dados no Apêndice B.

CAPÍTULO III

DISTRIBUIÇÃO DE TEMPERATURA EM UM ESCOAMENTO PERMANENTE DE FLUIDOS NEWTONIANOS NA AUSENCIA DE FORÇAS EXTERNAS

Neste capítulo estudaremos o problema da transferência de calor em um escoamento permanente de um fluido newtoniano sem a aplicação de forças externas, quando os discos estão submetidos a dois tipos de condições térmicas.

3.1. 1º Caso

Vamos considerar neste caso, que o disco inferior (plano $z = 0$), está mantido a uma temperatura constante $T = T_1$ e o disco superior, (plano $z = d$), a uma temperatura constante $T = T_2$. Isto é,

$$T = T_1 \text{ para } z = 0 \quad e \quad T = T_2 \text{ para } z = d. \tag{3-1}$$

Consideremos a equação da energia (1-46), escrita agora em coordenadas cilíndricas polares,

$$\rho c_p (u \frac{\partial T}{r} + w \frac{\partial T}{z}) = K\Delta^2 T + \mu\Phi \ , \tag{3-2}$$

onde

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{T}{r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \ ,$$

e

$$\phi = 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{u}{r}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 \right].$$

Introduzindo-se as variáveis adimensionais

$$T^* = \frac{T-T_1}{T_2-T_1} \quad , \tag{3-3}$$

$$\bar{r} = \frac{r}{d} \tag{3-4}$$

e

$$\xi = \frac{z}{d} \quad , \tag{3-5}$$

a equação (3-2) torna-se

$$R \left[- \bar{r} \frac{H'(\xi)}{2} \frac{\partial T^*}{\partial \bar{r}} + H(\xi) \frac{\partial T^*}{\partial \xi} \right]$$

$$= \frac{1}{\sigma} \left[\frac{\partial^2 T^*}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial T^*}{\partial \bar{r}} + \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} \right]$$

$$+ E \left\{ 3 \left(H'(\xi)\right)^2 + \bar{r}^2 \left[\frac{1}{4} \left(H''(\xi)\right)^2 + \left(G'(\xi)\right)^2 \right] \right\} \tag{A-1}$$

Desde que a equação acima depende somente de $\bar{r}$ e ξ , vamos escrever sua solução como

$$T^*(\bar{r},\xi) = \bar{T}(\xi) + \bar{r}^2 \tilde{T}(\xi) \quad , \tag{3.6}$$

sujeita às seguintes condições de contorno

$$\left.\begin{array}{l} T^*(0) = 0 \\ \text{e} \\ T^*(1) = 0. \end{array}\right\} \qquad (3\text{-}7)$$

Derivando-se a equação (3-6) em relação à $\bar{r}$ e ξ, e substituindo na equação (A-1), obtemos

$$R\sigma\left[-\bar{r}^2 H'(\xi)\,\tilde{T}(\xi) + H(\xi)\left(\tilde{T}'(\xi) + r^2\tilde{T}'(\xi)\right)\right]$$
$$= 4\tilde{T}(\xi) + \bar{T}''(\xi) + \bar{r}^2\,\tilde{T}''(\xi) +$$
$$+ \quad E\tau\left\{3(H'(\xi))^2 + \bar{r}^2\left[\frac{1}{4}(H''(\xi))^2 + (G'(\xi))^2\right]\right\} \qquad (3\text{-}8)$$

ou ainda,

$$\bar{r}^2\left[-\tilde{T}''(\xi) - \sigma RH'(\xi)\,\tilde{T}(\xi) + \sigma RH(\xi)\,\tilde{T}'(\xi) - E\sigma\right.$$
$$\left.\cdot\left(\frac{(H'(\xi))^2}{4} + (G'(\xi))^2\right)\right] - \bar{T}''(\xi) + R\sigma H(\xi)\bar{T}'(\xi)$$
$$+ \quad 3E\sigma\,(H'(\xi))^2 - 4\tilde{T}(\xi) = 0. \qquad (3\text{-}9)$$

Igualando-se os termos de mesma potência, temos

$$\tilde{T}''(\xi) - R\sigma H(\xi)\tilde{T}'(\xi) + R\sigma H'(\xi)\,\tilde{T}(\xi)$$
$$+ E\sigma\left[\frac{(H''(\xi))^2}{4} + (G'(\xi))^2\right] = 0. \qquad (3\text{-}10)$$

e

$$\bar{T}''(\xi) - R\sigma H(\xi)\,\bar{T}'(\xi) + 3E\sigma(H'(\xi))^2 + 4\tilde{T}(\xi) = 0. \qquad (3\text{-}11)$$

As equações (3-10) e (3-11) serão agora resolvidas com as seguintes condições de contorno:

$$\left.\begin{array}{lll} \tilde{T}(0) = 0 & , & \tilde{T}(1) = 0 \\ \bar{T}(0) = 0 & , & \bar{T}(1) = 1 \end{array}\right\} \qquad (3\text{-}12)$$

O conjunto de equações (3-10) e (3-11), é formado por duas equações diferenciais não-lineares e para resolvê-lo utilizaremos a teoria de perturbações regulares. Escrevemos as funções $\tilde{T}$ e $\bar{T}$ em série de potências de R, isto é:

$$\left.\begin{array}{l} \tilde{T}(\xi) = \tilde{T}_0(\xi) + R\tilde{T}_1(\xi) + R^2\tilde{T}_2(\xi) + \ldots. \\ \text{e} \\ \bar{T}(\xi) = \bar{T}_0(\xi) + R\bar{T}_1(\xi) + R^2\bar{T}_2(\xi) + \ldots. \end{array}\right\} \qquad (3\text{-}13)$$

Substituindo as expressões (3-13) juntamente com as funções (2-23),(2-24)

$$G(\xi) = G_0(\xi) + R^2 G_2(\xi) ,$$

$$H(\xi) = RH_1(\xi) ,$$

introduzidas no capítulo II, em (3-10) e (3-11) e nas condições de contorno (3-12), obtemos um conjunto de equações diferenciais ordinárias lineares de várias ordens. De (3-10) temos

$$\left.\begin{array}{l} \tilde{T}_0''(\xi) + E\sigma\,(G_0'(\xi))^2 = 0 , \\ \tilde{T}_1''(\xi) = 0 , \\ \tilde{T}_2''(\xi) - \sigma H_1(\xi)\,\tilde{T}_0'(\xi) + \sigma H_1'(\xi)\,\tilde{T}_0(\xi) \\ \quad + E\sigma\left[\frac{1}{4}\,(H_1''(\xi))^2 + 2\,G_0'(\xi)G_2'(\xi)\right] = 0 , \end{array}\right\} \qquad (3\text{-}14)$$

de (3-11) :

$$
\left.
\begin{aligned}
&\bar{T}_0''(\xi) + 4\,\tilde{T}_0(\xi) = 0 \quad , \\
&\bar{T}_1''(\xi) + 4\,\tilde{T}_1(\xi) = 0 \\
\text{e} \qquad &\bar{T}_2''(\xi) - \sigma H_1(\xi)\,\bar{T}_0'(\xi) + 3\,E\sigma\,(H'(\xi))^2 + 4\bar{T}_2(\xi) = 0
\end{aligned}
\right\} \qquad (3\text{-}15)
$$

Estes novos conjuntos terão que satisfazer às seguintes condições de contorno:

$$
\left.
\begin{aligned}
&\tilde{T}_n(0) = 0 \quad , \quad \tilde{T}_n(1) = 0 \quad \text{para } n \geq 0 \\
\text{e} \qquad & \\
&\bar{T}_0(0) = 0 \quad , \; \bar{T}_0(1) = 1 \;, \; \bar{T}_n(0) = \bar{T}_n(1) = 0 \text{ para } n \geq 1.
\end{aligned}
\right\} \qquad (3\text{-}16)
$$

Vamos agora às soluções dessas equações.

Para as equações representando a aproximação de ordem zero, temos as seguintes soluções:

$$
\tilde{T}_0(\xi) = \frac{E\sigma}{2}\,(1-s)^2\,(\xi - \xi^2) \quad , \qquad (3\text{-}17)
$$

$$
\bar{T}_0(\xi) = \xi + \frac{E\,\sigma\,(1-s)^2}{6}\,(\xi - 2\,\xi^3 + \xi^4) \quad , \qquad (3\text{-}18)
$$

que satisfazem às seguintes condições de contorno.

$$
\left.
\begin{aligned}
&\tilde{T}_0(0) = 0 \quad , \quad \tilde{T}_0(1) = 0 \\
\text{e} \qquad & \\
&\bar{T}_0(0) = 0 \quad , \quad \bar{T}_0(1) = 0
\end{aligned}
\right\} \qquad (3\text{-}19)
$$

Utilizando-se as equações (3-17) e (3-18) juntamente com as condições de contorno

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{T}_1(0) = \tilde{T}_1(1) = 0 \\ \text{e} \\ &\bar{T}_1(0) = \bar{T}_1(1) = 0 , \end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}20)$$

deduzimos que as soluções das equações de ordem um são:

$$\tilde{T}_1(\xi) = 0 \qquad (3\text{-}21)$$

e

$$\bar{T}_1(\xi) = 0. \qquad (3\text{-}22)$$

A fim de obter-se as soluções das equações de ordem dois, utilizamos as equações (3-17),(3-18),(3-22),(3-21) com as condições de contorno

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{T}_2(0) = \tilde{T}_2(1) = 0, \\ &\bar{T}_2(1) = \bar{T}_2(1) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}23)$$

Estas soluções podem ser expressas nas seguintes formas polinomiais :

$$\tilde{T}_2(\xi) = c_1\ \xi^8 + c_2\ \xi^7 + c_3\ \xi^6 + c_4\ \xi^5 + c_5\ \xi^4 + c_6\ \xi^3 + c_7\ \xi^2 + \\ + c_8\ \xi, \qquad (3\text{-}24)$$

$$\bar{T}_2(\xi) = d_1\ \xi^{10} + d_2\ \xi^9 + d_3\ \xi^8 + d_4\ \xi^7 + d_5\ \xi^6$$
$$+ d_6\ \xi^5 + d_7\ \xi^4 + d_8\ \xi^3 + d_9 \xi, \qquad (3\text{-}25)$$

onde as expressões para os coeficientes c_i e d_i, ($i = 1,9$), são dados no apêndice B .

Substituindo-se as soluções de ordens zero, um e dois na expressão (3-13), funções $\tilde{T}$ e $\bar{T}$, temos

$$\tilde{T}(\xi) = \frac{E\sigma}{2}(1-s)^2(\xi-\xi^2) + R^2 \left[c_1\ \xi^8 + c_2\ \xi^7 + c_3\ \xi^6 + c_4\ \xi^5 + c_5\ \xi^4 + c_6\ \xi^3 + c_7\ \xi^2 + c_8 \xi\right] \qquad (3\text{-}26)$$

e

$$\bar{T}(\xi) = \frac{E\sigma}{6}(1-s)^2(\xi - 2\xi^3 + \xi^4) + R^2 \left[d_1\ \xi^{10} + d_2\ \xi^9 + d_3\ \xi^8 + d_4\ \xi^7 + d_5\ \xi^6 + d_6\ \xi^5 + d_7\ \xi^4 + d_8 \xi^3 + d_9\ \xi\right], \qquad (3\text{-}27)$$

obtendo, portanto, a solução final para a temperatura neste caso:

$$\boxed{T^*(\bar{r}, \xi) = + \frac{E\sigma}{6}(1-s)^2(\xi - 2\xi^3 + \xi^4) + R^2 \left[d_1\xi^{10} + d_2\xi^9 + d_3\xi^8 + d_4\xi^7 + d_5\xi^6 + d_6\xi^5 + d_7\xi^4 + d_8\xi^3 + d_9\ \xi\right] + \bar{r}^2 \left\{\frac{E\sigma}{2}(1-s)^2(\xi-\xi^2) + R^2\left[c_1\ \xi^8 + c_2\xi^7 + c_3\xi^6 + c_4\xi^5 + c_5\xi^4 + c_6\xi^3 + c_7\xi^2 + c_8\xi\right]\right\}.}$$

(3-28)

3.2 - ANÁLISE DOS RESULTADOS.

Nas figuras 1,2,3, é mostrado o comportamento de T^* em função de ξ, para diferentes valores de $\bar{r}$ e do número de Reynolds, R , com os discos girando com diversas velocidades para números de Eckert e Prandtl fixos.

Convém relembrar que estes parâmetros são dados por

$$T^* = \frac{T - T_1}{T_2 - T_1} \; , \qquad \xi = \frac{z}{d} \qquad , \qquad \bar{r} = \frac{r}{d} \qquad ,$$

$$R = \frac{\rho \Omega d^2}{\mu} \qquad , \qquad \sigma = \frac{\mu c_p}{K} \qquad , \quad E = \frac{\Omega^2 d^2}{c_p (T_2 - T_1)}$$

e que em $z = 0$ localiza-se um disco que gira com velocidade angular Ω e em $z = d$, um outro disco com velocidade Ωs.

Na figura 1, para os valores de $\sigma = 0.5$, $E = 0.3$ e $\bar{r} = 0.5$ onde $\bar{r} = \frac{r}{d} = tg\theta$ e portanto, $\theta = 26.5^{\circ}$, o estudo do efeito da velocidade na distribuição de temperatura será feito para $s = 0$ (o disco superior parado), $s = -1,-4$ (disco superior girando uma e quatro vezes mais rápido, porém em sentido contrário) e $s = 4$ (o disco superior girando quatro vezes mais rápido e no mesmo sentido).

Vê-se nessa figura que para um mesmo número de Reynolds, à medida que se aumenta o módulo da velocidade angular do disco superior, a distribuição de temperatura, T^*, em função de ξ perde seu caráter linear, assumindo perfis quase parabólicos. Este efeito é mais pronunciado com o aumento do número de Reynolds.

Um aspecto interessante que pode ser observado é que para $s = 0, -1, -4$ e para $R = 0.4$ e 0.8, o máximo valor para T^* é obtido em $\xi = 1$, ou seja, sobre o disco superior. Isto não acontece quando $s = -4$, $R = 0.8$. Nota-se que neste caso, devido ao fato do disco superior estar girando com uma velocidade quatro vezes maior que o disco inferior, em sentido contrário, há um aumento e um deslocamento do máximo de T^* para o entorno do ponto $\xi = 0.8$.

Na Fig. 2, para $\bar{r} = 1.0$, $\theta = 45^o$, observa-se o mesmo tipo de comportamento de T^* com o aumento do módulo da velocidade do disco superior, ou seja, para $s = -4$ e $R = 0.8$, o máximo de T^* chega a deslocar-se até o ponto $\xi = 0.65$.

Na Fig. 3, para $\bar{r} = 2.0$, $\theta = 63^o$, verifica-se que o máximo de T^* assume o valor unitário somente quando o disco superior está parado, $(s = 0)$. Com o aumento do módulo de s, obtém-se o máximo de T^* cada vez mais próximo da meia distância entre os discos.

A seguir, mostra-se uma tabela onde comparamos os valores aproximados de T^*, para diversos valores de s, ou seja, para diferentes variações da velocidade angular, $s\Omega$, do disco superior $(z = d)$.

TABELA I

	Figura 1		Figura 2		Figura 3	
$\bar{r}$	0.5		1.0		2.0	
R	0.4	0.8	0.4	0.8	04.	0.8
s = 0	T^*_{max} = 1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
	ξ = 1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
s = -1	T^*_{max} = 1.0	1.0	1.0	1.0	1.02	1.10
	ξ = 1.0	1.0	1.0	1.0	0.9	0.75
s = 4	T^*_{max} = 1.0	1.0	1.0	1.01	1.32	1.60
	ξ 1.0	1.0	1.0	0.9	0.65	0.6
s = -4	T^*_{max} = 1.0	1.06	1.23	1.48	2.57	3.40
	ξ = 1.0	0.8	0.7	0.65	0.55	0.55
s = 5	T^*_{max} = 1.0	1.0	1.04	1.18	1.83	2.37
	ξ = 1.0	1.0	0.8	0.7	0.6	0.55
s = 10	T^*_{max} = 1.0	1.71	1.98	3.28	6.55	9.6
	ξ = 1.0	0.55	0.5	0.55	0.5	0.5
s = -10	T^*_{max} = 1.14	2.32	2.84	4.68	9.67	14.21
	ξ = 0.55	0.55	0.5	0.5	0.5	0.5
s = -15	T^*_{max} = 1.0	3.45	3.39	8.49	13.02	27.89
	ξ = 1.0	0.5	0.4	0.5	0.4	0.4

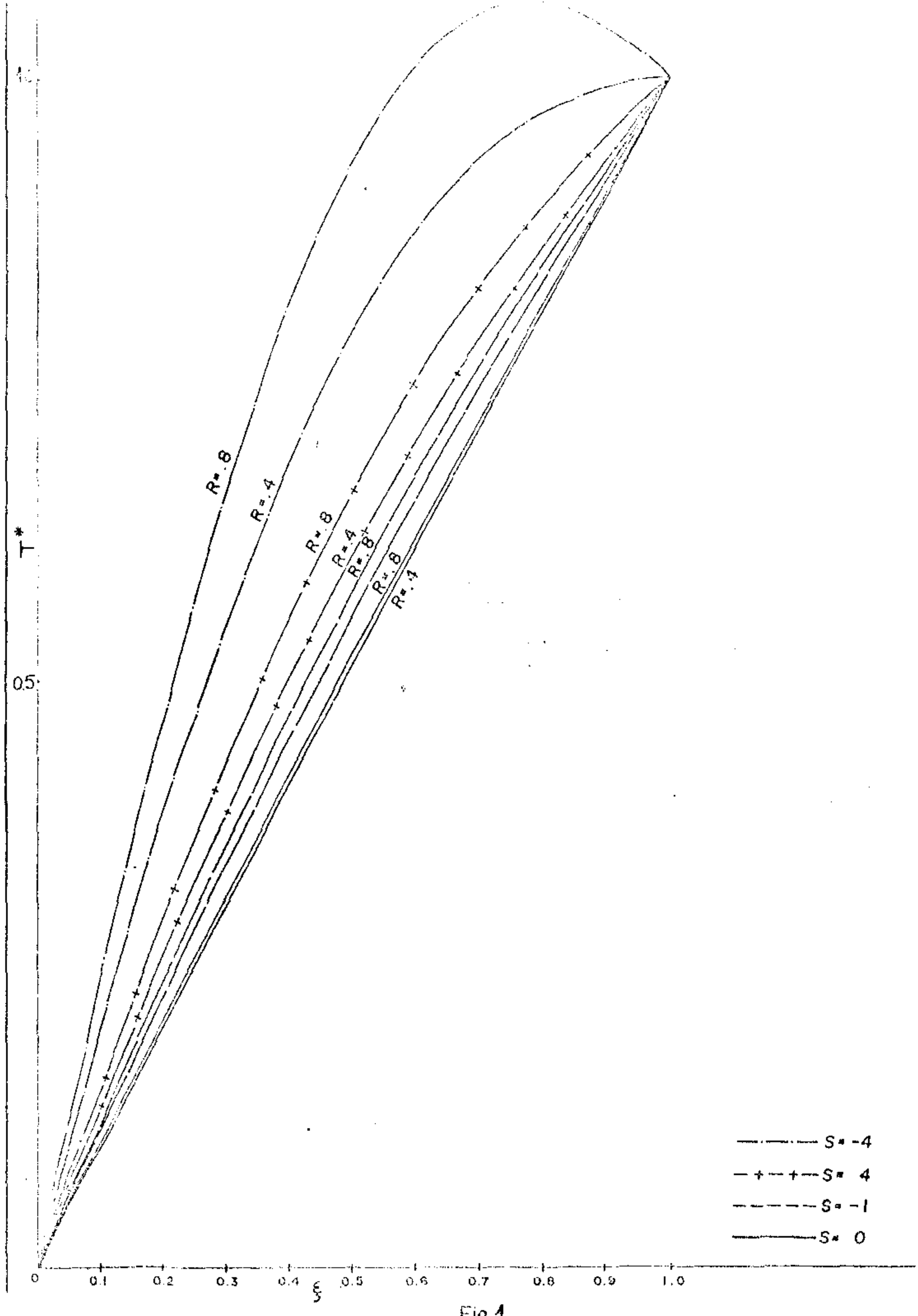
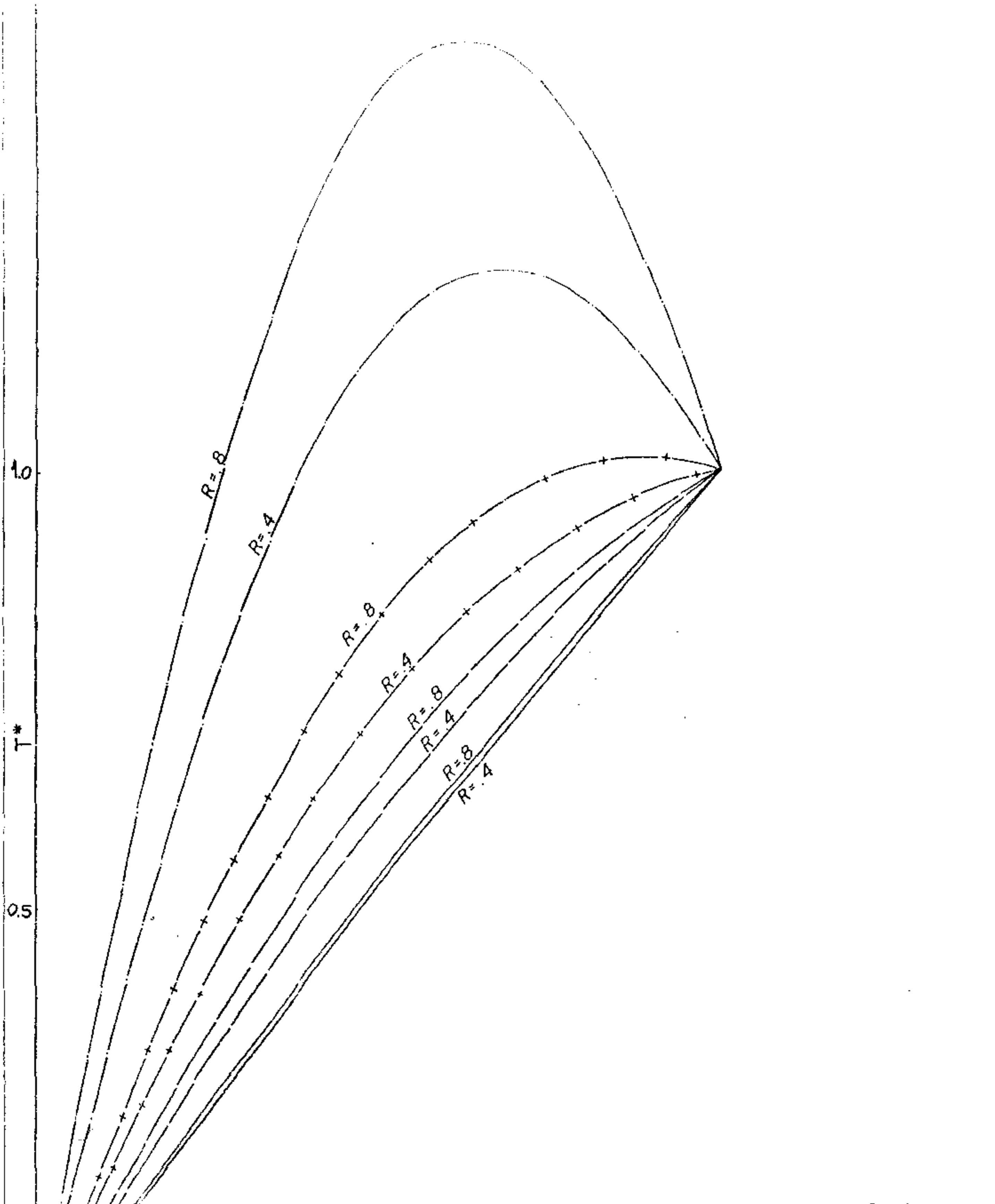


Fig.1



1.0
0.5
0
T*
R=.8
R=.4
R=.8
R=.4
R=.8
R=.4
R=.8
R=.4
0.1
0.2
0.3
0.4
ξ
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1.0
S = -4
S = 4
S = -1
S = 0

Fig. 2

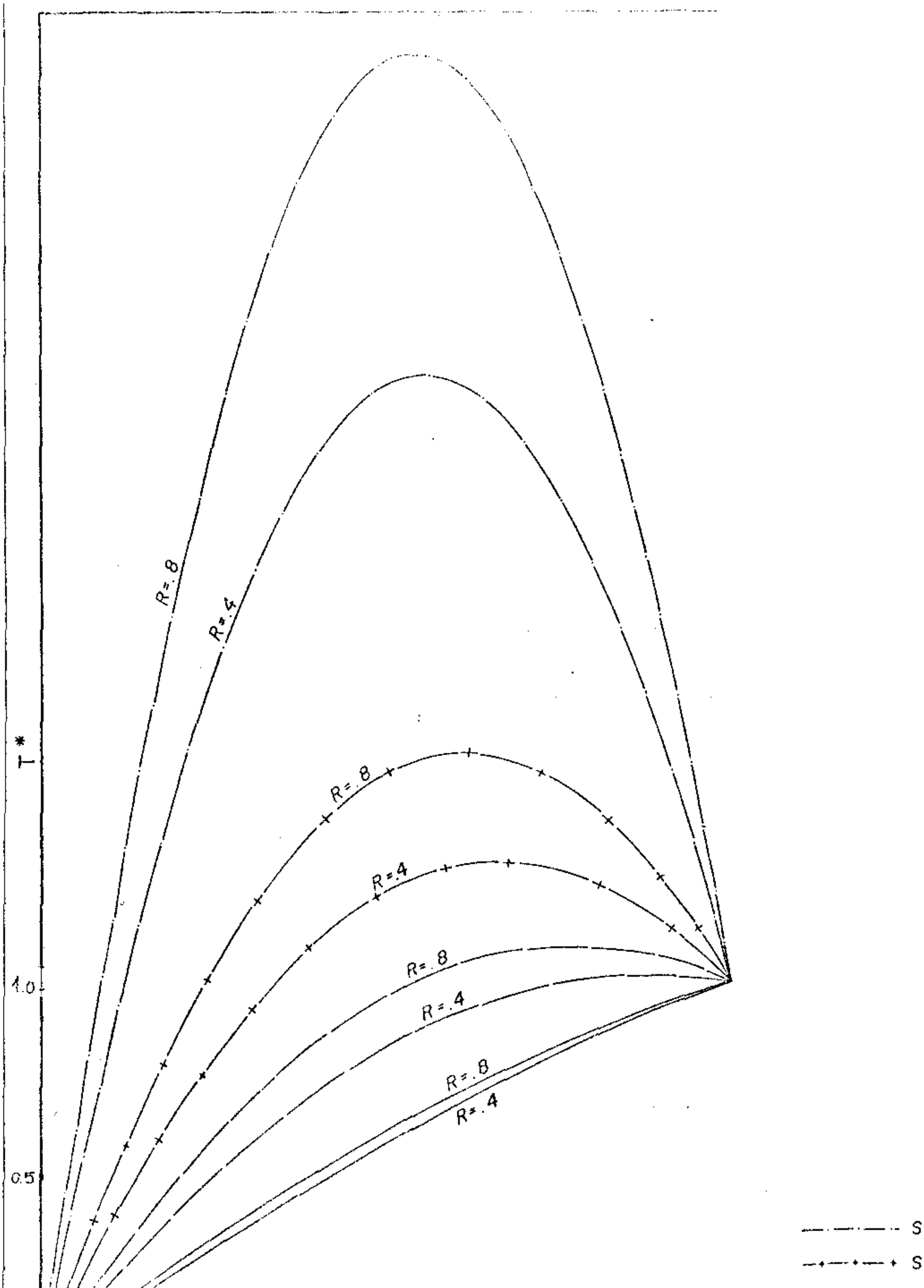


Fig.3

As figuras 4,5,6 diferem das primeiras por um aumento do número de Prandtl, σ =0.7, e um decréscimo do numero de Eckert,E = 0.3, variando portanto, o produto σE. Nota-se que com o aumento desse produto,σE = 0.21, a temperatura,T^* tem um crescimento mais acentuado em função de ξ.

Observa-se que para $\bar{r}$ crescente há um deslocamento dos máximos de T^* para a meia distância entre os discos.

Uma vez que os perfis de temperatura, T^*, são semelhantes aos das figuras anteriores, é mostrada apenas uma tabela referente aos máximos de T^* com o disco superior girando com diversas velocidades angulares, $s\Omega$.

TABELA II

	Figura 4		Figura 5		Figura 6	
$\bar{r}$	0.5		1.0		2.0	
R	0.4	0.8	0.4	0.8	0.4	0.8
s = 0	T^*_{max} = 1.0 ξ = 1.0	1.0 1.0	1.0 1.0	1.0 1.0	1.0 1.0	1.0 1.0
s = -1	T^*_{max} = 1.0 ξ = 1.0	1.0 1.0	1.0 1.0	1.0 1.0	1.10 0.75	1.35 0.65
s = 4	T^*_{max} = 1.0 ξ = 1.0	1.0 1.0	1.01 0.9	1.16 0.7	1.58 0.6	2.26 0.55
s = -4	T^*_{max} = 1.04 ξ = 0.8	1.29 0.65	1.45 0.65	2.07 0.6	3.38 0.55	5.31 0.5
s = 5	T^*_{max} = 1.0 ξ = 1.0	1.07 0.75	1.14 0.7	1.52 0.6	2.33 0.55	3.58 0.55
s = 10	T^*_{max} = 1.0 ξ = 1.0	2.47 0.55	2.56 0.5	5.12 0.5	8.94 0.45	15.76 0.5
s = -10	T^*_{max} = 1.37 ξ = 0.5	3.51 0.5	3.76 0.45	7.48 0.5	13.30 0.45	23.37 0.5
s = -15	T^*_{max} = 1.0 ξ 1.0	5.45 0.45	4.63 0.35	13.85 0.5	24.94 0.4	47.50 0.5

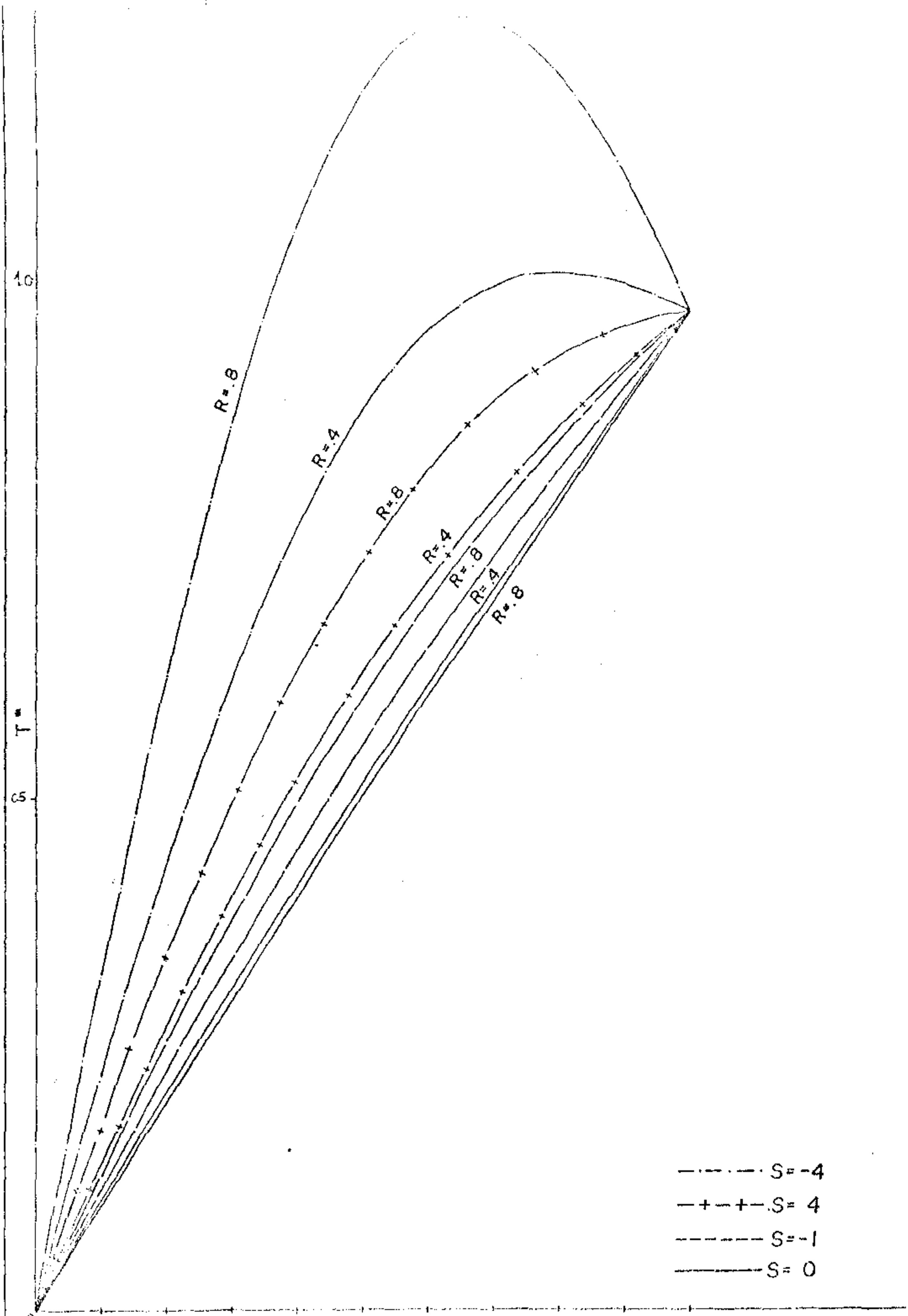
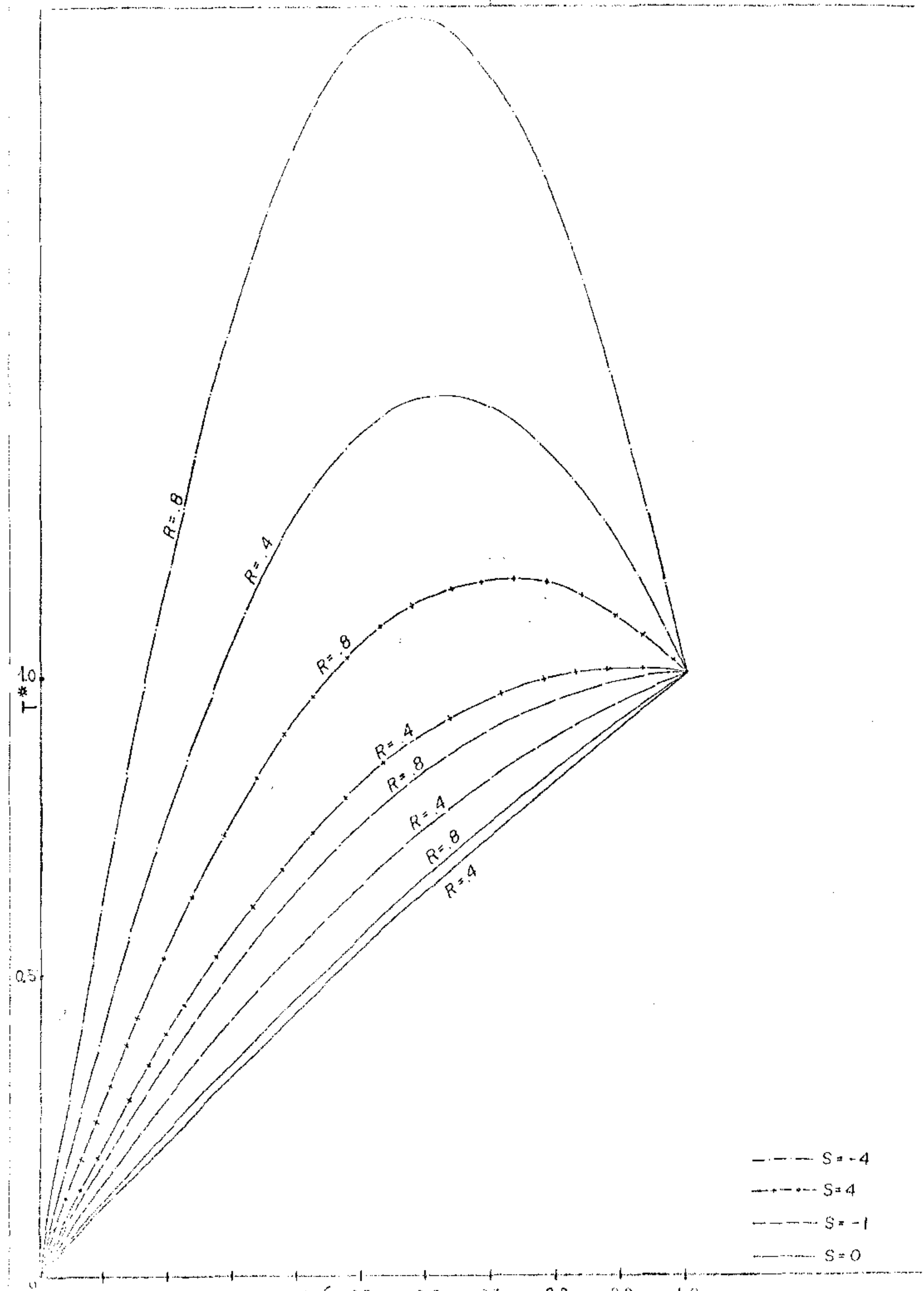
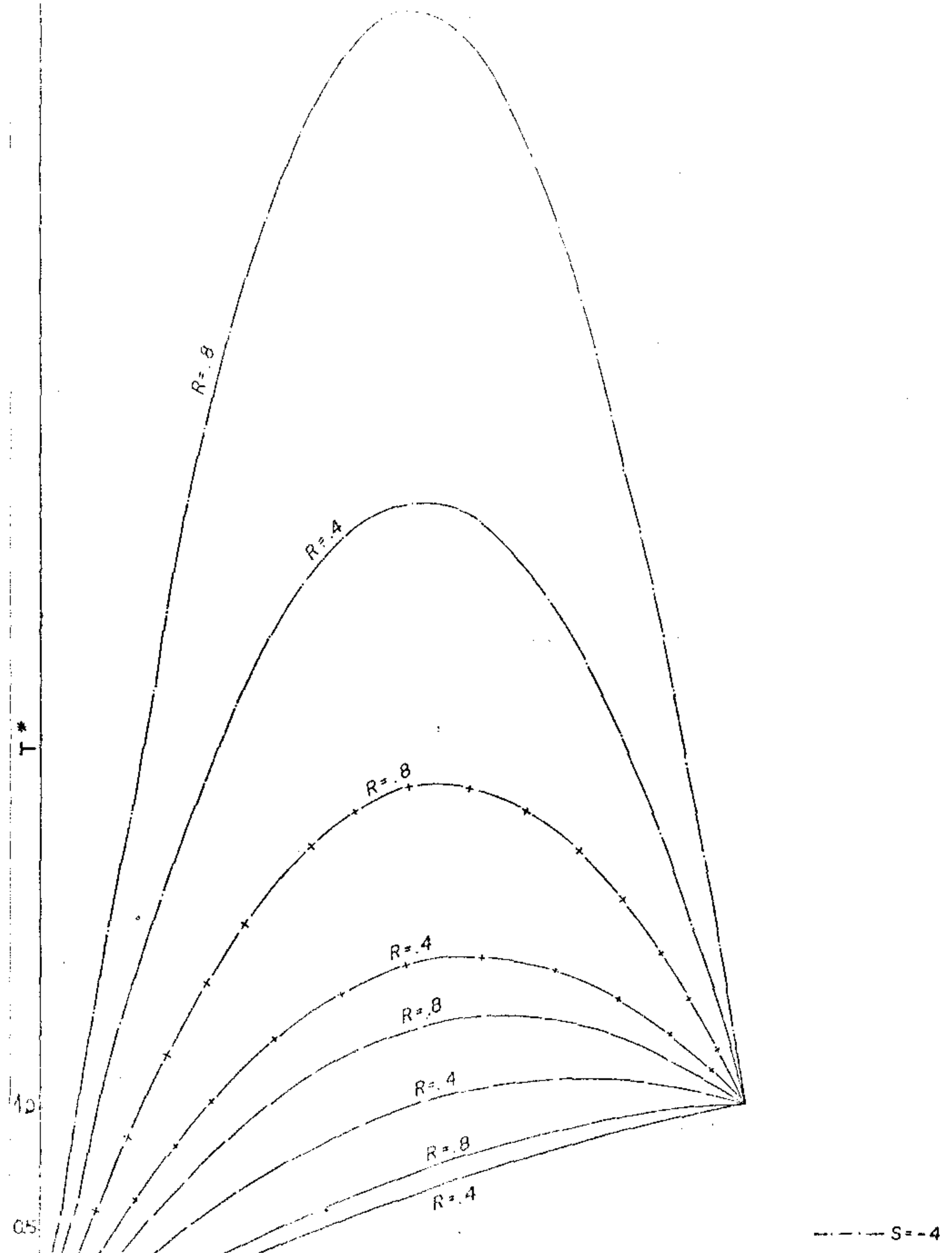


Fig. 4



R=.8
R=.4
R=.8
R=.4
R=.8
R=.4
R=.8
R=.4
1.0
0.5
T*
0
0.1
0.2
0.3
0.4
ξ
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1.0
S=-4
S=4
S=-1
S=0

Fig.5



T*
1.0
0.5
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1.0
ξ
R=.8
R=.4
R=.8
R=.4
R=.8
R=.4
R=.8
R=.4
S=-4
S=-4
S=-1
S=0

Fig. 6

3.3 - 2º Caso

Neste caso, supomos que o disco inferior, situado no plano $z = 0$, será mantido a uma temperatura constante $T = T_1$ e o disco superior, no plano $z = d$, permanecerá têrmicamente isolado. Isto é,

$$T = T_1 \text{ para } z = 0 \quad e \quad \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \text{ para } z = d\,. \tag{3-29}$$

Assumiremos que a solução para a temperatura neste problema será como no caso 1,

$$T^*(r,\xi) = \bar{T}(\xi) + \bar{r}^2\, \bar{\bar{T}}(\xi) \quad , \tag{3-6}$$

submetidas agora às condições de contorno,

$$\left.\begin{aligned} &T^*(0) = 0 \\ e \quad & \\ &T^{*\prime}(1) = 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{3-30}$$

Os conjuntos de equações a serem resolvidas aqui, serão os mesmos da seção (3.1), conjuntos(3-14) (3-15), sujeitas às seguintes condições de contôrno:

$$\left.\begin{aligned} &\bar{\bar{T}}_n(0) = 0 \quad , \bar{\bar{T}}_n'(1) = 0 \quad \text{para } n \geq 0 \\ e \quad & \\ &\bar{T}_n(0) = 0 \quad , \bar{T}_n'(1) = 0 \quad \text{para } n \geq 0 \end{aligned}\right\} \tag{3-31}$$

Obtêm-se então como soluções para as equações de ordens menores ou iguais a dois, as expressões

$$\tilde{T}_0(\xi) = \frac{E\sigma}{2}(1-s)^2(2\xi - \xi^2) \qquad (3\text{-}32)$$

e

$$\bar{T}_0(\xi) = \frac{1}{3} E\sigma (1-s)^2 (\frac{1}{2}\xi^3 - 2\xi^2 + 4) \quad , \qquad (3\text{-}33)$$

sujeitas às seguintes condições de contorno:

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{T}_0(0) = \tilde{T}_0'(1) = 0 \\ e \quad & \\ &\bar{T}_0(0) = \bar{T}_0'(1) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}34)$$

Resulta então que as soluções de ordem um são:

$$\tilde{T}_1(\xi) = 0 \qquad (3\text{-}35)$$

e

$$\bar{T}_1(\xi) = 0, \qquad (3\text{-}36)$$

submetidas às condições de contorno

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{T}_1(0) = \tilde{T}_1'(1) = 0 \\ e \quad & \\ &\bar{T}_1(0) = \bar{T}_1'(1) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}37)$$

Dessa forma, para as equações de ordem dois , as soluções obtidas se escrevem como:

$$\tilde{T}_2(\xi) = e_1 \xi^8 + e_2\xi^7 + e_3\xi^6 + e_4\xi^5 + e_5\xi^4 + e_6\xi^3 + e_7 \xi^2 + e_8 \xi \ , \qquad (3\text{-}38)$$

$$\bar{T}_2(\xi) = f_1\xi^{10} + f_2\xi^9 + f_3\xi^8 + f_4\xi^7 + f_5\xi^6 + f_6\xi^5 +$$

$$+ f_7\xi^4 + f_8\xi^3 + f_9\xi \qquad , \qquad (3\text{-}39)$$

onde os coeficientes e_i e f_i, $(i = 1,9)$, são dados no apêndice A.

As equações (3-38) e (3-39) satisfazem as seguintes condições de contorno:

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{T}_2(0) = \tilde{T}_2'(1) = 0 \\ \text{e} \quad & \\ &\bar{T}_2(0) = \bar{T}_2'(1) = 0 \ . \end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}40)$$

Substituindo as soluções de ordens zero, um e dois na expressão (3-13), temos

$$\tilde{T}(\xi) = \frac{E\sigma}{2}(1-s)^2(2\xi - \xi^2) + R^2\Big[e_1\xi^8 + e_2\xi^7 + e_3\xi^6$$

$$+ e_4\xi^5 + e_5\xi^4 + e_6\xi^3 + e_7\xi^2 + e_8\xi\Big] \qquad (3\text{-}41)$$

e

$$\bar{T}(\xi) = \frac{1}{3}E\sigma\,(1-s)^2\left[\frac{1}{2}\xi^3 - 2\xi^2 + 4\right] + R^2\Big[f_1\xi^{10} + f_2\xi^9$$

$$+ f_3\xi^8 + f_4\xi^7 + f_5\xi^6 + f_6\xi^5 + f_7\xi^4 + f_8\xi^3 + f_9\xi\Big]. \qquad (3\text{-}42)$$

Logo, a equação para a temperatura T^* , equação (3-6) neste 2º Caso torna-se

$$\boxed{\begin{aligned} T^*(\bar{r},\xi) &= \tfrac{1}{3}E\sigma\,(1-s)^2\left[\tfrac{1}{2}\,\xi^3-2\xi^2+4\right] + R^2\left[f_1\xi^{10}+f_2\xi^9\right.\\ &\quad \left.+ f_3\xi^8+f_4\xi^7+f_5\xi^6+f_6\xi^5+f_7\xi^4+f_8\xi^3+f_9\xi\right]\\ &\quad + \bar{r}^2\left\{\frac{E\sigma}{2}\,(1-s)^2\,(2\xi^2-\xi) + R^2\left[e_1\xi^8+e_2\xi^7\right.\right.\\ &\quad \left.\left.+ e_3\xi^6+e_4\xi^5+e_5\xi^4+e_6\xi^3+e_7\xi^2+e_8\xi\right]\right\} .\end{aligned}} \qquad (3\text{-}43)$$

3-4. DISCUSSÃO DOS RESULTADOS.

Nas figuras 7,8,9 têm-se as curvas da temperatura, T^*, para diferentes valores de $\bar{r}$, $R = 0.4,\ 0.8$, com o disco superior girando com diversas velocidades e termicamente isolado. O disco inferior gira com velocidade angular constante. São fixados os valores dos números de Prandtl e Eckert.

A Fig. 7 mostra o comportamento de T^* em função de ξ para $\bar{r} = 0.5$, $\theta = 26.5^o$, $E = 0.3$ e $\sigma = 0.5$. Aumentando-se o módulo da velocidade angular $|s\Omega|$, obtêm-se a temperatura crescente , sendo acentuado esse crescimento com o aumento do número de Reynolds.

Para $s = -4$, isto é, quando o disco superior gira quatro vezes mais rápido que o disco inferior, porém em sentido contrário, nota-se que para ambos os valores de R, 0.4 e 0.8, o crescimento de T^* é bastante pronunciado se comparado com os outros valores de s.

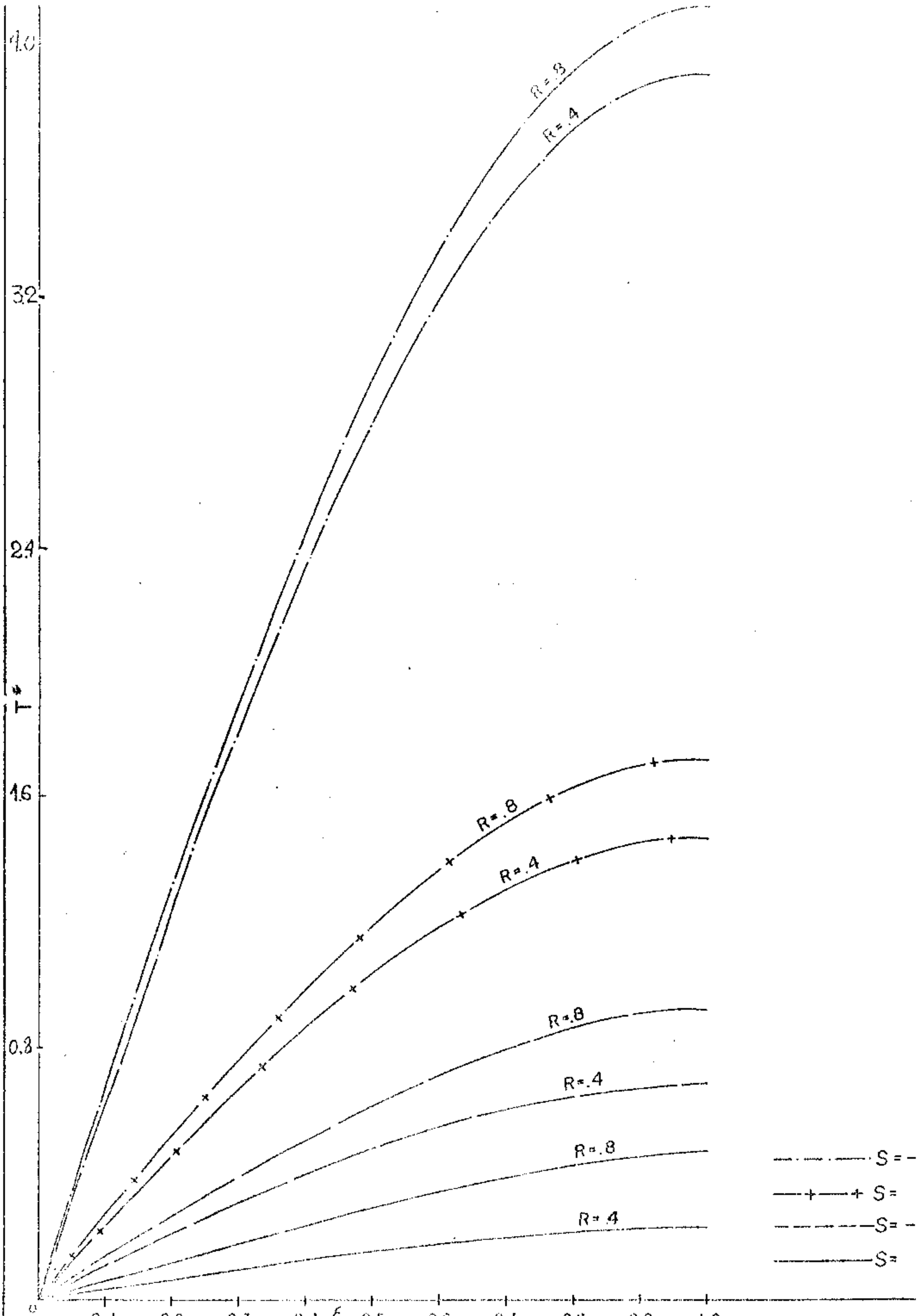
Na figura 8, para $\bar{r} = 1.0$ e portanto, $\theta = 45^{o}$ observa-se o tipo de comportamento semelhante para T^*, isto é, o crescimento de T^* depende do aumento do módulo da velocidade angular do disco superior. Esse crescimento é mais rápido à medida que aumenta-se o número de Reynolds.

A Fig. 9 apresenta as curvas de T^* para $\bar{r} = 2.0$, $\theta = 63^{o}$. Vê-se com esse aumento um tipo de comportamento similar, ou seja, variando-se o valor de $\bar{r}$, obtém-se a temperatura sempre crescente. Nota-se que os máximos de T^* assumem valores maiores para os diversos módulos da velocidade angular do disco superior.

A seguir é mostrada uma tabela que fornece todos os dados obtidos para os máximos de T^* para diversos valores de s e R. Tem-se mais dados sobre comportamento de T^* em função de ξ para s = 5.0, 10.0, -7.0, -8.75. Note que com o aumento do módulo de s, T^* diminui em relação a , chegando a obter o valor nulo para s = -8.87, R = 0.8.

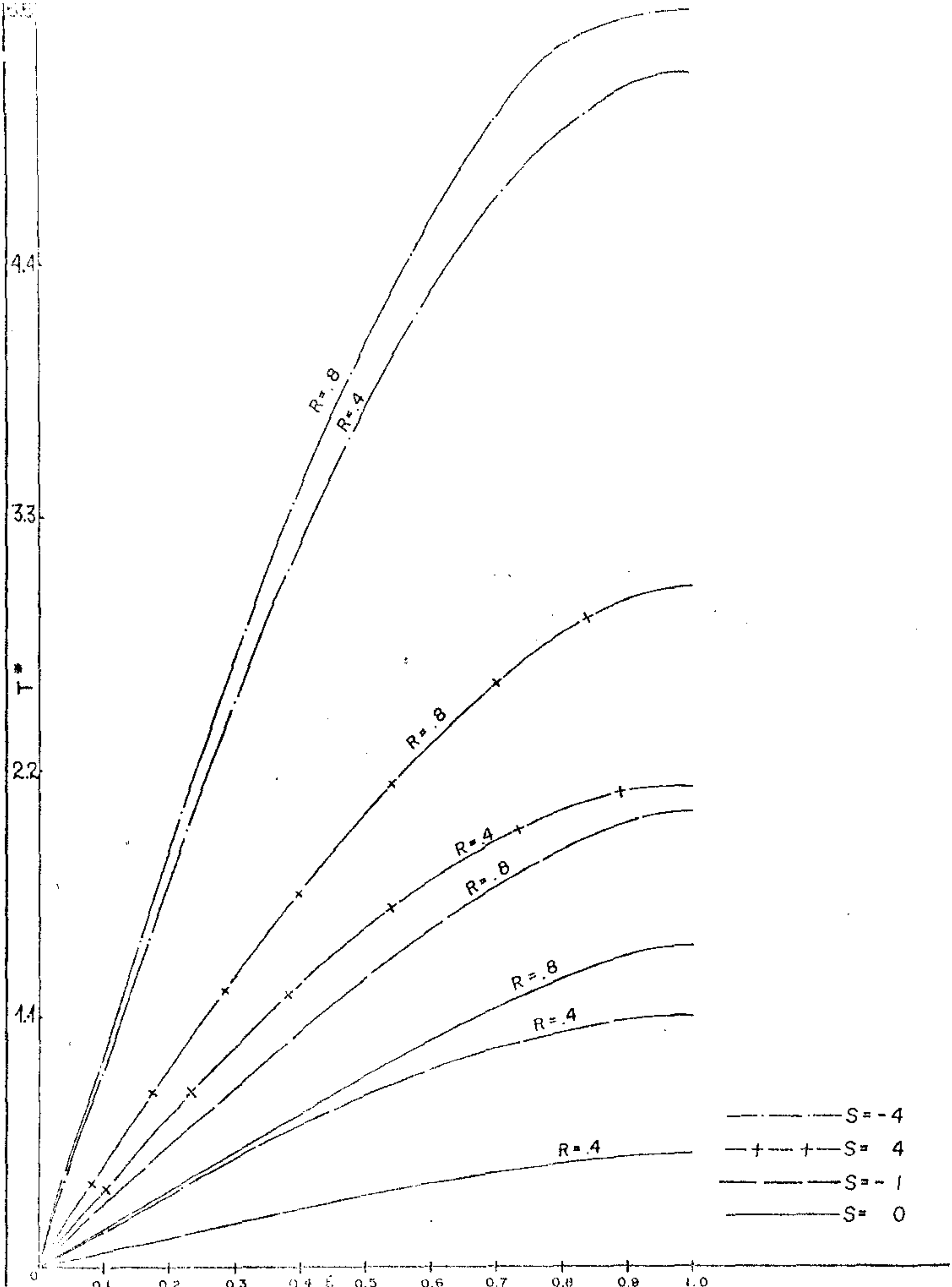
TABELA III

	Figura 7		Figura 8		Figura 9	
$\bar{r}$	0.5		1.0		2.0	
R	0.4	0.8	0.4	0.8	0.4	0.8
s = 0	0.21	0.44	0.4	1.4	1.62	5.22
s = -1	0.65	0.86	1.09	1.97	2.87	6.41
s = 4	1.37	1.61	2.08	2.94	4.94	8.29
s = -4	3.65	3.85	5.13	5.54	11.04	12.32
s = 5	2.38	2.64	3.45	4.22	7.72	10.51
s = 10	11.94	12.83	15.20	12.23	28.27	9.84
s = -7	9.27	9.48	12.10	10.0	23.42	12.11
s =-8.75	13.76	14.06	17.15	11.57	30.7	16.29



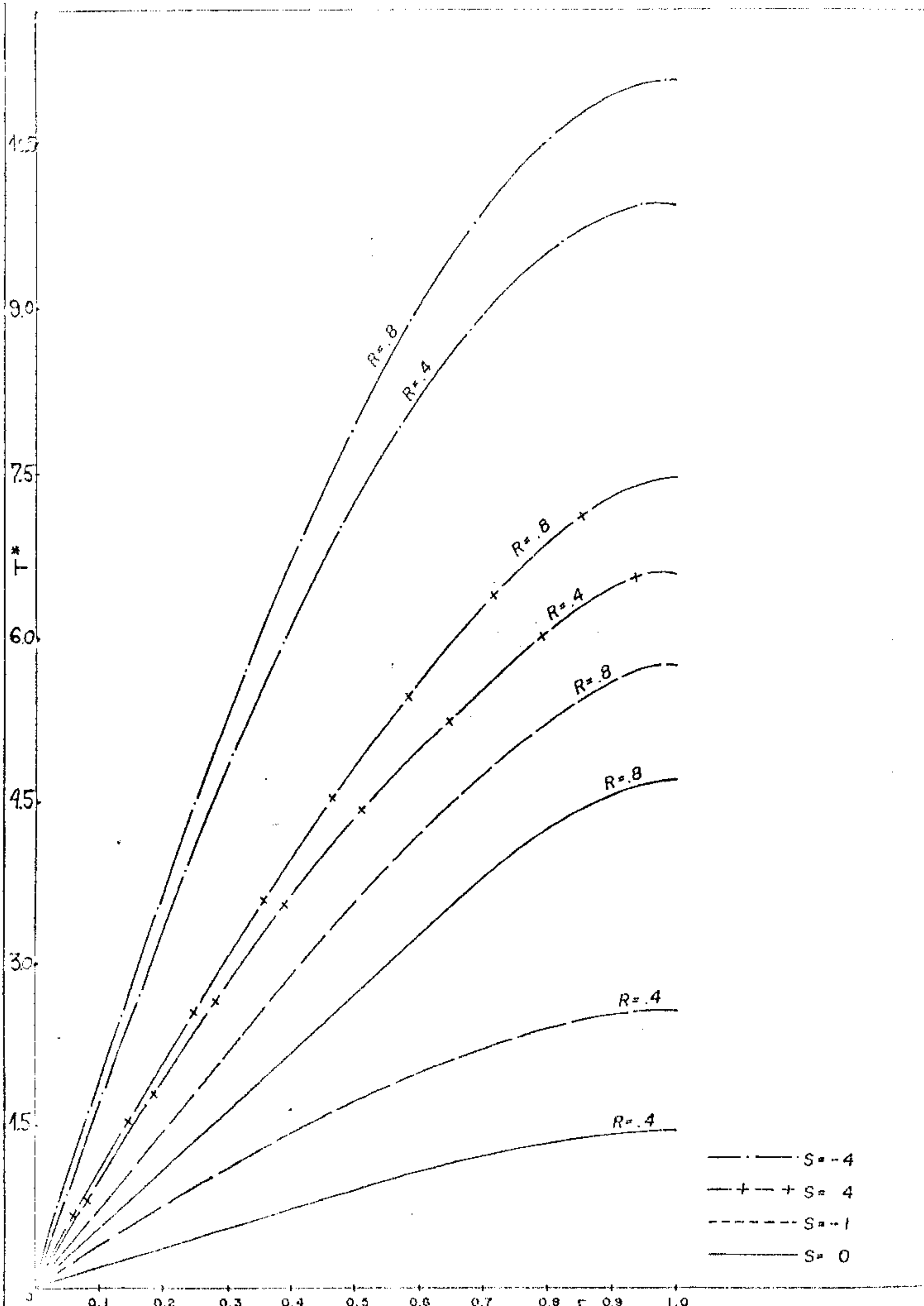
4.0
3.2
2.4
1.6
0.8
T*
R = 8
R = 4
R = 8
R = 4
R = 8
R = 4
R = 8
R = 4
0.1
0.2
0.3
0.4
ξ
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1.0
S = -
S =
S = -
S =

Fig. 7



4.4
3.3
2.2
1.1
0
T*
R=.8
R=.4
R=.8
R=.4
R=.8
R=.8
R=.4
R=.4
0.1
0.2
0.3
0.4
ξ
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1.0
S= -4
S= 4
S= -1
S= 0

Fig. 8



10.5
9.0
7.5
6.0
4.5
3.0
1.5
0
T*
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1.0
ξ
R=.8
R=.4
R=.8
R=.4
R=.8
R=.8
R=.4
R=.4
S=-4
S= 4
S=-1
S= 0

Fig. 9

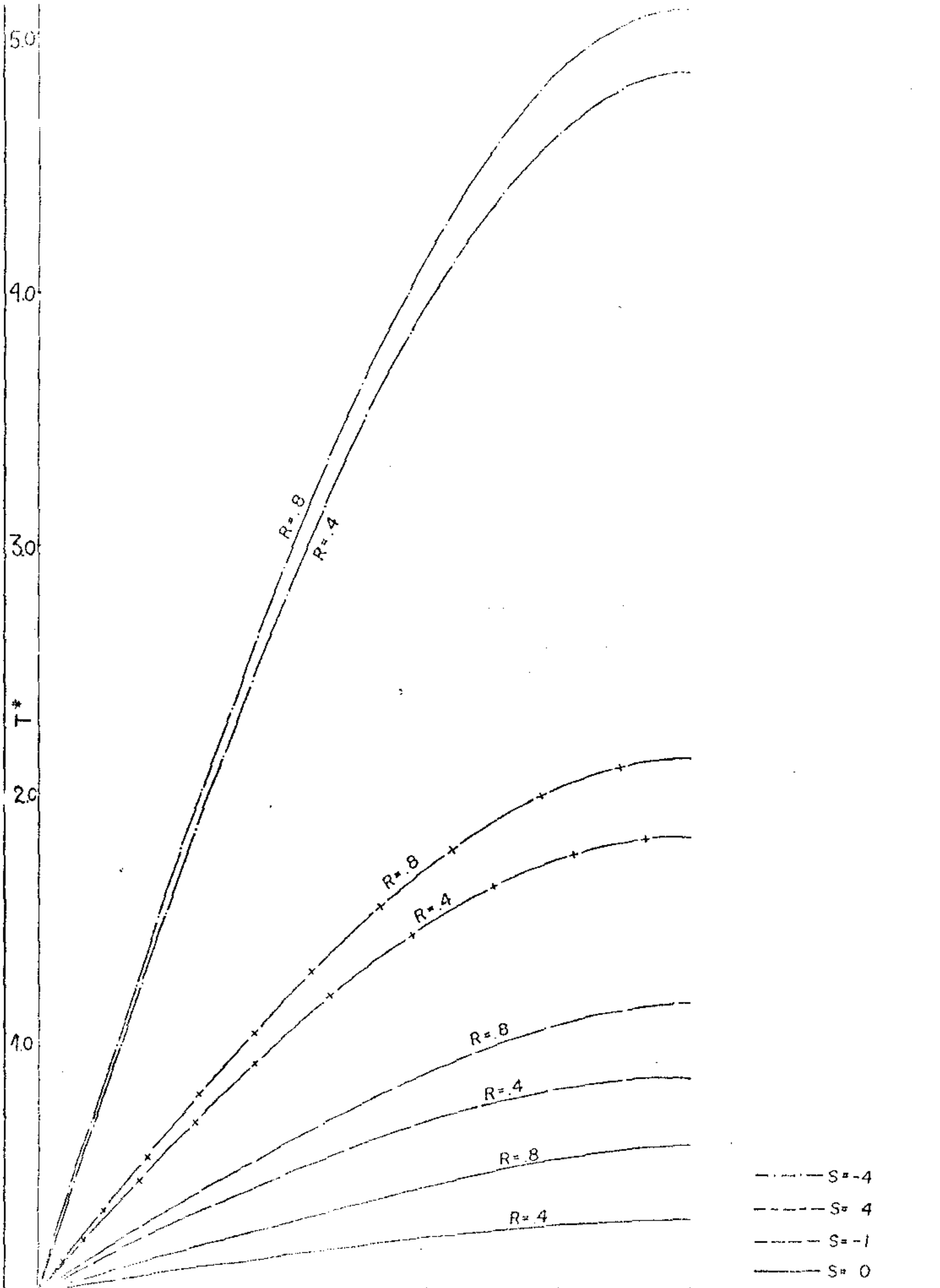
As figuras 10, 11, 12 representam as curvas da temperatura, T^* para diversos valores de $\bar{r}$, R, s. Elas diferem das figuras anteriores na variação do produto σE, isto é, $\sigma E = 0.21$, enquanto que anteriormente, $\sigma E = 0.15$.

Os números de Prandtl e Eckert assumem os valores, 0.7 e 0.3 respectivamente.

Pode-se dizer que aumentando-se o número de Prandtl e diminuindo-se o valor de E, os perfis obtidos para a distribuição de temperatura são bem similares aos das figuras 7, 8, 9. Isso pode ser visto pelas curvas traçadas de T^* em função de ξ nas figuras e na Tabela IV onde têm-se os máximos de T^* para diferentes valores de s inclusive alguns outros resultados relativos ao máximos de T^* que não foram plotados.

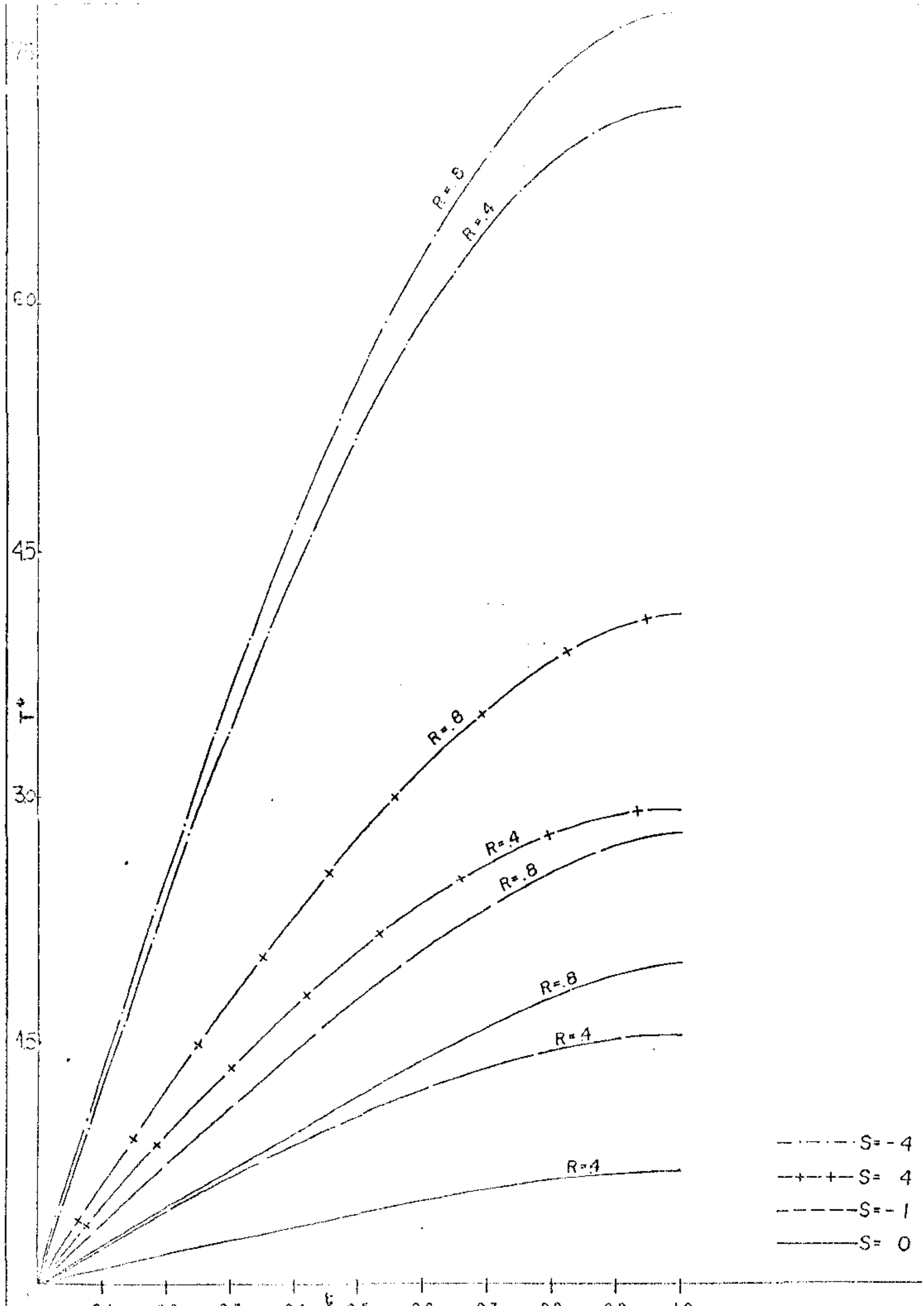
TABELA IV

	Figura 10		Figura 11		Figura 12	
$\bar{r}$	0.5		1.0		2.0	
R	0.4	0.8	0.4	0.8	0.4	0.8
s = 0	0.3	0.61	0.7	1.95	2.27	7.30
s = -1	0.9	1.21	1.53	2.77	4.03	8.98
s = 4	1.92	2.25	2.91	4.11	6.91	11.57
s = -4	5.12	5.32	7.18	7.74	15.44	17.15
s = 5	3.33	3.69	4.83	5.88	10.79	14.62
s = 10	16.65	17.71	21.14	16.52	39.08	11.77
s = -7	12.95	13.17	16.88	13.78	32.60	16.19
s=8.75	19.21	19.46	23.88	15.67	42.54	0.49



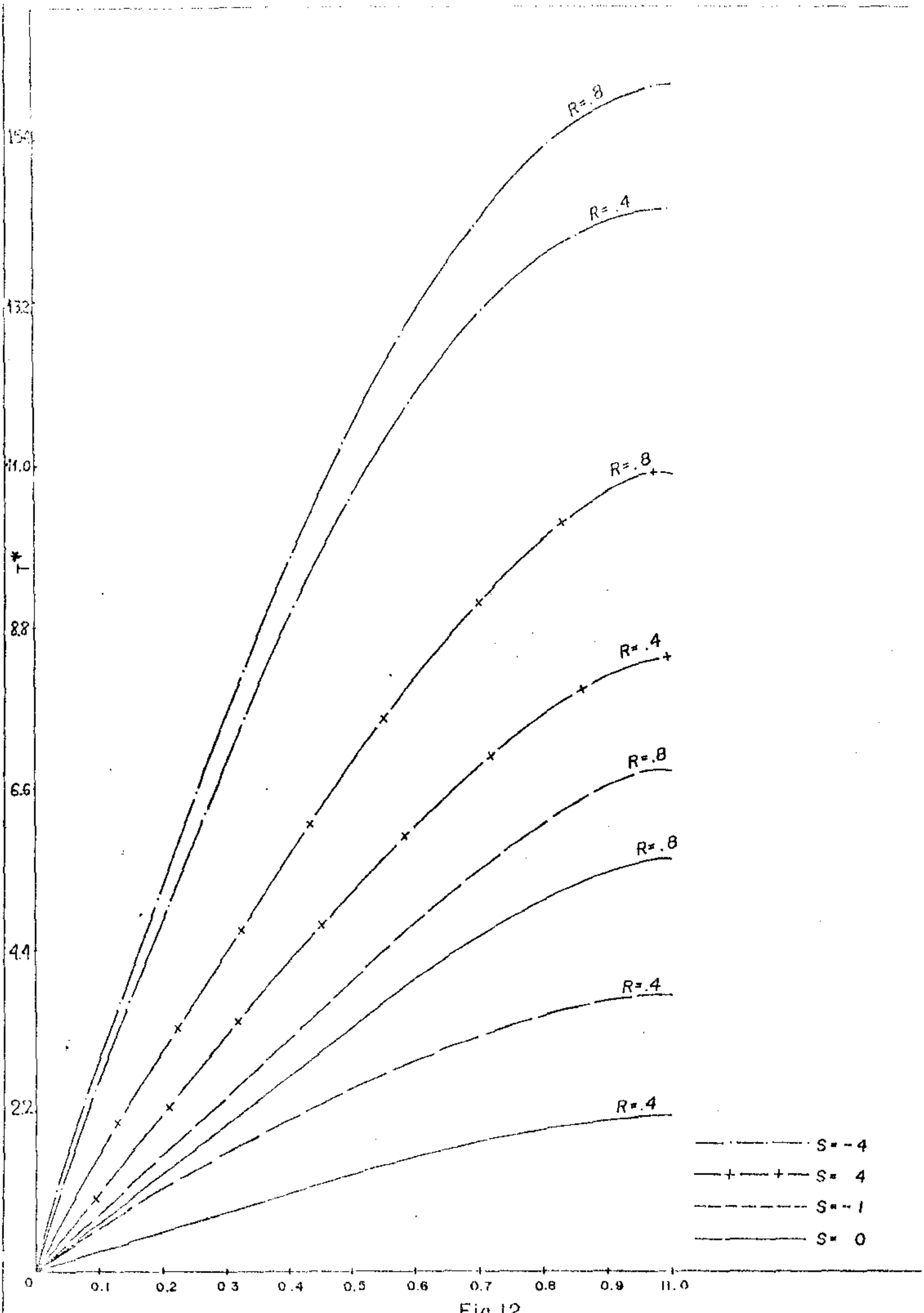
T*
ξ
5.0
4.0
3.0
2.0
1.0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1.0
R=.8
R=.4
R=.8
R=.4
R=.8
R=.4
R=.8
R=.4
S=-4
S= 4
S=-1
S= 0

Fig. 10



7.5
6.0
4.5
3.0
1.5
T^*
R=8
R=4
R=8
R=4
R=8
R=8
R=4
R=4
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1.0
ξ
S= -4
S= 4
S= -1
S= 0

Fig. 11



T^*
15.4
13.2
11.0
8.8
6.6
4.4
2.2
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1.0
R= .8
R= .4
R= .8
R= .4
R= .8
R= .8
R= .4
R= .4
S= -4
S= 4
S= -1
S= 0

Fig. 12

CAPITULO IV

TRANSFERÊNCIA DE CALOR EM DISCOS COM A APLICAÇÃO DE FORÇAS EXTERNAS

4.1 - Introdução

Consideremos neste capítulo, o problema da transferência de calor no escoamento entre dois discos quando aplica-se externamente, um campo magnético constante, $\bar{H}_0$, numa direção perpendicular aos discos. O disco superior mantém-se parado, $s = 0$, e o disco inferior gira com uma velocidade constante $s\Omega$.

Para tal problema, utilizamos as equações de Maxwell, para o estado estacionário juntamente com as equações do movimento onde foram introduzidas as contribuições devido à força de Lorentz.

Consideremos agora, a equação do movimento (1-20) escrita na forma vetorial, isto é,

$$\rho \left[\frac{\partial V}{\partial t} + (V.\nabla)\, V \right] = - \nabla p + \mu\, \nabla^2 V + \vec{f} \qquad (4\text{-}1)$$

onde $\vec{f}$ representa a força eletromagnética dada por

$$\vec{f} = \vec{J} \times \vec{B} \quad ,$$

sendo

$\vec{J}$ a densidade de corrente

e

$\vec{B}$ o campo de indução magnética.

Fazendo-se uso da lei de Ohm,

$$\vec{J} = \tau_0 (\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}) \tag{4-2}$$

onde

τ_0 é a condutividade ,

$\vec{E}$, o campo elétrico,

a equação (4-2) torna-se

$$\vec{f} = \tau_0 (\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}) \times \vec{B} . \tag{4-3}$$

Utilizando as equações de Maxwell e escrevendo-se $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$, eliminamos o campo elétrico E, da equação (4-4) e esta equação pode ser expressa da seguinte forma

$$\vec{f} = \tau_0 \mu_0^2 (\vec{V} \times \vec{H}) \times \vec{H} \tag{4-5}$$

onde

μ_0 representa a permeabilidade magnética

e

$\vec{H}$ o campo magnético.

Substituindo a equação (4-5) na equação do movimento (4-1), temos

$$\rho \left[\frac{\partial V}{\partial t} + (V.\nabla)V\right] = - \nabla p + \mu\nabla^2 V + \tau_0 \mu_0^2 (\vec{V} \times \vec{H}) \times \vec{H}. \tag{4-6}$$

Escrevemos agora a equação (4-6) em coordenadas cilíndricas polares usando as componentes da velocidade, $\vec{V}$, como definidas no capítulo I, isto é, u,v,w, nas direções crescentes de r, θ, z, respectivamente. A saber,

$$\rho\left[u\frac{\partial u}{\partial r} + w\,\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{v^2}{r}\right]$$

$$= -\,\frac{\partial p}{\partial r} + \mu\left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{u}{z^2}\right] - \mu_0^{\,2}\tau_0 u\,\bar{H}_0^2\;, \tag{4-7}$$

$$\rho\left[u\,\frac{\partial v}{\partial r} + w\,\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{uv}{r}\right]$$

$$= \mu\left[\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{v}{r^2}\right] - \mu_0^2\tau_0\, v\,\bar{H}_o^2\;, \tag{4-8}$$

$$\rho\left[\frac{\partial w}{\partial r} + w\,\frac{\partial w}{\partial z}\right]$$

$$= -\,\frac{\partial p}{\partial z} + \mu\left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right] \tag{4-9}$$

As condições de contorno para o problema são:

$$\left.\begin{array}{llll} u = 0 & v = r\Omega & w = 0 & \text{em } z = 0\,, \\ & & & \\ u = 0 & v = 0 & w = 0 & \text{em } z = d\,. \end{array}\right\} \tag{4-10}$$

Para resolver as equações (4-7),(4-8) e (4-9) juntamente com as condições de contorno (4-10) vamos utilizar as transformações de variáveis como definidas anteriormente:

$$\left.\begin{aligned} u &= r\Omega F(\xi) \quad , \\ v &= r\Omega G(\xi) \quad , \\ w &= d\Omega H(\xi) \quad , \end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}11)$$

onde

$$\xi = \frac{z}{d} \quad . \qquad (4\text{-}12)$$

Derivando-se as expressões acima, (4-11) em relação a r, ξ e substituindo-as nas equações (4-7),(4-8) e (4-9), obtemos

$$\rho \Big[r\Omega F(\xi).(\Omega G(\xi)) + (\Omega H(\xi)).(r\Omega G'(\xi))$$

$$+ (\Omega F(\xi)).(r\Omega G(\xi))\Big] = \mu \Big[\frac{1}{r}\Omega\ G(\xi)$$

$$+ \frac{1}{d^2}\ r\ G''(\xi) - \frac{1}{r}\ \Omega G(\xi)\Big] - r\Omega\mu_0^2\tau_0\, G(\xi)\bar{H}_o^2$$

ou ainda,

$$\rho\Omega \left[\frac{-H'(\xi)G(\xi)}{2} + H(\xi)G'(\xi) - \frac{H'(\xi)G(\xi)}{2} \right]$$

$$= \frac{\mu}{d^2}\Big[G''(\xi)\Big] - r\Omega G(\xi)\mu_0^2\tau_0\,\bar{H}_o^2 \quad ,$$

$$\frac{\rho\Omega d^2}{\mu} \Big[-H'(\xi)G(\xi) + H(\xi)G'(\xi) \Big]$$

$$= G''(\xi) - \frac{d^2\mu_0^2\tau_0\,\bar{H}_o^2}{\rho\mu}\ G(\xi) \quad . \qquad (4\text{-}13)$$

Vamos introduzir agora, os parâmetros admensionais, número de Reynolds, $R = \frac{\rho\Omega d^2}{\mu}$, e o número de Hartmann, $M = d\mu_0\bar{H}_0\frac{\tau_0}{\rho\mu}$ na equação acima, tendo-se então a equação escrita da seguinte forma:

$$G''(\xi) - R\left[H(\xi)G'(\xi) - H'(\xi)G(\xi)\right] - M^2G(\xi) = 0 \qquad (4\text{-}14)$$

Das equações (4-7) e (4-9), temos

$$\rho\left[r\Omega F(\xi) \,.\, \Omega F(\xi) + (\Omega H(\xi) \,.(r\Omega F'(\xi) + r\Omega^2G^2(\xi)\right]$$

$$= -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu\left[\frac{1}{d^2}\,\Omega r F''(\xi)\right] - r\Omega\mu_0^2\,\tau_0\bar{H}_0^2F(\xi).$$

Derivando-se ambos os lados da equação acima em relação a ξ, e usando-se (2-7), temos

$$\rho\Omega^2\left[\frac{-H'''(\xi)\;H(\xi)}{2} - 2G(\xi)G'(\xi)\right]$$

$$= \frac{\mu\Omega}{d^2}\left[\frac{-H^{iv}(\xi)}{2}\right] + \frac{\Omega H''(\xi)}{2}\;\mu_0^2\tau_0\;\bar{H}_0^2$$

ou ainda,

$$\frac{\rho\Omega d^2}{\mu}\left[\frac{-H'''(\xi)H(\xi)}{2} - 2G(\xi)G'(\xi)\right]$$

$$= -\frac{H^{iv}(\xi)}{2} + \frac{\mu_0^2\tau_0\bar{H}_0^2}{\mu\rho}\,H''(\xi)$$

e finalmente,

$$H^{iv}(\xi) - RH'''(\xi)\,H(\xi) + 4G(\xi)G'(\xi) - M^2H''(\xi) = 0. \qquad (4\text{-}15)$$

Temos, portanto, um conjunto de duas equações (4-14) (4-15) para ser resolvido com as seguintes condições de contorno:

$$\left.\begin{array}{ll} G(0) = 0 & G(1) = 1\ , \\ H(0) = 0 & H(1) = 1\ , \\ H'(0) = 0 & H'(1) = 1\ . \end{array}\right\} \qquad (4\text{-}16)$$

Este problema foi pesquisado e concluido recentemente por BHATNAGAR [12], para distribuição de velocidade em escoamentos de fluidos viscoelásticos entre discos. Para a solução das equações (4-14),(4-15) utilizou-se o método regular de perturbação. A seguir temos as soluções de ordens de aproximação zero, um e dois para as funções G e H ,

$$\left.\begin{array}{l} G(\xi) = G_0(\xi) + RG_1(\xi) + R^2G_2(\xi)\ , \\ \\ H(\xi) = H_0(\xi) + RH_1(\xi) + R^2H_2(\xi)\ , \end{array}\right. \qquad (4\text{-}17)$$

onde

$$G_o(\xi) = \frac{1}{\text{senh } M}\,\text{senh}(M\xi)\ ,$$

$$G_0(\xi) = \frac{1}{\text{senh } M} \text{ senh}(M\xi) \ ,$$

$$G_1(\xi) = 0,$$

$$G_2(\xi) = P_1(\cosh(M\xi) - 1) + P_2 \text{ senh } (M\xi)$$

$$+ P_3\xi \cosh(M\xi) + P_4(2C\xi + D\xi^2) \text{ senh } (M\xi)$$

$$+ P_5 \text{ senh } (3M\xi) \ ,$$

e

$$H_0(\xi) = 0 \ ,$$

$$H_1(\xi) = C + D\xi + \frac{A}{M^2} \cosh(M\xi) + \frac{B}{M^2} \text{ senh } (M\xi) + a_0 \text{ senh } (2M\xi),$$

$$H_2(\xi) = 0 \ .$$

Os coeficientes A,B,C,D, a_0, b_0e P_i,i = 1,4, es - tão dados no Apêndice C.

Passemos agora à resolução da equação da energia, equação (3-2), para o problema atual de transferência de calor.

4-2 - 1º CASO

Nesta seção vamos obter a solução da equação para distribuição de temperatura,

$$T^*(\bar{r},\xi) = \bar{T}(\xi) + \bar{r}^2 \bar{\bar{T}}(\xi) \ , \qquad (3-6)$$

quando submetida às seguintes condições de contorno

$$\left.\begin{array}{l} T^*(0) = 0 \\ \text{e} \\ T^*(1) = 1. \end{array}\right\} \qquad (3\text{-}7)$$

Fazendo-se uso do conjunto de soluções (4-17), para as funções G e H, resolvemos as equações (3-14) e (3-15), sujeitas as condições de contorno (3-16).

Do conjunto de equações (3-14), temos

$$\tilde{T}(\xi) = \tilde{T}_0(\xi) + R\tilde{T}_1(\xi) + R^2\tilde{T}(\xi) \qquad (4\text{-}20)$$

onde

$$\tilde{T}_0(\xi) = - E\sigma K^2 M^2 \left[\frac{\cosh(2M\xi)}{8M^2} + \frac{1}{4}\ \xi^2 + N\xi + L\right], \qquad (4\text{-}21)$$

$$\tilde{T}_1(\xi) = 0\ , \qquad (4\text{-}22)$$

$$\begin{aligned} \tilde{T}_2(\xi) = -E\sigma^2 K^2 \Big[& \left(Y_0 + Y_1\xi + Y_2\ \xi^2\right) \cdot \operatorname{senh}(M\xi) \\ & + \left(Y_3 + Y_4\xi + Y_5\ \xi^2\right) \cdot \cosh(M\xi) \\ & + \left(Y_6 + Y_7\xi\right) \cdot \operatorname{senh}(2M\xi) \\ & + \left(Y_8 + Y_9\ \xi + Y_{10}\ \xi^2\right) \cdot \cosh(2M\xi) \end{aligned}$$

$$+ Y_{11} \text{ senh } (3M\xi) + Y_{12} \cosh (3M\xi)$$

$$+ M^2 \left(\frac{D}{48}\xi^4 + \frac{C}{12}\xi^3 + \frac{K_8}{2} \xi^2 \right) \Big]$$

$$- E\sigma \Big[Y_{13} \text{ senh } (2M\xi) + Y_{14} \cosh(2M\xi)$$

$$+ Y_{15} \cosh (4M\xi) + Aa_0 \left(\frac{1}{9} \text{ sen}(3M\xi) + \text{sen}(M\xi\right)$$

$$+ Ba_0 \left(\frac{1}{9} \cosh (3M\xi) - \cosh(M\xi) \right) + Y_{16}\xi^2 \Big]$$

$$- E\sigma \Big[\left(Y_{17} + Y_{18}\xi\right) . \text{ senh } (2M\xi)$$

$$+ \left(Y_{19} + Y_{20} + Y_{21}\xi^2\right) . \cosh (2M\xi)$$

$$+ Y_{22} \cosh (4M\xi) + M^2 \left(\frac{P_4 D}{12} \xi^4 + \frac{P_4 D}{3} \xi^3 \right.$$

$$\left. + \frac{K_{12}}{2} \xi^2 \right) \Big] + K_{14}\xi + K_{15} \qquad (4\text{-}23)$$

e para o conjunto de equações (3-15), obtemos

$$\bar{T}(\xi) = \bar{T}_0(\xi) + R\bar{T}_1(\xi) + R^2\bar{T}_2(\xi) \qquad (4\text{-}24)$$

onde

$$\bar{T}_0(\xi) = E\sigma K^2 M^2 \left[\frac{\cosh(2M\xi)}{8M^4} + \frac{1}{12} \xi^4 + \frac{2}{3} N \xi^3 \right. ,$$

$$\left. + 2 L \xi^2 + 4 Q\xi + 4P \right], \qquad (4\text{-}25)$$

$$\bar{T}_1(\xi) = 0, \tag{4-26}$$

$$\bar{T}_2(\xi) = \frac{-E\sigma}{M^2}\Bigg[A_1 \text{ senh } (M\xi) + A_2 \text{ senh } (2M\xi)$$

$$+ A_3 \text{ senh } (3M\xi) + A_4 \cosh(M\xi) + A_5 \cosh (2M\xi)$$

$$+ A_6 \cosh (3M\xi) + A_7 \cosh (4M\xi) + A_8 \xi^2 + A_9 \xi^4\Bigg]$$

$$+ \frac{E\sigma^2 K^2}{M^2}\Bigg[\left(A_{10} + A_{11}\xi + A_{12}\xi^2 + A_{13}\xi^3\right) \cdot \text{ senh}(M\xi)$$

$$+ \left(A_{14} + A_{15}\xi + A_{16}\xi^2 + A_{17}\xi^3\right) \cdot \text{ senh } (2M\xi)$$

$$+ \left(A_{18} + A_{19}\xi + A_{20}\xi^2 + A_{21}\xi^3\right) \cdot \cosh (M\xi)$$

$$+ \left(A_{22} + A_{23}\xi + A_{24}\xi^2\right) \cdot \cosh(2M\xi)$$

$$+ A_{25} \text{ senh } (3M\xi) + A_{26} \cosh (3M\xi)$$

$$+ A_{27} \cosh (4M\xi) + A_{28}\xi^2 + A_{29}\xi^3$$

$$+ A_{30}\xi^4 + A_{31}\xi^5 + A_{32}\xi^6\Bigg]$$

$$+ \frac{E\sigma K}{M^2}\Bigg[\left(A_{33} + A_{34}\xi\right) \cdot \text{ senh } (2M\xi)$$

$$+ \left(A_{35} + A_{36}\xi + A_{37}\xi^2\right) \cosh(2M\xi)$$

$$+ \frac{3P_5}{64} \cosh(4M\xi) + M^4 \left(\frac{P_4 D}{90}\xi^6 + \frac{P_4 D}{15}\xi^5\right.$$

$$\left.\left. + \frac{K_{12}}{6}\xi^4\right)\right] - \frac{2}{3}K_{14}\xi^3 - 2K_{15}\xi^2 + K_{16}\xi + K_{17}. \qquad (4\text{-}27)$$

As soluções acima das equações (4-20) e(4-24) satisfazem as seguintes condições de contorno:

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{T}(0) = \tilde{T}(1) = 0 \\ \text{e} \\ &\bar{T}(0)\ ,\ \bar{T}(1) = 1\ . \end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}28)$$

Os coeficientes que aparecem nas soluções destas equações, K, L, N, P, Q, Y_i, K_i e A_i, i = 1,37, estão dados no apêndice C.

4.3 - ANÁLISE DOS RESULTADOS.

Na Fig. 13 é mostrado o comportamento da temperatura T* em função de $\xi, \xi = \frac{z}{d}$, quando o disco superior (z = d) está parado (s = 0) e o disco inferior (z = 0) gira com uma velocidade angular constante, Ω sendo fixados os valores dos números de Reynolds, R = 0.8, Hartmann, M = 1.0 e $\bar{r}$, $\bar{r} = \frac{r}{d}$, para diversos valores dos números de Prandtl e Eckert.

Tem-se nessa figura, $\bar{r} = 2.0$, isto é, $\theta = 63^\circ$, σ = 0.5, 0.6, 0.8, 1.0 e E = 0.3, 0.7.

Nota-se que para um produto maior de σE, a temperatura, T*, é sempre crescente . Verifica-se que para um produto de $\sigma E < 0.56$, o máximo de T* é obtido em $\xi = 1.0$, isto é, sobre o disco superior.

Na figura 14, vê-se que para um aumento do número de Hartmann, M = 5.0, a temperatura, T* cresce mais rapidamente com o produto σE. Observa-se , nessa figura que somente para $\sigma E \leq 0.15$, o máximo de T* assume o valor unitário. Para os demais valores de σE, os máximos de T* se deslocam para o entorno do ponto $\xi = 0.85$, ou seja, a temperatura T* para $\sigma = 1.0, E\sigma = 0.7$ atinge o valor aproximado 1.3 em $\xi = 0.85$.

Na Fig. 15 , são fixados os valores para R=0.8 M = 1.0, $\bar{r} = 5.0$, isto é, $\theta = 78{,}5^\circ$. Nota -se que para um valor maior de $\bar{r}$, o máximo de T* é sempre maior que a unidade para qualquer variação do produto σE, ou seja, os máximos de T* quando $\sigma E > 0.15$ são obtidos na distância média entre os dois discos.

Vê-se que para um produto maior de σE, a temperatura de T* é sempre crescente.

Na Fig. 16, há apenas um aumento do número de Hartmann, M=5.0, e nota-se que os máximos da temperatura, T* são obtidos em torno de ξ =0.8 formando-se portanto, uma camada térmica próxima ao disco superior. Após estes pontos máximos, verifica-se que a temperatura, T*, desce rápidamente até atingir o valor unitário, para todos os produtos de σE.

Nessa figura, todos os máximos de T* assumem valores maiores bastante pronunciado para a temperatura.

Na Fig. 17, tem-se um aumento de $\bar{r}$, $\bar{r}$ = 10.0, isto é, $\theta = 34.2^{o}$ sendo fixados os valores para R = 0.8, M = 1.0.

Vê-se que para esse valor de $\bar{r}$, os máximos de T* se deslocam para a meia distância entre os discos, para o respectivo valor de M = 1.0.

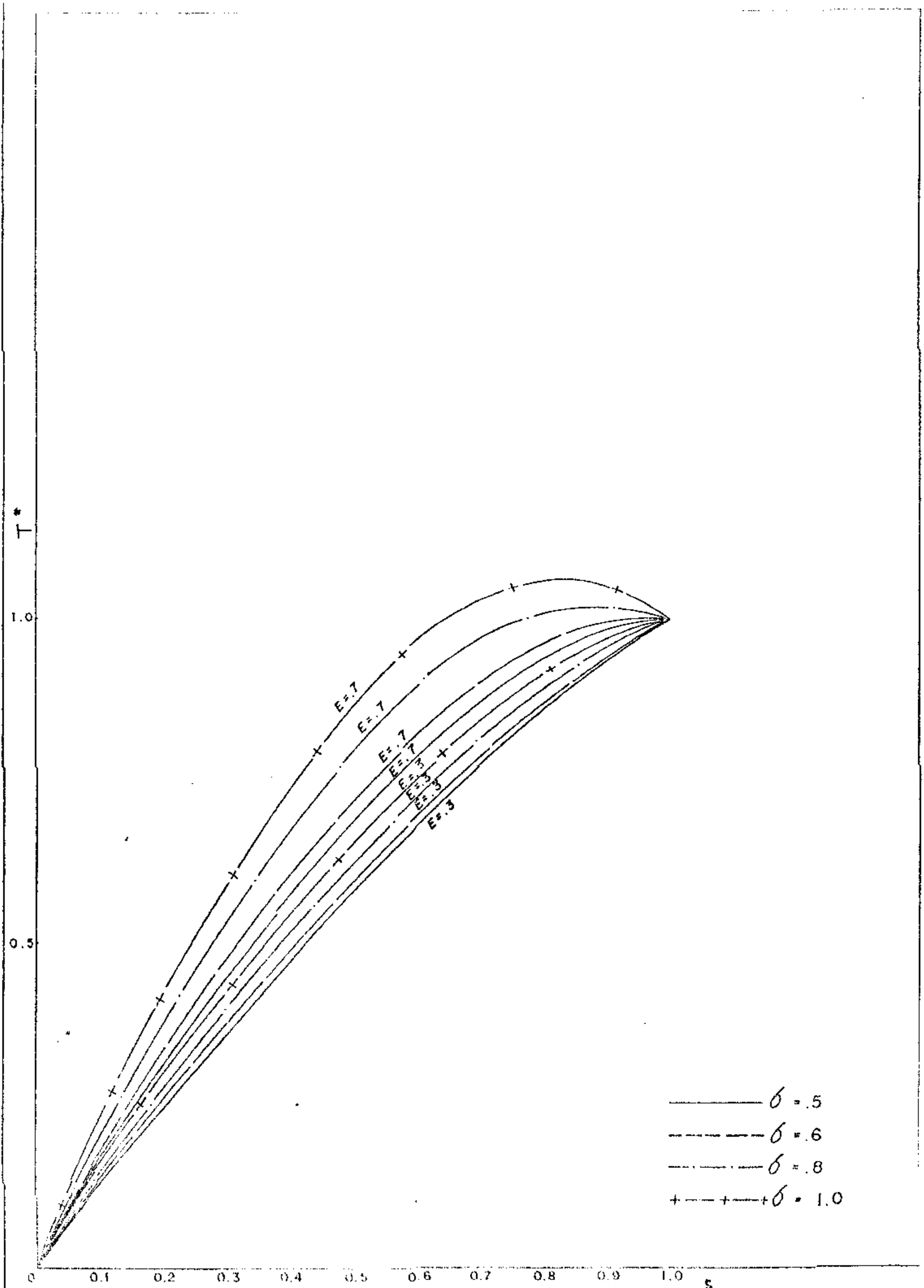
É interessante de se notar que a medida que aumentamos o número de Hartmann, M = 5, Fig. 18, para um mesmo $\bar{r}$, $\bar{r}$ = 10.0, os pontos máximos de T* são obtidos no entorno de ξ=0.8 para qualquer variação de σE.

Concluimos que para um maior valor de $\bar{r}$, a temperatura é sempre crescente, para os diversos produtos de σE se acentuando para um valor maior de σE. Para pequenos valores do número de Hartmann, figuras 13, 15, 17, os máximos de T^* são obtidos na meia distância entre os discos e para um valor maior de M, figuras, 14, 16, 18, os máximos de T^* se são deslocados em direção ao disco superior.

A seguir é mostrada uma tabela onde comparamos os pontos máximos de T^* para diversos valores do produto σE.

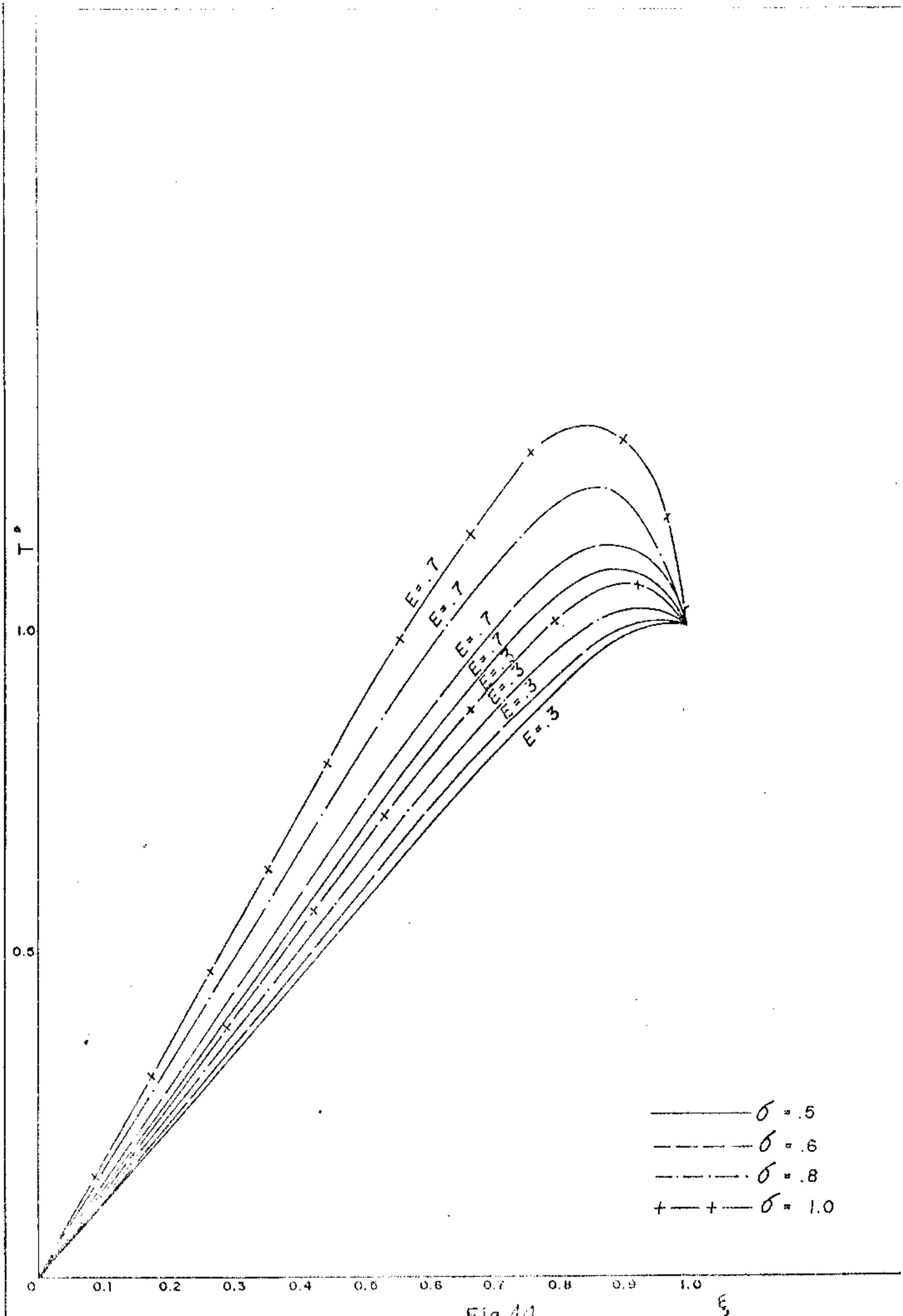
TABELA V

	Fig. 13, 14		Fig. 15,16		Fig. 17,18	
$\bar{r}$	2.0		5.0		10.0	
M	1.0	5.0	1.0	5.0	1.0	5.0
σE=0.15	T^*_{max} = 1.0 ξ = 1.0	1.0 1.0	1.13 0.8	1.44 0.85	2.4 0.6	3.3 0.8
σE=0.18	T^*_{max} = 1.0 ξ = 1.0	1.01 0.95	1.20 0.75	1.56 0.85	2.8 0.6	3.8 0.8
σE=0.24	T^*_{max} = 1.0 ξ = 1.0	1.03 0.95	1.36 0.7	1.80 0.8	3.5 0.6	4.8 0.8
σE=0.30	T^*_{max} = 1.0 ξ = 1.0	1.06 0.95	1.53 0.65	2.06 0.8	4.21 0.55	5.8 0.8
σE=0.35	T^*_{max} = 1.0 ξ = 1.0	1.09 0.9	1.67 0.65	2.27 0.8	4.83 0.55	6.63 0.8
σE=0.42	T^*_{max} = 1.0 ξ = 1.0	1.13 0.9	1.88 0.65	2.56 0.8	5.68 0.55	7.80 0.8
σE=0.56	T^*_{max} = 1.02 ξ = 0.9	1.22 0.85	2.30 0.6	3.15 0.8	7.4 0.55	10.2 0.8
σE=0.70	T^*_{max} = 1.06 ξ = 0.85	1.31 0.85	2.73 0.6	3.74 0.8	9.11 0.55	12.5 0.75



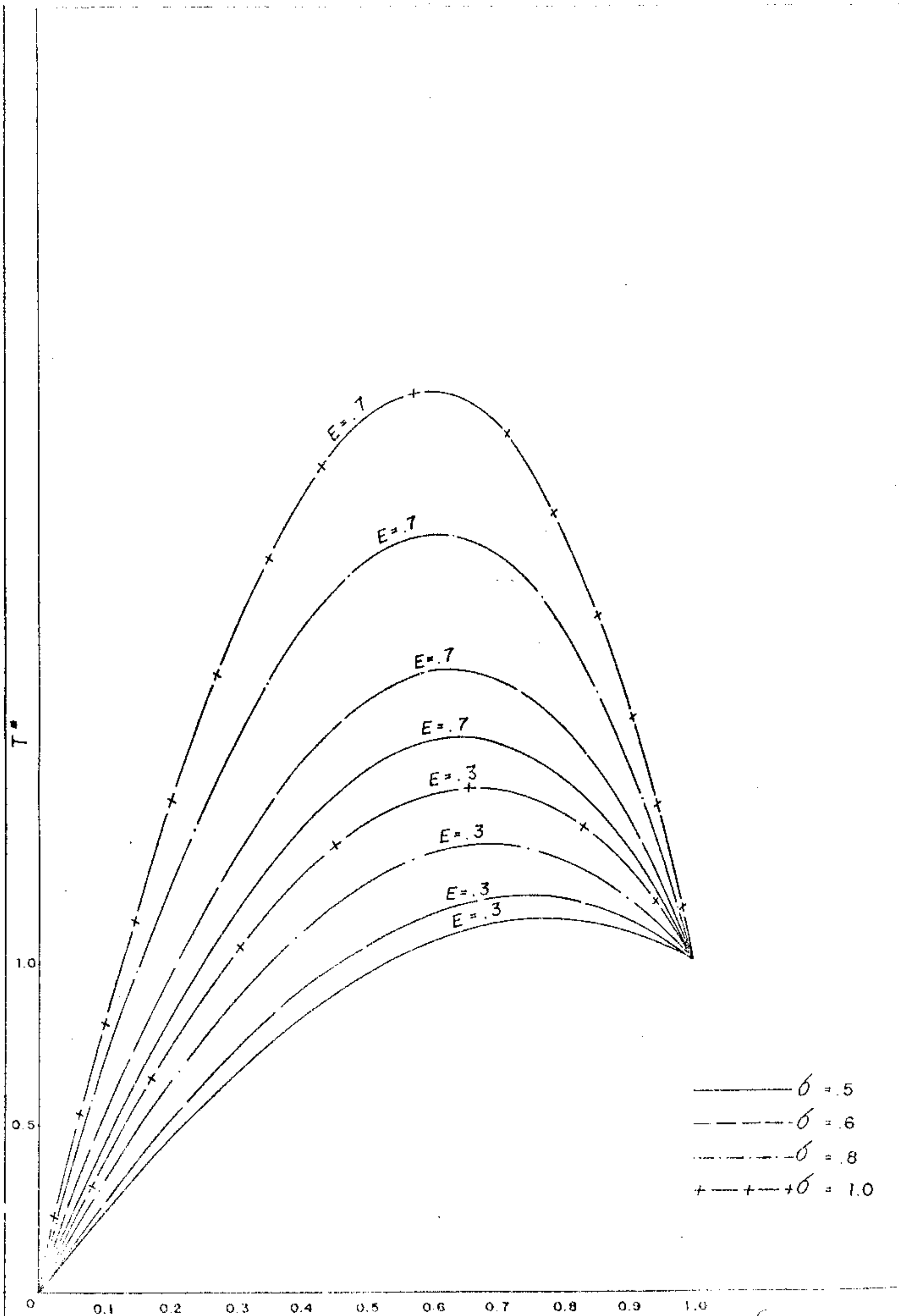
T*
1.0
0.5
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1.0
ξ
E=.7
E=.7
E=.7
E=.7
E=.3
E=.3
E=.3
E=.3
σ = .5
σ = .6
σ = .8
σ = 1.0

Fig. 13



T*
1.0
0.5
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1.0
ξ
E = .7
E = .7
E = .7
E = .7
E = .3
E = .3
E = .3
E = .3
σ = .5
σ = .6
σ = .8
σ = 1.0

Fig. 14



T*
E = .7
E = .7
E = .7
E = .7
E = .3
E = .3
E = .3
E = .3
1.0
0.5
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1.0
σ = .5
σ = .6
σ = .8
σ = 1.0

Fig. 45

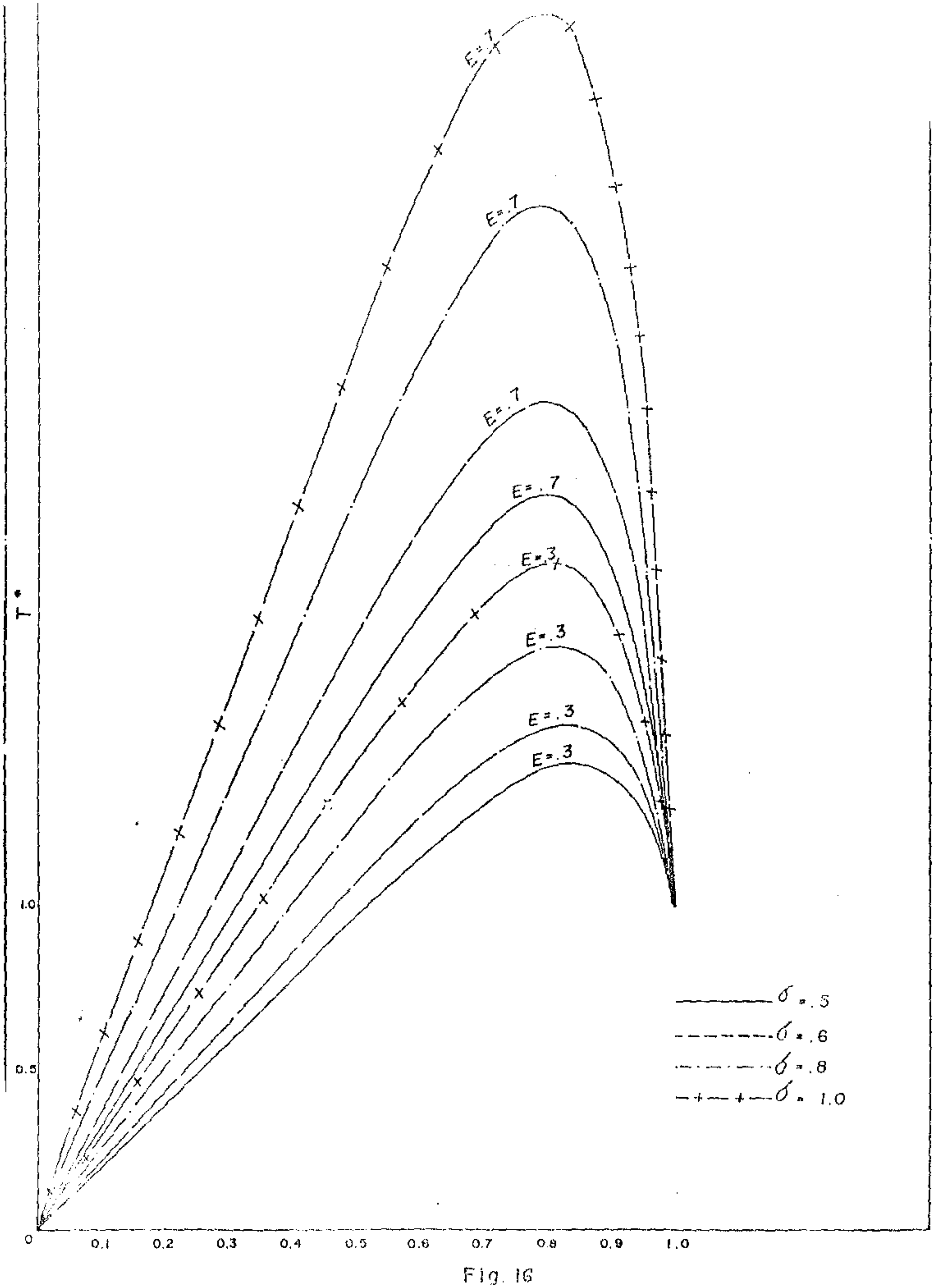

E=.7
E=.7
E=.7
E=.7
E=.3
E=.3
E=.3
E=.3
T*
1.0
0.5
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1.0
σ = .5
σ = .6
σ = .8
σ = 1.0

Fig. 16

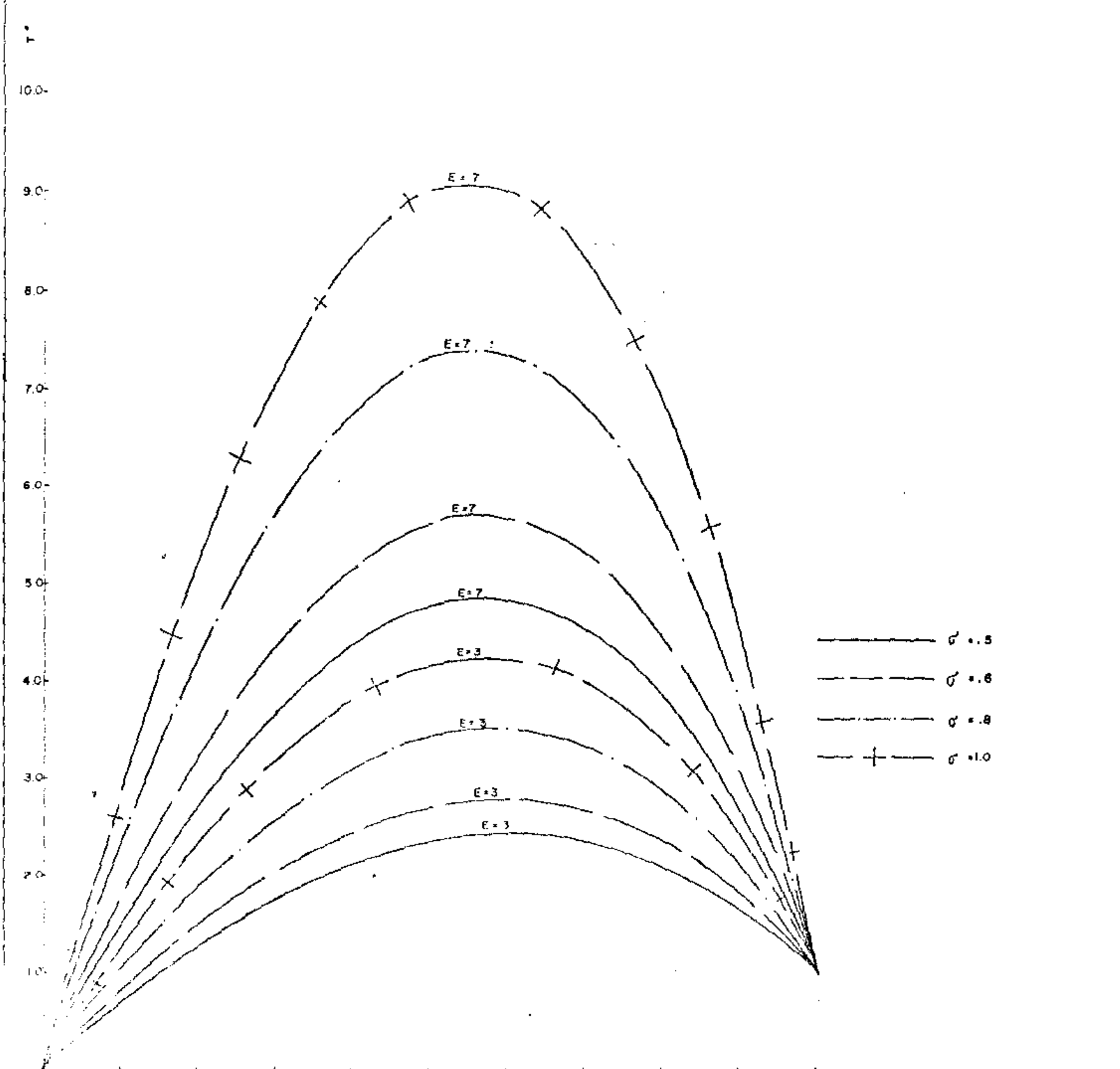
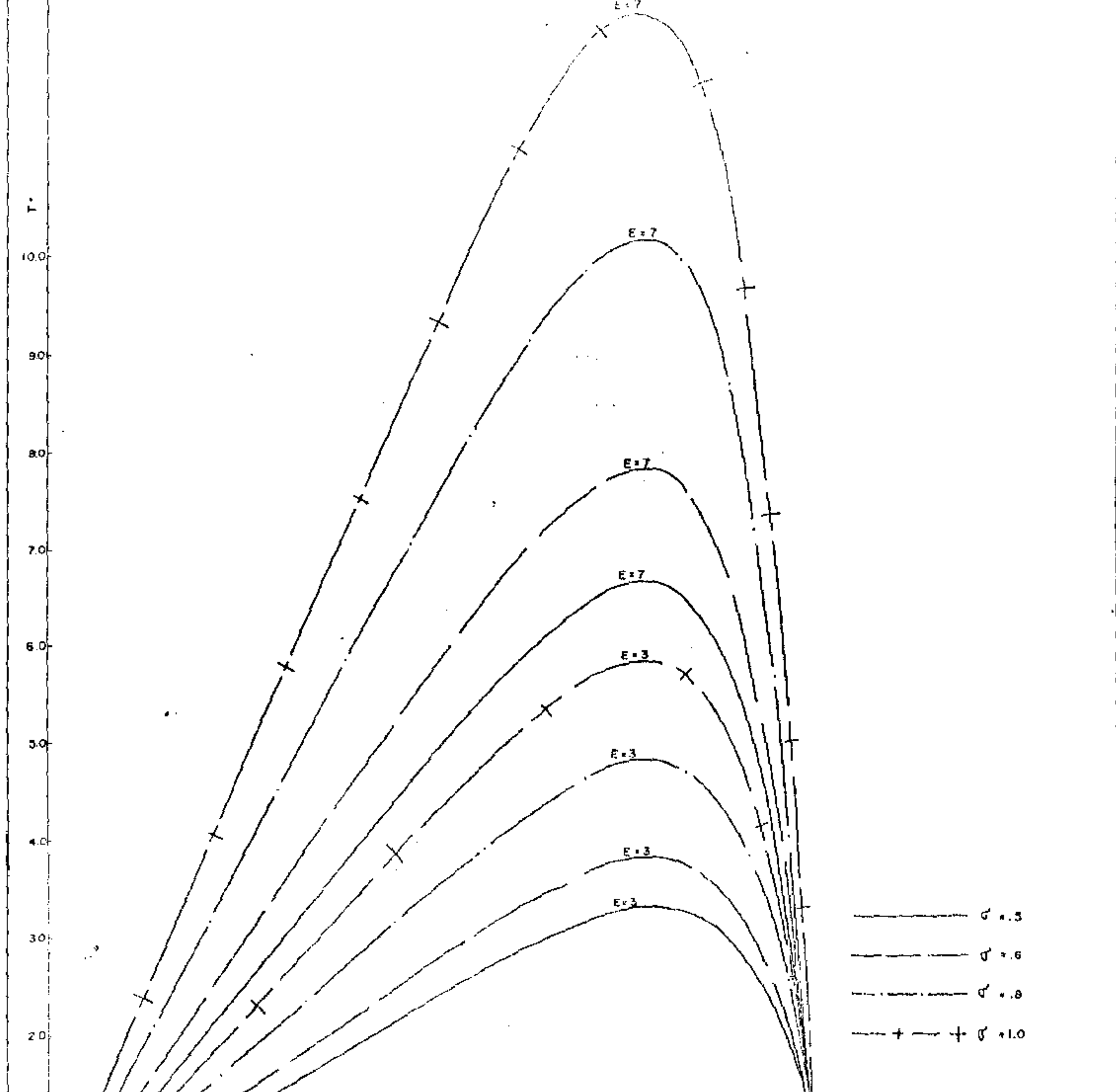

T*
10.0
9.0
8.0
7.0
6.0
5.0
4.0
3.0
2.0
1.0
E=7
E=7
E=7
E=7
E=3
E=3
E=3
E=3
σ =.5
σ =.6
σ =.8
σ =1.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1.0
ξ

FIG. 17



E=7
E=7
E=7
E=7
E=3
E=3
E=3
E=3
T*
10.0
9.0
8.0
7.0
6.0
5.0
4.0
3.0
2.0
1.0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1.0
ξ
σ = .5
σ = .6
σ = .8
σ = 1.0

FIG 18

4.4 - 2º CASO

Vamos resolver a equação para distribuição de Temperatura quando o disco superior, além de parado (s=0), permanece termicamente isolado.

A solução será da forma da equação (3-6) sujeita agora às condições de contorno:

$$T^* (0) = 0$$

e

$$T^{*\prime}(1) = 0$$

Temos as soluções (4-20) e (4-24) para $\tilde{T}$ e $\bar{T}$, a menos das constantes de integração que serão mudadas nas equações de ordens de aproximação zero, um e dois. Os coeficientes alterados são $\bar{N}$, $\bar{K}_{14}$, $\bar{P}$ e $\bar{K}_{16}$ nas equações (4-21), (4-23), (4-25), (4-27), respectivamente.

Esses novos coeficientes estão dados no apêndice C.

4.5 - DISCUSSÃO DOS RESULTADOS.

Nas Figuras 19,21 e 23 é mostrado o comportamento da temperatura, T^* em função de ξ, $\xi = \frac{z}{d}$, para diversos valores de $\bar{r}$, e dos números de Hartmann e Eckert.

Convém lembrar que nesse caso analisamos a variação de T^* quando o disco superior ($z = d$), mantém-se parado ($s = 0$) é termicamente isolado. O disco inferior gira com uma velocidade angular constante, Ω.

Na Fig. 19 têm-se as curvas de T^* para $\bar{r} = 0.5$, $\theta = 26.5^{\circ}$, $E = 0.3$, $M = 0.5$ para diferentes valores de σ e R. Nota-se que a temperatura é sempre crescente com o aumento do número de Prandtl e Reynolds, sendo ainda mais acentuado esse crescimento quando o número de Reynolds assume um valor maior, isto é, $R = 0.8$.

A distribuição de temperatura admite um comportamento linear proporcional a distância ξ, $\xi = \frac{z}{d}$. Vê-se que o máximo de T^* para $\sigma = 1.0$ e $R = 0.8$ assume aproximadamente o valor 3.5×10^{3}.

A Fig. 21 mostra a variação de T^* para $\bar{r} = 5.0$, isto é, $\theta = 78.5^{\circ}$ e $M = 0.5$. Verifica-se que o comportamento de T^* é bastante similar, ou seja, à medida que aumenta-se o número de Prandtl, tem-se a temperatura crescente, sendo mais pronunciado esse crescimento com o aumento do número de Reynolds.

Na Fig. 23 observa-se que para $\bar{r} = 10.0$, $\theta = 84^{\circ}$ a distribuição de temperatura é semelhante aos comportamentos anteriormente obtidos pelas curvas de T^* traçadas para os diversos valores dos números de Prandtl e Reynolds. Pode-se dizer que para esse valor de $\bar{r}$, o máximo de T^* atinge aproximadamente 3.6×10^{3}

para $\sigma = 1.0$, $R = 0.8$.

Nas Fig. 20,22,24, têm-se as curvas de T* para diversos valores dos números de Prandtl, Reynolds e $\bar{r}$ mantendo-se fixos os números de Hartmann, M = 1.0 e Eckert, E = 0.3.

Na Figura 20, é mostrado o comportamento de T* para $\bar{r} = 0.5$, $\theta = 26.5^{\circ}$, M = 1.0. Aumentando-se o valor de M, nota-se que a temperatura diminui em função de ξ para os diferentes valores de σ e R. No entanto, a temperatura é crescente, tendo seu crescimento mais acentuado para um maior valor do número de Reynolds. O valor máximo de T* para $\sigma = 1.0$ e $R = 0.8$ é obtido aproximadamente 1.6 x 10.

Na Fig. 22, tem-se $\bar{r} = 5.0$ e portanto $\theta = 78.5^{\circ}$.

O comportamento de T* para o valor fixo do número de Hartmann , M = 1.0, é semelhante, isto é, à medida que aumentamos os valores de σ e R, a temperatura diminui em função de ξ, obtendo-se entretanto o máximo de T* aproximadamente 2.2 x 10, para $\sigma = 1.0$ e $R = 0.8$. A temperatura T* tem um crescimento mais acentuado que na Fig. 20, mas se comparada com a Fig.21, vê-se um decrescimo de T* bastante acentuado em função de ξ.

Na Fig.24, para $\bar{r} = 10.0$, $\theta = 84^{\circ}$ verifica-se que a distribuição de temperatura perde seu caráter retilíneo em algumas curvas traçadas de T* para valores dos números de Prandtl e Reynolds. Observa-se que o máximo de T* para $\sigma = 1.0$ e $R = 0.8$ atinge aproximadamente o valor 3.8 x 10. O crescimento de T* é bastante pronunciado, embora a temperatura diminua quando comparada com a Fig.23.

Pode-se concluir que para $M = 0.5$, o crescimento de T^* é mais pronunciado em função de ξ, enquanto que aumentando-se o valor de M, $M = 1.0$ vê-se que a temperatura cresce menos acentuadamente em relação a ξ.

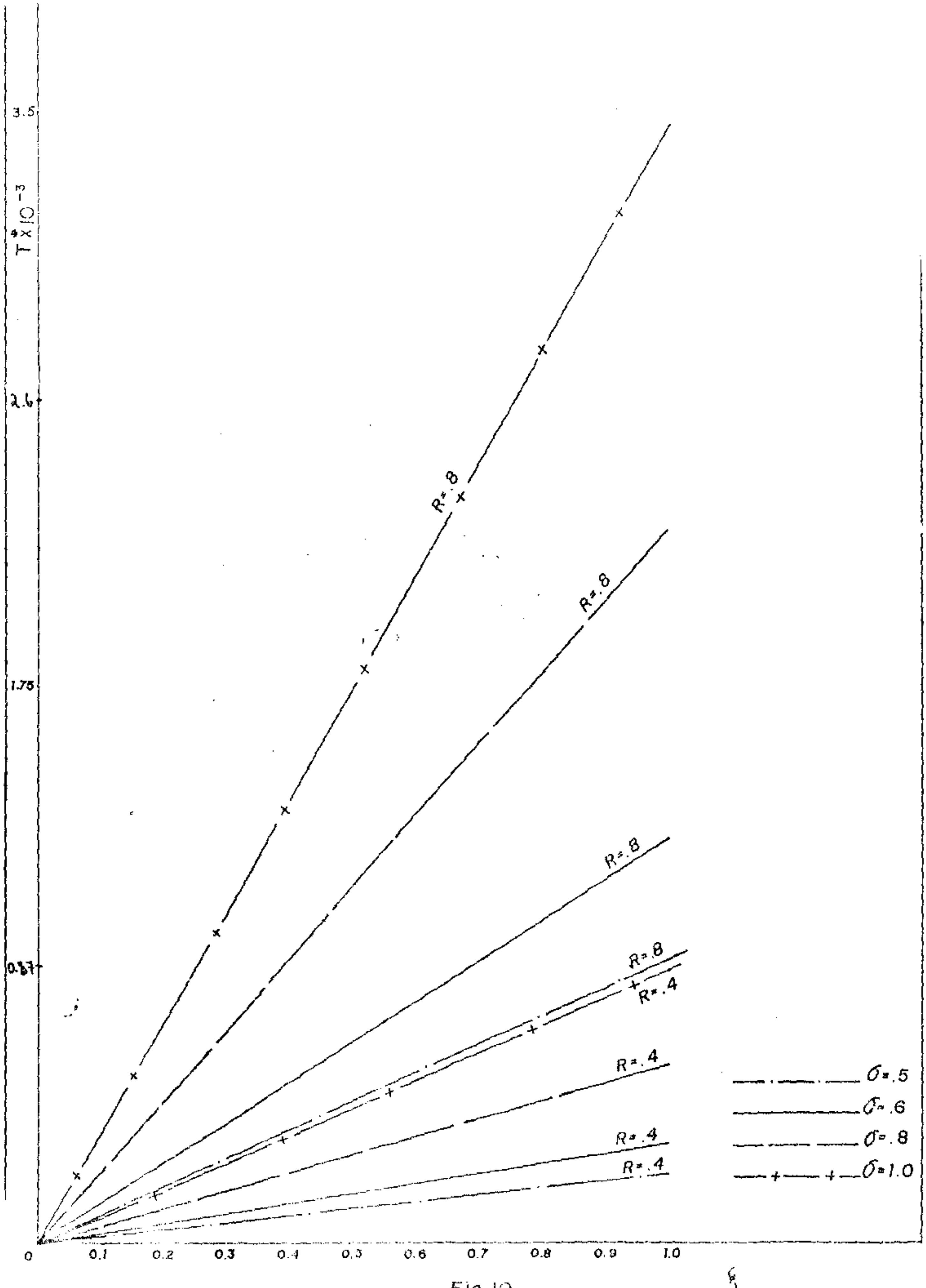
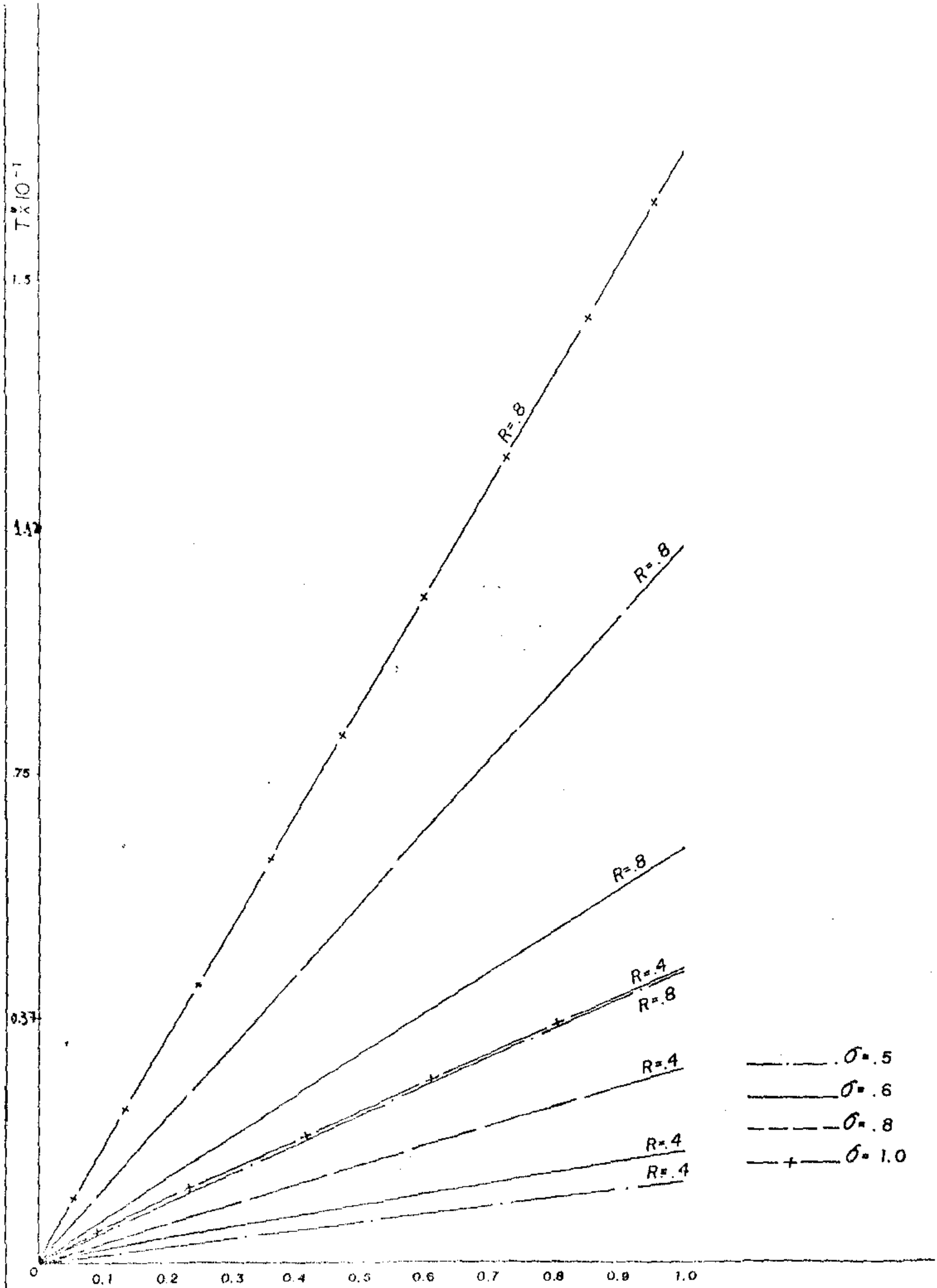
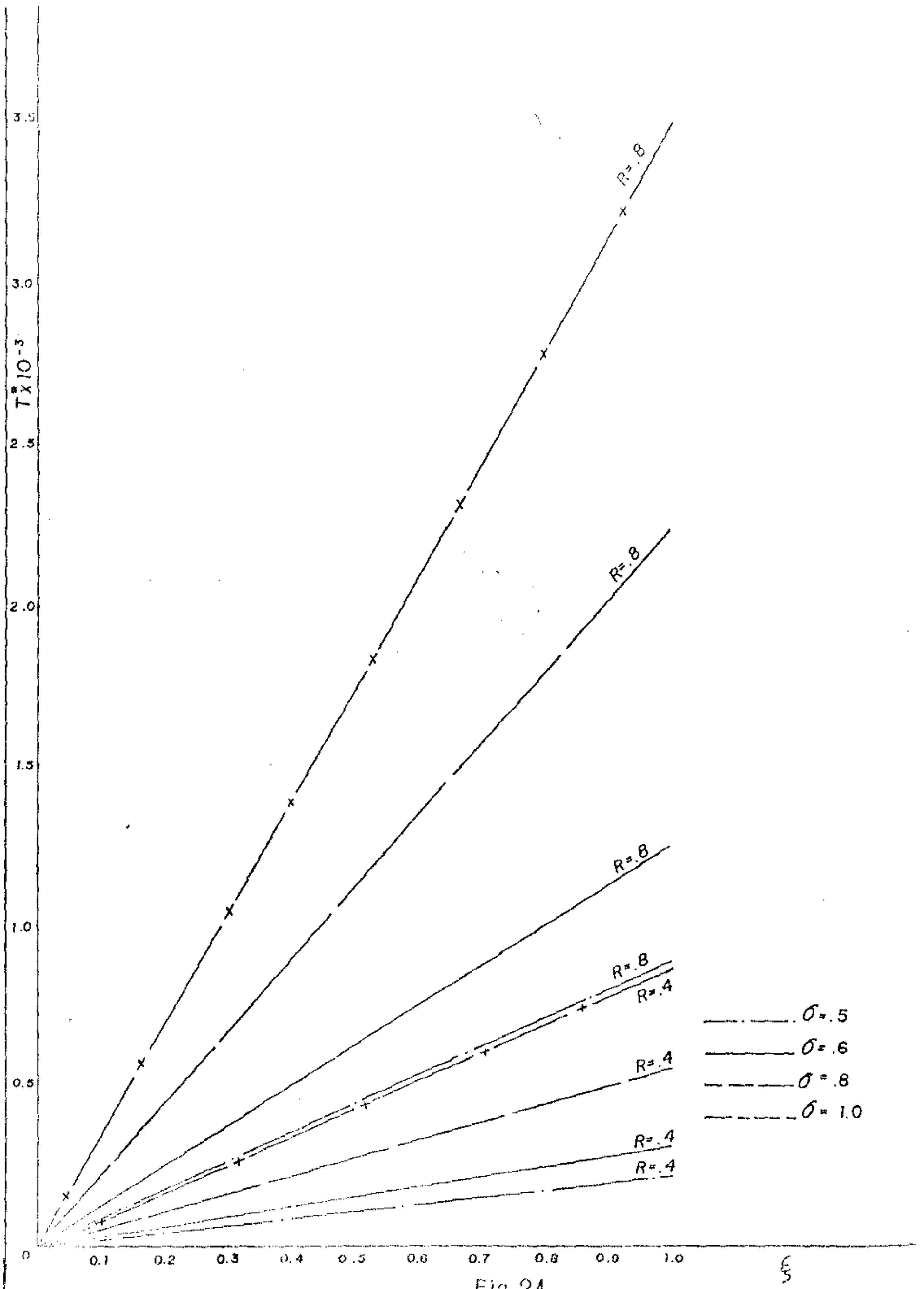

3.5
2.6
1.75
0.87
$T^* \times 10^{-3}$
R=.8
R=.8
R=.8
R=.8
R=.4
R=.4
R=.4
R=.4
σ=.5
σ=.6
σ=.8
σ=1.0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1.0
ξ

Fig. 19



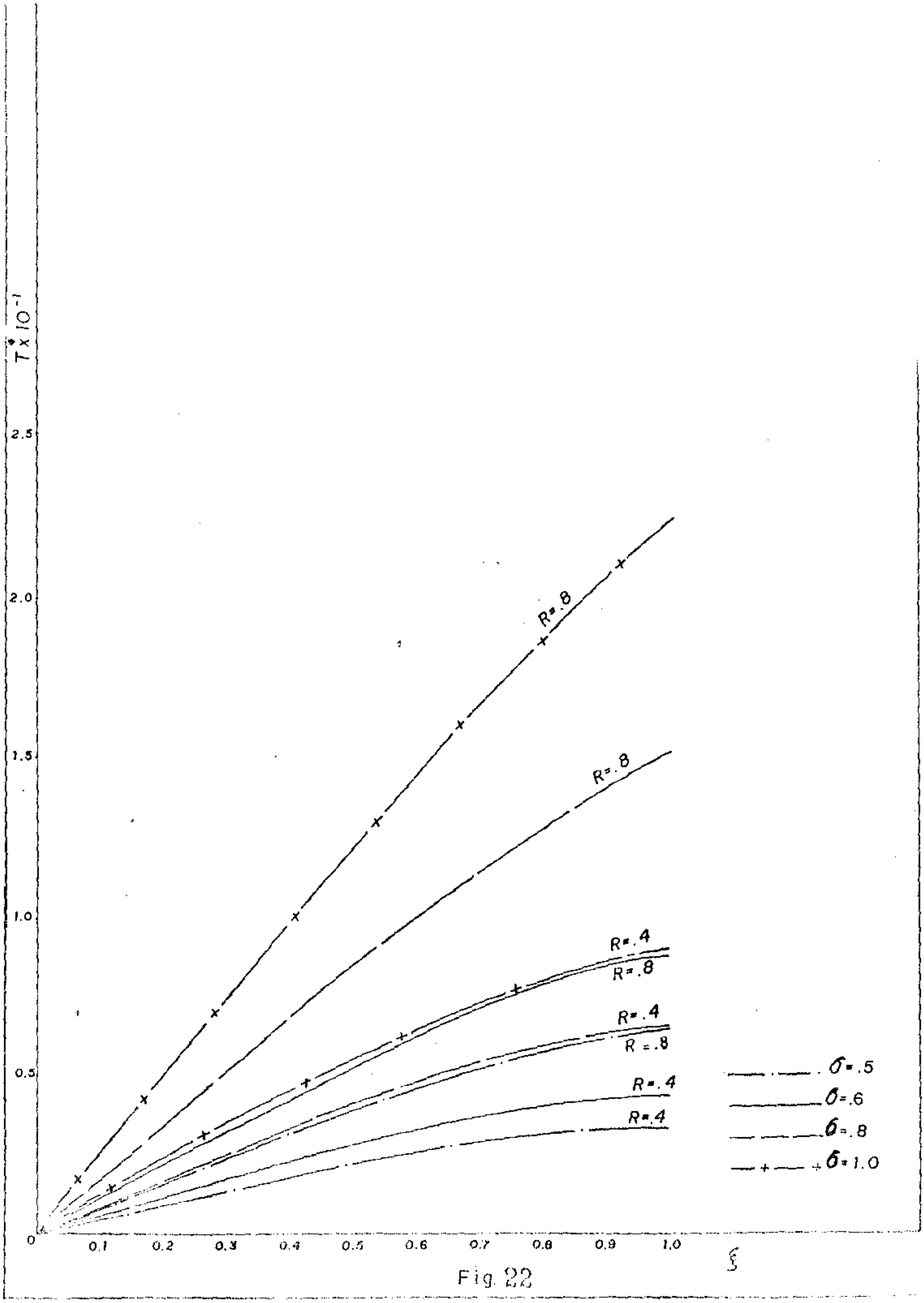
$T \times 10^{-1}$
1.5
1.12
.75
0.37
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1.0
R=.8
R=.8
R=.8
R=.4
R=.8
R=.4
R=.4
R=.4
σ=.5
σ=.6
σ=.8
σ=1.0

Fig. 20



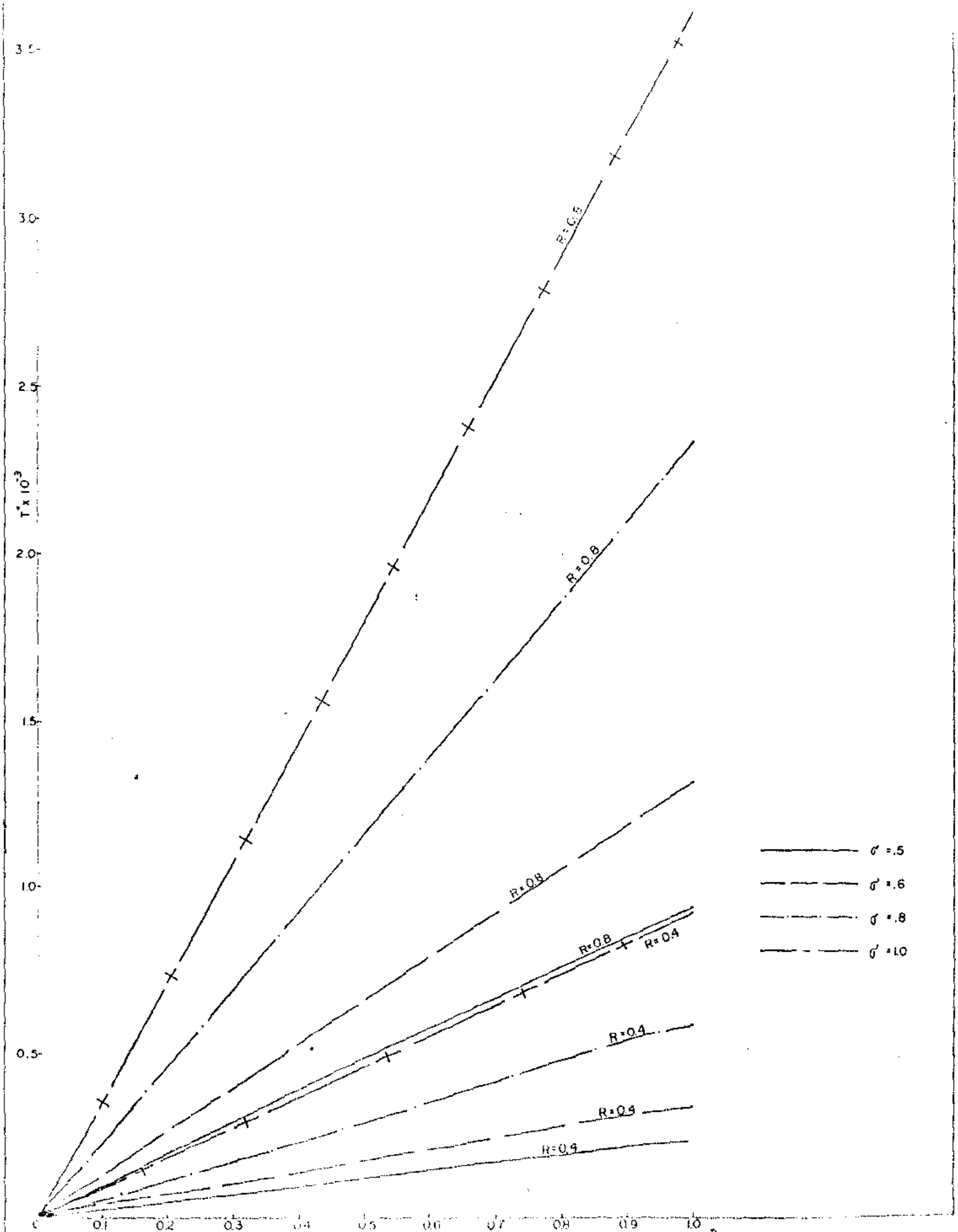
T*x10^-3
3.5
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1.0
ξ
R=.8
R=.8
R=.8
R=.8
R=.4
R=.4
R=.4
R=.4
σ=.5
σ=.6
σ=.8
σ=1.0

Fig. 21



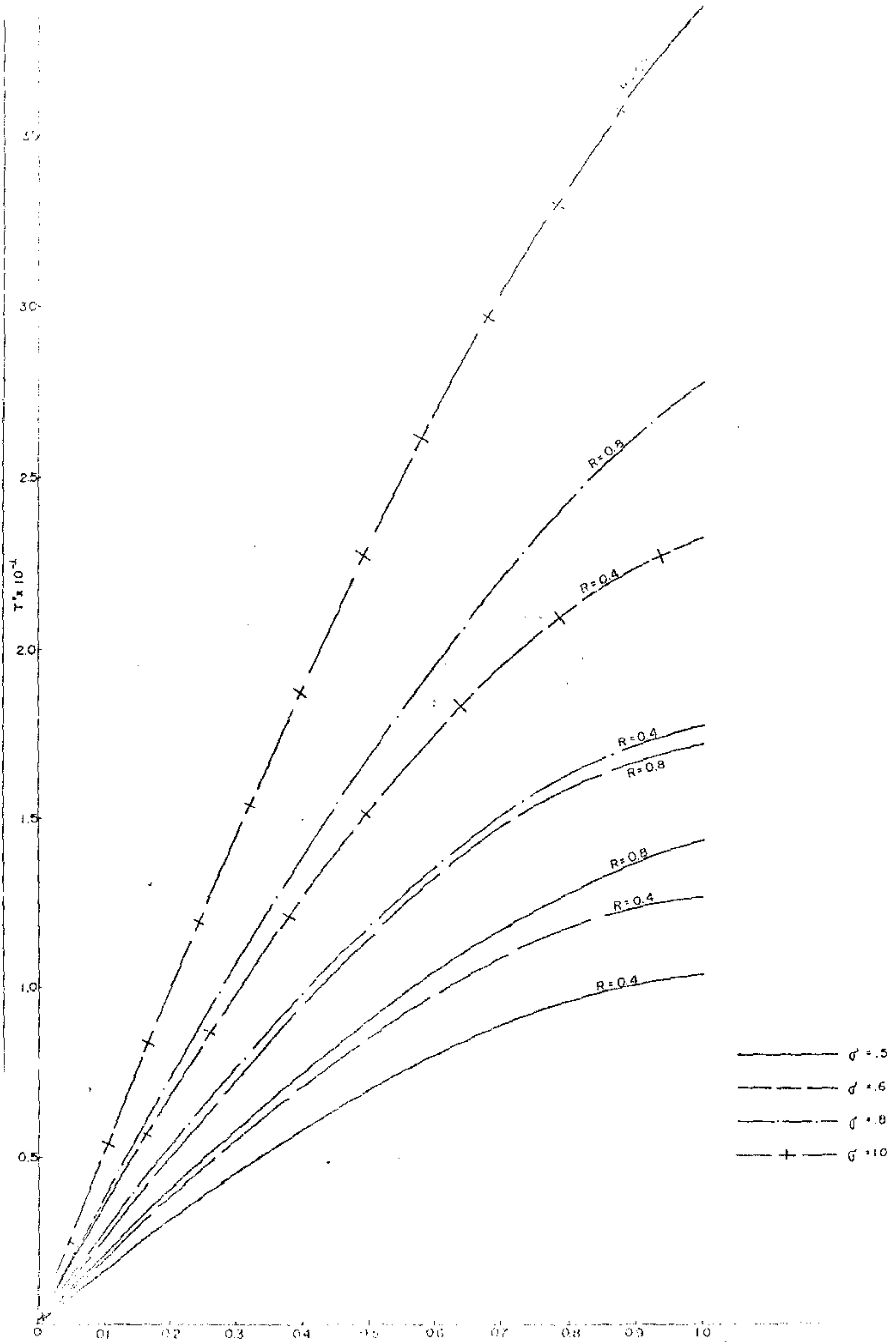
$T^* \times 10^{-1}$
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1.0
ξ
R=.8
R=.8
R=.4
R=.8
R=.4
R=.8
R=.4
R=.4
σ=.5
σ=.6
σ=.8
σ=1.0

Fig. 22



$T^{*} \times 10^{-3}$
3.5
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
R=0.5
R=0.8
R=0.8
R=0.8
R=0.4
R=0.4
R=0.4
R=0.4
σ =.5
σ =.6
σ =.8
σ =1.0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1.0
ξ

FIG 23



R=0.8
R=0.4
R=0.4
R=0.8
R=0.8
R=0.4
R=0.4
σ =.5
σ =.6
σ =.8
σ =1.0
$T' \times 10^{-1}$
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.6
0.7
0.8
0.9
1.0
ξ

FIG. 24

LEGENDA

Fig.1 - Curvas de T* para

$\sigma = 0.5$, $E = 0.3$, $\bar{r} = 0.5$, $R = 0.4, 0.8$

Fig.2 - Curvas de T* para

$\sigma = 0.5$, $E = 0.3$, $\bar{r} = 1.0$, $R = 0.4, 0.8$

Fig.3 - Curvas de T* para

$\sigma = 0.5$, $E = 0.3$, $\bar{r} = 2.0$, $R = 0.4, 0.8$

Fig.4 - Curvas de T* para

$\sigma = 0.3$, $E = 0.7$, $\bar{r} = 0.5$, $R = 0.4, 0.8$

Fig.5 - Curvas de T* para

$\sigma = 0.3$, $E = 0.7$, $\bar{r} = 1.0$, $R = 0.4, 0.8$

Fig.6 - Curvas de T* para

$\sigma = 0.3$, $E = 0.7$, $\bar{r} = 2.0$, $R = 0.4, 0.8$

Fig.7 - Curvas de T* para

$\sigma = 0.5$, $E = 0.3$, $\bar{r} = 0.5$, $R = 0.4, 0.8$

Fig.8 - Curvas de T* para

$\sigma = 0.5$, $E = 0.3$, $\bar{r} = 1.0$, $R = 0.4, 0.8$

Fig.9 - Curvas de T* para

$\sigma = 0.5$, $E = 0.3$, $\bar{r} = 2.0$, $R = 0.4, 0.8$

Fig.10 - Curvas de T* para

$\sigma = 0.3$, $E = 0.7$, $\bar{r} = 0.5$, $R = 0.4, 0.8$

Fig.11 - Curvas de T* para

$\sigma = 0.3$, $E = 0.7$, $\bar{r} = 1.0$, $R = 0.4, 0.8$

Fig.12 - Curvas de T* para

$\sigma = 0.3$, $E = 0.7$, $\bar{r} = 2.0$, $R = 0.4, 0.8$

Fig.13 - Curvas de T* para

$M = 1.0$, $\bar{r} = 2.0$, $R = 0.8$, $E = 0.3, 0.7$

Fig.14 - Curvas de T* para

$M = 5.0$, $\bar{r} = 2.0$, $R = 0.8$, $E = 0.3, 0.7$

Fig.15 - Curvas de T* para

$M = 1.0$, $\bar{r} = 5.0$, $R = 0.8$, $E = 0.3, 0.7$

Fig.16 - Curvas de T* para

$M = 5.0$, $\bar{r} = 5.0$, $R = 0.8$, $E = 0.3, 0.7$

Fig.17 - Curvas de T* para

$M = 1.0$, $\bar{r} = 10.0$, $R = 0.8$, $E = 0.3, 0.7$

Fig.18 - Curvas de T* para

$M = 5.0$, $\bar{r} = 10.0$, $R = 0.8$, $E = 0.3, 0.7$

Fig.19 - Curvas de T* para

$M = 0.5$, $\bar{r} = 0.5$, $E = 0.3$, $R = 0.4, 0.8$

Fig.20 - Curvas de T* para

$M = 1.0$, $\bar{r} = 0.5$, $E = 0.3$, $R = 0.4, 0.8$

Fig.21 - Curvas de T* para

$M = 0.5$, $\bar{r} = 5.0$, $E = 0.3$, $R = 0.4, 0.8$

Fig.22 - Curvas de T* para

$M = 1.0$, $\bar{r} = 5.0$, $E = 0.3$, $R = 0.4, 0.8$

Fig.23 - Curvas de T* para

$M = 0.5$, $\bar{r} = 10.0$, $E = 0.3$, $R = 0.4, 0.8$

Fig.24 - Curvas de T* para

$M = 1.0$, $\bar{r} = 10.0$, $E = 0.3$, $R = 0.4, 0.8$

APÊNDICE A

DEDUÇÃO DA EQUAÇÃO PARA A TEMPERATURA

$$R \left[- \bar{r} \frac{H'(\xi)}{2} \frac{\partial T^*}{\partial \bar{r}} + H(\xi) \frac{\partial T^*}{\partial \xi} \right]$$

$$= \frac{1}{\sigma} \left[\frac{\partial^2 T^*}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\partial \bar{r}} \frac{\partial T^*}{\partial \bar{r}} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial \xi^2} \right]$$

$$+ E \left\{ 3 \, (H'(\xi))^2 + \bar{r}^2 \left[\frac{1}{4} (H''(\xi))^2 + (G'(\xi))^2 \right] \right\} . \qquad \text{(A-1)}$$

Consideremos a equação da temperatura, (3-2)

$$\rho c_p \left[\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial r} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right] = K \nabla^2 T + \mu \phi , \qquad \text{(3-2)}$$

onde

$$\Phi = 2 \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{u}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right\}$$

$$+ \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 .$$

Vamos utilizar a seguinte transformação de variá vel

$$T^* = \frac{T - T_1}{T_2 - T_1} \qquad \text{(A-2)}$$

ou ainda,

$$T = T^* \ (T_2 - T_1) + T_1 \ . \tag{A-3}$$

Consideremos as seguintes transformações:

$$u = - r \ \Omega \frac{H'(\xi)}{2} \quad ,$$

$$v = r \ \Omega G(\xi) \quad , \tag{A-4}$$

$$w = d\Omega \ H(\xi)$$

e

$$\xi = \frac{z}{d} \quad . \tag{A-5}$$

Derivando-se as relações (A-3) e (A-4) em relação a r e ξ e substituindo-as juntamente com a expressão (A-5) na equação (3-2), obtemos

$$\begin{aligned} \rho c_p & \left[\left(- \frac{r \quad H'(\xi)}{2} \right) \quad (T_2 - T_1) \ \frac{\partial T^*}{\partial r} + \Big(\Omega H(\xi) \Big) (T_2 - T_1) \ \frac{\partial T^*}{\partial \xi} \right] = \\ & = K \left[\Big(T_2 - T_1 \Big) \ \frac{\partial^2 T^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \Big(T_2 - T_1 \Big) \ \frac{\partial T^*}{\partial r} + \frac{1}{d^2} \Big(T_2 - T_1 \Big) \ \frac{\partial^2 T^*}{\partial \xi^2} \right] \\ & + \mu \left\{ 2 \quad \left(\frac{-\Omega H'(\xi)}{2} \right)^2 + \left(\frac{-\Omega H'(\xi)}{2} \right)^2 + \frac{1}{d} \Big(\Omega \ H'(\xi) \Big)^2 \right. \\ & \left. + \frac{1}{d^2} \left[\frac{-r \ \Omega H''(\xi)}{2} \right]^2 + \frac{1}{d^2} \Big[r \Omega G'(\xi) \Big] \right\} \end{aligned} \tag{A-6}$$

oü ainda,

$$\rho c_p \left(T_2-T_1\right) \Omega \left[\frac{-r\ H'(\xi)}{2} \frac{\partial T^*}{\partial r} + H(\xi) \frac{T^*}{\partial \xi}\right]$$

$$= K \left(T_2-T_1\right)\left[\frac{\partial T^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T^*}{\partial r} + \frac{1}{d^2} \frac{\partial^2 T^*}{\partial \xi^{\ 2}}\right]$$

$$+ \mu \left\{2 \left[2 \left(\frac{-\Omega H'(\xi)}{2}\right)^2 + \left(\Omega H'(\xi)\right)^2\right.\right.$$

$$\left.\left.+ \frac{r^2}{d^2} \Omega^2 \left(\frac{H''(\xi)}{2}\right)^2 + \frac{r^2}{d^2} \Omega^2 \left(G'(\xi)\right)^2\right]\right\}. \quad \text{(A-7)}$$

Introduzindo-se a variável adimensional $\bar{r} = \frac{r}{d}$ na equação (A-7), temos

$$\rho c_p \left(T_2-T_1\right)\Omega \left[\frac{-\bar{r}H'(\xi)}{2d}(d) \frac{\partial T^*}{\partial \bar{r}} + H(\xi) \frac{\partial T^*}{\partial \xi}\right]$$

$$= K \left(T_2-T_1\right)\left[\frac{1}{d^2} \frac{\partial^2 T^*}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{d^2\bar{r}} \frac{\partial T^*}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{d^2} \frac{\partial^2 T^*}{\partial \xi^2}\right]$$

$$+ \mu\Omega^2 \left\{3 \left(H'(\xi)\right)^2 + \frac{d^2\bar{r}^2}{d^2} \left[\left(\frac{H''(\xi)}{2}\right)^2 + \left(G'(\xi)\right)^2\right]\right\}. \quad \text{(A-8)}$$

Multiplicando ambos os lados da equação (A-8) por

$\dfrac{d^2}{\mu c_p(T_2-T_1)}$ obtemos:

$$\frac{d^2\rho\,\Omega}{\mu}\left[\frac{-\bar{r}H'(\xi)}{2}\,\frac{\partial T^*}{\partial \bar{r}} + H(\xi)\frac{T^*}{\partial \xi}\right]$$

$$=\left(\frac{K}{\mu c_p}\right)\left[\frac{\partial^2 T^*}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}}\,\frac{\partial T^*}{\partial \bar{r}} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial \xi^2}\right]$$

$$+\left(\frac{\Omega^2 d^2}{c_p(T_2-T_1)}\right)\left\{3\left(H'(\xi)\right)^2 + \bar{r}^2\left[\frac{1}{4}\left(H''(\xi)\right)^2 + \left(G'(\xi)\right)^2\right]\right\} \qquad \text{(A-9)}$$

Substituindo os números de Reynolds, ($R = \dfrac{d^2\rho\Omega}{\mu}$), Prandtl, ($\sigma = \dfrac{\mu c_p}{K}$), e Eckert, ($E = \dfrac{\Omega^2 d^2}{c_p(T_2-T_1)}$), na equação (A-9), teremos a equação (A-1) deduzida.

APÊNDICE B

COEFICIENTES REFERENTES ÀS SOLUÇÕES DAS EQUAÇÕES DOS CAPÍTULOS II E III

Coeficientes a_i (i=1,4), referentes à função H_1 (2-19),

$$a_1 = \frac{(1-s)^2}{30} \quad ,$$

$$a_2 = \frac{s(1-s)}{6} \quad ,$$

$$a_3 = \frac{1}{30}\,(1-s)\,(7s+3) \ ,$$

e

$$a_4 = \frac{1}{30}\,(1-s)\,(3s+2) \ .$$

Coeficientes b_i (i = 1,6), referentes à função G_2 (2-21),

$$b_1 = \frac{-1}{315}\,(1-s)^3 \quad ,$$

$$b_2 = \frac{-1}{45}\,s\,(1-s)^2 ,$$

$$b_3 = \frac{1}{300}\,(1-s)\,(-17s^2+4s+3) \ ,$$

$$b_4 = \frac{-1}{180}\,(1-s)\,(-12s^2-4s+1) \ ,$$

$$b_5 = \frac{-1}{90}\,s(1-s)\,(3s+2) \ ,$$

e

$$b_6 = \frac{1}{600} (1-s) (27s^2 + 16s - 8).$$

Coeficientes c_i ($i = 1,8$), referentes à equação (3-26):

$$c_1 = \frac{E\sigma}{56}\left[\frac{3}{2}(1-s)^2 a_1 - 100\, a_1^2 - 14(1-s)\, b_1 \right] ,$$

$$c_2 = \frac{E\sigma}{42}\left[-\sigma(1-s)^2 (2a_1-a_2) - 120a_1a_2 - 12(1-s)\, b_2 \right] ,$$

$$c_3 = \frac{E\sigma}{30}\left[\frac{-\sigma}{2}(1-s)^2 (3a_2-a_3) - (36a_2^2+60a_1a_3) - 10(1-s)\, b_3 \right] ,$$

$$c_4 = \frac{E\sigma}{20}\left[-\sigma(1-s)^2 a_3 - (20a_1a_4+36a_2a_3) - 8(1-s)\, b_4 \right] ,$$

$$c_5 = \frac{E\sigma}{12}\left[\frac{-\sigma}{2}(1-s)^2 a_4 - (9a_3^2+12a_2a_4) - 6(1-s)\, b_5 \right] ,$$

$$c_6 = E\sigma \left[\frac{a_3a_4}{2} \right] ,$$

$$c_7 = \frac{-E\sigma}{2}\left[a_4^2 + 2(1-s)\, b_6 \right] ,$$

$$c_8 = -\left[\frac{c_1}{56} + \frac{c_2}{42} + \frac{c_3}{30} + \frac{c_4}{20} + \frac{c_5}{12} + \frac{c_6}{6} + \frac{c_7}{2} \right] .$$

Coeficientes d_i ($i = 1,9$), referentes à equação (3-27):

$$d_1 = \frac{1}{90}\,(g_1 - h_1 - 4_{c_1})$$

onde $$g_1 = \frac{E\sigma^2}{3}\,(1-s)^2\, a_1$$

e $$h_1 = 75E\sigma\, a_1^2 \quad ;$$

$$d_2 = \frac{1}{72}(g_2 - h_2 - 4_{c_2})$$

onde $$g_2 = E\sigma^2\,(1-s)^2\left[\frac{a_2}{3} - \frac{a_1}{2}\right]$$

e $$h_2 = 120\, E\sigma\, a_1 a_2 \;;$$

$$d_3 = \frac{1}{56}\,(g_3 - h_3 - 4_{c_3}) \;,$$

onde $$g_3 = E\sigma^{\,2}(1-s)^2\left[\frac{a_3}{3} - \frac{a_1}{2}\right]$$

e $$h_3 = E\sigma\,(48a_1^2 + 90\, a_1 a_3) \;;$$

$$d_4 = \frac{1}{42}\,(g_4 - h_4 - 4_{c_4}) \;,$$

onde $$g_4 = \frac{2}{3}\, E\sigma^2(1-s)^2 + 2a_4 - a_3 + \frac{a_1}{36} + a_1.$$

e $$h_4 = E\sigma\,(60\, a_1 a_4 + 72\, a_2 a_3) \;;$$

$$d_5 = \frac{1}{30} (g_5 - h_5 - 4c_5)$$

onde $$g_5 = - E\sigma^2 (1-s)^2 + a_4 + \frac{a_2}{6} + \sigma a_2$$

e $$h_5 = E\sigma \quad (27a_3^2 + 48a_2a_4) \quad ;$$

$$d_6 = \frac{1}{20} (g_6 - h_6 - 4c_6) \quad ,$$

onde $$g_6 = \left[\frac{1}{6} E\sigma^2 (1-s)^2 + \sigma \right] a_3$$

e $$h_6 = 36 \; E\sigma \; a_3 a_4 \quad ;$$

$$d_7 = \frac{1}{12} (g_7 - h_7 - 4c_7) \quad ,$$

onde $$g_7 = \left[\frac{1}{6} E\sigma^2 (1-s)^2 + \sigma \right] a_4$$

e $$h_7 = 12 E\sigma \; a_4^2 \quad ;$$

$$d_8 = \frac{-2}{3} c_8 \quad ,$$

$$d_9 = - (d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5 + d_6 + d_7 - d_8) .$$

Coeficientes e_i (i=1,7), referentes à equação (3-40):

$$e_1 = \frac{E\sigma}{56}\left[\frac{3}{2}\ \sigma(1-s)^2\ a_1 - 100\ a_1^2 - 14(1-s)\ b_1\right] ,$$

$$e_2 = \frac{E\sigma}{42}\left[-\ \sigma(1-s)^2(4a_1 - a_2) - 120\ a_1a_2 - 12(1-s)\ b_2\right] ,$$

$$e_3 = \frac{E\sigma}{30}\left[-\ \sigma(1-s)^2(3a_2 - \frac{1}{3}a_3) - (36a_2^2 + 60a_1a_3) - 10(1-s)\ b_3\right] ,$$

$$e_4 = \frac{E\sigma}{20}\left[-\ 2\sigma(1-s)^2a_3 - (20a_1a_4 + 36a_2a_4) - 8(1-s)\ b_4\right] ,$$

$$e_5 = \frac{E\sigma}{12}\left[-\ \sigma(1-s)^2a_4 - (9a_3^2 + 12a_2a_4) - 6(1-s)\ b_5\right] ,$$

$$e_6 = -E\sigma\ a_3a_4 ,$$

e

$$e_7 = -\left[E\sigma\ a_4^2 + 2(1-s)\ b_6\right] .$$

Coeficientes $f_i\,(i = 1,9)$, referentes à equação (3-41):

$$f_1 = -\frac{1}{90}\left[h_1 + {}^4c_1 - \frac{2}{3}\,a_1(1-s)^2\,E\,\sigma^2\right] ,$$

$$f_2 = -\frac{1}{72}\left[h_2 + {}^4c_2 - E\sigma^2(1-s)^2\left(\frac{2}{3}\,a_2 - 2a_1\right)\right] ,$$

$$f_3 = -\frac{1}{56}\left[h_3 + {}^4c_3 - E\sigma^2(1-s)^2\left(\frac{2}{3}\,a_3 - 2a_2\right)\right] ,$$

$$f_4 = -\frac{1}{42}\left[h_4 + {}^4c_4 - E\sigma^2(1-s)^2\left(\frac{2}{3}\,a_4 - 2a_3 + \frac{4}{3}\,a_1\right)\right] ,$$

$$f_5 = -\frac{1}{30}\left[h_5 + {}^4c_5 - E\sigma^2(1-s)^2\left(-2a_4 + \frac{4}{3}\,a_2\right)\right] ,$$

$$f_6 = -\frac{1}{20}\left[h_6 + {}^4c_6 - \frac{4}{3}\,E\sigma^2(1-s)^2\,a_3\right] ,$$

$$f_7 = -\frac{1}{12}\left[h_7 + {}^4c_7 - \frac{4}{3}\,E\sigma^2(1-s)^2\,a_4\right] ,$$

$$f_8 = -\frac{1}{6}\;{}^4c_8$$

e

$$f_9 = -\left[10f_1 + 9f_2 + 8f_3 + 7f_4 + 6f_5 + 5f_6 + 4f_7 + 4f_8\right]$$

APÊNDICE C

COEFICIENTES REFERENTES ÀS SOLUÇÕES DAS EQUAÇÕES DO CAPÍTULO IV

Coeficientes referentes à equação H_1, (4-17)

$$a_0 = \frac{1}{6M^3 \operatorname{senh}^2 M} ,$$

$$b_0 = M \operatorname{senh} M + 2 (1 - \cosh M),$$

$$A = \frac{a_0}{b_0} M^2 \left[(1 - \cosh M) \operatorname{senh} 2M + 2 (M \cosh M - \operatorname{senh} M) + 2(\operatorname{senh} M - M) \cosh 2M \right],$$

$$B = \frac{a_0}{b_0} M^2 \left[2 (1-\cosh 2M)(\cosh M-1) - \operatorname{senh} M (2M-\operatorname{senh} 2M) \right],$$

$$C = \frac{a_0}{b_0} \left[(\cosh M - 1) \operatorname{senh} 2M-2 (M \cosh M- \operatorname{senh} M) - 2 \cosh 2M (\operatorname{senh} M-M) \right]$$

e

$$D = \frac{a_0}{b_0} M \left[- \operatorname{senh} M \operatorname{senh} 2M+2 (\cosh M-1) (1+\cosh 2M) \right]$$

Coeficientes P_i, $(i = 1,5)$, referentes à equação

C_2, (4-17),

$$P_1 = \frac{a}{M^3 \operatorname{senh} M}$$

$$P_2 = \frac{P_1}{\operatorname{senh} M}(1-\cosh M) - \frac{3 \cosh M}{4 \operatorname{senh}^2 M}\left[a_0 - \frac{D}{M^3}\right]$$

$$- \frac{2C + D}{4 \operatorname{senh} M} + \frac{a_0 \operatorname{senh} 3M}{16M \operatorname{senh}^2 M} \quad ,$$

$$P_3 = \frac{3}{4 \operatorname{senh} M}\left[a_0 - \frac{D}{M}\right],$$

$$P_4 = \frac{1}{4 \operatorname{senh} M}$$

e

$$P_5 = \frac{a_0}{-16M \operatorname{senh} M}$$

Coeficientes referentes à equação (4- 21),

$$K = \frac{1}{\operatorname{senh} M} \quad ,$$

$$L = \frac{-1}{8 M^2}$$

e

$$N = \frac{-\cosh 2M}{8M^2} - \frac{1}{4} + L$$

Coeficientes K_i, $(i = 0,17)$ e $Y_i (i = 0,22)$ referentes à equação (4- 23)

$$K_0 = \frac{B}{2M^2} - \frac{A}{M} \quad ,$$

$$K_1 = \frac{1}{8} (A^2 - B^2) \quad ,$$

$$K_2 = \frac{1}{8} (A^2 + B^2) \quad ,$$

$$K_3 = \frac{C}{4M} + a_0 N \quad ,$$

$$K_4 = \frac{-D}{8M^2} + 2a_0 L M \quad ,$$

$$K_5 = \frac{-1}{M} \left[\frac{BN}{M} - LA + \frac{3A}{16M^2} \right] \quad ,$$

$$K_7 = \frac{A}{2M^2} - \frac{BN}{M}$$

$$K_8 = -\frac{a_0}{4M} + NC - LD \quad ,$$

$$K_9 = \frac{D}{4M} + \frac{a_0}{2} \quad ,$$

$$K_{10} = P_1 + 2\frac{P_4 C}{M} \quad ,$$

$$K_{11} = P_2 + \frac{P_3}{M} + 3P_5 \quad ,$$

$$K_{12} = P_2 + \frac{P_3}{M}$$

$$K_{13} = \frac{2P_4D}{M} + P_3 \quad ,$$

$$\begin{aligned}
K_{14} = \; & E\sigma \biggl[\frac{K_1}{2} + \frac{K_2}{4M^2} \cosh 2M + Aa_0 \left(\frac{1}{9} \operatorname{senh} 3M + \operatorname{senh} M\right) \\
& - a_0^2 \; M^4 + Ba_0 \left(\frac{1}{9} \cosh 3M - \cosh M\right) + \frac{AB}{16M^2} \operatorname{senh} 2M \\
& + \frac{a_0^2 M^2}{8} \cosh 4M \biggr] + E\tau^2 K^2 \biggl[\biggl(K_5 + \frac{B}{M^2} - \frac{A}{4M} - \frac{3}{2} \frac{A}{M^3} \\
& + K18 - \frac{2K7}{M} \biggr) \cdot \operatorname{senh} M + \left(\frac{K_3}{4} + \frac{K9}{4} + \frac{a_0F}{2} + \frac{a_0}{4} \right) \cdot \operatorname{senh} 2M \\
& + \left(K6 + \frac{A}{M^2} - \frac{B}{4M} - \frac{3B}{2M^3} + K_7 - \frac{2K18}{M} \right) \cdot \cosh M \\
& + \left(\frac{K_4}{4} - \frac{K_9}{4M} - \frac{a_0FM}{2} - \frac{3a_0}{16M} - \frac{a_0M}{8} \right) \cdot \cosh 2M \\
& + M^2 \left(\frac{K_8}{2} + \frac{D}{48} + \frac{C}{12} \right) + \frac{A}{144M^3} \operatorname{senh} 3M + \frac{B}{144M^3} \cosh 3M \biggr] \\
& + E\sigma \biggl[\left(\frac{K_{10}}{4} + \frac{K_{13}}{4} \quad \frac{P_4C}{2M} \quad \frac{P_4D}{2M} \right) \cdot \operatorname{senh} 2M \\
& + \left(\frac{K_{11}}{4} - \frac{K_{13}}{4M} + \frac{P_4C}{2} + \frac{DP_4}{4} + \frac{3DP_4}{8M^2} \right) \cdot \cosh 2M \\
& + \frac{3}{16} P_5 \cosh 4M + M^2 \left(\frac{P_4C}{3} + \frac{P_4D}{12} + \frac{K_{12}}{2} \right) \biggr] \quad - K_{15}
\end{aligned}$$

$$Y_0 = K_5 - \frac{2K_7}{M} - \frac{3A}{2M^2} ,$$

$$Y_1 = K_0 - \frac{B}{M^2} ,$$

$$Y_2 = \frac{-A}{4M} ,$$

$$Y_3 = K_6 - \frac{2K_0}{M} - \frac{3B}{2M^3} ,$$

$$Y_4 = K_7 - \frac{A}{M^2} ,$$

$$Y_5 = \frac{-B}{4M} ,$$

$$Y_6 = \frac{1}{2}\left(\frac{K_3}{2} + a_0 N\right) ,$$

$$Y_7 = \frac{1}{4}\left(K_q + a_0\right) ,$$

$$Y_8 = \frac{1}{4}\left(K_4 - \frac{K_9}{M} - \frac{3a_0}{4M}\right) ,$$

$$Y_9 = -\frac{a_0 NM}{2} ,$$

$$Y_{10} = -\frac{a_0 M}{8} ,$$

$$Y_{11} = \frac{A}{144M^3} ,$$

$$Y_{12} = \frac{B}{144M^3} \quad ,$$

$$Y_{13} = \frac{AB}{4M^2} \quad ,$$

$$Y_{14} = \frac{K_2}{4M^2} \quad ,$$

$$Y_{15} = \frac{M^2 a_0^2}{8} \quad ,$$

$$Y_{16} = \frac{K_1}{2} - M^4 a_0^2 \quad ,$$

$$Y_{17} = \frac{1}{2}\left(\frac{K_{10}}{2} + \frac{P_4 C}{M}\right) \quad ,$$

$$Y_{18} = \frac{1}{2}\left(\frac{K_{13}}{2} + P_4 D\right) \quad ,$$

$$Y_{19} = \frac{1}{4}\left(K_{11} + \frac{K_{13}}{M} + \frac{3DP_4}{2M^2}\right) \quad ,$$

$$Y_{20} = \frac{P_4 C}{2} \quad ,$$

$$Y_{21} = \frac{P_4 D}{2} \quad ,$$

e

$$Y_{22} = \frac{3P_5}{16} \quad .$$

Coeficientes referentes à equação (4- 25) ,

$$Q = -\frac{1}{32M^4}$$

e

$$P = \frac{1}{4E\sigma M^2K^2} - \frac{\cosh\ 2M}{32M^4} - \frac{1}{48} - \frac{N}{6} - \frac{L}{2} - Q\ .$$

Coeficientes A_i,(i = 1,37) referentes ã equação (4- 27),

$$A_1 = 2A\left(\frac{3D}{M} - 5\ a_0\right) \qquad ,$$

$$A_2 = \frac{11AB}{16M^2} \qquad ,$$

$$A_3 = \frac{50}{81}\left(Aa_0\right) \qquad ,$$

$$A_4 = 2B\ \left(3D + 5a_0\right) \qquad ,$$

$$A_5 = 3\left(\frac{A^2}{8} + \frac{B^2}{8} + a_0DM - \frac{K_2}{12M^2}\right) \qquad ,$$

$$A_6 = \frac{50}{81}\left(Ba_0\right) \qquad ,$$

$$A_7 = \frac{11}{32}\left(a_0^2M^2\right) \qquad ,$$

$$A_8 = 3\left(\frac{D^2M^2}{2} - \frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} + a_0^2M^4\right) \qquad ,$$

$$A_9 = \frac{M^2}{3}\left(\frac{K_1}{2} - a_0^2 M^4\right) \quad ,$$

$$A_{10} = \frac{-19A}{8M^3} - \frac{8A}{M^3} + \frac{12NB}{M^2} - \frac{8LA}{M} + 4PB + 4K_5 - \frac{16K_7}{M} \quad ,$$

$$A_{11} = 4\left(\frac{7B}{2M^2} - \frac{2NA}{M} + LB + K_0\right) \quad ,$$

$$A_{12} = -\frac{3A}{M} + 2NB \quad ,$$

$$A_{13} = \frac{B}{3} \quad ,$$

$$A_{14} = \frac{C}{16M} + \frac{7}{4} a_0 N + a_0 M^2 P + \frac{K_3}{4} \quad ,$$

$$A_{15} = \frac{1}{4}\left(\frac{D}{4M} + \frac{7a_0}{2} + \frac{a_0 LM^2}{4} + K_9\right) \quad ,$$

$$A_{16} = \frac{a_0 NM^2}{2} \quad ,$$

$$A_{17} = \frac{a_0 M^2}{12} \quad ,$$

$$A_{18} = -\frac{21B}{8M^3} + \frac{12NA}{M^2} + \frac{8LB}{M} + 4PA + 4K_6 - \frac{16K_0}{M} + \frac{8B}{M^3} \quad ,$$

$$A_{19} = 4\left(\frac{7A}{2M^2} - \frac{2NB}{M} + LA + K_7\right) \quad ,$$

$$A_{20} = \frac{-3B}{M} + 2NA \quad ,$$

$$A_{21} = \frac{A}{3} \quad ,$$

$$A_{22} = \frac{1}{4}\left(\frac{-D}{4M^2} - \frac{a_0}{M} - 4a_0LM + K_4 - \frac{2K_9}{M} - \frac{5a_0NM}{2}\right) \quad ,$$

$$A_{23} = \frac{3}{2}\left(a_0NM\right) \quad ,$$

$$A_{24} = -\frac{3a_0M}{8} \quad ,$$

$$A_{25} = \frac{A}{M^3}\left(\frac{1}{324} + \frac{1}{72}\right) \quad ;$$

$$A_{26} = \frac{B}{M^3}\left(\frac{1}{324} + \frac{1}{72}\right) \quad ,$$

$$A_{27} = \frac{a_0}{128M} \quad ,$$

$$A_{28} = \frac{M}{2}\left(4PCM^3 - \frac{a_0}{8}\right) \quad ,$$

$$A_{29} = \frac{2}{3}M^4\left(PD + LC\right) \quad ,$$

$$A_{30} = \frac{M^4}{6}\left(2LD + 2NC + K_8\right) \quad ,$$

$$A_{31} = \frac{M^4}{10}\left(ND + \frac{C}{3}\right) \quad ,$$

$$A_{32} = \frac{M^4D}{72} \quad ,$$

$$A_{33} = \frac{K_{10}}{4} - \frac{P_4 C}{M} ,$$

$$A_{34} = \frac{K_{13}}{4} - \frac{P_4 D}{M} ,$$

$$A_{35} = \frac{K_{11}}{4} - \frac{K_{13}}{2M} + \frac{5DP_4}{4M^2} ,$$

$$A_{36} = \frac{CP_4}{2} ,$$

$$A_{37} = \frac{DP_4}{4} ,$$

$$K_{17} = \frac{E\sigma}{M^2} (A_4 + A_5 + A_6 + A_7) ,$$

$$- \frac{E\sigma^2 K^2}{M^2} (A_{18} + A_{22} + A_{26} + A_{27}) ,$$

$$- \frac{E\sigma K}{M^2} (A_{35} + \frac{3P5}{64}) ,$$

$$K_{16} = \frac{E\sigma}{M^2} \Big[A_1 \text{ senh } M + A_2 \text{ senh } 2M + A_3 \text{ senh } 3M$$

$$+ A_4 \cosh M + A_5 \cosh 2M + A_6 \cosh 3M + A_7 \cosh 4M$$

$$+ A_8 - A_9 \Big] -$$

$$- \frac{E\sigma^2 K^2}{M^2} \Big[\left(A_{10} + A_{11} + A_{12} + A_{13}\right) \cdot \text{senh } M$$

$$+ \left(A_{14} + A_{15} + A_{16} + A_{17}\right) \cdot \text{senh } 2M$$

$$+\left(A_{18} + A_{19} + A_{20} + A_{21}\right).\cosh M + \left(A_{22}+A_{23}+A_{24}\right).\cosh 2M$$

$$+ \ A_{25} \text{ senh } 3M + A_{26} \cosh 3M + A_{27} \cosh 4M$$

$$+ A_{28} + A_{29} + A_{30} + A_{31} + A_{32} \Big]$$

$$- \frac{E\sigma K}{M^2} \left[\left(A_{33} + A_{34}\right).\text{senh } 2M + \left(A_{35} + A_{36} + A_{37}\right).\cosh 2M\right.$$

$$\left.+ \frac{3P_5}{64} \cosh 4M + M^4.\left(\frac{P_4C}{15} + \frac{P_4D}{90} + \frac{K_{12}}{6}\right)\right]$$

$$+ \frac{2}{3} K_{14} + 2K_{15} - K_{16}.$$

Coeficientes referentes à equação (4- 21)

$$\bar{N} = - \frac{\text{senh } 2M}{4M} - \frac{1}{2} \quad .$$

Coeficientes referentes à equação (4- 23)

$$\bar{K}_{14} = E\sigma^2 K^2 \left[\left(MK_6 - K_0 + MK_7 + \frac{A}{2M} - \frac{B}{4} - \frac{B}{2M^2}\right).\text{senh } M\right.$$

$$+ \left(MK_5 - K_7 + MK_0 + \frac{B}{2M} - \frac{A}{4} - \frac{A}{2M^2}\right).\cosh 2M$$

$$+ \left(\frac{MK_4}{2} - a_0 N M^2 - \frac{K_9}{4} - \frac{a_0 M^2}{8} - \frac{a_0}{16}\right).\text{senh } 2M$$

$$+ M\left(\frac{K_3}{2} + \frac{K_9}{2} + \frac{a_0 N}{2} + \frac{a_0}{8}\right) . \cosh 2M$$

$$+ M^2 \left(K_8 + \frac{C}{4} + \frac{D}{12}\right)\Bigg]$$

$$+ \quad E\sigma K \left[M\frac{K_{11}}{2} + \frac{K_{13}}{4} + MP_4C + \left(M\frac{P_4D}{2} - \frac{P_4D}{M}\right) \text{senh } 2M\right.$$

$$+ \frac{1}{2}\left(M\ K_{10} + M\ K_{11} - P_4C - P_4D\right) \cosh 2M$$

$$\left. + \frac{3}{4}\ MP_5 \text{ senh } (4M\ ) + M^2\left(\frac{P_4D}{3} + P_4C + K_{12}\right)\right]$$

$$+E\sigma \left[K_1 + \frac{K_2}{2M} \text{senh } 2M + \frac{AB}{8M} \cosh 2M + \right.$$

$$+ MBa_0 \left(\frac{1}{3} \text{ senh } 3M - \text{senh } M\right) + MA_0\left(\frac{1}{3} \cosh 3M\right.$$

$$\left. \left. + \cosh M\right) + \frac{a_0^2 M^3}{2} \text{ senh } 4M - 2a_0^2\ M^4 \right] .$$

Coeficiente referente à equação (4- 25)

$$\bar{P} = -\left[\frac{\frac{\text{senh } 2M}{3}}{16M} + \frac{1}{12} + \frac{N}{2} + L\right]$$

Coeficientes L_i (i = 1,20) e $\bar{K}_{16}$ referentes à equação (4- 27)

$$L_1 = MA_{10} + A_{19}\ ,$$

$$L_2 = MA_{21} + 2A_{20} \quad ,$$

$$L_3 = MA_{12} + 3A_{21} \quad ,$$

$$L_4 = MA_{13} \quad ,$$

$$L_5 = A_{11} + MA_{18} \quad ,$$

$$L_6 = 2A_{12} + MA_{19} \quad ,$$

$$L_7 = 2A_{13} + MA_{20} \quad ,$$

$$L_8 = MA_{21} \quad ,$$

$$L_9 = A_{15} + 2MA_{22} \quad ,$$

$$L_{10} = 2\left(A_{16} + MA_{23}\right) \quad ,$$

$$L_{11} = 3A_{17} + 2MA_{24} \quad ,$$

$$L_{12} = 2MA_{14} + A_{23} \quad ,$$

$$L_{13} = 2MA_{15} + 2A_{24} \quad ,$$

$$L_{14} = 2MA_{16} \quad ,$$

$$L_{15} = 2MA_{17} \quad ,$$

$$L_{16} = 2M\, A_{33} + A_{36} \quad ,$$

$$L_{17} = 2\left(M\, A_{34} + A_{37}\right) \quad ,$$

$$L_{18} = A_{34} + 2M\, A_{35} \quad ,$$

$$L_{19} = 2M\, A_{36} \quad ,$$

e

$$L_{20} = 2M\, A_{37} \quad .$$

$$\bar{K}_{16} = \frac{-E\sigma^2 K^2}{M^2} \Bigg[\left(L_1 + L_2 + L_3 + L_4\right) . \cosh M$$

$$+ \left(L_5 + L_6 + L_7 + L_8\right) . \operatorname{senh} M + \left(L_9 + L_{10} + L_{11}\right)$$

$$. \operatorname{senh} 2M + \left(L_{12} + L_{13} + L_{14} + L_{15}\right) . \cosh 2M$$

$$+ 3M\, A_{25} \cosh 3M + 3M\, A_{26} \operatorname{senh} 3M + 4M\, A_{27} \operatorname{senh} 4M$$

$$+ 2A_{28} + 3A_{29} + 4A_{30} + 5A_{31} + 6A_{32} \Bigg] + \frac{E\sigma}{M^2} \Bigg[MA_1 \cosh M$$

$$+ \frac{1}{2M} A_2 \cosh 2M + 3M A_3 \cosh 3M + M A_4 \operatorname{senh} M +$$

$$+ 2M A_5 \operatorname{senh} 2M + 3M A_6 \operatorname{senh} 3M + 4M A_7 \operatorname{senh} 4M$$

$$+ 2A_8 + A_9 \Bigg] - \frac{E\sigma K}{M^2} \cdot \Bigg[\left(L_{16} + L_{17} \right) \cdot \cosh 2M +$$

$$+ \left(L_{18} + L_{19} + L_{20} \right) \cdot \operatorname{senh} 2M + \frac{3MP_5}{16} \operatorname{senh} 4M +$$

$$+ M^4 \left(\frac{P_4 D}{15} + \frac{P_4 C}{3} + \frac{2}{3} K_{12} \right) \Bigg] + 2\bar{K}_{14} + 4K_{15} \cdot$$

BIBLIOGRAFIA

1 BATCHELOR, G.K. - Note on a class of soluctions of the Navier-Stokes equations representing steady rotationally synmetric flow. *Quart. Journ. Mech. and Applied Math. 4:* 1-41, 1951.

2 STEWARTSON,K. - On the flow between two rotating coaxial disks. *Proc. of the Cambridge Phyl. Soc.,49:*333-41, 1953.

3 SRIVASTAVA,A.C. - Flow of non-newtonian fluids at small Reynolds number two infinite disks; one rotating and the other at rest. *Quart. Journ. Mech. and Applied Math.,14:*353-8, 1961.

4 BHATNAGAR, R.K. - Flow of the non-newtonian fluid between two infinite parallel disks for large values of Reynolds number; one rotating and the other at rest. *Proc. Ind. Acad. Sci.,58:* 278-89, 1963.

5 GOLDSTEIN, S. - *Modern development in fluid mechanics.* New York, 1965. 2v.

6 BELLMAN,R, - *Perturbation techniques in mathematics, physics and engineering.* New York, Dover, 1966. 118p

7 NAYFEH, A.H. - *Perturbation methods.* New York, Wiley, 1973. 425p.

8 SHAMES, I.H. - *Mecânica dos fluidos.* São Paulo, Edgard Blücher, 1973. 2v.

9 HUGHES,W.F. & BRIHTON,J.A. - *Dinâmica dos fluidos.* São Paulo, McGraw-Hill do Brasil, 1974.

10 BHATNAGAR,R.K. & ZAGO, J.V. - Numerical investigation of the flow of viscoelastic fluid between rotating coaxial disks. *Rheol. Acta, 17*:557-67,1978.

11 STREETER,V.L. - *Mecânica dos fluidos.* São Paulo, McGraw-Hill, 1979.

12 BHATNAGAR, R.K. - Flow between coaxial rotating disks; with and without externally applied magnetic fields. *Inst. Journ. Maths and Math. Phys.* (a ser publicado)

13 BHATNAGAR, R.K. & PERERA ,M.C.N. - Numerical solutions for flow of an oldrayd fluid confined between coaxial rotating disks. *Journ. of Rheol.* (a ser publicado).