

SOBRE O MÉTODO COMPLEXO DE INTERPOLAÇÃO
PARA 2^n ESPAÇOS DE BANACH

JOÃO IVO BERTOLO



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

CAMPINAS - SÃO PAULO
BRASIL

462s

461/BC



COORDENAÇÃO DOS CURSOS DE PÓS-GRADUAÇÃO

UNICAMP

AUTORIZAÇÃO PARA QUE A UNICAMP POSSA FORNECER, A PRE-
ÇO DE CUSTO, CÓPIAS DA TESE A INTERESSADOS

Nome do Aluno: João Ivo Bertolo

Nº de Identificação:

Endereço para Correspondência: Rua 17- 1664 - R. O. Claro S.P. 13500

Curso: Matemática

Nome do Orientador: Dicesar Lages Fernandez

Título da Dissertação ou Tese: SOBRE O MÉTODO COMPLEXO
DE INTERPOLAÇÃO PARA 2º ESPAÇOS DE BANACH

Data proposta para a Defesa:

11/03/82

(O Aluno deverá assinar um dos 3 itens abaixo)

1) Autorizo a Universidade Estadual de Campinas a partir des-
ta data, a fornecer, a preço de custo, cópias de minha Dissertação ou
Tese a interessados.

17/12/81

Data

João Ivo Bertolo

assinatura do aluno

2) Autorizo a Universidade Estadual de Campinas, a fornecer, a
partir de dois anos após esta data, a preço de custo, cópias de minha
Dissertação ou Tese a interessados.

1/1

Data

assinatura do aluno

3) Solicito que a Universidade Estadual de Campinas me consul-
te, dois anos após esta data, quanto à minha autorização para o forne-
cimento de cópias de minha Dissertação ou Tese, a preço de custo, a in-
teressados.

1/1

Data

De acordo
H. A. Fernandez
Orientador

assinatura do aluno

SOBRE O MÉTODO COMPLEXO DE INTERPOLAÇÃO
PARA 2^n ESPAÇOS DE BANACH

JOÃO IVO BERTOLO

Orientador

DICESAR LASS FERNANDEZ

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação da Universidade Estadual de Campinas como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Matemática.

Março - 1982 .

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

CONTEÚDO

INTRODUÇÃO	i
CAPÍTULO I . O MÉTODO COMPLEXO DE INTERPOLAÇÃO (I)	1
1.1. PRELIMINARES SOBRE ESPAÇOS INTERMEDIÁRIOS	1
1.2. O ESPAÇO $H(IE)$	3
1.3. O ESPAÇO $IE_{\Theta} = [IE]_{\Theta} = [E_k k \in \square]_{\Theta}$	7
1.4. CARACTERIZAÇÃO DE IE_{Θ} ENVOLVENDO NÚCLEO DE POISSON.	9
1.5. TEOREMA DE INTERPOLAÇÃO	23
1.6. INTERPOLAÇÃO DOS ESPAÇOS L^P , COM NORMAS MISTAS.	25
CAPÍTULO II. CONEXÃO ENTRE OS MÉTODOS REAL E COMPLEXO DE INTERPOLAÇÃO	30
2.1. ESPAÇOS DE INTERPOLAÇÃO REAL $IE_{\Theta, P} = (E_k k \in \square)_{\Theta, P}$	30
2.2. CONEXÃO ENTRE OS MÉTODOS REAL E COMPLEXO	34
2.3. APLICAÇÕES	42
CAPÍTULO III. O MÉTODO COMPLEXO DE INTERPOLAÇÃO (II)	45
3.1. GENERALIDADES	45
3.2. O ESPAÇO $\overline{H}(IE)$	46
3.3. O ESPAÇO $IE^{\Theta} = [IE]^{\Theta} = [E_k k \in \square]^{\Theta}$	61
3.4. PROPRIEDADES DOS ESPAÇOS IE^{Θ}	69

CAPÍTULO IV. EQUIVALÊNCIA ENTRE OS ESPAÇOS DE INTERPOLAÇÃO.	76
4.1. A INCLUSÃO $IE_{\Theta} \subset IE^{\Theta}$	76
4.2. A INCLUSÃO $IE^{\Theta} \subset IE_{\Theta}$	80
4.3. A EQUIVALÊNCIA ENTRE IE_{Θ} e IE^{Θ}	96
CAPÍTULO V . DUALIDADE	97
5.1. LEMAS PREPARATÓRIOS	97
5.2. OS TEOREMAS DE DUALIDADE	121
APÊNDICE	156
BIBLIOGRAFIA	173

INTRODUÇÃO

A teoria de interpolação é hoje, sem dúvida, uma área da Análise Funcional. Além de seu valor intrínseco, a teoria de interpolação encontra aplicações em diversos ramos da Matemática, tais como, equações diferenciais, teoria da aproximação, análise numérica, análise harmônica, citando alguns.

Ainda que a primeira idéia de interpolação de operadores lineares seja devida a I. Schur ([1], (1911)), a teoria foi inspirada nos teoremas de I. Marcinkiewicz e M. Riesz. A prova do teorema de Marcinkiewicz deu origem ao método real de interpolação, enquanto a prova dada por G.O. Thorin [1], do teorema de Riesz contém a essência do método complexo de interpolação.

A teoria complexa de interpolação foi introduzida por A. P. Calderón [1] e independentemente por J.L. Lions [1] e, também por S.C. Krein [1]. Entretanto o estudo completo e sistemático foi feito por Calderón in [2].

A idéia de se desenvolver teorias de interpolação para vários espaços de Banach é devida a J.L. Lions [1]. Extensões de métodos reais de interpolação foram feitas por A. Yoshikawa [1] (os S e $\underline{S}$ métodos de Lions-Peetre), G. Sparr [1] (os K e J métodos de Peetre), D.L. Fernandez [1] (os K e J métodos de Peetre) e [3] (os S e $\underline{S}$ métodos de Lions-Peetre). Por outro lado, extensões do método "elementar" complexo foram feitas por J.L. Lions [1], A. Favini [1] e D.L. Fernandez [4]. Porém, não encontramos na literatura extensões de um segundo método "não elementar" complexo introduzido por A. P. Calderón [2], para o estudo da dualidade do método complexo.

As extensões feitas por Lions, Yoshikawa, Favini e Sparr consideram $n+1$ espaços e n parâmetros. Em contraposição as extensões dadas por Fernandez concernem com 2^n espaços e n parâmetros. Esta restrição permite a determinação da equivalência entre os métodos extendidos K e J (D.L. Fernandez [1]) e S e $\bar{S}$ (D.L. Fernandez [3]). Esta forma de extensão permitiu também o estudo da dualidade dos espaços de interpolação para 2^n espaços de Banach gerados pelos métodos K e J . Por outro lado, D.L. Fernandez [4] estuda tão somente a extensão da teoria "elementar" no caso do método complexo.

O objetivo deste trabalho é fazer um estudo razoavelmente completo e sistemático da teoria complexa de interpolação para 2^n parâmetros. Este estudo será aqui desenvolvido seguindo-se as linhas do trabalho de A.P. Calderón [2]. Para darmos uma idéia geral do trabalho passamos a dar uma descrição sucinta do conteúdo dos capítulos desta dissertação.

No capítulo I estudamos sistematicamente um primeiro método complexo de interpolação para 2^n espaços de Banach. O desenvolvimento aqui é inspirado em D.L. Fernandez [4] e J.I. Bertolo - D.L. Fernandez [1]. Um ponto fundamental neste capítulo é o uso das técnicas da k -integral de Poisson (integrais de Poisson múltiplas ou iteradas). Esta técnica permite demonstrar que o método complexo de interpolação é "exato". Isto permite então, melhorar o teorema de interpolação (tipo Riesz-Thorin) de D. L. Fernandez [4]. Aqui aparece a primeira diferença entre a teoria para $n=1$ e $n > 1$. Para $n=1$, isto é, o caso de um par de espaços, a demonstração de que o método complexo é "exato" (a norma M de um operador interpolado é estimada por uma expressão da forma $M_1^{1-\theta} M_2^\theta$) não apresenta

dificuldades. Entretanto, este não é o caso para $n > 1$, que exige o uso das integrais de Poisson múltiplas, para sua demonstração. Quanto aos métodos reais para interpolação de 2^n espaços não sabemos ainda se são ou não exatos. Terminamos este capítulo apresentando um teorema de interpolação do tipo de Riesz-Thorin para espaços L^P com normas mistas.

No capítulo II exibimos algumas conexões entre os métodos real, no sentido de J.L. Lions-Peetre [1] e o complexo, no sentido de A.P. Calderón [1], para vários espaços de Banach, e damos algumas aplicações ao estudo das conexões entre espaços com derivadas mistas dominantes S.M. Nikol'skii [1], espaços de Bessel- Nikol'skii (ver P.I. Lizorkin - S.M. Nikol'skii [1]).

No capítulo III apresentamos um segundo método complexo de interpolação "não elementar" para vários espaços de Banach, seguindo as linhas de A.P. Calderón [2]. Apesar do caráter distinto entre os métodos introduzidos mostraremos, posteriormente, sob certas condições, uma identidade entre os métodos gerados.

O capítulo IV é dedicado essencialmente a demonstrar a equivalência entre os dois métodos complexos para 2^n espaços de Banach introduzidos nos capítulos anteriores. A demonstração desta equivalência mereceu um capítulo à parte devido sua natureza técnica.

No capítulo V estudamos o problema da dualidade entre os espaços de interpolação. Aqui usaremos de modo essencial os dois métodos de interpolação introduzidos.

Esta dissertação é composta também, de um apêndice onde encontram-se vários resultados que nos ajudaram em algumas demonstrações.

Nossa referência para resultados clássicos são, N. Dunford-

J.T. Schwartz [1]; A. Zygmund [1]; E. Hille-R.S. Phillips [1].

Pedimos complacência à aqueles que lerem nosso trabalho por não termos tido a capacidade de tornar certas demonstrações, principalmente nos capítulos IV e V, menos longas e cansativas. Toda sugestão a fim de reduzi-las será muito bem recebida.

Na realização de certas atividades, principalmente as de caráter científico, muitas pessoas direta ou indiretamente dão sua contribuição. Sendo impossível citar a todos, permitam-nos agradecer ao Prof. Dicesar Lass Fernandez pela paciência em ouvir-nos durante longos períodos. Sua orientação foi muito importante para a conclusão deste trabalho.

Finalmente, mas não menos importante, agradecemos a Nativi, Ana Paula, Juliana e Paulo Henrique por entenderem muitas de nossas omissões.

CAPÍTULO I

O MÉTODO COMPLEXO DE INTERPOLAÇÃO (I)

Descrevemos aqui um primeiro método complexo de interpolação para gerar espaços de interpolação entre 2^n espaços de Banach. Este método foi introduzido por D.L. Fernandez [4] e algumas de suas propriedades foram estudadas por J.I. Bertolo-D.L. Fernandez [1]. Este capítulo é fortemente inspirado em J.I. Bertolo-D.L. Fernandez [1] e D.L. Fernandez [4]. Entretanto alguns resultados e a orientação são novos. Faremos aqui o uso sistemático das k -integrais de Poisson (integrais de Poisson múltiplas) uma técnica já utilizada em J.I. Bertolo-D.L. Fernandez [1] (ver também B. Bordin-D.L. Fernandez [1]). O lema 1.4.1 e seu corolário 1.4.2 são obtidos com o auxílio das k -integral de Poisson e, utilizados tanto para obter resultados relativos ao método estudado neste capítulo como nos capítulos ulteriores. Um destes resultados é a proposição 1.4.3 que permite por sua vez melhorar o teorema de interpolação obtido por D.L. Fernandez [4]. Terminamos o capítulo determinando o espaço de interpolação entre os espaços L^P com normas mistas de A. Benedek-R.Panzone [1] e enunciando então um teorema de interpolação do tipo Riesz-Thorin.

1.1. PRELIMINARES SOBRE ESPAÇOS INTERMEDIÁRIOS

1.1.0. Denotaremos por $\square$ o conjunto das n -uplas $k=(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{R}^n$ tais que $k_j=0$ ou 1 ($j=1, \dots, n$). Quando $n=1$ e $n=2$ temos respectivamente,

$$\square = \{0,1\} \quad \text{e} \quad \square = \{(0,0), (1,0), (0,1), (1,1)\}.$$

Denotaremos também, por S_n a n -faixa unitária, isto é, o conjunto das n -uplas $z = (z_1, \dots, z_n)$, em $\mathbb{C}^n$, tais que $0 \leq \operatorname{Re} z_j \leq 1$ e $\operatorname{Im} z_j \in \mathbb{R}$ ($j=1, \dots, n$). Por $\overset{\circ}{S}_n$, entendemos o interior de S_n . Sendo $z_j = x_j + iy_j$ escrevemos $z = x + iy$ onde $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$.

1.1.1. Consideraremos famílias $\mathcal{IE} = (E_k | k \in \square)$ de 2^n espaços de Banach E_k , $k \in \square$ imersos continuamente num mesmo espaço vetorial topológico Hausdorff, V . Famílias deste tipo são chamadas famílias admissíveis de espaços de Banach em relação a V .

Se $\mathcal{IE} = (E_k | k \in \square)$ é uma família admissível de espaços de Banach em relação a V , consideremos sua envoltória linear $\Sigma \mathcal{IE}$, e sua intersecção $\cap \mathcal{IE}$, definidas por,

$$\Sigma \mathcal{IE} = \{x | x \in V, x = \sum_{k \in \square} x_k, x_k \in E_k\}$$

e

$$\cap \mathcal{IE} = \{x | x \in V, x \in E_k, \forall k \in \square\}.$$

Estes espaços são espaços de Banach quando considerados respectivamente com as normas,

$$(1) \quad \|x\|_{\Sigma \mathcal{IE}} = \inf \left\{ \sum_{k \in \square} \|x_k\|_{E_k} \mid x = \sum_{k \in \square} x_k, x_k \in E_k \right\}$$

$$(2) \quad \|x\|_{\cap \mathcal{IE}} = \max \{ \|x\|_{E_k} \mid k \in \square \}.$$

1.1.2. DEFINIÇÃO. Um espaço de Banach X , que satisfaz a condição,

$$(1) \quad \bigcap IE \subset X \subset \sum IE$$

com inclusão contínua, será chamado um espaço intermediário em relação a família admissível $IE = (E_k | k \in \square)$.

1.2. O ESPAÇO $H(IE)$

1.2.1. DEFINIÇÃO. Dada uma família admissível $IE = (E_k | k \in \square)$ de espaços de Banach em relação a V , o $H(IE)$ é definido, como sendo constituído de todas as funções f definidas em S_n com valores em $\sum IE$, contínuas e limitadas em S_n em relação a norma de $\sum IE$, holomorfas em $\overset{\circ}{S}_n$ e tal que $f(k+it) \in E_k$ é E_k -contínua e limitada para todo $k \in \square$.

Sobre o espaço $H(IE)$ definimos

$$(1) \quad \|f\|_{H(IE)} = \max_{k \in \square} \sup_{t \in \mathbb{R}^n} \|f(k+it)\|_{E_k}.$$

Como consequência do lema seguinte, que é uma versão do princípio do módulo máximo para a n -faixa, obtemos que o funcional $\|\cdot\|_{H(IE)}$ define uma norma em $H(IE)$.

1.2.2. LEMA. Sejam F um espaço de Banach e f uma função com valores em F , definida em S_n , contínua e limitada em S_n e holomorfa no interior, $\overset{\circ}{S}_n$, de S_n . Suponhamos que para todo $y \in \mathbb{R}^n$ e $k = (k_1, \dots, k_n) \in \square$,

$$\|f(k+iy)\|_F \leq M.$$

Então,

$$\|f(z)\|_F \leq M,$$

para todo $z = (z_1, \dots, z_n) \in S_n$.

DEMONSTRAÇÃO. Sem perda da generalidade podemos supor que $\|f(z_1, \dots, z_n)\|_F$ converge para zero quando $|z_j| \rightarrow +\infty$, qualquer que seja j entre 1 e n , pois caso contrário, consideremos a função $f(z_1, \dots, z_n) \cdot h_\epsilon(z_1, \dots, z_n)$ onde $h_\epsilon(z_1, \dots, z_n) = \prod_{j=1}^n 1/(1+\epsilon z_j)$ e $\epsilon > 0$.

Provaremos o lema por indução sobre n . Para $n=1$ o lema se reduz a um resultado clássico. Suponhamos então que o resultado seja válido para todo $m \leq n$ e provaremos sua versão para $m=n+1$. Desde que $\|f(z_1, \dots, z_n, z_{n+1})\|_F$ converge para zero quando $|z_j| \rightarrow \infty$ qualquer que seja j , segue que o máximo valor de $\|f(z_1, \dots, z_n, z_{n+1})\|_F$ será assumido na fronteira ∂S_{n+1} , de S_{n+1} . Portanto, qualquer que seja o ponto de máximo, pelo menos uma de suas coordenadas, digamos a r -ésima, é da forma $k_r + iy_r$. Fixando esta coordenada, definimos a função

$$g(z_1, \dots, z_{r-1}, z_{r+1}, \dots, z_{n+1}) = f(z_1, \dots, z_{r-1}, k_r + iy_r, z_{r+1}, \dots, z_{n+1}).$$

Segue imediatamente que a função g é contínua e limitada em S_n . Também, pela proposição A.1, do apêndice segue que g é holomorfa no interior $\overset{o}{S}_n$ de S_n . Desde que,

$$\|g(k_1 + iy_1, \dots, k_{r-1} + iy_{r-1}, k_{r+1} + iy_{r+1}, \dots, k_{n+1} + iy_{n+1})\|_F \leq M$$

pela hipótese de indução concluímos que o máximo valor de

$\|g(z_1, \dots, z_{r-1}, z_{r+1}, \dots, z_{n+1})\|_F$ é assumido em um ponto da forma $k+iy = (k_1, \dots, k_{r-1}, k_{r+1}, \dots, k_{n+1}) + i(y_1, \dots, y_{r-1}, y_{r+1}, \dots, y_{n+1})$.

Sendo $(z_1^0, \dots, z_{r-1}^0, k_r + iy_r, z_{r+1}^0, \dots, z_{n+1}^0)$ um ponto de máximo de $\|f(z)\|_F$ onde $z = (z_1, \dots, z_n, z_{n+1}) \in S_{n+1}$, temos

$$\begin{aligned} \|f(z)\|_F &\leq \|f(z_1^0, \dots, z_{r-1}^0, k_r + iy_r, z_{r+1}^0, \dots, z_{n+1}^0)\|_F \\ &= \|g(z_1^0, \dots, z_{r-1}^0, z_{r+1}^0, \dots, z_{n+1}^0)\|_F \\ &= \|g(k_1 + iy_1, \dots, k_{r-1} + iy_{r-1}, k_{r+1} + iy_{r+1}, \dots, k_{n+1} + iy_{n+1})\|_F \\ &= \|f(k_1 + iy_1, \dots, k_{r-1} + iy_{r-1}, k_r + iy_r, k_{r+1} + iy_{r+1}, \dots, k_{n+1} + iy_{n+1})\|_F \end{aligned}$$

ou seja,

$$\|f(z)\|_F \leq M, \quad \forall z \in S_{n+1}.$$

Fica assim demonstrado o resultado inserido no lema.

1.2.3. THEOREMA. O espaço $H(IE)$ munido da norma,

$$(1) \quad \|f\|_{H(IE)} = \max_{k \in \square} \sup_{t \in \mathbb{R}^n} \|f(k+it)\|_{E_k}$$

é um espaço de Banach.

DEMONSTRAÇÃO. Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $H(IE)$ e $z \in S_n$. Do lema 1.2.2 segue que

$$\begin{aligned}
\|f_n(z) - f_m(z)\|_{\Sigma \mathbb{IE}} &\leq \max_{k \in \square} \sup_{t \in \mathbb{R}^n} \|f_n(k+it) - f_m(k+it)\|_{\Sigma \mathbb{IE}} \\
&\leq \max_{k \in \square} \sup_{t \in \mathbb{R}^n} \|f_n(k+it) - f_m(k+it)\|_{E_k} \\
&= \|f_n - f_m\|_{H(\mathbb{IE})}
\end{aligned}$$

ou seja,

$$(1) \quad \|f_n(z) - f_m(z)\|_{\Sigma \mathbb{IE}} \leq \|f_n - f_m\|_{H(\mathbb{IE})}$$

para todo $z \in S_n$. Isto significa que a sequência $(f_n(z))_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $\Sigma \mathbb{IE}$, para cada $z \in S_n$. Logo $(f_n(z))_{n \in \mathbb{N}}$ converge para um elemento $f(z)$ em $\Sigma \mathbb{IE}$. Ainda, (1) nos garante que a sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente, em S_n , para f e então, f é contínua em S_n e holomorfa em S_n . Também, da convergência uniforme e da limitabilidade de f_n em S_n , conclui-se que f é limitada em S_n .

Agora, para cada $k \in \square$, a desigualdade

$$(2) \quad \|f_n(k+it) - f_m(k+it)\|_{E_k} \leq \|f_n - f_m\|_{H(\mathbb{IE})},$$

implica que a sequência $(f_n(k+it))_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente no espaço de Banach E_k . Desde que E_k está imerso continuamente em $\Sigma \mathbb{IE}$ segue que seu limite em E_k é $f(k+it)$, ou seja, $f(k+it) \in E_k$. Assim $f \in H(\mathbb{IE})$. Finalmente, a desigualdade em (2) nos diz que a sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para f em $H(\mathbb{IE})$, e isto é tudo que necessitávamos demonstrar.

1.3. O ESPAÇO $\mathcal{IE}_\Theta = [\mathcal{IE}]_\Theta = [E_k | k \in \square]_\Theta$

Seja $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) \in \mathbb{R}^n$, de modo que $0 \leq \theta_j \leq 1$ ($j = 1, \dots, n$). Neste caso é usual escrever $0 \leq \Theta \leq 1$.

1.3.1. Dadas uma família admissível $\mathcal{IE} = (E_k | k \in \square)$, de espaços de Banach em relação a um espaço vetorial topológico Hausdorff V , e uma n-upla $0 \leq \Theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) \leq 1$ consideremos o subespaço $\mathcal{IE}_\Theta = [E_k | k \in \square]_\Theta$ de $\Sigma \mathcal{IE}$ definido por

$$(1) \quad \mathcal{IE}_\Theta = \{x \mid x = f(\Theta), \quad f \in H(\mathcal{IE})\}.$$

1.3.2. PROPOSIÇÃO. A função

$$(1) \quad \|x\|_{[E_k | k \in \square]_\Theta} = \|x\|_{\mathcal{IE}_\Theta} = \|x\|_\Theta = \inf\{\|f\|_{H(\mathcal{IE})} \mid x = f(\Theta)\}$$

é uma norma em $\mathcal{IE}_\Theta$.

DEMONSTRAÇÃO. Segue rapidamente do lema 1.2.2 que $x=0$ se $\|x\|_\Theta=0$. A homogeneidade $\|\lambda x\|_\Theta = |\lambda| \cdot \|x\|_\Theta$ e a sub-aditividade $\|x+y\|_\Theta \leq \|x\|_\Theta + \|y\|_\Theta$ seguem sem dificuldade da definição de $\|\cdot\|_\Theta$.

1.3.3. TEOREMA. O espaço $\mathcal{IE}_\Theta$ com a norma $\|\cdot\|_\Theta$ torna-se um espaço de Banach.

DEMONSTRAÇÃO. A aplicação que a cada elemento f de $H(\mathcal{IE})$ associa o elemento $f(\Theta)$ em $\mathcal{IE}_\Theta$ é linear, contínua e sobrejetora. Logo seu

núcleo N_Θ é um subespaço fechado de $H(\mathbb{IE})$ e então, o espaço quociente $H(\mathbb{IE})/N_\Theta$ é um espaço de Banach com a norma usual do espaço quociente. Agora, a aplicação que a cada elemento $f+N_\Theta$ do espaço quociente associa o elemento $f(\Theta)$ em $\mathbb{IE}_\Theta$ está bem definida e é um isomorfismo isométrico. Desde que $H(\mathbb{IE})/N_\Theta$ é um espaço de Banach, segue que $\mathbb{IE}_\Theta$ é também, um espaço de Banach.

1.3.4. PROPOSIÇÃO. O espaço $\mathbb{IE}_\Theta$ é um espaço intermediário em relação a família admissível $\mathbb{IE} = (E_k | k \in \mathbb{Q})$, isto é, as seguintes inclusões

$$(1) \quad \cap \mathbb{IE} \subset \mathbb{IE}_\Theta \subset \Sigma \mathbb{IE}$$

são contínuas.

DEMONSTRAÇÃO. Para a primeira inclusão, consideremos $x \in \cap \mathbb{IE}$ e $f \in H(\mathbb{IE})$ tal que $f(z) = x$, para todos $z \in S_n$. Assim $x \in \mathbb{IE}_\Theta$ e ainda,

$$\|x\|_{\Theta} \leq \|f\|_{H(\mathbb{IE})} = \max_{k \in \mathbb{Q}} \|x\|_{E_k} = \|x\|_{\cap \mathbb{IE}}$$

e então, a continuidade da primeira inclusão está garantida.

Para a segunda inclusão, consideremos $x \in \mathbb{IE}_\Theta$ e $f \in H(\mathbb{IE})$ de modo que, $x = f(\Theta)$. Segue do lema 1.2.2. que

$$\|x\|_{\Sigma \mathbb{IE}} = \|f(\Theta)\|_{\Sigma \mathbb{IE}} \leq \max_{k \in \mathbb{Q}} \sup_{t \in \mathbb{R}^n} \|f(k+it)\|_{E_k} = \|f\|_{H(\mathbb{IE})}$$

Desde que f nas condições acima é arbitrária, segue que,

$$\|x\|_{\Sigma \mathbb{E}} \leq \|x\|_{\Theta}$$

ou seja, a segunda inclusão é contínua.

1.4. CARACTERIZAÇÃO DE $[\mathbb{E}]_{\Theta}$ ENVOLVENDO NÚCLEO DE POISSON.

1.4.0. INTRODUÇÃO. A forma apropriada do núcleo de Poisson para a faixa unitária S_1 pode ser obtida do núcleo de Poisson para o semi-plano através de uma aplicação conforme do semi-plano sobre a faixa.

Explicitamente estes núcleos são:

$$(1) \quad P_0(z, y) = \frac{1}{2} \frac{\operatorname{sen} \pi s}{\cosh \pi(y-t) - \cos \pi s}, \quad z = s+it \quad \text{e} \quad 0 < s < 1,$$

$$(2) \quad P_1(z, y) = \frac{1}{2} \frac{\operatorname{sen} \pi s}{\cosh \pi(y-t) - \cos \pi s}, \quad z = s+it \quad \text{e} \quad 0 < s < 1.$$

Agora, para $k = (k_1, \dots, k_n) \in \square$ definimos o k -núcleo de Poisson para a poli-faixa S_n como sendo,

$$(3) \quad P_k(z, y) = \prod_{j=1}^n P_{k_j}(z_j, y_j)$$

onde $z = (z_1, \dots, z_n)$ com $z_j = x_j + iy_j$, $(j=1, \dots, n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

Para as caracterizações que temos em vista o seguinte lema é fundamental.

1.4.1. LEMA. Para toda função $f \in H(\mathbb{IE})$ e $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ com $0 < \Theta < 1$ temos,

$$(1) \quad \log \|f(\Theta)\|_{\Theta} \leq \sum_{k \in \square} \int_{\mathbb{R}^n} [\log \|f(k+it)\|_{E_k}] P_k(\Theta, t) dt.$$

DEMONSTRAÇÃO. Para cada $k \in \square$, seja g_k uma função infinitamente diferenciável limitada, satisfazendo a condição,

$$(2) \quad g_k(t) \geq \log \|f(k+it)\|_{E_k}.$$

Pela proposição A.2, do apêndice, segue que a função

$$U(z) = \sum_{k \in \square} \int_{\mathbb{R}^n} g_k(t) P_k(z, t) dt$$

é harmônica no interior $\overset{\circ}{S}_n$, de S_n , e contínua em S_n , definindo-se $U(k+it) = g_k(t)$, para todo $k \in \square$. A função U é limitada em S_n pois, g_k é limitada e

$$\sum_{k \in \square} \int_{\mathbb{R}^n} P_k(z, t) dt = \sum_{k \in \square} \prod_{j=1}^n [(1-k_j) + (-1)^{1-k_j} s_j] = 1,$$

onde $z = (z_1, \dots, z_n)$ e $s_j = \operatorname{Re} z_j$, $j = 1, \dots, n$.

A função U é a parte real de uma função F holomorfa em $\overset{\circ}{S}_n$ e contínua em S_n . Desde que U e g_k são limitadas e $f \in H(\mathbb{IE})$ segue que a função,

$$\phi(z) = [\exp(-F(z))] f(z)$$

para $z \in S_n$, é Σ IE-contínua e limitada em S_n , holomorfa em S_n^o , e ainda $\phi(k+it)$ é E_k -contínua e limitada como função de t , para todo $k \in \square$. Assim $\phi \in H(IE)$.

Agora, de (2), temos

$$\begin{aligned} \|\exp(-F(k+it))\| f(k+it) \|_{E_k} &= [\exp \operatorname{Re}(-F(k+it))] \cdot \|f(k+it)\|_{E_k} \\ &= [\exp(-g_k(t))] \cdot \|f(k+it)\|_{E_k} \leq 1. \end{aligned}$$

Logo,

$$\|\phi\|_{H(IE)} \leq 1$$

e então,

$$\|\exp(-F(\theta))\| f(\theta) \|_{\theta} \leq 1.$$

Portanto,

$$\|f(\theta)\|_{\theta} \leq \exp U(\theta).$$

Daqui, segue que

$$(3) \quad \log \|f(\theta)\| \leq \sum_{k \in \square} \int_{\mathbb{R}^n} g_k(t) P_k(\theta, t) dt.$$

Consideremos a seguir, para cada $k \in \square$, uma sequência $(g_{km})_{m \in \mathbb{N}}$ decrescente de funções convergindo para $\log \|f(k+it)\|_{E_k}$. Por (3), temos

$$\log \|f(\theta)\|_{\theta} \leq \sum_{k \in \square} \int_{\mathbb{R}^n} g_{km}(t) P_k(\theta, t) dt.$$

Usando o lema de Fatou, temos

$$\begin{aligned} \log \|f(\theta)\|_{\theta} &\leq \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{k \in \square} \int_{\mathbb{R}^n} g_{km}(t) P_k(\theta, t) dt \right\} \\ &\leq \sum_{k \in \square} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} g_{km}(t) \right) P_k(\theta, t) dt \\ &\leq \sum_{k \in \square} \int_{\mathbb{R}^n} \log \|f(k+it)\|_{E_k} P_k(\theta, t) dt. \end{aligned}$$

E assim completamos a demonstração.

1.4.2. COROLÁRIO. Para toda $f \in H(\mathbb{IE})$ e $0 < \theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) < 1$, temos

$$(1) \quad \|f(\theta)\|_{\theta} \leq \prod_{k \in \square} \left\{ \frac{1}{s(k)} \int_{\mathbb{R}^n} \|f(k+it)\|_{E_k} P_k(\theta, t) dt \right\}^{s(k)}$$

$$\text{onde } s(k) = \prod_{j=1}^n [(1-k_j) + (-1)^{1-k_j} \theta_j],$$

$$(2) \quad \|f(\theta)\|_{\theta} \leq \sum_{k \in \square} \int_{\mathbb{R}^n} \|f(k+it)\|_{E_k} P_k(\theta, t) dt.$$

DEMONSTRAÇÃO. A função

$$\varphi_k(B) = \int_B \frac{P_k(\theta, t)}{s(k)} dt, \quad k \in \square$$

onde $B \subset \mathbb{R}^n$ é um boreleano, é uma medida em $\mathbb{R}^n$ e,

$$\varphi_k(\mathbb{R}^n) = 1$$

Usando a desigualdade de Jensen (ver W. Rudin [1], pag. 61) obtemos

$$\begin{aligned} \exp\left[\frac{1}{s(k)} \int_{\mathbb{R}^n} \{\log\|f(k+it)\|_{E_k}\} P_k(\Theta, t) dt\right] &= \exp\left[\int_{\mathbb{R}^n} \log\|f(k+it)\|_{E_k} d\varphi_k\right] \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \|f(k+it)\|_{E_k} d\varphi_k = \frac{1}{s(k)} \int_{\mathbb{R}^n} \|f(k+it)\|_{E_k} P_k(\Theta, t) dt, \end{aligned}$$

ou seja, obtivemos a desigualdade,

$$\begin{aligned} (3) \quad \exp\left[\frac{1}{s(k)} \int_{\mathbb{R}^n} \{\log\|f(k+it)\|_{E_k}\} P_k(\Theta, t) dt\right] &\leq \\ &\leq \frac{1}{s(k)} \int_{\mathbb{R}^n} \|f(k+it)\|_{E_k} P_k(\Theta, t) dt. \end{aligned}$$

Do lemma 1.4.1, temos

$$\log\|f(\Theta)\|_{\Theta} \leq \sum_{k \in \square} s(k) \frac{1}{s(k)} \int_{\mathbb{R}^n} \{\log\|f(k+it)\|_{E_k}\} P_k(\Theta, t) dt$$

e então,

$$\|f(\Theta)\|_{\Theta} \leq \prod_{k \in \square} \left\{ \exp\left[\frac{1}{s(k)} \int_{\mathbb{R}^n} \{\log\|f(k+it)\|_{E_k}\} P_k(\Theta, t) dt\right] \right\}^{s(k)}.$$

Agora, pela desigualdade (3) acima, temos

$$\|f(\theta)\|_{\theta} \leq \prod_{k \in \square} \left\{ \frac{1}{s(k)} \int_{\mathbb{R}^n} \|f(k+it)\|_{E_k} \cdot P_k(\theta, t) dt \right\}^{s(k)}$$

Para demonstrar a afirmativa (2) observamos que $\sum_{k \in \square} s(k) = 1$ e que a função exponencial é convexa. Assim, temos

$$\exp\left(\sum_{k \in \square} a_k\right) \leq \sum_{k \in \square} s(k) \exp \frac{a_k}{s(k)}.$$

Tomando $a_k = \int_{\mathbb{R}^n} [\log \|f(k+it)\|_{E_k}] P_k(\theta, t) dt$, obtemos

$$\begin{aligned} \exp\left(\sum_{k \in \square} \int_{\mathbb{R}^n} [\log \|f(k+it)\|_{E_k}] P_k(\theta, t) dt\right) &\leq \\ &\leq \sum_{k \in \square} s(k) \exp\left[\frac{1}{s(k)} \int_{\mathbb{R}^n} [\log \|f(k+it)\|_{E_k}] P_k(\theta, t) dt\right]. \end{aligned}$$

Aplicando o lema 1.4.1 e a desigualdade (3) acima, obtemos

$$\|f(\theta)\|_{\theta} \leq \sum_{k \in \square} \int_{\mathbb{R}^n} \|f(k+it)\|_{E_k} P_k(\theta, t) dt.$$

Assim fica demonstrado o resultado.

1.4.3. PROPOSIÇÃO. Se $a \in \mathcal{IE}_{\theta}$, $0 < \theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) < 1$, temos

$$\|a\|_{\theta} = \inf_{k \in \square} \left\{ \prod_{k \in \square} \|f(k+it)\|_{E_k}^{s(k)} \mid a = f(\theta), f \in H(\mathcal{IE}) \right\}.$$

DEMONSTRAÇÃO. Seja $f \in H(\mathcal{IE})$ tal que $a = f(\theta)$. Do corolário 1.4.2 (1), temos

$$\begin{aligned} \|a\|_{\Theta} &= \|f(\Theta)\|_{\Theta} \leq \prod_{k \in \square} \left\{ \frac{1}{s(k)} \int_{\mathbb{R}^n} \|f(k+it)\|_{E_k} p_k(\Theta, t) dt \right\}^{s(k)} \\ &\leq \prod_{k \in \square} \left\{ \frac{1}{s(k)} \|f(k+it)\|_{L^{\infty}(E_k)} \int_{\mathbb{R}^n} p_k(\Theta, t) dt \right\}^{s(k)}. \end{aligned}$$

Como $s(k) = \int_{\mathbb{R}^n} p_k(\Theta, t) dt$ segue que,

$$\|a\|_{\Theta} \leq \prod_{k \in \square} \|f(k+it)\|_{L^{\infty}(E_k)}^{s(k)},$$

para toda f em $H(\mathbb{IE})$ com $a = f(\Theta)$. Logo,

$$\|a\|_{\Theta} \leq \inf_{a=f(\Theta)} \prod_{k \in \square} \|f(k+it)\|_{L^{\infty}(E_k)}^{s(k)}.$$

Para provar a desigualdade contrária, consideremos uma função qualquer f em $H(\mathbb{IE})$ de modo que $a = f(\Theta)$. Assim,

$$\prod_{k \in \square} \|f(k+it)\|_{L^{\infty}(E_k)}^{s(k)} \leq \prod_{k \in \square} \|f\|_{H(\mathbb{IE})}^{s(k)} = \|f\|_{H(\mathbb{IE})},$$

pois, $\sum_{k \in \square} s(k) = 1$. Logo,

$$\prod_{k \in \square} \|f(k+it)\|_{L^{\infty}(E_k)}^{s(k)} \leq \|f\|_{H(\mathbb{IE})},$$

para toda f em $H(\mathbb{IE})$, de modo que $a = f(\Theta)$. Isto significa que,

$$\inf_{f(\Theta)=a} \prod_{k \in \square} \|f(k+it)\|_{L^{\infty}(E_k)}^{s(k)} \leq \inf_{f(\Theta)=a} \|f\|_{H(\mathbb{IE})} = \|a\|_{\Theta}.$$

fica assim demonstrado que se $a \in \mathbb{E}_\Theta$ então

$$\|a\|_\Theta = \inf_{f(\Theta)=a} \prod_{k \in \mathbb{N}} \|f(k+it)\|_{L^\infty(E_k)}^{s(k)}.$$

Nos próximos dois resultados necessitaremos da noção de espaços L^p com normas mistas. Daremos aqui a definição dos mesmos. Para mais detalhes ver A. Benedek-R. Panzone [1].

Seja então, E um espaço de Banach. O espaço $L^q(E)$ é o espaço das funções f , com valores em E , fortemente mensuráveis e tal que,

$$\|f\|_{L^q(E)} = \left[\int_{\mathbb{R}} \|f(t)\|_E^q dt \right]^{1/q} < \infty.$$

Agora, dada uma n -upla $1 \leq Q = (q_1, \dots, q_n) \leq \infty$ (onde $1 \leq Q \leq \infty$ significa que $1 \leq q_j \leq \infty$ ($j=1, \dots, n$)) definimos o espaço $L^Q(E)$, como sendo o espaço de todas as funções f , com valores em E , fortemente mensuráveis e tal que,

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^Q(E)} &= \left\| \dots \left\| \|f(t)\|_E \right\|_{L^{q_1}} \dots \right\|_{L^{q_n}} = \\ &= \left[\int_{\mathbb{R}} \dots \left[\int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} \|f(t)\|_E^{q_1} dt_1 \right]^{\frac{q_2}{q_1}} dt_2 \right]^{\frac{q_3}{q_2}} \dots dt_n \right]^{\frac{1}{q_n}} < \infty. \end{aligned}$$

Se $Q = (q_1, \dots, q_n)$ colocamos $Q' = (q'_1, \dots, q'_n)$ onde $1/q_j + 1/q'_j = 1$. Isto, assim será entendido quando escrevermos $1/Q + 1/Q' = 1$.

1.4.4. PROPOSIÇÃO. Seja $\mathcal{IE} = (E_k | k \in \square)$ uma família admissível de espaços de Banach. Suponhamos que $a \in \mathcal{IE}_\theta$ e $f \in H(\mathcal{IE})$ de modo que $a = f(\theta)$ e $0 < \theta < 1$. Se $f(k+it) \in L^{Q_k}(E_k)$ onde $1 \leq Q_k = (q_{k_1}, \dots, q_{k_n}) \leq \infty$ e $k = (k_1, \dots, k_n) \in \square$ então,

$$\|a\|_\theta \leq c \max_{k \in \square} \|f(k+it)\|_{L^{Q_k}(E_k)}$$

onde, $c = \sum_{k \in \square} \|P_k(\theta, t)\|_{L^{Q'_k}}$.

DEMONSTRAÇÃO. A prova estará completa usando o corolário 1.4.2(2).

De fato,

$$\begin{aligned} \|a\|_\theta &= \|f(\theta)\|_\theta \leq \sum_{k \in \square} \int_{\mathbb{R}^n} \|f(k+it)\|_{E_k} \cdot P_k(\theta, t) dt \leq \\ &\leq \sum_{k \in \square} \|f(k+it)\|_{L^{Q_k}(E_k)} \cdot \|P_k(\theta, t)\|_{L^{Q'_k}(E_k)} \\ &\leq \left(\sum_{k \in \square} \|P_k(\theta, t)\|_{L^{Q'_k}(E_k)} \right) \cdot \max_{k \in \square} \|f(k+it)\|_{L^{Q_k}(E_k)}. \end{aligned}$$

1.4.5. PROPOSIÇÃO. Seja f uma função com valores em $\sum \mathcal{IE}$, definida, contínua e limitada em S_n e, holomorfa no interior S_n° , de S_n , tal que

$$(1) \quad f(k+it) \in L^{Q_k}(E_k) \quad , \quad k = (k_1, \dots, k_n) \in \square \quad ,$$

onde $1 \leq Q_k = (\alpha_{k_1}, \dots, \alpha_{k_n}) < \infty$. Então, se $0 < \Theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) < 1$ segue que,

$$(2) \quad a = f(\Theta) \in \mathbb{IE}_\Theta$$

e

$$(3) \quad \|a\|_\Theta \leq c \max_{k \in \mathbb{N}} \|f(k+it)\|_{L^{Q_k}(E_k)}$$

$$\text{onde } c = \sum_{k \in \mathbb{N}} \|P_k(\Theta, t)\|_{L^{Q'_k}(E_k)}.$$

DEMONSTRACÃO. Para provar este resultado basta mostrar a existência de uma sequência de Cauchy $(a_j)_{j \in \mathbb{N}}$ em $\mathbb{IE}_\Theta$ tal que $a_j \rightarrow a$ em $\Sigma \mathbb{IE}$.

Seja $(\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções contínuas não-negativas definidas em $\mathbb{R}^n$ satisfazendo as condições ,

$$(4) \quad \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_j(t) dt = 1 \quad (j \in \mathbb{N})$$

e

$$(5) \quad \varphi_j(t) = 0, \quad \text{se } |t| \geq 1/j \quad (j \in \mathbb{N}).$$

Seendo f uma função como na hipótese, colocamos

$$f_j(z) = \int_{\mathbb{R}^n} f(z+it) \varphi_j(t) dt$$

e

$$a_j = f_j(\theta) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\theta + it) \varphi_j(t) dt.$$

Nosso primeiro passo será mostrar que $f_j \in H(\mathbb{IE})$. Segue da definição que as funções f_j são holomorfas em S_n^o . Desde que f é limitada em S_n segue que f_j é limitada segundo a norma de $\Sigma \mathbb{IE}$, em S_n . Desde que $f(k+it)$ pertence a $L^{Q_k}(E_k)$, usando a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned} \|f_j(k+it)\|_{E_k} &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \|f(k+it+is)\|_{E_k} \varphi_j(s) ds \\ &\leq \|f(k+it)\|_{L^{Q_k}(E_k)} \|\varphi_j\|_{L^{Q'_k}} \end{aligned}$$

onde Q'_k é o conjugado de Q_k , isto é, cada componente de Q'_k é a conjugada de sua correspondente em Q_k . Esta desigualdade nos diz que a função $f_j(k+it)$ é limitada em $\mathbb{R}^n$, segundo a norma de E_k . Agora, como

$$f_j(k+i(t+h)) - f_j(k+it) = \int_{\mathbb{R}^n} f(k+iu) [\varphi_j(u-t-h) - \varphi_j(u-t)] du,$$

a desigualdade de Hölder e a continuidade uniforme de φ_j implicam que $f_j(k+it)$ é E_k -contínua. Assim f_j pertence ao espaço $H(\mathbb{IE})$.

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned}
 (6) \quad \|a_j - a\|_{\Sigma IE} &= \left\| \int_{\mathbb{R}^n} f(\Theta + it) \varphi_j(t) dt - \int_{\mathbb{R}^n} f(\Theta) \varphi_j(t) dt \right\|_{\Sigma IE} \\
 &\leq \int_{|t| \leq 1/j} \|f(\Theta + it) - f(\Theta)\|_{\Sigma IE} \varphi_j(t) dt
 \end{aligned}$$

Como $f(\Theta + it)$ é ΣIE -contínua segue que $f(\Theta + it)$ é uniformemente ΣIE -contínua em $|t| \leq 1$. Portanto,

$$\|f(\Theta + it) - f(\Theta + is)\|_{\Sigma IE} < \varepsilon,$$

se $|t-s| < \delta$, $|t| \leq 1$ e $|s| \leq 1$. Consideremos então, $j \in \mathbb{N}$ tal que $1/j < \delta$. Assim, de (6), obtemos

$$\begin{aligned}
 \|a_j - a\|_{\Sigma IE} &\leq \int_{|t| \leq 1/j} \|f(\Theta + it) - f(\Theta)\|_{\Sigma IE} \varphi_j(t) dt \\
 &\leq \varepsilon \int_{|t| \leq 1/j} \varphi_j(t) dt = \varepsilon,
 \end{aligned}$$

ou seja, $a_j \rightarrow a$ em ΣIE , quando $j \rightarrow \infty$.

Resta-nos provar que $(a_j)_{j \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em IE_Θ . Por aplicações repetidas da desigualdade de Minkowski para integrais obtemos,

$$f_j(k+it) \in L^{Q_k}(E_k).$$

Este fato permite-nos usar a proposição 1.4.4 e obtermos,

$$\begin{aligned}
\|a_r - a_s\|_{\Theta} &\leq c \max_{k \in \square} \|(f_r - f_s)(k+it)\|_{L^{Q_k}(E_k)} \\
&= c \max_{k \in \square} \|(f_r - f)(k+it) + (f - f_s)(k+it)\|_{L^{Q_k}(E_k)} \\
&\leq c \max_{k \in \square} \{ \|(f_r - f)(k+it)\|_{L^{Q_k}(E_k)} + \|(f - f_s)(k+it)\|_{L^{Q_k}(E_k)} \} \\
&\leq c \max_{k \in \square} \left\{ \left\| \int_{\mathbb{R}^n} [f(k+i(t+x)) - f(k+it)] \varphi_r(x) dx \right\|_{L^{Q_k}(E_k)} \right. \\
&\quad \left. + \left\| \int_{\mathbb{R}^n} [f(k+it) - f(k+i(t+x))] \varphi_s(x) dx \right\|_{L^{Q_k}(E_k)} \right\} \\
&\leq c \max_{k \in \square} \left\{ \left\| \int_{\mathbb{R}^n} \|f(k+i(t+x)) - f(k+it)\|_{E_k} \varphi_r(x) dx \right\|_{L^{Q_k}(\mathbb{R})} \right. \\
&\quad \left. + \left\| \int_{\mathbb{R}^n} \|f(k+i(t+x)) - f(k+it)\|_{E_k} \varphi_s(x) dx \right\|_{L^{Q_k}(\mathbb{R})} \right\} \\
&\leq c \max_{k \in \square} \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \|f(k+i(t+x)) - f(k+it)\|_{L^{Q_k}(E_k)} \varphi_r(x) dx \right. \\
&\quad \left. + \int_{\mathbb{R}^n} \|f(k+i(t+x)) - f(k+it)\|_{L^{Q_k}(E_k)} \varphi_s(x) dx \right\} \\
&= c \max_{k \in \square} \left\{ \int_{|x| \leq 1/r} \|f(k+i(t+x)) - f(k+it)\|_{L^{Q_k}(E_k)} \varphi_r(x) dx + \right.
\end{aligned}$$

$$+ \int_{|x| \leq 1/s} \|f(k+i(t+x)) - f(k+it)\|_{L^{Q_k}(E_k)} \varphi_s(x) dx \}.$$

Daqui concluímos que $\|a_r - a_s\|_{\Theta} \rightarrow 0$ quando $r, s \rightarrow \infty$, ou seja a sequência $(a_r)_{r \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em E_{Θ} . Da imersão contínua de IE_{Θ} em ΣIE e da convergência da sequência $(a_r)_{r \in \mathbb{N}}$, em ΣIE , ao limite a , segue que $a \in IE_{\Theta}$.

Provaremos a seguir, a desigualdade 1.4.5(3). Desde que a sequência $(a_r)_{r \in \mathbb{N}}$ converge, em IE_{Θ} , ao limite a temos que, $\|a - a_r\|_{\Theta} < \varepsilon$, para $\varepsilon > 0$ dado e $r \geq r_0$, para algum r_0 em $\mathbb{N}$. Assim, para $r \geq r_0$, pela proposição 1.4.4, obtemos

$$\|a\|_{\Theta} < \varepsilon + \|a_r\|_{\Theta} \leq \varepsilon + c \max_{k \in \mathbb{N}} \|f_r(k+it)\|_{L^{Q_k}(E_k)}.$$

Desde que,

$$\|f_r(k+it)\|_{L^{Q_k}(E_k)} \leq \|f(k+it)\|_{L^{Q_k}(E_k)}$$

temos

$$\|a\|_{\Theta} < \varepsilon + c \max_{k \in \mathbb{N}} \|f(k+it)\|_{L^{Q_k}(E_k)}.$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário segue que,

$$\|a\|_{\Theta} \leq c \max_{k \in \mathbb{N}} \|f(k+it)\|_{L^{Q_k}(E_k)},$$

como queríamos demonstrar.

1.5. TEOREMA DE INTERPOLAÇÃO.

1.5.1. DEFINIÇÃO. Um par de espaços de Banach (X, Y) intermediários, em relação às famílias admissíveis $\mathcal{IE} = (E_k | k \in \square)$ em V e $\mathcal{IF} = (F_k | k \in \square)$ em W respectivamente, tem a propriedade de interpolação se, para toda aplicação linear T de $\Sigma \mathcal{IE}$ em $\Sigma \mathcal{IF}$, de modo que as restrições de T aos espaços E_k sejam aplicações lineares limitadas de E_k em F_k , então T é também uma aplicação linear limitada de X em Y .

Observemos que, pelo fato das restrições de T a E_k serem aplicações lineares limitadas de E_k em F_k e, do fato das imersões contínuas de F_k em $\Sigma \mathcal{IF}$ segue que a aplicação linear T é limitada de $\Sigma \mathcal{IE}$ em $\Sigma \mathcal{IF}$.

A seguir provaremos que os espaços $\mathcal{IE}_\theta$ tem a propriedade de interpolação e a norma $\|T\|$, de um operador linear limitado de $\mathcal{IE}_\theta$ em $\mathcal{IF}_\theta$ satisfaz a desigualdade exata,

$$(1) \quad \|T\| \leq \prod_{k \in \square} M_k^{s(k)} \quad \left(\sum_{k \in \square} s(k) = 1 \right)$$

onde M_k ($k \in \square$) é a norma de T como um operador linear limitado de E_k em F_k . Em vista de (1), alguns autores (por exemplo [, pag.]) diriam que o método aqui estudado é exato. Precisamente, vale o seguinte teorema.

1.5.2. TEOREMA. Sejam $\mathcal{IE} = (E_k | k \in \square)$ e $\mathcal{IF} = (F_k | k \in \square)$ famílias admissíveis de espaços de Banach em relação a V e W respectivamente. Então o par $(\mathcal{IE}_\theta, \mathcal{IF}_\theta)$, de espaços de Banach tem a

propriedade de interpolação. Ainda mais, se T é uma aplicação linear de ΣIE em ΣIF , de modo que as restrições de T aos espaços E_k sejam aplicações lineares limitadas de E_k em F_k , com normas M_k então,

$$(1) \quad M \leq \prod_{k \in \square} M_k^{s(k)} \quad \left(\sum_{k \in \square} s(k) = 1 \right),$$

onde M é a norma do operador linear limitado de IE_Θ em IF_Θ .

DEMONSTRAÇÃO. Dados $x \in IE_\Theta$ e $\epsilon > 0$, existe $f \in H(IE)$ tais que $x = f(\Theta)$ e $\|f\|_{H(IE)} < \|x\|_\Theta + \epsilon$.

A função g definida em S_n por

$$g(z) = T \circ f(z),$$

pertence a $H(IF)$, pois T é uma aplicação linear contínua de ΣIE em ΣIF e $T(E_k) = \{Ty | y \in E_k\} \subset F_k$. Assim,

$$Tx = T(f(\Theta)) = (T \circ f)(\Theta) = g(\Theta) \in IF_\Theta.$$

Agora pela proposição 1.4.3, temos

$$\begin{aligned} \|Tx\|_{IF_\Theta} &\leq \prod_{k \in \square} \|g(k+it)\|_{L^\infty(F_k)}^{s(k)} = \prod_{k \in \square} \|T(f(k+it))\|_{L^\infty(F_k)}^{s(k)} \\ &\leq \prod_{k \in \square} M_k^{s(k)} \|f(k+it)\|_{L^\infty(E_k)}^{s(k)} \leq \left(\prod_{k \in \square} M_k^{s(k)} \right) \|f\|_{H(IE)} \\ &\leq \left(\prod_{k \in \square} M_k^{s(k)} \right) (\|x\|_{IE_\Theta} + \epsilon), \end{aligned}$$

onde $M_k = \sup\{\|Ty\|_{F_k} \mid y \in E_k, \|y\|_{E_k} \leq 1\}$. Agora, como $\varepsilon > 0$ é arbitrário obtemos, finalmente, que

$$\|Tx\|_{IF_\Theta} \leq \left(\prod_{k \in \square} M_k^{s(k)} \right) \|x\|_{E_\Theta}.$$

Portanto T é uma aplicação linear contínua de IE_Θ em IF_Θ e a norma M , de T como aplicação linear limitada de IE_Θ em IF_Θ satisfaz a desigualdade,

$$M \leq \prod_{k \in \square} M_k^{s(k)}.$$

1.6. INTERPOLAÇÃO DOS ESPAÇOS L^P , COM NORMAS MISTAS.

Para ilustrar o presente capítulo determinaremos o espaço de interpolação entre 2^n espaços L^P com normas mistas e, utilizando o teorema 1.5.2 enunciaremos um teorema do tipo de Riesz-Thorin. Os resultados deste parágrafo são devidos essencialmente a D. L. Fernandez [2].

Sejam $(\prod_{j=1}^n X_j, \prod_{j=1}^n \mu_j) = (X, \mu)$ um espaço de medida σ -finito, $1 \leq P = (p_1, \dots, p_n) \leq \infty$ e $L^P = L^P(X, \mu)$ o espaço L^P com normas mistas introduzidos por Benedek-Panzone [1].

As discussões serão tratadas no caso especial de quatro espaços ($n=2$) e tão somente enunciaremos o caso geral.

1.6.1. TEOREMA. Seja $IP = (p_k \mid k \in \square)$ a família admissível de parâmetros associada a $1 \leq P_{00} = (p_0^1, p_0^2)$, $P_{11} = (p_1^1, p_1^2) \leq \infty$ e $0 < \Theta = (\theta_1, \theta_2) < 1$. Então,

$$(1) \quad [L^{P_{00}}, L^{P_{10}}, L^{P_{01}}, L^{P_{11}}]_{\theta_1, \theta_2} = L^P$$

onde $P = (p^1, p^2)$ e $1/p^i = (1-\theta_i)/p_0^i + \theta_i/p_1^i$, $i = 1, 2$.

DEMONSTRAÇÃO. Para provarmos o teorema basta provar que,

$$\|u\|_{\theta_1, \theta_2} = \|u\|_{L^P}$$

para toda função simples $u = \sum c_{rs} \chi_{I_r \times I_s}$ com $u_1(I_r) < \infty$ e $u_2(I_s) < \infty$. Podemos ainda admitir que $\|u\|_{L^P} = 1$.

Para $\varepsilon > 0$ definimos a função f em S_2 colocando

$$f(z_1, z_2) = (\exp\{(z_1^2 - \theta_1^2) + (z_2^2 - \theta_2^2)\}) \frac{|u|^{p^1/p^1(z_1)}}{|u|} \cdot \|u\|_{L_{x_1}^{p^2/p^2(z_2) - p^1/p^1(z_1)}}^{p^2/p^2(z_2) - p^1/p^1(z_1)}$$

onde $1/p^i(z_i) = (1-z_i)/p_0^i + z_i/p_1^i$, $i = 1, 2$. Esta função pertence ao espaço $H(L^{p_k} | k \in \square)$ e ainda $f(\theta_1, \theta_2) = u$. Isto implica em,

$$u \in [L^{p_k} | k \in \square]_{\theta} = [L^{P_{00}}, L^{P_{10}}, L^{P_{01}}, L^{P_{11}}]_{\theta_1, \theta_2}.$$

Da definição da função f ocorre que

$$\|f\|_{H(L^{p_k} | k \in \square)} \leq e^{2\varepsilon}$$

para todo número positivo ε . Logo,

$$\|f\|_{H(L^p_k | k \in \square)} \leq 1$$

Assim,

$$(2) \quad \|u\|_{\theta_1 \theta_2} \leq 1 = \|u\|_{L^p}$$

Reciprocamente, seja v uma função simples tal que $\|v\|_{L^Q} = 1$, onde $Q = (q^1, q^2)$, $1/q^i = (1-\theta_i)/q_0^i + \theta_i/q_1^i$ e $1/q_0^i + 1/p_0^i = 1$. Logo $1/P + 1/Q = 1$. Para cada número positivo ε definimos a função g em S_2 por,

$$g(z_1, z_2) = (\exp\{(z_1^2 - \theta_1^2) + (z_2^2 - \theta_2^2)\}) (\operatorname{sg} v) |v|^{q^1/q^1(z_1)} \cdot \|v\|_{L_{x_1}^{q^1}}^{q^2/q^2(z_2) - q^1/q^1(z_1)}$$

$$\text{onde } 1/q^i(z_i) = (1-z_i)/q_0^i + z_i/q_1^i, \quad i = 1, 2.$$

Consideremos agora, um elemento u no espaço $[L^p_k | k \in \square]_{\theta}$ com $\|u\|_{\theta} = \|u\|_{\theta_1 \theta_2} = 1$. Da definição da norma no espaço $[L^p_k | k \in \square]_{\theta}$ podemos considerar uma função f em $H(L^p_k | k \in \square)$ tal que $f(\theta_1, \theta_2) = u$ e $\|f\|_{H(L^p_k | k \in \square)} < e^{\varepsilon}$.

A função F definida em S_2 por

$$F(z_1, z_2) = \int_{X_1 \times X_2} f(z_1, z_2)(x_1, x_2) g(z_1, z_2)(x_1, x_2) d\mu_1(x_1) \times d\mu_2(x_2)$$

é contínua e limitada em S_2 e holomorfa em S_2^o . Então, pelo lema 1.2.2 temos,

$$|F(z_1, z_2)| \leq \max_{k \in \square} \sup_t |F(k+it)|.$$

Desde que $|F(k+it)| \leq e^{3\varepsilon}$ com $\varepsilon > 0$ arbitrário, segue que

$$|F(z_1, z_2)| \leq 1, \quad \forall (z_1, z_2) \in S_2.$$

Assim

$$\left| \int_{X_1 \times X_2} u(x_1, x_2) v(x_1, x_2) d\mu_1(x_1) \times d\mu_2(x_2) \right| = |F(\theta_1, \theta_2)| \leq 1 = \|u\|_{\theta_1 \theta_2}.$$

Desde que,

$$\|u\|_{L^P} = \sup \left\{ \left| \int_{X_1 \times X_2} u(x_1, x_2) v(x_1, x_2) d\mu_1(x_1) \times d\mu_2(x_2) \right| \mid v \in L^Q \text{ e } \|v\|_{L^Q} = 1 \right\}$$

segue que,

$$(3) \quad \|u\|_{L^P} \leq 1 = \|u\|_{\theta_1 \theta_2}.$$

As desigualdades em (2) e (3) nos dão

$$\|u\|_{L^P} = \|u\|_{\theta_1 \theta_2}$$

como queríamos.

Para o caso geral a versão do teorema é a seguinte.

1.6.2. TEOREMA. Seja $IP = (P_k \mid k \in \square)$ uma família admissível de

parâmetros associada a $1 \leq P_0 = (p_0^1, \dots, p_0^n)$, $P_1 = (p_1^1, \dots, p_1^n) < \infty$.

Se $0 < \theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) < 1$, temos

$$[L^{P_k} | k \in \square]_{\theta} = L^P$$

onde $P = (p^1, \dots, p^n)$ e $1/p^i = (1-\theta_i)/p_0^i + \theta_i/p_1^i$, $i = 1, \dots, n$.

Como consequência dos teoremas 1.5.2 e 1.6.2 obtém-se o seguinte teorema de interpolação do tipo de Riesz-Thorin.

1.6.3. TEOREMA. Sejam $1 \leq P_0 = (p_0^1, \dots, p_0^n)$, $P_1 = (p_1^1, \dots, p_1^n) \leq \infty$ e $1 \leq Q_0 = (q_0^1, \dots, q_0^n)$, $Q_1 = (q_1^1, \dots, q_1^n) \leq \infty$ e consideremos as respectivas famílias admissíveis associadas, $IP = (P_k | k \in \square)$ e $Q = (Q_k | k \in \square)$. Se T é uma aplicação linear tal que,

$$T: L^{P_k}(X, \mu) \longrightarrow L^{Q_k}(Y, \nu)$$

é limitada para todo $k \in \square$ então,

$$T: L^P(X, \mu) \longrightarrow L^Q(Y, \nu)$$

é limitada, onde $1/P = (1-\theta)/P_0 + \theta/P_1$, $1/Q = (1-\theta)/Q_0 + \theta/Q_1$ e $0 < \theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) < 1$.

CAPÍTULO II

CONEXÃO ENTRE OS MÉTODOS REAL E COMPLEXO DE INTERPOLAÇÃO

O objetivo deste capítulo é dar várias conexões entre os métodos real e complexo de interpolação para vários espaços de Banach. Procuraremos, então, aplicar estas conexões ao estudo de espaços com derivadas mistas dominantes e espaços de Besov-Nikol'skii.

Inicialmente, apresentaremos o método de interpolação real de Lions-Peetre, para 2^n -espaços de Banach desenvolvidos por D.L. Fernandez [2].

Usando o teorema de Hausdorff-Young para espaços L^p com normas mistas, dado por A. Benedek-Panzone [1] e seguindo as idéias de J. Peetre [1] daremos uma conexão entre os métodos real e complexo de interpolação para 2^n espaços de Banach. Esta conexão é fortemente inspirada em J.I. Bertolo-D.L. Fernandez e generaliza uma conexão dada por D.L. Fernandez [1]. Reproduziremos a conexão dada por D.L. Fernandez pois, conseguimos reduzir e simplificar a demonstração original. Daremos também, algumas outras conexões que aparecem aqui pela primeira vez (Teorema 2.2.5).

2.1. ESPAÇOS DE INTERPOLAÇÃO REAL $IE_{\theta,p} = (E_k | k \in \square)_{\theta,p}$

2.1.0. Daremos aqui uma idéia geral dos espaços $IE_{\theta,p} = (E_k | k \in \square)_{\theta,p}$. Para maiores detalhes ver D.L. Fernandez [2].

Seja $IE = (E_k | k \in \square)$ uma família admissível de espaços de Banach. Para $t = (t_1, \dots, t_n) > 0$ e $k = (k_1, \dots, k_n) \in \square$, colocamos $t^k = t_1^{k_1} \dots t_n^{k_n}$. Para $y \in \bigcap IE$ definimos a norma funcional

$$(1) \quad J(t; y) = \max_{k \in \square} t^k \|y\|_{E_k}.$$

Desde que, para cada t fixo a norma $J(t; y)$ é equivalente a norma $J(1; y) = \|y\|_{\cap \mathbb{E}}$, segue que o espaço $\cap \mathbb{E}$ é um espaço de Banach em relação a norma $J(t; y)$.

Agora, se $1 \leq P = (p_1, \dots, p_n) \leq \infty$ vamos denotar por L_*^P o espaço de Banach L^P , das funções definidas em $\mathbb{R}_+^n = \mathbb{R}_+ \times \dots \times \mathbb{R}_+$ com valores escalares, em relação a medida $d_* t = \frac{dt_1}{t_1} \dots \frac{dt_n}{t_n}$. Se Y é um espaço de Banach então, $L_*^P(Y)$ é o espaço das funções fortemente mensuráveis $g: \mathbb{R}_+^n \rightarrow Y$ tais que $\|g(t)\|_Y \in L_*^P$. Para maiores detalhes sobre espaços L^P com normas mistas ver Benedek-Panzone [1].

A fim de caracterizarmos os espaços $\mathbb{E}_{\Theta, P}$ daremos a seguinte proposição.

2.1.1. PROPOSIÇÃO. Sejam $0 \leq \Theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) \leq 1$ e $1 \leq P = (p_1, \dots, p_n) \leq \infty$. Se $u: \mathbb{R}_+^n \rightarrow \cap \mathbb{E}$ é uma função fortemente mensurável então, as duas condições seguintes são equivalentes,

$$(1) \quad t^{-\Theta} J(t, u(t)) \in L_*^P$$

e

$$(2) \quad t^{k-\Theta} u(t) \in L_*^P(E_k) \quad , \quad k \in \square.$$

DEMONSTRAÇÃO. A equivalência destas condições segue das desigualdades,

$$(3) \quad t^{k-\Theta} \|u(t)\|_{E_k} \leq t^{-\Theta} \max_{k \in \square} t^k \|u(t)\|_{E_k} = t^{-\Theta} J(t, u(t)).$$

e

$$(4) \quad t^{-\Theta} J(t; u(t)) = \max_{k \in \square} t^{k-\Theta} \|u(t)\|_{E_k} \leq \sum_{k \in \square} t^{k-\Theta} \|u(t)\|_{E_k}.$$

2.1.2. DEFINIÇÃO. Para $0 < \Theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) < 1$ e $1 \leq p \leq \infty$ definimos $IE_{\Theta, p}$ como o espaço de todos os elementos $x \in \Sigma IE$, para os quais existe uma função fortemente mensurável, $u: \mathbb{R}_+^n \rightarrow \cap IE$, com $u(t) \in L_*^1(\Sigma IE)$ que satisfaz 2.1.1(1) ou 2.1.1(2) e tal que

$$(1) \quad x = \int_{\mathbb{R}_+^n} u(t) d_* t \quad (\text{convergência em } \Sigma IE).$$

2.1.3. PROPOSIÇÃO. O espaço $IE_{\Theta, p}$ é um espaço de Banach intermediário, sob as normas equivalentes,

$$(1) \quad \|x\|_{\Theta, p} = \inf \|t^{-\Theta} J(t; u(t))\|_{L_*^p}$$

e

$$(2) \quad \|x\|_{\Theta, p} = \inf \max_{k \in \square} \|t^{k-\Theta} u(t)\|_{L_*^p(E_k)}$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas as representações de x . Ainda, estes espaços tem a propriedade de interpolação.

DEMONSTRAÇÃO. A equivalência destas normas segue imediatamente das relações 2.1.1(3) e 2.1.1(4).

A prova de que os espaços $IE_{\theta, P}$ são espaços de Banach e tem a propriedade de interpolação é encontrada em Fernandez [4].

Os espaços de interpolação real também, podem ser definidos para o que chamamos de família admissível de parâmetros, $IP = \{P_k | k \in \square\}$, associada a $P_0 = (p_0^1, \dots, p_0^n)$ e $P_1 = (p_1^1, \dots, p_1^n)$.

2.1.4. DEFINIÇÃO. Por uma família admissível de parâmetros associada aos parâmetros $P_0 = (p_0^1, \dots, p_0^n)$ e $P_1 = (p_1^1, \dots, p_1^n)$ entendemos uma família,

$$(1) \quad IP = \{P_k = (p_{k_1}^1, \dots, p_{k_n}^n) | k = (k_1, \dots, k_n) \in \square\}$$

Observemos que para $n=1$ temos $IP = (p_0^1, p_0^2)$ e para $n=2$, $IP = ((p_0^1, p_0^2), (p_1^1, p_0^2), (p_0^1, p_1^2), (p_1^1, p_1^2))$.

2.1.5. DEFINIÇÃO. Dadas uma família admissível de parâmetros $IP = \{P_k | k \in \square\}$, associada a P_0 e P_1 , uma família admissível $IE = \{E_k | k \in \square\}$, de espaços de Banach e $0 < \theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) < 1$, definimos $IE_{\theta, IP} = \{E_k | k \in \square\}_{\theta, IP}$ como o espaço de todos os elementos $x \in \Sigma IE$ para os quais existe uma função fortemente mensurável, $u: \mathbb{R}_+^n \rightarrow \cap IE$, com $u(t) \in L_*^1(\Sigma IE)$ satisfazendo as condições,

$$(1) \quad x = \int_{\mathbb{R}_+^n} u(t) d_* t$$

$$(2) \quad t^{k-\theta} u(t) \in L_*^{P_k}(E_k) \quad , \quad k \in \square.$$

2.1.6. PROPOSIÇÃO. O espaço $\mathbb{E}_{\Theta, \mathbb{I}P}$ é um espaço de Banach intermediário sob a norma,

$$(1) \quad \|x\|_{\Theta, \mathbb{I}P} = \inf_u \max_{k \in \square} \|t^{k-\Theta} u(t)\|_{L_{\star}^{p_k}(E_k)}.$$

2.1.7. PROPOSIÇÃO. O espaço de Banach $\mathbb{E}_{\Theta, P}$, coincide com o espaço $\mathbb{E}_{\Theta, \mathbb{I}P}$ com mesmas normas, quando a família $\mathbb{I}P$ se reduzir ao elemento P .

2.2. CONEXÃO ENTRE OS MÉTODOS REAL E COMPLEXO.

Como uma aplicação do teorema de Riesz-Thorin, obtem-se o teorema de Hausdorff-Young: se $f \in L^*$, $1 \leq p \leq 2$ então, a transformada de Fourier Ff , de f pertence a $L^{p'}$, com $1/p + 1/p' = 1$. Ao tentar estender este resultado para o caso de uma n -upla $P = (p_1, \dots, p_n)$ certas restrições são necessárias. Para sermos mais explícitos enunciaremos aqui a versão generalizada deste facto, dada em A. Benedek-R. Panzone [1].

2.2.1. TEOREMA (Hausdorff-Young). Seja Ff a transformada de Fourier de $f(x_1, \dots, x_n)$ e $P = (p_1, \dots, p_n)$ tal que $1 \leq p_n \leq p_{n-1} \leq \dots \leq p_1 \leq 2$. Se $1/P + 1/P' = 1$, então

$$(1) \quad \|Ff\|_{L^{P'}} \leq C(P) \|f\|_{L^P} \quad (C(P) = 1).$$

Se $1 \leq P \leq 2$ e as componentes de P não são monotonicamente não decrescentes então (1) não se verifica, qualquer que seja o valor

de $C(P)$.

Porém, quando trabalhamos com funções de L^P , com valores vetoriais o teorema de Hausdorff-Young deixa de ser verdadeiro. Assim é natural introduzir a seguinte definição.

2.2.2. DEFINIÇÃO. Um espaço de Banach E é dito do tipo $P=(p_1, \dots, p_n)$ com $1 \leq p_n \leq p_{n+1} \leq \dots \leq p_1 \leq 2$, se para alguma constante $C(P)$, tivermos

$$\|Ff\|_{L^{P'}(E)} \leq C(P) \|f\|_{L^P(E)} \quad (1/P + 1/P' = 1)$$

para toda $f \in L^P(E)$.

2.2.3. EXEMPLOS

- (1) Todo espaço de Banach é do tipo $P = 1 = (1, 1, \dots, 1)$.
- (2) Todo espaço de Hilbert é do tipo $P = 2 = (2, 2, \dots, 2)$.
- (3) Se E_k é do tipo P_k , onde $(P_k | k \in \square)$ é uma família admissível de parâmetros associada a P_0 e P_1 então, o espaço $(E_k | k \in \square)_{\theta, P}$ é do tipo P , onde $1/P = (1-\theta)/P_0 + \theta/P_1$.

De fato, pela hipótese temos

$$F: L^{P_k}(E_k) \rightarrow L^{P'_k}(E_k) \quad .$$

Assim, pela proposição 2.1.3 temos

$$F: ((L_k^P(E_k) | k \in \square)_{\theta, P}) \rightarrow ((L_k^{P'}(E_k) | k \in \square)_{\theta, P}) .$$

O resultado segue, observando que

$$(L_k^P(E_k) | k \in \square)_{\theta, P} = L^P((E_k | k \in \square)_{\theta, P}) .$$

(4) O espaço L^P é do tipo P se $1 \leq P = (p_1, \dots, p_n) \leq 2$.

Reproduziremos a seguir uma conexão entre os métodos real e complexo dada por D.L. Fernandez [4], pois conseguimos, com o auxílio da proposição 1.4.3, simplificar a demonstração original.

2.2.4. TEOREMA. Seja $\mathcal{E} = (E_k | k \in \square)$ uma família admissível de espaços de Banach e $0 < \theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) < 1$. Então

$$(1) \quad \mathcal{E}_{\theta, Q} \subset \mathcal{E}_{\theta} \subset \mathcal{E}_{\theta, Q'},$$

com inclusão contínua, onde $Q = (1, 1, \dots, 1)$ e $Q' = (\infty, \dots, \infty)$.

DEMONSTRAÇÃO. Usaremos a proposição 1.4.3 na discussão da primeira inclusão. Para a segunda inclusão seguiremos essencialmente as idéias de Fernandez.

Para provarmos a primeira inclusão é suficiente, de D. L. Fernandez [2, pag. 25], mostrar que

$$(2) \quad \|x\|_{\theta} \leq t^{-\theta} J(t; x)$$

para todo x no espaço $\cap \mathbb{IE}$. Para este propósito, se $x \in \cap \mathbb{IE}$, a função f definida em S_n por $f(z) = x$ pertence ao espaço $H(\mathbb{IE})$. Da proposição 1.4.3, obtemos,

$$\begin{aligned} \|x\|_{\Theta} &\leq \prod_{k \in \square} \|f(k+it)\|_{L^{\infty}(E_k)}^{s(k)} = \prod_{k \in \square} \|x\|_{E_k}^{s(k)} \\ &= t^{-\Theta} \prod_{k \in \square} [t^k \|x\|_{E_k}]^{s(k)} \leq t^{-\Theta} \prod_{k \in \square} [J(t;x)]^{s(k)} = t^{-\Theta} J(t;x), \end{aligned}$$

pois $\sum_{k \in \square} s(k) = 1$. Deste modo a primeira inclusão está provada.

Para a segunda parte, consideremos x em $\mathbb{IE}_{\Theta}$ e f em $H(\mathbb{IE})$ tal que $x = f(\Theta)$. Novamente de D.L. Fernandez [2, pag. 25] é suficiente provar que

$$(3) \quad K(t;x) \leq t^{\Theta} \|x\|_{\mathbb{IE}_{\Theta}}.$$

Para tanto, de D.L. Fernandez [2, pag. 62-63] temos

$$\begin{aligned} K(t;x) &= \inf \left\{ \sum_{k \in \square} t^k \|x_k\|_{E_k} \mid x = \sum_{k \in \square} x_k, \quad x_k \in E_k \right\} \\ &= \inf \left\{ \sum_{k \in \square} \|x_k\|_{t^k E_k} \mid x = \sum_{k \in \square} x_k, \quad x_k \in E_k \right\} \\ &= \|x\|_{\sum_k t^k E_k} = \|f(\Theta)\|_{\sum_k t^k E_k} \leq \prod_{j \in \square} \left\{ \sup_y \|f(j+iy)\|_{\sum_k t^k E_k} \right\}^{s(j)} \end{aligned}$$

onde $s(j) = \prod_{r=1}^n (1-j_r + (-1)^{1+j_r} \theta_r)$, $j = (j_1, \dots, j_n) \in \square$ e $t^k_{E_k}$ denota o espaço de Banach E_k munido da norma $t^k_{E_k} = \|\cdot\|_{E_k}$.

Desde que $\|v\|_{\sum_k t^k_{E_k}} \leq \|v\|_{t^k_{E_k}}$ se v pertence ao espaço $t^k_{E_k}$, temos

$$\begin{aligned} K(t; x) &\leq \prod_{j \in \square} \left[\sup_y \|f(j+iy)\|_{t^j_{E_j}} \right]^{s(j)} \\ &= \prod_{j \in \square} \left[\sup_y t^j \|f(j+iy)\|_{E_j} \right]^{s(j)} \\ &= \prod_{j \in \square} (t^j)^{s(j)} \prod_{j \in \square} \left[\|f(j+iy)\|_{L^\infty(E_j)} \right]^{s(j)} \\ &= t^\Theta \prod_{j \in \square} \left[\|f(j+iy)\|_{L^\infty(E_j)} \right]^{s(j)}. \end{aligned}$$

Pela proposição 1.4.3, temos

$$K(t, x) \leq t^\Theta \|x\|_\Theta,$$

como queríamos.

2.2.5. TEOREMA. Seja $\mathcal{IE} = (E_k | k \in \square)$ uma família admissível de espaços de Banach e $\mathcal{IP} = (P_k | k \in \square)$ uma família admissível de parâmetros associada a P_0 e P_1 . Se E_k é do tipo P_k , $k \in \square$, então

$$\mathcal{IE}_{\Theta, \mathcal{IP}} \subset \mathcal{IE}_\Theta \subset \mathcal{IE}_{\Theta, \mathcal{IP}}.$$

onde $IP' = (P'_k | k \in \square)$ e $1/P_k + 1/P'_k = 1$.

DEMONSTRAÇÃO. Seja $a \in IE_{\Theta, IP}$ e $u: \mathbb{R}_+^n \longrightarrow \cap IE$ uma função em $L_*^1(\Sigma IE)$ tal que,

$$(1) \quad a = \int_{\mathbb{R}_+^n} u(t) d_* t$$

e

$$(2) \quad t^{k-\Theta} u(t) \in L_*^{P_k}(E_k) \quad (k \in \square) \quad .$$

A seguir, para $z = (z_1, \dots, z_n) \in S_n$ definimos a função

$$U(z) = \int_0^\infty \dots \int_0^\infty t_1^{z_1-\theta_1} \dots t_n^{z_n-\theta_n} u(t_1, \dots, t_n) d_* t_1 \dots d_* t_n$$

que é holomorfa em S_n^o , contínua e limitada em S_n segundo a norma de ΣIE . Agora, fazendo a mudança de variáveis $t_j = e^{-s_j}$, $j = 1, \dots, n$, temos

$$U(z) = \int_{-\infty}^\infty \dots \int_{-\infty}^\infty e^{-s_1(z_1-\theta_1)} \dots e^{-s_n(z_n-\theta_n)} u(e^{-s_1}, \dots, e^{-s_n}) ds_1 \dots ds_n \quad .$$

Sendo $z = (z_1, \dots, z_n) = (x_1 + iy_1, \dots, x_n + iy_n) = (x_1, \dots, x_n) + i(y_1, \dots, y_n) = x + iy$, podemos escrever,

$$U(x+iy) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-is \cdot y} e^{-(x-\Theta) \cdot s} u(e^{-s}) ds$$

onde $s = (s_1, \dots, s_n)$ e $e^{-s} = (e^{-s_1}, \dots, e^{-s_n})$. De (2) concluímos que,

$$e^{-(k-\theta) \cdot s} u(e^{-s}) \in L^{P_k}_{P_k}(E_k) \quad .$$

Desde que E_k é do tipo P_k segue que

$$U(k+iy) = F(e^{-(k-\theta) \cdot y} u(e^{-y})) \in L^{P'_k}_{P_k}(E_k) \quad .$$

Agora, de (1) temos $a = U(\theta)$. Pela proposição 1.4.5 concluímos que $a \in \mathcal{IE}_\theta$.

Ainda, de 1.4.5(3) e do fato de E_k ser do tipo P_k temos

$$\begin{aligned} \|a\|_\theta &\leq c \max_{k \in \mathbb{N}} \|U(k+iy)\|_{L^{P'_k}_{P_k}(E_k)} \\ &\leq c \max_k C(P_k) \|e^{-(k-\theta)y} u(e^{-y})\|_{L^{P_k}_{P_k}(E_k)} \\ &\leq C : C(P) \max_k \|t^{k-\theta} u(t)\|_{L^{P_k}_{P_k}(E_k)} \end{aligned}$$

onde $C(P) = \max_{k \in \mathbb{N}} C(P_k)$. Desde que u é arbitrária, de 2.1.6(1) temos,

$$\|a\|_\theta \leq C \cdot C(P) \|a\|_{\theta, \mathcal{IP}}$$

e então, concluímos que a inclusão $\mathcal{IE}_{\theta, \mathcal{IP}} \subset \mathcal{IE}_\theta$ é contínua.

Para provarmos a segunda inclusão, consideremos $a \in \mathbb{IE}_\Theta$. Pela definição do espaço $\mathbb{IE}_\Theta$, existe uma função $u \in H(\mathbb{IE})$ tal que $a = u(\Theta)$.

Desde que a função $u(z) \exp[(z-\Theta)^2]$ desempenha o mesmo papel de $u(z)$, podemos então, admitir ainda que

$$u(k+iy) \in L^{P_k}_{\star}(E_k) \quad .$$

Definindo-se,

$$U(t) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} t^{-(s+iy)} t^\Theta u(s+iy) dy$$

com t em $\mathbb{R}_+^n$ e s e y em $\mathbb{R}^n$, encontramos

$$a = \int_{\mathbb{R}_+^n} U(t) d_\star t$$

e

$$t^{k-\Theta} U(t) \in L^{P'_k}_{\star}(E_k) \quad .$$

Agora pela definição 2.1.5 concluímos que $a \in \mathbb{IE}_{\Theta, \mathbb{IP}}$.

Quando os elementos da família admissível $\mathbb{IE}$ forem espaços de Hilbert temos o resultado.

2.2.6. COROLÁRIO. Se $\mathbb{IH} = \{H_k | k \in \mathbb{N}\}$ é uma família admissível de espaços de Hilbert, então,

$$(1) \quad \mathcal{H}_{\Theta, 2} = \mathcal{H}_{\Theta}$$

onde $2 = (2, 2, \dots, 2)$.

DEMONSTRAÇÃO. Desde que os espaços de Hilbert são do tipo $2 = (2, 2, \dots, 2)$ pelo teorema imediatamente anterior temos

$$\mathcal{H}_{\Theta, 2} \subset \mathcal{H}_{\Theta} \subset \mathcal{H}_{\Theta, 2}$$

e então segue o resultado.

2.3. APLICAÇÕES

2.3.1. Sejam $M = (m_1, \dots, m_n)$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ em $\mathbb{N}^n$ e $1 < p = (p_1, \dots, p_n) < \infty$. Consideremos os espaços de Sobolev-Nikols'kii (ver Nikols'kii [1]):

$$(1) \quad W^{M, P} = W^{M, P}(\mathbb{R}^n) = \{u \in S'(\mathbb{R}^n) \mid Du^{\alpha} \in L^P(\mathbb{R}^n), \alpha \leq M\},$$

(lembramos que $\alpha \leq M$ se, e so se, $\alpha_j \leq m_j$, $j = 1, 2, \dots, n$) e para $S = (s_1, \dots, s_n)$ os espaços de potencial de Lizorkin-Nikols'kii (ver P.I. Lizorkin-S.M. Nikols'kii [1]):

$$(2) \quad H^{S, P} = H^{S, P}(\mathbb{R}^n) = \{u \in S'(\mathbb{R}^n) \mid \bar{F} \prod_{j=1}^n (1+|x_j|)^2)^{s_j/2} Fu \in L^P(\mathbb{R}^n)\}.$$

É claro que $W^{O, P} = H^{O, P} = L^P$ ($O = (0, \dots, 0)$).

Agora, dado $M = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{R}^n$, seja $M \circ k = (m_1 k_1, \dots, m_n k_n)$, onde $k = (k_1, \dots, k_n) \in \square$. Colocamos então,

$$(3) \quad B_Q^{S,P} = (W^{M \circ k, P} | k \in \square)_{\Theta, Q}$$

onde $1 < P = (p_1, \dots, p_n) < \infty$, $1 \leq Q = (q_1, \dots, q_n) \leq \infty$, $S = (s_1, \dots, s_n)$ e $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ com $\theta_j = s_j/m_j$, $0 < s_j < m_j$, $j = 1, \dots, n$.

Por outro lado, desde que os espaços $W^{M,P}$ e $H^{M,P}$ são, como conseqüências do teorema de Mihlin-Lizorkin (ver Lizorkin [1] e Lizorkin-Nikol'skii [1]) isomorfos, temos

$$H^{S,P} = \{W^{M \circ k, P} | k \in \square\}_{\Theta}$$

onde $S, M \circ k$ e P são dados como acima.

O teorema de Mihlin-Lizorkin implica também, que os espaços $W^{S,P}$ e $H^{S,P}$ são isomorfos a L^P . Assim, se $1 \leq p_n \leq \dots \leq p_1 \leq 2$ e $P = (p_1, \dots, p_n)$, então os espaços $W^{S,P}$ e $H^{S,P}$ são do tipo P . Portanto, pelo teorema 2.2.5 temos,

$$(4) \quad B_P^{S,P} \subset H^{S,P}$$

onde $1 \leq p_n \leq \dots \leq p_1 \leq 2$. Também, pelo mesmo fato temos,

$$(5) \quad H^{S,P'} \subset B_P^{S,P'}$$

onde $2 \leq p_1 \leq \dots \leq p_n < \infty$ e $P = (p_1, \dots, p_n)$. Ainda, do corolário 2.2.6 temos,

$$(6) \quad H^{S,2} = B_2^{S,2}$$

onde $2 = (2, 2, \dots, 2)$.

As inclusões (4) e (5) conservam-se para $P = 1$ e $P' = \infty$, mas não pelo teorema 2.2.5.

CAPÍTULO III

O MÉTODO COMPLEXO DE INTERPOLAÇÃO (II)

Neste capítulo apresentaremos um segundo método complexo de interpolação, para 2^n espaços de Banach, seguindo as linhas gerais de A.P. Calderón [2]. Dada a família admissível $\mathcal{IE} = (E_k | k \in \square)$, de espaços de Banach, os espaços gerados por este segundo método serão denotados por $\mathcal{IE}^\Theta$.

O objetivo da introdução destes espaços prende-se ao estudo da dualidade dos espaços $\mathcal{IE}_\Theta$. Entretanto, neste capítulo, nos restringiremos ao estudo dos espaços $\mathcal{IE}^\Theta$. Nos capítulos subsequentes serão estudadas suas relações com os espaços $\mathcal{IE}_\Theta$ e suas conexões com o problema da dualidade.

Um resultado essencial para o desenvolvimento deste capítulo e por conseguinte, de nosso trabalho, é um teorema do tipo módulo máximo inserido no lema 3.2.2. No teorema 3.3.5, mostramos que o espaço $\mathcal{IE}^\Theta$ tem a propriedade de interpolação. Não conseguimos, en tretanto, mostrar que esta interpolação é exata. Porém, não precisaremos de um resultado deste tipo no presente trabalho.

Finalmente apresentamos algumas propriedades dos espaços $\mathcal{IE}^\Theta$ para o caso $n = 2$.

3.1. GENERALIDADES

Sendo $h = (h_1, \dots, h_n)$ e $t = (t_1, \dots, t_n)$ n-uplas de escalares (reais ou complexos) e $k = (k_1, \dots, k_n) \in \square$, lembramos que $|k| = \sum_{j=1}^n k_j$ e $h \circ t = (h_1 t_1, \dots, h_n t_n)$.

3.1.1. Seja f uma função de n -variáveis. A diferença parcial será denotada por,

$$\Delta_j^{h_j} f(t) = f(t_1, \dots, t_{j-1}, t_j + h_j, t_{j+1}, \dots, t_n) - f(t_1, \dots, t_n)$$

e a diferença mista por,

$$\Delta^h f(t) = \Delta_1^{h_1} \dots \Delta_n^{h_n} f(t).$$

Prova-se, usando indução sobre o número de variáveis, que

$$\Delta^h f(t) = \sum_{k_1=0}^1 \dots \sum_{k_n=0}^1 (-1)^{n-(k_1+\dots+k_n)} f(t_1+k_1 h_1, \dots, t_n+k_n h_n)$$

ou seja,

$$(1) \quad \Delta^h f(t) = \sum_{k \in \square} (-1)^{n-|k|} f(t + k \circ h)$$

usando uma notação mais condensada porém, mais prática.

3.2. O ESPAÇO $\tilde{H}(IE)$

Daremos agora um segundo método complexo de interpolação para 2^n espaços de Banach. Este método está baseado em um espaço de funções analíticas definido a seguir.

3.2.1. DEFINIÇÃO. Seja uma família admissível, $IE = (E_k | k \in \square)$ de

espaços de Banach em relação a um mesmo espaço vetorial topológico Hausdorff V . O espaço $\bar{H}(\mathbb{IE})$ é definido como sendo constituído de todas as funções f definidas na n -faixa S_n , com valores em $\Sigma\mathbb{IE}$ satisfazendo as condições,

$$(1) \quad \|f(z)\|_{\Sigma\mathbb{IE}} \leq C \prod_{j=1}^n (1+|z_j|) \quad , \quad z = (z_1, \dots, z_n) \in S_n \quad ,$$

$$(2) \quad f \text{ é } \Sigma\mathbb{IE} - \text{contínua em } S_n \quad ,$$

$$(3) \quad f \text{ é } \Sigma\mathbb{IE} - \text{holomorfa (analítica) em } S_n^0 \quad ,$$

$$(4) \quad \Delta^{ih} f(k+it) \in E_k \quad , \quad \forall t, h \in \mathbb{R}^n \quad \text{e} \quad k \in \square,$$

e

$$\|f\|_{\bar{H}(\mathbb{IE})} = \max_{k \in \square} \sup_{t, h} \left\| \frac{\Delta^{ih} f(k + it)}{\prod_{j=1}^n h_j} \right\|_{E_k} < \infty \quad ,$$

onde $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$, $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ e $h_j \neq 0$ ($j = 1, \dots, n$).

3.2.2. TEOREMA. O espaço $\bar{H}(\mathbb{IE})$ é um espaço vetorial em relação as operações usuais de adição de função e multiplicação por escalar e ainda, $\|\cdot\|_{\bar{H}(\mathbb{IE})}$ é uma semi-norma em $\bar{H}(\mathbb{IE})$.

DEMONSTRAÇÃO. Sejam f e g duas funções de $\overline{H}(\mathbb{I}\mathbb{E})$. As condições 3.2.1(1), 3.2.1(2) e 3.2.1(3) verificam-se imediatamente para a função $f + \lambda g$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Também,

$$\Delta^{ih}(f+\lambda g)(k+it) = \Delta^{ih}f(k+it) + \lambda \cdot \Delta^{ih}g(k+it) \in E_k, \quad k \in \square.$$

Ainda,

$$\begin{aligned} \|f+\lambda g\|_{\overline{H}(\mathbb{I}\mathbb{E})} &= \max_{k \in \square} \sup_{t,h} \left\| \frac{\Delta^{ih}(f+\lambda g)(k+it)}{\prod_{j=1}^n h_j} \right\|_{E_k} \\ &\leq \max_k \sup_{t,h} \left\| \frac{\Delta^{ih}f(k+it)}{\prod_{j=1}^n h_j} \right\|_{E_k} + |\lambda| \max_k \sup_{t,h} \left\| \frac{\Delta^{ih}g(k+it)}{\prod_{j=1}^n h_j} \right\|_{E_k} \\ &= \|f\|_{\overline{H}(\mathbb{I}\mathbb{E})} + |\lambda| \|g\|_{\overline{H}(\mathbb{I})} \end{aligned}$$

ou seja,

$$(1) \quad \|f+\lambda g\|_{\overline{H}(\mathbb{I}\mathbb{E})} \leq \|f\|_{\overline{H}(\mathbb{I}\mathbb{E})} + |\lambda| \|g\|_{\overline{H}(\mathbb{I}\mathbb{E})},$$

acarretando que

$$(2) \quad \|f+\lambda g\|_{\overline{H}(\mathbb{I}\mathbb{E})} < \infty.$$

Assim $f+\lambda g$ pertence ao espaço $\overline{H}(\mathbb{I}\mathbb{E})$.

Agora, da definição $\| \cdot \|_{\bar{H}(\mathbb{I}\mathbb{E})}$ e da relação (1) em $\lambda = 1$ segue que $\| \cdot \|_{\bar{H}(\mathbb{I}\mathbb{E})}$ satisfaz os axiomas que definem uma semi-norma.

Evidentemente $\| \cdot \|_{\bar{H}(\mathbb{I}\mathbb{E})}$ não define uma norma em $\bar{H}(\mathbb{I}\mathbb{E})$, pois, a função $f(z) = x$, com $x \in \cap \mathbb{I}\mathbb{E}$, não nulo está em $\bar{H}(\mathbb{I}\mathbb{E})$ mas, $\|f\|_{\bar{H}(\mathbb{I}\mathbb{E})} = 0$. É nosso propósito definir, a partir desta semi-norma, uma norma em $\bar{H}(\mathbb{I}\mathbb{E})$. Para tanto seja M o subespaço vetorial,

$$M = \{f \mid f \in \bar{H}(\mathbb{I}\mathbb{E}) , \quad \|f\|_{\bar{H}(\mathbb{I}\mathbb{E})} = 0\}$$

de $\bar{H}(\mathbb{I}\mathbb{E})$ e, consideremos o espaço quociente $\bar{H}(\mathbb{I}\mathbb{E})/M$. Um elemento do espaço quociente será denotado por $\bar{f}$ ($f \in \bar{H}(\mathbb{I}\mathbb{E})$) e sua norma será,

$$\|\bar{f}\| = \inf\{\|f+g\|_{\bar{H}(\mathbb{I}\mathbb{E})} \mid g \in M\}.$$

Também, é um resultado de análise funcional que

$$\|\bar{f}\| = \|f\|_{\bar{H}(\mathbb{I}\mathbb{E})}$$

para toda f em $\bar{H}(\mathbb{I}\mathbb{E})$.

Portanto se identificarmos os elementos do subespaço vetorial M , podemos considerar $\| \cdot \|_{\bar{H}(\mathbb{I}\mathbb{E})}$ como sendo uma norma em $\bar{H}(\mathbb{I}\mathbb{E})$.

Para o desenvolvimento deste capítulo o resultado seguinte vai desempenhar um papel fundamental.

3.2.3. LEMA. Sejam F um espaço de Banach complexo e f uma função com valores em F , definida e contínua na n -faixa S_n e holomorfa

em S_n^0 tal que para números reais a_j e A_j , com $a_j < 1$ ($j=1,2,\dots,n$) temos

$$(1) \quad \|f(z)\|_F = \|f(z_1, \dots, z_n)\|_F \leq \exp\left\{\sum_{j=1}^n A_j \exp(a_j |y_j|)\right\}$$

onde $z = (z_1, \dots, z_n) \in S_n$ e $z_j = x_j + iy_j$ ($j=1, \dots, n$). Se

$$(2) \quad \|f(k+iy)\|_F \leq M$$

para todo $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ e para todo $k \in \mathbb{Q}$ então,

$$(3) \quad \|f(z)\|_F \leq M$$

para todo $z \in S_n$.

DEMONSTRAÇÃO. Seja b_j um número positivo tal que $a_j < b_j < 1$ ($j=1, \dots, n$). Para $\varepsilon > 0$ definimos

$$h_\varepsilon(z) = h_\varepsilon(z_1, \dots, z_n) = \exp\left\{\sum_{j=1}^n -\varepsilon(e^{ib_j z_j} + e^{-ib_j z_j})\right\}$$

para $z = (z_1, \dots, z_n)$ em S_n . A função h_ε é analítica em S_n .

Como $0 \leq x_j \leq 1$ e $0 < b_j < 1$ temos $0 \leq b_j x_j \leq 1$ e então, $\cos(b_j x_j) > \delta > 0$, para $j = 1, \dots, n$. Assim

$$\operatorname{Re}[-\varepsilon(e^{ib_j z_j} + e^{-ib_j z_j})] = -\varepsilon(e^{b_j y_j} + e^{-b_j y_j}) \cos(b_j x_j) < -\varepsilon \delta (e^{b_j y_j} + e^{-b_j y_j})$$

e portanto,

$$(4) \quad |h_\varepsilon(z)| \leq \exp\left\{\sum_{j=1}^n -\varepsilon\delta(e^{b_j y_j} + e^{-b_j y_j})\right\} < 1$$

para todo z em S_n . Deste fato e de (2) obtemos

$$\|h_\varepsilon(k+iy)f(k+iy)\|_F \leq M$$

qualquer que seja $y = (y_1, \dots, y_n)$ em $\mathbb{R}^n$ e $k = (k_1, \dots, k_n)$ em $\square$.

Também, para todo $z = (z_1, \dots, z_n)$ em S_n , da primeira desigualdade em (4) e de (1) obtemos

$$\|h_\varepsilon(z)f(z)\|_F \leq \exp\left\{\sum_{j=1}^n [A_j e^{a_j |y_j|} - \varepsilon\delta(e^{b_j y_j} + e^{-b_j y_j})]\right\}.$$

Desde que $a_j < b_j$ segue que o lado direito da desigualdade acima tende a zero quando $y_j \rightarrow \pm\infty$ ($j = 1, \dots, n$). Assim

$$\|h_\varepsilon(z)f(z)\|_F \rightarrow 0$$

quando $y_j \rightarrow \pm\infty$ ($j = 1, \dots, n$). Isto implica que, para cada j , existe um número positivo m_j tal que

$$\|h_\varepsilon(z)f(z)\|_F < M$$

desde que $z_j = x_j + iy_j$ e $|y_j| > m_j$, ou seja,

$$\|h_\varepsilon(z)f(z)\|_F < M$$

para todo $z \in S_n \setminus R_1 \times \dots \times R_n$, onde R_j é o retângulo de vértices $k_j \pm im_j$, $k_j = 0, 1$ ($j = 1, \dots, n$). Desde que $R_1 \times \dots \times R_n \subset \mathbb{C}^n$ é compacto e $h_\varepsilon f$ é contínua em S_n , segue que $h_\varepsilon f$ é limitada em S_n . Portanto, pelo lema 1.2.2 segue que

$$(5) \quad \|h_\varepsilon(z) f(z)\|_F \leq M$$

para todo $z \in S_n$.

Por outro lado, como

$$|h_\varepsilon(z)| = \exp\left\{\sum_{j=1}^n -\varepsilon(e^{b_j y_j} + e^{-b_j y_j}) \cos(b_j x_j)\right\},$$

segue que $|h_\varepsilon(z)| \rightarrow 1$, quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Usando este fato em (5) obtemos

$$\|f(z)\|_F \leq M$$

para todo $z \in S_n$.

Assim completamos a demonstração do lema.

3.2.4. PROPOSIÇÃO. Se f pertence a $\bar{H}(\mathbb{IE})$ então,

$$(1) \quad \left\| \frac{\Delta^{ih} f(z)}{\prod_{j=1}^n h_j} \right\|_{\Sigma \mathbb{IE}} \leq \|f\|_{\bar{H}(\mathbb{IE})}$$

para todo z em S_n e $h = (h_1, \dots, h_n)$ com h_j real não nulo, $j = 1, 2, \dots, n$.

DEMONSTRAÇÃO. Inicialmente definimos a função g em S_n pondo

$$g(z) = \frac{\Delta^{ih} f(z)}{\prod_{j=1}^n h_j} .$$

De 3.1.1(1) escrevemos

$$g(z) = \frac{1}{\prod_{j=1}^n h_j} \sum_{k \in \square} (-1)^{n-|k|} f(z+ik \circ h) .$$

Desde que, f pertence ao espaço $\bar{H}(\mathbb{IE})$ segue que g é $\Sigma\mathbb{IE}$ - contínua em S_n e holomorfa em S_n^o . Pelo fato de $g(k+it)$ pertencer a E_k obtemos,

$$\|g(k+it)\|_{\Sigma\mathbb{IE}} \leq \|g(k+it)\|_{E_k} \leq \|f\|_{\bar{H}(\mathbb{IE})} ,$$

para todo k em $\square$. Também, da definição 3.2.1(1), sendo $z = (z_1, \dots, z_n)$ em S_n com $z_j = x_j + iy_j$, segue que

$$\begin{aligned} \|g(z)\|_{\Sigma\mathbb{IE}} &\leq \frac{1}{\prod_{j=1}^n |h_j|} \|\Delta^{ih} f(z)\|_{\Sigma\mathbb{IE}} \leq \frac{1}{\prod_{j=1}^n |h_j|} \sum_{k \in \square} \|f(z+ik \circ h)\|_{\Sigma\mathbb{IE}} \\ &\leq \frac{c}{\prod_{j=1}^n |h_j|} \sum_{k \in \square} \left[\prod_{j=1}^n (1+|z_j+ik_j h_j|) \right] \leq \frac{c}{\prod_{j=1}^n |h_j|} \sum_{k \in \square} \left[\prod_{j=1}^n (1+|h_j|+|z_j|) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{c}{\prod_{j=1}^n |h_j|} \sum_{k \in \mathbb{Q}} \left[\prod_{j=1}^n (1+|h_j|)(1+|z_j|) \right] \\
&\leq 2^n c \prod_{j=1}^n \left(\frac{1+|h_j|}{|h_j|} \right) \prod_{j=1}^n (1+|z_j|) \leq c_1 \prod_{j=1}^n (2+|y_j|) \\
&= 2^n c_1 \prod_{j=1}^n \left(1 + \frac{1}{2}|y_j| \right) \leq c_2 \prod_{j=1}^n \left[\exp(\exp \frac{1}{2}|y_j|) \right]
\end{aligned}$$

Assim,

$$\|g(z)\|_{\Sigma \mathbb{IE}} \leq c_2 \cdot \exp \left[\sum_{j=1}^n \exp \left(\frac{1}{2} |y_j| \right) \right]$$

para todo z em S_n . Pelo Lema 3.2.3 segue então que

$$\|g(z)\|_{\mathbb{IE}} \leq \|f\|_{\bar{H}(\mathbb{IE})}$$

para todo $z \in S_n$.

Fica, deste modo, provado o resultado.

3.2.5. COROLÁRIO. Se f pertence ao espaço $\bar{H}(\mathbb{IE})$ então,

$$(1) \quad \left\| \frac{\partial^n f}{\partial z_1 \dots \partial z_n} (z_1, \dots, z_n) \right\|_{\Sigma \mathbb{IE}} \leq \|f\|_{\bar{H}(\mathbb{IE})}$$

para todo $z = (z_1, \dots, z_n)$ em S_n .

DEMONSTRAÇÃO. Basta tomar sucessivamente, o limite em 3.2.4(1) com $h_j \rightarrow 0$ e $j = 1, \dots, n$.

3.2.6. PROPOSIÇÃO. (desigualdade do valor médio). Seja f em $\bar{H}(\mathbb{I}\mathbb{E})$ $z = (z_1, \dots, z_n) \in S_n^0$ e $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{C}^n$ de modo que o intervalo $[z_j, z_j + h_j]$ ($j = 1, \dots, n$) esteja contido em S_1^0 . Então

$$(1) \|\Delta^h f(z)\|_{\Sigma \mathbb{I}\mathbb{E}} \leq \prod_{j=1}^n |h_j| \sup_{\substack{0 < t_j < 1 \\ j=1, \dots, n}} \left\| \frac{\partial^n f}{\partial z_1 \dots \partial z_n} (z_1 + t_1 h_1, \dots, z_n + t_n h_n) \right\|_{\Sigma \mathbb{I}\mathbb{E}}.$$

DEMONSTRAÇÃO. A prova pode ser feita pelo processo de indução. Para $n = 1$ temos a desigualdade clássica do valor médio. Suponhamos então o resultado válido para funções com n variáveis. Para provar agora, a desigualdade para funções f , com $(n+1)$ -variáveis definimos a função

$$g(z_1, \dots, z_n) = f(z_1, \dots, z_n, z_{n+1} + h_{n+1}) - f(z_1, \dots, z_n, z_{n+1})$$

e usamos a hipótese de indução para a função g .

3.2.7. COROLÁRIO. Seja f um elemento de $\bar{H}(\mathbb{I}\mathbb{E})$. Então

$$(1) \|\Delta^z f(0)\|_{\Sigma \mathbb{I}\mathbb{E}} \leq \prod_{j=1}^n |z_j| \|f\|_{\bar{H}(\mathbb{I}\mathbb{E})},$$

para todo $z = (z_1, \dots, z_n)$ em S_n^0 .

DEMONSTRAÇÃO. Da proposição 3.2.6 e do corolário 3.2.5, temos

$$\|\Delta^z f(\frac{1}{m}, \dots, \frac{1}{m})\|_{\Sigma \mathbb{IE}} \leq \prod_{j=1}^n |z_j| \|f\|_{\overline{H}(\mathbb{IE})}$$

onde m é um número inteiro positivo. A seguir, fazendo $m \rightarrow \infty$, da continuidade da função f obtemos

$$\|\Delta^z f(0)\|_{\Sigma \mathbb{IE}} \leq \prod_{j=1}^n |z_j| \|f\|_{\overline{H}(\mathbb{IE})}$$

e a demonstração do corolário está terminada.

A desigualdade 3.2.7(1) é verdadeira também, para elementos z da fronteira de S_n , isto é, para elementos da forma $z=(z_1, \dots, z_n)$, onde $z_j = k_j + iy_j$ ($k_j = 0$ ou 1) para algum j escolhido no conjunto $\{1, \dots, n\}$. Para provarmos este fato consideremos $w=(w_1, \dots, w_n)$ de modo que $w_j = z_j$ se $z_j \in S_1$ e, $w_j = k_j + \frac{1}{m} + iy_j$ se $z_j = k_j + iy_j$. Assim $w \in S_n$. Pelo corolário 3.2.7, temos

$$\|\Delta^w f(0)\|_{\Sigma \mathbb{IE}} \leq \prod_{j=1}^n |w_j| \|f\|_{\overline{H}(\mathbb{IE})}$$

Usando a continuidade de f em S_n obtemos,

$$\|\Delta^z f(0)\|_{\Sigma \mathbb{IE}} \leq \prod_{j=1}^n |z_j| \|f\|_{\overline{H}(\mathbb{IE})}$$

Temos então, provado o seguinte resultado,

3.2.8. PROPOSIÇÃO. Para toda função f em $\bar{H}(\mathbb{IE})$

$$(1) \quad \|\Delta^z f(0)\|_{\Sigma \mathbb{IE}} \leq \prod_{j=1}^n |z_j| \|f\|_{\bar{H}(\mathbb{IE})}$$

qualquer que seja z em S_n .

3.2.9. TEOREMA. O espaço $\bar{H}(\mathbb{IE})$ é completo em relação a norma $\|\cdot\|_{\bar{H}(\mathbb{IE})}$.

DEMONSTRAÇÃO. Seja $(f_r)_{r \in \mathbb{IN}}$ uma sequência de Cauchy em $\bar{H}(\mathbb{IE})$, segundo a norma $\|\cdot\|_{\bar{H}(\mathbb{IE})}$ e $z = (z_1, \dots, z_n) \in S_n$. Da proposição

3.2.8, temos

$$(1) \quad \|\Delta^z(f_r - f_p)(0)\|_{\Sigma \mathbb{IE}} \leq \prod_{j=1}^n |z_j| \|f_r - f_p\|_{\bar{H}(\mathbb{IE})}.$$

Assim a sequência, $(\Delta^z f_r(0))_{r \in \mathbb{IN}}$ é uma sequência de Cauchy no espaço de Banach $\Sigma \mathbb{IE}$ e então, converge a um elemento $f(z)$ em $\Sigma \mathbb{IE}$.

Mostraremos que a função f é um elemento de $\bar{H}(\mathbb{IE})$. Considere_o mos então, um sub-conjunto compacto K , de S_n . Portanto, se $z = (z_1, \dots, z_n)$ está em K segue que $|z_j| \leq c$ para $j=1, \dots, n$. Então de (1), conseguimos

$$(2) \quad \|\Delta^z f_r(0) - \Delta^z f_p(0)\|_{\Sigma \mathbb{IE}} \leq c^n \|f_r - f_p\|_{\bar{H}(\mathbb{IE})}.$$

Desde que, a sequência $(f_r)_{r \in \mathbb{IN}}$ é uma sequência de Cauchy em $\bar{H}(\mathbb{IE})$ e a sequência $(\Delta^z f_r(0))_{r \in \mathbb{IN}}$ converge para $f(z)$ em $\Sigma \mathbb{IE}$,

a desigualdade (2) nos dá que a sequência $(\Delta^z f_\ell(0))_{\ell \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente para f em cada compacto K de S_n . Segue então que f é holomorfa em S_n . Para a continuidade de f fazemos raciocínio análogo ao anterior tomando conjuntos compactos em S_n . Assim as condições (2) e (3) da definição 3.2.1 estão verificadas. Verificaremos agora, a condição (1) da mesma definição. Desde que, $(\Delta^z f_r(0))_{r \in \mathbb{N}}$ converge para $f(z)$ em $\Sigma \mathbb{E}$ temos

$$\|f(z) - \Delta^z f_r(0)\|_{\Sigma \mathbb{E}} < 1$$

para todo $r \in \mathbb{N}$ e $r \geq r_0$, para algum $r_0 \in \mathbb{N}$. Assim, como $f_{r_0} \in \bar{H}(\mathbb{E})$ temos

$$\|f(z)\|_{\Sigma \mathbb{E}} < 1 + \|\Delta^z f_{r_0}(0)\|_{\Sigma \mathbb{E}} \leq 1 + \sum_{k \in \square} \|f_{r_0}(k \circ z)\|_{\Sigma \mathbb{E}}$$

$$\leq \prod_{j=1}^n (1 + |z_j|) + c \sum_{k \in \square} \prod_{j=1}^n (1 + |z_j|)$$

$$= (1 + c \cdot 2^n) \prod_{j=1}^n (1 + |z_j|)$$

para todo $z = (z_1, \dots, z_n)$ em S_n .

Nosso próximo passo será a verificação da condição (4) da definição 3.2.1. Desde que,

$$\|f_r - f_p\|_{\bar{H}(\mathbb{E})} = \max_{k \in \square} \sup_{t, h} \left\| \frac{\Delta^{ih(f_r - f_p)}(k + it)}{\prod_{j=1}^n h_j} \right\|_{E_k},$$

e a sequência $(f_r)_{r \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy em $\bar{H}(\mathbb{IE})$ concluímos que a sequência $(\Delta^{ih} f_r(k+it))_{r \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy no espaço de Banach E_k , onde $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$, $h_j \neq 0$ $j = 1, \dots, n$. Mas,

$$\Delta^{ih} f_r(k+it) = \sum_{j \in \square} (-1)^{n-|j|} \Delta^{k+it+i(j \circ h)} f_r(0)$$

e então, a sequência $(\Delta^{ih} f_r(k+it))_{r \in \mathbb{N}}$ converge ao elemento $\sum_{j \in \square} (-1)^{n-|j|} f(k+it+i(j \circ h)) = \Delta^{ih} f(k+it)$, no espaço $\Sigma \mathbb{IE}$, pois a sequência $(\Delta^z f_r(0))_{r \in \mathbb{N}}$ converge, em $\Sigma \mathbb{IE}$, ao elemento $f(z)$. Pelo fato de E_k estar imerso continuamente em $\Sigma \mathbb{IE}$ obtemos,

$$\Delta^{ih} f(k+it) \in E_k$$

para todo $k \in \square$.

Para concluirmos que $f \in \bar{H}(\mathbb{IE})$, resta-nos verificar que

$$\|f\|_{\bar{H}(\mathbb{IE})} = \max_{k \in \square} \sup_{t, h} \left\| \frac{\Delta^{ih} f(k+it)}{\prod_{j=1}^n h_j} \right\|_{E_k}$$

é finito. Desde que $(f_r)_{r \in \mathbb{N}}$ é sequência de Cauchy, de (3), obtemos

$$(4) \quad \left\| \frac{\Delta^{ih} f_r(k+it)}{\prod_{j=1}^n h_j} - \frac{\Delta^{ih} f_p(k+it)}{\prod_{j=1}^n h_j} \right\|_{E_k} < \varepsilon$$

para $\varepsilon > 0$ dado, r, p em $\mathbb{N}$ com $r \geq r_0$, $p \geq r_0$ para algum r_0 em $\mathbb{N}$ e, quaisquer que sejam $h = (h_1, \dots, h_n)$ em $\mathbb{R}^n$ com $h_j \neq 0$, $j = 1, \dots, n$ e t em $\mathbb{R}^n$. Passando ao limite em (4) com $p \rightarrow \infty$ temos,

$$(5) \quad \left\| \frac{\Delta^{ih} f_r(k+it)}{\prod_{j=1}^n h_j} - \frac{\Delta^{ih} f(k+it)}{\prod_{j=1}^n h_j} \right\|_{E_k} < \varepsilon$$

para $r \geq r_0$, quaisquer que sejam k em $\square$ e h e t nas condições anteriores. Assim,

$$\left\| \frac{\Delta^{ih} f(k+it)}{\prod_{j=1}^n h_j} \right\|_{E_k} \leq \varepsilon + \left\| \frac{\Delta^{ih} f_r(k+it)}{\prod_{j=1}^n h_j} \right\|_{E_k} \leq \varepsilon + \|f_r\|_{\bar{H}(\mathbb{IE})}$$

quaisquer que sejam $k \in \square$, $t \in \mathbb{R}^n$ e $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ com $h_j \neq 0$ ($j = 1, \dots, n$). Logo

$$\|f\|_{\bar{H}(\mathbb{IE})} \leq \varepsilon + \|f_r\|_{\bar{H}(\mathbb{IE})} < \infty$$

ou seja,

$$f \in \bar{H}(\mathbb{IE})$$

Para encerrar a demonstração vamos mostrar a seguir que, a sequência $(f_r)_{r \in \mathbb{N}}$ converge a f , no espaço $\bar{H}(\mathbb{IE})$. A relação (5) nos dá tudo o que queremos, pois,

$$\|f_r - f\|_{\bar{H}(\mathbb{IE})} = \max_k \sup_{t,h} \left\| \frac{\Delta^{ih} (f_r - f)(k+it)}{\prod_{j=1}^n h_j} \right\|_{E_k} \leq \varepsilon$$

para $r \geq r_0$.

Completamos assim a demonstração.

3.3. O ESPAÇO $\mathbb{IE}^\Theta = [\mathbb{IE}]^\Theta = [E_k | k \in \mathbb{Q}]^\Theta$.

Consideremos uma família admissível $\mathbb{IE} = (E_k | k \in \mathbb{Q})$, de espaços de Banach e $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ com $0 < \theta_j < 1$ $j=1, \dots, n$.

3.3.1. DEFINIÇÃO. O espaço $\mathbb{IE}^\Theta$ consiste de todos os elementos x do espaço $\Sigma \mathbb{IE}$ tal que

$$(1) \quad x = \frac{\partial^n f}{\partial z_1 \dots \partial z_n}(\Theta)$$

para alguma f em $\bar{H}(\mathbb{IE})$, ou seja,

$$\mathbb{IE}^\Theta = \{x \mid \exists f \in \bar{H}(\mathbb{IE}), \quad x = \frac{\partial^n f}{\partial z_1 \dots \partial z_n}(\Theta)\}.$$

É de verificação imediata que $\mathbb{IE}^\Theta$ é um subespaço vetorial de $\Sigma \mathbb{IE}$.

3.3.2. PROPOSIÇÃO. Para cada $x \in \mathbb{IE}^\Theta$,

$$(1) \quad \|x\|_{\mathbb{IE}^\Theta} = \|x\|^\Theta = \inf \{ \|f\|_{\bar{H}(\mathbb{IE})} \mid x = \frac{\partial^n f}{\partial z_1 \dots \partial z_n}(\Theta), f \in H(\mathbb{IE}) \}$$

está bem definido e equipa $\mathbb{IE}$ com uma norma.

DEMONSTRAÇÃO. Que $\|x\|^\Theta \geq 0$ segue da definição.

Suponhamos agora, que $\|x\|^\Theta = 0$. Então dado $\varepsilon > 0$, existe f em $\bar{H}(\mathbb{IE})$ tal que,

$$x = \frac{\partial^n f}{\partial z_1 \dots \partial z_n}(\Theta) \quad \text{e} \quad \|f\|_{\bar{H}(\mathbb{IE})} < \varepsilon$$

Do corolário 3.2.5 segue que

$$\|x\|_{\Sigma \mathbb{IE}} < \varepsilon$$

para todo $\varepsilon > 0$. Assim, $\|x\|_{\Sigma \mathbb{IE}} = 0$ e então $x = 0$.

Verificaremos que $\|\lambda x\|^\Theta = |\lambda| \|x\|^\Theta$, para todo λ em $\mathbb{C}$. Se $\lambda = 0$ a igualdade acima ocorre sem dificuldade. Vamos supor então $\lambda \neq 0$. Desde que $x \in \mathbb{IE}^\Theta$, podemos considerar uma função f em $\bar{H}(\mathbb{IE})$ tal que

$$(2) \quad x = \frac{\partial^n f}{\partial z_1 \dots \partial z_n}(\Theta)$$

$$\text{Logo, } \lambda x = \frac{\partial^n (\lambda f)}{\partial z_1 \dots \partial z_n}(\Theta) \quad \text{e então}$$

$$\|\lambda x\|^\Theta \leq \|\lambda f\|_{\bar{H}(\mathbb{IE})} = |\lambda| \|f\|_{\bar{H}(\mathbb{IE})}$$

Como a função f em $\bar{H}(\mathbb{IE})$ satisfazendo (2) é arbitrária segue que

$$\|\lambda x\|^\Theta \leq |\lambda| \|x\|^\Theta$$

Com raciocínio análogo prova-se que,

$$|\lambda| \|x\|^\Theta \leq \|\lambda x\|^\Theta$$

e isto é o que precisamos para a validade da homogeneidade.

Para a verificação da desigualdade triangular consideremos x e y em IE^Θ e duas funções f e g em $\bar{H}(IE)$ satisfazendo,

$$x = \frac{\partial^n f}{\partial z_1 \dots \partial z_n}(\Theta) \quad \text{e} \quad y = \frac{\partial^n g}{\partial z_1 \dots \partial z_n}(\Theta)$$

Logo, $x + y = \frac{\partial^n (f+g)}{\partial z_1 \dots \partial z_n}(\Theta)$ e então ,

$$\|x+y\|^\Theta \leq \|f+g\|_{\bar{H}(IE)} \leq \|f\|_{\bar{H}(IE)} + \|g\|_{\bar{H}(IE)}$$

Desde que f e g nas condições anteriores são arbitrárias segue que

$$\|x + y\|^\Theta \leq \|x\|^\Theta + \|y\|^\Theta$$

e então, o funcional é uma norma em IE^Θ .

3.3.3. TEOREMA. O espaço vetorial IE^Θ munido a norma $\|\cdot\|^\Theta$ torna-se um espaço de Banach.

DEMONSTRAÇÃO. Consideremos a aplicação linear T definida em $H(IE)$ por,

$$T(f) = \frac{\partial^n f}{\partial z_1 \dots \partial z_n}(\Theta)$$

Desde que, pela definição da norma $\| \cdot \|^\Theta$,

$$\|Tf\|^\Theta \leq \|f\|_{\bar{H}(IE)}$$

segue que T é uma aplicação linear limitada de $\bar{H}(IE)$ em IE^Θ . Se $x \in IE^\Theta$, existe então f em $\bar{H}(IE)$ tal que $x = \frac{\partial^n f}{\partial z_1 \dots \partial z_n}(\Theta)$ acarretando que, T é sobrejetora.

A aplicação linear T sendo contínua implica em que seu núcleo,

$$N(T) = \{f \in \bar{H}(IE) \mid Tf = 0\}$$

é um subespaço vetorial fechado de $\bar{H}(IE)$ e portanto o espaço quociente $\bar{H}(IE)/N(T)$ é um espaço de Banach. Agora a aplicação linear F definida em $\bar{H}(IE)/N(T)$ por

$$F(\bar{f}) = \frac{\partial^n f}{\partial z_1 \dots \partial z_n}(\Theta) = T(f)$$

está bem definida. De fato, se $\bar{f} = \bar{g}$ então, $f-g \in N(T)$ e portanto $T(f) = T(g)$, ou seja, $F(\bar{f}) = F(\bar{g})$. É claro também, que F é uma aplicação linear de $\bar{H}(IE)/N(T)$ sobre IE^Θ .

A seguir, mostraremos que F é uma isometria. Sem dificuldade verifica-se que os conjuntos,

$$A = \{ \|h\|_{\bar{H}(\mathbb{IE})} \mid h \in \bar{H}(\mathbb{IE}) , \frac{\partial^n h}{\partial z_1 \dots \partial z_n}(\Theta) = F(\bar{f}) \}$$

e

$$B = \{ \|f + g\|_{\bar{H}(\mathbb{IE})} \mid g \in N(T) \}$$

são iguais. Assim,

$$\|F(\bar{f})\|^\Theta = \inf A = \inf B = \|\bar{f}\|$$

provando que F é um isomorfismo isométrico de $\bar{H}(\mathbb{IE})/N(T)$ sobre $\mathbb{IE}^\Theta$. Sendo $\bar{H}(\mathbb{IE})/N(T)$ um espaço de Banach, acarretará finalmente que o espaço $\mathbb{IE}^\Theta$ também o será.

3.3.4. PROPOSIÇÃO. O espaço $\mathbb{IE}^\Theta$ é um espaço intermediário em relação a família admissível $\mathbb{IE} = (E_k \mid k \in \square)$ de espaços de Banach, isto é,

$$\cap \mathbb{IE} \subset \mathbb{IE}^\Theta \subset \cup \mathbb{IE}$$

com inclusão contínua.

DEMONSTRAÇÃO. Sendo x um elemento de $\cap \mathbb{IE}$, a função

$$f(z) = f(z_1, \dots, z_n) = z_1 \cdot z_2 \dots z_n \cdot x$$

pertence ao espaço $\bar{H}(\mathbb{IE})$ e então, $x = \frac{\partial^n f}{\partial z_1 \dots \partial z_n}(\Theta) \in \mathbb{IE}^\Theta$. Assim,

$$\begin{aligned} \|x\|^\Theta &\leq \|f\|_{\bar{H}(\mathbb{IE})} = \max_{k \in \square} \sup_{t, h} \left\| \frac{\Delta^{ih} f(k+it)}{\prod_{j=1}^n h_j} \right\|_{E_k} \\ &= \max_{k \in \square} \|x\|_{E_k} = \|x\|_{\cap \mathbb{IE}} \end{aligned}$$

pois,

$$\Delta^{ih} f(k+it) = [(i)^n \prod_{j=1}^n h_j] x$$

concluindo então, que a primeira inclusão é contínua.

Para provarmos a segunda inclusão, tomemos x em $\mathbb{IE}^\Theta$. Seja f uma função qualquer em $\bar{H}(\mathbb{IE})$ sob a condição,

$$x = \frac{\partial^n f}{\partial z_1 \dots \partial z_n}(\theta) \quad .$$

Do corolário 3.2.5, segue que

$$\|x\|_{\Sigma \mathbb{IE}} \leq \|f\|_{\bar{H}(\mathbb{IE})}$$

Desde que a função f nas condições anteriores é arbitrária temos,

$$\|x\|_{\Sigma \mathbb{IE}} \leq \|x\|^\Theta$$

e assim a segunda inclusão contínua está garantida.

3.3.5. TEOREMA. Os espaços $\mathbb{IE}^\Theta$ tem a propriedade de interpolação.

DEMONSTRAÇÃO. Sejam $IE = (E_k | k \in \square)$ e $IF = (F_k | k \in \square)$ duas famílias admissíveis de espaços de Banach em relação aos espaços ve toriais topológicos Hausdorff V e W , respectivamente. Consideremos uma aplicação linear T de ΣIE em ΣIF com a condição de que T é uma aplicação linear limitada de E_k em F_k com norma M_k , para todo k em $\square$. Mostraremos que T é também, uma aplicação linear limitada de IE^Θ em IF^Θ . É uma consequência das condições exigidas sobre a aplicação T que, ela é linear e limitada de ΣIE em ΣIF .

Provaremos tão somente que T é limitada de IE^Θ em IF^Θ . Seja, para tanto, x em IE^Θ . Dado $\varepsilon > 0$, consideremos f em $\bar{H}(IE)$ tais que,

$$(1) \quad x = \frac{\partial^n f}{\partial z_1 \dots \partial z_n}(\Theta) \quad \text{e} \quad \|f\|_{\bar{H}(IE)} < \|x\|^\Theta + \varepsilon.$$

Como consequência da aplicação linear T de ΣIE em ΣIF ser limitada, temos que a função g definida em S_n por,

$$g(z) = g(z_1, \dots, z_n) = T(f(z))$$

pertence ao espaço $\bar{H}(IF)$. De fato as condições (2) e (3) da definição 3.2.1 ocorrem naturalmente.

Para a condição 3.2.1(1) temos,

$$\begin{aligned} \|g(z)\|_{\Sigma IF} &= \|g(z_1, \dots, z_n)\|_{\Sigma IF} = \|T(f(z_1, \dots, z_n))\|_{\Sigma IF} \leq \|T\| \cdot \|f(z_1, \dots, z_n)\|_{\Sigma IE} \\ &\leq \|T\| \cdot \prod_{j=1}^n (1 + |z_j|) \end{aligned}$$

onde $\|T\| = \sup\{\|Tx\|_{\Sigma IF} \mid \|x\|_{\Sigma IE} \leq 1\}$.

Agora, desde que $f \in \bar{H}(IE)$ e $\Delta^{ih} g(k+it) = T(\Delta^{ih} f(k+it))$ segue que

$$\Delta^{ih} g(k+it) \in F_k$$

para todo $k \in \square$.

Finalmente,

$$\begin{aligned} \|g\|_{\bar{H}(IF)} &= \max_{k \in \square} \sup_{t, h} \left\| \frac{\Delta^{ih} g(k+it)}{\prod_{j=1}^n h_j} \right\|_{F_k} \\ &\leq \max_{k \in \square} \sup_{t, h} M_k \left\| \frac{\Delta^{ih} f(k+it)}{\prod_{j=1}^n h_j} \right\|_{E_k} \\ &\leq (\max_{k \in \square} M_k) \max_{k \in \square} \sup_{t, h} \left\| \frac{\Delta^{ih} f(k+it)}{\prod_{j=1}^n h_j} \right\|_{E_k} \\ &= (\max_{k \in \square} M_k) \|f\|_{\bar{H}(IE)} \end{aligned}$$

Assim,

$$(2) \quad \|g\|_{\bar{H}(IF)} \leq M \|f\|_{\bar{H}(IE)} < \infty$$

onde $M = \max_{k \in \square} M_k$. Portanto,

$$g \in \overline{H}(\mathbb{IF}).$$

Pelo fato da aplicação T ser linear e contínua de $\Sigma \mathbb{IE}$ em $\Sigma \mathbb{IF}$ temos,

$$\frac{\partial^n g}{\partial z_1 \dots \partial z_n}(\Theta) = T\left(\frac{\partial^n f}{\partial z_1 \dots \partial z_n}(\Theta)\right) = Tx$$

ou seja,

$$Tx \in \mathbb{IF}^\Theta.$$

Ainda, de (2) e da segunda parte de (1) temos,

$$\|Tx\|^\Theta \leq \|g\|_{\overline{H}(\mathbb{IF})} \leq M \|f\|_{\overline{H}(\mathbb{IE})} \leq M(\|x\|^\Theta + \varepsilon).$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário temos,

$$\|Tx\|^\Theta \leq M \|x\|^\Theta,$$

provando assim que T é uma aplicação linear limitada de $\mathbb{IE}^\Theta$ em $\mathbb{IF}^\Theta$.

3.4. PROPRIEDADES DOS ESPAÇOS $\mathbb{IE}^\Theta$.

Nesta seção daremos algumas propriedades dos espaços $\mathbb{IE}^\Theta$, para $n = 2$.

Seja $\mathbb{IE} = (E_k | k \in \square)$ uma família admissível de espaços de Banach e $\Theta = (\theta_1, \theta_2)$ com $0 < \theta_1, \theta_2 < 1$. Para $n=1$ e $n=2$ a família

IE será representada respectivamente por (E_0, E_1) e $(E_{00}, E_{10}, E_{01}, E_{11})$; o espaço $\bar{H}(IE)$ respectivamente por $\bar{H}(E_0, E_1)$ e $\bar{H}(E_{00}, E_{10}, E_{01}, E_{11})$ e o espaço IE^Θ respectivamente por $[E_0, E_1]^\Theta$ e $[E_{00}, E_{10}, E_{01}, E_{11}]^\Theta$.

3.4.1. PROPOSIÇÃO. Seja (E, F) um par admissível de espaços de Banach e, $0 < (\theta_1, \theta_2) < 1$. Então

$$(1) \quad [E, E; E; E]^{\theta_1 \theta_2} = E \quad (\text{com mesmas normas})$$

$$(2) \quad [E, F]^{\theta_1} \subset [E, F, E, F]^{\theta_1 \theta_2}$$

$$(3) \quad [E, F]^{\theta_2} \subset [E, E, F, F]^{\theta_1 \theta_2}$$

com inclusão contínua em (2) e (3).

DEMONSTRAÇÃO. A afirmativa (1) segue da proposição 3.3.4.

Para provar a afirmativa (2) consideremos x em $[E, F]^{\theta_1}$ e g um elemento de $\bar{H}(E, F)$ tal que, $g'(\theta_1) = x$ e $\|g\|_{\bar{H}(E, F)} < \|x\|^{\theta_1}_{[E, F]} + \varepsilon$, onde $\varepsilon > 0$ é arbitrário.

A função f definida em S_2 , por

$$f(z_1, z_2) = z_2 g(z_1)$$

pertence ao espaço $\bar{H}(E, F, E, F)$. De fato, sendo $IE = (E, F, E, F)$ temos

$$\|f(z_1, z_2)\|_{\Sigma IE} \leq \|f(z_1, z_2)\|_{E+F} = |z_2| \|g(z_1)\|_{E+F} \leq c(1+|z_1|)(1+|z_2|)$$

para todo (z_1, z_2) em S_2 .

A continuidade de f em S_2 e a analiticidade em S_2^0 são claras. Assim as condições (1), (2) e (3) da definição 3.2.1. são satisfeitas.

Agora sendo $k = (k_1, k_2) \in \square$ temos

$$\Delta^{i(h_1, h_2)} f((k_1, k_2) + i(t_1, t_2)) = ih_2 \Delta^{ih_1} g(k_1 + it_1)$$

Assim

$$\Delta^{i(h_1, h_2)} f(i(t_1, t_2)) \in E ; \Delta^{i(h_1, h_2)} f((1, 0) + i(t_1, t_2)) \in F$$

$$\Delta^{i(h_1, h_2)} f((0, 1) + i(t_1, t_2)) \in E ; \Delta^{i(h_1, h_2)} f((1, 1) + i(t_1, t_2)) \in F.$$

Também,

$$\left\| \frac{\Delta^{i(h_1, h_2)} f(i(t_1, t_2))}{h_1 h_2} \right\|_E = \left\| \frac{\Delta^{i(h_1, h_2)} f((0, 1) + i(t_1, t_2))}{h_1 h_2} \right\|_E = \left\| \frac{\Delta^{ih_1} g(it_1)}{h_1} \right\|_E$$

e

$$\left\| \frac{\Delta^{i(h_1, h_2)} f((1, 0) + i(t_1, t_2))}{h_1 h_2} \right\|_F = \left\| \frac{\Delta^{i(h_1, h_2)} f((1, 1) + i(t_1, t_2))}{h_1 h_2} \right\|_F = \left\| \frac{\Delta^{ih_1} g(1 + it_1)}{h_1} \right\|_F$$

Deste modo temos

$$\|f\|_{\bar{H}(E,F,E,F)} = \|g\|_{\bar{H}(E,F)} < \infty$$

Portanto, $f \in \bar{H}(E,F,E,F)$. Ainda, $\frac{\partial^2 f}{\partial z_1 \partial z_2}(\theta_1, \theta_2) = g'(\theta_1) = x$,
e então $x \in [E,F,E,F]^{\theta_1 \theta_2}$.

A continuidade da inclusão segue do fato:

$$\|x\|^{(\theta_1, \theta_2)} \leq \|f\|_{\bar{H}(E,F,E,F)} = \|g\|_{\bar{H}(E,F)} < \|x\|^{\theta_1} + \epsilon.$$

Como $\epsilon > 0$ é arbitrária obtemos

$$\|x\|^{(\theta_1, \theta_2)} \leq \|x\|^{\theta_1}.$$

Para demonstrar (3) procede-se de modo análogo mas com a função $f(z_1, z_2) = z_1 g(z_2)$.

Completa-se assim, a demonstração da proposição.

3.4.2. PROPOSIÇÃO. Seja $\mathbb{E} = (E_{00}, E_{10}, E_{01}, E_{11})$ uma família admissível de quatro espaços de Banach e $\Theta = (\theta_1, \theta_2)$ com $0 < \theta_j < 1$, $j = 1, 2$. Então,

$$(1) [E_{00}, E_{10}, E_{01}, E_{11}]^{\theta_1 \theta_2} = [E_{10}, E_{00}, E_{11}, E_{01}]^{(1-\theta_1) \theta_2}$$

$$(2) [E_{00}, E_{10}, E_{01}, E_{11}]^{\theta_1 \theta_2} = [E_{01}, E_{11}, E_{00}, E_{10}]^{\theta_1 (1-\theta_2)}$$

$$(3) [E_{00}, E_{10}, E_{01}, E_{11}]^{\theta_1 \theta_2} = [E_{11}, E_{01}, E_{10}, E_{00}]^{(1-\theta_1)(1-\theta_2)}$$

com normas equivalentes.

DEMONSTRAÇÃO. Inicialmente provaremos (1). Seja $x \in [E_{00}, E_{10}, E_{01}, E_{11}]^{\theta_1 \theta_2}$ e $g \in \tilde{H}(\mathbb{E})$ tal que $x = \frac{\partial^2 g}{\partial z_1 \partial z_2}(\theta_1, \theta_2)$. A função $f(z_1, z_2) = -g(1-z_1, z_2)$ pertence ao espaço $\tilde{H}(\mathbb{F})$, onde $\mathbb{F} = (E_{10}, E_{00}, E_{11}, E_{01})$. De fato,

$$\|f(z_1, z_2)\|_{\Sigma \mathbb{F}} = \|g(1-z_1, z_2)\|_{\Sigma \mathbb{E}} \leq c(1+|1-z_1|)(1+|z_2|)$$

$$c[(1+|z_1|)+(1+|z_1|)](1+|z_2|) = 2c(1+|z_1|)(1+|z_2|).$$

A continuidade e analiticidade de f respectivamente, em S_n e S_n^o seguem destas mesmas condições sobre g .

Não é difícil ver que

$$\Delta^{i(h_1, h_2)} f((k_1, k_2) + i(t_1, t_2)) = - \Delta^{i(-h_1, h_2)} g((1-k_1, k_2) + i(-t_1, t_2))$$

Deste fato, conseguimos

$$\Delta^{i(h_1, h_2)} f(i(t_1, t_2)) \in E_{10} \quad ; \quad \Delta^{i(h_1, h_2)} f((1, 0) + i(t_1, t_2)) \in E_{00}$$

$$\Delta^{i(h_1, h_2)} f((0, 1) + i(t_1, t_2)) \in E_{11} \quad ; \quad \Delta^{i(h_1, h_2)} f((1, 1) + i(t_1, t_2)) \in E_{01}$$

e

$$\|f\|_{\bar{H}(\mathbb{IF})} = \|g\|_{\bar{H}(\mathbb{IE})} < \infty$$

Portanto,

$$f \in H(\mathbb{IF}) = \bar{H}(E_{10}, E_{00}, E_{11}, E_{01})$$

Também,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z_1 \partial z_2}(z_1, z_2) = \frac{\partial^2 g}{\partial z_1 \partial z_2}(1-z_1, z_2)$$

e então,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z_1 \partial z_2}(1-\theta_1, \theta_2) = \frac{\partial^2 g}{\partial z_1 \partial z_2}(\theta_1, \theta_2) = x$$

e isto nos diz que $x \in [E_{10}, E_{00}, E_{11}, E_{01}]^{(1-\theta_1)\theta_2}$

Para obter a continuidade da inclusão fazemos,

$$\|x\|^{(1-\theta_1)\theta_2} \leq \|f\|_{\bar{H}(\mathbb{IF})} = \|g\|_{\bar{H}(\mathbb{IE})}.$$

Desde que, g em $\bar{H}(\mathbb{IE})$ foi tomada arbitrariamente temos,

$$\|x\|^{(1-\theta_1)\theta_2} \leq \|x\|^{\theta_1\theta_2}.$$

Até agora provamos que,

$$(4) \quad [E_{00}, E_{10}, E_{01}, E_{11}]^{\theta_1 \theta_2} \subset [E_{10}, E_{00}, E_{11}, E_{01}]^{(1-\theta_1) \theta_2}$$

e

$$(5) \quad \|x\|^{(1-\theta_1) \theta_2} \leq \|x\|^{\theta_1 \theta_2}, \text{ para } x \in [E_{00}, E_{10}, E_{01}, E_{11}]^{\theta_1 \theta_2}$$

Para obter a inclusão contrária usamos (4) e então, encontramos

$$[E_{10}, E_{00}, E_{11}, E_{01}]^{(1-\theta_1) \theta_2} \subset [E_{00}, E_{10}, E_{01}, E_{11}]^{(1-(1-\theta_1)) \theta_2}$$

ou seja,

$$[E_{10}, E_{00}, E_{11}, E_{01}]^{(1-\theta_1) \theta_2} \subset [E_{00}, E_{10}, E_{01}, E_{11}]^{\theta_1 \theta_2}$$

Para x em $[E_{10}, E_{00}, E_{11}, E_{01}]^{(1-\theta_1) \theta_2}$, de (5), obtemos

$$\|x\|^{\theta_1 \theta_2} = \|x\|^{(1-(1-\theta_1)) \theta_2} \leq \|x\|^{(1-\theta_1) \theta_2}$$

Fica assim demonstrado (1).

Para provar (2) procede-se, de modo idêntico trabalhando com a função $f(z_1, z_2) = -f(z_1, 1-z_2)$.

A prova de (3) é obtida aplicando-se (1) e (2).

CAPÍTULO IV

EQUIVALÊNCIA ENTRE OS ESPAÇOS DE INTERPOLAÇÃO

Neste capítulo demonstraremos que, sob certas condições, os espaços IE_θ e IE^θ coincidem. A inclusão $IE_\theta \subset IE^\theta$ é obtida sem a necessidade de hipóteses adicionais. A recíproca, isto é, a inclusão $IE^\theta \subset IE_\theta$ necessitará de uma hipótese suplementar, a saber, uma hipótese de reflexividade. Seja $IE = (E_k | k \in \square)$ a família de espaços de Banach em consideração. A hipótese de reflexividade será apenas sobre o espaço $E_0 \in IE$, ($0 = (0, \dots, 0) \in \square$). Então se E_0 for reflexivo vamos ter $IE_\theta = IE^\theta$. Incidentalmente, este resultado implicará que o método complexo para 2^n espaços de Banach não pode ser, em geral, reduzido a iteração do método complexo para pares de espaços de Banach.

A inclusão contínua $IE_\theta \subset IE^\theta$ seguirá sem dificuldade. Entretanto, a demonstração de que $IE^\theta \subset IE_\theta$ é demasiadamente longa e técnica. Dividiremos então, esta demonstração em diversos lemas.

4.1. A INCLUSÃO $IE_\theta \subset IE^\theta$

Faremos aqui a discussão da inclusão, $IE_\theta \subset IE^\theta$. A demonstração seguirá de modo natural, sem o auxílio de resultados mais elaborados.

4.1.1. TEOREMA. Sejam $IE = (E_k | k \in \square)$ uma família admissível de espaços de Banach e $0 < \theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) < 1$. Então,

$$(1) \quad \mathbb{IE}_\Theta \subset \mathbb{IE}^\Theta$$

e

$$(2) \quad \|x\|^\Theta \leq \|x\|_\Theta,$$

para todo x em $\mathbb{IE}_\Theta$.

DEMONSTRAÇÃO. Para x em $\mathbb{IE}_\Theta$ e, um número positivo ε , consideremos uma função f em $H(\mathbb{IE})$ tais que, $x = f(\Theta)$ e

$$(3) \quad \|f\|_{H(\mathbb{IE})} < \|x\|_\Theta + \varepsilon$$

A função g definida em S_n , pela expressão,

$$(4) \quad g(z) = g(z_1, \dots, z_n) = \int_{1/2}^{z_1} \dots \int_{1/2}^{z_n} f(u_1, \dots, u_n) du_n \dots du_1$$

(convergência em $\Sigma \mathbb{IE}$)

pertence a $\overline{H}(\mathbb{IE})$. De fato, sendo $M = \sup\{\|f(z)\|_{\Sigma \mathbb{IE}} \mid z \in S_n\}$ temos,

$$\|g(z)\|_{\Sigma \mathbb{IE}} \leq M|z_1^{-1/2}| \dots |z_n^{-1/2}| \leq M \prod_{j=1}^n (1+|z_j|),$$

para todo $z = (z_1, \dots, z_n)$ em S_n . Assim a condição (1) da definição 3.2.1 está satisfeita. As condições (2) e (3) da mesma definição seguem da continuidade de f em S_n e da sua analiticidade em $\mathbb{O}$ S_n , respectivamente. Para a verificação da condição (4) da definição

3.2.1, consideremos $t = (t_1, \dots, t_n)$ em $\mathbb{R}^n$, $h = (h_1, \dots, h_n)$ em $\mathbb{R}^n$ com $h_j \neq 0$, $j = 1, \dots, n$ e, observando que

$$\Delta_j^{h_j} g(k+it) = \int_{1/2}^{k_1+it_1} \dots \int_{1/2}^{k_{j-1}+it_{j-1}} \int_{k_j+it_j}^{k_j+i(t_j+h_j)} \int_{1/2}^{k_{j+1}+it_{j+1}} \dots \int_{1/2}^{k_n+it_n} f(u_1, \dots, u_n) \times \\ \times du_n, \dots, du_1$$

com $k = (k_1, \dots, k_n) \in \square$, obtemos

$$(5) \quad \Delta^{ih} g(k+it) = \int_{k_1+it_1}^{k_1+i(t_1+h_1)} \dots \int_{k_n+it_n}^{k_n+i(t_n+h_n)} f(u_1, \dots, u_n) du_n \dots du_1$$

ou seja,

$$\Delta^{ih} g(k+it) = (i)^n \int_{t_1}^{t_1+h_1} \dots \int_{t_n}^{t_n+h_n} f(k_1+is_1, \dots, k_n+is_n) ds_n \dots ds_1 \\ = (i)^n \int_{[t, t+h]} f(k+is) ds \quad (\text{convergência em } \Sigma IE)$$

onde $[t, t+h] = \bigtimes_{j=1}^n [t_j, t_j+h_j]$ é o produto cartesiano dos intervalos $[t_j, t_j+h_j]$ para $j = 1, \dots, n$. Desde que a função $f(k+it)$ é E_k -contínua, na variável t , e o espaço E_k está imerso continuamente no espaço de Banach ΣIE , segue que a integral da função $f(k+it)$ em $[t, t+h]$ converge, segundo a norma de E_k , e coincide com o valor da integral da mesma função $f(k+it)$ em $[t, t+h]$ segundo a norma de ΣIE , acarretando deste modo que

$$\Delta^{ih} g(k+it) \in E_k$$

para todo k em $\square$, quaisquer que sejam t e h em $\mathbb{R}^n$. Também da relação (5) obtemos

$$\left\| \frac{\Delta^{ih} g(k+it)}{\prod_{j=1}^n h_j} \right\|_{E_k} \leq \frac{1}{\prod_{j=1}^n |h_j|} \|f\|_{H(\mathbb{IE})}, \quad \prod_{j=1}^n |h_j| = \|f\|_{H(\mathbb{IE})} < \infty$$

para todo $k \in \square$. Daqui concluímos que

$$(6) \quad \|g\|_{\bar{H}(\mathbb{IE})} \leq \|f\|_{H(\mathbb{IE})} < \infty,$$

provando assim que g pertence ao espaço $\bar{H}(\mathbb{IE})$.

A seguir, da definição da função g , como dada em (4) temos,

$$\frac{\partial^n g}{\partial z_1 \dots \partial z_n}(z_1, \dots, z_n) = f(z_1, \dots, z_n)$$

e então,

$$x = f(\theta) = \frac{\partial^n g}{\partial z_1 \dots \partial z_n}(\theta) \in \mathbb{IE}^\theta.$$

Ainda mais, das desigualdades em (6) e (3), obtemos

$$\|x\|^\theta \leq \|g\|_{\bar{H}(\mathbb{IE})} \leq \|f\|_{H(\mathbb{IE})} < \|x\|_\theta + \varepsilon.$$

Desde que $\varepsilon > 0$ é arbitrário obtemos que,

$$\|x\|^\Theta \leq \|x\|_\Theta ,$$

concluindo assim a demonstração do teorema.

4.2. A INCLUSÃO $\mathbb{IE}^\Theta \subset \mathbb{IE}_\Theta$.

A prova da inclusão contínua, $\mathbb{IE}^\Theta \subset \mathbb{IE}_\Theta$, decorre dos lemas 4.2.1 e 4.2.2. No lema 4.2.2 faremos uso da hipótese de reflexividade.

4.2.1. LEMA. Sejam $\mathbb{IE} = (E_k | k \in \mathbb{N})$ uma família admissível de espaços de Banach e f um elemento do espaço $\bar{H}(\mathbb{IE})$. Se para $t = (t_1, \dots, t_n)$ variando em um conjunto A de medida positiva contido em $\mathbb{R}^n$, existir o limite de

$$(1) \quad \frac{\Delta^{ih} f(it)}{\prod_{j=1}^n h_j}$$

em E_0 ($0 = (0, \dots, 0)$) quando $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ tender a zero, então

$$(2) \quad \frac{\partial^n f}{\partial z_1 \dots \partial z_n}(\Theta) \in \mathbb{IE}_\Theta$$

onde $0 < \Theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) < 1$.

DEMONSTRAÇÃO. Denotemos por $a(t)$ o limite da expressão em (1) quando h tende a zero. Para uma n -upla $q = (q_1, \dots, q_n)$ de números positivos, definimos a função f_q em S_n por,

$$f_q(z) = \frac{\Delta^{1/q} f(z)}{\prod_{j=1}^n (1/q_j)}$$

onde $z \in S_n$ e $1/q = (1/q_1, \dots, 1/q_n)$. Desde que,

$$\|f_q(it) - f_s(it)\|_{E_0} \leq \|f_q(it) - a(t)\|_{E_0} + \|f_s(it) - a(t)\|_{E_0}$$

segue da hipótese que,

$$(3) \quad \|f_q(it) - f_s(it)\|_{E_0} \longrightarrow 0$$

quando $q \longrightarrow \infty$, $s \longrightarrow \infty$, para todo t em A . ($q \longrightarrow \infty \Leftrightarrow q_j \longrightarrow \infty$, $j = 1, \dots, n$).

Para cada $q = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{N}^n$, a função g definida em S_n por,

$$g(z) = e^{\delta z^2} f_q(z)$$

onde $z = (z_1, \dots, z_n) \in S_n$, $z^2 = \sum_{j=1}^n z_j^2$, $\delta > 0$, pertence a $H(\mathbb{IE})$.

De fato, desde que f é contínua em S_n e holomorfa em S_n^o , o mesmo ocorre para a função g . Desde que, $f \in \bar{H}(\mathbb{IE})$ segue que $g(k+it) \in E_k$, ($k = (k_1, \dots, k_n) \in \Pi$) e também,

$$\|g(k+it)\|_{E_k} \leq e^{n\delta} \|f_q(k+it)\|_{E_k} \leq e^{n\delta} \|f\|_{\bar{H}(\mathbb{IE})},$$

provando que $g(k+it)$ é E_k -limitada. Para concluirmos que a função g pertence ao espaço $H(\mathbb{IE})$, resta-nos verificar que $g(k+it)$ é E_k -contínua. Para tanto, definimos inicialmente a função,

$$\phi_j(t_j) = \sum_{k'} (-1)^{n-|k'|} f(k_1+i(t_1+k'_1/q_1), \dots, k_{j-1}+i(t_{j-1}+k'_{j-1}/q_{j-1}),$$

$$k_j+it_j, k_{j+1}+i(t_{j+1}+k'_{j+1}/q_{j+1}), \dots, k_n+i(t_n+k'_n/q_n))$$

onde $k' = (k'_1, \dots, k'_{j-1}, k'_{j+1}, \dots, k'_n)$ $k'_r = 0$ ou 1 ($r=1, \dots, j-1, j+1, \dots, n$) e $(t_1, \dots, t_{j-1}, t_{j+1}, \dots, t_n)$ é arbitrariamente fixado em $\mathbb{R}^{n-1}$. Agora, de 3.1.1(1) ve-se que,

$$(4) \quad \phi_j(t_j+h_j) - \phi_j(t_j) = \Delta^{ih'} f(k+it)$$

onde $h' = (1/q_1, \dots, 1/q_{j-1}, h_j, 1/q_{j+1}, \dots, 1/q_n) \in \mathbb{R}^n$, $t = (t_1, \dots, t_j, \dots, t_n)$ e, $k = (k_1, \dots, k_n) \in \square$. Desde que $f \in \bar{H}(\mathbb{IE})$ da segunda parte de 3.2.1(4), obtemos

$$(5) \quad \|\phi_j(t_j+h_j) - \phi_j(t_j)\|_{E_k} \leq [\|f\|_{\bar{H}(\mathbb{IE})} \prod_{\substack{r=1 \\ r \neq j}}^n (1/q_r)] \cdot |h_j|.$$

Ainda, da desigualdade em (4), temos

$$\begin{aligned} \Delta^{i1/q} f(k+i(t+h_j e_j)) - \Delta^{i1/q} f(k+it) = \\ = [\phi_j(t_j+h_j+1/q_j) - \phi_j(t_j+h_j)] - [\phi_j(t_j+1/q_j) - \phi_j(t_j)] \end{aligned}$$

onde e_j é a n -upla com 1 na j -ésima componente e zero nas restantes. Agora usando (5), obtemos

$$(6) \quad \|\Delta^{1/q} f(k+i(t+h_j e_j)) - \Delta^{1/q} f(k+it)\|_{E_k} \leq \\ \leq 2\|f\|_{\bar{H}(\mathbb{IE})} \prod_{\substack{r=1 \\ r \neq j}}^n (1/q_r) \cdot |h_j|$$

Desde que,

$$\Delta^{1/q} f(k+i(t+h)) - \Delta^{1/q} f(k+it) = \Delta^{1/q} f(k+i(t+h)) - \\ - \Delta^{1/q} f(k+i(t+h-h_n e_n)) + \sum_{s=1}^{n-1} \{ \Delta^{1/q} f(k+i(t+h - \sum_{p=s+1}^n h_p e_p)) - \\ - \Delta^{1/q} f(k+i(t+h - \sum_{p=s}^n h_p e_p)) \},$$

usando a estimativa em (6), conseguimos

$$\|\Delta^{1/q} f(k+i(t+h)) - \Delta^{1/q} f(k+it)\|_{E_k} \leq M(|h_n| + |h_{n-1}| + \dots + |h_1|)$$

onde $M = \max\{2\|f\|_{\bar{H}(\mathbb{IE})} \prod_{\substack{r=1 \\ r \neq j}}^n (1/q_r) \mid j = 1, \dots, n\}$, acarretando que

$g(k+it)$ é E_k -contínua. Portanto $g \in H(\mathbb{IE})$ e então,

$$f_q(\theta) \in \mathbb{IE}_\theta$$

Consideremos a seguir, duas n -uplas, $q = (q_1, \dots, q_n)$ e $s = (s_1, \dots, s_n)$, de números inteiros positivos. Do lema 1.4.1, temos

$$\begin{aligned}
 (7) \quad & \log \|(\exp(\delta \sum_{j=1}^n \theta_j^2)) [f_q(\theta) - f_s(\theta)]\|_{\theta} \leq \\
 & \leq \sum_{\substack{k \in \square \\ k \neq 0}} \int_{\mathbb{R}^n} [\log \|(\exp(\delta \sum_{j=1}^n (k_j - t_j)^2)) (f_q(k+it) - f_s(k+it))\|_{E_K}] P_k(\theta, t) dt + \\
 & + \int_A [\log \|(\exp(-\delta \sum_{j=1}^n t_j^2)) (f_q(it) - f_s(it))\|_{E_K}] P_0(\theta, t) dt + \\
 & + \int_{A'} [\log \|(\exp(-\delta \sum_{j=1}^n t_j^2)) (f_q(it) - f_s(it))\|_{E_K}] P_0(\theta, t) dt
 \end{aligned}$$

onde $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$, $k = (k_1, \dots, k_n) \in \square$ e A' é o complementar em $\mathbb{R}^n$, de A . Pelo fato de $f \in \overline{H}(\mathbb{IE})$ obtemos

$$\|f_q(k+it) - f_s(k+it)\|_{E_K} \leq 2 \|f\|_{\overline{H}(\mathbb{IE})} \quad (k \in \square)$$

e consequentemente,

$$\|(\exp(\delta \sum_{j=1}^n (k_j - t_j)^2)) (f_q(k+it) - f_s(k+it))\|_{E_K} \leq 2e^{n\delta} \|f\|_{\overline{H}(\mathbb{IE})}$$

Segue daqui que,

$$\log \| (\exp(\delta \sum_{j=1}^n (k_j - t_j^2))) (f_q(k+it) - f_s(k+it)) \|_{E_k} \leq \log(2e^{n\delta} \|f\|_{\bar{H}(\mathbb{E})}) = M$$

para todo $k = (k_1, \dots, k_n)$ em $\square$. Agora, usando este fato em (7) obtemos

$$\begin{aligned} & \log \| (\exp(\delta \sum_{j=1}^n \theta_j^2)) [f_q(\theta) - f_s(\theta)] \|_{\theta} \leq \\ & \leq \int_A [\log \| (\exp(-\delta \sum_{j=1}^n t_j^2)) \cdot (f_q(it) - f_s(it)) \|_{E_0}] P_0(\theta, t) dt + M, \end{aligned}$$

pois $\sum_{k \in \square} \int_{\mathbb{R}^n} P_k(\theta, t) = 1$. Desde que $\|f_q(it) - f_s(it)\|_{E_0} \rightarrow 0$ quando $q \rightarrow \infty$ e $s \rightarrow \infty$, para todo t no conjunto de medida positiva A , concluimos que o segundo membro da desigualdade acima tende a $-\infty$. Portanto,

$$\log \| (\exp(\delta \sum_{j=1}^n \theta_j^2)) [f_q(\theta) - f_s(\theta)] \| \rightarrow -\infty$$

quando $q \rightarrow \infty$ e $s \rightarrow \infty$. Isto implica que

$$\| (\exp(\delta \sum_{j=1}^n \theta_j^2)) [f_q(\theta) - f_s(\theta)] \|_{\theta} \rightarrow 0$$

quando $q \rightarrow \infty$ e $s \rightarrow \infty$. Logo,

$$\|f_q(\theta) - f_s(\theta)\|_{\theta} \rightarrow 0$$

quando $q \rightarrow \infty$ e $s \rightarrow \infty$, provando assim que a sequência $(f_q(\theta))_{q \in \mathbb{N}^n}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{IE}_\theta$ e como tal, converge a um elemento $b(\theta)$ de $\mathbb{IE}_\theta$. Desde que o espaço $\mathbb{IE}_\theta$ está imerso continuamente no espaço $\Sigma \mathbb{IE}$, concluímos que a sequência $(f_q(\theta))_{q \in \mathbb{N}^n}$ converge a $b(\theta)$ no espaço $\Sigma \mathbb{IE}$, quando $q \rightarrow \infty$. Também, desde que f pertence ao espaço $\bar{H}(\mathbb{IE})$ segue que o limite iterado da sequência $(f_q(\theta))_{q \in \mathbb{N}^n}$ existe em $\Sigma \mathbb{IE}$ e vale, $(i)^n \frac{\partial^n f}{\partial z_1 \dots \partial z_n}(\theta)$. Desde que o espaço $\Sigma \mathbb{IE}$ é um espaço de Banach, concluímos que $\frac{\partial^n f}{\partial z_1 \dots \partial z_n}(\theta) = (-i)^n b(\theta)$ e então,

$$\frac{\partial^n f}{\partial z_1 \dots \partial z_n}(\theta) \in \mathbb{IE}_\theta$$

como queríamos demonstrar.

4.2.2. LEMA. Seja $\mathbb{IE} = (E_k | k \in \mathbb{N})$ uma família admissível de espaços de Banach de modo que, o espaço $E_0 \in \mathbb{IE}$ ($0 = (0, \dots, 0)$) seja um espaço reflexivo. Então, para toda $f \in \bar{H}(\mathbb{IE})$, existe o limite,

$$(1) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta_n^{ih} f(it)}{\prod_{j=1}^n h_j}$$

em E_0 , para quase todo $t = (t_1, \dots, t_n)$ em $\mathbb{R}^n$, com $h = (h_1, \dots, h_n)$ em $\mathbb{R}^n$ e $h_j \neq 0$ ($j = 1, \dots, n$).

DEMONSTRAÇÃO. Inicialmente, definimos a função F , para todo $t = (t_1, \dots, t_n)$ em $\mathbb{R}^n$, por

$$(2) \quad F(t) = \sum_{k \in \square} (-1)^{n-|k|} f(ik \circ t) = \Delta^{it} f(0) \in E_0,$$

onde $k = (k_1, \dots, k_n) \in \square$ e $k \circ t = (k_1 t_1, \dots, k_n t_n)$. Desde que,

$$(3) \quad \Delta^h F(t) = \Delta^h (\Delta^{it} f(0)) = \Delta^{ih} f(it)$$

para provarmos o lema basta provarmos a existência do limite $\lim_{h \rightarrow 0} \Delta^h F(t) / \prod_{j=1}^n h_j$, para quase todo t em $\mathbb{R}^n$.

A função F , como definida anteriormente, satisfaz a relação

$$(4) \quad F(t+h) - F(t) = \sum_{\substack{k \in \square \\ k \neq 0}} \Delta^{i(k \circ h + (1-k) \circ t)} f(ik \circ t)$$

onde $1 = (1, 1, \dots, 1) \in \square$, e então da definição 3.2.1(4), obtemos

$$\|F(t+h) - F(t)\|_{E_0} \leq \|f\|_{\overline{H}(\mathbb{R})} \left(\sum_{\substack{k \in \square \\ k \neq 0}} \prod_{j=1}^n |k_j h_j + (1-k_j) t_j| \right),$$

acarretando a continuidade de F e portanto, sua imagem $F(\mathbb{R}^n)$, está contida em um subespaço separável M , de E_0 .

Agora, para cada n -upla, $r = (r_1, \dots, r_n)$ em $\mathbb{N}^n$ definimos

$$F_r(t) = \frac{\Delta^{i1/r} f(it)}{\prod_{j=1}^n (1/r_j)} \quad (1/r = (1/r_1, \dots, 1/r_n))$$

e colocamos,

$$A_r(t) = \{F_s(t) \mid s \geq r\}.$$

(Aqui, $s = (s_1, \dots, s_n) \geq r = (r_1, \dots, r_n)$ significa que $s_j \geq r_j$, $j = 1, \dots, n$). De (3), obtemos que $F_s(t) \in M$ e assim, $A_r(t) \subset M$. Desde que, M é fracamente fechado em E_0 segue que o fecho fraco $S_r(t)$, de $A_r(t)$ em E_0 , está contido em M , ou seja,

$$S_r(t) = \overline{A_r(t)}^w \subset M.$$

Novamente, da definição 3.2.1(4) obtemos

$$\|F_s(t)\|_{E_0} \leq \|f\|_{\overline{H}(IE)} = c$$

e então,

$$A_r(t) \subset B(0; c) = \{x \in E_0 \mid \|x\|_{E_0} \leq c\}.$$

Assim,

$$S_r(t) = \overline{A_r(t)}^w \subset \overline{B(0; c)}^w = \overline{B(0; c)} = B(0; c).$$

Como o espaço E_0 é reflexivo, tem-se que $B(0; c)$ é fracamente compacto e então, segue que $S_r(t)$ também o é. Desde que, a família $\{S_r(t) \mid r \in \mathbb{N}^n\}$ tem a propriedade da intersecção finita e $S_r(t) \subset S_1(t)$ para todo r em $\mathbb{N}^n$, concluimos que,

$$S(t) = \bigcap_{r \in \mathbb{N}^n} S_r(t) \subset M$$

é não vazio. Podemos definir então, uma função g que a cada $t = (t_1, \dots, t_n)$ em $\mathbb{R}^n$ associa um elemento de $S(t)$. Assim, g é uma função separável e limitada.

A seguir, para cada funcional limitado L definido em E_0 , definimos a função φ , colocando

$$\varphi(t) = L(F(t))$$

para todo t em $\mathbb{R}^n$. Sendo $s = (s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{N}^n$, de (3), obtemos

$$\begin{aligned} L(F_s(t)) &= L\left(\frac{\Delta^{i(1/s)} f(it)}{\prod_{j=1}^n (1/s_j)}\right) = L\left(\frac{\Delta^{i(1/s)} F(t)}{\prod_{j=1}^n (1/s_j)}\right) \\ &= \frac{\Delta^{(1/s)} L(F(t))}{\prod_{j=1}^n (1/s_j)} = \frac{\Delta^{(1/s)} \varphi(t)}{\prod_{j=1}^n (1/s_j)}. \end{aligned}$$

Isto acarreta que a imagem $L(A_r(t))$, do conjunto $A_r(t)$, pela aplicação L é dada por

$$(5) \quad L(A_r(t)) = \left\{ \frac{\Delta^{(1/s)} \varphi(t)}{\prod_{j=1}^n (1/s_j)} \mid s \geq r \right\}.$$

Desde que $S_r(t)$ é fracamente compacto e L é fracamente contínua, segue que $L(S_r(t))$ é um compacto de $\mathbb{C}$ e portanto fechado em $\mathbb{C}$. Assim, temos

$$L(S_r(t)) = L(\overline{A_r(t)^{-w}}) \subset \overline{L(A_r(t))} \subset \overline{L(S_r(t))} = L(S_r(t))$$

ou seja,

$$(6) \quad L(S_r(t)) = \overline{L(A_r(t))}.$$

Passaremos agora, a discutir a existência da derivada mista $\frac{\partial^n \varphi(t)}{\partial t_1 \dots \partial t_n}$, da função φ . Para um número inteiro e positivo m , colocamos $Y_m = \{t \mid t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n, |t_j| \leq m \ (j=1, \dots, n)\}$. De (4), obtemos

$$\varphi(t+h_j e_j) - \varphi(t) = L(F(t+h_j e_j) - F(t)) = L(\Delta^{iy} f(it_j e_j))$$

onde $y = (t_1, \dots, t_{j-1}, h_j, t_{j+1}, \dots, t_n)$ e e_j é a n -upla com 1 na j -ésima componente e zero nas restantes. Assim,

$$|\varphi(t+h_j e_j) - \varphi(t)| \leq \|L\| \|f\|_{\overline{H}(\mathbb{R})} |t_1| \dots |t_{j-1}| |h_j| |t_{j+1}| \dots |t_n|,$$

ou seja,

$$|\varphi(t+h_j e_j) - \varphi(t)| \leq (\|L\| \|f\|_{\overline{H}(\mathbb{R})})^{m^{(n-1)}} |h_j|$$

para todo t em Y_m .

Também, de (3) e da definição 3.2.1(4), obtemos

$$|\Delta^h \varphi(t)| = |L(\Delta^h F(t))| = |L(\Delta^{ih} f(it))| \leq \|L\| \cdot \|f\|_{\tilde{H}(\mathbb{R})} \cdot \prod_{j=1}^n |h_j|$$

para todo t em Y_m . Portanto de W.H. Young [1], concluimos que a derivada mista, $\frac{\partial^n \varphi(t)}{\partial t_1 \dots \partial t_n}$ existe em quase toda parte de Y_m . Como $\mathbb{R}^n = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} Y_m$, segue que a derivada mista de φ existe em quase toda parte de $\mathbb{R}^n$. Agora, de (5) e (6), obtemos

$$\frac{\partial^n \varphi(t)}{\partial t_1 \dots \partial t_n} \in L(S_r(t))$$

para quase t em $\mathbb{R}^n$ e para todo r em $\mathbb{N}^n$ e portanto,

$$\frac{\partial^n \varphi(t)}{\partial t_1 \dots \partial t_n} \in \bigcap_{r \in \mathbb{N}^n} L(S_r(t))$$

Desde que, $\text{diam } L(S_r(t)) = \text{diam } L(A_r(t)) \rightarrow 0$, quando $r \rightarrow \infty$, segue que $\text{diam } \bigcap_{r \in \mathbb{N}^n} L(S_r(t)) = 0$ e isto significa que a intersecção, $\bigcap_{r \in \mathbb{N}^n} L(S_r(t))$ é constituída apenas do elemento, $\frac{\partial^n \varphi(t)}{\partial t_1 \dots \partial t_n}$.

Mas, $L(g(t)) \in L(S(t)) \subset \bigcap_{r \in \mathbb{N}^n} L(S_r(t))$ e portanto,

$$L(g(t)) = \frac{\partial^n \varphi(t)}{\partial t_1 \dots \partial t_n}.$$

Como o funcional linear limitado L em E'_0 foi tomado arbitrariamente, segue que g é fracamente mensurável. Sendo também separável segue que ela é fortemente mensurável. Ainda, a função g sendo limitada, temos

$$\begin{aligned} L(F(t)) = \varphi(t) &= \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_n} \frac{\partial^n \varphi}{\partial u_1 \dots \partial u_n}(u_1, \dots, u_n) du_n \dots du_1 \\ &= L\left(\int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_n} g(u_1, \dots, u_n) du_n \dots du_1\right) \end{aligned}$$

Assim,

$$F(t) = F(t_1, \dots, t_n) = \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_n} g(u_1, \dots, u_n) du_n \dots du_1$$

e portanto

$$\Delta^h F(t) = \int_{t_1}^{t_1+h_1} \dots \int_{t_n}^{t_n+h_n} g(u_1, \dots, u_n) du_n \dots du_1$$

Logo, para $t = (t_1, \dots, t_n)$,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\Delta^h F(t)}{\prod_{j=1}^n h_j} - g(t) \right\|_{E_0} &\leq \frac{1}{\prod_{j=1}^n h_j} \int_{t_1}^{t_1+h_1} \dots \int_{t_n}^{t_n+h_n} \|g(u_1, \dots, u_n) - g(t)\|_{E_0} \\ &\quad \times du_n \dots du_1 \end{aligned}$$

acarretando que,

$$\frac{\Delta^n F(t)}{\prod_{j=1}^n h_j} \longrightarrow g(t) \quad (\text{em } E_0)$$

quando $h \longrightarrow 0$, para quase todo t em $\mathbb{R}^n$.

Fica assim provado o lema.

4.2.3. TEOREMA. Seja $\mathcal{IE} = \{E_k \mid k \in \square\}$ uma família admissível de espaços de Banach e $E_0 \in \mathcal{IE}$ ($0 = (0, \dots, 0) \in \square$) um espaço reflexivo. Então,

$$(1) \quad \mathcal{IE}^\Theta \subset \mathcal{IE}_\Theta$$

e

$$(2) \quad \|x\|_\Theta \leq \|x\|^\Theta$$

para todo x em $\mathcal{IE}^\Theta$ e $0 < \Theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) < 1$.

DEMONSTRAÇÃO. Seja $x \in \mathcal{IE}^\Theta$ e consideremos f em $\overline{H}(\mathcal{IE})$ tal que,

$$(3) \quad x = \frac{\partial^n f}{\partial z_1 \dots \partial z_n}(\Theta)$$

e

$$(4) \quad \|f\|_{\overline{H}(\mathcal{IE})} < \|x\|^\Theta + \varepsilon$$

Desde que o espaço $E_0 \in IE$ é reflexivo, aplicando os lemas 4.2.2 e 4.2.1 (nesta ordem) concluimos que

$$x = \frac{\partial^n f}{\partial z_1 \dots \partial z_n}(\theta) \in IE_\theta$$

provando a inclusão algébrica $IE^\theta \subset IE_\theta$.

Provaremos a seguir, a desigualdade,

$$\|x\|_\theta \leq \|x\|^\theta$$

para todo x em IE^θ . Para tanto, consideremos $r = (r_1, \dots, r_n)$ em $\mathbb{N}^n$ e definimos a função f_r em S_n por,

$$f_r(z) = f_r(z_1, \dots, z_n) = \frac{\Delta^i(1/r) f(z)}{\prod_{j=1}^n (1/r_j)}$$

onde $1/r = (1/r_1, \dots, 1/r_n)$. Vimos na demonstração do lema 4.2.1, que a função

$$g_r(z) = e^{\varepsilon z^2} f_r(z),$$

onde $z^2 = \sum_{j=1}^n z_j^2$ e $\varepsilon > 0$, pertence ao espaço $H(IE)$.

Desde que,

$$(k+it)^2 = \sum_{j=1}^n (k_j+it_j)^2 = \sum_{j=1}^n [(k_j-t_j^2) + 2ik_j t_j]$$

temos,

$$\begin{aligned} \|g_r\|_{H(\mathbb{IE})} &= \max_{k \in \square} \sup_t \|g_r(k+it)\|_{E_k} \\ &\leq \max_{k \in \square} \sup_t e^{n\varepsilon} \|f_r(k+it)\|_{E_k} \\ &\leq e^{n\varepsilon} \|f\|_{\overline{H}(\mathbb{IE})} \end{aligned}$$

e então de (4) obtemos,

$$\|g_r(\theta)\|_{\Theta} \leq \|g_r\|_{H(\mathbb{IE})} \leq e^{n\varepsilon} \|f\|_{\overline{H}(\mathbb{IE})} < e^{n\varepsilon} (\|x\|_{\Theta} + \varepsilon)$$

Ainda, no final da demonstração do lema 4.2.1 vimos que

$$f_r(\theta) \longrightarrow \frac{\partial^n f}{\partial z_1 \dots \partial z_n}(\theta) = x$$

em $\mathbb{IE}_{\Theta}$, quando $r \rightarrow \infty$ e então,

$$(5) \quad g_r(\theta) - \left[\exp\left(\varepsilon \sum_{j=1}^n \theta_j^2\right) \right] x = \left[\exp\left(\varepsilon \sum_{j=1}^n \theta_j^2\right) \right] (f_r(\theta) - x) \longrightarrow 0$$

em $\mathbb{IE}_{\Theta}$, quando $r \rightarrow \infty$. Assim,

$$\begin{aligned} \|x\|_{\Theta} &\leq \left\| \left(\exp\left(-\varepsilon \sum_{j=1}^n \theta_j^2\right) \right) [g_r(\theta) - \left(\exp\left(\varepsilon \sum_{j=1}^n \theta_j^2\right) \right) x] \right\|_{\Theta} + \\ &\quad + \left(\exp\left(-\varepsilon \sum_{j=1}^n \theta_j^2\right) \right) \|g_r(\theta)\|_{\Theta} \end{aligned}$$

$$\leq \|g_r(\theta) - (\exp(\varepsilon \sum_{j=1}^n \theta_j^2))x\|_{\Theta} + \|g_r(\theta)\|_{\Theta}$$

$$\leq \|g_r(\theta) - (\exp(\varepsilon \sum_{j=1}^n \theta_j^2))x\|_{\Theta} + e^{n\varepsilon}(\|x\|_{\Theta} + \varepsilon)$$

Agora, usando (5) obtemos

$$\|x\|_{\Theta} \leq e^{n\varepsilon}(\|x\|_{\Theta} + \varepsilon) ,$$

Desde que $\varepsilon > 0$ é arbitrário segue que,

$$\|x\|_{\Theta} \leq \|x\|_{\Theta} ,$$

como queríamos.

4.3. A EQUIVALÊNCIA ENTRE IE_{Θ} e IE^{Θ}

Dos teoremas 4.1.1 e 4.2.3 obtemos a equivalência entre os espaços de interpolação IE_{Θ} e IE^{Θ} . Este resultado estará contido no seguinte teorema.

4.3.1. TEOREMA (teorema da equivalência complexa). Seja $IE = (E_k | k \in \square)$ uma família admissível de espaços de Banach, de modo que o espaço $E_0 \in IE$ seja reflexivo. Então,

$$(1) \quad IE_{\Theta} = IE^{\Theta}$$

e

$$(2) \quad \|x\|_{\Theta} = \|x\|_{\Theta}^{\Theta}.$$

para todo x em IE_{Θ} .

CAPÍTULO V

DUALIDADE

Neste capítulo estudaremos a dualidade dos espaços $IE_\Theta = [IE]_\Theta$. Caracterizaremos o dual $([IE]_\Theta)'$ usando os espaços de interpolação dados pelo segundo método complexo de interpolação. Explicitamente, mostraremos que $([IE]_\Theta)' = [IE']^\Theta$. A inclusão contínua $[IE']^\Theta \subset ([IE]_\Theta)'$ seguirá de uma vez, usando o lema 5.1.1. Para a prova da segunda parte, $([IE]_\Theta)' \subset [IE']^\Theta$, que é bem mais elaborada necessitaremos, além de elementos de análise de Fourier, de um resultado inserido no lema 5.2.2.

5.1. LEMAS PREPARATÓRIOS.

5.1.1. LEMA. Sejam $IE = (E_k | k \in \mathbb{N})$, $IF = (F_k | k \in \mathbb{N})$ e $G = (G_k | k \in \mathbb{N})$ famílias admissíveis de espaços de Banach. Assumimos que,

$$T: (\Sigma IE) \times (\cap IF) \longrightarrow \Sigma G$$

seja uma aplicação bilinear, de modo que sua restrição a E_k toma valores em G_k ($k \in \mathbb{N}$) e

$$(1) \quad \|T(x_k, y)\|_{G_k} \leq \|x_k\|_{E_k} \cdot \|y\|_{F_k}$$

para $x_k \in E_k$ e $y \in \cap IF$. Então T pode ser estendida unicamente a uma aplicação bilinear contínua $\bar{T}$, definida em $IE^\Theta \times IF_\Theta$ com valores em G^Θ satisfazendo a condição,

$$(2) \quad \|\bar{T}(x, y)\|^\theta \leq \|x\|^\theta \cdot \|y\|_\theta$$

onde $x \in IE^\theta$, $y \in IF_\theta$ e $0 < \theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) < 1$.

DEMONSTRAÇÃO. Inicialmente provaremos que a desigualdade

$$(3) \quad \|T(x, y)\|_{\Sigma G} \leq \|x\|_{\Sigma IE} \cdot \|y\|_{\cap IF}$$

é verdadeira para $x \in \Sigma IE$ e $y \in \cap IF$, concluindo assim que é uma aplicação bilinear contínua de $(\Sigma IE) \times (\cap IF)$ em ΣG . Consideremos para tanto, um número positivo e arbitrário, $x \in \Sigma IE$ e $y \in \cap IF$. Podemos então escrever $x = \sum_{k \in \square} x_k$, $x_k \in E_k$ e $k \in \square$, de modo que

$$(4) \quad \sum_{k \in \square} \|x_k\|_{E_k} < \|x\|_{IE} + \varepsilon.$$

Agora, da linearidade de T em x , de (1) e de (4), temos

$$\begin{aligned} \|T(x, y)\|_{\Sigma G} &\leq \sum_{k \in \square} \|T(x_k, y)\|_{\Sigma G} \leq \sum_{k \in \square} \|T(x_k, y)\|_{G_k} \\ &\leq \sum_{k \in \square} \|x_k\|_{E_k} \cdot \|y\|_{F_k} \leq \left[\sum_{k \in \square} \|x_k\|_{E_k} \right] \|y\|_{\cap IF} \\ &\leq (\|x\|_{\Sigma IE} + \varepsilon) \cdot \|y\|_{\cap IF} \end{aligned}$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, obtemos

$$\|T(x,y)\|_{\Sigma G} \leq \|x\|_{\Sigma IE} \cdot \|y\|_{\cap IF}.$$

Devido a extensão um tanto longa da demonstração deste lema, exporemos a idéia central da mesma, que se resume no seguinte : para $x \in IE^\Theta$ e $y \in IF_\Theta$ queremos definir $\bar{T}(x,y)$. Desde que, $x \in IE^\Theta$ e $y \in IF_\Theta$, existem funções $f \in \bar{H}(IE)$ e $g \in H(IF)$ tais que $x = \frac{\partial^n f}{\partial z_1 \dots \partial z_n}(\Theta)$ e $y = g(\Theta)$. Então a partir de f e g definiremos uma função $J(f,g)$ que pertencerá ao espaço $\bar{H}(G)$. Logo, $\frac{\partial^n}{\partial z_1 \dots \partial z_n} J(f,g)(\Theta) \in [G]^\Theta$. Este será por definição o valor de $\bar{T}(x,y)$.

Primeiramente consideremos $f \in \bar{H}(IE)$ e $g \in H_0(IF)$ (ver apêndice A3) e definimos,

$$B(f,g)(z) = \int_{\frac{1}{2}}^{z_1} \dots \int_{\frac{1}{2}}^{z_n} T\left(\frac{\partial^n f}{\partial z_1 \dots \partial z_n}(u_1, \dots, u_n), g(u_1, \dots, u_n)\right) du_1 \dots du_n$$

para $z = (z_1, \dots, z_n) \in S_n^0$. A convergência da integral em ΣG segue da continuidade do integrando. Também, desde que o integrando define uma função analítica definida em S_n^0 com valores em ΣG segue que $B(f,g)$ é analítica em S_n^0 .

A seguir veremos que $B(f,g)$ estende-se a uma função contínua em S_n . Para tanto, escrevemos

$$\begin{aligned}
& B(f,g)(z_1+h_1, \dots, z_n+h_n) - B(f,g)(z_1, \dots, z_n) = \\
& = B(f,g)(z_1+h_1, \dots, z_n+h_n) - B(f,g)(z+h-h_n e_n) + \\
& + \sum_{r=1}^{n-1} [B(f,g)(z+h - \sum_{j=r+1}^n h_j e_j) - B(f,g)(z+h - \sum_{j=r}^n h_j e_j)]
\end{aligned}$$

onde e_j é o clássico vetor com um na j -ésima componente e zero nas restantes. Desde que $\|g(z)\|_{\cap IF} \leq c$ pois, $g \in H_0(IF)$, então de (3) e do corolário 3.2.5, temos

$$\begin{aligned}
& \|B(f,g)(z_1+h_1, \dots, z_n+h_n) - B(f,g)(z_1, \dots, z_n)\|_{\Sigma G} \leq \\
& \leq \|B(f,g)(z_1+h_1, \dots, z_n+h_n) - B(f,g)(z_1+h_1, \dots, z_{n-1}+h_{n-1}, z_n)\|_{\Sigma G} + \\
& + \sum_{r=1}^{n-1} \|B(f,g)(z+h - \sum_{j=r+1}^n h_j e_j) - B(f,g)(z+h - \sum_{j=r}^n h_j e_j)\|_{\Sigma G} \\
& \leq c \cdot \|f\|_{\bar{H}(IE)} \left\{ \prod_{j=1}^{n-1} |z_j+h_j - \frac{1}{2}| \cdot |h_n| + \sum_{r=1}^{n-1} \prod_{j=1}^{r-1} |z_j+h_j - \frac{1}{2}| \cdot |h_r| \prod_{j=r+1}^n |z_j - \frac{1}{2}| \right\}
\end{aligned}$$

Em resumo, temos

$$(5) \quad \|B(f,g)(z_1+h_1, \dots, z_n+h_n) - B(f,g)(z_1, \dots, z_n)\|_{\Sigma G}$$

$$\leq c \cdot \|f\|_{\bar{H}(IE)} \left\{ \prod_{j=1}^{n-1} |z_j+h_j - \frac{1}{2}| \cdot |h_n| + \sum_{r=1}^{n-1} \prod_{j=1}^{r-1} |z_j+h_j - \frac{1}{2}| \cdot |h_r| \prod_{j=r+1}^n |z_j - \frac{1}{2}| \right\}$$

Agora, sejam $A_m = \{z = (z_1, \dots, z_n) \in S_n \mid |z_j| \leq m, j=1, \dots, n\}$
 $z = (z_1, \dots, z_n)$ e $w = (w_1, \dots, w_n)$ elementos em A_m . Da desigualdade (5) acima, temos,

$$\begin{aligned} \|B(f,g)(z) - B(f,g)(w)\|_{\Sigma \mathbf{G}} &\leq c \|f\|_{\overline{H}(\mathbb{IE})} \left[\prod_{j=1}^{n-1} \left| z_j - \frac{1}{2} \right| |z_n - w_n| + \right. \\ &+ \left. \sum_{r=1}^{n-1} \prod_{j=1}^{r-1} \left| z_j - \frac{1}{2} \right| |z_r - w_r| \prod_{j=r+1}^n \left| w_j - \frac{1}{2} \right| \right] \leq \\ &\leq c \|f\|_{\overline{H}(\mathbb{IE})} \left[\left(m + \frac{1}{2}\right)^{n-1} |z_n - w_n| + \sum_{r=1}^{n-1} \left(m + \frac{1}{2}\right)^{r-1} \left(m + \frac{1}{2}\right)^{n-r} |z_r - w_r| \right] \\ &\leq c \|f\|_{\overline{H}(\mathbb{IE})} \left(m + \frac{1}{2}\right)^{n-1} \sum_{r=1}^n |z_r - w_r|. \end{aligned}$$

Assim,

$$\|B(f,g)(z) - B(f,g)(w)\|_{\Sigma \mathbf{G}} \leq c_1 \sum_{r=1}^n |z_r - w_r|.$$

Esta desigualdade implica a continuidade uniforme da função $B(f,g)$ no fecho $\overline{A}_m$, do conjunto A_m . Como m é um número inteiro positivo podemos estender $B(f,g)$ continuamente a S_n . A extensão de $B(f,g)$ a S_n será ainda representada por $B(f,g)$.

A função $B(f,g)$ satisfaz a desigualdade

$$(6) \quad \|B(f,g)\|_{\Sigma \mathbf{G}} \leq c_1 \prod_{j=1}^n (1 + |z_j|),$$

para todo $z = (z_1, \dots, z_n)$ em S_n . De fato, primeiramente tomemos z em S_n^o . Pelos mesmos argumentos, para obter (5), temos

$$\|B(f,g)(z)\|_{\Sigma \mathbf{G}} \leq c \|f\|_{\bar{H}(\mathbb{R})} \prod_{j=1}^n |z_j|^{-\frac{1}{2}} \leq c_1 \prod_{j=1}^n (1 + |z_j|)$$

Seja agora, $z = (z_1, \dots, z_n) \in S_n$ e $z \notin S_n^o$. Podemos então considerar uma sequência $(z^r)_{r \in \mathbb{N}} = (z_1^r, \dots, z_n^r)_{r \in \mathbb{N}}$ em S_n^o , convergindo para z . Logo a sequência $(z_j^r)_{r \in \mathbb{N}}$ converge para z_j . Portanto, da continuidade de $B(f,g)$ em S_n e do fato,

$$\|B(f,g)(z^r)\|_{\Sigma \mathbf{G}} \leq c_1 \prod_{j=1}^n (1 + |z_j^r|)$$

segue que,

$$\|B(f,g)(z)\|_{\Sigma \mathbf{G}} \leq c_1 \prod_{j=1}^n (1 + |z_j|).$$

Assim a desigualdade (6) é verdadeira para todo z em S_n .

Para concluir que $B(f,g)$ pertence ao espaço $\bar{H}(\mathbf{G})$ resta - nos verificar que

$$\Delta^{ih} B(f,g)(j+it) = \sum_{k \in \square} (-1)^{n-|k|} B(f,g)(j+i(t+k \circ h))$$

pertence a G_j onde $j = (j_1, \dots, j_n)$, $k = (k_1, \dots, k_n)$ pertencem a $\square$, $h = (h_1, \dots, h_n)$ com $h_j \neq 0$, $j = 1, \dots, m$ e $t = (t_1, \dots, t_n)$ pertence a $\mathbb{R}^n$, e também que,

$$\|B(f,g)\|_{\overline{H}(G)} = \max_k \sup_{h,t} \left\| \frac{\Delta^{ih} B(f,g)(k+it)}{\prod_{j=1}^n h_j} \right\|_{G_k}$$

seja finito. Seja então, $z = (z_1, \dots, z_n) \in S_n^0$ e $m = (m_1, \dots, m_n)$ uma n -upla de números inteiros positivos e colocamos

$$z_{rj_r} = z_r + i \frac{h_r}{m_r} j_r \quad (j_r = 0, 1, \dots, m_r \text{ e } r = 1, \dots, n)$$

Agora, de A.P. Calderón ([2], pag. 144) a integral ,

$$\int_{z_r}^{z_r + ih_r} T\left(\frac{\partial^n f}{\partial z_1 \dots \partial z_n}(u_1, \dots, u_r, \dots, u_n), g(u_1, \dots, u_r, \dots, u_n)\right) du_r$$

é o limite uniforme da sequência de elementos,

$$\begin{aligned} & \sum_{j_r=0}^{m_r-1} T\left(\frac{\partial^{n-1} f}{\partial z_1 \dots \partial z_{r-1} \partial z_{r+1} \dots \partial z_n}(u_1, \dots, u_{r-1}, z_r(j_r+1), u_{r+1}, \dots, u_n) - \right. \\ & \left. - \frac{\partial^{n-1} f}{\partial z_1 \dots \partial z_{r-1} \partial z_{r+1} \dots \partial z_n}(u_1, \dots, u_{r-1}, z_{rj_r}, u_{r+1}, \dots, u_n), g(u_1, \dots, \right. \\ & \left. u_{r-1}, z_{rj_r}, u_{r+1}, \dots, u_n) \right) \end{aligned}$$

e assim por aplicações repetidas deste fato, obtemos

$$\Delta^{ih} B(f,g)(z) = \int_{z_1}^{z_1+ih_1} \dots \int_{z_r}^{z_r+ih_r} \dots \int_{z_n}^{z_n+ih_n} T\left(\frac{\partial^n f}{\partial z_1 \dots \partial z_n}(u_1, \dots, u_n), g(u_1, \dots, u_n)\right) du_1 \dots du_n$$

$$= \lim_{m_1 \rightarrow \infty} \dots \lim_{m_n \rightarrow \infty} \sum_{j_1=0}^{m_1-1} \dots \sum_{j_n=0}^{m_n-1} T(\Delta^i(h_1/m_1, \dots, h_n/m_n) f(z_{1j_1}, \dots, z_{nj_n}), g(z_{1j_1}, \dots, z_{nj_n}))$$

para z em S_n^0 . (convergência em $\Sigma \mathbb{C}$).

Pela continuidade das funções envolvidas esta igualdade permanece verdadeira para todo z em S_n . Para referências futuras escrevemos

$$(7) \quad \Delta^{ih} B(f,g)(z) =$$

$$= \lim_{m_1 \rightarrow \infty} \dots \lim_{m_n \rightarrow \infty} \sum_{j_1=0}^{m_1-1} \dots \sum_{j_n=0}^{m_n-1} T(\Delta^i(h_1/m_1, \dots, h_n/m_n) f(z_{1j_1}, \dots, z_{nj_n}), g(z_{1j_1}, \dots, z_{nj_n}))$$

para todo z em S_n .

Seja agora $z = k+it = (k_1+it_1, \dots, k_n+it_n)$, $m = (m_1, \dots, m_n)$, uma n -upla de números inteiros positivos e colocamos

$$z_{rj_r} = k_r + i(t_r + (h_r/m_r)j_r) \quad \text{onde} \quad j_r = 0, 1, \dots, m_r \quad \text{para} \quad r=1, 2, \dots, n.$$

Desde que $f \in \tilde{H}(\mathbb{E})$ segue que

$$S_m(z, h) = \sum_{\substack{j_r=0 \\ 1 \leq r \leq n}}^{m_r-1} T(\Delta^{i(h_1/m_1, \dots, h_n/m_n)} f(z_{1j_1}, \dots, z_{nj_n}), g(z_{1j_1}, \dots, z_{nj_n}))$$

pertence a G_k , pois $\Delta^{i(h_1/m_1, \dots, h_n/m_n)} f(z_{1j_1}, \dots, z_{nj_n})$ pertence a E_k .

Seja

$$\delta(h) = \sup \|g(k+i(t+\tau)) - g(k+it)\|_{F_k}$$

onde o supremo é tomado sobre todos os $t = (t_1, \dots, t_n)$ e $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n)$ pertencentes a $\mathbb{R}^n$ de modo que $0 \leq \tau_j \leq |h_j|$, para $j = 1, \dots, n$. Então para $m_j = 2^{s_j}$, $j = 1, 2, \dots, n$, da desigualdade (1), temos

$$\begin{aligned} & \|T(\Delta^{i(h_1/m_1, \dots, h_n/m_n)} f(z_{1j_1}, \dots, z_{nj_n}), g(k_1+it_1, \dots, k_n+it_n) - \\ & \quad - g(z_{1j_1}, \dots, z_{nj_n}))\|_{G_k} \\ & \leq \|f\|_{\overline{H}(\mathbb{R}^n)} \prod_{j=1}^n (|h_j|/m_j) \cdot \delta(h). \end{aligned}$$

Somando sucessivamente em $j_1, \dots, j_n$, obtemos

$$\|T(\Delta^{i(h_1, \dots, h_n)} f(z_1, \dots, z_n), g(z_1, \dots, z_n)) -$$

$$-S_m(z, h)\|_{G_k} \leq \|f\|_{\bar{H}(IE)} \prod_{j=1}^n |h_j| \delta(h).$$

Agora, sendo $q_j = 2^{r_j}$, $p_j = 0, 1, \dots, q_j$ ($j = 1, \dots, n$), usando a desigualdade acima, escrevemos

$$\begin{aligned} & \|T(\Delta^{i(h_1/q_1, \dots, h_n/q_n)} f(k_1 + i(t_1 + \frac{h_1}{q_1} p_1), \dots, k_n + \\ & + i(t_n + \frac{h_n}{q_n} p_n), g(k_1 + i(t_1 + \frac{h_1}{q_1} p_1), \dots, k_n + i(t_n + \frac{h_n}{q_n} p_n)) - \\ & - S_m((k_1 + i(t_1 + \frac{h_1}{q_1} p_1), \dots, k_n + i(t_n + \frac{h_n}{q_n} p_n)), (\frac{h_1}{q_1}, \dots, \frac{h_n}{q_n}))\|_{G_k} \\ & \leq \|f\|_{\bar{H}(IE)} \prod_{j=1}^n \frac{|h_j|}{q_j} \cdot \delta(\frac{h_1}{q_1}, \dots, \frac{h_n}{q_n}) \end{aligned}$$

Somando sucessivamente em $p_1, \dots, p_n$ obtemos

$$\begin{aligned} \|S_q(z, h) - \sum_{p_1=0}^{q_1-1} \dots \sum_{p_n=0}^{q_n-1} S_m((k_1 + i(t_1 + \frac{h_1}{q_1} p_1), \dots, k_n + \\ + i(t_n + \frac{h_n}{q_n} p_n)), (\frac{h_1}{q_1}, \dots, \frac{h_n}{q_n}))\|_{G_k} \\ \leq \|f\|_{\bar{H}(IE)} \prod_{j=1}^n |h_j| \delta(\frac{h_1}{q_1}, \dots, \frac{h_n}{q_n}). \end{aligned}$$

Como

$$\sum_{p_1=0}^{q_1-1} \dots \sum_{p_n=0}^{q_n-1} S((k_1+i(t_1+\frac{h_1}{q_1}p_1), \dots, k_n+i(t_n+\frac{h_n}{q_n}p_n)), (\frac{h_1}{q_1}, \dots, \frac{h_n}{q_n})) =$$

$$= S_m \circ q((k_1+it_1, \dots, k_n+it_n), (h_1, \dots, h_n)) ,$$

temos

$$\|S_m \circ q(z, h) - S_q(z, h)\|_{G_k} \leq \|f\|_{\overline{H}(\mathbb{E})} \prod_{j=1}^n |h_j| \delta(\frac{h_1}{q_1}, \dots, \frac{h_n}{q_n})$$

Desde que $\delta(h) \rightarrow 0$ quando $h \rightarrow 0$, concluímos que a sequência $(S_m(z, h))_{m \in \mathbb{N}^n}$ é uma sequência de Cauchy em G_k e então, converge a um elemento de G_k . Como G_k está imerso continuamente no espaço de Banach, ΣG , segue que esta sequência também converge em ΣG . Mais ainda, de (7) concluímos que ela converge ao elemento $\Delta^{ih}(f, g)(z)$ em G_k .

Agora de (1), obtemos

$$\|S_m(z, h)\|_{G_k} \leq \sum_{\substack{j_r=0 \\ 1 \leq r \leq n}}^{m_r-1} \|\Delta^{i(\frac{h_1}{m_1}, \dots, \frac{h_n}{m_n})} f(z_{1j_1}, \dots, z_{nj_n})\|_{E_k} \|g(z_{1j_1}, \dots, z_{nj_n})\|_{F_k}$$

$$\leq \sum_{\substack{j_r=0 \\ 1 \leq r \leq n}}^{m_r-1} \|f\|_{\overline{H}(\mathbb{E})} (\prod_{j=1}^n |h_j| \frac{1}{m_j}) \|g\|_{H(\mathbb{F})}$$

$$= \|f\|_{\bar{H}(\mathbb{E})} \|g\|_{H(\mathbb{F})} \prod_{j=1}^n |h_j|.$$

Desde que a sequência $(S_m(z, h))_{m \in \mathbb{N}^n}$ converge a $\Delta^{ih} B(f, g)(z)$ em G_k obtemos

$$\left\| \frac{\Delta^{ih} B(f, g)(k+it)}{\prod_{j=1}^n h_j} \right\|_{G_k} \leq \|f\|_{\bar{H}(\mathbb{E})} \|g\|_{H(\mathbb{F})}$$

e então, concluimos que

$$(8) \quad \|B(f, g)\|_{\bar{H}(\mathbb{G})} \leq \|f\|_{\bar{H}(\mathbb{E})} \|g\|_{H(\mathbb{F})}$$

Esta desigualdade nos diz que a aplicação B é uma aplicação bilinear contínua de $\bar{H}(\mathbb{E}) \times H_0(\mathbb{F})$ em $\bar{H}(\mathbb{G})$. Pelo fato de $H_0(\mathbb{F})$ ser denso em $H(\mathbb{F})$, a aplicação B é estendida a uma aplicação bilinear, J , de $\bar{H}(\mathbb{E}) \times H(\mathbb{F})$ em $\bar{H}(\mathbb{G})$ e preservando a desigualdade acima, isto é,

$$(9) \quad \|J(f, g)\|_{\bar{H}(\mathbb{G})} \leq \|f\|_{\bar{H}(\mathbb{E})} \|g\|_{H(\mathbb{F})}$$

Verifica-se sem dificuldade que a aplicação B tem as propriedades:

$$(10) \quad \frac{\partial^n}{\partial z_1 \dots \partial z_n} B(f, hg) = h(z) \frac{\partial^n}{\partial z_1 \dots \partial z_n} B(f, g)(z)$$

onde h é uma função com valores escalares, contínua e limitada em S_n e analítica em S_n^0 , de modo que hg pertença a $H_0(\mathbb{IF})$ (ver apêndice A3) e

$$(11) \quad \frac{\partial^n}{\partial z_1 \dots \partial z_n} B(f, g)(z) = h(z) \frac{\partial^n}{\partial z_1 \dots \partial z_n} B(f_1, g)(z)$$

se
$$\frac{\partial^n}{\partial z_1 \dots \partial z_n} f(z) = h(z) \frac{\partial^n}{\partial z_1 \dots \partial z_n} f_1(z) .$$

A seguir veremos que estas propriedades são também satisfeitas para a aplicação J . Para tanto, observamos que para φ em $\bar{H}(\mathbb{G})$ e φ_1 em $\bar{H}(\mathbb{IE})$ as aplicações

$$N(\varphi)(z) = \int_{\frac{1}{2}}^{z_1} \dots \int_{\frac{1}{2}}^{z_n} h(u_1, \dots, u_n) \frac{\partial^n}{\partial z_1 \dots \partial z_n} \varphi(u_1, \dots, u_n) du_n \dots du_1$$

e

$$N_1(\varphi_1)(z) = \int_{\frac{1}{2}}^{z_1} \dots \int_{\frac{1}{2}}^{z_n} h(u_1, \dots, u_n) \frac{\partial^n}{\partial z_1 \dots \partial z_n} \varphi_1(u_1, \dots, u_n) du_n \dots du_1$$

são casos particulares da aplicação B e então, de (8) resulta,

$$\|N(\varphi)\|_{\bar{H}(\mathbb{G})} \leq \|\varphi\|_{\bar{H}(\mathbb{G})} \|h\|_{H(\mathbb{C})}$$

e

$$\|N_1(\varphi_1)\|_{\bar{H}(\mathbb{IE})} \leq \|\varphi_1\|_{\bar{H}(\mathbb{IE})} \|h\|_{H(\mathbb{T})}$$

Agora, integrando as identidades em (10) e (11) obtemos respectivamente,

$$\begin{aligned} B(f, hg)(z) &= \int_{\frac{1}{2}}^{z_1} \dots \int_{\frac{1}{2}}^{z_n} h(u_1, \dots, u_n) \frac{\partial^n}{\partial z_1 \dots \partial z_n} B(f, g)(u_1, \dots, u_n) du_n \dots du_1 \\ &= N(B(f, g))(z) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} B(f, g)(z) &= \int_{\frac{1}{2}}^{z_1} \dots \int_{\frac{1}{2}}^{z_n} h(u_1, \dots, u_n) \frac{\partial^n}{\partial z_1 \dots \partial z_n} B(f_1, g)(u_1, \dots, u_n) du_n \dots du_1 \\ &= N(B(f_1, g))(z) . \end{aligned}$$

Desta última igualdade e do fato $N_1(f_1)(z) = f(z)$, obtemos

$$B(N_1 f_1, g)(z) = N(B(f_1, g))(z) .$$

Em resumo obtivemos os resultados,

$$(12) \quad B(f, hg) = (N \circ B)(f, g) \quad , \quad f \in \bar{H}(\mathbb{IE}) \quad , \quad g \in H_0(\mathbb{IF})$$

e

$$(13) \quad B(N_1 f_1, g) = (N \circ B)(f_1, g) \quad , \quad f_1 \in \bar{H}(\mathbb{IE}) \quad , \quad g \in H_0(\mathbb{IF}) .$$

Consideremos a seguir um elemento g em $H(\mathbb{IF})$. Da densidade de $H_0(\mathbb{IF})$ em $H(\mathbb{IF})$, podemos considerar uma sequência $(g_n)_{n \in \mathbb{IN}}$ em $H_0(\mathbb{IF})$ convergindo a g , segundo a norma de $H(\mathbb{IF})$. Então de (12) e (13) escrevemos respectivamente

$$J(f, hg_n) = (N \circ J)(f, g_n)$$

e

$$J(N_1 f_1, g_n) = (N \circ J)(f_1, g_n)$$

Agora, da continuidade de J e $N \circ J$, temos

$$(14) \quad J(f, hg) = (N \circ J)(f, g)$$

e

$$(15) \quad J(N_1 f_1, g) = (N \circ J)(f_1, g)$$

De (14) e (15) obtemos respectivamente

$$\frac{\partial^n}{\partial z_1 \dots \partial z_n} J(f, hg)(z) = \frac{\partial^n}{\partial z_1 \dots \partial z_n} N(J(f, g))(z) = h(z) \frac{\partial^n}{\partial z_1 \dots \partial z_n} J(f, g)(z)$$

e

$$\frac{\partial^n}{\partial z_1 \dots \partial z_n} J(f, g)(z) = \frac{\partial^n}{\partial z_1 \dots \partial z_n} J(N_1 f_1, g)(z) = \frac{\partial^n}{\partial z_1 \dots \partial z_n} N(J(f_1, g))(z)$$

$$= h(z) \frac{\partial^n}{\partial z_1 \dots \partial z_n} J(f_1, g)(z)$$

e assim concluímos que as propriedades (10) e (11) são verificadas para a aplicação J .

Consideremos a seguir $0 < \Theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) < 1$ e definimos a aplicação bilinear $\bar{T}$ em $IE^\Theta \times IF_\Theta$ tomando valores em $\mathbb{C}^\Theta$ da seguinte maneira:

se $x \in IE^\Theta$, $y \in IF_\Theta$ e $f \in \bar{H}(IE)$, $g \in H(IF)$ tais que,

$$\frac{\partial^n f}{\partial z_1 \dots \partial z_n}(\Theta) = x, \quad g(\Theta) = y \quad \text{então, colocamos}$$

$$\bar{T}(x, y) = \frac{\partial^n}{\partial z_1 \dots \partial z_n} J(f, g)(\Theta)$$

Para verificar que $\bar{T}$ está bem definida, observamos que

$$(16) \quad \frac{\partial^n}{\partial z_1 \dots \partial z_n} f(\Theta) = 0 \text{ ou } g(\Theta) = 0, \text{ então } \frac{\partial^n}{\partial z_1 \dots \partial z_n} J(f, g)(\Theta) = 0.$$

Sejam então f_1 e g_1 em $\bar{H}(IE)$ e $H(IF)$ respectivamente, tais que,

$$\frac{\partial^n f_1}{\partial z_1 \dots \partial z_n}(\Theta) = x \quad \text{e} \quad g_1(\Theta) = y.$$

Logo de (16) temos

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^n}{\partial z_1 \dots \partial z_n} J(f, g)(\Theta) - \frac{\partial^n}{\partial z_1 \dots \partial z_n} J(f_1, g_1)(\Theta) = \\ & ; \\ & = \frac{\partial^n}{\partial z_1 \dots \partial z_n} J(f - f_1, g)(\Theta) + \frac{\partial^n}{\partial z_1 \dots \partial z_n} J(f_1, g - g_1)(\Theta) = 0 \end{aligned}$$

e assim $\bar{T}$ está bem definida.

A seguir verificaremos que a desigualdade (2) é verdadeira. Consideremos então, um número positivo ϵ e f e g em $\bar{H}(\mathbb{IE})$ e $H(\mathbb{IF})$ respectivamente tais que,

$$\frac{\partial^n}{\partial z_1 \dots \partial z_n} f(\Theta) = x, \quad g(\Theta) = y$$

e ainda,

$$\|f\|_{\bar{H}(\mathbb{IE})} < \|x\|_{\mathbb{IE}^\Theta} + \epsilon \quad \text{e} \quad \|g\|_{H(\mathbb{IF})} < \|y\|_{\mathbb{IF}^\Theta} + \epsilon.$$

Agora, da desigualdade (9), obtemos

$$\begin{aligned} \|\bar{T}(x, y)\|_{\mathbb{G}^\Theta} &= \left\| \frac{\partial^n}{\partial z_1 \dots \partial z_n} J(f, g)(\Theta) \right\|_{\mathbb{G}^\Theta} \leq \|J(f, g)\|_{\bar{H}(\mathbb{G})} \leq \\ &\leq \|f\|_{\bar{H}(\mathbb{IE})} \|g\|_{H(\mathbb{IF})} < (\|x\|_{\mathbb{IE}^\Theta} + \epsilon) (\|y\|_{\mathbb{IF}^\Theta} + \epsilon). \end{aligned}$$

Desde que $\epsilon > 0$ é arbitrário, segue que

$$\|\bar{T}(x, y)\|_{\mathbb{G}^\Theta} \leq \|x\|_{\mathbb{IE}^\Theta} \|y\|_{\mathbb{IF}^\Theta}$$

Para encerrar a demonstração deste lema resta-nos verificar que $\bar{T}$ é extensão de T .

Sejam x em IE^θ e y em $\cap IF$. Podemos então, considerar f em $\bar{H}(IE)$ tal que, $\frac{\partial^n}{\partial z_1 \dots \partial z_n} f(\theta) = x$ e também considerar a função g em $H_0(IF)$ definida por ,

$$g(z) = g(z_1, \dots, z_n) = e^{\delta \left(\sum_{j=1}^n z_j^2 - \sum_{j=1}^n \theta_j^2 \right)} y$$

onde δ é um número positivo.

Assim,

$$\begin{aligned} \bar{T}(x, y) &= \frac{\partial^n}{\partial z_1 \dots \partial z_n} J(f, g)(\theta) = \frac{\partial^n}{\partial z_1 \dots \partial z_n} B(f, g)(\theta) = \\ &= T\left(\frac{\partial^n}{\partial z_1 \dots \partial z_n} f(\theta), g(\theta)\right) = T(x, y). \end{aligned}$$

Desta forma completamos a demonstração do lema.

5.1.2. LEMA. Seja A um espaço de Banach e A' seu dual topológico. O dual $[L^1(A)]'$, do espaço $L_1(A)$, das funções integráveis, definidas em $\mathbb{R}^n$, é isomorfo e isométrico ao espaço $\Lambda(A')$ das funções g , definidas em $\mathbb{R}^n$ e tomando valores em um espaço contendo A' e tais que

$$(1) \quad \Delta^h g(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^{n-|k|} g(t + k \circ h) \in A'$$

$$(2) \quad \|g\|_{\Lambda(A')} = \sup_{t, h} \left\| \frac{\Delta_h^n g(t)}{\prod_{j=1}^n h_j} \right\|_{A'} < \infty ,$$

onde $t = (t_1, \dots, t_n)$ e $h = (h_1, \dots, h_n)$ com $h_j \neq 0$, $j = 1, 2, \dots, n$, são elementos de $\mathbb{R}^n$.

A dualidade é dada pela relação

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \langle f, dg \rangle$$

Ainda

$$(3) \quad \left| \int_{\mathbb{R}^n} \langle f, dg \rangle \right| \leq \|g\|_{\Lambda(A')} \|f\|_{L^1(A)} ,$$

para toda f em $L^1(A)$.

DEMONSTRAÇÃO. Seja $g \in \Lambda(A')$ e $f \in C_c(A)$ o espaço das funções contínuas, de suporte compacto, com valores em A . Definimos, neste caso, $\int_{\mathbb{R}^n} \langle f, dg \rangle$, como o limite das somas de Riemann, quando a norma da partição tende a zero, isto é,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle f, dg \rangle = \lim_{\substack{m_r \rightarrow 0 \\ 1 \leq r \leq n}} \sum_{j_r=0}^{m_r-1} \langle f(\tau_{1j_1}, \dots, \tau_{nj_n}), \Delta_{(h_{1j_1}, \dots, h_{nj_n})} g(x_{1j_1}, \dots, x_{nj_n}) \rangle$$

onde $x_{rj_r} \leq \tau_{rj_r} \leq x_{r(j_r+1)}$, $h_{rj_r} = x_{r(j_r+1)} - x_{rj_r}$ e $r = 1, \dots, n$.

Pelo fato de f ser contínua e de suporte compacto, e g ser de variação limitada em um retângulo contendo o suporte de f , segue que a integral existe (ver J.C. Prandini ([1], pag. 17)).

Desde que

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{\substack{j_r=0 \\ 1 \leq r \leq n}}^{m_r-1} \langle f(\tau_{1j_1}, \dots, \tau_{nj_n}), \Delta^{(h_{1j_1}, \dots, h_{nj_n})} g(x_{1j_1}, \dots, x_{nj_n}) \rangle \right| \\ & \leq \|g\|_{\Lambda(A')} \sum_{\substack{j_r=0 \\ 1 \leq r \leq n}}^{m_r-1} \|f(\tau_{1j_1}, \dots, \tau_{nj_n})\|_{A^{\prod_{r=1}^n h_r j_r}} \end{aligned}$$

ocorre que,

$$(4) \quad \left| \int_{\mathbb{R}^n} \langle f, dg \rangle \right| \leq \|g\|_{\Lambda(A')} \|f\|_{L^1(A)},$$

qualquer que seja f em $C_c^\infty(A)$.

Consideremos agora uma função f em $L^1(A)$. Da densidade de $C_c(A)$ em $L^1(A)$ podemos considerar uma sequência $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ em $C_c(A)$ convergindo a f , seguindo a norma de $L^1(A)$. Definimos então,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle f, dg \rangle = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \langle f_m, dg \rangle$$

Este limite existe, pois da desigualdade (4) obtemos

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} \langle f_m, dg \rangle - \int_{\mathbb{R}^n} \langle f_s, dg \rangle \right| \leq \|g\|_{\Lambda(A')} \|f_m - f_s\|_{L^1(A)}.$$

Usando novamente a desigualdade (4) obtemos

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \langle f, dg \rangle \right| &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \langle f_m, dg \rangle \right| \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \|g\|_{\Lambda(A')} \|f_m\|_{L^1(A)} \\ &= \|g\|_{\Lambda(A')} \|f\|_{L^1(A)} , \end{aligned}$$

e assim provamos a veracidade da desigualdade em (3).

Definimos em seguida a aplicação,

$$\psi: \Lambda(A') \longrightarrow [L^1(A)]'$$

por

$$\langle f, \psi(g) \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \langle f, dg \rangle$$

para g em $\Lambda(A')$ e f em $L^1(A)$.

Claramente, ψ é uma aplicação linear. Também, de (3) temos

$$(5) \quad \|\psi(g)\|_{[L^1(A)]'} \leq \|g\|_{\Lambda(A')} .$$

Para mostrar que ψ é injetora, basta mostrar que se $\psi(g) = 0$, então g é equivalente a função nula. Para isto, consideremos um elemento qualquer x em A e colocamos $f = \chi_{[a,b]} x$, onde $[a,b] = \prod_{j=1}^n [a_j, b_j]$ e χ_B é a função característica de B . Logo ,

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\mathbb{R}^n} \langle f, dg \rangle = \int_{[a,b]} \langle f, dg \rangle = \\
&= \lim_{\substack{j_r=0 \\ 1 \leq r \leq n}}^{m_r-1} \langle f(\tau_{1j_1}, \dots, \tau_{nj_n}), \Delta^{(h_{1j_1}, \dots, h_{nj_n})} g(x_{1j_1}, \dots, x_{nj_n}) \rangle \\
&= \lim_{\substack{j_r=0 \\ 1 \leq r \leq n}}^{m_r-1} \langle x, \Delta^{(h_{1j_1}, \dots, h_{nj_n})} g(x_{1j_1}, \dots, x_{nj_n}) \rangle = \langle x, \Delta^h g(a_1, \dots, a_n) \rangle
\end{aligned}$$

onde $h = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, \dots, b_n - a_n)$. Portanto

$$\langle x, \Delta^h g(a_1, \dots, a_n) \rangle = 0$$

para todo x em A e, qualquer que seja o retângulo $[a,b] = \prod_{j=1}^n [a_j, b_j] \subset \mathbb{R}^n$. Logo

$$\langle x, \Delta^h g(t) \rangle = 0,$$

quaisquer que sejam x em A , t em $\mathbb{R}^n$ e $h = (h_1, \dots, h_n)$ em $\mathbb{R}^n, h_j \neq 0$ $j = (1, \dots, n)$. Pelo teorema de Hahn-Banach, segue que

$$\Delta^h g(t) = 0$$

para t e h nas condições anteriores. Assim $\|g\|_{\Lambda(A)} = 0$, e então g é equivalente a função identicamente nula.

A etapa seguinte será mostrar que ψ é sobrejetora. Para tanto, consideremos $F \in [L^1(A)]'$. Nossa intenção será definir uma função g em $\Lambda(A')$ tal que $\psi(g) = F$. Então, para $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ e $x \in A$, definimos

$$\langle x, g(t) \rangle = (-1)^{n-s} F(\chi_{[0,t]} x)$$

onde s é o número de componentes positivas de $t = (t_1, \dots, t_n)$.

Desde que $\chi_{[0,t]}(x+\lambda y) = \chi_{[0,t]} x + \lambda \chi_{[0,t]} y$ segue que para cada $t \in \mathbb{R}^n$, $g(t)$ é linear. Também,

$$\begin{aligned} |\langle x, g(t) \rangle| &= |F(\chi_{[0,t]} x)| \leq \|F\| \|\chi_{[0,t]} x\|_{L^1(A)} \\ &= \|F\| \prod_{j=1}^n |t_j| \|x\|_A, \end{aligned}$$

ou seja, para cada $t \in \mathbb{R}^n$, $g(t)$ é uma aplicação linear contínua definida em A . Logo $g(t) \in A'$ e consequentemente,

$$\Delta^h g(t) \in A'$$

Ainda,

$$\begin{aligned} \|\Delta^h g(t)\|_{A'} &= \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle x, \Delta^h g(t) \rangle| = \sup_{\|x\| \leq 1} |F(\chi_{[t, t+h]} x)| \\ &\leq \sup_{\|x\| \leq 1} \{ \|F\| \|x\| \prod_{j=1}^n |h_j| \} = \|F\| \prod_{j=1}^n |h_j|. \end{aligned}$$

Assim,

$$\left\| \frac{\Delta^h}{n} g(t) \right\|_{\prod_{j=1}^n h_j A'} \leq \|F\|$$

e então,

$$(6) \quad \|g\|_{\Lambda(A')} \leq \|F\| ,$$

acarretando que $g \in \Lambda(A')$.

Mostraremos agora que $\psi(g) = F$. Seja $t = (t_1, \dots, t_n)$ em $\mathbb{R}^n$, e j o elemento de $\square$ cuja p -ésima componente será 1 ou 0 se a p -ésima componente, t_p , de t for, respectivamente, positiva ou negativa. Assim,

$$\begin{aligned} \langle \chi_{[0,t]} x, \psi(g) \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} \langle \chi_{[0,t]} x, dg \rangle \\ &= \langle x, \Delta^j \circ t - (1-j) \circ t \, g((1-j) \circ t) \rangle \\ &= \langle x, (-1)^{n-|j|} g(t) \rangle = (-1)^{n-|j|} \langle x, g(t) \rangle \\ &= F(\chi_{[0,t]} x). \end{aligned}$$

Agora, sendo $I = \prod_{j=1}^n [a_j, b_j]$, ocorre que a função característica χ_I , de I é uma combinação linear de funções características de intervalos do tipo $[0, t]$ e então, pela linearidade da transformação

F , acarreta que

$$F(\chi_I x) = \langle \chi_I x, \psi(g) \rangle.$$

Deste fato, concluímos que

$$F\left(\sum_{j=1}^m \chi_{I_j} x_j\right) = \left\langle \sum_{j=1}^m \chi_{I_j} x_j, \psi(g) \right\rangle.$$

Desde que o espaço,

$M = \left\{ \sum_{j=1}^m \chi_{I_j} x_j \mid x_j \in A, I_j \text{ é um intervalo limitado com lados paralelos aos eixos coordenados, } m \in \mathbb{N} \right\}$ é denso em $L^1(A)$ segue que

$$F(f) = \langle f, \psi(g) \rangle$$

para toda função f em $L^1(A)$, ou seja $\psi(g) = F$.

De (5) e (6), obtemos

$$\|\psi(g)\|_{[L^1(A)]'} \leq \|g\|_{A(A')} \leq \|\psi(g)\|_{[L^1(A)]'},$$

ou seja, ψ é uma isometria.

Completamos assim, a demonstração do lema.

5.2. OS TEOREMAS DE DUALIDADE

Veremos inicialmente, um resultado que é uma parte do teorema da dualidade a que nos propomos encontrar.

Salientamos que, se $IE = (E_k | k \in \square)$ então, $IE' = (E'_k | k \in \square)$ onde, E'_k é o dual topológico de E_k . Lembramos também, que se o espaço $\cap IE$, for denso em cada E_k , $k \in \square$ então, E'_k é imerso continuamente em $(\cap IE)'$ e consequentemente, $\Sigma IE'$ é, também, imerso continuamente em $(\cap IE)'$.

5.2.1. TEOREMA. Seja $IE = (E_k | k \in \square)$ uma família admissível de espaços de Banach, de modo que $\cap IE$ seja denso em cada E_k , $k \in \square$. Então,

$$(1) \quad [\Sigma IE']^\Theta \subset [\cap IE]_\Theta'$$

e

$$(2) \quad \|y'\|_{[\cap IE]_\Theta'} \leq \|y'\|_{[\Sigma IE']^\Theta}$$

para todo y' em $[\Sigma IE']^\Theta$ e $0 < \Theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) < 1$.

DEMONSTRAÇÃO. Consideremos o funcional bilinear $\langle , \rangle$, definido em $(\Sigma IE') \times (\cap IE)$ por,

$$\langle y', x \rangle = y'(x)$$

para todo y' em $\Sigma IE'$ e para todo x em $\cap IE$. Claramente, se y' é um elemento de E'_k e x um elemento de E_k ocorre,

$$|\langle y', x \rangle| \leq \|y'\|_{E'_k} \|x\|_{E_k},$$

Assim, pelo lema 5.1.1, temos

$$|\langle y', x \rangle| \leq \|y'\|_{[IE']^\Theta} \|x\|_{[IE]_\Theta},$$

para $y' \in [IE']^\Theta$ e $x \in \cap IE$. Isto significa que y' quando restrito ao espaço $\cap IE$ é um funcional linear contínuo, segundo a norma $\|\cdot\|_{[IE]_\Theta}$, com norma não excedendo a $\|y'\|_{[IE']^\Theta}$.

Desde que o espaço $\cap IE$ é denso em $[IE]_\Theta$, o funcional y' é estendido, de modo único, a um funcional linear em $[IE]_\Theta$, com norma não excedendo a $\|y'\|_{[IE']^\Theta}$. Assim todo elemento y' em $[IE']^\Theta$ é identificado com um elemento de $[IE]_\Theta'$ e ainda,

$$\|y'\|_{[IE]_\Theta'} \leq \|y'\|_{[IE']^\Theta}.$$

Completamos assim a demonstração do teorema.

Para obter a recíproca deste teorema nos apoiaremos no seguinte lema.

5.2.2. LEMA. Sejam $IE = (E_k | k \in \square)$ uma família admissível de espaços de Banach, de modo que a intersecção $\cap IE$, seja densa em cada E_k , $k \in \square$ e $IE' = (E'_k | k \in \square)$. Então se $f \in H(IE)$ e $g \in \bar{H}(IE')$, temos

$$(1) \quad I = (-i)^n \sum_{k \in \square} \int_{\mathbb{R}^n} \langle f(k+it) P_k(\theta, t), dg(k+it) \rangle = \langle f(\theta), \frac{\partial^n g}{\partial z_1 \dots \partial z_n}(\theta) \rangle$$

para $0 < \Theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) < 1$, onde P_k é o núcleo de Poisson introduzido em 1.4.

DEMONSTRAÇÃO. Inicialmente, consideremos f no espaço $H_0(\mathbb{IE})$. Da definição deste espaço, $H_0(\mathbb{IE})$, (Apêndice A.3) segue que f é uma combinação linear de elementos da forma $x.h(z)$ onde $x \in \cap \mathbb{IE}$ e $h \in H(\mathbb{T})$, isto é,

$$f(z) = \sum_{j=1}^m x_j f_j(z) ,$$

com $x_j \in \cap \mathbb{IE}$, $f_j \in H(\mathbb{T})$ e m um número inteiro positivo. Podemos então escrever,

$$\begin{aligned} I &= (-1)^n \sum_{k \in \square} \int_{\mathbb{R}^n} < \sum_{j=1}^m x_j f_j(k+it) P_k(\Theta, t), dg(k+it) > \\ &= (-1)^n \sum_{k \in \square} \sum_{j=1}^m \int_{\mathbb{R}^n} < x_j f_j(k+it) P_k(\Theta, t), dg(k+it) > \\ &= (-1)^n \sum_{k \in \square} \sum_{j=1}^m \int_{\mathbb{R}^n} f_j(k+it) P_k(\Theta, t) d < x_j, g(k+it) > \\ &= (-1)^n \sum_{k \in \square} \sum_{j=1}^m \int_{\mathbb{R}^n} f_j(k+it) P_k(\Theta, t) \left[\frac{\partial^n}{\partial t_1 \dots \partial t_n} < x_j, g(k+it) > \right] dt. \end{aligned}$$

Ou ainda,

$$(2) \quad I = (-1)^n \sum_{k \in \square} \sum_{j=1}^m \int_{\mathbb{R}^n} f_j(k+it) P_k(\Theta, t) \left[\frac{\partial^n}{\partial t_1 \dots \partial t_n} < x_j, g(k+it) > \right] dt.$$

Consideremos a seguir as funções $h_j: S_n^0 \rightarrow \mathbb{C}$ definidas por

$$h_j(z) = \langle x_j, \frac{\partial^n g}{\partial z_1 \dots \partial z_n}(z) \rangle.$$

As funções h_j são limitadas em S_n^0 . Para tanto, consideremos uma decomposição $\sum_{k \in \square} a_j^k(z)$ arbitrária de $\frac{\partial^n g}{\partial z_1 \dots \partial z_n}(z)$, em $\Sigma IE'$. Logo,

$$\begin{aligned} |h_j(z)| &\leq \sum_{k \in \square} |\langle x_j, a_j^k(z) \rangle| \leq \sum_{k \in \square} \|x_j\|_{E_k} \|a_j^k(z)\|_{E'_k} \\ &\leq \|x_j\|_{\cap IE} \sum_{k \in \square} \|a_j^k(z)\|_{E'_k}. \end{aligned}$$

Da definição 1.1.1(1), da norma $\|\cdot\|_{\Sigma IE'}$, obtemos

$$|h_j(z)| \leq \|x_j\|_{\cap IE} \left\| \frac{\partial^n g}{\partial z_1 \dots \partial z_n}(z) \right\|_{\Sigma IE'}.$$

Pelo corolário 3.2.5, segue que

$$|h_j(z)| \leq \|x_j\|_{\cap IE} \|g\|_{\overline{H}(IE')}$$

para todo z em S_n^0 . Isto significa que h_j é limitada em S_n^0 .

Também, as funções h_j são analíticas em S_n^0 e,

$$\frac{\partial h_j}{\partial z_i}(z_1, \dots, z_n) = \langle x_j, \frac{\partial^{n+1} g}{\partial z_1 \dots \partial z_i \dots \partial z_n}(z_1, \dots, z_n) \rangle.$$

De fato, desde que

$$(1/r) \left[\frac{\partial^n g}{\partial z_1 \dots \partial z_n} (z_1, \dots, z_{i+r}, \dots, z_n) - \frac{\partial^n g}{\partial z_1 \dots \partial z_n} (z_1, \dots, z_n) \right] -$$

$$= \left(\frac{\partial^{n+1} g}{\partial z_1 \dots \partial z_i^2 \dots \partial z_n} (z_1, \dots, z_n) \right) = F$$

pertence a $\Sigma IE'$, podemos considerar uma sua decomposição qualquer, digamos $\sum_{k \in \square} a_k$. Logo

$$| (1/r) [h_j(z_1, \dots, z_{i+r}, \dots, z_n) - h_j(z_1, \dots, z_n)] -$$

$$= \langle x_j, \frac{\partial^{n+1} g}{\partial z_1 \dots \partial z_i^2 \dots \partial z_n} (z_1, \dots, z_n) \rangle |$$

$$= | \langle x_j, \sum_{k \in \square} a_k \rangle | \leq \sum_{k \in \square} \|x_j\|_{E_k} \|a_k\|_{E'_k} \leq \|x_j\|_{\cap IE} \cdot \sum_{k \in \square} \|a_k\|_{E'_k}.$$

Segue então, que

$$| (1/r) [h_j(z_1, \dots, z_{i+r}, \dots, z_n) - h_j(z_1, \dots, z_n)] -$$

$$= \langle x_j, \frac{\partial^{n+1} g}{\partial z_1 \dots \partial z_i^2 \dots \partial z_n} (z_1, \dots, z_n) \rangle | \leq \|x_j\|_{\cap IE} \|F\|_{\Sigma IE'}.$$

Desde que $\|F\|_{\Sigma \mathbb{E}} \rightarrow 0$, quando $r \rightarrow 0$, segue que h_j é analítica em z_i e ainda, $\frac{\partial h_j}{\partial z_i}(z_1, \dots, z_n) = \langle x_j, \frac{\partial^{n+1} g}{\partial z_1 \dots \partial z_i^2 \dots \partial z_n}(z_1, \dots, z_n) \rangle$.

Como as funções h_j são limitadas e analíticas em S_n^0 , segue que os limites não tangencial existem e ainda,

$\lim_{s+it \rightarrow k+it_0} h_j(s+it) = (-i)^n \frac{\partial^n}{\partial t_1 \dots \partial t_n} \langle x_j, g(k+it_0) \rangle$. Assim estendemos h_j continuamente a S_n , definindo-se

$$h_j(k+it) = (-i)^n \frac{\partial^n}{\partial t_1 \dots \partial t_n} \langle x_j, g(k+it) \rangle$$

para todo t em $\mathbb{R}^n$ e k em $\square$. De (2), obtemos

$$I = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{k \in \square} \int_{\mathbb{R}^n} f_j(k+it) h_j(k+it) P_k(\theta, t) dt \right)$$

$$= \sum_{j=1}^m f_j(\theta) h_j(\theta) = \sum_{j=1}^m f(\theta) \langle x_j, \frac{\partial^n g}{\partial z_1 \dots \partial z_n}(\theta) \rangle$$

$$= \langle \sum_{j=1}^m f_j(\theta) x_j, \frac{\partial^n g}{\partial z_1 \dots \partial z_n}(\theta) \rangle = \langle f(\theta), \frac{\partial^n g}{\partial z_1 \dots \partial z_n}(\theta) \rangle.$$

Provamos assim que,

$$\begin{aligned}
 (3) \quad & (-i)^n \sum_{k \in \square} \int_{\mathbb{R}^n} \langle f(k+it) P_k(\theta, t), dg(k+it) \rangle = \\
 & = \langle f(\theta), \frac{\partial^n g}{\partial z_1 \dots \partial z_n}(\theta) \rangle,
 \end{aligned}$$

para toda f em $H_0(\mathbb{IE})$.

Consideremos agora o caso geral onde $f \in H(\mathbb{IE})$. Desde que, o espaço $H_0(\mathbb{IE})$ é denso no espaço $H(\mathbb{IE})$, podemos considerar uma sequência $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ em $H_0(\mathbb{IE})$ convergindo a f , na norma de $H(\mathbb{IE})$. Seguem-se então, os fatos

$$(4) \quad \|f_m(k+it) - f(k+it)\|_{E_k} \leq \|f_m - f\|_{H(\mathbb{IE})}$$

e

$$(5) \quad \|f_m(\theta) - f(\theta)\|_{\mathbb{IE}_\theta} \leq \|f_m - f\|_{H(\mathbb{IE})},$$

acarretando, esta última desigualdade, que $f_m(\theta) \rightarrow f(\theta)$, em $\mathbb{IE}_\theta$, quando $m \rightarrow \infty$.

Agora, pelo fato de $g \in \bar{H}(\mathbb{IE}')$ ocorre que $\frac{\partial^n g}{\partial z_1 \dots \partial z_n}(\theta) \in [\mathbb{IE}']^\theta$

e então, como vimos no teorema 5.2.1 quando restrito ao espaço

$\cap \mathbb{IE}$, $\frac{\partial^n g}{\partial z_1 \dots \partial z_n}(\theta)$ é um funcional linear contínuo segundo a norma

$\|\cdot\|_{\mathbb{IE}_\theta}$. Desde que o espaço $\cap \mathbb{IE}$ é denso no espaço $\mathbb{IE}_\theta$ (apêndice

A.4), este funcional é estendido continuamente a $\mathbb{IE}_\theta$. Assim,

$$\langle f(\Theta), \frac{\partial^n g}{\partial z_1 \dots \partial z_n}(\Theta) \rangle = \lim_{m \rightarrow \infty} \langle f_m(\Theta), \frac{\partial^n g}{\partial z_1 \dots \partial z_n}(\Theta) \rangle.$$

De (3), obtemos

$$\begin{aligned} \langle f(\Theta), \frac{\partial^n g}{\partial z_1 \dots \partial z_n}(\Theta) \rangle &= \sum_{k \in \square} (-i)^n \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \langle f_m(k+it) P_k(\Theta, t), dg(k+it) \rangle \\ &= \sum_{k \in \square} (-i)^n \int_{\mathbb{R}^n} \langle f(k+it) P_k(\Theta, t), dg(k+it) \rangle \end{aligned}$$

Observamos que a última igualdade segue de 5.1.2(3) e de 5.2.2 (4). De fato

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\mathbb{R}^n} \langle (f_m(k+it) - f(k+it)) P_k(\Theta, t), dg(k+it) \rangle \right| \leq \\ & \leq \|g\|_{\overline{H}(\mathbb{E}')} \| (f_m(k+it) - f(k+it)) P_k(\Theta, t) \|_{L_1(E_k)} \\ & \leq \|g\|_{\overline{H}(\mathbb{E}')} \|f_m - f\|_{H(\mathbb{E})} \int_{\mathbb{R}^n} P_k(\cdot, t) dt \\ & = \|g\|_{\overline{H}(\mathbb{E}')} \prod_{j=1}^n [(1+k_j) + (-1)^{k_j+1} \theta_j] \|f_m - f\|_{H(\mathbb{E})}. \end{aligned}$$

Fica assim, encerrada a demonstração do lema.

Discutiremos a seguir a recíproca do teorema 5.2.1.

5.2.3. TEOREMA. Seja $\mathcal{IE} = (E_k | k \in \mathbb{N})$ uma família admissível de espaços de Banach de modo que, a intersecção $\cap \mathcal{IE}$ seja densa em cada E_k , $k \in \mathbb{N}$. Então, para $0 < \Theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) < 1$, temos

$$(1) \quad [\mathcal{IE}]_{\Theta}' \subset [\mathcal{IE}']^{\Theta}$$

e

$$(2) \quad \|L\|_{[\mathcal{IE}]_{\Theta}'} = \|L\|_{[\mathcal{IE}']^{\Theta}},$$

para todo L em $[\mathcal{IE}']^{\Theta}$.

DEMONSTRAÇÃO. Consideremos $L \in [\mathcal{IE}]_{\Theta}'$. Este funcional linear definido em $[\mathcal{IE}]_{\Theta}$, induz um funcional linear $L^{\sim}$ definido em $H(\mathcal{IE})$ por $L^{\sim}(f) = L(f(\Theta))$, com normas iguais. De fato,

$$|L^{\sim}(f)| = |L(f(\Theta))| \leq \|L\|_{[\mathcal{IE}]_{\Theta}'} \|f(\Theta)\|_{\mathcal{IE}_{\Theta}} \leq \|L\|_{[\mathcal{IE}]_{\Theta}'} \|f\|_{H(\mathcal{IE})},$$

ou seja,

$$(3) \quad \|L^{\sim}\|_{H(\mathcal{IE})'} \leq \|L\|_{[\mathcal{IE}]_{\Theta}'}$$

Agora, para um elemento qualquer x em $\mathcal{IE}_{\Theta}$ e $\varepsilon > 0$, existe f em $H(\mathcal{IE})$ tal que $\|f\|_{H(\mathcal{IE})} < \|x\|_{\mathcal{IE}_{\Theta}} + \varepsilon$ e $f(\Theta) = x$. Assim,

$$|L(x)| = |L(f(\Theta))| = |L^{\sim}(f)| \leq \|L^{\sim}\|_{H(\mathcal{IE})'} \|f\|_{H(\mathcal{IE})} \leq \|L^{\sim}\|_{H(\mathcal{IE})'} (\|x\|_{\mathcal{IE}_{\Theta}} + \varepsilon)$$

Desde que, $\varepsilon > 0$ é arbitrário segue que,

$$(4) \quad \|L\|_{[\mathbb{IE}]_{\Theta}}' \leq \|L^{\sim}\|_{H(\mathbb{IE})}' .$$

Portanto, de (3) e (4) segue $\|L\| \equiv \|L\|_{[\mathbb{IE}]_{\Theta}}' = \|L^{\sim}\|_{H(\mathbb{IE})}' .$

Representamos por $(f_k; k \in \square)$, um elemento do espaço $\sum_{k \in \square} L^1(E_k)$, e colocamos,

$$X = \{(f_k; k \in \square) \mid \exists f \in H(\mathbb{IE}) , \quad f_k(t) = f(k+it)P_k(\theta, t)\} .$$

É claro que X é um subespaço vetorial de $\prod_{k \in \square} L^1(E_k)$.

A seguir consideremos o funcional linear λ , definido em X por,

$$\lambda(f_k; k \in \square) = L^{\sim}(f) ,$$

onde $f_k(t) = f(k+it)P_k(\theta, t)$. Que o funcional λ está bem definido segue do lema 1.2.2. Usando o corolário 1.4.2(2), obtemos

$$\begin{aligned} |\lambda(f_k; k \in \square)| &= |L(f(\theta))| \leq \|L\|_{[\mathbb{IE}]_{\Theta}}' \|f(\theta)\|_{\mathbb{IE}_{\Theta}} \\ &\leq \|L\|_{[\mathbb{IE}]_{\Theta}}' \sum_{k \in \square} \int_{\mathbb{R}^n} \|f(k+it)\|_{E_k} P_k(\theta, t) dt \\ &= \|L\|_{[\mathbb{IE}]_{\Theta}}' \sum_{k \in \square} \int_{\mathbb{R}^n} \|f_k(t)\|_{E_k} dt = \|L\|_{[\mathbb{IE}]_{\Theta}}' \sum_{k \in \square} \|f_k\|_{L^1(E_k)} \\ &= \|L\|_{[\mathbb{IE}]_{\Theta}}' \|(f_k; k \in \square)\|_{\prod_{k \in \square} L^1(E_k)} . \end{aligned}$$

Ou seja, $\lambda \in X'$ dual topológico de X e, $\|\lambda\| \leq \|L\|_{[E]_{\Theta}^1}$. Portanto, λ é estendido a um funcional linear contínuo $\bar{\lambda}$, em $\prod_{k \in \square} L^1(E_k)$ com $\|\lambda\| = \|\bar{\lambda}\|$.

Agora, do isomorfismo $\phi(\varphi) = (\varphi_k; k \in \square)$ onde $\varphi_k(f_k) = \varphi(0, \dots, 0, f_k, 0, \dots, 0)$ entre os espaços $[\prod_{k \in \square} L^1(E_k)]'$, e $\prod_{k \in \square} [L^1(E_k)]'$, e do lema 5.1.2, temos

$$\bar{\lambda} = (g_k; k \in \square) \text{ com } g_k \in \Lambda(E'_k).$$

Também,

$$\bar{\lambda}(f_k; k \in \square) = \bar{\lambda}(\sum_{k \in \square} (0, \dots, 0, f_k, 0, \dots, 0)) = \sum_{k \in \square} \bar{\lambda}(0, \dots, 0, f_k, 0, \dots, 0)$$

$$= \sum_{k \in \square} (\bar{\lambda})_k(f_k) = \sum_{k \in \square} \int_{\mathbb{R}^n} \langle f_k, dg_k \rangle$$

ou seja,

$$(5) \quad \bar{\lambda}(f_k; k \in \square) = \sum_{k \in \square} \int_{\mathbb{R}^n} \langle f_k, dg_k \rangle.$$

Ainda,

$$\begin{aligned} |(\bar{\lambda})_k(f_k)| &= |\bar{\lambda}(0, \dots, 0, f_k, 0, \dots, 0)| \leq \|\bar{\lambda}\| \|(0, \dots, 0, f_k, 0, \dots, 0)\|_{\prod_{k \in \square} L^1(E_k)} \\ &\leq \|L\|_{[E]_{\Theta}^1} \|f_k\|_{L^1(E_k)}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\|(\bar{\lambda})_k\|_{[L^1(E_k)]} \leq \|L\|_{[IE]}'_{\Theta}, \quad (k \in \square).$$

Desde que, $\|(\bar{\lambda})_k\|_{[L^1(E_k)]} = \|g_k\|_{\Lambda(E'_k)}$ segue que,

$$(6) \quad \max\{\|g_k\|_{\Lambda(E'_k)} \mid k \in \square\} \leq \|L\|_{[IE]}'_{\Theta}$$

A seguir consideremos x em $\cap IE$, uma função φ em $H(\mathbb{E})$ e $f(z) = \varphi(z) \cdot x$. É claro que $f \in H(IE)$. De (5), temos

$$\begin{aligned} \varphi(\Theta)L(x) &= L(\varphi(\Theta)x) = L(f(\Theta)) = \lambda(f_k; k \in \square) = \bar{\lambda}(f_k; k \in \square) \\ &= \sum_{k \in \square} \int_{\mathbb{R}^n} \langle f_k, dg_k \rangle = \sum_{k \in \square} \int_{\mathbb{R}^n} \langle f(k+it)P_k(\Theta, t), dg_k(t) \rangle \\ &= \sum_{k \in \square} \int_{\mathbb{R}^n} \langle \varphi(k+it)x P_k(\Theta, t), dg_k(t) \rangle, \end{aligned}$$

ou seja,

$$(7) \quad \varphi(\Theta)L(x) = \sum_{\square} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(k+it)P_k(\Theta, t) \left[\frac{\partial^n}{\partial t_1 \dots \partial t_n} \langle x, g_k(t) \rangle \right] dt$$

Portanto, se $\varphi(\Theta) = 0$ a última soma é nula. Mostraremos a seguir que este fato implicará na existência de uma função $\alpha(x, z)$ analítica e limitada em S_n^o , contínua em S_n e de modo que ,

$$\alpha(x, k+it) = \frac{\partial^n}{\partial t_1 \dots \partial t_n} \langle x, g_k(t) \rangle .$$

Para tanto, colocamos

$$\phi_k^m(t) = \left(\prod_{j=1}^n m_j \right) \langle x, \Delta^{(1/m)} g_k(t) \rangle$$

onde $m = (m_1, \dots, m_n)$, $1/m = (1/m_1, \dots, 1/m_n)$ e $t \in \mathbb{R}^n$.

Agora, para cada m fixo, pela proposição A.5 (apêndice), podemos considerar a função μ_m contínua e limitada em S_n , harmônica em S_n^0 e de modo que,

$$\mu_m(k+it) = \phi_k^m(t)$$

Assim,

$$\sum_{k \in \square} \int_{\mathbb{R}^n} \mu_m(k+it) P_k(\theta, t) dt = \mu_m(\theta) = \mu_m(\xi_1(0), \dots, \xi_n(0))$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \mu_m(\xi_1(e^{is_1}), \dots, \xi_n(e^{is_n})) ds_n \dots ds_1$$

$$\text{onde, } \xi_j(z) = \frac{1}{i\pi} \log \left(\frac{z \cdot e^{-ir\theta_j} - e^{ir\theta_j}}{z - 1} \right), \quad z \in \mathbb{T}, \quad |z| < 1, \quad j=1, \dots, n.$$

Definindo $h_m(s) = h_m(s_1, \dots, s_n) = \phi_k^m(ik_1 - i\xi_1(e^{is_1}), \dots, ik_n - i\xi_n(e^{is_n}))$ se

$\operatorname{Re} \xi_j(e^{is_j}) = k_j$, onde $k = (k_1, \dots, k_n) \in \square$ (neste caso chamamos h_m

a função associada a ϕ_k^m) temos

$$\sum_{k \in \square} \int_{\mathbb{R}^n} \phi_k^m(t) P_k(\theta, t) dt = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} h_m(s_1, \dots, s_n) ds_n \dots ds_1 .$$

Desde que $g_k \in \Lambda(E'_k)$, segue que as funções ϕ_k^m formam uma família uniformemente limitada e então por passagem ao limite, sucessivamente com $m_j \rightarrow \infty$, $j = 1, 2, \dots, n$, obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \square} \int_{\mathbb{R}^n} \left[\frac{\partial^n}{\partial t_1 \dots \partial t_n} < x, g_k(t) > \right] P_k(\theta, t) dt = \\ = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} h(s_1, \dots, s_n) ds_n \dots ds_1 \end{aligned}$$

onde h é a função associada a $\frac{\partial^n}{\partial t_1 \dots \partial t_n} < x, g_k(t) > .$

Também, a igualdade acima permanece válida se substituirmos a função,

$$\frac{\partial^n}{\partial t_1 \dots \partial t_n} < x, g_k(t) > \text{ por } \beta(t) \frac{\partial^n}{\partial t_1 \dots \partial t_n} < x, g_k(t) > ,$$

onde $\beta(t)$ é uma função contínua e limitada em $\mathbb{R}^n$, e h é a função associada a $\beta(t) \frac{\partial^n}{\partial t_1 \dots \partial t_n} < x, g_k(t) > .$ Para ver isto basta começar com

$$\phi_k^m(t) = \left(\prod_{j=1}^n m_j \right) < x, \Delta^{(1/m)} g_k(t) > \beta(t)$$

e proceder como anteriormente.

Em resumo, já obtivemos os fatos:

$$(8) \quad \sum_{k \in \square} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(k+it) P_k(\Theta, t) \left[\frac{\partial^n}{\partial t_1 \dots \partial t_n} \langle x, g_k(t) \rangle \right] dt = 0 ,$$

para toda função φ em $H(\mathbb{T})$ de modo que $\varphi(\Theta) = 0$;

$$(9) \quad \sum_{k \in \square} \int_{\mathbb{R}^n} \left[\frac{\partial^n}{\partial t_1 \dots \partial t_n} \langle x, g_k(t) \rangle \right] P_k(\Theta, t) dt =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} h(s_1, \dots, s_n) ds_n \dots ds_1$$

onde h é a função associada a $\frac{\partial^n}{\partial t_1 \dots \partial t_n} \langle x, g_k(t) \rangle$;

$$(10) \quad \sum_{k \in \square} \int_{\mathbb{R}^n} \beta(t) \left[\frac{\partial^n}{\partial t_1 \dots \partial t_n} \langle x, g_k(t) \rangle \right] P_k(\Theta, t) dt =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} h_1(s_1, \dots, s_n) ds_n \dots ds_1$$

onde β é uma função contínua e limitada em $\mathbb{R}^n$, e h_1 é a função

associada a $\beta(t) \frac{\partial^n}{\partial t_1 \dots \partial t_n} \langle x, g_k(t) \rangle$.

Agora, para $z = (z_1, \dots, z_n) \in S_n$, $\varepsilon > 0$ e n_j ($j = 1, \dots, n$) um número inteiro positivo, colocamos

$$\varphi_j(z_j) = \left(\frac{e^{\frac{i\pi z_j}{\varepsilon}} - e^{\frac{i\pi \theta_j}{\varepsilon}}}{e^{\frac{i\pi z_j}{\varepsilon}} - e^{\frac{i\pi \theta_j}{\varepsilon}}} \right)^{n_j}$$

$$\varphi(z) = \prod_{j=1}^n \varphi_j(z_j) e^{\varepsilon z_j^2}$$

e,

$$\beta(z) = \prod_{j=1}^n \varphi_j(z_j)$$

Da igualdade (8), temos

$$\sum_{k \in \square} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(k+it) \left[\frac{\partial^n}{\partial t_1 \dots \partial t_n} < x, g_k(t) > \right] P_k(\theta, t) dt = 0$$

A seguir, passando ao limite com $\varepsilon \rightarrow 0$, temos

$$(11) \quad \sum_{k \in \square} \int_{\mathbb{R}^n} \beta(k+it) \left[\frac{\partial^n}{\partial t_1 \dots \partial t_n} < x, g_k(t) > \right] P_k(\theta, t) dt = 0,$$

ou seja, da igualdade (10), temos

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} h_1(s_1, \dots, s_n) ds_n \dots ds_1 = 0 ,$$

onde,

$$h_1(s_1, \dots, s_n) = \beta(k_1 + i(ik_1 - i\xi_1(e^{is_1})), \dots, k_n + i(ik_n - i\xi_n(e^{is_n}))) .$$

$$[\frac{\partial^n}{\partial t_1 \dots \partial t_n} < x, g_k(ik_1 - i\xi_1(e^{is_1}), \dots, ik_n - i\xi_n(e^{is_n})) >]$$

se $\operatorname{Re} \xi_j(e^{is_j}) = k_j$ e $k = (k_1, \dots, k_n) \in \square$. Ou seja ,

$$h_1(s_1, \dots, s_n) = \beta(\xi_1(e^{is_1}), \dots, \xi_n(e^{is_n})) \cdot h(s_1, \dots, s_n)$$

Como,

$$\varphi_j(\xi_j(e^{is_j})) = e^{in_j s_j} , \quad j = 1, \dots, n$$

temos,

$$\beta(\xi_1(e^{is_1}), \dots, \xi_n(e^{is_n})) = \prod_{j=1}^n e^{in_j s_j} = \exp(i \sum_{j=1}^n n_j s_j) .$$

Assim,

$$h_1(s_1, \dots, s_n) = [\exp(i \sum_{j=1}^n n_j s_j)] \cdot h(s_1, \dots, s_n)$$

e portanto,

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} h(s_1, \dots, s_n) e^{i(n_1 s_1 + \dots + n_n s_n)} ds_n \dots ds_1 = 0.$$

Vemos então, que os coeficientes de Fourier, $c_n = c_{(n_1, \dots, n_n)}$ de h , são nulos se $n_j < 0$, $j = 1, \dots, n$.

Mostraremos a seguir que, se uma das componentes dos índices dos coeficientes de Fourier de h for negativa então, o respectivo coeficiente será nulo.

Por razões técnicas e de clareza vamos nos fixar no caso $n=2$.

Inicialmente para t_2 fixado em $\mathbb{R}$, colocamos

$$g_0(t_1) = g_{00}(t_1, t_2) - g_{00}(t_1, 0) - g_{00}(0, t_2) + g_{00}(0, 0)$$

e

$$g_1(t_1) = g_{10}(t_1, t_2) - g_{10}(t_1, 0) - g_{10}(0, t_2) + g_{10}(0, 0)$$

para todo t_1 em $\mathbb{R}$. É claro que g_0 e g_1 pertencem a $\Lambda(E'_{00})$ e $\Lambda(E'_{10})$, respectivamente.

Para $L \in [E_{00}, E_{10}]'_{\theta_1}$, $x \in E_{00} \cap E_{10}$, $\varphi \in H(\mathbb{C})$ e $f(z) = \varphi(z) \cdot x$, $z \in \mathbb{C}$, a igualdade (7) (para o caso $n=1$) nos permite escrever,

$$\begin{aligned} \varphi(\theta_1)L(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(it_1) \frac{d}{dt_1} \langle x, g_0(t_1) \rangle P_0(\theta_1, t_1) dt_1 + \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(1+it) \frac{d}{dt_1} \langle x, g_1(t_1) \rangle P_1(\theta_1, t_1) dt_1, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(it_1) \left[\frac{\partial}{\partial t_1} \langle x, g_{00}(t_1, t_2) \rangle - \frac{\partial}{\partial t_1} \langle x, g_{00}(t_1, 0) \rangle \right] P_0(\theta_1, t_1) dt_1 +$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(1+it_1) \left[\frac{\partial}{\partial t_1} \langle x, g_{10}(t_1, t_2) \rangle - \frac{\partial}{\partial t_1} \langle x, g_{10}(t_1, 0) \rangle \right] P_1(\theta_1, t_1) dt_1 = 0$$

para toda $\varphi \in H(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ satisfazendo a condição, $\varphi(\theta_1) = 0$.

Pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue, temos

$$(12) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(it_1) \left[\frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} \langle x, g_{00}(t_1, t_2) \rangle \right] P_0(\theta_1, t_1) dt_1 +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(1+it_1) \left[\frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} \langle x, g_{10}(t_1, t_2) \rangle \right] P_1(\theta_1, t_1) dt_1 = 0$$

para toda φ em $H(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ e $\varphi(\theta_1) = 0$.

De modo análogo, obtemos

$$(13) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(it_1) \left[\frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} \langle x, g_{01}(t_1, t_2) \rangle \right] P_0(\theta_1, t_1) dt_1 +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(1+it_1) \left[\frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} \langle x, g_{11}(t_1, t_2) \rangle \right] P_1(\theta_1, t_1) dt_1 = 0$$

para toda φ em $H(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ e $\varphi(\theta_1) = 0$.

Escolhamos agora, arbitrariamente um número s_2 em $(0, 2\pi)$ distinto de $2\pi\theta_2$. Para este número, há duas possibilidades: $\operatorname{Re} \xi_2(e^{is_2}) = 0$ ou $\operatorname{Re} \xi_2(e^{is_2}) = 1$. Consideremos inicialmente, o caso $\operatorname{Re} \xi_2(e^{is_2}) = 0$, coloquemos $t_2 = -i\xi_2(e^{is_2})$ e definamos

$$\phi_0^{m_1 m_2}(t_1) = m_1 m_2 < x, g_{00}(t_1 + \frac{1}{m_1}, t_2 + \frac{1}{m_2}) -$$

$$- g_{00}(t_1 + \frac{1}{m_1}, t_2) - g_{00}(t_1, t_2 + \frac{1}{m_2}) + g_{00}(t_1, t_2) >$$

e

$$\phi_1^{m_1 m_2}(t_1) = m_1 m_2 < x, g_{10}(t_1 + \frac{1}{m_1}, t_2 + \frac{1}{m_2}) -$$

$$- g_{10}(t_1 + \frac{1}{m_1}, t_2) - g_{10}(t_1, t_2 + \frac{1}{m_2}) + g_{10}(t_1, t_2) >$$

para $t_1 \in \mathbb{R}$, m_1 e m_2 inteiros positivos.

Desde que as funções $\phi_0^{m_1 m_2}$ e $\phi_1^{m_1 m_2}$ são contínuas e limitadas em $\mathbb{R}$, existe uma função $\mu_{m_1 m_2}$, harmônica em S_1 , contínua e limitada em S_1 . (ver proposição A.2, apêndice) de modo que

$$\mu_{m_1 m_2}(it) = \phi_0^{m_1 m_2}(t) \text{ e } \mu_{m_1 m_2}(1+it) = \phi_1^{m_1 m_2}(t) .$$

Ainda, associadas as funções $\phi_0^{m_1 m_2}$ e $\phi_1^{m_1 m_2}$ temos as funções $h_{m_1 m_2}$ definidas por

$$h_{m_1 m_2}(s_1) = \phi_0^{m_1 m_2}(-i\xi_1(e^{is_1})), \text{ se } \operatorname{Re}(\xi_1(e^{is_1})) = 0$$

e

$$h_{m_1 m_2}(s_1) = \phi_1^{m_1 m_2}(i - i\xi_1(e^{is_1})), \text{ se } \operatorname{Re}(\xi_1(e^{is_1})) = 1,$$

$$\text{onde } \xi_1(z) = \frac{1}{i\pi} \log\left(\frac{z \cdot e^{-i\pi\theta_1} - e^{i\pi\theta_1}}{z - 1}\right)$$

Assim,

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \phi_0^{m_1 m_2}(t_1) p_0(\theta_1, t_1) dt_1 + \int_{-\infty}^{\infty} \phi_1^{m_1 m_2}(t_1) p_1(\theta_1, t_1) dt_1 = \mu_{m_1 m_2}(\theta_1) = \\ & = \mu_{m_1 m_2}(\xi_1(0)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mu_{m_1 m_2}(\xi_1(e^{is_1})) ds_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h_{m_1 m_2}(s_1) ds_1 \end{aligned}$$

Passando ao limite, sucessivamente com $m_1 \rightarrow \infty$, $m_2 \rightarrow \infty$ obtemos

$$(14) \quad \sum_{j=0}^1 \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} \langle x, g_{j0}(t_1, t_2) \rangle | p_j(\theta_1, t_1) \right] dt_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(s_1, s_2) ds_1$$

onde,

$$h(s_1, s_2) = \frac{\partial^2}{\partial s_1 \partial s_2} \langle x, g_{00}(-i\xi_1(e^{is_1}), -i\xi_2(e^{is_2})) \rangle, \text{ se } \operatorname{Re} \xi_1(e^{is_1})=0$$

e

$$h(s_1, s_2) = \frac{\partial^2}{\partial s_1 \partial s_2} \langle x, g_{10}(i-i\xi_1(e^{is_1}), -i\xi_2(e^{is_2})) \rangle, \text{ se } \operatorname{Re} \xi_1(e^{is_1})=1.$$

De modo análogo, se $\operatorname{Re} \xi_2(e^{is_2}) = 1$, obtemos

$$(15) \quad \sum_{j=0}^1 \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} \langle x, g_{j1}(t_1, t_2) \rangle \right] P_j(\theta_1, t_1) dt_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(s_1, s_2) ds_1$$

onde,

$$h(s_1, s_2) = \frac{\partial^2}{\partial s_1 \partial s_2} \langle x, g_{01}(-i\xi_1(e^{is_1}), i-i\xi_2(e^{is_2})) \rangle, \text{ se } \operatorname{Re} \xi_1(e^{is_1})=0$$

e

$$h(s_1, s_2) = \frac{\partial^2}{\partial s_1 \partial s_2} \langle x, g_{11}(i-i\xi_1(e^{is_1}), i-i\xi_2(e^{is_2})) \rangle, \text{ se } \operatorname{Re} \xi_1(e^{is_1}) = 1.$$

Agora, sendo

$$\varphi(z) = \left(\frac{e^{i\pi z} - e^{i\pi\theta_1}}{e^{i\pi z} - e^{-i\pi\theta_1}} \right)^{n_1} e^{z^2}$$

definida para z em S_1 , usando (12) e (14) e, procedendo-se como anteriormente encontramos,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(s_1, s_2) e^{in_1 s_1} ds_1 = 0$$

Assim,

$$\begin{aligned} c_{(-n_1, n_2)} &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} h(s_1, s_2) e^{in_1 s_1} \cdot e^{-in_2 s_2} ds_1 ds_2 \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} h(s_1, s_2) e^{in_1 s_1} ds_1 \right] e^{-in_2 s_2} ds_2 = 0 \end{aligned}$$

De modo análogo, usando (13) e (15), com

$$\varphi(z) = \left(\frac{e^{i\pi z} - e^{\frac{i\pi\theta_1}{1}}}{e^{i\pi z} - e^{-\frac{i\pi\theta_1}{1}}} \right)^{n_2} e^{\varepsilon z^2}$$

obtemos

$$c_{(n_1 - n_2)} = 0.$$

Portanto se pelo menos uma das componentes dos índices, dos coeficientes de Fourier de h for negativa, o respectivo coeficiente é nulo.

Desde que o sistema $\{e^{i(n_1 s_1 + n_2 s_2)} \mid n_1, n_2 \in \mathbf{Z}\}$ é um sistema ortogonal completo em $L^2([0, 2\pi] \times [0, 2\pi])$ e h pertence a este espaço segue que a função h é a soma de sua série de Fourier. Logo,

$$h(s_1, s_2) = \sum_{\substack{n_1 \geq 0 \\ n_2 \geq 0}} c_{(n_1, n_2)} e^{i(n_1 s_1 + n_2 s_2)}$$

onde,

$$c_{(n_1, n_2)} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} h(s_1, s_2) e^{-in_1 s_1 - in_2 s_2} ds_1 ds_2 .$$

Desde que h é limitada, existe então, um número $M > 0$ tal que $|h(s_1, s_2)| \leq M$, para todo (s_1, s_2) em $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$. Portanto para z_1 e z_2 em $\mathbb{C}$ e $|z_1| < 1$, $|z_2| < 1$ temos

$$\sum_{j=0}^{n_1} \sum_{i=0}^{n_2} |c_{ji} z_1^j z_2^i| \leq \frac{M}{(1-|z_1|)(1-|z_2|)}$$

quaisquer que sejam os números inteiros não negativos, n_1 e n_2 . Isto implica que a série dupla,

$$\sum_{\substack{n_1 \geq 0 \\ n_2 \geq 0}} c_{n_1 n_2} z_1^{n_1} z_2^{n_2}$$

é absolutamente convergente. Logo,

$$\sum_{\substack{n_1 \geq 0 \\ n_2 \geq 0}} c_{n_1 n_2} z_1^{n_1} z_2^{n_2} = \sum_{n_2=0}^{\infty} \left(\sum_{n_1=0}^{\infty} c_{n_1 n_2} z_1^{n_1} \right) z_2^{n_2}$$

Agora, para cada n_2 fixado, a função

$$a_{n_2}(z_1) = \sum_{n_1=0}^{\infty} c_{n_1 n_2} z_1^{n_1}$$

é holomorfa no disco unitário $|z_1| < 1$.

Ainda, a série

$$\sum_{\substack{n_1 \geq 0 \\ n_2 \geq 0}} a_{n_2}(z_1) z_2^{n_2}$$

é quase uniformemente convergente no disco duplo,

$$D(0,1) \times D(0,1) = \{(z_1, z_2) \mid |z_1| < 1, |z_2| < 1\}.$$

De fato, seja r um número real e $0 < r < 1$. Para $|z_1| < r$ e $|z_2| < r$ temos,

$$|a_{n_2}(z_1)| \leq \frac{M}{1-r}$$

e então,

$$\left| \sum_{k=n_2'}^{n_2''} a_k(z_1) z_2^k \right| \leq \frac{M}{1-r} \sum_{k=n_2'}^{n_2''} r^k$$

Isto implica que a série $\sum_{n_2 \geq 0} a_{n_2}(z_1) z_2^{n_2}$ é uniformemente convergente no disco duplo, $\{(z_1, z_2) \mid |z_1| < r, |z_2| < r\}$. Assim a série $\sum_{n_2 \geq 0} a_{n_2}(z_1) z_2^{n_2}$ converge quase uniformemente em $D(0,1) \times D(0,1)$.

Então, por um resultado em Saks - Zygmund ([1], pag. 151) segue

que a função

$$\bar{h}(z_1, z_2) = \sum_{\substack{n_1 \geq 0 \\ n_2 \geq 0}} c_{n_1 n_2} z_1^{n_1} z_2^{n_2}$$

é holomorfa no disco duplo $D(0,1) \times D(0,1)$.

Ainda $\bar{h}(z_1, z_2)$ é limitada neste disco duplo. Portanto, para z_2 fixado em $D(0,1)$, existe o limite $\lim_{z_1 \rightarrow e^{is_1}} \bar{h}(z_1, z_2)$, para quase todo s_1 em $[0, 2\pi]$. De modo análogo, existe o limite $\lim_{z_2 \rightarrow e^{is_2}} \bar{h}(z_1, z_2)$ para quase todo s_2 em $[0, 2\pi]$, com z_1 fixado em $D(0,1)$. Finalmente, sendo $\bar{h}$ analítica e limitada em $D(0,1) \times D(0,1)$ segue que o limite não tangencial de $\bar{h}$ existe em quase todo ponto da fronteira reduzida,

$$C(0,1) \times C(0,1) = \{(e^{is_1}, e^{is_2}) \mid s_1, s_2 \in [0, 2\pi]\},$$

e seu valor em (e^{is_1}, e^{is_2}) é igual a $h(s_1, s_2)$.

Definimos agora, a função

$$\alpha(x; z_1, z_2) = \bar{h}(\xi_1^{-1}(z_1), \xi_2^{-1}(z_2)) .$$

Claramente, $\alpha(x; z_1, z_2)$ é holomorfa e limitada em S_2^o e pode ser estendida continuamente em S_2 . Ainda,

$$\begin{aligned}
(x; k_1 + it_1, k_2 + it_2) &= \bar{h}(\xi_1^{-1}(k_1 + it_1), \xi_2^{-1}(k_2 + it_2)) = \bar{h}(e^{is_1}, e^{is_2}) \\
&= h(s_1, s_2) = \frac{\partial^2}{\partial s_1 \partial s_2} \langle x, g_{(k_1, k_2)}(ik_1 - i\xi_1(e^{is_1}), ik_2 - i\xi_2(e^{is_2})) \rangle \\
&= \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} \langle x, g_{(k_1, k_2)}(t_1, t_2) \rangle
\end{aligned}$$

Portanto, obtemos

$$\alpha(x; k + it) = \alpha(x; k_1 + it_1, k_2 + it_2) = \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} \langle x, g_k(t) \rangle$$

para $k = (k_1, k_2) \in \square$, como queríamos (conferir pag. 113).

Segue da definição que, $\alpha(x; z_1, z_2)$ é linear em x , para z_1, z_2 fixados em S_2 . Mas ainda, do lema 1.2.2 e da desigualdade em (6), temos

$$|\alpha(x; z_1, z_2)| \leq \max_{k=(k_1, k_2) \in \square} \sup_{t_1, t_2} |\alpha(x; k_1 + it_1, k_2 + it_2)|$$

$$= \max_{k \in \square} \sup_{t_1, t_2} \left| \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} \langle x, g_k(t_1, t_2) \rangle \right|$$

$$\leq \max_{k \in \square} \sup_{t_1, t_2} \|x\|_{E_k} \|g_k\|_{\Lambda(E'_k)}$$

$$\leq \|x\|_{\cap \Pi E} \max_{k \in \square} \|g_k\|_{\Lambda(E'_k)} \leq \|x\|_{\cap \Pi E} \|L\|_{[\Pi E]'} \theta$$

Isto significa que para cada $z = (z_1, z_2)$ fixado em S_2^0 , $\alpha(\cdot, z)$ é um funcional linear contínuo no espaço $\cap IE$.

Podemos assim, definir a função

$$\alpha : S_2^0 \longrightarrow (\cap IE)'$$

por $\langle x, \alpha(z) \rangle = \langle x, \alpha(z_1, z_2) \rangle = \alpha(x; z)$.

A função α é limitada em S_2^0 . De fato,

$$|\langle x, \alpha(z) \rangle| = |\alpha(x; z)| \leq \|L\|_{\cap IE}'_0 \|x\|_{\cap IE},$$

ou seja,

$$(16) \quad \|\alpha(z)\|_{(\cap IE)'} \leq \|L\|_{\cap IE}'_0$$

acarretando que α é limitada em S_2^0 .

Também, α é holomorfa em cada variável separadamente. Para tanto fixemos z_2 em S_1^0 e consideremos um compacto K em S_1^0 , contendo z_1 . Sejam u e v números complexos tais que $z_1 + u$ e $z_1 + v$ estejam em K . Desde que $\alpha(x; z_1, z_2)$ é holomorfa em S_2^0 , temos

$$\left| \frac{1}{u-v} \left\{ \frac{1}{u} [\alpha(x; z_1+u, z_2) - \alpha(x; z_1, z_2)] - \frac{1}{v} [\alpha(x; z_1+v, z_2) - \alpha(x; z_1, z_2)] \right\} \right| \leq M(\alpha, x, K)$$

onde $M(\alpha, x, K)$ depende de α , de x e do compacto K .

Reescrevendo a desigualdade acima, temos

$$\left| \langle x, \frac{1}{u-v} \left\{ \frac{1}{u} [\alpha(z_1+u, z_2) - \alpha(z_1, z_2)] - \frac{1}{v} [\alpha(z_1+v, z_2) - \alpha(z_1, z_2)] \right\} \right| \leq M(\alpha, x, K)$$

ou seja,

$$\left| x^{**} \left\{ \frac{1}{u-v} \left[\frac{1}{u} (\alpha(z_1+u, z_2) - \alpha(z_1, z_2)) - \frac{1}{v} (\alpha(z_1+v, z_2) - \alpha(z_1, z_2)) \right] \right\} \right| \leq M(\alpha, x, K)$$

Desde que o subespaço, $B = \{x^{**} \mid x \in \cap IE\}$ é um subespaço determinante para $(\cap IE)'$, pelo princípio da limitação uniforme, obtemos

$$\left| \frac{1}{u} [\alpha(z_1+u, z_2) - \alpha(z_1, z_2)] - \frac{1}{v} [\alpha(z_1+v, z_2) - \alpha(z_1, z_2)] \right| \leq M(\alpha, K) |u - v|$$

onde $M(\alpha, K)$ depende de α e K .

Desta última desigualdade segue que $\alpha(z_1, z_2)$ é holomorfa na variável z_1 com z_2 fixado. De modo análogo, concluímos que $\alpha(z_1, z_2)$ é holomorfa na variável z_2 com z_1 fixado em S_1 .

Definimos agora a função,

$$g: \overset{0}{S_2} \longrightarrow (\cap IE)',$$

$$\text{pondo } g(z) = g(z_1, z_2) = \int_{\frac{1}{2}}^{z_1} \int_{\frac{1}{2}}^{z_2} \alpha(\eta_1, \eta_2) d\eta_2 d\eta_1.$$

A função g é holomorfa em $\overset{0}{S_2}$. Ainda, g é uniformemente contínua em $\overset{0}{S_2}$. A primeira afirmativa segue do fato de α ser holomorfa em $\overset{0}{S_2}$. Para a segunda afirmativa basta observar que

$$g(z+h) - g(z) = \int_{z_1}^{z_1+h_1} \int_{z_2}^{z_2+h_2} \alpha(\omega_1, \omega_2) d\omega_1 d\omega_2$$

com $z = (z_1, z_2)$ e $h = (h_1, h_2)$.

Da desigualdade em (16), obtemos

$$\|g(z+h) - g(z)\|_{(\cap IE)'} \leq \|L\|_{[IE]_0'} |h_1| |h_2|,$$

implicando na continuidade uniforme de g em $\overset{0}{S_2}$. Este fato nos permite estender g continuamente em S_2 . A extensão será ainda, representada por g .

Desejamos verificar que $g \in \bar{H}(IE')$. Para este fim, consideremos $z = (z_1, z_2)$ em $\overset{0}{S_2}$ e $x \in \cap IE$. Temos então,

$$\begin{aligned}
\langle x, \Delta^{ih} g(z) \rangle &= \langle x, \int_{z_1}^{z_1+ih_1} \int_{z_2}^{z_2+h_2} \alpha(\omega_1, \omega_2) d\omega_2 d\omega_1 \rangle \\
&= \int_{z_1}^{z_1+ih_1} \int_{z_2}^{z_2+h_2} \langle x, \alpha(\omega_1, \omega_2) \rangle d\omega_2 d\omega_1 \\
&= (i)^2 \int_0^{h_1} \int_0^{h_2} \langle x, \alpha(z_1+it_1, z_2+it_2) \rangle dt_2 dt_1
\end{aligned}$$

Fazendo $z = (k_1 + \frac{1}{m} + i\tau_1, k_2 + \frac{1}{m} + i\tau_2)$ temos

$$\begin{aligned}
\langle x, \Delta^{i(h_1, h_2)} g(z) \rangle &= \\
&= (i)^2 \int_0^{h_1} \int_0^{h_2} \langle x, \alpha(k_1 + \frac{1}{m} + i(t_1 + \tau_1), k_2 + \frac{1}{m} + i(t_2 + \tau_2)) \rangle dt_2 dt_1 .
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade (16), conseguimos,

$$|\langle x, \alpha(k_1 + \frac{1}{m} + i(t_1 + \tau_1), k_2 + \frac{1}{m} + i(t_2 + \tau_2)) \rangle|$$

$$\leq \|x\|_{\cap IE} \|L\|_{\{IE\}'_{\Theta}}$$

e este fato nos permite usar o teorema da convergência dominada de Lebesgue no segundo membro da igualdade imediatamente anterior, obtendo então por passagem ao limite com $m \rightarrow \infty$,

$$\begin{aligned}
& \langle x, \Delta^{(ih_1, ih_2)} g(k_1 + i\tau_1, k_2 + i\tau_2) \rangle = \\
& = (i)^2 \int_0^{h_1} \int_0^{h_2} \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} \langle x, g_k(t_1 + \tau_1, t_2 + \tau_2) \rangle dt_2 dt_1 \\
& = (i)^2 \langle x, \Delta^{(h_1, h_2)} g_k(\tau_1, \tau_2) \rangle = \\
& = \langle x, (i)^2 \Delta^{(h_1, h_2)} g_k(\tau_1, \tau_2) \rangle
\end{aligned}$$

onde $k = (k_1, k_2) \in \square$. Desde que x foi tomado arbitrariamente no espaço de Banach, $\cap \mathcal{E}$, segue que

$$(17) \quad \Delta^{(ih_1, ih_2)} g(k_1 + i\tau_1, k_2 + i\tau_2) = (i)^2 \Delta^{(h_1, h_2)} g_k(\tau_1, \tau_2),$$

acarretando que $\Delta^{ih} g(k + i\tau)$ pertence a E'_k , pois $g_k \in \Lambda(E'_k)$, $k = (k_1, k_2) \in \square$. Também

$$\left\| \frac{\Delta^{(ih_1, ih_2)} g(k_1 + i\tau_1, k_2 + i\tau_2)}{h_1 h_2} \right\|_{E'_k} = \left\| \frac{\Delta^{(h_1, h_2)} g_k(\tau_1, \tau_2)}{h_1 h_2} \right\|_{E'_k} \leq \|g_k\|_{\Lambda(E'_k)}$$

Assim, pela desigualdade em (6), sendo $h = (h_1, h_2)$ e $\tau = (\tau_1, \tau_2)$ temos

$$\max_{k \in \square} \sup_{h, \tau} \left\| \frac{\Delta^{ih} g(k+i\tau)}{h_1 h_2} \right\|_{E'_k} \leq \max \{ \|g_k\|_{\Lambda(E'_k)} \mid k \in \square \} \leq \|L\|_{[IE]_\theta}$$

Então da proposição A.6 (apêndice) segue que $g \in \bar{H}(IE')$ e ainda temos,

$$(18) \quad \|g\|_{\bar{H}(IE')} \leq \|L\|_{[IE]_\theta}$$

Agora, para $f \in H(IE)$, de (5) e (17), obtemos

$$\begin{aligned} L(f(\theta)) &= \bar{\lambda}(f_k; k \in \square) = \sum_{k \in \square} \int_{\mathbb{R}^2} \langle f_k(t), dg_k(t) \rangle \\ &= \sum_{k \in \square} \int_{\mathbb{R}^2} \langle f(k+it) p_k(\theta, t), dg_k(t) \rangle \\ &= (i)^2 \sum_{k \in \square} \int_{\mathbb{R}^2} \langle f(k+it) p_k(\theta, t), dg(k+it) \rangle . \end{aligned}$$

Usando o lema 5.2.2, obtemos

$$L(f(\theta)) = \langle f(\theta), \frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial z_2} g(\theta) \rangle .$$

Desde que $f(\theta)$ é um elemento genérico de $[IE]_\theta$ temos que

$$L = \frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial z_2} g(\theta) \in [IE']^\theta,$$

concluindo assim a primeira parte do teorema.

Finalmente, da proposição 3.3.2 e de (18), obtemos

$$\|L\|_{[IE']^\theta} = \left\| \frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial z_2} g(\theta) \right\|_{[IE']^\theta} \leq \|g\|_{\bar{H}(IE')} \leq \|L\|_{[IE]_\theta'}$$

concluindo, deste modo, a segunda e última parte do teorema.

5.2.4. TEOREMA. (dualidade). Seja $IE = (E_k | k \in \square)$ uma família admissível de espaços de Banach de modo que, a intersecção $\cap IE$, seja densa em cada E_k , $k \in \square$. Então para $0 < \theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) < 1$ temos

$$(1) \quad [IE]_\theta' = [IE']^\theta$$

e

$$(2) \quad \|L\|_{[IE]_\theta'} = \|L\|_{[IE']^\theta}$$

para todo L em $[IE']^\theta$.

DEMONSTRAÇÃO. A demonstração segue aplicando-se os teoremas 5.2.1 e 5.2.3.

APÊNDICE

Daremos aqui vários resultados que completarão algumas de nossas demonstrações.

Seja F um espaço de Banach e f uma função com valores em F , definida, contínua em S_n e holomorfa em S_n^o . Então f tem um certo grau de analiticidade na fronteira de S_n . Enunciaremos de modo mais preciso este resultado na proposição abaixo

Al. PROPOSIÇÃO. Seja F um espaço de Banach e f uma função com valores em F , definida e contínua em S_n , e holomorfa no interior S_n^o , de S_n . Então para cada z_j fixado em S_n , a função,

$$(1) \quad g(z_1, \dots, z_{j-1}, z_{j+1}, \dots, z_n) = f(z_1, \dots, z_{j-1}, z_j, z_{j+1}, \dots, z_n)$$

é holomorfa em S_{n-1}^o .

DEMONSTRAÇÃO. Se z_j pertence a S_{n-1}^o o fato de g ser holomorfa em S_{n-1}^o é uma consequência da função f ser holomorfa (f é holomorfa em S_n quando e somente quando, f for holomorfa em cada variável separadamente). Suponhamos agora que $z_j = k_j + iy_j$ seja um elemento da fronteira ∂S_1 , da faixa unitária S_1 . Para cada número inteiro positivo m colocamos,

$$K_m = Y_1 \times \dots \times Y_{j-1} \times Y_{j+1} \times \dots \times Y_n$$

onde $Y_s = \{z \in S_1 \mid |z| \leq m\}$ e $s = 1, \dots, j-1, j+1, \dots, n$.

Colocamos também,

$$B_j = \{z \in S_1 \mid |z - z_j| \leq 1\}.$$

Portanto o conjunto $A_m = Y_1 \times \dots \times Y_{j-1} \times B_j \times Y_{j+1} \times \dots \times Y_n$ é compacto. Como f é contínua temos,

$$(2) \quad \forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \text{ tal que } |z-w| < \delta \text{ então } \|f(z)-f(w)\|_F < \varepsilon$$

com z e w em A_m .

A seguir consideremos uma sequência $(z'_r)_{r \in \mathbb{N}}$ em $S_1 \cap B_j$ convergindo para z_j . Existe então, um número positivo r_0 tal que $|z'_r - z_j| < \delta$ para $r \geq r_0$. Segue daqui que

$$|(z_1, \dots, z_{j-1}, z'_r, z_{j+1}, \dots, z_n) - (z_1, \dots, z_{j-1}, z_j, z_{j+1}, \dots, z_n)| < \delta$$

para todo número inteiro positivo $r \geq r_0$. De (2) obtemos

$$\|f(z_1, \dots, z_{j-1}, z'_r, z_{j+1}, \dots, z_n) - f(z_1, \dots, z_{j-1}, z_j, z_{j+1}, \dots, z_n)\|_F < \varepsilon$$

para $r \geq r_0$ e para todo $z' = (z_1, \dots, z_{j-1}, z_{j+1}, \dots, z_n)$ em K_m . Sendo $g_r(z_1, \dots, z_{j-1}, z_{j+1}, \dots, z_n) = f(z_1, \dots, z_{j-1}, z'_r, z_{j+1}, \dots, z_n)$ concluimos que a sequência de funções $(g_r)_{r \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente em K_m para a função $g(z_1, \dots, z_{j-1}, z_{j+1}, \dots, z_n) = f(z_1, \dots, z_{j-1}, z_j, z_{j+1}, \dots, z_n)$. Como g_r é holomorfa no interior K_m° , de K_m segue

que a função limite g é holomorfa em K_m^o , ou seja, $f(z_1, \dots, z_{j-1}, k_j + iy_j, z_{j+1}, \dots, z_n)$ é holomorfa em K_m^o . Desde que $S_{n-1} = \bigcup_{m=1}^{\infty} K_m^o$ concluímos que a função limite $f(z_1, \dots, z_{j-1}, k_j + iy_j, z_{j+1}, \dots, z_n)$ é holomorfa em S_{n-1}^o , como queríamos demonstrar.

A2. PROPOSIÇÃO. Seja g_k uma função real, definida, contínua e limitada em $\mathbb{R}^n$, para cada $k \in \square$. Então existe uma função real F definida em S_n satisfazendo as condições:

- (1) F é harmônica no interior S_n^o , de S_n (isto é, F é harmônica em cada variável separadamente),
- (2) F é contínua em S_n ,
- (3) $F(k+it) = g_k(t)$, $t \in \mathbb{R}^n$ e $\forall k \in \square$.

Mais ainda,

$$(4) \quad F(z) = \sum_{k \in \square} \int_{\mathbb{R}^n} p_k(x, t-y) g_k(t) dt$$

onde $z = (z_1, \dots, z_n) = (x_1 + iy_1, \dots, x_n + iy_n) = (x_1, \dots, x_n) + i(y_1, \dots, y_n) = x + iy$ e $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$.

DEMONSTRAÇÃO. Por razões técnicas e de clareza faremos a prova para o caso $n = 2$. Inicialmente, consideremos a função

$$(5) \quad F_k(z_1, z_2) = F_k(z) = \int_{\mathbb{R}^2} P_k(x, t-y) g_k(t) dt$$

onde $z_j = x_j + iy_j$, $0 < x_j < 1$ para $j = 1, 2$, $x = (x_1, x_2)$,
 $y = (y_1, y_2)$, $t = (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^n$ e $k = (k_1, k_2) \in \square$. De 1.4.0(3)
 podemos escrever,

$$F_k(z_1, z_2) = \int_{-\infty}^{\infty} P_{k_1}(x_1, t_1 - y_1) \left[\int_{-\infty}^{\infty} P_{k_2}(x_2, t_2 - y_2) g_k(t_1, t_2) dt_2 \right] dt_1$$

Agora, para cada $z_2 = x_2 + iy_2$ fixado em $\overset{O}{S}_1$, a função ϕ_{k_2} definida em $\mathbb{R}$ por,

$$\phi_{k_2}(t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} P_{k_2}(x_2, t_2 - y_2) g_k(t_1, t_2) dt_2$$

é contínua e limitada em $\mathbb{R}$. Assim, pelo teorema 1 em D.V. Widder ([1], pag. 68) a função,

$$F_k(z_1, z_2) = \int_{-\infty}^{\infty} P_{k_1}(x_1, t_1 - y_1) \phi_{k_2}(t_1) dt_1$$

satisfaz as condições,

(6) $F_k(z_1, z_2)$ é harmônica na variável $z_1 \in \overset{O}{S}_1$, para $z_2 \in \overset{O}{S}_1$ fixado,

(7) $F_k(1 - k_1 + iy_1, z_2) = 0$, para $z_2 \in \overset{O}{S}_1$

$$(8) \quad \lim_{\substack{x_1 \rightarrow k_1 \\ y_1 \rightarrow y_1^0}} F_k(x_1 + iy_1, z_2) = \phi_{k_2}(y_1^0) = \int_{-\infty}^{\infty} P_{k_2}(x_2, t_2 - y_2) g_k(y_1^0, t_2) dt_2$$

para $z_2 \in S_1^0$.

Analogamente, prova-se que

(6') $F_k(z_1, z_2)$ é harmônica na variável $z_2 \in S_1^0$, para $z_1 \in S_1^0$ fixado,

(7') $F_k(z_1, 1 - k_2 + iy_2) = 0$, para $z_1 \in S_1^0$ fixado,

$$(8') \quad \lim_{\substack{x_2 \rightarrow k_2 \\ y_2 \rightarrow y_2^0}} F_k(z_1, x_2 + iy_2) = \phi_{k_1}(y_2^0) = \int_{-\infty}^{\infty} P_{k_1}(x_1, t_1 - y_1) g_k(t_1, y_2^0) dt_1.$$

Portanto de (6) e (6') concluímos que F_k é harmônica em S_2^0 .

A função F_k como definida em (5) é contínua em S_2^0 . Para tanto, consideremos $(x_1^0 + iy_1^0, x_2^0 + iy_2^0)$ em S_2^0 e duas sequências $(x_1^n + iy_1^n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(x_2^n + iy_2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ em S_1^0 , convergindo respectivamente para $x_1^0 + iy_1^0$ e $x_2^0 + iy_2^0$. Desde que $0 < x_j^0 < 1$ podemos considerar um intervalo fechado $I_j \subset (0, 1)$ contendo x_j^0 e x_j^n , para $j = 1, 2$. Das propriedades do núcleo de Poisson (ver W.V. Widder [1], pag. 67) concluímos que

$$e^{\pi(|t_1| + |t_2|)} P_k(x, t) \leq M$$

onde $t = (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$ e $x = (x_1, x_2) \in I_1 \times I_2$. Também a função,

$$e^{-\pi(|t_1| + |t_2|)} g_k(t_1, t_2)$$

pertence a $L^1(\mathbb{R}^2)$. Logo a função, de variável $t = (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$P_k(x^n, t - y^n) g_k(t) = P_{k_1}(x_1^n, t_1 - y_1^n) P_{k_2}(x_2^n, t_2 - y_2^n) g_k(t_1, t_2)$$

onde $x^n = (x_1^n, x_2^n)$ e $y^n = (y_1^n, y_2^n)$, é dominada por uma função integrável em $\mathbb{R}^2$, para todo número natural n . Pelo teorema de Lebesgue e a continuidade do núcleo de Poisson temos,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_k(x_1^n + iy_1^n, x_2^n + iy_2^n) = \int_{\mathbb{R}^2} P_{k_1}(x_1^0, y_1^0) P_{k_2}(x_2^0, y_2^0) g_k(t_1, t_2) dt_1 dt_2$$

$$= F_k(x_1^0 + iy_1^0, x_2^0 + iy_2^0),$$

ou seja, F_k é contínua em um ponto qualquer de S_2^0 .

Agora, as condições (7), (8), (7') e (8') permitem-nos estender F_k continuamente a S_2 definindo-se

$$F_k(l - k_1 + iy_1, z_2) = 0 \quad \forall y_1 \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \forall z_2 \in S_1, \quad ,$$

$$F_k(z_1, l - k_2 + iy_2) = 0 \quad \forall y_2 \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \forall z_1 \in S_1, \quad ,$$

$$F_k(k_1+iy_1, z_2) = \phi_{k_2}(y_1) = \int_{-\infty}^{\infty} P_{k_2}(x_2, t_2 - y_2) g_k(y_1, t_2) dt_2 ,$$

$$\forall z_2 = x_2 + iy_2 \in S_1^0 ,$$

$$F_k(z_1, k_2+iy_2) = \phi_{k_1}(y_2) = \int_{-\infty}^{\infty} P_{k_1}(x_1, t_1 - y_1) g_k(t_1, y_2) dt_1 ,$$

$$\forall z_1 = x_1 + iy_1 \in S_1^0 , \quad e$$

$$F_k(k_1+iy_1, k_2+iy_2) = g_k(y_1, y_2) \quad \forall y_1, y_2 \text{ em } \mathbb{R} .$$

Vamos tãõ somente verificar a continuidade de F_k em um ponto $(k_1 + iy_1^0, k_2 + y_2^0)$. Para os outros casos basta usar propriedades do núcleo de Poisson (ver W.V. Widder, [1], pag. 67). Consideremos então, $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$ em S_1^0 . Logo

$$\begin{aligned} F_k(z_1, z_2) &= [(1-k_1)+(-1)^{1-k_1}x_1][(1-k_2)+(-1)^{1-k_2}x_2] g_k(y_1^0, y_2^0) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P_{k_1}(x_1, t_1) P_{k_2}(x_2, t_2) [g_k(t_1+y_1, t_2+y_2) - g_k(y_1^0, y_2^0)] dt_1 dt_2 \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} |F_k(z_1, z_2) - [(1-k_1)+(-1)^{1-k_1}x_1][(1-k_2)+(-1)^{1-k_2}x_2] g_k(y_1^0, y_2^0)| &\leq \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P_{k_1}(x_1, t_1) P_{k_2}(x_2, t_2) |g_k(t_1+y_1, t_2+y_2) - g_k(y_1^0, y_2^0)| dt_1 dt_2 \end{aligned}$$

Desde que g_k é contínua em (y_1^0, y_2^0) , então dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que,

$$(9) \quad |g_k(y_1 + y_1^0, y_2 + y_2^0) - g_k(y_1^0, y_2^0)| < \varepsilon$$

se $|(y_1, y_2)| < 2\delta$. Então, se $|(y_1, y_2) - (y_1^0, y_2^0)| < \delta$, $|t_1| < \frac{\sqrt{2}}{2} \delta$ e $|t_2| < \frac{\sqrt{2}}{2} \delta$, de (8) obtemos

$$|g_k(t_1 + y_1, t_2 + y_2) - g_k(y_1^0, y_2^0)| < \varepsilon.$$

Assim podemos escrever ,

$$|F_k(z_1, z_2) - [(1-k_1) + (-1)^{1-k_1} x_1] [(1-k_2) + (-1)^{1-k_2} x_2]| \leq$$

$$\int_{|t_1| \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \delta} \int_{|t_2| \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \delta} p_k(x, t) |g_k(t+y) - g_k(y^0)| dt +$$

$$\int_{|t_1| \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \delta} \int_{|t_2| \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \delta} p_k(x, t) |g_k(t+y) - g_k(y^0)| dt +$$

$$\int_{|t_1| \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \delta} \int_{|t_2| \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \delta} P_k(x, t) |g_k(t+y) - g_k(y^0)| dt +$$

$$\int_{|t_1| \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \delta} \int_{|t_2| \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \delta} P_k(x, t) |g_k(t+y) - g_k(y^0)| dt$$

onde $x = (x_1, x_2)$ com $0 < x_j < 1$ e $j = 1, 2$, $y^0 = (y_1^0, y_2^0)$ e $t = (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$.

A desigualdade em (9) nos dá que a primeira destas integrais é menor que ε . Para estimar as outras integrais lembramos que,

$$(10) \quad |P_{k_j}(x_j, t_j)| \leq \frac{1}{2} |\operatorname{sen} \pi x_j| \frac{e^{-\pi |t_j|} e^{\pi \delta}}{\cosh \pi \delta - 1}$$

se $|t_j| \geq \delta$ e $0 \leq x_j \leq 2$ ($j=1, 2$), ver W.V. Widder [1], pag.67).

Assim, sendo $\|g_k\| = \sup\{|g_k(t)| \mid t \in \mathbb{R}^2\}$, da desigualdade (10) obtemos

$$\int_{|t_1| \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \delta} \int_{|t_2| \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \delta} P_k(x, t) |g_k(t+y) - g_k(y^0)| dt \leq$$

$$\leq 2 \|g_k\| \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2} \delta}^{\frac{\sqrt{2}}{2} \delta} P_{k_1}(x_1, t_1) dt_1 \int_{|t_2| \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \delta} P_{k_2}(x_2, t_2) dt_2$$

$$\leq 2 \|g_k\| \frac{1}{2} |\sin \pi x_2| \frac{e^{\pi \frac{\sqrt{2}}{2} \delta}}{\cosh \pi \frac{\sqrt{2}}{2} \delta - 1} \frac{2}{\pi} = M |\sin \pi x_2| ,$$

$$\text{onde } M = \frac{2}{\pi} \|g_k\| \frac{e^{\pi (\sqrt{2}/2) \delta}}{\cosh \pi (\sqrt{2}/2) \delta - 1} .$$

Analogamente,

$$\int_{|t_1| \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \delta} \int_{|t_2| \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \delta} P_k(x, t) |g_k(t+y) - g_k(y^0)| dt \leq M |\sin \pi x_1| .$$

Também,

$$\int_{|t_1| \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \delta} \int_{|t_2| \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \delta} P_k(x, t) |g_k(t+y) - g_k(y^0)| dt \leq M_1 \cdot \prod_{j=1}^2 |\sin \pi x_j|$$

$$\text{onde } M_1 = 2 \|g_k\| \left[\frac{1}{\pi} \frac{e^{(\sqrt{2}/2) \delta}}{\cosh \pi (\sqrt{2}/2) \delta - 1} \right]^2 . \text{ Portanto,}$$

$$|F_k(z_1, z_2) - \prod_{j=1}^2 [1 - k_j + (-1)^{1-k_j} x_j] g_k(y_1^0, y_2^0)| < \varepsilon + M(\operatorname{sen} \pi x_1 + \operatorname{sen} \pi x_2) \\ + M_1 \prod_{j=1}^2 |\operatorname{sen} \pi x_j| ,$$

$$\text{se } |(y_1, y_2) - (y_1^0, y_2^0)| < \delta .$$

Assim,

$$\lim F_k(z_1, z_2) = g_k(y_1^0, y_2^0)$$

$$\text{quando } z_1 = x_1 + iy_1 \rightarrow k_1 + iy_1^0 \text{ e } z_2 = x_2 + iy_2 \rightarrow k_2 + iy_2^0 .$$

Finalmente, definindo-se

$$F(z_1, z_2) = \sum_{k \in \square} F_k(z_1, z_2)$$

a prova da proposição estará completa.

A seguir denotaremos por $H_0(IE)$ o espaço de todas as combinações lineares de funções da forma,

$$[\exp(\delta \sum_{j=1}^n z_j^2)] \sum_p^* x_p \exp(\lambda_p \sum_{j=1}^n z_j)$$

onde $x_p \in \cap IE$, $\lambda_p \in \mathbb{R}$ e $\delta > 0$. (Σ^* refere-se a uma soma finita).

As provas das duas próximas proposições reproduzidas aqui, para

várias variáveis, são devidas a D.L. Fernandez.

A.3. PROPOSIÇÃO. O espaço $H_0(\mathbb{IE})$ é denso em $H(\mathbb{IE})$.

DEMONSTRAÇÃO. Desde que $\|[\exp(\delta \sum_{j=1}^n z_j^2)] f(z_1, \dots, z_n) - f(z_1, \dots, z_n)\|_{H(\mathbb{IE})} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0$ quando $\delta \rightarrow 0$, para toda f em $H(\mathbb{IE})$ será suficiente mostrar que toda g da forma $g(z) = g(z_1, \dots, z_n) = [\exp(\delta \sum_{j=1}^n z_j^2)] f(z)$, $f \in H(\mathbb{IE})$, pode ser aproximada por funções de $H_0(\mathbb{IE})$.

Consideremos uma função g da forma acima e colocamos

$$(1) \quad g_r(z) = \sum_{\substack{j=(j_1, \dots, j_n) \\ -\infty < j_s < \infty \\ 1 \leq s \leq n}} g(z+2\pi i j r) \quad (r=1, 2, \dots).$$

Evidentemente, g_r tem valores em $\Sigma \mathbb{IE}$, é holomorfa em S_n^0 e contínua em S_n , e é periódica em cada $\text{Im } z_j$ com período $2\pi i r$. Mais ainda, $g_r(k+iy) \in E_k$ e

$$\|g(k+iy) - g_r(k+iy)\|_{E_k} \rightarrow 0 \quad \text{quando } r \rightarrow \infty \quad (k \in \square, y \in \mathbb{R}^n),$$

uniformemente em todo conjunto limitado de valores de y , e $\|g_r(k+iy)\|_{E_k}$ são limitadas, uniformemente em r . É também, fácil ver que estas condições implicam que $[\exp(s \sum_{j=1}^n z_j^2)] g_r(z_1, \dots, z_n) \in H(\mathbb{IE})$ para todo $s > 0$, e que para $\epsilon > 0$, obteremos

$$(2) \quad \left\| \left[\exp \left(s \sum_{j=1}^n z_j^2 \right) \right] g_r(z) - g(z) \right\|_{H(\mathbb{IE})} < \varepsilon$$

para escolhas convenientes de s e r .

Agora, $g_r(z)$ tem a representação

$$(3) \quad g_r(z) = g_r(z_1, \dots, z_n) = \sum c_{(j_1, \dots, j_n)r} \exp \left[\left(\sum_{q=1}^n j_q z_q \right) / r \right],$$

onde

$$c_{(j_1, \dots, j_n)r} = \frac{1}{(2\pi r m_1) \dots (2\pi r m_n)} \int_{-\pi r m_1}^{\pi r m_1} \dots \int_{-\pi r m_n}^{\pi r m_n} g_r(s_1 + it_1, \dots, s_n + it_n) \\ \exp [(-j_1(s_1 + it_1) - \dots - j_n(s_n + it_n)) / r] dt_n \dots dt_1.$$

Devido a periodicidade segue que o valor da integral é independente de $m = (m_1, \dots, m_n)$. É também independente de $s = (s_1, \dots, s_n)$. De fato, o integrando é uma função analítica e limitada em $\Sigma \mathbb{IE}$. Assim, sua dependência de $s = (s_1, \dots, s_n)$ é arbitrariamente pequena para $m = (m_1, \dots, m_n)$ suficientemente grande, devido a presença do fator $\frac{1}{m_1 \dots m_n}$. Consequentemente c_{jr} ($j = (j_1, \dots, j_n)$) é independente de s e assim toma o mesmo valor para $s = k \in \square$, ou seja,

$$c_{jr} = \frac{1}{(2\pi r)^n} \int_{-\pi r}^{\pi r} \dots \int_{-\pi r}^{\pi r} g_r(k + it) \exp [- \langle j, k + it \rangle / r] dt_n \dots dt_1$$

Agora $g_r(k+it) \in E_k$ e é E_k -contínua e assim o valor da integral está em E_k . Concluimos, deste modo que $c_{jr} \in \cap IE$.

Consideremos a seguir, a média (C,1) da série (3), isto é, consideremos

$$\sigma_m(g_r, z) = \int_{-\pi r}^{\pi r} \dots \int_{-\pi r}^{\pi r} g_r(z+it) K_m(t/r) \frac{1}{r} dt_n \dots dt_1 ,$$

onde $K_m(s) = K_{m_1}(s_1) \dots K_{m_n}(s_n)$, $m = (m_1, \dots, m_n)$, é o núcleo de Fejér.

Da E_k -continuidade de $g_r(k+it)$ segue que

$$\|\sigma_m(g_r, k+it) - g_r(k+it)\|_{E_k} \longrightarrow 0$$

quando $|m| \rightarrow \infty$, uniformemente em t , para cada r . Assim

$$(4) \quad \|[\exp(s \sum_{j=1}^n z_j^2)] [\sigma_m(g_r, z) - g_r(z)]\|_{H(IE)} \longrightarrow 0$$

quando $|m| \rightarrow \infty$.

Agora, de (2) e (4), obtemos

$$\|[\exp(s \sum_{j=1}^n z_j^2)] \sigma_m(g_r, z) - g(z)\|_{H(IE)} < 2\varepsilon$$

para escolhas convenientes de $s > 0$, m e r . Mas,

$[\exp(s \sum_{j=1}^n z_j^2)] \sigma_m(g_r, z) \in H_0(IE)$ e assim o resultado está provado.

A.4. PROPOSIÇÃO. O espaço $\cap IE$ é denso em IE_Θ .

DEMONSTRAÇÃO. Seja $x \in IE_\Theta$ e $f \in H(IE)$ tal que $f(\Theta) = x$. Pela proposição A.3, para um número positivo ε dado, podemos considerar uma função g em $H_0(IE)$ de modo que $\|f-g\|_{H(IE)} < \varepsilon$. Desta forma, obtemos

$$\|x-g(\Theta)\|_{IE_\Theta} = \|(f-g)(\Theta)\|_{IE_\Theta} \leq \|f-g\|_{H(IE)} < \varepsilon$$

Desde que $g(\Theta) \in \cap IE$ a afirmativa está provada.

A.5. PROPOSIÇÃO. Seja $IE = (E_k | k \in \square)$ uma família admissível de espaços de Banach em relação a um espaço vetorial topológico Hausdorff V . Seja f uma função com valores em V definida na n -faixa S_n tal que para todo funcional linear contínuo L em uma família separante de tais funcionais, $L(f(z))$ é contínua em S_n , analítica em S_n e representável como a integral de Poisson de seus valores na fronteira reduzida, $F = \{z \in S_n \mid z = k+it, k \in \square\}$, de S_n . Se

$$(1) \quad (\Delta^{ih} f(k+it)) / \prod_{j=1}^n h_j \in E_k \quad (k \in \square)$$

e tem norma limitada então, $f \in \overline{H}(IE)$.

DEMONSTRAÇÃO. Sendo P_k ($k \in \mathbb{N}$) o k -núcleo de Poisson para a n -faixa S_n , consideremos a função

$$(2) \quad g(z) = \int_{\mathbb{R}^n} f(k+it) P_k(z, t) dt$$

que é $\mathbb{R}$ -contínua. Se L é um elemento da família separante de funcionais lineares contínuos, temos

$$L(g(z)) = \int_{\mathbb{R}^n} L(f(k+it)) P_k(z, t) dt .$$

Desde que $L(f(z))$ é representável como a integral de Poisson de seus valores na fronteira reduzida, obtemos $L(g(z)) = L(f(z))$ para todo L na família separante. Assim $g(z) = f(z)$, acarretando que f é $\Sigma \mathbb{R}$ -contínua. Da definição da função g segue que $\|f(z)\|_{\Sigma \mathbb{R}} = \|f(z_1, \dots, z_n)\|_{\Sigma \mathbb{R}} \leq c \prod_{j=1}^n (1+|z_j|)$.

Agora, da continuidade da função f , segue que a função h definida pela expressão,

$$h(z) = h(z_1, \dots, z_n) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{C_1} \dots \int_{C_n} \frac{f(\xi_1, \dots, \xi_n)}{\prod_{j=1}^n (\xi_j - z_j)} d\xi_n \dots d\xi_1$$

onde cada curva C_j ($j=1, \dots, n$) é uma circunferência contida no interior $\{x+iy \mid 0 < x < 1\}$, da faixa unitária $S_1 = \{x+iy \mid 0 \leq x \leq 1\}$,

é analítica em $\prod_{j=1}^n D_j$, sendo D_j o disco aberto, limitado pela circunferência C_j . Desde que $L(f(z))$ é analítica em S_n^o , obtemos

$$\begin{aligned} L(f(z)-h(z)) &= L(f(z)) - L(h(z)) = \\ &= L(f(z)) - \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{C_1} \dots \int_{C_n} \frac{L(f(\xi_1, \dots, \xi_n))}{\prod_{j=1}^n (\xi_j - z_j)} d\xi_n \dots d\xi_1 = 0. \end{aligned}$$

Assim $L(f(z)-h(z)) = 0$, para todo $z \in \prod_{j=1}^n D_j$. Como L é elemento de uma família separante de funcionais lineares contínuos, segue que $f(z) = h(z)$ para todo $z \in \prod_{j=1}^n D_j$, ou seja, f é analítica em $\prod_{j=1}^n D_j$. Segue daqui a analiticidade de f em S_n^o .

Finalmente, da hipótese segue que

$$\|f\|_{\overline{H}(\mathbb{IE})} = \max_{k \in \mathbb{Q}} \sup_{t, h} \left\| \frac{\Delta^{ih} f(k+it)}{\prod_{j=1}^n h_j} \right\|_{E_k} < \infty.$$

Concluimos então, que todas as condições da definição 3.2.1 foram satisfeitas acarretando, por conseguinte, que $f \in \overline{H}(\mathbb{IE})$.

BIBLIOGRAFIA

A. BENEDEK-R. PANZONE

- [1] The spaces L^P , with mixed norm. Duke Math. J. 28 (1961), 301-324.

J.I. BERTOLO-D.L. FERNANDEZ

- [1] On the connection between the real and complex interpolation method for several Banach spaces. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova (aceito para publicação).

B. BORDIN-D.L. FERNANDEZ

- [1] On Lipschitz-Nikol'skii spaces and double Hilbert transforms. 139 Sem. Bras. Anal.

A.P. CALDERÓN

- [1] Intermediate spaces and interpolation. Studia Math. Special Séries 1 (1963), 31-34.
- [2] Intermediate spaces and interpolation, the complex method. Studia Math. 24 (1964), 113-190.

N. DUNFORD-J.T. SCHWARTZ

- [1] Linear operators, part I, New York: Interscience (1964).

A. FAVINI

- [1] Su una estensione del metodo d'interpolazione complesso. Rend. Math. Univ. Padova. 47 (1972), 244-298.

D.L. FERNANDEZ

- [1] Interpolation on 2^n -tuples of Banach spaces. Studia Math. 65 (1979), 87-113.

- [2] Sobre a teoria e aplicações dos espaços de interpolação entre 2^n espaços de Banach. Tese de docência livre. IME - U.S.P. (1980).
- [3] On the interpolation of 2^n Banach spaces (1). Bull. Inst. Polyth. Iasi, 24 (I-2) (1980).
- [4] An extension of complex method of interpolation. Boll. Unione Mat. Italiana (5) 18-B (1981), 391-412.

E. HILLE-R.S. PHILLIPS

- [1] Functional analysis and semi-groups. Am Math. Soc. Coll. Publ. vol. XXXI.

S.G. KREIN

- [1] On the concept of a normal scale of spaces. Dokl. Akad. Nauk. SSSR. 132 (1960), 510-513.

J.L. LIONS

- [1] Une construction d'espaces d'interpolation. Comptes Rendus Acad. Sc. Paris 251 (1960), 1853-1855.

P.I. LIZORKIN

- [1] Generalized Liouville differentiation and the functional space $L_p^n(E_n)$. Imbedding theorems. Math. Sb 60(102)(1963), 325-353.

P.I. LIZORKIN-S.M. NIKOL'SKII

- [1] A classification of differentiable functions in some fundamental space with mixed derivatives. Proc. Steklov Inst. Mat. 77 (1967), 160-187.

J.L. LIONS-J. PEETRE

- [1] Sur une classe d'espaces d'interpolation. Publ. Math. de L'IHES. 19 (1964), 5-68.

S.M. NIKOL'SKII

- [1] Functions with dominant mixed derivatives satisfying a multiple Holder condition. AMS transl. 2 (102) (1973), 27-51.

J.C. PRANDINI

- [1] Funções de semi-variação limitada de mais de uma variável. IME - U.S.P. - São Paulo.

J. PEETRE

- [1] Sur la transformation de Fourier des fonctions à valeurs vectorielles. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 42 (1969), 15-26.

W. RUDIN

- [1] Real and complex analysis. London, McGraw-Hill (1970).

S. SAKS-A.ZYGMOND

- [1] Fonctions analytiques - Paris, Masson (1970)

G. SPARR

- [1] Interpolation of several Banach spaces. Ann. Mat. Pura Appl. (IV) 99 (1974), 247-316.

I. SCHUR

- [1] Bemerkungen zur theorie der beschränkten bilinearformen mit unendlich vielen Veränderlichen. J. Reine Angew. Math. 140 (1911), 1-28.

G.O. THORIN

- [1] An extension of a convexity theorem due to M. Riesz.
Kungl. Fysiogr. Sallsk. Lund. Forh. 8(1938), 166-170.

A. YOSHIKAWA

- [1] Sur la théorie d'espaces d'interpolation, les espaces de moyeme de plusieurs espaces de Banach. J. Fac. Sc. Univ. Tokyo, 16 (1970), 407-468.

W.H. YOUNG

- [1] Sur la derivation des fonctions à variation bornée, Comptes Rendus (Paris) vol. 164 (1917), 622-625.

A. ZYGMOND

- [1] Trigonometric Series. Cambridge Univ. Press. 1959.

Unidade	73C
Proc	
Assinatura	
Préço	doação
Data	10/2/82