Thiago Fanelli Ferraiol

Diferenciabilidade dos expoentes de Lyapunov

Campinas

2012

Universidade Estadual de Campinas

Instituto de Matemática, Estatística
e Computação Científica

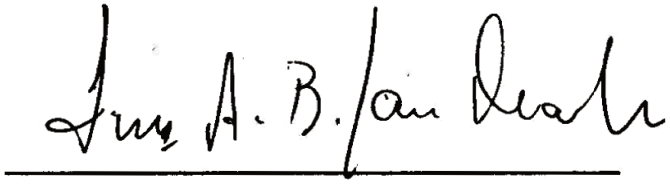
Thiago Fanelli Ferraiol

Diferenciabilidade dos expoentes de Lyapunov

Orientador: Prof. Dr. Luiz Antonio Barrera San Martin

Tese de doutorado apresentada ao Instituto de
Matemática, Estatística e Computação Científica
da Unicamp para obtenção do título de
Doutor em Matemática

Este exemplar corresponde à versão final da tese
defendida pelo aluno Thiago Fanelli Ferraiol
e orientada pelo prof. Dr. Luiz Antonio Barrera San Martin



Assinatura do Orientador

CAMPINAS
2012

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA POR
MARIA FABIANA BEZERRA MULLER - CRB8/6162
BIBLIOTECA DO INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E
COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA - UNICAMP

Ferraiol, Thiago Fanelli, 1984-
F41d Diferenciabilidade dos expoentes de Lyapunov / Thiago Fanelli Ferraiol. – Campinas, SP : [s.n.], 2012.

Orientador: Luiz Antonio Barrera San Martin.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

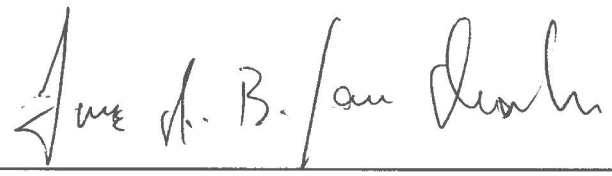
1. Lyapunov, Expoentes de. 2. Lie, Grupos de. 3. Variedades flag. 4. Fibrados (Matemática). 5. Aplicações diferenciáveis. I. San Martin, Luiz Antonio Barrera,1955-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

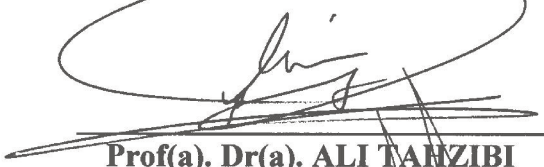
Título em inglês: Differentiability of Lyapunov exponents
Palavras-chave em inglês:
Lyapunov exponents
Lie Groups
Flag manifolds
Fiber bundles (Mathematics)
Differentiable maps
Área de concentração: Matemática
Titulação: Doutor em Matemática
Banca examinadora:
Luiz Antonio Barrera San Martin [Orientador]
Ali Tahzibi
Josiney Alves de Souza
Lorenzo Justiniano Díaz Casado
Pedro José Catuogno
Data de defesa: 10-12-2012
Programa de Pós-Graduação: Matemática

Tese de Doutorado defendida em 10 de dezembro de 2012 e aprovada

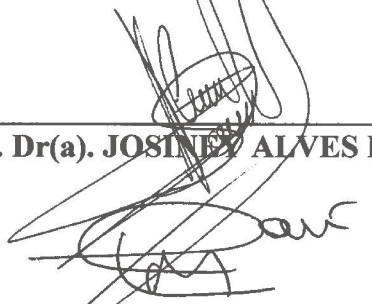
Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof(a). Dr(a). LUIZ ANTONIO BARRERA SAN MARTIN



Prof(a). Dr(a). ALI TAHZIBI



Prof(a). Dr(a). JOSINEY ALVES DE SOUZA

Prof(a). Dr(a). LORENZO JUSTINIANO DÍAZ CASADO

Prof(a). Dr(a). PEDRO JOSÉ CATUOGNO

Resumo

Nesta tese apresentamos resultados que fornecem a regularidade dos expoentes de Lyapunov com uma abordagem via teoria de Lie. A generalização dos expoentes de Lyapunov para fluxos em fibrados flag associados a um fibrado principal é utilizada para obter a diferenciabilidade de certas combinações lineares do espectro de Lyapunov. Essas combinações que são diferenciáveis são determinadas a partir da caracterização da decomposição de Morse mais fina do fluxo nos fibrados flag. A diferenciabilidade é tomada com repeito à perturbação do fluxo por elementos do grupo de calibre do fibrado principal.

Abstract

In this thesis we present results about regularity of Lyapunov Exponents via a Lie Theory approach. The generalization of Lyapunov Exponents for flows in flag bundles is used to obtain the differenciability of certain linear combinations of the Lyapunov spectra. This specific combinations that are differentiable are determined by the caracterization of the finest Morse decomposition of the flows on flag bundles. The differenciability is taken with respect to the perturbation of the flow by elements in the gauge group of the principal bundle.

Agradecimentos

Realizar um trabalho de pesquisa e desenvolvimento científico está muito longe de qualquer atividade mecânica ou burocrática. É comum ficar dias e dias pensando até conseguir (ou não) demonstrar aquele resultado, e depois levar outros tantos dias para elaborar a melhor maneira de enunciá-lo e desenvolvê-lo a fim de mostrar seu real significado e sua importância. Tantos dias para desenvolver apenas algumas páginas é uma dura característica do trabalho científico, de modo que a pequena produção muitas vezes não revela o árduo trabalho realizado. Digo isso antes dos agradecimentos pois muitas vezes aqueles que estão de fora do meio acadêmico e que fazem parte de nossas vidas não compreendem completamente essa realidade, mostrando que a confiança que depositam em nós e no nosso trabalho é, acima de qualquer coisa, uma questão de fé.

Faço, então, meus sinceros agradecimentos:

- À pessoa que caminhou ao meu lado desde a época do colégio, que sempre me incentivou e compreendeu, e teve fé em mim em todos os momentos dessa jornada. Taty, minha anjinha, você foi fundamental para o rumo da minha vida. Sem o teu carinho e apoio nos momentos que me faltaram forças dificilmente teria conseguido terminar esse trabalho. Eu te amo!
- Ao meu pai e à minha mãe por sempre buscar me oferecer o melhor. Apesar de todas as circuntâncias difíceis que passamos, vocês sempre me ensinaram a refletir sobre a vida e me mostraram como tirar um aprendizado de cada nova situação.
- Aos meus irmãos, Philippe e Lucas, agradeço pela amizade incondicional. É indescritível a felicidade que sinto quando estou perto de vocês!

- Aos meus avós, Nida e Hélio, e Maria Olga e Amaury. Aos meus sogros, Will e Denise, e ao meu cunhado Rafael, que sempre torceram por mim e souberam encurtar com pensamentos positivos a distância física.
- Ao meu orientador, Luiz San Martin, por jamais desprezar uma dúvida e por sempre tentar me explicar conceitos complexos com palavras simples. Muito obrigado por toda a ajuda!
- Aos membros da banca examinadora, os professores Ali Tahzibi, Lorenzo Díaz, Josiney Alves e Pedro Catuogno, pelos comentários e sugestões sobre a tese, além de todos os direcionamentos que vão me ajudar a continuar este trabalho.
- Aos colegas do grupo de Teoria de Lie, Lonardo Rabelo, Luciana Alves, Ariane dos Santos, Janete Ferrareze, Conrado Lacerda, Adriano da Silva, Lucas Seco e Mauro Patrão, por todas as conversas, seminários e discussões sobre essa empolgante área.
- A todos meus companheiros de doutorado pela companhia e discussões sobre matemática, principalmente na época do primeiro exame de qualificação. Em particular aos amigos Lino Grama, Ricardo Martins, Luis Roberto Lucinger, Lonardo Rabelo, Thiago Castilho, Eduardo Neves, Anderson Albuquerque, Angelo Bianchi, Wellington Assunção, João Paulo Bressan e Durval Tonon. A amizade com vocês criou um ambiente tão bom que chegar cedo ou ir embora tarde para poder ficar mais tempo estudando nunca foi um sacrifício.
- À todos os professores, amigos e colegas de trabalho da UEM e da Unicamp que contribuiram para minha formação e que, assim como eu, vêem na educação a única maneira de tornar nosso país mais justo e democrático.
- À todos que, de uma forma ou de outra, colocaram um tijolinho nessa construção. Nossa organização em sociedade é tão complexa e segmentada que muitas vezes não enxergamos e não damos valor àqueles que nos suportam indiretamente, de modo que este agradecimento deve ser entendido da maneira mais geral possível.
- À Fapesp (processo 2007/07610-8) pelo apoio financeiro.

Thiago Ferraiol
Dezembro/2012

Sumário

0 Estrutura da tese **1**

0.1 Apresentação do problema e resultados 1

0.2 Estrutura dos capítulos 4

1 Preliminares **7**

1.1 Semigrupos e tipo parabólico 7

1.1.1 Conjuntos de Controle 7

1.1.2 Conjuntos de Controle em variedades Flag e tipo parabólico de semigrupos 8

1.2 Decomposições de Morse e tipo parabólico de fluxos 12

2 Estruturas diferenciáveis **19**

2.1 Seções em fibrados vetoriais 20

2.1.1 Topologia do espaço de seções do fibrado vetorial 20

2.1.2 Diferenciabilidade da aplicação induzida no espaço de seções . 22

2.2 Espaços de funções 25

2.2.1 Estrutura diferenciável (Variedade de Banach) 25

2.2.2 Regularidade de aplicações em espaços de funções 27

2.2.3 Mergulhos de espaços de funções equivariantes 28

2.3 Seções em fibrados associados 30

2.3.1 Seções e funções equivariantes 30

2.3.2 Estrutura diferenciável no espaço de seções 32

2.3.3 Mergulhos de espaços de seções em espaços de funções 37

2.3.4 Diferenciabilidade 40

2.4 Grupo de Calibre 42
2.4.1 Estrutura topológia (métrica) do grupo de Calibre 43
2.4.2 Estrutura diferenciável (Grupo de Lie de Banach) 45
2.4.3 Diferenciabilidade da ação do grupo de Calibre no espaço de seções 47

3 Expoentes de Lyapunov 49
3.1 Expoentes de Lyapunov clássicos 49
3.2 Expoentes de Lyapunov vetoriais 53
3.2.1 Cociclos e decomposições 53
3.2.2 Teorema Ergódico Multiplicativo 57
3.3 Relações entre os expoentes clássicos e os vetoriais 63

4 Resultados sobre o tipo parabólico de Morse e de Lyapunov 69
4.1 Linearização em fibrados Flag 69
4.2 Perturbação da componente de Morse atratora 72
4.3 O tipo parabólico de Lyapunov e as componentes de Morse 77

5 Diferenciabilidade dos Expoentes 81
5.1 Diferenciabilidade dos cociclos aditivos 81
5.2 Diferenciabilidade dos expoentes de Lyapunov 84
5.2.1 Variação das medidas suportadas na componente de Morse atratora 86
5.2.2 Demonstração do Teorema principal 89

6 Exemplos 91
6.1 Definição do contexto 91
6.2 Exemplos 93

A Teoria de Lie 97
A.1 Notações para álgebras e grupos de Lie 97
A.2 Flags de Subespaços 101
A.3 Subálgebras opostas, subespaços transversais e Flag dual 102

Bibliografia 103

Capítulo 0

Estrutura da tese

0.1 Apresentação do problema e resultados

O objetivo principal deste trabalho é mostrar como a estrutura dos grupos e álgebras de Lie fornece ferramentas para uma análise mais fina de alguns sistemas dinâmicos. Nesta tese nós provamos a diferenciabilidade de certas combinações do espectro de Lyapunov de um fluxo contínuo num fibrado vetorial. O resultado provado aqui teve como base o teorema de Ruelle [17], onde ele prova que o maior expoente de Lyapunov depende analiticamente de fluxos que deixam invariante uma certa família de cones no fibrado vetorial. Nesta tese nós não assumimos essa hipótese e, ao invés disso, utilizamos a classificação e a descrição algébrica da decomposição de Morse mais fina de fluxos em fibrados Flag.

Para descrever os resultados obtidos, considere $\pi : Q \to X$ um fibrado principal contínuo com grupo de Lie redutível G e base um espaço topológico compacto X. Um endomorfismo $\phi : Q \to Q$ intercambia as fibras de Q e assim induz uma aplicação $f : X \to X$ na base tal que $\pi \circ \phi = f \circ \pi$. Assumiremos que tanto ϕ quanto f são contínuos e que f é um homeomorfismo no caso de ϕ ser um automorfismo. Consideraremos ainda uma medida de probabilidade f-invariante ν na base X com supp $\nu = X$.

Para o caso em que $Q = X \times G$ é um fibrado trivial, então o automorfismo ϕ é da forma $\phi(x, g) = (f(x), T(x)g)$, onde $T : X \to G$ é uma aplicação contínua. Essa

aplicação gera o cociclo $\rho : \mathbb{Z} \times X \to G$ sobre f dado por

$$\rho(n,x) = \begin{cases} T(f^{n-1}(x)) \cdot T(f^{n-2}(x)) \cdots T(x) & \text{se } n \geq 1 \\ Id & \text{se } n = 0 \\ T(f^{-n}(x))^{-1} \cdot T(f^{-(n-1)}(x))^{-1} \cdots T(f^{-1}(x))^{-1} & \text{se } n \leq 1 \end{cases}.$$

A taxa de crescimento exponencial de $\phi^n(q)$, $q \in Q$, pode ser medida tanto pela decomposição de Iwasawa $G = KAN$ quanto pela decomposição polar $G = K(\mathrm{cl}A^+)K$, com $A^+ \subset A$. Essas decomposições podem ser levadas para o fibrado Q na forma $Q = R \cdot AN$ ou $Q = R \cdot (\mathrm{cl}A^+)K$, onde R é uma K-redução de Q. Desta forma a taxa de crescimento exponencial é medida tomando a A-componente ou a A^+-componente de $\phi^n(q)$.

A componente proveniente da decomposição de Iwasawa fornece um cociclo aditivo $\mathsf{a}_\phi(n,\xi) \in \mathfrak{a}$ sobre o fluxo induzido no fibrado flag maximal associado $\mathbb{E} = Q \times_G \mathbb{F} = R \times_K \mathbb{F}$, onde $\mathfrak{a}$ é a álgebra de Lie da componente vetorial A. Por outro lado, considerando a decomposição polar e tomando a $\mathrm{cl}A^+$-componente de $\phi^n(q)$ obtemos um cociclo subaditivo $\mathsf{a}^+_\phi(n,x)$ sobre o fluxo na base X.

A partir desses cociclos defini-se o expoente de Lyapunov de ϕ na direção do flag $\xi \in \mathbb{E}$ pelo limite

$$\lambda(\xi) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \mathsf{a}_\phi(n,\xi) \in \mathfrak{a},$$

cuja existência é garantida pelo teorema ergódico vetorial demonstrado em [2] (ver teorema 3.2.3 nesta tese). Tomando o limite do cociclo subaditivo obtido a partir da decomposição polar obtemos o expoente polar de ϕ dado por

$$\Lambda^+_\phi(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \mathsf{a}^+_\phi(n,x) \in \mathrm{cl}\mathfrak{a}^+.$$

No contexto clássico em que o grupo de Lie é um grupo linear ($G = \mathrm{Gl}(n,\mathbb{R})$ ou algum de seus subgrupos fechados como $\mathrm{Sl}(n,\mathbb{R})$, $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{R})$, etc.), mostramos que os limites definidos acima fornecem todo o espectro de Lyapunov. O expoente de Lyapunov na direção de um flag será essencialmente uma matriz diagonal formada pelos expoentes de Lyapunov clássicos. Já o expoente polar fornece uma matriz diagonal com os expoentes de Lyapunov bem ordenados (veja a seção 3.3 desta tese).

Seja agora $\mathcal{G}$ o grupo de calibre de Q, isto é, o grupo dos automorfismos que induzem na base X a aplicação identidade. Esse grupo possui uma estrutura de variedade de Banach (ver seção 2.4). Se $\gamma \in \mathcal{G}$ então $\gamma \circ \phi$ é um automorfismo

de Q que induz a mesma aplicação f na base. Com relação a esse automorfismo perturbado, temos que o expoente polar (ou o espectro de Lyapunov no contexto clássico) é dado ν-q.t.p. por $\Lambda^+_{\gamma\phi}(x)$. Nesses termos o resultado principal desta tese diz que

Teorema. *Para escolhas adequadas de funcionais $\alpha \in \mathfrak{a}^*$, temos que*

$$\gamma \in \mathcal{G} \longmapsto \int_X \alpha\left(\Lambda^+_{\gamma\phi}(x)\right)\ \nu(dx) \in \mathbb{R} \tag{1}$$

é uma aplicação diferenciável.

A escolha adequada dos funcionais α é feita a partir da caracterização algébrica da decomposição de Morse mais fina do fluxo ϕ^n em $\mathbb{E}_\Theta = X \times \mathbb{F}_\Theta$ dado por

$$\phi^n(r \cdot b) = \phi^n(r) \cdot b,\ \ r \in R,\ \ b \in \mathbb{F}_\Theta,$$

onde $\mathbb{F}_\Theta = G/P_\Theta$ é uma variedade flag de G. As decomposições de Morse desse tipo de fluxo foram estudadas em [6] e [14] (veja também [22] para uma abordagem nos fibrados projetivos).

Para facilitar a descrição, suponha $Q = X \times G$. Pelos resultados desses artigos a decomposição de Morse mais fina sempre existe e é caracterizada algebricamente da seguinte maneira: existe $H_{\mathrm{Mo}} \in \mathrm{cl}\mathfrak{a}^+$ (ou $h_{\mathrm{Mo}} = \exp H_{\mathrm{Mo}} \in \mathrm{cl}A^+$), e uma aplicação contínua

$$\sigma_\phi : X \to \mathbb{A}(H_{\mathrm{Mo}}),$$

onde $\mathbb{A}(H_{\mathrm{Mo}}) = \{g h_{\mathrm{Mo}} g^{-1} \mid g \in G\}$ é a órbita dos conjugados de h_{Mo}, tal que as componentes de Morse da decomposição mais fina são dadas em cada fibra pelas componentes conexas de

$$\{x\} \times \mathrm{fix}_\Theta(\sigma_\phi(x)),$$

onde $\mathrm{fix}_\Theta(\sigma_\phi(x))$ é o conjunto dos pontos fixos da ação de $\sigma_\phi(x) \in G$ em $\mathbb{F}_\Theta$.

Por exemplo, para o caso em que $G = \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$ temos que h_{Mo} é uma matriz diagonal com entradas positivas e $\sigma_\phi(x)$ é uma matriz conjugada a h_{Mo}. Os pontos fixos de $\sigma_\phi(x)$ nos flags de G são formados pelos seus autoespaços. No caso em que o Flag é o espaço projetivo $\mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1}$ a decomposição de Morse corresponde exatamente à decomposição de Whitney de $X \times \mathbb{R}^n$.

Com essa caracterização nosso resultado diz então que a aplicação (1) é diferenciável se o funcional α for definido por um elemento H_α, isto é $\alpha = \langle H_\alpha, \cdot \rangle$, tal que

$$\ker \mathrm{ad}(H_{\mathrm{Mo}}) \subset \ker \mathrm{ad}(H_\alpha).$$

Em termos de matrizes, essa inclusão diz essencialmente que H_α deve ser menos regular que H_{Mo}, ou melhor, que a multiplicidade de cada autovalor de H_α deve ser a soma das multiplicidades de alguns autovalores de H_{Mo}. Por exemplo se $G = \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$, $\mathfrak{a}$ for o espaço das matrizes diagonais e H_{Mo} for uma matriz diagonal com autovalores $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_k$ e multiplicidades $d_1, d_2, \ldots, d_k$, então a aplicação (1) será diferenciável para os funcionais da forma

$$\mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n) \mapsto a_1 + \cdots + a_{d_i}$$

e suas combinações lineares.

Com isso temos, por exemplo, que se H_{Mo} tiver um autovalor dominante (maior que todos os outros) de multiplicidade um, então podemos escolher α como sendo o funcional $\lambda_1(\mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n)) = a_1$, o que nos fornece a diferenciabilidade da aplicação

$$\gamma \in \mathcal{G} \longmapsto \int_X \lambda_1(x, \gamma\phi)\, \nu(dx) \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

onde $\lambda_1(x, \gamma\phi)$ é o maior expoente de Lyapunov de $\gamma\phi$. Esse é exatamente o caso dos fluxos que preservam uma família de cones apresentada no artigo do Ruelle [17].

0.2 Estrutura dos capítulos

Capítulo 1

É apresentada a ideia inicial para a abordagem dos problemas de dinâmica via teoria de Lie. Tal abordagem consiste na classificação dos conjuntos de controle para a ação de semigrupos de grupos de Lie semissimples nas variedades flag $\mathbb{F}_\Theta$, proveniente do trabalho de San Martin-Tonelli [21]. Ainda nesse capítulo mostramos como essa estrutura dos semigrupos fornecem a caracterização das componentes de Morse de automorfismos em fibrados Flag, conforme Braga-San Martin [6] e Patrão-San Martin [14]. A descrição algébrica das componentes de Morse é de fundamental importância para este trabalho, uma vez que as condições de regularidade dos expoentes de Lyapunov serão dadas em função dessa classificação.

Capítulo 2

Apresentamos uma série de resultados sobre estruturas diferenciáveis e diferenciabilidade de aplicações entre espaços de seções de fibrados e espaços de funções.

Tais resultados, apesar de poderem ser encontrados em alguns livros sobre análise não linear, como o livro de Palais [13], não possuem formalizações clássicas e por isso decidimos apresentá-los nesta tese. Ao longo do texto estamos particularmente interessados nos espaços de seções contínuas de fibrados associados $Q \times_G F$, onde $Q \to X$ é um G-fibrado principal contínuo sobre um espaço topológico compacto X, com G um grupo de Lie, F um espaço homogêneo de G, e assumimos que Q admite uma K-redução compacta R. O espaço das seções contínuas de $Q \times_G F$ possui uma estrutura de variedade de Banach e, identificado-o com o conjunto das funções equivariantes de Q (ou de R) em F, mostramos que ele é uma subvariedade mergulhada da variedade de Banach das funções contínuas de R em F, denotado no texto por $\mathcal{C}(R, F)$. Com essa identificação e com a estrutura diferenciável clássica em $\mathcal{C}(R, F)$, obtemos a diferenciabilidade de algumas aplicações envolvendo esses espaços, bem como expressões para a derivada delas. Em particular, consideramos a ação natural do grupo de calibre do fibrado Q no espaço de seções e mostramos que essa ação é diferenciável. A diferenciabilidade dessa aplicação é um dos pontos chave para se poder perturbar diferenciavelmente as componentes de Morse nos fibrados flag e assim obter as condições para a regularidade dos expoentes de Lyapunov.

Capítulo 3

O capítulo é destinado à apresentação da generalização dos expoentes de Lyapunov para fluxos em fibrados Flag. Essa generalização se iniciou com o trabalho de Kaimanovich [11], onde ele obtém uma versão do teorema ergódico multiplicativo para sequências regulares em espaços simétricos, e mais tarde foi desenvolvida para o contexto de fluxos em fibrados flag por San Martin-Seco [20] e Alves-San Martin [2]. Nas duas primeiras seções desse capítulo apresentamos os conceitos de expoentes de Lyapunov, tanto no caso clássico para fluxos em fibrados vetoriais (ou projetivos) quanto no caso de fluxos em fibrados flag, e enunciamos os teoremas ergódicos multiplicativos que foram demonstrados nos artigos citados acima. Por fim, na última seção, mostramos para o caso de fluxos em fibrados vetoriais induzidos por cociclos a valores no grupo $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$, as relações entre o contexto clássico e o contexo generalizado. Essas relações são essenciais para se obter resultados para os expoentes de Lyapunov clássicos a partir da generalização proposta, mostrando assim a importância de se considerar tal generalização.

Capítulo 4

São apresentados os resultados técnicos sobre perturbações de automorfismos e suas implicações nas componentes de Morse. Essas relações fornecem estimativas para o espectro de Lyapunov. Além disso, apresentamos na última seção desse capítulo as relações entre as componentes de Morse e de Oseledet (proveniente do teorema ergódico multiplicativo vetorial). Mais especificamente, seguindo Alves-San Martin [3], é apresentada um resultado no contexto de fibrados flag da inclusão das componentes de Oseledets nas componentes de Morse. Tal decomposição já era conhecida no contexto de fibrado projetivos (corolário 5.5.17 de [7]).

Capítulo 5

É destinado à demonstração do resultado principal desta tese, descrito no começo desta apresentação.

Capítulo 6

Apresentamos alguns exemplos e aplicações do resultado à teoria clássica, fornecendo diferenciabilidade e estimativas dos expoentes de Lyapunov a partir dos cociclos que os definem.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo pretendemos apresentar os principais resultados sobre decomposições de Morse, conjuntos de controle em fibrados Flag, tipo parabólico de semigrupos e de fluxos que estão presentes numa série de artigos e teses que antecederam esse trabalho. As referências principais para esse capítulo preeliminar são [6], [14], [19] e [21].

1.1 Semigrupos e tipo parabólico

1.1.1 Conjuntos de Controle

Seja S um semigrupo agindo num espaço X. Diz-se que o semigrupo S é *acessível* em $x \in X$ se $\text{int}(Sx) \neq \emptyset$. Se S for acessível para todo $x \in X$, diz-se apenas que S é acessível. Nos casos que trataremos os semigrupos serão, em grande maioria, semigrupos de grupos de Lie, com interior não vazio, agindo em espaços homogêneos, de forma que essa propriedade de acessibilidade será sempre satisfeita.

Definição 1.1.1. *Um subconjunto $D \subset X$ é um conjunto de controle para a ação de S se*

1. $\text{int}D \neq \emptyset$;
2. $D \subset \text{fe}(S \cdot x)$, *para todo* $x \in D$;
3. D *é maximal com relação às duas propriedades acima.*

A propriedade 3 de maximalidade implica que os conjuntos de controle são necessariamente disjuntos, pois caso não fossem, a união deles ainda teria as propriedades 1 e 2. Além disso, existe uma ordem parcial entre os conjuntos de controle onde $D_1 \prec D_2$ se for possível atingir D_2 a partir de D_1. Em outras palavras, existem $x \in D_1$ e $g \in S$ tal que $gx \in D_2$. Equivalentemente, também temos que $D_1 \prec D_2$ se, e somente se, $D_2 \subset \mathrm{fe}(S \cdot b)$ para algum, e assim para todo $b \in D_1$. Com relação a essa ordem, um conjunto de controle D é maximal se, e somente se, ele é invariante pela ação de S, isto é, $SD \subset D$. Da mesma maneira, D é minimal se, e somente se, ele é S^{-1}-invariante.

Dado um conjunto de controle D, definimos o seu *conjunto de transitividade* como o subconjunto de X onde a ação do semigrupo é idêntica à ação de um grupo. De modo formal, o conjunto de transitividade de D é definido por

$$D_0 = \{x \in D \mid x \in \mathrm{int}(Sx) \cap \mathrm{int}(S^{-1}x)\}.$$

Em geral o conjunto de transitividade de um conjunto de controle pode ser vazio. Caso não seja, dizemos que o conjunto de controle é *efetivo*. Os conjuntos de controle invariantes são efetivos, isto é, $D_0 \neq \emptyset$ se $SD \subset D$ ou $S^{-1}D \subset D$.

Sobre a existência dos conjuntos de controle, para o caso em que X é compacto, uma aplicação do lema de Zorn garante que para todo $x \in X$, existe um conjunto de controle invariante contido em $\mathrm{fe}(Sx)$.

1.1.2 Conjuntos de Controle em variedades Flag e tipo parabólico de semigrupos

Vamos nos restringir agora à ação de um semigrupo S, contido num grupo de Lie semissimples G, com $\mathrm{int}S \neq \emptyset$. O conceito de tipo parabólico de semigrupos vem da caracterização dos conjuntos de controle efetivos da ação de S nas variedades Flag $\mathbb{F}_\Theta$. A demonstração dos resultados enunciados aqui podem ser encontrados em [21].

Antes de mais nada, fixe uma decomposição de Iwasawa $G = KAN$ e seja $\mathcal{W}$ o grupo de Weyl de G (ver apêndice). Para descrever os conjuntos de controle efetivos e definir o tipo parabólico de S, considere o conjunto dos elementos regulares de G que estão no interior de S, isto é,

$$\mathcal{R}(S) = \{h \in \mathrm{int}(S) \mid h = gh'g^{-1}, \text{ para algum } g \in G \text{ e } h' \in A^+\},$$

onde A^+ é uma câmara de Weyl fixada.

Os conjuntos de transitividade dos conjuntos controle efetivos para a ação de S em $\mathbb{F}_\Theta$ são dados por pontos fixos dos elementos de $\mathcal{R}(S)$, como enunciado no teorema abaixo

Teorema 1.1.2. *Para cada $w \in \mathcal{W}$, existe um conjunto de controle $D_\Theta(w) \subset \mathbb{F}_\Theta$ cujo conjunto de transitividade é dado por*

$$D_\Theta(w)_0 = \bigcup \{\mathrm{fix}_\Theta(h, w) \mid h \in \mathcal{R}(S)\}.$$

Além disso, $D_\Theta(1)$ é o único conjunto de controle S-invariante (maximal) e $D_\Theta(w_0)$ é o único conjunto de controle S^{-1}-invariante (minimal), onde w_0 é a involução principal de $\mathcal{W}$. Mais ainda, os conjuntos $D_\Theta(w)$ fornecem todos os conjuntos de controle efetivos.

A partir dessa caracterização dos conjuntos de controle, surge o conceito de tipo parabólico de S. A grosso modo, o tipo parabólico de S é a melhor variedade flag $\mathbb{F}_\Theta$ para se olhar os conjuntos de controle. Esse conceito de "melhor variedade flag" se traduz nas caracterizações do tipo parabólico fornecidas no teorema abaixo

Teorema 1.1.3. *Seja $S \subset G$ um semigrupo com $\mathrm{int}S \neq \emptyset$. Existe um subconjunto de raízes simples $\Theta(S) \subset \Sigma$ tal que as três condições abaixo são equivalentes.*

i. *$\Theta(S)$ é o menor subconjunto $\Theta \subset \Sigma$ (ou o maior flag $\mathbb{F}_\Theta$) tal que $D_\Theta(1)$ está contido numa célula aberta de Bruhat de $\mathbb{F}_\Theta$.*

ii. *$\Theta(S)$ é o maior subconjunto $\Theta \subset \Sigma$ (ou o menor flag $\mathbb{F}_\Theta$) tal que $\pi_\Theta^{-1}(D_\Theta(1))$ é o conjunto de controle invariante de S no flag maximal $\mathbb{F}$.*

iii. *$\Theta(S)$ é o único subconjunto $\Theta \subset \Sigma$ (ou o único flag $\mathbb{F}_\Theta$) tal que $D_\Theta(1)$ está contido numa célula aberta de Bruhat e $\pi_\Theta^{-1}(D_\Theta(1))$ é o conjunto de controle invariante de S no flag maximal $\mathbb{F}$.*

Demonstração: ver [21] □

Definição 1.1.4. *O tipo parabólico do semigrupo S é a variedade flag $\mathbb{F}_{\Theta(S)}$ (ou simplesmente o subconjunto de raízes simples $\Theta(S) \subset \Sigma$) que satisfaz qualquer uma das condições equivalentes do teorema anterior.*

O fato de o conjunto de controle invariante $D_{\Theta(S)}(1) \subset \mathbb{F}_{\Theta(S)}$ estar contido numa célula aberta de Bruhat é equivalente a dizer que todos os seus elementos estão na variedade estável para a ação de um elemento regular de $h \in G$. Isto é, existe uma decomposição de Iwasawa $G = KAN$ tal que se $b_{\Theta(S)}$ é a origem do flag $\mathbb{F}_{\Theta(S)}$ com respeito à essa decomposição e $h \in A^+$, então $\lim_{n\to\infty} h^n b = b_{\Theta(S)}$ para todo $b \in D_{\Theta(S)}$, ou seja, $D_{\Theta(S)}(1) \subset N^- b_{\Theta(S)}$.

Essa noção de estabilidade permite ver estruturalmente o tipo parabólico de S, isto é, com relação aos seus elementos. Para isso, vamos definir o tipo parabólico dos elementos de G. Considere $g = uhn$ a decomposição de Jordan (multiplicativa) de g e tome uma decomposição de Iwasawa $G = KAN$ tal que $u \in K$, $h \in \mathrm{cl}A^+$ e $n \in N$. Associada à escolha da decomposição de Iwasawa, temos a escolha de um conjunto de raízes simples Σ. Então o tipo parabólico de g é dado por

$$\Theta(g) = \{\alpha \in \Sigma \mid \alpha(\log h) = 0\} = \Theta(H), \quad h = \exp H,\ H \in \mathfrak{a}$$

O tipo parabólico de g diz essencialmente qual é a regularidade da sua componente vetorial h em termos das raízes de G. Quanto menor for o conjunto $\Theta(g)$, maior a regularidade de g, isto é, menos raízes anulam a sua componente vetorial h.

Por exemplo, para o caso em que $G = \mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$, um subgrupo vetorial A é dado pelas matrizes diagonais com autovalores positivos e as raízes são os funcionais da forma $\lambda_i - \lambda_j \in \mathfrak{a}^*$, onde $\lambda_i(\mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n)) = a_i$. Um conjunto de raízes simples é dado pelos funcionais $\lambda_i - \lambda_{i+1}$, com $i = 1, \ldots, n-1$, e associado à essa escolha temos a câmara de Weyl positiva $\mathfrak{a}^+$ dada pelas matrizes diagonais de traço zero, com autovalores distintos e ordenados do maior para o menor. Já o fecho $\mathrm{cl}\mathfrak{a}^+$ são as matrizes diagonais com autovalores ordenados do maior para o menor, só que possivelmente repetidos. Neste caso, a regularidade de um elemento $h \in \mathrm{cl}A^+$ é simplesmente a multiplicidade dos seus autovalores. Quanto mais autovalores repetidos menor a sua regularidade. Nos casos extremos temos $\Theta(h) = \emptyset$ ou $\Theta(h) = \Sigma$. Se $h \in A^+$ então $\Theta(h) = \emptyset$, isto é, todos seus autovalores são distintos e sua regularidade é máxima.

Uma boa maneira de se olhar o tipo parabólico de um semigrupo S é se perguntando qual a regularidade dos elementos de seu interior. Nesse sentido, sempre é possível encontrar, no seu interior, elementos com regularidade máxima, isto é, sempre existe $g \in G$ e $h \in A^+$ tal que $ghg^{-1} \in \mathrm{int}(S)$. O próximo teorema esclarece um pouco mais sobre essa relação.

Teorema 1.1.5. *Para todo $g \in \mathrm{int}(S)$, temos que $\Theta(g) \subset \Theta(S)$. Além disso, existe*

$g \in \mathrm{int}(S)$ *com regularidade mínima, isto é,* $\Theta(g) = \Theta(S)$. *Em outras palavras, o tipo parabólico de um semigrupo é a menor regularidade possível para os elementos do seu interior.*

Demonstração: Seção 4 de [21] □

Segue imediatamente desse teorema que o tipo parabólico de um semigrupo S com interior não vazio coincide com o tipo parabólico de $\mathrm{int}(S)$.

A próxima proposição ajuda a ver o tipo parabólico de vários semigrupos a partir de subconjuntos admissíveis em $\mathbb{F}_\Theta$. Dizemos que $C \subset \mathbb{F}_\Theta$ é admissível se C está contido numa célula aberta de Bruhat.

Proposição 1.1.6. *Se* $C \subset \mathbb{F}_\Theta$ *é um subconjunto admissível e* $C = \mathrm{cl}(\mathrm{int}(C))$ *então semigrupo de compressão*

$$S_C = \{g \in G \mid gC \subset C\}$$

tem interior não vazio e seu tipo parabólico é exatamente Θ. *Mais ainda,* C *é o conjunto de controle invariante para a ação de* S *em* $\mathbb{F}_\Theta$.

Demonstração: Proposição 4.2 de [19] □

Com ajuda dessa proposição conseguimos calcular o tipo parabólico de diversos semigrupos. Para mais detalhes e outros exemplos veja a seção 6.3 de [19].

Exemplo 1.1.7. *Semigrupos de Compressão de cones*

Seja $W \subset \mathbb{R}^n$ um cone pontual e gerador. O projetivizado

$$C = \mathbb{P}W = \{[v] \in \mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1} \mid v \in W\}$$

é um conjunto admissível e $C = \mathrm{cl}(\mathrm{int}(C))$. Logo, o tipo parabólico de S_C é o espaço projetivo $\mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1}$. Um caso interessante que decorre desse exemplo é o do semigrupo $\mathrm{Sl}^+(n,\mathbb{R})$ formado pelas matrizes com entradas positivas. Esse é o semigrupo de compressão do cone W em $\mathbb{R}^n$ dado pelo primeiro octante, isto é, do cone formado pelos vetores em $\mathbb{R}^n$ que tem todas as suas coordenadas positivas. Em termos das raízes simples de $\mathrm{Sl}(n,\mathbb{R})$ temos que o tipo parabólico de $\mathrm{Sl}^+(n,\mathbb{R})$ é dado pelos funcionais

$$\Theta(\mathrm{Sl}^+(n,\mathbb{R})) = \{\lambda_2 - \lambda_3, \ldots, \lambda_{n-1} - \lambda_n\}.$$

□

1.2 Decomposições de Morse e tipo parabólico de fluxos

A descrição do tipo parabólico de semigrupos nos ajuda a entender a dinâmica de fluxos de automorfismos de fibrado principais. Mais especificamente, com ela podemos caracterizar as componentes de Morse de fluxos em fibrados Flag induzidos por automorfismos $\phi_t : Q \to Q$, onde Q é um G-fibrado principal, com grupo de Lie semissimples G.

Definição 1.2.1. *Seja $\phi_t : X \to X$ um fluxo no espaço topológico X. Uma decomposição de Morse de ϕ_t é uma coleção finita de subconjuntos disjuntos $\{\mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_n\}$ tais que*

i. cada $\mathcal{M}_i$ é compacto e ϕ_t-invariante;

ii. para todo $x \in X$ tem-se $\omega(x), \omega^*(x) \subset \cup_i \mathcal{M}_i$;

iii. se $\omega(x), \omega^*(x) \in \mathcal{M}_j$ então $x \in \mathcal{M}_j$

Exemplo 1.2.2. *Decomposição de Morse de translações em Projetivos*

Seja $g \in \mathrm{Sl}(n+1, \mathbb{R})$ e considere o fluxo discreto gerado pela ação de g no espaço projetivo $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$, isto é

$$\begin{array}{rccc} \phi_n : & \mathbb{R}\mathrm{P}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}\mathrm{P}^n \\ & [v] & \longmapsto & \phi_n([v]) = [g^n(v)] \end{array}$$

As componentes de Morse desse fluxo são caracterizadas pela componente vetorial de g. Isto é, escreva $g = ehu$ a decomposição de Jordan de g, com e elíptico, h hiperbólico e u unipotente, e sejam $V_1, V_2, \ldots, V_k$ os autoespaços de h. Então

$$\mathcal{M}_j = \mathbb{P}V_j = \{[v] \in \mathbb{R}\mathrm{P}^n \mid v \in V_j\}, \quad , j = 1, 2, \ldots, k,$$

formam a decomposição de Morse mais fina de ϕ_t.

Veja [9] para mais detalhes de decomposições de Morse para translações em variedades Flag. □

Para descrever as componentes de Morse de fluxos em fibrados Flag a partir do tipo parabólico de semigrupos, o que é feito, na verdade, é um descrição das componentes recorrentes por cadeias do fluxo, que passamos a definir abaixo.

Considere $\phi_t : X \to X$ um fluxo do espaço métrico (X, d). Dados dois pontos $x, y \in X$ e números reais $\epsilon, T > 0$, uma (ϵ, T)-*cadeia* de x para y é dada por um conjunto finito de pontos $x = x_0, x_1, \ldots, x_k = y$ e tempos $t_0, t_1, \ldots, t_{n-1} \geq T$ tais que

$$d(\phi_{t_j}(x_j), x_{j+1}) < \epsilon.$$

Um subconjunto $Y \subset X$ é dito *transitivo por cadeias* se para cada $x, y \in X$ e $\epsilon, T > 0$, existe uma (ϵ, T)-cadeia de x para y. Um ponto $x \in X$ é *recorrente por cadeias* se o conjunto $\{x\}$ for transitivo por cadeias, isto é, se para todo $\epsilon, T > 0$ existe uma (ϵ, T)-cadeia de x para x. Denotamos por $\mathcal{R}_C(\phi_t)$ o conjunto de todos os pontos recorrentes por cadeias.

A relação entre componentes de Morse e recorrência por cadeias é dada na próxima proposição.

Proposição 1.2.3. *O fluxo ϕ_t admite uma decomposição de Morse mais fina se, e somente se, o conjunto recorrente por cadeias $\mathcal{R}_C(\phi_t)$ possuir apenas uma quantidade finita de componentes conexas. Neste caso, as componentes conexas de $\mathcal{R}_C(\phi_t)$ são exatamente as componentes de Morse da decomposição de Morse mais fina.*

Demonstração: Teorema B.2.26 de [7] □

Em virtude dessa proposição, para obter e descrever as componentes de Morse basta descrever as componentes transitivas por cadeias. É aí que entra o papel dos semigrupos!

Tipo parabólico de semigrupos de endomorfismos

Considere $\pi : Q \to X$ um G-fibrado principal, localmente trivial, com G um grupo de Lie semissimples e base X compacta, e forme o fibrado flag associado $\mathbb{E}_\Theta = Q \times_G \mathbb{F}_\Theta$. Seja S_Q um semigrupo formado por endomorfismos locais do fibrado Q. Esse semigrupo age naturalmente em Q, na base X e no fibrado flag associado $\mathbb{E}_\Theta$. Suponha ainda que S_Q é acessível e que a ação na base X é transitiva. Essas hipóteses permitem estudar os conjuntos de controle da ação de S_Q em $\mathbb{E}_\Theta$ apenas olhando para sua ação nas fibras, resumindo o estudo à ação de um semigrupo de interior não vazio numa variedade flag.

A idéia geral dessa construção é considerar, para cada fibra (ou para cada $q \in Q$) o semigrupo de G formado pelos elementos que agem na fibra que contém q da mesma

forma que algum endomorfismo contido em S_Q. De forma mais precisa considera-se o semigrupo

$$S^q = \{g \in G \mid \phi(q) = qg, \text{ para algum } \phi \in S_Q\}.$$

Com a hipótese de acessibilidade mostra-se que S^q é aberto. Além disso, denotando por $D^q(w)$ o conjunto de controle para a ação de S^q no flag maximal $\mathbb{F}$, temos a seguinte caracterização dos conjuntos de controle para a ação de S_Q no fibrado flag maximal $\mathbb{E}$.

Teorema 1.2.4. *Os conjuntos de controle para a ação de S_Q em $\mathbb{E}$ são dados por conjuntos $\mathbb{D}(w)$, com $w \in \mathcal{W}$, que se projetam sobre toda a base X e cujos conjuntos de trasitividade são dados em cada fibra por*

$$(\mathbb{D}(w)_o)_{\pi(q)} = q \cdot D^q(w)_0, \;\; q \in Q.$$

Além disso, o tipo parabólico de cada S^q não depende de $q \in Q$.

Demonstração: ver seção 8 de [6] □

Definição 1.2.5. *O tipo parabólico do semigrupo de endomorfismos locais S_Q é o tipo parabólico (comum) de cada S^q, com $q \in Q$.*

Tipo parabólico de fluxos

Para aplicar o conceito de tipo parabólico de semigrupos ao estudo das componentes transitivas por cadeias do fluxo de automorfismos $\phi_t : Q \to Q$, introduz-se o conceito de semigrupo de sombreamento. Para isso, fixado $\epsilon > 0$, considere os automorfismos locais de Q que estão ϵ-próximos da identidade. Isto é, considere $V_\epsilon = \{\varphi \in \mathrm{End}(Q) \mid d(\varphi(\xi), \xi) < \epsilon, \forall \xi \in \mathbb{F}\}$, onde a distância em $\mathbb{F}$ é induzida por uma distância invariante em G tal que toda translação por elementos de $K \subset G$ é isometria.

Para cada $\epsilon > 0$ e $T > 0$, o (ϵ, T)-semigrupo de sombreamento é definido por

$$S_{\epsilon,T} = \{\varphi_s \circ \phi_{t_s} \circ \cdots \circ \varphi_1 \circ \phi_{t_1} \mid t_i > T, \; \varphi_i \in V_\epsilon\}.$$

Dessa construção segue que as (ϵ, T)-cadeias a partir de um ponto $\xi \in \mathbb{E}$ coincidem com a $S_{\epsilon,T}$ órbita de ξ. É possível mostrar que os semigrupos locais $S_{\epsilon,T}$ são acessíveis, de forma que os seus conjuntos de controle são caracterizados a partir do

teorema 1.2.4. Denotando por $D_\Theta^{\epsilon,T}(w)$ os conjuntos de controle para a ação de $S_{\epsilon,T}$ em $\mathbb{E}_\Theta$, as componentes de Morse do fluxo no fibrado flag $\mathbb{E}_\Theta$ induzido pelo fluxo $\phi_t : Q \to Q$ são obtidas a partir da interseção dos conjuntos de transitividade dos conjuntos de controle $D_\Theta^{\epsilon,T}(w)$, como enunciado no próximo teorema.

Teorema 1.2.6. *As componentes da decomposição de Morse mais fina do fluxo $\phi_t : \mathbb{E}_\Theta \to \mathbb{E}_\Theta$ são dadas por*

$$\mathcal{M}_\Theta(w) = \bigcap_{\epsilon,T} \mathbb{D}_\Theta^{\epsilon,T}(w). \tag{1.1}$$

Além disso $\mathcal{M}_\Theta(1)$ é a única componente de Morse atratora e $\mathcal{M}_\Theta(w_0)$ é a única componente de Morse repulsora.

Demonstração: ver seção 9 de [6] □

Observe que se $\epsilon_1 < \epsilon_2$ e $T_1 > T_2$ então $S_{\epsilon_1,T_1} \subset S_{\epsilon_2,T_2}$, donde segue que os tipos parabólicos desses semigrupos satisfazem $\Theta(S_{\epsilon_1,T_1}) \subset \Theta(S_{\epsilon_1,T_1})$. Tomando ϵ suficientemente pequeno e T suficientemente grande temos que o tipo parabólico desses semigrupos estabiliza (pois variando ϵ e T temos uma sequência decrescente de conjuntos finitos).

Definição 1.2.7. *O tipo parabólico do fluxo $\phi_t : Q \to Q$ é o conjunto de raízes simples dado por*

$$\Theta(\phi) = \bigcap_{\epsilon>0,T>0} \Theta(S_{\epsilon,T}).$$

Podemos ainda fornecer uma descrição algébrica das componentes de Morse a partir do tipo parabólico $\Theta(\phi)$ e do seu dual $\Theta(\phi)^*$, como enunciado no teorema abaixo.

Teorema 1.2.8. *Seja $\Theta(\phi)$ o tipo parabólico do fluxo ϕ_t e $\Theta(\phi)^*$ o seu dual. Então*

i. O fluxo admite uma única componete de Morse atratora em $\mathbb{E}_{\Theta(\phi)}$ e esta intersecta cada fibra em um único ponto. Essa componente é realizada como a imagem de uma seção contínua $\sigma_\phi : X \to \mathbb{E}_{\Theta(\phi)}$. Isto é

$$(\mathcal{M}_{\Theta(\phi)}(1))_x = \sigma_\phi(x).$$

Da mesma forma existe uma única componete de Morse repulsora no fibrado flag de tipo dual $\Theta(\phi)^*$ e é dada pela imagem de uma seção contínua $\sigma_\phi^* : X \to \mathbb{E}_{\Theta(\phi)^*}$.

ii. Considerando as funções equivariantes $f : Q \to \mathbb{F}_{\Theta(\phi)}$ *e* $f^* : Q \to \mathbb{F}_{\Theta(\phi)^*}$ *associadas às seções* σ_ϕ *e* σ_ϕ^**, temos que para cada* $q_0 \in Q$*,* $f(q_0)$ *e* $f^*(q_0)$ *são subálgebras opostas e a órbita*

$$\{(f(q), f^*(q)) \mid q \in Q\} = \mathrm{Ad}(G)(f(q_0), f^*(q_0)) \subset \mathbb{F}_{\Theta(\phi)} \times \mathbb{F}_{\Theta(\phi)^*}$$

é aberta, densa e se identifica com o espaço homogêneo $\mathrm{Ad}(G)H_\phi = G/Z(H_\phi)$*, onde* H_ϕ *é um elemento característisco de* $\Theta(\phi)$ *(isto é,* $\Theta(\phi) = \{\alpha \in \sigma | \alpha(H_\phi) = 0\}$*).*

iii. A função equivariante $h_\phi : Q \to \mathrm{Ad}(G)H_\phi$ *obtida a partir da relação do item ii. acima (*$h_\phi(q) \approx (f(q), f^*(q))$*) fornece uma descrição algébrica das componentes de Morse do fluxo* ϕ_t *em qualquer fibrado flag* $\mathbb{E}_\Theta$*. Mais especificamente temos*

$$(\mathcal{M}_\Theta(w))_{\pi(q)} = q \cdot \mathrm{fix}_\Theta(h_\phi(q), w).$$

Observação 1.2.9. *Devido à caracterização algébrica das compoentes de Morse de* ϕ_t *nos fibrados flag ser feita a partir do tipo parabólico do fluxo, por vezes iremos chamar* $\Theta(\phi)$ *de tipo parabólico de Morse do fluxo* ϕ_t *e o denotaremos por* $\Theta_{Mo}(\phi)$ *(ou apenas* Θ_{Mo} *se o fluxo* ϕ_t *estiver claro no contexto). O mesmo faremos com o elemento característico* H_ϕ*, que por vezes denotaremos* H_{Mo} *para deixar explícito que é a partir dele que se obtém a descrição algébrica das componentes de Morse.*

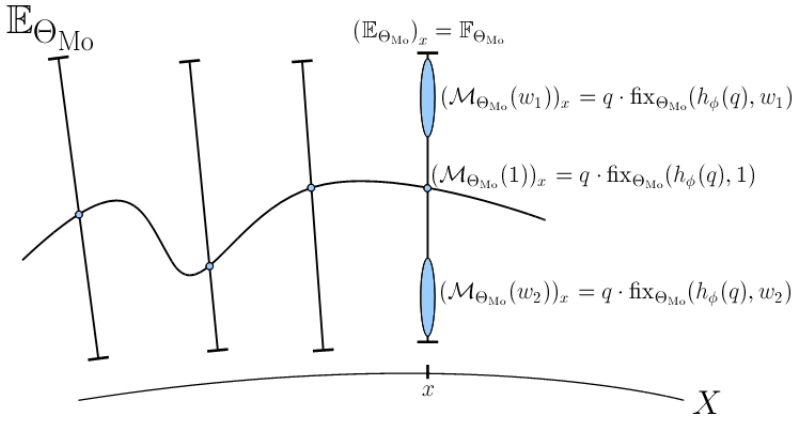


Figura 1.1: Decomposição de Morse em Fibrados Flag

O teorema 1.2.8 diz essencialmente que em cada fibra do fibrado $\mathbb{E}_\Theta$ a decomposição de Morse mais fina é dada pela decomposição de Morse mais fina da ação

de algum conjugado de H_ϕ (i.é., algum elemento da forma $\mathrm{Ad}(g)H_\phi$ com $g \in G$), na variedade flag $\mathbb{F}_\Theta$. Em particular, olhando para o fibrado flag de tipo Θ_{Mo} ou para aqueles que são projeções deste ($\Theta \supset \Theta_{\mathrm{Mo}}$), temos que a componente de Morse atratora, dada em cada fibra por $(\mathcal{M}_{\Theta_{\mathrm{Mo}}}(1))_x = q \cdot \mathrm{fix}_{\Theta_{\mathrm{Mo}}}(h_\phi(q), 1)$, é a uma seção (figura 1.1).

Um caso em que se pode estimar o tipo parabólico do automorfismo $\phi : Q \to Q$ se dá quando $Q = X \times G$ é trivial e o automorfismo é dado por $\phi(x, g) = (f(x), A(x)g)$, com $A : X \to S \subset G$ assumindo valores num semigrupo $S \subset G$. No caso em que S é aberto (ou quando $\mathrm{int}S \neq \emptyset$ e A assume valores no interior de S), não é difícil ver que os semigrupos de sobreamento pequenos contém automorfismos com a mesma propriedade. De modo mais preciso temos que para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno e $T > 0$ suficientemente grande, vale que

$$S_{\epsilon,T} \subset S \quad \text{e} \quad \Theta_{\mathrm{Mo}}(\phi) \subset \Theta(S_{\epsilon,T}) \subset \Theta(S). \tag{1.2}$$

Nestes casos conseguiremos exemplos interessantes sobre a diferenciabilidade dos expoentes de Lyapunov relacionados ao cociclo gerado por A em função do tipo parabólico do semigrupo S.

Capítulo 2

Estruturas diferenciáveis

O objetivo principal deste capítulo é demonstrar a diferenciabilidade de uma aplicação no espaço de seções de um fibrado associado, induzida por um automorfismo do fibrado principal.

Mais especificamente, considere $Q \to X$ um fibrado principal contínuo com grupo de estrutura G semissimples, com base um espaço topológico compacto X, e seja $\phi : Q \to Q$ um automorfismo. Denotamos também por $\phi : X \to X$ a aplicação induzida na base pelo automorfismo $\phi : Q \to Q$. Se o grupo G agir numa variedade F, formamos o fibrado associado $E = Q \times_G F$, e induzimos um automorfismo nesse fibrado pondo $\phi(q \cdot z) = \phi(q) \cdot z$. Esse automorfismo, por sua vez, induz uma aplicação $\Gamma\phi$ no espaço das seções contínuas de E, denotado no texto por ΓE, pondo $\Gamma\phi(\sigma)(x) = \phi \circ \sigma \circ \phi^{-1}(x)$.

Para olhar a diferenciabilidade de $\Gamma\phi$, consideraremos uma K-redução R do fibrado Q, com K compacto, construiremos uma estrutura diferenciável em ΓE e mostraremos que essa estrutura fornece um mergulho de ΓE no espaço de funções $\mathcal{C}(R, F)$, cuja imagem é o espaço das funções equivariantes de R em F.

Além disso, o grupo de calibre $\mathcal{G}(Q)$ do fibrado Q age naturalmente em Q, e com isso induz uma ação no espaço de seções ΓE por composição, isto é, se $\gamma \in \mathcal{G}(Q)$ e $\sigma \in \Gamma E$ é dada por $\sigma(x) = q \cdot f(q)$ então $\gamma\sigma(x) = q \cdot \gamma(f(q))$. Mostraremos nesse capítulo que essa ação é também diferenciável. Essa diferenciabilidade é um dos passos fundamentais para a demonstração de que certas combinações dos expoentes de Lyapunov dependem diferenciavelmente do sistema dinâmico.

2.1 Seções em fibrados vetoriais

Consideraremos aqui fibrados vetoriais contínuos, localmente triviais, de dimensão finita, com base compacta e localmente compacta, e os denotaremos pelas letras $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$, etc.. Tais fibrados sempre possuem um produto interno, ou seja, uma função contínua $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{V} \oplus \mathcal{V} \to \mathbb{R}$, que restrita a cada fibra $\mathcal{V}_x$ é um produto interno. Neste caso, sempre podemos tomar uma redução do grupo de estrutura do fibrado para $O(n)$, o que implica que as restrições das coordenadas locais às fibras são isometrias entre $\mathcal{V}_x$ e $\mathbb{R}^n$.

Diremos que um atlas $\{\varphi_i : \mathcal{U}_i \to U_i \times \mathbb{R}^n \mid 1 \leq i \leq k\}$ do fibrado vetorial $\pi : \mathcal{V} \to X$ é normal se para cada $x \in X$, a restrição da coordenada local φ_i à fibra $\mathcal{V}_x$, $\varphi_i|_{\mathcal{V}_x} : \mathcal{V}_x \to \{x\} \times \mathbb{R}^n$ for uma isometria e, além disso, cada aberto trivializante U_i contiver um compacto K_i tal que $K_i \subset \overline{\text{int}K_i}$ e $X = \bigcup_{i=1}^{k} K_i$. Se X for compacto e localmente compacto então tal atlas sempre existe.

A partir do produto interno definido em $\mathcal{V}$, induzimos uma norma $\| \cdot \| : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ no fibrado pondo $\|\xi\| = \langle \xi, \xi \rangle^{1/2}$.

2.1.1 Topologia do espaço de seções do fibrado vetorial

Passando ao espaço das seções contínuas,

$$\Gamma\mathcal{V} = \{\sigma : X \to \mathcal{V} \mid \sigma \text{ é contínua e } \pi(\sigma(x)) = x\},$$

temos que este é um espaço vetorial normado com norma dada por $\|\sigma\| = \sup_{x \in X} \|\sigma(x)\|$.

Lema 2.1.1. *Seja $\pi : \mathcal{V} \to X$ fibrado vetorial. Considerando o espaço vetorial das seções contínuas desse fibrado, $\Gamma\mathcal{V}$, com a norma dada por $\|\sigma\| = \sup_{x \in X} \|\sigma(x)\|$ temos que:*

(a) Se $\mathcal{A}$ é um aberto em $\mathcal{V}$ contendo a imagem da seção $\sigma \in \Gamma\mathcal{V}$ então $\Gamma\mathcal{A} = \{\tau \in \Gamma\mathcal{V} \mid \text{im}(\tau) \in \mathcal{A}\}$ é aberto em $\Gamma\mathcal{V}$.

(b) Com a norma definida acima, $\Gamma\mathcal{V}$ é um espaço de Banach.

Demonstração:

(a) Considere $\{\varphi_i : \mathcal{U}_i \to U_i \times \mathbb{R}^n \mid 1 \leq i \leq k\}$ um atlas normal para o fibrado vetorial $\mathcal{V}$. Seja $\sigma_i(x) = (x, s_i(x))$ a expressão de σ em coordenadas locais

para $x \in K_i$, isto é, $\sigma_i = \varphi_i \circ \sigma|_{K_i}$. Considere ainda $A_i = \varphi_i(\mathcal{A} \cap \mathcal{U}_i)$. Como as coordenadas locais são isometrias, temos que se $\varphi_i(\xi) = (x, v)$ então $\|\xi\| = \|v\|$. Agora como K_i é compacto e A_i^c é fechado, temos que $\inf\{\|v - s_i(x)\| \mid x \in K_i, (x, v) \in A_i^c\} = r_i > 0$. Assim, se $x \in K_i$ e $\|v - s_i(x)\| < r_i$ então $(x, v) \in A_i$. Voltando para o fibrado vetorial, se $\pi(\xi) \in K_i$ e $\|\xi - \sigma(\pi(\xi))\| < r_i$ então $\xi \in \mathcal{A}$. Tomando $r = \min\{r_1, r_2, ..., r_k\}$ temos que $B(\sigma, r) \subset \Gamma\mathcal{A}$.

(b) Seja (σ_n) uma sequência de Cauchy em $\Gamma\mathcal{V}$. Para cada $x \in X$ defina $\sigma(x) = \lim_{n\to\infty} \sigma_n(x)$. Dado $\epsilon > 0$, existe n_0 tal que $\|\sigma_m(x) - \sigma_n(x)\| < \epsilon$ para todo $n, m > n_0$ e $x \in X$. Fazendo $m \to \infty$ na desigualdade acima segue que $\|\sigma(x) - \sigma_n(x)\| \leq \epsilon$ para todo $x \in X$ e $n > n_0$. Tomando o supremo em x segue que $\|\sigma - \sigma_n\| \leq \epsilon$ para $n > n_0$, ou seja, $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma$. Do último limite segue ainda que σ é, de fato, contínua, pois é limite uniforme de funções contínuas.

□

Se $\phi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ é um homomorfismo contínuo entre os fibrados vetoriais $\pi_V : \mathcal{V} \to X$ e $\pi_W : \mathcal{W} \to Y$, de tal forma que a aplicação $\phi_0 : X \to Y$ induzida na base é um homeomorfismo, então podemos induzir uma aplicação entre os espaços das seções desses fibrados pondo

$$\begin{array}{rccc} \Gamma\phi: & \Gamma\mathcal{V} & \longrightarrow & \Gamma\mathcal{W} \\ & \sigma & \longmapsto & \phi \circ \sigma \circ \phi_0^{-1} \end{array}$$

Para facilitar as notações, iremos supor nas demonstrações abaixo que que os fibrados $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ estão sobre a mesma base X e que o homomorfismo $\phi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ induz a aplicação identidade na base X. Isso não causa perda de generalidade nos resultados enunciados pois em todos eles poderemos identificar o fibrado $\mathcal{W}$ com o seu pull-back $\phi_0^*\mathcal{W}$.

Lema 2.1.2. *Se $\phi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ é um homomorfismo contínuo então a aplicação $\Gamma\phi : \Gamma\mathcal{V} \to \Gamma\mathcal{W}$ também é continua.*

Demonstração: Seja σ_0 uma seção em $\mathcal{V}$ e $\tau_0 = \Gamma\phi(\sigma_0)$. Dado $\epsilon > 0$, considere $\mathcal{B} = \{\xi \in \mathcal{W} \,|\, \|\xi - \tau_0(\pi(\xi))\| < \epsilon\}$. Então $\mathcal{B}$ é aberto em $\mathcal{W}$ e $\Gamma\mathcal{B}$ é a bola em $\Gamma\mathcal{W}$ de centro τ_0 e raio ϵ. Como ϕ é contínua, segue que $\mathcal{A} = \phi^{-1}(\mathcal{B})$ é aberto em $\mathcal{V}$ contendo a imagem de σ_0. Pelo lema anterior, $\Gamma\mathcal{A}$ é aberto em $\Gamma\mathcal{V}$. Mas $\Gamma\mathcal{A} = (\Gamma\phi)^{-1}(\Gamma\mathcal{B})$, mostrando que $\Gamma\phi$ é contínua. □

2.1.2 Diferenciabilidade da aplicação induzida no espaço de seções

Sobre a diferenciabilidade da aplicação $\Gamma\phi$, não precisamos exigir que o homomorfismo ϕ seja diferenciável, mesmo porque os fibrados envolvidos são apenas contínuos. No entanto, $\Gamma\phi$ é uma aplicação entre espaços de Banach, e para garantir sua diferenciabilidade basta exigir que as aplicações entre as fibras de $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ induzidas por ϕ sejam diferenciáveis e que suas derivadas variem continuamente. Este é o resultado enunciado abaixo.

Proposição 2.1.3. *Suponha que para cada $x \in M$ a restrição de ϕ à fibra sobre x, $\phi_x : \mathcal{V}_x \to \mathcal{W}_{\phi_0(x)}$, seja diferenciável e que essas derivadas variem continuamente no sentido de que a aplicação*

$$\begin{array}{rccc} F\phi: & \mathcal{V} & \longrightarrow & L(\mathcal{V}, \phi_0^*\mathcal{W}) \\ & \xi & \longmapsto & \phi'_x(\xi) \end{array}$$

é contínua, onde $x = \pi(\xi)$. Então a aplicação $\Gamma\phi : \Gamma\mathcal{V} \to \Gamma\mathcal{W}$ é diferenciável e sua derivada calculada na seção σ, na direção de τ, é a seção em $\Gamma\mathcal{W}$ que avaliada em $y = \phi_0(x)$ é dada por

$$\left((\Gamma\phi)'(\sigma)\cdot\tau\right)(y) = \phi'_x(\sigma(x))\cdot\tau(x) \tag{2.1}$$

Demonstração: Na demonstração abaixo supomos que ϕ_0 é a aplicação identidade.

Seja $\sigma \in \Gamma\mathcal{V}$. Precisamos mostrar que

$$\lim_{\tau\to 0} \frac{\|\Gamma\phi(\sigma+\tau) - \Gamma\phi(\sigma) - (\Gamma\phi)'(\sigma)\cdot\tau\|}{\|\tau\|} = 0.$$

Para isso, definamos uma função auxiliar pondo

$$\begin{array}{rccc} \psi: & \mathcal{V} & \longrightarrow & \mathcal{W} \\ & \xi & \longmapsto & \psi(\xi) = \phi(\sigma(x)+\xi) - \phi'_x(\sigma(x))\cdot\xi, \end{array}$$

onde $x = \pi(\xi)$.

A função ψ é um homomorfismo contínuo que induz a identidade na base X. Além disso, a sua restrição à cada fibra sobre $x \in X$ é diferenciável. Pela hipótese

de continuidade das derivadas de ϕ nas fibras, segue que a aplicação das derivadas de ψ nas fibras também é contínua e dada por

$$\begin{array}{rccl} F\psi: & \mathcal{V} & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(\mathcal{V},\mathcal{W}) \\ & \xi & \longmapsto & \psi'_x(\xi) = \phi'_x(\sigma(x)+\xi) - \phi'_x(\sigma(x)). \end{array}$$

Fixado $\delta > 0$ e utilizando a desigualdade do valor médio para ψ_x fibra a fibra obtemos

$$\frac{\|\psi(\xi) - \psi(0_{\pi(\xi)})\|}{\|\xi\|} \leq \sup_{\eta\in\mathcal{B}_\delta} \|\psi'_{\pi(\eta)}(\eta)\|,$$

onde $\mathcal{B}_\delta = \{\eta \in \mathcal{V} \mid \|\eta\| < \delta\}$, $\xi \in \mathcal{B}_\delta$ e $0_{\pi(\xi)}$ é a origem na fibra $\mathcal{V}_{\pi(\xi)}$.

Agora dado $\epsilon > 0$, pela continuidade de $\eta \in \mathcal{V} \mapsto \|\psi'_{\pi(\eta)}(\eta)\|$ segue que existe $\delta > 0$ tal que se $\eta \in \mathcal{B}_\delta$ então $\|\psi'_{\pi(\eta)}(\eta)\| < \epsilon$. Com isso temos que se $\|\xi\| < \delta$ então

$$\frac{\|\phi(\sigma(x)+\xi) - \phi(\sigma(x)) - \phi'_x(\sigma(x))\cdot\xi\|}{\|\xi\|} = \frac{\|\psi(\xi) - \psi(0_{\pi(\xi)})\|}{\|\xi\|} \leq \sup_{\eta\in\mathcal{B}_\delta} \|\psi'_{\pi(\eta)}(\eta)\| \leq \epsilon.$$

Desta última desigualdade segue que se $\|\tau\| < \delta$ então para todo $x \in X$ vale

$$\frac{\|\phi(\sigma(x)+\tau(x)) - \phi(\sigma(x)) - \phi'_x(\sigma(x))\cdot\tau(x)\|}{\|\tau(x)\|} \leq \epsilon\,,$$

e tomando o supremo em $x \in X$ temos

$$\frac{\|\Gamma\phi(\sigma+\tau) - \Gamma\phi(\sigma) - (\Gamma\phi)'(\sigma)\cdot\tau\|}{\|\tau\|} \leq \epsilon$$

□

Para graus de diferenciabilidade maiores, as hipóteses são basicamente as mesmas. Ou seja, para garantir a derivada até ordem k de $\Gamma\phi$, basta exigir diferenciabilidade até ordem k da aplicação entre as fibras e continuidade delas.

Abaixo denotamos por $L_k(\mathcal{V},\mathcal{W})$ o fibrado vetorial contínuo cujas fibras são aplicações k-lineares entre as fibras dos fibrados $\underbrace{\mathcal{V}\oplus\cdots\oplus\mathcal{V}}_{k}$ e $\mathcal{W}$. A notação será a mesma para aplicações k-lineares sobre espaços vetoriais, já que estes são nada mais do que fibrados vetoriais cuja base é apenas um ponto.

Lema 2.1.4. *A aplicação $\eta_k : \Gamma(L_k(\mathcal{V},W)) \to L_k(\Gamma\mathcal{V},\Gamma\mathcal{W})$ definida por*

$$\eta_k(\Phi)(\tau_1,\ldots,\tau_k)(x) = \Phi(x)(\tau_1(x),\ldots,\tau_k(x))$$

é linear e contínua.

Demonstração: η_k é claramente linear. Para ver que é contínua, observe que

$$\begin{aligned}
\|\eta_k(\Phi)\| &= \sup\{\sup_{x\in X}\|\eta_k(\Phi)(\tau_1,...,\tau_k)(x)\| \ : \ \tau_1,...,\tau_k\in\Gamma\mathcal{V}, \|\tau_1\|,...,\|\tau_k\|\leq 1\} \\
&\leq \sup\{\sup_{x\in X}\|\Phi(x)(\tau_1(x),\ldots,\tau_k(x)) \ : \ \tau_1,...,\tau_k\in\Gamma\mathcal{V}, \|\tau_1\|,...,\|\tau_k\|\leq 1\} \\
&\leq \sup_{x\in X}\|\Phi(x)\| \\
&= \|\Phi\|.
\end{aligned}$$

Isso mostra que $\|\eta_k\|\leq 1$ e portanto é continua. □

Proposição 2.1.5. *Seja $\phi:\mathcal{V}\to\mathcal{W}$ homomorfismo contínuo tal que para cada $x\in X$ a restrição de ϕ à fibra $\mathcal{V}_x$, $\phi_x:\mathcal{V}_x\to\mathcal{W}_{\phi_0(x)}$, possua derivada até ordem n e que essas derivadas variem continuamente no sentido de que para todo k, com $1\leq k\leq n$ a aplicação*

$$\begin{array}{rccc} F_k\phi: & \mathcal{V} & \longrightarrow & L_k(\mathcal{V},\phi_0^*\mathcal{W}) \\ & \xi & \longmapsto & \phi_x^{(k)}(\xi) \end{array}$$

é contínua, onde $x=\pi(\xi)$. Então a aplicação $\Gamma\phi:\mathcal{V}\to\mathcal{W}$ é de classe C^k e sua derivada de ordem k é a aplicação k-linear que calculada na seção $\sigma\in\mathcal{V}$, e avaliada em $(\tau_1,\ldots,\tau_k)\in(\Gamma\mathcal{V})^k$ será a seção em $\Gamma\mathcal{W}$ que no ponto $y=\phi_0(x)$ vale

$$((\Gamma\phi)^{(k)}(\sigma)(\tau_1,\ldots,\tau_k)(y)=\phi_x^{(k)}(\sigma(x))(\tau_1(x),\ldots,\tau_k(x)) \tag{2.2}$$

Demonstração: Novamente, para facilitar, vamos supor que ϕ_0 é a aplicação identidade em X. A demonstração será feita por indução em k.

Para $k=1$ a diferenciabilidade foi demonstrada na proposição 2.1.3. Observe ainda que $(\Gamma\phi)'=\eta_1\circ\Gamma(F\phi)$, que junto com os lemas 2.1.2 e 2.1.4 e com a continuidade de $F\phi$, mostra a continuidade de $(\Gamma\phi)'$.

Suponha então que o resultado é válido para $k-1$ e que $(\Gamma\phi)^{(k-1)}=\eta_{k-1}\circ\Gamma(F_{k-1}\phi)$. A aplicação linear η_{k-1} é contínua e logo diferenciável. $\Gamma(F_{k-1}\phi)$ também é diferenciável, pois $F(F_{k-1}\phi)=F_k\phi$ é contínua e as restrições de F_{k-1} às fibras são diferenciáveis. Assim $(\Gamma\phi)^{(k-1)}$ é diferenciável, já que é a composta de aplicações diferenciáveis. Além disso, derivando o lado direito da expressão de $(\Gamma\phi)^{(k-1)}$ obtemos o resultado desejado. □

2.2 Espaços de funções

Nesta seção veremos como contruir uma estrutura diferenciável no espaço das funções contínuas de um espaço topológico compacto X numa variedade Riemanniana M. A notação para esse espaço será $\mathcal{C}(X, M)$.

Antes de mais nada, a topologia considerada em $\mathcal{C}(X, M)$ será a topologia compacto-aberta, cuja base de abertos é formada pelos conjuntos da forma

$$U_{K,A} = \{f \in \mathcal{C}(X, M) \mid f(K) \subset A\},$$

onde K é compacto de X e A é aberto de M.

Uma distância é dada por

$$d(f, g) = \sup_{x \in X} d(f(x), g(x)),$$

onde a distância no termo da direita é induzida pela métrica Riemanniana de M. A topologia definida por essa distância é a topologia da convergência uniforme e coincide com a topologia compacto-aberta. Além disso, se M for uma variedade Riemanniana completa então $\mathcal{C}(X, M)$ será um espaço topológico completo, já que limite uniforme de funções contínuas é ainda uma função contínua.

2.2.1 Estrutura diferenciável (Variedade de Banach)

Mostraremos abaixo uma maneira canônica de construir uma estrutura diferenciável no espaço $\mathcal{C}(X, M)$ das funções contínuas de X em M, onde X é um espaço topológico compacto e M é uma variedade Riemanniana.

O passo principal para essa construção é a utilização da função exponencial da variedade M. Para tanto, pela propriedade de difeomorfismo local da exponencial de M, existe uma vizinhança $\mathcal{U} \subset TM$ da seção nula, e uma vizinhança $U \subset M \times M$ da diagonal, tal que a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \epsilon: & \mathcal{U} \subset TM & \longrightarrow & U \subset M \times M \\ & v & \longmapsto & (p, \exp_p(v)) \end{array}$$

é um difeomorfismo, onde $p = \pi_M(v)$. Em particular, para cada $p \in M$, a restrição da aplicação à fibra sobre p é um difeomorfismo entre uma vizinhança da origem de T_pM e uma vizinhança de $p \in M$. Esse difeomorfismo é simplesmente a exponencial em p, $\exp_p : \mathcal{U}_p \subset T_pM \to U_p \subset M$.

A inversa de ϵ é dada pelo logaritmo

$$\begin{array}{rccc} \epsilon^{-1}: & U \subset M \times M & \longrightarrow & \mathcal{U} \subset TM \\ & (p,q) & \longmapsto & \log_p(q) \quad . \end{array}$$

Dada $f \in \mathcal{C}(X,M)$, a vizinhança parametrizada em torno de f será dada por

$$\mathcal{U}_f = \{h \in \mathcal{C}(X,M) \mid (f(x),h(x)) \in U, \ \forall x \in X\}.$$

Essa vizinhança será parametrizada no aberto do espaço vetorial das seções do fibrado vetorial f^*TM dado por

$$\Gamma(f^*\mathcal{U}) = \{s \in \Gamma(f^*TM) \mid s(x) \in T_{f(x)}M \cap \mathcal{U}\}.$$

O sistema de coordenadas é dado essencialmente pelo logaritmo fibra a fibra, ou seja, pela aplicação

$$\begin{array}{rccc} \log_f: & \mathcal{U}_f & \longrightarrow & \Gamma(f^*\mathcal{U}) \\ & h & \longmapsto & \log_f(h)(x) = \log_{f(x)} h(x). \end{array}$$

A inversa é dada pela exponencial,

$$\begin{array}{rccc} \exp_f: & \Gamma(f^*\mathcal{U}) & \longrightarrow & \mathcal{U}_f \\ & s & \longmapsto & \exp_f(s)(x) = \exp_{f(x)} s(x). \end{array}$$

Para ver que as aplicações acima definem uma boa parametrização, vejamos que a mudança de coordenadas é diferenciável. Se as vizinhanças parametrizadas em torno de f e g se intersectam, então a mudança de coordenadas $\log_g \circ \exp_f$ fica definida entre os abertos $\log_f(\mathcal{U}_f \cap \mathcal{U}_g)$ e $\log_g(\mathcal{U}_f \cap \mathcal{U}_g)$ de $\Gamma(f^*TM)$ e $\Gamma(g^*TM)$ respectivamente. Além disso, tal mudança é dada por

$$\log_g \circ \exp_f(s)(x) = \log_{g(x)} \circ \exp_{f(x)}(s(x)). \tag{2.3}$$

Para ver que essa mudança de coordenadas é uma aplicação diferenciável entre abertos do espaço de seções dos fibrados vetoriais f^*TM e g^*TM, vamos utilizar o teorema 2.1.3. Para isso, considere o aberto

$$U_{fg} = (f \times id)^{-1}(U) \cap (g \times id)^{-1}(U) \subset X \times M \ ,$$

que é não vazio, já que contém o gráfico de qualquer $h \in \mathcal{U}_f \cap \mathcal{U}_g$. Considere ainda as aplicações contínuas $\epsilon_f : f^*\mathcal{U} \to X \times M$ e $\epsilon_g : g^*\mathcal{U} \to X \times M$, definidas

respectivamente por $\epsilon_f(x,v) = (x, \exp_{f(x)} v)$ e $\epsilon_g(x,v) = (x, \exp_{g(x)} v)$. Assim a aplicação (2.3) é induzida pela aplicação entre os abertos $\epsilon_f^{-1}(U_{fg})$ e $\epsilon_g^{-1}(U_{fg})$, contidos respectivamente em f^*TM e g^*TM, dada por:

$$\begin{array}{rccc} \epsilon_g^{-1} \circ \epsilon_f : & \epsilon_f^{-1}(U_{fg}) & \longrightarrow & \epsilon_g^{-1}(U_{fg}) \\ & (x,v) & \longmapsto & (x, \log_{g(x)} \circ \exp_{f(x)} v). \end{array}$$

Essa é uma aplicação contínua, as restrições às fibras de f^*TM são diferenciáveis e suas diferenciais variam continuamente. Pelo teorema 2.1.3, segue que a aplicação 2.3 é diferenciável.

Com isso as aplicações $\log_f : \mathcal{U}_f \to \Gamma(f^*\mathcal{U})$ definem os sistemas de coordenadas de $\mathcal{C}(X,M)$.

2.2.2 Regularidade de aplicações em espaços de funções

Vejamos inicialmente um pouco sobre a continuidade de aplicações entre os espaços de funções.

Lema 2.2.1. *Se $\phi : M \to N$ é contínua então $\Phi : \mathcal{C}(X,M) \to \mathcal{C}(X,N)$ dada por $\Phi(g) = \phi \circ g$ também é contínua. Em particular se ϕ for um homeomorfismo então Φ também será.*

Demonstração: Basta ver que $\Phi^{-1}(U_{K,A}) = U_{K,\phi^{-1}(A)}$. □

Se $M \subset N$ e considerarmos em M a topologia induzida de N, então a topologia compacto-aberta de $\mathcal{C}(X,M)$ será simplesmente a restrição da topologia de $\mathcal{C}(X,N)$. Em particular, se $\phi : M \to N$ for um mergulho topológico, então a aplicação induzida $\Phi : \mathcal{C}(X,M) \to \mathcal{C}(X,N)$ também será um mergulho topológico.

Para ver a diferenciabilidade dessa aplicação induzida, vamos utilizar a estrutura diferenciável construída acima e novamente o teorema 2.1.3, que fornece a diferenciabilidade de aplicações entre espaços de seções induzidas por aplicações entre fibrados vetoriais.

Suponha então que $\phi : M \to N$ seja de classe C^k e considere $f \in C(X,M)$. Considere os abertos $\mathcal{U}$ de TM e $\mathcal{V}$ de TN difeomorfos às vizinhanças U e V da diagonal de $M \times M$ e $N \times N$ respectivamente, como construídos no começo da seção. Seja $\mathcal{U}_f$ o aberto trivializante em torno de f e $\mathcal{V}_g$ o aberto trivializante em torno de $g = \phi \circ f \in \mathcal{C}(X,N)$. Diminuindo $\mathcal{U}_f$ se necessário, pela continuidade de Φ, podemos

assumir que $\Phi(\mathcal{U}_f) \subset \mathcal{V}_g$. Escrevendo a aplicação Φ nas coordenadas locais descritas acima, temos a aplicação

$$\begin{aligned} \log_g \circ \Phi \circ \exp_f : \quad \Gamma(f^*\mathcal{U}) &\longrightarrow \Gamma(g^*\mathcal{V}) \\ s(x) &\longmapsto \log_{g(x)} \left[\phi(\exp_{f(x)}(s(x)))\right] . \end{aligned}$$

Essa aplicação é induzida pela aplicação entre os abertos $f^*\mathcal{U}$ e $g^*\mathcal{V}$ dos fibrados vetoriais f^*TM e g^*TN, dada por $v \mapsto \log_{g(x)} \left[\phi(\exp_{f(x)}(v))\right]$, onde $\pi_M(v) = f(x)$. Como essa aplicação é diferenciável em cada fibra e suas diferenciais variam continuamente, o teorema 2.1.3 garante que $\log_g \circ \Phi \circ \exp_f$ é diferenciável.

O teorema 2.1.3 fornece ainda a expressão para a derivada da aplicação entre os espaços de seções de fibrados vetoriais. Assim, a derivada de Φ calculada em $f \in \mathcal{C}(X, M)$ é a aplicação

$$\Phi'(f) : \Gamma(f^*TM) \to \Gamma(g^*TN)$$

que avaliada na seção $s \in \Gamma(f^*TM)$ é a seção de $\Gamma(g^*TN)$ que calculada em x vale

$$\left[\Phi'(f) \cdot (s)\right](x) = \phi'(f(x)) \cdot s(x) . \tag{2.4}$$

Para referência posterior enunciamos os resultados acima na seguinte proposição.

Proposição 2.2.2. *Se $\phi : M \to N$ é de classe C^k então $\Phi : \mathcal{C}(X, M) \to \mathcal{C}(X, N)$ dada por $\Phi(f) = \phi \circ f$ também é de classe C^k, e sua derivada é dada pela fórmula (2.4) acima. Além disso, se ϕ for um mergulho então Φ também será.*

Observando o isomorfismo canônico entre $\mathcal{C}(X, M \times N)$ e $\mathcal{C}(X, M) \times \mathcal{C}(X, N)$, temos o seguinte corolário.

Corolário 2.2.3. *Sejam M, N e O variedades Riemannianas e considere uma aplicação de classe C^k, $\theta : M \times N \to O$. Então a aplicação*

$$\begin{aligned} \Theta : \quad \mathcal{C}(X, M) \times \mathcal{C}(X, N) &\longrightarrow \mathcal{C}(X, O) \\ (f, g) &\longmapsto \Theta(f, g)(x) = \theta(f(x), g(x)) \end{aligned}$$

é de classe C^k.

2.2.3 Mergulhos de espaços de funções equivariantes

Como já vimos acima, se M é subvariedade mergulhada de N então, com a estrutura diferenciável construída, temos que $\mathcal{C}(X, M)$ também e subvariedade mergulhada de $\mathcal{C}(X, N)$. Nesta parte trataremos de mergulhos entre espaços de funções equivariantes.

Se K age nos espaços X e Y, então uma função $f : X \to Y$ é dita K-equivariante (ou simplesmente equivariante) se ela comuta com a ação de K. Isto é, se K age à esquerda (direita) em X e em Y, então f é equivariante se $f(kx) = kf(x)$ ($f(xk) = f(x)k$) para todos $k \in K$ e $x \in X$. Se K agir em lados diferentes, por exemplo à direita em X e à esquerda em Y, então diremos que f é equivariante se $f(xk) = k^{-1}f(x)$. Denotamos o conjunto das funções K-equivariantes de X em Y por $\mathcal{C}^K_{eq}(X, Y)$ (ou apenas $\mathcal{C}_{eq}(X, Y)$ se o grupo K estiver claro no contexto).

Considere agora $R \to X$ um fibrado principal com grupo estrutural compacto K e $\mathcal{L} \to X$ um subfibrado com grupo estrutural compacto $L \subset K$ (K e L agem à direita em R e $\mathcal{L}$, respectivamente). Considere ainda $\rho : K \to \mathrm{Gl}(V)$ uma representação de K e F uma órbita dessa representação (K e L agem à esquerda em V e em F através da representação ρ). Como K é compacto, suas órbitas são subvariedades mergulhadas de V. Além disso, também pela compacidade de K, V admite um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ tal que $\rho(k)$ é isometria para todo $k \in K$.

Estamos interessados aqui em analisar a relação entre os espaços de funções L-equivariantes $\mathcal{C}_{eq}(\mathcal{L}, V)$ e $\mathcal{C}_{eq}(\mathcal{L}, F)$ com o das funções K-equivariantes $\mathcal{C}_{eq}(R, V)$ e $\mathcal{C}_{eq}(R, F)$. Nosso interesse nesses espaços se deve ao fato de que eles estão em bijeção com o espaço de seções dos fibrados associados $R \times_\rho F$ e $R \times_\rho V$. Essas bijeções serão discutidas com mais detalhes na próxima seção.

Voltando aos espaços de funções, observe primeiramente que $\mathcal{C}(\mathcal{L}, V)$ é um espaço de Banach e $\mathcal{C}_{eq}(\mathcal{L}, V)$ é um subespaço vetorial fechado, já que o limite uniforme de funções contínuas e equivariantes é ainda uma função contínua e equivariante. Da mesma forma $\mathcal{C}_{eq}(R, V)$ é um subespaço fechado de $\mathcal{C}(R, V)$.

Como as funções equivariantes ficam completamente determinadas ao longo de uma órbita apenas conhecendo seu valor num ponto dessa órbita, temos uma bijeção

$$I : \mathcal{C}_{eq}(\mathcal{L}, V) \to \mathcal{C}_{eq}(R, V)$$

que associa cada função L-equivariante $f \in \mathcal{C}_{eq}(\mathcal{L}, V)$ à única função K- equivariante $I(f) \in \mathcal{C}_{eq}(R, V)$ que coincide com f no subfibrado $\mathcal{L}$. Mais explicitamente, se $p \in R$, então escrevendo $p = qk$, com $q \in \mathcal{L}$ e $k \in K$, temos que $I(f)(p) = \rho(k^{-1})f(q)$. A inversa dessa aplicação é dada simplesmente pela restrição da função em $\mathcal{C}_{eq}(R, V)$ ao subfibrado $\mathcal{L}$. Considerando aplicações a valores em F, do mesmo modo feito acima, construímos uma bijeção entre $\mathcal{C}_{eq}(\mathcal{L}, F)$ e $\mathcal{C}_{eq}(R, F)$.

Proposição 2.2.4. *A aplicação $I : \mathcal{C}_{eq}(\mathcal{L}, V) \to \mathcal{C}_{eq}(R, V)$ é uma isometria.*

Demonstração: I é claramente uma aplicação linear e injetora. Para ver que é isometria, devemos calcular $\|I(f)\| = \sup_{p\in R}\|f(q)\|$, onde a segunda norma é em V. Para isso, observe que para todo $p \in R$ existe $k \in K$ e $q \in \mathcal{L}$ tal que $p = qk$. Logo $f(p) = f(qk) = \rho(k^{-1})f(q)$. Como $\rho(k^{-1})$ é isometria, segue que $\sup_{p\in R}\|f(p)\| = \sup_{q\in\mathcal{L}}\|f(q)\|$, isto é, $\|I(f)\| = \|f\|$. □

Veremos na próxima seção que se identificarmos o espaços das funções equivariantes $\mathcal{C}_{eq}(\mathcal{L}, F)$ com o espaço das seções de $R \times_K F$, então $\mathcal{C}_{eq}(\mathcal{L}, F)$ passa a ser uma subvariedade mergulhada de $\mathcal{C}_{eq}(\mathcal{L}, V)$. Deste modo a restrição de I à $\mathcal{C}_{eq}(\mathcal{L}, F)$ fornece um mergulho deste espaço em $\mathcal{C}_{eq}(R, V)$ e, consequentemente, em $\mathcal{C}(R, V)$. A imagem dessa restrição será justamente $\mathcal{C}_{eq}(R, F)$, mostrado que, $\mathcal{C}_{eq}(R, F)$ é uma subvariedade mergulhada de $\mathcal{C}(R, V)$.

2.3 Seções em fibrados associados

Nesta seção faremos algumas relações entre espaços de funções equivariantes e seções em fibrados associados. Tais relações serão úteis para demonstrar que certas aplicações entre espaços de seções são diferenciáveis. Cabe aqui ainda a observação que nem sempre um fibrado associado possui uma seção global contínua, e por isso assumiremos essa hipótese para as construções que faremos nesta seção. Essa hipótese não será totalmente restritiva pois, no caso de fibrados Flag, o qual estaremos particularmente interessados, podemos obter seções globais contínuas a partir das componentes de Morse (ver, por exemplo, item i do teorema 1.2.8).

2.3.1 Seções e funções equivariantes

Considere $R \to X$ um K-fibrado principal, F uma variedade na qual K age à direita e forme o fibrado associado $E = R \times_K F$. O espaço das seções de E está em bijeção com o conjunto das funções K-equivariantes $\mathcal{C}_{eq}(R, F)$. De fato, seja $\sigma \in \Gamma E$. Para cada $x \in X$, e r na fibra R_x, existe $f_\sigma(r) \in F$ tal que

$$\sigma(x) = r \cdot f_\sigma(r). \tag{2.5}$$

A função $f_\sigma : R \to F$ assim definida é equivariante, pois se $r' = rk$ com $k \in K$, então $rk \cdot f_\sigma(rk) = r' \cdot f_\sigma(r') = \sigma(x) = r \cdot f_\sigma(r) = rk \cdot k^{-1}f_\sigma(r)$, e assim $f_\sigma(rk) = k^{-1}f_\sigma(r)$. Reciprocamente, cada função equivariante $f \in \mathcal{C}_{eq}(R, F)$ determina uma

seção $\sigma \in \Gamma E$ pondo $\sigma(x) = r \cdot f(r)$. A seção fica bem definida pois f é equivariante. Isso mostra que a relação $\sigma \to f_\sigma$ é uma bijeção.

Fixados uma seção $\sigma \in \Gamma E$ e um ponto base $z_o \in F$, considere o subfibrado

$$\mathcal{L}_\sigma = \{r \in R \mid f_\sigma(r) = z_0\}.$$

Esse subfibrado é uma L-redução de R, onde L é a isotropia em z_0. Como feito na seção 2.2.3, temos que o conjunto das funções K-equivariantes, $\mathcal{C}_{eq}(R, F)$, está em bijeção com o conjunto das funções L-equivariantes, $\mathcal{C}_{eq}(\mathcal{L}_\sigma, F)$.

Outra identificação útil se dá entre o conjunto das funções L-equivariantes de $\mathcal{L}_\sigma$ em $T_{z_0}F$ com o espaço das seções do fibrado tangente às fibras de E ao longo da seção σ.

Para esclarecer a afirmação acima vamos fixar algumas notações. Denotaremos por T^fE o fibrado tangente às fibras de E. Esse fibrado pode ser visto como um fibrado associado a R se considerarmos a ação de K no fibrado tangente TF. Essa ação é dada via diferenciais, ou seja, se $k \in K$ e $v \in T_zF$, então $k \cdot v = d(k)_z v \in T_{kz}F$. Assim

$$T^fE = R \times_K TF = \{r \cdot v \mid r \in R \text{ e } v \in TF\}.$$

Esse fibrado é um fibrado vetorial sobre E cuja fibra sobre $r \cdot z$ é

$$(T^fE)_{r\cdot z} = T_{r\cdot z}E_{\pi(r\cdot z)} \cong T_zF.$$

Considerando o seu pullback pela seção $\sigma : X \to E$, temos um fibrado vetorial sobre X, que é o fibrado tangente às fibras de E ao longo da seção sigma, isto é,

$$\sigma^*(T^fE) = \{(x, t) \mid t \in (T^fE)_{\sigma(x)} = T_{\sigma(x)}E_x\}.$$

Além disso, considerando T^fE como fibrado associado à L-redução $\mathcal{L}_\sigma$, temos que

$$T^fE = \mathcal{L}_\sigma \times_L TF \quad \text{e} \quad \sigma^*(T^fE) = \mathcal{L}_\sigma \times_L T_{z_0}F.$$

Cada seção $\tau \in \Gamma(\sigma^*(T^fE))$ dá origem à uma função equivariante $w_\tau \in \mathcal{C}_{eq}(\mathcal{L}_\sigma, T_{z_0}F)$ definida da seguinte maneira: para cada $x \in X$, temos que $\tau(x) = (x, t(x))$, com $t(x) \in (T^fE)_{\sigma(x)} = T_{r\cdot f_\sigma(r)}E_x \cong T_{f_\sigma(r)}F$. Agora para cada $r \in (\mathcal{L}_\sigma)_x$ existe $w_\tau(r) \in T_{f_\sigma(r)}F = T_{z_0}F$ tal que $t(x) = r \cdot w_\tau(r)$. Essa função w_τ é L-equivariante. De fato, escrevendo $r' = rl$, com $l \in L$, temos que $rl \cdot w_\tau(rl) = r' \cdot w_\tau(r') = t(x) = r \cdot w_\tau(r) = rl \cdot l^{-1}w_\tau(r)$, donde segue que $w_\tau(rl) = l^{-1}w_\tau(r)$. Reciprocamente, uma

função L-equivariante $w \in \mathcal{C}_{eq}(\mathcal{L}_\sigma, T_{z_0}F)$ dá origem a uma seção $\tau \in \Gamma(\sigma^*(T^fE))$ pondo $\tau(x) = (x, l \cdot w(l))$, onde $l \in (\mathcal{L}_\sigma)_x$. De fato, $l \cdot w(l) \in T_{l\cdot z_0}E_x = T_{\sigma(x)}E_x$.

Resumindo temos as seguintes bijeções

$$\begin{array}{ccc} \Gamma E & \longrightarrow & \mathcal{C}_{eq}(R,F) \\ \sigma & \longmapsto & f_\sigma \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{ccc} \Gamma\left(\sigma^*(T^fE)\right) & \longrightarrow & \mathcal{C}_{eq}(\mathcal{L}_\sigma, T_{z_0}F) \\ \tau & \longmapsto & w_\tau \end{array} \tag{2.6}$$

onde as relações entre as seções e as funções equivariantes são dadas por

$$\sigma(x) = r \cdot f_\sigma(r),\ r \in R_x \qquad \text{e} \qquad \tau(x) = (x, l \cdot w_\tau(l))\,,\ l \in (\mathcal{L}_\sigma)_x$$

2.3.2 Estrutura diferenciável no espaço de seções

O objetivo aqui é contruir uma estrutura diferenciável no espaço de seções de um fibrado associado. Considere então $R \to X$ um fibrado principal com base X e grupo de estrutura K (ambos compactos). Seja L um subgrupo fechado de K, $F = K/L$ um espaço homogêneo e $E = R \times_K F$ fibrado associado. O contexto que estamos interessado se dá quando R é uma K-redução de um G-fibrado principal Q, com G semissimples, obtida através da decomposição de Iwasawa $G = KAN$. O espaço homogêneo F que utilizaremos com frequência são as variedades flag de G.

Antes de mais nada, vamos construir uma métrica em ΓE. A partir de métrica Riemanniana K-invariante em F, definimos uma distância d_0 em F, também K-invariante, isto é $d_0(k.z, k.w) = d_0(z, w)$, para quaisquer $z, w \in F$ e $k \in K$. Essa distância pode ser levada a uma distância nas fibras de E pondo $d(r \cdot z, r \cdot w) = d_0(z, w)$, que fica bem definida pela K-invariância de d_0. De fato, se $r \cdot z = r' \cdot z'$ e $r \cdot w = r' \cdot w'$ então existe $k \in K$ tal que $r' = rk$, $z' = k^{-1}z$ e $w' = k^{-1}w$. Logo

$$d(r' \cdot z', r' \cdot w') = d_0(z', w') = d_0(k^{-1}z, k^{-1}w) = d_0(z, w) = d(r \cdot z, r \cdot w).$$

Por fim, essa distância nas fibras de E define uma distância em ΓE por

$$d(\sigma, \tau) = \sup_{x \in X} d(\sigma(x), \tau(x)), \quad \sigma, \tau \in \Gamma E.$$

Com essa distância, ΓE é um espaço métrico completo.

Para construir a estrutura diferenciável em ΓE considere $U_{z_0} \subset F$ e $V_{z_0} \subset T_{z_0}F$ vizinhanças de $z_0 \in F$ e $0 \in T_{z_0}F$ tais que $\exp_{z_0} : V_{z_0} \to U_{z_0}$ é um difeomorfismo.

Considere a ação de K em TF dada pela derivada da ação de K em F, isto é, $k_* : T_zF \to T_{kz}F$, $k_*(v) = d(k)_z v$. Como $k \in K$ é isometria da métrica, sua ação

comuta com a exponencial e com sua inversa local, isto é

$$k \circ \exp_z = \exp_{kz} \circ k_* \quad \text{e} \quad k_* \circ \log_z = \log_{kz} \circ k.$$

Escolhendo $V_{z_0} = B(0,r)$, com r suficientemente pequeno, e $U_{z_0} = \exp_{z_0} V_{z_0}$, como a métrica é K-invariante, temos que a imagem de V_{z_0} por k_* é a bola $B(0,r)$ em T_zF, onde $z = kz_0$. Denotando por $V_z = B(0,r) \subset T_zF$ e $U_z = \exp_z V_z$ temos que $V_z = k_* V_{z_0}$ e $U_z = kU_{z_0}$. Essas fórmulas mostram ainda que V_{z_0} e U_{z_0} são invariantes por $L \subset K$. (obs: em geral V_{z_0} e U_{z_0} não são invariantes por elementos $k \in K$).

Além disso, podemos escolher r suficientemente pequeno de forma que $\exp_{z_0} : V_{z_0} \to U_{z_0}$ e $\log_{z_0} : U_{z_0} \to V_{z_0}$ sejam Lipschitzianas.

Considere agora o subfibrado $\mathcal{L}_\sigma = \{p \in R \mid f_\sigma(p) = z_0\}$, onde f_σ é a função equivariante associada a σ por $\sigma(x) = p \cdot f_\sigma(p)$. Se $p, q \in \mathcal{L}_\sigma$ estão na mesma fibra então $p \cdot U_{z_0} = q \cdot U_{z_0}$. De fato, escrevendo $p = qk$, com $k \in L$, temos que $p \cdot U_{z_0} = qk \cdot U_{z_0} = q \cdot kU_{z_0} = q \cdot U_{z_0}$, já que U_{z_0} é L-invariante.

Com isso podemos construir uma vizinhança da imagem da seção $\sigma \in \Gamma E$ pondo

$$\mathcal{U}_\sigma = \bigcup_{p \in \mathcal{L}_\sigma} p \cdot U_{z_0}. \tag{2.7}$$

Lema 2.3.1. *$\mathcal{U}_\sigma$ é aberto em E e contém a imagem de σ. Além disso*

$$\Gamma\mathcal{U}_\sigma = \{\tau \in \Gamma E \mid \tau(x) \in \mathcal{U}_\sigma,\ \forall x \in X\}$$

é aberto em ΓE.

Demonstração: Seja w_n uma sequência fora de $\mathcal{U}_\sigma$ e $w = \lim w_n$. Como $w_n \notin \mathcal{U}_\sigma$, podemos escrever $w_n = p_n \cdot z_n$, com $p_n \in \mathcal{L}_\sigma$ e $z_n \notin U_{z_0}$. Por compacidade, podemos assumir que $p_n \to p \in \mathcal{L}_\sigma$ e $z_n \to z \notin U_{z_0}$. Assim temos que $w = \lim w_n = \lim p_n \cdot z_n = p \cdot z \notin \mathcal{U}_\sigma$.

Os argumentos no espaço de seções são praticamente os mesmos. Seja τ_n uma sequência fora de $\Gamma\mathcal{U}_\sigma$ com $\tau = \lim \tau_n$ (limite uniforme). Para cada $n \in \mathbb{N}$, existem $x_n \in X$, $p_n \in \mathcal{L}_\sigma$ e $z_n \in F \backslash U_{z_0}$ tais que $\tau_n(x_n) = p_n \cdot z_n$. Tomando subsequências se necessário, vamos assumir que $x_n \to x \in X$, $p_n \to p \in \mathcal{L}_\sigma$ e $z_n \to z \in F \backslash U_{z_0}$. Como τ_n converge uniformemente para τ segue que $\tau(x) = \lim \tau_n(x_n) = \lim p_n \cdot z_n = p \cdot z \notin U_{z_0}$. Assim $\tau(x) \notin \mathcal{U}_\sigma$ e $\tau \notin \Gamma\mathcal{U}_\sigma$. □

Considerando novamente a seção $\sigma \in \Gamma E$ e o subfibrado $\mathcal{L}_\sigma$, também pela L-invariância de V_{z_0}, temos que se $p, q \in \mathcal{L}_\sigma$ estão na mesma fibra então $p \cdot V_{z_0} = q \cdot V_{z_0}$. Definimos assim o seguinte subconjunto de $T^f E$:

$$\mathcal{V}_\sigma = \bigcup_{p \in \mathcal{L}_\sigma} p \cdot V_{z_0}. \tag{2.8}$$

Esse subconjunto não é aberto em $T^f E$, já que V_{z_0} não é aberto no fibrado tangente TF. Os elementos de $\mathcal{V}_\sigma$ são vetores tangentes aos pontos $\sigma(x)$ contidos apenas na fibra vertical do fibrado vetorial $T^f E \to E$. No entanto, tomando o fibrado $\sigma^*(T^f E)$, dos vetores tangentes às fibras de E ao longo de σ, temos que $\mathcal{V}_\sigma$ é um aberto desse fibrado vetorial sobre X, como mostra a proposição abaixo.

Proposição 2.3.2. *$\mathcal{V}_\sigma$ é aberto no fibrado vetorial $\sigma^*(T^f E)$.*

Demonstração: A demonstração é análoga à anterior. Seja w_n uma sequência em $\sigma^*(T^f E)$ fora de $\mathcal{V}_\sigma$ e suponha que $w_n \to w$. Escreva $w_n = p_n \cdot v_n$, com $p_n \in \mathcal{L}_\sigma$ e $v_n \in T_{z_0}F \backslash V_{z_0}$. Tomando subsequências, por compacidade podemos assumir que $p_n \to p \in \mathcal{L}_\sigma$. Neste caso, como $\|w_n\| = \|p_n \cdot v_n\| = \|v_n\|$, temos que $\|v_n\|$ é uma sequência limitada, e tomando subsequências assumimos que $v_n \to v \in T_{z_0}F \backslash V_{z_0}$. Assim temos que $w = \lim w_n = \lim p_n \cdot v_n = p \cdot v \notin \mathcal{V}_\sigma$, ou seja, $\mathcal{V}_\sigma$ é fechado. □

Corolário 2.3.3. *$\Gamma\mathcal{V}_\sigma$ é aberto em $\Gamma(\sigma^*(T^f E))$.*

Demonstração: É consequência imediata da proposição acima com o lema 2.1.1 □

Agora podemos identificar os abertos $\mathcal{U}_\sigma$ e $\mathcal{V}_\sigma$ através da aplicação exponencial $\exp_{z_0} : V_{z_0} \to U_{z_0}$. Definimos assim

$$\begin{array}{rccc} \exp_\sigma : & \mathcal{V}_\sigma & \longrightarrow & \mathcal{U}_\sigma \\ & p \cdot v & \longmapsto & \exp_\sigma(p \cdot v) = p \cdot \exp_{z_0} v \end{array} \tag{2.9}$$

Proposição 2.3.4. *A aplicação $\exp_\sigma$ está bem definida e é uma bijeção.*

Demonstração: Se $p \cdot v = q \cdot w$, com $p, q \in \mathcal{L}_\sigma$ e $v, w \in V_{z_0}$, então $q = pa$ com $a \in L$. Assim $p \cdot v = q \cdot w = pa \cdot w = p \cdot aw$, o que implica que $v = aw$. No entanto, como $a \in L$ é isometria de F e $az_0 = z_0$, segue que $a \circ \exp_{z_0} = \exp_{z_0} \circ a$, garantindo que $\exp_{z_0}(v) = \exp_{z_0}(aw) = a \exp_{z_0}(w)$. Portanto,

$$p \cdot \exp_{z_0} v = p \cdot a \exp_{z_0} w = q \cdot \exp_{z_0} w,$$

isto é, $\exp_\sigma(p \cdot v)$ não depende do representante $p \cdot v$.

Para ver a sobrejetividade, observe que fixado p, $p \cdot \exp_{z_0} v$ percorre $p \cdot U_{z_0}$ quando v percorre V_{z_0}. Para ver que é injetora, como $\exp_\sigma$ preserva fibras, basta ver que é injetora em cada fibra. Assim, para cada p fixado temos que se $\exp_\sigma(p \cdot v) = \exp_\sigma(p \cdot w)$ então $p \cdot \exp_{z_0} v = p \cdot \exp_{z_0} w$. Daí segue que $\exp_{z_0} v = \exp_{z_0} w$ e então $v = w$. □

A inversa de $\exp_\sigma$ é a aplicação:

$$\begin{array}{rccl} \log_\sigma : & \mathcal{U}_\sigma & \longrightarrow & \mathcal{V}_\sigma \\ & p \cdot z & \longmapsto & \log_\sigma(p \cdot z) = p \cdot \log_{z_0} z \ . \end{array} \tag{2.10}$$

Com isso temos:

Proposição 2.3.5. *A aplicação* $\exp_\sigma : \mathcal{V}_\sigma \to \mathcal{U}_\sigma$ *é um homeomorfismo.*

Demonstração: Essa aplicação contínua é pois é a composta das aplicações $(p, v) \in \mathcal{L}_\sigma \times T_{z_0}F \to p \cdot v \in E$ e de $\exp_{z_0}$. Da mesma forma $\log_\sigma$ é contínua. □

A aplicação $\exp_\sigma : \mathcal{V}_\sigma \to \mathcal{U}_\sigma$ induz uma bijeção entre os abertos $\Gamma\mathcal{V}_\sigma$ e $\Gamma\mathcal{U}_\sigma$ dos espaços de seções dos fibrados $\Gamma(\sigma^*(T^fE))$ e ΓE, respectivamente. A aplicação induzida é dada por

$$\begin{array}{rccl} \varepsilon_\sigma : & \Gamma\mathcal{V}_\sigma & \longrightarrow & \Gamma\mathcal{U}_\sigma \\ & \tau & \longmapsto & \varepsilon_\sigma(\tau) = \exp_\sigma \circ \tau \ . \end{array} \tag{2.11}$$

A inversa dessa aplicação é a composição com $\log_\sigma$ dada por

$$\begin{array}{rccl} \lambda_\sigma : & \Gamma\mathcal{U}_\sigma & \longrightarrow & \Gamma\mathcal{V}_\sigma \\ & \tau & \longmapsto & \lambda_\sigma(\tau) = \log_\sigma \circ \tau \ . \end{array} \tag{2.12}$$

Para ver que essas aplicações formam um sistemas de coordenadas para ΓE, precisamos ver que ε_σ e λ_σ são contínuas e também que se τ é uma outra seção tal que $\mathcal{U}_\sigma \cap \mathcal{U}_\tau \neq \emptyset$, então a mudança de coordenadas $\lambda_\sigma \circ \varepsilon_\tau$ é diferenciável.

Para ver a continuidade das aplicações, observe primeiramente que tomando as vizinhanças V_{z_0} e U_{z_0} de forma que $\exp_{z_0}$ e $\log_{z_0}$ sejam Lipschitzianas, então como as distâncias nas fibras de E e de $\sigma^*(T^fE)$ são induzidas pelas distâncias K-invariantes de F e de $T_{z_0}F$, segue que $\exp_\sigma$ e $\log_\sigma$ são aplicações Lipschitzianas ao longo das fibras. Isto é, existem constantes C_1 e C_2 tais que para todo $p \in \mathcal{L}_\sigma$, $v, w \in V_{z_0}$ e

$z, y \in U_{z_0}$ valem as desigualdades:

$$\begin{aligned} d(\exp_\sigma(p\cdot v), \exp_\sigma(p\cdot w)) &= d_0(\exp_{z_0} v, \exp_{z_0} w) \\ &< C_1\|v-w\| = C_1\|p\cdot v - p\cdot w\| \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \|\log_\sigma(p\cdot z) - \log_\sigma(p\cdot y)\| &= \|\log_{z_0} z - \log_{z_0} y\| \\ &< C_2 d_0(z,y) = d(p\cdot z, p\cdot y) \end{aligned}$$

Isso nos permite mostrar que as aplicações ε_σ e λ_σ são contínuas. Mais especificamente temos:

Proposição 2.3.6. *Com as escolhas feitas acima, as aplicação ε_σ e λ_σ são Lipschitzianas e, portanto, contínuas.*

Demonstração: A distância d entre duas seções $\tau, \eta \in \Gamma\mathcal{U}_\sigma$ é dada por $d(\tau,\eta) = \sup_{x\in X} d(\tau(x), \eta(x))$. Por outro lado, dados $u, w \in \Gamma\mathcal{V}_\sigma$ e $x \in X$ escreva $u(x) = p\cdot u'(x)$ e $w(x) = p\cdot w'(x)$ com $u'(x), w'(x) \in V_{z_0}$. Então, $\varepsilon_\sigma(u)(x) = p\cdot\exp_{z_0} u'(x)$ e $\varepsilon_\sigma(w)(x) = p\cdot\exp_{z_0} w'(x)$. Assim temos

$$\begin{aligned} d(\varepsilon_\sigma(u), \varepsilon_\sigma(v)) &= \sup_{x\in X} d\left(p\cdot\exp_{z_0} u'(x), p\cdot\exp_{z_0} w'(x)\right) \\ &\leq \sup_{x\in X} C_1\|p\cdot u'(x) - p\cdot w'(x)\| = C_1\|u-w\|. \end{aligned}$$

Para λ_σ a demonstração é análoga. □

Para completar, vamos mostrar agora que a mudança de coordenadas é uma aplicação diferenciável. Suponha então que para duas seções $\sigma, \tau \in \Gamma E$ temos $\Gamma(\mathcal{U}_\sigma \cap \mathcal{U}_\tau) = \Gamma\mathcal{U}_\sigma \cap \Gamma\mathcal{U}_\tau \neq \emptyset$. Precisamos mostrar que a aplicação entre abertos de fibrados vetoriais dada por

$$\begin{aligned} \lambda_\sigma\circ\varepsilon_\tau: \ \lambda_\tau(\Gamma(\mathcal{U}_\sigma\cap\mathcal{U}_\tau)) &\longrightarrow \lambda_\sigma(\Gamma(\mathcal{U}_\sigma\cap\mathcal{U}_\tau)) \\ \eta &\longmapsto \lambda_\sigma\circ\varepsilon_\tau(\eta) = \log_\sigma\circ\exp_\tau\circ\eta \end{aligned}$$

é diferenciável. A estratégia é aplicar o teorema 2.1.5 provando que essa aplicação é diferenciável em cada fibra e que essas derivadas variam continuamente.

Para ver quem é a aplicação nas fibras, para cada $x \in X$ escreva $\eta(x) = p(x)\cdot v(x)$com $p(x) \in \mathcal{L}_\tau$ e $v(x) \in V_{z_0}$. Temos então

$$\varepsilon_\tau(\eta)(x) = p(x)\cdot\exp_{z_0} v(x) \in \mathcal{U}_\sigma \cap \mathcal{U}_\tau.$$

Com isso podemos escrever $p(x)\cdot\exp_{z_0} v(x) = q(x)\cdot z(x)$, com $q(x) \in \mathcal{L}_\sigma$ e $z(x) \in U_{z_0}$. Como $p(x)$ e $q(x)$ estão na mesma fibra de R, existe $a(x) \in K$ tal que $p(x) = q(x)a(x)$, e então $z(x) = a(x)\exp_{z_0} v(x)$. Daí temos $\lambda_\sigma\circ\varepsilon_\tau(\eta)(x) = \log_\sigma(q(x)\cdot z(x)) = q(x)\cdot\log_{z_0}(z(x))$, ou seja,

$$\lambda_\sigma \circ \varepsilon_\tau(\eta)(x) = q(x)\cdot\log_{z_0}\left(a(x)\exp_{z_0} v(x)\right).$$

Essa última equação mostra que, a menos da ação linear de $p(x)$ e de $q(x)$ nas fibras de T^fE, a aplicação nas fibras é dada por

$$v \longmapsto \log_{z_0}\left(a(x)\exp_{z_0} v\right).$$

Tal aplicação é claramente diferenciável. Além disso, se $a(x)$ for uma função contínua de x, então essa aplicação e suas derivads ao longo das fibras também dependem continuamente de x, o que fornece as hipóteses do teorema 2.1.5.

Mas localmente podemos escolher $a(x)$ contínua. De fato, tomando vizinhanças trivializantes do fibrado R, podemos escolher $p(x)$ e $q(x)$ dependendo continuamente de x. Daí a relação $p(x) = q(x)a(x)$ mostra que $x \mapsto a(x) \in K$ é contínua.

Com isso concluímos a demonstração da diferenciabilidade das mudanças de coordenadas e a construção da estrutura diferenciável em ΓE. Resumimos no teorema abaixo essa estrutura.

Teorema 2.3.7. *O espaço das seções contínuas $\Gamma(R \times_K F)$ admite uma estrutura de variedade diferenciável modelada num espaço de Banach. A carta ao redor de uma seção σ tem domínio e contradomínio dados respectivamente por $\Gamma\mathcal{U}_\sigma$ e $\Gamma\mathcal{V}_\sigma$, onde*

$$\mathcal{U}_\sigma = \bigcup_{p\in\mathcal{L}_\sigma} p\cdot U_{z_0} \subset \Gamma E \quad \text{e} \quad \mathcal{V}_\sigma = \bigcup_{p\in\mathcal{L}_\sigma} p\cdot V_{z_0} \subset \sigma^*(T^fE).$$

A parametrização e sua inversa são dadas respectivamente por:

$$\begin{array}{rccc} \varepsilon_\sigma: & \Gamma\mathcal{U}_\sigma & \longrightarrow & \Gamma\mathcal{V}_\sigma \\ & \tau & \longmapsto & \exp_\sigma\circ\tau \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rccc} \lambda_\sigma: & \Gamma\mathcal{V}_\sigma & \longrightarrow & \Gamma\mathcal{U}_\sigma \\ & \eta & \longmapsto & \log_\sigma\circ\eta \end{array}$$

2.3.3 Mergulhos de espaços de seções em espaços de funções

O objetivo agora é mostrar que com as estruturas diferenciáveis construídas, o espaço das seções do fibrado associado $E = Q\times_G F = R\times_K F$ é uma subvariedade mergulhada do espaço das funções contínuas $\mathcal{C}(R,F)$ e, consequentemente, do espaço de Banach $\mathcal{C}(R,V)$.

Antes de mais nada, vamos deixar claro que a topologia desses espaços é essencialmente a topologia da convergência uniforme em $\mathcal{C}(R,F)$. Para ver isso, considere a distância em F dada pela métrica Riemanniana K-invariante. A distância no espaço das seções é dada por $d(\sigma,\tau)=\sup_{x\in X} d(\sigma(x),\tau(x))$. Agora escrevendo $\sigma(x)=r\cdot f_\sigma(r)$ e $\tau(x)=r\cdot f_\tau(r)$, com $r\in R_x$, temos que $d(r\cdot f_\sigma(r), r\cdot f_\tau(r))=d(f_\sigma(r),f_\tau(r)$, pois r é uma isometria entre R_x e F. Mas como a distância d é K-invariante, segue que $d(f_\sigma(r),f_\tau(r))$ não depende de r, mas apenas do ponto x tal que $r\in E_x$. De fato, se $r'\in E_x$, então escrevendo $r'=rk$, com $k\in K$, segue da equivariância que $d(f_\sigma(r'),f_\tau(r')=d(f_\sigma(rk),f_\tau(rk)=d(k^{-1}f_\sigma(r),k^{-1}f_\tau(r))=d(f_\sigma(r),f_\tau(r))$. Resumindo temos que

$$d(\sigma,\tau)=\sup_{x\in X} d(\sigma(x),\tau(x))=\sup_{r\in R} d(r\cdot f_\sigma(r), r\cdot f_\tau(r))=d(f_\sigma,f_\tau),$$

mostrando que a aplicação que associa cada seção $\sigma\in\Gamma E$ à função equivariante $f_\sigma\in\mathcal{C}_{eq}(R,F)$ é uma isometria.

Para concluir que ΓE é uma subvariedade mergulhada de $\mathcal{C}(R,F)$, cuja imagem é o conjunto das funções equivariantes $\mathcal{C}_{eq}(R,F)$, basta mostrar que a inclusão é uma imersão. Isso será feito localmente.

Considere uma seção $\sigma\in\Gamma E$ e uma vizinhança $\Gamma\mathcal{U}_\sigma$ que está parametrizada (via logaritmo) no aberto $\Gamma\mathcal{V}_\sigma\subset\Gamma(\sigma^*(T^fE))$, como construídos na seção 2.3.2.

Proposição 2.3.8. *Temos as seguintes relações entre os espaços de funções, espaços de funções equivariantes e espaços se seções de fibrados associados:*

(a) $\Gamma\left(\sigma^*(T^fE)\right)$ *e* $\mathcal{C}_{eq}(\mathcal{L}_\sigma,T_{z_0}F)$ *são isomorfos (isométricos).*

(b) $\Gamma\mathcal{V}_\sigma$ *e* $\mathcal{C}_{eq}(\mathcal{L}_\sigma,V_{z_0})$ *são difeomorfos.*

(c) $\Gamma\mathcal{U}_\sigma$ *e* $\Gamma\mathcal{V}_\sigma$ *são difeomorfos.*

(d) $\mathcal{C}(\mathcal{L}_\sigma,U_{z_0})$ *e* $\mathcal{C}(\mathcal{L}_\sigma,V_{z_0})$ *são difeomorfos.*

(e) $\mathcal{C}_{eq}(\mathcal{L}_\sigma,V_{z_0})$ *é uma subvariedade mergulhada de* $\mathcal{C}(\mathcal{L}_\sigma,V_{z_0})$.

(f) $\Gamma\mathcal{U}_\sigma$ *é uma subvariedade mergulhada de* $\mathcal{C}(\mathcal{L}_\sigma,F)$.

Demonstração: O isomorfismo do item (a) é dado pela expressão (2.6), que associa cada seção a uma função equivariante. A linearidade segue imediatamente da linearidade da ação (via diferenciais) dos elementos de $\mathcal{L}_\sigma$ em $T_{z_0}F$, isto é,

$l \cdot (\lambda w_1 + w_2) = \lambda\, l \cdot w_1 + l \cdot w_2$. Sobre esse isomorfismo ser uma isometria, basta ver a definição das métricas nesses espaços, junto com o fato de que os elementos de $\mathcal{L}_\sigma$ agem por isometria em $T_{z_0}F$. No item (b), o difeomorfismo é apenas a restrição da aplicação do item (a) aos abertos $\Gamma\mathcal{V}_\sigma$ e $\mathcal{C}_{eq}(\mathcal{L}_\sigma, V_{z_0})$.
No item (c) o difeomorfismo é simplesmente a parametrização da estrutura diferenciável de ΓE.
O difeomorfismo do item (d) é induzido pelo difeomorfismo entre V_{z_0} e U_{z_0} dado pela aplicação exponencial de F.
No item (e) temos que $\mathcal{C}_{eq}(\mathcal{L}_\sigma, T_{z_0}F)$ é um subespaço vetorial fichado de $\mathcal{C}(\mathcal{L}_\sigma, T_{z_0}F)$. Restringindo essa inclusão aos abertos $\mathcal{C}_{eq}(\mathcal{L}_\sigma, V_{z_0})$ e $\mathcal{C}(\mathcal{L}_\sigma, V_{z_0})$, temos o mergulho do item (e).
Por fim, o item (f) é consequência dos item anteriores pela seguinte sequência de difeomorfismos e mergulhos:

$$\Gamma\mathcal{U}_\sigma \to \Gamma\mathcal{V}_\sigma \to \mathcal{C}_{eq}(\mathcal{L}_\sigma, V_{z_0}) \hookrightarrow \mathcal{C}(\mathcal{L}_\sigma, V_{z_0}) \to C(\mathcal{L}_\sigma, U_{z_0}) \hookrightarrow \mathcal{C}(\mathcal{L}_\sigma, F),$$

cuja composição é a aplicação que a cada seção $\sigma \in \Gamma\mathcal{U}_\sigma$ associa a função equivariante $f_\sigma \in \mathcal{C}(\mathcal{L}_\sigma, F)$. □

Suponha agora que, como feito na seção 2.2.3, F é a órbita de uma representação $\rho : K \to \mathrm{Gl}(V)$ (Na verdade fixamos um produto interno em V de forma que $\rho(k) \in \mathrm{O}(V)$ para todo $k \in K$). Neste caso F, que é órbita dessa ação, é subvariedade mergulhada de V, e assim $\Gamma\mathcal{U}_\sigma$ é também subvariedade mergulhada de $\mathcal{C}(\mathcal{L}_\sigma, V)$. Mas a imagem dessa inclusão está contida nas funções equivariantes, ou seja, $\Gamma\mathcal{U}_\sigma$ é subvariedade mergulhada de $\mathcal{C}_{eq}(\mathcal{L}_\sigma, V)$, que, pela proposição 2.2.4 é isométrico a $\mathcal{C}_{eq}(R, V)$. Deste modo temos que a a aplicação que associa cada seção $\tau \in \Gamma\mathcal{U}_\sigma$ à função equivariante $f_\tau \in \mathcal{C}(R, V)$ é um mergulho. Como os abertos $\Gamma\mathcal{U}_\sigma$ cobrem ΓE, segue que ΓE é subvariedade imersa de $\mathcal{C}(R, V)$. Mas essa inclusão é também uma isometria com a métrica da convergência uniforme definida nesses espaços, e então temos

Teorema 2.3.9. *A aplicação $\sigma \in \Gamma E \longmapsto f_\sigma \in \mathcal{C}(R, F)$ é um mergulho cuja imagem é $\mathcal{C}_{eq}(R, F)$. Ou seja, $\mathcal{C}_{eq}(R, F)$, com a estrutura diferenciável dada pela bijeção com ΓE, é uma subvariedade mergulhada de $\mathcal{C}(R, F)$.*

2.3.4 Diferenciabilidade

Do mesmo modo que fizemos para endomorfismos de fibrados vetoriais, provaremos agora que as aplicações no espaço de seções de fibrados associados induzidas por automorfismos de fibrados principais são diferenciáveis.

Considere $\pi : Q \to X$ um fibrado principal com grupo de estrutura G semissimples, não compacto e com centro finito. Seja $\phi : Q \to Q$ um automorfismo e $\phi_0 : X \to X$ o homeomorfismo induzido na base X. Denotamos ainda por ϕ o automorfismo induzido no fibrado associado $E = Q \times_G F$ e por $\Gamma\phi$ a aplicação induzida por ϕ no espaço de seções ΓE, isto é, $\Gamma\phi(\sigma) = \phi \circ \sigma \circ \phi_0^{-1}$.

Seja $G = KAN$ a decomposição de Iwasawa de G e R uma K-redução. Com isso temos que essa decomposição de Iwasawa se estende a Q na forma $Q = R \cdot AN$. As projeções $\mathsf{R} : Q \to R$ e $\mathsf{T} : Q \to AN$ são aplicações contínuas e induzem uma decomposição do automorfismo ϕ pondo $\phi(q) = \mathsf{R}(\phi(q))\mathsf{T}(\phi(q))$.

Com a K-redução, o fibrado E também é um fibrado associado de R. Isto é, $E = R \times_K F$. O espaço de seções ΓE é então identificado com $\mathcal{C}_{eq}(R, F)$, que, como visto na seção anterior, é uma subvariedade mergulhada de $\mathcal{C}(R, V)$.

A aplicação induzida por $\Gamma\phi$ no espaço das funções equivariantes $\mathcal{C}_{eq}(Q, F)$ é simplesmente a composição com ϕ^{-1}. Isto é, se f_σ é a função equivariante associada à seção σ, então $f_\sigma \circ \phi^{-1}$ é a função equivariante associada à seção $\Gamma\phi(\sigma) = \phi \circ \sigma \circ \phi_0^{-1}$. De fato, seja $x \in X$ e $q \in Q_x$. Então $\phi^{-1}(q) \in Q_{\phi_0^{-1}(x)}$ e escrevendo as seções em termos de suas funções equivariantes temos:

$$\phi(\sigma(\phi_0^{-1}(x))) = \phi\left(\phi^{-1}(q) \cdot f_\sigma(\phi^{-1}(q))\right) = \phi(\phi^{-1}(q)) \cdot f_\sigma(\phi^{-1}(q)) = q \cdot f_\sigma(\phi^{-1}(q)).$$

Refinando um pouco mais, ΓE também está em bijeção com $\mathcal{C}_{eq}(R, F)$. A bijeção entre $\mathcal{C}_{eq}(Q, F)$ e $\mathcal{C}_{eq}(R, F)$ é feita tomando-se restrições das funções definidas em Q para o subfibrado R. Se $f \in \mathcal{C}(Q, F)$, denotaremos por $\overline{f}$ a restrição de f à R, e assim $\overline{f} \in \mathcal{C}(R, F)$. Se f for G-equivariante então $\overline{f}$ será K-equivariante, isto é, se $f \in \mathcal{C}_{eq}(Q, F)$ então $\overline{f} \in \mathcal{C}_{eq}(R, F)$.

Para ver quem é aplicação induzida por $\Gamma\phi$ em $\mathcal{C}_{eq}(R, F)$, precisamos ver quem é a função K-equivariante associada à seção $\tau = \phi \circ \sigma \circ \phi_0^{-1}$. Afirmamos que

$$\overline{f}_\tau(r) = \mathsf{T}\left(\phi^{-1}(r)\right)^{-1} \overline{f}_\sigma\left(\mathsf{R}(\phi^{-1}(r))\right) \tag{2.13}$$

De fato, para $r \in R$ temos:

$$\begin{aligned}\overline{f}_\tau(r) = f_\tau(r) &= f_\sigma(\phi^{-1}(r)) \\ &= f_\sigma\left(\mathsf{R}(\phi^{-1}(r))\mathsf{T}(\phi^{-1}(r))\right) \\ &= \mathsf{T}(\phi^{-1}(r))^{-1} f_\sigma\left(\mathsf{R}(\phi^{-1}(r))\right) \\ &= \mathsf{T}(\phi^{-1}(r))^{-1}\overline{f}_\sigma\left(\mathsf{R}(\phi^{-1}(r))\right)\end{aligned}$$

Teorema 2.3.10. *A aplicação $\Gamma\phi : \Gamma E \to \Gamma E$ é diferenciável*

Demonstração: Como já vimos, ΓE é uma subvariedade mergulhada de $\mathcal{C}(R,F)$, cuja imagem é o conjunto $\mathcal{C}_{eq}(R,F)$ das funções K-equivariantes. Para mostrar a diferenciabilidade de $\Gamma\phi$, basta então mostrar a diferenciabilidade da aplicação induzida em $\mathcal{C}_{eq}(R,F)$, cuja expressão é dada pela equação (2.13). Mas essa aplicação é simplesmente a restrição de

$$\begin{array}{rccc}\Phi: & \mathcal{C}(R,F) & \longrightarrow & \mathcal{C}(R,F) \\ & f & \longmapsto & \Phi(f)\end{array},$$

dada por $\Phi(f)(r) = \mathsf{T}(\phi^{-1}(r))^{-1} f(\mathsf{R}(\phi^{-1}(r)))$. Agora essa ultima aplicação é diferenciável, pois é composta das seguintes aplicações diferenciáveis:

1. $\mathsf{F} : \mathcal{C}(R,F) \to \mathcal{C}(R,F)$, dada por $\mathsf{F}(f) = f \circ (\mathsf{R} \circ \phi^{-1})$, que é diferenciável já que é a restrição da aplicação linear e contínua em $\mathcal{C}(R,V)$, dada pela mesma fórmula de F.

2. $\mathsf{P} : \mathcal{C}(R,AN) \times \mathcal{C}(R,F) \to \mathcal{C}(R,F)$ induzida pela ação de AN em F é diferenciável pelo corolário 2.2.3.

Com isso temos que $\Phi(f) = \mathsf{P}\left(\mathsf{T}(\phi^{-1}(\cdot))^{-1}, \mathsf{F}(f)\right)$ □

Vejamos a seguir como calcular a derivada de $\Gamma\phi$.

Recordamos que o espaço tangente à seção $\sigma \in \Gamma E = \Gamma(Q \times_G F)$ é identificado com o espaço de seções do fibrado vetorial sobre X dado pelo pull-back por σ do fibrado tangente às fibras de E, $T^f E$. Isto é,

$$T_\sigma \Gamma E = \Gamma(T^f_\sigma E)\,, \text{ onde } T^f_\sigma E = \sigma^*(T^f E)\,, \text{ e } T^f E = \bigcup_{\xi \in E} \{T_\xi E_x \mid x = \pi(\xi)\}.$$

O automorfismo $\phi : E \to E$ é contínuo e possui derivada quando restrito às fibras $E_x \cong F$. Denotamos a derivada em $\xi \in E$ da restrição $\phi_{|_{E_x}} : E_x \to E_{\phi(x)}$, $x = \pi(\xi)$, por

$$d^f\phi_\xi : T_\xi E_x \to T_{\phi(\xi)} E_{\phi(x)}.$$

A derivada da aplicação $\Gamma\phi(\sigma) = \phi \circ \sigma \circ \phi^{-1}$ é dada por

$$\begin{array}{rccl} d(\Gamma\phi)_\sigma : & \Gamma(T^f_\sigma E) & \longrightarrow & \Gamma(T^f_{\Gamma\phi(\sigma)}E) \\ & \tau & \longmapsto & d(\Gamma\phi_\sigma)\cdot\tau(x) = d^f\phi_{\sigma(\phi^{-1}(x))}(\tau(\phi^{-1}(x)))\,. \end{array} \tag{2.14}$$

Podemos olhar T^fE como fibrado associado a Q pela ação de G em TF via diferenciais, isto é, $T^fE = Q \times_G TF$. Neste caso a aplicação $d^f\phi : T^fE \to T^fE$ é a aplicação induzida em T^fE pelo endomorfismo $\phi : Q \to Q$, isto é,

$$d^f\phi(q\cdot v) = \phi(q)\cdot v,\ \ q \in Q,\ v \in TF.$$

2.4 Grupo de Calibre

Seja $\pi : Q \to X$ um fibrado principal contínuo com grupo estrutural G e base compacta X. O grupo de Calibre de Q, denotado por $\mathcal{G}(Q)$ (ou simplesmente por $\mathcal{G}$ se não houver confusão), é o grupo formado pelos automorfismos $\phi \in \mathrm{Aut}(Q)$ que induzem a identidade na base, isto é,

$$\mathcal{G}(Q) = \{\phi \in \mathrm{Aut}(Q) \mid \pi(\phi(q)) = \pi(q)\}.$$

Dado $\phi \in \mathcal{G}$, como $\phi(p)$ permanece na mesma fibra de p, segue que existe $\gamma(p) \in G$ tal que $\phi(p) = p.\gamma(p)$. Isso define uma função contínua $\gamma : Q \to G$ que satisfaz $\gamma(p.g) = g^{-1}\gamma(p)g$ para todo $p \in Q$ e $g \in G$. De fato, $p.\gamma(p)g = \phi(p).g = \phi(p.g) = (p.g).(\gamma(p.g)) = p.g\gamma(p.g)$, donde segue que $\gamma(p)g = g\gamma(p.g)$ e então $\gamma(p.g) = g^{-1}\gamma(p)g$.

Reciprocamente, cada função $\gamma : Q \to G$ com a propriedade de que $\gamma(p.g) = g^{-1}\gamma(p)g$ define um elemento do grupo de Calibre pondo $\phi(p) = p.\gamma(p)$. Com isso identificamos o grupo de calibre com

$$\Gamma(Q) = \{\gamma : Q \to G \mid \gamma(p.g) = g^{-1}\gamma(p)g,\ \forall g \in G \ \text{ e } p \in Q\}.$$

O produto em $\mathcal{G}(Q)$ é dado simplesmente pela composição dos automorfismos, isto é, $(\phi_1\cdot\phi_2)(q) = (\phi_1\circ\phi_2)(q) = \phi_1(\phi_2(q))$. Já o produto em $\Gamma(Q)$ é herdado do produto em G por $(\gamma_1\cdot\gamma_2)(q) = \gamma_1(q)\cdot\gamma_2(q)$. Com esses produtos a bijeção entre $\mathcal{G}(Q)$ e $\Gamma(Q)$ é um isomorfismo de grupos.

Se o grupo G age transitivamente nas fibras de Q, então uma função $\gamma \in \Gamma(Q)$ fica completamente determinada na fibra que contem p se conhecermos $\gamma(p)$. Em particular, se R é um subfibrado de Q com grupo de estrutura $K \subset G$, então

podemos considerar a restrição das funções de $\Gamma(Q)$ ao subfibrado R e identificar $\Gamma(Q)$ com as funções $\gamma : R \to G$ que satisfazem $\gamma(r.k) = k^{-1}\gamma(r)k$ para todo $r \in R$ e $k \in K$, isto é, $\Gamma(Q) = \{\gamma : R \to G \mid \gamma(r.k) = k^{-1}\gamma(r)k,\ \forall k \in K \text{ e } r \in R\}$.

No caso do subfibrado R ser compacto, essa identificação permite definir uma métrica no grupo de Calibre, que será essencialmente a métrica da convergência uniforme em $\mathcal{C}(R, G)$. Isso será feito abaixo.

2.4.1 Estrutura topológia (métrica) do grupo de Calibre

Assumimos que o grupo G é localmente compacto e separável (sua topologia tem base enumerável). Com essa hipótese o grupo admite métricas invariantes e é um espaço métrico completo. Fixe uma distância d invariante à direita em G, isto é, $d(xy, zy) = d(x, z)$. Considerando um conjunto compacto C que intersecte todas as fibras de Q (i.é, $\pi(C) = X$), podemos definir uma distância em $\mathcal{G}$ (ou em $\Gamma(Q)$) pondo

$$d_C(\gamma_1, \gamma_2) = \sup_{p \in C} d(\gamma_1(p), \gamma_2(p)).$$

Como C é compacto e se projeta sobre X, temos que d_C está bem definida e $d_C(\gamma_1, \gamma_2) = 0$ se, e só se, $\gamma_1 = \gamma_2$. Além disso, essa distância também é invariante à direita pelo produto de $\Gamma(Q)$.

A escolha do compacto C que se projeta sobre X não faz diferença na definição da métrica, como mostra a próxima proposição.

Proposição 2.4.1. *Se C_1 e C_2 são dois compactos em Q que se projetam sobre X então d_{C_1} e d_{C_2} são uniformemente equivalentes sobre conjuntos limitados*

Demonstração: Considere um compacto $D \subset G$ tal que para todo $p \in C_2$ existe $a \in D$ tal que $p \cdot a \in C_1$. É fácil ver que tal D existe no caso em que $Q = X \times G$ é trivial. De fato, se $C_i = X \times K_i$, $i = 1, 2$, e K_i compacto, basta definir $D = K_2^{-1}K_1$. Para o caso geral basta tomar trivializações e usar a compacidade da base X.

Vamos mostrar que d_{C_1} e d_{C_2} são uniformemente equivalentes na bola $\mathcal{B} = B_{d_{C_1}}(1, \rho)$ em $\Gamma(Q)$ com a métrica d_{C_1}. Para isso, considere a bola fechada (compacta) $\overline{B}$ em G de centro na origem e raio ρ. Se $\gamma \in \mathcal{B}$ então $\gamma(C_1) \subset \overline{B}$.

Fixados $(x_0, y_0) \in G \times G$ e $a_0 \in G$, tome $M_0 > 0$ tal que $d(a_0x_0, a_0y_0) < M_0 d(x_0, y_0)$. Por continuidade, segue que $d(ax, ay) < M_0 d(x, y)$ para todo (x, y) numa vizinhança de $(x_0.y_0)$ e a numa vizinhança de a_0. Por compacidade de $\overline{B}$ e de D, existe $M > 0$ tal que $d(ax, ay) < Md(x, y)$ para todo $a \in D$ e $x, y \in \overline{B}$.

Agora seja $p \in C_2$ e escolha $a \in D$ tal que $q = p \cdot a \in C_1$. Se $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{B}$ então

$$\begin{aligned} d(\gamma_1(p), \gamma_2(p)) &= d(\gamma_1(q \cdot a^{-1}), \gamma_2(q \cdot a^{-1})) \\ &= d(a\gamma_1(q), a\gamma_2(q)) \\ &< M d(\gamma_1(q), \gamma_2(q)) \end{aligned}$$

e daí, para todo $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{B}$ temos

$$d_{C_2}(\gamma_1, \gamma_2) = \sup_{p \in C_2} d(\gamma_1(p), \gamma_2(p)) \leq M \sup_{q \in C_1} d(\gamma_1(q), \gamma_2(q)) = M\, d_{C_1}(\gamma_1, \gamma_2)$$

□

Suponha, a partir de agora, que o grupo G é um grupo de Lie e que a distância invariante em G é construída por uma métrica Riemanniana invariante a partir de um produto interno em $\mathfrak{g}$. Assuma ainda que o fibrado Q admite uma K-redução, $R \subset Q$, onde K é um subgrupo compacto. Neste caso o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em $\mathfrak{g}$ pode ser tomado K-invariante, e daí segue que a métrica Riemanniana em G, bem como a distância por ela definida, são bi-invariantes (à esquerda e à direita) por elementos de K.

Pela identificação do grupo de calibre $\mathcal{G}$ com as funções $\gamma : R \to G$ que satisfazem $\gamma(r.k) = k^{-1}\gamma(r)k$, definimos uma métrica em $\mathcal{G}$ pondo $d(\gamma_1, \gamma_2) = \sup_{r \in R} d(\gamma_1(r), \gamma_2(r))$. Ou seja, a métrica em $\mathcal{G}$ é essencialmente a métrica d_C definida acima escolhendo $C = R$.

Além disso, essa identificação fornece um mergulho topológico do grupo de calibre $\mathcal{G}$ no espaço das funções contínuas $\mathcal{C}(R, G)$. Mas esse espaço é também um grupo com o produto ponto a ponto induzido de G, isto é,

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(R,G) \times \mathcal{C}(R,G) &\longrightarrow \mathcal{C}(R,G) \\ (g_1, g_2) &\longmapsto (g_1 \cdot g_2)(r) = g_1(r)g_2(r) \end{aligned}$$

Esse produto é contínuo pelo lema 2.2.1, o que torna $\mathcal{C}(R, G)$ um grupo topológico metrizável com a métrica da convergência uniforme (métrica do sup) e com a topologia compacto-aberta. Caso G seja um grupo de Lie, o corolário 2.2.3 implica que esse produto também é diferenciável, o que torna $\mathcal{C}(R, G)$ um grupo de Lie de Banach.

2.4.2 Estrutura diferenciável (Grupo de Lie de Banach)

Abaixo mostramos como construir a estrutura diferenciável em $\mathcal{G}$. Com a estrutura que construiremos, $\mathcal{G}$ se torna uma subgrupo de Lie mergulhado de $\mathcal{C}(R,G)$. Para isso faremos primeiro a parametrização ao redor da identidade (sistema de coordenadas de primeira espécie) e em seguida transladamos para todo o grupo.

Sistema de coordenadas de primeira espécie

O sistema de coordenadas de $\mathcal{G}$ ao redor da identidade será construído em abertos do espaço de seções do fibrado vetorial associado a Q a partir da representação adjunta $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{Gl}(\mathfrak{g})$, isto é, no espaço de seções $\Gamma\mathcal{A}$, onde

$$\mathcal{A} = Q \times_{\mathrm{Ad}} \mathfrak{g} = R \times_{\mathrm{Ad}} \mathfrak{g}.$$

O espaço das seções de $\mathcal{A}$ se identifica com as aplicações G-equivariantes, $\mathcal{C}_{eq}(Q,\mathfrak{g})$, isto é,

$$\Gamma\mathcal{A} = \mathcal{C}_{eq}(Q,\mathfrak{g}) = \{f : Q \to G \mid f(p\cdot g) = \mathrm{Ad}(g^{-1})f(p),\ p \in Q \ \ e \ \ g \in G\}.$$

Em vista da redução R, temos também a bijeção de $\Gamma\mathcal{A}$ com as funções K-equivariantes definidas em R, isto é, $\Gamma\mathcal{A} = \mathcal{C}^K_{eq}(R,\mathfrak{g})$.

Defina uma métrica Riemanniana em $\mathcal{A}$ a partir do produto interno de $\mathfrak{g}$ pondo

$$\langle p\cdot X, p\cdot Y\rangle = \langle X, Y\rangle, \quad p \in R.$$

Essa definição independe de $p \in R$, numa fibra dada, já que o produto interno em $\mathfrak{g}$ é K-invariante. Essa métrica Riemanniana define uma norma em $\Gamma\mathcal{A}$ pondo $\|\sigma\| = \sup_{x\in X}\|\sigma(x)\|$, o que torna $\Gamma\mathcal{A}$ um espaço de Banach.

Através da identificação de $\Gamma\mathcal{A}$ com $\mathcal{C}^K_{eq}(R,\mathfrak{g})$, podemos ainda ver esse espaço como um subespaço fechado de $\mathcal{C}(R,\mathfrak{g})$ com a norma dada por $\|f\| = \sup_{q\in R}\|f(q)\|$. Isso porque se f é a função equivariante associada à seção σ, então $\sigma(x) = q\cdot f(q)$ para qualquer $q \in R$ na fibra sobre x. Assim $\|\sigma(x)\| = \|q\cdot f(q)\| = \|f(q)\|$. Daí que o supremo de $\|\sigma(x)\|$ sobre $x \in X$ é o mesmo que o supremo de $\|f(q)\|$ sobre $q \in R$, isto é, $\|\sigma\| = \|f\|$.

Para construir o sistema de coordenadas ao redor da identidade de $\mathcal{G}$, observa-se primeiro que se $\sigma : X \to \mathcal{A}$ é uma seção e $f_\sigma : R \to \mathfrak{g}$ é a função K-equivariante

correspondente, então definindo $g_\sigma = \exp f_\sigma : R \to G$ temos um elemento do grupo de calibre, isto é, $g_\sigma \in \Gamma(Q)$. De fato, para $q \in R$ e $k \in K$ temos

$$g_\sigma(q \cdot k) = \exp f_\sigma(q \cdot k) = \exp(\mathrm{Ad}(k^{-1}) f_\sigma(q)) = k^{-1} \exp(f_\sigma(q)) k = k^{-1} g_\sigma(q) k$$

Seja $B_\rho(0) \subset \mathfrak{g}$ a bola de raio ρ centrada na origem tal que a aplicação exponencial $\exp : \mathfrak{g} \to G$ é um difeomorfismo quando restrita a $B_\rho(0)$. Denote por $U_\rho = \exp B_\rho(0) \subset G$ a vizinhança da identidade de G imagem dessa bola pela exponencial. Essa restrição define um homeomorfismo entre os abertos de $\Gamma\mathcal{A}$ e de $\Gamma(Q)$ dados respectivamente por

- $\mathcal{V}_\rho = \mathcal{B}_\rho(0) = \{\sigma \in \Gamma\mathcal{A} | \|\sigma\| < \rho\}$, que é um aberto de $\Gamma\mathcal{A}$. Em termos das funções equivariantes $f_\sigma : R \to \mathfrak{g}$, esse aberto é dado por $\{f_\sigma \in \mathcal{C}^K_{eq}(R, \mathfrak{g}) \mid \|f_\sigma\| < \rho\}$.
- $\mathcal{U}_\rho = \{\gamma \in \Gamma(Q) \mid \gamma(q) \in U_\rho, \ \forall q \in R\}$. Esse conjunto é simplesmente a interseção com $\Gamma(Q)$ do aberto básico da topologia compacto-aberta de $\mathcal{C}(R, G)$ dado por U_{R,U_ρ}, isto é, do aberto de $\mathcal{C}(R, G)$ dado pelas funções contínuas $g : R \to G$ que assumem valores em $U_\rho = \exp B_\rho(0)$.

O homeomorfismo entre $\mathcal{V}_\rho$ e $\mathcal{U}_\rho$, bem como sua inversa, são dados respectivamente por

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Exp}: & \mathcal{V}_\rho & \to & \mathcal{U}_\rho \\ & \sigma & \mapsto & \exp \circ f_\sigma \end{array} \quad e \quad \begin{array}{rccc} \mathrm{Log}: & \mathcal{U}_\rho & \to & \mathcal{V}_\rho \\ & \gamma & \mapsto & \log \circ \gamma \end{array} .$$

Essas aplicações são claramente bijeções e, pelo lema 2.2.1, também são contínuas, logo são homeomorfismos. Assim fica definido o sistema de coordenadas de primeira espécie ao redor da identidade do grupo de calibre $\mathcal{G}$.

Sistema de coordenadas ao redor de $\gamma \in \Gamma(Q)$

A parametrização ao redor de uma outra função de calibre $\gamma \in \Gamma(Q)$ é dada pela translação da parametrização Log definida acima. Isto é, dada a função de calibre $\gamma : R \to G$, defina a vizinhança de γ em $\Gamma(Q)$ por $\mathcal{U}_\rho(\gamma) = \gamma \cdot \mathcal{U}_\rho$. Essa é uma vizinhança aberta de γ homeomorfa à vizinhança $\mathcal{U}_\rho$, pois as translações em $\Gamma(Q)$ são homeomorfismos. Assim ficam definidas as coordenadas e sua inversa ao redor de γ por

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Exp}_\gamma: & \mathcal{V}_\rho & \to & \mathcal{U}_\rho(\gamma) \\ & \sigma & \mapsto & \gamma \cdot (\exp \circ f_\sigma) \end{array} \quad e \quad \begin{array}{rccc} \mathrm{Log}_\gamma: & \mathcal{U}_\rho(\gamma) & \to & \mathcal{V}_\rho \\ & \eta & \mapsto & \log \circ (\gamma^{-1} \cdot \eta) \end{array} .$$

A mudança de coordenadas ao redor de funções de calibre $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma(Q)$ é dada por

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Log}_{\gamma_1}(\mathcal{U}_\rho(\gamma_1) \cap \mathcal{U}_\rho(\gamma_2)) & \longrightarrow & \mathrm{Log}_{\gamma_2}(\mathcal{U}_\rho(\gamma_1) \cap \mathcal{U}_\rho(\gamma_2)) \\ \gamma & \longmapsto & \log\left(\gamma_2(r)^{-1}\gamma_1(r)\exp(\gamma(r))\right) \end{array}$$

que é diferenciável por ser a restrição à abertos de $\mathcal{C}_{eq}(R, \mathfrak{g})$ de uma função em $\mathcal{C}(R, \mathfrak{g})$ definida por produtos em G e por composições em $\mathcal{C}(R, \mathfrak{g})$

Com os sistemas de coordenadas definidos acima, a inclusão do grupo de calibre $\Gamma(Q)$ em $\mathcal{C}(R, G)$ é um mergulho. De fato, já vimos que a inclusão é um mergulho topológico. Quanto à diferenciabilidade, a derivada dessa inclusão é simplesmente a inclusão de $\mathcal{C}_{eq}(R, \mathfrak{g})$ em $\mathcal{C}(R, \mathfrak{g})$, que é um contínua e injetora. Sendo assim temos:

Teorema 2.4.2. *O grupo de calibre $\mathcal{G}$ tem uma estrutura de grupo de Lie de Banach e, com a identificação com $\Gamma(Q)$, ele é um subgrupo de Lie mergulhado de $\mathcal{C}(R, G)$.*

2.4.3 Diferenciabilidade da ação do grupo de Calibre no espaço de seções

O grupo de Calibre $\mathcal{G}$ age naturalmente no espaço de seções ΓE por

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G} \times \Gamma E & \longrightarrow & \Gamma E \\ (\phi, \sigma) & \longmapsto & \phi \cdot \sigma \end{array}, \tag{2.15}$$

onde $(\phi \cdot \sigma)(x) = \phi(\sigma(x))$.

Teorema 2.4.3. *A ação do grupo de calibre $\mathcal{G}$ no espaço de seções ΓE é de classe C^∞.*

Demonstração: Como já vimos, $\mathcal{G}$ pode ser identificado com

$$\Gamma(Q) = \{\gamma \in \mathcal{C}(R, G) \mid \gamma(r.k) = k^{-1}\gamma(r)k, \ \forall k \in K \ \text{ e } r \in R\},$$

que por sua vez é um subgrupo de Lie mergulhado de $\mathcal{C}(R, G)$. Com essa identificação, a ação do grupo de Calibre $\mathcal{G}$ no espaço de seções ΓE é simplesmente a restrição às funções equivariantes da ação de $\mathcal{C}(R, G)$ em $\mathcal{C}(R, F)$ dada por

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(R, G) \times \mathcal{C}(R, F) & \longrightarrow & \mathcal{C}(R, F) \\ (\gamma, f) & \longmapsto & \gamma \cdot f \end{array}, \tag{2.16}$$

onde $(\gamma \cdot f)(r) = \gamma(r)f(r)$. De fato, considere $\phi \in \mathcal{G}$, $\sigma \in \Gamma E$, e sejam $\gamma \in \Gamma(Q)$ e $f \in \mathcal{C}_{eq}(R, F)$ as funções associadas ($\phi(r) = r.\gamma(r)$ e $\sigma(x) = r \cdot f(r)$). Daí

$\phi(\sigma(x)) = \phi(r \cdot f(r)) = \phi(r) \cdot f(r) = r.\gamma(r) \cdot f(r) = r \cdot \gamma(r) f(r) = r \cdot (\gamma \cdot f)(r)$, o que mostra que $\gamma \cdot f$ é a função equivariante associada à seção $\phi \cdot \sigma$.

Como a ação de G em F é de classe C^∞, segue do corolário 2.2.3 que a ação (2.16) é de classe C^∞, e consequentemente, a ação (2.15) também é de classe C^∞. $\square$

Capítulo 3

Expoentes de Lyapunov

Neste capítulo iremos mostrar como generalizar os expoentes de Lyapunov de fluxos de endomorfismos de fibrados vetoriais, para o contexto de fluxos em fibrados principais. A grosso modo, essa generalização permite olhar a variação de partes do espectro de Lyapunov, e não apenas uma direção, como no caso clássico.

3.1 Expoentes de Lyapunov clássicos

Seja $\pi : \mathcal{V} \to X$ um fibrado vetorial de dimensão finita com uma métrica Riemanniana $\|\cdot\| : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ e μ uma medida de probabilidade em X.

Dado um endomorfismo $\phi : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ sobre uma transformação mensurável $f : X \to X$ (ié, $\pi \circ \phi = f \circ \pi$), e $v \in \mathcal{V}$, o expoente de Lyapunov de ϕ na direção de v é dado por

$$\chi(v) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|\phi^n(v)\| \tag{3.1}$$

Apenas para completude, defini-se $\log 0 = -\infty$. Evidentemente podemos ter $\chi(x, v) = \pm\infty$.

Em muitos casos importantes podemos considerar o fibrado vetorial $\mathcal{V}$ trivial. De fato, todo fibrado vetorial sobre um espaço métrico compacto admite uma trivialização mensurável num conjunto de medida total. No caso em que $\mathcal{V} = X \times V$, o endomorfismo ϕ admite um gerador, isto é, uma função $T : X \to \mathrm{Gl}(V)$ tal que $\phi(x, v) = (f(x), T(x) \cdot v)$. Pela propriedade de endomorfismo temos que

$$\phi^n(x, v) = (f^n(x), T(f^{n-1}(x)) \cdots T(f(x))T(x)).$$

A aplicação dada por $\rho(n,x) = T(f^{n-1}(x)) \cdots T(f(x))T(x)$ é um cociclo multiplicativo e podemos escrever o expoente de Lyapunov de ϕ na direção de (x,v) como

$$\chi(x,v) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|\rho(n,x)\cdot v\|. \tag{3.2}$$

Para o caso em que $\phi : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ é inversível, temos que $f : X \to X$ e $T(x)$ são inversíveis. Neste caso temos que

$$\phi^{-1}(x,v) = (f^{-1}(x), T(f^{-1}(x))^{-1}v).$$

O fluxo discreto gerado por ϕ^{-1} é dado então por $\phi^{-n}(x,v) = (f^{-n}(x), \rho(-n,x)v)$, onde

$$\rho(-n,x) = T(f^{-n}(x))^{-1} \cdots T(f^{-1}(x))^{-1},$$

que é um cociclo multiplicativo sobre f^{-1}.

Lema 3.1.1. *Os expoentes de Lyapunov definidos acima gozam das seguintes propriedades:*

1. *Se $c \neq 0$ então $\chi(x,v) = \chi(x,cv)$.*
2. $\chi(x,v+w) \leq \max\{\chi(x,v), \chi(x,w)\}$

Demonstração: Segue das propriedades do lim sup □

Disso segue que, fixado $k \in \mathbb{R}$, o conjunto $\{v \in V \mid \chi(x,v) \leq k\}$ é um subespaço vetorial. Sendo assim, para cada $x \in X$, existem no máximo $\dim V$ expoentes de Lyapunov distintos.

Fixado $x \in X$, considere $p(x) \leq \dim V$ o número de expoentes de Lyapunov distintos na fibra sobre x, denote-os por $\chi_i(x)$, com $1 \leq i \leq p(x)$, e suponha que estejam ordenados de modo crescente, $\chi_1(x) < \chi_2(x) < \cdots < \chi_{p(x)}(x)$. Escreva ainda $V_i(x)$ para o subespaço

$$V_i(x) = \{v \in V \mid \chi(x,v) = \chi_i\}.$$

A multiplicidade do expoente de Lyapunov $\chi_i(x)$ é o número

$$k_i(x) = \dim V_i(x) - \dim V_{i-1}(x).$$

Para simplificar a notação, se ficar claro em qual fibra estamos trabalhando, omitiremos x das notações e escreveremos apenas p para $p(x)$, χ_i para $\chi_i(x)$, V_i para $V_i(x)$ e k_i para $k_i(x)$. Com isso obtemos a seguinte filtração de V:

$$\{0\} \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_p = V. \tag{3.3}$$

Proposição 3.1.2. *Valem as seguintes propriedade de invariância:*

1. *As funções χ_i e p são f-invariantes, isto é, $\chi_i \circ f = \chi_i$ e $p \circ f = p$.*

2. *Os subespaços V_i são invariantes no sentido de $T(x) \cdot V_i(x) = V_i(f(x))$.*

Demonstração: Segue das propriedades do lim sup. □

A princípio não existem boas razões para supormos que o lim sup da definição dos expoentes de Lyapunov são de fato limites. No entanto, com uma condição de integrabilidade do cociclo, o teorema ergódico de Oseledec fornece propriedades do lim sup e garante a existência dos expoentes como limites em quase todo ponto.

Teorema 3.1.3 (Teorema Ergódico de Oseledet)**.** *Considere $\rho : X \times \mathbb{N} \to \mathrm{Gl}(V)$ um cociclo multiplicativo mensurável sobre $f : X \to X$ e suponha que*

$$\log^+ \|T(\cdot)\| \in L^1(X, \mu).$$

Então existe $\Omega \subset X$, com $\mu(\Omega) = 1$, $f(\Omega) \subseteq \Omega$, tal que para todo $x \in \Omega$ vale

1. *o limite $e^{D^+(x)} = \lim_{n\to\infty} \big(\rho(x,n)^T \rho(x,n)\big)^{1/2n}$ existe*

2. *considere $\chi_1(x) < \cdots < \chi_{p(x)}(x)$ os autovalores (reais) do operador auto-adjunto $D^+(x)$ (aqui $\chi_1(x)$ pode ser $-\infty$) e denote por $U_i^+(x)$ o auto-espaço de $D^+(x)$ associado ao autovalor $\chi_i(x)$. Então escrevendo*

   $$V_i^+(x) = U_1^+(x) \oplus \cdots \oplus U_i^+(x)$$

   recuperamos a filtração

   $$0 \subset V_1^+(x) \subset \cdots \subset V_{p(x)}^+(x) = V,$$

   como dada em 3.3, com a propriedade adicional de que

   $$\chi_i(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|\rho(x,n) \cdot v\|, \quad \forall v \in V_i^+(x) \backslash V_{i-1}^+(x).$$

   Além disso as multiplicidades dos expoentes de Lyapunov são dadas por $k_i(x) = \dim U_i^+(x)$.

Demonstração: existem diversas demonstrações desse teorema. A versão enunciada aqui se refere ao artigo do Ruelle [16] □

Para o caso em que tanto a transformação na base $f : X \to X$ quanto as transformações lineares $T(x) : V \to V$ são inversíveis, podemos aplicar o teorema ergódico para o fluxo inverso e obter uma descrição mais detalhada da filtração obtida no teorema acima. Mais especificamente obtemos a decomposição ergódica como enunciada no teorema abaixo.

Teorema 3.1.4 (Decomposição Ergódica Multiplicativa)**.** *Suponha que $f : X \to X$ e $T(x) : V \to V$ sejam inversíveis e que $\log^+ \|T(\cdot)\|$ e $\log^+ \|T(\cdot)^{-1}\|$ sejam integráveis. Então existe um subconjunto $\Omega \subset X$, f-invariante e de medida total tal que para todo $x \in \Omega$ vale*

1. *Os limites*

$$e^{D^+(x)} = \lim_{n\to\infty} \left(\rho(x,n)^T \rho(x,n)\right)^{1/2n} \quad \text{e} \quad e^{D^-(x)} = \lim_{n\to\infty} \left(\rho(x,-n)^T \rho(x,-n)\right)^{1/2n}$$

   existem e são operadores auto-adjuntos.

2. *Os autovalores de $D^-(x)$ são dados por $-\chi_{p(x)}(x) < \cdots < -\chi_1(x)$, onde $\chi_1(x) < \cdots < \chi_{p(x)}(x)$ são os autovalores de $D^+(x)$. Esses são ainda os expoentes de Lyapunov de $\rho(-n, x)$.*

3. *Sejam $U_i^-(x)$, $1 \le i \le p(x)$, os auto-espaços de $D^-(x)$ associados aos autovalores $-\chi_i(x)$, e escreva*

$$V_i^-(x) = U_{p(x)}^-(x) \oplus U_{p(x)-1}^-(x) \oplus \cdots \oplus U_i^-(x)$$

   formando a filtração

$$0 \subset V_{p(x)}^-(x) \subset V_{p(x)-1}^-(x) \oplus \cdots \subset V_1^-(x) = V.$$

   Então essa filtração é oposta à filtração $0 \subset V_1^+(x) \subset \cdots \subset V_{p(x)}^+(x) = V$, dada pelo fluxo positivo, no sentido de que

$$V = V_i^+(x) \oplus V_{i+1}^-(x), \quad 1 \le i \le p(x) - 1.$$

4. *Tomando as interseções $W_i(x) = V_i^+(x) \cap V_i^-(x)$ temos a decomposição ergódica*

$$V = W_1(x) \oplus \cdots \oplus W_{p(x)}(x),$$

de forma que para $v \in W_i(x)$ os expoentes de Lyapunov são dados por

$$\chi_i(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|\rho(x,n)\cdot v\| \quad \text{e} \quad -\chi_i(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|\rho(x,-n)\cdot v\|$$

Demonstração: ver [16] □

3.2 Expoentes de Lyapunov vetoriais

Considere $\pi : Q \to X$ um G-fibrado principal, com G um grupo de Lie semissimples, não compacto e com centro finito. Como já visto nesse texto, um fluxo de endomorfismos de Q, digamos $\phi_t : Q \to Q$, induz um fluxo nos fibrados flag associados $\mathbb{E}_\Theta = Q \times_G \mathbb{F}_\Theta$, pondo $\phi_t(q \cdot g) = \phi_t(q) \cdot g$. Com o objetivo de medir taxas de crescimento desse fluxo, olhamos para sua componente hiperbólica, que será definida abaixo via cociclos provenientes das decomposições de Iwasawa e de Cartan do fibrado Q.

3.2.1 Cociclos e decomposições

As decomposições de Iwasawa $G = KAN$ e de Cartan $G = KS$, induzem decomposições no fibrado Q. Essas decomposições serão importantes para definirmos taxas de crescimento de fluxos de endomorfismos do fibrado Q.

Decomposição de Iwasawa e os expoentes de Lyapunov

Como G/K é difeomorfo ao espaço euclidiano AN, segue que o fibrado Q admite uma K-redução para um fibrado R. Assim podemos escrever a decomposição de Iwasawa de Q como $Q = R \cdot AN$. Nessa decomposição, cada $q \in Q$ se escreve unicamente como $q = r \cdot hn$, com $r \in R$, $h \in A$ e $n \in N$. As projeções de Q em R e A serão denotadas respectivamente por

$$\mathsf{R} : Q \to R \quad \text{e} \quad \mathsf{A} : Q \to A.$$

Essas projeções são contínuas e satisfazem as seguintes propriedades:

1. Se $r \in R$ então $\mathsf{R}(r) = r$ e $\mathsf{A}(r) = 1$.

2. Se $q \in Q$ e $g \in P = MAN$ então escrevendo $g = mhn$ tem-se $\mathsf{R}(q \cdot g) = \mathsf{R}(q)m$ e $\mathsf{A}(q \cdot g) = \mathsf{A}(q)h$.

Tomando o logaritmo de A temos a aplicação $\mathsf{a} : Q \to \mathfrak{a}$ dada por

$$\mathsf{a}(q) = \log \mathsf{A}(q).$$

Utilizando a mesma notação para a projeção de G em $\mathfrak{a}$ com relação à decomposição de Iwasawa, definimos a aplicação $\mathsf{a} : G \to \mathfrak{a}$ dada por $\mathsf{a}(g) = \log h$, onde $g = uhn \in G = KAN$. Com essa notação, se $g \in P$, obtemos do item 2 acima que

$$\mathsf{a}(q \cdot g) = \mathsf{a}(q) + \mathsf{a}(g). \tag{3.4}$$

Considere agora um fluxo de endomorfismos $\phi_t : Q \to Q$, com $t \in \mathbb{T}(\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R})$. Da propriedade 2 da decomposição de Iwasawa de Q, segue que a aplicação $\phi_t^R : R \to R$ dada por $\phi_t^R(r) = \mathsf{R}(\phi_t(r))$ é ainda um fluxo, ou seja, $\phi_{t+s}^R = \phi_t^R \circ \phi_s^R$. Além disso, a aplicação

$$\mathsf{a}^\phi : \mathbb{T} \times R \to \mathfrak{a}, \quad \mathsf{a}^\phi(t, r) = \mathsf{a}(\phi_t(r)),$$

é um cociclo aditivo sobre o fluxo ϕ_t^R, ou seja

$$\mathsf{a}^\phi(t + s, r) = \mathsf{a}^\phi(t, \phi_s^R(r)) + \mathsf{a}^\phi(s, r).$$

De fato, escrevendo $\phi_s(r) = \phi_s^R(r)h_s n_s \in R \cdot AN$ e usando a equação (3.4) acima temos

$$\begin{aligned}
\mathsf{a}^\phi(t + s, r) &= \mathsf{a}\left(\phi_t(\phi_s(r))\right) \\
&= \mathsf{a}\left(\phi_t\left(\phi_s^R(r)h_s n_s\right)\right) \\
&= \mathsf{a}\left(\phi_t\left(\phi_s^R(r)\right) h_s n_s\right) \\
&= \mathsf{a}\left(\phi_t(\phi_s^R(r))\right) + \mathsf{a}(h_s) \\
&= \mathsf{a}^\phi\left(t, \phi_s^R(r)\right) + \mathsf{a}^\phi\left(s, r\right)
\end{aligned}$$

Se não houver confusão e o fluxo ϕ_t estiver fixado, escreveremos o cociclo apenas por a ao invés de a^ϕ.

A aplicação a pode ainda ser vista como um cociclo sobre o fluxo induzido por ϕ_t no fibrado Flag $\mathbb{E} = Q \times_G \mathbb{F} = R \times_K \mathbb{F}$. Para isso, escrevemos $\xi \in \mathbb{E}$ como $\xi = r \cdot b_0$, com $r \in R$, e definimos

$$\mathsf{a}(t, \xi) = \mathsf{a}(t, r).$$

Essa aplicação fica bem definida, pois se $r \cdot b_0 = r' \cdot b_0$, então $r' = r.m$, com $m \in M$, e daí

$$\mathsf{a}(t, r') = \mathsf{a}(\phi_t(r)m) = \mathsf{a}(\phi_t(r)) + \mathsf{a}(m) = \mathsf{a}(t, r).$$

Para ver que $\mathsf{a}(t, \xi)$ é de fato um cociclo aditivo sobre o fluxo induzido no fibrado flag maximal $\mathbb{E}$, observe primeiro que se $\xi = r \cdot b_0$ então pela decomposição de Iwasawa de Q podemos escrever $\phi_s(\xi) = \phi_s(r) \cdot b_0 = \phi_s^R(r)h_s n_s \cdot b_0 = \phi_s^R(r) \cdot b_0$. Logo

$$\begin{aligned} \mathsf{a}(t+s, \xi) &= \mathsf{a}(t+s, r) \\ &= \mathsf{a}(t, \phi_s^R(r)) + \mathsf{a}(s, r) \\ &= \mathsf{a}(t, \phi_s(\xi)) + \mathsf{a}(s, \xi) \end{aligned}$$

A partir desse cociclo definimos o expoente de Lyapunov do fluxo ϕ_t na direção de $\xi \in \mathbb{E}$ por

$$\lambda(\xi) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\mathsf{a}(t, \xi), \tag{3.5}$$

caso esse limite exista.

Para o fluxo reverso, considere

$$\mathsf{a}^-(t, r) = \log \mathsf{A}(\phi_{-t}(r)).$$

do mesmo modo feito acima $\mathsf{a}^-(t, r)$ define um cociclo sobre o fluxo inverso induzido no fibrado flag maximal pondo, para $\xi = r \cdot b_0$, $\mathsf{a}^-(t, \xi) = \mathsf{a}^-(t, r)$. O expoente de Lyapunov em $\xi \in \mathbb{E}$ para o fluxo reverso é definido então por

$$\lambda^-(\xi) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\mathsf{a}^-(t, \xi),$$

caso esse limite exista. A proposição abaixo relaciona os cociclos positivos e negativos e seus respectivos expoentes de Lyapunov.

Proposição 3.2.1. *Para $\xi \in \mathbb{E}$ tem-se $\mathsf{a}^-(t, \xi) = -\mathsf{a}(t, \phi_{-t}(\xi))$. Em particular os expoentes de Lyapunov estão relacionados por $\lambda^-(\xi) = -\lambda(\xi)$.*

Demonstração: Proposições 6.2 e 6.3 de [2] □

Em geral, o cociclo a não passa aos flags parciais. No entanto, compondo a com determinados funcionais lineares $\mu \in \mathfrak{a}^*$, obtemos cociclos $a_\mu = \mu \circ \mathsf{a}$ que podem ser fatorados para cociclos nos fibrados flags parciais $\mathbb{E}_\Theta$. Tais cociclos aparecem

frequentemente em situações que se deseja medir o crescimento exponencial de determinados fluxos. Um exemplo é dado pelos fluxos lineares em fibrados vetoriais, cujos crescimento exponencial em uma dada direção é medido por um cociclo no fibrado projetivo, que por sua vez pode ser visto como um fibrado flag parcial de $\mathrm{Sl}(n,\mathbb{R})$.

Para formalizar a construção dos cociclos nos fibrados flag parciais, considere o lema abaixo.

Lema 3.2.2. *Considere $\Theta \subset \Sigma$. Se $\mu : \mathfrak{a} \to V$ é uma transformação linear que se anula em $\mathfrak{a}(\Theta)$ então $\mathsf{a}_\mu(t,r) = \mathsf{a}_\mu(t,rk)$ para todo $k \in K_\Theta$*

Demonstração: Lema 7.1 de [2] □

Com esse lema podemos mostrar que compondo o cociclo a com transformações lineares $\mu : \mathfrak{a} \to V$ que se anulam em $\mathfrak{a}(\Theta)$ temos cociclos nos fibrados flags parciais. De fato, se μ se anula em $\mathfrak{a}(\Theta)$, definimos para $\xi \in \mathbb{E}_\Theta$ o cociclo

$$\mathsf{a}_\mu(t,\xi) = \mu \circ \mathsf{a}(t,r), \quad \text{onde } \xi = r \cdot b_\Theta. \tag{3.6}$$

Essa aplicação está bem definida pois se $r \cdot b_\Theta = r' \cdot b_\Theta$ então $r' = rk$, com $k \in K_\Theta$, e então, pelo lema acima, $\mathsf{a}(t,r') = \mathsf{a}(t,r)$. Além disso, como a é um cociclo e μ é linear, segue que a_μ também é um cociclo.

No final deste capítulo apresentamos com detalhes o caso dos cociclos no espaço projetivo que fornecem os expoentes de Lyapunov clássicos.

Decomposição de Cartan e o expoente polar

Do mesmo modo feito acima, a decomposição de Cartan $G = KS$ induz uma decomposição no fibrado Q pondo $Q = R \cdot S$, onde R é uma K-redução de Q. Da decomposição de Cartan se obtém a decomposição polar de G pondo $S = \mathrm{cl}(A^+)K$, onde A^+ é uma câmara de Weyl da subálgebra abeliana maximal $A \subset S$. Assim cada elemento de Q se escreve unicamente como $q = r \cdot hv$, com $r \in R$, $h \in \mathrm{cl}(A^+)$ e $v \in K$. As projeções de Q em R, em S e em $\mathrm{cl}(A^+)$ serão denotadas respectivamente por

$$\mathsf{R}^C : Q \to R\,, \qquad \mathsf{S} : Q \to S \quad \text{e} \quad \mathsf{A}^+ : Q \to \mathrm{cl}A^+.$$

Todas essas projeções são contínuas e satisfazem as seguintes propriedades para $q \in Q$, $r \in R$ e $k \in K$

1. $\mathsf{R}^C(q \cdot k) = \mathsf{R}^C(q) \cdot k$ e $\mathsf{S}(q \cdot k) = k^{-1}\mathsf{S}(q)k$;
2. $\mathsf{R}^C(r) = r$ e $\mathsf{S}(r \cdot g) = \mathsf{S}(g)$ (onde denotamos também por $\mathsf{S}(g)$ a S-componente de g com relação à decomposição de Cartan $G = KS$);
3. $\mathsf{S}(q \cdot g) = \mathsf{S}(\mathsf{S}(q)g)$;
4. $\mathsf{A}^+(q \cdot k) = \mathsf{A}^+(q)$.

Cabe aqui a observação de que as projeções do fibrado Q no fibrado R provenientes das decomposições de Iwasawa e de Cartan são, em geral, distintas, e por esse motivo as denotamos de modo diferente por R e R^C.

Tomando o logaritmo das aplicações S e A^+ definimos ainda, para $q \in Q$,

$$\mathsf{s}(q) = \log \mathsf{S}(q) \in \mathfrak{s} \quad \text{e} \quad \mathsf{a}^+(q) = \log \mathsf{A}^+(q) \in \mathrm{cl}\mathfrak{a}^+.$$

Considerando novamente um fluxo de endomorfismos $\phi_t : Q \to Q$, com $t \in \mathbb{T}(\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R})$, definimos a aplicação

$$\mathsf{a}^+ : \mathbb{T} \times R \to \mathrm{cl}(\mathfrak{a}^+), \quad \mathsf{a}^+(t, r) = \mathsf{a}^+(\phi_t(r)).$$

O expoente polar de ϕ_t é definido por

$$\Lambda^+(r) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\mathsf{a}^+(t, r) \in \mathrm{cl}(\mathfrak{a}^+) \tag{3.7}$$

A aplicação a^+ e o expoente polar Λ^+ são invariantes pela ação à direita de K. De fato, $\mathsf{a}^+(t, r \cdot k) = \mathsf{a}^+(\phi_t(r \cdot k)) = \mathsf{a}^+(\phi_t(r) \cdot k) = \mathsf{a}^+(\phi_t(r)) = \mathsf{a}^+(t, r)$, onde na penúltima igualdade utilizamos a propriedade 4 acima, que dá a invariância de A^+ pela ação de K. Passando limites temos também a invariância de Λ^+. Em vista disso, frequentemente iremos escrever $\mathsf{a}^+(t, x)$ e $\Lambda^+(x)$ ao invés de $\mathsf{a}^+(t, r)$ e $\Lambda^+(r)$ quando $x = \pi(r)$.

Ao contrário da aplicação a definida pela decomposição de Iwasawa, a^+ não é um cociclo aditivo sobre o fluxo ϕ_t.

3.2.2 Teorema Ergódico Multiplicativo

Enunciaremos aqui a versão do teorema ergódico multiplicativo para os expoentes de Lyapunov vetoriais definidos acima. As demonstrações dos resultados desta seção podem ser encontradas em [2]

Considere o fluxo de automorfismos $\phi_t : Q \to Q$ e suponha que exista uma medida de probabilidade ν na base X que é invariante para o fluxo induzido. Dada a aplicação a^+ proveniente da decomposição polar de ϕ_t e defina $\mathsf{a}^+_\mu(t,x) = \mu \circ \mathsf{a}^+(t,x)$, com $\mu \in \mathfrak{a}^*$. Apesar de $\mathsf{a}^+(t,x)$ não ser um cociclo aditivo, se μ for o peso dominante de uma representação de G num espaço vetorial complexo de dimensão finita, então $\mathsf{a}^+_\mu(t,x)$ é um cociclo subaditivo sobre o fluxo na base (ver [2]). Supondo que $\mathsf{a}^+_\mu(1,\cdot)$ é ν-integrável e utilizando o teorema ergódico subaditivo conclui-se que o limite $\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\mathsf{a}^+_\mu(t,x)$ existe para quase todo $x \in X$. Como o conjunto dos pesos dominantes geram $\mathfrak{a}^*$, segue que, num conjunto de medida total, o limite $\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\mathsf{a}^+_\mu(t,x)$ existe para todo $\mu \in \mathfrak{a}^*$. Daí que $\frac{1}{t}\mathsf{a}^+(t,x)$ converge quase sempre.

Teorema 3.2.3 (Teorema ergódico multiplicativo para expoentes vetoriais)**.** *Suponha que $\mathsf{a}^+_\mu(1,\cdot)$ é ν-integrável para todo peso dominante μ. Então:*

1. *Existe um subconjunto mensurável $\Omega \subset X$, invariante pelo fluxo na base, com $\nu(\Omega) = 1$ tal que o expoente polar $\Lambda^+(x) = \Lambda^+(r)$ ($r \in R$ e $x = \pi(r)$) existe para todo $x \in \Omega$.*

2. *Seja $\widetilde{\Omega} = \pi_{\mathbb{E}}^{-1}(\Omega)$ a restrição do fibrado $\mathbb{E}$ a Ω. Então o $\mathfrak{a}$-expoente de Lyapunov $\lambda(\xi)$ existe para todo $\xi \in \widetilde{\Omega}$.*

3. *Seja $\widetilde{R} = \pi^{-1}(\Omega) \cap R$ a restrição do fibrado R a Ω. Então existe uma aplicação mensurável $D : \widetilde{R} \to \mathfrak{s}$ tal que para todo $r \in \widetilde{R}$ valem:*

   a. *D é K-equivariante ($D(r \cdot k) = \mathrm{Ad}(k^{-1})D(r)$);*

   b. *$D(r) = \mathrm{Ad}(u)\Lambda^+(r)$, para algum $u \in K$ e;*

   c. *$\lambda(r \cdot b) = w^{-1}\Lambda^+(r)$ se $b \in \mathrm{st}(D(r), w)$*

Demonstração: Teorema 4.1 de [2] □

A aplicação equivariante D do teorema anterior é construída em [2] a partir da decomposição de Cartan do fibrado Q. Mais formalmente, mostra-se que para os pontos $r \in \widetilde{R}$ existe o limite $D(r) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \log s_k$, onde s_k é a componente simétrica do fluxo $\phi_k(r)$ com respeito à decomposição de Cartan $Q = R \cdot S$, isto é, $\phi_k(r) = r_k \cdot s_k$. Chamamos $D(r)$ de raio assintótico da sequência $\phi_k(r)$.

Além disso, o expoente polar $\Lambda^+(r)$ é dado pelo limite $\Lambda^+(r) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \log h_k$, com h_k proveniente da decomposição polar de s_k, isto é, $s_k = v_k h_k v_k^{-1}$, com $v_k \in K$

e $h_k \in \mathrm{cl}(A^+)$. Deste modo, o raio assintótico de $\phi_k(r)$ se escreve como $D(r) = \mathrm{Ad}(u)\Lambda^+(r)$, onde $u = \lim v_k$ (tomando subsequências se necessário).

O item (c) do teorema afirma, em particular, que se $r \in \widetilde{R}$, então o expoente de Lyapunov vetorial existe na direção de qualquer flag $r \cdot b$ na fibra sobre $\pi(r) = x \in \Omega$. Ainda mais, existe apenas uma quantidade finita de expoentes de Lyapunov na fibra sobre x, sendo que todos eles são dados por translações do expoente polar $\Lambda^+(x)$ por elementos do grupo de Weyl de G. Com isso, cada fibra do fibrado Flag $\mathbb{E}$ sobre os pontos $x \in \Omega$ se decompõe em subvariedades de forma que o expoente de Lyapunov é constante em cada uma delas. Mais formalmente, defina para cada $w \in \mathcal{W}$ e $x \in X$, a subvariedade

$$\mathrm{st}(x, w) = r \cdot \mathrm{st}(D(r), w)$$

onde $r \in \widetilde{R}$ está na fibra sobre x. Tal conjunto não depende de r na fibra, pois pela equivariância de $D(r)$ tem-se $D(r \cdot k) = \mathrm{Ad}(k^{-1})D(r)$ e $\mathrm{st}(\mathrm{Ad}(k^{-1})D(r), w) = k^{-1}\mathrm{st}(D(r), w)$. Além disso, do item (c) do teorema ergódico segue que

$$\lambda(\xi) = w^{-1}\Lambda^+(x), \quad \text{para todo } \xi \in \mathrm{st}(x, w).$$

Definimos também a *componente de Oseledet* associada à $w \in \mathcal{W}$ por

$$\mathrm{st}(w) = \bigcup_{x \in \Omega} \mathrm{st}(x, w) \subset \mathbb{E}.$$

Os pontos $x \in \Omega$ (ou os elementos $r \in \widetilde{R}$) são chamado de *regulares*. Sobre os pontos regulares obtemos uma decomposição do fibrado $\mathbb{E}$ nos conjuntos $\mathrm{st}(w)$ tais que os $\mathfrak{a}$-expoentes de Lyapunov em $\xi \in \mathrm{st}(w)$ são dados por $\lambda(\xi) = w^{-1}\Lambda^+(x)$. Essa decomposição é análoga à filtração de Oseledets para fluxos em fibrados vetoriais, e por isso chamamos os conjuntos $\mathrm{st}(w)$ de componentes de Oseledets.

Dado um ponto regular $x \in \Omega$, definimos ainda o *tipo parabólico de Lyapunov* do fluxo ϕ_t em x por

$$\Theta_{\mathrm{Ly}}(x) = \{\alpha \in \Sigma \mid \alpha(\Lambda^+(x)) = 0\}.$$

Em geral $\Theta_{\mathrm{Ly}}(x)$ depende de x, mas no caso em que ν é ergódica, como $\Lambda^+(x)$ é invariante pelo fluxo, segue que esse expoente é constante, assim como $\Theta_{\mathrm{Ly}}(x)$.

Filtração de Oseledets

O lema a seguir irá ajudar a descrever melhor as componentes de Oseledets.

Lema 3.2.4. *Seja $H \in \mathrm{cl}(\mathfrak{a}^+)$ e $\Theta = \Theta(H)$. Então o conjunto dos pontos fixos repulsores e sua variedade estável para a ação de $h = \exp H$ no flag dual $\mathbb{F}_{\Theta^*}$ são unitários dados por*

$$\mathrm{fix}_{\Theta^*}(H, w_0) = \mathrm{st}_{\Theta^*}(H, w_0) = w_0\mathfrak{p}_{\Theta^*} = \mathfrak{p}^-_\Theta,$$

onde $\Theta^* = -w_0(\Theta)$ e w_0 é a involução principal de $\mathfrak{g}$.

Demonstração: O conjunto dos pontos fixos repulsores da ação de h é dado por

$$\mathrm{fix}_{\Theta^*}(H, w_0) = K_H w_0 \mathfrak{p}_{\Theta^*}.$$

Mas $w_0\mathfrak{p}_{\Theta^*} = \mathfrak{p}^-_\Theta$ e $K_H = K_\Theta \subset K_\Theta AN^- = P^-_\Theta = N_G(\mathfrak{p}^-_\Theta)$. Logo

$$K_H w_0 \mathfrak{p}_{\Theta^*} = K_H \mathfrak{p}^-_\Theta = K_H AN^- \mathfrak{p}^-_\Theta = P^-_\Theta \mathfrak{p}^-_\Theta = \mathfrak{p}^-_\Theta = w_0\mathfrak{p}_{\Theta^*}.$$

Analogamente, a variedade estável é dada por $\mathrm{st}_{\Theta^*}(H, w_0) = N^-_H K_H w_0 \mathfrak{p}_{\Theta^*} = w_0\mathfrak{p}_{\Theta^*}$ □

Considerando agora o flag dual $\mathbb{F}_{\Theta^*_{\mathrm{Ly}}(x)}$, a ação de $\exp(\Lambda^+(x))$ tem como único repulsor o ponto fixo $w_0 b_{\Theta^*_{\mathrm{Ly}}(x)}$, que também é sua própria variedade estável. Isto é,

$$\mathrm{fix}_{\Theta^*_{\mathrm{Ly}}(x)}(\Lambda^+(x), w_0) = \mathrm{st}_{\Theta^*_{\mathrm{Ly}}(x)}(\Lambda^+(x), w_0) = w_0\mathfrak{p}_{\Theta^*_{\mathrm{Ly}}(x)}.$$

Logo, considerando o fibrado Flag de tipo $\Theta^*_{\mathrm{Ly}}(x)$, $\mathbb{E}_{\Theta^*_{\mathrm{Ly}}(x)}$, temos que a projeção do conjunto $\mathrm{st}(x, w_0) = r \cdot \mathrm{st}(D(r), w_0) \subset \mathbb{E}$ nesse fibrado é apenas o ponto

$$\xi^*(x) = r \cdot \mathrm{fix}_{\Theta^*_{\mathrm{Ly}}(x)}(D(r), w_0) = ru \cdot w_0\mathfrak{p}_{\Theta^*_{\mathrm{Ly}}(x)},$$

onde $D(r) = \mathrm{Ad}(u)\Lambda^+(x)$.

Chamamos a aplicação ξ^* de *seção de Oseledets do semifluxo positivo*. Note que ξ^* não é necessariamente uma seção no fibrado flag, já que o tipo parabólico de Lyapunov $\Theta^*_{\mathrm{Ly}}(x)$ varia em função de x. No entanto, se a medida ν for ergódica, então $\Theta^*_{\mathrm{Ly}}(x) = \Theta^*_{\mathrm{Ly}}$ é constante e temos de fato uma seção $\xi^* : \Omega \subset X \to \mathbb{E}_{\Theta^*_{\mathrm{Ly}}}$.

Decomposição de Oseledets

O passo principal para se conseguir um refinamento das componentes de Oseledets e assim obter uma versão análoga da decomposição multiplicativa de Oseledets

clássica é considerar o fluxo reverso. Fazendo então a mesma construção acima para ϕ_{-t}, é possível mostrar que o tipo parabólico de Lyapunov para esse fluxo é o dual do tipo parabólico de Lyapunov de ϕ_t. Mais especificamente, denotando por Λ^- o expoente polar do fluxo reverso, em [2] mostrou-se que no conjunto de pontos regulares tem-se

$$\Lambda^-(x) = -w_0\Lambda^+(x),$$

e consequentemente o tipo parabólico de Lyapunov de ϕ_{-t} é o dual de $\Theta_{\mathrm{Ly}}(x)$. Isto é

$$\Theta^*_{\mathrm{Ly}}(x) = \{\alpha \in \Sigma \mid \alpha\left(-w_0\Lambda^+(x)\right) = 0\}.$$

Denotamos por $D^-(r)$ o raio assintótico do fluxo reverso que, pelo teorema ergódico, também é uma função equivariante e, para cada r regular, satisfaz $D^-(r) = \mathrm{Ad}(u)\Lambda^-(x)$, $u \in K$. As componentes de Oseledet para o fluxo reverso são dadas em cada ponto regular $x \in \Omega$ por

$$\mathrm{st}^-(x, w) = r \cdot \mathrm{st}(D^-(r), w),$$

de forma que se $\xi \in \mathrm{st}^-(x, w)$ então o expoente de Lyapunov do fluxo reverso é

$$\lambda^-(\xi) = w^{-1}\Lambda^-(x) = -(w_0w)^{-1}\Lambda^+(x).$$

Dessa igualdade segue imediatamente que

$$\mathrm{st}(x, w) = \mathrm{st}^-(x, w_0w).$$

Considere agora $\xi(x) = r \cdot \mathrm{fix}_{\Theta_{\mathrm{Ly}}(x)}(D^-(r), w_0) \in \mathbb{E}_{\Theta_{\mathrm{Ly}}(x)}$ a seção de Oseledets do fluxo reverso. A proposição 6.10 de [2] mostra que $\xi(x)$ e $\xi^*(x)$ são seções opostas, isto é, se $f : \pi^{-1}(\Omega) \to \mathbb{F}_{\Theta_{\mathrm{Ly}}(x)}$ e $f^* : \pi^{-1}(\Omega) \to \mathbb{F}_{\Theta^*_{\mathrm{Ly}}(x)}$ forem as funções equivariantes associadas respectivamente à $\xi(x)$ e $\xi^*(x)$, então as subálgebras $f(q) \in \mathbb{F}_{\Theta_{\mathrm{Ly}}(x)}$ e $f^*(q) \in \mathbb{F}_{\Theta^*_{\mathrm{Ly}}(x)}$ são opostas.

Mas o conjunto dos pares de subálgebras opostas $(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2) \in \mathbb{F}_\Theta \times \mathbb{F}_{\Theta^*}$ se identifica com a órbita aberta e densa da ação diagonal de G, isto é, tal conjunto é a órbita $G \cdot (\mathfrak{p}_\Theta, \mathfrak{p}^-_\Theta)$. A isotropia dessa ação é dada pela interseção dos normalizadores P_Θ de $\mathfrak{p}_\Theta$ e P^-_Θ de $\mathfrak{p}^-_\Theta$. Mas $P_\Theta \cap P^-_\Theta = Z_\Theta$, e daí $G \cdot (\mathfrak{p}_\Theta, \mathfrak{p}^-_\Theta) = G/Z_\Theta$. Tomando $H_\Theta \in \mathfrak{a}$ um elemento característico de Θ ($\Theta = \{\alpha \in \Sigma \mid \alpha(H_\Theta) = 0\}$) temos $Z_\Theta = Z_{H_\Theta}$ e G/Z_Θ se identifica com a órbita $\mathrm{Ad}(G)H_\Theta$.

Agora seja $q \in \pi^{-1}(\Omega)$ na fibra sobre $x \in \Omega$. Como $\Lambda^+(x)$ é um elemento característico de $\Theta_{\mathrm{Ly}}(x)$ e $(f(q), f^*(q))$ são opostas, pela identificação feita acima,

esse par determina um elemento $g(q) \in G$ tal que $f(q)$ e $f^*(q)$ são, respectivamente, o atrator e o repulsor de $\mathrm{Ad}\,(g(q))\,\Lambda^+(x)$ na respectiva variedade flag. Denotamos esse elemento por

$$h_{\mathrm{Ly}}(q) = \mathrm{Ad}\,(g(q))\,\Lambda^+(x) = g(q)\cdot\Lambda^+(x)$$

Da equivariância de $f(q)$ e $f^*(q)$, segue que $h_{\mathrm{Ly}}(q)$ é também equivariante. Isso determina um elemento $\chi(x) = q\cdot h_{\mathrm{Ly}}(q)$ na fibra sobre x no fibrado associado $\mathbb{A}_{\Theta_{\mathrm{Ly}}(x)} = Q\times_G(\mathrm{Ad}(G)\Lambda^+(x))$.

Chamamos a aplicação

$$\begin{array}{rccl}\chi_{\mathrm{Ly}}: & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{A}_{\Theta_{\mathrm{Ly}}(x)} \\ & x & \longmapsto & \chi_{\mathrm{Ly}}(x) = q\cdot h_{\mathrm{Ly}}(q)\end{array} \tag{3.8}$$

de *seção de Oseledets* do fluxo ϕ_t. Observamos novamente que χ_{Ly} não é exatamente uma seção, já que $\Lambda^+(x)$ e $\Theta_{\mathrm{Ly}}(x)$ dependem de x. Mas no caso que que a medida ν é ergódica então temos de fato uma seção, já que neste caso $\Lambda^+(x) = \Lambda^+$ e $\Theta_{\mathrm{Ly}}(x) = \Theta_{\mathrm{Ly}}$ são constantes.

O próximo teorema fornece uma versão da decomposição ergódica multiplicativa nesse contexto, isto é, uma decomposição em subvariedades de forma que em cada uma delas fica bem determinado os expoentes do fluxo positivo e do fluxo reverso.

Teorema 3.2.5. *Fixe $r\in R$ regular. Sejam $D^+(r)$ e $D^-(r)$ os raios assintóticos de $\phi_k(r)$ e $\phi_{-k}(r)$, e $h_{\mathrm{Ly}}(r)$ a função equivariante associada à seção de Oseledet. Então existem $n\in N^-_{D^+(r)}$ e $m\in N^-_{D^-(r)}$ tais que*

$$\mathrm{Ad}(n)D^+(r) = h_{\mathrm{Ly}}(r) = -\mathrm{Ad}(m)D^-(r).$$

Consequentemente

$$\mathrm{st}(x,w) = r\cdot\mathrm{st}(h_{\mathrm{Ly}}(r),w) = \mathrm{st}^-(x,w_0w), \quad x\in\Omega,\ \ \pi(r)=x,$$

e assim,

$$\lambda(\xi) = w^{-1}\Lambda^+(r)\ \ e\ \ \lambda^-(\xi) = -w^{-1}\Lambda^+(r)\ \ se\ \ \xi\in r\cdot\mathrm{st}(h_{\mathrm{Ly}}(r),w).$$

Demonstração: Sejam $\xi^*(x) = q\cdot f^*(q)$ e $\xi(x) = q\cdot f(q)$ as seções de Oseledet dos semifluxos positivo e reverso, onde f^* e f são as respectivas funções equivariantes. Fixe $x\in\Omega$ e considere $q\in R$ na fibra sobre x tal que $D(q) = \Lambda^+(x)$ (que existe pela equivariância de D) e seja $\Theta = \Theta_{\mathrm{Ly}}(x)$. Neste caso temos que $f^*(q) = w_0\mathfrak{p}_{\Theta^*}$.

Além disso, como as seções de Oseledet do semifluxo positivo e reverso são opostas, segue que $f(q) \in N_\Theta^- \mathfrak{p}_\Theta$ e consequentemente $(f(q), f^*(q)) \in N_\Theta^- \cdot (\mathfrak{p}_\Theta, w_0\mathfrak{p}_{\Theta^*})$. Com a identificação de entre os pares de subálgebras opostas em $\mathbb{F}_\Theta \times \mathbb{F}_{\Theta^*}$ com a órbita adjunta $\mathrm{Ad}(G)\Lambda^+(x)$, temos que $(\mathfrak{p}_\Theta, w_0\mathfrak{p}_{\Theta^*})$ está identificado com $\Lambda^+(x)$ e $(f(q), f^*(q))$ está identificado com $h_{\mathrm{Ly}}(q)$. Assim segue que $h_{\mathrm{Ly}}(q) = \mathrm{Ad}(n)\Lambda^+(q)$, com $n \in N_\Theta^- = N^-_{\Lambda^+(x)}$. Para o caso geral em que $r = q \cdot k$, com $k \in K$, temos

$$\begin{aligned} h_{\mathrm{Ly}}(r) = h_{\mathrm{Ly}}(q \cdot k) &= \mathrm{Ad}(k^{-1})h_{\mathrm{Ly}}(q) = \mathrm{Ad}(k^{-1})\mathrm{Ad}(n)D(q) \\ &= \mathrm{Ad}(k^{-1}nk)\mathrm{Ad}(k^{-1})D(q) = \mathrm{Ad}(k^{-1}nk)D(r), \end{aligned}$$

com $k^{-1}nk \in k^{-1}N^-_{\Lambda^+(x)}k = N^-_{D(r)}$. A afirmação sobre a componente de Oseledet segue de

$$r \cdot \mathrm{st}(h_{\mathrm{Ly}}(r), w) = r \cdot \mathrm{st}(\mathrm{Ad}(n)D(r), w) = r \cdot n\,\mathrm{st}(D(r), w) = r \cdot \mathrm{st}(D(r), w).$$

Para a relação do fluxo reverso a conta é análoga. Para a igualdade $\mathrm{st}(x, w) = \mathrm{st}^-(x, w_0 w)$, observe que $\xi \in \mathrm{st}(x, w)$ se, e só se, $\lambda(\xi) = w^{-1}\Lambda^+(x)$. Do mesmo modo $\xi \in \mathrm{st}^-(x, w_0 w)$ se, e só se, $\lambda^-(\xi) = (w_0 w)^{-1}\Lambda^-(x)$. Mas $\lambda(\xi) = -\lambda^-(\xi)$ e $\Lambda^-(x) = -w_0\Lambda^+(x)$, donde segue que $\xi \in \mathrm{st}(x, w)$ se, e só se, $\lambda^-(\xi) = -\lambda(\xi) = -w^{-1}\Lambda^+(x) = (w_0 w)^{-1}\Lambda^-(x)$, isto é, se, e só se, $\xi \in \mathrm{st}^-(x, w_0 w)$. □

3.3 Relações entre os expoentes clássicos e os vetoriais

Nesta seção mostraremos a relação entre os expoentes de Lyapunov vetoriais definidos a partir de fluxos em fibrados principais e em suas variedades flag associadas, com os expoentes de Lyapunov clássicos. Essas relações visam dar uma interpretação geométrica ao teorema ergódico multiplicativo vetorial e mostrar como o teorema clássico se recupera a partir deste. Como veremos nos próximos capítulos, esse contexto mais geral traz algumas vantagens para se obter propriedades dos expoentes de Lyapunov, já que neste caso podemos tratar de maneira intrínseca, utilizando estruturas das álgebras de Lie, vários casos de cociclos assumindo valores em grupos diferentes do $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$.

No que segue faremos a relação dos expoentes clássicos supondo que nosso cociclo assuma valores no grupo $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$.

Considere então o cociclo $\rho : \mathbb{Z}\times X \to \mathrm{Sl}(n,\mathbb{R})$ sobre a transformação $f : X \to X$, cujo gerador é $T : X \to \mathrm{Sl}(n,\mathbb{R})$.

Pra começo de conversa, lembramos que a variedade Flag maximal de $\mathrm{Sl}(n,\mathbb{R})$ é dada pelo conjunto de subespaços encaixados $\mathbb{F} = \{(V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_n) \mid \dim V_i = i\}$. Ao se definir o expoente de Lyapunov para fibrados flag, o que se deseja é medir o crescimento exponencial do cociclo não apenas numa direção fixa, mas sim num "flag de direções". em outras palavras, deseja-se definir a taxa de crescimento exponencial do fluxo induzido no fibrado flag $X \times \mathbb{F}$ dado por

$$(x,b) \in X \times \mathbb{F} \overset{\phi}{\longmapsto} (f(x), T(x)\cdot b) \in X \times \mathbb{F}, \tag{3.9}$$

onde a ação de $T(x) \in \mathrm{Sl}(n,\mathbb{R})$ em $b = (V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_n)$ é dada por

$$T(x)\cdot b = (T(x)V_1 \subset T(x)V_2 \subset \cdots \subset T(x)V_n).$$

Uma boa maneira de se olhar as ações nas variedades Flag é escolhendo bases ortonormais adaptadas ao flag em questão. Aplicando o processo de Gram-Schmidt à uma base $\beta = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ de V contida no flag $b = (V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_n)$, isto é, tal que $V_i = \mathrm{ger}\{w_1, \ldots, w_i\}$, obtemos uma base ortonormal $\beta' = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ tal que $V_i = \mathrm{ger}\{v_1, \ldots, v_i\}$. Além disso, se $g = [w_1\ w_2\ \cdots\ w_n]$ é a matriz cujas colunas são os vetores da base β, podemos supor, sem perda de generalidade, que $g \in \mathrm{Sl}(n,\mathbb{R})$ (basta dividir algum vetor pelo determinante). Com isso, se $k = [v_1\ v_2\ \cdots\ v_n]$ é a matriz cujas colunas são os vetores da base β' obtida a partir de β pelo processo de Gram-Schmidt, então $g = khn$, onde $k \in \mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$, h é uma matriz diagonal com entradas positivas e n é uma matriz triangular superior com 1's na diagonal. Esse processo é essencialmente a decomposição de Iwasawa do grupo, que neste caso é dada por $\mathrm{Sl}(n,\mathbb{R}) = \mathrm{SO}(n,\mathbb{R})AN$, onde A é o grupo das matrizes diagonais com entradas positivas e determinante 1, e N é o grupo das matrizes triangulares superiores com 1's na diagonal. Além disso, essa construção mostra que tanto $\mathrm{Sl}(n,\mathbb{R})$, quanto $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$, agem transitivamente em $\mathbb{F}$. De fato, temos que

$$b = g\cdot b_0 = khn\cdot b_0 = k\cdot b_0,$$

onde $b_0 = (\langle e_1\rangle \subset \langle e_1, e_2\rangle \subset \ldots \subset \langle e_1, e_2, \ldots, e_n\rangle)$ é o flag formado pelos vetores da base canônica da $\mathbb{R}^n$. Observe que hn mantém fixo o flag b_0.

Feitas essas observações, vamos mostrar agora como a decomposição de Iwasawa fornece um cociclo que mede a taxa de crescimento exponencial do fluxo 3.9 na direção de um flag completo $b \in \mathbb{F}$.

Como já vimos, cada flag $b \in \mathbb{F}$ pode ser associado a uma matriz $k \in \mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ tal que $b = k \cdot b_0$ e suas colunas geram os subespaços do flag b. A ação de $\rho(n,x)$ em b pode ser vista então a partir da sequência de matrizes $\rho(n,x)k$. De fato, para cada n, as colunas de $\rho(n,x)k$ formam uma base para os subespaços do flag $\rho(n,x)\cdot b$. Fixando a decomposição de Iwasawa de $\mathrm{Sl}(n,\mathbb{R})$, iremos considerar a componente diagonal (A-componente) da matriz $\rho(n,x)k$. Denotando por $\mathsf{A} : \mathrm{Sl}(n,\mathbb{R}) \to A$ a projeção na A-componente definimos

$$\mathsf{a}(n,(x,b)) = \log \mathsf{A}(\rho(n,x)k), \quad \text{onde } b = k \cdot b_0 \tag{3.10}$$

Duas grandes vantagens de se considerar essa A-componente são que $\mathsf{a}(n,(x,b))$ fica bem definido sobre o Flag maximal, isto é, não depende de qual $k \in \mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ é escolhido para representar o flag b ($b = k \cdot b_0$) e, além disso, essa aplicação define um cociclo aditivo sobre o fluxo ϕ (3.9) no fibrado flag maximal, isto é,

$$\mathsf{a}(n+m,(x,b)) = \mathsf{a}(n,\phi^m(x,b)) + \mathsf{a}(m,(x,b)).$$

O expoente de Lyapunov em $x \in X$ do cociclo ρ na direção do flag $b \in \mathbb{F}$ é definido então por

$$\lambda(x,b) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\mathsf{a}(n,(x,b)),$$

se esse limite existir.

Não é claro, à primeira vista, que esse cociclo fornece de fato uma taxa de crescimento exponencial. Um modo de se pensar nisso é observando que a parte unipotente de $\rho(n,x)k$ (em N) tem crescimento sub-exponencial e a parte ortogonal é uma isometria, de forma que o que sobra é a parte diagonal. Outra interpretação desse limite é dada pelo teorema ergódico multiplicativo vetorial, que fornece a relação entre o expoente de Lyapunov e o expoente polar. Vamos descrever em detalhes o expoente polar e com isso esperamos que a fique claro o fato desse cociclo fornecer uma taxa de crescimento exponencial.

A definição do expoente polar relacionado ao cociclo $\rho(n,x)$ é proveniente da idéia do teorema ergódico multiplicativo clássico, onde toma-se limites da parte simétrica de $\rho(n,x)$. Em outras palavras, tomaremos limites da sequência de matrizes semi-definidas positivas dada por

$$\mathsf{s}_n = \sqrt{\rho(n,x)^t\rho(n,x)}. \tag{3.11}$$

O cociclo $\rho(n,x)$ se escreve então como $\rho(n,x) = \mathsf{k}_n\mathsf{s}_n$, com $\mathsf{k}_n \in \mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ e s_n simétrica e positiva semi-definida, que é essencialmente a decomposição de Cartan de $\mathrm{Sl}(n,\mathbb{R})$.

Essa decomposição pode ser refinada se diagonalizarmos ordenadamente a matriz s_n. Para isso, escreva $\mathsf{s}_n = \mathsf{u}_n\mathsf{h}_n\mathsf{u}_n^{-1}$, com h_n diagonal, com autovalores positivos e ordenados do maior para o menor e $\mathsf{u}_n \in \mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$. Isso fornece

$$\rho(n,x) = \mathsf{k}_n\mathsf{u}_n\mathsf{h}_n\mathsf{u}_n^{-1},$$

que é essencialmente a decomposição polar do grupo $\mathrm{Sl}(n,\mathbb{R})$, que neste caso se lê

$$\mathrm{Sl}(n,\mathbb{R}) = \mathrm{SO}(n,\mathbb{R})(\mathrm{cl}A^+)\mathrm{SO}(n,\mathbb{R}),$$

onde $\mathrm{cl}(A^+)$ é o conjunto das matrizes diagonais com autovalores positivos (possivelmente repetidos, pois considera-se o fecho de A^+) e ordenados do maior para o menor.

Uma observação importante é que nesta decomposição a parte diagonal $\mathsf{h}_n \in \mathrm{cl}A^+$ é única, isto é, fica completamente determinada pela matriz $\rho(n,x)$. Para ver isso, observe que se h e h' são matrizes diagonais tais que $h' = uhv$, com $u, v \in \mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$, então h e h' tem os mesmo autovalores. De fato, observe primeiro que

$$h' = uhv = uvv^thv \qquad \text{e} \qquad h' = \sqrt{h'^th'} = \sqrt{v^thu^tuhv} = \sqrt{v^th^2v} = v^thv.$$

Dessas duas igualdades segue que $u = v^{-1} = v^t$ e assim, se x é autovetor de h com autovalor λ então $u(x)$ é autovetor de h' com autovalor λ, pois

$$h'(u(x)) = uhv(u(x)) = uh(x) = u(\lambda x) = \lambda u(x).$$

Deste modo, se os autovalores de h e h' estão ordenados do maior para o menor então $h = h'$, mostrando a unicidade da componente diagonal em $\mathrm{cl}(A^+)$ na decomposição polar de $\mathrm{Sl}(n,\mathbb{R})$. A matriz u tal que $h = uhu^{-1}$ em geral não é única. De fato, ela pode ser qualquer matriz no centralizador de h em $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$, que é formado pelas matriz diagonais em blocos, cujos blocos tem tamanhos dados pelas multiplicidades dos autovalores de h.

Analisando agora a decomposição polar da sequência de matrizes $\rho(n,x)k$, com $k \in \mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ temos que a componente em $\mathrm{cl}(A^+)$ não depende de k, e assim podemos escrever a decomposição de Cartan de $\rho(n,x)k$ como

$$\rho(n,x)k = \underbrace{\mathsf{k}_nk}_{\in \mathrm{SO}(n,\mathbb{R})}\ \underbrace{k^{-1}\mathsf{u}_n\,\mathsf{h}_n\,\mathsf{u}_n^{-1}k}_{\text{matriz simétrica}},$$

onde $\mathsf{u}_n \in \mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$, $\rho(n,x) = \mathsf{k}_n\mathsf{s}_n$ é a decomposição de Cartan do cociclo $\rho(n,x)$ e $\mathsf{s}_n = \sqrt{\rho(n,x)^t\rho(n,x)} = \mathsf{u}_n\,\mathsf{h}_n\,\mathsf{u}_n^{-1}$.

Com essas notações o expoente polar fica definido pelo limite

$$\Lambda^+(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathsf{h}_n,$$

que, caso exista, é uma matriz diagonal com os autovalores ordenados do maior para o menor. Além disso, tomando uma subsequência se necessário e assumindo que $\mathsf{u}_n \to u \in \mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$, temos que

$$D^+(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathsf{s}_n = \mathrm{Ad}(u)\Lambda^+(x)$$

é o raio assintótico da sequência de matrizes $\rho(n,x)$, que não depende de qual ponto de acumulação u de u_n é escolhido, já que todos eles se diferenciam por um elemento no centralizador de $\Lambda^+(x)$.

Observe que no teorema ergódico clássico, $D^+(x)$ é exatamente a matriz simétrica cujos autovalores são os expoentes de Lyapunov. Sendo assim, o expoente polar da sequência $\rho(n,x)$ é a matriz diagonal formada pelos expoentes de Lyapunov clássicos de forma ordenada. Além disso, a filtração do teorema ergódico clássico, formada pela soma dos auto-espaços de $D^+(x)$, ordenados do menor para o maior autovalor, é uma projeção do flag $u \cdot b_0^-$, onde $b_0^- = (\langle e_n\rangle \subset \langle e_n, e_{n-1}\rangle \subset \cdots \subset \langle e_n, e_{n-1}, \ldots, e_1\rangle)$, no flag cujos subespaços tem dimensão igual às multiplicidades dos expoentes de Lyapunov. Na linguagem do teorema ergódico para fibrados flag essa projeção é a componente de Oseledet

$$\mathrm{st}_\Theta(D^+(x), w_0) = \mathrm{fix}_\Theta(D^+(x), w_0) = u \cdot \mathrm{fix}_\Theta(\Lambda^+(x), w_0).$$

O teorema ergódico multiplicativo vetorial diz ainda que que o expoente de Lyapunov vetorial do cociclo ρ em (x,b), onde $b = u \cdot b_0^-$, é de fato uma medida de crescimento exponencial que, neste caso, é dado por

$$\lambda(x,b) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \mathsf{a}(n,(x,b)) = w_0\Lambda^+(x),$$

ou seja, é dado pela matriz diagonal formada pelo espectro de Lyapunov ordenado de modo crescente.

Já para a sequência $\rho(n,x)k$, temos que seu raio assintótico é dado por

$$D^+(x,k) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log\left(k^{-1}\mathsf{s}_n k\right) = \mathrm{Ad}(k^{-1})\mathrm{Ad}(u)\Lambda^+(x) = \mathrm{Ad}(k^{-1})D^+(x).$$

Capítulo 4

Resultados sobre o tipo parabólico de Morse e de Lyapunov

O objetivo deste capítulo é estabelecer alguns resultados gerais sobre decomposições de Morse, estimativas para os expoentes de Lyapunov ao longo das componentes de Morse, bem como a inclusão das componentes de Oseledets nas componentes de Morse. Essas estimativas e relações fornecerão o aparato fundamental para a demonstração, no próximo capítulo, do resultado principal desta tese envolvendo a regularidade dos expoentes de Lyapunov e suas estimativas a partir do tipo parabólico do fluxo.

4.1 Linearização em fibrados Flag

Seja $\phi : Q \to Q$ um automorfismo e considere o automorfismo induzido por ele no fibrado flag $\mathbb{E}_\Theta$. Nesta seção veremos como obter uma conjugação de entre ϕ e seu linearizado olhado no fibrado tangente às fibras de $\mathbb{E}_\Theta$.

Aqui a linearização será feita apenas ao redor da componente de Morse atratora de determinados fibrados Flag. Tal construção é um caso particular da seção 6 de [15], onde é feita a linearização ao redor de qualquer componente de Morse.

Uma maneira simples de se fazer linearizações equivariantes ao redor da imagem de uma seção ϕ-invariante σ do fibrado flag $\mathbb{E}_\Theta$, é utilizar uma seção ϕ-invariante σ^*, do fibrado flag dual $\mathbb{E}_{\Theta^*}$, oposta à σ (ver definição no apêndice). Apesar de não ser sempre possível considerar tais seções opostas, elas existem quando consideramos, por exemplo, o fibrado flag relacionado ao tipo parabólico de um fluxo e os fibrados

flag que são projeções deste.

Considere então $\sigma : X \to \mathbb{E}_\Theta$ e $\sigma^* : X \to \mathbb{E}_{\Theta^*}$ seções opostas ϕ_t-invariantes, $f_\sigma : Q \to \mathbb{F}_\Theta$ e $f_{\sigma^*} : Q \to \mathbb{F}_{\Theta^*}$ as respectivas funções equivariantes e seja $H \in \mathrm{cl}\mathfrak{a}^+$ tal que

$$\Theta = \Theta(H) = \{\alpha \in \Sigma \mid \alpha(H) = 0\}.$$

Agora $f_\sigma \times f_{\sigma^*} : Q \to \mathbb{F}_\Theta \times \mathbb{F}_{\Theta^*}$ é uma função equivariante e, como $f_\sigma(q)$ e $f_{\sigma^*}(q)$ são subálgebras opostas, sua imagem esta contida na órbita aberta e densa $G\cdot(b_\Theta, w_0 b_{\Theta^*})$ em $\mathbb{F}_\Theta \times \mathbb{F}_{\Theta^*}$. Mas essa órbita pode ser identificada com G/Z_Θ, já que a isotropia em $(b_\Theta, w_0 b_{\Theta^*})$ da ação de G em $\mathbb{F}_\Theta \times \mathbb{F}_{\Theta^*}$ é $P_\Theta \cap P_\Theta^- = Z_\Theta$. Mais ainda, Z_Θ coincide com o centralizador de H em G dado por $Z_H = \{g \in G \mid \mathrm{Ad}(g)H = H\}$ e então $G/Z_\Theta = \mathrm{Ad}(G)H$. Daí temos uma seção no fibrado associado $Q \times_G G/Z_\Theta$ e uma redução de Q para um Z_Θ-fibrado principal dado por

$$Q_\Theta = f_\sigma^{-1}(b_\Theta) = \{q \in Q \mid \sigma(x) = q \cdot b_\Theta\}.$$

Considerando uma K-redução compacta R de Q, através da identificação $G/Z_\Theta = K/K_\Theta$, onde $K_\Theta = K_H = Z_H \cap K$, temos que $Q \times_G G/Z_\Theta = R \times_K K/K_\Theta$, o que fornece uma K_Θ-redução de Q dada por

$$R_\Theta = f_\sigma^{-1}(b_\Theta) \cap R = \{r \in R \mid \sigma(x) = r \cdot b_\Theta\}.$$

São essas reduções que vão fornecer a linearização de $\mathbb{E}_\Theta$ ao redor da imagem de σ.

Para começo de conversa, o fibrado tangente às fibras de $\mathbb{E}_\Theta$ ao longo de σ possui uma simplificação em termos da Z_Θ-redução de Q. De fato, tal fibrado é dado pelo pullback de

$$T^f\mathbb{E}_\Theta = Q_\Theta \times_{Z_\Theta} T\mathbb{F}_\Theta \longrightarrow Q_\Theta \times_{Z_\Theta} \mathbb{F}_\Theta = \mathbb{E}_\Theta$$

por $\sigma : X \to \mathbb{E}_\Theta$. Mas para $q \in Q_\Theta$, com $\pi(q) = x$, temos $\sigma(x) = q \cdot b_\Theta$, e daí que

$$T^f_\sigma\mathbb{E}_\Theta = \sigma^*(T^f\mathbb{E}_\Theta) = Q_\Theta \times_{Z_\Theta} T_{b_\Theta}\mathbb{F}_\Theta = Q_\Theta \times_{Z_\Theta} \mathfrak{n}_\Theta^-,$$

onde a ação de Z_Θ em $\mathfrak{n}_\Theta^-$ é linear dada pela adjunta de elementos de Z_Θ (ou pelas diferenciais das translações em $\mathbb{F}_\Theta$, que se identifica com a ação adjunta em $\mathfrak{n}_\Theta^-$). Em termos da redução R_Θ a mesma construção fornece

$$T^f\mathbb{E}_\Theta = R_\Theta \times_{K_\Theta} T\mathbb{F}_\Theta \quad \text{e} \quad T^f_\sigma\mathbb{E}_\Theta = R_\Theta \times_{K_\Theta} \mathfrak{n}_\Theta^-.$$

Finalmente, podemos colocar uma métrica Riemanniana em $T^f_\sigma\mathbb{E}_\Theta$ a partir do produto interno $B_\theta(\cdot,\cdot)$ da álgebra de lie $\mathfrak{g}$, definido pela forma de Cartan-Killing e

pela involução de Cartan θ, pondo

$$\langle r \cdot X, r \cdot Y \rangle = B_\theta(X, Y), \ \ r \in R_\Theta, \ X, Y \in \mathfrak{n}_\Theta^-.$$

Essa métrica fica bem definida pois os elementos da forma $\mathrm{Ad}(u)$, com $u \in K$, são isometrias de B_θ.

A célula aberta de Bruhat ao redor da origem b_Θ de $\mathbb{F}_\Theta$ é dada por $N_\Theta^- b_\Theta$. Pondo $\mathbb{B}_\Theta = Q_\Theta \cdot N_\Theta^- b_\Theta$, temos que esse é um subconjunto aberto e denso em $\mathbb{E}_\Theta$

Defina

$$\Psi : Q_\Theta \times_{Z_\Theta} \mathfrak{n}_\Theta^- \to \mathbb{B}_\Theta, \quad \Psi(q \cdot X) = q \cdot (\exp X) b_\Theta, \quad q \in Q_\Theta, \ \ X \in \mathfrak{n}_\Theta^-. \tag{4.1}$$

A aplicação Ψ está bem definida pois se $q \cdot X = q' \cdot X'$ então existe $g \in Z_\Theta$ tal que $q' = q \cdot g$ e $X' = g^{-1} \cdot X = \mathrm{Ad}(g^{-1})X$. Daí segue que $q' \cdot \exp(X') = q' \cdot \exp(\mathrm{Ad}(g^{-1})X) b_\Theta = qg \cdot g^{-1} \exp(X) g b_\Theta = q \cdot \exp(X) b_\Theta$. Além disso, como a aplicação $X \in \mathfrak{n}_\Theta^- \mapsto (\exp X) b_\Theta$ é um difeomorfismo (proposição 3.6 de [8]), segue que Ψ é um homeomorfismo.

Denote por $\Phi : T_\sigma^f \mathbb{E}_\Theta \to T_\sigma^f \mathbb{E}_\Theta$ o automorfismo linear no fibrado tangente às fibras de $\mathbb{E}_\Theta$ ao longo de σ induzido pelo automorfismo $\phi : Q \to Q$. Isto é, $\Phi(q \cdot X) = \phi(q) \cdot X$, onde $q \in Q_\Theta$ e $X \in \mathfrak{n}_\Theta^-$.

Como o subfibrado Q_Θ é ϕ-invariante, segue que $\mathbb{B}_\Theta = Q_\Theta \cdot N_\Theta^- b_\Theta$ também é ϕ-invariante. Restringindo ϕ a $\mathbb{B}_\Theta$, temos que ϕ e Φ são conjugados pelo homeomorfismo Ψ, isto é,

$$\phi(\Psi(q \cdot X)) = \Psi(\Phi(q \cdot X)), \quad q \in Q_{\Theta_{\mathrm{Mo}}}, \ X \in \mathfrak{n}_\Theta^-.$$

De fato,

$$\phi(\Psi(q \cdot X)) = \phi(q \cdot (\exp X) b_\Theta) = \phi(q) \cdot (\exp X) b_\Theta = \Psi(\phi(q) \cdot X) = \Psi(\Phi(q \cdot X)).$$

Essa conjugação permite mostrar que, com a hipótese de que o linearizado Φ é uma contração, a imagem de σ é a componente de Morse atratora de ϕ em $\mathbb{E}_\Theta$.

Proposição 4.1.1. *Seja $\phi : Q \to Q$ um automorfismo do fibrado $Q \to X$, $\mathbb{E}_\Theta$ um fibrado flag associado e $\mathbb{E}_{\Theta^*}$ o fibrado flag dual. Suponha as seguintes condições:*

i. Existem seções ϕ-invariantes $\sigma : X \to \mathbb{E}_\Theta$ e $\sigma^* : X \to \mathbb{E}_{\Theta^*}$ que são opostas

ii. A aplicação induzida em $T_\sigma^f \mathbb{E}_\Theta$ (fibrado tangente às fibras de $\mathbb{E}_\Theta$ ao longo de σ) tem norma $\|\Phi\| < 1$.

Então imσ *é a componente de Morse atratora da decomposição de Morse mais fina de* ϕ *em* $\mathbb{E}_\Theta$.

Demonstração: Seja $B \subset T^f_\sigma \mathbb{E}_\Theta$ a bola unitária fechada e $A = \Psi(B)$ a imagem de B pela conjugação Ψ construída acima a partir das seções opostas dada na hipótese (*i.*). A hipótese (*ii.*) garante que A é uma vizinhança de imσ que é atratora para o automorfismo ϕ. De fato, seja $x = \Psi(v) \in A$, com $v \in B$. Os pontos de acumulação de $\Phi^n(v)$ estão na seção nula de $T^f_\sigma \mathbb{E}_\Theta$ pois $\|\Phi^n(v)\| \leq \|\Phi^n\| \leq \|\Phi\|^n \to 0$. Mas $\phi^n(x) = \phi^n(\Psi(v)) = \Psi(\Phi^n(v))$, mostrando que os pontos de acumulação de $\phi^n(x)$ estão em imσ.

Isso mostra que imσ é um conjunto atrator ϕ-invariante. Pela descrição das componentes da decomposição de Morse mais fina de ϕ, temos que a componente atratora deve ser a imagem da seção σ. □

4.2 Perturbação da componente de Morse atratora

A classificação das componentes de Morse de fluxos nos fibrados Flag $\mathbb{E}_\Theta$ induzidos por automorfismos $\phi : Q \to Q$, fornece o tipo parabólico do fluxo $\Theta_{\text{Mo}}(\phi)$ (ou apenas Θ_{Mo} se estiver claro no contexto o automorfismo ϕ). Denotamos ainda por ϕ a aplicação induzida na base X. No fibrado Flag de tipo Θ_{Mo} a componente de Morse atratora $\mathcal{M}^+_{\Theta_{\text{Mo}}}$ é a imagem de uma seção $\sigma_{\Theta_{\text{Mo}}} : X \to \mathbb{E}_{\Theta_{\text{Mo}}}$. Essa seção é invariante pelo automorfismo ϕ e, consequentemente, é um ponto fixo da aplicação no espaço de seções de $\mathbb{E}_{\Theta_{\text{Mo}}}$ dada por

$$\begin{array}{rccc} \Gamma\phi : & \Gamma\mathbb{E}_{\Theta_{\text{Mo}}} & \longrightarrow & \Gamma\mathbb{E}_{\Theta_{\text{Mo}}} \\ & \sigma & \longmapsto & \Gamma\phi(\sigma) = \phi \circ \sigma \circ \phi^{-1} \end{array}$$

O objetivo dessa seção é mostrar que perturbando ϕ por pequenos elementos do grupos de Calibre do fibrado Q, obtemos que a aplicação induzida no espaço de seções pelo automorfismo perturbado continua tendo um ponto fixo. Veremos também que tal ponto fixo será a seção que fornece a componente de Morse atratora desse fluxo.

Para colocar essas afirmações de forma precisa, vamos enunciar algumas proposições.

Lema 4.2.1. *Sejam* $\mathcal{H}$ *e* M *variedades diferenciáveis de Banach e* $p : \mathcal{H} \times M \to M$ *uma aplicação diferenciável. Denote por* $p_\gamma : M \to M$ *a aplicação* $p_\gamma(x) = p(\gamma, x)$.

Considere $\gamma_0 \in \mathcal{H}$ e $x_0 \in M$ tais que $p_{\gamma_0}(x_0) = x_0$ e suponha que $dp_{\gamma_0}(x_0) - id$ é inversível. Então existe uma vizinhança V de γ_0 e uma aplicação diferenciável $\chi : V \to M$ tal que para todo $\gamma \in V$, $\chi(\gamma)$ é ponto fixo de p_γ, isto é, $p_\gamma(\chi(\gamma)) = \chi(\gamma)$.

Demonstração: Tomando coordenadas locais ao redor de γ_0 e de x_0 podemos supor que $\mathcal{G}$ e M são abertos de espaços de Banach. Dessa forma, podemos definir a aplicação $f : \mathcal{G} \times M \to M$ por

$$f(\gamma, x) = p_\gamma(x) - x.$$

Por hipótese essa aplicação é diferenciável e $f(\gamma_0, x_0) = 0$. Além disso, a derivada de f com relação à segunda coordenada é dada por

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\gamma_0, x_0) = dp_{\gamma_0}(x_0) - id,$$

que, por hipótese, é inversível. Assim, pelo teorema da função implícita temos que existe uma vizinhança V de γ_0 e uma aplicação $\chi : V \to M$ tal que $f(\gamma, \chi(\gamma)) = 0$ para $\gamma \in V$, isto é, $p_\gamma(\chi(\gamma)) = \chi(\gamma)$ $\square$

Considere agora o grupo de calibre $\mathcal{G} = \mathcal{G}(Q)$ do fibrado Q e sua classe lateral

$$\mathcal{G}\phi = \{\gamma \circ \phi \,|\, \gamma \in \mathcal{G}\},$$

onde $\phi : Q \to Q$ é um automorfismo. Essa classe lateral é formada pelos automorfismos de Q que induzem na base a mesma aplicação que ϕ. Pela bijeção com o grupo de calibre, segue que $\mathcal{G}\phi$ é uma variedade de Banach. Cabe aqui a observação de que tanto faz considerar a classe lateral à direita ou à esquerda, já que o grupo de calibre é um subgrupo normal de $\mathrm{Aut}(Q)$, e daí $\phi\mathcal{G} = \mathcal{G}\phi$.

Vamos aplicar o lema 4.2.1 considerando $\mathcal{H} = \mathcal{G}\phi$, $M = \Gamma(Q \times_G F)$, $(\gamma_0, x_0) = (\phi, \sigma_{\Theta_{\mathrm{Mo}}})$ e

$$\begin{array}{rccc} p: & \mathcal{G}\phi \times \Gamma(Q \times_G F) & \longrightarrow & \Gamma(Q \times_G F) \\ & (\psi, \sigma) & \longmapsto & p(\psi, \sigma) = \psi \circ \sigma \circ \psi^{-1}. \end{array} \tag{4.2}$$

Para isso precisamos das proposições abaixo.

Proposição 4.2.2. *A aplicação $p : \mathcal{G}\phi \times \Gamma(Q \times_G F) \to \Gamma(Q \times_G F)$ definida acima é diferenciável*

Demonstração: As aplicações $d : \mathcal{G}\phi \to \mathcal{G}$ e $\Gamma\phi : \Gamma(Q \times_G F) \to \Gamma(Q \times_G F)$, dadas respectivamente por $d(\psi) = \psi \circ \phi^{-1}$ e $\Gamma\phi(\sigma) = \phi \circ \sigma \circ \phi^{-1}$ são diferenciáveis, e daí $d \times \Gamma\phi$ também é diferenciável. Agora a aplicação p é simplesmente a composta da ação de $\mathcal{G}$ em $\Gamma(Q \times_G F)$, que é diferenciável por 2.4.3, com $d \times \Gamma\phi$. □

Usando a notação do lema 4.2.1 para o caso em que p é a aplicação da proposição acima, temos que

$$p_\psi(\sigma) = \psi \circ \sigma \circ \psi^{-1} = \Gamma\psi(\sigma).$$

Para aplicar o lema resta mostrar que $d(\Gamma\phi)_{\sigma_{\Theta_{\mathrm{Mo}}}} - id$ é inversível.

Para fazer isso precisaremos do seguinte lema de uniformidade.

Lema 4.2.3. *Seja $\mathcal{V} \to X$ um fibrado vetorial contínuo com base X compacta e $\Phi : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ um automorfismo linear. Se a seção nula $\mathcal{V}^0$ for um atrator de Φ, então existe uma norma $\|\cdot\|$ em $\mathcal{V}$ e uma constante $\mu > 0$ tal que*

$$\|\Phi^n(v)\| \leq e^{-\mu n}\|v\|, \text{ para todo } v \in \mathcal{V} \text{ e } n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração: Seja $\|\cdot\|$ uma norma arbitrária em $\mathcal{V}$ (todas as normas são equivalentes em $\mathcal{V}$). Como $\mathcal{V}^0$ é um atrator, segue que existe uma vizinhança $\mathcal{U}$ de $\mathcal{V}^0$ tal que $\lim_{n\to\infty} \|\Phi^n(v)\| = 0$, para todo $v \in \mathcal{U}$. Mas para todo $v \in \mathcal{V}$, existe $\epsilon > 0$ tal que $\epsilon v \in \mathcal{U}$, e daí $\lim_{n\to\infty} \|\Phi^n(v)\| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\epsilon}\|\Phi^n(\epsilon v)\| = 0$. Pelo lema 5.2.7 de [7], existem constantes $C > 0$ e $\alpha > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, $\|\Phi^n(v)\| \leq Ce^{-\alpha n}\|v\|$. Pela proposição 3.2 de [5], segue que se $0 < \mu < \alpha$ então podemos escolher uma norma $\|\cdot\|^*$ em $\mathcal{V}$ tal que $\|\Phi^n(v)\|^* \leq e^{-\mu n}\|v\|^*$, para todo $v \in \mathcal{V}$ e $n \in \mathbb{N}$. □

A partir desse lema de uniformidade, podemos mostrar que, com uma determinada norma, a ação no espaço de seções $\Gamma\mathbb{E}_{\Theta_{\mathrm{Mo}}}$ é uma contração ao longo da componente de Morse atratora

Proposição 4.2.4. *Existe uma norma $\|\cdot\|$ em $T^f\mathbb{E}_{\Theta_{\mathrm{Mo}}}$ e $\mu > 0$ tal que para todo $v = q \cdot w \in T_\xi\left(\mathbb{E}_{\Theta_{\mathrm{Mo}}}\right)_x$, com $\xi = q \cdot b_{\Theta_{\mathrm{Mo}}} \in \mathcal{M}^+_{\Theta_{\mathrm{Mo}}}$, e $x = \pi(\xi)$ vale*

$$\|d^f\phi_\xi(v)\| \leq e^{-\mu}\|v\|.$$

Passando ao espaço de seções temos que

$$\|d(\Gamma\phi)_{\sigma_{\Theta_{\mathrm{Mo}}}}\| \leq e^{-\mu} < 1.$$

Demonstração: Construiremos primeiramente a norma nas fibras sobre a componente de Morse atratora $\mathcal{M}^+_{\Theta_{\mathrm{Mo}}} \subset \mathbb{E}_{\Theta_{\mathrm{Mo}}}$, isto é, em $T^f_{\sigma_{\Theta_{\mathrm{Mo}}}}\mathbb{E}_{\Theta_{\mathrm{Mo}}}$. Para isso considere $\Phi : T^f_{\sigma_{\Theta_{\mathrm{Mo}}}}\mathbb{E}_{\Theta_{\mathrm{Mo}}} \to T^f_{\sigma_{\Theta_{\mathrm{Mo}}}}\mathbb{E}_{\Theta_{\mathrm{Mo}}}$ a linearização de $\phi : \mathbb{E}_{\Theta_{\mathrm{Mo}}} \to \mathbb{E}_{\Theta_{\mathrm{Mo}}}$, como construída no começo do capítulo. Por hora iremos olhar $T^f_{\sigma_{\Theta_{\mathrm{Mo}}}}\mathbb{E}_{\Theta_{\mathrm{Mo}}}$ como fibrado vetorial sobre $\mathcal{M}^+_{\Theta_{\mathrm{Mo}}}$ (ou sobre X via identificação através da seção $\sigma_{\Theta_{\mathrm{Mo}}}$). A seção nula de $T^f_{\sigma_{\Theta_{\mathrm{Mo}}}}\mathbb{E}_{\Theta_{\mathrm{Mo}}}$ é a imagem da componente de Morse atratora $\mathcal{M}^+_{\Theta_{\mathrm{Mo}}}$ pela conjugação Ψ^{-1} entre ϕ e Φ, e logo é um atrator. Pelo lema anterior, existe uma constante $\mu > 0$ e uma norma $\|\cdot\|$ em $T^f_{\sigma_{\Theta_{\mathrm{Mo}}}}\mathbb{E}_{\Theta_{\mathrm{Mo}}}$ tal que

$$\|\Phi^n(v)\| \leq e^{-\mu n}\|v\| \text{ para todo } v \in T^f_{\sigma_{\Theta_{\mathrm{Mo}}}}\mathbb{E}_{\Theta_{\mathrm{Mo}}} = Q_{\sigma_{\Theta_{\mathrm{Mo}}}} \times_{Z_{\Theta_{\mathrm{Mo}}}} T_{b_{\Theta_{\mathrm{Mo}}}}\mathbb{F}_{\Theta_{\mathrm{Mo}}} \text{ e } n > 0.$$

Escrevendo $v = q \cdot w$ e $\xi = q \cdot b_{\Theta_{\mathrm{Mo}}}$, com $q \in Q_{\sigma_{\Theta_{\mathrm{Mo}}}}$, $w \in T_{b_{\Theta_{\mathrm{Mo}}}}\mathbb{F}_{\Theta_{\mathrm{Mo}}}$ temos que

$$d^f\phi_\xi(v) = d^f\phi_\xi(q \cdot w) = \phi(q) \cdot w = \Phi(q \cdot w) = \Phi(v).$$

Em particular para $n = 1$ temos

$$\|d^f\phi_\xi(v)\| \leq e^{-\mu}\|v\|$$

Isso nos fornece uma norma em $T^f_{\sigma_{\Theta_{\mathrm{Mo}}}}\mathbb{E}_{\Theta_{\mathrm{Mo}}}$, isto é, nas fibras de $T^f\mathbb{E}_{\Theta_{\mathrm{Mo}}}$ sobre $\mathcal{M}^+_{\Theta_{\mathrm{Mo}}}$. Agora $\mathcal{M}^+_{\Theta_{\mathrm{Mo}}}$ é um subconjunto compacto de $\mathbb{E}_{\Theta_{\mathrm{Mo}}}$, e logo podemos estender a norma definida nas fibras sobre $\mathcal{M}^+_{\Theta_{\mathrm{Mo}}}$ para uma norma definida em $\mathbb{E}_{\Theta_{\mathrm{Mo}}}$. (por exemplo, usando o lema de Urysohn) □

Lema 4.2.5. *Se T é um operador num espaço de Banach tal que $\|T\| < 1$ então $T - I$ é inversível.*

Demonstração: Como $\|T\| < 1$, a série $S = \sum_{i=0}^{\infty} T^i$ converge absolutamente. É fácil ver que $(I - T)S = S(I - T) = I$ □

Agora estamos prontos para mostrar que aplicações induzidas no espaço de seções $\Gamma\mathbb{E}_{\Theta_{\mathrm{Mo}}}$ por pequenas perturbações de ϕ por elementos do grupo de calibre de Q possuem pontos fixos, isto é, seções invariantes. Além disso, essas seções dependem diferenciavelmente do automorfismo de calibre.

Proposição 4.2.6. *Existe uma vizinhança V da identidade no grupo de calibre $\mathcal{G}(Q)$ e uma aplicação C^∞, $\gamma \in V \to \sigma_\gamma \in \Gamma\mathbb{E}_{\Theta_{\mathrm{Mo}}}$ tal que σ_γ é ponto fixo da aplicação em $\Gamma\mathbb{E}_{\Theta_{\mathrm{Mo}}}$ induzida pelo automorfismo $\gamma \circ \phi$, isto é,*

$$\Gamma(\gamma \circ \phi)(\sigma_\gamma) = \sigma_\gamma.$$

Demonstração: A aplicação $p : \mathcal{G}\phi \times \Gamma(Q \times_G F) \to \Gamma(Q \times_G F)$ da proposição 4.2.2 é diferenciável. Como $p_\phi(\sigma) = \phi \circ \sigma \circ \phi^{-1} = \Gamma\phi(\sigma)$, a derivada de p_ϕ em σ é dada por $d(\Gamma\phi)_\sigma$. Pela proposição 4.2.4 e pelo lema 4.2.5, segue que a $d(\Gamma\phi)_{\sigma_{\Theta_{\mathrm{Mo}}}} - id$ é inversível, e daí, pelo lema 4.2.1 segue o resultado. □

Vamos ver agora que para γ suficientemente próximo da identidade, a seção σ_γ dada pela proposição acima fornece a componente de Morse atratora do automorfismo $\gamma \circ \phi$. Feito isso poderemos mostrar que os expoentes de Lyapunov de automorfismos próximos de ϕ são dados por integrais em relação a medidas que variam analiticamente.

Proposição 4.2.7. *Existe uma vizinhança V da identidade do grupo de calibre e uma aplicação diferenciável $\gamma \in V \mapsto \sigma_\gamma \in \Gamma\mathbb{E}_{\Theta_{\mathrm{Mo}}}$ (como na proposição anterior) tal que $\mathrm{im}(\sigma_\gamma) \subset \mathbb{E}_{\Theta_{\mathrm{Mo}}}$ é a componente de Morse atratora da decomposição de Morse mais fina para o automorfismo $\gamma \circ \phi$.*

Demonstração: Seja Θ_{Mo} o tipo parabólico de ϕ e Θ^*_{Mo} o seu dual, que fornece o tipo parabólico de ϕ^{-1}. Considere $\sigma_{\Theta_{\mathrm{Mo}}} : X \to \mathbb{E}_{\Theta_{\mathrm{Mo}}}$ e $\sigma_{\Theta^*_{\mathrm{Mo}}} : X \to \mathbb{E}_{\Theta^*_{\mathrm{Mo}}}$ as seções opostas que fornecem as componentes de Morse atratoras de ϕ e ϕ^{-1} respectivamente. Aplicando a proposição 4.2.6 à ϕ^{-1} e $\sigma_{\Theta^*_{\mathrm{Mo}}}$, obtemos uma vizinhança V' da identidade em $\mathcal{G}$ e uma aplicação diferenciável

$$\gamma' \in V' \mapsto \sigma^*_{\gamma'} \in \Gamma\mathbb{E}_{\Theta^*_{\mathrm{Mo}}},$$

tal que $\sigma^*_{\gamma'}$ é $(\gamma'^{-1} \circ \phi^{-1})$-invariante. Como γ' e ϕ são automorfismos, a seção $\sigma^*_{\gamma'}$ é também invariante por $(\gamma'^{-1} \circ \phi^{-1})^{-1} = \phi \circ \gamma'$. Escrevendo

$$V = \phi V' \phi^{-1} = \{\phi \circ \eta' \circ \phi^{-1} \mid \eta' \in V'\},$$

temos que V ainda é vizinhança da identidade de $\mathcal{G}$ e $\sigma^*_{\gamma'}$ é $(\gamma \circ \phi)$-invariante, onde $\gamma = \phi \circ \gamma' \circ \phi^{-1} \in V$. Por conveniência denotaremos a seção $\sigma^*_{\gamma'}$ por σ^*_γ. Assim construímos aplicações diferenciáveis

$$\gamma \in V \mapsto \sigma_\gamma \in \Gamma\mathbb{E}_{\Theta_{\mathrm{Mo}}} \quad \text{e} \quad \gamma \in V \mapsto \sigma^*_\gamma \in \Gamma\mathbb{E}_{\Theta^*_{\mathrm{Mo}}}$$

tais que σ_γ e σ^*_γ são $(\gamma \circ \phi)$-invariantes e tais que $\sigma_1 = \sigma_{\Theta_{\mathrm{Mo}}}$ e $\sigma^*_1 = \sigma_{\Theta^*_{\mathrm{Mo}}}$, onde 1 denota a identidade de $\mathcal{G}$.

Como σ_1 e σ_1^* são seções opostas, pode-se diminuir a vizinhança V para que σ_γ e σ_γ^* ainda sejam opostas para $\gamma \in V$. De fato, sejam $f_{\sigma_\gamma} \in \mathcal{C}_{eq}(R, \mathbb{F}_{\Theta_{\mathrm{Mo}}})$ e $f_{\sigma_\gamma^*} \in \mathcal{C}_{eq}(R, \mathbb{F}_{\Theta^*_{\mathrm{Mo}}})$ as seções equivariantes associadas a σ_γ e σ_γ^* e ponha $U = G \cdot (b_{\Theta_{\mathrm{Mo}}}, w_0 b_{\Theta^*_{\mathrm{Mo}}}) \subset \mathbb{F}_{\Theta_{\mathrm{Mo}}} \times \mathbb{F}_{\Theta^*_{\mathrm{Mo}}}$ a órbita aberta e densa que fornece as subálgebras opostas. Então $f_{\sigma_1} \times f_{\sigma_1^*}$ está no aberto $\mathcal{C}_{eq}(R, U) \subset \mathcal{C}_{eq}(R, \mathbb{F}_{\Theta_{\mathrm{Mo}}} \times \mathbb{F}_{\Theta^*_{\mathrm{Mo}}})$ e, como $\gamma \in V \mapsto f_{\sigma_\gamma} \times f_{\sigma_\gamma^*} \in \mathcal{C}_{eq}(R, \mathbb{F}_{\Theta_{\mathrm{Mo}}} \times \mathbb{F}_{\Theta^*_{\mathrm{Mo}}})$ é contínua (na verdade, é diferenciável), pode-se diminuir V para que a imagem fique dentro de $\mathcal{C}_{eq}(R, U)$. Daí teremos $\sigma_\gamma(x) = r \cdot f_{\sigma_\gamma}(r)$ e $\sigma_\gamma^*(x) = r \cdot f_{\sigma_\gamma^*}(r)$ opostas para todo $\gamma \in V$.

Utilizando a norma da proposição 4.2.4, como $\|d^f \phi_\xi\| < 1$ para todo $\xi \in \mathrm{im}\sigma_1 = \mathcal{M}^+_{\Theta_{\mathrm{Mo}}}$, por continuidade podemos diminuir V de forma que $\|d^f(\gamma \circ \phi)_\xi\| < 1$ para todo $\xi \in \mathrm{im}\sigma_\gamma$. Assim, para $\gamma \in V$, σ_γ e σ_γ^* satisfazem as hipóteses da proposição 4.1.1, e então $\mathrm{im}\sigma_\gamma \subset \mathbb{E}_{\Theta_{\mathrm{Mo}}}$ é a componente de Morse atratora da decomposição de Morse mais fina de $\gamma \circ \phi$. □

4.3 O tipo parabólico de Lyapunov e as componentes de Morse

Mostraremos abaixo uma relação entre as componentes de Lyapunov e as componentes de Morse para o fluxo. Por hora, mostraremos apenas que as componentes de Lyapunov estão contidas nas componentes de Morse. Em [1] existe uma descrição mais precisa de quando os tipos parabólicos coincidem.

O teorema abaixo fornece uma primeira estimativa para os expoentes de Lyapunov vetoriais ao longo da componente de Morse atratora. Esse teorema foi demonstrado em [20]. Apresentaremos aqui a demonstração apenas para adequar a notação com os problemas que estamos tratando.

Teorema 4.3.1. *Se $\xi \in \mathcal{M}^+$ é um ponto regular, isto é, se existe o expoente de Lyapunov $\lambda(\xi)$, então existe $\mu > 0$ tal que*

$$\alpha(\lambda(\xi)) \geq \mu, \quad \forall \alpha \in \Pi^+ \backslash \langle \Theta_{\mathrm{Mo}} \rangle \tag{4.3}$$

Demonstração: Seja $\Theta = \Theta_{\mathrm{Mo}}$. Lembramos que a componente de Morse atratora $\mathcal{M}^+$ é dada a partir da Z_Θ redução $Q_\Theta \subset Q$ (ou da K_Θ-redução compacta $R_\Theta \subset R$) na forma

$$\mathcal{M}^+ = Q_\Theta \cdot b_0 = R_\Theta \cdot b_0, \ \ b_0 \text{ origem de } \mathbb{F}.$$

O fibrado Q_Θ é invariante por ϕ e sua decomposição de Iwasawa fornece $Q_\Theta = R_\Theta \cdot AN(\Theta)$. Se $\xi = r \cdot b_0 \in \mathcal{M}^+$ então $\phi^k(r) = r_k \cdot a_k n_k \in R_\Theta \cdot AN(\Theta)$, $r \in R_\Theta$. O cociclo aditivo que fornece os expoentes de Lyapunov é dado por

$$\mathsf{a}(k, \xi) = \log a_k$$

Além disso, com a identificação do espaço tangente $T_{b_\Theta}\mathbb{F}_\Theta$ com $\mathfrak{n}_\Theta^-$, temos que o fibrado tangente às fibras de $\mathbb{E}_\Theta$ ao longo da componente de Morse atratora $\mathcal{M}_\Theta^+ = \sigma_\Theta(X)$ é dado por

$$T^f_{\sigma_\Theta}\mathbb{E}_\Theta = R_\Theta \times_{K_\Theta} \mathfrak{n}_\Theta^-,$$

e a métrica Riemanniana construída a partir forma de Cartan-Killing em $\mathfrak{g}$ é $\mathrm{Ad}(K)$-invariante. Assim, se $v = r \cdot Y \in T^f_{\sigma_\Theta}\mathbb{E}_\Theta$, com $r \in R_\Theta$ e $Y \in \mathfrak{n}_\Theta^-$ então $\|v\| = \|Y\|_\theta = B_\theta(Y, Y)^{1/2}$.

Como $N(\Theta)$ centraliza $\mathfrak{n}_\Theta^-$, temos ainda que $\mathrm{Ad}(n_k)Y = Y$ e

$$\|\Phi_k(v)\| = \|\phi_k(r) \cdot Y\| = \|r_k \cdot \mathrm{Ad}(a_k n_k)Y\| = \|\mathrm{Ad}(a_k)Y\|_\theta,$$

donde segue que $\|\Phi_k\| = \|\mathrm{Ad}(a_k)|_{\mathfrak{n}_\Theta^-}\|$. Com isso a norma do operador Φ_k é dada pelo maior autovalor de $\mathrm{Ad}(a_k)|_{\mathfrak{n}_\Theta^-}$. Mas em $\mathfrak{n}_\Theta^-$ o operador $\mathrm{Ad}(a_k)$ é diagonalizável com autovalores dados por $e^{-\alpha(\log a_k)}$, com $\alpha \in \Pi^+ \backslash \langle\Theta\rangle$, e assim

$$-\alpha(\mathsf{a}(k, \xi)) = -\alpha(\log a_k) \leq \log \|\Phi_k\|, \;\; \alpha \in \alpha \in \Pi^+ \backslash \langle\Theta\rangle. \tag{4.4}$$

Por outro lado, como a seção nula de $T^f_{\sigma_\Theta}\mathbb{E}_\Theta$ é atratora (imagem da componente de Morse atratora pela linearização), segue que existem constantes $C > 0$ e $\mu > 0$ tais que $\|\Phi_k\| \leq Ce^{-\mu k}$. Aplicando o logaritmo nessa desigualdade e utilizando a relação (4.4) segue, tomando limites, que

$$\alpha(\lambda(\xi)) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}\alpha(\mathsf{a}(k, \xi)) \geq -\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \log \|\Phi_k\| \geq -\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \log(Ce^{-\mu k}) = \mu$$

□

Segue desse teorema que o tipo parabólico de Lyapunov é mais regular que o tipo parabólico do fluxo.

Proposição 4.3.2. *Para cada $x \in X$ regular, $\Theta_{\mathrm{Ly}}(x) \subset \Theta_{\mathrm{Mo}}$.*

Demonstração: Seja $\Lambda^+(x) \in \mathrm{cl}\mathfrak{a}^+$ o expoente polar em $x \in X$. Então por definição

$$\Theta_{Ly}(x) = \{\alpha \in \Sigma \mid \alpha(\Lambda^+(x)) = 0\}.$$

Lembramos ainda que $\Lambda^+(x) = \lim \frac{1}{k} \log h_k$, com h_k obtido da decomposição polar de $s_k = v_k h_k v_k^{-1} \in K(\mathrm{cl}A^+)K$, que por sua vez foi obtido da decomposição de Cartan de $\phi_k(r) = r_k \cdot s_k \in R \cdot S$. Agora se escolhermos $r \in R_{\Theta_{\mathrm{Mo}}} = Q_{\Theta_{\mathrm{Mo}}} \cap R$, então $\phi_k(r) \in Q_{\Theta_{\mathrm{Mo}}}$ e com isso refinamos as escolhas acima obtendo $s_k \in S \cap Z_{\Theta_{\mathrm{Mo}}}$ e $v_k \in K_{\Theta_{\mathrm{Mo}}} = K \cap Z_{\Theta_{\mathrm{Mo}}}$. Agora pelo teorema ergódico multiplicativo vetorial (teorema 3.2.3) temos que $\Lambda^+(r)$ é o expoente de Lyapunov em $\xi = r \cdot b$, onde $r \in R_{\Theta_{\mathrm{Mo}}}$, $b \in u \cdot \mathrm{st}(\Lambda^+(r), 1)$ e $u = \lim v_k \in K_{\Theta_{\mathrm{Mo}}}$. Em particular, como a origem $b_0 \in \mathrm{st}(\Lambda^+(r), 1)$ e $ru \in R_{\Theta_{\mathrm{Mo}}}$, temos que $\Lambda^+(r) = \lambda(\xi)$, com $\xi = ru \cdot b_0 \in \mathcal{M}^+$. Agora como $\xi \in \mathcal{M}^+$ e $\Theta_{Ly}(x) = \{\alpha \in \Sigma \mid \alpha(\lambda(\xi)) = 0\}$, segue do teorema acima que $\Theta_{Ly}(x) \subset \Theta_{\mathrm{Mo}}$. □

A demonstração da proposição acima mostrou, em particular, que o expoente polar $\Lambda^+(x)$ é o expoente de Lyapunov de um elemento ξ da componente de Morse atratora $\mathcal{M}^+$. Isso pode ser refinado mostrando que os pontos fixos da seção de Oseledet $\chi_{\mathrm{Ly}}(x)$ estão contidos nas componentes de Morse.

Proposição 4.3.3. *Para todo $w \in \mathcal{W}$, temos*

$$\mathrm{fix}(\chi_{\mathrm{Ly}}(x), w) \subset \mathcal{M}(w)$$

Demonstração: Ver [2] para o contexto dos fibrados Flag e corolário 5.5.17 de [7] para fluxos em fibrados vetoriais. □

Capítulo 5

Diferenciabilidade dos Expoentes

Neste capítulo demonstramos o resultado principal desta tese sobre a regularidade dos expoentes de Lyapunov. A estratégia para demonstrar o resultado é escrever a integral do expoente polar do fluxo como uma integral dos cociclos aditivos que definem os expoentes de Lyapunov vetoriais com relação à uma medida no fibrado flag que se projeta sobre a medida invariante na base.

A primeira seção mostra que os cociclos aditivos provenientes da decomposição de Iwasawa dependem analiticamente das perturbações pelo grupo de calibre. Na segunda seção mostramos como escrever a integral do expoente polar a partir de medidas no fibrado flag que variam diferenciavelmente, ou melhor, que estão suportadas em seções que variam diferenciavelmente. Essencialmente essas medidas serão as mesmas medidas da base X levadas ao fibrado via a seção que fornece a componente de Morse atratora. A analiticidade será concluída então a partir dos resultados sobre a perturbação das componentes de Morse obtidos no capítulo anterior.

5.1 Diferenciabilidade dos cociclos aditivos

O objetivo aqui é mostrar que os cociclos aditivos definidos nos fibrados Flag parciais definidos na seção 3.2.1 dependem diferenciavelmente do automorfismo $\phi : Q \to Q$.

Para isso, lembramos que dado o automorfismo $\phi : Q \to Q$, definimos o cociclo $\mathsf{a}^{\phi}(n, r)$, $r \in R$, pela A-componente da decomposição de Iwasawa de $\phi^n(r)$. Tomando um automorfismo de calibre $\gamma \in \mathcal{G}$, obtemos o cociclo $\mathsf{a}^{\gamma\phi}(n, r)$ associado ao

automorfismo $\gamma\phi$. Isso dá origem à aplicação

$$\begin{array}{rccc} Z^{\phi}: & \mathcal{G} & \longrightarrow & \mathcal{C}(R,\mathfrak{a}) \\ & \gamma & \longmapsto & \mathsf{a}^{\gamma\phi}(1,\cdot) \end{array}. \tag{5.1}$$

Tanto $\mathcal{G}$ quanto $\mathcal{C}(R,\mathfrak{a})$ possuem uma estrutura diferenciável modelada em espaço de Banach. A estrutura de $\mathcal{G}$ foi feita na seção 2.4 e $\mathcal{C}(R,\mathfrak{a})$ é espaço de Banach com a norma do supremo. Assim podemos falar da diferenciabilidade de Z^{ϕ}.

Antes de demonstrarmos a diferenciabilidade dessa aplicação, vejamos um lema simples

Lema 5.1.1. *Sejam ϕ_1 e ϕ_2 automorfismos de Q. Então*

$$\mathsf{a}^{\phi_1\phi_2}(1,r) = \mathsf{a}^{\phi_1}(1,\phi_2^R(r)) + \mathsf{a}^{\phi_2}(1,r)$$

Demonstração: Escreva $\phi_2(r) = \phi_2^R(r)\cdot h_2 n_2$ e $\phi_1\left(\phi_2^R(r)\right) = \phi_1^R(\phi_2^R(r))\cdot h_1 n_1$. Então

$$\phi_1(\phi_2(r)) = \phi_1^R(\phi_2^R(r))\cdot h_1 n_1 h_2 n_2 = \phi_1^R(\phi_2^R(r))\cdot h_1 h_2 n_1' n_2,$$

onde $n_1' = h_2^{-1} n_1 h_2$ está em N pois A normaliza N. Daí segue que

$$\mathsf{a}^{\phi_1\phi_2}(1,r) = \log(h_1 h_2) = \log h_1 + \log h_2 = \mathsf{a}^{\phi_1}(1,\phi_2^R(r)) + \mathsf{a}^{\phi_2}(1,r)$$

□

Proposição 5.1.2. *A aplicação $Z^{\phi}: \mathcal{G} \to \mathcal{C}(R,\mathfrak{a})$ é de classe C^{∞}.*

Demonstração: Considere o mergulho i do grupo de calibre $\mathcal{G}$ em $\mathcal{C}(R,F)$

$$\begin{array}{rccc} i: & \mathcal{G} & \longrightarrow & \mathcal{C}(R,G) \\ & \gamma & \longmapsto & f_{\gamma} \end{array},$$

onde $\gamma(r) = r f_{\gamma}(r)$.

Dada a decomposição de Iwasawa $G = KAN$, a projeção $\mathsf{A}: G \to A$ é C^{∞}. Pela proposição 2.2.2, A induz uma aplicação C^{∞}, $\mathcal{A}: \mathcal{C}(R,G) \to \mathcal{C}(R,A)$, pondo

$$\mathcal{A}(f) = \mathsf{A}\circ f.$$

Pela definição do cociclo $\mathsf{a}(n,r)$ sobre o fibrado $R \subset Q$, temos que

$$\mathsf{a}^{\gamma}(1,r) = \log\left(\mathcal{A}(i(\gamma))(r)\right), \quad r \in R.$$

Portanto, a aplicação

$$\begin{array}{rccc} Z: & \mathcal{G} & \longrightarrow & \mathcal{C}(R,\mathfrak{a}) \\ & \gamma & \longmapsto & \mathsf{a}^{\gamma}(1,\cdot) \end{array} \tag{5.2}$$

é C^{∞}.

Para a aplicação $Z^{\phi}(\gamma) = \mathsf{a}^{\gamma\phi}(1,\cdot)$, segue do lema 5.1.1 que

$$\mathsf{a}^{\gamma\phi}(1,r) = \mathsf{a}^{\gamma}\left(1,\phi^{R}(r)\right) + \mathsf{a}^{\phi}(1,r), \quad r \in R. \tag{5.3}$$

Essa fórmula diz que a aplicação Z^{ϕ} é a composta da aplicação Z com a transformação afim em $\mathcal{C}(R,\mathfrak{a})$ dada por

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(R,\mathfrak{a}) & \longrightarrow & \mathcal{C}(R,\mathfrak{a}) \\ f & \longmapsto & f\circ\phi^{R} + \mathsf{a}^{\phi}(1,\cdot) \end{array}. \tag{5.4}$$

Mas a transformação linear $f \in \mathcal{C}(R,\mathfrak{a}) \mapsto f\circ\phi^{R} \in \mathcal{C}(R,\mathfrak{a})$ é uma isometria, e assim a transformação afim (5.4) é C^{∞}, completando a demonstração de que Z^{ϕ} é C^{∞}. □

Fixe $\alpha : \mathfrak{a} \to V$ uma transformação linear que se anula em $\mathfrak{a}(\Theta)$. Compondo o cociclo $\mathsf{a}(n,r)$ com α obtemos um cociclo aditivo em $\mathbb{E}_{\Theta}$ a valores em V (equação 3.6). Denotaremos esse cociclo por

$$\mathsf{a}^{\phi}_{\alpha}(n,\xi) = \alpha\circ\mathsf{a}^{\phi}(n,\xi), \ \ \xi \in \mathbb{E}_{\Theta}.$$

Compondo ϕ com um automorfismo $\gamma : Q \to Q$ no grupo de calibre $\mathcal{G}(Q)$ temos um novo cociclo $\mathsf{a}^{\gamma\phi}_{\alpha}(n,\xi) \in V$ associado à $\gamma\phi$. Com isso temos a aplicação

$$\begin{array}{rccc} Z^{\phi}_{\alpha}: & \mathcal{G} & \longrightarrow & \mathcal{C}(\mathbb{E}_{\Theta},V) \\ & \gamma & \longmapsto & \mathsf{a}^{\gamma\phi}_{\alpha}(1,\cdot) \end{array}.$$

Proposição 5.1.3. *A aplicação $Z^{\phi}_{\alpha} : \mathcal{G} \to \mathcal{C}(\mathbb{E}_{\Theta},V)$ é de classe C^{∞}*

Demonstração: Compondo $Z^{\phi} : \mathcal{G} \to \mathcal{C}(R,\mathfrak{a})$ com α obtemos a aplicação C^{∞}

$$\gamma \in \mathcal{G} \longmapsto \alpha\circ\mathsf{a}^{\gamma\phi}(1,\cdot) \in \mathcal{C}(R,V). \tag{5.5}$$

A aplicação Z^{ϕ}_{α} é obtida de (5.5) apenas passando o quociente, já que

$$\alpha\circ\mathsf{a}^{\gamma\phi}(1,r\cdot b) = \alpha\circ\mathsf{a}^{\gamma\phi}(1,r) \quad \text{para todo } b \in \mathbb{F}_{\Theta}.$$

Assim Z^{ϕ}_{α} é C^{∞}. □

5.2 Diferenciabilidade dos expoentes de Lyapunov

Considere a partir de agora uma medida de probabilidade ν na base invariante pelo fluxo induzido em X. Pelo teorema ergódico multiplicativo (teorema 3.2.3), para ν quase todo ponto existe o expoente polar $\Lambda^+_\phi(x) \in \mathrm{cl}(\mathfrak{a}^+)$. O mesmo ocorre com $\gamma\phi$ no lugar de ϕ, com γ no grupo de calibre $\mathcal{G}(Q)$, já que $\gamma\phi$ induz na base o mesmo fluxo que ϕ. Mais ainda, como os expoentes $\Lambda^+_{\gamma\phi}$ são obtidos a partir de uma aplicação do teorema ergódico subaditivo, segue que as funções $x \mapsto \Lambda^+_{\gamma\phi}(x)$ são ν-integráveis.

O objetivo final desta tese é demonstrar o seguinte teorema:

Teorema 5.2.1. *Seja Θ_{Mo} o tipo parabólico do automorfismo ϕ e tome $\alpha \in \mathfrak{a}^*$ que se anula em $\mathfrak{a}(\Theta_{\mathrm{Mo}})$ (de tal forma que ficam bem definidos os cociclos $\alpha \circ \mathsf{a}^{\gamma\phi}(n,\xi)$, com $\xi \in \mathbb{E}_{\Theta_{\mathrm{Mo}}}$). Então a aplicação*

$$\gamma \in \mathcal{G} \longmapsto \int_X \alpha\left(\Lambda^+_{\gamma\phi}(x)\right)\nu(dx) \in \mathbb{R} \tag{5.6}$$

é de classe C^∞.

A estratégia para demonstrar esse teorema é escrever a integral em (5.6) como a integral dos cociclos $\mathsf{a}^{\gamma\phi}_\alpha(1,\cdot) = \alpha \circ \mathsf{a}^{\gamma\phi}(1,\cdot) \in \mathcal{C}(\mathbb{E}_{\Theta_{\mathrm{Mo}}}, \mathbb{R})$ com relação a uma medida em $\mathbb{E}_{\Theta_{\mathrm{Mo}}}$ suportada na imagem da seção σ_γ, ou seja, na componente de Morse atratora de $\gamma \circ \phi$.

Para fazer isso, lembramos que pelas relações entre o tipo parabólico de Lyapunov e o tipo parabólico (de Morse) do fluxo (seção 4.3)(proposição 4.3.3), segue que as componentes de Oseledets contém os pontos fixos da seção de Oseledets $\chi(x) \in Q \times \mathrm{Ad}(G)\Lambda^+(x)$, ou melhor, da função equivariante h_{Ly} (proposição 4.3.3). De forma precisa temos:

$$\mathrm{fix}(\chi(x), w) = q \cdot \mathrm{fix}(h_{Ly}(q), w) \subset \mathrm{st}(x, w)$$

Aquelas relações mostram ainda que

$$\mathrm{fix}(\chi(x), w) \subset \mathcal{M}(w).$$

Em particular $\mathrm{fix}(\chi(x), 1) \subset \mathcal{M}^+$.

Lembramos ainda que os expoentes de Lyapunov em cada componente são dados pelos cociclos aditivos definidos a partir da decomposição de Iwasawa do fluxo. Mais especificamente, se $\xi \in \mathrm{st}(x, w)$ então

$$\lim \frac{1}{n}\mathsf{a}(n, \xi) = w^{-1}\Lambda^+(x).$$

O mesmo vale para o fibrado flag parcial $\mathbb{E}_\Theta$ se considerarmos o cociclo dado por $\mathsf{a}_\alpha(n,\xi) = \alpha(\mathsf{a}(n,\xi))$, onde $\alpha \in \mathfrak{a}^*$ é um funcional que se anula em $\mathfrak{a}(\Theta)$. Neste caso temos que se $\xi \in \mathrm{st}_\Theta(x,w)$ então

$$\lim \frac{1}{n}\mathsf{a}_\alpha(n,\xi) = \alpha\left(w^{-1}\Lambda^+(x)\right).$$

Escolhendo agora $\Theta \supset \Theta_{\mathrm{Mo}}$ e $w = 1$, temos que a componente de Morse atratora $\mathcal{M}^+_\Theta$ é a imagem de uma seção $\sigma_\Theta : X \to \mathbb{E}_\Theta$. Como $\mathrm{fix}(\chi(x),1) \subset \mathcal{M}^+$, segue que $\mathrm{fix}_\Theta(\chi(x),1) \subset \mathcal{M}^+_\Theta$ e daí

$$\mathrm{fix}_\Theta(\chi(x),1) = \sigma_\Theta(x).$$

Combinando isso com o teorema ergódico multiplicativo vetorial temos a seguinte proposição

Proposição 5.2.2. *Seja $\Theta_{\mathrm{Mo}} \subset \Theta$ e considere $\alpha \in \mathfrak{a}^*$ que se anula em $\mathfrak{a}(\Theta)$. Considere ainda $\sigma_\Theta : X \to \mathbb{E}_\Theta$ a seção que fornece a componente de Morse atratora de ϕ. Então para ν-quase todo $x \in X$ temos*

$$\lim \frac{1}{n}\mathsf{a}_\alpha(n,\sigma_\Theta(x)) = \alpha(\Lambda^+(x))$$

Seja ν_Θ a medida em $\mathbb{E}_\Theta$ suportada na imagem de σ_Θ induzida pela medida ν na base X, isto é, $\nu_\Theta = \sigma_\Theta \cdot \nu$. Mais precisamente, para um subconjunto mensurável $A \subset \mathbb{E}_\Theta$,

$$\nu_\Theta(A) = \nu(\sigma_\Theta^{-1}(A)).$$

Proposição 5.2.3. *Considere Θ, α e σ_Θ como na proposição anterior e seja ν_Θ a medida em $\mathbb{E}_\Theta$ construída acima. Então*

$$\int \alpha\left(\Lambda^+(x)\right)\nu(dx) = \int \mathsf{a}_\alpha(1,\xi)\nu_\Theta(d\xi).$$

Demonstração: Considere a função $f(\xi) = \mathsf{a}_\alpha(1,\xi)$. Pelo teorema ergódico de Birkhoff, para ν_Θ-quase todo $\xi \in \mathbb{E}_\Theta$ existe o limite da média

$$\widetilde{f}(\xi) = \lim_n \frac{1}{n}\left(f(\xi) + f(\phi(\xi)) + \cdots + f(\phi^{n-1}(\xi))\right) = \lim_n \frac{1}{n}\mathsf{a}_\alpha(n,\xi),$$

onde a última igualdade segue do fato de $\mathsf{a}_\alpha(n,\xi)$ ser um cociclo aditivo. O teorema de Birkhoff ainda fornece que a integral da média $\widetilde{f}$ é

$$\int \widetilde{f}(\xi)\nu_\Theta(d\xi) = \int f(\xi)\nu_\Theta(d\xi) = \int \mathsf{a}_\alpha(1,\xi)\nu_\Theta(d\xi).$$

Mas como a medida ν_Θ está suportada na imagem de σ_Θ, temos pela proposição 5.2.2 que $\lim_n \frac{1}{n}\mathsf{a}_\alpha(n,\xi) = \alpha(\Lambda^+(x))$ para ν_Θ-quase todo ξ e então

$$\int \alpha(\Lambda^+(x))\nu(dx) = \int \lim_n \frac{1}{n}\mathsf{a}_\alpha(n,\xi)\nu_\Theta(d\xi) = \int \widetilde{f}(\xi)\nu_\Theta(d\xi),$$

de onde segue o desejado □

5.2.1 Variação das medidas suportadas na componente de Morse atratora

Para concluir a prova do teorema 5.2.1, vamos ver abaixo como se comportam as medidas ν_Θ suportadas na componente de Morse atratora em $\mathbb{E}_\Theta$ de automorfismos próximos de ϕ perturbados pela ação do grupo de calibre $\mathcal{G}(Q)$.

Lema 5.2.4. *Sejam M e N variedades de Banach, $f : M \to N$ de classe C^k e suponha que em $x_0 \in M$ tem-se $f(x_0) = y_o$ e $df(x_o) : T_{x_0}M \to T_{y_0}N$ sobrejetora. Suponha ainda que o núcleo $\ker(df(x_0))$ seja complementável, i.é., existe um subespaço fechado $V \subset T_{x_0}M$ tal que $T_{x_0}M = \ker(df(x_0)) \oplus V$. Então existe uma função $\chi : U \to M$ de classe C^k, definida numa vizinhança U de y_0 em N tal que $\chi(y_0) = x_0$ e $f(\chi(y)) = y$ para todo $y \in A$*

Demonstração: Tomando coordenadas locais, podemos assumir que M e N são espaços de Banach. Além disso, como o núcleo $\ker(df(x_0))$ é complementável e $df(x_0) : M \to N$ é sobrejetora temos que $M = \ker(df(x_0)) \times V$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0) : V \to N$ é um isomorfismo. Escreva $x_0 = (a_0, b_0)$. Assim, pelo teorema da função inversa, $f|_{\{a_0\}\times V} : V \to N$ é um difeomorfismo local numa vizinhança de $b_0 \in V$. Logo, existe $\beta : U \to V$ de classe C^k de uma vizinhança U de $y_0 \in N$ tal que $\beta(y_0) = b_0$ e $f(a_0, \beta(y)) = y$ para todo $y \in U$. Definindo $\chi(y) = (a_0, \beta(y))$ temos a aplicação desejada □

Considerando a ação C^∞ do grupo de calibre $\mathcal{G}(Q)$ no espaço das seções $\Gamma\mathbb{E}_\Theta$, temos que para cada $\sigma \in \Gamma\mathbb{E}_\Theta$ a aplicação

$$\gamma \in \mathcal{G}(Q) \mapsto \gamma \circ \sigma \in \Gamma\mathbb{E}_\Theta \tag{5.7}$$

é de classe C^∞. Assim podemos aplicar o lema acima e obter a seguinte proposição

Proposição 5.2.5. *Dada uma seção $\sigma \in \Gamma\mathbb{E}_\Theta$, existe uma vizinhança V de σ e uma aplicação diferenciável $l : V \to \mathcal{G}(Q)$ tal que para todo $\tau \in V$, $\tau = l(\tau) \circ \sigma$.*

Demonstração: Para aplicar o lema acima precisamos ver que a diferencial de (5.7) na identidade de $\mathcal{G}(Q)$ é sobrejetora e o seu núcleo é um subespaço complementável. Para isso, vamos olhar a aplicação (5.7) em termos das funções equivariantes associadas. Considere $b \in \mathbb{F}_\Theta$ e a projeção $p_b : G \to \mathbb{F}_\Theta$ dada por $p(g) = g \cdot b$. Se $b_\Theta \in \mathbb{F}_\Theta$ é a origem, a derivada de p_{b_Θ} é dada pela projeção de $\mathfrak{g}$ em $\mathfrak{n}_\Theta^-$ ($\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_\Theta^- \oplus \mathfrak{p}_\Theta$),

$$\begin{array}{rccc} d(p_{b_\Theta})_1 : & \mathfrak{n}_\Theta^- \oplus \mathfrak{p}_\Theta & \to & \mathfrak{n}_\Theta^- \\ & X + Y & \mapsto & X \end{array}$$

Agora seja L a isotropia em b_Θ da ação de K em $\mathbb{F}_\Theta$ e $\mathcal{L}_\sigma$ a L-redução definida pela seção $\sigma \in \Gamma\mathbb{E}_\Theta = \Gamma(R \times_K \mathbb{F}_\Theta)$, isto é, $\mathcal{L}_\sigma = f_\sigma^{-1}(b_\Theta)$ onde $f_\sigma \in \mathcal{C}_{eq}(R, \mathbb{F}_\Theta)$ é a função equivariante associada a σ. Defina

$$P : \mathcal{C}(\mathcal{L}_\sigma, G) \to \mathcal{C}(\mathcal{L}_\sigma, \mathbb{F}_\Theta), \quad P(g)(r) = p_{b_\Theta}(g(r)) = g(r) \cdot b_\Theta. \tag{5.8}$$

A aplicação (5.7) é a restrição de P à

$$\Gamma(\mathcal{L}_\sigma) = \{f : \mathcal{L}_\sigma \to G \ : \ f(rk) = k^{-1} f(r) k, \ \forall k \in K, \ r \in \mathcal{L}_\sigma\}.$$

O espaço tangente em $1 \in \mathcal{C}(\mathcal{L}_\sigma, G)$ é $\Gamma(1^*(TG)) = \Gamma(\mathcal{L}_\sigma \times \mathfrak{g}) = \mathcal{C}(\mathcal{L}_\sigma, \mathfrak{g})$. Já o espaço tangente a $f_\sigma \in \mathcal{C}(\mathcal{L}_\sigma, \mathbb{F}_\Theta)$ é $\Gamma(f_\sigma^*(T\mathbb{F}_\Theta)) = \Gamma(\mathcal{L}_\sigma \times T_{b_\Theta}\mathbb{F}_\Theta) = \mathcal{C}(\mathcal{L}_\sigma, \mathfrak{n}_\Theta^-)$. A derivada de P na identidade de $\mathcal{C}(\mathcal{L}_\sigma, G)$ é dada por

$$dP_1 : \mathcal{C}(\mathcal{L}_\sigma, \mathfrak{g}) \to \mathcal{C}(\mathcal{L}_\sigma, \mathfrak{n}_\Theta^-), \quad (dP_1 \cdot X)(r) = d(p_{b_\Theta})_1 \cdot X(r). \tag{5.9}$$

Como a aplicação (5.9) é simplesmente a projeção de $\mathcal{C}(\mathcal{L}_\sigma, \mathfrak{g})$ em $\mathcal{C}(\mathcal{L}_\sigma, \mathfrak{n}_\Theta^-)$, segue essa derivada é sobrejetora com núcleo $\mathcal{C}(\mathcal{L}_\sigma, \mathfrak{p}_\Theta)$, que é complementável, já que

$$\mathcal{C}(\mathcal{L}_\sigma, \mathfrak{g}) = \mathcal{C}(\mathcal{L}_\sigma, \mathfrak{n}_\Theta^-) \oplus \mathcal{C}(\mathcal{L}_\sigma, \mathfrak{p}_\Theta)$$

Agora a derivada da aplicação (5.7) é a restrição de (5.9), no domínio e no contradomínio, aos espaços tangentes de $\Gamma(\mathcal{L}_\sigma)$ e $\mathcal{C}^L_{eq}(\mathcal{L}_\sigma, \mathbb{F}_\Theta)$ em 1 e f_σ respectivamente. Mas esses espaços tangentes são dados respectivamente por $\mathcal{C}^L_{eq}(\mathcal{L}_\sigma, \mathfrak{g})$ e $\mathcal{C}^L_{eq}(\mathcal{L}_\sigma, \mathfrak{n}^-_\Theta)$. Dai segue que a derivada de (5.7) é sobrejetora com núcleo $\mathcal{C}^L_{eq}(\mathcal{L}_\sigma, \mathfrak{p}_\Theta)$, que é complementável por $\mathcal{C}^L_{eq}(\mathcal{L}_\sigma, \mathfrak{n}^-_\Theta)$. □

Considere agora a aplicação diferenciável $\gamma \in V \subset \mathcal{G}(Q) \mapsto \sigma_\gamma \in \Gamma\mathbb{E}_{\Theta_{\mathrm{Mo}}}$ construída na proposição 4.2.7 tal que a imagem de σ_γ é a componente de Morse atratora do automorfismo $\gamma \circ \phi$. Diminuindo V se necessário e compondo essa aplicação com a aplicação l da proposição acima obtemos uma aplicação diferenciável

$$\begin{array}{rccc} L: & V \subset \mathcal{G}(Q) & \longrightarrow & \mathcal{G}(Q) \\ & \gamma & \longmapsto & L(\gamma) = l(\sigma_\gamma). \end{array} \tag{5.10}$$

Essa aplicação satisfaz

$$\sigma_\gamma = L(\gamma) \circ \sigma_1, \tag{5.11}$$

onde $\sigma_1 = \sigma_{\Theta_{\mathrm{Mo}}}$ é a seção que fornece a componente de Morse atratora de ϕ.

Para cada $\gamma \in V$ a imagem da seção σ_γ fornece a componente de Morse atratora de $\gamma \circ \phi$ em $\mathbb{E}_{\Theta_{\mathrm{Mo}}}$. Seja $\nu_\gamma = \sigma_\gamma \cdot \nu$ a medida em $\mathbb{E}_{\Theta_{\mathrm{Mo}}}$ que é a imagem da medida ν pela seção σ_γ, isto é, $\nu_\gamma(A) = \nu(\sigma_\gamma^{-1}(A))$, $A \subset \mathbb{E}_{\Theta_{\mathrm{Mo}}}$. Então a equação (5.11) fornece o seguinte corolário

Corolário 5.2.6. *As medidas ν_γ são dadas por $\nu_\gamma = L(\gamma) \cdot \nu_1$, isto é,*

$$\nu_\gamma(A) = \nu_1\left(L(\gamma)^{-1}(A)\right), \quad A \subset \mathbb{E}_{\Theta_{\mathrm{Mo}}}.$$

Demonstração: A demonstração é imediata de

$$\begin{aligned} \nu_\gamma(A) &= \nu(\sigma_\gamma^{-1}(A)) \\ &= \nu\left((L(\gamma) \circ \sigma_1)^{-1}(A)\right) \\ &= \nu\left(\sigma_1^{-1}(L(\gamma)^{-1}(A))\right) \\ &= \nu_1\left(L(\gamma)^{-1}(A)\right). \end{aligned}$$

□

5.2.2 Demonstração do Teorema principal

Considere $\gamma \in V \subset \mathcal{G}(Q) \mapsto L(\gamma) \in \mathcal{G}(Q)$ a aplicação diferenciável definida por (5.10). Como a imagem de σ_γ em $\mathbb{E}_{\Theta_{\mathrm{Mo}}}$ é a componente de Morse atratora, temos pela proposição 5.2.3 que se $\alpha \in \mathfrak{a}^*$ se anula em $\mathfrak{a}(\Theta_{\mathrm{Mo}})$, então para cada $\gamma \in V$ vale

$$\int \alpha\left(\Lambda^+_{\gamma\phi}(x)\right)\ \nu(dx) = \int \mathsf{a}^{\gamma\phi}_\alpha(1,\xi)\,\nu_\gamma(d\xi) = \int \mathsf{a}^{\gamma\phi}_\alpha(1,L(\gamma)\xi)\,\nu_1(d\xi),$$

onde a última igualdade segue do corolário 5.2.6.

Agora a aplicação

$$\Upsilon : V \subset \mathcal{G}(Q) \to \mathcal{C}(\mathbb{E}_{\Theta_{\mathrm{Mo}}},\mathbb{R}), \quad \Upsilon(\gamma) = \mathsf{a}^{\gamma\phi}_\alpha(1,L(\gamma)(\cdot))$$

é diferenciável. De fato, segue do lema 5.1.1 que

$$\mathsf{a}^{\gamma\phi L(\gamma)}_\alpha(1,\xi) = \mathsf{a}^{\gamma\phi}_\alpha(1,L(\gamma)\xi) + \mathsf{a}^{L(\gamma)}_\alpha(1,\xi).$$

Isto é

$$\Upsilon(\gamma)(\cdot) = \mathsf{a}^{\gamma\phi L(\gamma)}_\alpha(1,\cdot) - \mathsf{a}^{L(\gamma)}_\alpha(1,\cdot).$$

A segunda parcela dessa soma depende diferenciavelmente de γ pela proposição 5.1.3. Para aplicar a mesma proposição à primeira parcela, observe que $\gamma\phi L(\gamma) = \gamma C_\phi(L(\gamma))\phi$, onde $C_\phi(\eta) = \phi\eta\phi^{-1}$. Como $\gamma \in V \mapsto \gamma C_\phi(L(\gamma)) \in \mathcal{G}(Q)$ é diferenciável, pois é a composta do produto em $\mathcal{G}$ com a conjugação C_ϕ e com $L(\gamma)$, segue da proposição 5.1.3 que $\gamma \in V \mapsto \mathsf{a}^{\gamma C_\phi(L(\gamma))\phi}_\alpha(1,\cdot)$ é diferenciável. Isso mostra que Υ é diferenciável.

Por fim

$$\int \alpha\left(\Lambda^+_{\gamma\phi}(x)\right)\ \nu(dx) = \int \Upsilon(\gamma)(\xi)\,\nu_1(d\xi)$$

depende diferenciavelmente de γ, pois é a composta do funcional linear contínuo em $\mathcal{C}(\mathbb{E}_{\Theta_{\mathrm{Mo}}},\mathbb{R})$ dado pela integral com respeito à medida ν_1 com a aplicação diferenciável Υ. Isso completa a demonstração do teorema 5.2.1.

Capítulo 6

Exemplos

Os resultados provados nesta tese mostram que existe uma relação próxima entre as componentes de Morse e de Oseledet. Em particular, a diferenciabilidade de certas combinações lineares do espectro de Lyapunov pode ser concluída a partir da descrição algébrica das componentes de Morse de fluxos em fibrados flag, ou melhor dizendo, do tipo parabólico do fluxo.

6.1 Definição do contexto

Para dar alguns exemplos onde é possível exibir explicitamente o tipo parabólico do fluxo e assim obter a diferenciabilidade dos expoentes de Lyapunov, considere o seguinte contexto:

- S um semigrupo de interior não vazio no grupo de Lie semssimples G;
- $T : X \to \text{int}(S) \subset G$ contínua a valores no interior de S;
- $f : X \to X$ um homeomorfismo;
- $\rho(n, x)$ o cociclo sobre f gerado por T;
- $\phi : X \times G \to X \times G$ o automorfismo dado por $\phi(x, g) = (f(x), T(x)g)$.
- ν uma medida ergódica f-invariante em X com supp $\nu = X$;
- $\Lambda^+_\phi(x)$ o expoente polar de ϕ, que neste caso é ν-q.t.p. constante e igual à $\Lambda^+_\phi = \int \Lambda^+_\phi(x)\, \nu(dx)$ (obs: Se G é um grupo linear então Λ^+_ϕ é uma matriz

diagonal cujos autovalores são dados pelos expoentes de Lyapunov ordenados a partir da escolha de uma câmara de Weyl positiva);

- $\Lambda_{\mathrm{Ly}}(T) = \{\chi_1(T), \ldots, \chi_n(T)\}$ o espectro de Lyapunov do cociclo ρ para o caso em que G for um subgrupo fechado de $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$. Por abuso de notação consideraremos a identificação $\Lambda_{\mathrm{Ly}}(T) = \Lambda_\phi^+$;
- $\Sigma = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ o sistema de raízes simples de $\mathfrak{g}$ (tal que $\Lambda_\phi^+ \in \mathrm{cl}\mathfrak{a}^+$);
- $\Phi = \{\mu_1, \ldots, \mu_l\} \subset \mathfrak{a}^*$ os pesos fundamentais de G, isto é, a base dual da base de $\mathfrak{a}$ dada por $\{H'_{\alpha_1}, \ldots, H'_{\alpha_l}\}$, onde $H'_{\alpha_i} = \frac{2}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle} H_{\alpha_i}$ e H_{α_i} é tal que $\alpha_i(H) = B_\theta(H_{\alpha_i}, H)$;
- $\Theta \subset \Sigma$ o tipo parabólico do semigrupo S.

Com essas notações temos o seguinte teorema

Teorema 6.1.1. *Se a raiz simples $\alpha_i \notin \Theta$. Então, a hipótese de que T assume valores no interior* $\mathrm{int}S$ *garante que*

i. $\mu_i(\Lambda_{\mathrm{Ly}}(T))$ *depende diferenciavelmente de T.*

ii. $\alpha_i(\Lambda_{\mathrm{Ly}}(T)) > 0$.

Demonstração: A hipótese de T assumir valores no interior do semigrupo garante que o tipo parabólico do fluxo ϕ é no máximo Θ, isto é, $\Theta_{\mathrm{Mo}} \subset \Theta$.

i. Se μ_i é um peso fundamental associado à raiz $\alpha_i \notin \Theta$ então $\mu_i(H_{\alpha_j}) = 0$ para todo $j \neq i$. Em particular temos que μ_i se anula em $\mathfrak{a}(\Theta) = \langle H_{\alpha_j} \mid \alpha_j \in \Theta \rangle$. A diferenciabilidade de $\mu_i(\Lambda_\phi^+)$ (ou de $\mu_i(\Lambda_{\mathrm{Ly}}(T))$) com relação à perturbações de calibre do automorfismo ϕ (ou com relação à perturbações do gerador do cociclo mantendo o fluxo na base fixado) é então consequência do teorema principal da tese (teorema 5.2.1).

ii. Se $\alpha_i \notin \Theta$ então α_i é uma raiz positiva fora de Θ_{Mo}. Além disso, Λ_ϕ^+ é o expoente de Lyapunov vetorial de algum elemento na componente de Morse atratora, isto é, $\Lambda_{\mathrm{Ly}}(T) = \Lambda_\phi^+ = \lambda(\xi)$, com $\xi \in \mathcal{M}^+$. O resultado segue então do teorema 4.3.1

Outra demonstração (direta) desse item: $\Theta(\Lambda_\phi^+) = \Theta_{\mathrm{Ly}} \subset \Theta_{\mathrm{Mo}} \subset \Theta$. Daí se $\alpha_i \notin \Theta$ então $\alpha_i \notin \Theta(\Lambda_\phi^+)$, isto é, α_i não se anula em Λ_ϕ^+. Mas como $\Lambda_\phi^+ \in \mathrm{cl}\mathfrak{a}^+$, segue que $\alpha_i(\Lambda_\phi^+) > 0$. □

6.2 Exemplos

No mesmo contexto definido acima, vejamos agora alguns exemplos de como a estrutura dos semigrupos se aplica à regularidade dos expoentes a partir do teorema 6.1.1.

Exemplo 6.2.1. *Semigrupo de compressão de um cone*

Seja $W \subset \mathbb{R}^n$ um cone pontual ($W \cap -W = 0$) e gerador ($W - W = \mathbb{R}^n$), e considere o semigrupo

$$S = \{g \in \mathrm{Sl}(n, \mathbb{R}) \mid g(W \cup -W) \subset W \cup -W\}.$$

Considere o sistema de raízes simples de $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ dado pelos funcionais $\alpha_i = \lambda_i - \lambda_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, onde $\lambda_i(\mathrm{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_n)) = a_i$. Os pesos fundamentais associados são dados por $\mu_i = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_i$. Pelo exemplo 1.1.7, o tipo parabólico desse semigrupo é dado pelas raízes $\Theta = \{\alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}\}$. Como $\alpha_1 \notin \Theta$, segue então do teorema 6.1.1 que o maior expoente de Lyapunov do cociclo ρ gerado por T, $\chi_1(T) = \lambda_1(\Lambda_{\mathrm{Ly}}(T))$, depende diferenciavelmente de T. Além disso o cociclo tem um expoente de Lyapunov dominante já que $\alpha_1(\Lambda_{\mathrm{Ly}}(T)) > 0$, ou seja, $\chi_1(T) > \chi_2(T)$.

Vale ressaltar aqui que esse é exatamente o caso considerado por Ruelle em [17]. Veja também [24] para uma outra abordagem dos expoentes de Lyapunov para cociclos que preservam cones. □

Exemplo 6.2.2. *Semigrupos das matrizes k positivas*

Considere o mergulho da Grassmanniana $\mathrm{Gr}_k(n)$ no espaço projetivo do produto exterior $\bigwedge^k \mathbb{R}^n$ dado por

$$\langle v_1, \cdots, v_k \rangle \in \mathrm{Gr}_k(n) \longmapsto [v_1 \wedge \ldots \wedge v_k] \in \mathbb{P}\left(\wedge^k \mathbb{R}^n\right)$$

Considerando a base ortonormal de $\bigwedge^k \mathbb{R}^n$ dada pelos elementos $e_I = e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_k}$, $I = (i_1 < i_2, \cdots < i_k)$ induzida pela base canônica de $\mathbb{R}^n$, temos que o primeiro octante contém os subespaços $b \in \mathrm{Gr}_k(n)$ tais que $\langle b, e_I \rangle \geq 0$. Denote por C_k esse conjunto, isto é,

$$C_k = \{b \in \mathrm{Gr}_k(n) \mid \langle b, e_I \rangle \geq 0,\ \forall I = (i_1 < \ldots < i_k)\}.$$

O semigrupo de compressão de C_k, denotado por S_k, é justamente o semigrupo das matrizes k-positivas, isto é, das matrizes cujos menores de ordem k são positivos.

O conjunto C_k está contido numa célula aberta de Bruhat de $\mathrm{Gr}_k(n)$ e satisfaz $C_k = \mathrm{cl}(\mathrm{int}(C_k))$. Segue de 1.1.6 (ver também [19] para mais detalhes) que o tipo parabólico de S_k em termos das raízes simples de $\mathrm{Sl}(n,R)$ é o conjunto de todas raízes simples excluindo-se a k-ésima. Isto é, $\Theta(S_k) = \{\alpha_1, \ldots, \widehat{\alpha_k}, \ldots, \alpha_{n-1}\}$.

O teorema 6.1.1 permite então considerar o peso $\mu_k = \lambda_1 + \cdots + \lambda_k$, e assim temos que a soma dos k-primeiros expoentes de Lyapunov do cociclo, dada por $\mu_k(\Lambda_{\mathrm{Ly}}(T)) = \chi_1(T) + \cdots + \chi_k(T)$, depende diferenciavelmente de T. Além disso, o item *ii.* mostra que o k-ésimo expoente é estritamente maior que o $k+1$-ésimo, já que $\chi_k(T) - \chi_{k+1}(T) = \alpha_k(\Lambda_{\mathrm{Ly}}(T)) > 0$ □

Tomando interseção dos semigrupos das matrizes k positivas para diferentes valores de k temos semigrupos cujo tipo parabólico são os demais flags de $\mathrm{Sl}(n,\mathbb{R})$, o que fornece uma descrição mais fina das propriedades dos expoentes de Lyapunov.

Exemplo 6.2.3. *Interseção de semigrupos*

Seja $\mathbf{r} = \{r_1 < \ldots < r_k\}$ uma sequência de inteiros com $r_1 \geq 1$ e $r_k < n$. O semigrupo das matrizes $\mathbf{r}$-positivas é dado por

$$S(\mathbf{r}) = S_{r_1} \cap S_{r_2} \cap \ldots \cap S_{r_k},$$

isto é, $S(\mathbf{r})$ é o conjunto das matrizes cujos menores de ordem $r_1, \ldots, r_k$ são todos positivos. O tipo parabólico desse semigrupo é a variedade flag $\mathbb{F}(\mathbf{r})$. Em termos das raízes simples, $\Theta(S(\mathbf{r}))$ é simplesmente a interseção do tipo parabólico dos semigrupos S_{r_i}. Em particular, o tipo parabólico do semigrupo S das matrizes totalmente positivas, isto é, das matrizes cujos menores de todas as ordens são positivos, é o flag maximal $\mathbb{F}$, ou seja $\Theta(S) = \emptyset$.

No caso das matrizes totalmente positivas o teorema 6.1.1 permite escolher qualquer peso μ_i e qualquer raiz α_i. Como estes pesos geram o dual $\mathfrak{a}^*$, segue que todos os expoentes de Lyapunov dependem diferenciavelmente do gerador do cociclo. O item *ii.* fornece ainda que o espectro de Lyapunov é simples, isto é, $\chi_1(T) > \chi_2(T) > \cdots > \chi_n(t)$. □

Exemplo 6.2.4. *Semigrupo do grupo Simplético definido por forma quadrática*

Seja $G = \mathrm{Sp}(n,\mathbb{R}) = \{g \in \mathrm{Sl}(2n,\mathbb{R}) \mid g^T J g = J\}$ o grupo simplético, isto é, o grupo das matrizes que preservam a forma simplética $\omega(v,w) = v^T J w$, onde $J =$

$\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$. Uma escolha para o sistema de raízes simples da álgebra de Lie $\mathfrak{sp}(n,\mathbb{R})$ é dado por

$$\Sigma = \{\lambda_1 - \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1} - \lambda_n, 2\lambda_n\},$$

e os pesos fundamentais associados são os funcionais $\mu_i = \lambda_1 + \cdots + \lambda_i$, $i = 1, \ldots, n$.

As variedades Flag de G são formadas por flags de subespaços isotrópicos, isto é, subespaços em que a forma simplética ω é identicamente nula. Por exemplo, a Grassmanniana Lagrangiana, denotada por $\Lambda_n(2n)$, é o conjunto de todos os subespaços de dimensão n que são isotrópicos. Em termos das raízes simples, essa variedade Flag é dada por $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{R})/P_\Theta$, onde P_Θ é o subgrupo parabólico associado à escolha de raízes simples $\Theta = \{\lambda_1 - \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1} - \lambda_n\}$.

Considere a forma quadrática dada pela matriz $Q = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$ e defina o semigrupo

$$S = \{g \in \mathrm{Sp}(n,\mathbb{R}) \mid Q(g(v)) \geq Q(v)\}.$$

Em [25] esse semigrupo já foi considerado e algumas estimativas dos expoentes de Lyapunov foram obtidas. Essas estimativas podem ser reobtidas a partir do segundo item do teorema 6.1.1. Além disso, o primeiro item fornece a diferenciabilidade de algumas combinações do espectro de Lyapunov.

Para ver isso, observe que o interior de S coincide com o interior do semigrupo de compressão do subconjunto de $\Lambda_n(2n)$ formado pelos subespaços V em que $Q_{|V}$ é positiva, isto é, considerando

$$C = \{V \in \Lambda_n(2n) \mid Q(v,w) \geq 0,\ \forall v, w \in V\},$$

temos que $\mathrm{int}(S) = \mathrm{int}(S_C)$ (ver teorema 2.1 de [25] ou proposição 4.2.2 de [4]). É possível ainda encontrar um elemento $g \in \mathrm{int}(S)$ tal que algum de seus conjugados por uma matriz simplética é diagonal da forma $\mathrm{diag}(\lambda, \ldots, \lambda, \lambda^{-1}, \ldots, \lambda^{-1})$, $\lambda \neq 0$ e 1. Este é um elemento de regularidade mínima em $\mathrm{int}(S)$ já que seu tipo parabólico, dado pelas raízes o anulam, é exatamente o subconjunto $\Theta = \{\lambda_1 - \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1} - \lambda_n\}$. Segue daí que o tipo parabólico de S é a Grassmanniana Lagrangiana, ou simplesmente Θ.

O expoente de Lyapunov vetorial de um cociclo que assume valores no grupo simplético deve ser da forma

$$\Lambda_{\mathrm{Ly}}(T) = \begin{pmatrix} D(T) & 0 \\ 0 & -D(T) \end{pmatrix}$$

com $D(T) = \text{diag}\{\chi_1(T), \ldots, \chi_n(T)\}$, $\chi_1(T) \geq \cdots \geq \chi_n(T)$. Escolhendo a raiz $2\lambda_n$ e o peso associado $\mu_n = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$, o teorema 6.1.1 garante então que $\chi_1(T) + \cdots + \chi_n(T)$ é diferenciável como função de T e $\chi_n(T) > 0$. □

O exemplo anterior pode ser feito da mesma maneira para os grupos $\text{Gl}(n, \mathbb{R})$ ou $\text{Sl}(n, \mathbb{R})$

Exemplo 6.2.5. *Semigrupo de* $\text{Sl}(n, \mathbb{R})$ *definido por forma quadrática*

Considere a forma quadrática em $\mathbb{R}^n$ dada pela matriz

$$Q = \begin{pmatrix} 1_{k\times k} & 0 \\ 0 & -1_{(n-k)\times(n-k)} \end{pmatrix}$$

e defina o semigrupo

$$S = \{g \in \text{Sl}(n, \mathbb{R}) \mid Q(gx) \geq Q(x)\}.$$

O tipo parabólico desse semigrupo é a Grassmanniana $\text{Gr}_k(n)$ (veja [19]). Então $\chi_1(T) + \cdots + \chi_k(T)$ depende diferenciavelmente de T e $\chi_k(T) > \chi_{k+1}(T)$. □

Apêndice A

Teoria de Lie

A.1 Notações para álgebras e grupos de Lie

Apresentamos abaixo as notações necessárias para a leitura dos artigos que fundamentam esta tese, bem como de alguns resultados apresentados aqui. A sequência de notações que apresentamos segue uma estrutura lógica do desenvolvimento das mesmas. Por exemplo, para se definir um sistema de raízes da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ deve-se primeiro fixar uma decomposição de Cartan e um abeliano maximal na parte simétrica. Deste modo, primeiro apresentamos a notação da decomposição de Cartan e em seguida a notação para o conjunto de raízes. Em geral pode-se trocar a ordem da apresentação de alguns conceitos, mas tentamos seguir um padrão para que o leitor com um pouco de familiaridade com os conceitos de álgebras e grupos de Lie possam fazer mentalmente o desenvolvimento lógico da teoria a partir da sequência de notações apresentadas.

Dentro das notações estão embutidas algumas decomposições dos grupos e das álgebras de Lie. Para demonstração dessas decomposições sugerimos os livros [10], [12], [18] e [23].

Decomposições da álgebra de Lie semissimples $\mathfrak{g}$

- $\theta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ involução de Cartan da álgebra semissimples $\mathfrak{g}$;
- $\mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \theta(X) = X\}$ e $\mathfrak{s} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \theta(X) = -X\}$;
- $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$ decomposição de Cartan;
- $B(X, Y) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}(X)\mathrm{ad}(Y))$ forma de Cartan-Killing;

- $B_\theta(X,Y) = -B(X,\theta(Y))$ produto interno em $\mathfrak{g}$
- $\mathfrak{a}$ abeliano maximal em $\mathfrak{s}$;
- $\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g} \mid [H,X] = \alpha(H)X,\ \forall H \in \mathfrak{a}\}$ espaços de raízes;
- $\Pi = \{\alpha \in \mathfrak{a}^* \mid \mathfrak{g}_\alpha \neq 0\}$ sistema de raízes associado ao abeliano maximal $\mathfrak{a}$;
- $H_\alpha \in \mathfrak{a}$ co-raiz associada a α por $B_\theta(H_\alpha, H) = \alpha(H)$, $\forall H \in \mathfrak{a}$;
- $\langle \alpha, \beta \rangle = B_\theta(H_\alpha, H_\beta)$ produto interno em $\mathfrak{a}^*$ induzido por B_Θ;
- $H'_\alpha = \frac{2}{\langle \alpha,\alpha \rangle} H_\alpha$ o normalizado de H_α;
- $\mathcal{W}$ grupo de Weyl de $\mathfrak{g}$ (gerado pelas reflexões r_α em torno das raízes $\alpha \in \Pi$);
- $\mathfrak{a}^+$ uma câmara de Weyl positiva em $\mathfrak{a}$;
- $\Sigma \subset \Pi$ sistema de raízes simples;
- $\Pi^\pm$ raízes positivas e raízes negativas;
- $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \sum_{\alpha \in \Pi} \mathfrak{g}_\alpha$ decomposição em espaços de raízes;
- $\mathfrak{n} = \sum_{\alpha \in \Pi^+} \mathfrak{g}_\alpha$ a soma dos espaços de raízes positivas;
- $\mathfrak{n}^- = \sum_{\alpha \in \Pi^-} \mathfrak{g}_\alpha$ a soma de espaços de raízes negativas;
- $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ decomposição de Iwasawa;
- $\mathfrak{z}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a}$ centralizador de $\mathfrak{a}$, onde $\mathfrak{m} = \mathfrak{z}(\mathfrak{a}) \cap \mathfrak{k}$;
- $\mathfrak{p} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ subálgebra parabólica minimal canônica;
- $\Theta \subset \Sigma$ subconjunto de raízes simples;
- $\Theta(H) = \{\alpha \in \Sigma \mid \alpha(H) = 0\}$ subconjunto de raízes simples definido por $H \in \mathrm{cl}\mathfrak{a}^+$
- $H_\Theta \in \mathrm{cl}\mathfrak{a}^+$ elemento característico de Θ, ié, $\Theta = \Theta(H_\Theta)$;
- $\langle \Theta \rangle$ subsistema de raízes gerado por Θ;
- $\mathfrak{a}(\Theta) = \langle H_\alpha \in \mathfrak{a} \mid \alpha \in \Theta \rangle$;
- $\mathfrak{a}_\Theta = \mathfrak{a}(\Theta)^\perp = \{H \in \mathfrak{a} \mid \alpha(H) = 0,\ \forall \alpha \in \Theta\}$;
- $\mathfrak{g}(\Theta)$ álgebra de Lie semissimples gerada pelos $\mathfrak{g}_\alpha$, com $\alpha \in \Theta$
- $\mathfrak{n}(\Theta)^\pm = \sum\{\mathfrak{g}_\alpha \mid \alpha \in \langle\Theta\rangle^\pm\} = \mathfrak{g}(\Theta) \cap \mathfrak{n}^\pm$;
- $\mathfrak{n}(H)^\pm = \sum\{\mathfrak{g}_\alpha \mid \alpha \in \Pi^\pm,\ \alpha(H) = 0\} = \mathfrak{n}(\Theta(H))^\pm$;
- $\mathfrak{n}^\pm_\Theta = \sum\{\mathfrak{g}_\alpha \mid \alpha \in \Pi^\pm - \langle\Theta\rangle\}$;
- $\mathfrak{n}^\pm_H = \sum\{\mathfrak{g}_\alpha \mid \alpha(H) \gtrless 0\} = \mathfrak{n}^\pm_{\Theta(H)}$;

- $\mathfrak{k}(\Theta) = \mathfrak{g}(\Theta) \cap \mathfrak{k}$;
- $\mathfrak{g}(\Theta) = \mathfrak{k}(\Theta) \oplus \mathfrak{a}(\Theta) \oplus \mathfrak{n}(\Theta)^{\pm}$ decomposição de Iwasawa de $\mathfrak{g}(\Theta)$;
- $\mathcal{W}_\Theta$ grupo gerado pelas reflexões em torno das raízes em $\langle\Theta\rangle$;
- $\mathcal{W}(\Theta) = \mathcal{W}_\Theta|_{\mathfrak{a}(\Theta)}$ grupo de Weyl de $\mathfrak{g}(\Theta)$, dado pelas restrições dos elementos de $\mathcal{W}_\Theta$ a $\mathfrak{a}(\Theta)$;
- $\mathfrak{z}_\Theta = \mathfrak{z}(\mathfrak{a}_\Theta) = \mathfrak{n}(\Theta)^- \oplus \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}(\Theta)^+$ centralizador de $\mathfrak{a}_\Theta$;
- $\mathfrak{z}_H = \mathfrak{z}_{\Theta(H)}$ centralizador de $H \in \mathrm{cl}\mathfrak{a}^+$;
- $\mathfrak{k}_\Theta = \mathfrak{z}_\Theta \cap \mathfrak{k}$ centralizador de $\mathfrak{a}_\Theta$ em $\mathfrak{k}$;
- $\mathfrak{k}_H = \mathfrak{z}_H \cap \mathfrak{k}$ centralizador de $H \in \mathrm{cl}\mathfrak{a}^+$ em $\mathfrak{k}$;
- $\mathfrak{z}_\Theta = \mathfrak{k}_\Theta \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}(\Theta)^{\pm}$ decomposição de Iwasawa $\mathfrak{z}_\Theta$;
- $\mathfrak{p}_\Theta = \mathfrak{n}(\Theta)^- \oplus \mathfrak{p} = \mathfrak{z}_\Theta \oplus \mathfrak{n}_\Theta^+$ subálgebra parabólica de tipo Θ;
- $w_0 \in \mathcal{W}$ a involução principal (único elemento de $\mathcal{W}$ que satisfaz $w_0(\Sigma) = -\Sigma$);
- $\alpha^* = -w_0(\alpha)$ raiz simples positiva dual da raiz $\alpha \in \Sigma$;
- $\Theta^* = -w_0(\Theta)$ conjunto de raízes simples dual de Θ;
- $\mathfrak{p}_{\Theta^*}$ subálgebra parabólica dual de $\mathfrak{p}_\Theta$;
- $w_0\mathfrak{p}_{\Theta^*} = \mathfrak{p}_\Theta^- = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a}$ uma subálgebra oposta à $\mathfrak{p}_\Theta$;
- V_μ representação de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ com peso máximo $\mu \in \mathfrak{h}^*$;
- $\{\mu_1, \ldots, \mu_n\}$ pesos fundamentais das representações de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ associados ao sistema simples de raízes $\Sigma = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, isto é, $\mu_j(H'_{\alpha_i}) = \delta_{ij}$.

Decomposições do grupo de Lie semissimples G

- G grupo de Lie com álgebra de Lie semissimple $\mathfrak{g}$;
- $\overline{\theta} : G \to G$ involução de Cartan de G;
- $K = \{g \in G \mid \overline{\theta}(g) = g\}$ subgrupo compacto com álgebra de Lie $\mathfrak{k}$;
- $S = \exp \mathfrak{s}$ conjunto de matrizes simétricas;
- $G = KS$, decomposição de Cartan do grupo;
- $A = \exp \mathfrak{a}$ subgrupo vetorial;
- $N^{\pm} = \exp \mathfrak{n}^{\pm}$ subgrupos unipotentes;
- $\mathrm{cl}A^+ = \exp \mathrm{cl}\mathfrak{a}^+$ câmara de Weyl positiva (no nível do grupo);
- $G = KAN^{\pm}$ decomposição de Iwasawa;

- $A_\Theta = \exp \mathfrak{a}_\Theta$ e $A(\Theta) = \exp \mathfrak{a}(\Theta)$
- $N_\Theta^\pm = \exp \mathfrak{n}_\Theta^\pm$ e $N(\Theta)^\pm = \exp \mathfrak{n}(\Theta)^\pm$
- $N_H^\pm = \exp \mathfrak{n}_H^\pm$ e $N(H)^\pm = \exp \mathfrak{n}(H)^\pm$
- $Z_\Theta = Z(\mathfrak{a}_\Theta) = Z(A_\Theta)$ o centralizador de $\mathfrak{a}_\Theta$ (ou de A_Θ) em G;
- $Z_H = Z(\mathfrak{a}_{\Theta(H)})$ o centralizador de $H \in \mathrm{cl}\mathfrak{a}^+$ em G;
- $Z_D = gZ_Hg^{-1}$ o centralizador de $D = \mathrm{Ad}(g)H$;
- $K_\Theta = Z_\Theta \cap K$ o centralizador de $\mathfrak{a}_\Theta$ em K;
- $K_H = Z_H \cap K$ o centralizador de H em K;
- $M = Z_K(\mathfrak{a}) = Z_K(A)$ o centralizador de $\mathfrak{a}$ (ou de A) em K;
- $MA = Z(\mathfrak{a}) = Z(A)$ o centralizador de $\mathfrak{a}$ (ou de A) em G;
- $M^* = \mathrm{Norm}_K(\mathfrak{a}) = \mathrm{Norm}_K(A)$ o normalizador de $\mathfrak{a}$ (ou de A) em K;
- $M^*A = \mathrm{Norm}(\mathfrak{a}) = \mathrm{Norm}(A)$ o normalizador de $\mathfrak{a}$ (ou de A) em G;
- $\mathcal{W} = M^*A/MA = M^*/M$ o grupo de Weyl de $\mathfrak{g}$ (cada $w \in \mathcal{W}$ é da forma $\mathrm{Ad}(\overline{w})|_\mathfrak{a}$ para algum $\overline{w} \in M^*$);
- $P = \mathrm{Norm}(\mathfrak{p}) = MAN$ subgrupo parabólico minimal;
- $P_\Theta = \mathrm{Norm}(\mathfrak{p}_\Theta) = K_\Theta AN$ subgrupo parabólico definido por Θ;
- $\mathbb{F} = G/P = \mathrm{Ad}(G)\mathfrak{p} \subset \mathrm{Gr}_{\dim \mathfrak{p}}(\mathfrak{g})$ variedade Flag maximal;
- $\mathbb{F}_\Theta = G/P_\Theta = \mathrm{Ad}(G)\mathfrak{p}_\Theta \subset \mathrm{Gr}_{\dim \mathfrak{p}_\Theta}(\mathfrak{g})$ variedade Flag de tipo Θ;
- $\mathbb{F}_{\Theta^*} = G/P_{\Theta^*}$ variedade Flag dual de $\mathbb{F}_\Theta$;
- $N^- w_0 \mathfrak{p}_\Theta^*$

Pontos fixos, variedades estáveis e instáveis

Seja $H \in \mathrm{cl}\mathfrak{a}^+$, b_Θ a origem de $\mathbb{F}_\Theta$ e considere a ação de $h = \exp H$ em $\mathbb{F}_\Theta$ dada por

$$\begin{array}{rccc} h^n: & \mathbb{F}_\Theta & \longrightarrow & \mathbb{F}_\Theta \\ & b & \longmapsto & h^n b \end{array}$$

- $\mathrm{fix}_\Theta(H, w) = Z_H w b_\Theta = K_H w b_\Theta$ componentes conexas do conjunto de pontos fixos;
- $\mathrm{st}_\Theta(H, w) = P_H^- w b_\Theta = N_H^- \mathrm{fix}_\Theta(H, w)$ variedades estáveis das componentes de pontos fixos;

- $\mathrm{un}_\Theta(H,w) = P_H^+ w b_\Theta = N_H^+ \mathrm{fix}_\Theta(H,w)$ variedades instáveis das componentes de pontos fixos;

A ação de um elemento D conjugado de H ($D = \mathrm{Ad}(g)H$) é conjugada à ação de H e, consequentemente, os conjuntos de pontos fixos e respectivas variedades estáveis e instáveis permanecem conjugados. Em outras palavras temos

- $\mathrm{fix}_\Theta(D,w) = g\,\mathrm{fix}_\Theta(H,w)$;
- $\mathrm{st}_\Theta(D,w) = g\,\mathrm{st}_\Theta(H,w)$;
- $\mathrm{un}_\Theta(D,w) = g\,\mathrm{un}_\Theta(H,w)$;

Subálgebras opostas

A.2 Flags de Subespaços

Flags de $\mathrm{Sl}(n,\mathbb{R})$

As variedades Flag de $\mathrm{Sl}(n,\mathbb{R})$ são generalizações dos espaços projetivos e das Grassmannianas, e são dadas por conjuntos de subespaços encaixados com dimensões fixadas. Isto é, fixe $\mathbf{r} = \{r_1 < r_2 < \cdots < r_k\}$ uma sequência de inteiros com $r_1 \geq 1$ e $r_k < n$. A variedade flag $\mathbb{F}(\mathbf{r})$ é formada pelas sequências de subespaços

$$(V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_k), \quad \text{com} \quad \dim V_i = r_i.$$

Denotamos por $b(\mathbf{r})$ o elemento da variedade Flag $\mathbb{F}(\mathbf{r})$ gerado pelos elementos da base canônica de $\mathbb{R}^n$, isto é,

$$b(\mathbf{r}) = (\langle e_1, \ldots, e_{r_1}\rangle \subset \langle e_1, \ldots, e_{r_2}\rangle \subset \cdots \subset \langle e_1, \ldots, e_{r_k}\rangle).$$

Essas variedades podem ser vistas como espaços homogêneos de $\mathrm{Sl}(n,\mathbb{R})$, cuja isotropia são subgrupos parabólicos. Para isso, considere a subálgebra abeliana maximal $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$ formado pelas matrizes diagonais e o conjunto de raízes $\Pi = \{\alpha_{ij} = \lambda_i - \lambda_j \in \mathfrak{a}^* \mid \lambda_i(\mathrm{diag}(a_1,\ldots,a_n)) = a_i\}$. Um conjunto de raízes simples é dado por $\Sigma = \{\alpha_{i\,i+1} \,|\, 1 \leq i \leq n-1\}$. Com relação à essa escolha a câmara de Weyl positiva $\mathfrak{a}^+$ é dada pelas matrizes diagonais com os autovalores distintos e ordenados do maior para o menor.

Cada subconjunto de raízes simples $\Theta \subset \Sigma$ determina uma subálgebra parabólica $\mathfrak{p}_\Theta$ dada por matrizes triangulares superiores em blocos. O tamanho dos blocos é determinado pelo tamanho dos intervalos de raízes simples $\Theta(i,j) = \{\alpha_{i\,i+1}, \alpha_{i+1\,i+2}, \ldots, \alpha_{j-1\,j}\}$ contidos em Θ. Por exemplo, se $\Theta = \Theta(1,3) = \{\alpha_{12}, \alpha_{23}\}$ então $\mathfrak{p}_\Theta$ é a subálgebra das matrizes triangulares superiores em blocos, com o primeiro bloco de tamanho 3 e todos os demais de tamanho 1. Em geral, se $\Theta(i,j) \subset \Theta$ então $\mathfrak{p}_\Theta$ é uma subálgebra parabólica que contém as matrizes triangulares superiores com um bloco de tamanho $j-i+1$ a partir da i-ésima entrada da diagonal. As variedades flag de $G = \mathrm{Sl}(n,\mathbb{R})$ são os espaços homogêneos G/P_Θ onde P_Θ é o subgrupo parabólico dado pelo normalizador de $\mathfrak{p}_\Theta$, que também é formado por matrizes triangulares superiores em blocos (no grupo G), com blocos do mesmo tamanho dos blocos de $\mathfrak{p}_\Theta$.

O tamanho dos blocos de $\mathfrak{p}_\Theta$ determina a dimensão dos subespaços encaixados da variedade flag $\mathbb{F}(\mathbf{r})$. De fato, para cada sequência de inteiros $\mathbf{r}$, G age transitivamente em $\mathbb{F}(\mathbf{r})$. Além disso, se $\mathfrak{p}_\Theta$ tem blocos de tamanhos $m_1, m_2, \ldots, m_k$, então P_Θ é a isotropia em $b(\mathbf{r})$ da ação de G na variedade flag $\mathbb{F}(\mathbf{r})$, cuja sequência $\mathbf{r}$ que fornece a dimensão dos subespaços é dada por $r_1 = m_1$, $r_2 = m_1 + m_2$, ..., $r_k = m_1 + \cdots + m_k$. Isto é, $\mathbb{F}(\mathbf{r}) = \mathbb{F}_\Theta$.

A.3 Subálgebras opostas, subespaços transversais e Flag dual

Considere Θ um conjunto de raízes simples e $\mathbb{F}_\Theta$ a variedade Flag associada. Essa variedade pode ser realizada como a órbita da subálgebra parabólica $\mathfrak{p}_\Theta$ pela ação adjunta do grupo de Lie G na Grassmaniana $\mathrm{Gr}_k(\mathfrak{g})$, onde $k = \dim \mathfrak{p}_\Theta$, e se identifica com o conjunto de todas as subálgebras parabólicas de tipo Θ. A variedade Flag dual de $\mathbb{F}_\Theta$ é a variedade $\mathbb{F}_{\Theta^*}$, onde $\Theta^* = w_0(\Theta)$ e $w_0 \in \mathcal{W}$ é a involução principal

No caso de flags de subepaços realizados a partir das subálgebras parabólicas de $\mathrm{Sl}(n,\mathbb{R})$, as variedades flags duais correspondem a cadeias de subspaços de dimensões complementares. Por exemplo, as grassmannianas $\mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$ e $\mathrm{Gr}_{n-k}(\mathbb{R}^n)$ são variedades flag duais. Mais geralmente a variedade flag dual de $\mathbb{F}(r_1, ..., r_k)$ é a variedade flag $\mathbb{F}(n-r_k, ..., n-r_1)$.

Dois subespaços $V, W \subset \mathbb{R}^n$ são ditos transversais se $\mathbb{R}^n = V \oplus W$. Um flag de

subespaços $(V_1 \subset \cdots \subset V_k)$ em $\mathbb{F}(r_1, ..., r_k)$ é transversal a um flag de subespaços $(W_1 \subset \cdots \subset W_k)$ da variedade flag dual $\mathbb{F}(n - r_k, ..., n - r_1)$ se

$$\mathbb{R}^n = V_{i+1} \oplus W_{k-i} \quad \text{para todo} \;\; 0 \leq i \leq k-1.$$

Uma maneira simples de construir flags de subespaços transversais é começar com os flags formados a partir de uma base do $\mathbb{R}^n$ tomados em ordens inversas. Por exemplos, considerando a base canônica $\{e_1, \ldots, e_n\}$, dois flags de subespaços transversais são

$$b_0 = (\langle e_1, ..., e_{r_1}\rangle \subset \langle e_1, ..., e_{r_2}\rangle \subset ... \subset \langle e_1, ..., e_{r_k}\rangle) \quad \text{e}$$

$$b_0^* = (\langle e_n, ..., e_{r_k+1}\rangle \subset \langle e_n, ..., e_{r_{k-1}+1}\rangle \subset ... \subset \langle e_n, ..., e_{r_1+1}\rangle).$$

Daí dois flags $b \in \mathbb{F}(r_1, ..., r_k)$ e $b^* \in \mathbb{F}(n-r_k, ..., n-r_1)$ são opostos se, e somente se, existe $g \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$ tal que $(b, b^*) = (g \cdot b_0, g \cdot b_0^*) = g \cdot (b_0, b_0^*)$. Em outras palavras, os conjunto dos flags de subespaços transversais se identifica com a órbita aberta e densa da ação diagonal de $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$ em $\mathbb{F}(r_1, ..., r_k) \times \mathbb{F}(n - r_k, ..., n - r_1)$ a partir de (b_0, b_0^*).

Esse conceito de transversalidade de flags de subespaços pode ser generalizado para subálgebras parabólicas. Fixe uma decomposição de Cartan $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$, um abeliano maximal $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{s}$ e uma câmara de Weyl $\mathfrak{a}^+ \subset \mathfrak{a}$. Duas subálgebras parabólicas $\mathfrak{p} \in \mathbb{F}_\Theta$ e $\mathfrak{q} \in \mathbb{F}_{\Theta^*}$ são ditas opostas se estão na órbita aberta e densa da ação diagonal de G em $\mathbb{F}_\Theta \times \mathbb{F}_{\Theta^*}$ a partir das subálgebras $\mathfrak{p}_\Theta = \mathfrak{n}(\Theta)^- \oplus \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^+ \in \mathbb{F}_\Theta$ e $\mathfrak{p}^-_{\Theta^*} = w_0(\mathfrak{p}_\Theta) = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{p}(\Theta^*) \in \mathbb{F}_{\Theta^*}$. Em outras palavras, $\mathfrak{p}$ e $\mathfrak{q}$ são opostas se existir $g \in G$ tal que $(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}) = (g \cdot \mathfrak{p}_\Theta, g \cdot \mathfrak{p}^-_{\Theta^*})$.

Referências Bibliográficas

[1] Alves, L. - *Expoentes de Lyapunov e de Morse em Fibrados Flag.* Tese de doutorado. Imecc-Unicamp (2010)

[2] Alves, L. e L.A.B. San Martin - *Multiplicative Ergodic Theorem on Flag Bundles of Semi-Simple Lie Groups.* Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series A (2012) (aceito para publicação)

[3] Alves, L. e L.A.B. San Martin - *Equality of Oseledets and Morse decompositions on flag bundles.* Em preparação.

[4] Barreira, L. e Pesin, Y - *Nonuniform Hyperbolicity: Dynamics of Systems with Nonzero Lyapunov Exponents.* Cambridge University Press (2007)

[5] Ayala, V., F. Colonius and W. Kliemann - *On topological equivalence of linear flows with applications to bilinear control systems.* Journal of Dynamics and Constrol Systems vol.13, 337-362 (2007).

[6] Braga Barros, C.J. e L.A.B San Martin - *Chain transitive sets for flows on flag bundles*, Forum Math. 19, 19-60 (2007).

[7] Colonius, F. and W. Kliemann - *The dynamics of control.* Birkhäuser, Boston(2000).

[8] Duistermat, J.J., J.A.C. Kolk e V.S. Varadarajan - *Functions, flows and ocilatory integral on flag manifolds.* Composition Math. 49, 309-398 (1983).

[9] Ferraiol, T., M. Patrão e L. Seco - *Jordan Decomposition and Dynamics on Flag Manifolds.* Discrete Contin. Dyn. Syst. A, 26 No. 3, 923-947, (2010).

[10] Knapp, A.W. - *Lie Groups Beyond an Introduction*, 2^{nd} edition, Progress in Mathematics 140, Birhhäuser, (2004).

[11] Kaimanovich, V.A. - *Lyapunov exponents, symmetric spaces, and a multiplicative ergodic theorem for semisimple Lie groups*, J. Soviet Math. 47, 2387-2398 (1989).

[12] Kobayashi, S. e K. Nomizu - *Foundations of Differential Geometry*, vol.I, Interscience Publishers, (1963).

[13] Palais, R. S. - *Foundations of Global Non-Linear Analysis*, W. A. Benjamin; 1st edition (1968).

[14] Patrão, M. e L.A.B. San Martin - *Chain recurrence of flows on fiber bundles*, Discrete and Contin. Dynam. Systems A, 17, 113-139 (2007).

[15] Patrão, M., L. Seco e L.A.B. San Martin - *Conley indexes and stable sets for flows on flag bundles*. Dynamical Systems (Print), v. 24, 249-276 (2009).

[16] Ruelle, D. - *Ergodic theory of differentiable dynamical systems*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 50, 27-58 (1979).

[17] Ruelle, D. - *Analycity properties of the characteristic exponents of random matrix products*, Advances in Math. 32, 68-80 (1979).

[18] San Martin, L.A.B. - *Álgebras de Lie*, editora da Unicamp, 2^a edição, (2010).

[19] San Martin, L.A.B. - *Maximal semigroups in semi-simple Lie groups*, Trans. Amer. Math. Soc., vol.353, 5165-5184 (2001).

[20] San Martin, L.A.B. e L. Seco - *Morse and Lyapunov spectra and dynamics on flag bundles*, Ergodic Theory and Dynamical Systems, vol.23, 1-42 (2009).

[21] San Martin, L.A.B. e P.A. Tonelli - *Semigroups actions on homogeneous spaces*, Semigroup Forum, vol 50(1), 59-88 (1995).

[22] Selgrade, J - *Isolated invariant sets for flows on vector bundles*. Trans. of Amer. Math. soc., 203, 259-390 (1975).

[23] Warner, G. - *Harmonic Analysis on semi-simple Lie groups I*, Springer-Verlag, (1972).

[24] Wojtkowski, M.P. - *Invariant families of cones and Lyapunov exponents*, Ergod. Th. Dyn Sys. 5, 145-161 (1985).

[25] Wojtkowski, M.P. - *Monotonicity, J-algebra of Potapov and Lyapunov exponents*, Proc. Sympos.Pure Math. 69 (2001) 499-521.