ÁLGEBRAS GERADAS POR MENORES DE MATRIZES CATALÉTICAS

Paulo Antônio Fonseca Machado

Álgebras Geradas por Menores de Matrizes Cataléticas

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida pelo Sr. Paulo Antônio Fonseca Machado e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 18 de março de 1997.

Prof. Dr. Aron Simis (Orientador)

Prof. Dr. Paulo Roberto Brumatti (Co-orientador)

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do Título de Doutor em Matemática.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Machado, Paulo Antônio Fonseca

M259a Álgebras geradas por menores de matrizes cataléticas / Paulo Antônio Fonseca Machado -- Campinas, [S.P. :s.n.], 1997.

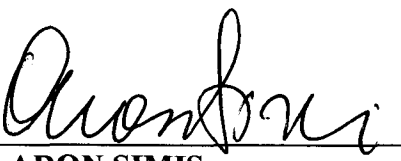
Orientador : Aron Simis

Dissertação (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

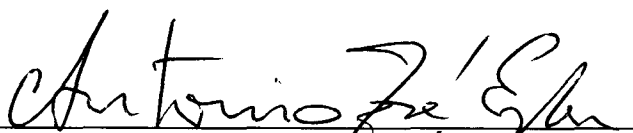
1. Anéis noetherianos. 2. Invariantes. 3. Ideais (Álgebra). 4. Representações de álgebras. I. Simis, Aron. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Tese de Doutorado defendida e aprovada em 18 de março de 1997

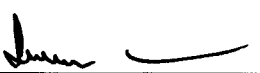
Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



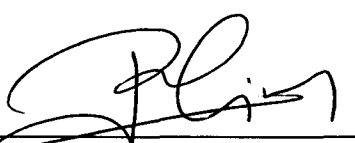
Prof (a). Dr (a). ARON SIMIS



Prof (a). Dr (a). ANTONIO JOSÉ ENGLER



Prof (a). Dr (a). ISRAEL VAINSENCHER



Prof (a). Dr (a). PHILIPPE GIMENEZ

Prof (a). Dr (a). YVES ALBERT EMILE LEQUAIN

Dedicatória

Dedico este trabalho a Paula,
minha sobrinha e afilhada.

Agradecimentos

Agradeço aos meus colegas do Departamento de Matemática da UFMG pelo apoio e companherismo e por me terem permitido completar mais este passo acadêmico.

Agradeço aos funcionários e professores da UNICAMP pela atenção e pelo apoio geral.

Agradeço ao pessoal do Departamento de Matemática da UFBA pela acolhida durante o período que passei nesta unversidade escrevendo minha tese. Agradeço a José Fernandes Andrade pelo apoio geral como Coordenador da Pós-Graduação do Departamento de Matemática da UFBA, e à Dona Zezé pela atenção e pelo rosto sempre sorridente.

Agradeço muito especialmente a Paulo Brumatti por todo o suporte como co-orientador na UNICAMP.

E, é claro, agradeço a Aron Simis por toda a paciência e apoio orientando-me neste trabalho, e por suas muitas e preciosas sugestões salvadoras; e também pela sua constante presença como amigo.

SUMÁRIO

Introdução 1

Capítulo I. Tableaux Standard para Matrizes Cataléticas 7

1. Tableaux 8
2. Apresentação de Álgebras 12
3. Álgebras de Rees 16

Capítulo II. O Complexo Simplicial Associado à Álgebra Inicial Catalética 23

1. Complexo Simplicial Associado a $K[\text{in}_\sigma(M)]$ 23
2. Outras Propriedades do Complexo Simplicial Δ 27

Capítulo III. Algumas Propriedades da Álgebra Inicial Catalética 39

1. Normalidade 39
2. Invariantes Numéricos 44
3. Bases de SAGBI para a Álgebra de Matrizes Cataléticas 46

Apêndice A. Preliminares 51

1. Anéis de Cohen-Macaulay 51
2. Funções de Hilbert 53
3. Anéis de Stanley-Reisner 55
4. Bases de Gröbner e Bases de SAGBI 58
5. Estudo de uma Álgebra via sua Álgebra Inicial 61
6. Anéis Determinantais e Tableaux 63

Apêndice B. Aspectos Computacionais 67

Referências 73

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

RESUMO

Neste trabalho estabelecemos o conceito de matriz r-catalética e estudamos algumas álgebras relacionadas com menores máximos destas matrizes sobre um corpo. Seja $X = (x_{j+(i-1)r})_{ij}$ uma $m \times n$-matriz r-catalética, com $m \leq n$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq m$ e $1 \leq r \leq n$, e seja K um corpo. Seja M o conjunto dos menores máximos de X. Considere-se em $K[X]$ a ordem lexicográfica graduada $<_\sigma$ determinada pela ordem total nas variáveis $x_k > x_l$ se $k < l$. Seja $\mathrm{in}_\sigma(M)$ o conjunto dos monômios iniciais dos elementos de M e tome-se $A = K[\mathrm{in}_\sigma(M)]$. Se I é o ideal gerado por $\mathrm{in}_\sigma(M)$ em $K[X]$, seja $\mathcal{R}(I) \cong K[X, \mathrm{in}_\sigma(M)t]$ a álgebra de Rees associada. Desenvolvemos então uma teoria análoga á teoria de tableaux standard para matrizes genéricas em relação às matrizes cataléticas, o que chamamos de *tableaux r-standard*. Esta teoria dos tableaux para matrizes r-cataléticas apresenta muitos pontos em comum com a teoria das álgebras de Hodge, indicando que podem existir por trás estruturas algébricas interessantes. Com isto conseguimos construir representações adequadas para A e para $\mathcal{R}(I)$ que permitem aplicar a teoria de complexos simpliciais e anéis de Stanley-Reisner. Usando estas técnicas calculamos o a-invariante e o grau do h-vetor de A. Como A e $\mathcal{R}(I)$ são anéis de semigrupos, podemos também demonstrar que estas álgebras são álgebras normais de Cohen-Macaulay usando critérios de semigrupos afins. Usando técnicas de corpos de frações e alguns resultados sobre grafos, calculamos a dimensão de A. Finalmente, demonstramos que M $(X \cup Mt)$ é uma base de SAGBI para $K[M]$ $(K[X, Mt])$ quando $n - m - 1 \leq r$. Se J é o ideal gerado pelos elementos de M, este último resultado permite mostrar que M^i é uma base de Gröbner para J^i, $i \geq 1$, na ordem $<_\sigma$.

INTRODUÇÃO

Álgebras geradas por menores de matrizes cujas entradas sejam polinômios constituem um importante campo de estudo na álgebra comutativa. As variedades determinantais, que formam uma importante classe de variedades na geometria, estão intimamente ligadas a estas álgebras. Por exemplo, sejam n, r inteiros positivos com $n \geq r$ e $X = \{x_1, \ldots, x_{n+r}\}$ um conjunto de indeterminadas sobre um corpo K; dada a matriz

$$S = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_i & \cdots & x_n \\ x_{1+r} & x_{2+r} & \cdots & x_{i+r} & \cdots & x_{n+r} \end{pmatrix}$$

seja $M \subset K[X]$ o conjunto dos menores 2×2 de S e I o ideal gerado por M. Então I define um scroll normal racional de dimensão r em $\mathbb{P}_K^{n+r-1}$ (ver [H]). Para estudar esta variedade é conveniente considerar a álgebra de Rees associada $\mathcal{R}(I) = \oplus_{i \geq 0} I^i t^i$ e sua fibra especial, que é isomorfa a $K[M]$, a álgebra gerada por M. Este problema foi amplamente estudado em [CHV] utilizando técnicas de bases de SAGBI.

Outro exemplo [H, 9.7] é o seguinte. Dados α, d e l inteiros positivos com $l < \alpha$, $l < d - \alpha + 1$, a variedade determinantal de posto l associada à matriz

$$S_\alpha = \begin{pmatrix} z_0 & z_1 & z_2 & \cdots & z_{d-\alpha} \\ z_1 & z_2 & z_3 & \cdots & z_{d-\alpha+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_\alpha & z_{\alpha+1} & z_{\alpha+2} & \cdots & z_d \end{pmatrix}$$

é a variedade l-secante da curva normal racional $C \subset \mathbb{P}^d$.

Uma matriz tal como S_α é chamada de *catalética* ou de *Haenkel*.

Estes exemplos e os métodos usados em [CHV] foram a motivação principal para este trabalho. Generalizamos o conceito de matriz catalética e estudamos algumas álgebras relacionadas com os menores destas matrizes. Em certos pontos do estudo ficou patente a semelhança entre estas álgebras e as álgebras relacionadas aos subdeterminantes de matrizes genéricas.

Uma generalização natural de matriz catalética pode ser obtida como se segue. Dados inteiros positivos n, m, r com $m \leq n$ e $1 \leq r \leq n$, seja

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_{1+r} & x_{2+r} & \cdots & x_{n+r} \\ x_{1+2r} & x_{2+2r} & \cdots & x_{n+2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{1+(m-1)r} & x_{2+(m-1)r} & \cdots & x_{n+(m-1)r} \end{pmatrix}$$

uma matriz de indeterminadas sobre um corpo K. Denominaremos este tipo de matriz *r-catalética*. Seja $K[X]$ o anel de polinômios $K[x_1, \ldots, x_{n+(m-1)r}]$. Normalmente usaremos X para denotar tanto a matriz quanto o conjunto de indeterminadas, ficando claro pelo contexto qual o significado dado. Seja M o conjunto dos menores máximos de X, e seja $K[M]$ a K-subálgebra de $K[X]$ gerada pelos elementos de M. Chamaremos $K[M]$ de *álgebra catalética*. Seja $I \subset K[X]$ o ideal gerado por M. Entender melhor a álgebra $K[M]$ e também a álgebra de Rees associada $\mathcal{R}(I)$ é o principal objetivo deste trabalho.

Por definição, a álgebra de Rees $\mathcal{R}(I)$ identifica-se com a subálgebra $K[X, Mt]$ de $K[X, t]$ (ver A.2). Pensando na utilização dos métodos da teoria de SAGBI, concentramos nossa atenção nas

álgebras iniciais de $K[M]$ e $K[X, Mt]$, que possuem uma estrutura mais simples que as álgebras originais. Passemos brevemente à descrição destas álgebras.

Em geral, seja $<_\sigma$ uma ordem monomial em $K[X]$ (ver A.4.1). Dada uma subálgebra $A \subset K[X]$, seja $\text{in}_\sigma(A)$ a K-subálgebra de $K[X]$ gerada pelos monômios iniciais $\text{in}_\sigma(a)$, $a \in A$. Chamamos $\text{in}_\sigma(A)$ a *álgebra inicial* de A. Dado um subconjunto $S \subset K[X]$ não vazio, denotamos por $\text{in}_\sigma(S)$ o conjunto dos monômios iniciais dos elementos de S. Se $B \subset A$ é tal que $\text{in}_\sigma(A) = K[\text{in}_\sigma(B)]$ então B é uma *base de SAGBI* para A (SAGBI é a abreviação de **S**ubalgebra **A**nalog to **G**röbner **B**asis for **I**deals; ver [RS]). Em particular, é claro que $K[\text{in}_\sigma(S)] \subset \text{in}_\sigma(K[S])$, mas a inclusão reversa só é verdadeira se S for uma base de SAGBI para $K[S]$. Um primeiro resultado que se tem é que se B é uma base de SAGBI para a álgebra A, então B gera A como K-álgebra, ou seja, $A = K[B]$ (ver A.4.9).

Muitas informações sobre A podem ser obtidas a partir de $\text{in}_\sigma(A)$. Por exemplo, se A for gerada por polinomios homogêneos então as funções de Hilbert de A e $\text{in}_\sigma(A)$ coincidem (ver A.5.4). Outro exemplo: se $\text{in}_\sigma(A)$ for Cohen-Macaulay de dimensão d e tipo t, então A será Cohen-Macaulay de dimensão d e tipo $\leq t$; em particular, se $\text{in}_\sigma(A)$ for Gorenstein, A também o será (ver A.5.3). Normalidade também é uma propriedade compartilhada por A e $\text{in}_\sigma(A)$ (ver A.5.3). Se A possuir base de SAGBI finita e formada por elementos de mesmo grau, outras conclusões podem ser extraídas; por exemplo, A e $\text{in}_\sigma(A)$ possuem o mesmo h-vetor, e portanto multiplicidade e a-invariante são também comuns (ver A.5.5). Várias outras propriedades podem ser demonstradas usando estas técnicas (ver [CHV] e A.5). Em muitas situações, bases de SAGBI e bases de Gröbner estão relacionadas. No caso de certos ideais determinantais é possível encontrar uma base de Gröbner para alguns destes usando as técnicas de SAGBI (ver III.3.4).

No nosso caso específico consideramos em $K[X]$ a ordem monomial lexicográfica $<_\sigma$ induzida pela ordem total $x_1 > x_2 > \ldots > x_{n+(m-1)r}$. Denotamos por $\text{in}_\sigma(M)$ o conjunto dos monômios iniciais dos elementos de M. Em $K[X, t]$ consideramos a ordem monomial $<_{\sigma'}$ definida da seguinte maneira: se μt^i e $\mu' t^j$ são monômios de $K[X, t]$, com μ, μ' monômios em $K[X]$, então $\mu t^i <_{\sigma'} \mu' t^j$ se $i < j$ ou se $i = j$ e $\mu <_\sigma \mu'$. Em [CHV] prova-se que, quando $m = 2$, M é base de SAGBI para $K[M]$ e $X \cup Mt$ é base de SAGBI para $K[X, Mt]$. Este fato também é verdadeiro quando $n - m - 1 \leq r$ (ver III.3.3). Há fortes indícios de que isto seja válido em todos os casos, conforme será observado.

Chamaremos a álgebra $K[\text{in}_\sigma(M)]$ de *álgebra inicial catalética*, e $K[X, \text{in}_\sigma(M)t]$ será a *álgebra de Rees associada à álgebra inicial catalética*. Concentrar-nos-emos principalmente no estudo destas álgebras.

Quando $r = n$, X é uma matriz genérica e, neste caso, $K[M]$ é isomorfa ao anel de coordenadas da grassmanniana $\mathbb{G}(m, n)$. Um tal isomorfismo existe, mais geralmente, para $n - m - 1 \leq r$. Neste caso $K[M]$ é uma *álgebra com leis de retificação*, abreviado por ALR (ver A.6). Para valores gerais de m, n, r a álgebra $K[M]$ apresenta características similares ao caso genérico, mas não é, de maneira natural, uma ALR. Em [CHV] foram construídas, para $m = 2$, relações polinomiais entre os menores máximos semelhantes às relações de Plücker, e destas deduzem-se várias propriedades comuns com a teoria das ALR. Generalizando as idéias de [CHV] para m, n, r quaisquer, observam-se várias semelhanças entre as álgebras em questão e as álgebras do caso genérico, mas até o momento estas relações semelhantes às de Plücker não puderam ser construídas, embora haja fortes indícios de que realmente existam.

Os conceitos básicos e os resultados fundamentais deste trabalho estão no capítulo I. Nos capítulos II e III estes elementos fundamentais são utilizados para demonstrar certas propriedades e calcular certos invariantes numéricos das álgebras cataléticas. Para facilidade de referência, o apêndice A contém um resumo dos tópicos da teoria geral usados aqui. O apêndice B traz algumas observações quanto a certos aspectos computacionais das técnicas utilizadas. Em seguida descreveremos, com maiores detalhes, o conteúdo de cada capítulo.

No capítulo I estabelecemos o conceito de *tableau r-standard*, que desempenha o mesmo papel dos tableaux standard do caso genérico (ver A.6). Este conceito é o ponto principal deste capítulo e de todo o trabalho em si.

Consideramos o conjunto $\Lambda(m, n) = \{[\lambda_1, \ldots, \lambda_m], 1 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_m \leq n\}$ das m-uplas ordenadas em $\{1, 2, \ldots, n\}$. Os elementos de $\Lambda(m, n)$ são chamados de *colchetes* e serão considerados como indeterminadas sobre K, e $K[\Lambda(m, n)]$ é o anel dos polinômios nestas variáveis.

Abreviamos $[\lambda] = [\lambda_1, \ldots, \lambda_m]$. Um *tableau* é uma representação matricial adequada para os monômios de $K[\Lambda(m,n)]$: dado $T = [\lambda^1] \ldots [\lambda^t] \in K[\Lambda(m,n)]$, escrevemos

$$T = \begin{bmatrix} \lambda_1^1 & \lambda_2^1 & \ldots & \lambda_m^1 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \ldots & \lambda_m^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^t & \lambda_2^t & \ldots & \lambda_m^t \end{bmatrix}. \tag{1}$$

O tableau T também pode ser considerado como um produto de menores máximos de X. Para ser mais preciso, temos o homomorfismo sobrejetivo de K-álgebras

$$\begin{aligned} \phi : K[\Lambda(m,n)] &\longrightarrow K[M] \\ [\lambda] &\longmapsto |[\lambda]| \end{aligned}$$

onde

$$|[\lambda]| = \det \begin{pmatrix} x_{\lambda_1} & x_{\lambda_2} & \ldots & x_{\lambda_m} \\ x_{\lambda_1+r} & x_{\lambda_2+r} & \ldots & x_{\lambda_m+r} \\ x_{\lambda_1+2r} & x_{\lambda_2+2r} & \ldots & x_{\lambda_m+2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{\lambda_1+(m-1)r} & x_{\lambda_2+(m-1)r} & \ldots & x_{\lambda_m+(m-1)r} \end{pmatrix}$$

e denotamos $\phi(T) = |T| = |[\lambda^1]| \ldots |[\lambda^t]|$.

Analogamente, temos o homomorfismo sobrejetivo

$$\begin{aligned} \psi : K[\Lambda(m,n)] &\longrightarrow K[\mathrm{in}_\sigma(M)] \\ [\lambda] &\longmapsto \mathrm{in}_\sigma(|[\lambda]|) \end{aligned}.$$

Denotamos $\psi(T) = \mathrm{diag}(T)$, a *diagonal* de T, uma vez que $\mathrm{in}_\sigma(|[\lambda]|)$ é justamente o produto dos elementos da diagonal da submatriz de X designada pelos índices de $[\lambda]$.

Dizemos que T é *standard* se $\lambda_j^1 \leq \lambda_j^2 \leq \ldots \leq \lambda_j^t \ \forall j \in \{1, \ldots, m\}$. No caso em que X é uma matriz genérica (quando $r = n$) sabe-se que se T e T' são tableaux standard tais que $\mathrm{diag}(T) = \mathrm{diag}(T')$ então $T = T'$ [S, 3.1.8]. Mais ainda, se $n - m - 1 \leq r$, $K[M]$ é uma ALR (ver A.6), e neste caso os tableaux standard desempenham um papel fundamental, permitindo inclusive determinar uma base de Gröbner para os ideais $\ker\psi$ e $\ker\phi$ (ver A.6.9 e III.3.4).

No caso r-catalético geral estes fatos não são válidos para tableaux standard. Porém, é possível introduzir uma classe de tableaux para os quais alguns destes fatos são verdadeiros. Definimos então os tableaux r-standard (I.1.2). Uma caracterização de tableau r-standard é a seguinte (I.1.5): um tableau T como em (1) é r-standard se e só se for standard e $\lambda_i^t - \lambda_{i+1}^1 \leq r$ para $i = 1, \ldots, m-1$. Provamos então que se T e T' são tableaux r-standard tais que $\mathrm{diag}(T) = \mathrm{diag}(T')$ então $T = T'$(I.1.6). Este fato permite provar que se $S_r = \{\phi(T),\ \forall\, T \in K[\Lambda(m,n)]$ r-standard $\}$, então S_r é linearmente independente sobre K (I.1.8), propriedade similar à dos tableaux standard no caso genérico (A.6.6).

Na seqüência temos um dos resultados mais importantes deste trabalho: no teorema I.2.1 mostramos que $I = \ker\psi$ é gerado pelos binômios da forma $[\lambda][\mu] - rs([\lambda][\mu])$, onde para cada tableau T, $rs(T)$ indica o único tableau r-standard equivalente a T. Em I.2.7 mostramos que estes geradores constituem uma base de Gröbner para I em relação a uma certa ordem monomial $<_\tau$ em $K[\Lambda(m,n)]$. Esta ordem monomial é escolhida de forma que $\mathrm{in}_\tau(I)$ seja gerado pelos monômios não r-standard da forma $[\lambda][\mu]$. Esta forma será útil para calcular certos invariantes de $K[M]$ na teoria de anéis de Stanley-Reisner.

Ainda no capítulo I estudamos a álgebra de Rees da álgebra inicial catalética. Consideramos o homomorfismo sobrejetivo

$$\begin{aligned} \Psi : K[X, \Lambda(m,n)] &\longrightarrow K[X, \mathrm{in}_\sigma(M)t] \\ x_i &\longmapsto x_i \\ [\lambda] &\longmapsto \mathrm{in}_\sigma(|[\lambda]|)t = \psi([\lambda])t \end{aligned}$$

e encontramos uma base de Gröbner para $\ker \Psi$ relativamente a uma ordem monomial adequada em $K[X, \Lambda(m,n)]$ (I.3.1, I.3.2). Novamente aqui os tableaux r-standard são bastante úteis.

No capítulo II estudamos a álgebra inicial catalética do ponto de vista da teoria de anéis de Stanley-Reisner. O conjunto $\Lambda(m,n)$ pode ser visto como um conjunto parcialmente ordenado com a seguinte ordem parcial:

$$[\lambda_1, \ldots, \lambda_m] \leq [\mu_1, \ldots, \mu_m]$$

se $\lambda_i \leq \mu_i$ para $1 \leq i \leq m$. Por simplicidade chamaremos um conjunto parcialmente ordenado de *poset* (do inglês: *p*artially *o*rdered *set*).

Uma *cadeia* em $\Lambda(m,n)$ é um subconjunto totalmente ordenado, e uma cadeia é dita *saturada* se for maximal em relação à inclusão. Se $J = \mathrm{in}_\tau(\ker \psi)$, então como J é gerado por monômios (de grau 2) livres de quadrados (I.2.7), podemos associar a J o complexo simplicial

$$\Delta = \left\{ H \subset \Lambda(m,n) \;/\; \prod_{[\lambda] \in H} [\lambda] \notin J \right\}$$

e neste caso $K[\Lambda(m,n)]/J$ será o anel de Stanley-Reisner de Δ. Da teoria de bases de Gröbner, sabemos que $K[\mathrm{in}_\sigma(M)]$ e $K[\Lambda(m,n)]/J$ possuem a mesma série de Hilbert (A.4.5), além de outras propriedades em comum. Em particular, todos os invariantes numéricos relacionados com a série de Hilbert são comuns a ambas álgebras.

Para extrair mais informações sobre $K[\Lambda(m,n)]/J$ estudamos melhor o complexo simplicial Δ. É interessante notar que, quando $n - m - 1 \leq r$, as facetas de Δ são as cadeias maximais de $\Lambda(m,n)$. Para $n - m - 1 > r$ a questão é um pouco mais delicada. Neste caso demonstramos que as facetas são as cadeias maximais dos subconjuntos de $\Lambda(m,n)$:

$$\Lambda_{(\lambda_2, \ldots, \lambda_m)} = \left\{ [\mu] \in \Lambda(m,n) \;/\; [1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m] \leq [\mu] \leq [\lambda_2 + r, \ldots, \lambda_m + r, n] \right\}$$

onde $1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots < \lambda_m \leq n - r - 1$. Denotamos por Δ_I o complexo das cadeias de cada Λ_I, para cada $(m-1)$-upla $I = (\lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ satisfazendo à propriedade acima. Assim $\Delta = \cup_I \Delta_I$ (ver II.1.2).

Um resultado importante é que Δ é um *complexo simplicial shellable* (II.1.3). O fato de Δ ser shellable permite o cálculo de certos invariantes numéricos de $K[\Lambda(m,n)]/J$, como o a-invariante, através da própria estrutura combinatória de Δ. Para o cálculo do a-invariante usamos a caracterização A.2.8 e o critério A.3.10. Neste contexto, para cada faceta $H \in \Delta$ definimos

$$\mathcal{H}(H) = \left\{ [\sigma] \in H / \exists \text{ faceta } F <_\Delta H \text{ com } H \setminus F = \{[\sigma]\} \right\}$$

e $\delta(H)$ como sendo o número de elementos de $\mathcal{H}(H)$. Seja $s(\Delta) = \max\{\delta(H),\ H \in \Delta\}$, e seja $\alpha(\Delta) = d - s(\Delta)$, onde $d = \dim K[\mathrm{in}_\sigma(M)]$. É possível verificar que $s(\Delta)$ é o grau do h-vetor (vide A.2.5 e A.3.10); como conseqüência o a-invariante de $K[\Lambda(m,n)]/J$ é o número $-\alpha(\Delta)$ (ver A.2.8). O problema se transforma, portanto, em um problema de contagem em estruturas combintórias. Para realizar esta contagem procedemos a várias reduções. Inicialmente definimos em cada faceta de Δ um tipo especial de vértice, que chamamos de *degrau* (II.2.2). Mostramos em II.2.3 que $\delta(H)$ é o número de degraus de H. Definimos $\nu(H)$ como sendo o número de *não-degraus* de H. É claro que $\delta(H) = d - \nu(H)$; e portanto $\alpha(\Delta) = \min\{\nu(H),\ H \in \Delta\}$. O uso dos degraus facilita os cálculos, pois estes possuem propriedades que permitem um maior controle, inclusive no aspecto computacional. As técnicas usadas para calcular $\alpha(\Delta)$ são construtivas. Estabelecemos várias cotas para o valor de $\alpha(\Delta)$ e construímos explicitamente facetas que realizam os valores mínimos. Provamos que $\alpha(\Delta) \geq \left\lceil \frac{d}{m} \right\rceil$ para todos os valores de m, n e r; e que $\alpha(\Delta) \geq n$ se $n - m - 1 \leq r$ (II.2.4). Ainda no caso $n - m - 1 \leq r$ construímos uma faceta especial F, que chamamos de a-faceta (vide II.2.5), tal que $\nu(F) = n$, e então concluímos que $\alpha(\Delta) = n$ se $n - m - 1 \leq r$ (ver II.2.9).

Se $n - m - 1 > r$, é necessário refinar mais ainda as cotas. Em cada Δ_I definimos uma faceta especial F_I, chamada de a_I-faceta (II.2.6), tal que $\nu(H) \geq \nu(F_I)$ para toda faceta $H \in \Delta_I$

(II.2.13). Provamos que se $\lfloor \frac{n-r-1}{m} \rfloor \geq 2$ ou se $n - r = 2m$ então existe conjunto de índices I tal que se $F_I \in \Delta_I$ é a_I-faceta, então

$$\nu(F_I) = \left\lfloor \frac{n-r-1}{m} \right\rfloor + r + 1 = \left\lceil \frac{d}{m} \right\rceil$$

(ver II.2.14, III.2.2). Neste caso conclui-se então que $\alpha(\Delta) = \lceil \frac{d}{m} \rceil$.

A possibilidade restante para os valores de m, n e r é que $m + 1 < n - r < 2m$. Provamos inicialmente que se $I = (\tau_2, \ldots, \tau_m)$ e F é a_I-faceta, então $\nu(F) \geq 2m + r - \tau_m$ (II.2.16). O maior valor que τ_m pode assumir é $n - r - 1$, portanto o valor mínimo que $\nu(F)$ pode atingir é $2(m + r) - n + 1$. Em II.2.7 construímos uma faceta F tal que $\nu(F) = 2(m + r) - n + 1$, donde conclui-se que, neste caso, $\alpha(\Delta) = 2(m + r) - n + 1$.

No capítulo III são demonstradas algumas propriedades das álgebras cataléticas usando-se as técnicas desenvolvidas nos dois capítulos anteriores. Na seção 1 demonstramos que a álgebra $K[\text{in}_\sigma(M)]$ e sua álgebra de Rees associada $K[X, \text{in}_\sigma(M)t]$ são álgebras normais de Cohen-Macaulay. Usamos aqui critérios da teoria de anéis de semigrupos. Em geral, uma K-subálgebra A de um anel de polinômios $K[X]$ gerada por monômios é isomorfa a um anel de semigrupo afim, $A \cong K[G]$ (ver A.1). Então A é normal se e só se G for um semigrupo normal (A.1.16). Além disto Hochster demonstrou que se G é normal, então A é álgebra de Cohen-Macaulay (A.1.17).

As álgebras $K[\text{in}_\sigma(M)]$ e $K[X, \text{in}_\sigma(M)t]$ são geradas por monômios, e portanto podem ser vistas como anéis de semigrupos. Usando a estrutura combinatória dos tableaux r-standard, podemos demonstrar que estas álgebras são normais (III.1.2, III.1.3). Logo, pelo citado critério de Hochster, concluímos que estas álgebras são domínios normais de Cohen-Macaulay.

Seguindo uma sugestão de A. Simis, na seção 2 calculamos a dimensão de $K[\text{in}_\sigma(M)]$ usando argumentos baseados em corpos de frações e teoria de grafos (III.2.1). Esta dimensão também pode ser obtida pela contagem do número de vértices de uma faceta do complexo simplicial associado Δ, como está feito na demonstração de II.1.3.

Em seguida usamos os resultados obtidos no capítulo II para calcular o grau do h-vetor e o a-invariante de $K[\text{in}_\sigma(M)]$ (III.2.2). Usamos a proposição A.3.10 que liga os invariantes numéricos do complexo ao h-vetor.

Na terceira seção deste capítulo trabalhamos um pouco mais com o que foi uma das motivações para este trabalho: bases de SAGBI. Como já foi citado, se $n - m - 1 \leq r$ então M é uma base de SAGBI para $K[M]$. Damos aqui uma demonstração deste fato usando diretamente os critérios originais de Robbiano-Sweedler [RS]. Demonstramos também que $X \cup Mt$ é base de SAGBI para $K[X, Mt]$, se $n - m - 1 \leq r$ (III.3.3). Como conseqüência destes resultados temos que estas álgebras são domínios normais de Cohen-Macaulay (III.3.5); e temos também que o a-invariante de $K[M]$ é $a(K[M]) = -n$ e a dimensão é $\dim K[M] = m(n - m) + 1$ (III.3.6).

A proposição III.3.4, mais uma conseqüência destes fatos, é um exemplo de como bases de SAGBI podem resolver questões relacionadas a bases de Gröbner. Seja I o ideal de $K[X]$ gerado pelos elementos de M, e seja M^j o conjunto dos produtos de j elementos de M. Esta proposição estabelece que se $n - m - 1 \leq r$ então M^j forma uma base de Gröbner para I^j para todo $j \in \mathbb{N}$ em relação à ordem monomial $<_\sigma$ adotada em $K[X]$. Este é um resultado importante na teoria de ideais determinantais, e foi demonstrado por A. Conca em [C] usando outras técnicas. Na verdade esta propriedade é equivalente ao fato de M ser base de SAGBI de $K[M]$, como se pode ver em [C].

Preparamos também dois apêndices. No apêndice A reunimos os principais conceitos e resultados que foram utilizados para facilitar a consulta. Cada proposição enunciada é acompanhada de uma referência indicando onde encontrar uma demonstração.

No apêndice B escrevemos os pseudocódigos de alguns algoritmos usados neste trabalho. Estes programas foram implementados no sistema *Mathematica* e foram utilizados para visualizar as demonstrações de vários lemas do capítulo II. Também descrevemos neste apêndice uma maneira computacional de calcular a multiplicidade de $K[\text{in}_\sigma(M)]$ utilizando a estrutura do complexo simplicial associado.

CAPÍTULO I

TABLEAUX STANDARD PARA MATRIZES CATALÉTICAS

Dados inteiros positivos m, n e r tais que $2 \leq m \leq n$ e $1 \leq r \leq n$, seja $X = X(m,n,r)$ a seguinte matriz de indeterminadas sobre um corpo K:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_{1+r} & x_{2+r} & \cdots & x_{n+r} \\ x_{1+2r} & x_{2+2r} & \cdots & x_{n+2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{1+(m-1)r} & x_{2+(m-1)r} & \cdots & x_{n+(m-1)r} \end{pmatrix}$$

Chamaremos a matriz X de *r-catalética*. Designaremos por $K[X]$ o anel de polinômios $K[x_1, \ldots, x_{n+(m-1)r}]$. X representará, portanto, seja a matriz de indeterminadas seja o conjunto das variáveis em questão.

Seguindo a terminologia clássica, os subdeterminantes de tamanho $m \times m$ de X serão chamados de *menores máximos* de X. Seja M o conjunto dos menores máximos de X e $K[M] \subset K[X]$ a subálgebra gerada por M. Chamaremos esta álgebra de *álgebra catalética*. Consideramos em $K[X]$ a ordem monomial lexicográfica graduada $<_\sigma$ induzida pela ordenação total das variáveis $x_i > x_{i+1}$ para $1 \leq i < n+(m-1)r$. Esta ordem é chamada de *diagonal* pois, para $\mu \in M$, temos que $\mathrm{in}_\sigma(\mu)$ é justamente a diagonal do menor μ. Seja então $\mathrm{in}_\sigma(M)$ o conjunto dos monômios iniciais de M, isto é, o conjunto das diagonais dos menores de X. A subálgebra $K[\mathrm{in}_\sigma(M)] \subset K[X]$ gerada pelas diagonais dos menores será chamada de *álgebra inicial catalética*.

Seja

$$\Lambda(m,n) = \{[\lambda] = [\lambda_1, \ldots, \lambda_m], 1 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_m \leq n\}$$

o conjunto das m-uplas ordenadas em $\{1,2,\ldots,n\}$. Os elementos de $\Lambda(m,n)$ são comumente chamados de *colchetes* e constituem um conjunto de variáveis sobre K. A cada $[\lambda] \in \Lambda(m,n)$ podemos associar naturalmente um menor máximo de X determinado pelas colunas de índices $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Denotaremos

$$|[\lambda]| = \det \begin{pmatrix} x_{\lambda_1} & x_{\lambda_2} & \cdots & x_{\lambda_m} \\ x_{\lambda_1+r} & x_{\lambda_2+r} & \cdots & x_{\lambda_m+r} \\ x_{\lambda_1+2r} & x_{\lambda_2+2r} & \cdots & x_{\lambda_m+2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{\lambda_1+(m-1)r} & x_{\lambda_2+(m-1)r} & \cdots & x_{\lambda_m+(m-1)r} \end{pmatrix}$$

Então temos os homorfismos de K-álgebras:

$$\begin{aligned} \phi : K[\Lambda(m,n)] &\longrightarrow K[M] \\ [\lambda] &\longmapsto |[\lambda]| \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \psi : K[\Lambda(m,n)] &\longrightarrow K[\mathrm{in}_\sigma(M)] \\ [\lambda] &\longmapsto \mathrm{in}_\sigma(|[\lambda]|) \end{aligned}$$

Vamos estudar neste capítulo algumas propriedades das álgebras $K[M]$ e $K[\mathrm{in}_\sigma(M)]$ por via destes homorfismos.

1. Tableaux

Uma maneira conveniente de trabalhar com monômios de $K[\Lambda(m,n)]$ e seus correspondentes produtos de menores em $K[M]$ é através de suas representações por meio de *tableaux*.

Dado um monômio $T = [\lambda^1]\dots[\lambda^t] \in K[\Lambda(m,n)]$ com $[\lambda^i] = [\lambda^i_1, \dots, \lambda^i_m]$, podemos escrever T como uma matriz:

$$T = \begin{bmatrix} \lambda^1_1 & \lambda^1_2 & \dots & \lambda^1_m \\ \lambda^2_1 & \lambda^2_2 & \dots & \lambda^2_m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda^t_1 & \lambda^t_2 & \dots & \lambda^t_m \end{bmatrix} \tag{1}$$

Denominaremos T de *t-tableau*. Notemos que um t-tableau representa um monômio de grau t em $K[\Lambda(m,n)]$. Dado um t-tableau T, denotaremos por $\phi(T) = |T|$, a sua imagem como um produto de t menores máximos em $K[X]$. Por conveniência nos referiremos ao produto $|T| \in K[X]$ também como sendo um tableau.

Definiremos a *diagonal* de T como $\mathrm{diag}(T) = \mathrm{in}_\sigma(\phi(T)) = \psi(T)$, ou seja, como o produto das diagonais dos menores da expansão de T em $K[X]$.

Definição I.1.1. Dois tableaux T e $\tilde{T}$ serão ditos equivalentes se $\mathrm{diag}(T) = \mathrm{diag}(\tilde{T})$.

Nosso interesse agora é determinar um "bom representante" para cada classe de equivalência dos tableaux. Para tal, introduziremos a noção de tableau r-standard.

T é dito *standard* se $\lambda^1_j \le \lambda^2_j \le \dots \le \lambda^t_j \ \forall j \in \{1, \dots, m\}$.

Agora, se T for standard, definimos os seguintes conjuntos para $1 \le i < j \le t$:

$$\mathcal{O}_{ij}(T) = \left\{k \in \{1, \dots, m-1\}, \text{tais que } \lambda^j_k - \lambda^i_{k+1} > r\right\}$$

e

$$\mathcal{O}(T) = \bigcup_{1 \le i < j \le t} \mathcal{O}_{ij}(T)$$

Definição I.1.2. T é dito *r-standard* se T for standard e $\mathcal{O}(T) = \emptyset$.

Veremos agora que todo tableau é equivalente a um tableau r-standard (que será único). Para tanto vamos definir inicialmente duas operações "elementares" sobre tableaux.

Sendo T tableau como em (1), definimos $s(T)$ como o tableau standard obtido de T ordenando as colunas.

Se T for standard , para cada $1 \le i < j \le t$ definimos $o_{ij}(T) = \tilde{T}$ como sendo o tableau $\tilde{T} = [\tilde{\lambda}^1].\dots.[\tilde{\lambda}^t] \in K[\Lambda(m,n)]$ com $[\tilde{\lambda}^k] = [\tilde{\lambda}^k_1, \dots, \tilde{\lambda}^k_m]$, $1 \le k \le t$, onde

(i) $\begin{cases} \tilde{\lambda}^i_{k+1} = \lambda^j_k - r \\ \tilde{\lambda}^j_k = \lambda^i_{k+1} + r \end{cases}$ para $k \in \mathcal{O}_{ij}(T)$.

(ii) $\begin{cases} \tilde{\lambda}^i_{k+1} = \lambda^i_{k+1} \\ \tilde{\lambda}^j_k = \lambda^j_k \end{cases}$ para $k \notin \mathcal{O}_{ij}(T)$.

(iii) $\tilde{\lambda}^l_k = \lambda^l_k$ se $l \notin \{i, j\}$.

É fácil de verificar que $\mathrm{diag}(s(T)) = \mathrm{diag}(T)$ e $\mathrm{diag}(o_{ij}(T)) = \mathrm{diag}(T)$, se T for standard neste último caso.

Dado um tableau T decreveremos agora um método para construir um tableau r-standard equivalente a T.

I.1.3 – Método de r-standartização. *Seja T um t-tableau e escrevamos $T^{(0)} = T$. O processo indutivo é o seguinte:*

I) Seja $T^{(i+1)} = s(T^{(i)})$

II) Se $T^{(i+1)}$ for r-standard, então $T^{(i+1)}$ é o tableau procurado.

III) Se $T^{(i+1)}$ não for r-standard, seja $l \in \{2, \dots, t\}$ o primeiro inteiro tal que $\mathcal{O}_{1l}(T^{(i+1)}) \neq \emptyset$ e tomamos $T^{(i+2)} = o_{1l}(T^{(i+1)})$.

IV) Volta a (I) com $T^{(i+2)}$.

OBSERVAÇÃO. O passo (I) no processo descrito acima foi colocado para simplificar a ordem de aplicação das operações s e o_{1l}. Observemos que se $T^{(i)}$ for standard, então $s(T^{(i)}) = T^{(i)}$.

Exemplo. Antes de provar a validade deste algoritmo, daremos um exemplo que apresenta as principais características do procedimento acima. Seja $X = X(4, 13, 1)$ a matriz de tamanho 4×13 e 1-catalética:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} & x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} & x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} & x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} & x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} & x_{16} \end{pmatrix}$$

Seja

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 4 & 6 & 9 & 10 \\ 5 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 10 & 11 & 13 \end{bmatrix}$$

T é um 4-tableau não standard, e portanto certamente não 1-standard. Temos que

$$\mathrm{diag}(T) = x_1 x_3^2 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8 x_{10}^2 x_{11}^2 x_{12} x_{13}^2 x_{16}.$$

Vamos aplicar o algoritmo a T:

$$T^{(1)} = s(T) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 3 & 6 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & 9 & 10 \\ 5 & 10 & 11 & 13 \end{bmatrix}$$

Temos $\mathcal{O}_{12}(T^{(1)}) = \{2\}$, $\mathcal{O}_{13}(T^{(1)}) = \mathcal{O}_{14}(T^{(1)}) = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{O}_{23}(T^{(1)}) = \mathcal{O}_{34}(T^{(1)}) = \emptyset$, $\mathcal{O}_{24}(T^{(1)}) = \{2, 3\}$,. Então

$$T^{(2)} = o_{12}(T^{(1)}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & 9 & 10 \\ 5 & 10 & 11 & 13 \end{bmatrix}$$

$T^{(3)} = s(T^{(2)}) = T^{(2)}$. E $\mathcal{O}_{12}(T^{(3)}) = \mathcal{O}_{23}(T^{(3)}) = \mathcal{O}_{34}(T^{(3)}) = \emptyset$, $\mathcal{O}_{13}(T^{(3)}) = \mathcal{O}_{14}(T^{(3)}) = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{O}_{24}(T^{(3)}) = \{2, 3\}$. Logo

$$T^{(4)} = o_{13}(T^{(3)}) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & 8 \\ 3 & 5 & 8 & 9 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \\ 5 & 10 & 11 & 13 \end{bmatrix}$$

$T^{(5)} = s(T^{(4)}) = T^{(4)}$. E $\mathcal{O}_{12}(T^{(5)}) = \mathcal{O}_{13}(T^{(5)}) = \mathcal{O}_{23}(T^{(5)}) = \emptyset$, $\mathcal{O}_{14}(T^{(5)}) = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{O}_{24}(T^{(5)}) = \{2, 3\}$, $\mathcal{O}_{34}(T^{(5)}) = \{2\}$. Então

$$T^{(6)} = o_{14}(T^{(5)}) = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 9 & 10 \\ 3 & 5 & 8 & 9 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \\ 4 & 7 & 9 & 13 \end{bmatrix}$$

$$T^{(7)} = s(T^{(6)}) = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 8 & 9 \\ 3 & 5 & 8 & 10 \\ 3 & 6 & 9 & 10 \\ 4 & 7 & 9 & 13 \end{bmatrix}$$

e $\mathcal{O}_{12}(T^{(7)}) = \mathcal{O}_{13}(T^{(7)}) = \mathcal{O}_{14}(T^{(7)}) = \mathcal{O}_{23}(T^{(7)}) = \mathcal{O}_{24}(T^{(7)}) = \mathcal{O}_{34}(T^{(7)}) = \emptyset$

Logo $T^{(7)}$ é 1-standard, e possui a mesma diagonal de T.

Proposição I.1.4. *O método de r-standartização descrito acima é algoritmico.*

Demonstração. Seja

$$T = \begin{bmatrix} \lambda_1^1 & \lambda_2^1 & \dots & \lambda_m^1 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_m^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^t & \lambda_2^t & \dots & \lambda_m^t \end{bmatrix}$$

um t-tableau, que já vamos supor standard, ou seja, $T^{(1)} = T^{(0)} = T$. Primeiro temos o seguinte fato simples de verificar:

FATO: Se $\lambda_i^u - \lambda_{i+1}^1 \leq r$ para $2 \leq u \leq t$ e $1 \leq i \leq m-1$ então $\lambda_i^j - \lambda_{i+1}^k \leq r$ para todo $j \in \{1, \dots, u\}$ e $k \in \{1, \dots, t\}$

Seja $I = \{(i,j)$, com $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq t\}$ ordenado da seguinte forma: $(i,j) > (h,k)$ se $i < h$ ou $i = h$ e $j < k$.

Seja $S = \{(i,j) \in I$ tais que $\lambda_i^j - \lambda_{i+1}^1 > r\}$ e seja $m(T) = \max S$. Convencionamos $m(T) = (m,t)$ se $S = \emptyset$.

A demonstração será por indução em $m(T)$. Se $S = \emptyset$, $m(T) = (m,t)$ e T é r-standard. Agora seja $m(T) = (l,u)$ e suponhamos por indução que se $m(T') < (l,u)$ para T' t-tableau standard, então o algoritmo vale para T'.

Nas condições descritas e usando o fato acima,

$$\begin{aligned} &\lambda_l^u - \lambda_{l+1}^1 > r \\ &\lambda_i^j - \lambda_{i+1}^k \leq r \text{ se } i \in \{1, \dots, l-1\} \text{ e } 1 \leq k < j \leq t \\ &\lambda_l^j - \lambda_{l+1}^k \leq r \text{ se } 1 \leq k < j \leq u-1 \end{aligned}$$

Logo

$$T^{(2)} = o_{1u}(T) = \begin{bmatrix} \lambda_1^1 & \lambda_2^1 & \dots & \lambda_l^1 & \lambda_l^u - r & \tilde{\lambda}_{l+2}^1 & \dots & \tilde{\lambda}_{m-1}^1 & \tilde{\lambda}_m^1 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_l^2 & \lambda_{l+1}^2 & \lambda_{l+2}^2 & \dots & \lambda_{m-1}^2 & \lambda_m^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^u & \lambda_2^u & \dots & \lambda_{l+1}^1 + r & \tilde{\lambda}_{l+1}^u & \tilde{\lambda}_{l+2}^u & \dots & \tilde{\lambda}_{m_1}^u & \lambda_m^u \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^t & \lambda_2^t & \dots & \lambda_l^t & \lambda_{l+1}^t & \lambda_{l+2}^t & \dots & \lambda_{m-1}^t & \lambda_m^t \end{bmatrix}$$

Escrevendo $T^{(3)} = s(o_{1u}(T))$, denotamos

$$T^{(3)} = \begin{bmatrix} \lambda_1^{1(3)} & \lambda_2^{1(3)} & \dots & \lambda_l^{1(3)} & \lambda_{l+1}^{1(3)} & \dots & \lambda_m^{1(3)} \\ \lambda_1^{2(3)} & \lambda_2^{2(3)} & \dots & \lambda_l^{2(3)} & \lambda_{l+1}^{2(3)} & \dots & \lambda_m^{2(3)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{u(3)} & \lambda_2^{u(3)} & \dots & \lambda_l^{u(3)} & \lambda_{l+1}^{u(3)} & \dots & \lambda_m^{u(3)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{t(3)} & \lambda_2^{t(3)} & \dots & \lambda_l^{t(3)} & \lambda_{l+1}^{t(3)} & \dots & \lambda_m^{t(3)} \end{bmatrix}$$

Como $\lambda_l^{u-1} \leq \lambda_{l+1}^1 + r < \lambda_l^u \leq \lambda_l^{u+1}$ então $\lambda_l^{u(3)} = \lambda_{l+1}^1 + r$ e $\lambda_i^{j(3)} = \lambda_i^j$ para $(i,j) \geq (l,t)$ e $i \neq l$, $j \neq u$.

Temos ainda que $\lambda_{l+1}^1 \leq \lambda_{l+1}^{i(3)}$ para $1 \leq i \leq t$. De fato, há dois casos possíveis:

CASO (1) $\lambda_{l+1}^u - \lambda_{l+2}^1 \leq r$. Neste caso $\{\lambda_{l+1}^{i(3)}, 1 \leq i \leq t\} = \{\lambda_l^u - r\} \cup \{\lambda_{l+1}^i, 1 < i \leq t\}$ e então é claramente verdade.

CASO (2) $\lambda_{l+1}^u - \lambda_{l+2}^1 > r$. Neste caso $\{\lambda_{l+1}^{i(3)}, 1 \leq i \leq t\} = \{\lambda_l^u - r,\ \lambda_{l+2}^1 + r\} \cup \{\lambda_{l+1}^i, 1 < i \leq t,\ i \neq u\}$ e como $\lambda_{l+1}^1 < \lambda_{l+2}^1$ também é claro.

Logo temos $\lambda_l^{u(3)} - \lambda_{l+1}^{1(3)} < \lambda_l^u - \lambda_{l+1}^1$. Se $\lambda_l^{u(3)} - \lambda_{l+1}^{1(3)} \leq r$ então $m(T^{(3)}) < (l,u)$ e aplicamos a hipótese de indução. Se $\lambda_l^{u(3)} - \lambda_{l+1}^{1(3)} > r$ repetimos o processo com $T^{(3)}$ e encontramos $T^{(5)}$ com $\lambda_l^{u(5)} - \lambda_{l+1}^{1(5)} < \lambda_l^{u(3)} - \lambda_{l+1}^{1(3)}$. Continuando este processo eventualmente teremos uma etapa v (v ímpar) em que $m(T^{(v)}) < (l,u)$, quando valerá a hipótese de indução. □

Como conseqüência da demonstração de I.1.4, temos uma caracterização mais simples de tableaux r-standard.

Corolário I.1.5. *Um t-tableau T é r-standard se e só se T for standard e $\mathcal{O}_{1t}(T) = \emptyset$.*

Para a demonstração do lema seguinte observamos que se T é um t-tableau como em (1) então

$$\operatorname{diag}(T) = \prod_{j=1}^{t} \prod_{i=1}^{m} x_{\lambda_i^j + (i-1)r}$$

Lema I.1.6. *Dados dois tableaux T e $\tilde{T}$ r-standard tais que* $\operatorname{diag}(T) = \operatorname{diag}(\tilde{T})$ *então $T = \tilde{T}$.*

Demonstração. É claro que ambos T e $\tilde{T}$ são tableaux de mesmo grau. Sejam portanto

$$T = \begin{bmatrix} \lambda_1^1 & \lambda_2^1 & \dots & \lambda_m^1 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_m^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^t & \lambda_2^t & \dots & \lambda_m^t \end{bmatrix}$$

e

$$\tilde{T} = \begin{bmatrix} \tilde{\lambda}_1^1 & \tilde{\lambda}_2^1 & \dots & \tilde{\lambda}_m^1 \\ \tilde{\lambda}_1^2 & \tilde{\lambda}_2^2 & \dots & \tilde{\lambda}_m^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \tilde{\lambda}_1^t & \tilde{\lambda}_2^t & \dots & \tilde{\lambda}_m^t \end{bmatrix}$$

Demonstraremos por indução em m. Se $m = 1$ é trivial. Seja então $m > 1$ e suponhamos válido para $m-1$. É fácil verificar que $\lambda_1^1 = \tilde{\lambda}_1^1$. Seja $u \in \{1, \dots, t, t+1\}$ tal que $\lambda_1^1 = \tilde{\lambda}_1^1, \dots, \lambda_1^{u-1} = \tilde{\lambda}_1^{u-1}$ e $\lambda_1^u \neq \tilde{\lambda}_1^u$ e convencionamos $u = t+1$ se $\lambda_1^i = \tilde{\lambda}_1^i$ para $1 \leq i \leq t$. Vamos provar que $u > t$. Suponhamos por absurdo que $\lambda_1^u < \tilde{\lambda}_1^u$. Como $x_{\lambda_1^u}$ é fator de $\operatorname{diag}(\tilde{T})$ então teremos que

$$\lambda_1^u = \tilde{\lambda}_j^k + (j-1)r$$

para algum $k \in \{1, \dots, u-1\}$ e algum $j \in \{2, \dots, m\}$. Mas então

$$\tilde{\lambda}_j^k + (j-1)r = \lambda_1^u < \tilde{\lambda}_1^u \leq \tilde{\lambda}_{j-1}^u$$

donde

$$\tilde{\lambda}_{j-1}^u - \tilde{\lambda}_j^k > (j-1)r \geq r$$

o que é absurdo.

Logo $\lambda_1^1 = \tilde{\lambda}_1^1, \dots, \lambda_1^t = \tilde{\lambda}_1^t$.

Agora consideramos os tableaux

$$T' = \begin{bmatrix} \lambda_2^1 + r & \dots & \lambda_m^1 + r \\ \lambda_2^2 + r & \dots & \lambda_m^2 + r \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_2^t + r & \dots & \lambda_m^t + r \end{bmatrix}$$

e

$$\tilde{T}' = \begin{bmatrix} \tilde{\lambda}_2^1 + r & \dots & \tilde{\lambda}_m^1 + r \\ \tilde{\lambda}_2^2 + r & \dots & \tilde{\lambda}_m^2 + r \\ \vdots & & \vdots \\ \tilde{\lambda}_2^t + r & \dots & \tilde{\lambda}_m^t + r \end{bmatrix}$$

em relação à matriz X' obtida de X retirando-se a primeira linha e a primeira coluna. Por indução $T' = \tilde{T}'$, donde concluímos o desejado. □

Temos então que os tableaux de $K[\Lambda(m,n)]$ estão divididos em classes de equivalência pela comparação de suas diagonais, e temos um representante único em cada classe, que são os tableaux r-standard.

Definição I.1.7. Seja $T \in K[\Lambda(m,n)]$ um tableau. Designaremos por $rs(T)$ o único tableau r-standard equivalente a T.

OBSERVAÇÃO. Observamos que se $n - m - 1 \leq r$ então $rs(T) = s(T)$. De fato, dados dois colchetes $[\lambda]$ e $[\mu]$, temos neste caso que $i \leq \lambda_i$, $\tau_i \leq n - m + i$. Logo $\tau_i - \lambda_{i+1} \leq n - m + i - (i+1) = n - m - 1 \leq r$.

Seja $S_r = \{|T| = \phi(T) \in K[X],\ T \in K[\Lambda(m,n)]$ r-standard $\}$. Temos o seguinte corolário do lema I.1.6:

Lema I.1.8. *S_r é linearmente independente.*

Demonstração. Seja $F \subset S_r$ um subconjunto finito. Ordenemos F de acordo com as diagonais, ou seja, $F = \{|T_1|, \dots, |T_u|\}$ onde $\text{diag}(T_i) \geq_\sigma \text{diag}(T_{i+1})$, $1 \leq i \leq u-1$. Queremos provar que se $a_1|T_1| + \dots + a_u|T_u| = 0$ com $a_i \in K$, então $a_i = 0$ para $1 \leq i \leq u$.

Podemos supor que todos os tableaux de F são de mesmo grau e distintos. Se $\text{diag}(T_i) = m_i$, pela unicidade, $m_1 >_\sigma m_2 >_\sigma \dots >_\sigma m_u$. Supondo, por absurdo, que $a_1 \neq 0$, concluímos que m_1 deve aparecer como parcela de algum tableau $|T_i|$, $2 \leq i \leq u$. Mas então $m_i >_\sigma m_1$, o que é absurdo. □

2. Apresentação de Álgebras

Nesta seção estudaremos a apresentação da álgebra inicial catalética via ψ. Melhor dizendo, estudaremos o núcleo $\ker\psi$ de ψ.

Temos o seguinte

Teorema I.2.1. *O núcleo $\ker\psi$ de ψ é gerado pelos binômios da forma*

$$[\lambda][\mu] - rs([\lambda][\mu])$$

para todos os colchetes $[\lambda]$, $[\mu] \in \Lambda(m,n)$.

A demonstração do teorema depende de alguns lemas que passamos a considerar. Procederemos por etapas. Primeiro vamos fazer algumas reduções.

Seja $J = ([\lambda][\mu] - rs([\lambda][\mu]))$. Como é claro que $J \subset \ker\psi$, mostraremos a continência recíproca. Para isto tomaremos $f \in \ker\psi$ e mostraremos que $f \in J$. Seja $f \in K[\Lambda(m,n)]$ com $\psi(f) = 0$. Escreveremos f de maneira conveniente:

$$f = \sum_{i_1 \in I_1} a_{i_1} T_{i_1} + \sum_{i_2 \in I_2} a_{i_2} T_{i_2} + \dots + \sum_{i_k \in I_k} a_{i_k} T_{i_k}$$

onde $a_{i_j} \in K$ e $\psi(T_i) = \psi(T_j)$ se e somente se $i, j \in I_l$ para algum $l \in \{1, \dots, k\}$

Como $\psi(f) = 0$, então por I.1.7 temos

$$\sum_{i_1 \in I_1} a_{i_1} = \ldots = \sum_{i_k \in I_k} a_{i_k} = 0 \tag{2}$$

Para cada j, $1 \leq j \leq k$ seja T_j o único tableau r-standard tal que $\psi(T_j) = \psi(T_{i_j})$. Usando (2) podemos reescrever f:

$$f = \sum_{i_1 \in I_1} a_{i_1}(T_{i_1} - T_1) + \sum_{i_2 \in I_2} a_{i_2}(T_{i_2} - T_2) + \ldots + \sum_{i_k \in I_k} a_{i_k}(T_{i_k} - T_k)$$

É claro que $T_{i_j} - T_j \in \ker\psi$. Logo basta mostrar que $T_{i_j} - T_j \in J$, ou seja, reduzimos o problema a mostrar que os binômios da forma $T - rs(T)$ pertencem a J.

O método de r-standartização (I.1.3) nos dá uma seqüência de tableaux

$$T = T^{(0)}, T^{(1)}, \ldots, T^{(k)} = rs(T)$$

com as seguintes propriedades:

(i) $T^{(j)} = s(T^{(j-1)})$ se j for ímpar

(ii) $T^{(j-1)}$ é standard e $T^{(j)} = o_{1l}(T^{(j-1)})$ se j for par não nulo (a escolha de l sendo como descrita em I.1.3)

Usando esta seqüência, temos

$$T - rs(T) = (T - T^{(1)}) + (T^{(1)} - T^{(2)}) + \ldots + (T^{(k-1)} - rs(T))$$

o que reduz o nosso problema a mostrar que os binômios da forma $T - s(T)$ pertencem a J qualquer que seja o tableau T; e que se T for standard, $T - o_{ij}(T)$ também pertence a J. Vamos estabelecer estes fatos como dois lemas separados:

Lema I.2.2. *Se T for um tableau standard, então $T - o_{ij}(T) \in J$.*

Demonstração. A demonstração segue diretamente da definição de o_{ij}. □

Lema I.2.3. *Dado tableau T qualquer, $T - s(T) \in J$.*

Demonstração. A demonstração segue dos resultados em [S], mas preferimos dar uma demonstração direta. Para tal, descrevemos um algoritmo cuja demonstração é análoga à demonstração de I.1.3:

I.2.4 – Método de standartização. *Seja $T = [\lambda^1]\ldots[\lambda^t]$ um t-tableau e escrevamos $T^{(0)} = T$. Para $i \geq 0$:*

I) Se $T^{(i)}$ for standard, então este é o tableau procurado.

II) Se $T^{(i)}$ não for standard, sejam k, l os menores inteiros com $1 \leq k < l \leq t$ tais que $[\lambda^k][\lambda^l]$ seja não standard e tomamos $T^{(i+1)} = [\lambda^1]\ldots[\tilde{\lambda}^k]\ldots[\tilde{\lambda}^l]\ldots[\lambda^t]$ onde $[\tilde{\lambda}^k][\tilde{\lambda}^l] = s([\lambda^k][\lambda^l])$

III) Volta a (I) com $T^{(i+1)}$.

Agora, usando o fato que $[\lambda][\mu] - s([\lambda][\mu]) \in J$, juntamente com o algoritmo acima, é fácil verificar a validade do lema. □

Demonstração de I.2.1. O teorema é conseqüência direta dos lemas I.2.2 e I.2.3 e das reduções descritas. □

Na seqüência determinaremos uma base de Gröbner para $\ker\psi$. Definiremos uma ordem adequada em $K[\Lambda(m,n)]$ tal que os geradores de $\ker\psi$ encontrados em I.2.1 formem eles próprios uma base de Gröbner. Para a definição de base de Gröbner, vide A.4.2.

Proposição I.2.5. *Existe uma ordem monomial* $<_\tau$ *em* $K[\Lambda(m,n)]$ *tal que*

$$[\lambda][\mu] \geq_\tau s([\lambda][\mu]) \geq_\tau rs([\lambda][\mu])$$

Demonstração. A demonstração consiste em definir uma relação de ordem entre os monômios de $K[\Lambda(m,n)]$ que possua as propriedades desejadas.

Dado um tableau $T = [\lambda_i^j]$ para $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq d$, seja $e(T)$ a seqüência dos inteiros λ_i^j ordenados em ordem decrescente. Definimos então a ordem τ da seguinte maneira: sejam T_1 e T_2 tableaux; então $T_1 >_\tau T_2$ se:

(i) $\deg T_1 > \deg T_2$;

(ii) $\deg T_1 = \deg T_2$ e $e(T_1) > e(T_2)$ lexicograficamente;

(iii) $\deg T_1 = \deg T_2$, $e(T_1) = e(T_2)$ e $T_1 > T_2$ na ordem lexicográfica reversa determinada pela ordem nas variáveis induzida por (ii).

A verificação que a ordem definida assim é realmente uma relação de ordem é simples. Para verificar que é ordem monomial temos que mostrar que se $T_1 >_\tau T_2$ então $T_1T_3 >_\tau T_2T_3$ para qualquer tableau T_3.

Se $\deg T_1 > \deg T_2$ ou se $\deg T_1 = \deg T_2$ e $e(T_1) = e(T_2)$ então é fácil de ver que $T_1T_3 >_\tau T_2T_3$. Agora se $\deg T_1 = \deg T_2$ e $e(T_1) > e(T_2)$ escrevemos $e(T_1) = (e_i)$ e $e(T_2) = (e_i')$. Seja $j \geq 1$ tal que $e_i = e_i'$ para $1 \leq i < j$ e $e_j > e_j'$. Seja $e(T_3) = (e_l'')$ e tomemos k o maior inteiro tal que $e_k'' \geq e_j$ e $e_{k+1}'' < e_j$ (convencionamos $k = 0$ se $e_l'' < e_j$ para todo l). Então $e(T_1T_3) = (A, e_j, \dots)$ e $e(T_2T_3) = (A', v, \dots)$ onde A representa a seqüência ordenada dos elementos do conjunto

$$\{e_1, \dots, e_{j-1}\} \cup \{e_1'', \dots, e_k''\}$$

e A' representa o mesmo para o conjunto

$$\{e_1', \dots, e_{j-1}'\} \cup \{e_1'', \dots, e_k''\}$$

Temos então que $v = e_j'$ ou $v = e_{k+1}''$. Em ambos os casos $v < e_j$, donde $T_1T_3 >_\tau T_2T_3$

Provamos que $<_\tau$ é ordem monomial. Agora vamos verificar que satisfaz às propriedades enunciadas.

Seja $T = [\lambda][\mu]$ um 2-tableau com $[\lambda] = [\lambda_1 \dots \lambda_m]$ e $[\mu] = [\mu_1 \dots \mu_m]$. Suponhamos inicialmente que T seja não standard. Neste caso seja j o maior inteiro tal que $\lambda_j \neq \mu_j$. Podemos supor $\lambda_j < \mu_j$. Com esta escolha, seja $k < j$ o maior inteiro tal que $\lambda_k > \mu_k$. Seja $s(T) = [\lambda'][\mu']$. Temos

$$T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & \lambda_{k-1} & \lambda_k & \dots & \lambda_j & \dots & \lambda_m \\ \mu_1 & \dots & \mu_{k-1} & \mu_k & \dots & \mu_j & \dots & \mu_m \end{bmatrix}$$

$$s(T) = \begin{bmatrix} \lambda_1' & \dots & \lambda_{k-1}' & \mu_k & \lambda_{k+1} & \dots & \lambda_j & \dots & \lambda_m \\ \mu_1' & \dots & \mu_{k-1}' & \lambda_k & \mu_{k+1} & \dots & \mu_j & \dots & \mu_m \end{bmatrix}$$

Denotaremos $f_1 = [\lambda]$, $f_2 = [\mu]$, $g_1 = [\lambda']$, $g_2 = [\mu']$; assim $T = f_1f_2$ e $s(T) = g_1g_2$. De acordo com a definição da ordem τ temos

$$g_1 <_\tau f_1 <_\tau f_2 <_\tau g_2$$

Pela ordem lexicográfica reversa aplicada a T e $s(T)$ (como na condição (iii) da definição), o expoente correspondente a g_1 em T é 0, e o expoente correspondente a g_1 em $s(T)$ é 1, e $1 > 0$, donde $T >_\tau s(T)$.

Agora suponhamos T standard, mas não r-standard. Seja $1 < i \leq m$ o menor inteiro tal que $\mathcal{O}(T) \subset \{1, \dots, i-1\}$. Escrevemos

$$T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & \lambda_{i-1} & \lambda_i & \lambda_{i+1} & \dots & \lambda_m \\ \mu_1 & \dots & \mu_{i-1} & \mu_i & \mu_{i+1} & \dots & \mu_m \end{bmatrix}$$

e

$$o(T) = o_{12}(T) = \begin{bmatrix} \lambda'_1 & \cdots & \lambda'_{i-1} & \lambda'_i & \lambda'_{i+1} & \cdots & \lambda'_m \\ \mu'_1 & \cdots & \mu'_{i-1} & \mu'_i & \mu'_{i+1} & \cdots & \mu'_m \end{bmatrix}$$

onde $\lambda'_1 = \lambda_1$, $\mu'_i = \mu_i$ e $\lambda'_p = \lambda_p$, $\mu'_p = \mu_p$ para $i+1 \leq p \leq m$.

Temos $\mu_{i-1} - \lambda_i > r$ e $\lambda'_i = \mu_{i-1} - r$, $\mu'_{i-1} = \lambda_i + r$, donde tiramos as desigualdades

$$\begin{aligned} \lambda'_i &> \lambda_i \\ \mu'_{i-1} &< \mu_{i-1} \\ \lambda_i &< \mu_{i-1} \\ \lambda'_i &< \mu_{i-1} \end{aligned}$$

Usando estas desigualdades, concluímos que

$$\begin{aligned} e(T) &= (\mu_m, \ldots, \mu_i, v, \ldots) \\ e(o(T)) &= (\mu_m, \ldots, \mu_i, v', \ldots) \end{aligned}$$

onde v e v' estão na mesma posição e os elementos à esquerda de μ_i são os mesmos nas duas seqüências.

Temos as seguintes possibilidades:

(a) $v = \lambda_k$ para algum $k > i$ e $\mu_{i-1} \leq \lambda_k$, pois $\mu_i > \mu_{i-1} > \lambda_i$

(b) $v = \mu_{i-1}$

(a') $v' = \lambda'_l$ para algum $l \geq i$ e $\lambda_l < \mu_i$, pois $\mu_i > \mu'_{i-1}$ e $\mu_i \geq \lambda'_i$

(b') $v' = \mu'_{i-1}$

Se acontece (b'), como $\mu'_{i-1} < \mu_{i-1} \leq \lambda_k$, então $v' < v$ e $e(T) > e(o(T))$.

Em (a') temos duas possibilidades:

(a'.1) $v' = \lambda'_i$. Neste caso, como $\lambda_k = \lambda'_k$ para $k > i$ e como $\mu_{i-1} > \lambda'_i$, então $v' < v$ e $e(T) > e(o(T))$.

(a'.2) $v' = \lambda_l$ para $l > i$. Neste caso temos, pela definição de $e()$, que $\mu_i > \lambda_l \geq \mu'_{i-1}$. Novamente analisaremos dois casos:

(a'.2.1) Se $\lambda_l \geq \mu_{i-1}$ então $v = \lambda_l$. Seja p, com $i < i+p \leq l$ tal que

$$\begin{aligned} e(T) &= (\mu_m, \ldots, \mu_i, \lambda_k, \ldots, \lambda_{i+p}, \mu_{i-1}, \ldots) \\ e(o(T)) &= (\mu_m, \ldots, \mu_i, \lambda_k, \ldots, \lambda_{i+p}, w', \ldots) \end{aligned}$$

onde $w' = \lambda'_{i+p-1}$ ou $w' = \mu'_{i-1}$. Em ambos os casos, $e(T) > e(o(T))$.

(a'.2.2) Se $\lambda_l < \mu_{i-1}$ então $\mu_i > \mu_{i-1} > \lambda_l$ e certamente $v' < v$, donde $e(T) > e(o(T))$

Então provamos que a ordem assim definida possui as propriedades desejadas, e assim a proposição I.2.5 fica demonstrada. □

Corolário I.2.6. *Seja $T \in K[\Lambda(m,n)]$ um tableau arbitrário. Então $T \geq_\tau s(T) \geq_\tau rs(T)$.*

Teorema I.2.7. *O conjunto*

$$\{[\lambda][\mu] - rs([\lambda][\mu]) \ \forall\ [\lambda],[\mu] \in K[\Lambda(m,n)]\}$$

é uma base de Gröbner para $\ker\psi$ na ordem $<_\tau$, e $\mathrm{in}_\tau(\ker\psi)$ é gerado pelos monômios da forma $[\lambda][\mu]$ não r-standard.

Demonstração. Seja $\mathcal{M} = \{[\lambda][\mu] \in K[\Lambda(m,n)]$ tal que $[\lambda][\mu]$ seja não r-standard $\}$ ideal em $K[\Lambda(m,n)]$. Seja $J = \mathrm{in}_\tau(\ker\psi)$ na ordem $<_\tau$. Temos que $\mathcal{M} \subset J$. Precisamos provar a inclusão

reversa. A demonstração será feita em dois passos. Primeiro provaremos que cada tableau não r-standard está em $\mathcal{M}$ e então provaremos que cada monômio em J é um tableau não r-standard.

Seja $T = [\lambda^1] \dots [\lambda^t]$ um tableau não r-standard. Se T for não standard, existem inteiros i, j com $1 \leq i < j \leq t$ tais que $[\lambda^i][\lambda^j]$ é não standard, e portanto está em $\mathcal{M}$, donde $T \in \mathcal{M}$. Se T for standard, como antes existem inteiros i, j com $1 \leq i < j \leq t$ tais que $\mathcal{O}_{ij}(T) \neq \emptyset$. Neste caso também $[\lambda^i][\lambda^j] \in \mathcal{M}$ e portanto $T \in \mathcal{M}$.

Suponhamos agora que algum tableau r-standard T esteja em J, ou seja, $T = \mathrm{in}_\tau(f)$ para algum $f \in \ker\psi$ não nulo. Se f fosse constituído apenas por monômios r-standard, por I.1.5 teríamos $\psi(f) = 0 \Rightarrow f = 0$. Logo, por um argumento análogo ao usado em I.1.7, deve existir um tableau não r-standard T' na expansão de f tal que $\psi(T) = \psi(T')$. Mas por I.2.6 teríamos $T' >_\tau T$, uma contradição. □

3. Álgebras de Rees

Vamos estudar agora a álgebra de Rees associada a $K[\mathrm{in}_\sigma(M)]$. Se I é o ideal em $K[X]$ gerado pelos elementos do conjunto $\mathrm{in}_\sigma(M)$, a álgebra de Rees associada á álgebra inicial catalética é $\mathcal{R}(I) = \oplus_{i\geq 0} I^i t^i \subset K[X,t]$. Podemos ver que neste caso $\mathcal{R}(I)$ é isomorfa a $K[X, \mathrm{in}_\sigma(M)t] \subset K[X,t]$. Escolheremos uma ordem monomial σ' em $K[X,t]$ como se segue: se μt^i e μt^j são monômios de $K[X,t]$, com μ, μ' monômios em $K[X]$, então $\mu t^i <_{\sigma'} \mu' t^j$ se $i < j$ ou se $i = j$ e $\mu <_\sigma \mu'$ com respeito à ordem $<_\sigma$ de $K[X]$.

Consideremos o homomorfismo sobrejetor

$$\begin{aligned} \Psi : K[X, \Lambda(m,n)] &\longrightarrow K[X, \mathrm{in}_\sigma(M)t] \\ x_i &\longmapsto x_i \\ [\lambda] &\longmapsto \mathrm{in}_\sigma(|[\lambda]|)t = \psi([\lambda])t \end{aligned}$$

Temos o

Teorema I.3.1. *$\ker\Psi$ é gerado pelos seguintes binômios:*

(i) $x_{l+(k-1)r}[\lambda_1 \dots \lambda_m] - x_{\lambda_k+(k-1)r}[\lambda_1 \dots \lambda_{k-1} l \lambda_{k+1} \dots \lambda_m]$

para $1 \leq k \leq m$ e $1 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_{k-1} < l < \lambda_k < \dots < \lambda_m \leq n$.

(ii) $[\lambda][\mu] - rs([\lambda][\mu])$

para quaisquer 2-tableaux não r-standard $[\lambda][\mu]$ de $K[\Lambda(m,n)]$.

Demonstração. A demonstração deste teorema será dividida em várias etapas. Começaremos com algumas simplificações. É fato conhecido que $\ker\Psi$ é gerado por binômios (ver I.2.1, por exemplo). Então basta mostrar que dado $f = u_1T_1 - u_2T_2 \in \ker\Psi$ onde u_i é um monômio em $K[X]$ e T_i indica um tableaux em $K[\Lambda(m,n)]$, f pode ser escrito como combinação das relações (i) e (ii). Observamos que $f \in \ker\Psi$ implica que $\deg(u_1)$=$\deg(u_2)$ e que T_1 e T_2 são d-tableaux para algum d.

Sejam $\tilde{T}_1 = rs(T_1)$ e $\tilde{T}_2 = rs(T_2)$. Temos

$$\begin{aligned} f =& u_1T_1 - u_1\tilde{T}_1 + u_1\tilde{T}_1 - u_2\tilde{T}_2 + u_2\tilde{T}_2 - u_2T_2 = \\ =& u_1(T_1 - \tilde{T}_1) + (u_1\tilde{T}_1 - u_2\tilde{T}_2) + u_2(\tilde{T}_2 - T_2) \end{aligned}$$

A primeira e a última parcela da soma acima pertencem a $\ker\psi$ e portanto podem ser expressas como combinações de elementos do tipo (ii), pelo teorema I.2.1. Logo basta mostrar que $f = u_1T_1 - u_2T_2 \in \ker\Psi$ com T_1, T_2 d-tableaux r-standard é gerado por (i) e (ii). É claro que podemos supor $\mathrm{mdc}(u_1, u_2) = 1$.

Faremos a demonstração por indução a partir de três casos.

Caso 1. $f = x_{\mu_k+(k-1)r}[\lambda_1 \dots \lambda_m] - x_{\lambda_l+(l-1)r}[\mu_1 \dots \mu_m]$.

Primeiro observemos que, como $f \in \ker \Psi$,

$$\{\lambda_i + (i-1)r, \forall i \neq l\} = \{\mu_j + (j-1)r, \forall j \neq k\} \tag{3}$$

Agora faremos indução na diferença $|l-k|$. Se $|l-k| = 0$, então $l = k$ e vê-se diretamente que f é uma relação do tipo (i). Se $|l-k| > 0$ suponhamos, para fixar idéias, que $l < k$. Da igualdade de conjuntos (3) tiramos que

$$[\mu] = [\lambda_1 \dots \lambda_{l-1}\ \lambda_{l+1} + r \dots \lambda_{k-1} + r\ \lambda_k + r\ \mu_k\ \lambda_{k+1} \dots \lambda_m]$$

donde podemos escrever

$$\begin{aligned} f =& x_{\mu_k+(k-1)r}[\lambda] - x_{\lambda_l+(l-1)r}[\mu] = \\ =& \Big(x_{\mu_k+(k-1)r}[\lambda] - x_{\lambda_{l+1}+lr}[\lambda_1 \dots \lambda_{l-1}\ \lambda_l\ \lambda_{l+2} + r \dots \lambda_k + r\ \mu_k\ \lambda_{k+1} \dots \lambda_m]\Big) + \\ &+ \Big(x_{\lambda_{l+1}+lr}[\lambda_1 \dots \lambda_{l-1}\ \lambda_l\ \lambda_{l+2} + r \dots \lambda_k + r\ \mu_k\ \lambda_{k+1} \dots \lambda_m] - x_{\lambda_l+(l-1)r}[\mu]\Big) \end{aligned} \tag{4}$$

Na expressão (4) vemos que ambos os termos entre parênteses são elementos de $\ker \Psi$. Na expressão do primeiro parêntese temos que $|k-(l+1)| < |k-l|$ e vale a hipótese de indução.

No segundo parêntese verificamos que, como $\lambda_{l+1} = \mu_l - r$, então este termo é da forma (i).

Caso 2.

$$f = x_{\mu_i^j+(i-1)r} \begin{bmatrix} \lambda_1^1 & \lambda_2^1 & \dots & \lambda_m^1 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_m^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^d & \lambda_2^d & \dots & \lambda_m^d \end{bmatrix} - x_{\lambda_k^l+(k-1)r} \begin{bmatrix} \mu_1^1 & \mu_2^1 & \dots & \mu_m^1 \\ \mu_1^2 & \mu_2^2 & \dots & \mu_m^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_1^d & \mu_2^d & \dots & \mu_m^d \end{bmatrix}$$

para $d > 1$.

Consideramos os pares $(u,v) \in \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, d\}$ ordenados lexicograficamente, ou seja, $(u,v) < (w,z)$ se $u < w$ ou $u = w$ e $v < z$. Existe uma injeção de $\{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, d\}$ em $\mathbb{N}$ dada por $(u,v) \mapsto v + (u-1)d$ que preserva a ordem. Usando esta identificação definimos

$$\operatorname{dist}_d((u,v),(w,z)) = |(v + (u-1)d) - (z + (w-1)d)| = |v - z + (u-w)d|.$$

Observemos que como os tableaux em f são r-standard,

$$\lambda_u^v + (u-1)r \leq \lambda_w^z + (w-1)r \text{ e } \mu_u^v + (u-1)r \leq \mu_w^z + (w-1)r \text{ se } (u,v) < (w,z). \tag{5}$$

Também temos

$$\{\lambda_u^v + (u-1)r, \forall (u,v) \neq (k,l)\} = \{\mu_u^v + (u-1)r, \forall (u,v) \neq (i,j)\}. \tag{6}$$

O procedimento agora será indução em $p = \operatorname{dist}_d((i,j),(k,l))$. Se $p = 0$ então $(i,j) = (k,l)$ e por (5) e (6) temos que $[\lambda^u] = [\mu^u]$ se $u \neq j$, donde

$$f = [\lambda^1] \dots \widehat{[\lambda^l]} \dots [\lambda^d]\big(x_{\mu_i^k+(k-1)r}[\lambda^l] - x_{\lambda_k^i+(k-1)r}[\mu^l]\big),$$

e temos a conclusão pelo caso 1.

Consideremos agora $p > 0$. Para fixar idéias, tomemos $(k,l) < (i,j)$ com $k < i$ e $j < l$. Seja

$$T = \begin{bmatrix}
\lambda_1^1 & \dots & \lambda_k^1 & \lambda_{k+1}^2 & \dots & \lambda_{i-1}^2 & \lambda_i^2 & \lambda_{i+1}^1 & \dots & \lambda_m^1 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\lambda_1^{j-1} & \dots & \lambda_k^{j-1} & \lambda_{k+1}^{j} & \dots & \lambda_{i-1}^{j} & \lambda_i^{j} & \lambda_{i+1}^{j-1} & \dots & \lambda_m^{j-1} \\
\lambda_1^{j} & \dots & \lambda_k^{j} & \lambda_{k+1}^{j+1} & \dots & \lambda_{i-1}^{j+1} & \mu_i^{j} & \lambda_{i+1}^{j} & \dots & \lambda_m^{j} \\
\lambda_1^{j+1} & \dots & \lambda_k^{j+1} & \lambda_{k+1}^{j+2} & \dots & \lambda_{i-1}^{j+2} & \lambda_i^{j+1} & \lambda_{i+1}^{j+1} & \dots & \lambda_m^{j+1} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\lambda_1^{l-1} & \dots & \lambda_k^{l-1} & \lambda_{k+1}^{l} & \dots & \lambda_{i-1}^{l} & \lambda_i^{l} & \lambda_{i+1}^{l-1} & \dots & \lambda_m^{l-1} \\
\lambda_1^{l} & \dots & \lambda_k^{l} & \lambda_{k+1}^{l+1} & \dots & \lambda_{i-1}^{l+1} & \lambda_i^{l} & \lambda_{i+1}^{l} & \dots & \lambda_m^{l} \\
\lambda_1^{l+1} & \dots & \lambda_k^{l+2} & \lambda_{k+1}^{l+2} & \dots & \lambda_{i-1}^{l+2} & \lambda_i^{l+1} & \lambda_{i+1}^{l+1} & \dots & \lambda_m^{l+1} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\lambda_1^{d-1} & \dots & \lambda_k^{d} & \lambda_{k+1}^{d} & \dots & \lambda_{i-1}^{d} & \lambda_i^{d-1} & \lambda_{i+1}^{d-1} & \dots & \lambda_m^{d-1} \\
\lambda_1^{d} & \dots & \lambda_{k+1}^{1}+r & \lambda_{k+2}^{1}+r & \dots & \lambda_{i}^{1}+r & \lambda_i^{d} & \lambda_{i+1}^{d} & \dots & \lambda_m^{d}
\end{bmatrix}.$$

Usando a propriedade (5) podemos verificar que T é um tableau bem definido. Observamos que se $j \geq l$ o tableau análogo também ficará bem definido. Temos então

$$f = \left(x_{\mu_i^j+(i-1)r}[\lambda^1]\dots[\lambda^d] - x_{\lambda_k^{l+1}+(k-1)r}T \right) + \\ + \left(x_{\lambda_k^{l+1}+(k-1)r}T - x_{\lambda_k^{l}+(k-1)r}[\mu^1]\dots[\mu^d] \right)$$

Usando (6) verificamos que as expressões entre parênteses pertencem a $\ker \Psi$. No primeiro parêntese temos

$$\operatorname{dist}_d((i,j),(k,l+1)) < \operatorname{dist}_d((i,j),(k,l))$$

e no segundo temos $\lambda_k^{l+1} = \mu_k^l$. Observamos que, caso T não seja r-standard, aplicar a redução usada no início da demonstração não altera os fatores em X, donde a hipótese de indução ainda se aplica.

Agora vamos ver o caso geral, ou seja,

Caso 3.

$$f = x_{\mu_{i_1}^{j_1}+(i_1-1)r}\dots x_{\mu_{i_h}^{j_h}+(i_h-1)r}[\lambda^1]\dots[\lambda^d] - x_{\lambda_{k_1}^{l_1}+(k_1-1)r}\dots x_{\lambda_{k_h}^{l_h}+(k_h-1)r}[\mu^1]\dots[\mu^d]$$

com $(i_p,j_p) < (i_q,j_q)$ e $(k_p,l_p) < (k_q,l_q)$ se $1 \leq p < q \leq h$.

Como no caso 2 temos a propriedade (5), e (6) pode ser reescrita

$$\left\{\lambda_k^l + (k-1)r,\ \forall\ (k,l) \neq (k_u,l_u)\right\} = \left\{\mu_i^j + (i-1)r,\ \forall\ (i,j) \neq (i_u,j_u)\right\} \tag{7}$$

para $1 \leq u \leq h$.

Vamos aplicar indução em h. Se $h = 1$ estamos no caso 2 e vale o fato. Seja agora $h > 1$. Para fixar idéias, podemos supor $(k_1,l_1) \leq (i_1,j_1)$. Analogamente ao que foi feito no caso 2, seja

$$T = \begin{bmatrix} \lambda_1^1 & \dots & \lambda_{k_1}^1 & \dots & \lambda_{i_1}^1 & \dots & \lambda_m^1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \lambda_{k_1}^{l_1-1} & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \lambda_{k_1}^{l_1+1} & & \lambda_{i_1}^{j_1-1} & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \lambda_{i_1}^{j_1} & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \mu_{i_1}^{j_1} & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \lambda_{i_1}^{j_1+1} & & \vdots \\ \vdots & & \lambda_{k_1}^{d-1} & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \lambda_{k_1}^{d} & & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^d & \dots & \lambda_{k_1+1}^1 + r & \dots & \lambda_{i_1}^d & \dots & \lambda_m^d \end{bmatrix}$$

Usando T podemos reescrever $f = f_1 + f_2$ onde

$$f_1 = x_{\mu_{i_2}^{j_2}+(i_2-1)r} \cdots x_{\mu_{i_h}^{j_h}+(i_h-1)r}\left(x_{\mu_{i_1}^{j_1}+(i_1-1)r}[\lambda^1]\dots[\lambda^d] - x_{\lambda_{k_1}^{l_1}+(k_1-1)r}T\right)$$

e

$$f_2 = x_{\lambda_{k_1}^{l_1}+(k_1-1)r}\left(x_{\mu_{i_2}^{j_2}+(i_2-1)r}\cdots x_{\mu_{i_h}^{j_h}+(i_h-1)r}T - x_{\lambda_{k_2}^{l_2}+(k_2-1)r}\cdots x_{\lambda_{k_h}^{l_h}+(k_h-1)r}[\mu^1]\dots[\mu^d]\right).$$

Então temos (independente do fato de T ser ou não r-standard) que f_1 e f_2 satisfazem a hipótese de indução. Com isto finalizamos a demonstração do teorema I.3.1. □

Definiremos agora uma ordem monomial adequada em $K[X, \Lambda(m,n)]$ para determinamos uma boa base de Gröbner para $\ker\Psi$. Como sempre, seja σ a ordem monomial lexicográfica por grau em $K[X]$ induzida pela ordem nas variáveis $x_i > x_j$ se $i < j$. A ordem que será usada em $K[X, \Lambda(m,n)]$ será a ordem τ' produto das ordens σ e τ: se u_1T_1, u_2T_2 forem monômios em $K[X, \Lambda(m,n)]$ com T_i tableau e $u_i \in K[X]$, então $u_1T_1 >_{\tau'} u_2T_2$ se $u_1 >_\sigma u_2$ ou $u_1 = u_2$ e $T_1 >_\tau T_2$.

Com esta ordem temos que, nas expressões (i) e (ii) do teorema I.3.1,

$$x_{l+(k-1)r}[\lambda_1 \dots \lambda_m] >_{\tau'} x_{\lambda_k+(k-1)r}[\lambda_1 \dots \lambda_{k-1} l \lambda_{k+1} \dots \lambda_m]$$

e

$$[\lambda][\mu] >_{\tau'} rs([\lambda][\mu])$$

se $1 \le k \le m$ e $1 \le \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_{k-1} < l < \lambda_k < \dots < \lambda_m \le n$.

Teorema I.3.2. *As expressões (i) e (ii) do teorema I.3.1 formam uma base de Gröbner para* $\ker\Psi$ *com relação à ordem* τ', *e* $\mathrm{in}_{\tau'}(\ker\Psi)$ *é gerado pelos monômios que aparecem à esquerda nas expressões (i) e (ii) de I.3.1.*

Demonstração. Seja $J = \mathrm{in}_{\tau'}(\ker\Psi)$. Precisamos mostrar que dado um monômio $f \in J$, f é múltiplo de algum dos monômios:

(8) $\quad x_{l+(k-1)r}[\lambda_1 \dots \lambda_m]$, para $1 \le \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_{k-1} < l < \lambda_k < \dots < \lambda_m \le n$

(9) $\quad [\lambda][\mu]$, não $r-$standard.

Tomemos $F \in \ker\Psi$ e $f = \mathrm{in}_{\tau'}(F)$. Se $F \in K[\Lambda(m,n)]$, então pelo teorema I.2.7 temos que f é múltiplo de um monômio da forma (9). Se $F \in K[X]$, então como $\Psi(F) = 0$, só pode ser $F = 0$ e

nada há para verificar. Resta o caso em que F não é um polinômio puro nem nas indeterminadas X nem nas indeterminadas $\Lambda(m,n)$. Neste caso f é o produto de fatores em $K[X]$ e $K[\Lambda(m,n)]$. Vamos proceder com algumas simplificações. Escrevemos F da seguinte forma:

$$F = \sum_{k=1}^{l}\Big(\sum_{i_k=1}^{n_k} a_{i_k}^k f_{i_k}^k\Big) \tag{10}$$

onde $a_{i_k}^k \in K \setminus 0$, e $f_{i_k}^k$ são monômios tais que $\Psi(f_{i_p}^p) = \Psi(f_{i_q}^q)$ se e só se $p = q$. Além disso suporemos $f = \mathrm{in}_{\tau'}(F) = f_1^1$.

Como $\Psi(F) = 0$, temos que

$$\sum_{i_k=1}^{n_k} a_{i_k}^k = 0$$

para $1 \le k \le l$. Deste fato temos que $n_k \ge 2$ para todo k, $1 \le k \le l$.

Então, em particular,

$$\sum_{i_1=1}^{n_1} a_{i_1}^1 f_{i_1}^1 = \sum_{i=2}^{n_1} a_i^1 \big(f_i^1 - f_1^1\big).$$

Ora, $g = f_i^1 - f_1^1 \in \ker\Psi$ para $2 \le i \le n_1$ e $\mathrm{in}_{\tau'}(g) = f_1^1$. Logo, reduzimos o nosso problema a estudar uma expressão do tipo $g = u_1T_1 - u_2T_2$ com $u_1 >_\sigma u_2$ e $\mathrm{in}_{\tau'}(g) = u_1T_1$. Se T_1 não for r-standard, então u_1T_1 é múltiplo de um monômio do tipo (9). Se T_1 for r-standard, temos

$$g = u_1T_1 - u_2T_2 = \big(u_1T_1 - u_2(rs(T_2))\big) + \big(u_2(rs(T_2)) - u_2T_2\big).$$

Como $\Psi(g) = 0$ e $\Psi(u_2(rs(T_2)) - u_2T_2) = 0$, então $\Psi(u_1T_1 - u_2(rs(T_2)) = 0$. Portanto, basta estudar F da seguinte forma:

$$F = x_{\mu_{i_1}^{j_1}+(i_1-1)r}\cdots x_{\mu_{i_h}^{j_h}+(i_h-1)r}[\lambda^1]\ldots[\lambda^d] - x_{\lambda_{k_1}^{l_1}+(k_1-1)r}\cdots x_{\lambda_{k_h}^{l_h}+(k_h-1)r}[\mu^1]\ldots[\mu^d]$$

onde $(i_p, j_p) < (i_q, j_q)$ e $(k_p, l_p) < (k_q, l_q)$ se $1 \le p < q \le h$; e os tableaux são r-standard. Observamos também que valem as propriedades (5) e (7).

Sem perda de generalidade podemos supor que $(k_1, l_1) \le (i_1, j_1)$. Do fato que os fatores em X são primos entre si e das propriedades (5) e (7) temos que

$$x_{\mu_{i_1}^{j_1}+(i_1-1)r} < x_{\lambda_{k_1}^{l_1}+(k_1-1)r}$$

ou seja,

$$\mu_{i_1}^{j_1} + (i_1-1)r > \lambda_{k_1}^{l_1} + (k_1-1)r \tag{11}$$

donde

$$\mathrm{in}_{\tau'}(F) = f_1 = x_{\lambda_{k_1}^{l_1}+(k_1-1)r}\cdots x_{\lambda_{k_h}^{l_h}+(k_h-1)r}[\mu^1]\ldots[\mu^d].$$

Queremos mostrar que f_1 é múltiplo de algum monômio do tipo (8). Para isto vamos aplicar indução em $p = \mathrm{dist}_d((k_1,l_1),(i_1,j_1))$.

Se $p = 0$ então $(k_1, l_1) = (i_1, j_1)$. De (11) concluímos que $\lambda_{k_1}^{l_1} < \mu_{k_1}^{l_1}$ e das propriedades (5) e (7) tiramos que $\lambda_{k_1-1}^{l_1} = \mu_{k_1-1}^{l_1}$. Logo f_1 é múltiplo de

$$x_{\lambda_{k_1}^{l_1}+(k_1-1)}[\mu_1^{l_1}\ldots\mu_m^{l_1}] \tag{12}$$

onde

$$\mu_{k_1-1}^{l_1} < \lambda_{k_1}^{l_1} < \mu_{k_1}^{l_1}$$

como desejado.

Se $p > 0$, então $(k_1, l_1) < (i_1, j_1)$. Como antes temos que $\lambda_{k_1-1}^{l_1} = \mu_{k_1-1}^{l_1}$. De (5) e (7) podemos concluir que

$$\mu_{k_1}^{l_1} + (k_1 - 1)r = \lambda_q^s + (q-1)r$$

para algum par (q, s) com $(k_1, l_1) < (q, s) \leq (i_1, j_1)$. Portanto

$$\lambda_{k_1}^{l_1} + (k_1 - 1)r \leq \lambda_q^s + (q-1)r = \mu_{k_1}^{l_1} + (k_1 - 1)r.$$

Se a desigualdade acima for estrita, $\lambda_{k_1}^{l_1} < \mu_{k_1}^{l_1}$ e recuperamos que f_1 é múltiplo de (12). Se tivermos a igualdade, como

$$x_{\lambda_{k_1}^{l_1}+(k_1-1)r} = x_{\lambda_q^s+(q-1)r}$$

então

$$\lambda_q^s + (q-1)r < \lambda_{k_u}^{l_u} + (k_u - 1)r$$

para $1 < u \leq h$. Logo f_1 pode ser reescrito:

$$f_1 = x_{\lambda_{q_1}^{s_1}+(q_1-1)r} \cdots x_{\lambda_{q_h}^{s_h}+(q_h-1)r}[\mu^1] \ldots [\mu^d]$$

onde $\lambda_{q_u}^{s_u} + (q_u - 1)r = \lambda_{k_u}^{l_u} + (q_u - 1)r$ e $(q_1, s_1) = (q, s) < (q_u, s_u)$ para $1 \leq u \leq h$. Logo

$$\mathrm{dist}_d((q_1, s_1), (i_1, j_1)) < p$$

e a hipótese de indução se aplica, donde f_1 é múltiplo de algum monômio da forma (8). □

CAPÍTULO II

O COMPLEXO SIMPLICIAL ASSOCIADO À ÁLGEBRA INICIAL CATALÉTICA

1.Complexo Simplicial Associado a $K[\mathrm{in}_\sigma(M)]$

Vamos construir agora um complexo simplicial que nos dará importantes informações sobre a álgebra $K[\mathrm{in}_\sigma(M)]$.

$\Lambda(m,n)$ possui uma estrutura de conjunto parcialmente ordenado com a ordem parcial natural

$$[\lambda_1,\ldots,\lambda_m] \leq [\mu_1,\ldots,\mu_m]$$

se $\lambda_i \leq \mu_i$ para $1 \leq i \leq m$. Chamaremos um conjunto parcialmente ordenado de *poset*, do inglês *p*artially *o*rdered *set*.

Recordamos que uma *cadeia* em um poset Π é um subconjunto de Π totalmente ordenado. Uma cadeia é dita *saturada* se for maximal com respeito à inclusão. Consideremos novamente o ideal (ver I.2.7)

$$J = \mathrm{in}_\tau(\ker\psi) = \left([\lambda][\mu] \ / \ [\lambda][\mu] \neq rs([\lambda][\mu])\right)$$

J é gerado por monômios livres de quadrados e, portanto, podemos associar a J o complexo simplicial

$$\Delta = \left\{H \subset \Lambda(m,n) \ / \ \prod_{[\lambda]\in H}[\lambda] \notin J\right\}$$

Notemos que toda face H de Δ é uma cadeia de $\Lambda(m,n)$. Porém, uma cadeia H de $\Lambda(m,n)$ será uma face de Δ somente se para cada $[\lambda],[\tau] \in \Lambda(m,n)$ o produto $[\lambda][\tau]$ for r-standard.

Então temos que $K[\Lambda(m,n)]/J$ é o anel de Stanley-Reisner de Δ. Sabemos, por I.2.1, que $K[\Lambda(m,n)]/J$ e $K[\mathrm{in}_\sigma(M)]$ possuem a mesma série de Hilbert. Logo podemos calcular vários invariantes da álgebra $K[\mathrm{in}_\sigma(M)]$ através da teoria dos anéis de Stanley-Reisner.

O próximo passo será descrever adequadamente o complexo Δ.

Podemos escrever $J = J_1 + J_2$ onde

$$J_1 = \left([\lambda][\mu] \ : \ [\lambda][\mu] \text{ não seja standard}\right)$$
$$J_2 = \left([\lambda][\mu] \ : \ [\lambda][\mu] \text{ seja standard mas não } r-\text{standard}\right)$$

Seja Δ_1 o complexo simplicial associado a J_1. Como J_1 é gerado pelos produtos de pares de variáveis não comparáveis de $\Lambda(m,n)$, então os elementos de Δ_1 são as cadeias de $\Lambda(m,n)$. Δ_1 é conhecido como o *complexo de ordem* do poset $\Lambda(m,n)$.

Se $n-m-1 \leq r$ então $J = J_1$ e portanto $\Delta = \Delta_1$. A dificuldade surge quando $n-m-1 > r$. Vamos analisar esta segunda possibilidade.

Seja

$$\mathcal{I}^r_{m,n} = \left\{(\lambda_2,\lambda_3,\ldots,\lambda_m) \in \mathbb{N}^{m-1} \ / \ 1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots < \lambda_m < n-r\right\}$$

Definimos, para $I = (\lambda_2,\ldots,\lambda_m) \in \mathcal{I}^r_{m,n}$,

$$\Lambda_I = \left\{[\mu] \in \Lambda(m,n) \ / \ [1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m] \leq [\mu] \leq [\lambda_2+r,\ldots,\lambda_m+r,n]\right\}$$

Λ_I herda a ordem parcial de $\Lambda(m,n)$.

Lema II.1.1. *Se $|\mu|, |\sigma| \in \Lambda_{(\lambda_2,\dots,\lambda_m)}$ são comparáveis, então $|\mu||\sigma|$ é r-standard.*

Demonstração. De fato, escrevendo $|\mu| = [\mu_1, \dots, \mu_m]$ e $|\sigma| = [\sigma_1, \dots, \sigma_m]$ e supondo $|\mu| \leq |\sigma|$, então temos $\lambda_j \leq \mu_j$ e $\sigma_{j-1} \leq \lambda_j + r$ para $2 \leq j \leq m$. Logo

$$\sigma_{j-1} - \mu_j \leq \lambda_j + r - \lambda_j = r.$$

□

Lema II.1.2.

(i) Se $n - m - 1 \leq r$ então as facetas de Δ são as cadeias saturadas de $\Lambda(m, n)$.

(ii) Se $n - m - 1 > r$ então as facetas de Δ são as cadeias saturadas de Λ_I, com I percorrendo $\mathcal{I}^r_{m,n}$.

Demonstração. Como já foi visto, se $n - m - 1 \leq r$ temos $\Delta = \Delta_1$, o que prova (i).

Para verificar (ii), tomemos $I \in \mathcal{I}^r_{m,n}$, $I = (\lambda_2, \dots, \lambda_m)$ e seja $H \subset \Lambda_I$ uma cadeia saturada. Vamos verificar que H é uma faceta de Δ.

Como H é saturada, então $[1, \lambda_2, \dots, \lambda_m] \in H$ e $[\lambda_2 + r, \dots, \lambda_m + r, n] \in H$. Seja $[\sigma] \in \Lambda(m, n) \setminus H$. Se $[\sigma] \in \Lambda_I$ então $H \cup \{[\sigma]\}$ terá um par de elementos incomparáveis, donde $H \cup \{[\sigma]\} \notin \Delta$.

Se $[\sigma] \notin \Lambda_I$, temos duas possibilidades:

I. *$\sigma_j < \lambda_j$ para algum $j \in \{2, \dots, m\}$.*

Neste caso $[\sigma], [\lambda_2 + r, \dots, \lambda_m + r, n] \in H \cup \{[\sigma]\}$ e ou $[\sigma], [\lambda_2 + r, \dots, \lambda_m + r, n]$ são incomparáveis ou $[\sigma] \leq [\lambda_2 + r, \dots, \lambda_m + r, n]$. Na segunda possibilidade temos que, como $\lambda_j - \sigma_j > 0$, então $\lambda_j + r - \sigma_j > r$. De qualquer forma concluímos que $[\sigma][\lambda_2 + r, \dots, \lambda_m + r, n]$ não é r-standard, donde $H \cup \{[\sigma]\} \notin \Delta$.

II. *$\sigma_{j-1} > \lambda_j + r$ para algum $j \in \{2, \dots, m\}$.*

Neste caso $[\sigma], [1, \lambda_2, \dots, \lambda_m] \in H \cup \{[\sigma]\}$ e, como acima, ou estes elementos são incomparáveis ou $[\sigma] \geq [1, \lambda_2, \dots, \lambda_m]$. No segundo caso, como $\sigma_{j-1} - \lambda_j > r$, então $[\sigma][1, \lambda_2, \dots, \lambda_m]$ não é r-standard. Novamente temos, portanto, que $H \cup \{[\sigma]\} \notin \Delta$.

Reciprocamente, seja agora $H \in \Delta$ uma faceta; provaremos que H é uma cadeia saturada de algum Λ_L, $L \in \mathcal{I}^r_{m,n}$.

Sejam $[\sigma]$ e $[\mu]$ respectivamente o mínimo e o máximo de H. Como $H \in \Delta$, então $[\sigma][\mu]$ é r-standard e, portanto, $\mu_j - \sigma_{j+1} \leq r$ para todo j tal que $1 \leq j \leq m - 1$. Além disso, pela escolha de $[\sigma]$ e $[\mu]$, é claro que $\sigma_1 = 1$ e $\mu_m = n$. Vamos provar que $(\sigma_2, \dots, \sigma_m) \in \mathcal{I}^r_{m,n}$, o que é equivalente a provar que $\sigma_m \leq n - r - 1$. Suponhamos, por absurdo, que $\sigma_m > n - r - 1$; então devemos ter $\mu_{m-1} = n - 1$, pois $[\mu]$ é máximo e $n - 1 - \sigma_m \leq n - 1 - (n - r) = r - 1 < r$. Se $\sigma_{m-1} < \sigma_m - 1$, tomando $[\sigma'] = [1, \sigma_2, \dots, \sigma_{m-1}, \sigma_m - 1]$, vemos que $[\sigma'][\mu]$ é r-standard e $[\sigma'] < [\sigma]$, contrariando o fato de H ser faceta. Logo $\sigma_{m-1} = \sigma_m - 1$, e disto deduzimos que $\mu_{m-2} = n - 2$. Continuando o mesmo argumento, acabamos concluindo que

$$[\sigma] = [1, \sigma_m - m + 2, \sigma_m - m + 3, \dots, \sigma_m - 2, \sigma_m - 1, \sigma_m]$$
$$[\mu] = [n - m + 1, n - m + 2, \dots, n - 2, n - 1, n].$$

Como $n - r - 1 > m$, se tomarmos $[\sigma'] = [1, \sigma_m - m + 1, \sigma_m - m + 3, \dots, \sigma_m - 2, \sigma_m - 1, \sigma_m]$, então $[\sigma'][\mu]$ é r-standard e $[\sigma'] < [\sigma]$, também contrariando o fato de H ser faceta. Logo $\sigma_m \leq n - r - 1$ e portanto $(\sigma_2, \dots, \sigma_m) \in \mathcal{I}^r_{m,n}$. Agora, como $\mu_i - \sigma_{i+1} \leq r$, e como $[\mu]$ é máximo, só pode ser $\mu_i = \sigma_{i+1} + r$ para $1 \leq i \leq m - 1$. Portanto, H é uma cadeia saturada de $\Lambda_{(\sigma_2,\dots,\sigma_m)}$. □

Denotando por $\Delta_{(\lambda_2,\dots,\lambda_m)}$ o complexo simplicial de ordem associado a $\Lambda_{(\lambda_2,\dots,\lambda_m)}$, pelo exposto acima podemos escrever

$$\Delta = \bigcup_{I \in \mathcal{I}^r_{m,n}} \Delta_I.$$

Vamos estabelecer mais algumas notações. Dado $\{P\} \in \Delta$ um vértice, com $P = [\sigma_1, \ldots, \sigma_m] \in \Lambda(m,n)$, denotaremos $\{P\}_i = \sigma_i$, o valor da posição i do colchete correspondente. Dados $\{P\}, \{Q\} \in \Delta$, denotaremos

$$P - Q = \big\{\{P\}_i \text{ tais que } \{P\}_i \neq \{Q\}_i, \text{ para } 1 \leq i \leq m\big\}.$$

Um complexo simplicial é *shellable* se satisfizer as condições de A.3.7.

Teorema II.1.3. *O complexo simplicial Δ é shellable.*

Demonstração. Se $n - m - 1 \leq r$ então Δ é o complexo de ordem de um poset limitado, e portanto é shellable (vide A.3.8).

Se $n - m - 1 > r$ temos que Δ é a união descrita acima. Mostraremos inicialmente que Δ é puro. Para cada $I \in \mathcal{I}^r_{m,n}$, Λ_I é distributivo; logo as facetas de Δ_I possuem o mesmo número de elementos. Seja $d(I)$ o número de elementos de uma faceta de Δ_I. Mostraremos que $d(I)$ independe de I. Fixamos $I = (\tau_2, \ldots, \tau_m)$. Convencionamos $\tau_1 = 1$ e $\tau_{m+1} = n - r$. Construímos uma faceta $F \in \Delta_I$ como segue. Seja $F = \{P_1, \ldots, P_{d(I)}\}$. Por definição,

$$P_1 = [\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m]$$
$$P_{d(I)} = [\tau_2 + r, \tau_3 + r, \ldots, \tau_m + r, n]$$

Então para $1 \leq j < d(I)$ temos que $\tau_i \leq \{P_j\}_i \leq \tau_{i+1} + r$ para $1 \leq i \leq m$. Seja $a_j = \max\big\{i \in \{1, \ldots, m\}$ tais que $\{P_j\}_i < \tau_{i+1} + r\big\}$. Dado P_j, definimos P_{j+1} de forma que

$$\{P_{j+1}\}_i = \begin{cases} \{P_j\}_i, & \text{se } i \neq a_j \\ \{P_j\}_i + 1, & \text{se } i = a_j \end{cases}$$

Vê-se então que o número de elementos de F é dado por

$$(n - \tau_m) + (\tau_m + r - \tau_{m-1}) + (\tau_{m-1} + r - \tau_{m-2}) + \ldots + (\tau_2 + r - \tau_1) + 1 = n + (m-1)r.$$

Logo $d(I) = n + (m-1)r$ para todo $I \in \mathcal{I}^r_{m,n}$ e portanto Δ é puro. Fixamos $d = d(I)$.

Agora vamos definir uma ordem total para as facetas de Δ que seja um shelling neste caso. Primeiro ordenamos os complexos Δ_I:

$$\Delta_{(\lambda_2, \ldots, \lambda_m)} < \Delta_{(\mu_2, \ldots, \mu_m)}$$

se $(\lambda_2, \ldots, \lambda_m) <_{lex} (\mu_2, \ldots, \mu_m)$ na ordem lexicográfica.

Dentro de cada Δ_I ordenamos as facetas da seguinte maneira: dadas facetas distintas H, H' de Δ_I, com $H = \{P_1, \ldots, P_d\}$ e $H' = \{P'_1, \ldots, P'_d\}$, seja $t \in \{1, \ldots, d-2\}$ o menor inteiro tal que $P_1 = P'_1, \ldots, P_t = P'_t$ e $P_{t+1} \neq P'_{t+1}$. Como $P_1 = P'_1$ e $P_d = P'_d$ e as facetas são distintas, é claro que existe um tal t. Sejam

$$P_{t+1} = [\sigma_1, \ldots, \sigma_m] \text{ e } P'_{t+1} = [\sigma'_1, \ldots, \sigma'_m]$$

Diremos que $H < H'$ se $P_{t+1} <_{lex} P'_{t+1}$ na ordem lexicográfica.

A ordem total das facetas de Δ será a seguinte. Dadas facetas $H, H' \in \Delta$, diremos que $H <_\Delta H'$ se $H \in \Delta_I$ e $H' \in \Delta_{I'}$ com $I <_{lex} I'$ ou se $I = I'$ e $H < H'$.

Precisamos verificar que esta ordem é um shelling de Δ. Usaremos a caracterização (c) de A.3.7. Separemos em dois casos.

I – Caso "flip-flop". $H, H' \in \Delta_{(\lambda_2,\ldots,\lambda_m)}$, $H <_\Delta H'$.

Neste caso temos $P_d = P'_d = [\lambda_2 + r, \ldots, \lambda_m + r, n]$ e tomamos $P_t = P'_t = [\sigma_1, \ldots, \sigma_m]$. É claro que P_t (e P'_t) é menor que P_d na ordem parcial de $\Lambda(m,n)$. Como P_{t+1}, P'_{t+1} são vértices em $\Delta_{(\lambda_2,\ldots,\lambda_m)}$ tais que $P_{t+1} <_{lex} P'_{t+1}$, temos que

$$P_{t+1} = [\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{i-1}, \sigma_i, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_{j-1}, \sigma_j + 1, \sigma_{j+1}, \ldots, \sigma_m]$$

$$P'_{t+1} = [\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{i-1}, \sigma_i + 1, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_{j-1}, \sigma_j, \sigma_{j+1}, \ldots, \sigma_m]$$

para certos $1 \leq i < j \leq m$.

Para j como no parágrafo anterior, seja $P'_u \in H'$ o máximo dos elementos de H' na ordem parcial do poset $\Lambda(m,n)$ que possua a forma

$$P'_u = [\sigma'_1, \ldots, \sigma'_{j-2}, \sigma'_{j-1}, \sigma_j, \sigma_{j+1}, \ldots, \sigma_m]$$

onde os índices $\sigma_j, \ldots, \sigma_m$ são os mesmos de $P_t = P'_t$.

Se P'_u pertencesse a H, então teríamos que $P'_u < P_{t+1}$ na ordem parcial de $\Lambda(m,n)$; mas neste caso $\{P'_u\}_i = \sigma'_i < \{P'_{t+1}\}_i = \sigma_i + 1$, o que seria um absurdo, pois $P'_u \geq P'_{t+1}$ por definição. Logo $P'_u \notin H$ e $P'_u \neq P'_d$. Então

$$P'_{u-1} = [\sigma'_1, \ldots, \sigma'_{k-1}, \sigma'_k - 1, \sigma'_{k+1}, \ldots, \sigma'_{j-1}, \sigma_j, \ldots, \sigma_m]$$

para algum k, $1 \leq k \leq j-1$; e

$$P'_{u+1} = [\sigma'_1, \ldots, \ldots, \sigma'_{j-1}, \sigma_j, \ldots, \sigma_{l-1}, \sigma_l + 1, \sigma_{l+1}, \ldots, \sigma_m]$$

para algum l, $j \leq l \leq m$

Seja

$$Q' = [\sigma'_1, \ldots, \sigma'_{k-1}, \sigma'_k - 1, \sigma'_{k+1}, \ldots, \sigma'_{j-1}, \sigma_j, \sigma_{j+1}, \ldots, \sigma_{l-1}, \sigma_l + 1, \sigma_{l+1}, \ldots, \sigma_m].$$

Consideremos a faceta

$$F = \{P'_1, \ldots, P'_{u-1}, Q', P'_{u+1}, \ldots, P'_s\}$$

Vemos que $F <_\Delta H'$ e $H' \setminus F = \{P'_u\}$.

II $H \in \Delta_{(\lambda_2,\ldots,\lambda_m)}$, $H' \in \Delta_{(\lambda'_2,\ldots,\lambda'_m)}$, $H <_\Delta H'$, onde $(\lambda_2, \ldots, \lambda_m) <_{lex} (\lambda'_2, \ldots, \lambda'_m)$.

Sejam $H = \{P_1, \ldots, P_d\}$ e $H' = \{P'_1, \ldots, P'_d\}$. Temos que $P'_d = [\lambda'_2 + r, \ldots, \lambda'_m + r, n]$. Seja

$$v = \min\{i \,:\, [\lambda'_2 + r, \ldots, \lambda'_m + r, i] \in H'\}$$

e tomemos $P'_k = [\lambda'_2 + r, \ldots, \lambda'_m + r, v]$ $(1 \leq k \leq d)$. Certamente $P'_k \notin H$. Temos duas possibilidades:

II.a – Caso dinâmico. $v = n$. Neste caso $k = d$, $P'_k = P'_d$ e

$$P'_{d-1} = [\lambda'_2 + r, \ldots, \lambda'_j + r - 1, \ldots, \lambda'_m + r, n]$$

para algum j, $2 \leq j \leq m$. É claro que $1 < \lambda'_2 < \ldots < \lambda'_j - 1 < \ldots < \lambda'_m < n - r$.

Seja $Q' = [1, \lambda'_2, \ldots, \lambda'_j - 1, \ldots, \lambda'_m]$. Escolhemos agora a faceta

$$F = \{Q', P'_1, \ldots, P'_{d-1}\} \in \Delta_{(\lambda'_2,\ldots,\lambda'_j-1,\ldots,\lambda'_m)}$$

e é claro que $F <_\Delta H'$ e $H' \setminus F = \{P'_d\}$.

II.b – Caso estático. $v < n$. Então $k < d$ e temos

$$P'_{k-1} = [\lambda'_2 + r, \ldots, \lambda'_j + r - 1, \ldots, \lambda'_m + r, v]$$

$$P'_{k+1} = [\lambda'_2 + r, \ldots, \lambda'_m + r, v + 1]$$

para algum j, $2 \leq j \leq m$.

Seja $Q' = [\lambda'_2 + r, \ldots, \lambda'_j + r - 1, \ldots, \lambda'_m + r, v + 1]$. Tomamos a faceta

$$F = \{P'_1, \ldots, P'_{k-1}, Q', P'_{k+1}, \ldots, P'_d\} \in \Delta_{(\lambda'_2,\ldots,\lambda'_m)}$$

Temos $F <_\Delta H'$ (pois $Q' <_{lex} P'_k$) e $H' \setminus F = \{P'_k\}$.

Isto conclui a demonstração de que a ordem linear definida acima é um shelling de Δ. □

OBSERVAÇÃO. No caso $n - m - 1 > r$, o valor $d = d(I)$ calculado na demonstração de II.1.3 é a dimensão de $K[\Lambda(m,n)]/J$, e portanto é a dimensão de $K[\mathrm{in}_\sigma(M)]$. Veremos uma outra maneira de calcular este valor em III.2.1.

2. Outras Propriedades do Complexo Simplicial Δ

Vamos estudar aqui algumas propriedades do complexo simplicial Δ que serão necessárias para o próximo capítulo.

Lembramos que se $d = \dim K[\mathrm{in}_\sigma(M)] = \dim K[\Lambda(m,n)]/J$, as facetas de Δ possuem d vértices. Vimos na seção anterior que Δ é um complexo simplicial shellable. Para extrair algumas propriedades interessantes desta estrutura de shelling de Δ definiremos o seguinte conjunto baseado na caracterização (c) de A.3.7 para um complexo simplicial shellable. Para cada faceta $H \in \Delta$ seja

$$\mathcal{H}(H) = \Big\{[\sigma] \in H / \exists \text{ faceta } F <_\Delta H \text{ com } H \setminus F = \{[\sigma]\}\Big\}$$

e $\delta(H) = |\mathcal{H}(H)|$. Seja $s(\Delta) = \max\{\delta(H),\ H \in \Delta\}$. O objetivo principal desta seção é calcular $s(\Delta)$ em função de m, n, r pois, como será visto no capítulo III, este valor nos permitirá calcular o a-invariante de $K[M]$. Para isto precisamos entender melhor o conjunto $\mathcal{H}(H)$.

Dois vértices consecutivos de uma mesma faceta de Δ diferenciam-se em apenas uma posição. Tendo em vista este fato definimos

Definição II.2.1. Dada uma faceta $F = \{P_1, \ldots, P_d\}$ do complexo Δ, para todo inteiro i, $1 \leq i \leq d$ existe, por definição, um inteiro $k = k(i)$ tal que $P_{i+1} - P_i = \{\{P_{i+1}\}_k\}$, onde $\{P_{i+1}\}_k = \{P_i\}_k + 1$. O inteiro k é a *posição incremental* do vértice P_{i+1} em relação ao vértice anterior na faceta F. Denotaremos $i_F(P_{i+1}) = k$. Por convenção, $i_F(P_1) = 0$.

Seja $H \in \Delta$ faceta, com $H = \{P_1, \ldots, P_d\}$. Se $n - m - 1 \leq r$ então sabemos que Δ é o complexo de ordem de $\Lambda(m,n)$ e

$$\begin{aligned} P_1 &= [1, 2, \ldots, m] \\ P_2 &= [1, 2, \ldots, m-1, m+1] \\ P_{d-1} &= [n-m, n-m+2, \ldots, n] \\ P_d &= [n-m+1, \ldots, n] \end{aligned}$$

Se $n - m - 1 > r$ então $H \in \Delta_I$ para algum $I = (\lambda_2, \ldots, \lambda_m) \in \mathcal{I}^r_{m,n}$ e

$$\begin{aligned} P_1 &= [1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m] \\ P_d &= [\lambda_2 + r, \ldots, \lambda_m + r, n] \end{aligned}$$

Definição II.2.2. Dada uma faceta $H = \{P_1, \ldots, P_d\} \in \Delta$, diremos que um vértice $P_k \in H$, com $2 \leq k \leq d-1$, é um *degrau* se $i_H(P_k) < i_H(P_{k+1})$. E diremos que P_d é *degrau* se $n-m-1 > r$ e $i_H(P_d) < m$. Neste segundo caso, se $H \in \Delta_{(\lambda_2,\ldots,\lambda_m)}$, então

$$P_{d-1} = [\lambda_2 + r, \ldots, \lambda_{i-1} + r, \lambda_i + r - 1, \lambda_{i+1} + r, \ldots, \lambda_m + r, n]$$

para algum i, $2 \leq i \leq m$.

No caso em que $n - m - 1 \leq r$ observamos que P_d jamais será degrau. Também observamos que P_1 não é degrau. Chamaremos os vértices que não são degraus de *não-degraus*.

Exemplo. Vejamos alguns exemplos de degraus. Sejam $n = 8$, $m = 3$, $r = 1$. Sejam

F:						G:					
	[1	3	6]	=	P_1		[1	3	5]	=	Q_1
	[2	3	6]	=	P_2		[2	3	5]	=	Q_2
	[2	4	6]	=	P_3		[2	4	5]	=	Q_3
	[2	4	7]	=	P_4		[2	4	6]	=	Q_4
	[3	4	7]	=	P_5		[3	4	6]	=	Q_5
	[3	5	7]	=	P_6		[3	5	6]	=	Q_6
	[3	5	8]	=	P_7		[3	5	7]	=	Q_7
	[4	5	8]	=	P_8		[4	5	7]	=	Q_8
	[4	6	8]	=	P_9		[4	6	7]	=	Q_9
	[4	7	8]	=	P_{10}		[4	6	8]	=	Q_{10}

F e G são facetas de $\Delta_{(3,6)}$ e $\Delta_{(3,5)}$ respectivamente. Os não-degraus de F são P_1, P_4, P_7, P_9; os não-degraus de G são Q_1, Q_4, Q_7 e Q_{10}.

Proposição II.2.3. *Seja $H \in \Delta$ uma faceta. Então $\delta(H)$ é o número de degraus de H*

Demonstração. Na verdade, vamos provar o seguinte:

(i) Se $|\sigma| \in H$ é degrau, então existe $F <_\Delta H$ tal que $H \setminus F = \{|\sigma|\}$.

(ii) Se $F <_\Delta H$ é tal que $H \setminus F = \{|\sigma|\}$, então $|\sigma|$ é degrau.

Isto estabelecerá a igualdade $\mathcal{H}(H) = \{$ degraus de $H\}$.

Demonstraremos apenas o caso $n - m - 1 > r$, pois a mesma demonstração vale para o caso $n - m - 1 \leq r$, com pequenas modificações. Seja $H \in \Delta_{(\lambda_2,\ldots,\lambda_m)}$, com $H = \{P_1, \ldots, P_d\}$.

(i) Precisamos analisar duas possibilidades:

(i.1) Seja $P_k = |\sigma| = |\sigma_1, \ldots, \sigma_m|$ degrau, com $1 < k < d$. Sendo P_k degrau, então $i_H(P_k) = i$ e $i_H(P_{k+1}) = j$, com $1 \leq i < j \leq n$.

Construímos então $F = \{P_1, \ldots, P_{k-1}, Q_k, P_{k+1}, \ldots, P_d\}$ com $i_F(Q_k) = j$ e $i_F(P_{k+1}) = i$. Explicitamente,

$$Q_k = |\sigma_1, \ldots, \sigma_{i-1}, \sigma_i - 1, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_{j-1}, \sigma_j + 1, \sigma_{j+1}, \ldots, \sigma_m|$$

É fácil de verificar que F é realmente uma faceta de $\Delta_{(\lambda_2,\ldots,\lambda_m)}$, que $F <_\Delta H$ e que $H \setminus F = \{P_k\}$.

(i.2) Agora estudaremos o caso em que $P_d = [\lambda_2 + r, \ldots, \lambda_m + r, n]$ é degrau. Neste caso $P_{d-1} = [\lambda_2 + r, \ldots, \lambda_i + r - 1, \ldots, \lambda_m + r, n]$ para algum inteiro i, $2 \leq i \leq m$. Tomamos então a faceta $F \in \Delta_{(\lambda_2,\ldots,\lambda_{i-1},\lambda_i-1,\lambda_{i+1},\ldots,\lambda_m)}$, $F = \{Q_0, P_1, \ldots, P_{d-1}\}$, onde

$$Q_0 = [1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{i-1}, \lambda_i - 1, \lambda_{i+1}, \ldots, \lambda_m]$$

É claro que $F <_\Delta H$ e que $H \setminus F = \{P_d\}$.

(ii) Seja $F \in \Delta$ faceta tal que $F <_\Delta H$ com $H \setminus F = \{|\sigma|\}$. Para fixar idéias, seja $|\sigma| = P_k$, $1 \leq k \leq d$. Temos duas possibilidades:

(ii.1) $F \in \Delta_{(\lambda_2,\ldots,\lambda_m)}$. Neste caso é claro que P_1 e P_d pertencem a F, e portanto $1 < k < d$. Também é claro que

$$F = \{P_1, \ldots, P_{k-1}, Q, P_{k+1}, \ldots, P_d\}$$

para algum $Q \in \Lambda(m, n)$.

Sejam $i_H(P_k) = i$ e $i_H(P_{k+1}) = j$. Caso $i = j$ teríamos $Q = P_k$, contrariando as hipóteses. Então podemos supor $i \neq j$. Como $P_{k-1} \leq Q \leq P_{k+1}$ na ordem parcial do poset $\Lambda(m, n)$, e como $F <_\Delta H$, por definição temos $Q <_{lex} P_k$ e só pode ser $i < j$, donde P_k é degrau.

(ii.2) $F \in \Delta_{(\mu_2,\ldots,\mu_m)}$ com $(\mu_2, \ldots, \mu_m) <_{lex} (\lambda_2, \ldots, \lambda_m)$. Neste caso é claro que $P_d \notin F$, donde $H \setminus F = \{P_d\}$ e portanto $F = \{Q, P_1, \ldots, P_{d-1}\}$ onde $Q = [1, \mu_2, \ldots, \mu_m]$ e $P_{d-1} = [\mu_2 + r, \ldots, \mu_m + r, n]$. Conseqüentemente existe inteiro i, $2 \leq i \leq m$ tal que

$$\mu_j = \begin{cases} \lambda_j, & \text{se } j \neq i \\ \lambda_i - 1, & \text{se } j = i. \end{cases}$$

para $2 \leq j \leq m$. Portanto

$$P_{d-1} = [\lambda_2 + r, \ldots, \lambda_i - 1 + r, \ldots, \lambda_m + r, n]$$

donde P_d é degrau. □

O problema agora é contar o número de não-degraus de uma faceta. Dada uma faceta $H \in \Delta$ seja $\nu(H)$ o número de não-degraus de H. Então $\delta(H) = d - \nu(H)$. Se $\alpha(\Delta) = \min\{\nu(H),\ H \in \Delta\}$, podemos escrever

$$s(\Delta) = d - \alpha(\Delta)$$

Na seqüência vamos calcular $\alpha(\Delta)$. Primeiro estabeleceremos mais alguma notação. Se $b \in \mathbb{R}_+^*$, então denotaremos por $\lceil b \rceil$ o menor inteiro p tal que $p \geq b$; e $\lfloor b \rfloor$ denotará o maior inteiro p tal que $p \leq b$. Notamos que b é inteiro se e somente se $\lfloor b \rfloor = \lceil b \rceil$ e que a parte inteira de b é $\lfloor b \rfloor$.

Temos uma cota mínima para $\alpha(\Delta)$:

Proposição II.2.4. *Temos que*

(i) $\alpha(\Delta) \geq \lceil \frac{d}{m} \rceil$ *para todos os valores de* m, n, r.

(ii) Se $n - m - 1 \leq r$ *então* $\alpha(\Delta) \geq n$.

Além disso, estas cotas inferiores são os valores mínimos que $\alpha(\Delta)$ *pode atingir.*

Demonstração. (i) Tomemos $H = \{P_1, \ldots, P_d\}$ uma faceta. Sabemos que P_1 não é degrau, e da definição de degrau é fácil de ver que existem no máximo $m - 1$ degraus consecutivos. O algoritmo da divisão nos dá

$$d = m\left\lfloor \frac{d}{m} \right\rfloor + p, \quad 0 \leq p \leq m - 1$$

Suponhamos que estamos na melhor situação possível, ou seja, que H possui $m - 1$ degraus entre dois não-degraus consecutivos, exceto possivelmente entre o último degrau e P_d (se este for degrau). Temos então que os vértices

$$P_1, P_{1+m}, P_{1+2m}, \ldots, P_{1+(\lfloor d/m \rfloor - 1)m}$$

não são degraus. Se $p = 0$ restam $m - 1$ vértices, incluindo P_d, os quais são degraus (exceto possivelmente P_d) na nossa situação ideal. Se $p \geq 1$ restam m vértices ou mais, incluindo P_d, e portanto nesta situação deve existir pelo menos mais um não-degrau. Como

$$\left\lceil \frac{d}{m} \right\rceil = \left\lfloor \frac{d}{m} \right\rfloor + 1$$

se $p \geq 1$, então concluímos o desejado.

(ii) Seja H como em (i). Lembramos que neste caso $P_1 = [1, 2, \ldots, m]$ e $P_d = [n-m+1, \ldots, n]$. Consideremos os seguintes conjuntos de vértices:

$S_1(H) = \{P_1, P_d\}$.

$S_2(H)$ será o conjunto dos vértices P_i tais que $i_H(P_i) = m$ para $2 \leq i \leq d - 1$.

$S_3(H)$ será o conjunto dos vértices P_i para os quais existam índices k_i, $1 \leq k_i \leq m - 1$ tais que $i_H(P_i) = k_i$ e $\{P_i\}_j = n - (m - j)$ para $j = k_i, k_i + 1, \ldots, m$.

Pela definição vê-se que o conjunto $S_1(H) \cup S_2(H) \cup S_3(H)$ é constituído apenas por não-degraus. Também não é difícil de ver que toda faceta H de Δ obrigatoriamente possui todos os vértices possíveis dos tipos $S_1(H)$, $S_2(H)$, $S_3(H)$. Vê-se que $S_i(H) \cap S_j(H) = \emptyset$ para $i, j \in \{1, 2, 3\}$ e $|S_1(H)| = 2$, $|S_2(H)| = n - m$ e $|S_3(H)| = m - 2$. Logo $|S_1(H) \cup S_2(H) \cup S_3(H)| = n$ e portanto $\nu(H) \geq n$ para toda $H \in \Delta$, donde concluímos o desejado. □

OBSERVAÇÃO. A proposição II.2.4 só faz sentido se $d \geq m$. Mas isto não traz maiores problemas pois, como será visto (III.2.1), este fato é verdadeiro.

Precisamos agora construir uma faceta que minimize $\nu(_)$. Para esta finalidade vamos definir uma classe especial de facetas que serão as candidatas a esta minimização. A idéia intuitiva que nos guia é de construir uma faceta com o maior número de degraus entre dois não-degraus consecutivos.

Vamos descrever a seguir dois algoritmos para construção de certas faces especiais em Δ, um para o caso $n - m - 1 \leq r$ e outro para o caso $n - m - 1 > r$. Veremos que estes algoritmos na verdade produzem facetas.

II.2.5 – Algoritmo para $n - m - 1 \leq r$. *Tomamos*

$$P_1 = [1, 2, \ldots, m]$$
$$P_2 = [1, 2, \ldots, m - 1, m + 1]$$

Para qualquer $\{P\}$ *convencionamos* $\{P\}_{m+1} = n + 1$ *e* $\{P\}_0 = n - m$ *e sempre supomos* $j \in \{1, \ldots, m\}$. *Agora, para* $i > 2$, *determinados* P_{i-2}, P_{i-1}, *com* $P_{i-1} - P_{i-2} = \{\{P_{i-1}\}_j\}$ *e*

$\{P_{i-1}\}_j = \{P_{i-2}\}_j + 1$, *para algum* j, *determinaremos um índice adequado* k_0 *e construiremos* P_i *de forma que* $\{P_i\}_k = \{P_{i-1}\}_k$ *se* $k \neq k_0$ *e* $\{P_i\}_{k_0} = \{P_{i-1}\}_{k_0} + 1$.

Sejam

$$S_1^i = \{k \in \{j+1, \ldots, m\} \text{ tais que } \{P_{i-1}\}_k < n - m + k \text{ e } \{P_{i-1}\}_{k+1} - \{P_{i-1}\}_k > 1\}$$
$$S_2^i = \{k \in \{1, \ldots, j-1\} \text{ tais que } \{P_{i-1}\}_k < n - m + k \text{ e } \{P_{i-1}\}_{k+1} - \{P_{i-1}\}_k > 1\}$$

Descreveremos agora o algoritmo para determinar k_0*:*

(*a*) *Se* $S_1^i \neq \emptyset$, *então* $k_0 = \min S_1^i$.

(*b*) *Se* $S_1^i = \emptyset$ *e* $S_2^i \neq \emptyset$ *então* $k_0 = \min S_2^i$.

(*c*) *Se* $S_1^i = S_2^i = \emptyset$ *e* $\{P_{i-1}\}_{j+1} - \{P_{i-1}\}_j > 1$, *então* $k_0 = j$.

(*d*) *Se nenhuma das possibilidades acima ocorrer, o processo termina.*

Cabe observar que a condição (*c*) no algoritmo acima é supérflua, como se verá em II.2.7 adiante.

Agora consideremos $n - m - 1 > r$. Para cada $I \in \mathcal{I}_{m,n}^r$ descreveremos um algoritmo para construir uma face especial em cada Δ_I.

II.2.6 – Algoritmo para $n-m-1 > r$. *Seja* $I = (\lambda_2, \ldots, \lambda_m) \in \mathcal{I}$. *Convencionamos* $\lambda_1 = 1$ *e* $\lambda_{m+1} = n$. *Tomamos*

$$P_1 = [1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m]$$

Para determinar P_2 *seja* $k \in \{1, \ldots, m\}$ *o menor inteiro tal que* $\lambda_{k+1} - \lambda_k > 1$. *Escolhemos*

$$P_2 = [\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{k-1}, \lambda_k + 1, \lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_m]$$

Observamos que existe tal inteiro k, *pois* $\lambda_m \leq n - r - 1 < n - 1$. *Com esta escolha também fica claro que* $P_2 \leq [\lambda_2 + r, \ldots, \lambda_m + r, n]$ *na ordem parcial de* $\Lambda(m, n)$.

Agora, para $i > 2$, *determinados* P_{i-2}, P_{i-1}, *onde* $P_{i-1} - P_{i-2} = \{\{P_{i-1}\}_j\}$ *e* $\{P_{i-1}\}_j = \{P_{i-2}\}_j + 1$ *para* $1 \leq j \leq m$, *determinaremos* P_i *.Escolheremos adequadamente um índice* k_0 *e tomaremos* P_i *tal que* $\{P_i\}_k = \{P_{i-1}\}_k$ *se* $k \neq k_0$ *e* $\{P_i\}_{k_0} = \{P_{i-1}\}_{k_0} + 1$.

Sejam

$$S_1^i = \{k \in \{j+1, \ldots, m-1\} \text{ tais que } \{P_{i-1}\}_k < \lambda_{k+1} + r \text{ e } \{P_{i-1}\}_{k+1} - \{P_{i-1}\}_k > 1\}$$
$$S_2^i = \{k \in \{1, \ldots, j-1\} \text{ tais que } \{P_{i-1}\}_k < \lambda_{k+1} + r \text{ e } \{P_{i-1}\}_{k+1} - \{P_{i-1}\}_k > 1\}$$

Descreveremos agora um algoritmo para determinar k_0*:*

(*a*) *Se* $j < m$, *temos as seguintes possibilidades:*

(*a*.1). *Se* $S_1^i \neq \emptyset$, *então seja* $k_0 = \min S_1^i$.

(*a*.2). *Se* $S_1^i = \emptyset$ *e* $\{P_{i-1}\}_m < n$ *então* $k_0 = m$.

(*a*.3). *Se* $S_1^i = \emptyset$, $\{P_{i-1}\}_m = n$ *e* $S_2^i \neq \emptyset$ *então seja* $k_0 = \min S_2^i$.

(*a*.4). *Se* $S_1^i = \emptyset$, $\{P_{i-1}\}_m = n$ *e* $S_2^i = \emptyset$, *então temos duas possibilidades:*

(*a*.4.1). *Se* $\{P_{i-1}\}_{j-1} < \lambda_j + r$ *e* $(\{P_{i-1}\}_j + 1) - \{P_{i-1}\}_{j-1} > 1$ *então* $k_0 = j - 1$.

(*a*.4.2). *Se* $\{P_{i-1}\}_j + 1 < \lambda_j + r$ *e* $\{P_{i-1}\}_{j+1} - (\{P_{i-1}\}_j + 1) > 1$ *então* $k_0 = j$.

(*b*). *Caso* $j = m$*:*

Neste caso, por definição temos $S_1^i = \emptyset$, *e é claro que* $\{P_{i-1}\}_m < n$. *Então temos duas possibilidades:*

(*b*.1). *Se* $S_2^i \neq \emptyset$ *então* $k_0 = \min S_2^i$.

(*b*.2). *Se* $S_2^i = \emptyset$ *então se* $\{P_{i-1}\}_m + 1 < n$ *tomamos* $k_0 = m$.

(*c*). *Se nenhuma destas possibilidades é satisfeita, o processo termina.*

Lema II.2.7. *Os algoritmos das definições II.2.5 e II.2.6 estão corretos, isto é, definem faces, que na verdade são facetas.*

Demonstração. Na situação de II.2.5 é fácil de ver que o algoritmo realmente define uma face de Δ. Seja $F = \{P_1, \ldots, P_l\}$, com $2 < l \leq d$, a face definida em II.2.5. Temos que $j \leq \{P_i\}_j \leq n - m + j$ para $1 \leq j \leq m$ e $1 \leq i \leq l$. Além disso lembramos que $\{P_i\}_1 < \{P_i\}_2 < \ldots < \{P_i\}_m$. Portanto, se $\{P_i\}_j = n - m + j$, então $\{P_i\}_k = n - m + k$ para todo inteiro k com $j \leq k \leq m$. Diante deste fato temos que só pode ser $P_l = [n - m + 1, n - m + 2, \ldots, n]$. De fato, se P_l não tivesse esta forma, então poderíamos continuar o algoritmo, encontrando um vértice seguinte a P_l, o que não é possível por hipótese. Logo temos uma face F com $P_1 = [1, 2, \ldots, m]$ e último vértice $P_l = [n - m + 1, n - m + 2, \ldots, n]$, donde F só pode ser uma faceta, e portanto $l = d$.

Ainda aqui, II.2.6 define uma face de Δ. Fixamos $I = (\lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ e seja $F \in \Delta_I$ a face determinada por II.2.6. Vamos usar as mesmas notações do parágrafo anterior em relação a F; convencionamos também que $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_{m+1} = n - r$. Nesta situação temos que $\lambda_j \leq \{P_i\}_j \leq \lambda_{j+1} + r$ para $1 \leq j \leq m$ e $1 \leq i \leq l$. Se $P_l \neq [\lambda_2 + r, \ldots, \lambda_m + r, n]$, então poderíamos continuar o algoritmo, encontrando um vértice seguinte a P_l, contrariando a hipótese. Logo $P_l = [\lambda_2 + r, \ldots, \lambda_m + r, n]$, donde F é uma faceta, e portanto $l = d$. □

Definição II.2.8. As facetas construídas por II.2.5 serão denominadas *a-facetas*; e as facetas contruídas por II.2.6 serão denominadas *a_I-facetas* para cada $I \in \mathcal{I}^r_{m,n}$.

Teorema II.2.9. *Seja $n - m - 1 \leq r$. Então $\alpha(\Delta) = n$.*

Demonstração. Seja H a a-faceta correspondente. Da construção de H podemos verificar que os únicos não-degraus de H são os vértices do conjunto $S_1(H) \cup S_2(H) \cup S_3(H)$ definido como em II.2.4, donde $\nu(H) = n$. Então pela cota de II.2.4 concluímos o desejado. □

De agora em diante vamos considerar somente o caso $n - m - 1 > r$. Para $I \in \mathcal{I}^r_{m,n}$ denotamos por Ξ_I o conjunto das facetas de Δ_I.

Definição II.2.10. Sejam $F = \{P_1, \ldots, P_d\}$ e $G = \{Q_1, \ldots, Q_d\}$ elementos de Ξ_I. Lembramos que $P_1 = Q_1$ e $P_d = Q_d$. Definimos a função

$$\rho_I : \Xi_I \times \Xi_I \to \Xi_I$$

da seguinte maneira. Se $F = G$, $\rho_I(F, G) = G$. Se $F \neq G$, seja $j \in \{2, \ldots, d-1\}$ tal que $P_1 = Q_1, \ldots, P_{j-1} = Q_{j-1}$ e $P_j \neq Q_j$. Sejam $i_F(P_j) = k$, $i_G(Q_j) = l$. Por hipótese, $l \neq k$.

Seja $t \in \{1, \ldots, d\}$ o menor inteiro tal que P_t seja tal que $\{P_t\}_l = \{P_{j-1}\}_l + 1$. Em particular, $i_F(P_t) = l$. Nestas condições, $\rho_I(F, G) = \{R_1, \ldots, R_d\}$ onde

$$R_v = \begin{cases} P_v, & \text{se } 1 \leq v \leq j-1 \text{ ou } t \leq v \leq d \\ Q_j, & \text{se } v = j \\ S_v, & \text{se } j+1 \leq v \leq t \end{cases} \tag{1}$$

com

$$\{S_v\}_k = \begin{cases} \{P_{v-1}\}_k, & \text{se } 1 \leq k \leq l-1 \text{ ou } l+1 \leq k \leq m \\ \{P_{v-1}\}_l + 1, & \text{se } k = l \end{cases}$$

Exemplo. Daremos um exemplo de como atua a função $\rho_I(_, _)$. Sejam $n = 10$, $m = 3$, $r = 2$,

e $I = (5, 7)$. Sejam

$$
\begin{array}{lllll}
F: & [1 & 5 & 7] = P_1 & \qquad G: \quad [1 \quad 5 \quad 7] = Q_1 \\
 & [2 & 5 & 7] = P_2 & \qquad\quad [2 \quad 5 \quad 7] = Q_2 \\
 & [2 & 6 & 7] = P_3 & \qquad\quad [2 \quad 6 \quad 7] = Q_3 \\
 & [2 & 6 & 8] = P_4 & \qquad\quad [2 \quad 6 \quad 8] = Q_4 \\
 & [2 & 7 & 8] = P_5 & \qquad\quad [3 \quad 6 \quad 8] = Q_5 \\
 & [2 & 7 & 9] = P_6 & \qquad\quad [3 \quad 7 \quad 8] = Q_6 \\
 & [2 & 8 & 9] = P_7 & \qquad\quad [3 \quad 7 \quad 9] = Q_7 \\
 & [3 & 8 & 9] = P_8 & \qquad\quad [4 \quad 7 \quad 9] = Q_8 \\
 & [4 & 8 & 9] = P_9 & \qquad\quad [4 \quad 8 \quad 9] = Q_9 \\
 & [5 & 8 & 9] = P_{10} & \qquad\quad [4 \quad 8 \quad 10] = Q_{10} \\
 & [5 & 8 & 10] = P_{11} & \qquad\quad [5 \quad 8 \quad 10] = Q_{11} \\
 & [6 & 8 & 10] = P_{12} & \qquad\quad [5 \quad 9 \quad 10] = Q_{12} \\
 & [6 & 9 & 10] = P_{13} & \qquad\quad [6 \quad 9 \quad 10] = Q_{13} \\
 & [7 & 9 & 10] = P_{14} & \qquad\quad [7 \quad 9 \quad 10] = Q_{14}
\end{array}
$$

Então $P_1 = Q_1$, $P_2 = Q_2$, $P_3 = Q_3$, $P_4 = Q_4$, e $P_5 \neq Q_5$, donde $j = 5$. Temos $k = i_F(P_5) = 2$ e $l = i_G(Q_5) = 1$. O índice t da definição é $t = 8$, pois $\{P_8\}_1 = 3 = \{P_4\}_1 + 1$. Então

$$
\begin{array}{lllll}
\rho_I(F,G): & [1 & 5 & 7] = & R_1 = P_1 \\
 & [2 & 5 & 7] = & R_2 = P_2 \\
 & [2 & 6 & 7] = & R_3 = P_3 \\
 & [2 & 6 & 8] = & R_4 = P_4 \\
 & & & & \\
 & [3 & 6 & 8] = & R_5 = Q_5 \\
 & [3 & 7 & 8] = & R_6 = S_6 \\
 & [3 & 7 & 9] = & R_7 = S_7 \\
 & & & & \\
 & [3 & 8 & 9] = & R_8 = S_8 = P_8 \\
 & [4 & 8 & 9] = & R_9 = P_9 \\
 & [5 & 8 & 9] = & R_{10} = P_{10} \\
 & [5 & 8 & 10] = & R_{11} = P_{11} \\
 & [6 & 8 & 10] = & R_{12} = P_{12} \\
 & [6 & 9 & 10] = & R_{13} = P_{13} \\
 & [7 & 9 & 10] = & R_{14} = P_{14}
\end{array}
$$

Onde S_i é calculado como na definição.

Definição II.2.11. Seja $(F, G) \in \Xi_I \times \Xi_I$. Definimos a *$(F,G)$-seqüência escalonada* como sendo a seqüência $F^{(0)}, F^{(1)}, \ldots, F^{(i)}, \ldots$ indutivamente definida por

$$F^{(0)} = F\,, \quad F^{(i+1)} = \rho_I(F^{(i)}, G)$$

para $i \geq 0$.

Lema II.2.12. *Dado $(F, G) \in \Xi_I \times \Xi_I$, seja $\{F^{(0)}, F^{(1)}, \ldots, F^{(i)}, \ldots\}$ a (F,G)-seqüência escalonada correspondente. Então existe índice $i > 0$ tal que $F^{(i)} = G$. Conseqüentemente, $F^{(j)} = G$ para todo $j \geq i$.*

Demonstração. Se $F = G$ nada há para provar. Se $F \neq G$, observamos que se, para $i \geq 1$, $F^{(i)} \neq G$, então $|F^{(i)} \cap G| > |F^{(i-1)} \cap G|$. Como $|G| = d$, não é possível que $F^{(i)} \neq G$ para todo $i > 0$. □

Podemos então supor que uma (F,G)-seqüência escalonada é uma seqüência finita $F = F^{(0)}, F^{(1)}, \ldots, F^{(t)} = G$, onde $t \geq 1$ é o menor índice tal que $F^{(t-1)} \neq F^{(t)} = G$.

Lema II.2.13. *Sejam $n-m-1 > r$, $I = (\tau_2, \ldots, \tau_m) \in \mathcal{I}^r_{m,n}$ e G a a_I-faceta correspondente. Então $\nu(F) \geq \nu(G)$ para toda $F \in \Delta_I$.*

Demonstração. Se $F = G$ nada há para provar. Suponhamos então que $F \neq G$. Seja $\{F^{(0)}, F^{(1)}, \ldots, F^{(i)}, \ldots\}$ a (F,G)-seqüência escalonada e $t > 0$ o menor inteiro tal que $F^{(t)} = G$. Vamos provar que $\nu(F^{(i)}) \geq \nu(F^{(i+1)})$ para todo inteiro i, $0 \leq i < t$. Na verdade, basta provar que se $\rho_I(F,G) = H$ então $\nu(F) \geq \nu(H)$.

Sejam $F = \{P_1, \ldots, P_d\}$, $G = \{Q_1, \ldots, Q_d\}$ e $H = \rho_I(F,G) = \{R_1, \ldots, R_d\}$ onde lembramos que R_i é como em (1). Seja $i > 1$ o menor inteiro tal que $P_i \neq Q_i$. Vamos demonstrar o caso em que $i > 2$, o caso $i = 2$ pode ser demonstrado com o mesmo argumento, feitas pequenas modificações. Então, para $i > 2$, temos que $Q_{i-2} = P_{i-2}$.

Seja $i_G(Q_{i-1}) = i_F(P_{i-1}) = l$. Sejam $i_F(P_i) = j$ e $i_G(Q_i) = k$. O inteiro k é determinado como em II.2.6 e, por hipótese, $j \neq k$. Temos aqui várias situações possíveis, que estudaremos uma a uma.

(1) $j = m$. Neste caso, temos duas possibilidades:

(1.1) $l < m$. Neste caso devemos ter $l < k < m$. De fato, por (a.1) e (a.2) de II.2.6, ou $l < k < m$ ou $k = m$; mas por hipótese, $k \neq j$, e portanto $k \neq m$. Então podemos ver que P_i é degrau se e só se $Q_i = R_i$ o for, e portanto temos o desejado.

(1.2) $l = m$. Neste caso $l = j = m$ e devemos ter $k < m$ determinado como em (b) de II.2.6. Logo P_i e $Q_i = R_i$ não são degraus, mas R_{i+1} pode ser degrau, enquanto que P_{i+1} não. Então temos o desejado.

(2) $j < m$. Temos três possibilidades aqui.

(2.1) $l < j$. Neste caso, por (a.1) de II.2.6 devermos ter $l < k \leq j$; mas como por hipótese $k \neq j$, temos $l < k < j$. Portanto $Q_{i-1} = P_{i-1} = R_{i-1}$ é degrau em F, G e em H. Conclui-se também que se P_i for degrau então $Q_i = R_i$ também o será, e concluímos o desejado.

(2.2) $l > j$. Neste caso podemos ter

(2.2.1) $k > l$ se acontecer (a.1) ou (a.2) de II.2.6. Então neste caso R_{i-1} é degrau em H, mas P_{i-1} não o é em F.

(2.2.2)$1 \leq k < j$ se acontecer (a.3) ou (b.1) ou (a.4.1) de II.2.6. Neste caso, P_i e R_i não são degraus, e o restante das facetas fica quase coincidente e, observando cuidadosamente, concluímos o desejado.

(2.3) $j = l$ Aqui podemos ter $k > j$ se acontecer como em (a.1) ou (a.2) ou (b.2) de II.2.6; ou podemos ter $k < j$ se acontecer (a.3) ou (a.4.1) ou (b.1) de II.2.6. Em todos os casos concluímos usando argumentos análogos aos precedentes.

Assim, temos que $\nu(F) \geq \nu(H)$. □

Dos lemas precedentes concluímos que se $n - m - 1 > r$ então $\alpha(\Delta) = \min_I\{\nu(F)$ onde F é a_I-faceta, I percorrendo $\mathcal{I}^r_{m,n}\}$.

Precisamos encontrar um multi-índice I tal que a correspondente a_I-faceta F seja tal que $\nu(F) \leq \nu(G)$ para toda faceta $G \in \Delta$. Intuitivamente tentaremos um multi-índice "bem distribuído", ou seja, de forma que as coordenadas de I sejam quase "eqüidistantes".

Se $I = (\tau_2, \ldots, \tau_m)$, sabemos que $\tau_m \leq n - r - 1$. Então dividimos $n - r - 1$ por m:

$$n - r - 1 = m\left\lfloor \frac{n-r-1}{m} \right\rfloor + p \tag{2}$$

onde $0 \leq p \leq m-1$. Denotando $q = \left\lfloor \frac{n-r-1}{m} \right\rfloor$ escolhemos, para $1 \leq i \leq m$,

$$\tau_i = \begin{cases} 1 + (i-1)q, & \text{se } 1 \leq i \leq m-p \\ 1 + (i-1)q + (i-(m-p)), & \text{se } m-p+1 \leq i \leq m \end{cases} \tag{3}$$

Vemos que $\tau_1 = 1$ e $\tau_m = 1 + (m-1)q + p = n - r - q < n - r$.

Observamos também que, como $n-m-1 > r$, então se $\left\lfloor \frac{n-r-1}{m} \right\rfloor = 1$ devemos ter $1 < p \leq m-1$. Além disso é facilmente verificável que

$$\left\lfloor \frac{n-r-1}{m} \right\rfloor = 1 \text{ e } p = m-1 \Leftrightarrow n - r = 2m.$$

Proposição II.2.14. *Se* $\left\lfloor \frac{n-r-1}{m} \right\rfloor \geq 2$ *ou se* $n - r = 2m$ *então existe* $I \in \mathcal{I}^r_{m,n}$ *tal que se* $H \in \Delta_I$ *é* a_I*-faceta,*

$$\nu(H) = \left\lfloor \frac{n-r-1}{m} \right\rfloor + r + 1.$$

Demonstração. Seja $q = \left\lfloor \frac{n-r-1}{m} \right\rfloor \geq 2$ e $I = (\tau_2, \ldots, \tau_m)$ escolhido como em (3). Da construção da a_I-faceta H com esta escolha de I, podemos verificar que

$$\begin{aligned}
P_1 &= [1, \tau_2, \ldots, \tau_m] \\
P_{1+m} &= [2, \tau_2 + 1, \ldots, \tau_m + 1] \\
P_{1+2m} &= [3, \tau_2 + 2, \ldots, \tau_m + 2] \\
&\vdots \\
P_{1+km} &= [1 + k, \tau_2 + k, \ldots, \tau_m + k] \\
&\vdots \\
P_{1+(q+r)m} &= [1 + (q + r)m, \tau_2 + q + r, \ldots, \tau_m + q + r].
\end{aligned}$$

Observamos que $\tau_m + q + r = n$ e que, por construção, estes vértices são os únicos não-degraus de H, donde $\nu(H) = q + r + 1$.

Agora se $n - r = 2m$, então $\left\lfloor \frac{n-r-1}{m} \right\rfloor = 1$ e $p = m - 1$, donde $\tau_i = 2i - 1$ para $1 \leq i \leq m$. Em particular, $\tau_m = 2m - 1 = n - r - 1$. Com esta escolha não é difícil de ver que o mesmo argumento acima se aplica. □

Agora falta só estudar o caso em que $\left\lfloor \frac{n-r-1}{m} \right\rfloor = 1$ e $0 < p \leq m - 2$ (p como em (2)). Vamos precisar do seguinte lema.

Lema II.2.15. *Sejam* $n - r - 1 = m + p$, *com* $0 \leq p \leq m - 2$ *e* $I = (\tau_2, \ldots, \tau_m) \in \mathcal{I}^r_{m,n}$. *Suponhamos que para algum índice* i, $1 < i \leq m$, *seja* $\tau_i - \tau_{i-1} \geq 2$. *Sejam*

$$k_0 = \max\{i \in \{2, \ldots, m\} \;/\; \tau_i - \tau_{i-1} \geq 2\},$$

$$J = (\tau_2, \ldots, \tau_{k_0-1}, \tau_{k_0} - 1, \tau_{k_0+1}, \ldots, \tau_m),$$

F *a* a_I*-faceta e* H *a* a_J*-faceta. Então* $\nu(F) \geq \nu(H)$.

Demonstração. Sejam $F = \{P_1, \ldots, P_d\}$ e $H = \{Q_1, \ldots, Q_d\}$. Temos que

$$\begin{aligned}
P_1 &= [1, \tau_2, \ldots, \tau_{k_0-1}, \tau_{k_0}, \tau_{k_0+1}, \ldots, \tau_m] \\
Q_1 &= [1, \tau_2, \ldots, \tau_{k_0-1}, \tau_{k_0} - 1, \tau_{k_0+1}, \ldots, \tau_m] \\
P_d &= [\tau_2 + r, \ldots, \tau_{k_0-1} + r, \tau_{k_0} + r, \tau_{k_0+1} + r, \ldots, \tau_m + r, n] \\
Q_d &= [\tau_2 + r, \ldots, \tau_{k_0-1} + r - 1, \tau_{k_0} + r, \tau_{k_0+1} + r, \ldots, \tau_m + r, n]
\end{aligned}$$

Seja j_0, com $1 < j_0 < d$, o índice tal que $\{P_{j_0}\}_{k_0-1} = \tau_{k_0} + r - 1$ e $\{P_{j_0+1}\}_{k_0-1} = \tau_{k_0} + r$. Em particular, $i_F(P_{j_0+1}) = k_0 - 1$. Definimos $G = \{S_1, \ldots, S_d\} \in \Xi_J$ da seguinte forma:

$$S_k = \begin{cases} Q_1, & \text{se } k = 1 \\ P_{k-1}, & \text{se } 2 \leq k \leq j_0 \\ S'_k, & \text{se, } j_0 < k \leq d \end{cases}$$

onde $\{S'_k\}_i = \{P_k\}_i$ se $i \neq k_0 - 1$ e $\{S_k\}_{k_0-1} = \tau_{k_0} + r - 1$.

Observamos que S_1 e S_2 não são degraus em G. Então pode-se verificar que $\nu(G) \geq \nu(F)$. Mais ainda, se $j_0 = d - 1$ e P_{d-1} não é degrau em F então $\nu(G) = \nu(F)$; se $j_0 < d - 1$ ou $j_0 = d - 1$ e P_{d-1} é degrau, então $\nu(G) = \nu(F) + 1$.

Seja $\{G^{(0)}, G^{(1)}, \ldots, G^{(t)}\}$ a (G,H)-seqüência escalonada, onde $G^{(0)} = G$ e $G^{(t)} = H$. Vamos mostrar que, para algum índice i, $0 \leq i < t$, teremos $\nu(G^{(i)}) > \nu(G^{(i+1)})$.

Denotaremos $G^{(i)} = \{S_1^i, \ldots, S_d^i\}$. Temos que $i_H(Q_2) \leq k_0 - 1$. Seja l_0 o menor inteiro tal que $i_H(Q_{l_0}) = k_0$. Podemos verificar facilmente que $\{Q_{l_0}\}_i = \tau_i$ para $k_0 + 1 \leq i \leq m$, ou seja, entre os vértices Q_2 e Q_{l_0} não há nenhum não-degrau, incluindo ambos. Lembramos que a seqüência $\tau_{k_0}, \tau_{k_0+1}, \ldots, \tau_m$ é formada por números inteiros consecutivos, e portanto $i_H(Q_{l_0+1}) = m$. Também temos que, como F é a_I-faceta, $i_F(P_i) = i_H(Q_i)$ para $2 \leq i < l_0$.

Seja $u > 0$ o menor índice tal que $i_{G^{(u)}}(S_2^u) = i_H(Q_2), i_{G^{(u)}}(S_3^u) = i_H(Q_3), \ldots, i_{G^{(u)}}(S_{l_0}^u) = i_H(Q_{l_0})$. Nestas condições, pela definição de G e pela construção da (G,H)-seqüência escalonada, podemos verificar que $\nu(G^{(u-1)}) > \nu(G^{(u)})$. Como H é a_J-faceta, $\nu(G) > \nu(G^{(u)}) \geq \nu(H)$, e portanto deduzimos que $\nu(F) \geq \nu(H)$. □

Exemplo. Para ilustrar o lema acima vamos dar um exemplo. Sejam $n = 10$, $m = 4$, $r = 2$. Tomemos $I = (3,6,7)$. Então $k_0 = 3$ e portanto $J = (3,5,7)$. Sejam F e H respectivamente as a_I- e a_J-facetas:

F:							H:						
[1	3	6	7]	=	$P_1\bullet$		[1	3	5	7]	=	$Q_1\bullet$
[2	3	6	7]	=	P_2		[2	3	5	7]	=	Q_2
[2	4	6	7]	=	P_3		[2	4	5	7]	=	Q_3
[2	4	6	8]	=	$P_4\bullet$		[2	4	6	7]	=	Q_4
[3	4	6	8]	=	P_5		[2	4	6	8]	=	$Q_5\bullet$
[3	5	6	8]	=	P_6		[3	4	6	8]	=	Q_6
[3	5	7	8]	=	P_7		[3	5	6	8]	=	Q_7
[3	5	7	9]	=	$P_8\bullet$		[3	5	7	8]	=	Q_8
[4	5	7	9]	=	P_9		[3	5	7	9]	=	$Q_9\bullet$
[4	6	7	9]	=	P_{10}		[4	5	7	9]	=	Q_{10}
[4	6	8	9]	=	P_{11}		[4	6	7	9]	=	Q_{11}
[4	6	8	10]	=	$P_{12}\bullet$		[4	6	8	9]	=	Q_{12}
[5	6	8	10]	=	P_{13}		[4	6	8	10]	=	$Q_{13}\bullet$
[5	7	8	10]	=	P_{14}		[5	6	8	10]	=	Q_{14}
[5	7	9	10]	=	$P_{15}\bullet$		[5	7	8	10]	=	Q_{15}
[5	8	9	10]	=	P_{16}		[5	7	9	10]	=	Q_{16}

onde o símbolo $\bullet$ indica os vértices que não são degraus. Então $\nu(F) = 5 > \nu(H) = 4$. Neste exemplo tem-se $j_0 = 15$; a faceta G fica então

G:						
[1	3	5	7]	=	$S_1 = Q_1\bullet$
[1	3	6	7]	=	$S_2 = P_1\bullet$
[2	3	6	7]	=	$S_3 = P_2$
[2	4	6	7]	=	$S_4 = P_3$
[2	4	6	8]	=	$S_5 = P_4\bullet$
[3	4	6	8]	=	$S_6 = P_5$
[3	5	6	8]	=	$S_7 = P_6$
[3	5	7	8]	=	$S_8 = P_7$
[3	5	7	9]	=	$S_9 = P_8\bullet$
[4	5	7	9]	=	$S_{10} = P_9$
[4	6	7	9]	=	$S_{11} = P_{10}$
[4	6	8	9]	=	$S_{12} = P_{11}$
[4	6	8	10]	=	$S_{13} = P_{12}\bullet$
[5	6	8	10]	=	$S_{14} = P_{13}$
[5	7	8	10]	=	$S_{15} = P_{14}$
[5	7	9	10]	=	S_{16}

Notemos que $\nu(G) = \nu(F)$. Fazendo $G^{(1)} = \rho_J(G, H)$, temos:

$$\begin{array}{lcccccl} G^{(1)}: & [1 & 3 & 5 & 7] & = & S_1^{(1)} \bullet \\ & [2 & 3 & 5 & 7] & = & S_2^{(1)} \\ & [2 & 3 & 6 & 7] & = & S_3^{(1)} \bullet \\ & & & \vdots & & & \\ & [5 & 7 & 9 & 10] & = & S_{16}^{(1)} \end{array}$$

onde $S_j^{(1)} = S_j$ para $3 \leq j \leq 16$. Temos $\nu(G^{(1)}) = 5$. Agora, $\rho_J(G^{(1)}, H) = G^{(2)} = H$, como se pode verificar. Portanto $\nu(G^{(1)}) > \nu(G^{(2)})$.

Proposição II.2.16. *Sejam n, m, r, p e I como no lema II.2.15. Seja $F \in \Xi_I$ uma faceta de Δ_I. Então $\nu(F) \geq n - \tau_m + 1 + (m - p - 2) = 2m + r - \tau_m$.*

Demonstração. Aplicaremos indução sobre o conjunto de pares ordenados

$$\mathcal{P} = \{(p, m) \text{ tais que } m \geq 2 \text{ e } 0 \leq p \leq m - 2\}.$$

Consideremos $r \geq 1$ inteiro fixo e para cada par $(p, m) \in \mathcal{P}$ seja $n = \eta(p, m) = m + p + r + 1$ de forma que os inteiros n, r, m, p satisfaçam as condições do enunciado. Sempre consideraremos no que se segue $\Delta = \Delta(m, n, r)$ como sendo o complexo simplicial associado a n, m, r como escolhidos acima. Equipamos $\mathcal{P}$ com a ordem lexicográfica $(p, m) < (p', m')$ se $p < p'$ ou se $p = p'$ e $m < m'$. Em particular, $\mathcal{P}$ é bem ordenado. Nestas condições o menor elemento de $\mathcal{P}$ é $(0, 2)$.

As condições iniciais de indução são:

(i) $p = 0$ e $m \geq 2$. Nestas condições se $\eta(0, m) = n$ temos $n - r - 1 = m$ e o complexo Δ correspondente é o complexo do caso genérico, donde $\nu(F) \geq n \geq n - m + 1$, para toda faceta $F \in \Delta$, pois $\tau_m = m$.

(ii) $p \geq 0$ e $m = p + 2$ (este é o valor mínimo que m pode assumir). Neste caso, usando o mesmo argumento de II.2.14, podemos verificar que, se H for a a_I-faceta correspondente, então tomando $n = \eta(p, p + 2)$ temos $\nu(H) \geq n - \tau_m + 1$, e portanto para toda faceta $F \in \Delta_I$ teremos $\nu(F) \geq n - \tau_m + 1$.

Dado $(p, m) \in \mathcal{P}$, $(p, m) > (0, 2)$ lexicograficamente, para $(p', m') < (p, m)$ sejam $n' = \eta(p', m') = m' + p' + r - 1$,

$$\mathcal{I}_{m',n'}^r = \{(\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_{m'}) \in \mathbb{N}^{m'-1} \;/\; 1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots < \lambda_{m'} < n' - r\},$$

$\Delta' = \Delta(m', n', r)$ o complexo simplicial correspondente a n', m', r e $F' \in \Delta'_{I'}$ uma faceta, com $I' = (\tau'_1, \ldots, \tau'_{m'})$, $I' \in \mathcal{I}_{m',n'}^r$. A hipótese de indução será então que

$$\nu(F') \geq n' - \tau'_{m'} + 1 + (m' - p' - 2)$$

Antes de continuar, estabeleceremos mais uma notação. Dados dois vértices $\{Q\}, \{P\} \in \Delta$, diremos que Q e P são *equivalentes*, denotado por $Q \equiv P$, se $\{Q\}_i = \{P\}_i$ para $1 \leq i \leq m - 1$.

Fixemos agora de uma vez por todas

$$\begin{aligned} n' &= \tau_m + r \\ m' &= m - 1 \\ p' &= n' - r - 1 - m' = \tau_m + r - r - 1 - m + 1 = \tau_m - m \\ \Delta' &= \Delta(m', n', r) \\ I' &= (\tau_2, \ldots, \tau_{m-1}) \in \mathcal{I}_{m',n'}^r \end{aligned}$$

Temos então $0 \leq p' \leq m' - 1 = (m - 1) - 1$. É fácil de ver que $\left\lfloor \frac{n'-r-1}{m'} \right\rfloor = 1$.

Seja $G \in \Delta'_{I'}$ uma faceta. Se $p' = m' - 1 = m - 2$ então, lembrando que $\tau_{m'} = \tau_{m-1}$, tem-se

$$n' - \tau_{m'} + 1 + (m' - p' - 2) = n' - \tau_{m'}$$

Por definição, é claro que $\nu(G) \geq n' - \tau_{m'}$ (isto é geral), donde, neste caso,

$$\nu(G) \geq n' - \tau_{m'} + 1 + (m' - p' - 2).$$

Se $p' < m' - 1$, aplicamos a hipótese de indução e também obtemos a desigualdade acima.

Agora seja $F = \{P_1, \ldots, P_d\}$ uma faceta de Δ_I. Definimos uma aplicação

$$\pi_F : F \longrightarrow \Delta'_{I'}$$

tal que $\pi_F(P_i) = [\{P_i\}_1, \ldots, \{P_i\}_{m-1}]$. Observamos que $\pi_F(P_i) = \pi_F(P_j)$ se e só se $P_i \equiv P_j$. $F' = \pi_F(F)$ é uma faceta de $\Delta'_{I'}$ e é fácil de ver que $\nu(F') \leq \nu(F)$. Pelo exposto acima temos que

$$\begin{aligned} \nu(F') &\geq n' - \tau_{m-1} + 1 + ((m-1) - p' - 2) = \\ &= \tau_m + r - \tau_{m-1} + 1 + m - 1 - (\tau_m - m) - 2 = \\ &= 2m + r - \tau_{m-1} - 2 \end{aligned} \tag{6}$$

Seja $A = \{i \in \{2, \ldots, m\}$ tais que $\tau_i - \tau_{i-1} \geq 2\}$. $A \neq \emptyset$ se e só se $\tau_m > m$; se este for o caso, tomamos $k_0 = \max A$.

Temos três possibilidades:

Caso I. $\tau_m = m$.

Neste caso $I = (2, \ldots, m)$. Seja $H = \{Q_1, \ldots, Q_d\}$ a a_I-faceta correspondente. Então $Q_1 = [1, 2, \ldots, m]$ e $Q_d = [2 + r, 3 + r, \ldots, m + r, n]$. Comparando II.2.5 e II.2.6 aplicados a este caso, pode-se verificar que $\nu(H) \geq m + r + 1$. Como

$$n - \tau_m + 1 + (m - p - 2) = n - m + 1 + m - (n - r - 1 - m) - 2 = m + r$$

então

$$\nu(F) \geq \nu(H) \geq n - \tau_m + 1 + (m - p - 2).$$

Caso II. $\tau_m > m$ e $k_0 = m$.

Neste caso $\tau_m - \tau_{m-1} \geq 2$ e temos

$$\begin{gathered} \tau_m - \tau_{m-1} \geq 2 \\ \Downarrow \\ \tau_m - \tau_{m-1} - 1 \geq 1 = n - m - r - p \\ \Downarrow \\ m - \tau_{m-1} + r \geq n - \tau_m + 1 - p \\ \Downarrow \\ 2m - \tau_{m-1} + r \geq n - \tau_m + 1 + m - p \\ \Downarrow \\ 2m + r - \tau_{m-1} - 2 \geq n - \tau_m + 1 + (m - p - 2) \end{gathered}$$

e por (6) concluímos que

$$\nu(F) \geq \nu(F') \geq n - \tau_m + 1 + (m - p - 2).$$

Caso III. $\tau_m > m$ e $k_0 < m$.

A tática neste caso será reduzi-lo ao caso anterior. Seja

$$I_{k_0-1} = I = (\tau_2, \ldots, \tau_{k_0-1}, \tau_{k_0}, \tau_{k_0+1}, \ldots, \tau_m)$$

onde, pela definição de k_0 temos que $\tau_{k_0} - \tau_{k_0-1} \geq 2$ e $\tau_j = \tau_{k_0} + j - k_0$ se $k_0 + 1 \leq j \leq n$.

Para $j \in \{k_0, k_0+1, \ldots, m-1\}$ definimos

$$I_j = (\tau_2, \ldots, \tau_{k_0-1}, \tau_{k_0} - 1, \tau_{k_0+1}, \ldots, \tau_{j-1}, \tau_j - 1, \tau_{j+1}, \ldots, \tau_m).$$

Notamos que $I_j \in \mathcal{I}^r_{m,n}$. Seja $F^{(j)}$ a a_{I_j}-faceta. Sabemos que $\nu(F) \geq \nu(F^{(k_0-1)})$ por II.2.13; e por definição, $F^{(m-1)}$ está nas condições do caso anterior. Precisamos então provar que $\nu(F^{(k_0-1)}) \geq \nu(F^{(k_0)}) \geq \ldots \geq \nu(F^{(m-1)})$. Mas, pelo lema II.2.15, temos que $\nu(F^{(l)}) \geq \nu(F^{(l+1)})$ para $k_0 - 1 \leq l \leq m-1$, e isto prova este caso e a proposição. □

Observamos que

$$\left\lfloor \frac{n-r-1}{m} \right\rfloor = 1 \text{ e } 0 < p \leq m-2 \Leftrightarrow m+1 < n-r \leq 2m-1$$

Com esta observação podemos enunciar o

Teorema II.2.17. *Se* $m+1 < n-r \leq 2m-1$, *então*

$$\alpha(\Delta) = 2(m+r) - n + 1$$

Demonstração. Suponhamos válidas as condições de II.2.16. Como $m+1 < n-r \leq 2m-1$, então $0 < p = n-r-1-m \leq m-2$. Em particular, $m > 2$ neste caso. Temos também que $\tau_m \leq n-r-1$. Então o maior valor que τ_m pode assumir é $n-r-1$. Fazendo $\tau_m = n-r-1$, de II.2.16 concluímos que

$$\begin{aligned}\alpha(\Delta) &\geq n - \tau_m + 1 + (m-p-2) \geq \\ &\geq n - n + r + 1 + m - n + r + 1 + m - 2 = \\ &= 2(m+r) - n + 1\end{aligned}$$

onde esta cota é de fato mínima. Para provar a igualdade, vamos construir uma faceta em Δ que realize este valor. Sejam τ_i, $2 \leq i \leq m$, como em (3), para $q = 1$. Explicitamente,

$$\tau_i = \begin{cases} i, & \text{se } 1 \leq i \leq m-p \\ 2i - m + p, & \text{se } m-p+1 \leq i \leq m \end{cases}$$

Em particular, $\tau_m = n-r-1$.

Seja $F = \{P_1, \ldots, P_d\}$ a a_I-faceta. Temos que

$$\{P_d\}_j = \begin{cases} \tau_j + r + 1 = j + r + 1, & \text{se } 1 \leq j \leq m-p-1 \\ \tau_j + r + 2 = 2j - m + p + r + 2, & \text{se } m-p \leq j \leq m-1 \\ n, & \text{se } j = m \end{cases}$$

Seja s_0 o menor índice tal que $\{P_{s_0}\}_m = n$. É fácil de ver que

$$\{P_{s_0}\}_j = \begin{cases} 2j + p + r + 1 - m, & \text{se } 1 \leq j \leq m-p-1 \\ 2j - m + p + r + 1, & \text{se } m-p \leq j \leq m-1 \end{cases}$$

O número de não-degraus de F entre P_1 e P_{s_0} inclusive, é $n - \tau_m + 1 = r + 2$. Por contagem a partir de P_{s_0}, podemos verificar que o número de não-degraus entre P_{s_0+1} e P_d é $m-p-2$. Logo $\nu(F) = r + 2 + m - p - 2 = r + m - p = r + m - (n-r-1-m) = 2(m+r) - n + 1$, como procurado. □

CAPÍTULO III

ALGUMAS PROPRIEDADES DA ÁLGEBRA INICIAL CATALÉTICA

1. Normalidade

Um domínio de integridade é *normal* se for integralmente fechado em seu corpo de frações. Existem vários critérios para determinar a normalidade de um domínio de integridade. Uma situação interessante é a descrita pelo lema seguinte:

Lema III.1.1. *Sejam A e B domínios de integridade tais que A seja integralmente fechado em B e B seja normal (ou seja, B é integralmente fechado em seu corpo de frações $Q(B)$). Então A é integralmente fechado em seu corpo de frações $Q(A)$, ou seja, A é normal.*

Demonstração. Seja $h \in Q(A)$ inteiro sobre A; então $h \in Q(B)$, e como é inteiro sobre A, é inteiro sobre B. Mas B é normal, portanto $h \in B$. Como $A \subset B$ é integralmente fechado, $h \in A$, ou seja, A é normal. □

Esta situação, mais forte que a simples normalidade, ocorre em relação a $K[\mathrm{in}_\sigma(M)]$ e $K[X]$, para certos valores de m, n, r.

Para demonstrar que $K[\mathrm{in}_\sigma(M)]$ e sua álgebra de Rees $K[X, \mathrm{in}_\sigma(M)t]$ são normais, seguiremos basicamente o argumento de [CHV, 3.6], com as modificações necessárias.

Proposição III.1.2.
(i) *$K[\mathrm{in}_\sigma(M)]$ é normal para todos os valores de m, n, r.*
(ii) *Se $n - m - 1 < r$ então $K[\mathrm{in}_\sigma(M)]$ é integralmente fechado em $K[X]$.*

Demonstração.
(i) Seja G o semigrupo afim gerado por $\mathrm{in}_\sigma(M)$. Por A.1.16 , $K[\mathrm{in}_\sigma(M)]$ é normal se e só se G for normal. Então vamos provar que G é normal. Para isto sejam a, a_1, $b \in G$ tais que $a^p = a_1^p b$ com $p \in \mathbb{N}$. Temos que mostrar que existe $b_1 \in G$ tal que $b = b_1^p$.

De $a^p = a_1^p b$ segue-se imediatamente que os expoentes das indeterminadas no monômio b são todos múltiplos de p. Sejam d', d_1, d o número de indeterminadas em a, a_1, b respectivamente, contadas as repetições. Então $d = p(d' - d_1)$. Como a, $a_1 \in G$, é claro que $d_1 = mq_1$ e $d' = mq'$ para certos q', $q_1 \in \mathbb{N}$. Logo $d = pm(q' - q_1)$. Tomando $q = d/m$ e $s = q' - q_1$ temos $q = ps$.

Vamos escrever agora b de uma forma conveniente. Sabemos que b é a imagem de um único tableau r-standard via ψ (ver capítulo I). Se $b = \eta_1 \dots \eta_q$ com $\eta_i \in \mathrm{in}_\sigma(M)$, $1 \leq i \leq q$, isto significa que b pode ser escrito na forma:

$$b = \prod_{i=1}^{q} \left(x_{\lambda_1^i} x_{\lambda_2^i} \dots x_{\lambda_m^i} \right) \tag{1}$$

onde as seguintes condições são satisfeitas:

(a). $1 \leq \lambda_1^i < \lambda_2^i - r < \dots < \lambda_j^i - (j-1)r < \dots < \lambda_m^i - (m-1)r \leq n - (m-1)r$ para $1 \leq i \leq q$;

(b). $1 \leq \lambda_j^1 \leq \lambda_j^2 \leq \dots \leq \lambda_j^q \leq n - (m-j)$ para $1 \leq j \leq m$;

(c). $\lambda_j^i \leq \lambda_{j+1}^k$ para $1 \leq j \leq m-1$ e $1 \leq k \leq i \leq q$.

A condição (a) é equivalente ao fato que $x_{\lambda_1^i} x_{\lambda_2^i} \dots x_{\lambda_m^i} \in \mathrm{in}_\sigma(M)$. As condições (b) e (c) são equivalentes ao fato do produto (1) que representa b ser a imagem do (único) tableau r-standard

correspondente via ψ. De (b) e (c) concluímos que $\lambda_j^i \leq \lambda_l^k$ se $(j,i) < (l,k)$ lexicograficamente para $1 \leq j,l \leq m$ e $1 \leq i,k \leq q$. Agora usando que $q = ps$ e que as indeterminadas aparecem com potencias múltiplas de p, podemos concluir que, para cada $j \in \{1,\ldots,m\}$,

$$\lambda_j^{kp+1} = \lambda_j^{kp+2} = \ldots = \lambda_j^{kp+p-1} = \lambda_j^{(k+1)p}$$

com $0 \leq k \leq s-1$. Usando isto podemos reescrever (1) da seguinte forma:

$$b = \prod_{k=0}^{s-1} \left(x_{\lambda_1^{kp+1}} x_{\lambda_2^{kp+1}} \ldots x_{\lambda_m^{kp+1}} \right)^p.$$

Se tomarmos

$$b_1 = \prod_{k=0}^{s-1} x_{\lambda_1^{kp+1}} x_{\lambda_2^{kp+1}} \ldots x_{\lambda_m^{kp+1}}$$

é fácil de ver que $b_1 \in G$ e que $b = b_1^p$.

(ii) Como $K[\mathrm{in}_\sigma(M)]$ é gerado por monômios, para mostrar que $K[\mathrm{in}_\sigma(M)] \subset K[X]$ é integralmente fechado em $K[X]$ basta mostrar que para cada monômio $h \in k[X]$ tal que $h^p \in K[\mathrm{in}_\sigma(M)]$ para algum $p \in \mathbb{N}$, então $h \in K[\mathrm{in}_\sigma(M)]$. Seja então $h^p = b \in K[\mathrm{in}_\sigma(M)]$. Podemos escrever b na forma (1) satisfazendo às propriedades (a), (b) e (c). Para terminar a demonstração da primeira parte usamos que q era múltiplo de p, o que , a princípio, não podemos garantir aqui. Mas notemos que se $n - m - 1 < r$, então

$$\{\lambda_1^1, \ldots, \lambda_1^q\} \cap \{\lambda_i^1, \ldots, \lambda_i^q\} = \emptyset$$

para $2 \leq i \leq m$.

Se $g = \prod_{i=1}^q x_{\lambda_1^i}$ (as primeiras indeterminadas de cada fator na representação (1) de b), então fica claro que g e b/g são primos entre si, donde conclui-se que todas as indeterminadas que aparecem em g possuem expoentes múltiplos de p, donde q é múltiplo de p. Estabelecido isto, o argumento da primeira parte garante o resultado. □

Exemplo. Se $n - m - 1 \geq r$ então a possibilidade (ii) da proposição anterior não pode ocorrer. Vejamos um contra-exemplo para $m = 3$, $n = 8$, $r = 4$. Neste caso $n - m - 1 = 8 - 3 - 1 = 4 = r$. Tomemos

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 \\ x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} & x_{11} & x_{12} \\ x_9 & x_{10} & x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} & x_{16} \end{pmatrix}$$

Seja $a = x_1x_2x_6x_7x_{11}x_{13}x_{16} \in K[X]$. Temos que $a \notin K[\mathrm{in}(M)]$, mas

$$a^3 = (x_1x_6x_{11})(x_1x_6x_{13})(x_1x_7x_{13})(x_2x_7x_{13})(x_2x_7x_{16})(x_2x_{11}x_{16})$$

e portanto $a^3 \in K[\mathrm{in}(M)]$, donde $K[\mathrm{in}(M)]$ não é integralmente fechado em $K[X]$.

Analisaremos agora a álgebra de Rees associada a $\mathrm{in}_\sigma(M)$. Como em I.3, seja I o ideal de $K[X]$ gerado por $\mathrm{in}_\sigma(M)$, e seja $\mathcal{R}(I)$ a sua álgebra de Rees. Temos que $\mathcal{R}(I) \cong K[X, \mathrm{in}_\sigma(M)t]$. Observemos que $\mathcal{R}(I)$ é bigraduada em X e t, com a bigraduação

$$\mathcal{R}(I)_{(p,q)} = \{ft^q \in K[X, \mathrm{in}_\sigma(M)t] \text{ tais que } \deg(f) = p\}.$$

Proposição III.1.3. *$K[X, \mathrm{in}_\sigma(M)t]$ é normal.*

Demonstração. Analogamente ao que foi feito em I.1.2, tomamos G o semigrupo afim gerado por $X \cup \mathrm{in}_\sigma(M)t$; então $K[X, \mathrm{in}_\sigma(M)t]$ é normal se e só se G for normal. Sejam a, a_1, $b \in G$ tais que $a^p = a_1^p b$ com $p \in \mathbb{N}$. Queremos provar que existe $b_1 \in G$ tal que $b = b_1^p$.

Seja I como acima. Podemos escrever

$$\begin{aligned} a &= u\eta_1 \dots \eta_l t^l \in \mathcal{R}(I)_{(d,l)} \\ a_1 &= \tilde{u}\tilde{\eta}_1 \dots \tilde{\eta}_{\tilde{l}} t^{\tilde{l}} \in \mathcal{R}(I)_{(e,\tilde{l})} \\ b &= v\mu_1 \dots \mu_q t^q \in \mathcal{R}(I)_{(h,q)} \end{aligned}$$

para $u, \tilde{u}, v \in K[X]$ e tal que os produtos $\eta_1 \dots \eta_l$, $\tilde{\eta}_1 \dots \tilde{\eta}_{\tilde{l}}$, $\mu_1 \dots \mu_q \in \mathrm{in}_\sigma(M)$, sejam imagens de tableaux r-standard (únicos) via ψ.

Nesta situação, $lp = \tilde{l}p + q$, donde $q = p(l - \tilde{l})$. Escrevendo $s = l - \tilde{l}$ temos $q = ps$. Além disso todas as variáveis de b aparecem com potências múltiplas de p. Estas duas condições permitirão provar que b possui a propriedade requerida, ou seja, que $b = (\tilde{v})^p(\tilde{\mu}_1 \dots \tilde{\mu}_s t^s)^p \in \mathcal{R}(I)_{(s'p,sp)}$ para certos $\tilde{v} \in K[X]$, $\tilde{\mu}_i \in \mathrm{in}_\sigma(M)$ e $s' \in \mathbb{N}$. Uma das dificuldades é que não sabemos sequer se $p|h$.

De fato, explicitemos b:

$$b = v \prod_{i=1}^{q} \left(x_{\lambda_1^i} x_{\lambda_2^i} \dots x_{\lambda_m^i} \right) t^q$$

Para melhor visualizar, escreveremos

$$b = v \prod_{i=1}^{q} \left(x_{\lambda_1^i} x_{\lambda_2^i} \dots x_{\lambda_m^i} \right) t^q = v \begin{pmatrix} x_{\lambda_1^1} & x_{\lambda_2^1} & \dots & x_{\lambda_m^1} \\ x_{\lambda_1^2} & x_{\lambda_2^2} & \dots & x_{\lambda_m^2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{\lambda_1^q} & x_{\lambda_2^q} & \dots & x_{\lambda_m^q} \end{pmatrix} t^q \tag{2}$$

onde os índices λ_j^i satisfazem às condições (a), (b) e (c) de III.1.2. Seja

$$C_j = \prod_{i=1}^{q} x_{\lambda_j^i} = x_{\lambda_j^1} x_{\lambda_j^2} \dots x_{\lambda_j^q}$$

para $j = 1, 2, \dots, m$. C_j é o produto correspondente às colunas da representação (2). Dividimos cada monômio C_j em s blocos com p elementos:

$$C_{jk} = \prod_{i=kp+1}^{(k+1)p} x_{\lambda_j^i} = x_{\lambda_j^{kp+1}} x_{\lambda_j^{kp+2}} \dots x_{\lambda_j^{kp+(p-1)}} x_{\lambda_j^{(k+1)p}}$$

para $j = 1, \dots, m$ e $k = 0, \dots, s-1$.

Assim $C_j = \prod_{k=0}^{s-1} C_{jk}$ e $b = v \prod_{j=1}^{m} C_j t^q = v \prod_{j=1}^{m} \prod_{k=0}^{s-1} C_{jk} t^q$. Esquematicamente podemos representar (2) como

$$b = v \begin{pmatrix} C_{10} & C_{20} & \dots & C_{m0} \\ C_{11} & C_{21} & \dots & C_{m1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{1k} & C_{2k} & \dots & C_{mk} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{1,(s-1)} & C_{2,(s-1)} & \dots & C_{m,(s-1)} \end{pmatrix} t^q \tag{3}$$

Diremos que C_{jk} é *completo* se

$$x_{\lambda_j^{kp+1}} = x_{\lambda_j^{kp+2}} = \ldots = x_{\lambda_j^{(k+1)p}}.$$

Se C_{jk} não for completo, então existe inteiro i, $1 \leq i < p$ tal que

$$x_{\lambda_j^{kp+i}} \neq x_{\lambda_j^{kp+i+1}}.$$

Seja $\iota(k)$ o menor inteiro tal que isto aconteça. Pela condição (b) da demonstração de III.1.2, neste caso temos

$$x_{\lambda_j^{kp+1}} = x_{\lambda_j^{kp+2}} = \ldots = x_{\lambda_j^{kp+\iota(k)}} < x_{\lambda_j^{kp+\iota(k)+1}} \leq x_{\lambda_j^{kp+\iota(k)+2}} \leq \ldots \leq x_{\lambda_j^{(k+1)p}}$$

Sejam

$$C'_{jk} = \left(x_{\lambda_j^{kp+\iota(k)}}\right)^{p-\iota(k)}$$

$$C^*_{jk} = x_{\lambda_j^{kp+\iota(k)+1}} x_{\lambda_j^{kp+\iota(k)+2}} \ldots x_{\lambda_j^{(k+1)p}}.$$

É claro que $\mathrm{mdc}(C'_{jk}, C^*_{jk}) = 1$. Também vê-se que C_{jk} é completo se e só se $C'_{jk} = C^*_{jk} = 1$. Se todos os blocos C_{jk} forem completos, então podemos verificar que se

$$f = \prod_{k=0}^{s-1} \left(x_{\lambda_1^{kp+1}} x_{\lambda_2^{kp+1}} \ldots x_{\lambda_m^{kp+1}}\right)$$

então $f \in K[\mathrm{in}_\sigma(M)]$ e $\prod_{j=1}^m C_j = (f)^p$. Como conseqüência, todas as variáveis de v aparecem como potências de p, donde existe $w \in K[X]$ tal que $v = w^p$. Nestas condições, $b_1 = w(ft^s) \in K[X, \mathrm{in}_\sigma(M)t]$ e $b = (b_1)^p$.

Suponhamos agora que existam blocos C_{jk} que não sejam completos. Mostraremos então que podemos rearranjar as variáveis na representação (2) de forma que os blocos correspondentes se tornem completos, o que permitirá demonstrar a proposição.

O processo de rearranjo é indutivo. Ordenamos o conjunto de índices $\mathcal{I} = \{(j,k) : j = 1, \ldots, m;\ k = 0, \ldots, s-1\}$ lexicograficamente, ou seja, $(j,k) < (j',k')$ se $j < j'$ ou se $j = j'$ e $k < k'$. Definimos $b^{(0)} = b$, $v^{(0)} = v$, e $C^{(0)}_{jk} = C_{jk}$ para todo $(j,k) \in \mathcal{I}$. Seja $(j_0, k_0) \in \mathcal{I}$ o menor par tal que $C_{j_0k_0}$ não seja completo. Pela condição (c) da demonstração de III.1.2, tem-se que $C'_{j_0k_0} \mid v$. Tomamos então

$$v^{(1)} = v^{(0)} \frac{C^{*(0)}_{j_0k_0}}{C'^{(0)}_{j_0k_0}}$$

e

$$C^{(1)}_{jk} = \begin{cases} C^{(0)}_{jk}, & \text{se } (j,k) \neq (j_0,k_0) \\ C^{(0)}_{j_0k_0} \dfrac{C'^{(0)}_{j_0k_0}}{C^{*(0)}_{j_0k_0}} = \left(x_{\lambda_{j_0}^{k_0p+1}}\right)^p, & \text{se } (j,k) = (j_0,k_0) \end{cases}$$

Temos então

$$b = b^{(1)} = v^{(1)} \prod_{j=1}^{m} \prod_{k=0}^{s-1} C^{(1)}_{jk} t^q$$

Como C_{j_0-1,k_0} é completo (ou não existe, caso $j_0 = 1$), não é difícil de ver que o produto $g = C^{(1)}_1 C^{(1)}_2 \ldots C^{(1)}_m$ satisfaz às condições (a), (b) e (c) da demonstração de III.1.2. Em particular, g corresponde a um tableau r-standard via ψ.

Repetindo este processo, em uma etapa $i \geq 1$ teremos

$$b = b^{(i)} = v^{(i)} \prod_{j=1}^{m} \prod_{k=0}^{s-1} C^{(i)}_{jk} t^q.$$

Se $C^{(i)}_{jk}$ for completo para todo $(j,k) \in \mathcal{I}$, então $b^{(i)}$ estará na forma desejada. Senão, seja (j_i, k_i) o menor par tal que $C^{(i)}_{j_ik_i}$ não seja completo. Por construção é claro que $(j_i, k_i) > (j_{i-1}, k_{i-1})$. Podemos então aplicar o procedimento em $b^{(i)}$, encontrando $b^{(i+1)}$. Como $\mathcal{I}$ é finito, é claro que este processo termina em alguma etapa l, e $b^{(l)}$ será uma representação de b com blocos completos. □

Exemplo. Vamos exemplificar o procedimento usado na proposição acima. Seja X uma matriz 3×7 1-catalética:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 \\ x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 \end{pmatrix}$$

Tomemos $p = 2$. Seja

$$b = (x_1x_2x_3x_6x_8x_9) \begin{pmatrix} x_1 & x_3 & x_5 \\ x_2 & x_4 & x_7 \\ x_5 & x_7 & x_9 \\ x_4 & x_6 & x_8 \end{pmatrix} t^4$$

Reescrevendo o fator em $\mathrm{in}_\sigma(M)$ de maneira 1-standard, temos

$$b = (x_1x_2x_3x_6x_8x_9) \begin{pmatrix} x_1 & x_4 & x_7 \\ x_2 & x_5 & x_7 \\ x_3 & x_5 & x_8 \\ x_4 & x_6 & x_9 \end{pmatrix} t^4$$

Temos $C_{10} = x_1x_2$, $C_{11} = x_3x_4$, $C_{20} = x_4x_5$, $C_{21} = x_5x_6$, $C_{30} = x_7x_7$, $C_{31} = x_8x_9$.

O primeiro bloco não completo de b é $C_{10} = x_1x_2$. Neste caso $C'_{10} = x_1$ e $C^*_{10} = x_2$. Então $v^{(1)} = x_2^2x_3x_6x_8x_9$ e $C^{(1)}_{10} = x_1x_1$, donde

$$b^{(1)} = (x_2x_2x_3x_6x_8x_9) \begin{pmatrix} x_1 & x_4 & x_7 \\ x_1 & x_5 & x_7 \\ x_3 & x_5 & x_8 \\ x_4 & x_6 & x_9 \end{pmatrix} t^4$$

Em $b^{(1)}$ o primeiro bloco não completo é $C^{(1)}_{11} = x_3x_4$, com $C'^{(1)}_{11} = x_3$ e $C^{*(1)}_{11} = x_4$. Assim

$$b^{(2)} = (x_2x_2x_4x_6x_8x_9) \begin{pmatrix} x_1 & x_4 & x_7 \\ x_1 & x_5 & x_7 \\ x_3 & x_5 & x_8 \\ x_3 & x_6 & x_9 \end{pmatrix} t^4$$

Em $b^{(2)}$ o primeiro bloco não completo é $C^{(2)}_{20} = x_4x_5$, com $C'^{(2)}_{20} = x_4$ e $C^{*(2)}_{20} = x_5$. Assim

$$b^{(3)} = (x_2x_2x_5x_6x_8x_9) \begin{pmatrix} x_1 & x_4 & x_7 \\ x_1 & x_4 & x_7 \\ x_3 & x_5 & x_8 \\ x_3 & x_6 & x_9 \end{pmatrix} t^4$$

Em $b^{(3)}$ o primeiro bloco não completo é $C^{(3)}_{21}$, com $C'^{(3)}_{21} = x_5$ e $C^{*(3)}_{21} = x_6$. Então

$$b^{(4)} = (x_2x_2x_6x_6x_8x_9) \begin{pmatrix} x_1 & x_4 & x_7 \\ x_1 & x_4 & x_7 \\ x_3 & x_5 & x_8 \\ x_3 & x_5 & x_9 \end{pmatrix} t^4$$

Agora, em $b^{(4)}$ o primeiro bloco não completo é $C^{(4)}_{31}$ com $C'^{(4)}_{31} = x_8$ e $C^{*(4)}_{31} = x_9$. Então

$$b^{(5)} = (x_2x_2x_6x_6x_9x_9) \begin{pmatrix} x_1 & x_4 & x_7 \\ x_1 & x_4 & x_7 \\ x_3 & x_5 & x_8 \\ x_3 & x_5 & x_8 \end{pmatrix} t^4$$

O processo termina nesta etapa, e temos portanto

$$b = (x_2x_6x_9)^2[(x_1x_4x_7)(x_3x_5x_8)t^2]^2$$

Proposição III.1.4. *As álgebras $K[\mathrm{in}_\sigma(M)]$ e $K[X, \mathrm{in}_\sigma(M)t]$ são álgebras de Cohen-Macaulay normais.*

Demonstração. Como estas álgebras são anéis de semigrupos normais, por A.1.17 , são Cohen-Macaulay. □

2. Invariantes Numéricos

Cálculo da dimensão de $K[\mathrm{in}_\sigma(M)]$

O cálculo da dimensão das álgebras iniciais cataléticas pode ser feito pela contagem dos elementos das facetas, como na demonstração de II.1.3. Seguindo uma sugestão de Aron Simis, daremos aqui uma outra demonstração usando teoria de grafos.

Teorema III.2.1.

$$\dim K[\mathrm{in}_\sigma(M)] = \begin{cases} m(n-m)+1, & \text{se } n-m-1 \leq r \\ n+(m-1)r, & \text{se } n-m-1 > r \end{cases}$$

Demonstração. A demonstração será feita por indução em m.
Se $m = 2$, então

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_{1+r} & x_{2+r} & \cdots & x_{n+r} \end{pmatrix}.$$

Neste caso $\mathrm{in}_\sigma(M)$ pode ser associado a um grafo. Vamos denotar G o grafo correspondente. Temos as seguintes possibilidades:

(1). $r = n$. G é um grafo conexo bipartido nos vértices $\{x_1, \ldots, x_{n-1}, x_{n+1}, \ldots, x_{2n}\}$ com a partição $A = \{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ e $B = \{x_{n+2}, \ldots, x_{2n}\}$ e as arestas da forma $x_i x_{n+j}$ para $1 \leq i \leq n-1$ e $i < j \leq n$.

(2). $r = n-1$. G é conexo, bipartido nos vértices $\{x_1, \ldots, x_{n-1}, x_{n+1}, \ldots, x_{2n-1}\}$ com a partição $A = \{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ e $B = \{x_{n+1}, \ldots, x_{2n-1}\}$ e arestas da forma $x_i x_{n+j}$ para $1 \leq i \leq n-1$ e $i \leq j \leq n-1$.

(3). $r = n-2$. G é conexo, bipartido nos vértices $\{x_1, \ldots, x_{2n-2}\}$ com a partição $A = \{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ e $B = \{x_n, \ldots, x_{2n-2}\}$ e arestas $x_i x_{n+j}$ para $1 \leq i \leq n-1$ e $i-1 \leq j \leq n-2$.

(4). $r \leq n-3$. G é grafo conexo nos vértices $\{x_1, \ldots, x_{n+r}\}$ mas não é bipartido, e suas arestas são da forma $x_i x_{j+r}$ para $1 \leq i \leq n-1$ e $i < j \leq n$.

É conhecido que se G for um grafo conexo em s vértices, então $\dim K[G] = s-1$ se G for bipartido; e $\dim K[G] = s$ se G não for bipartido (ver [SVV], por exemplo). No nosso caso, se $r > n-3$, então G é grafo conexo bipartido com $2(n-1)$ vértices; e se $r \leq n-3$, G é grafo conexo não bipartido com $n+r$ vértices. Logo, em nosso caso temos, para $m = 2$,

$$\dim K[\mathrm{in}_\sigma(M)] = \begin{cases} 2n-3, & \text{se } n-3 \leq r \\ n+r, & \text{se } n-3 > r \end{cases}$$

Agora suponhamos válido para $m-1$, se $m > 2$, e provaremos que vale para m.
Seja $\tilde{X}$ a matriz obtida X retirando-se as primeiras linha e coluna. Explicitamente

$$\tilde{X} = \begin{pmatrix} x_{2+r} & \cdots & x_{n-m+r} & x_{n-(m-1)+r} & x_{n-(m-2)+r} & \cdots & x_{n+r} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{2+(m-1)r} & \cdots & x_{n-m+(m-1)r} & x_{n-m+1+(m-1)r} & x_{n-m+2+(m-1)r} & \cdots & x_{n+(m-1)r} \end{pmatrix}$$

Sejam $\tilde{M}$ e $\mathrm{in}_\sigma(\tilde{M})$ respectivamente o conjunto dos menores máximos e o conjunto dos iniciais dos menores máximos de $\tilde{X}$. Temos, por hipótese de indução, que

$$\dim K[\mathrm{in}_\sigma(\tilde{M})] = \begin{cases} (m-1)(n-m)+1, & \text{se } n-m-1 \leq r \\ (n-1)+(m-2)r, & \text{se } n-m-1 > r \end{cases}$$

Vamos analisar as duas possibilidades.

(I) $n-m-1 \leq r$. Neste caso temos $n-m+1 \leq 2+r$, donde conclui-se que x_i é transcendente sobre $K(\mathrm{in}_\sigma(\tilde{M}))(x_1,\ldots,x_{i-1})$ para $1 \leq i \leq n-m+1$. Então temos que

$$K(\mathrm{in}_\sigma(M))(x_1) = K(\mathrm{in}_\sigma(\tilde{M}))(x_1,\ldots,x_{n-m+1})$$

e portanto

$$\dim K[\mathrm{in}_\sigma(M)] = (m-1)(n-m)+1+(n-m+1)-1 = m(n-m)+1$$

(II) $n-m-1 > r$. Neste caso $\{x_1,\ldots,x_{2+r}\}$ é certamente transcendente sobre $K(\mathrm{in}_\sigma(\tilde{M}))$, mas $x_j \in K(\mathrm{in}_\sigma(\tilde{M}))(x_1,\ldots,x_{2+r})$ para $2+r < j \leq n-m+1$. Logo

$$K(\mathrm{in}_\sigma(M))(x_1) = K(\mathrm{in}_\sigma(\tilde{M}))(x_1,\ldots,x_{2+r})$$

donde

$$\dim K[\mathrm{in}_\sigma(M)] = (n-1)+(m-2)r+2+r-1 = n+(m-1)r$$

e temos o desejado. □

Grau do h-vetor e o a-invariante de $K[\mathrm{in}_\sigma(M)]$

O resultado A.3.10 nos dá uma maneira de calcular o h-vetor de $K[\mathrm{in}_\sigma(M)]$ usando o complexo simplicial associado Δ. Vamos usar aqui as notações e resultados de II.2.

Teorema III.2.2. *Seja $h(\mathrm{in}_\sigma(M))$ o grau do h-vetor de $K[\mathrm{in}_\sigma(M)]$ e seja $a(\mathrm{in}_\sigma(M))$ o a-invariante de $K[\mathrm{in}_\sigma(M)]$. Se $d = \dim K[\mathrm{in}_\sigma(M)]$ temos:*

$$a(\mathrm{in}_\sigma(M)) = \begin{cases} -n, & \text{se } n-m-1 \leq r \\ -\left\lceil \dfrac{d}{m} \right\rceil, & \text{se } \left\lfloor \dfrac{n-r-1}{m} \right\rfloor \geq 2 \text{ ou se } n-r = 2m \\ -(2(m+r)-n+1), & \text{se } m+1 < n-r < 2m \end{cases}$$

e $h(\mathrm{in}_\sigma(M)) = d + a(\mathrm{in}_\sigma(M))$.

Demonstração. Seja $h = (h_0, h_1, \ldots, h_i, \ldots)$ o h-vetor de $K[\mathrm{in}_\sigma(M)]$. Para cada faceta $H \in \Delta$ seja $\delta(H)$ como em II.2. Então por A.3.10

$$h_i = \left|\left\{H \in \Delta / \delta(H) = i\right\}\right|$$

Portanto concluímos que $s(\Delta)$ é o grau do h-vetor de $K[\mathrm{in}_\sigma(M)]$. Logo $h(\mathrm{in}_\sigma(M)) = s(\Delta)$.

Também temos que $s(\Delta) = d - \alpha(\Delta)$, onde $d = \dim K[\mathrm{in}_\sigma(M)]$. Logo nestas condições concluímos que $a(\mathrm{in}_\sigma(M)) = -\alpha(\Delta)$ é o a-invariante de $K[\mathrm{in}_\sigma(M)]$ (ver A.2.8). Além disso, por definição, temos que $a(\mathrm{in}_\sigma(M)) = h(\mathrm{in}_\sigma(M)) - d$.

Se $n-m-1 \leq r$, por II.2.9 concluímos que $a(\mathrm{in}_\sigma(M)) = -n$. Para estudarmos o caso $n-m-1 > r$, estabeleceremos primeiro algumas relações numéricas. Denotando $q = \left\lfloor \frac{n-r-1}{m} \right\rfloor$, temos que

$$d = n+(m-1)r = n-r+mr = mq+p+1+mr = m(q+r)+p+1 \tag{4}$$

Também

$$n-r = mq+p+1 = \begin{cases} m(q+1), & \text{se } p = m-1 \\ mq+p' \text{ com } 1 \leq p' \leq m-1, & \text{se } 0 \leq p < m-1 \end{cases}$$

Donde

$$\left\lceil \frac{d}{m} \right\rceil = \left\lceil \frac{n+(m-1)r}{m} \right\rceil = \left\lceil \frac{n-r}{m} \right\rceil + r =$$

$$= \begin{cases} \lceil q+1 \rceil + r = q+1+r, & \text{se } p = m-1 \\ \left\lceil q + \dfrac{p'}{m} \right\rceil + r = q+1+r, & \text{se } 0 \le p < m-1 \end{cases}$$

ou seja,

$$\left\lceil \frac{d}{m} \right\rceil = q + r + 1 = \left\lfloor \frac{n-r-1}{m} \right\rfloor + r + 1 \tag{5}$$

Logo, de II.2.4 e II.2.14, usando (5), concluímos que se $\left\lfloor \frac{n-r-1}{m} \right\rfloor \ge 2$ ou se $n - r = 2m$ então

$$a(\mathrm{in}_\sigma(M)) = -\left\lceil \frac{d}{m} \right\rceil$$

Finalmente, se $m+1 < n-r < 2m$, por II.2.6 temos que $a(\mathrm{in}_\sigma(M)) = -(2(m+r)-n+1)$. □

3. Bases de SAGBI para a Álgebra de Matrizes Cataléticas

Em [CIIV] foi demonstrado que M $(X \cup Mt)$ é base de SAGBI para $K[M]$ $(K[X, Mt])$ se $m = 2$. Se X for uma matriz genérica também foi demonstrado em [S] que M é base de SAGBI para $K[M]$. Nesta seção estenderemos estes resultados um pouco. Provaremos que M é base de SAGBI para $K[M]$ em relação à ordem $<_\sigma$ (ver capítulo I) quando $n - m - 1 \le r$. Também poderemos concluir que, neste mesmo caso, $X \cup Mt$ é base de SAGBI para $K[X, Mt]$, a álgebra de Rees correspondente, em relação à ordem $<_{\sigma'}$ (ver I.3). Para isto vamos aplicar o critério dado pela proposição A.4.14 enunciada no apêndice A.

No teorema I.3.1 estabelecemos quem são os geradores de $\ker \Psi$. Mostraremos que as relações (i) e (ii) de I.1.3 podem ser expandidas na forma necessária para satisfazer A.4.14.

Se $T \in K[\Lambda(m,n)]$ for um tableau então lembramos que $\phi(T) = |T| \in K[M]$ é o produto dos menores correspondentes em X; e que $\mathrm{diag}(T) = \mathrm{in}_\sigma(\phi(T)) = \psi(T)$. Consideremos o seguinte homomorfismo:

$$\begin{aligned} \Phi : K[X, \Lambda(m,n)] &\longrightarrow K[X, Mt] \\ x_i &\longmapsto x_i \\ [\lambda] &\longmapsto |[\lambda]|t \end{aligned}$$

Notemos que $\Phi(\sum_i f_i T_i) = \sum_i f_i \phi(T_i) t^{\deg(T_i)}$, onde $f_i \in K[X]$ e $T_i \in K[\Lambda(m,n)]$.

Agora, se $T \in K[\Lambda(m,n)]$ for um tableau não-standard, então pela teoria das ALR para menores de matrizes genéricas (ver A.6), sabemos que existe uma única combinação linear $\sum a_i \Gamma_i$ de tableaux Γ_i standard tal que $|T| = \sum_i a_i |\Gamma_i|$ (vide A.6.2). Indicaremos esta combinação linear por $Pl(T) = \sum a_i \Gamma_i$ (para lembrar que tal relação é construída a partir das relações de Plücker). Se $n - m - 1 \le r$ tem-se que se $T \in K[\Lambda(m,n)]$ for um tableau, então $rs(T) = s(T)$; logo neste caso o conjunto S_r dos tableaux r-standard é na verdade o conjunto dos tableaux standard em $\Lambda(m,n)$. Dados $[\lambda], [\mu] \in \Lambda(m,n)$, denotemos as relações (ii) de I.3.1 por

$$G_{[\lambda][\mu]} = [\lambda][\mu] - rs([\lambda][\mu])$$

Lema III.3.1. *Seja $n - m - 1 \le r$. Dado $[\lambda][\mu] \in K[\Lambda(m,n)]$ tem-se que*

$$\begin{aligned} \phi(G_{[\lambda][\mu]}) &= \phi([\lambda][\mu] - rs([\lambda][\mu])) = \phi([\lambda][\mu] - s([\lambda][\mu])) = \\ &= \phi(Pl([\lambda][\mu])) - \phi(s([\lambda][\mu])) = \sum_{i \in I} |[\tau_i]||[\rho_i]| \end{aligned} \tag{6}$$

onde I é um conjunto adequado de índices e $[\tau_i][\rho_i]$ são tableaux standard. Esta representação é única e temos

$$\mathrm{in}_\sigma(|[\tau_i]||[\rho_i]|) \le_\sigma \mathrm{in}_\sigma(\phi(G_{[\lambda][\mu]}))$$

para todo $i \in I$.

Demonstração. Temos da definição das relações de retificação (ver A.6.1) que $Pl([\lambda][\mu]) = s([\lambda][\mu]) + \sum_{i\in I}[\tau_i][\rho_i]$ onde I é um conjunto adequado de índices e $[\tau_i][\rho_i]$ são standard. E como já foi lembrado, $n - m - 1 \leq r$ implica que $rs(T) = s(T)$ para todo tableau T. As igualdades (6) decorrem diretamente destes dois fatos. Agora, por I.1.5, temos que

$$\mathrm{in}_\sigma(|[\tau_i]|||[\rho_i]|) \neq \mathrm{in}_\sigma(|[\tau_j]|||[\rho_j]|) \text{ se } i \neq j.$$

Seja $g = \max_i\{\mathrm{in}_\sigma(|[\tau_i]|||[\rho_i]|)\}$, digamos $g = \mathrm{in}_\sigma(|[\tau_{i_0}]|||[\rho_{i_0}]|)$. Então g é um monômio de $\phi(G_{[\lambda][\mu]})$. De fato, se g não aparece em $\phi(G_{[\lambda][\mu]})$, então é porque foi anulado por algum monômio de algum $|[\tau_k]|||[\rho_k]|$, $k \neq i_0$. Mas neste caso ter-se-ia $g <_\sigma \mathrm{in}_\sigma(|[\tau_k]|||[\rho_k]|)$, absurdo. Logo temos que

$$\mathrm{in}_\sigma(|[\tau_i]|||[\rho_i]|) \leq_\sigma \mathrm{in}_\sigma(\phi(G_{[\lambda][\mu]}))$$

para todo $i \in I$. □

Para trabalhar com as relações (i) de I.3.1 vamos estabelecer algumas notações. Dados k, l inteiros e $[\lambda] = [\lambda_1, \ldots, \lambda_m] \in K[\Lambda(m,n)]$ tais que $1 \leq k \leq m$ e $\lambda_{k-1} < l < \lambda_k$, definimos, para $j \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{k\}$,

$$F_{l,k,[\lambda]} = x_{l+(k-1)r}[\lambda_1, \ldots, \lambda_m] - x_{\lambda_k+(k-1)r}[\lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1}, l, \lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_m]$$

e

$$F^j_{l,k,[\lambda]} = \begin{cases} x_{\lambda_j+(k-1)r}[\lambda_1, \ldots, \lambda_{j-1}, \lambda_{j+1}, \ldots, \lambda_{k-1}, l, \lambda_k, \lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_m], & \text{se } j \leq k-2 \\ x_{\lambda_{k-1}+(k-1)r}[\lambda_1, \ldots, \lambda_{k-2}, l, \lambda_k, \lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_m], & \text{se } j = k-1 \\ x_{\lambda_j+(k-1)r}[\lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1}, l, \lambda_k, \ldots, \lambda_{j-1}, \lambda_{j+1}, \ldots, \lambda_m], & \text{se } k+1 \leq j \leq m \end{cases}$$

Denotaremos

$$f_{l,k,[\lambda]} = \frac{\Phi(F_{l,k,[\lambda]})}{t} = x_{l+(k-1)r}|[\lambda_1, \ldots, \lambda_m]| - x_{\lambda_k+(k-1)r}|[\lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1}, l, \lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_m]|$$

e

$$f^j_{l,k,[\lambda]} = \frac{\Phi(F^j_{l,k,[\lambda]})}{t} = x_{\lambda_j+(k-1)r}|[\lambda_1, \ldots, \lambda_{j-1}, \lambda_{j+1}, \ldots, l, \lambda_k, \lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_m]|$$

Observamos que $F_{l,k,[\lambda]}$ e $F^j_{l,k,[\lambda]}$ são elementos de $K[X, \Lambda(m,n)]$ e que $f_{l,k,[\lambda]}$ e $f^j_{l,k,[\lambda]}$ são seus valores em $K[X]$ quando substituimos os colchetes pelos seus respectivos menores de X.

Notamos que o lema seguinte vale para todos os valores de m, n e r, com $2 \leq m < n$.

Lema III.3.2. *Seguindo a notação acima,*

$$f_{l,k,[\lambda]} = \sum_{j=1, j\neq k}^{m} \epsilon^j_k f^j_{l,k,[\lambda]} \tag{7}$$

onde

$$\epsilon^j_k = \begin{cases} (-1)^{j+k+1}, & \text{se } 1 \leq j \leq k-1 \\ (-1)^{j+k}, & \text{se } k+1 \leq j \leq m \end{cases}$$

Além disso

$$\mathrm{in}_\sigma(f^j_{l,k,[\lambda]}) \leq \mathrm{in}_\sigma(f_{l,k,[\lambda]})$$

para todo $j \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{k\}$

Demonstração. Para demonstrar a igualdade (7), construímos a matriz X_k com $m+1$ linhas e n colunas de forma que a sua primeira linha seja a linha k de X, e o restante seja a própria

matriz X, ou seja,

$$X_k = \begin{pmatrix} x_{1+(k-1)r} & x_{2+(k-1)r} & \cdots & x_{n+(k-1)r} \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_{1+r} & x_{2+r} & \cdots & x_{n+r} \\ x_{1+2r} & x_{2+2r} & \cdots & x_{n+2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{1+(k-1)r} & x_{2+(k-1)r} & \cdots & x_{n+(k-1)r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{1+(m-1)r} & x_{2+(m-1)r} & \cdots & x_{n+(m-1)r} \end{pmatrix}$$

Seja μ o menor de X_k formado pelas colunas $\lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1}, l, \lambda_k, \ldots, \lambda_m$. Ao desenvolver μ pela sua primeira linha encontramos

$$\begin{aligned} \mu = \sum_{j=1}^{k-2} (-1)^{j+1} x_{\lambda_j+(k-1)r} | [\lambda_1 \ldots \lambda_{j-1} \lambda_{j+1} \ldots \lambda_{k-1} l \lambda_k \ldots \lambda_m] | + \\ + (-1)^k x_{\lambda_{k-1}+(k-1)r} | [\lambda_1 \ldots \lambda_{k-2} l \lambda_k \ldots \lambda_m] | + \\ + (-1)^{k+1} x_{l+(k-1)r} | [\lambda_1 \ldots \lambda_{k-1} \lambda_k \lambda_{k+1} \ldots \lambda_m] | + \\ + (-1)^{k+2} x_{\lambda_k+(k-1)r} | [\lambda_1 \ldots \lambda_{k-1} l \lambda_{k+1} \ldots \lambda_m] | + \\ + \sum_{j=k+1}^{m} (-1)^{j+2} x_{\lambda_j+(k-1)r} | [\lambda_1 \ldots \lambda_{k-1} l \lambda_k \ldots \lambda_{j-1} \lambda_{j+1} \ldots \lambda_m] | = 0 \end{aligned}$$

Fazendo as substituições adequadas, encontramos (7).

Usando o mesmo argumento de III.3.1, para mostrar as desigualdades dos monômios iniciais basta mostrar que

$$\mathrm{in}_\sigma(f^j_{l,k,[\lambda]}) \neq \mathrm{in}_\sigma(f^i_{l,k,[\lambda]})$$

para $i \neq j$, com $i, j \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{k\}$. Fixemos $j < i$. Temos dois casos:

Caso 1: $j < i < k$ **ou** $j < k < i$

Neste caso temos que

$$m_j = \mathrm{in}_\sigma(f^j_{l,k,[\lambda]}) = x_{\lambda_j+(k-1)r}\, a\, x_{\lambda_{j+1}+(j-1)r}\, b$$

e

$$m_i = \mathrm{in}_\sigma(f^i_{l,k,[\lambda]}) = x_{\lambda_i+(k-1)r}\, a\, x_{\lambda_j+(j-1)r}\, b'$$

onde

$$a = x_{\lambda_1} x_{\lambda_2+r} \ldots x_{\lambda_{j-1}+(j-2)r}$$

e b, b' são monômios em $K[X]$ adequados.

Como $k-1 > j-1 > j-2$ e $\lambda_j > \lambda_{j-1}$ então $\lambda_j + (k-1)r > \lambda_{j-1} + (j-2)r$, donde $x_{\lambda_j+(k-1)r} <_\sigma x_{\lambda_{j-1}+(j-2)r}$. Também temos que, como $\lambda_i > \lambda_j$, então $\lambda_i + (k-1)r > \lambda_j + (j-1)r$ e $x_{\lambda_i+(k-1)r} <_\sigma x_{\lambda_j+(j-1)r}$. Ao reescrevermos m_i e m_j com as variáveis em ordem decrescente, temos $m_j = a\,\alpha\,c$ e $m_i = a\, x_{\lambda_j+(j-1)r}\, c'$ onde a, c e c' são monômios em $K[X]$ e $\alpha = x_{\lambda_j+(k-1)r}$ ou $\alpha = x_{\lambda_{j+1}+(j-1)r}$. Porém, qualquer que seja α, é fácil de ver que $\alpha <_\sigma x_{\lambda_j+(j-1)r}$, donde $m_j \neq m_i$.

Caso 2: $k < j < i$

Neste caso temos

$$m_j = \mathrm{in}_\sigma(f^j_{l,k,[\lambda]}) = x_{\lambda_j+(k-1)r}\, a\, x_{\lambda_{j+1}+jr} \ldots x_{\lambda_{i-1}+(i-2)r} x_{\lambda_i+(i-1)r} x_{\lambda_{i+1}+ir}\, b$$

e

$$m_i = \mathrm{in}_\sigma(f^i_{l,k,[\lambda]}) = x_{\lambda_i+(k-1)r}\, a\, x_{\lambda_j+jr} \cdots x_{\lambda_{i-1}+(i-1)r} x_{\lambda_{i+1}+ir}\, b$$

onde

$$a = x_{\lambda_1} x_{\lambda_2+r} \cdots x_{l+(k-1)r} x_{\lambda_k+kr} \cdots x_{\lambda_{j-1}+(j-1)r}$$

e

$$b = x_{\lambda_{i+2}+(i+1)r} \cdots x_{\lambda_m+(m-1)r}$$

Como $\lambda_i < \lambda_{i+1}$, $\lambda_j < \lambda_i$ e $k < i$ então $\lambda_i + (k-1)r < \lambda_{i+1} + ir$ e $\lambda_j + (k-1)r < \lambda_i + (i-1)r$, donde ao reescrevermos m_i e m_j com a variáveis em ordem decrescente encontramos $m_j = a'\, x_{\lambda_i+(i-1)r}\, b'$ e $m_i = a''\, \alpha\, b'$ onde a', a'' e b' são monômios em X e $\alpha = x_{\lambda_{i-1}+(i-1)r}$ ou $\alpha = x_{\lambda_i+(k-1)r}$. De qualquer forma temos $\alpha \neq x_{\lambda_i+(i-1)r}$ donde podemos concluir que $m_i \neq m_j$. □

Teorema III.3.3. *Se $n - m - 1 \leq r$ temos:*

(i) *$X \cup Mt$ forma uma base de Sagbi para a álgebra de Rees $K[X, Mt]$ com respeito à ordem $<_{\sigma'}$. Em particular $\mathrm{in}_{\sigma'}(K[X, Mt]) = K[X, \mathrm{in}_\sigma(M)t]$.*

(ii) *M forma uma base de Sagbi para a K-álgebra $K[M]$ com respeito à ordem monomial $<_\sigma$. Em particular $\mathrm{in}_\sigma(K[M]) = K[\mathrm{in}_\sigma(M)]$.*

Demonstração. (i) Nas notações estabelecidas acima, os binômios $G_{[\lambda][\mu]}$ e $F_{l,k,[\lambda]}$ geram o ideal $\ker \Psi$, que é o ideal de apresentação de $K[X, \mathrm{in}_\sigma(M)t]$. Pelos lemas III.3.1 e III.3.2 concluímos que estes geradores satisfazem ás condições de A.4.14, e portanto temos o desejado.

(ii) Os binômios $G_{[\lambda][\mu]}$ geram $\ker \psi$, que é o ideal de apresentação de $K[\mathrm{in}_\sigma(M)]$, e por III.3.1 vê-se que satisfazem ao critério A.4.14. □

Corolário III.3.4. *Se $n - m - 1 \leq r$ temos:*

(i) *Os polinômios*

$$F_{l,k,[\lambda]} - \sum_{j=1, j\neq k}^{m} \epsilon^j_k F^j_{l,k,[\lambda]} \in K[X, \Lambda(m,n)] \tag{8}$$

onde

$$\epsilon^j_k = \begin{cases} (-1)^{j+k+1}, & \text{se } 1 \leq j \leq k-1 \\ (-1)^{j+k}, & \text{se } k+1 \leq j \leq m \end{cases}$$

e l, k, $[\lambda]$ percorrem todos os valores possíveis tais que $1 \leq k \leq m$ e $1 \leq \lambda_1 < \ldots < \lambda_{k-1} < l < \lambda_k < \ldots < \lambda_m$; e

$$[\lambda][\mu] - Pl([\lambda][\mu]) \in K[\Lambda(m,n)] \tag{9}$$

onde $[\lambda][\mu]$ são 2-tableaux não-standard de $K[\Lambda(m,n)]$, formam uma base de Gröbner para $\ker \Phi$ em relação à ordem $<_{\tau'}$ (definida em I.3.2), e $\mathrm{in}_{\tau'}(\ker \Phi) = \mathrm{in}_{\tau'}(\ker \Psi)$. Em particular, $\mathrm{in}_{\tau'}(\ker \Phi)$ é gerado pelos monômios que aparecem à esquerda nas expressões (8) e (9).

(ii) *Os polinômios (9) formam uma base de Gröbner para $\ker \phi$ em relação à ordem $<_\tau$ (definida em I.2.5), e $\mathrm{in}_\tau(\ker \phi) = \mathrm{in}_\tau(\ker \psi)$. Em particular, $\mathrm{in}_\tau(\ker \phi)$ é gerado pelos monômios que aparecem à esquerda nas expressões (9).*

Demonstração. É conseqüência dos teoremas III.3.2, I.2.7, I.3.2, e de A.5.2. □

Da teoria geral de bases de SAGBI, podemos tirar algumas conclusões para as álgebras cataléticas quando $n - m - 1 \leq r$.

Proposição III.3.6. *Se $n - m - 1 \leq r$ então as álgebras $K[M]$ e $K[X, Mt]$ são domínios normais de Cohen-Macaulay.*

Demonstração. Como por III.1.4 as álgebras $K[\mathrm{in}_\sigma(M)]$ e $K[X, \mathrm{in}_\sigma(M)t]$ são domínios normais e de Cohen-Macaulay, e como M e $X \cup Mt$ são bases de SABGI em relação às respectivas álgebras, por A.5.3 concluímos o desejado. □

Proposição III.3.7. *Seja $a(K[M])$ o a-invariante de $K[M]$. Se $n - m - 1 \leq r$ então*

$$a(K[M]) = -n$$

e

$$\dim K[M] = m(n-m) + 1.$$

Demonstração. Como M é base de SAGBI para $K[M]$, estes fatos são conseqüência de III.2.1, III.2.2 e A.5.4. □

Agora seja I o ideal de $K[X]$ gerado por M. Para cada inteiro positivo j seja

$$M^j = \{\mu_1\mu_2\dots\mu_j \text{ onde } \mu_i \text{ são menores máximos de } X\}$$

Seja $\mathrm{in}_\sigma(M^j) = \{\mathrm{in}_\sigma(\mu) \text{ para } \mu \in M^j\}$.

Uma conseqüência importante do teorema III.3.3 é a seguinte

Proposição III.3.8. *Se $n - m - 1 \leq r$, M^j forma uma base de Gröbner para I^j para todo $j \in \mathbb{N}$ em relação à ordem $<_\sigma$ adotada em $K[X]$. Em particular, $\mathrm{in}_\sigma(I^j) = \mathrm{in}_\sigma(I)^j$ para todo $j \in \mathbb{N}$*

Demonstração. Para cada inteiro positivo j temos o homomorfismo

$$\xi_j : I^j \longrightarrow K[X, Mt]$$
$$\sum a_i f_i \longmapsto \sum a_i f_i t^j$$

onde $a_i \in K[X]$ e $f_i \in M^j$. É fácil de ver que para cada $f \in I^j$, $\mathrm{in}_\sigma(f)t^j = \mathrm{in}_{\sigma'}(\xi_j(f))$. Como $X \cup Mt$ é base de SAGBI de $K[X, Mt]$, concluímos que $\mathrm{in}_\sigma(f) = a\mu_f$ onde $a \in K[X]$ e $\mu_f \in \mathrm{in}_\sigma(M^j)$. Logo $\mathrm{in}_\sigma(I^j)$ é gerado por $\mathrm{in}_\sigma(M^j)$, e portanto M^j é base de Gröbner para I^j. □

O resultado acima já foi demonstrado para matrizes genéricas, e com ordens diagonais genéricas, por A. Conca em [C]. Embora aqui tenhamos usado uma ordem específica, pode-se verificar que todos os argumentos usam apenas o fato da ordem $<_\sigma$ ser diagonal. Portanto este resultado vale também se a ordem for uma ordem diagonal genérica. Na verdade, III.3.8 é equivalente ao fato de que M é base de SAGBI para $K[M]$, como se pode ver em [C].

APÊNDICE A

PRELIMINARES

Para facilidade de referência apresentaremos neste apêndice os conceitos básicos, definições e resultados mais importantes sobre os vários tópicos da teoria geral utilizados neste trabalho. Como uma regra geral, X denotará um conjunto de indeterminadas $x_1, \ldots, x_m$ (sobre o anel base em questão). Se $c = (c_1, \ldots, c_m)$ for uma m-upla, então $X^c = x_1^{c_1} \ldots x_m^{c_m}$. Letras em negrito denotarão uplas de elementos, e potências de uplas serão denotadas como para X.

1. Anéis de Cohen-Macaulay

Definiremos nesta seção anéis de Cohen-Macaulay e anéis graduados. Seja R um anel. Dizemos que $f \in R$ é um *elemento R-regular* se $fg = 0 \Rightarrow g = 0$ para todo $g \in R$, ou seja, se f não for um divisor de zero em R.

Definição A.1.1. Uma seqüência $\mathbf{f} = f_1, \ldots, f_n$ de elementos em R é chamada de *seqüência R-regular* ou simplesmente *R-seqüência* se: (i) f_i for um elemento $R/(f_1, \ldots, f_{i-1})R$-regular para $i = 1, \ldots, n$; e (ii) $R/\mathbf{f}R \neq 0$.

Suponhamos agora R noetheriano e seja I um ideal de R com $I \neq R$. Se $\mathbf{f} = f_1, \ldots, f_n$ é uma R-seqüência com $f_i \in I$, então a seqüência $(f_1) \subset (f_1, f_2) \subset \ldots \subset (f_1, \ldots, f_n)$ é estritamente crescente. Portanto, como R é noetheriano, esta seqüência pode ser extendida a uma R-seqüência maximal em I. Temos o teorema [BH, 1.2.5]

Teorema A.1.2. *Sejam R anel noetheriano, e I um ideal de R tal que $I \neq R$. Então todas as R-seqüências maximais em I possuem o mesmo comprimento. Se n for tal comprimento, pode ser calculado por*

$$n = \min\left\{i : \operatorname{Ext}_R^i(R/I, R) \neq 0\right\}$$

Então a seguinte definição faz sentido:

Definição A.1.3. Sejam R anel noetheriano e I um ideal de R tal que $I \neq R$. O comprimento comum das R-seqüências maximais em I é chamado de *I-profundidade*, e será denotado por $\operatorname{prof}_I(R)$. Se $I = R$ definimos $\operatorname{prof}_I(R) = \infty$.

Uma situação especial ocorre com freqüência:

Definição A.1.4. Seja $(R, \mathfrak{m}, k)$ um anel noetheriano local. Então $\operatorname{prof}_{\mathfrak{m}}(R)$ é chamado simplesmente de *profundidade de R*, e é denotado por $\operatorname{prof}(R)$.

R-seqüências e profundidade são importantes objetos algébricos. Uma propriedade marcante é dada por [BH, 1.2.12]:

Proposição A.1.5. *Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel noetheriano local. Toda R-seqüência em $\mathfrak{m}$ é parte de um sistema de parâmetros de R. Em particular,* $\operatorname{prof}(R) \leq \dim R$.

Lembramos que uma seqüência $f_1, \ldots, f_s$ de elementos de R é um *sistema de parâmetros de R* se s é o menor inteiro tal que $\operatorname{Sup}(R/(f_1, \ldots, f_s)R) = \{\mathfrak{m}\}$, onde $\operatorname{Sup}(R) := \{\mathfrak{p} \in R, \mathfrak{p}$ primo tal que $R_{\mathfrak{p}} \neq 0\}$ é o *suporte* de R. Se $\operatorname{prof}(R) = \dim R$, então R recebe uma nomeclatura especial:

Definição A.1.6. Seja R um anel noetheriano local. R é chamado de *anel de Cohen-Macaulay* se $\operatorname{prof}(R) = \dim(R)$.

Em geral, se R for um anel noetheriano arbitrário, então R é um *anel de Cohen-Macaulay* se $R_{\mathfrak{m}}$ for um anel de Cohen-Macaulay para todo ideal maximal $\mathfrak{m} \in \operatorname{Sup}(R)$.

Em um anel de Cohen-Macaulay a I-profundidade fica completamente determinada pela dimensão [BH, 2.1.2]:

Teorema A.1.7. *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel de Cohen-Macaulay local e $\mathbf{f} = f_1, \ldots, f_r$ uma seqüência em $\mathfrak{m}$. Então:*

(a) $\dim R/\mathfrak{p} = \operatorname{prof}(R)\ \forall\ \mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(R)$;

(b) $\operatorname{prof}_I(R) = \dim R - \dim R/IR$ *para todo ideal* $I \subset \mathfrak{m}$;

(c) $\mathbf{f}$ *é uma* R*-seqüência se e só se* $\dim R/\mathbf{f}R = \dim R - r$;

(d) $\mathbf{f}$ *é uma* R*-seqüência se e só se for parte de um sistema de parâmetros de* R.

Lembramos que $\operatorname{Ass}(R)$ é o conjunto dos *primos associados* de R, e que um ideal primo $\mathfrak{p}$ de R é dito *associado* a R se $\mathfrak{p} = (0) : f$ para algum $0 \neq f \in R$.

A propriedade de ser Cohen-Macaulay é estável em relação à especialização e à localização [BH, 2.1.3]:

Teorema A.1.8. *Seja R um anel noetheriano.*

(a) Suponha que $\mathbf{f}$ *seja uma* R*-seqüência. Então* $R/\mathbf{f}R$ *é Cohen-Macaulay. O recíproco é verdadeiro se* R *for local.*

(b) Suponha que R *seja Cohen-Macaulay. Então para cada conjunto multiplicativamente fechado* S *em* R, R_S *também será Cohen-Macaulay. Em particular,* $R_{\mathfrak{p}}$ *é Cohen-Macaulay para todo* $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$. *Se* $R_{\mathfrak{p}} \neq 0$, *então*

$$\operatorname{prof}(R_{\mathfrak{p}}) = \operatorname{prof}_{\mathfrak{p}}(R) \quad \text{e} \quad \dim R = \dim R_{\mathfrak{p}} + \dim R/\mathfrak{p}.$$

Corolário A.1.9. [BH, 2.1.4] *Seja R um anel de Cohen-Macaulay, e $I \neq R$ um ideal. Então* $\operatorname{prof}_I(R) = \operatorname{alt}(I)$ *e, se R for local,* $\operatorname{alt}(I) + \dim R/I = \dim R$ *(onde* alt *indica a altura do ideal).*

Diz-se que um ideal I é *puro* se os ideais primos associados de R/I têm todos a mesma altura. Macaulay mostrou em 1916 que um ideal $I = (f_1, \ldots, f_n)$ de altura n em um anel de polinômios sobre um corpo é *puro*; e Cohen provou em 1946 o mesmo para anéis locais regulares. Estes fatos e o teorema seguinte explicam a nomenclatura "Cohen-Macaulay".

Teorema A.1.10. [BH, 2.1.6] *Um anel noetheriano é Cohen-Macaulay se e só se todo ideal I gerado por* $\operatorname{alt}(I)$ *elementos for puro.*

As álgebras estudadas neste trabalho são todas *álgebras graduadas*, uma importante classe de objetos em álgebra comutativa. Passaremos agora ao estudo destas álgebras.

Definição A.1.11. Um *anel graduado* é um anel R com uma decomposição $R = \oplus_{i \in \mathbb{Z}} R_i$ tal que $R_i R_j \subset R_{i+j}$ para todo $i, j \in \mathbb{Z}$.

Os elementos $f \in R_i$ são chamados *homogêneos (de grau i)* ou de *i-formas*. O zero é um elemento de grau arbitrário, pois está em todos os graus. O grau de f é denotado por $\deg f$. Cada elemento $f \in R$ possui uma única representação $f = \sum_i f_i$ como soma de elementos homogêneos $f_i \in R_i$. Os elementos f_i são as *componentes homogêneas* de f. Notemos que R_0 é um anel com $1 \in R_0$. $R(i)$ denotará o anel graduado com graduação dada por $R(i)_n = R_{i+n}$. Dados dois anéis graduados R e S, um homomorfismo $\phi : R \to S$ satisfazendo $\phi(R_i) \subset S_i$ para todo $i \in \mathbb{Z}$ é chamado de *homomorfismo homogêneo*.

Seja I um ideal de R. I é dito *homogêneo* se possuir uma graduação $I = \oplus_{i \in \mathbb{Z}} I_i$ tal que $I_i = I \cap R_i$. Equivalentemente, I é homogêneo se for gerado por elementos homogêneos de R. Se $f \in I$ então as componentes homogêneas de f também pertencem a I. Se I for um ideal de R não necessariamente homogêneo, definimos o *ideal graduado* I^* como sendo o ideal gerado por todos os elementos homogêneos de I. É claro que I^* é o maior ideal homogêneo contido em I. Se I for homogêneo então $I^* = I$.Tem-se também que R/I^* herda uma graduação natural de R.

Uma R-álgebra A é *graduada* se o for como anel. Se A for gerada, como R_0-álgebra, pelas 1-formas, então é chamada de *standard*. Mais geralmente, se A for uma R_0-álgebra gerada por elementos de grau positivo, então dizemos que A é uma R_0-álgebra *positivamente graduada*.

Um anel de polinômios $K[x_1, \ldots, x_n]$ é naturalmente graduado pelo grau usual de polinômios. As subálgebras de $K[x_1, \ldots, x_n]$ geradas por elementos homogêneos são exemplos naturais de álgebras graduadas. Se $A = K[f_1, \ldots, f_s] \subset K[x_1, \ldots, x_n]$ onde f_i são polinômios de mesmo grau, então A pode ser considerada uma álgebra standard se tomarmos $\deg(f_i) = 1$.

A contraparte graduada dos anéis locais será vista a seguir.

Definição A.1.12. Seja R um anel graduado. Um ideal graduado $\mathfrak{m}$ de R é chamado de *maximal graduado* se R for o único ideal que contenha $\mathfrak{m}$ propriamente. R é chamado de anel *local graduado* se possuir um único ideal maximal graduado. Um anel local graduado R com ideal maximal graduado $\mathfrak{m}$ será denotado por $(R, \mathfrak{m})$.

Um exemplo de anel local graduado é o anel de polinômios $k[x_1, \ldots, x_n]$ com a graduação usual. Neste caso o único ideal maximal graduado é $\mathfrak{m} = (x_1, \ldots, x_n)$.

Muitos resultados válidos para anéis locais podem ser transferidos quase que diretamente para anéis locais graduados. Por exemplo, temo a seguinte caracterização de anel de Cohen-Macaulay:

Teorema A.1.13. [HR] *Seja $R = \oplus_{i \geq 0} R_i$ um anel graduado positivo, e seja $\mathfrak{m} = R_+$ seu ideal maximal graduado. Então R é Cohen-Macaulay se e só se $R_{\mathfrak{m}}$ for Cohen-Macaulay.*

Não foi possível encontrar uma referência direta para o resultado seguinte, embora seja um resultado conhecido. Para maiores detalhes, uma referência é [BH].

Teorema A.1.14. *Se R é anel graduado standard, então R é Cohen-Macaulay se e sé se R possuir um sistema de parâmetros $\{f_1, \ldots, f_s\}$ tal que $\deg f_i = 1$ e $f_1, \ldots, f_s$ seja uma seqüência R-regular.*

Existem vários critérios para determinar se uma álgebra é ou não de Cohen-Macaulay. Neste trabalho usamos um critério de Hochster para anéis de semigrupos.

Um *semigrupo afim* G é um semigrupo finitamente gerado tal que para algum $n \neq 0$ seja isomorfo a um subsemigrupo de $\mathbb{Z}^n$ contendo 0. Seja K um corpo. Denotamos por $K[G]$ o espaço vetorial $K^{(G)}$. Se $X = x_1, \ldots, x_m$, indeterminadas sobre K, então o elemento da base de $K[G]$ que corresponda a $g \in G$ será denotado por X^g. Esta notação monomial é usada para lembrar que $k[G]$ comporta uma operação de multiplicação natural cuja tábua é dada por $X^g X^{g'} = X^{g+g'}$. Por exemplo, $k[\mathbb{Z}^n]$ é isomorfo ao anel de polinômios de Laurent $k[x_1, x_1^{-1}, \ldots, x_n, x_n^{-1}]$, onde x_i corresponde ao i-ésimo elemento da base canônica de $\mathbb{Z}^n$. Similarmente, $k[\mathbb{N}^n]$ é isomorfo a $k[x_1, \ldots, x_n]$.

Existe um "menor" grupo H contendo G com a propriedade universal de que todo homomorfismo de G para algum grupo seja fatorado através de H. Denotaremos este grupo por $\mathbb{Z}G$ pois, como podemos considerar $G \subset \mathbb{Z}$, então H será justamente o submódulo de $\mathbb{Z}^n$ gerado por G. Como todo semigrupo afim pode ser mergulhado em $\mathbb{Z}^n$ para algum n, então temos que $\mathbb{Z}G \cong \mathbb{Z}^d$ para algum $d \in \mathbb{N}$. Nestas condições d é o *posto* de G.

Definição A.1.15. Um semigrupo afim G é dito *normal* se satisfizer a seguinte condição: se $mz \in G$ para algum $z \in \mathbb{Z}G$ e $m \in \mathbb{N}^*$, então $z \in G$.

Teorema A.1.16. [BH, 6.1.4] *Sejam G um anel de semigrupo afim e K um corpo. Então G é um semigrupo normal se e só se $K[G]$ for um anel normal.*

O critério citado a seguir foi demonstrado originalmente por Hochster em [Ho]. Uma outra demonstração pode ser encontrada em [BH, 6.3.5].

Teorema A.1.17. *Sejam G um semigrupo normal e K um corpo. Então $K[G]$ é um anel de Cohen-Macaulay.*

2. Funções de Hilbert

Nesta seção estudaremos uma importante função relacionada com anéis graduados, a função de Hilbert.

A função de Hilbert mede a dimensão da n-ésima parte homogênea de um anel graduado R. Suporemos de agora em diante que R_0 é um anel local artiniano e que R é uma álgebra standard, ou seja, é finitamente gerada sobre R_0 por 1-formas, isto é, $R = R_0[R_1]$. O modelo básico em mente são os anéis de polinômios sobre um corpo e suas álgebras quocientes. Observamos que nestas condições, cada componente R_i pode ser vista como um R_0-módulo finitamente gerado, e portanto possuem comprimento $l(R_i)$ finito (como R_0-módulo).

Definição A.2.1. A função numérica $H(R,_) : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dada por $H(R,i) = l(R_i)$ é a *função de Hilbert de* R; e $H_R(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} H(R,n)t^n$ é a *série de Hilbert* de R.

Uma função numérica $F : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ é dita de *tipo polinomial* (de grau d) se existir um polinômio $P(X) \in \mathbb{Q}[X]$ (de grau d) tal que $F(n) = P(n)$ para todo $n \gg 0$. Convenciona-se que o polinômio nulo tenha grau -1. A função de Hilbert é de tipo polinomial:

Teorema A.2.2. [BH, 4.1.3] *Seja R anel graduado de dimensão d. Então $H(R,i)$ é de tipo polinomial de grau $d-1$.*

Uma caracterização dos polinômios de $\mathbb{Q}[X]$ que possuem valores inteiros é dada pelo

Lema A.2.3. [BH, 4.1.4] *Seja $P(X) \in \mathbb{Q}[X]$ um polinômio de grau $d-1$. As seguintes condições são equivalentes:*

(a) $P(n) \in \mathbb{Z}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$;

(b) existem inteiros $a_0, \ldots, a_{d-1}$ tais que

$$P(X) = \sum_{i=0}^{d-1} a_i \binom{X+i}{i}.$$

Definição A.2.4. O único polinômio $P_R(X) \in \mathbb{Q}[X]$ para o qual $H(R,i) = P_R(i)$ para $i \gg 0$ é chamado de *polinômio de Hilbert* de R. Escrevemos

$$P_R(X) = \sum_{i=0}^{d-1} (-1)^{d-1-i} e_{d-1-i} \binom{X+i}{i}.$$

A multiplicidade de R é definida como sendo

$$e(R) = \begin{cases} e_0, & \text{se } d > 0 \\ l(M), & \text{se } d = 0 \end{cases}.$$

A estrutura das séries de Hilbert pode ser melhor visualizada da seguinte maneira:

Proposição A.2.5. [BH, 4.1.8] *Seja R um anel graduado de dimensão d. Então existe um único elemento $Q_R(t) \in \mathbb{Z}[t,t^{-1}]$ com $Q_R(1) \neq 0$ tal que*

$$H_R(t) = \frac{Q_R(t)}{(1-t)^d}.$$

Além disso, se $Q_R(t) = \sum_i h_i t^i$ então $\min\{i \text{ tais que } h_i \neq 0\}$ é o menor inteiro tal que $R_i \neq 0$.

Proposição A.2.6. [BH, 4.1.9] *Sob as condições de A.2.5, e com as notações de A.2.4, valem as seguintes fórmulas*

$$e_i = \frac{Q_R^{(i)}(1)}{i!}$$

para $i = 0, \ldots, d-1$. Além disso, $e(R) = Q_R(1)$.

Com esta proposição podemos calcular a multiplicidade $e(R)$ a partir do h-vetor, ou seja,

$$e(R) = Q_R(1) = \sum_i h_i.$$

Proposição A.2.7. [BH, 4.1.10] *Além das hipóteses de A.2.5 suponhamos também que R seja Cohen-Macaulay. Então $h_i \geq 0$ para todo i. Além disso, $e_i \geq 0$ para todo i se $R_j = 0$ para todo $j < 0$.*

A seqüência $(h_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ da proposição A.2.3 é chamada de *h-seqüência de R* (Stanley).

Podemos escrever

$$H_R(t) = (-1)^d t^a H_R(t^{-1})$$

onde a é o grau da função racional $H_R(t)$. Este número é um importante invariante.

Definição A.2.8. O grau da função racional $H_R(t)$ é chamado de *a-invariante de* R.

O conceito do a-invariante surge originalmente no estudo de anéis de Gorenstein. À guisa de informação enunciamos

Proposição A.2.9. [BH, 3.6.10] *Seja* $(R, \mathfrak{m})$ *um anel de Cohen-Macaulay local graduado com módulo canônico graduado* ω_R. *As seguintes condições são equivalentes:*
(a) R *é um anel de Gorenstein;*
(b) $\omega_R \cong R(a)$ *para algum* $a \in \mathbb{Z}$.

Neste contexto o a-invariante de R é dado por [BH, 3.6.11]

$$a(R) = -\min\{i \in \mathbb{Z} \text{ tais que } (\omega_R/\mathfrak{m}\omega_R)_i \neq 0\}$$

se $\mathfrak{m}$ for ideal maximal de R (não apenas maximal graduado). A equivalência com a definição acima pode ser vista em [BH, 4.3.8]. Detalhes sobre anéis de Gorenstein e módulos canônicos podem ser encontrados em [BH], por exemplo.

Para finalizar esta seção vamos analizar alguns resultados gerais sobre álgebras de Rees.

Definição A.2.10. Seja R um anel. Uma *filtração* F em R é uma cadeia descendente de ideais $R = I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \ldots$ tais que $I_i I_j \subset I_{i+j}$ para todo i, j. Um *anel filtrado* é um par (R, F) onde R é um anel e F uma filtração em R.

Seja I um ideal de R. O exemplo mais importante de filtração é a filtração I*-ádica*, na qual $I_i = I^i$, e é esta filtração que consideramos neste trabalho.

Seja R um anel, $I \subset R$ um ideal e $F = (I^i)_{i \geq 0}$ a filtração I-ádica. Definimos o *anel de Rees de* R *com respeito a* I como sendo

$$\mathcal{R}(I) = \oplus_{i \geq 0} I^i t^i.$$

O anel $\mathcal{R}(I)$ pode ser visto como um subanel graduado de $R[t]$.

Proposição A.2.11. [BH, 4.4.6] *Sejam* $(R, \mathfrak{m})$ *um anel noetheriano local (ou local graduado) e* I *um ideal de* R. *Então* $\dim \mathcal{R}(I) = \dim R + 1$.

3. Anéis de Stanley-Reisner

A "álgebra comutativa combinatória" é um novo ramo da álgebra comutativa criado por Hochster e Stanely na década de 70. Os objetos combinatórios considerados são complexos simpliciais, aos quais são associados certos objetos algébricos, os anéis de Stanley-Reisner. O invariante mais importante de um complexo simplicial é o seu f-vetor, que pode facilmente ser transformado no h-vetor. Saber se um anel de Stanley-Reisner é Cohen-Macaulay (ou Gorenstein) pode trazer muitas informações sobre o f-vetor do complexo associado, e vice-versa, graças a esta conexão entre f-vetor e séries de Hilbert.

Definição A.3.1. Seja $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ um conjunto finito. Um *complexo simplicial* Δ sobre V é uma coleção de subconjuntos de V de forma que $F \in \Delta$ sempre que $F \subset G$ para algum $G \in \Delta$, e também $\{v_i\} \in \Delta$ para $i = 1, \ldots, n$.

Os elementos de Δ são chamados de *faces*, e a *dimensão* de uma face F, $\dim F$, é o número $|F| - 1$. A *dimensão* de um complexo simplicial Δ é $\dim \Delta = \max\{\dim F \text{ tal que } F \in \Delta\}$.

Note-se que o conjunto $\emptyset$ é uma face, cuja dimensão é convencionada como sendo -1. As faces de dimensão 0 e 1 são chamadas de *vértices* e *lados* respectivamente. As faces maximais sob a inclusão são as *facetas* do complexo simplicial.

Se $\{F_1, \ldots, F_m\}$ for uma coleção arbitrária de subconjuntos de V, então existe um único complexo simplicial minimal, denotado por $\langle F_1, \ldots, F_m \rangle$, contendo todos os F_i. Dizemos que este complexo simplicial é *gerado* por $F_1, \ldots, F_m$. Ele consiste de todos os subconjuntos $G \subset V$ que estejam contidos em algum F_i.

Um *poset* (do inglês, *p*artially *o*rdered *set*) Π é um conjunto finito dotado de uma ordem parcial. Uma *cadeia* em um poset é um subconjunto onde todos os pares de elementos são comparáveis. Uma cadeia C é *saturada* se para cada $u, v \in C$ e $w \in \Pi$ tais que $u < w < v$ então $w \in C$. Se Π

for um poset, o seu *complexo de ordem* $\Delta(\Pi)$ é o conjunto de todas as cadeias de Π. É claro que $\Delta(\Pi)$ é um complexo simplicial.

Seja agora Δ um complexo simplicial qualquer de dimensão $d-1 \geq 0$ sobre um conjunto de vértices V. Seja f_i o número de faces de dimensão i de Δ. Temos $f_0 = |V|$ e $f_{d-1} \geq 1$. A d-upla

$$f(\Delta) = (f_0, f_1, \ldots, f_{d-1})$$

é chamada de f-vetor de Δ.

Definição A.3.2. Seja Δ um complexo simplicial sobre o conjunto de vértices $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$, e seja K um anel. O *anel de Stanley-Reisner* do complexo Δ com respeito a K é a K-álgebra homogênea

$$K[\Delta] = K[x_1, \ldots, x_n]/I_\Delta,$$

onde I_Δ é o ideal gerado por todos os monômios $x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_r}$ tais que $\{v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_r}\} \notin \Delta$.

Apesar da definição de anel de Stanley-Reisner ser feita sobre um anel qualquer, os casos mais importantes acontecem quando K é um corpo.

Note-se que I_Δ é gerado por monômios livres de quadrados. Por outro lado, se

$$I \subset (x_1, \ldots, x_n)^2$$

for um ideal gerado por monômios livres de quadrados, então

$$K[x_1, \ldots, x_n]/I \cong K[\Delta]$$

para algum complexo simplicial Δ.

A correspondência entre complexos simpliciais e ideais livres de quadrados é realizada por inclusões reversas: se Δ e Δ' são complexos simpliciais sobre o mesmo conjunto de vértices, então $\Delta \subset \Delta' \Leftrightarrow I_{\Delta'} \subset I_\Delta$.

A dimensão de um anel de Stanley-Reisner pode ser facilmente determinada:

Teorema A.3.3. [BH, 5.1.4] *Seja Δ um complexo simplicial e K um corpo. Então*

$$I_\Delta = \cap_F \mathfrak{p}_F$$

onde a interseção é tomada sobre todas as facetas F de Δ, e $\mathfrak{p}_F$ denota o ideal (primo) gerado por todos os x_i tais que $v_i \notin F$. Em particular,

$$\dim K[\Delta] = \dim \Delta + 1.$$

Um complexo simplicial Δ é *puro* se todas as suas facetas possuem a mesma dimensão; e Δ é um *complexo de Cohen-Macaulay sobre K* se $K[\Delta]$ for um anel de Cohen-Macaulay. Diremos que Δ é um *complexo de Cohen-Macaulay* se for um complexo de Cohen-Macaulay sobre algum corpo

De A.1.6 e A.3.3 conclui-se que

Corolário A.3.4. [BH, 5.1.5] *Um complexo de Cohen-Macaulay é puro.*

A relação entre o f-vetor e a série de Hibert é dada pelo seguinte teorema [BH, 5.1.7]

Teorema A.3.5. *Seja Δ um complexo simplicial com f-vetor $(f_0, \ldots, f_{d-1})$. Então*

$$H_{K[\Delta]}(t) = \sum_{i=-1}^{d-1} \frac{f_i t^{i+1}}{(1-t)^{i+1}}.$$

De A.2.5 e do teorema acima deduz-se que [BH, 5.1.8]

Lema A.3.6. *O f-vetor e o h-vetor de um complexo simplicial Δ de dimensão $d-1$ estão relacionados por*

$$\sum_i h_i t^i = \sum_{i=0}^{d} f_{i-1} t^i (1-t)^{d-i}.$$

Em particular, o h-vetor tem comprimento no máximo d, e para $j = 0, \ldots, d$,

$$h_j = \sum_{i=0}^{j} (-1)^{j-1} \binom{d-i}{j-i} f_{i-1} \qquad \text{e} \qquad f_{j-1} = \sum_{i=0}^{j} \binom{d-i}{j-i} h_i.$$

Uma importante classe de complexos simpliciais é dada pela seguinte definição.

Definição A.3.7. Um complexo simplicial puro Δ é chamado de *shellable* se as facetas de Δ puderem ser dispostas numa ordem linear $F_1, \ldots, F_m$ de forma que uma das seguintes condições equivalentes seja satisfeita:

(a) $\langle F_i \rangle \cap \langle F_1, \ldots, F_{i-1} \rangle$ é gerado por um conjunto não vazio de faces maximais próprias de $\langle F_i \rangle$ para todo i, $2 \leq i \leq m$;

(b) o conjunto $\{F$ tais que $F \in \langle F_1, \ldots, F_i \rangle$, $F \notin \langle F_1, \ldots, F_{i-1} \rangle\}$ reduz-se a um único elemento minimal para todo i, $2 \leq i \leq m$;

(c) para todo i, j, $1 \leq j < i \leq m$ existe algum $v \in F_i \setminus F_j$ e algum $k \in \{1, \ldots, i-1\}$ com $F_i \setminus F_k = \{v\}$.

Uma ordem linear das facetas que satisfaça uma das condições equivalentes (a), (b) ou (c) é chamada de um *shelling* para Δ.

Para a demonstração da equivalência das três condições da definição acima ver [BH, 5.1.11]

Vamos introduzir mais algumas definições relacionadas a posets. Um poset finito é *limitado* se ele possuir um menor e um maior elementos, denotados por $\hat{0}$ e $\hat{1}$. Um poset é *puro* se todas as cadeias tiverem o mesmo comprimento, e é *graduado* se for limitado e puro. É simples verificar que todas cadeias saturadas entre dois elementos comparáveis dados de um poset graduado possuem o mesmo comprimento.

Sejam Π um poset graduado e $v \in \Pi$. O *posto* de v, denotado por posto(v), é definido como sendo o comprimento comum de todas as cadeias saturadas entre $\hat{0}$ e v. O *comprimento* de Π é o posto de $\hat{1}$. Sejam $u, v \in \Pi$; dizemos que v *cobre* u se $u < v$ e não existir nenhum elemento de Π entre u e v. O poset Π é *localmente super semimodular* se sempre que v_1 e v_2 cobrirem u e $v_1, v_2 < v$ para algum $v \in \Pi$, então existir $t \in \Pi$, $t \leq v$, tal que t cubra v_1 e v_2.

O teorema seguinte é um teorema essencialmente combinatório, e sua demonstração pode ser vista em [BH, 5.1.12].

Teorema A.3.8. *O complexo de ordem de um poset limitado, localmente super semimodular é shellable.*

Teorema A.3.9. [BH, 5.1.13] *Sobre qualquer corpo, um complexo simplicial shellable é de Cohen-Macaulay.*

A propriedade de um complexo ser shellable permite calcular o h-vetor do respectivo anel de Stanley-Reisner a partir da estrutura das facetas.

Corolário A.3.10. [BH, 5.1.14] *Seja Δ um complexo simplicial shellable de dimensão $d-1$, com shelling $F_1, \ldots, F_m$. Para $j = 2, \ldots, m$, seja*

$$\mathcal{H}(F_j) = \Big\{ u \in F_j / \exists \text{ faceta } F_k \text{ com } k < j \text{ tal que } F_j \setminus F_k = \{u\} \Big\}.$$

Tomamos $r_j = |\mathcal{H}(F_j)|$ e $r_1 = 0$. Então

$$h_i = \big| \{ j \text{ tais que } r_j = i \} \big| \qquad \text{para } i = 0, \ldots, d.$$

Em particular, os números r_j não dependem do shelling, a menos de ordem.

4. Bases de Gröbner e Bases de SAGBI

Nesta seção R indicará um anel $R = K[x_1, \ldots, x_n]$ onde K é um corpo. Dois tipos de objetos relacionados com R são centrais em álgebra comutativa: ideais e subálgebras. Métodos computacionais para resolver questões sobre estes dois objetos são baseados em estruturas análogas: bases de Gröbner para ideais e bases de SAGBI para álgebras. SAGBI é uma sigla para **S***ubalgebra* **A***nalog to* **G***röbner* **B***asis* e sua construção foi inspirada nos métodos de Buchberger para bases de Gröbner, como se verá.

Os quatro pontos básicos da teoria construtiva de Buchberger são:

- ordem monomial
- redução
- teste se um conjunto é uma base de Gröbner
- construção de uma base de Gröbner a partir de um conjunto

A teoria das bases de SAGBI possui pontos similares.

Denotaremos $X = x_1, \ldots, x_n$. Dado uma n-upla $a = (a_1, \ldots, a_n)$ de inteiros positivos, $X^a = x_1^{a_1} \ldots x_n^{a_n}$ é um monômio. Um *termo* de R é um produto da forma up onde $u \in K$ e $p = X^a$. O *grau* de um termo $f = uX^a$, denotado por $\deg(f)$, é definido por $\deg(f) = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

Definição A.4.1. Uma ordem monomial em R é uma ordem total $>$ dos monômios de R tal que se m_1, m_2 e p são monômios de R então $m_1 > m_2$ implica que $pm_1 > pm_2 > m_2$.

Estendemos o conceito de ordem monomial para termos de maneira natural: se u, $v \in K$ e m, $n \in R$ são monômios, então $um > vn$ se e só se $m > n$.

Se $>$ é uma ordem monomial em R, então para qualquer $f \in R$, definimos o *termo inicial de* f, denotado por $\mathrm{in}_>(f)$, como sendo o maior termo de f na ordem $>$. Se $I \in R$ for um ideal, $\mathrm{in}_>(I)$ indicará o ideal gerado pelos termos iniciais de todos os monômios de I. Se $A \subset R$ for uma subálgebra, $\mathrm{in}_>(A)$ denotará a subálgebra de R gerada por todos os termos iniciais de todos os elementos de A.

Existem várias ordens monomiais diferentes. Citaremos as mais importantes. Suporemos sempre que $x_1 > x_2 > \ldots > x_n$.

Ordem lexicográfica. $X^a >_{lex} X^b$ se e só se $a_i > b_i$ para o **primeiro índice** i tal que $a_i \neq b_i$.

Ordem lexicográfica homogênea. $X^a >_{hlex} X^b$ se $\deg(X^a) > \deg(X^b)$ ou se $\deg(X^a) = \deg(X^b)$ e $X^a >_{lex} X^b$ na ordem lexicográfica.

Ordem lexicográfica reversa homogênea. $X^a >_{rlex} X^b$ se $\deg(X^a) > \deg(X^b)$ ou se $\deg(X^a) = \deg(X^b)$ e $a_i < b_i$ para o **último índice** tal que $a_i \neq b_i$.

Lembraremos agora alguns aspectos de bases de Gröbner, e em seguida veremos alguns aspectos de bases de SAGBI.

Definição A.4.2. Seja $I \subset R$ um ideal. Um conjunto (finito) $S = \{g_1, \ldots, g_t\} \subset I$ é uma *base de Gröbner* para I com respeito a uma ordem monomial σ em R se o conjunto $\{\mathrm{in}_\sigma(g_1), \ldots, \mathrm{in}_\sigma(g_t)\}$ gera $\mathrm{in}_\sigma(I)$.

Os resultados seguintes mostram algumas das aplicações mais úteis da teoria de bases de Gröbner de um ideal.

Lema A.4.3. [E, 15.5] *Se $I \subset J$ são ideais de R, e $\mathrm{in}(I) = \mathrm{in}(J)$, então $I = J$.*

Teorema A.4.4. *Seja $I \subset R$ um ideal. Para qualquer ordem monomial $<$ em R o conjunto B dos monômios não contidos em $\mathrm{in}(I)$ forma uma base para o K-espaço vetorial R/I.*

Corolário A.4.5. [BH, 4.2.4] *Nas condições do teorema anterior, R/I e $R/\mathrm{in}(I)$ possuem a mesma função de Hilbert.*

Muito já foi escrito sobre bases de Gröbner; portanto não entraremos em maiores detalhes sobre este assunto.

Para o estudo de bases de SAGBI vamos estabeler algumas notações. Seja R como acima.

Dada uma função $E : R \to \mathbb{N}$ definimos o *suporte* de E como sendo $\sup E = \{r \in R : E(r) \neq 0\}$. Uma *função expoente* de R em $\mathbb{N}$ é uma função com suporte finito. Se E for uma função expoente de R, então definimos

$$R^E = \prod_{t \in T} t^{E(t)}$$

onde T é qualquer subconjunto finito de R contendo o suporte de E. Para qualquer conjunto $S \in R$ contendo o suporte de E definimos S^E analogamente, e definimos $PP(S) = \{S^E \ \forall$ função expoente E tal que $\sup E \subset S\}$.

Definiremos agora o processo de *redução de SAGBI* de um elemento de R sobre um subconjunto de R. Este processo é fundamental para a construção algorítmica da base de SAGBI. Para evitar usar o nome *redução de SAGBI* chamaremos este processo de *subdução* (do inglês,*subduction*: *sub*algebra re*duction*).

Subdução A.4.6. [RS, 1.5] *Suponha-se $b \in R \supset S$, R com a ordem monomial fixada. A* subdução *de b sobre S é realizada da seguinte forma:*

(i) Seja $b_0 = b$.

(ii) Se $b_i \in S$, termina.

(iii) Se $\text{in}(b_i) \notin \text{in}(PP(S)) = PP(\text{in}(S))$, termina.

(iv) Se o processo não parou nos dois passos anteriores, então implica que $b_i \notin K$. Logo $\text{in}(b_i) \neq 1$ e $\text{in}(b_i) \in \text{in}(PP(S)) = PP(\text{in}(S))$. Então o próximo passo faz sentido.

(v) SUBDUÇÃO: Existe uma função expoente E_i de S com $\text{in}(b_i) = \text{in}(S^{E_i})$. Seja $b_{i+1} = b_i - \gamma_i S^{E_i}$ onde $\gamma_i \in K$ é escolhido tal que b_i e $\gamma_i S^{E_i}$ tenham o mesmo termo líder.

(vi) Pela escolha de γ_i ou $b_{i+1} = 0$ ou $\text{in}(b_{i+1}) < \text{in}(b_i)$.

(vii) Retorna a (ii).

Dizemos que b_i é o *i-ésimo subductum de b sobre S.*

Lema A.4.7. [RS, 1.10] *Suponha que $b \in R \supset S$ e suponha que b possua um k-ésimo subductum b_k sobre S. Então*

(a)
$$b = b_k + \sum_{i=0}^{k-1} \gamma_i S^{(E_i)}$$

(b)
$$\begin{array}{ccccccccc} \text{in}(S^{E_{k-1}}) & < & \text{in}(S^{E_{k-2}}) & < \ \ldots \ < & \text{in}(S^{E_1}) & < & \text{in}(S^{E_0}) & & \\ \| & & \| & & \| & & \| & & \\ \text{in}(b_{k-1}) & & \text{in}(b_{k-2}) & & \text{in}(b_1) & & \text{in}(b_0) & = & \text{in}(b) \end{array}$$

e $\text{in}(b_k) < \text{in}(b_{k-1})$ se $b_k \neq 0$.

(c) Se $0 \neq \mu \in K$ então μb subduz a μb_k.

(d) Se S pertence a uma subálgebra B de R então $b \in B$ se e só se $b_k \in B$.

(e) O algoritmo A.4.6 sempre termina.

Dada uma subálgebra $A \subset R$, seja $\text{in}(A)$ a K-subálgebra de R gerada pelos monômios iniciais $\text{in}(a)$, $a \in A$. Chamamos $\text{in}(A)$ a *álgebra inicial* de A. Dado um subconjunto $S \subset R$ não vazio, denotamos por $\text{in}(S)$ o conjunto dos monômios iniciais dos elementos de S.

Definição A.4.8. Se $B \subset A$ é tal que $\text{in}(A) = K[\text{in}(B)]$ então B é uma *base de SAGBI* para A em relação à ordem fixada em R.

Proposição A.4.9. [RS, 1.16] *Suponha que $b \in R \supset S$ e que S seja uma base de SAGBI para uma subálgebra B de R. Suponha que uma subdução de b sobre S termine com c como subductum final. Então*

(a) $b \in B$ se e só se $c \in K$.

(b) S gera a subálgebra B.

É claro que toda subálgebra possui uma base de SAGBI: a própria subálgebra funciona como uma. Também é pouco provável que uma base de SAGBI seja única. Ao contrário das bases de Gröbner, uma base de SAGBI nem sempre é finita, nem mesmo se a álgebra for finitamente gerada. Existem inclusive exemplos de álgebras finitamente geradas para as quais não é possível encontrar base de SAGBI finita (ver [RS, 1.20]).

Vamos agora ver os critérios para existência de bases de SAGBI.

Proposição A.4.10. [RS, 2.3] *Seja $S \subset R$ e seja B uma subálgebra de R gerada por S. Então são equivalentes:*

(a) S é uma base de SAGBI.

(b) Toda subdução sobre S de elementos de $B \setminus K$ termina em um elemento de K.

(c) Cada elemento de $B \setminus K$ possui pelo menos uma subdução sobre S que termina em um elemento de K.

(d) Cada elemento em $B \setminus K$ pode ser expresso na forma $\sum_{i \in I} \gamma_i S^{E_i}$ com $\gamma_i \in K$, E_i funções expoentes de B e I um conjunto de índices.

A teoria de Buchberger possui os S-polinômios. Os polinômios que fazem o papel daqueles na teoria de SAGBI são os *tête-à-tête*. Onde os S-polinômios de dois polinômios f e g relacionam as expressões standard dos restos de f e g, os tête-à-tête de duas funções expoentes E e F relacionam subdução por E com subdução por F.

Dado um termo $f = cX^a \in R$, com $c \in K$, seja $c(f) = c$ o quoeficiente constante de f.

Definição A.4.11. [RS, 2.4] Sejam E e F funções expoentes de uma subálgebra B de R. O par (E, F) é um *R-tête-à-tête* se $\mathrm{in}(B^E)/c(\mathrm{in}(B^E)) = \mathrm{in}(B^F)/c(\mathrm{in}(B^F))$. Este valor comum é chamado de *altura* do tête-à-tête. Para cada tête-à-tête (E, F) se $\rho = \rho(E, F) = c(\mathrm{in}(B^E))/c(\mathrm{in}(B^F)) \in K$ então $\mathrm{in}(B^E) = \rho\,\mathrm{in}(B^F)$. Para tal $\rho \neq 0$ denotamos $T(E, F) = B^E - \rho B^F$. Note-se que $\rho(F, E) = (1/\rho)(E, F)$. Então $T(E, F) = -\rho T(F, E)$. Analogamente define-se o tête-à-tête para um conjunto $S \subset R$.

Definição A.4.12. Seja $S \subset R$. Um conjunto G *gera* os S-tête-à-têtes se G for um conjunto de S-tête-à-têtes e se para qualquer S-tête-à-tête (E, F) existir S-tête-à-têtes (L_i, P_i)'s e inteiros positivos m_i's tais que para cada i ou $(L_i, P_i) \in G$ ou $(P_i, L_i) \in G$, e $E = \sum_i m_i L_i$, $F = \sum_i m_i R_i$.

Teorema A.4.13. [RS, 2.8] *Sejam S um subconjunto de R e B a subálgebra gerada por S. Seja G um conjunto que gera os S-tête-à-têtes. São equivalentes:*

(a) S é uma base de SAGBI para B.

(b) Para cada S-tête-à-tête $(L, R) \in G$, com $T(L, R) \neq 0$ existem funções expoentes E_j's de S e constantes λ_j's em K satisfazendo

$$T(L, R) = \sum_j \lambda_j S^{G_j}$$

com $\mathrm{in}(S^{G_j}) \leq \mathrm{in}(S^L) = \mathrm{in}(S^R)$ para todo índice j.

(c) Para cada S-tête-à-tête $(L, R) \in G$, $T(L, R)$ possui pelo menos uma subdução sobre S que termina em um elemento de K.

(d) Para cada S-tête-à-tête $(L, R) \in G$, toda subdução de $T(L, R)$ sobre S termina em um elemento de K.

Se no teorema acima S for finito, o critério pode ser reescrito da seguinte maneira [CHV, 1.1]:

Proposição A.4.14. *Seja* $S = \{a_1, \ldots, a_m\}$ *um sistema de geradores da subálgebra* $A \in R$, *e seja* $F = \{f_1, \ldots, f_r\} \subset K[Y_1, \ldots, Y_m]$ *um sistema de relações binomiais tais que se* I *é o ideal gerado por* F *então*

$$K[Y_1, \ldots, Y_m]/I \cong K[\text{in}(S)] = K[\text{in}(a_1), \ldots, \text{in}(a_m)]$$

com a sobrejeção dada por $Y_i \mapsto \text{in}(a_i)$. *Nestas condições* S *é uma base de SAGBI para* A *se e só se para* $j = 1, \ldots, r$ *existirem* $\lambda_\nu^j \in K$ *tais que*

$$f_j(a_1, \ldots, a_m) = \sum_\nu \lambda_\nu^j \mathbf{a}^\nu$$

com $\text{in}(\mathbf{a}^\nu) \leq \text{in}(f_j(a_1, \ldots, a_m))$ *para todo* $\lambda_\nu^j \neq 0$, *onde* $\nu = \nu_1, \ldots, \nu_m$ *é um multi-índice e* $\mathbf{a}^\nu = a_1^{\nu_1} \ldots a_m^{\nu_m}$.

O algoritmo para construção de uma base de SAGBI é similar ao algoritmo de Buchberger e será descrito a seguir. Seja S um conjunto de geradores, não necessariamente finito, da subálgebra B.

A.4.15 – Construção da base de SAGBI. [RS, 3.1] *Tomemos* $S_0 = S$. *Em uma etapa* j *procedemos como a seguir:*

(i) Seja G_j *um conjunto que gera os* S_j*-têtе-à-têtes.*

(ii) Para cada $(L, R) \in G_j$ *seja* $f(L, R) \in R$ *um subductum final de* $T(L, R)$ *sobre* S_j. *Seja* F_j *o subconjunto de* R *consistindo dos* $f(L, R) \notin K$.

(iii) Seja $S_{j+1} = S_j \cup F_j$.

(iv) Tomemos $G_\infty = \cup G_j$.

No processo algorítmico acima notemos que $G_0 \subset G_1 \subset G_2 \subset \ldots$ e que pode ser um processo infinito. O problema de determinar os conjuntos geradores dos tête-à-têtes é o passo mais difícil aqui, e não será discutido neste trabalho. Referências podem ser encontradas em [RS].

Teorema A.4.16. [RS, 3.5] *Suponha que* $S \subset R$ *e que* B *seja a subálgebra gerada por* S. *Usando a notação de A.4.15 temos*

(a) G_∞ *é uma base de SAGBI para* B.

(b) G_j *é uma base de SAGBI para* B *se e só se* $G_j = G_{j+1}$.

5. Estudo de uma Álgebra via sua Álgebra Inicial

Vamos considerar as notações da seção anterior, ou seja, $R = K[x_1, \ldots, x_n]$, $A \subset R$ é uma subálgebra e $\text{in}(A)$ é a álgebra inicial de A na ordem monomial adotada em R.

Proposição A.5.1. [CHV, 2.1] *Com as suposições e notações de A.4.14, seja* J *o núcleo do homomorfismo* $\psi : K[Y_1, \ldots, Y_m] \to A$ *com* $\psi(Y_i) = a_i$. *Então* J *é gerado pelos polinômios "levantados"*

$$F_j(Y_1, \ldots, Y_m) = f_j(Y_1, \ldots, Y_m) - \sum_\nu \lambda_\nu^j Y^\nu$$

para $j = 1, \ldots, r$, *onde* $Y = Y_1, \ldots, Y_m$.

Este resultado pode ser completado pelo seguinte.

Proposição A.5.2. [CHV, 2.2] *Se, além das suposições de A.5.1, os binômios* $f_1, \ldots, f_r$ *formarem uma base de Gröbner para* I *em uma ordem monomial* σ' *de* $K[Y_1, \ldots, Y_m]$, *então existe uma ordem monomial* σ *em* $K[Y_1, \ldots, Y_m]$ *tal que as equações levantadas* $F_1, \ldots, F_r$ *formam uma base de Gröbner para* J *com respeito a* σ *e* $\text{in}_\sigma(J) = \text{in}_{\sigma'}(I)$.

Muitas propriedades de A e $\text{in}(A)$ são comuns, e é possível determinar várias propriedades de A a partir de $\text{in}(A)$, analogamente ao que é possível na teoria de ideais iniciais e bases de Gröbner.

Proposição A.5.3. [CHV, 2.3] *(a) Se* $\mathrm{in}(A)$ *for Cohen-Macaulay de dimensão* d *e tipo* t, *então* A *será Cohen-Macaulay de dimensão* d *e tipo* $\leq t$. *Em particular, se* $\mathrm{in}(A)$ *for Gorenstein, então* A *também o será.*

(b) Se $\mathrm{in}(A)$ *for normal, então* A *possuirá singularidades racionais se* K *tiver característica zero; e* A *será* F*-racional se* K *tiver característica positiva. Em particular, normalidade de* $\mathrm{in}(A)$ *implica que* A *é um domínio normal de Cohen-Macaulay.*

Suponhamos agora que A seja gerada por polinômios homogeneos de R. Nestas condições A e $\mathrm{in}(A)$ são K-álgebras positivamente graduadas. Seja $A = \oplus_{i=0}^{\infty} A_i$. Denotemos por $\mathrm{in}(A_i)$ o K-espaço vetorial gerado pelos elementos $\mathrm{in}(a)$, $a \in A_i$. É claro que este espaço vetorial possui dimensão finita. Sejam $a_1, \ldots, a_s \in A_i$ tais que $\{\mathrm{in}(a_1), \ldots, \mathrm{in}(a_s)\}$ seja uma base para $\mathrm{in}(A_i)$. Então $\{a_1, \ldots, a_s\}$ forma uma K-base para A_i. Tem-se [CHV, 2.4]

Proposição A.5.4. *Suponha que* A *seja gerada por polinômios homogêneos. Então*

$$\mathrm{in}(A) = \oplus_{i \geq 0} \mathrm{in}(A_i)$$

e as funções de Hilbert de A *e* $\mathrm{in}(A)$ *são iguais.*

Corolário A.5.5. [CHV, 2.5] *Suponha que* A *possua uma base de SAGBI finita consistindo de elementos de mesmo grau. Normalizando as graduações de* A *e de* $\mathrm{in}(A)$ *podemos supor que ambas são álgebras standard. Então ambas possuem o mesmo* h*-vetor. Em particular,*

$$e(A) = e(\mathrm{in}(A)) \qquad \text{e} \qquad a(A) = a(\mathrm{in}(A))$$

onde $e()$ *é a multiplicidade e* $a()$ *o* a*-invariante.*

Finalizaremos esta seção com algumas observações sobre álgebras de Rees. Seja

$$L = (a_1, \ldots, a_m) \subset R$$

um ideal. Seja $\mathfrak{m}$ o ideal maximal graduado de R, ou seja, $\mathfrak{m} = (x_1, \ldots, x_n)$. Lembramos que a álgebra de Rees de L é $\mathcal{R}(L) = R[Lt] = \oplus_{i \geq 0} L^i t^i \subset R[t]$. *A fibra especial de* $\mathcal{R}(L)$ é $\mathcal{R}(L)/\mathfrak{m}\mathcal{R}(L)$. Consideramos o epimorfismo

$$\begin{aligned} \phi : R[T_1, \ldots, T_m] &\to \mathcal{R}(L) = R[a_1 t, \ldots, a_m t] \\ T_i &\mapsto a_i t \end{aligned}$$

O ideal $J = \ker \phi$ é homogêneo, e denotaremos por J_i sua componente de grau i. O *relation type* $r(L)$ de L é definido como sendo o mínimo dos inteiros r tais que $J = \oplus_{i \geq 1}^{r} J_i R[T]$. L é dito de *tipo linear* se $r(L) = 1$. Se L for gerado por elementos de mesmo grau é claro que a fibra especial de $\mathcal{R}(L)$ pode ser identificada com a subálgebra $K[a_1, \ldots, a_m] \subset R$, caso em que podemos aplicar técnicas de SAGBI.

Podemos estender a ordem monomial fixada em R para $R[t]$. Por exemplo, uma extensão natural é a seguinte: dados $u, v \in R$ e inteiros não negativos i, j, dizemos que $ut^i < vt^j$ se $i < j$ ou se $i = j$ e $u < v$ (na ordem em R).

Lema A.5.6. [CHV, 2.7] *Temos que* $\mathrm{in}(L)^i \subset \mathrm{in}(L^i)$ *para todo* i, *e*

$$\mathcal{R}(\mathrm{in}(L)) = \oplus_{i \geq 0} \mathrm{in}(L)^i t^i$$

assim como

$$\mathrm{in}(\mathcal{R}(L)) = \oplus_{i \geq 0} \mathrm{in}(L^i) t^i.$$

Em particular, $\mathcal{R}(\mathrm{in}(L)) = \mathrm{in}(\mathcal{R}(L))$ *se e só se* $\mathrm{in}(L)^i = \mathrm{in}(L^i)$ *para todo* i.

Corolário A.5.7. *Suponha que* $\mathrm{in}(L)^i = \mathrm{in}(L^i)$ *para* $1 \leq i \leq r(\mathrm{in}(L))$. *Então* $\mathrm{in}(L)^i = \mathrm{in}(L^i)$ *para todo* $i \geq 1$, *e* $r(L) \leq r(\mathrm{in}(L))$. *Em particular, se* $\mathrm{in}(L)$ *for de tipo linear, então* $\mathrm{in}(L)^i = \mathrm{in}(L^i)$ *para todo* $i \geq 1$ *e* L *será de tipo linear.*

6. Anéis Determinantais e Tableaux

Seja $X = (x_{ij})$ uma $m \times n$-matriz de indeterminadas sobre um anel K, com $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, $m \leq n$. Quando todos os menores de X aparecem em uma K-base de $K[X]$, então em geral é impossível que o produto de dois elementos da base esteja sempre na base. Porém o comportamento da tábua de multiplicação destes elementos é bem conhecido, e leva à definição de uma importante classe de álgebras. Usamos a letra K para indicar o anel de base para lembrar que os exemplos mais importantes são tomados sobre um corpo.

Definição A.6.1. Seja A uma K-álgebra e seja $\Pi \subset A$ um poset (ver A.3) com ordem parcial $\leq$. A é uma *álgebra graduada com leis de retificação (em Π, sobre K)* se:

(H_0) $A = \oplus_{i \geq 0} A_i$ for uma K-álgebra graduada tal que $A_0 = K$, e Π consistir de elementos homogêneos de grau positivo de forma que $A = K[\Pi]$ como K-álgebra.

(H_1) Os produtos da forma $\xi_1 \dots \xi_m$, com $m \in \mathbb{N}$, $\xi_i \in \Pi$, e $\xi_1 \leq \dots \leq \xi_m$, forem linearmente independentes.(Estes produtos são chamados de *monômios standard.*)

(H_2) (Lei de retificação) Para todo par $\xi, \nu \in \Pi$ de elementos incomparáveis, o produto $\xi\nu$ tiver uma representação

$$\xi\nu = \sum a_\mu \mu$$

com $a_\mu \in K \setminus \{0\}$, e μ monômios standard, e de forma que todo μ contenha um fator $\zeta \in \Pi$ tal que $\zeta \leq \xi$, $\zeta \leq \nu$.

A denominação "álgebra com leis de retificação" será abreviada por ALR.

Na definição adotamos $\Pi \subset A$ por questões de simplicidade. Mas Π deve ser visto formalmente como um suconjunto de um anel distinto de A. Dois resultados caracterizam melhor as ALR:

Proposição A.6.2. [BV, 4.1] *Seja A uma ALR graduada sobre K em Π. Então*

(a) Os monômios standard geram A como K-módulo, formando assim uma K-base para A.

(b) Além disso, todo monômio $\mu = \xi_1 \dots \xi_m$, $\xi_i \in \Pi$, possui uma representação standard na qual todo monômio standard contém um fator $\xi \leq \xi_1, \dots, \xi_m$.

Proposição A.6.3. [BV, 4.2] *Seja A uma ALR graduada sobre K em Π, e T_ξ, $\xi \in \Pi$ uma família de indeterminadas sobre K. Para cada monômio $\mu = \xi_1 \dots \xi_m$, $\xi_i \in \Pi$, seja $T_\mu = T_{\xi_1} \dots T_{\xi_m}$. Então o núcleo do epimorfismo*

$$\begin{aligned} \varphi : K[T_\xi : \xi \in \Pi] &\longrightarrow A \\ T_\xi &\longmapsto \xi \end{aligned}$$

é gerado pelos elementos $T_\xi T_\nu - \sum a_\mu T_\mu$ representando as relações de retificação.

Agora seja M o conjunto dos menores máximos de X. Tanto $K[M]$ como $K[X]$ possuem uma estrutura de ALR. Nesta seção estudaremos como $K[M]$ se comporta. Discutiremos este caso do ponto de vista dos *tableaux standard de Young*, um método que possui importante papel em teoria das representações e também é utilizado em outras áreas da matemática.

Consideramos

$$\Lambda(m,n) = \left\{[\lambda] = [\lambda_1, \dots, \lambda_m] \,:\, 1 \leq \lambda_1 < \dots < \lambda_m \leq n\right\}$$

o conjunto das m-uplas ordenadas de $\{1, \dots, n\}$. Os elementos de $\Lambda(m,n)$ são chamados de *colchetes* e podem ser vistos como um conjunto de indeterminadas sobre K. Definimos $K[\Lambda(m,n)]$ como sendo o anel de polinômios gerado pelos elementos de $\Lambda(m,n)$ sobre K. $\Lambda(m,n)$ é um poset com a ordem parcial $[\lambda] \leq [\mu]$ se $\lambda_1 \leq \mu_1, \dots, \lambda_m \leq \mu_m$.

Podemos ver $\Lambda(m,n) \subset \mathbb{N}^m$, onde é claro que $\mathbb{N}^m$ possui uma estrutura de poset com ordem parcial definida como para $\Lambda(m,n)$. Para cada $[\lambda] \in \mathbb{N}^m$ abreviamos

$$[\lambda_\pi] = [\lambda_{\pi(1)}\lambda_{\pi(2)} \dots \lambda_{\pi(m)}] = \operatorname{sign}(\pi)[\lambda]$$

onde π é um elemento do grupo $Sl(n)$ das permutações de $\{1, \dots, n\}$.

Definimos uma função $\varpi : \mathbb{N}^m \to K[\Lambda(m,n)]$ de forma que $\varpi([\lambda]) = 0$ se $[\lambda]$ possuir duas coordenadas iguais; e $\varpi([\lambda]) = [\lambda_{\pi_\lambda}]$ se todas as coordenadas de $[\lambda]$ forem distintas e onde π_λ é a única permutação que coloca as coordenadas de $[\lambda]$ em ordem crescente.

Dados $[\lambda^1], \ldots, [\lambda^k] \in \Lambda(m,n)$, o monômio $T = [\lambda^1][\lambda_2]\ldots[\lambda^k]$ pode ser representado por uma matriz

$$T = \begin{bmatrix} \lambda_1^1 & \lambda_2^1 & \ldots & \lambda_m^1 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \ldots & \lambda_m^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^k & \lambda_2^k & \ldots & \lambda_m^k \end{bmatrix}$$

à qual damos o nome de *tableau*. Se as colunas são ordenadas, ou seja, se $\lambda_i^1 \leq \lambda_i^2 \leq \ldots \leq \lambda_i^k$, então o tableau é chamado de *standard*.

Consideramos o homomorfismo de álgebras

$$\phi : K[\Lambda(m,n)] \longrightarrow K[X]$$

$$[\lambda] \longmapsto \det \begin{pmatrix} x_{\lambda_1} & x_{\lambda_2} & \ldots & x_{\lambda_m} \\ x_{\lambda_1+r} & x_{\lambda_2+r} & \ldots & x_{\lambda_m+r} \\ x_{\lambda_1+2r} & x_{\lambda_2+2r} & \ldots & x_{\lambda_m+2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{\lambda_1+(m-1)r} & x_{\lambda_2+(m-1)r} & \ldots & x_{\lambda_m+(m-1)r} \end{pmatrix}$$

e denotaremos $\phi([\lambda]) = |[\lambda]|$. A imagem de ϕ coincide com $K[M]$.

Vamos estabelecer mais algumas notações. O *complemento* de uma m-upla $[\lambda] \in \Lambda(m,n)$ é a única $(n-m)$-upla $[\lambda^*] \in \Lambda(n-m,n)$ com $[\lambda \cup \lambda^*] = [1,2,\ldots,n]$. Definimos o par (λ,λ^*) como sendo a (única) permutação em $Sl(n)$ tal que $(\lambda,\lambda^*)(\lambda_i) = i$ e $(\lambda,\lambda^*)(\lambda_j^*) = m+j$ para $i = 1,2,\ldots,m$ e $j = 1,2,\ldots,n-m$.

Sejam $s \in \{1,\ldots,m\}$, $\alpha \in \Lambda(s-1,n)$, $\beta \in \Lambda(m+1,n)$ e $\gamma \in \Lambda(m-s,n)$. Definimos o *syzygy de van der Waerden* $[[\alpha\dot{\beta}\gamma]]$ como sendo o seguinte polinômio quadrático em $K[\Lambda(m,n)]$:

$$(1) \quad [[\alpha\dot{\beta}\gamma]] = \sum_{[\tau]\in\Lambda(s,m+1)} \operatorname{sign}(\tau,\tau^*)\varpi([\alpha_1\ldots\alpha_{s-1}\beta_{\tau_1^*}\ldots\beta_{\tau_{m+1-s}^*}])\varpi([\beta_{\tau_1}\ldots\beta_{\tau_s}\gamma_1\ldots\gamma_{m-s}])$$

Temos o resultado [BV, 4.4], [S, 3.1.5]:

Lema A.6.4. *(Relações de Plücker) Seja $[[\alpha\dot{\beta}\gamma]]$ como em (1). Então $\phi([[\alpha\dot{\beta}\gamma]]) = 0$.*

Lema A.6.5. [BV, 4.5] *Seja $[a][b] \in K[\Lambda(m,n)$ um tableau não standard com $a_i \leq b_i$ para $i = 1,\ldots,k$ e $a_{k+1} > b_{k+1}$. Tomamos $[\alpha] = [a_1\ldots a_k] \in \Lambda(k,n)$, $[\beta] = \varpi([a_{k+1}\ldots a_m\, b_1\ldots b_{k+1}]) \in \Lambda(m+1,n)$ e $[\gamma] = [b_{k+2}\ldots b_m] \in \Lambda(m-k-1,n)$. Então todos os termos $[\delta][\epsilon] \neq [a][b]$ que aparecem em $[[\alpha\dot{\beta}\gamma]]$ e tais que $\phi([\delta][\epsilon]) \neq 0$ possuem as seguintes propriedades:*

(i) $[\delta] \leq [a]$

(ii) $[\delta][\epsilon]$ é um tableau standard.

Seja Γ o conjunto dos tableaux standard de $K[\Lambda(m,n)]$.

Lema A.6.6. [BV, 4.C], [S, 3.1.9] *O conjunto $\phi(\Gamma) \in K[M]$ é linearmente independente.*

Observamos que ϕ, induz uma bijeção entre $\Lambda(m,n)$ e M, e desta identificação é claro que M pode ser visto como um poset. Os elementos de M que forem imagem de um tableau standard por ϕ serão chamados de *monômios standard de M*. Com estas identificações temos o

Teorema A.6.7. [BV, 4.3] *$K[M]$ é uma ALR graduada em M sobre K.*

Um syzygy de van der Waerden $[[\alpha\dot{\beta}\gamma]]$ será chamado de *syzygy de retificação* se $\alpha_{s-1} < \beta_{s+1}$ e $\beta_s < \gamma_1$. Seja $\mathcal{S}$ o conjunto dos syzygies de retificação em $K[\Lambda(m,n)]$. Temos [BV, 4.7]

Teorema A.6.8. *Seja $I = \ker\phi$. Então I é gerado pelos elementos de $\mathcal{S}$. Em particular, $K[M] \cong K[\Lambda(m,n)]/I$.*

De agora em diante seja K corpo. Veremos que esta estrutura de ALR para $K[M]$ permite encontrar importantes conexões com a teoria de bases de Gröbner e bases de SAGBI.

Estabelecemos uma ordem monomial em $K[\Lambda(m,n)]$ da seguinte maneira. Ordenamos os elementos de $\Lambda(m,n)$ lexicograficamente, ou seja, $[\lambda] \prec [\mu]$ se existir um j, $1 \leq j \leq m$, tal que $\lambda_i = \mu_i$ para $1 \leq i \leq j-1$ e $\lambda_j < \mu_j$. Esta ordem nas indeterminadas induz uma ordem monomial reversa lexicográfica em $K[\Lambda(m,n)]$, que será também denotada por "$\prec$".

A ordem monomial "$\prec$" é chamada de *ordem tableau* pois os monômios de $K[\Lambda(m,n)]$ podem ser descritos como tableaux, como já foi visto.

Teorema A.6.9. [S, 3.1.7] *Sejam $\mathcal{S}$ e I como em A.6.8. Então o conjunto $\mathcal{S}$ forma uma base de Gröbner para I com respeito à ordem tableau. Um tableau T é standard se e só se $T \notin \mathrm{in}_{\prec}(I)$.*

Agora consideremos em $K[X]$ a ordem monomial lexicográfica σ induzida pela ordem nas variáveis $x_{ij} > x_{kl}$ se $i < k$ ou $i = k$ e $j < l$. Um monômio $f \in K[X]$ é chamado de *diagonal* se for um produto de diagonais de menores máximos de X, ou seja, se seu grau for divisível por m e puder ser escrito na forma

$$f = \prod_{i=1}^{k} (x_{\lambda_1^i 1} x_{\lambda_2^i 2} \cdots x_{\lambda_m^i m}) \tag{2}$$

onde $\lambda_1^i < \lambda_2^i < \ldots < \lambda_m^i$ para $i = 1, \ldots, k$. É claro que se T for um tableau, o monômio inicial de $\phi(T)$ nesta ordem é um monômio diagonal. Os dois lemas seguintes são interessantes por mostrarem como as estruturas dos tableaux se comportam sob esta ordem monomial.

Lema A.6.10. [S, 3.2.6] *Seja $T = [\lambda^1][\lambda^2]\ldots[\lambda^k]$ um tableau. Então $\mathrm{in}_\sigma(\phi(T)) = f$ como em (2).*

Lema A.6.11. [S, 3.2.7] *Seja f como em (2). Então existe um único tableau standard T_f tal que $\mathrm{in}_\sigma(\phi(T_f)) = f$.*

Outro fato importante é o seguinte

Teorema A.6.12. [S, 3.2.9] *O conjunto M dos menores máximos de X forma uma base de SAGBI para a álgebra $K[M]$ com respeito à ordem σ.*

Este teorema é demonstrado por Sturmfels em [St] usando resultados da teoria de invariantes. Outra demonstração usando diretamente os critérios de SAGBI estabelecidos em [RS] está em III.3 neste trabalho. Uma outra demonstração é encontrada em [C], como corolário de um resultado sobre bases de Gröbner de ideais determinantais. Mas todas estas demonstrações têm em comum o fato de usarem fortemente a estrutura de ALR de $K[M]$.

APÊNDICE B

ASPECTOS COMPUTACIONAIS

Neste apendice apresentaremos os pseudocódigos de alguns algoritmos usados neste trabalho. Estes algoritmos foram implementados no sistema *Mathematica 2.2e*.

A construção de uma a- ou a_I-facetas do complexo Δ e o número de não degraus desta pode ser realizado pelo seguinte algoritmo. Note-se que ambos os algoritmos III.2.5 e III.2.6 podem ser resumidos em um único programa.

B.1 - Pseudocódigo para III.2.5 e III.2.6.

INPUT: $I := [1 = \lambda_1, \ldots, \lambda_m]$ vetor, onde λ_i são inteiros positivos, com $\lambda_i < \lambda_j$ se $i < j$;
n, m, r inteiros, $2 \leq m < n$, $r \geq 1$.
OUTPUT: a_I-faceta F e $\nu(F)$ = número de não-degraus de F.

(*Testa a validade dos dados iniciais. Se não forem válidos, finaliza*)
IF $n - m - 1 \leq r$
  THEN IF $\lambda_m \not/ n$ THEN STOP (*não é possível*)
  ELSE IF $\lambda_m > n - r - 1$ THEN STOP (*não é possível*)
ENDIF

(*Inicializa o contador ndeg para não degraus e os limites d=dimensão e L=último elemento*)
IF $n - m - 1 \leq r$
  THEN $d := m(n - m) + 1$;
    $ndeg := 2$;
    $L = [n - m + 1, \ldots, n]$
  ELSE $d := n + (m - 1)r$;
    $ndeg := 1$;
    $L = [\lambda_2 + r, \ldots, \lambda_m + r, n]$
ENDIF

$\delta := [\lambda_2 - \lambda_1, \lambda_3 - \lambda_2, \ldots, \lambda_m - \lambda_{m-1}, n - \lambda_m]$;
$F := \{I\}$;

(*Calcula o passo k_0 para o próximo vértice de F*)
FOR(1) $i := 1$ TO $i = n$ DO
    IF $\delta[i] > 1$
      THEN $k_0 := i$; GOTO Out(1)
    ENDIF
    i=i + 1
ENDFOR(1)

Out(1):

$l_1 := [\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{k_0} + 1, \ldots, \lambda_m]$
$F = F \cup \{l_1\} = \{I, l_1\}$

(*Rotina principal, que realmente constrói F*)
FOR(2) $p := 3$ TO $p = d$ DO
    $\delta := F[p - 1] - F[p - 2]$ (*subtração de vetores*)
    $j :=$ menor inteiro tal que a entrada j de δ seja $\neq 0$

(*OBS.: Denotamos $F[s] = [\lambda_1^s, \ldots, \lambda_m^s]$*)
    $\delta_1 := [\lambda_2^{p-1} - \lambda_1^{p-1}, \ldots, \lambda_m^{p-1} - \lambda_{m-1}^{p-1}, n - \lambda_m^{p-1}]$
    IF $j < m$

THEN FOR(3) $k := j + 1$ TO $k = m - 1$ DO
IF $\lambda_k^{p-1} < L[k]$ AND $\delta_1[k] > 1$
THEN $k_0 := k$; GOTO Out(2)
ENDIF
$k = k + 1$
ENDFOR(3)
IF $\lambda_m^{p-1} < m$
THEN $k_0 := m$; GOTO Out(2)
ELSE $ndeg = ndeg + 1$
FOR(4) $s := 1$ TO $s = j - 1$ DO
IF $\lambda_s^{p-1} < L[s]$ AND $\delta_1[s] > 1$
THEN $k_0 := s$; GOTO Out(2)
ENDIF
$s = s + 1$
ENDFOR(4)
ENDIF
IF $\lambda_{j-1}^{p-1} < L[j-1]$ AND $\delta_1[j-1] > 1$
THEN $k_0 := j - 1$; GOTO Out(2)
ENDIF
IF $\lambda_j^{p-1} < L[j]$ AND $\delta_1[j] > 1$
THEN $k_0 := j$; GOTO Out(2)
ENDIF
ELSE $ndeg = ndeg + 1$
FOR(5) $s := 1$ TO $s = j - 1$ DO
IF $\lambda_s^{p-1} < L[s]$ AND $\delta_1[s] > 1$
THEN $k_0 := s$; GOTO Out(2)
ENDIF
$s = s + 1$
ENDFOR(5)
IF $\lambda_j^{p-1} < n$
THEN $k_0 = n$; GOTO Out(2)
ENDIF
ENDIF
Out(2):
$l_p := [\lambda_1^{p-1}, \ldots, \lambda_{k_0}^{p-1} + 1, \ldots, \lambda_m^{p-1}]$
$F = F \cup \{l_p\} = \{I, l_1, \ldots, l_p\}$
p=p+1
ENDFOR(2)
IF $\lambda_m^{d-1} \neq n$
THEN $ndeg = ndeg + 1$
ENDIF

$F = \{I, l_1, \ldots, l_d\}$ e $\nu(F) = ndeg$.

END

Multiplicidade

Estabeleceremos aqui uma fórmula recursiva que permite calcular a multiplicidade de $K[\mathrm{in}_\sigma(M)]$. Seguindo a notação de III.2, o h-vetor de $K[\mathrm{in}_\sigma(M)]$ é $(h_0, \ldots, h_s)$ onde $s \quad h(\mathrm{in}_\sigma(M))$ foi calculado em III.2.2. Por A.2.5 temos que a multiplicidade de $K[\mathrm{in}_\sigma(M)]$ é

$$e(\mathrm{in}_\sigma(M)) = \sum_{i=0}^{s} h_i.$$

Tendo em vista A.3.10 , concluímos que $e(\mathrm{in}_\sigma(M))$ é o número de facetas do complexo Δ.

Estabeleçamos algumas notações. Dados $[\lambda] \leq [\mu] \in \Lambda(m,n)$, definimos o *intervalo*

$$[[\lambda],[\mu]] = \{[\sigma] \in \Lambda(m,n) : [\lambda] \leq [\sigma] \leq [\mu]\}.$$

Dado um intervalo J de $\Lambda(m,n)$, definimos 0_J como sendo o menor elemento de J; e 1_J como sendo o maior elemento de J. Seja $\Gamma = \{1, \ldots, n\}^m \subset \mathbb{N}^m$. Podemos ver $\Lambda(m,n) \subset \Gamma$.

Definição B.3. Definimos uma função

$$c_J : \Gamma \longrightarrow \mathbb{N}$$

tal que:

(*i*) se $[\mu] \in J$ então $c_J([\mu])$ será o número de cadeias saturadas em $\Lambda(m,n)$ que ligam $[\mu]$ a 0_J;

(*ii*) Se $[\mu] \notin J$ então $c_J([\mu]) = 0$;

(*iii*) $c_J(0_J) = 1$.

Da definição é claro que $c_J(1_J)$ é o total de cadeias saturadas contidas em J.

Se $J = [[1,2,\ldots,m],[n-m+1,\ldots,n]]$ então é claro que $J = \Lambda(m,n)$. Logo, se $n-m-1 \leq r$, o número de facetas de Δ é dado por $e(\Delta) = c_J([n-m+1,\ldots,n])$.

Se $n-m-1 > r$, para cada $I = (\lambda_2, \ldots, \lambda_m) \in \mathcal{I}^r_{m,n}$ definimos o intervalo

$$I_\Delta = [[1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m], [\lambda_2 + r, \ldots, \lambda_m + r, n]].$$

Então o número de facetas de Δ_I é dado por

$$e(\Delta_I) = c_{I_\Delta}([\lambda_2 + r, \ldots, \lambda_m + r, n]). \tag{1}$$

Logo o número de facetas de Δ é dado por

$$e(\Delta) = \sum_{I \in \mathcal{I}^r_{m,n}} c_{I_\Delta}(1_{I_\Delta}). \tag{2}$$

O seguinte resultado é bastante óbvio.

Lema B.4. *Sejam $J \subset \Lambda(m,n)$ um intervalo e $[\sigma] \in J$. Então*

$$c_J([\sigma]) = \sum_{i=1}^{m} c_J([\sigma_1, \ldots, \sigma_{i-1}, \sigma_i - 1, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_m]).$$

Na verdade o lema B.4 nos dá uma fórmula recursiva para calcular $e(\Delta)$. Temos

Proposição B.5. *Seja* $e(\text{in}_\sigma(M))$ *a multiplicidade de* $K[\text{in}_\sigma(M)]$.
(a) Se $n-m-1 \leq r$ *então*

$$e(\text{in}_\sigma(M)) = c_J([n-m+1,\ldots,n])$$

onde $J = [[1,2,\ldots,m],[n-m+1,\ldots,n]]$ *e* c_J *é calculada recursivamente por B.4.*

(b) Se $n-m-1 > r$ *então*

$$e(\text{in}_\sigma(M)) = \sum_{I \in \mathcal{I}^r_{m,n}} e(\Delta_I)$$

onde $e(\Delta_I)$ *é como em (1) e é calculado recursivamente por B.4.*

O cálculo recursivo da multiplicidade (B.5) de $K[\text{in}_\sigma(M)]$ é facilmente programável. Os recursos nativos de recursividade do *Mathematica* permitem que esta programação seja ainda mais simples do que em outras linguagens.

Descreveremos inicialmente duas funções básicas:

FUNCTION $K(n,m,r)$
INPUT n,m,r inteiros tais que $2 \leq m < n$, $1 \leq r \leq n-m+1$
OUTPUT conjunto de todas os vetores $[\lambda_1,\ldots,\lambda_m]$ com
$1 = \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_m \leq n-r-1$, ordenados lexicograficamente
ENDFUNCTION

Existem várias implementações para $K(m,n,r)$, mas não veremos nenhuma aqui, pois este um problema comum de teoria combinatória.

Para a próxima descrição denotaremos $\Gamma = \{1,\ldots,n\}^m$ e lembramos que Γ possui uma ordem parcial $\leq$ definida como em $\Lambda(m,n)$. Denotaremos por $[\epsilon_i]$ os vetores da base canônica de $\mathbb{N}^m$.

FUNCTION $ContMult(\lambda,\tau)$
INPUT: vetores $[\lambda] \in \Lambda(m,n)$, $[\tau] \in \Gamma$, $[\lambda] \leq [\tau]$
OUTPUT: número de cadeias maximais de $\Lambda(m,n)$ ligando λ a τ
IF $[\tau] \notin \Lambda(m,n)$ THEN $ContMult(\lambda,\tau) := 0$
ELSE IF $\min_i\{\tau_i - \lambda_i\} < 0$ THEN $ContMult(\lambda,\tau) := 0$
ELSE IF $[\lambda] = [\tau]$ THEN $ContMult(\lambda,\tau) := 1$
ELSE IF $ContMult([\lambda],[\tau]-[\epsilon_i]) \neq 0\ \forall i = 1,\ldots,m$
THEN $ContMult(\lambda,\tau) := \sum_{i=1}^m ContMult([\lambda],[\tau]-[\epsilon_i])$
ELSE STOP
ENDFUNCTION

Observe-se que se $[\tau] \notin \Lambda(m,n)$ então $ContMult(\lambda,\tau)$ devolverá o valor zero. É necessário permitir a entrada de seqüências gerais de Γ por causa do processo de recursividade.

Vejamos agora o algoritmo para calcular a multiplicidade $e(\text{in}(M))$.

B.6 - Pseudocódigo para IV.2.5.

INPUT: inteiros n,m,r, com $2 \leq m < n$, $r \geq 1$.
OUTPUT: multiplicidade $e(\text{in}(M))$.
IF $n-m-1 \leq r$
THEN $b := [1,\ldots,m]$;
$B := [n-m+1,\ldots,n]$;
$Mult := ContMult(b,B)$;
GOTO End(1)
ENDIF
$Mult := 0$
$\mathcal{B} := K(n,m,r) = \{b^1,\ldots,b^l\}$
(OBS.: Denotaremos $b^i = [b^i_1,\ldots,b^i_m]$*)*
FOR $i = 1$ TO $i = l$ DO
$B^i = [b^i_2 + r,\ldots,b^i_m + r, n]$

$Mult = Mult + ContMult(b^i, B^i)$
i=i+1
ENDFOR
End(1):
$e(\text{in}(M)) = Mult$
END

REFERÊNCIAS

[AS] J. F. Andrade, A. Simis, *Tópicos de Álgebra Comutativa*, 13º Colóquio Brasileiro de Matemática, Poços de Caldas, 1981.

[BH] W. Bruns, J. Herzog, *Cohen-Macaulay rings*, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[BV] W. Bruns, U. Vetter, *Determinantal rings*, LNM 1327 Springer, 1988.

[C] A. Conca, *Gröbner bases of powers of ideals of maximal minors* (1994) (preprint).

[CHV] A. Conca, J. Herzog, G. Valla, *Sagbi bases with applications to blow-up algebras*, J. reine angew. Math. **474** (1996), pp. 113 – 138.

[CLS] D. Cox, J. Little, D. O'Shea, *Ideals, Varieties, and Algorithms*, UTM Springer, 1992.

[E] D. Eisenbud, *Commutative Algebra with a view toward Algebraic Geometry*, GTM Springer, 1994.

[H] J. Harris, *Algebraic Geometry: a first course*, GTM 133 Springer, 1992.

[Ho] M. Hochster, *Rings of invariants of tori, Cohen-Macaulay rings generated by monomials, and polytopes*, Ann. of Math. **96** (1972), 318 - 337.

[HR] M. Hochster, L. J. Ratliff, *Five theorems on Macaulay rings*, Pacific J. Math. **44** (1973), 147 - 172.

[RS] L. Robbiano, M. Sweedler, *Subalgebra bases*, Comutative Algebra (Proceedings, Salvador 1988) (W. Bruns, A. Simis, eds.), LNM 1430 Springer, 1990, pp. 61 – 87.

[S] B. Sturmfels, *Algorithms in invariant theory* (preprint).

[SVV] A. Simis, W. Vasconcelos, R.H. Villarreal, *On the Ideal Theory of Graphs*, Journal of Algebra **167, No. 2** (1994), pp. 389 – 416.