DOIS TEOREMAS DA TEORIA DA MEDIDA E APLICAÇÕES ÀS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Maria Lúcia Bontorim de Queiróz

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação da Universidade Estadual de Campinas como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Orlando Francisco Lopes

CAMPINAS

1976

Meus agradecimentos ao
Prof. Dr. ORLANDO FRANCISCO LOPES
pelo apoio e dedicação com que me
orientou.

Í N D I C E

INTRODUÇÃO

Neste trabalho estudaremos alguns teoremas de teoria da medida que se aplicam a problemas de equações diferenciais ordinárias e teoria do controle.

Um deles será demonstrado no capítulo I e afirma que se $f(t,x)$ é uma função que satisfaz as condições de Carathéodory e $x(t)$ é uma função contínua, então $f(t,x(t))$ é mensurável. Esse teorema é usado na demonstração de existência de soluções generalizadas de equações diferenciais ordinárias, e muitas vezes nem é mencionado. Nessa parte o instrumento básico utilizado é o teorema de Lusin encontrado em [2].

No capítulo II estudaremos um teorema de Liapunov que afirma que se I é um intervalo compacto da reta, $y: I \to \mathbb{R}^n$ é uma função integrável e limitada, e $E \subset I$ é mensurável, o conjunto dos pontos do $\mathbb{R}^n$ do tipo $\int_E y(t)dt$ é compacto e convexo. Essa demonstração será baseada na existência de uma família totalmente ordenada de subconjuntos mensuráveis de I. A contrução de tal família será feita com o auxílio de um "Teorema do Valor Intermediário" para funções de conjuntos totalmente aditivas e não atômicas.

Como aplicação do teorema de Liapunov mostraremos que o conjunto atingível num problema de controle linear é convexo.

CAPÍTULO I

Iniciaremos este capítulo com algumas difinições e resultados sobre a mensurabilidade de funções.

Como aplicação, na segunda parte demonstraremos um teorema que garante a existência e unicidade de solução para uma equação diferencial do tipo $\dot{x} = f(t,x)$ onde f é uma função que satisfaz as condições de Carathéodory.

I - 1 <u>Sobre a mensurabilidade de certas funções</u>

<u>Definição</u> 1.1

Uma função ϕ, finita quase sempre em um conjunto mensurável $E \subset \mathbb{R}^n$, tem <u>S-propriedade</u> em E se para qualquer número $\varepsilon > 0$ existe um conjunto fechado $F \subset E$ com $m(E-F) \leq \varepsilon$ tal que a restrição de ϕ a F é uma função contínua.

<u>Teorema</u> 1.1 (Teorema de Lusin)

Seja ϕ uma função finita quase sempre em um conjunto mensuravél $E \subset \mathbb{R}^n$. Uma condição necessária e suficiente para que ϕ seja mensurável é que ϕ tenha S-propriedade em E. [2]

Vamos considerar, no que se segue, B um conjunto mensurável contido no espaço s-dimencional $\mathbb{R}^s$ e $g(u_1,\ldots,u_n,x)$ uma função definida no produto cartesiano $\mathbb{R}^n \times B$ e com valores em $\mathbb{R}$.

Definição 1.2

Nas condições acima, g é chamada uma N-função se:

i) g é contínua com respeito à n-upla $(u_1,\ldots,u_n) \in \mathbb{R}^n$ para quase todo $x \in B$.

ii) g é mensurável com respeito a $x \in B$ para qualquer ponto $(u_1,\ldots,u_n) \in \mathbb{R}^n$ fixado.

Denotaremos por A o conjunto de medida nula, eventualmente vazio, dos pontos de B para os quais g não é contínua com respeito a $(u_1,\ldots,u_n)$.

Definição 1.3

Dizemos que g tem S-propriedade forte se para qualquer $\varepsilon>0$ existe um conjunto fechado $F \subset B$ tal que $m(B-F) < \varepsilon$ e a restrição de g ao conjunto $\mathbb{R}^n \times F$ é uma função contínua com respeito a $(u_1,\ldots,u_n,x)$.

Teorema 1.2

Uma condição necessária e suficiente para que g seja uma N-função é que g tenha S-propriedade forte.

Demonstração:

Condição Suficiente: por hipótese g tem S-propriedade forte em $\mathbb{R}^n \times B$, isto é, para qualquer $k \in \mathbb{N}$ existe um subconjunto fechado F_k de B tal que $m(B-F_k) < \frac{1}{k}$ e a função $g_{/\mathbb{R}^n \times F_k}$ é contínua. Nestas condições temos:

i) g é contínua com respeito a $(u_1,\dots,u_n) \in \mathbb{R}^n$ exceto para um subconjunto $F = B - \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$ de B tal que

$$m(F) = m\left[\bigcap_{k=1}^{\infty} (B-F_k)\right]$$

$\leq m(B-F_k) < \frac{1}{K}$ $\forall k>0$. Portanto g é contínua com respeito a $(u_1,\dots,u_n) \in \mathbb{R}^n$ para quase todo $x \in B$.

ii) Para todo $(u_1,\dots,u_n) \in \mathbb{R}^n$ fixado, $g(\cdot,\cdot,\dots,\cdot,x)$ tem S-propriedade em B. Então, pelo teorema 1.1, g é mensurável com respeito a $x \in B$ para todo $(u_1,\dots,u_n) \in \mathbb{R}^n$ fixado.

Isto mostra que g é uma N-função.

Para mostrar a condição necessária vamos inicialmente supor g definida no produto cartesiano $C_a \times B$ onde $C_a = \{(u_1,\dots,u_n) \in \mathbb{R}^n : |u_i| \leq a,\ i = 1,\dots,n\}$ e vamos denotar por M_1 e M_2 as n-uplas

$(u_1^{(1)},u_2^{(1)},\dots,u_n^{(1)})$ e $(u_1^{(2)},u_1^{(2)},\dots,u_n^{(2)})$ respectivamente.

Seja $\varepsilon>0$ e consideremos E_{ε_m} como sendo o conjunto de todos os pontos $x \in B$ para os quais

$|g(M_1,x) - g(M_2,x)| \leq \frac{1}{3}\varepsilon$ sempre que $|u_i^{(2)}-u_i^{(1)}| \leq \frac{1}{m}$, $i = 1,\dots,n$.

Mostraremos que E_{ε_m} é mensurável. Para isso, vamos considerar o conjunto $E^c_{\varepsilon_m} - A$ onde $E^c_{\varepsilon_m} = B - E_{\varepsilon_m}$ e A é o conjunto de medida nula mencionado na definição 1.2 .

Um ponto x_o está no conjunto $E^c_{\varepsilon_m} - A$ somente se existirem no mínimo dois pontos M_1 e M_2 em C_a tais que sejam satisfeitas as desigualdades:

$$|u_i^{(2)} - u_i^{(1)}| \leq \frac{1}{m} \quad \text{e} \quad |g(M_2,x_o) - g(M_1,x_o)| > \frac{1}{3}\,\varepsilon\,.$$

Podemos supor ainda que para os pontos (M_1,x_o) e (M_2,x_o) tais que $x_o \notin A$, M_1 e M_2 tenham coordenadas racionais. Assim, considerando S_i um conjunto do tipo

$S_i = \{x \in B \;/\; |g(M_2,x) - g(M_1,x)| > \frac{1}{3}\varepsilon\}$ onde M_1 e M_2 possuem coordenadas racionais satisfazendo $|u_i^{(2)} - u_i^{(1)}| \leq \frac{1}{m}$, e observando que $S_i \subset E^c_{\varepsilon_m}$ para qualquer $i = 1,2,\ldots$, valem as inclusões

$$E^c_{\varepsilon_m} - A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i \subset E^c_{\varepsilon_m}\,.$$

Como por hipótese $g(M,x)$ é função mensurável de $x \in B$ para qualquer M fixado, S_i é mensurável para qualquer $i = 1,2,\ldots$ e portanto $\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$ é mensurável.

Ainda, sendo A um conjunto de medida de Lebesgue nula, segue que $E^c_{\varepsilon_m}$ é mensurável.

Logo E_{ε_m} é mensurável.

No que se segue vamos considerar:

1 - <u>B é limitado</u>.

Da definição de E_{ε_m}, $m = 1,2,\dots$, vem que

$E_{\varepsilon_1} \subset E_{\varepsilon_2} \subset \dots \subset E_{\varepsilon_m} \subset \dots$.

Chamemos $E_o = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_{\varepsilon_m}$ e $F_o = B - E_o$.

Da mensurabilidade de B e de E_o segue que F_o é mensurável. Ainda, $F_o \subset A$, pois se $x_o \notin A$ então $g(M,x_o)$ é contínua e portanto, como C_a é compacto, $g(M,x_o)$ é uniformemente contínua com respeito a M no cubo C_a.

Logo,

$\exists N \in \mathbb{N}$ / $\forall m \geq N$, $|g(M_2,x_o)-g(M_1,x_o)| \leq \frac{1}{3}\varepsilon$ $\forall \varepsilon > o$ dado, quando $|u_i^{(2)} - u_i^{(1)}| \leq \frac{1}{m}$.

Assim, para m suficientemente grande, $x_o \in E_{\varepsilon_m}$, donde $x_o \notin F_o$.

Logo $F_o \subset A$ e portanto $m(F_o) = 0$.

Agora, dado $\eta > o$ existe $m_o(\varepsilon,\eta)$ tal que para qualquer par de pontos M_1, M_2 em C_a, a desigualdade $|u_i^{(2)} - u_i^{(1)}| \leq \frac{1}{m_o}$ implica a desigualdade

$|g(M_2, x) - g(M_1,x)| \leq \frac{1}{3}\varepsilon$ para qualquer $x \in E_{\varepsilon_{m_o}}$.

Como $m(F_o) = 0$ temos que $m(E_{\varepsilon_{m_o}}) > m(B) - \frac{1}{2}\varepsilon\eta$. (1.1)

Consideremos agora o cubo C_a dividido em $q = p^n\, m_o^n$

cubos iguais $d_1,\ldots,d_q$, onde $p = 1 + [a]$, sendo $[a]$ o maior número inteiro menor ou igual a $\underline{a}$. Chamemos M_j o centro de cada cubo d_j, $j = 1,\ldots,q$. Da mensurabilidade de $g(M_j,x)$ com respeito a $x \in B$ segue, pelo teorema 1.1, que existe um conjunto fechado $F_j \subset B$ tal que

$$m(F_j) > m(B) - \frac{1}{2q}\,\varepsilon\eta \qquad (1.2)$$

e a restrição de $g(M_j,x)$ ao conjunto $\mathbb{R}^n \times F_j$ é uma função contínua de x. Como B é limitado, segue que $g(M_j,x)$ é função uniformemente contínua de x no conjunto F_j , logo no conjunto $V = \bigcap_{j=1}^{q} F_j$, para todo $j = 1,\ldots q$. Isto significa que dado $\frac{\varepsilon}{3}$, existe $\delta_1(\varepsilon,q) > o$ tal que

$$|g(M_j,x^{(2)}) - g(M_j,x^{(1)})| < \frac{\varepsilon}{3}$$

para quaisquer $x^{(1)}$, $x^{(2)}$ tais que $|x^{(2)}-x^{(1)}| < \delta_1(\varepsilon,q)$. Consideremos o conjunto $V \cap E_{\varepsilon_{m_o}} = E_\varepsilon$ e

$$\delta(\varepsilon,q) = \min\{\delta_1(\varepsilon,q)\ ,\ \frac{1}{m_o}\}.$$

Então no conjunto $C_a \times E_\varepsilon$ é válida a desigualdade

$$|g(M_2,x^{(2)}) - g(M_1,x^{(1)})| < \varepsilon$$

para qualquer par de pontos $(M_2,x^{(2)})$ e $(M_1,x^{(1)})$ do $\mathbb{R}^{n+s}$ tal que $|(M_2,x^{(2)}) - (M_1,x^{(1)})| < \delta\ (\varepsilon,q)$. Ainda,

$$m(B) - m(E_\varepsilon) = m(B-E_\varepsilon)$$

$$= m\left[B - (V \cap E_{\varepsilon_{m_o}})\right]$$

$$= m\left[(B-V) \cup (B-E_{\varepsilon_{m_o}})\right]$$

$$\leq m(B - \bigcap_{j=1}^{q} F_j) + \frac{1}{2}\varepsilon\eta \text{ , por } (1.1).$$

Logo,

$$m(B) - m(E_\varepsilon) \leq m\left[\bigcup_{j=1}^{q} (B-F_j)\right] + \frac{1}{2}\varepsilon\eta$$

$$\leq \sum_{j=1}^{q} m(B-F_j) + \frac{1}{2}\varepsilon\eta$$

$$= \sum_{j=1}^{q} \frac{1}{2q}\varepsilon\eta + \frac{1}{2}\varepsilon\eta = \varepsilon\eta$$

Assim,

$$m(E_\varepsilon) \geq m(B) - \varepsilon\eta \qquad (1.3) ,$$

Embora E_ε dependa tambem de η, no argumento que segue η será mantido fixo. Podemos então suprimí-lo. Consideremos a sequência $\varepsilon_i = \frac{1}{2^{i+1}}$. Denotemos

$E_{\varepsilon_i} = E_i$ e $E = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$.

Temos:

$$m(B) - m(E) = m(B - \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i)$$

$$= m\left[\bigcup_{i=1}^{\infty} (B-E_i)\right]$$

$$\leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{i+1}}\eta \text{ , por } (1.3).$$

Logo,

$$m(E) > m(B) - \frac{\eta}{2} \qquad (1.4) .$$

A função g é contínua no produto cartesiano $C_a \times E$.

De fato: dado $\gamma > o$, seja $i = i(\gamma)$ tal que $\varepsilon_i \leq \gamma$.

Sejam $(M_2, x^{(2)})$ e $(M_1, x^{(1)})$ em $C_a \times E$ tais que

$|(M_1, x^{(1)}) - (M_2, x^{(2)})| < \delta(\varepsilon_i) = \delta(\gamma)$.

Então $|g(M_2, x^{(2)}) - g(M_1, x^{(1)})| < \varepsilon_i \leq \gamma$,

pois $x^{(1)}$ e $x^{(2)}$ estão em E_i, para todo i,

$i = 1, 2, \ldots$.

Logo g é contínua no conjunto $C_a \times E$.

Seja $V_1 \subset V_2 \subset \ldots$ uma sequência crescente de cubos tal que $V_i \subset \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2, \ldots$ e $\bigcup_{i=1}^{\infty} V_i = \mathbb{R}^n$.

Provamos anteriormente que dado $\eta > o$, existe um conjunto mensurável $E_i \subset B$ tal que $m(E_i) > m(B) - \frac{\eta}{2^{i+1}}$, sendo g contínua no produto cartesiano $V_i \times E_i$ para qualquer $i = 1, 2, \ldots$.

Então g é contínua no produto cartesiano $\mathbb{R}^n \times G$ onde $G = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$ e é válida a desigualdade

$m(G) > m(B) - \frac{\eta}{2}$.

Como $m(G) < \infty$, existe um conjunto fechado $F \subset G$ tal que $m(F) > m(G) - \frac{\eta}{2}$ e portanto $m(F) > m(G) - \eta$.

Obviamente g será contínua no conjunto $\mathbb{R}^n \times B$.

Assim, g tem S-propriedade forte no conjunto $C_a \times B$.

2 - <u>Caso geral</u> - <u>B qualquer</u>

Seja $\mathcal{P}$ uma partição do espaço $\mathbb{R}^s$ em uma família enumerável de cubos D_i de igual medida, os quais não se interceptam a não ser nos bordos.

Aplicando o resultado anterior a cada conjunto limitado $D_i \cap B$, obtemos uma família $\{F_i\}_{i=1}^{\infty}$ de conjuntos fechados tal que para todo $i = 1,2,\dots$ a restrição de g a cada conjunto $\mathbb{R}^n \times F_i$ é contínua e

$m(F_i) > m(D_i \cap B) - \frac{\eta}{2^i}$.

Assim g é contínua no conjunto $\mathbb{R}^n \times F$, onde $F = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$.

Pela construção de $\mathcal{P}$, a família $\{F_i\}_{i=1}^{\infty}$ é localmente finita e como cada F_i é fechado segue que F é fechado.

Ainda,

$$m(B-F) = m\left[\bigcup_{i=1}^{\infty} (D_i \cap B) - \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right]$$

$$= m\{\bigcup_{i=1}^{\infty} \left[(D_i \cap B) - F_i\right]\}$$

$$\leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\eta}{2^i} = \eta .$$

Logo $m(F) > m(B) - \eta$.

Portanto g tem S-propriedade forte em $\mathbb{R}^n \times B$.

cqd.

<u>Teorema</u> 1.3

Se g é uma N-função, então para quaisquer funções $v_1, v_2, \dots, v_n$ de $x \in B$, mensuráveis e finitas quase sempre, a função $g(v_1(x), v_2(x), \dots, v_n(x), x)$ é mensurável em B.

Demonstração:

Por hipótese g é uma N-função. Pelo teorema 1.2 vem que g tem S-propriedade forte em $\mathbb{R}^n \times B$, isto é, para qualquer $\varepsilon > o$, existe um conjunto fechado $F \subset B$ tal que $m(B-F) < \frac{\varepsilon}{2}$ e a restrição de g ao conjunto $\mathbb{R}^n \times F$ é contínua.

Como $v_1(x), v_2(x), \ldots, v_n(x)$ são mensuráveis e finitas quase sempre em B segue, pelo teorema 1.1, que existem conjuntos fechados $E_1, E_2, \ldots, E_n$ contidos em B tais que $m(B-E_i) < \frac{\varepsilon}{2n}$ e a restrição de v_i ao conjunto E_i é contínua, para qualquer $i = 1, \ldots, n$.

Logo, a restrição da função $g(v_1(x), \ldots, v_n(x), x)$ ao conjunto $F \cap (\bigcap_{i=1}^{n} E_i)$ é contínua e

$$m(B-F \cap (\bigcap_{i=1}^{n} E_i)) = m\left[(B-F) \cup (B-E_1) \cup \ldots \cup (B-E_n)\right]$$

$$\leq m(B-F) + m(B-E_1) + \ldots + m(B-E_n)$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + n\frac{\varepsilon}{2n} = \varepsilon .$$

Satisfazendo assim as condições do teorema 1.1, $g(v_1(x), \ldots, v_n(x), x)$ é uma função mensurável de x, para qualquer $x \in B$, como queríamos.

I - 2 Aplicação à Teoria de Equações Diferenciais

Vamos estabelecer inicialmente algumas definições, notações e alguns teoremas que utilizaremos no desenvolvimento desta parte.

<u>Definição</u> 2.1

Seja X um espaço de Banach. Um conjunto $A \subset X$ é <u>convexo</u> se para quaisquer $x,y \in A$ e $t \in \mathbb{R}$ tal que $0 \leq t \leq 1$, $tx + (1-t)y \in A$.

<u>Definição</u> 2.2

Sejam X e Y espaços de Banach. Uma função $f: X \rightarrow Y$ é <u>compacta</u> se para cada conjunto limitado $A \subset X$, o conjunto $f(A)$ é relativamente compacto em Y.

<u>Definição</u> 2.3

Uma aplicação $f: X \rightarrow Y$ compacta e contínua é chamada <u>completamente contínua</u>.

<u>Definição</u> 2.4

Chamamos <u>fecho convexo</u> de um conjunto A , à intersecção de todos os conjuntos fechados convexos que o contêm.

<u>Teorema 2.1</u> (Teorema de Mazur)

Seja A um subconjunto de um espaço de Banach X. Se A é relativamente compacto em X, então o fecho convexo de A é compacto em X. [4]

Teorema 2.2 (Teorema do ponto fixo de Schauder)

Se A é um subconjunto convexo e compacto de um espaço de Banach X e f uma aplicação contínua de A em A, então f tem um ponto fixo em A. [1]

Corolário 2.1

Se A é um subconjunto convexo, fechado e limitado de um espaço de Banach X e f uma aplicação completamente contínua de A em A, então f tem um ponto fixo em A.

Demonstração

Como A é fechado e convexo, o fecho convexo B de $f(A)$ está em A.
Então, pelo teorema 2.1, B é compacto.
Ainda mais,
$f(B) \subset f(A) \subset B$
Portanto, pelo teorema 2.2, a aplicação $f: B \longrightarrow B$ tem um ponto fixo em B, o que completa a prova.

No que se segue, denotaremos por $C(D,\mathbb{R}^n)$ o espaço das funções contínuas $f: D \longrightarrow \mathbb{R}^n$, onde D é um subconjunto compacto do espaço $\mathbb{R}^m$ e consideraremos em $C(D,\mathbb{R}^n)$ a norma

$$\|f\| = \sup_{x \in D} |f(x)| \quad , \qquad f \in C(D,\mathbb{R}^n) .$$

<u>Definição</u> 2.5

Um subconjunto $A \subset C(D, \mathbb{R}^n)$ é <u>limitado</u> se todos os seus elementos são funções contínuas uniformemente limitadas.

<u>Definição</u> 2.6

Uma sequência de funções $\{\phi_n, n = 1,2,\ldots\}$ em $C(D,\mathbb{R}^n)$ é dita <u>equicontínua</u> se para qualquer $\varepsilon > o$, existe um $\delta > o$ tal que

$|\phi_n(x) - \phi_n(y)| < \varepsilon \quad , \quad n = 1,2,\ldots \quad ,$

se $|x-y| < \delta$, para quaisquer x,y em D.

<u>Teorema</u> 2.3 (Teorema de Arzela-Ascoli)

Uma sequência equicontínua uniformemente limitada de funções em $C(D,\mathbb{R}^n)$ tem uma subsequência que converge uniformemente em D. [3]

<u>Definição</u> 2.7

Sejam X e B espaços de Banach e $F \subset X$.
A transformação $T: F \rightarrow B$ é uma <u>contração</u> em F se existe um número λ, $o \leq \lambda < 1$, tal que

$|Tx - Ty| \leq \lambda |x-y| \quad , \quad x,y \in F$.

A constante λ é chamada <u>constante de contração</u> de T em F.

Teorema 2.4 (Princípio da Contração de Banach - Cacciopoli)

Se A é um subconjunto féchado de um espaço de Banach e T: A $\longrightarrow$ A uma contração em A, então T admite um único ponto fixo $\bar{x}$ em A.

Ainda mais, para qualquer $x_o \in A$, a sequência $\{x_{n+1} = Tx_n \;,\; n = 0,1,2,\ldots\}$ converge a $\bar{x}$ quando $n \to +\infty$ e

$|\bar{x} - x_n| \leq \dfrac{\lambda^n |x_1 - x_o|}{1-\lambda}$, onde $\lambda < 1$ é a constante de contração de T em A. [5]

Extensão do Conceito de Equação Diferencial

Consideremos um subconjunto aberto $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ e uma aplicação f de D no $\mathbb{R}^n$ não necessariamente contínua.

Definição 2.8

Uma função f satisfaz as condições de Caratheódory em D se:

i) f é mensurável com respeito a t para cada x fixado.

ii) f é contínua com respeito a x para cada t fixado.

iii) para cada conjunto compacto $U \subset D$, existe uma função integrável $m_U(t)$ tal que

$|f(t,x)| \leq m_U(t) \quad , \quad (t,x) \in U$.

Definição 2.7

Se t é um escalar, D um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^{n+1}$ e $f: D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função que satisfaz as condições de Carathéodory, podemos definir como equação diferencial uma relação da forma

$$\dot{x}(t) = f(t,x(t)) \qquad (2.1)$$

Dizemos que $\dot{x}(t)$ é uma solução de (2.1) em um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$, se $x(t)$ é uma função absolutamente contínua em I, $(t,x(t)) \in D$ para todo $t \in I$ e $\dot{x}$ satisfaz (2.1) em I exceto para um conjunto de medida de Lebesgue nula.

Lema 2.1

Uma função contínua $x: I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é solução da equação (2.1) satisfazendo $x(t_o) = x_o$ para algum $t_o \in I$ se e somente se $x(t)$ satisfaz a equação integral

$$x(t) = x_o + \int_{t_o}^{t} f(s,x(s))ds \qquad (2.2)$$

Demonstração:

Se $x(t)$ é uma função absolutamente contínua que satisfaz (2.1) quase sempre com $x(t_o) = x_o$, então

$$x(t) = x(t_o) + \int_{t_o}^{t} \dot{x}(s)ds$$

e portanto

$$x(t) = x_o + \int_{t_o}^{t} f(s,x(s))ds .$$

Obviamente, se $x(t)$ satisfaz (2.2), então $x(t_o) = x_o$. Alem disso, como $x(t)$ é contínua em I, concluimos que $f(t,x(t))$ é mensurável em I. Como $f(t,x(t))$ é dominada por uma função integrável em cada compacto de D segue que, $f(t,x(t))$ é integrável em I. Assim $x(t)$ é absolutamente contínua em I e satisfaz (2.1) a menos de um conjunto de medida de Lebesgue nula contido em I.

cqd.

Teorema 2.4 (Existência e Unicidade)

Seja $f: D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma função que satisfaz as condições de Carathéodory em D. Então para cada ponto $(t_o,x_o) \in D$ existe uma solução da equação (2.1) passando por (t_o,x_o). Alem disso, se para cada conjunto compacto $U \subset D$ existe uma função integrável $k_U(t)$ tal que

$$|f(t,x)-f(t,y)| \leq k_U(t)|x-y| , \quad (t,x) \in U, \quad (t,y) \in U,$$

então tal solução é única.

Demonstração:

Seja $(t_o,x_o) \in D$ e consideremos α e β números positivos tais que o conjunto

$B(\alpha,\beta) = \{(t,x): |t-t_o| \leq \alpha,\ |x-x_o| \leq \beta\}$ esteja em D.

Como $B(\alpha,\beta)$ é um subconjunto compacto de D e f satisfaz as condições de Carathéodory em D, existe uma função $m(t) = m_{B(\alpha,\beta)}(t)$ integrável tal que

$$|f(t,x)| \leq m(t) \quad , \ (t,x) \in B(\alpha,\beta) \qquad (2.3)$$

Denotemos $M(t) = \int_{t_o}^{t} m(s)ds$ e $I_\alpha = \{t: |t-t_o| \leq \alpha\}$.

Escolhamos $\bar{\alpha}$ e $\bar{\beta}$, $0 < \bar{\alpha} \leq \alpha$, $0 < \bar{\beta} \leq \beta$ tais que

$|M(t)| \leq \bar{\beta}$ para $t \in I_{\bar{\alpha}}$.

Consideremos tambem o conjunto

$$A = \{\phi \in C(I_{\bar{\alpha}},\mathbb{R}^n): \phi(t_o) = x_o \ , \ |\phi(t_o)-x_o| \leq \bar{\beta},\ \forall t \in I_{\bar{\alpha}}\}$$

A é fechado em $C(I_{\bar{\alpha}},\mathbb{R}^n)$, pois, seja uma sequência $\phi_n \in A$ tal que $\phi_n \longrightarrow \phi$.

Se $\phi_n \in A$ então:

i) $\phi_n(t_o) = x_o$ para todo n.

ii) $|\phi_n(t) - x_o| \leq \bar{\beta}$ para todo n e todo $t \in I_{\bar{\alpha}}$.

Logo $\phi(t_o) = x_o$ e $|\phi(t)-x_o| \leq \bar{\beta}$

Afirmamos que A é convexo.

De fato, considerando a função $\lambda\phi_1 + (1-\lambda)\phi_2$ tal que ϕ_1 , $\phi_2 \in A$ e $0\leq\lambda\leq 1$, temos:

$$(1) \qquad [\lambda\phi_1 + (1-\lambda)\phi_2](t_o) = \lambda\phi_1(t_o) + (1-\lambda)\phi_2(t_o)$$
$$= \lambda x_o + (1-\lambda)x_o = x_o \ .$$

(2) $$|(\lambda\phi_1 + (1-\lambda)\phi_2)(t) - x_o| =$$
$$= |\lambda\phi_1(t) + (1-\lambda)\phi_2(t) - \lambda x_o - (1-\lambda)x_o| \leq$$
$$\leq \lambda|\phi_1(t) - x_o| + (1-\lambda)|\phi_2(t) - x_o| \leq$$
$$\leq \lambda\bar{\beta} + (1-\lambda)\bar{\beta} = \bar{\beta} .$$

Portanto $\lambda\phi_1 + (1-\lambda)\phi_2 \in A$.

Agora, se $\phi \in A$, para qualquer $t \in I_{\bar{\alpha}}$ é válida a desigualdade

$$|\phi(t)| - |x_o| \leq |\phi(t) - x_o| \leq \bar{\beta} .$$

Logo existe $K = \bar{\beta} + |x_o|$ tal que $|\phi(t)| \leq K$ para todo $t \in I_{\bar{\alpha}}$, isto é, as funções $\phi \in A$ são uniformemente limitadas, portanto A é limitado.

A seguir definiremos o operador $T: A \to C(I_{\bar{\alpha}}, \mathbb{R}^n)$ por

$$(T\phi)(t) = x_o + \int_{t_o}^{t} f(s,\phi(s))ds , \quad t \in I_{\bar{\alpha}} .$$

Pelo lema 2.1, as soluções da equação (2.1) coincidirão com os pontos fixos de T em A .

T está bem definido, pois:

(1) As funções $\Phi(t)$ são limitadas, logo finitas, e mensuráveis no intervalo $I_{\bar{\alpha}}$, pois são contínuas.

(2) Por hipótese $f(t,x)$ é contínua com respeito a x para todo $t \in \mathbb{R}$ fixado, donde concluimos que é uma N-função. Portanto, pelo teorema 1.3 vem que $f(t,\phi(t)$ é uma função

mensurável de t em $I_{\bar{\alpha}}$ e por (2.3) segue, por ser $f(t,\phi(t))$ dominada por uma função integrável, que $f(t,\phi(t))$ é integrável em $I_{\bar{\alpha}}$.

É fácil ver que $(T\phi)(t_o) = x_o$ e por (2.3),

$$|(T\phi)(t)-x_o| \leq \int_{t_o}^{t} |f(s,\phi(s))|ds$$

$$\leq \left|\int_{t_o}^{t} m(s)ds\right|$$

$$\leq M(t) \leq \bar{\beta} \quad , \text{ para todo } t \in I_{\bar{\alpha}} \quad ,$$

do que concluimos que $T: A \longrightarrow A$.

Alem disso T é completamente contínuo, pois

i) Seja $\phi_n \in A$ uma sequência tal que $\phi_n \to \phi$ em A.

Da continuidade de $f(t,x)$ com respeito a x para cada t fixado vem que $f(t,\phi_n(t)) \to f(t,\phi(t))$ quando $n \to +\infty$.

Portanto,

$$|(T\phi_n)(t)-(T\phi)(t)| \leq \left|\int_{t_o}^{t} |f(s,\phi_n(s))-f(s,\phi(s))|ds\right|$$

$$\leq \int_{t_o}^{t_o+\bar{\alpha}} |f(s,\phi_n(s))-f(s,\phi(s))|ds .$$

Como

$|f(t,\phi_n(t))| \leq m(t)$ para todo $t \in I_{\bar{\alpha}}$, com $m(t)$ integrável em $I_{\bar{\alpha}}$, segue, pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue, que

$$\int_{t_o}^{t_o+\bar{\alpha}} |f(s,\phi_n(s)) - f(s,\phi(s))|ds \rightarrow 0, \quad \text{donde}$$

$T\phi_n \rightarrow T\phi$ uniformemente.

Então $T: A \rightarrow A$ é contínuo e

ii) Para cada $\phi \in A$,

$$|(T\phi)(t_2)-(T\phi)(t_1)| = \left|\int_{t_o}^{t_2} f(s,\phi(s))ds - \int_{t_o}^{t_1} f(s,\phi(s))ds\right|$$

$$\leq \left|\int_{t_1}^{t_2} |f(s,\phi(s))|ds\right|$$

$$\leq \left|\int_{t_1}^{t_2} m(s)ds\right|$$

$$\leq \left|\int_{t_1}^{t_o} m(s)ds + \int_{t_o}^{t_2} m(s)ds\right|$$

$$\leq |M(t_2) - M(t_1)|$$

para quaisquer t_1, $t_2 \in I_{\bar{\alpha}}$.

Da continuidade de $M(t)$ em $I_{\bar{\alpha}}$ segue que $M(t)$ é uniformemente contínua em $I_{\bar{\alpha}}$.

Logo $T(A)$ é um subconjunto equicontínuo de $C(I_{\bar{\alpha}},\mathbb{R}^n)$ e sendo tambem uniformemente limitado concluimos, pelo teorema (2.3), que $T(A)$ é relativamente compacto.

De i) e ii) vem que $T: A \longrightarrow A$ é completamente contínuo.

Assim, pelo corolário 2.1 do teorema do ponto fixo de Schauder, $T: A \longrightarrow A$ admite um ponto fixo em A, o que demonstra a existência de solução para o problema $\dot{x} = f(t,x)$ com $\phi(t_o) = x_o$.

Vamos agora demonstrar a unicidade.

Por hipótese existe uma função integrável $k_{B(\alpha,\beta)}(t) = k(t)$ tal que

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq k_{B(\alpha,\beta)}(t)\,|x-y| \qquad (2.4)$$

com $(t,x),(t,y) \in B(\alpha,\beta)$.

Denotemos $K(t) = \displaystyle\int_{t_o}^{t} k(s)\,ds$

e suponhamos que, alem das hipóteses anteriores, $\bar{\alpha}$ e $\bar{\beta}$ são tais que $|K(t_o + \bar{\alpha})| < 1$.

Consideremos ϕ e $\bar{\phi}$ em A. Por (2.4) temos:

$$|(T\phi)(t) - (T\bar{\phi})(t)| \leq \left|\int_{t_o}^{t} f(s,\phi(s)) - f(s,\bar{\phi}(s)\,ds\right|$$

$$\leq \left|\int_{t_o}^{t_o+\bar{\alpha}} k(s)\,ds\right| \|\phi - \bar{\phi}\|$$

$$\leq \left|K(t_o + \bar{\alpha})\right| \|\phi - \bar{\phi}\|, \quad \text{para todo } t \in I_{\bar{\alpha}}.$$

Logo,

$$\|T\phi - T\bar{\phi}\| \leq \left|K(t_o + \bar{\alpha})\right| \, \|\phi - \bar{\phi}\|.$$

E como $|K(t_o + \bar{\alpha})| < 1$, a aplicação $T: A \longrightarrow A$ é uma contração. Ainda, como o subconjunto $A \subset C(I_{\bar{\alpha}}, \mathbb{R}^n)$ é fechado, pelo teorema 2.4 o ponto fixo de T em A é único, do que se conclui a unicidade de solução para a equação (2.1) numa vizinhança do ponto (t_o, x_o), satisfazendo $\phi(t_o) = x_o$.

Esta unicidade local implica em unicidade global. De fato, suponhamos $\phi(t)$ e $\psi(t)$ soluções da equação (2.1) definidas nos intervalos I_1 e I_2 respectivamente, satisfazendo $\phi(t_o) = x_o$ e $\psi(t_o) = x_o$.
Sejam $I = I_1 \cap I_2$ e $J = \{t \in I : \phi(t) = \psi(t)\}$.
J é um conjunto aberto, pois se duas soluções ϕ e ψ coincidem num ponto, já provamos que existe uma vizinhança desse ponto na qual elas coincidem. E J é fechado, pois dada uma sequência t_n em J tal que $t_n \longrightarrow t$, quando $n \to +\infty$, como $\phi(t_n) = \psi(t_n)$, da continuidade de ϕ e de ψ, e da unicidade do limite segue que $\phi(t) = \psi(t)$.
Assim J é conexo e não vazio, portanto $J = I$, como queríamos.

———0———

CAPÍTULO II

II - 1 Um teorema de Liapunov para medidas não atômicas

Vamos estabelecer inicialmente algumas difinições e lemas que serão utilizados nesta parte.

Definição 1.1

Dado um conjunto X, uma coleção $\mathcal{U}$ de subconjuntos de X é chamada uma σ-álgebra de conjuntos se:

i) $\emptyset \in \mathcal{U}$ e $X \in \mathcal{U}$.

ii) Se $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ é uma sequência de conjuntos em $\mathcal{U}$ então $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{U}$.

iii) Se $A \in \mathcal{U}$ então $A^c \in \mathcal{U}$.

Definição 1.2

Uma medida m numa σ-álgebra $\mathcal{U}$ de conjuntos de X é uma função real não negativa, definida para todos os conjuntos de $\mathcal{U}$ e satisfazendo:

i) $m(\emptyset) = 0$

ii) $m(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i)$, para qualquer sequência de conjuntos disjuntos de $\mathcal{U}$.

Definição 1.3

Uma σ-álgebra $\mathcal{B}$ num conjunto X é não atômica se para todo conjunto $E \subset X$, $E \in \mathcal{B}$, com $m(E)>0$, existe um subconjunto $E_1 \subset E$, $E_1 \in \mathcal{B}$, tal que $0 < m(E_1) < m(E)$. Neste caso m é uma medida não atômica.

Consideremos X um conjunto, $\mathcal{B}$ uma σ-álgebra de subconjuntos de X e m uma medida não atômica em $\mathcal{B}$. Denotemos por $\mathcal{P}(X)$ o conjunto das partes de X.

Lema 1.1

Se $m(X) < \infty$, existe um conjunto $M \in \mathcal{P}(X) \cap \mathcal{B}$ tal que $0 < m(M) \leq \varepsilon$, para qualquer que seja o número ε positivo dado.

Demonstração:

Como $\mathcal{B}$ é não atômica e $m(X) > 0$ é finita, existe um conjunto $X_1 \in \mathcal{P}(X) \cap \mathcal{B}$ tal que $0 < m(X_1) < m(X)$.

Então

$m(X) = m(X_1) + m(X-X_1)$.

Portanto, ou $0 < m(X_1) < \frac{1}{2}\, m(X)$,

ou $0 < m(X-X_1) < \frac{1}{2}\, m(X)$.

Chamemos de M_1 tal conjunto.

Analogamente, existe um conjunto $M_2 \in \mathcal{P}(X) \cap \mathcal{B}$ tal que $0 < m(M_2) < \frac{1}{2}\, m(M_1)$.

Obtemos assim uma sequência $\{M_k\}_{k=1}^{\infty}$, de conjuntos $M_k \in \mathcal{P}(X) \cap \mathcal{B}$ tal que

$0 < m(M_k) < \frac{1}{2^k}\, m(X)$

Logo, dado $\varepsilon > o$ existe $K \in \mathbb{N}$ e $\bar{k} > K$ tal que $m(M_{\bar{k}}) < \varepsilon$. cqd.

Lema 1.2

Sob as mesmas hipóteses anteriores, dado $\varepsilon > o$ existe uma decomposição $M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_k$ de X em um número finito k de conjuntos disjuntos de $\mathcal{B}$ tal que $m(M_i) < \varepsilon$ para $i = 1,2,\ldots,k$.

Demonstração

Seja $T \in \mathcal{P}(X) \cap \mathcal{B}$.

Chamemos $\gamma(T) = \sup m(Y)$ tal que $Y \in \mathcal{P}(T) \cap \mathcal{B}$, $m(Y) \leq \varepsilon$.

Então $0 \leq \gamma(T) \leq \varepsilon$ e

$\gamma(T) = 0$ se e somente se $m(T) = 0$, pelo Lema 1.1 .

Vamos definir uma sequência de conjuntos X_ν de $\mathcal{P}(X) \cap \mathcal{B}$ com $m(X_\nu) \leq \varepsilon$ da seguinte maneira.

Seja X_1 um elemento arbitrário de $\mathcal{P}(X) \cap \mathcal{B}$ tal que $0 \leq m(X_1) \leq \varepsilon$. Se os conjuntos $X_1, X_2, \ldots, X_\nu$ puderem ser determinados dessa forma, chamemos

$Y_\nu = X - (X_1 \cup \ldots \cup X_\nu)$ e escolhamos

$X_{\nu+1} \in \mathcal{P}(Y_\nu) \cap \mathcal{B}$ tal que

$\frac{1}{2}\gamma(Y_\nu) \leq m(X_{\nu+1}) \leq \varepsilon$.

Seja $M = X - \bigcup_\nu X_\nu$.

Como $M \subsetneq Y_\nu$ segue que

$\gamma(M) \leq \gamma(Y_\nu) \leq 2m(X_{\nu+1})$

e como X_ν são disjuntos,

$$\sum_\nu m(X_\nu) = m(\bigcup_\nu X_\nu) \leq m(X) < \infty . \qquad (1.1)$$

Logo $\sum_\nu m(X_\nu)$ é uma série convergente, do que segue

que $m(X_\nu) \longrightarrow 0$, quando $\nu \to +\infty$.

Portanto $\gamma(M) = 0$ e daí $m(M) = 0$. (1.2)

Ainda por (1.1), existe k tal que $\sum_{\nu \geq k} m(X_\nu) \leq \varepsilon$.

(1.3)

Chamemos $M_k = \bigcup_{\nu \geq k} X_\nu \cup M$.

De (1.2) e (1.3), $m(M_k) \leq \varepsilon$.

Assim, supondo $M_\nu = X_\nu, (\nu = 1,\ldots,k-1)$,

$M_1 \cup \ldots \cup M_k$ será a decomposição pedida.

<u>Lema</u> 1.3 (Teorema do Valor Intermediário)

Para cada y tal que $0 \leq y \leq m(X)$, existe um conjunto $T \in \mathcal{P}(X) \cap \mathcal{B}$ com $m(T) = y$.

<u>Demonstração</u>:

Se $y = 0$, não há o que demonstrar.

Seja $y > 0$ e consideremos uma sequência de números ε_ν tal que $\varepsilon_\nu \to 0$, quando $\nu \to +\infty$.

Pelo Lema 1.2, existe uma decomposição $M_1^1 \cup \ldots \cup M_{k_1}^1$ de X em um número finito de conjuntos disjuntos de

$\mathcal{B}$ tal que $m(M_i) \leq 1$, $(i = 1,\ldots,k_1)$.

Suponhamos $M_o^1 = \emptyset$. Então existe um índice h_1 , $0 \leq h_1 \leq k_1 - 1$, tal que

$$m(M_o^1 \cup \ldots \cup M_{h_1}^1) < y \leq m(M_o^1 \cup \ldots \cup M_{h_1}^1 \cup M_{h_1+1}^1)$$

$$\leq m(M_o^1 \cup \ldots \cup M_{h_1}^1) + \varepsilon_1$$

Da mesma forma existe uma decomposição $M_1^2 \cup \ldots \cup M_{k_2}^2$ de $M_{h_1+1}^1$ em um número finito de conjuntos disjuntos de $\mathcal{B}$ tal que $m(M_i^2) \leq \varepsilon_2$, $(i = 1,\ldots,k_2)$.

Supondo $M_o^2 = \emptyset$, existe um índice h_2 , $0 \leq h_2 \leq k_2 - 1$ tal que

$$m(M_o^1 \cup \ldots \cup M_{h_1}^1 \cup M_o^2 \cup \ldots \cup M_{h_2}^2) < y \leq$$

$$\leq m(M_o^1 \cup \ldots \cup M_{h_1}^1 \cup M_o^2 \cup \ldots \cup M_{h_2}^2 \cup M_{h_2+1}^2) \leq$$

$$\leq m(M_o^1 \cup \ldots \cup M_{h_1}^1 \cup M_o^1 \cup \ldots \cup M_{h_2}^2) + \varepsilon_2 .$$

Continuando o processo, obtemos conjuntos

$M_o^\nu = \emptyset$, M_1^ν ,..., $M_{h_\nu}^\nu$ para todo ν tal que os conjuntos M_o^1 ,..., $M_{h_1}^1$, M_o^2 ,..., $M_{h_2}^2$,...,M_o^ν,...$M_{h_\nu}^\nu$,... são disjuntos e

$$m\Big(\bigcup_{i=o}^{h_1} M_i^1 \cup \bigcup_{i=o}^{h_2} M_i^2 \cup \ldots \cup \bigcup_{i=o}^{h_\nu} M_i^\nu\Big) < y \leq$$

$$\leq m\Big(\bigcup_{i=o}^{h_1} M_i^1 \cup \bigcup_{i=o}^{h_2} M_i^2 \cup \ldots \cup \bigcup_{i=o}^{h_\nu} M_i^\nu\Big) + \varepsilon_\nu .$$

Logo, para ν suficientemente grande temos

$$X = \bigcup_{\nu} \bigcup_{i=o}^{h_\nu} M_i^\nu \quad \text{onde} \quad T \in \mathcal{P}(X) \cap \mathcal{B} \text{ e } m(T) = y \ .$$

Lema 1.4

Consideremos I um intervalo compacto da reta e $\mathcal{U}$ uma σ-álgebra não atômica de subconjuntos de I. Então existe uma família contínua de conjuntos mensuráveis $D_\alpha \subset I$ tal que $o \leq \alpha \leq 1$, $D_{\alpha_1} \subset D_{\alpha_2}$ se somente se $\alpha_1 \leq \alpha_2$ e $m(D_\alpha) = \alpha m(I)$.

Demonstração:

Vamos considerar $m(I) = 1$

Seja o subconjunto denso $J = \{\frac{k}{2^n}\}_{n=1}^{\infty}$, $k = 0,1,\ldots,2^n$, em $[0,1]$

Dado $\alpha \in [0,1]$, consideremos uma sequência crescente de elementos a_n de J tal que $a_n \to \alpha$, quando $n \longrightarrow +\infty$.

Pelo lema 1.3, a função $m: \mathcal{P}(I) \cap \mathcal{U} \longrightarrow [0,1]$ é sobrejetora. Logo existe uma sequência crescente de conjuntos mensuráveis $Y_n = X_{a_n}$ em I tal que $m(Y_n) = a_n$.

Escolhamos $D_\alpha = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$.

Assim $m(D_\alpha) = \lim_{n\to+\infty} m(Y_n) = \lim_{n\to+\infty} a_n = \alpha$ e a família de conjuntos D_α assim construida satisfaz as condições pedidas, como queríamos.

Consideremos agora $\mathcal{B}$ a σ-álgebra dos subconjuntos Lebesgue-mensuráveis de I com a medida de Lebesgue.

<u>Teorema</u> 1.1 (Teorema de Liapunov)

Seja y uma função integrável do intervalo compacto I no $\mathbb{R}^m$ e para cada subconjunto mensurável $E \subset I$ consideremos a função

$$\mathscr{X}_E = \int_E y(t)dt .$$

Então o conjunto $K = \{\mathscr{X}_E : E \subset I,\ E \text{ mensurável}\}$ é convexo no $\mathbb{R}^m$. Ainda mais, se y(t) é limitada, então K é compacto.

<u>Demonstração</u>:

Vamos inicialmente mostrar que dadas uma função integrável $f: I \to \mathbb{R}$ e $\mathcal{U} \subset \mathcal{B}$ uma σ-álgebra não atômica em I, existe uma σ-álgebra $\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}$ na qual

$$\int_E f(t)dt = m(E) \int_I f(t)dt$$

para todo E tal que $E \in \mathcal{U}$, $E \subset I$.

Para construirmos a σ-álgebra $\mathcal{U}_1$ como acima, vamos considerar uma família contínua de conjuntos mensuráveis de $\mathcal{U}$ contidos em I como no Lema 1.4 .

Para simplificar os cálculos suporemos m(I) = 1 e

$$\int_I f(t)dt = 1 .$$

Se α é tal que $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$, então $D_{\alpha-\frac{1}{2}} \subset D_\alpha$ e

$$m(D_\alpha - D_{\alpha-\frac{1}{2}}) = m(D_\alpha) - m(D_{\alpha-\frac{1}{2}}) = \alpha - (\alpha-\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2} .$$

Seja ϕ uma função real definida por

$$\phi(\alpha) = \int_{D_\alpha - D_{\alpha-\frac{1}{2}}} f(t)dt .$$

Como $(D_1 - D_{\frac{1}{2}}) \cap (D_{\frac{1}{2}} - D_o) = \emptyset$, segue que

$$\frac{1}{2}\left[\phi(1) + \phi(\tfrac{1}{2})\right] = \frac{1}{2}\left(\int_{D_1 - D_{\frac{1}{2}}} f(t)dt + \int_{D_{\frac{1}{2}} - D_o} f(t)dt\right)$$

$$= \frac{1}{2}\int_{(D_1 - D_{\frac{1}{2}}) \cup (D_{\frac{1}{2}} - D_o)} f(t)dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_I f(t)dt = \frac{1}{2} .$$

Ainda, da continuidade de ϕ segue que existe α_1 , $\frac{1}{2} \leq \alpha_1 \leq 1$ tal que $\phi(\alpha_1) = \frac{1}{2}$.

Chamemos $E_1 = D_{\alpha_1} - D_{\alpha_1 - \frac{1}{2}}$.

Então ,

$m(E_1) = \frac{1}{2}$ e $\int_{E_1} f(t)dt = \frac{1}{2}$, como queremos, portanto E_1 é um elemento de $\mathfrak{U}_1$.

Em seguida, chamemos $E_2 = I-E_1$; obviamente

$$m(E_2) = \frac{1}{2} \quad e \quad \int_{E_2} f(t)dt = \frac{1}{2}.$$

Analogamente, dado E_1 encontramos $E_3 \subset E_1$ e

$E_4 = E_1 - E_3$; e dado E_2 encontramos $E_5 \subset E_2$ e

$E_6 = E_2 - E_5$, sendo satisfeitas

$$m(E_i) = \frac{1}{4} = \int_{E_i} f(t)dt \text{ para } i = 3,4,5,6 .$$

Continuando, obtemos uma coleção enumerável $\mathcal{S}$ de conjuntos E_β . Consideremos a σ-álgebra $\mathcal{U}_1$ gerada por tais conjuntos. Desde que $\int_E f(t)dt$ e $m(E)$ são medidas definidas sobre $\mathcal{U}_1$ e são iguais nessa σ-álgebra, segue que

$$\int_E f(t)dt = m(E) \text{ para todo } E \in \mathcal{U}_1 .$$

Mostraremos que $\mathcal{U}_1 = [\mathcal{S}] \subset \mathcal{U}$ é não atômica.

Da maneira como foi construido, $\mathcal{S}$ é um sistema de conjuntos tais que se $A, B \in \mathcal{S}$ então

$$\begin{aligned} &\text{i) } A \cap B = \emptyset \text{ ou } A \subset B . \\ &\text{ii) } A^c = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \ , \ A_i \in \mathcal{S} . \end{aligned} \qquad (1.4)$$

Vamos mostrar inicialmente que

$$[\mathcal{S}] = \{ \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i \} , \ S_i \in \mathcal{S} .$$

Como $S_i \in \mathcal{S}$ para qualquer $i = 1,\dots$ e $[\mathcal{S}]$ é a menor σ-álgebra que contem $\mathcal{S}$, basta mostrar que

$\{\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i\}$ é uma σ-álgebra .

De fato:

① $I \in \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$ e $\emptyset \in \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$, pois $I, \emptyset \in \mathcal{S}$.

② Sejam $A_1 = \bigcup_{i=1}^{\infty} S_{i1}$, $A_2 = \bigcup_{i=1}^{\infty} S_{i2}, \ldots, A_n = \bigcup_{i=1}^{\infty} S_{in}$.

Então

$$\bigcup_{j=1}^{n} A_j = \bigcup_{j=1}^{n} (\bigcup_{i=1}^{\infty} S_{ij}) = \bigcup_{i=1}^{\infty} (\bigcup_{j=1}^{n} S_{ij}),\ \bigcup_{j=1}^{n} S_{ij} \in \mathcal{S} .$$

$$\therefore \bigcup_{j=1}^{n} A_j \in \{\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i\} .$$

③ Se $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$ então

$$A^c = (\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i)^c = \bigcap_{i=1}^{\infty} S_i^c = \bigcap_{i=1}^{\infty} (\bigcup_{j=1}^{n} A_{ij}),\ A_{ij} \in \mathcal{S}$$

pois $S_i^c \in \mathcal{S}$.

Portanto

$$A^c = \bigcup_{j \in C} (\bigcap_{i=1}^{\infty} A_{ij}) = \begin{cases} \emptyset \\ \text{ou} \\ \bigcup_{j=1}^{\infty} S_i \ ,\ S_i \in \mathcal{S} \text{ por} \end{cases} \qquad (1.4),$$

onde C é um conjunto enumerável de índices.

Logo $\{\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i\}$ é uma σ-álgebra e $[\mathcal{S}] = \{\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i\}$.

Consideremos agora $A \in [\mathcal{S}]$ tal que $m(A) > 0$. Então

$$0 < m(A) = m(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i) \leq \bigcup_{i=1}^{\infty} m(S_i).$$

Portanto existe i, i = 1,2,..., tal que $m(S_i) > 0$ e $S_i \subseteq A$.

Mas, por construção, existe $R \subset S_i$, $R \in \mathcal{S}$ tal que $0 < m(R) = \frac{1}{2}\, m(S_i) < m(A)$.

Portanto $\mathcal{U}_1$ é uma σ-álgebra não atômica.

Podemos então aplicar raciocínio análogo k vezes, $k \leq m$, obtendo σ-álgebras não atômicas $\mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_k = \mathcal{V}$ tais que $\mathcal{V} = \mathcal{U}_k \subset \mathcal{U}_{k-1} \subset \ldots \subset \mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U} \subset \mathcal{B}$, e obter o seguinte resultado:

(1.5) Dada $f: I \longrightarrow \mathbb{R}^m$ integrável, existe uma σ-álgebra $\mathcal{V} \subset \mathcal{B}$ com

$$\int_E f(t)dt = m(E) \int_I f(t)dt \quad \text{para todo } E \in \mathcal{V},\ E \subset I.$$

Agora podemos mostrar a convexidade do conjunto

$K = \{\mathcal{X}_E : E \in \mathcal{B},\ E \subset I\}$

Consideremos em K os elementos

$$a_1 = \int_{F_1} y(t)dt \quad , \quad a_2 = \int_{F_2} y(t)dt$$

e o ponto intermediário

$\lambda a_1 + (1-\lambda)a_2$ para $0<\lambda<1$.

Seja a função $y^*: I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$y^*(t) = (y(t)\,\chi_{F_1}(t)\ ,\ y(t)\,\chi_{F_2}(t))\ ,$$

onde χ_{F_1} e χ_{F_2} são as funções características de F_1 e F_2 respectivamente.

Seja $\mathcal{V}$ a σ-álgebra obtida por (1.5) onde

$$\int_E y^*(t)dt = m(E) \int_I y^*(t)dt = m(E)\binom{a_1}{a_2} .$$

Seja D_α uma família contínua com $m(D_\alpha) = \alpha$, $0 \leq \alpha \leq 1$, como no lema 1.4 e definamos o conjunto

$$F = (D_\lambda \cap F_1) \cup \left[(I-D_\lambda) \cap F_2\right] .$$

Então,

$$\int_F y(t)dt = \int_{D_\lambda} y(t)\ \chi_{F_1}(t)dt + \int_{I-D_\lambda} y(t)\ \chi_{F_2}(t)dt$$

$$= \lambda \int_{F_1} y(t)dt + (1-\lambda) \int_{F_2} y(t)dt =$$

$$= \lambda a_1 + (1-\lambda)a_2 \quad .$$

Assim K é convexo.

Suporemos a seguir y(t) limitada em I e mostraremos que K é compacto. Faremos a prova por indução à dimensão de K, que é a dimensão do hiperplano no qual K está contido e tem interior não vazio.

Se dim K = 0 não há nada a demonstrar.

Vamos supor que se K tem dimensão menor que s então K é compacto.

Seja K tal que dim K = s.

Como y(t) é limitada, basta mostrar que K é fechado no $\mathbb{R}^n$.

Seja $a \in \partial K$. Consideremos π um hiperplano tal que

$a \in \pi \cap \vec{K}$ e η um vetor unitário normal a π com origem no ponto a, dirigindo-se para o semi-espaço que não contem K.

Consideremos um sistema de coordenadas no $\mathbb{R}^n$ no qual $a = (1,0,\dots,0)$ e $\eta = e_1$.

Sejam $E = \{t \in I \; ; \; y_1(t) > 0\}$,

$$E_o = \{t \in I : y_1(t) = 0\}$$

e o ponto $\int_F y(t)dt \in K$, onde $F = E \cup G$ e $G \subset E_o$.

Então $\int_F y(t)dt = \int_E y(t)dt + \int_G y(t)dt$ e o conjunto

$$\{\int_G y(t)dt\} = \{\int_H y(t) \chi_{E_o}(t)dt \; , \; H \text{ mensurável}, H \subset I\} = K_1 ,$$

pela primeira parte do teorema, é convexo, e $K_1 \subset K$.

Como $\dim K_1 < \dim K$, K_1 é compacto no R^n.

Mostraremos que $a \in K_1$. Para isso, consideremos uma sequência de elementos $a_k \in K$ tal que $a_k \to a$ quando $k \to +\infty$, isto é,

$$\int_{E_k} y_i(t)dt \to 0 \quad , \quad i = 2,\dots,n \; , \quad \text{e}$$

$$\int_{E_k} y_1(t)\, dt \to 1 .$$

Como existe sequência $\int_{E_k} y_1(t)dt$ convergindo para 1 e como o maior valor que $\int_S y_1(t)dt$, $S \subset I$, pode assumir é $\int_E y_1(t)dt$ segue que

$$\int_E y_1(t)dt = 1 \quad . \qquad (1.6)$$

Alem disso, se $\int_{E_k} y_1(t)dt \to 1$ temos:

i) $m\left[(E \cup E_o)^c \cap E_k\right] \to 0$ quando $k \to +\infty$.

Se $m\left[(E \cup E_o)^c \cap E_k\right] > \varepsilon$ para algum $\varepsilon > 0$ dado, existiria subsequência E_{k_n} de E_k tal que para $N \in \mathbb{N}$ e $k_n > N$,

$\int_{(E \cup E_o)^c \cap E_{k_n}} y_1(t)dt > 0$ o que é uma contradição,

pois, pela difinição dos conjuntos E e E_o ,

$$\int_{(E \cup E_o)^c} y_1(t)dt < 0 \ .$$

ii) $m\left[E - (E_k \cap E)\right] \to 0$ quando $k \to +\infty$.

De fato:

$$\int_{E_k} y_1(t)dt = \int_{E_k \cap E^c} y_1(t)dt + \int_{E_k \cap E} y_1(t)dt \to 1 \ .$$

Como

$$\int_{E_k \cap E^c} y_1(t)dt < 0 \quad \text{e} \quad \int_{E_k \cap E} y_1(t)dt > 0 \ ,$$

segue que

$$\int_{E_k \cap E^c} y_1(t)dt \to 0 \quad \text{e} \quad \int_{E_k \cap E} y_1(t)dt \to 1 .$$

De (1.6) ,

$$\int_{E_k \cap E} y_1(t)dt \to \int_E y_1(t)dt .$$

Portanto

$\int_{E - (E_k \cap E)} y_1(t)dt \to 0$ quando $k \to +\infty$, do que se conclue que $m\left[E - (E_k \cap E)\right] \to 0$ quando $k \to +\infty$.

Consideremos a sequência $x_k = \int_{F_k} y(t)dt$ onde $F_k = E \cup (E_o \cap E_k)$.

É claro que $x_k \in K_1$ e como $\int_E y_1(t)dt = 1$, da definição de E_o , segue que $\int_{F_k} y_1(t)dt = 1$.

Alem disso, para $i = 2,\ldots,n$,

$\int_{F_k} y_1(t)dt \to 0$ quando $k \to +\infty$, pois

$$\left|\int_{F_k} y_i(t)dt - \int_{E_k} y_i(t)dt\right| \leq \int_{F_k \Delta E_k} |y_i(t)|dt .$$

Como

$$F_k \Delta E_k = \{\left[E \cup (E_o \cap E_k)\right] \cap E_k^c\} \cup \{\left[E \cup (E_o \cap E_k)\right]^c \cap E_k\}$$

$$= \{\left[(E \cup E_o) \cap (E \cup E_k) \cap E_k^c\} \cup \{\left[E^c \cap (E_o \cap E_k)^c\right] \cap E_k\}$$

$$= \left[(E \cup E_o) \cap (E \cap E_k^c)\right] \cup \left[E^c \cap E_o^c \cap E_k\right]$$

$$= \left[E \cup E_o) \cap (E \cap E_k^c)\right] \cup \left[(E \cup E_o)^c \cap E_k\right] ,$$

de i) e ii) segue que $m(F_k \Delta E_k) \to 0$ quando $k \to +\infty$.

Portanto, como $\int_{E_k} y_i(t)dt \longrightarrow 0$,

$$\int_{F_k} y_i(t)dt \longrightarrow 0 \quad , \quad i = 2,\ldots,n \quad .$$

Logo a sequência $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ em K_1 converge para o ponto $\underline{a}$ quando $k \to +\infty$ e sendo K_1 compacto, $a \in K_1$, donde $a \in K$. Portanto K é compacto.

II - 2 Aplicação à Teoria do Controle

Vamos inicialmente considerar um sistema linear de equações diferenciais.

$\dot{x} = A(t)x + h(t)$ (2.1)

onde $A(t)$ é uma matriz nxn e $h(t)$ é um n-vetor coluna tais que os elementos de $A(t)$ e as componentes de $h(t)$ são funções integráveis em cada subconjunto compacto I de $\mathbb{R}$, sendo $D = (a,+\infty) \times \mathbb{R}^n$ o domínio da função $A(t)x + h(t)$.

Estabeleceremos alguns resultados e lemas sobre

(2.1) os quais utilizaremos no desenvolvimento desta parte.

Assim observamos que

i) $A(t)x + h(t)$ é integrável com respeito a t para cada x fixado.

ii) Sendo linear em x, $A(t)x + h(t)$ é contínua com respeito a x para cada $t \in I$.

iii) Para cada subconjunto compacto $U \subset D$, existe uma função integrável $m_u(t) = |A(t)| \sup_{x \in U} |x| + |h(t)|$ tal que

$|A(t)x + h(t)| \leq m_U(t)$, $(t,x) \in U$.

iv) Para cada subconjunto compacto $U \subset D$ existe uma função integrável $k_U(t) = |A(t)|$ tal que dados $x,y \in \mathbb{R}^n$,

$$|A(t)x + h(t) - A(t)y - h(t)| \leq |A(t)||x-y| = k_U(t)|x-y| ,$$

para todo par $(t,x),(t,y) \in U$.

Estamos então nas condições do teorema 2.4 (cap. I), donde concluímos que existe uma única solução do sistema (2.1) passando por um ponto $(t_o,x_o) \in U$ dado. Pode-se mostrar que essa solução está definida em $(a,+\infty)$.

Lema 2.1

Se $\phi(t)$ é uma matriz solução fundamental do sistema linear homogêneo $\dot{x} = A(t)x$, então a matriz

$\phi^{-1}(t)$ é uma matriz solução fundamental da equação adjunta

$\dot{y} = - yA(t)$, (2.2)

onde y é um n-vetor linha.

<u>Demonstração</u>:

É claro que det $\phi^{-1}(t) \neq 0$ para qualquer t. Mostraremos que $\phi^{-1}(t)$ é solução da equação (2.2). Seja $\psi(t) = \phi^{-1}(t)$ e temos:

$\psi(t)\ \phi(t) = \phi^{-1}(t)\ \phi(t) = I = \phi(t)\ \psi(t)$.

Logo

$\dot{I} = \phi(t)^{\cdot}\psi(t) = \dot{\phi}(t)\ \psi(t) + \phi(t)\ \dot{\psi}(t) = 0$.

Então

$\phi(t)\ \dot{\psi}(t) = - \dot{\phi}(t)\ \psi(t)$ e

$\dot{\psi}(t) = - \phi^{-1}(t)\ \phi(t)\ \psi(t) = - \psi(t)\dot{\phi}(t)\psi(t)$

$= - \psi(t)A(t)\ \phi(t)\ \psi(t) = - \psi(t)\ A(t)$.

Logo

$\phi^{-1}(t) = - \phi^{-1}(t)A(t)$. CQD.

Teorema 2.1 (Fórmula da variação das constantes)

Se $\phi(t)$ é uma matriz solução fundamental do sistema $\dot{x} = A(t)x$, então toda solução do sistema linear $\dot{x} = A(t)x + h(t)$ é dada pela fórmula

$$x(t) = \phi(t) \left[\phi^{-1}(t_o)x_o + \int_{t_o}^{t} \phi^{-1}(s)\ h(s)ds\right]$$

para qualquer número real t_o em $(-\infty,+\infty)$, onde $x(t_o) = x_o$.

Demonstração:

De $\dot{x} = A(t)x + h(t)$ vem que $h(t) = \dot{x} - A(t)x$ e

$x^{-1}h(t) = x^{-1}x - x^{-1}A(t)x$

Pelo lema 2.1,

$\phi^{-1}(t)h(t) = \phi^{-1}(t)\ \dot{x}(t) + \dot{\phi}^{-1}(t)\ x(t).$

Portanto

$$\frac{d}{dt}\left[\phi^{-1}(t)\ x(t)\right] = \phi^{-1}(t)\ h(t).$$

Integrando de t_o a t para quaisquer t_o e t reais:

$$\int_{t_o}^{t} \frac{d}{ds}\left[\phi^{-1}(s)\ x(s)\right]ds = \int_{t_o}^{t} \phi^{-1}(s)\ h(s)ds.$$

Portanto

$$\phi^{-1}(t)\ x(t) - \phi^{-1}(t_o)\ x(t_o) = \int_{t_o}^{t} \phi^{-1}(s)\ h(s) \quad \text{e}$$

$$x(t) = \phi(t)\left[\phi^{-1}(t_o)x_o + \int_{t_o}^{t} \phi^{-1}(s)\ h(s)ds\right],$$

CQD.

Consideremos agora o sistema de equações diferen-ciais

$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + v(t)$ (L)

onde

1. $A(t)$ é uma matriz real $n \times n$, $B(t)$ é uma matriz real $n \times m$ e $v(t)$ é n-vetor coluna real, todos mensuráveis para qualquer $t \in (-\infty, +\infty)$.
2. As mormas $|A(t)|$, $|B(t)|$ e $|v(t)|$ são integráveis em cada subintervalo compacto de tempo t.

3. $u(t)$ é um m-vetor real mensurável e limitado em algum intervalo I: $t_o \leq t \leq t_1$ e com valores em um conjunto não vazio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

O m-vetor $u(t)$ será escolhido para dirigir ou controlar a solução $x(t)$ do sistema (L) de um valor inicial dado x_o, até algum ponto determinado do $\mathbb{R}^n$.

O sistema acima será chamado um processo de controle linear e Ω, o conjunto de controle correspondente.

Definição 2.1

Para cada função $u(t)$: $I \longrightarrow \mathbb{R}$ localmente integrável e cada valor inicial x_o, a resposta ou solução de (L) é o n-vetor real absolutamente contínuo $x(t)$ definido em I, satisfazendo o sistema de equações diferenciais

$\dot{x} = A(t)x + B(t)\,u(t) + v(t)$, com $x(t_o) = x_o$.

Podemos observar que as hipóteses mencionadas acima garantem a existência de solução para o sistema (L) e tal solução satisfaz a fórmula da variação das constantes

$$x(t) = \phi(t)x_o + \phi(t)\int_{t_o}^{t} \phi(s)^{-1}\left[B(s)u(s) + v(s)\right]ds$$

onde $x(t_o) = x_o$ e $\phi(t)$ é a matriz solução fundamental do sistema linear homogêneo $\dot{x} = A(t)x$ com

$\phi(t_o) = I$.

Definição 2.2

Consideremos o sistema de controle (L) com conjunto de controle Ω, valor inicial x_o e todos os controles $u(t) \subset \Omega$ definidos para todo t tal que $t_o \leq t \leq t_1$. Sejam $x(t)$ as correspondentes soluções com condição inicial $x(t_o) = x_o$. Chamamos conjunto atingível $K(L,\Omega,x_o,t_o,t_1)$, ou simplesmente $K(t_1)$, ao conjunto de todos os pontos finais $x(t_1) \in \mathbb{R}^n$. Vamos denotar $K(t_o)$ por x_o .

Teorema 2.2

Consideremos o processo de controle linear (L) no $\mathbb{R}^n$ com conjunto de controle compacto Ω , valor inicial x_o e controles $u(t) \subset \Omega$ definidos no intervalo fechado I: $t_o \leq t \leq t_1$. Então o conjunto atingível $K(t_1)$ é convexo.

Demonstração:

Se Ω contem somente um ponto, todos os controles são iguais. Portanto $K(t_1)$ é convexo.
Se Ω contem mais de um ponto existe um hiperplano π tal que $\pi \cap K(t_1)$ contem dois pontos distintos P_a e P_b de $K(t_1)$. Seja $S \subset \pi$ o segmento de reta com extremidades em P_a e P_b e sejam $u_a(t) \subset \Omega$ e $u_b(t) \subset \Omega$

controles dirigindo x_o aos pontos finais P_a e P_b respectivamente.

Para cada subconjunto mensurável $D \subset I$ consideremos o 2n-vetor

$$W(D) = \begin{bmatrix} \int_D \phi(s)^{-1} B(s) u_a(s) ds \\ \\ \int_D \phi(s)^{-1} B(s) u_b(s) ds \end{bmatrix}$$

onde $\phi(s)$ é uma matriz solução fundamental do sistema homogêneo $\dot{x} = A(t)x$.

Sejam $W(I) = \begin{bmatrix} r_a \\ \\ r_b \end{bmatrix}$ e $W(\emptyset) = \begin{bmatrix} 0 \\ \\ 0 \end{bmatrix}$.

Assim, pelo teorema 1.1 (cap. II) existem conjuntos mensuráveis D_α , $0 \leq \alpha \leq 1$, para os quais

$$W(D_\alpha) = \begin{bmatrix} \alpha r_a \\ \\ \alpha r_b \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad W(I - D_\alpha) = \begin{bmatrix} (1-\alpha) r_a \\ \\ (1-\alpha) r_b \end{bmatrix} .$$

Definamos o controle

$$u(t) = \begin{cases} u_a(t) & \text{para} \quad t \in D_\alpha \ . \\ \\ u_b(t) & \text{para} \quad t \in I - D_\alpha \ . \end{cases}$$

Pelo teorema (2.1) a solução correspondente a $u(t)$ em t_1 será dada por

$$x(t_1) = \phi(t_1)x_o + \phi(t_1)\int_{D_\alpha} \phi^{-1}(s)\left[B(s)\ u_a(s) + v(s)\right]ds$$

$$+ \phi(t_1)\int_{I-D_\alpha} \phi^{-1}(s)\left[B(s)\ u_b(s) + v(s)\right]ds =$$

$$= \phi(t_1)x_o + \phi(t_1)\int_{D_\alpha} \phi^{-1}(s)\ B(s)\ u_a(s)ds +$$

$$+ \phi(t_1)\int_{I-D_\alpha} \phi^{-1}(s)\ B(s)\ u_b(s)ds + \phi(t_1)\int_I \phi^{-1}(s)\ v(s)ds =$$

$$= \phi(t_1)x_o + \alpha r_a\ \phi(t_1) + (1-\alpha)r_b\ \phi(t_1) +$$

$$+ \phi(t_1)\int_I \phi^{-1}(s)\ v(s)ds =$$

$$= \alpha\{\phi(t_1)x_o + \phi(t_1)\int_I \phi^{-1}(s)\left[B(s)\ u_a(s) + v(s)\right]ds\} +$$

$$+ (1-\alpha)\{\phi(t_1)x_o + \phi(t_1)\int_I \phi^{-1}(s)\left[B(s)\ u_b(s) + v(s)\right]ds\} =$$

$$= \alpha P_a + (1-\alpha)P_b .$$

Logo $S \subset K(t_1)$.

CQD.

Observação: Pode-se mostrar ainda que o conjunto $K(t_1)$ é compacto e "varia continuamente" com o tempo.

———0———

BIBLIOGRAFIA

[1] AMANN, H - Lectures on some fixed point theorems
Coleção IMPA, Rio de Janeiro,

[2] BURRILL, C.W. ; KNUDSEN, J.R. - Real Variables
Holt, Rinehart and Winston, New York, 1969.

[3] DIEUDONNÉ, J. - Foundations of modern analysis,
Academic, 1969.

[4] DUNFORD, N; SCHWARTZ, J.T. - Linear Operators
Interscience Publischers, Inc, New York, 1957.

[5] HALE, J.K. - Ordinary Differential Equations,
Wiley - Interscience, New York, 1969.

[6] HAHN, H ; ROSENTHAL, A. - Set Functions,
The University of New Mexico Press, Albuquerque, New Mexico, 1948.

[7] LEE, F.B. ; MARKUS, L. - Foundations of Optimal Control Theory, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1968.

[8] ROYDEN, L.H. - Real Analysis
Macmillan, New York, 1971.

[9] VAINBERG, M. - Variational methods for the study of non-linear operators,
Holden-Day, San Francisco, 1964.