ENUMERAÇÃO DOS TORNEIOS HAMILTONIANOS COM
O NÚMERO MÍNIMO DE TRICICLOS

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida pelo Sr.André Luís Godinho Mandolesi e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 28 de fevereiro de 1996.

Prof.Dr.José Carlos de Souza Kiihl
Orientador

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de MESTRE EM MATEMÁTICA.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Mandolesi, André Luís Godinho

M312e Enumeração dos torneios hamiltonianos com o número mínimo de triciclos /André Luís Godinho Mandolesi -- Campinas, [S.P. :s.n.], 1996.

Orientador : José Carlos de Souza Kiihl

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação.

1. Teoria dos grafos. 2. Análise combinatória. 3. Torneios. 4. Numeração. I. Kiihl, José Carlos de Souza. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação. III. Título.

Tese de Mestrado defendida e aprovada em 28 de fevereiro de 1996 pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Claudina Izepe Rodrigues

Prof (a). Dr (a). CLAUDINA IZEPE RODRIGUES

Caio José C. Negreiros

Prof (a). Dr (a). CAIO JOSÉ COLETTI NEGREIROS

[illegible]

Prof (a). Dr (a). JOSÉ CARLOS DE SOUZA KIIHL

Agradecimentos

Gostaria neste trabalho de agradecer a todos aqueles que ao longo dos últimos anos participaram e enriqueceram minha vivência dentro e fora da Universidade. Sem vocês nada disso teria tido qualquer significado.

Àqueles que eu amei e igualmente àqueles cujos caminhos cortaram o meu de forma menos harmoniosa, pois também estes me foram importantes. E às muitas pessoas maravilhosas que infelizmente tocaram meu caminho de forma muito passageira, e que por circunstâncias várias se foram, deixando entretando a marca de sua passagem.

À minha família, que eu amo muito mas de que eu estive mais afastado do que deveria nesses anos e também nos precedentes.

À família de amigos que eu encontrei aqui, aos quais qualquer tentativa de agradecimento se revelaria necessariamente inadequada.

Ao meu orientador, Prof. José C.S.Kühl, que sempre me ajudou muito além dos limites da simples obrigação profissional, e a quem eu tenho por um amigo.

Também ao Prof. Francesco Mercuri, que igualmente muito me apoiou e ensinou, e a quem eu tomo como exemplo no que se refere à função docente e ao mútuo respeito que pode haver entre alunos e mestres.

E ao belo e sofrido povo deste país, que através do CNPq financiou meus estudos, e ao qual eu espero um dia poder retribuir de alguma forma.

Introdução

Neste trabalho apresentamos a enumeração dos torneios hamiltonianos com o número mínimo de triciclos, utilizando a caracterização dada por M.Burzio e D.C.Demaria em 1990.

Na seção 1, definimos os conceitos básicos sobre torneios, e em seguida, na seção 2, fazemos um levantamento histórico dos resultados sobre torneios hamiltonianos H_n com o número mínimo de k-ciclos, para $4 \leq k \leq n$.

Na seção 3, apresentamos alguns tipos particulares de torneios, bem como alguns resultados sobre os mesmos que serão utilizados nas seções seguintes.

Enfim, na seção 4, demonstramos algumas propriedades acerca dos torneios hamiltonianos com número mínimo de triciclos.

Utilizamos essas propriedades para na seção 5 apresentarmos duas caracterizações devidas a Burzio e Demaria para a classe **B** desses torneios, uma que descreve a estrutura de vértices e arcos desses torneios, e outra que identifica os torneios dessa classe a partir de sua seqüência de out-degree.

A partir desta caracterização fazemos na seção 6 a enumeração desta classe, demonstrando que existem 2^{n-4} torneios hamiltonianos de ordem n $(n \geq 4)$ com número mínimo de triciclos, sendo que destes F_{n-4} são simples, onde F_i é o i-ésimo número de Fibonacci.

1 - Definições Básicas

Um **grafo direcionado** ou **digrafo G** é constituído por um conjunto finito não-vazio V(G), cujos elementos são chamados **vértices** de G, e uma família A(G), cujos elementos (chamados de **arcos**) são pares ordenados de vértices distintos.

Por abuso de notação identificamos um grafo com o conjunto de seus vértices, escrevendo simplesmente $G = \{v_1,...,v_n\} = V(G)$, ou $v \in G$ quando $v \in V(G)$.

A **ordem** de G é a cardinalidade de V(G), indicada $|G| = \#V(G)$. Quando desejamos ressaltar a ordem de G escrevemos $G = G_n$, onde $n = |G|$.

Se $(x,y) \in A(G)$ indicamos $\mathbf{x \to y}$ e dizemos que x precede (ou é predecessor de) y e que y sucede (ou é sucessor de) x. O número de sucessores de um vértice v é o **out-degree** de v, indicado **od(v)**.

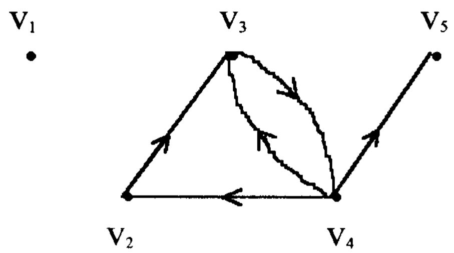
A **seqüência de out-degree** de um digrafo é a seqüência dos valores de out-degree de todos os seus vértices, em ordem crescente.

Dois grafos F e G são **isomorfos** se existir uma bijeção $\varphi: V(F) \to V(G)$ tal que $\forall x,y \in V(F)$, $x \to y \Leftrightarrow \varphi(x) \to \varphi(y)$.

Um **k-ciclo** em G é uma seqüência $v_1,v_2,...,v_k$ de vértices distintos de G, indicada como $v_1v_2...v_{k-1}v_kv_1$, tal que $v_i \to v_{i+1}$ $\forall i=1,...,k-1$ e $v_k \to v_1$.

Um 3-ciclo será também chamado de **triciclo**, e o número de triciclos em um digrafo G será denotado por $\boldsymbol{\tau(G)}$.

Exemplo 1.1:



A figura acima é uma representação de um grafo G_5 com:

$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$

$A(G) = \{ (v_2, v_3), (v_3, v_4), (v_4, v_3), (v_4, v_2), (v_4, v_5) \}$

A seqüência de out-degree de G é 0,0,1,1,3 , correspondendo respectivamente aos out-degrees de v_1, v_5, v_2, v_3, v_4.

O único ciclo em G é o triciclo $v_2v_3v_4v_2$.

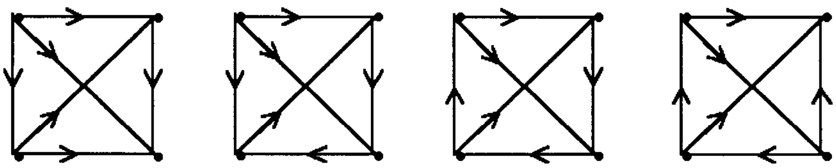
Um **torneio T** é um digrafo no qual cada par de vértices distintos é unido por exatamente um arco, isto é, $\forall x,y \in V(T)$, ou $x \to y$ ou $y \to x$.

Um **subtorneio** S de T (escreve-se **S < T**) é um torneio tal que $V(S) \subset V(T)$ e dados $x,y \in S$ temos $(x,y) \in A(S) \Leftrightarrow (x,y) \in A(T)$.

Dados $v_1,v_2,\ldots,v_r \in T$, denota-se por $\mathbf{T\text{-}\{v_1,v_2,\ldots,v_r\}}$ o subtorneio obtido a partir de T pela retirada dos vértices $v_1,v_2,\ldots,v_r$ e dos arcos correspondentes a tais vértices (isto é, qualquer arco (v_i,g) ou (g,v_i) com $i=1,\ldots,r$ e $g \in T$).

E se $S < T$ e $v \in T\text{-}S$, denota-se por **S+v** a extensão de S por v, isto é, o subtorneio de T com vértices $V(S+v) = V(S) \cup \{v\}$.

Exemplo 1.2: Os seguintes grafos são os únicos torneios possíveis de ordem 4 (a menos de isomorfismos):



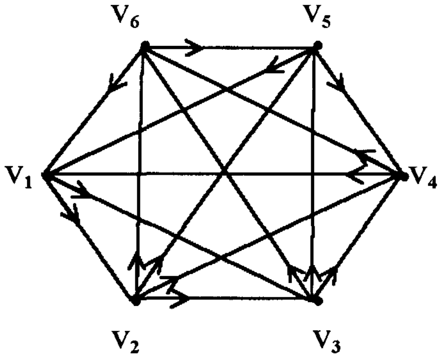
Dados $A = \{a_1,\ldots,a_r\} < T$ e $B = \{b_1,\ldots,b_s\} < T$, indicamos $\mathbf{A \to B}$ ou $\mathbf{a_1,\ldots,a_r \to b_1,\ldots,b_s}$ se $a_i \to b_j$ $\forall i=1,\ldots,r$ $\forall j=1,\ldots,s$.

Um subtorneio $W < T$ é **projetado** (ou **conado**) por um vértice $v \in T\text{-}W$ se $v \to W$ ou $W \to v$. Se nenhum vértice de T-W projeta W, então W é não-projetado. Se W for projetado por todos os vértices de T-W, então os vértices de W são ditos **equivalentes**.

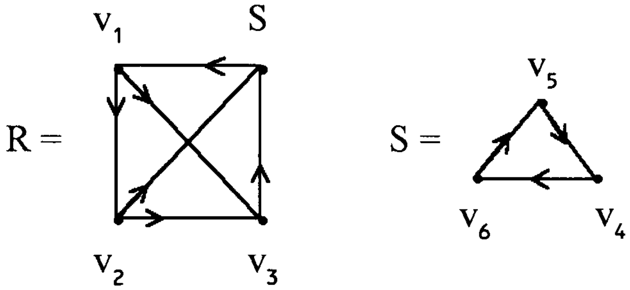
Se particionarmos os vértices de T_n em subtorneios disjuntos $S^{(1)},\ldots,S^{(m)}$ de vértices equivalentes e denotarmos por R_m o torneio com m vértices $r_1,\ldots,r_m$ no qual $r_i \to r_j$ se e somente se $S^{(i)} \to S^{(j)}$, então dizemos que T_n é a **composição** do torneio **quociente** R_m com as **componentes** $S^{(1)},\ldots,S^{(m)}$, e escrevemos $\mathbf{T_n = R_m(S^{(1)},\ldots,S^{(m)})}$.

Um torneio T_n é **simples** se suas únicas decomposições possíveis forem as triviais $T_n=R_1(T_n)$ e $T_n=T_n(v_1,...,v_n)$.

Exemplo 1.3:

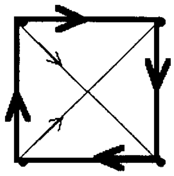


No torneio T apresentado acima os vértices v_4,v_5,v_6 são equivalentes, de modo que podemos representá-lo como $T=R(v_1, v_2, v_3, S)$, onde:



Um **torneio hamiltoniano H_n** é um n-torneio que contém pelo menos um n-ciclo.

Exemplo 1.4: no exemplo 1.2 o único torneio que é hamiltoniano é o terceiro, cujo 4-ciclo destacamos abaixo:



2 - Histórico: Torneios Hamiltonianos com número mínimo de k-ciclos

J.W.Moon, em 1966 (ver [14]) provou o seguinte teorema:

Teorema (Moon): O número mínimo de k-ciclos presentes em um torneio hamiltoniano de ordem n é n-k+1.

Neste mesmo artigo ele introduziu o torneio bineutral A_n (com $n \geq 3$), que satisfaz a todas as condições extremais, ou seja, para cada k, com $3 \leq k \leq n$, ele possui exatamente n-k+1 ciclos de comprimento k.

A seguir vários pesquisadores tentaram caracterizar e enumerar essas classes de torneios que satisfazem tais condições extremais.

Em 1970 (ver [15]), R.J.Douglas apresentou uma caracterização para a classe D_n dos torneios hamiltonianos de ordem n que têm um único n-ciclo. Em 1972 (ver [16]), M.R.Garey apresentou a enumeração destes torneios, provando que

$$\#D_n = F_{2n-6} \quad (\text{com } n \geq 4)$$

onde F_i é o i-ésimo número de Fibonacci (a seqüência de Fibonacci é dada por $F_0=0$, $F_1=1$, $F_i=F_{i-1}+F_{i-2}$ para $i \geq 2$).

Em 1975 (ver [12]), M.Las Vergnas provou que para $4 \leq k \leq n-1$ o torneio A_n introduzido por Moon em [14] é o único torneio hamiltoniano com o número mínimo n-k+1 de k-ciclos.

Em 1990 (veja [11]), Marco Burzio e Davide Carlo Demaria apresentaram uma caracterização para a classe B_n dos n-torneios hamiltonianos com o número mínimo n-2 de 3-ciclos. Faremos esta caracterização na seção 5 (ver também [19]). No artigo [11], de Burzio e Demaria, é também provado que

$$\#B_n = 2^{n-4} \ (\text{com } n \geq 4)$$

sendo que F_{n-4} dos torneios desta classe são simples. Com a demonstração deste resultado, na seção 6, concluiremos nosso trabalho.

Obs.: Em 1990 (ver [17]), D.C.Demaria e J.C.S.Kiihl apresentaram uma outra caracterização para a classe D_n dos n-torneios hamiltonianos com um único n-ciclo (que eles chamaram torneios de Douglas). Em [18], Demaria e Kiihl provaram, a partir desta nova caracterização e utilizando algumas variações do triângulo de Pascal e alguns números de Fibonacci generalizados, que

$$\#D_n = F_{2n-6} \quad (\text{com } n \geq 4)$$

recuperando o resultado de Garey (ver [16]).

3 - Torneios Transitivos, Bineutrais, β e β-derivados

Vamos em seguida definir e demonstrar algumas propriedades dos torneios transitivos, dos bineutrais, e dos torneios β e β-derivados. A importância desses torneios é que, como mostraremos na seção seguinte, os torneios hamiltonianos com número mínimo de triciclos são combinações desses torneios.

Torneios Transitivos

Definição: Um torneio S é transitivo se, dados $x,y,z \in S$, $x \to y$ e $y \to z$ implicar $x \to z$.

Proposição 3.1: S é torneio transitivo $\Leftrightarrow$ S não possui nenhum 3-ciclo.

Demonstr.$(\Rightarrow)$: se S possuir um 3-ciclo xyzx teremos uma contradição, pois como $x \to y$ e $y \to z$ pela definição de transitividade devemos ter $x \to z$, mas sendo S um torneio não é possível termos ao mesmo tempo $z \to x$ e $x \to z$.

Demonstr.$(\Leftarrow)$: dados $x,y,z \in S$ com $x \to y$ e $y \to z$, como S é torneio devemos ter $z \to x$ ou $x \to z$, mas a primeira possibilidade nos daria um 3-ciclo em S. Assim, $x \to y$ e $y \to z \Rightarrow x \to z$, de modo que S é transitivo.

Proposição 3.2: Os vértices de um torneio transitivo S_n podem ser numerados numa seqüência $s_1,\ldots,s_n$ tal que $od(s_i)=i-1$ e $s_i \to s_1,\ldots,s_{i-1}$ $\forall i=1,\ldots,n$.

Demonstr.: em um torneio transitivo $x \to y$ implica $od(x) \geq od(y) + 1$, pois todos os sucessores de y serão também sucessores de x.

Tomemos agora s_1 como sendo um vértice com menor od dentre os vértices de S. Então $od(s_1) = 0$ e s_1 é sucessor de todos os demais, pois se tivéssemos $x \in S$ com $s_1 \to x$ então $od(x) < od(s_1)$ contrariando a minimalidade da definição de s_1.

Consideremos como hipótese de indução que já temos uma seqüência $s_1,\ldots,s_j$, $j < n$, com as características desejadas. Tomando $V' \equiv \{s_1,\ldots,s_j\}$ e $V'' \equiv V(S)-V'$ temos que $V'' \to V'$, pois dado $s_i \in V'$ temos $od(s_i) = i-1$ e $s_i \to s_1,\ldots,s_{i-1}$ de modo que s_i não pode ter mais nenhum sucessor em V''. Assim, se tomarmos s_{j+1} como sendo um vértice com menor od dentre os vértices de V'', s_{j+1} não pode ser predecessor de nenhum vértice de V'', caso contrário teríamos como antes uma contradição com a minimalidade assumida, e portanto os únicos sucessores de s_{j+1} são $s_1,\ldots,s_j$ como desejado, e $od(s_{j+1}) = j$.

Logo, por indução está provado o lema.

Definição: O vértice s_n, que é predecessor de todos os demais vértices do transitivo S, é chamado de **transmissor**, e o vértice s_1, que é sucessor de todos os demais, é chamado de **receptor** de S. A **ordenação natural** dos vértices de um torneio transitivo é aquela dada na proposição 3.2, indo do receptor para o transmissor, ficando agora implícito que ela será a adotada quando não especificarmos explicitamente alguma outra.

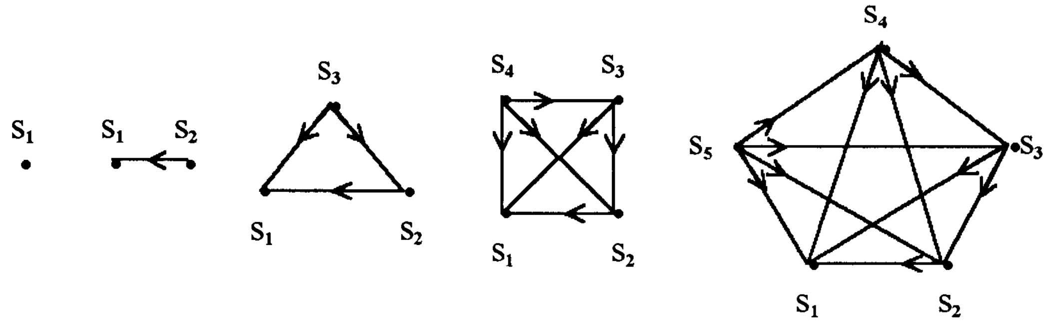
Proposição 3.3: Um torneio transitivo é completamente caracterizado, a menos de isomorfismos, pela sua ordem.

Demonstr.: Sejam V_n e W_n dois torneios transitivos de mesma ordem. Colocando seus vértices na ordem natural $v_1,\ldots,v_n$ e $w_1,\ldots,w_n$ temos que $v_i \to v_j$ e $w_i \to w_j$ se $i > j$. Assim, $p: V_n \to W_n$ dada por $p(v_i) = w_i$ é um isomorfismo entre os dois grafos.

Proposição 3.4: Se S é um torneio transitivo, então S-v independe (a menos de isomorfismo) de qual $v \in S$ é retirado.

Demonstr.: A retirada de um vértice não prejudica a propriedade transitiva de um torneio. Assim, se v,v' $\in S_n$, então tanto S_n-v como S_n-v' são torneios transitivos de ordem n-1, sendo portanto isomorfos pela proposição 3.3.

Exemplo 3.1: na figura abaixo estão os torneios transitivos de ordens 1 a 5, com seus vértices numerados na seqüência natural:



S_1 S_2 S_3 S_4 S_5

Torneios Bineutrais A_n

Definição: Um vértice $v \in T$ é **neutral** se T-v é hamiltoniano.

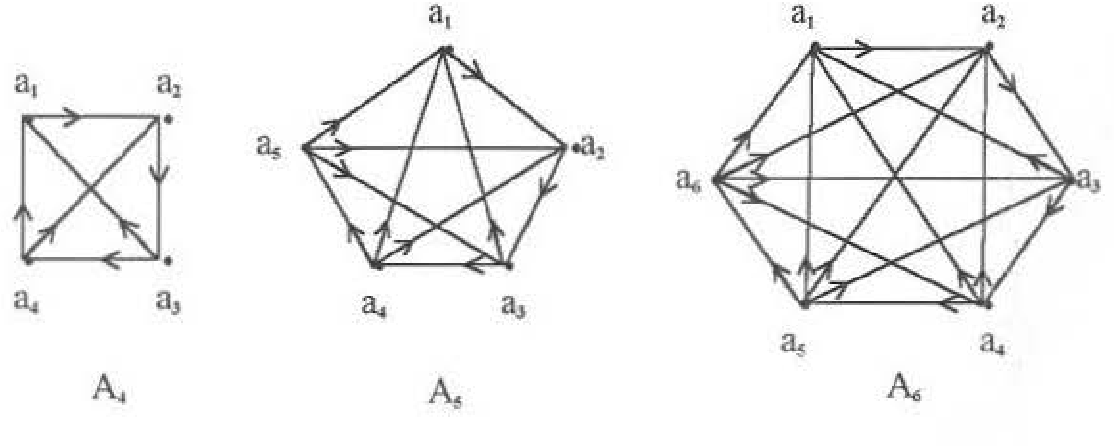
Definição: O **torneio bineutral A_n** ($n \geq 3$) é o torneio com vértices $V(A_n) = \{a_1, \ldots, a_n\}$ tal que:

(i) $a_i \to a_{i+1}$ se $i=1,\ldots,n-1$

(ii) $a_i \to a_1, \ldots, a_{i-2}$ se $i=3,\ldots,n$

Obs.: Las Vergnas [12] provou que estes são os únicos torneios com apenas 2 vértices neutrais (que são a_1 e a_n) para $n \geq 4$ (para $n = 3$ obviamente não podem existir vértices neutrais).

Exemplo 3.2: na figura abaixo temos os bineutrais de ordens 4 a 6:



Obs.: pode-se observar que os torneios A_n podem ser construídos a partir de S_n simplesmente invertendo-se o sentido dos arcos que ligam vértices consecutivos, isto é, enquanto em S_n temos $s_{i+1} \to s_i$ em A_n fazemos $s_i \to s_{i+1}$. A idéia dessa construção é, a partir de S_n, que não possui ciclo nenhum, obtermos um torneio hamiltoniano, com o n-ciclo $a_1 \ldots a_n a_1$, mas criando o mínimo possível de outros ciclos.

Proposição 3.5: A_n tem n-2 triciclos: $a_1a_2a_3a_1, a_2a_3a_4a_2, \ldots, a_{n-2}a_{n-1}a_na_{n-2}$.

Demonstr.: A partir da definição de A_n é imediata a verificação de que essas n-2 seqüências são realmente triciclos. Para provar que esses são os únicos, seja $a_ia_ja_ka_i$ um triciclo qualquer de A_n, sendo que podemos, sem perda de generalidade, assumir que $i = \min\{i,j,k\}$. Mas se $j > i$ e $a_i \to a_j$, a única possibilidade é $j = i+1$. Logo, necessariamente $k > j$, pois $k > i$ e $k \neq j = i+1$, e como $a_j \to a_k$ devemos ter $k = j+1 = i+2$. Assim, o triciclo é da forma $a_ia_{i+1}a_{i+2}a_i$, sendo portanto um dos indicados na proposição.

Proposição 3.6: A seqüência de out-degree de A_n é 1,1,2,3, ..., n-4, n-3, n-2, n-2.

Demonstr.: basta verificar na definição de A_n que $od(a_1) = od(a_2) = 1$, $od(a_i) = i-1$ para $i = 3,\ldots,n-1$, e $od(a_n) = n-2$.

Torneios β e β-derivados

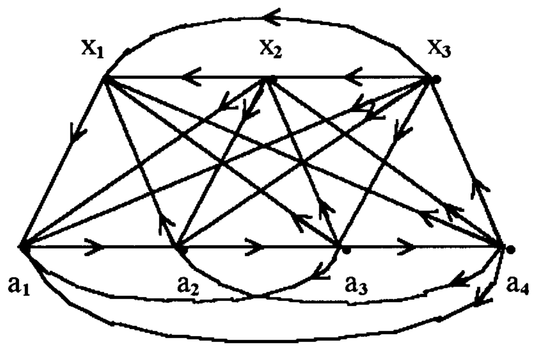
Definição: O torneio β_{2m-1} $(m \geq 3)$ é o torneio com vértices $V(\beta) = \{a_1,\ldots,a_m,x_1,\ldots,x_{m-1}\}$ tal que:

(i) $\{a_1,\ldots,a_m\} = A_m$, onde A_m é o bineutral de ordem m

(ii) $\{x_1,\ldots,x_{m-1}\} = S_{m-1}$, onde S_{m-1} é o transitivo de ordem m-1

(iii) $x_i \rightarrow a_1,\ldots,a_i$ e $a_{i+1},\ldots,a_m \rightarrow x_i$ $\forall i=1,\ldots,m-1$

Exemplo 3.3: na figura abaixo temos o torneio β de ordem 7:



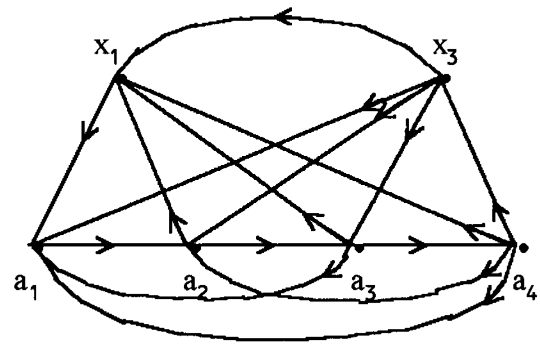
β_7

Definição: Um torneio obtido de β_{2m-1} pela retirada de k $(0 \leq k \leq m-3)$ dos vértices $x_2,\ldots,x_{m-2}$ será chamado de torneio β_{2m-1}**-derivado** e denotado $\tilde{\beta}_{2m-1-k}$

Obs.: dois torneios $\tilde{\beta}$ de mesma ordem podem não ser isomorfos mesmo que tenham sido derivados do mesmo β, o que mostra ser relevante a especificação de quais foram os vértices retirados. Na proposição seguinte mostraremos que dois torneios $\tilde{\beta}$ são isomorfos se e somente se tiverem sido derivados a partir do mesmo β pela retirada dos mesmos vértices.

Notação: $\beta_{2m-1}^{i_1,\dots,i_k}$, $2 \leq i_j \leq m\text{-}2$ $\forall j$, irá designar o torneio $\tilde{\beta}_{2m-1-k}$ obtido de β_{2m-1} pela retirada dos vértices $x_{i_1},\dots,x_{i_k}$. Esta representação será chamada **representação derivada**.

Exemplo 3.4:



β_7^2

Proposição 3.7: Todo torneio β-derivado $\tilde{\beta}$ admite uma única representação derivada $\tilde{\beta} = \beta_{2m-1}^{i_1,i_2,\dots,i_k}$

Demonstr.: Precisamos mostrar que dado $\tilde{\beta}$ é possível determinar univocamente não apenas qual o β_{2m-1} do qual ele foi derivado mas também quais foram os vértices x_i retirados. Para isso basta que identifiquemos, para cada $v \in \tilde{\beta}$, a qual a_j ou x_j ele corresponde.

Os únicos vértices que podem ter out-degree 1 são os correspondentes a x_1 e a_1, e como $x_1 \rightarrow a_1$ podemos identificá-los inequivocamente. Agora é possível identificar também a_2, que é o único vértice que sucede a_1. Da mesma forma, como os únicos vértices que sucedem a_2 são x_1 e a_3 e já identificamos x_1, fica determinado qual vértice é a_3.

Assumindo agora que já tenham sido identificados os vértices correspondentes a $a_1,\dots,a_j$ e $x_1,\dots,x_{j-2}$ (os que houver), para $3 \leq j \leq m\text{-}1$, vamos mostrar que podemos identificar a_{j+1} e x_{j-1}. De fato, os sucessores ainda incógnitos de a_j são a_{j+1} e x_{j-1}. Se em $\tilde{\beta}$ houver apenas um sucessor este será a_{j+1}. Se houver dois podemos distingui-los sabendo que $a_{j+1} \rightarrow x_{j-1}$.

Assim, por indução, identificamos $a_1,\dots,a_m$ e $x_1,\dots,x_{m-2}$ (os que houver), até restar um único vértice ainda incógnito em $\tilde{\beta}$, que será portanto x_{m-1}.

Obs.: Para que a proposição 3.7 seja válida é que impedimos a retirada dos vértices x_1 e x_{m-1} de β, pois se retirássemos também esses vértices teríamos por exemplo $\beta_{2m-1}^{1,\dots,m-1} = A_m = \beta_{2(m-2)-1}^{2,\dots,m-4}$.

Proposição 3.8: Os torneios β e $\tilde{\beta}$ são torneios hamiltonianos simples.

Demonstr.: Esses torneios são hamiltonianos pois $a_1a_2\dots a_m x_{m-1}x_{m-2}\dots x_1a_1$ (apenas os x que não tiverem sido retirados) é um ciclo passando por todos os vértices.

Para provar que eles são simples mostraremos que quaisquer dois vértices desses torneios não podem ser equivalentes.

Assim, x_i e x_j $(i<j)$ não são equivalentes pois $x_j \to a_{i+1}$ e $a_{i+1} \to x_i$.

Também a_i e a_j $(i<j)$ não são equivalentes pois se:

- $i=1$ então $a_j \to x_1$ e $x_1 \to a_i$
- $i>1$ então $a_j \to a_{i-1}$ e $a_{i-1} \to a_i$

E x_i e a_j $(\forall\ i,j)$ não são equivalentes pois caso:

- $j=1$ e $i=1$ então $a_j \to a_2$ e $a_2 \to x_i$
- $j=1$ e $i>1$ então $x_i \to x_1$ e $x_1 \to a_j$
- $2 \leq j \leq i$ então $x_i \to a_{j-1}$ e $a_{j-1} \to a_j$
- $i+1 \leq j \leq m-1$ então $a_j \to a_{j+1}$ e $a_{j+1} \to x_i$
- $j=m$ e $i<m-1$ então $a_j \to x_{m-1}$ e $x_{m-1} \to x_i$
- $j=m$ e $i=m-1$ então $x_i \to a_{m-1}$ e $a_{m-1} \to a_j$

Proposição 3.9: Nos torneios β e $\tilde{\beta}$ há exatamente 1 triciclo passando por cada x_i, que é $x_ia_ia_{i+1}x_i$.

Demonstr.: Como $\{x_1,\dots,x_{m-1}\}$ é transitivo, não pode haver nenhum triciclo da forma $x_ix_jx_kx_i$. Também não pode haver nenhum da forma $x_ix_ja_kx_i$, pois $x_j \to a_k \Rightarrow k \leq j$, $a_k \to x_i \Rightarrow i < k$, e $x_i \to x_j \Rightarrow j < i$, uma contradição. E o único triciclo da forma $x_i a_j a_k x_i$ é o da proposição, pois $x_i \to a_j \Rightarrow j \leq i$, $a_k \to x_i \Rightarrow i < k$, e o único modo de termos $a_j \to a_k$ com $j < k$ é se $k = j+1$, o que nos dá $i < k = j+1 \leq i+1$, ou seja, $j = i$ e $k = i+1$.

Proposição 3.10: $\tau(\beta_n) = n-2$.

Demonstr.: Seja m tal que $n = 2m-1$. Em $\{a_1, \ldots, a_m\} = A_m$ há m-2 triciclos pela proposição 3.5, e pela proposição anterior por cada x_i , $1 \leq i \leq m-1$, teremos exatamente 1 novo triciclo. Assim, em β_n existem m-2 + m-1 = 2m-3 = n-2 triciclos.

4 - Torneios Hamiltonianos com Número Mínimo de Triciclos

Notação: $\mathbf{B} \equiv$ {torneios hamiltonianos com número mínimo de triciclos}
$=\{H \text{ hamiltoniano}; \tau(H)=|H|-2\}$

Proposição 4.1: Se $B_n = R_m(S^{(1)},...,S^{(m)}) \in \mathbf{B}$, com $m \neq 1$, então $S^{(i)}$ é transitiva $\forall 1 \leq i \leq m$.

Demonstr.: Se $S^{(i)} \neq B_n$ (o que ocorre se $m \neq 1$) então podemos substituir $S^{(i)}$ por uma transitiva S' de mesma ordem (cujos vértices numeraremos em ordem de out-degree decrescente: $s_1' \to s_2' \to ... \to s_k'$, onde $k = |S|$) sem que o novo torneio B_n' deixe de ser hamiltoniano, pois se $x_1 s_1 s_2 ... s_p y_1$, $x_2 s_{p+1} ... y_2$, ..., $x_r s_q ... s_k y_r$ (onde os vértices $s \in S^{(i)}$ são todos distintos e os vértices $x,y \notin S^{(i)}$ podem se repetir) forem os trechos passando por $S^{(i)}$ de um n-ciclo de B_n, então trocando esses trechos por $x_1 s_1' ... s_p' y_1$, ..., $x_r s_q' ... s_k' y_r$ obtemos um n-ciclo em B_n'.

A substituição de $S^{(i)}$ por S' não afeta os triciclos de B_n que tenham apenas um ou nenhum vértice em $S^{(i)}$. Além disso, como os vértices de $S^{(i)}$ são equivalentes, não pode haver nenhum triciclo com dois vértices em $S^{(i)}$ e um fora. Assim, qualquer alteração no número de triciclos derá devida apenas àqueles que estejam contidos em $S^{(i)}$, de modo que $\tau(B_n) - \tau(B_n') = \tau(S^{(i)}) - \tau(S') = \tau(S^{(i)})$.

Como $B_n \in \mathbf{B}$ não podemos ter $\tau(B_n') < \tau(B_n)$, logo $\tau(S^{(i)}) = 0$ e pela proposição 3.1 $S^{(i)}$ é transitiva, c.q.d.

Proposição 4.2: Se $B_n \in \mathbf{B}$ e $H_m < B_n$, sendo H_m hamiltoniano, então $H_m \in \mathbf{B}$

Para a demonstração desta proposição precisaremos dos seguintes lemas:

Lema 4.3: Se T_n contém um k-ciclo não-projetado, $3 \leq k < n$, então esse ciclo pode ser estendido a um (k+1)-ciclo, também não-projetado.

Demonstr.: Seja $v \in T_n$ um vértice qualquer não pertencente ao k-ciclo $v_1...v_kv_1$. Como v não projeta esse ciclo (ou seja, não temos nem $v_i \rightarrow v$ $\forall i$ nem $v \rightarrow v_i$ $\forall i$), podemos encontrar dois vértices sucessivos v_j, v_{j+1} nesse ciclo tais que $v_j \rightarrow v$ e $v \rightarrow v_{j+1}$, de modo que $v_1...v_jvv_{j+1}...v_kv_1$ é um (k+1)-ciclo em T_n. Que este novo ciclo também seja não-projetado decorre imediatamente do fato de que ele contém os vértices do k-ciclo não-projetado.

Lema 4.4: Se $H_k = T_{k+1}$-v não é projetado por v, sendo H_k hamiltoniano, então existe pelo menos 1 triciclo passando por v.

Demonstr.: Se $v_1...v_kv_1$ é um k-ciclo de H_k, como v não projeta esse ciclo podemos encontrar dois vértices sucessivos v_j, v_{j+1} nesse ciclo tais que $v_{j+1} \rightarrow v$ e $v \rightarrow v_j$, de modo que temos o tricilo $v_jv_{j+1}vv_j$.

Demonstr.Propos.4.2: Se $H_k < B_n$ é um subtorneio hamiltoniano (com k<n), e portanto não é transitivo, então H_k não pode ser projetado por todos os demais vértices de B_n, senão seus vértices seriam equivalentes e poderíamos tomar o quociente $B_n = R_{n-k+1}(H_k, v_{k+1}, ..., v_n)$, contrariando a proposição 4.1. Logo existe $v \in B_n$-H_k que não projeta H_k, e portanto pelo lema 4.3 H_k pode ser estendido por v a um torneio hamiltoniano H_{k+1}.

Assim, indutivamente, podemos a partir de H_m construir uma seqüência $H_m < H_{m+1} < ... < H_n = B_n$ de subtorneios hamiltonianos.

Agora, se $H_{k+1} \in \mathbf{B}$ e $H_k = H_{k+1}$-v, como v não pode projetar H_k deve haver, pelo lema 4.4, ao menos 1 tricilo em H_{k+1} passando por v , de modo que $\tau(H_k) \leq \tau(H_{k+1}) - 1 = (k+1)-2-1 = k-2$. Mas pelo teorema de Moon $\tau(H_k) \geq n-2$, logo $\tau(H_k) = n-2$ e $H_k \in \mathbf{B}$.

Portanto, como $H_n = B_n \in \mathbf{B}$, procedendo indutivamente sobre a seqüência $H_m < H_{m+1} < ... < H_n = B_n$ obtemos $H_m \in \mathbf{B}$, c.q.d.

5 - Caracterizações dos Torneios em **B**

Teorema 5.1: $B_n \in \mathbf{B}$ se e somente se B_n é uma das seguintes composições:

- $B_n = H_3(a,b,S)$
- $B_n = \beta_{2m-1}(a_1,\ldots,a_m\ ,\ S^{(1)},\ldots,S^{(m-1)})$

onde H_3 é o hamiltoniano de ordem 3, as componentes S são transitivas e $S^{(2)},\ldots,S^{(m-2)}$ podem ser vazias (neste caso temos na verdade um torneio β_{2m-1}-derivado como quociente).

Demonstr.(⇐): H_3 e β são hamiltonianos, e ao substituirmos um vértice por uma componente transitiva, o torneio não deixa de ser hamiltoniano. Assim, em ambos os casos B_n é hamiltoniano. Para mostrar que $\tau(B_n) = n-2$ examinaremos separadamente cada uma das possibilidades:

- $B_n = H_3(a,b,S)$

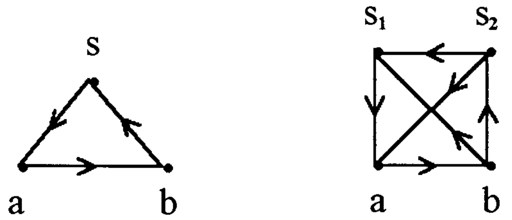
Como S é transitiva, os únicos triciclos possíveis são os que tiverem um vértice em S e dois fora, e como $a \to b \to S \to a$ teremos um triciclo por cada um dos n-2 vértices de S, de modo que $\tau(B_n) = n-2$ c.q.d.

- $B_n = \beta_{2m-1}(a_1,\ldots,a_m\ ,\ S^{(1)},\ldots,S^{(m-1)})$

Como $\beta_{2m-1}(a_1,\ldots,a_m\ ,\ x_1,\ldots,x_{m-1}) \in \mathbf{B}$ e há exatamente 1 triciclo passando por cada x_i, ao substituirmos x_i por $S^{(i)}$ transitiva (que não contém nenhum triciclo interno) estaremos acrescentando exatamente 1 triciclo para cada vértice extra (ou retirando 1 triciclo se trocarmos x_i por $\varnothing$), de modo que mantemos $\tau = n-2$.

Demonstr.(⇒):

Os únicos torneios hamiltonianos de ordens 3 e 4 são os da figura abaixo:



H_3 $\qquad$ H_4

e temos de imediato que $H_3 = H_3(a, b, s)$ e $H_4 = H_3(a, b, \{s_1, s_2\})$, de modo que a proposição é válida para esses casos.

Para os demais casos procedemos por indução sobre a ordem n do torneio. Assim, tomando como hipótese de indução que todo torneio $B_n \in \mathbf{B}$ tenha uma das estruturas indicadas no teorema, devemos mostrar que um torneio qualquer $B_{n+1} \in \mathbf{B}$ também terá esse tipo de composição.

Seja dado então $B_{n+1} \in \mathbf{B}$.

Pelo teorema de Moon sabemos que existe algum n-ciclo em B_{n+1}, e tomemos então B_n como sendo o subtorneio constituído pelos vértices desse n-ciclo. B_n é, por construção, hamiltoniano, logo pela proposição 4.2 $B_n \in \mathbf{B}$. Assim, $\tau(B_{n+1}) - \tau(B_n) = 1$ e portanto exatamente 1 triciclo de B_{n+1} passa pelo vértice $v \equiv B_{n+1} - B_n$.

Pela hipótese de indução, B_n é uma das seguintes composições:

- $B_n = H_3(a,b,S)$

  Assumimos, sem perda de generalidade, que $a \to b \to S \to a$.

  Temos 4 possíveis relações de adjacência entre a,b e v:

(1) $v \to a$, $b \to v$

Como v é neste caso equivalente aos vértices de S, temos $B_{n+1} = H_3(a,b,S+v)$, sendo que S+v é transitiva pela proposição 4.1.

(2) $v \to a$, $v \to b$

Aqui não é possível que $v \to S$, caso contrário B_{n+1} não seria hamiltoniano. Assim existe ao menos um $s \in S$ tal que $s \to v$, e como cada tal s nos dá um triciclo svbs, ele deve ser único já que apenas 1 triciclo passa por v. Além disso, $s \to S\text{-}s$, pois se $\exists\, s' \in S$ com $s' \to s$, teríamos um segundo triciclo s'svs'por v.

Portanto, temos $B_{n+1} = \beta_5(a,b,s\ ,\ S\text{-}s,v)$, já que seus vértices cumprem as três condições de definição dos torneios β:

(i) $a \to b \to s \to a$

(ii) $v \to S\text{-}s$

(iii) $S\text{-}s \to a$; $b,s \to S\text{-}s$

$v \to a,b$; $s \to v$

(3) $a \to v$, $b \to v$

De forma análoga ao caso anterior, aqui $\exists!\, s \in S$; $v \to s'$, e temos que $S\text{-}s \to s$, de modo que:

(i) $s \to a \to b \to s$

(ii) $S\text{-}s \to v$

(iii) $v \to s$; $a,b \to v$

$S\text{-}s \to s,a$; $b \to S\text{-}s$

o que corresponde a $B_{n+1} = \beta_5(s,a,b\ ,\ v,S\text{-}s)$.

(4) $a \to v$, $v \to b$

Para $n \geq 4$, de modo que $|S| \geq 2$, essa alternativa não é possível, pois cada vértice $s \in S$ nos dará um triciclo distinto passando por v (sempre teremos ou svbs ou vsav).

• $B_n = \beta_{2m-1}(a_1,\ldots,a_m\ ,\ S^{(1)},\ldots,S^{(m-1)})$

Vamos considerar separadamente 3 possibilidades:

(1) $v \to a_1,\ldots,a_m$

Como B_{n+1} é hamiltoniano deve existir $x \in S^{(1)}\cup\ldots\cup S^{(m-1)}$ tal que $x\to v$. Mas se $x \in S^{(i)}$ com $1 \le i < m-1$ teríamos pelo menos dois triciclos, $xva_{i+1}x$ e $xva_{i+2}x$, passando por v, logo $x \in S^{(m-1)}$. E se em $S^{(m-1)}$ houvesse $x'\neq x$ com $x'\to v$, teríamos xva_mx e $x'va_mx'$, portanto $v\to S^{(m-1)}$-x. Além disso, $x\to S^{(m-1)}$-x, senão além de xva_mx teríamos $x'xvx'$ para algum $x' \in S^{(m-1)}$-x.

Assim, $B_{n+1} = \beta_{2(m+1)-1}(a_1,\ldots,a_m,x\ ,\ S^{(1)},\ldots,S^{(m-1)}\text{-}x,v)$, pois temos:

(i) $a_i \to a_{i+1}$ $\quad \forall i=1,\ldots,m-1$; $a_m \to x$

$a_i \to a_1,\ldots,a_{i-2}$ $\quad \forall i=3,\ldots,m$; $x \to a_1,\ldots,a_{m-1}$

(ii) $S^{(i)} \to S^{(1)},\ldots,S^{(i-1)}$ $\quad \forall i=2,\ldots,m-2$

$S^{(m-1)}\text{-}x \to S^{(1)},\ldots,S^{(m-2)}$

$v \to S^{(1)},\ldots,S^{(m-2)},S^{(m-1)}\text{-}x$

(iii) $S^{(i)} \to a_1,\ldots,a_i$; $a_{i+1},\ldots,a_m,x \to S^{(i)}$ $\quad \forall i=1,\ldots,m-2$

$S^{(m-1)}\text{-}x \to a_1,\ldots,a_{m-1}$; $a_m,x \to S^{(m-1)}\text{-}x$

$v \to a_1,\ldots,a_m$; $x \to v$

(2) $a_1,\ldots,a_m \to v$

Seguindo um raciocínio análogo ao caso anterior, temos que $\exists!\ x \in S^{(1)}\cup\ldots\cup S^{(m-1)}$; $v\to x$, sendo que esse x é o receptor de $S^{(1)}$.

Assim, $B_{n+1} = \beta_{2(m+1)-1}(x,a_1,\ldots,a_m\ ,\ v,S^{(1)}\text{-}x,S^{(2)},\ldots,S^{(m-1)})$, já que:

(i) $x \to a_1$; $a_i \to a_{i+1}$ $\quad \forall i=1,\ldots,m-1$

$a_2 \to x$; $a_i \to x,a_1,\ldots,a_{i-2}$ $\quad \forall i=3,\ldots,m$

(ii) $S^{(1)}\text{-}x \to v$

$S^{(2)} \to v,S^{(1)}\text{-}x$

$S^{(i)} \to v,S^{(1)}\text{-}x,S^{(2)},\ldots,S^{(i-1)}$ $\quad \forall i=3,\ldots,m-1$

(iii) $v \to x$; $a_1,\ldots,a_m \to v$

$S^{(1)}\text{-}x \to x,a_1$; $a_2,\ldots,a_m \to S^{(1)}\text{-}x$

$S^{(i)} \to x,a_1,\ldots,a_i$; $a_{i+1},\ldots,a_m \to S^{(i)}$ $\quad \forall i=2,\ldots,m-1$

(3) $\{a_1,\ldots,a_m\}$ não é projetado por v

Como $\{a_1,\ldots,a_m,v\}-v = \{a_1,\ldots,a_m\} = A_m$ é hamiltoniano, pelo lema 4.4 existe um triciclo em $\{a_1,\ldots,a_m,v\}$ passando por v. Esse será portanto o triciclo único de B_{n+1} a passar por v.

Sejam t o transmissor de $S^{(m-1)}$ e r o receptor de $S^{(1)}$, e lembremos que $a_m \to t \to a_1,\ldots,a_{m-1},S^{(1)},\ldots,S^{(m-1)}-t$ e que $a_2,\ldots,a_m,S^{(1)}-r,\ldots,S^{(m-1)} \to r \to a_1$. Vamos então considerar as possíveis relações de adjacência entre t, r e v:

(a) $v\to t$, $r\to v$

Esse caso é impossível, pois como $t\to r$ teremos o triciclo vtrv além daquele que existe em $\{a_1,\ldots,a_m,v\}$.

(b) $v\to t$, $v\to r$

Neste caso devemos ter $v\to a_i$ $\forall i=1,\ldots,m-1$, senão teríamos um triciclo a_ivta_i. Então, como v não projeta $\{a_1,\ldots,a_m\}$, temos $a_m\to v$. Além disso, $v\to S^{(1)},\ldots,S^{(m-1)}$, pois se existir $x \in S^{(1)}\cup\ldots\cup S^{(m-1)}$ com $x\to v$ teríamos o triciclo xvtx. Logo, $B_{n+1} = \beta_{2m-1}(a_1,\ldots,a_m , S^{(1)},\ldots,S^{(m-2)},S^{(m-1)}+v)$, pois:

(i) $\{a_1,\ldots,a_m\} = A_m$

(ii) $S^{(i)} \to S^{(1)},\ldots,S^{(i-1)}$ $\forall i=2,\ldots,m-2$

$S^{(m-1)}+v \to S^{(1)},\ldots,S^{(m-2)}$

(iii) $S^{(i)} \to a_1,\ldots,a_i$; $a_{i+1},\ldots,a_m \to S^{(i)}$ $\forall i=1,\ldots,m-2$

$S^{(m-1)}+v \to a_1,\ldots,a_{m-1}$; $a_m \to S^{(m-1)}+v$

(c) $t\to v$, $r\to v$

De forma análoga ao caso anterior, teremos $a_2,\ldots,a_m\to v$, $v\to a_1$ e $S^{(1)},\ldots,S^{(m-1)}\to v$.

Assim, temos $B_{n+1} = \beta_{2m-1}(a_1,\ldots,a_m , S^{(1)}+v,S^{(2)},\ldots,S^{(m-1)})$, pois:

(i) $\{a_1,\ldots,a_m\} = A_m$

(ii) $S^{(2)} \to S^{(1)}+v$

$S^{(i)}\to S^{(1)}+v, S^{(2)},\ldots,S^{(i-1)}$ $\forall i=3,\ldots,m-1$

(iii) $S^{(1)}+v\to a_1$; $a_2,\ldots,a_m\to S^{(1)}+v$

$S^{(i)} \to a_1,\ldots,a_i$; $a_{i+1},\ldots,a_m\to S^{(i)}$ $\forall i=2,\ldots,m-1$

(d) $t \to v$, $v \to r$

Neste caso, devemos ter $v \to a_1$ e $a_m \to v$, senão teríamos os triciclos $a_1 v r a_1$ ou $v a_m t v$.

Sejam p o menor inteiro tal que $a_{p+1} \to v$ e q o maior inteiro tal que $v \to a_q$ (como $v \to a_1$ e $a_m \to v$, esses inteiros existem e $q < m$). Então temos os triciclos $v a_p a_{p+1} v$ e $v a_q a_{q+1} v$, mas como há apenas 1 triciclo por v, conclui-se que $p = q$. Logo, $v \to a_1, \ldots, a_p$ e $a_{p+1}, \ldots, a_m \to v$.

Devemos ter também que $v \to S^{(1)}, \ldots, S^{(p-1)}$, pois se $\exists\, s \in S^{(i)}$ com $1 \leq i \leq k\text{-}1$ tal que $s \to v$, isso nos daria um triciclo $s v a_{i+1} s$. Da mesma forma, $S^{(p+1)}, \ldots, S^{(m-1)} \to v$.

Assim, $B_{n+1} = \beta_{2m-1}(a_1, \ldots, a_m\ ,\ S^{(1)}, \ldots, S^{(p-1)}, S^{(p)}+v, S^{(p+1)}, \ldots, S^{(m-1)})$, pois:

(i) $\{a_1, \ldots, a_m\} = A_m$

(ii) $S^{(i)} \to S^{(1)}, \ldots, S^{(i-1)} \quad \forall i = 1, \ldots, p-1$

$S^{(p)}+v \to S^{(1)}, \ldots, S^{(p-1)}$

$S^{(p+1)} \to S^{(1)}, \ldots, S^{(p-1)}, S^{(p)}+v$

$S^{(i)} \to S^{(1)}, \ldots, S^{(p-1)}, S^{(p)}+v, S^{(p+1)}, \ldots, S^{(i-1)} \quad \forall i = p+2, \ldots, m-1$

(iii) $S^{(i)} \to a_1, \ldots, a_i \quad ; \quad a_{i+1}, \ldots, a_m \to S^{(i)} \quad \forall i = 1, \ldots, p-1, p+1, \ldots, m-1$

$S^{(p)}+v \to a_1, \ldots, a_p \quad ; \quad a_{p+1}, \ldots, a_m \to S^{(p)}+v$

Assim conclui-se a demonstração do teorema 5.1.

Teorema 5.2: Dado B_n torneio hamiltoniano, temos:

$B_n \in \mathbf{B} \Leftrightarrow B_n$ tem seqüência de out-degree $1, 1, 2, 3, \ldots, n\text{-}4, n\text{-}3, n\text{-}2, n\text{-}2$.

Demonstr.($\Rightarrow$): pelo teorema 5.1, temos as seguintes possibilidades:

- $B_n = H_3(a,b,S_{n-2})$

Assumindo sem perda de generalidade que $a \to b \to S_{n-2} \to a$, temos od(a) = 1 e od(b) = n-2. Além disso, colocando os vértices da componente transitiva na ordenação natural $s_1, s_2, \ldots, s_{n-2}$, na qual cada um é predecessor de todos os anteriores, temos que s_1 precede apenas a_1, s_2 precede a_1 e s_1, e assim por diante, de modo que $od(s_i) = i$, o que nos fornece a seqüência de out-degree desejada.

- $B_n = \beta_{2m-1}(a_1, \ldots, a_m\ , S^{(1)}, \ldots, S^{(m-1)})$

Temos $od(a_1) = 1$ $od(a_m) = n\text{-}2$. Colocando os demais vértices na seqüência $S^{(1)}, a_2, S^{(2)}, a_3, \ldots, S^{(m-2)}, a_{m-1}, S^{(m-1)}$, onde os vértices dentro de cada $S^{(j)}$ são ordenados do modo natural, e nomeando-os nesta seqüência como $v_1, \ldots, v_{n-2}$, verifica-se facilmente que $od(v_i) = i$, pois se $v_i \in S^{(j)}$ então v_i precede todos os vértices anteriores da seqüência e mais a_1, e se $v_i = a_j$ então v_i precede todos os vértices anteriores exceto a_{j-1}, e mais a_1 e a_{j+1}.

Demonstr.($\Leftarrow$): Dado um vértice v em um torneio T, a cada par de arcos distintos que partem de v (ou equivalentemente, a cada par de sucessores distintos de v) corresponde uma tripla transitiva da qual v é o transmissor (isto é, uma tripla {v,v',v''} de vértices distintos na qual $v \to v', v''$). Assim, o número de triplas transitivas em T nas quais o transmissor é v será $C_{od(v),2}$,isto é, o número de combinações dois a dois de sucessores de v.

Portanto, como a cada tripla transitiva corresponde um único vértice que seja seu transmissor, o número de triplas transitivas em um torneio T_n com seqüência de out-degree $d_1, \ldots, d_n$ será $\sum C_{d_i,2}$. E como cada tripla de T_n é ou uma tripla transitiva ou um triciclo, o número de triciclos em T_n pode ser dado por:

$$\tau(T_n) = C_{n,3} - \sum C_{d_i,2}$$

Assim, como o número de triciclos em um torneio pode ser determinado a partir da sua seqüência de out-degree e a seqüência de out-degree de B_n é igual à do bineutral A_n , temos $\tau(B_n) = \tau(A_n) = n\text{-}2$, logo $B_n \in \mathbf{B}$ c.q.d.

6 - Enumeração dos Torneios em B

Notação: $\mathcal{B}_n \equiv$ {n-torneios hamiltonianos simples com o número mínimo de 3-ciclos}

Proposição 6.1: Para $n \geq 4$, $\#\mathcal{B}_n = F_{n-4}$, onde F_n é o n-ésimo número de Fibonacci.

Demonstr.: Pela caracterização feita, os elementos de $\mathcal{B}_n$ para $n \geq 4$ devem ser n-torneios β-derivados.

Um torneio β_{2m-1}-derivado tem pelo menos m+2 vértices: $a_1,\ldots,a_m,x_1,x_{m-1}$. Como $m \geq 3$, temos $\mathcal{B}_4 = \varnothing$. Além disso, qualquer elemento de $\mathcal{B}_5$ deve ser derivado de $\beta_{2\cdot3-1}$, mas o único derivado possível deste torneio é o próprio β_5, de modo que $\#\mathcal{B}_5 = 1$.

Vamos mostrar agora que $\#\mathcal{B}_n = \#\mathcal{B}_{n-1} + \#\mathcal{B}_{n-2}$ $(n \geq 6)$. Como $\#\mathcal{B}_4 = 0$ e $\#\mathcal{B}_5 = 1$, isso implicará que $\#\mathcal{B}_n = F_{n-4}$ $(n \geq 4)$, como desejado.

Isto será feito particionando $\mathcal{B}_n$, que pode ser descrito como

$$\mathcal{B}_n = \{\, \tilde{\beta}_n \;;\; \tilde{\beta}_n = \beta_{n+k}^{i_1,\ldots,i_k} \text{ onde } k \geq 0 \text{ e } i_j \geq 2 \;\; \forall j \,\}$$

em $\mathcal{B}'_n$ e $\mathcal{B}''_n$, onde

$$\mathcal{B}'_n = \{\, \tilde{\beta}_n \in \mathcal{B}_n \;;\; \tilde{\beta}_n = \beta_{n+k+1}^{2,i_1,\ldots,i_k} \text{ onde } k \geq 0 \text{ e } i_j > 2 \;\; \forall j \}$$

$$\mathcal{B}''_n = \{\, \tilde{\beta}_n \in \mathcal{B}_n \;;\; \tilde{\beta}_n = \beta_{n+k}^{i_1,\ldots,i_k} \text{ onde } k \geq 0 \text{ e } i_j > 2 \;\; \forall j \,\}$$

e mostrando que $\#\mathcal{B}'_n = \#\mathcal{B}_{n-1}$ e $\#\mathcal{B}''_n = \#\mathcal{B}_{n-2}$.

Para provar que $\#\mathcal{B}'_n = \#\mathcal{B}_{n-1}$ definimos $f: \mathcal{B}'_n \to \mathcal{B}_{n-1}$ por $f(\beta_{n+k+1}^{2,i_1,\ldots,i_k}) = \beta_{n-1+k}^{i_1-1,\ldots,i_k-1}$, o que é claramente uma bijeção.

Igualmente, para provar que $\#\mathcal{B}''_n = \#\mathcal{B}_{n-2}$ definimos uma bijeção $g: \mathcal{B}''_n \to \mathcal{B}_{n-2}$ por $g(\beta_{n+k}^{i_1,\ldots,i_k}) = \beta_{n-2+k}^{i_1-1,\ldots,i_k-1}$.

Notação: $\mathbf{B}_n \equiv$ {n-torneios hamiltonianos com o número mínimo de 3-ciclos}

Proposição 6.2: Para $n \geq 4$, $\#\mathbf{B}_n = 2^{n-4}$.

Demonstr.: Da caracterização feita na seção 5 temos que os únicos torneios em $\mathbf{B}_3$ e $\mathbf{B}_4$ são respectivamente $H_3(a,b,c)$ e $H_3(a,b,\{c,d\})$. Vamos então tomar como hipótese de indução que $\#\mathbf{B}_j = 2^{j-4}$ para $4 \leq j \leq n-1$ e estabelecer uma bijeção entre $\mathbf{B}_n$ e $\bigcup_{j=3}^{n-1} \mathbf{B}_j$. Fazendo isso, teremos provado que $\#\mathbf{B}_n = \#\bigcup_{j=3}^{n-1} \mathbf{B}_j$ = $1+2^0+2^1+\ldots+2^{n-5} = 2^{n-4}$, como desejamos.

Definiremos $f\colon \mathbf{B}_n \to \bigcup_{j=3}^{n-1} \mathbf{B}_j$ da seguinte forma. Dado $B_n \in \mathbf{B}_n$, temos as seguintes possibilidades:

$B_n =$	$f(B_n) \equiv$
$H_3(a,b,S)$	$H_3(a,b,S\text{-}v) \in \mathbf{B}_{n-1}$, onde S-v é a transitiva com um vértice a menos que S
$\beta(a_1,\ldots,a_m,S^{(1)},\ldots,S^{(m-1)})$, com $\lvert S^{(m-1)} \rvert > 1$	$\beta(a_1,\ldots,a_m,S^{(1)},\ldots,S^{(m-1)}\text{-}v) \in \mathbf{B}_{n-1}$
$\beta(a_1,\ldots,a_m,S^{(1)},\ldots,S^{(k)},\varnothing,\ldots,\varnothing,x_{m-1})$, com $1<k<m-1$ e $S^{(k)} \neq \varnothing$	$\beta(a_1,\ldots,a_{k+1},S^{(1)},\ldots,S^{(k)}) \in \mathbf{B}_{n-m+k}$
$\beta(a_1,\ldots,a_m,S^{(1)},\varnothing,\ldots,\varnothing,x_{m-1})$, sendo que $S^{(1)} \neq \varnothing$	$H_3(a,b,S^{(1)}) \in \mathbf{B}_{n-m+1}$

Definimos agora $g\colon \bigcup_{j=3}^{n-1} \mathbf{B}_j \to \mathbf{B}_n$ como segue. Dado $B_j \in \mathbf{B}_j$, $3 \leq j \leq n-1$, podemos ter:

$B_j =$	$g(B_j) \equiv$
$H_3(a,b,S)$, $j<n-1$	$\beta(a_1,\ldots,a_m,S,\varnothing,\ldots,\varnothing,x_{m-1})$, onde $m \equiv n-j+1$
$H_3(a,b,S)$, $j=n-1$	$H_3(a,b,S+v)$, onde S+v é a transitiva com um vértice a mais que S
$\beta(a_1,\ldots,a_{k+1},S^{(1)},\ldots,S^{(k)})$, $j<n-1$	$\beta(a_1,\ldots,a_m,S^{(1)},\ldots,S^{(k)},\varnothing,\ldots,\varnothing,x_{m-1})$, onde $m \equiv n-j+k$
$\beta(a_1,\ldots,a_{k+1},S^{(1)},\ldots,S^{(k)})$, $j=n-1$	$\beta(a_1,\ldots,a_{k+1},S^{(1)},\ldots,S^{(k)}+v)$

É fácil verificar que f e g são inversas e portanto temos a bijeção desejada.

Referências

[1]: Barros T.E., "Homotopia Regular de Grafos", tese de mestrado, Departamento de Matemática IMECC-UNICAMP (1990).

[2]: Beinek L.M. and Reid K.B., "Tournaments, Selected Topics in Graph Theory", Academic Press, New York (1979).

[3]: Burzio M. and Demaria D.C., "A normalization Theorem for regular homotopy of finite directed graphs", Rend.Circ.Mat.Palermo, (2), 30 (1981), 255-286.

[4]: Burzio M. and Demaria D.C., "The first normalization theorem for regular homotopy of finite directed graphs", Rend.Ist.Mat.Univ.Trieste, 13 (1981), 38-50.

[5]: Burzio M. and Demaria D.C., "Duality theorems for regular homotopy of finite directed graphs", Rend.Circ.Mat.Palermo, (2), 31 (1982), 371-400.

[6]: Burzio M. and Demaria D.C., "The second and third normalization theorems for regular homotopy of finite directed graphs", Rend.Ist.Mat.Univ.Trieste, 15 (1983), 61-82.

[7]: Burzio M. and Demaria D.C., "Homotopy of polyedra and regular homotopy of digraphs", Atti II° Conv.Topologia, Suppl.Rend.Circ.Mat.Palermo, (2), 12 (1986), 189-204.

[8]: Burzio M. and Demaria D.C., "On simply disconnected tournaments", Ars Combin. 24 A (1988), 149-161.

[9]: Burzio M. and Demaria D.C., "Characterization of tournaments by coned 3-cycles", Acta Univ.Carolin., Math.Phys. 28 (1989), 25-30.

[10]: Burzio M. and Demaria D.C., "On Classification of Hamiltonian Tournaments", Acta Universitatis Caroline - Mathematica at Physica, vol.29, n.2 (1988), 3-14.

[11]: Burzio M. and Demaria D.C., "Hamiltonian Tournaments with the least number of 3-cycles", J.Graph Theory, vol.14, n.6 (1990), 663-672.

[12]: Las Vergnas M., "Sur le nombre de circuit dans un tournoi fortement connex", Cahiers du CERO, Bruxelles 17 (1975), 261-265.

[13]: Lima N.A., "Uma Classificação para os Torneios Hamiltonianos", Tese de Mestrado, Departamento de Matemática, IMECC-UNICAMP, 1995.

[14]: Moon J.W., "On Subtournaments of tournament", Canad.Math.Bull. 9 (1966), 297-301.

[15]: Douglas R.J., "Tournaments that admit exactly one hamiltonian circuit", Proc.London Math.Soc. 21 (1970), 716-730.

[16]: Garey M.R., "On enumerating tournaments that admit exactly one hamiltonian circuit", J.Combin.Theory, Ser.B, 13 (1972), 266-269.

[17]: Demaria D.C. and Kiihl J.C.S., "On the simple quotients of tournaments that admit exactly one hamiltonian cycle", Atti Accad.Scienze Torino, 124 (1990), 94-108.

[18]: Demaria D.C. and Kiihl J.C.S., "Some remarks on the enumeration of the Douglas tournaments", Atti Accad.Scienze Torino, 124 (1990), 169-185.

[19]: Fernandes V., "Uma caracterização dos torneios hamiltonianos com o número mínimo de triciclos", Tese de Mestrado, Departamento de Matemática, IMECC-UNICAMP (1995).