Universidade Estadual de Campinas

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

Departamento de Matemática

Dissertação de Mestrado

FORMAS INTRINSICAMENTE HARMÔNICAS

por

Rodolfo Sebastião Estupiñán Allan †

Mestrado em Matemática - Campinas - SP

Orientador: Prof. Dr. Francesco Mercuri

†Este trabalho contou com apoio financeiro da FAPESP, processo número 02/03994-2.

FORMAS INTRINSICAMENTE HARMÔNICAS

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por **Rodolfo Sebastião Estupiñán Allan** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 16 de dezembro de 2004.

Prof. Dr. Francesco Mercuri

Banca examinadora:

Prof. Dr. Francesco Mercuri.

Prof. Dr. Alcebíades Rigas.

Prof. Dr. Antonio Carlos Asperti.

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

Aos meus pais e ao meu filho.

Agradecimentos

Este trabalho só foi possível graças ao estímulo, incentivo e colaboração de algumas pessoas a quem devo algumas palavras de reconhecimento, tais como Prof. Dr. Francesco Mercuri, pela orientação, sugestões e escolha do tema da dissertação; todos os professores e funcionários deste Instituto, em especial as secretárias Tânia e Cidinha bem como o Ednaldo, que prestam um serviço de qualidade ímpar que merece ser destacado. Agradeço à todos os professores de todas as etapas da minha vida, pois não fossem eles eu não teria chegado até aqui, em especial ao Prof^a. Dr^a. Maria do Carmo Carbinatto, minha orientadora de Iniciação Científica por sempre ter me incentivado.

Todas as palavras seriam poucas para expressar minha gratidão ao meu pai, Prof. Dr. Nelo da Silva Allan, quem sempre acreditou em mim, e sem ele, hoje não estaria aqui, bem o resto da minha família, sempre ao meu lado. Gostaria de agradecer também a minha noiva, Valéria, que sempre, incondicionalmente, esteve ao meu lado.

Agradeço também à todos os colegas e amigos do mestrado, em especial ao Laércio, Germano e Rogério Casagrande por terem colaborado com o aspecto visual deste trabalho. Também não poderia me esquecer do Nivaldo, Evandro, Marlon, Feodor, João, Lindomberg, Alonso, Mércio, Edward, Viviane entre outros amigos com quem dividi tantos momentos alegres e também os não tão alegres. E por último à Irene pela elucidação de muitas das minhas dúvidas.

Agradeço ainda à todas as pessoas anônimas que passaram e passarão pela minha vida, dividindo um pouco de seus conhecimentos comigo.

Resumo

Um teorema clássico de Hodge garante que dada uma variedade compacta e uma p-forma fechada, existe na sua classe de cohomologia uma e uma só forma harmônica. Neste trabalho, além de desenvolver os assuntos que são pré-requisitos para o teorema de Hodge, estudamos o que poderia ser considerado um "inverso"do teorema de Hodge:

Dada uma forma fechada, existe uma métrica riemanniana em relação a qual a forma é harmônica?

Chamamos uma forma para a qual a resposta à pergunta acima é positiva de "intrinsecamente harmônica". Pouco é sabido sobre caracterização de formas intrinsecamente harmônicas e nós estudamos em detalhes o caso de 1-formas, seguindo o trabalho de Calabi.

Índice

Agradecimentos iii

Resumo v

Introdução 1

Capítulo 1. Preliminares Algébricos 3
1. Álgebras tensorial e exterior 3
2. Elementos de álgebra homológica 9

Capítulo 2. Cohomologia de de Rham em $\mathbb{R}^n$ 15
1. Formas diferenciáveis em $\mathbb{R}^n$ 15
2. A diferencial exterior e a cohomologia de de Rham 18
3. O teorema de Jordan-Alexander 25
4. Integração de formas diferenciáveis e homologia 28

Capítulo 3. Homologia e cohomologia das variedades diferenciáveis 37
1. Variedades Diferenciáveis 37
2. Cohomologia de de Rham 38
3. O teorema de de Rham 41

Capítulo 4. Teoria de Hodge 45
1. Elementos de geometria riemanniana. 45
2. Formas harmônicas 47
3. O teorema de Hodge 51

Capítulo 5. Formas intrinsecamente harmônicas 55
1. Teoria local 55
2. Formas transitivas e o teorema de Calabi 59

Bibliografia 69

Índice Remissivo 71

Introdução

Seja M uma variedade diferenciável. Associada a estrutura diferenciável temos o espaço das p-formas $\Omega^p(M),\ p = 0, \ldots, n$ e o operador diferencial exterior:

$$d^{(p)} : \Omega^p(M) \longrightarrow \Omega^{(p+1)}(M),$$

que generaliza o diferencial usual de funções (caso $p = 0$). A propriedade básica deste operador é que a composição $d^{(p+1)} \circ d^p = 0$ ou equivalentemente, a imagem de d^p está contida no núcleo de $d^{(p+1)}$. Isso permite definir a cohomologia de de Rham:

$$H^p(M) = Ker\mathrm{d}^p / Im\mathrm{d}^{(p-1)},$$

e um teorema clássico de de Rham afirma que a cohomologia depende somente da topologia de M (mais precisamente do tipo de homotopia de M).

As formas em $ker\mathrm{d}$ são chamadas de *formas exatas* e as in $Im\mathrm{d}$ de *formas fechadas*. Condição necessária para uma forma ser exata, i.e., ser uma diferencial ou "ter uma integral", é que a forma seja fechada. A cohomologia nos diz quanto esta condição não é suficiente.

No caso de variedades Riemannianas podemos estender o usual operador de Laplace para funções, a um operador:

$$\Delta_p : \Omega^p(M) \longrightarrow \Omega^p(M),$$

chamado de operador de Laplace-Beltrami ou, simplesmente, de Laplaciano. As formas em $Ker\Delta$ serão ditas *formas harmônicas*. No caso de uma variedade compacta, a diferencial exterior tem um adjunto formal

$$\delta : \Omega^p(M) \longrightarrow \Omega^{(p-1)}(M)$$

em relação a um produto interno natural no espaço das formas e o Laplaciano é simplesmente:

$$\Delta = \mathrm{d} \circ \delta + \delta \circ \mathrm{d}$$

(com os índices apropriados).

Um teorema clássico de Hodge afirma que se M é uma variedade riemanniana compacta e $\omega \in \Omega^p(M)$ é uma p-forma diferenciável fechada, existe, na classe de cohomologia de ω uma, e somente uma, forma harmônica, i.e., a equação diferencial $\Delta\phi = 0$ admite uma, e uma só, solução em $\{\omega + \mathrm{d}\beta : \beta \in \Omega^{(p-1}(M)\}$. Isso mostra como a existência de soluções não triviais da equação $\Delta\phi = 0$ é ligada á topologia de M.

Uma pergunta natural é a seguinte:

Dada uma forma fechada em uma variedade diferenciável compacta e orientável, existe uma métrica riemanniana em relação à qual a forma é harmônica?

Se a resposta à pergunta acima for positiva, diremos que a forma é *intrinsecamente harmônica*. O problema de caracterizar as formas intrinsecamente harmônicas tem se revelado muito difícil, exceto nos casos $p = 0, n$. De fato, existe um único resultado sobre o assunto, devido a Calabi, que caracteriza as formas intrinsecamente harmônicas, para $p = 1$, em termos de propriedades da folheação definida pelo núcleo da forma (transitividade).

A finalidade deste trabalho é discutir em detalhes os resultados de Calabi. Para tanto discutiremos os conceitos e resultados necessários para um bom entendimento do problema. Mais precisamente, no primeiro capítulo faremos uma revisão de conceitos algébricos (álgebra multilinear e álgebra homológica). No segundo capítulo vamos introduzir a cohomologia de de Rham para abertos do $\mathbb{R}^n$. Como conseqüência das propriedades básicas provaremos o teorema de dualidade de Jordan-Alexander que generaliza o teorema clássico da curva de Jordan. O terceiro capítulo é dedicado a uma "tradução"do que foi visto no caso do $\mathbb{R}^n$, ao caso de variedades diferenciáveis. Em particular demonstraremos o teorema de de Rham que afirma que a cohomologia de uma variedade diferenciável é isomorfa ao dual da homologia singular, a coeficientes reais. No quarto capítulo vamos considerar variedades riemannianas, introduzir o operador de Laplace-Beltrami e dar uma idéia da demonstração do teorema de Hodge (módulo o teorema de regularidade para operadores elípticos). Finalmente o último capítulo é dedicado a uma análise do trabalho de Calabi.

CAPíTULO 1

Preliminares Algébricos

1. Álgebras tensorial e exterior

Seja $\mathbb{E}$ um espaço vetorial real de dimensão finita e $\mathbb{E}^*$ o espaço vetorial dual. Identificaremos, como de hábito, $\mathbb{E}$ com $\mathbb{E}^{**}$.

1.1. Definição. Um tensor de tipo (r, s) em $\mathbb{E}$ é uma aplicação multilinear

$$t\colon \underbrace{\mathbb{E}^* \times \cdots \times \mathbb{E}^*}_{r \text{ vezes}} \times \underbrace{\mathbb{E} \times \cdots \times \mathbb{E}}_{s \text{ vezes}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

O conjunto $\mathbb{E}_{r,s}$ do tensores do tipo (r, s) é um espaço vetorial com as operações usuais.

1.2. Exemplos. Seja $\mathbb{E}$ como acima.

(1) $\mathbb{E}_{1,0} = (\mathbb{E}^*)^* \cong \mathbb{E}$
(2) $\mathbb{E}_{0,1} = \mathbb{E}^*$
(3) É conveniente pôr, por definição, $\mathbb{E}_{0,0} \doteq \mathbb{R}$
(4) Se $\mathbb{E}$ é dotado de um produto interno $\langle , \rangle$, então este é um tensor do tipo $(0, 2)$.

Além das operações de espaço vetorial, podemos definir um produto entre tensores, o *produto tensorial*:

$$\otimes : \mathbb{E}_{p,q} \times \mathbb{E}_{p',q'} \longrightarrow \mathbb{E}_{(p+p',q+q')},$$

$$t \otimes t'(\phi_1, \ldots, \phi_{p+p'}, x_1, \ldots, x_{q+q'}) := t(\phi_1, \ldots, \phi_p, x_1, \ldots, x_q)t'(\phi_{p+1}, \ldots, \phi_{p+p'}, x_{q+1}, \ldots, x_{q+q'}).$$

É simples provar que o produto tensorial é associativo, distributivo em relação a soma e ao produto por um escalar.

Seja agora $\{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base de $\mathbb{E}$ e $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$ a base dual de $\mathbb{E}^*$, isto é, $\phi_i(e_j) = \delta_{ij}$. Em outras palavras, $\phi_i(v)$ é a i-ésima coordenada de v na base $\{e_1, \ldots, e_n\}$.

1.3. Proposição. $\{e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p} \otimes \phi_{j_1} \otimes \cdots \otimes \phi_{j_q} : i_k, j_h \in \{1, \ldots, n\}\}$ *é uma base de* $\mathbb{E}_{(p,q)}$.

Demonstração. Suponha

$$\sum a_{i_1,\ldots,i_p,j_1,\ldots,j_q} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p} \otimes \phi_{j_1} \otimes \cdots \otimes \phi_{j_q} = 0$$

Então:

$$\sum \quad a_{i_1,\ldots,i_p,j_1,\ldots,j_q} \quad e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p} \otimes \phi_{j_1} \otimes \cdots \otimes \phi_{j_q}(\phi_{h_1}, \ldots, \phi_{h_q}, e_{k_1}, \ldots, e_{k_p}) =$$
$$= \quad a_{k_1,\ldots,k_p,h_1,\ldots,h_q} \quad = 0$$

e portanto $\{e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p} \otimes \phi_{j_1} \otimes \cdots \otimes \phi_{j_q}\}$ é um conjunto linearmente independente.

Agora seja $\omega \in \mathbb{E}_{(p,q)}$, queremos que ω seja uma combinação linear da forma

$$\omega = \sum a_{i_1,\ldots,i_p,j_1,\ldots,j_q} \; e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p} \otimes \phi_{j_1} \otimes \cdots \otimes \phi_{j_q}.$$

Defina $a_{i_1,\ldots,i_p,j_1,\ldots,j_q} = \omega(\phi_{j_1}, \ldots, \phi_{j_q}, e_{i_1}, \ldots, e_{i_p})$. É fácil verificar a igualdade acima. Logo $\{e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p} \otimes \phi_{j_1} \otimes \cdots \otimes \phi_{j_q}\}$ é uma base para $\mathbb{E}_{(p,q)}$. □

1.4. Definição. A soma direta

$$T(\mathbb{E}) = \oplus \;\; \mathbb{E}_{r,s} \qquad (r, s \geq 0),$$

é chamada de *álgebra tensorial de* $\mathbb{E}$.

Os elementos de $T(\mathbb{E})$ são combinações lineares finitas sobre $\mathbb{R}$ de elementos de vários $\mathbb{E}_{r,s}$ e são chamados de tensores. $T(\mathbb{E})$ é uma álgebra bi-graduada, não-comutativa e associativa com a multiplicação obtida estendendo, por distributividade, o produto tensorial[1] . Tensores em um espaço tensorial particular $\mathbb{E}_{r,s}$ são chamados de *homogêneos de grau* (r, s).

Estaremos principalmente interessados em certos tensores de tipo $(0, p)$. Denotaremos com $\Sigma(p)$ o grupo das permutações em p elementos. Se $\pi \in \Sigma(p)$, denotaremos com $|\pi|$ o signal da permutação π, isto é, $|\pi| = 0$ se π é produto de um número par de transposições e $|\pi| = 1$ no outro caso.

1.5. Definição. *Um tensor* $t \in \mathbb{E}_{0,p}$ *é alternado ou uma* p*-forma exterior, se*

$$t(v_1, \ldots, v_p) = (-1)^{|\pi|} t(v_{\pi(1)}, \ldots, v_{\pi(p)}), \;\; \textit{para todo } \pi \in \Sigma(p).$$

Denotaremos com $\Lambda^p(\mathbb{E})$ o espaço das p-formas exteriores. Claramente $\Lambda^0(\mathbb{E}) = \mathbb{R}$, $\Lambda^1(\mathbb{E}) = \mathbb{E}_{0,1} = \mathbb{E}^*$.

Um exemplo básico é o seguinte:

[1]Lembramos que uma álgebra graduada é um espaço vetorial, soma direta de subespaços $\mathbb{F}_i, i \in I\!N$, com um produto obtido estendendo por distributividade aplicações bilineares $\mathbb{F}_i \times \mathbb{F}_j \to \mathbb{F}_{(i+j)}$. Uma álgebra bi-graduada é um espaço vetorial, soma direta de subespaços $\mathbb{F}_{(i,j)}, i, j \in I\!N$, com um produto obtido estendendo por distributividade aplicações bilineares $\mathbb{F}_{(i,j)} \times \mathbb{F}_{(i',j')} \to \mathbb{F}_{(i+i',j+j')}$.

1.6. Exemplo. Seja $\{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base fixada de $\mathbb{E}$ e $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$ a base dual. Fixamos índices $1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n$ e definimos:

$$\Phi_{(i_1,\ldots,i_p)}(v_1, \ldots, v_p) := det(\phi_{i_j}(v_k)).$$

Em outras palavras consideramos a matriz cuja k-ésima coluna é dada pelas coordenadas de v_k na base fixada e calculamos o determinante da matriz $p \times p$ obtida considerando somente as linhas $(i_1, \ldots, i_p)$. As $\Phi_{(i_1,\ldots,i_p)}$ são p-formas exteriores, pelas propriedades do determinante, e como veremos em seguida (proposição 1.8), ao variar da seqüência de índices, formam uma base de $\Lambda^p(\mathbb{E})$.

Em definitivo, as p-formas são "elementos de volumes p-dimensionais orientados" e portanto os integrandos naturais das integrais múltiplas orientadas.

O produto tensorial de formas exteriores não é, em geral, uma forma exterior. Mas podemos "antisimetrizar" o produto tensorial de duas formas exteriores e obter, como resultado, uma forma exterior. Mais precisamente, definimos um produto que chamaremos de *produto exterior*:

$$\wedge : \Lambda^p(\mathbb{E}) \times \Lambda^q(\mathbb{E}) \longrightarrow \Lambda^{p+q}(\mathbb{E}),$$

$$(\phi \wedge \psi)(v_1, \ldots, v_{(p+q)}) = \sum_{\pi \in \Sigma(p+q)} (-1)^{|\pi|} \phi(v_{\pi(1)}, \ldots v_{\pi(p)}) \psi(v_{\pi(p+1)}, \ldots, v_{\pi(p+q)}).$$

Analogamente a quanto feito no caso da álgebra tensorial, definimos a *álgebra exterior*:

$$\Lambda^*(\mathbb{E}) = \oplus_{p \geq 0} \Lambda^p(\mathbb{E}),$$

o produto em $\Lambda^*(\mathbb{E})$ sendo a extensão, por distributividade, do produto exterior.

Se $\omega \in \Lambda^p(\mathbb{E})$, poremos $|\omega| = p$. A demonstração da proposição a seguir é simples:

1.7. Proposição. *O produto exterior é associativo e distributivo e comutativo no sentido das álgebras graduadas, isto é,* $\omega \wedge \tau = (-1)^{|\omega||\tau|} \tau \wedge \omega$. *Em particular, o quadrado de uma forma de grau ímpar é zero.*

Um argumento análogo ao usado na demonstração de 1.3 permite demonstrar a seguinte:

1.8. Proposição. *Se* $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$ *é uma base de* $\mathbb{E}^*$, *então* $\{\phi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \phi_{i_p} : 1 \leq i_1 < \cdots < i_p\}$ *é uma base de* $\Lambda^p(\mathbb{E})$. *Em particular,* $\Lambda^p(\mathbb{E})$ *tem dimensão* $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$ *e* $\Lambda^p(\mathbb{E}) = \{0\}$, *se* $p > n$.

Seja $L : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ uma aplicação linear. Lembramos que a transposta de L é definida como:

$$L^* : \mathbb{F}^* \longrightarrow \mathbb{E}^*, \qquad L^*(\phi)(v) := \phi(Lv).$$

A construção da transposta se estende às formas exteriores pondo:

$$\Lambda^p(L) : \Lambda^p(\mathbb{F}) \longrightarrow \Lambda^p(\mathbb{E}), \qquad \Lambda^p(L)(\omega)(v_1, \ldots, v_p) = \omega(L(v_1), \ldots, L(v_p)).$$

Além disso $\Lambda^p(L)$ se estende por aditividade a uma aplicação linear $\Lambda^*(L) : \Lambda^*(\mathbb{F}) \to \Lambda^*(\mathbb{E})$. Quando claro do contexto, escreveremos simplesmente L^* no lugar de $\Lambda^p(L)$ e $\Lambda^*(L)$. A proposição a seguir é de fácil demonstração.

1.9. Proposição. *$L^*(\omega \wedge \tau) = L^*(\omega) \wedge L^*(\tau)$. Em particular L induz um morfismo de álgebras graduadas, $L^* : \Lambda^*(\mathbb{F}) \to \Lambda^*(\mathbb{E})$. Além disso valem as "propriedades funtoriais":*

(1) $(\mathbb{1}_{\mathbb{E}})^* = \mathbb{1}_{\Lambda^*(\mathbb{E})}$.
(2) *Se $L : \mathbb{E} \to \mathbb{F}, T : \mathbb{F} \to \mathbb{G}$, então $(T \circ L)^* = L^* \circ T^*$.*[2]

Seja agora $\mathbb{E}$ um espaço vetorial com produto interno. Isso induz um isomorfismo canônico $\flat : \mathbb{E} \to \mathbb{E}^*$ e portanto um produto interno em $\mathbb{E}^*$. Por sua vez isso induz um produto interno em $\Lambda^p(\mathbb{E})$ definindo como ortonormal uma base do tipo $\{\omega_{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega_{i_p} : i_1 < \cdots < i_p\}$ onde $\{\omega_i\}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{E}^*$. Observamos que:

$$\langle \phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_p, \psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_p \rangle = det(\langle \phi_i, \psi_j \rangle).$$

De fato, a fórmula acima, estendida por bilinearidade, define um produto escalar no qual a base $\{\omega_i\}$ é ortonormal.

Lembramos agora que duas bases de um espaço vetorial $\mathbb{E}$ são *eqüiorientadas* se a matriz mudança de bases tem determinante positivo. O conjunto das bases de $\mathbb{E}$ fica assim dividido em duas classes de equivalência, as *orientações* de $\mathbb{E}$. A escolha de uma das duas classes é uma *orientação* em $\mathbb{E}$. Um *espaço vetorial orientado* é um espaço vetorial com uma orientação fixada. Neste caso chamaremos de positivas as bases na orientação fixada. Também, a uma orientação em $\mathbb{E}$ corresponde uma orientação em $\mathbb{E}^*$ definindo positivas as bases duais de bases positivas.

Seja agora $\mathbb{E}$ um espaço vetorial n-dimensional, com produto interno e orientado. Se $\{\omega_i\}$ é uma base ortonormal positiva de $\mathbb{E}^*$, definimos a forma volume:

$$v = \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_n.$$

[2] Na linguagem das categorias isso significa que a lei que associa a cada espaço vetorial de dimensão finita $\mathbb{E}$ a álgebra graduada $\Lambda^*(\mathbb{E})$ e a cada aplicação linear $L : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ a aplicação L^* é um funtor contravariante da categoria dos espaços vetoriais de dimensão finita na categoria das álgebras graduadas.

A forma volume é bem definida, i.e. não depende da base escolhida, desde que ortonormal e positiva. De fato se $\{\omega_i\}$, $\{\phi_j\}$ são bases de $\mathbb{E}^*$, não necessariamente ortonormais, e $A = (a_{ij})$ é a matriz mudança de base, i.e $\phi_k = \sum a_{kj}\omega_j$, temos:

$$\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_n = \sum_{\sigma \in \Sigma(n)} (-1)^{|\sigma|} a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_n = det(A) \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_n.$$

Em particular se as duas bases são ortonormais e positivas, $A \in SO(n)$, e portanto $det(A) = 1$.

Seja $\{e_i\}$ uma base de $\mathbb{E}$, $\{\phi_j\}$ a base dual e denotamos com $g = (g_{ij})$ a matriz que representa o produto escalar na base $\{e_i\}$ i.e., $g_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle$. Consideramos o isomorfismo $\flat : \mathbb{E} \to \mathbb{E}^*$. Se $\flat(e_i) = \sum_{j=1}^n b_{ij}\phi_j$, temos:

$$g_{ik} = \langle e_i, e_k \rangle = \flat(e_i)(e_k) = \sum_{j=1}^n b_{ij}\phi_j(e_k) = b_{ik}.$$

Portanto

$$\flat(e_i) = \sum_{j=1}^n g_{ij}\phi_j.$$

Analogamente para $\sharp : \mathbb{E}^* \to \mathbb{E}$, $\sharp = \flat^{-1}$, temos:

$$\sharp(\phi_i) = \sum_{j=1}^n g^{ij} e_j,$$

onde (g^{ij}) é a matriz inversa de (g_{ij}).

A matriz g^{ij} é também a matriz que representa o produto escalar em $\mathbb{E}^*$. De fato:

$$\langle \phi_i, \phi_j \rangle = \langle \sharp\phi_i, \sharp\phi_j \rangle = \sum_{k,l=1}^n \langle g^{ik} e_k, g^{jl} e_l \rangle = \sum_{k,l=1}^n g^{ik} g^{jl} g_{kl} = g^{ij}.$$

Vamos escrever a forma volume em termos da base ϕ_i. Se $\{\omega_j\}$ é uma base ortonormal positiva e $A = (a_{ij})$ é a matriz de mudança de base, i.e., $\omega_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}\phi_j$, temos:

$$\phi_i = \sum_{j=1}^n \langle \phi_i, \omega_j \rangle \omega_j = \sum_{l=1}^n \Big(\sum_{j,k=1}^n \langle \phi_i, a_{jk}\phi_k \rangle \Big) a_{jl}\phi_l.$$

Portanto $\sum_{i,k=1}^n g^{ik} a_{jk} a_{jl} = \delta_{il}$. Portanto $g^{-1}A^t A = \mathbb{1}$ e $|det(A)| = [det(g)]^{\frac{1}{2}}$. Então:

$$v = \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_n = \pm [det(g)]^{\frac{1}{2}} \phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_n,$$

onde vale $\pm$ dependendo se $\{\phi_i\}$ é positiva ou negativa.

1.10. Definição. *Seja $\mathbb{E}$ um espaço vetorial n-dimensional com produto interno e orientado. O operador estrela de Hodge é o operador:*

$$*_p : \Lambda^p(\mathbb{E}) \longrightarrow \Lambda^{(n-p)}(\mathbb{E}), \qquad *_p(\eta)(e_1, \ldots, e_{(n-p)}) := \langle \eta \wedge \flat(e_1) \wedge \cdots \wedge \flat(e_{(n-p)}), v\rangle.$$

Quando claro do contexto escreveremos simplesmente $*$.

Se $\{\omega_i\}$ é uma base ortonormal positiva de $\mathbb{E}^*$, o operador estrela de Hodge é o operador obtido estendendo por linearidade a aplicação:

$$*(\omega_{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega_{i_p}) = \omega_{j_1} \wedge \cdots \wedge \omega_{j_{n-p}},$$

onde $\{i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots j_{n-p}\}$ é uma permutação par de $\{1, \ldots, n\}$.

As propriedades a seguir são de simples verificação:

1.11. Proposição. *A aplicação $*$ é uma isometria e*

$$*^2 = (-1)^{p(n-p)} \mathbb{1}_{\Lambda^p(\mathbb{E})}.$$

Será útil na demonstração do teorema de Calabi, ter uma expressão de $*_1$ em termos de uma base não necessariamente ortonormal.

1.12. Lema. *Seja $\{\phi_i\}$ uma base positiva de $\mathbb{E}$ e $\{e_i\}$ a base dual. Então:*

$$*\phi_i = [det(g)]^{\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^{n} (-1)^k g^{ik} \phi_1 \wedge \cdots \wedge \hat{\phi_k} \wedge \cdots \wedge \phi_n.$$

Demonstração.

$*\phi_i(e_1, \ldots, \hat{e_k}, \ldots, e_n) = \langle \phi_i \wedge \flat e_1, \wedge \cdots \wedge \hat{\flat e_k} \wedge \cdots \wedge \flat e_n, [det(g)]^{\frac{1}{2}} \phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_n\rangle =$ $[det(g)]^{\frac{1}{2}} (-1)^k \langle \flat e_1, \wedge \cdots \wedge \hat{\flat e_k} \wedge \phi_i \wedge \cdots \wedge \flat e_n, \phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_n\rangle = [det(g)]^{\frac{1}{2}} (-1)^k det(\langle \tilde{\flat e_i}, \phi_j\rangle)$, onde $\tilde{\flat e_i} = \flat e_i, i \neq k, \tilde{\flat e_k} = \phi_i$.

Observamos que $\langle \flat e_i, \phi_j\rangle = \langle \sum_{k=1}^n g_{ik}\phi_k, \phi_j\rangle = \sum_{k=1}^n g_{ik} g^{kj} = \delta_{ij}$. Portanto a matriz $(\langle \tilde{\flat e_i}, \phi_j\rangle)$ é a matriz identidade excepto para a k-ma linha que é dada por $\langle \phi_i, \phi_l\rangle = g^{il}$. Portanto $det((\langle \tilde{\flat e_i}, \phi_j\rangle) = g^{ik}$ e:

$$*\phi_i = \sum_{k=1}^{n} *\phi_i(e_1, \ldots, \hat{e_k}, \ldots e_n)\phi_1 \wedge \cdots \wedge \hat{\phi_k} \wedge \cdots \wedge \phi_n = [det(g)]^{\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^{n} (-1)^k g^{ik} \phi_1 \wedge \cdots \wedge \hat{\phi_k} \wedge \cdots \wedge \phi_n.$$

□

2. Elementos de álgebra homológica

Nesta seção vamos estudar seqüências de espaços vetoriais e aplicações lineares do tipo:

$$\mathcal{E} := \{(\mathbb{E}^i, d^i) : d^i : \mathbb{E}^i \to \mathbb{E}^{i+1}\}.$$

Um morfismo $\phi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$, entre duas tais seqüências é uma seqüência de aplicações lineares $\phi_i : \mathbb{E}^i \to \mathbb{F}^i$ tais que os diagramas:

$$\begin{array}{ccccc} \cdots \longrightarrow & \mathbb{E}^i & \xrightarrow{d^i} & \mathbb{E}^{i+1} & \longrightarrow \cdots \\ & \downarrow \phi_i & & \downarrow \phi_{i+1} & \\ \cdots \longrightarrow & \mathbb{F}^i & \xrightarrow{d^i} & \mathbb{F}^{i+1} & \longrightarrow \cdots \end{array}$$

comutam, isto é, $d^i \circ \phi_i = \phi_{i+1} \circ d^i$, tendo denotado com o mesmo símbolo d^i as aplicações lineares das duas seqüências. O morfismo ϕ será chamado um isomorfismo se os ϕ_i são isomorfismos.

2.1. Definição. *Uma seqüência de espaços vetoriais e aplicações lineares* $\mathcal{E} = \{\mathbb{E}^i, d^i\}$ *se diz exata em* $\mathbb{E}^i$ *se* $Imd^{i-1} = Kerd^i$. *A seqüência se diz exata, se é exata em cada* $\mathbb{E}^i$.

2.2. Exemplos.

(1) Uma seqüência do tipo $\{0\} \to \mathbb{E} \xrightarrow{\phi} \mathbb{F}$ é exata se, e só se, ϕ é injetor.
(2) Uma seqüência do tipo $\mathbb{E} \xrightarrow{\phi} \mathbb{F} \to \{0\}$ é exata se, e só se, ϕ é sobrejetor.
(3) Uma seqüência do tipo $\{0\} \to \mathbb{E} \xrightarrow{\phi} \mathbb{F} \to \{0\}$ é exata se, e só se, ϕ é isomorfismo.

2.3. Definição. *Uma seqüência exata do tipo:*

$$\{0\} \longrightarrow \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{G} \longrightarrow \{0\}$$

se diz uma seqüência exata curta.

2.4. Proposição. *Uma seqüência exata curta*

$$\{0\} \longrightarrow \mathbb{E} \xrightarrow{\phi} \mathbb{F} \xrightarrow{\psi} \mathbb{G} \longrightarrow \{0\}$$

é isomorfa à seqüência:

$$\{0\} \longrightarrow \mathbb{E} \xrightarrow{i} \mathbb{E} \oplus \mathbb{G} \xrightarrow{\pi} \mathbb{G} \longrightarrow \{0\},$$

onde $i(v) = (v, 0)$ *e* $\pi(v, w) = w$.

Demonstração. Seja $\tilde{\mathbb{G}}$ um complementar[3] de $\operatorname{Im}\varphi = \ker\psi$, isto é, $\mathbb{F} = \varphi(\mathbb{E}) \oplus \tilde{\mathbb{G}}$. A aplicação $\psi\,|_{\tilde{\mathbb{G}}} \colon \tilde{\mathbb{G}} \to \mathbb{G}$ é um isomorfismo. Portanto a aplicação $k \colon \mathbb{F} \to \mathbb{E} \oplus \mathbb{G}$, $k(v+w) = (\varphi^{-1}(v), \psi(w))$ $(v \in \varphi(\mathbb{E}), w \in \tilde{\mathbb{G}})$ é o isomorfismo procurado. □

2.5. Observação. Os conceitos anteriores se generalizam imediatamente ao caso de seqüências de grupos abelianos ou, mais em geral, de módulos sobre anéis comutativos. Neste contexto mais geral a proposição 2.4 não é mais válida. Por exemplo, a seqüência de grupos abelianos

$$\{0\} \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2 \to \{0\}$$

não é isomorfa à seqüência

$$\{0\} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2 \to \{0\}.$$

Se uma seqüência exata curta de módulos verifica 2.4, diremos que a seqüência *cinde*.

O resultado a seguir aparece com freqüência nas aplicações:

2.6. Teorema. *(Lema dos Cinco) Consideramos o diagrama:*

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathbb{E}_1 & \xrightarrow{f_1} & \mathbb{E}_2 & \xrightarrow{f_2} & \mathbb{E}_3 & \xrightarrow{f_3} & \mathbb{E}_4 & \xrightarrow{f_4} & \mathbb{E}_5 \\
\downarrow \phi_1 & & \downarrow \phi_2 & & \downarrow \phi_3 & & \downarrow \phi_4 & & \downarrow \phi_5 \\
\mathbb{F}_1 & \xrightarrow{g_1} & \mathbb{F}_2 & \xrightarrow{g_2} & \mathbb{F}_3 & \xrightarrow{g_3} & \mathbb{F}_4 & \xrightarrow{g_4} & \mathbb{F}_5
\end{array}$$

Se as linhas são exatas e ϕ_i são isomorfismos para $i = 1, 2, 4, 5$ então ϕ_3 é um isomorfismo e o diagrama é comutativo.

Demonstração. Suponhamos $\phi_3(e_3) = 0$. Então $\phi_4(f_3(e_3)) = g_3(\phi_3(e_3)) = 0$. Portanto $f_3(e_3) = 0$ e pela exatidão da primeira linha, $e_3 = f_2(e_2)$. Agora $g_2(\phi_2(e(2)) = \phi_3(e_3) = 0$, portanto $\phi_2(e_2) = g_1(\mu_1)$ pela exatidão da segunda linha. Sendo ϕ_1 sobrejetora existe $e_1 \in \mathbb{E}_1$ tal que $\phi_1(e_1) = \mu_1$. Finalmente

$$0 = f_2(f_1(e_1)) = f_2(\phi_2^{-1} g_1 \phi_1(e_1)) = f_2(e_2) = e_3$$

e portanto ϕ_3 é injetora.

Vamos mostrar que ϕ_3 é sobrejetora. Seja $\mu_3 \in \mathbb{F}_3$, $\mu_4 = g_3(\mu_3)$ e $e_4 \in \phi_4^{-1}(\mu_4)$. Agora $\phi_5(f_4(e_4)) = g_4(\mu_4) = 0$ e portanto $f_4(e_4) = 0$ pois ϕ_5 é injetora. Em particular, existe $e_3 \in \mathbb{E}_3$ tal que $f_3(e_3) = e_4$. Seja $\overline{\mu}_3 = \phi_3(e_3)$ e $\omega = \mu_3 - \overline{\mu}_3$. Agora $g_3(\omega) = 0$ e portanto

[3]Lembremos que um complementar de um subespaço pode ser obtido partindo de uma base $\{e_\alpha\}$ do subespaço, completando a uma base do espaço com a adjunção de elementos $\{f_\beta\}$ e considerando o subespaço gerado pelos $\{f_\beta\}$.

$\omega = g_2(\mu_2)$. Seja $e_2 = \phi_2^{-1}(\mu_2)$. Temos $\phi_3(f_2(e_2)) = g_2(\phi_2(e_2)) = \omega = \phi(e_3) - \mu_3$ portanto $\mu_3 = \phi_3(e_3 - f_2(e_2)) \in \operatorname{Im}\phi_3$

□

2.7. Observação. Observamos que na demonstração anterior temos usado somente que ϕ_2, ϕ_4 são isomorfismos, que ϕ_1 é sobrejetor e ϕ_5 é injetor. Porém, em geral, o lema é usado na forma do enunciado.

2.8. Definição. *Uma seqüência de espaços vetoriais e aplicações lineares* $\mathcal{E} = \{\mathbb{E}^i, d^i\}$ *é dita* semi exata *ou um* complexo de cocadeias, *se* $Imd^{i-1} \subseteq Kerd^i$, *para todo* i, *ou, equivalentemente,* $\mathrm{d}^i \circ \mathrm{d}^{i-1} = 0$.

Se $\mathcal{E}$ é um complexo de cocadeias, definimos:

- $Z^i(\mathcal{E}) := Kerd^i$ o *grupo dos cociclos i-dimensionais,*
- $B^i(\mathcal{E}) := Imd^{i-1}$ o *grupo dos cobordos i-dimensionais,*
- $H^i(\mathcal{E}) := Z^i(\mathcal{E})/B^i(\mathcal{E})$ o *grupo de cohomologia i-dimensional* [4]

A cohomologia nos dá uma medida de quanto uma seqüência semi exata não é exata.

2.9. Observação. É útil considerar que uma seqüência com índices "decrescentes", isto é, seqüências do tipo $\mathcal{E} := \{(\mathbb{E}_i, \partial_i) : \partial_i : \mathbb{E}_i \to \mathbb{E}_{i-1}\}$. Neste caso, se uma seqüência é semi exata, dizemos um *complexo de cadeias* e, analogamente ao caso de complexo de cocadeias definimos :

- $Z_i(\mathcal{E}) := Ker\partial_i$ o *grupo dos ciclos i-dimensionais,*
- $B_i(\mathcal{E}) := Im\partial_{i+1}$ o *grupo dos bordos i-dimensionais,*
- $H_i(\mathcal{E}) := Z_i(\mathcal{E})/B_i(\mathcal{E})$ o *grupo de homologia i-dimensional.*

2.10. Exemplo. Seja $\mathcal{E} := \{(\mathbb{E}_i, \partial_i) : \partial_i : \mathbb{E}_i \to \mathbb{E}_{i-1}\}$ um complexo de cadeias. Definimos o complexo dual, $\mathcal{E}^* = \{(\mathbb{E}^i, \mathrm{d}^i)\}$ onde $\mathbb{E}^i := (\mathbb{E}_i)^*, \mathrm{d} = (\partial)^*$. É simples verificar que $\mathrm{d}^2 = 0$ e, portanto $\mathcal{E}^*$ é, de fato, um complexo de cocadeias. Consideramos a aplicação bilinear:

$$\mathbb{E}^i \times \mathbb{E}_i \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (\phi, c) \longrightarrow \phi(c).$$

É fácil ver que a aplicação acima induz uma aplicação:

$$H^i \times H_i \longrightarrow \mathbb{R}, \quad ([\phi], [c]) \longrightarrow \phi(c),$$

[4]Naturalmente $Z^i(\mathcal{E})$, $B^i(\mathcal{E})$, $H^i(\mathcal{E})$ são espaços vetoriais. O uso do termo "grupo" se deve ao fato de eles poderem ser definidos no contexto de seqüências semi exatas de grupos abelianos, ou mais geralmente de módulos.

bem definida e bilinear e, portanto uma aplicação linear:

$$H^i \longrightarrow (H_i)^*,$$

que pode-se mostrar ser um isomorfismo.

As definições e os resultados desta seção se transportam de modo óbvio para complexos de cadeias.

É fácil verificar que um morfismo $\phi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ manda cociclos em cociclos e cobordos em cobordos e por isto induz uma família de aplicações lineares

$$\phi_i^* : H^i(\mathcal{E}) \longrightarrow H^i(\mathcal{F}).$$

A aplicação ϕ_i^* se dirá aplicação induzida de ϕ_i e, quando claro no contexto, escreveremos apenas ϕ^* ao invés de ϕ_i^*. A aplicação induzida goza das *propriedades funtoriais*:

- $\mathbb{1}_{\mathcal{E}}^* = \mathbb{1}_{H^i(\mathcal{E})}$,
- Se $\phi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}, \psi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ são morfismos de complexos, então $(\psi \circ \phi)^* = \psi^* \circ \phi^*$.

Consideremos agora uma seqüência exata curta de complexos (com o óbvio significado dos termos):

$$\{0\} \to \mathcal{E} \xrightarrow{\phi} \mathcal{F} \xrightarrow{\psi} \mathcal{G} \longrightarrow \{0\}.$$

Em particular ϕ_i é injetivo e ψ_i é sobrejetivo. Em geral porém, a nível de cohomologia, ϕ^* não é injetivo e ψ^* não é sobrejetivo. Todavia existe uma relação entre os grupos de cohomologia, dada pelo seguinte teorema

2.11. TEOREMA. *Existe uma família de aplicações lineares $\Delta_i^* : H^i(\mathcal{G}) \to H^{i+1}(\mathcal{E})$ tais que a seqüência longa:*

$$\cdots \longrightarrow H^i(\mathcal{E}) \xrightarrow{\phi^*} H^i(\mathcal{F}) \xrightarrow{\psi^*} H^i(\mathcal{G}) \xrightarrow{\Delta_i^*} H^{i+1}(\mathcal{E}) \longrightarrow \cdots$$

é exata.

DEMONSTRAÇÃO. Da seqüência exata curta segue o diagrama comutativo 2, onde as colunas são exatas e as linhas são as cocadeias de complexos que denotamos por $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$.

Para definir a aplicação Δ_i^*: $H^i(\mathcal{G}) \to H^{i+1}(\mathcal{E})$ considere $c \in \mathbb{G}^i$ um cociclo. Como ψ^i é sobrejetiva, existe $b \in \mathbb{F}^i$ tal que $c = \psi^i(b)$. O elemento $d^i(b) \in \mathbb{F}^{i+1}$ esta em $\ker \psi^{i+1}$ pois $\psi^{i+1}(d^i(b)) = d^i\psi^i(b)$ por que o diagrama comuta e $d^i\psi^i(b) = d^i(c) = 0$ por c ser um cociclo. Mas $\ker \psi^{i+1} = \operatorname{Im} \phi^{i+1}$, assim $d^i(b) = \phi^{i+1}(a)$ para algum $a \in \mathbb{E}^{i+1}$. Observe que $d^{i+1}(a) = 0$, pois $\phi^{i+2}(d^{i+1}(a)) = d^{i+1}(\phi^{i+1}(a)) = d^{i+1} \circ d^i(b) = 0$ e ϕ^{i+2} é injetiva, logo a é um cociclo.

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r] & \mathbb{E}^{i-1} \arrow[r, "d^{i-1}"] \arrow[d, "\phi^{i-1}"] & \mathbb{E}^{i} \arrow[r, "d^{i}"] \arrow[d, "\phi^{i}"] & \mathbb{E}^{i+1} \arrow[r] \arrow[d, "\phi^{i+1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \mathbb{F}^{i-1} \arrow[r, "d^{i-1}"] \arrow[d, "\psi^{i-1}"] & \mathbb{F}^{i} \arrow[r, "d^{i}"] \arrow[d, "\psi^{i}"] & \mathbb{F}^{i+1} \arrow[r] \arrow[d, "\psi^{i+1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \mathbb{G}^{i-1} \arrow[r, "d^{i-1}"] \arrow[d] & \mathbb{G}^{i} \arrow[r, "d^{i}"] \arrow[d] & \mathbb{G}^{i+1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Portanto definimos $\Delta_i^*\colon H^i(\mathcal{G}) \to H^{i+1}(\mathcal{E})$ mandando a classe de cohomologia de c na classe de cohomologia de a, $\Delta_i^*[c] = [a]$. Tal aplicação esta bem definida pois o elemento a é unicamente determinado por $d^i(b)$ uma vez que ϕ^{i+1} é injetor.

Além disso, não depende da escolha de b por que se tomarmos um b' diferente de b, teríamos $\psi^i(b') = \psi^i(b)$, então $b' - b \in \ker\psi^i = \operatorname{Im}\phi^i$. Logo $b' - b = \phi^i(a')$ para algum $a' \in \mathbb{E}^i$, com isso $b' = b + \phi^i(a')$. Porém trocar b por $b + \phi^i(a')$ é trocar a pelo elemento equivalente $a + d^i(a')$, $\phi^{i+1}(a + d^i(a')) = \phi^{i+1}(a) + \phi^{i+1}(d^i(a')) = d^i(b) + d^i(\phi^i(a')) = d^i(b + \phi^i(a'))$.

E uma outra escolha de c, dentro da mesma classe de cohomologia, teria a forma $c+d^i(c')$. Como $c' = \psi^i(\tilde{b})$ para algum $\tilde{b} \in \mathbb{F}^{i+1}$, então teríamos $c + d^{i-1}(c') = c + d^{i-1}(\psi^{i-1}(\tilde{b})) = c + \psi^i(d^{i-1}(\tilde{b})) = \psi^i(b + d^{i-1}(\tilde{b}))$, então b é substituído por $b + d(\tilde{b})$, o que não muda $d(b)$ e portanto nem a.

A aplicação $\Delta_i^* : H^i(\mathcal{G}) \to H^{i+1}(\mathcal{E})$ é um homomorfismo pois se $\Delta_i^*[c_1] = [a_1]$ e $\Delta_i^*[c_2] = [a_2]$ via b_1 e b_2 como acima, então $\psi^i(b_1 + b_2) = \psi^i(b_1) + \psi^i(b_2) = c_1 + c_2$ e $\phi^{i+1}(a_1 + a_2) = \phi^{i+1}(a_1) + \phi^{i+1}(a_2) = d^i(b_1) + d^i(b_2) = d^i(b_1 + b_2)$, logo $\Delta_i^*([c_1] + [c_2]) = [a_1] + [a_2]$.

Vamos então verificar a exatidão da seqüência, apenas para simplificar a notação denotaremos por ϕ, ψ e d as aplicações ϕ^i, ψ^i e d^i respectivamente, sem nos preocuparmos com os índices.

- $\operatorname{Im}\phi^* \subset \ker\psi^*$: É imediato por que $\psi\phi = 0$ implica $\psi^*\phi^* = 0$.
- $\operatorname{Im}\psi^* \subset \ker\Delta_i^*$: Temos $\Delta_i^*\psi^* = 0$ uma vez que neste caso $d(b) = 0$ na definição de d.
- $\operatorname{Im}\Delta_i^* \subset \ker\phi^*$: Aqui $\phi^*\Delta_i^* = 0$ pois $\phi^*\Delta_i^*$ aplica $[c]$ em $[d(b)] = 0$.
- $\ker\psi^* \subset \operatorname{Im}\phi^*$: A classe de cohomologia em $\ker\psi^*$ é representada por um ciclo $b \in \mathbb{F}^i$ com $\psi(b)$ um cobordo, então $\psi(b) = d(c)$ para algum $c' \in \mathbb{G}^{i+1}$. Como ψ é sobrejetivo, existe $b' \in \mathbb{F}^{i-1}$ tal que $c' = j(b')$. Logo $\psi(b - d(b')) = \psi(b) - \psi(d(b')) = \psi(b) - d\psi(b') = 0$ pois $d(\psi(b')) = d(c') = \psi(b)$. Então $b - d(b') = \phi(a)$ para algum $a \in \mathbb{E}^i$. Este a é um cociclo por que $\phi(d(a)) = d(\phi(a)) = \phi(b - d(b')) = d(b) = 0$ e ϕ é injetivo. Então $\phi^*[a] = [b - d(b')] = [b]$.

- $\ker \Delta_i^* \subset \operatorname{Im} \psi^*$: Se c representa a classe cohomologia em $\ker \Delta_i^*$, então $a = d(a')$ para algum $a' \in \mathbb{E}^i$. O elemento $b - \phi(a')$ é um cociclo pois $d(b - \phi(a')) = d(b) - d(\phi(a')) = d(b) - \phi(d(a')) = d(b) - \phi(a) = 0$. E $\psi(b - \phi(a')) = \psi(b) - \psi\phi(a') = \psi(b) = c$, logo ψ^* aplica $[b - \phi(a')]$ em $[c]$.
- $\ker \phi^* \subset \operatorname{Im} \Delta_i^*$: Dado um cociclo $a \in \mathbb{E}^{i+1}$ tal que $\phi(a) = d(b)$ para algum $b \in \mathbb{F}^i$, então $\psi(b)$ é um cociclo pois $d(\psi(b)) = \psi(d(b)) = \psi\phi(a) = 0$, e Δ_i^* aplica $[\psi(b)]$ em $[a]$. $\square$

Observemos explicitamente que Δ^* não é bem definida a nível de coclicos, mas somente a nível de cohomologias.

CAPíTULO 2

Cohomologia de de Rham em $\mathbb{R}^n$

1. Formas diferenciáveis em $\mathbb{R}^n$

Seja $U \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto $x \in U$. Recordemos que o *espaço tangente a U em x* é o espaço vetorial $T_xU = \{(x, v) : v \in \mathbb{R}^n\}$ com a operação usual sobre a segunda componente, e o *fibrado tangente de U* é $TU = \cup_{x \in U} T_xU = U \times \mathbb{R}^n$. Um *campo vetorial* em U é simplesmente uma função $\tilde{\xi} : U \to TU$ da forma $\tilde{\xi}(x) = (x, \xi(x))$, $\xi : U \to \mathbb{R}^n$. Portanto, se não houver confusão, identificaremos T_xU com $\mathbb{R}^n$ e $\tilde{\xi}$ com ξ. O campo se dirá contínuo, resp. diferenciável, se ξ é uma função contínua, resp. diferenciável. Em geral estaremos interessados no caso de diferenciabilidade de classe C^∞.

Denotaremos por $\mathcal{F}(U)$ a álgebra as funções de classe C^∞ de U em $\mathbb{R}$ e por $\mathcal{H}(U)$ o conjunto do campos vetoriais diferenciáveis de classe C^∞ em U. $\mathcal{H}(U)$ é um espaço vetorial real e um módulo sobre $\mathcal{F}(U)$, com as operações usuais.

Recordemos que uma *derivação* em $\mathcal{F}(U)$ (resp. uma derivação em $p \in U$) é uma aplicação $\mathbb{R}$-linear:

$$\eta : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(U) \qquad (\text{resp. } \eta_p : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathbb{R})$$

tal que:

$$\eta(fg) = \eta(f)g + f\eta(g) \qquad (\text{resp. } \eta_p(fg) = \eta_p(f)g(p) + f(p)\eta_p(g)) \;\; \forall\, f, g \in \mathcal{F}(U).$$

1.1. Exemplo. Seja $(p, v) \in T_pU$, $f \in \mathcal{F}(U)$. Denotaremos com $v_p(f)$ a derivada direcional usual de f na direção v_p, isto é $v_p(f) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(p + tv_p)|_{(t=0)}$[1]. É óbvio que v_p é uma derivação em p. No caso $v = e_i$ (i-ésimo vetor da base canônica), usaremos também a notação clássica $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$ ou simplesmente $\left(\partial_i\right)_p$ ou, também, $\frac{\partial}{\partial x_i}(x)$. Também, quando claro do contexto, eliminaremos a referência ao ponto p.

[1]É bem conhecido que $v_p(f)$ pode ser calculada partindo de uma curva $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to U$ com $\gamma(0) = p$, $\dot{\gamma}(0) = v_p$, calculando $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\gamma(t))|_{(t=0)}$. Este fato será útil mais adiante.

Seja ξ_p uma derivação em p. Vamos demonstrar alguns fatos elementares:

- Se $f \in \mathcal{F}(U)$ se anula em uma vizinhança V de p, então $\xi(f) = 0$.
  De fato, seja ϕ uma função que vale 1 fora de V e zero em p. Então $f = \phi f$ e:

$$\xi(f) = \xi(\phi)f(p) + \phi(p)\xi(f) = 0.$$

  Em particular, se $f = g$ em uma vizinhança de p, $\xi(f) = \xi(g)$.
- Se $f = 1$ em uma vizinhança de p, então $\xi(f) = 0$.
  De fato pela propriedade anterior, podemos supor $f = 1$ em U. Portanto:

$$\xi(1) = \xi(1 \cdot 1) = 2\xi(1).$$

  Em particular, se f é constante em uma vizinhança de p, $\xi(f) = 0$.
- Se f é produto de dois funções que se anulam em p, então $\xi(f) = 0$.

1.2. Teorema. *Dada uma derivação ξ em p, existe $(v, p) \in T_pU$ tal que $\xi = v_p$.*

Demonstração. Seja $f \in \mathcal{F}(U)$. A fórmula de Taylor nos dá:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f(0) + \sum \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_p (x_i - x_i(p)) + \Phi(x),$$

onde $\Phi(x)$ é produto de funções que se anulam em p. Portanto usando as propriedades anteriores:

$$\xi(f) = \sum \xi(x_i)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p (f),$$

e portanto $\xi = \sum \xi(x_i)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$. □

O resultado anterior permite identificar T_pU com o espaço vetorial das derivações de $\mathcal{F}(U)$ em p. Deixando p variar em U, se obtém, de modo análogo, uma identificação de $\mathcal{H}(U)$ com o espaço das derivações de $\mathcal{F}(U)$. Em particular, se $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^n$, o campo constante (x, e_i) e o vetor (p, e_i) são identificados com as derivações $\frac{\partial}{\partial x_i}$ e $\frac{\partial}{\partial x_i}(p)$.

Em geral, a composição de duas derivações não é uma derivação, mas o comutador de duas derivações é ainda uma derivação. Esta observação sugere definir o *produto de Lie* de $\xi, \eta \in \mathcal{H}(U)$, como $[\xi, \eta] := \xi \circ \eta - \eta \circ \xi$. Da definição temos as propriedades a seguir.

1.3. Proposição. *O produto de Lie de campos de vetores (diferenciáveis) verifica:*

(1) $[\xi, (\eta + \nu)] = [\xi, \eta] + [\xi, \nu]$,
(2) $[\xi, \eta] = -[\eta, \xi]$,
(3) $[\xi, [\eta, \nu]] + [\eta, [\nu, \xi]] + [\nu, [\xi, \eta]] = 0$, *(Identidade de Jacobi).*

1.4. Observação. Um espaço vetorial dotado de um produto que verifica as propriedades em 1.3 se chama uma *álgebra de Lie*

Em termos de coordenadas temos:

1.5. Proposição. *Se* $\xi = \sum_{i=1}^n a_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}$ *e* $\eta = \sum_{j=1}^n b_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}$ *são dois campos vetoriais, então* $[\xi,\eta] = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial b_i}{\partial x_j} - \sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_i}$.

1.6. Definição. *Uma q-forma exterior em* $x \in U$ *é um elemento de* $\Lambda^q(T_xU)$. *Uma q-forma diferencial é uma lei que associa a cada* $x \in U$ *um elemento* $\omega(x) \in \Lambda^q(T_xU)$ *que "depende diferenciavelmente da* x*" no sentido que, dados campos diferenciáveis* $\xi_1, \dots \xi_q$*, a função que associa a* $x \in U$ *ao número real* $\omega(x)(\xi_1(x), \dots, \xi_q(x))$ *é uma função diferenciável.*

Pela definição anterior, uma forma determina uma aplicação $\mathcal{F}(U)$-multilinear:

$$\mathcal{H}(U) \times \cdots \times \mathcal{H}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(U), \quad \omega(\xi_1, \dots, \xi_p)(x) = \omega(x)(\xi_1(x), \dots, \xi_p(x)).$$

O próximo resultado dá condições para que uma aplicação como acima seja induzida por uma forma.

1.7. Teorema. *Uma aplicação* $\mathbb{R}$*-multilinear:*

$$\omega : \mathcal{H}(U) \times \cdots \times \mathcal{H}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(U),$$

é induzida por uma forma se, e somente se, é $\mathcal{F}(U)$*-multilinear.*

Demonstração. Pela observação acima, se ω é induzida por uma forma, ω é $\mathcal{F}(U)$-multilinear. Suponhamos que ω seja $\mathcal{F}(M)$- multilinear. Seja $x \in U, \xi_i \in T_xU$. Estendemos os ξ_i a campos $\tilde{\xi}_i \in \mathcal{H}(U)$, $\tilde{\xi}_i(y) = \sum_j a_{ij}(y)e_j$, e definimos:

$$\omega(x)(\xi_1, \dots, \xi_p) := \omega(\tilde{\xi}_1, \dots, \tilde{\xi}_p))(x).$$

Para demonstrar que a igualdade acima define de fato uma forma será suficiente mostrar que, em x, não depende das extensões. De fato, pela $\mathcal{F}(U)$-multilinearidade:

$$\omega(\tilde{\xi}_1, \dots, \tilde{\xi}_p))(x) = \sum_{i_1,\dots,i_p=1}^n a_{1i_1}(x) \cdots a_{pi_p}(x)\omega(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}).$$

$\square$

2. A diferencial exterior e a cohomologia de de Rham

Denotaremos com $\Omega^p(U)$ o conjunto das p-formas diferenciáveis. As operações usuais de soma e produto por um escalar definem em $\Omega^p(U)$ uma estrutura de espaço vetorial real. Além disso, denotado por $\mathcal{F}(U)$, o anel das funções diferenciáveis a valores reais define em U, o produto usual de uma função por uma p-forma determina uma estrutura de $\mathcal{F}(U)$-módulo em $\Omega^p(U)$.

Seja $f : U \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. A diferencial de f, $\mathrm{d}f$ é então uma 1-forma diferencial, $\mathrm{d}f(x)(x,v) := \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_x v_i$ onde v_i é a i-ésima coordenada de v. Em particular podemos considerar as funções coordenadas $x_i : U \to \mathbb{R}$. Para todo $x \in U$, $\{\mathrm{d}x_i(x) \colon i = 1, \ldots, n\}$ é a base dual da base canônica de T_xU. Portanto uma p-forma diferencial ω sempre pode ser escrita como:

$$\omega(x) = \sum_{i_1 < \ldots < i_p} \omega_{i_1 \ldots i_p}(x) \mathrm{d}x_{i_1}(x) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p}(x), \qquad \omega_{i_1 \ldots i_p} \in \mathcal{F}(U).$$

Em particular, enquanto como espaço vetorial real a dimensão de $\Omega^p(U)$ é infinita, como $\mathcal{F}(U)$-módulo, $\Omega^p(U)$ é um módulo livre finitamente gerado de dimensão $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$.

Sejam $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $V \subseteq \mathbb{R}^m$ abertos e $F : U \to V$ uma função diferenciável, $F(x) = (F_1(x), \ldots, F_m(x))$. Fazendo $y = F(x)$, $\mathrm{d}F(x) : T_xU \to T_yV$ é uma aplicação linear que induz uma transposta $F^* = (\mathrm{d}F)^* : \Lambda^p(T_yV) \to \Lambda^p(T_xU)$ (veja 2.5) a nível de formas diferenciáveis:

$$F^* : \Omega^p(V) \longrightarrow \Omega^p(U), \qquad F^*(\omega)(v_1, \ldots, v_p) := \omega(\mathrm{d}F(x)(v_1), \ldots, \mathrm{d}F(x)(v_p)).$$

Indicando com $x_1, \ldots, x_n$ e $y_1, \ldots y_m$ as coordenadas canônicas em U e V respectivamente, temos:

(1) $$F^*(\mathrm{d}y_i) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \mathrm{d}x_j,$$

e portanto se $\omega = \omega_{i_1,\ldots,i_p} \mathrm{d}y_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y_{i_p}$,

$$F^*(\omega)(x) = \omega_{i_1,\ldots,i_p}(F(x)) F^*(\mathrm{d}y_{i_1}) \wedge \ldots \wedge F^*(\mathrm{d}y_{i_1}).$$

Além disso são verificadas as propriedades funtoriais:

- $\mathbb{1}_U^* = \mathbb{1}_{\Omega^p(U)}$,
- Se $F_1 : U_1 \to U_2$ e $F_2 : U_2 \to U_3$ são aplicações diferenciáveis, então $(F_2 \circ F_1)^* = F_1^* \circ F_2^*$.

Em particular se F é um difeomorfismo, então F^* é um isomorfismo.

Por 1.2, $\Omega^0(U) = \mathcal{F}(U)$. O operador de diferenciação é portanto, pelo que foi visto antes, um operador $\mathbb{R}$-linear $\mathrm{d} : \Omega^0(U) \to \Omega^1(U)$. Este operador se estende à p-formas diferenciáveis no sentido do seguinte resultado:

2.1. Teorema. *Existe uma única família de operadores* $\mathbb{R}$*-lineares* $\mathrm{d}^p : \Omega^p(U) \to \Omega^{p+1}(U)$,- $p = 0, \ldots, n$, *tais que:*

(i) $\mathrm{d}^0 = \mathrm{d}$ *(o operador usual de diferenciação)*

(ii) $\mathrm{d}^{p+1} \circ \mathrm{d}^p = 0$.

(iii) *Se* $\omega \in \Omega^p(U)$, $\tau \in \Omega^q(U)$, $\mathrm{d}^{p+q}\omega \wedge \tau = \mathrm{d}^p\omega \wedge \tau + (-1)^p \omega \wedge \mathrm{d}^q\tau$.

Além disso, se F *é uma aplicação diferenciável de um aberto* $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *em um aberto* $V \subseteq \mathbb{R}^m$, $F^*(\mathrm{d}^p(\omega)) = \mathrm{d}^p(F^*(\omega))$.

Quando claro no contexto, escreveremos simplesmente d sem especificar o índice p.

Demonstração. Suponha que existe d com as propriedades acima.

Seja $\omega = f(x)\,\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p}$. Então

$$\mathrm{d}\omega = (\mathrm{d}f) \wedge \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p} + f\,\mathrm{d}(\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p}).$$

Agora $\mathrm{d}f = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \mathrm{d}x_i$, por (1) e

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p}) = \sum_{i_1 < \cdots < i_p} \pm \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\mathrm{d}x_{i_j} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i+p} = 0$$

por (2) e (3). Portanto se d existir, deve ser da forma

$$\begin{aligned} (2) \qquad \mathrm{d}\Big(\sum_{i_1<\cdots<i_p} \varphi_{i_1\ldots i_p} \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p}\Big) &= \\ &= \sum_k \sum_{i_1<\cdots<i_p} \frac{\partial \varphi_{i_1\ldots i_p}}{\partial x_k} \mathrm{d}x_k \wedge \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p} \end{aligned}$$

e portanto é único. De outro lado, é fácil ver que, definindo d por (2), obtemos um operador que verifica as condições (i),(ii) e (iii).

A última afirmação segue do fato que $F^*(\mathrm{d}y_i) = \sum_j \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \mathrm{d}x_j = \mathrm{d}(y_i \circ F) = \mathrm{d}(F^*(y_i))$ e do fato que F^* é um morfismo de álgebras. $\square$

Se obtém assim uma seqüência de espaços vetoriais reais e aplicações lineares:

$$0 \longrightarrow \Omega^0(U) \xrightarrow{\mathrm{d}^0} \Omega^1(U) \xrightarrow{\mathrm{d}^1} \cdots \xrightarrow{\mathrm{d}^{n-1}} \Omega^n(U) \longrightarrow 0.$$

Esta seqüência é *semi exata* ou um *complexo de cocadeias* no sentido do capítulo anterior (2.8) e leva o nome de *complexo de de Rham de U*. Neste caso, cociclos e cobordos são chamado de *formas fechadas* e *formas exatas* respectivamente. Usaremos as notações:

- $Z^p(U) := ker\, \mathrm{d}^p$, o espaço das *$p$-formas fechadas*,
- $B^p(U) := Im\, \mathrm{d}^{p-1}$, o espaço das *$p$-formas exatas*.
- $H^p(U) := Z^p(U)/B^p(U)$, a *cohomologia de de Rham de U de dimensão p*.

Também, chamaremos o operador d de diferencial exterior, ou simplesmente de diferencial, mesmo se, de acordo com as notações do capítulo anterior, deveríamos chamá-lo de codiferencial. De fato usaremos o termo codiferencial por um outro operador a ser definido nos capítulos seguintes.

2.2. Observação. São convenientes, por uso posterior, as seguintes considerações; de fácil verificação.

(1) d é um operador local. Isso significa que se $\omega \equiv \tau$ em uma vizinhança V de $p \in U$, então $\mathrm{d}\omega(p) = \mathrm{d}\tau(p)$.

(2) A diferencial exterior pode ser definida sem uso de coordenadas, pela seguinte fórmula

$$\mathrm{d}\omega(\xi_0, \dots, \xi_p) = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \xi_i \cdot \omega(\xi_0, \dots, \hat{\xi}_i, \dots \xi_p) + \sum_{i<j} (-i)^{i+j} \omega([\xi_i, \xi_j], \xi_0, \dots, \hat{\xi}_i, \dots, \hat{\xi}_j, \dots, \xi_p)$$

Um problema natural é o *problema de integração*, isto é, decidir quando uma dada p-forma é a diferencial de uma $(p-1)$-forma, isto é, quando uma forma é exata. A condição $\mathrm{d} \circ \mathrm{d} = 0$ nos diz que uma condição necessária para que uma forma seja exata é que seja fechada. A condição é também suficiente se, e somente se, $H^p(U) = \{0\}$. A importância da cohomologia é também devida ao fato que ela é estreitamente ligada, como veremos, à topologia de U. Um primeiro exemplo é o seguinte:

2.3. Exemplo. Consideramos a cohomologia de de Rham de dimensão 0. Uma vez que a única 0-forma exata é a forma nula, a cohomologia coincide com o espaço das 0-formas fechadas, isto é com o espaço das funções reais, definidas em U, diferenciáveis e com diferencial nulo. Obviamente uma tal função é localmente constante e portanto constante em cada componente conexa de U. Podemos então identificar o grupo de cohomologia 0-dimensional com o produto direto de tantas cópias de $\mathbb{R}$ quantas são as componentes conexas de U.

Mais em geral, se $\{U_\alpha : \alpha \in \mathcal{U}\}$ são abertos disjuntos com $U = \cup_{\alpha \in \mathcal{U}} U_\alpha$, $\Omega^p(U) \cong \Pi_{\alpha \in U} \Omega^p(U_\alpha)$, e d respeita esta decomposição. Portanto:

2.4. Teorema. *Se $U \subseteq \mathbb{R}^n$ é uma união disjunta de abertos $\{U_\alpha, \alpha \in \mathcal{U}\}$, então:*

$$H^p(U) = \prod_{\alpha \in \mathcal{U}} H^p(U_\alpha).$$

Sejam $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $V \subseteq \mathbb{R}^m$ abertos e $F : U \to V$ uma função diferenciável. Já vimos como F induz uma aplicação $F^* : \Omega^p(U) \to \Omega^p(V)$. Das propriedades do diferencial exterior segue que F^* é um morfismo de complexos de cocadeias, em particular manda formas fechadas em formas fechadas e formas exatas em formas exatas e induz uma aplicação linear entre os grupos de cohomologia, que continuaremos indicando com o mesmo símbolo:

$$F^* : H^p(V) \longrightarrow H^p(U).$$

É imediata a verificação das propriedades funtoriais:

- $\mathbb{1}_U^* = \mathbb{1}_{H^p(U)}$,
- Se $F_1 : U_1 \to U_2$ e $F_2 : U_2 \to U_3$ são aplicações diferenciáveis, então $(F_2 \circ F_1)^* = F_1^* \circ F_2^*$.

Em particular, se F é um difeomorfismo, então F^* e um isomorfismo.

2.5. Exemplo. Retornemos ao exemplo 2.3. Segue facilmente das considerações anteriores que se $F : U \to V$ e V é conexo, então $F^* : H^0(V) \to H^0(U)$ é injetor, e se também U é conexo, é um isomorfismo.

Vamos agora estudar condições que garantam que duas aplicações diferenciáveis induzem o mesmo morfismo em cohomologia.

2.6. Definição. *Sejam $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $V \subseteq \mathbb{R}^m$ abertos e $F_i : U \to V$, $i = 0, 1$ funções diferenciáveis. Uma homotopia diferenciável entre F_0 e F_1 é uma aplicação diferenciável* [2] *$H : U \times [0,1] \to V$, tal que $H(x,i) = F_i(x), i = 0, 1$.*

Diremos que as duas funções são homotópicas se existe uma homotopia entre elas, e, neste caso, escreveremos $F_0 \sim F_1$.

Diremos que U e V são homotopicamente equivalentes se existem funções diferenciáveis $F : U \to V$, $G : V \to U$ tais que $G \circ F \sim \mathbb{1}_U, F \circ G \sim \mathbb{1}_V$.

Diremos que um aberto U é contrátil se U é homotopicamente equivalente a $\mathbb{R}^0$.

2.7. Observação. Dada uma homotopia $H : U \times [0,1] \to V$, esta pode ser substituída por uma função $\overline{H} : U \times \mathbb{R} \to V$, tal que $\overline{H}(x,i) = F_i(x), i = 0, 1$. De fato, se $\lambda : \mathbb{R} \to [0,1]$

[2] Recordemos que uma função definida em um conjunto $C \subseteq \mathbb{R}^n$ é diferenciável se pode ser estendida a uma função diferenciável definida em uma vizinhança aberta C.

é uma função diferenciável, tal que $\lambda(t) = 0$ se $t \leq 0$, $\lambda(t) = 1$ se $t \geq 1$, basta tomar $\overline{H}(x,t) = H(x, \lambda(t))$.

Uma homotopia entre duas funções pode ser vista como um caminho, no espaço das funções diferenciáveis, que une as duas funções (com conceitos adequados de topologia e diferenciabilidade no espaço das funções diferenciáveis entre dois abertos) ou ainda como uma "deformação"de uma função em uma outra.

2.8. Teorema. *Se $F_i : U \to V$ são funções diferenciáveis homotópicas, $i = 0, 1$, então $F_0^* = F_1^* : H^p(V) \to H^p(U)$, para todo p.*

Demonstração. Por 2.7 podemos supor H definida em $U \times \mathbb{R}$. Sejam $j_i : U \to U \times \mathbb{R}$, $i = 0, 1$, $j_i(x) = (x, i)$, as inclusões canônicas. Suponha que existe uma função linear $K : \Omega^p(U \times \mathbb{R}) \to \Omega^{p-1}(U)$ tal que:

$$K\mathrm{d}\omega + \mathrm{d}K\omega = j_1^*\omega - j_0^*\omega \tag{3}$$

então, se ω é fechada, $j_0^*\omega$ e $j_1^*\omega$ diferem por uma forma exata e portanto definem o mesmo elemento em $H^p(U \times \mathbb{R})$. Portanto $j_0^* = j_1^* : H^p(U \times \mathbb{R}) \to H^p(U)$. Mas $F_i = H \circ j_i$ e com isso $F_1^* = F_0^* : H^p(U) \to H^P(V)$.

Vamos construir uma função linear que verifica 3. Se $\omega \in \Omega^p(U \times \mathbb{R})$, $\omega = \mathrm{d}t \wedge \alpha + \beta$, com:

$$\alpha = \sum_{i_1 < \cdots < i_p} \alpha_{i_1,\dots,i_p}(x,t)\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p}, \quad \beta = \sum_{j_1 < \cdots < j_p} \beta_{j_1,\dots,j_p}(x,t)\mathrm{d}x_{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{j_p},$$

definimos:

$$K(\omega) = \sum_{i_1 < \cdots < i_p} \left(\int_0^1 \alpha_{i_1,\dots,i_p}(x,t)dt \right) \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p}.$$

Temos então:

$$\mathrm{d}\omega = -\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}\alpha + \mathrm{d}\beta = \mathrm{d}t \wedge (- \sum_{j, i_1 < \cdots < i_p} \frac{\partial \alpha_{i_1,\dots,i_p}}{\partial x_j} \, \mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p} +$$
$$+ \sum_{j_1 < \cdots < j_p} \frac{\partial \beta_{j_1,\dots,j_p}}{\partial t} \, \mathrm{d}x_{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{j_p}) + \gamma$$

onde γ não contém o termo dt e portanto $K\gamma = 0$. Assim :

$$K\mathrm{d}\omega = \sum_{j_1<\cdots<j_p} \left(\int_0^1 \frac{\partial \beta_{j_1,\ldots,j_p}}{\partial t}\,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x_{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{j_p} \quad -$$

$$\sum_{j,i_1<\cdots<i_p} \left(\int_0^1 \frac{\partial \alpha_{i_1,\ldots,i_p}}{\partial x_j}\quad \mathrm{d}t \quad \right) \mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p},$$

$$\mathrm{d}K\omega = \sum_{j,i_1<\cdots<i_p} \left(\int_0^1 \frac{\partial \alpha_{i_1,\ldots,i_p}}{\partial x_j}\,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p}.$$

Então temos :

$$k\mathrm{d}\omega + \mathrm{d}K\omega = \sum_{j_1<\cdots<j_p} \left(\int_0^1 \frac{\partial \beta_{j_1,\ldots,j_p}}{\partial t}\,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x_{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{j_p} =$$

$$= \sum_{j_1<\cdots<j_p} [\beta_{j_1,\ldots,j_p}(x,1) - \beta_{j_1,\ldots,j_p}(x,0)] \mathrm{d}x_{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{j_p} = j_1^*\omega - j_0^*\omega.$$

□

2.9. Corolário. *Abertos homotopicamente equivalentes têm cohomologias isomorfas. Em particular, se U é contrátil,*

$$H^p(U) \simeq \begin{cases} \mathbb{R} & se\ p = 0 \\ \{0\} & se\ p > 0. \end{cases}$$

En particular, todos os abertos estrelados [3] são contráteis. Se obtém então como corolário o *Lema de Poincaré*:

2.10. Corolário. *Se $U \subseteq \mathbb{R}^n$ é um aberto estrelado, então todas as p-formas fechadas, para $p > 0$, são exatas.*

Sejam $U_i \subseteq \mathbb{R}^n, i = 1, 2$, abertos, e defina $U = U_1 \cup U_2, V = U_1 \cap U_2$. Vamos relacionar a cohomologia de U com aquelas dos U_i e aquela de V. Para tal consideremos a seqüência

$$\{0\} \longrightarrow \Omega^p(U) \stackrel{(j_1^*,j_2^*)}{\longrightarrow} \Omega^p(U_1) \oplus \Omega^p(U_2) \stackrel{(k_1^*-k_2^*)}{\longrightarrow} \Omega^p(V) \longrightarrow \{0\},$$

onde $j_i : U_i \to U$ são as inclusões e $k_i(\omega) = \omega|_V$. Os vários termos da seqüência anterior vamos interpretar como complexos de cocadeias com os óbvios (co)diferenciais e é claro que os morfismos comutam, com tais (co)diferenciais.

[3] Recordemos que um conjunto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ se diz estrelado em relação a $x_0 \in U$ se para cada $x \in U$ o segmento de extremos x e x_0 esta contido em U

2.11. TEOREMA. *A seqüência anterior é uma seqüência exata curta de complexo. Em particular induz uma seqüência exata (longa) em cohomologia:*

$$\cdots \longrightarrow H^p(U) \xrightarrow{(j_1^*, j_2^*)} H^p(U_1) \oplus H^p(U_2) \xrightarrow{(k_1^* - k_2^*)} H^p(V) \xrightarrow{\Delta^*} H^{i+1}(U) \longrightarrow \cdots.$$

DEMONSTRAÇÃO. Observamos que $j_i^* \omega = \omega|_{U_i}$. A exatidão da seqüência é portanto óbvia, exceto pela sobrejetividade de $(k_1 - k_2)$. Para provar que $(k_1 - k_2)$ é sobrejetiva, consideramos uma partição da unidade subordinada a $\{U_1, U_2\}$, isto é funções diferenciáveis $\phi_i : U \to [0,1],\ i = 1,2$ tais que:

- $\phi_1(x) + \phi_2(x) = 1 \ \ \forall x \in U$,
- *supp*$(\phi_i) := \overline{\{x \in U : \phi_i(x) > 0\}} \subseteq U_i$.

Dada então $\omega \in \Omega^p(V)$, definimos

$$\omega_i(x) = \begin{cases} \phi_i(x)\omega(x) & \text{se } x \in V \\ 0 & \text{se } x \in U_i \setminus V \end{cases}$$

ω_i é bem definida e diferenciável, pois ϕ_i se anula fora de um aberto de $\overline{U_j}, j \neq i$. Além disso

$$(k_1 - k_2)(\omega_1, -\omega_2) = \omega_1|_V + \omega_2|_V = \phi_1\omega + \phi_2\omega = \omega.$$

portanto $(k_1 - k_2)$ é sobrejetiva. A existência da exatidão da seqüência longa segue então da 2.11. □

2.12. DEFINIÇÃO. *A seqüência exata longa em 2.11 é chamada de* seqüência de Mayer-Vietoris *em cohomologia.*

Aplicamos agora a seqüência de Mayer-Vietoris ao cálculo da cohomologia de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ é homotopicamente equivalente a $\Sigma_n := \mathbb{R}^n \setminus \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : |x_i| \leq \epsilon\}$ e portanto, por 2.9 a cohomologia dos dois espaços são isomorfas. Calcularemos a cohomologia de Σ_n. Consideremos os abertos:

$$U_1 = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \Sigma_n : x_n > -\epsilon/2\}, \quad U_2 = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \Sigma_n : x_n < \epsilon/2\}.$$

As seguintes afirmações são de fácil verificação:

- $\Sigma_n = U_1 \cup U_2$.
- U_i é contrátil, $i = 1, 2$.
- $U_1 \cap U_2$ é homotopicamente equivalente a $\Sigma_{(n-1)}$.

Assim $n = 1$, Σ_1 é união de dois abertos contráteis e portanto por 2.9 e 2.3:

$$H^p(\Sigma_1) \cong \begin{cases} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} & \text{se } p = 0 \\ \{0\} & \text{se } p > 0 \end{cases}$$

Consideramos $n = 2$. Sendo Σ_2 e U_i conexos, $H^0(\Sigma_2) \cong H^0(U_i) \cong \mathbb{R}$. Consideramos a seqüência de Mayer-Vietoris:

$$\{0\} \longrightarrow H^0(\Sigma_2) \longrightarrow H^0(U_1) \oplus H^0(U_2) \longrightarrow H^0(\Sigma_1) \longrightarrow H^1(\Sigma_2) \longrightarrow H^1(U_1) \oplus H^1(U_2) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \cdots \longrightarrow H^{p-1}(\Sigma_1) \longrightarrow H^p(\Sigma_2) \longrightarrow H^p(U_1) \oplus H^p(U_2) \longrightarrow \cdots .$$

A primeira linha reduz a:

$$\{0\} \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \longrightarrow H^1(\Sigma_2) \longrightarrow \{0\}.$$

Portanto $H^1(\Sigma_2) \cong \mathbb{R}$. [4] Da segunda linha se obtém , $H^p(\Sigma_2) = \{0\}$ se $p > 1$.

Procedemos por indução. Suponhamos $n \geq 3$ e que:

$$H^p(\Sigma_{n-1}) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } p = 0, n-2 \\ \{0\} & \text{se } p \neq 0, n-2 \end{cases}$$

Consideremos novamente a seqüência de Mayer-Vietoris:

$$H^{p-1}(\Sigma_n) \longrightarrow H^{p-1}(U_1) \oplus H^{p-1}(U_2) \longrightarrow H^{p-1}(\Sigma_{n-1}) \longrightarrow H^p(\Sigma_n) \longrightarrow H^p(U_1) \oplus H^p(U_2) \longrightarrow$$

Se $p > 1$ segue que $H^p(\Sigma_n) \cong H^{p-1}(\Sigma_{n-1})$, e se $p = 1$ obtemos:

$$\{0\} \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow H^1(\Sigma_n) \longrightarrow \{0\}.$$

A aplicação $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tem núcleo unidimensional e assim é sobrejetiva, logo $H^1(\Sigma_n) \cong \{0\}$. Portanto:

$$H^p(\Sigma_n) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } p = 0, n-1 \\ \{0\} & \text{se } p \neq 0, n-1 \end{cases}$$

3. O teorema de Jordan-Alexander

É conveniente, para evitar, nos cálculos, argumentos especiais para o caso 0-dimensional, introduzir a *cohomologia reduzida*. Definimos $\Omega^{-1}(U) := \mathbb{R}$ e $d^{(-1)} : \Omega^{-1}(U) \to \Omega^0(U)$ como a aplicação que associa a $a \in \mathbb{R}$ a função constante igual a a. O complexo assim obtido se chama o *complexo de de Rham aumentado*.

[4] A primeira seta não nula é injetiva, disto segue que a imagem da seqüência seguinte, que é o núcleo da terceira, é unidimensional. Assim $H^1(\Sigma_2) \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}/\mathbb{R} \cong \mathbb{R}$.

3.1. Definição. *A cohomologia reduzida de U, $\tilde{H}^p(U)$, é a cohomologia do complexo de de Rham aumentado.*

É claro que $\tilde{H}^{-1}(U) = \{0\}$ e que $\tilde{H}^0(U)$ é um espaço vetorial com uma dimensão a menos daquela de $H^0(U)$. Além disso $\tilde{H}^p(U) = H^p(U)$ se $p > 0$. Em particular se U é conexo, $\tilde{H}^0(U) = \{0\}$.

O mesmo argumento usado para estabelecer a seqüência de Mayer-Vietoris se aplica ao complexo aumentado e se obtém, com a notação de 2.11:

3.2. Teorema. *A seqüência:*

$$\cdots \longrightarrow \tilde{H}^p(U) \xrightarrow{(j_1^*, j_2^*)} \tilde{H}^p(U_1) \oplus \tilde{H}^p(U_2) \xrightarrow{(k_1^* - k_2^*)} \tilde{H}^p(V) \xrightarrow{\Delta^*} \tilde{H}^{i+1}(U) \longrightarrow \cdots$$

é exata.

O uso de cohomologia reduzida simplifica às vezes os argumentos, como veremos, por exemplo, no *princípio de dualidade de Jordan-Alexander*, que tem, como conseqüência imediata, o clássico teorema da curva de Jordan. A referência para este argumento é [?] e [7].

Sejam $F_i, 1 = 1, 2$ subconjuntos fechados de $\mathbb{R}^n$. Suponhamos que exista um homeomorfismo $\phi : F_1 \to F_2$. É bastante natural se perguntar se existe uma relação entre os complementares $\mathbb{R}^n \setminus F_i$. A ilusão que eles sejam homeomorfos, ou então simplesmente homotopicamente equivalentes, é rapidamente frustrada. Por exemplo, sejam $F_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\} \cup \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 2\}$ e $F_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\} \cup \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x - (3,0)\| = 1\}$. Então o complementar de F_1 é homotopicamente equivalente a união disjunta de um ponto e dois círculos, enquanto o complementar de F_2 é homotopicamente equivalente a união disjunta de dois pontos com o "wedge"[5] de dois círculos . Usando técnicas elementares de topologia se verifica facilmente que os dois complementares não são homotopicamente equivalentes. O fato que os complementares de dois fechados homeomorfos não sejam homotopicamente equivalentes é importante em certas circunstâncias, por exemplo na teoria dos nós. Recordemos que um nó em $\mathbb{R}^3$ é uma função $\gamma : S^1 \to \mathbb{R}^3$ que é um homeomorfismo sobre sua imagem. Dois nós são ditos equivalentes se existe um homeomorfismo de $\mathbb{R}^3$, isotópico a identidade, que leva um nó no outro. Um invariante importante para distinguir classes de equivalência de nós, é o grupo fundamental do complementar de um nó.

[5] Recordemos que o "wedge" de dois espaços topológicos é o espaço que se obtém da união disjunta de dois espaços, identificando um ponto escolhido neste primeiro com um ponto escolhido neste segundo.

Retornando ao exemplo anterior, observamos que ainda que não homotopicamente equivalentes, os complementares de F_1 e F_2 têm a mesma cohomologia. De fato, vale o seguinte resultado geral que, segundo A. Dold, é chamado de *teorema da dualidade de Jordan-Alexander*:

3.3. TEOREMA. *Sejam $F_i, i = 1,2$ fechados de $\mathbb{R}^n$ e $\phi : F_1 \to F_2$ um homeomorfismo. Então $H^k(\mathbb{R}^n \setminus F_1) \cong H^k(\mathbb{R}^n \setminus F_2)$.*

A demonstração será dividida em vários passos. Se $n \leq m$, consideremos $\mathbb{R}^n$ como o subespaço dos vetores de $\mathbb{R}^m$ com as últimas $m-n$ coordenadas nula. Será além disso conveniente trabalhar com a cohomologia reduzida, para não ter que tratar o caso 0-dimensional separadamente.

3.4. LEMA. *Se $F \subseteq \mathbb{R}^n$ é um fechado e $F \neq \mathbb{R}^n$, então $\tilde{H}^{i+1}(\mathbb{R}^{n+1} \setminus F) \cong \tilde{H}^i(\mathbb{R}^n \setminus F), i \geq -1$.*

DEMONSTRAÇÃO. Consideremos os subconjuntos de $\mathbb{R}^{n+1}$:

- $Z_+ := \mathbb{R}^{n+1} \setminus F \times \{t \in \mathbb{R} : t \leq 0\}$.
- $Z_- := \mathbb{R}^{n+1} \setminus F \times \{t \in \mathbb{R} : t \geq 0\}$.
- $Z := Z_+ \cup Z_- = \mathbb{R}^{n+1} \setminus F$.
- $Z_+ \cap Z_- = \mathbb{R}^n \setminus F$.

O hiperplano $x_{n+1} = 1$, é homotopicamente equivalente a Z_+. De fato se verifica facilmente que a projeção ortogonal de Z_+ sobre este hiperplano é uma equivalência de homotopia. Portanto Z_+ é contrátil. Analogamente Z_- é contrátil. Em particular a cohomologia reduzida de Z_+ e Z_- se anula em todas as dimensões. O resultado segue então da seqüência de Mayer-Vietoris, para a cohomologia reduzida:

$$\cdots \longrightarrow \tilde{H}^{i+1}(Z_+) \oplus \tilde{H}_{i+1}(Z_-) \longrightarrow \tilde{H}_{i+1}(Z) \longrightarrow \tilde{H}_i(Z_+) \oplus \tilde{H}_{i+1}(Z_-) \longrightarrow \cdots .$$

□

Aplicando sucessivamente o resultado precedente se obtém:

3.5. COROLÁRIO. *Se $F \subseteq \mathbb{R}^n$ é um fechado, então $\tilde{H}^{i+k}(\mathbb{R}^{n+k} \setminus F) \cong \tilde{H}^i(\mathbb{R}^n \setminus F)$, para todo $i \geq -k$.*

3.6. LEMA. *Sejam $F_i, i = 1,2$ fechados de $\mathbb{R}^n$ e $\phi : F_1 \to F_2$ um homeomorfismo. Então $\mathbb{R}^{2n} \setminus F_1 \times \{0\}$ é homeomorfo a $\mathbb{R}^{2n} \setminus \{0\} \times F_2$.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $\psi = \phi^{-1}$. Os homeomorfismos ϕ, ψ se estendem, usando o teorema de Tietze, a aplicações contínuas $\Phi, \Psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Definimos:

- $L : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n},\ L(x, y) = (x, y - \Phi(x))$.
- $R : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n},\ R(x, y) = (x - \Psi(y), y)$.

As aplicações L, R são homeomorfismos. De fato $L^{-1}(x, y) = (x, y + \Phi(x)), R^{-1}(x, y) = (x + \Psi(y), y)$. Consideremos $\Gamma := \{(x, y) \in \mathbb{R}^{2n} : y = \phi(x)\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{2n} : x = \psi(y)\}$. Se tem $L(F_1 \times \{0\}) = \Gamma = R(0 \times F_2)$ e com isso um homeomorfismo:

$$\mathbb{R}^{2n} \setminus F_1 \times \{0\} \xrightarrow{L} R^{2n} \setminus \Gamma \xrightarrow{R^{-1}} \mathbb{R}^{2n} \setminus \{0\} \times F_2.$$

□

A demonstração do Teorema é, a este ponto, imediata:

$$\tilde{H}^i(\mathbb{R}^n \setminus F_1) \cong \tilde{H}^{i+n}(\mathbb{R}^{2n} \setminus F_1) \cong \tilde{H}^{i+n}(\mathbb{R}^2 n \setminus F_2) \cong \tilde{H}^i(\mathbb{R}^n \setminus F_2).$$

Como aplicação imediata do princípio de dualidade de Jordan-Alexander, obtemos o famoso teorema da curva de Jordan:

3.7. Teorema. *Seja $\gamma : S^1 \to \mathbb{R}^2$ uma função contínua que é um homeomorfismo sobre sua imagem*[6]*. Então $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma(S^1)$ tem exatamente duas componentes conexas por arco.*

Demonstração. Consideremos o círculo unitário $S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$. É claro que o complementar de S^1 in $\mathbb{R}^2$ tem exatamente duas componentes conexas por arco, ou, equivalentemente, $H^0(\mathbb{R}^2 \setminus S^1) \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$. Para o princípio de dualidade de Jordan-Alexander, $H_0(\mathbb{R}^2 \setminus \gamma(S^1)) \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ e portanto o complementar de $\gamma(S^1)$ tem exatamente duas componentes conexas por arco. □

3.8. Observação. É claro que o argumento da demonstração do teorema de Jordan se pode estender ao caso de hipersuperfícies fechadas $M^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ toda vez que temos uma hipersuperfície fechada homeomorfa a M^n da qual se conhece o complementar. Isto acontece, por exemplo, no caso de uma superfície (regular) compacta e orientada em $\mathbb{R}^3$.

4. Integração de formas diferenciáveis e homologia

Como anunciado neste primeiro capítulo, as formas diferenciáveis são os integrandos naturais das integrais múltiplas "orientadas". Iremos agora precisar desta afirmação. Começaremos com o caso das n-formas.

[6] Tal aplicação se chama comumente uma *curva de Jordan*

4.1. DEFINIÇÃO. *Seja* $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *um aberto e* $\omega = f(x)\mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n \in \Omega^n(U)$*. Seja* Δ *um fechado limitado de* U*. Definimos:*

$$\int_\Delta \omega = \int_\Delta f(x_1, \ldots, x_n)\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n,$$

sendo o segundo membro a integral usual de Riemann de f*.*

A integral assim definida é "orientada" no sentido que $-\omega = f(x)\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n$ e portanto

$$\int_U f(x)\mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n = -\int_U f(x)\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_3 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n.$$

Para definir a integral de p-formas, $p < n$, devemos definir apropriadamente os domínios de integração.

4.2. DEFINIÇÃO.

(1) *Um* p*-simplexo em* $\mathbb{R}^n$ *é o fecho convexo*[7] *de* $(p+1)$ *pontos* $\{v_0, \ldots, v_p\} \subset \mathbb{R}^n$ *em posição genérica* [8]*. Os vetores* v_i *são ditos os vértices do simplexo.*

(2) *Seja* $\{e_0, \ldots, e_p\}$ *a base canônica de* $\mathbb{R}^{(p+1)}$*. O* p*-simplexo padrão* $\Delta^p \subset \mathbb{R}^{(p+1)}$ *é o simplexo de vértices* $\{e_0, \ldots, e_p\}$*.*

(3) *Um* p*-simplexo singular (diferenciável) em* U*, é uma aplicação diferenciável* $\sigma : \Delta^p \to U$*.*

Quando claro no contexto omitiremos o adjetivo "diferenciável".

4.3. OBSERVAÇÃO. Dado um p-simplexo de vértices $\{v_o, \ldots, v_p\}$, todo ponto v do simplexo pode ser escrito em modo único como $v = \sum_{i=0}^p \lambda_i v_i$ com $\lambda_i \in [0, 1] \subset \mathbb{R}$ e $\sum_{i=0}^p \lambda_i = 1$. Os números λ_i são chamados de *coordenadas baricêntricas de* v.

4.4. EXEMPLO. Um exemplo importante de simplexo singular é o seguinte: Sejam $\{v_0, \ldots, v_p\}$ pontos de $\mathbb{R}^n$ não necessariamente em posição genérica. Definimos $L(v_0, \ldots, v_p)$ como o simplexo singular que manda o ponto de Δ^p de coordenadas baricêntricas $\{\lambda_0, \ldots, \lambda_p\}$ no ponto $\sum_{i=0}^p \lambda_i v_i$. Este simplexo será chamado de *simplexo linear de vértices* $\{v_0, \ldots, v_p\}$.

[7]Lembramos que o fecho convexo de um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ é o menor convexo que contém o conjunto. Em outras palavras é a interseção de todos os convexos que contém o conjunto.

[8] Lembramos que os pontos $\{v_0, \ldots, v_p\}$ são em posição genérica se não são contidos em um subespaço afim de dimensão menor que p. Isso é equivalente ao fato dos vetores $\{v_i - v_0 : i = 1, \ldots p\}$ serem linearmente independentes.

4.5. Observação. O p-simplexo padrão é o fecho de um aberto do hiperplano determinado pelos pontos unitários de $\mathbb{R}^{(p+1)}$. Identificando este hiperplano com $\mathbb{R}^p$ faz sentido considerar a medida usual de Riemann neste hiperplano e portanto integrar funções contínuas definidas neste simplexo padrão.

4.6. Definição. *Seja $\omega \in \Omega^p(U)$ uma p-forma diferenciável e $\sigma : \Delta^p \to U$ um p-simplexo singular. Definimos:*

$$\int_\sigma \omega := \int_{\Delta^p} \sigma^* \omega,$$

onde a integral é entendida no sentido de 4.1 e 4.5.

Iremos agora definir "domínio de integração"mais geral para as p-formas. Consideremos o espaço vetorial real $C_p(U)$ com base os simplexos singulares de U. Um elemento de $C_p(U)$ será dita uma *cadeia singular p-dimensional de U*. Podemos então estender, por linearidade, a integral de uma forma sobre uma cadeia de U. Se obtém desta forma uma aplicação bilinear:

$$I : C_p(U) \times \Omega^p \longrightarrow \mathbb{R}.$$

O resultado fundamental da teoria (elementar) de integração é o teorema de Stokes, que afirma, que "*se f é uma função definida em um domínio fechado e limitado, a integral de f sobre o bordo é igual à integral da diferencial de f neste domínio*". Para estender este teorema ao nosso caso temos que introduzir o conceito do *bordo de uma cadeia singular*.

Intuitivamente, o bordo de um simplexo singular $\sigma : \Delta^p \to U$, é a restrição de σ ao bordo de Δ^p. Mais precisamente, consideremos a aplicação $F_i = L(e_0, \ldots, \hat{e}_i, \ldots, e_p) : \Delta^{p-1} \to \Delta^p$ que manda linearmente $\Delta^{(p-1)}$ na face oposta ao vértice $e_i \in \Delta^p$. Definimos então:

$$\partial_p : C_p(U) \longrightarrow C_{(p-1)}(U),$$

estendendo, por linearidade a aplicação que manda um simplexo singular $\sigma : \Delta^p \to U$ na cadeia $\sum(-1)^i \sigma \circ F_i$.

Em particular, para simplexos lineares temos a fórmula:

$$\partial_p L(v_0, \ldots, v_p) = \sum_{i=1}^{p} (-1)^i L(v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_p). \tag{4}$$

Aplicando o Teorema de Stokes clássico, pela linearidade se obtém:

4.7. Teorema. *Se c é uma p-cadeia e ω uma $(p-1)$-forma,*

$$I(\partial c, \omega) := \int_{\partial c} \omega = \int_c \mathrm{d}\omega := I(c, \mathrm{d}\omega).$$

Investigamos um pouco mais a fundo o operador de bordo.

4.8. Lema. $\partial_{(p-1)} \circ \partial_p = 0$.

Demonstração. Seja σ um simplexo singular. Tendo em conta (4), temos :

$$\partial_p(\sigma) = \sum_i (-1)^i \sigma \circ L(e_0, \ldots, \hat{e_i}, \ldots, e_p).$$

Portanto:

$$\partial_{(p-1)}\partial_p(\sigma) = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i (\sum_{j<i} (-1)^j \sigma \circ L(e_0, \ldots, \hat{e_j}, \ldots, \hat{e_i}, \ldots, e_p) +$$

$$\sum_{j>i} (-1)^{(j-1)} \sigma \circ L(e_0, \ldots, \hat{e_i}, \ldots, \hat{e_j}, \ldots, e_p)).$$

Observamos que o termo $\sigma \circ L(e_0, \ldots, \hat{e_i}, \ldots, \hat{e_j}, \ldots, e_p)$, i, j fixados, aparece duas vezes na soma acima com sinais opostos e portanto $\partial_{(p-1)}\partial_p(\sigma) = 0$.

□

Em particular a seqüência:

$$\cdots \longrightarrow C_{(p+1)}(U) \xrightarrow{\partial_{(p+1)}} C_p(U) \xrightarrow{\partial_p} C_{(p-1)}(U) \xrightarrow{\partial_{(p-1)}} \cdots,$$

é um complexo de cadeias e portanto podemos definir:

- $Z_p(U) := ker\partial_p$ o grupo dos *ciclos p-dimensionais.*
- $B_p(U) := Im\partial_{(p-1)}$ o grupo dos *bordos p-dimensionais.*
- $H_p(U) := Z_p(U)/B_p(U)$ o grupo de *homologia p-dimensionais.*

Usando 4.7 se obtém:

4.9. Teorema. *Se $a \in Z_p(U)$, $I(a, \mathrm{d}\omega) = 0$. Analogamente se $\sigma \in Z^p(U)$, $I(\partial b, \sigma) = 0$. Portanto o operador $I : C_p(U) \times \Omega^p(U) \to \mathbb{R}$ induz um operador $\mathbb{R}$-bilinear:*

$$\tilde{I} : H_p(U) \times H^p(U) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \tilde{I}([c], [\omega]) := I(c, \omega).$$

4.10. Observação. Um teorema clássico, que estudaremos no próximo capítulo (o Teorema de de Rham), garante que $\tilde{I}$ é não degenerada e induz um isomorfismo:

$$dR : H^p(U) \longrightarrow (H_p(U))^*,$$

chamado de isomorfismo de de Rham.

Vamos agora estudar algumas propriedades básicas da homologia, análogas às da cohomologia.

Seja $F : U \subseteq \mathbb{R}^n \to V \subseteq \mathbb{R}^m$ uma aplicação diferenciável. F induz uma aplicação linear $F_* : C_p(U) \to C_p(V)$, obtida estendendo, por linearidade a aplicação que manda um simplexo singular $\sigma : \Delta^p \to U$ no simplexo singular $F \circ \sigma : \Delta^p \to V$. É claro que F_* comuta com o operador de bordo e é, portanto, um morfismo de complexos de cadeias. Em particular induz um morfismo, que indicaremos com o mesmo símbolo:

$$F_* : H_p(U) \longrightarrow H_p(V).$$

As propriedades funtoriais:

- $(\mathbb{1}_U)_* = \mathbb{1}_{H_p(U)}$,
- $(G \circ F) = G_* \circ F_*$,

são facilmente verificadas[9].

Seja $U = \mathbb{R}^0$. Então o único simplexo singular $\sigma : \Delta^p \to U$ é o simplexo constante. O seu bordo é a soma alternada de $(p+1)$ adendos iguais ao $(p-1)$-simplexo constante. Portanto tal bordo é zero se p for ímpar e o $(p-1)$-simplexo constante se p for par. Portanto o complexo das cadeias singulares é o complexo:

$$\longrightarrow C_{(2p+1)}(U) = \mathbb{R} \xrightarrow{0} C_{2p}(U) = \mathbb{R} \xrightarrow{\mathbb{1}} C_{(2p-1)}(U) = \mathbb{R} \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_0(U) = \mathbb{R} \longrightarrow \{0\}.$$

Portanto $H_0(\mathbb{R}^0) = \mathbb{R}$, $\quad H_p(\mathbb{R}^0) = \{0\}$, se $p > 0$.

4.11. Observação. Poderia aparecer mais natural (e às vezes seria de fato mais simples) considerar *cubos singulares*, i.e., aplicações diferenciáveis definidas nos cubos unitários das varias dimensões, no lugar dos simplexos singulares. Isso porém, daria, para $\mathbb{R}^0$, homologia isomorfa a $\mathbb{R}$ em qualquer dimensão, pois o cubo p-dimensional tem sempre um número par de faces $(p-1)$-dimensionais, e portanto seu bordo seria sempre nulo.

Suponha $U \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto com componentes conexas $\{U_\alpha, \alpha \in \mathcal{U}\}$. Se σ é um p-simplexo singular, $\sigma(\Delta^p) \subseteq U_\alpha$, por algum $\alpha \in \mathcal{U}$. Portanto as cadeias de U são a soma direta das cadeias de U_α. Também, se $c \in C_p(U_\alpha)$ então $\partial c \in C_{(p-1)}(U_\alpha)$. Em particular:

4.12. Teorema. $H_p(U) = \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{U}} H_p(U_\alpha)$.

Seja V um aberto conexo. Um 0-simplexo é simplesmente um ponto de V que é também um ciclo. Dados dois pontos $p_i \in V, i = 0, 1$, pela conexão existe um 1-simplexo $\sigma : \Delta^1 \to V$

[9] Isso significa que a homologia p-dimensional é um funtor *covariante* da categoria dos abertos de espaços euclideano e aplicações diferenciáveis, na categoria dos espaços vetoriais e aplicações lineares.

tal que $\sigma(e_i) = p_i$. Portanto $\partial\sigma = p_1 - p_0$. Isso implica que a homologia 0-dimensional de V é isomorfa a $\mathbb{R}$. Portanto, nas hipóteses de 4.12

4.13. Corolário. $H_0(U) = \bigoplus_{\alpha\in\mathcal{U}} \mathbb{R}$.

4.14. Observação. O resultado anterior é essencialmente o teorema de de Rham enunciado em 4.10 para a dimensão 0, pois o dual de $\bigoplus_{\alpha\in\mathcal{U}} \mathbb{R}$ é $\prod_{\alpha\in\mathcal{U}} \mathbb{R}$.

Também vale a pena observar que, à luz das considerações anteriores, se $F : U \to V$ é uma função diferenciável F_*, a nível 0-dimensional, manda o gerador correspondente à componente conexa $U_\alpha \subseteq U$, no gerador correspondente à componente conexa de V que contém $F(U_\alpha)$. Em particular, se U é conexo, $F_* : H_0(U) \to H_0(V)$ é injetor, e se V é também conexo, é um isomorfismo.

Em analogia ao caso da cohomologia de de Rham, vamos estudar agora os morfismos induzidos por funções homotópicas.

4.15. Teorema. *Se $F, G : U \to V$ são funções diferenciáveis homotópicas, então $F_* = G_*$.*

Demonstração. Seja $H : U \times [0,1] \to V$ uma homotopia entre F e G. A estratégia, análoga ao caso da cohomologia será de construir uma *homotopia algébrica* entre os morfismos induzidos das cadeias de U naquelas de V, i.e., um morfismo $\tilde{H}_p : C_p(U) \to C_{(p+1)}(V)$ tal que:

$$\partial \circ \tilde{H} + \tilde{H} \circ \partial = G_* - F_*.$$

A tese segue imediatamente da existência de uma tal homotopia algébrica pois se c é um ciclo, $G_*(c) - F_*(c)$ será um bordo.

Consideramos o produto $\Delta^p \times [0,1] \subset \mathbb{R}^{p+2}$. Intuitivamente, se σ é um p-simplexo singular de U, consideramos a aplicação $H \circ (\sigma \times \mathbb{1}) : \Delta^p \times [0,1] \to V$. O problema é que $\Delta^p \times [0,1]$ não é um simplexo. A estratégia será subdividir $\Delta^p \times [0,1]$ em simplexos e restringir $H \circ (\sigma \times \mathbb{1})$ a tais simplexos.

Consideramos $v_i = (e_i, 0), w_i = (e_i, 1)$, e os $(p+1)$-simplexos $[v_0, \dots, v_i, w_i, \dots w_p]$. Se $\sigma : \Delta^p \to U$ é um p-simplexo singular, definimos:

$$\tilde{H}(\sigma) = \sum_0^p (-1)^i H \circ (\sigma \times \mathbb{1}) \circ L(v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, w_p),$$

e estendemos por linearidade esta aplicação a um morfismo $\tilde{H} : C_p(U) \to C_{p+1}(V)$. Vamos mostrar que $\tilde{H}$ é, de fato, uma homotopia algébrica entre F_* e G_*. Usando 4 e as propriedades funtoriais das aplicações induzidas, temos:

$$\partial\tilde{H}(\sigma) = \sum_{j\leq i}(-1)^i(-1)^j H\circ(\sigma\times \mathbb{1})\circ L(v_0,\dots,\hat{v}_j,\dots,v_i,w_i,\dots w_p)+$$
$$+\sum_{j\geq i}(-1)^i(-1)^{j+1} H\circ(\sigma\times \mathbb{1})\circ L(v_0,\dots,v_i,w_i,\dots,\hat{w}_j,\dots,w_p),$$
$$\tilde{H}\partial(\sigma) = \sum_{j< i}(-1)^{i-1}(-1)^j H\circ(\sigma\times \mathbb{1})\circ L(v_0,\dots,\hat{v}_j,\dots,v_i,w_i,\dots w_p)+$$
$$+\sum_{j\geq i}(-1)^i(-1)^{j} H\circ(\sigma\times \mathbb{1})\circ L(v_0,\dots,v_i,w_i,\dots,\hat{w}_j,\dots,w_p).$$

Os termos a segundo membro da primeira equação, com $i = j$ se cancelam exceto os termos $H\circ(\sigma\times \mathbb{1})\circ L(\hat{v}_0, w_0,\dots,w_p) = G\circ\sigma$, e $-H\circ(\sigma\times \mathbb{1})\circ L(v_0,\dots,v_p,\hat{w}_p) = -F\circ\sigma$. O restante da soma é o oposto do segundo membro da segunda equação e portanto vale a condição de homotopia algébrica. □

4.16. Corolário. *Se $F : U \to V$ é uma equivalência de homotopia, então $F_* : H_p(U) \to H_p(V)$ é um isomorfismo. Em particular um espaço contrátil tem a mesma homologia de um ponto.*

Também temos o análogo da seqüencia exata de Mayer-Vietoris, mas o argumento, no caso da homologia é um pouco mais complexo.

Sejam $U_i \subseteq \mathbb{R}^n, i = 1, 2$ abertos, e defina $U = U_1 \cup U_2, V = U_1 \cap U_2$. Consideramos a seqüência curta de complexos de cadeias (com os óbvios diferenciais):

$$\{0\} \longrightarrow C_p(V) \overset{((j_1)_*,(j_2)_*)}{\longrightarrow} C_p(U_1)\oplus C_p(U_2) \overset{((k_1)_*-(k_2)_*)}{\longrightarrow} C_p(U) \longrightarrow \{0\},$$

onde $j_i : V \to U_i, k_i : U_i \to U$ são as inclusões.

A dificuldade anunciada vem do fato que a seqüência *não é exata*. Mais precisamente $((k_1)_* - (k_2)_*)$ não é sobrejetor pois uma cadeia de U pode não ser soma de uma cadeia de U_1 e de uma de U_2. Consideramos então o subcomplexo $C_p(U_1 + U_2) \subseteq C_p(U)$ gerado pelos simplexos singulares de U_1 e por aqueles de U_2. Substituindo $C_p(U)$ por este subcomplexo, se obtém uma seqüência exata curta de complexos. O fato técnico, que não demonstraremos aqui, é que a inclusão $C_p(U_1+U_2) \to C_p(U)$ induz um isomorfismo em homologia. Com base nisso temos, com o mesmo argumento usado em cohomologia:

4.17. Teorema. *Existem morfismos Δ_p tais que a seqüência:*

$$\cdots \longrightarrow H_p(V) \overset{((j_1)_*,(j_2)_*)}{\longrightarrow} H_p(U_1) \oplus H_p(U_2) \overset{((k_1)_*-(k_2)_*)}{\longrightarrow} H_p(U) \xrightarrow{\Delta_p} H_{(p-1)}(V) \longrightarrow \cdots ,$$

é exata.

A seqüência exata acima chama-se a *seqüência de Mayer-Vietoris em homologia.*

CAPíTULO 3

Homologia e cohomologia das variedades diferenciáveis

1. Variedades Diferenciáveis

Generalizaremos, nesta seção, os conceitos e resultados das seções anteriores, ao caso de variedades diferenciáveis.

Para efeito de simplificação, assumiremos que todas as variedades são mergulhadas em um espaço euclidiano. Isto obviamente não é restritivo em vista dos teoremas de Whitney (caso diferenciável) e Nash (caso riemanniano). Portanto usaremos a seguinte definição:

1.1. Definição. *Uma variedade diferenciável n-dimensional é um subconjunto $M^n \subseteq \mathbb{R}^N$, tal que $\forall x \in M$ existem um aberto $U \subseteq \mathbb{R}^N$, um aberto $\Omega := \Omega(U) \subset \mathbb{R}^n$ e uma função diferenciável $\psi := \psi_U : \Omega \to \mathbb{R}^N$ tal que:*

(1) *ψ é um homeomorfismo de Ω em $U \cap M$*
(2) *para todo $x \in \Omega$, $\mathrm{d}\psi(x) : T_x\Omega \to \mathbb{R}^N$ é injetivo.*

A aplicação ψ é chamada de *parametrização local* ou *carta local* e se $p \in \psi(\Omega)$, $(x_1, \ldots, x_n) = \psi^{-1}(p)$ são chamadas de coordenadas de p na carta local (Ω, ψ).

Obviamente abertos de uma variedades n-dimensional são variedades n-dimensionais.

Vamos relembrar algumas definições e fatos básicos da teoria das variedades diferenciáveis. Nossa referências principais são [?] e [??].

Sejam $M \subseteq \mathbb{R}^N$, $N \subseteq \mathbb{R}^M$ variedades diferenciáveis e $f : M \to N$ uma função. Diremos que f é diferenciável se para todas cartas locais $\psi\colon \Omega \to M, \phi\colon \Sigma \to N$, a função $\phi^{-1} \circ f \circ \psi$ é diferenciável, onde definida. Isso resulta equivalente ao fato de existir uma vizinhança aberta U de M em $\mathbb{R}^N$ e uma extensão diferenciável $F : U \to \mathbb{R}^M$ de f. Em particular podemos falar de funções diferenciáveis a valores reais, definidas em abertos de uma variedade diferenciável.

Fixamos $p \in M$ e uma carta local $\psi\colon \Omega \to M$ tal que $\overline{x} \in \Omega$ e $\psi(\overline{x}) = p$. O espaço tangente a M em p, T_pM é, por definição, o subespaço vetorial $\mathrm{d}\psi(\overline{x})(\mathbb{R}^n)$.

Seja $\gamma\colon (-\epsilon, \epsilon) \to M \subseteq \mathbb{R}^N$ uma curva diferenciável tal que $\gamma(0) = p$, e $\dot\gamma(0)$ o vetor tangente a γ em p. É fácil ver que o espaço de tais vetores tangentes coincide com o espaço tangente a M em p. Em particular, a definição de espaço tangente faz sentido, não dependendo da escolha da carta local.

Dada uma função diferenciável $f : M \to N$, a *diferencial de f em p* ou *aproximação linear de f em p*, é a aplicação:

$$\mathrm{d}f(p); T_pM \longrightarrow T_{f(p)}N,$$

que manda o vetor $\dot\gamma(0)$, tangente a uma curva γ, $\gamma(0) = p$, no vetor tangente à curva $f \circ \gamma$ em 0.

Como no caso de abertos do $\mathbb{R}^n$, que são variedades n-dimensionais, podemos identificar T_pM com o espaço das derivações de funções diferenciáveis, a valores reais, definidas em uma vizinhança de p.

O fibrado tangente de M é definido como

$$TM = \{(p, v) \in M \times \mathbb{R}^n : v \in T_pM\}.$$

TM tem uma estrutura de variedade diferenciável de dimensão $2n$. De fato, se $\psi \colon \Omega \to M$ é uma carta local, a aplicação

$$\Psi \colon \Omega \times \mathbb{R}^n \longrightarrow TM, \quad \Psi(x, v) = (\psi(x), \mathrm{d}(\psi)(x)(v)),$$

é uma carta local para TM. Também o fibrado tangente vem junto com uma aplicação $\pi : TM \to M$, $\pi(p, v) = p$ chamada de *projeção*, que, como é fácil ver, é diferenciável.

Se $f : M \to N$ é uma função diferenciável, a função

$$\mathrm{d}f \colon TM \longrightarrow TN, \quad \mathrm{d}f(p, v) = (f(p), \mathrm{d}f(p)(v)),$$

é também uma função diferenciável.

Seja M uma variedade diferenciável. Um campo vetorial tangente, em um aberto $U \subseteq M$, é uma função diferenciável $\xi : U \to TM$ tal que $\pi \circ \xi = \mathbb{1}_M$. Em outras palavras um campo tangente em U é a escolha "diferenciável" de um vetor em T_pM, $\forall p \in U$.

O conjunto dos campos de vetores em U, denotado por $\mathcal{H}(U)$, tem uma óbvia estrutura de espaço vetorial real e de módulo sobre o anel das funções diferenciáveis, a valores reais, definidas em U, que denotaremos por $\mathcal{F}(U)$. Também, como no caso de abertos do $\mathbb{R}^n$, podemos identificar os campos tangentes com as derivações de $\mathcal{F}(U)$. Isso nos permite ainda de definir o *produto de Lie* de campos $\xi, \eta \in \mathcal{H}(U)$ como comutador $[\xi, \eta] := \xi \circ \eta - \eta \circ \xi$ de derivações. Portanto $\mathcal{H}(U)$ torna-se uma álgebra de Lie.

2. Cohomologia de de Rham

Tendo o espaço tangente em um ponto p de uma variedade diferenciável M, podemos construir a álgebra exterior $\Lambda^*_p(M) := \Lambda^*(T_p(M))$. Também podemos definir uma p-forma diferencial em U, ω, como a escolha "diferenciável"de uma p-forma $\omega(p) \in \Lambda^*(T_p(M))$, para todo $p \in U$. Aqui "diferenciável"significa que, dados campos diferenciáveis $\xi_i, \dots \xi_p \in \mathcal{H}(U)$, a função que associa a $p \in U$ o número real $\omega(p)(\xi_1(p), \dots, \xi_p(p))$, é diferenciável. Vamos denotar por $\Omega^p(U)$ o espaço vetorial real e $\mathcal{F}(U)$-módulo das p-formas diferenciais em U.

Se $f : M \to N$ é uma função diferenciável, temos um morfismo induzido:

$$F^* : \Omega^p(N) \longrightarrow \Omega^p(M),$$

exatamente como no caso de aberto do $\mathbb{R}^n$.

Dada uma função diferenciável $f : U \to \mathbb{R}$, sua diferencial $\mathrm{d}f$ é uma 1-forma diferencial. O operador de diferenciação se estende a uma família de operadores $\mathrm{d}^p : \Omega^p(U) \to \Omega^{(p+1)}(U)$, cuja definição é sugerida por 2.2:

$$\mathrm{d}\omega(\xi_0, \dots \xi_p) = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \omega(\xi_0, \dots, \hat{\xi_i} \dots \xi_p) + \sum_{0 \le i < j \le p} (-1)^{(i+j)} \omega([\xi_i, \xi_j], \dots \hat{\xi_i}, \dots, \hat{\xi_j}, \dots, \xi_p).$$

O operador d tem exatamente as mesma propriedades que a diferencial exterior no caso de abertos do $\mathbb{R}^n$.

2.1. Teorema. *Seja M uma variedade diferenciável. Existe uma única família de operadores $\mathbb{R}$-lineares $\mathrm{d}^p : \Omega^p(M) \to \Omega^{p+1}(M), p = 0, \dots, n = dim(M)$, tais que:*

(i) $\mathrm{d}^0 = \mathrm{d}$ *(o operador usual de diferenciação)*

(ii) $\mathrm{d}^{p+1} \circ \mathrm{d}^p = 0$.

(iii) *Se* $\omega \in \Omega^p(M),\ \tau \in \Omega^q(M), \mathrm{d}^{p+q}\omega \wedge \tau = \mathrm{d}^p\omega \wedge \tau + (-1)^p \omega \wedge \mathrm{d}^q\tau$.

Além disso, se $f : M \to N$ é uma aplicação diferenciável, $\mathrm{d}^p f^*(\omega) = f^*(\mathrm{d}^p\omega)$.

Como anteriormente escreveremos simplesmente d por d^p quando não cause confusão.

Se M é uma variedade diferenciável n-dimensional, podemos considerar o complexo de cocadeias:

$$0 \longrightarrow \Omega^0(M) \xrightarrow{\mathrm{d}^0} \Omega^1(M) \xrightarrow{\mathrm{d}^1} \cdots \xrightarrow{\mathrm{d}^{n-1}} \Omega^n(M) \longrightarrow 0,$$

cuja cohomologia será dita a *cohomologia de de Rham de M*.

A cohomologia de uma variedade diferenciável goza das mesmas propriedades da cohomologia de abertos do $\mathbb{R}^n$, a saber:

2.2. Teorema.

(1) *Se M é um ponto,* $H^0(M) = \mathbb{R}, \quad H^p(M) = \{0\},\ p > 0$.

(2) *Se M é reunião de abertos disjuntos $U_\alpha,\ \alpha \in \mathcal{U}$, então* $H^p(M) = \prod H^p(U_\alpha)$.

(3) *Se $f, g : M \to N$ são aplicações diferenciáveis homotópicas, então* $f^* = g^*$.

(4) *Se $U, V \subseteq M$ são abertos e $M = U \cup V$, existe uma família de aplicações lineares $\Delta^p \colon H^p(U \cap V) \to H^{p+1}(U \cup V)$ tais que a seqüência:*

$$\cdots \xrightarrow{\Delta^p} H^p(U \cup V) \longrightarrow H^p(U) \oplus H^p(V) \longrightarrow H^p(U \cap V) \xrightarrow{\Delta^p} H^{p+1}(U \cup V) \longrightarrow \cdots$$

é exata.

Demonstração. A demonstração é exatamente a mesma daquela no caso de abertos do $\mathbb{R}^n$. □

Tendo o conceito de função diferenciável entre variedades, podemos também definir p-simplexos singulares em uma variedade M, como aplicações diferenciáveis de Δ^p em M [1]. Isso permite definir o complexo das p-cadeias singulares (diferenciáveis) de M como o complexo dos espaços vetoriais reais com base os p- simplexos singulares (diferenciáveis) e bordo, definido exatamente como no caso de abertos do $\mathbb{R}^n$. Se obtém assim um complexo de cadeias, cuja homologia é a *homologia singular (diferenciável) de M, a coeficientes reais*[2], que denotaremos por $H_p(M)$. Também, dada uma função diferenciável $f : M \to N$, obtemos, por composição, um morfismo de complexos de cadeias e, portanto um morfismo em homologia

$$f_* \colon H_p(M) \longrightarrow H_p(N).$$

As propriedades funtoriais para tal morfismo são de verificação imediata.

Exatamente como no caso de abertos de $\mathbb{R}^n$ se provam as propriedades básicas.

2.3. Teorema.

(1) *Se M é um ponto, $H_0(M) = \mathbb{R}$, $H_p(M) = \{0\}$, $p > 0$.*
(2) *Se M é reunião de abertos disjuntos U_α, $\alpha \in \mathcal{U}$, então $H_p(M) = \oplus H_p(U_\alpha)$.*
(3) *Se $f, g : M \to N$ são aplicações diferenciáveis homotópicas, então $f_* = g_*$.*
(4) *Se $U, V \subseteq M$ são abertos e $M = U \cup V$, existe uma família de aplicações lineares $\Delta_p \colon H_p(U \cap V) \to H_{p-1}(U \cup V)$ tais que a seqüência:*

$$\cdots \xrightarrow{\Delta_{p+1}} H_p(U \cup V) \longrightarrow H_p(U) \oplus H_p(V) \longrightarrow H_p(U \cap V) \xrightarrow{\Delta_p} H_{p-1}(U \cup V) \longrightarrow \cdots$$

é exata.

[1] Neste contexto, diferenciável significa que estende a uma função diferenciável de uma vizinhança aberta de $\Delta^p \subset \mathbb{R}^{(p+1)}$ em M.

[2] Mais em geral, dado um anel comutativo com unidade, A, poderíamos considerar o A-módulo livre gerado pelos simplexos singulares. Obteríamos um complexo de A-módulos, cuja homologia é a *homologia de M a coeficientes em A.*

2.4. OBSERVAÇÃO. Considerando simplexos singulares *contínuos*, i.e., funções contínuas de Δ^p em M, podemos construir, de modo análogo, o complexo das cadeias singulares (contínuas) de M, cuja homologia denotaremos por $H_p^0(M)$. Também, funções contínuas induzem morfismos na homologia contínua e uma análise simples das demonstrações, mostra que todas as propriedades da homologia "diferenciável"continuam valendo substituindo a palavra "diferenciável" pela palavra "contínua". Veremos em seguida, que os grupos de homologia associados são isomorfos.

3. O teorema de de Rham

A relação entre homologia e cohomologia é, de novo dada pela integração. Se $s\colon \Delta^p \to M$ é um simplexo singular e $\omega \in \Omega^p(M)$ é uma p-forma diferencial, podemos definir:

$$\int_s \omega := \int_{\Delta^p} s^*\omega.$$

Podemos extender esta aplicação a uma aplicação bilinear:

$$I\colon C_p(M) \times \Omega^p(M) \longrightarrow \mathbb{R},$$

e, pelo teorema de Stokes, temos uma aplicação bilinear induzida:

$$I\colon H^p(M) \times H_p(M) \longrightarrow \mathbb{R},$$

ou, equivalentemente uma aplicação linear:

$$dR\colon H^p(M) \longrightarrow (H_p(M))^*,$$

chamada de *morfismo de de Rham*.

O resultado central desta seção é o famoso *Teorema de de Rham*

3.1. TEOREMA. *O morfismo*

$$dR\colon H^p(M) \longrightarrow (H_p(M))^*$$

é um isomorfismo.

DEMONSTRAÇÃO. A tese será uma conseqüência relativamente simples de um fato geral, conhecido como *lema da cebola* (o nome será justificado pela idéia da demonstração).

Precisamos porém de um conceito de geometria das variedades, que é o conceito de *conjunto convexo* que generaliza o conceito de convexo em $\mathbb{R}^n$.[3] Independente da definição, as propriedades que nos interessam são as seguintes:

- Os abertos convexos são contráteis;
- Cada ponto de M possui uma vizinhança convexa;
- A intersecção de abertos convexos é um aberto convexo.

3.2. Lema. *Seja $\mathcal{P}$ uma afirmação sobre abertos de uma variedade Riemanniana M. Suponha que*

(1) *$\mathcal{P}$ vale para abertos convexos;*
(2) *se $\mathcal{P}$ vale por abertos U_1, U_2 e para $V = U_1 \cap U_2$, então vale para $U_1 \cup U_2$;*
(3) *se $\mathcal{P}$ vale para abertos disjuntos U_α, então vale para $\bigcup U_\alpha$.*

Então $\mathcal{P}$ vale para M.

Demonstração. Primeiramente vamos observar que $\mathcal{P}$ vale para união de n conjuntos convexos. De fato, $n = 2$ segue do fato que a interseção de dois abertos convexos é convexo e de (2). Suponha verdade para a reunião de $(n-1)$ abertos convexos. Sejam $U_1, \dots, U_n$ abertos convexos, $U = U_1 \cup \dots U_{(n-1)}, V = U$. Então $\mathcal{P}$ vale para U, pela hipótese indutiva, para V e para $U \cap V$, pois

$$U \cap V = (U_1 \cap U_n) \cup \dots \cup (U_{(n-1)} \cap U_n)$$

é união de $(n-1)$ abertos convexos. Portanto $\mathcal{P}$ vale para união de n conjuntos convexos.

Seja agora $\phi\colon M \to [0, \infty)$ uma função própria [4]. Definimos $A_n = \phi^{-1}([n, n+1])$, que é um compacto pois ϕ é própria. Vamos cobrir A_n com um número finito de abertos convexos $U_{\alpha,n}$ contidos em $\phi^{-1}(n - \frac{1}{2}, n + \frac{3}{2})$, e seja $U_n = \cup_\alpha U_{\alpha,n}$. Agora $\mathcal{P}$ vale para os U_n, sendo estes união finita de convexos. Além disso, consideramos $U_{par} = \cup_n U_{2n}$ e $U_{impar} = \cup_n U_{2n+1}$. Então $\mathcal{P}$ vale para U_{par} e U_{impar} pois ambos são reunião disjunta de abertos para os quais $\mathcal{P}$

[3] Em uma variedade Riemanniana temos uma *distância intrínseca* entre dois pontos $p, q \in M$ é definida como o extremo inferior dos comprimentos de curvas que unem os dois pontos. Uma *geodésica minimizante* entre p e q é uma curva cujo comprimento é a distância entre os pontos e o vetor tangente tem norma constante. Por dois pontos "próximos" sempre existe uma geodésica minimizante que une os dois pontos. Um "conjunto convexo" é um conjunto $\mathcal{C}$ tal que dados dois pontos quaisquer em $\mathcal{C}$ existe uma única geodésica minimizante que une os dois pontos e é contida em $\mathcal{C}$.

[4] Lembramos que uma *função própria* é uma função tal que a imagem inversa de um compacto é compacta. Uma tal função pode ser definida, por exemplo, considerando a compactificação a um ponto de M, e pegando o inverso da distância ao ponto no infinito.

vale. Também $U_{par} \cap U_{impar} = \cup_n U_{\alpha,2n} \cap U_{\beta,2n+1}$ e portanto é união disjunta de conjuntos que são união finita de convexos. Portanto $\mathcal{P}$ vale para $U_{par} \cup U_{impar} = M$. $\square$

Vamos agora demonstrar o teorema. Consideramos a afirmação

$$\mathcal{P} = \{I \colon H^p(U) \to (H_p(U))^* \quad \text{é um isomorfismo}\}.$$

Claramente $\mathcal{P}$ vale para abertos convexos, pois são contráteis. Também é claro que se vale para abertos disjuntos, vale para reunião deles [5]. Suponha $\mathcal{P}$ seja válida para abertos U, V e para $U \cap V$. Consideramos o diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H^p(U \cap V) \arrow[r] \arrow[d, "I"] & H^{p+1}(U \cup V) \arrow[r] \arrow[d, "J"] & H^{p+1}(U) \oplus H^{p+1}(V) \arrow[r] \arrow[d, "I \oplus I"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & (H_p(U \cap V))^* \arrow[r] & (H_{p+1}(U \cup V))^* \arrow[r] & (H_{p+1}(U))^* \oplus (H_{p+1}(V))^* \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

sendo I e $I \oplus I$ isomorfismos, J é isomorfismo pelo lema dos cinco (2.6). Portanto $\mathcal{P}$ vale para $U \cup V$. Aplicando o lema da cebola, $\mathcal{P}$ vale para M. $\square$

3.3. Observação. Podemos usar o lema da cebola para demonstrar a afirmação em 2.4 que a homologia singular diferenciável é isomorfa á homologia singular contínua. De fato, sendo um simplexo diferenciável também um simplexo contínuo, temos uma inclusão das cadeias diferenciáveis nas cadeias contínuas, que é um morfismo de complexos e portanto induz um morfismo entre as homologias. A afirmação que este morfismo é um isomorfismo é facilmente verificada usando o lema da cebola.

Uma outra conseqüência interessante da existência de vizinhanças convexas e da seqüência exata de Mayer Vietoris é a seguinte:

3.4. Teorema. *Se M pode ser coberta com um número finito de vizinhanças convexas, então $H^p(M)$ tem dimensão finita, para todo p.*

Demonstração. Vamos proceder por indução. A afirmação é óbvia se M for convexo (pois é contrátil). Suponha a afirmação verdadeira para toda variedade que pode ser coberta com $(m-1)$ abertos convexos. Seja $M = U_1 \cup \ldots \cup U_m$, U_i convexo. Consideramos $U = U_1 \cup \ldots \cup U_{m-1}$, $V = U_m$. Pela hipótese indutiva a cohomologia de U tem dimensão finita, assim como a de V e a de $U \cap V$ pois este último é coberto pelos abertos convexos $U_i \cap U_m$, $i = 1, \ldots, m-1$. Portanto a conclusão segue da seqüência de Mayer Vietoris. $\square$

[5] Estas propriedades seguem imediatamente de 2.3 e 2.2.

Em particular uma variedade compacta pode ser coberta com um número finito de abertos convexos. Portanto:

3.5. COROLÁRIO. *A cohomologia de uma variedade compacta tem dimensão finita.*

CAPíTULO 4

Teoria de Hodge

1. Elementos de geometria riemanniana.

Seja M^n uma variedade diferenciável n-dimensional em $\mathbb{R}^N$. Além da estrutura diferenciável sozinha, que temos considerado na seção anterior, vamos agora considerar os conceitos que dependem do fato de ter um produto escalar em cada espaço tangente a uma variedade (a restrição do produto escalar do $\mathbb{R}^N$), que é também chamada de *primeira forma fundamental*.

Seja $p \in M$ e X, Y campos tangentes definidos em uma vizinhança de p in M. Podemos definir a usual derivada direcional $\frac{\partial X}{\partial Y}(p) \in T_p\mathbb{R}^N$, estendendo X, Y a campos diferenciáveis em uma vizinhança U de p em $\mathbb{R}^N$. O fato bem conhecido que $\frac{\partial X}{\partial Y}(p)$ depende somente dos valores de Y em p e de X ao longo de uma curva por p que têm $Y(p)$ como vetor tangente em p, nos garante que esta derivada não depende das extenções. Em geral, porém, $\frac{\partial X}{\partial Y}(p)$ não é um vetor de T_pM e portanto não é um objeto da geometria intrínseca de M. Podemos evitar este problema com a seguinte:

1.1. Definição. *Seja U um aberto de M, $X, Y \in \mathcal{H}(U)$. Definimos a derivada covariante $\nabla_Y X \in \mathcal{H}(U)$ como o campo que em $p \in U$ vale a projeção de $\frac{\partial X}{\partial Y}(q)$ sobre T_qM.*
O operador ∇ chama-se também de conexão de Levi-Civita.

O resultado a seguir caracteriza a conexão de Levi Civita:

1.2. Teorema. *Existe um único operador:*

$$\nabla : \mathcal{H}(M) \times \mathcal{H}(M) \longrightarrow \mathcal{H}(M),$$

que goza das seguintes propriedades:

(1) ∇ *é $\mathbb{R}$-bilinear,*

(2) *Se* $f \in \mathcal{F}(M)$,

$$\nabla_{fY} X = f \nabla_Y X, \qquad \nabla_Y (fX) = Y(f)X + f\nabla_Y X,$$

(3) $\nabla_Y X - \nabla_X Y = [X, Y]$,
(4) $X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$.

Demonstração. No $\mathbb{R}^N$ as propriedes acima valem para a usual derivada direcional. Em particular valem para a projeção tangente, que é a conexão de Levi-Civita, observando que se X, Y são campos tangentes a M, também $[X, Y]$ é tangente à M. Vamos demonstrar a unicidade. Suponha existe um tal operador. Sejam X, Y, Z campos tangentes a M. Então, por (4),

$$\begin{aligned} X\langle Y, Z\rangle &= \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle \\ Y\langle Z, X\rangle &= \langle \nabla_Y Z, X\rangle + \langle Z, \nabla_Y X\rangle \\ Z\langle X, Y\rangle &= \langle \nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Z Y\rangle \end{aligned}$$

Somando as duas primeiras e subtraindo a terceira e utilizando (3), temos

$$X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle = \langle [X, Y], Z\rangle + \langle [Y, Z], X\rangle + \langle [X, Y], Z\rangle + 2\langle Z, \nabla_Y X\rangle,$$

o que implica que

$$(5)\quad \langle Z, \nabla_Y X\rangle = \frac{1}{2}\Big(X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle - \langle [X, Y], Z\rangle - \langle [Y, Z], X\rangle - \langle [X, Y], Z\rangle\Big)$$

Isto mostra que ∇ esta univocamente determinada pela métrica. A fórmula obtida em 5 é conhecida como fórmula de Kozul.

□

Podemos estender o operador de derivada covariante a um operador sobre formas. É natural pretender que a derivada de uma 1-forma seja a forma dual da derivada covariante do vetor dual da forma. Em outras palavras, se $\phi(X) = \langle X, Y\rangle$, requeremos que $(\nabla_Z \phi)(X) = \langle X, \nabla_Z Y\rangle$. Isso implica que a derivada de uma 1-forma deve ser definida como:

$$(\nabla_X \phi)(Y) = X \cdot \phi(Y) - \phi(\nabla_X Y),$$

para campos X, Y tangentes a M. Também é natural pedir que a derivação de formas obedeça a uma “regra de Leibnitz” para o produto exterior. Isso conduz a seguinte:

1.3. Definição. *Seja* $\omega \in \Omega^p(M)$, $X, Y_1, \ldots Y_p \in \mathcal{H}(M)$. *Definimos:*

$$\nabla_X\omega(Y_1, \ldots Y_p) = X \cdot \omega(Y_1, \ldots, Y_p) - \sum_{i=1}^{p} \omega(Y_1, \ldots Y_{(i-1)}, \nabla_X Y_i, Y_{(i+1)}, \ldots Y_p).$$

1.4. Observação. Observamos que $\nabla_X\omega$ é, de fato, uma p-forma pois é $\mathcal{F}(M)$-multilinear (veja 1.7). Em particular se $\omega \in \Omega^P(M)$, $X, Y_1, \ldots, Y_p \in T_p(M)$, e queremos calcular $\nabla_X\omega(Y_1, \ldots Y_p)(p)$, da teoria geral das variedades riemannianas segue o fato (que não demonstraremos aqui) que podemos extender os campos Y_i a campos tais que $\nabla_X Y_i(p) = 0$. Nesta situação temos a seguinte fórmula simplificada:

$$\nabla_X\omega(Y_1, \ldots Y_p)(p) = (X \cdot \omega(Y_1, \ldots, Y_p))(p).$$

Com a definição acima, temos uma outra simples expressão para a diferencial exterior de uma forma:

1.5. Proposição. *Se* $\omega \in \Omega^p(M)$,

$$\mathrm{d}\omega(X_{i_0}, \ldots, X_{i_p}) = \sum_{j=0}^{p} (-1)^i \nabla_{X_i}\omega(X_0, \ldots, \hat{X_{i_j}}, \ldots X_p).$$

Demonstração. Simples conseqüência de 2.2 e das propriedades da derivada covariante. □

Uma outra noção que podemos definir de modo análogo é a noção de gradiente. Se $f : U \subseteq M \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, definimos o gradiente de f, ∇f, como a projeção tangente de uma extensão diferenciável de f a uma vizinhança de U em $\mathbb{R}^N$. A relação clássica entre diferencial e gradiente para funções definida em abertos de $\mathbb{R}^N$ se estende neste contexto, a saber ∇f é o único vetor em T_pM tal que:

$$\langle \nabla f, X \rangle = \mathrm{d}f(X) \quad \forall X \in T_pM.$$

2. Formas harmônicas

Um operador importante na análise diferencial de funções de varias variáveis em abertos do $\mathbb{R}^N$, é o Laplaciano, $\Delta f = \mathrm{div}\,(\nabla f)$, onde div é o operador divergência, $\mathrm{div}\,(\sum \phi_i e_i) = \sum \frac{\partial \phi_i}{\partial x_i}$. Para estender este operador ao caso de variedades, temos que definir o operador divergência.

2.1. Definição. *Seja* $p \in M$ *e* $X \in \mathcal{H}(M)$. *Considere a transformação linear* $L_X : T_pM \to T_pM$ *dada por* $L_X(Y) = \nabla_Y X$. *O divergente de* X, $\operatorname{div} X$, *é o traço de* L_X. *Se* $X_1, \ldots, X_n$ *é uma base ortonormal, então*

$$\operatorname{div} X = \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{X_i} X, X_i \rangle,$$

2.2. Observação. Observamos explicitamente que, sendo div um traço, não depende da base ortonormal escolhida. É também claro que no caso em que M é um aberto do $\mathbb{R}^N$, o conceito de divergente coincide com o conceito usual.

Em geometria diferencial é conveniente, por razões técnicas, definir o Laplaciano como o oposto do Laplaciano tradicional em análise.

2.3. Definição. *O operador Laplaciano, em uma variedade* M, *é definido como:*

$$\Delta : \Lambda^0(M) = \mathcal{F}(M) \longrightarrow \Lambda^0(M) = \mathcal{F}(M), \quad \Delta f = -\operatorname{div} \nabla f.$$

Para extender Δ para um operador em p-formas iremos extender os operadores ∇, div. Para o primeiro temos a diferencial de de Rham. Vamos extender o segundo.

2.4. Definição. *Seja* $X_1, \ldots, X_n$ *uma base ortonormal para* T_pM *e* $\omega \in \Omega^p(M)$. *Definimos uma* $(p-1)$*-forma como*

$$(\operatorname{div} \omega)(X_{i_1}, \ldots, X_{i_{p-1}}) = \sum_{j=1}^{n} (\nabla_{X_j} \omega)(X_j, X_{i_1}, \ldots, X_{i_{p-1}}).$$

2.5. Observação. É imediato verificar que a definição acima não depende da base escolhidas como também verifica 1.7. Também, para $p = 0$, temos a definição anterior (a menos de dualidade).

2.6. Definição. Definimos o *codiferencial* $\delta : \Omega^p(M) \to \Omega^{(p-1)}(M)$ como o oposto do operador div. Uma forma cujo codiferencial é zero, é dita *cofechada.*.

2.7. Definição. O operador Laplace-Beltrami é definido por

$$\Delta \colon \Omega^p(M) \longrightarrow \Omega^p(M), \qquad \Delta(\omega) = (d\delta + \delta d)\omega.$$

Uma forma ω tal que $\Delta\omega = 0$, será dita *harmônica.*

Suponha agora que M é orientada e seja $* \colon \Omega^p(M) \to \Omega^{n-p}(M)$ o operador de Hodge.

2.8. Proposição. $\operatorname{div} \omega = (-1)^{n(p-1)} * d * \omega \quad \forall \omega \in \Omega^p(M)$.

Demonstração. Considerando $\{X_1, \ldots, X_n\}$ uma base positiva ortonormal de T_pM e estendendo ao campo local de forma que $(\nabla_{X_i}X_j)(p) = 0$ temos

$$\begin{aligned}(*\operatorname{div}\omega)(X_1, \ldots, X_{n-p+1}) &= \sum_{k=1}^{n}(\nabla_{X_k}\omega)(X_k, X_{n-p+2}, \ldots, X_n) \\ &= \sum_{k=1}^{n-p+1}(\nabla_{X_k}\omega)(X_k, X_{n-p+2}, \ldots, X_n)\end{aligned}$$

Por outro lado, exceto pelos termos que se anulam em p (veja 1.4), temos

$$\begin{aligned}(d*\omega)(X_1, \ldots, X_{n-p+1}) &= \sum_{k=1}^{n-p+1}(-1)^{k+1}\nabla_{X_k}(*\omega)(X_1, \ldots, \hat{X}_k, \ldots, X_{n-p+1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n-p+1}(-1)^{k+1+n-p+1-k}X_k \cdot \omega(X_k, X_{n-p+2}, \ldots, X_n).\end{aligned}$$

Logo, $*\operatorname{div}\omega = (-1)^{n-p}d{*}\omega$. Assim, aplicando $*$ em ambos os lados, obtemos o resultado.

□

2.9. Observação. Em princípio, para fazer sentido ao enunciado da proposição anterior deveríamos supor que M seja orientada, para o operador de Hodge ser definido. Porém observamos que dito operador aparece duas vezes, portanto o resultado não depende da escolha da orientação em cada espaço tangente.

Seja M uma variedade compacta. Em $\Omega^p(M)$ definimos o produto interno L^2 integrando o produto interno pontual com respeito a densidade de volume riemanniana:

$$(\omega_1, \omega_2) = \int_M \langle\omega_1(x), \omega_2(x)\rangle dV,$$

onde $\langle\omega_1(x), \omega_2(x)\rangle$ é o produto escalar induzido em $\Lambda^p(T_xM)$. Observamos que $(\cdot, \cdot)$ é uma forma bilinear simétrica e positiva definida e logo induz, de fato, uma estrutura de espaço pré-Hilbertiano em $\Omega^p(M)$.

Se M é orientada, podemos escrever o produto interno em termos de integração de n-formas e o operador de Hodge:

$$(\omega_1, \omega_2) = \int_M \omega_1 \wedge *\omega_2.$$

Pelo restante desta seção, vamos supor que M é uma variedade compacta.

2.10. Proposição. Para todo $\omega \in \Omega^{p-1}(M), \tau \in \Omega^p(M)$ temos

$$(d\omega, \tau) = (\omega, \delta\tau).$$

Em particular $(\Delta\omega_1, \omega_2) = (\omega_1, \Delta\omega_2)$, para todo $\omega_1, \omega_2 \in \Omega^p(M)$, i.e., Δ é autoadjunto.

DEMONSTRAÇÃO. Observamos que $\mathrm{d} * \tau \in \Omega^{(n-p+1)}(M)$. Portanto:

$$\mathrm{d} * \tau = (-1)^{(p-1)(n-p+1)} * * \mathrm{d} * \tau = (-1)^{(p-1)(n-p+1)+n(p-1)+1} * \delta\tau = (-1)^{(p-1)^2+1} * \delta\tau.$$

Então:

$$\mathrm{d}\omega \wedge *\tau = \mathrm{d}\omega \wedge *\tau + (-1)^{(p-1)}\omega \wedge \mathrm{d} * \tau = \mathrm{d}\omega \wedge *\tau - \omega \wedge *\delta\tau.$$

Integrando, e usando o teorema de Stokes, temos:

$$0 = \int \mathrm{d}(\omega \wedge *\tau) = \int \mathrm{d}\omega \wedge *\tau - \omega \wedge *\delta\tau = (\mathrm{d}\omega, \tau) - (\omega, \delta\tau).$$

□

2.11. COROLÁRIO. Em uma variedade compacta, uma forma ω é harmônica se, e só se, é fechada e cofechada.

DEMONSTRAÇÃO. É claro, da definição, que se $\mathrm{d}\omega = 0$ e $\delta\omega = 0$, então $\Delta\omega = 0$. Por outro lado, se $\Delta\omega = 0$ temos

$$0 = (\Delta\omega, \omega) = (\mathrm{d}\delta\omega, \omega) + (\delta\mathrm{d}\omega, \omega) = (\mathrm{d}\omega, \mathrm{d}\omega) + (\delta\omega, \delta\omega) = \|\mathrm{d}\omega\|^2 + \|\delta\omega\|^2.$$

portanto ω é fechada e cofechada. □

2.12. OBSERVAÇÃO. Se M não é compacta, uma forma fechada e cofechada é ainda uma forma harmônica, mas uma forma harmônica não é, necessariamente fechada e cofechada. Por exemplo a função (0-forma) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$, é harmônica mas não é fechada.

2.13. COROLÁRIO (Lema de Hopf). Se $f \in \Lambda^0(M)$ então $\int_M (\Delta f) * 1 = 0$. Em particular se $\Delta f \geq 0$ então $\Delta f \equiv 0$ e f é constante.

DEMONSTRAÇÃO.

$$\int_M (\Delta f) * 1 = (\Delta f, 1) = (f, \Delta 1) = 0.$$

Portanto se $\Delta f \geq 0$, f é harmônica e portanto constante, pois M é compacta e formas harmônicas são fechadas. □

3. O teorema de Hodge

Seja M uma variedade compacta e orientada[1]. Denotaremos com $\mathbb{H}^p(M)$ o espaço das p-formas harmônicas.

3.1. Observação. Observamos que, obviamente, $\mathbb{H}^p(M)$ é um espaço vetorial real, pois Δ é um operador linear. Porém o produto wedge de formas harmônicas não é, em geral, uma forma harmônica e portanto $\oplus_{p\geq 0}\mathbb{H}^p(M)$ não é uma álgebra graduada (em relação ao produto exterior).

Nesta seção vamos discutir o Teorema de Hodge que relaciona o espaço $\mathbb{H}^p(M)$ com a cohomologia de de Rham de M.

Sendo M compacta, uma forma harmônica é fechada e com isso determina uma classe de cohomologia de de Rham. Temos então uma aplicação

$$h_p : \mathbb{H}^p(M) \longrightarrow H^p_{dR}(M), \qquad h_p(\omega) = [\omega] \in H^p_{dR}(M).$$

3.2. Proposição. Uma forma fechada é harmônica se, e somente se, minimiza a função $g(\tau) = (\tau, \tau) = \|\tau\|^2$, na sua classe de cohomologia $[\omega] = \{\omega + \mathrm{d}\beta : \beta \in \Omega^{(p-1)}(M)\}$.

Demonstração. Seja $\omega \in \Omega^p(M)$ uma forma fechada. Se $\beta \in \Omega^{(p-1)}(M)$, definimos:

$$g_\beta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad g_\beta(t) = (\omega + t\mathrm{d}\beta, \omega + t\mathrm{d}\beta) = \|\omega + \mathrm{d}\beta\|^2.$$

Temos então:

$$\frac{\mathrm{d}g_\beta}{\mathrm{d}t}(0) = 2(\omega, \mathrm{d}\beta) = 2(\delta\omega, \beta).$$

Se ω é um mínimo da função g na sua classe de cohomologia, $\frac{\mathrm{d}g_\beta}{\mathrm{d}t}(0) = 0,\ \forall \beta \in \Omega^{(p-1)}(M)$ e, portanto $\frac{\mathrm{d}g_\beta}{\mathrm{d}t}(0) = 2(\delta\omega, \beta) = 0\ \forall \beta \in \Omega^{(p-1)}(M)$. Em particular $\delta\omega = 0$ e ω é cofechada. Suponha agora ω cofechada. Então ω é ponto crítico da função g em $[\omega]$. Mas $[\omega]$ é um subespaço afim de um espaço pré-hilbertiano e portanto g tem, no máximo um ponto crítico, o (possível) mínimo de g em $[\omega]$. □

3.3. Corolário. A aplicação $h_p : \mathbb{H}^p(M) \longrightarrow H^p_{dR}(M)$ é injetora.

Demonstração. Como observado na demonstração de 3.2, em cada classe de cohomologia existe no máximo, um representante harmônico. □

3.4. Corolário. $\mathbb{H}^p(M)$ tem dimensão finita.

[1] A orientabilidade não será necessária para a maioria das considerações, mas evitará a necessidade de comentários especiais em algum caso.

Demonstração. Segue do fato que, sendo M compacta, $H^p_{dR}(M)$ tem dimensão finita (veja 3.5). $\square$

3.5. Observação. Do fato que $\mathbb{H}^p(M)$ tem dimensão finita, segue que $\mathbb{H}^p(M)$ é fechado e temos uma decomposição ortogonal:

$$\Omega^p(M) = \mathbb{H}^p(M) \oplus \mathbb{H}^p(M)^{\perp}.$$

Além disso, $\Delta(\Omega^p(M)) \subseteq \mathbb{H}^p(M)^{\perp}$, como segue imediatamente do fato que Δ é um operador auto-adjunto (veja 2.10).

O resultado a seguir, cuja demonstração contém todas as dificuldades analíticas do problema e omitiremos, generaliza um fato bem simples de álgebra linear: Se $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é un operador linear auto-adjunto e $y \in \mathbb{R}^n$, a equação $Ax = y$ tem soluções se e somente se $y \in Ker(A)^{\perp}$.

3.6. Teorema. Se $\beta \in \Omega^p(M)$, a equação $\Delta\alpha = \beta$ tem uma solução $\alpha \in \Omega^p(M)$ se, e somente se, $\beta \in \mathbb{H}^p(M)^{\perp}$.

Temos então a seguinte conseqüência importante:

3.7. Corolário. [Teorema de decomposição de Hodge]

$$\Omega^p(M) = \mathbb{H}^p(M) \oplus \Delta(\Omega^p(M)) = \mathbb{H}^p(M) \oplus \delta(\Omega^{(p+1)}(M)) \oplus \mathrm{d}(\Omega^{(p-1)}(M)).$$

Demonstração. 3.6 implica $\Delta(\Omega^p(M)) = \mathbb{H}^p(M)^{\perp}$ (veja 3.5) e o resultado segue de 3.5. $\square$

3.8. Corolário. [Isomorfismo de Hodge] A aplicação $h_p : \mathbb{H}^p(M) \longrightarrow H^p_{dR}(M)$ é um isomorfismo.

Demonstração. Se ω é uma forma fechada, $(\omega, \delta\beta) = 0,\ \forall \beta \in \Omega^{(p+1)}(M)$. Em particular, por 3.7, $\omega = \omega_H + \mathrm{d}\beta,\ \omega_H \in \mathbb{H}^p(M),\ \beta \in \Omega^{(p-1)}(M)$. Portanto $[\omega] = [\omega_H] = h_p(\omega_H)$. $\square$

Uma aplicação interessante desse teorema é uma rápida demonstração do teorema de dualidade de Poincaré.

3.9. Teorema. Se M é uma variedade riemanniana n-dimensional, compacta e orientada. Então:

$$P_p : \mathbb{H}^p(M) \longrightarrow \mathbb{H}^{(n-p)}(M), \qquad P(\omega) = *\omega,$$

é bem definida e é um isomorfismo.

DEMONSTRAÇÃO. De 2.8 temos que uma forma ω é fechada (respectivamente cofechada) se e somente se $*\omega$ é cofechada (respectivamente fechada)[2]. Portanto se $\omega \in \mathbb{H}^p(M)$, $*\omega \in \mathbb{H}^{(n-p)}(M)$. Portanto P_p é bem definida e, a menos do sinal, $P_p^{-1} = P_{(n-p)}$. □

[2]Mais em geral é fácil mostrar que $*$ comuta com Δ e portanto ω é harmônica se, e somente se, $*\omega$ é harmônica.

CAPíTULO 5

Formas intrinsecamente harmônicas

1. Teoria local

Seja M uma variedade diferenciável e ω uma p-forma fechada. Temos visto, no capítulo anterior, que dada uma métrica riemanniana em M[1] existe uma, e uma só, forma harmônica ω_H na sua classe de cohomologia, tal que $\omega - \omega_H = \mathrm{d}\beta$. Uma pergunta natural, à qual tentaremos dar algumas respostas parciais neste capítulo, é a seguinte:

Dada uma p-forma fechada ω, existe uma métrica riemanniana em relação a qual ω é harmônica?

1.1. Definição. Diremos que uma forma fechada $\omega \in \Omega^p(M)$ é *intrinsecamente harmônica*, se existir uma métrica riemanniana em relação a qual ω é harmônica.

Vamos começar com alguns casos simples:

- Se $[\omega] = 0 \in H^p(M)$, ω não pode ser intrinsecamente harmônica, a menos que seja a forma nula. De fato, para qualquer métrica a forma nula é harmônica e portanto é o (único) representante harmônico da classe nula.
- Se $\omega \in \Omega^0(M) = \mathcal{F}(M)$, é fechada, então $\omega : M \to \mathbb{R}$ é localmente constante e portanto harmônica em qualquer métrica.
- Seja M uma variedade conexa orientada e $\omega \in \Omega^n(M)$, $n = dim M$. Então ω é obviamente fechada e é cofechada em relação a uma métrica g se e somente se $*_g\omega$ é fechada, portanto constante. Aqui $*_g$ é o operador de Hodge associado à métrica g. Em particular, se ω é harmônica em relação a alguma métrica, ou ω é identicamente nula, ou $\omega \neq 0$ $\forall x \in M$. Suponha agora $\omega(x) \neq 0$ $\forall x \in M$. Definimos uma métrica declarando uma base $\{e_1, \dots, e_n\} \subset T_xM$ ortonormal se

[1]Na realidade, para ser coerente com a nomenclatura do capítulo anterior, deveríamos dizer: existe uma realização de M como variedade em algum $\mathbb{R}^N$ tal que... .Um famoso teorema de Nash garante que dada uma variedade M e um produto escalar em cada espaço tangente, que depende diferenciavelmente do ponto, i.e., uma métrica riemanniana, existe uma realização de M em $\mathbb{R}^N$, para N suficientemente grande, na qual o produto escalar é o produto induzido pelo produto de $\mathbb{R}^N$.

$\omega(e_1, \ldots, e_n) = 1$. Tais bases certamente existem pois $\omega(x) \neq 0$. Em relação a esta métrica, $*\omega(x) = 1$ $\forall x \in M$ e portanto ω é harmônica.

O caso das 1-formas é não trivial. Discutiremos aqui uma caracterização das 1-formas *genéricas* (veja definição 1.3) intrinsecamente harmônicas, devida a E. Calabi.

Pelo restante desta seção ω denotará uma 1-forma fechada.

Começamos com algumas considerações locais.

Seja $U \subseteq M$ um aberto difeomorfo a um disco, em particular contrátil. Portanto $H^1(U) = \{0\}$ e existe $f : U \to \mathbb{R}$ tal que $\omega = \mathrm{d}f$ em U. Então:

$$\delta\omega = \delta \mathrm{d} f = \Delta f.$$

Portanto ω é cofechada se e somente se f é harmônica.

Observamos explicitamente que f é definida a menos de uma constante aditiva.

Seja $U \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto difeomorfo a um disco e $\psi : U \to M$ uma carta local e $g_{ij}(x) = \langle \psi_{x_i}, \psi_{x_j} \rangle$. A condição que f seja harmônica equivale a condição que a função $f \circ \psi := f(x_1, \ldots, x_n)$ verifique a equação:

$$\Delta_{\mathtt{g}} f = -\sum_{i,j=1}^{n} (\det\ \mathtt{g})^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial x_i}\left((\det\ \mathtt{g})^{\frac{1}{2}} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) = 0 \tag{6}$$

onde $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1} = \mathtt{g}^{-1}$.

1.2. Observação. Se $g_{ij} = \delta_{ij}$ a equação 6 reduz a usual:

$$\Delta f = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

A equação 6 pode ser vista de duas maneiras diferentes

- Fixada a métrica g é uma equação da segunda ordem, não linear, elíptica em f. Este é o ponto de vista do estudo das funções harmônicas em variedades riemannianas.
- Fixada a função f temos uma equação (sistema) diferencial linear homogênea de primeira ordem, na função matricial $G^{ij} = (\det\ \mathtt{g})^{\frac{1}{2}} (g_{ij})^{-1}$, sub-determinada. Este é, na realidade, o nosso ponto de vista: Dada f (ou ω) determinar g tal que 6 seja satisfeita.

Vamos comentar algumas conseqüências de 6:

- Se f é harmônica em alguma métrica, sendo solução de uma equação elíptica, satisfaz o *Princípio do Máximo*: Se f não é constante, f não tem máximos (ou mínimos) locais no interior do domínio de definição (veja []).

- Sendo o sistema 6 sub-determinado, podemos esperar existência de soluções a menos de obstruções óbvias, como, por exemplo, o princípio do máximo.

1.3. Definição. Diremos que uma forma fechada $\omega \in \Omega^1(M)$ é *genérica* se para todo $p \in M$ tal que $\omega(p) = 0$, a função f tem, em p, um ponto crítico não degenerado, i.e., sua hessiana em p é não singular.

Temos o seguintes fatos bem conhecidos:

1.4. Teorema.

- Teorema da função implícita: Se $\omega(p) \neq 0$, existe uma uma vizinhança de p e uma carta local $\psi : U \subseteq \mathbb{R}^n \to M$ tal que $\psi(0) = p$ e $f(x_1, \dots, x_n) := f \circ \psi(x_1, \dots x_n) = f(p) + x_1$.
- Lema de Morse: Se p é um ponto crítico não degenerado de f, existe uma uma vizinhança de p e uma carta local $\psi : U \subseteq \mathbb{R}^n \to M$ tal que $\psi(0) = p$ e:

$$f(x_1, \dots, x_n) := f \circ \psi(x_1, \dots, x_n) = f(p) - \sum_{i=1}^{\lambda} a_i^2 x_i^2 + \sum_{j=\lambda+1}^{n} b_j^2 x_j^2,$$

  onde $a_i,\ b_j$ são constantes arbitrárias (fixadas) não nulas .

No segundo caso o número λ chama-se de *índice de* f *em* p, ou também *índice de* ω *em* p e será denotado com $index(f, p)$ ou $index(\omega, p)$. É simples ver que o índice não depende da representação local de f, i.e., é o mesmo para qualquer carta local com as propriedades acima. Em particular os zeros de ω são isolados.

A este ponto podemos demonstrar o esperado resultado local:

1.5. Teorema. Uma 1-forma fechada genérica é *localmente* intrinsecamente harmônica[2] se, e somente se, seus zeros tem índice $\neq 0, n$.

Demonstração. Se ω é intrinsecamente harmônica, pelo princípio do máximo, seus zeros não podem ter índice 0 ou n. Vamos supor que os zeros de ω não tenham índices 0, n.

Seja $p \in M$ tal $\omega(p) \neq 0$. Então, por 1.4, em uma vizinhança de p, $f(x_1, \dots, x_n) = f(p) + x_1$ e f é harmônica em relação a métrica $g_{ij} = \delta_{ij}$ (veja 1.2).

[2]Uma forma fechada é localmente intrinsecamente harmônica se para cada ponto $p \in M$ existe uma vizinhança U de p e uma métrica riemanniana g em U tal que a forma, restrita a U, é cofechada em relação à g.

Seja p um ponto crítico de índice $\lambda \neq 0, n$. Então por 1.4, em uma vizinhança de p,

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f(p) - \frac{(n-\lambda)}{2} \sum_{i=1}^{\lambda} x_i^2 + \frac{\lambda}{2} \sum_{j=\lambda+1}^{n} x_i^2.$$

Portanto, de novo, f é harmônica em relação a métrica $g_{ij} = \delta_{ij}$ (veja 1.2). □

Desta proposição surge a questão se tais condições são suficientes para a existência de uma métrica riemanniana (global) em M com respeito a qual ω é co-fechada. Em geral isso não é verdade como mostra o exemplo a seguir:

1.6. Exemplo. Considere, no espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$, os dois círculos unitários definidos, respectivamente, por $\{x^2 + y^2 = 1; z = 1\}$ e $\{x^2 + y^2 = 1; z = -1\}$ em coordenadas cartesianas. Una-os com um arco de uma hélice circular, dada em termos de um parâmetro t por $\{x = \cos \pi t, y = \operatorname{sen} \pi t, z = t; -1 \leq t \leq 1\}$. Imagine agora uma vizinhança tubular da figura resultante, com a fronteira suavizada em suas duas junções em "Y".

A superfície M assim obtida é compacta, difeomorfa a um bi-toro, e não intercepta o eixo z, $\{x = y = 0\}$. Fixamos um semiplano π_0 que contém o eixo z como fronteira. Para cada $x \in M$ existe um único semiplano π_x que contém o eixo z como fronteira e o ponto x. Seja $\theta(x)$ o ângulo entre π_0 e π_x. A função θ é definida a menos de um múltiplo constante de 2π e diferenciável em uma vizinhança U_x de x. Em particular, a forma $\omega_x = \mathrm{d}\theta$ é bem definida nesta vizinhança e diferenciável. Dadas duas tais vizinhanças, U_x, U_y, temos $\omega_x = \omega_y$ em $U_x \cap U_y$. Portanto ω é uma 1-forma diferenciável globalmente definida em M. Além disso, sendo, localmente, $\omega = \mathrm{d}\theta$ segue que $\mathrm{d}\omega = 0$, i.e., ω é fechada. ω possui exatamente dois zeros, ambos não degenerados, de índice 1, um em cada uma das bifurcações das junções em "Y". Portanto ω satisfaz as condições do Teorema 1.5.

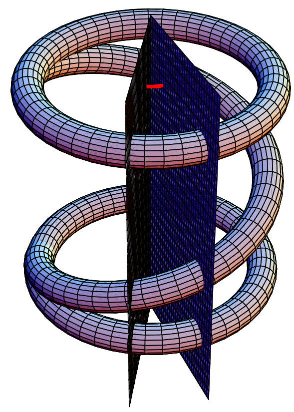

Fig. 1. Superfície M, com π_0 e π_x. A função θ mede o ângulo entre os dois planos.

Vamos mostrar que, para qualquer métrica riemanniana g, ω não pode ser co-fechada em relação a g. Fixamos uma tal métrica. Então ω é co-fechada se, e somente se, $*\omega$ é fechada. Vamos supor $*\omega$ fechada e mostrar que isto nos leva a uma contradição. Fixamos um semiplano π que contém o eixo z, como fronteira mas "longe" das as singularidades de

ω. Então π intercepta M em três curvas fechadas, uma contida no "toro superior", uma contida no "toro inferior" e uma terceira, γ contida no tubo que conecta os dois toros. O complementar de γ tem duas componentes conexas, T^+, T^- que contém, respectivamente, o "toro superior" e o "toro inferior", e $\gamma = \partial T^\pm$. T^+ é relativamente compacta e portanto, pelo teorema de Stokes[3]:

$$\int_\gamma *\omega = \int_{T^+} \mathrm{d} * \omega = 0,$$

tendo orientado T^+ e γ coerentemente. Parametrizando regularmente[4] $\gamma\colon [0,1] \to M$, temos:

$$\int_\gamma *\omega = \int_0^1 *\omega(\dot\gamma(t))dt = \int_0^1 \omega(*\dot\gamma(t))dt,$$

onde $*\dot\gamma(t)$ é o vetor normal a $\dot\gamma(t)$ em relação a métrica fixada, da mesma norma e tal que $\{*\dot\gamma(t), \dot\gamma(t)\}$ é uma base positiva. Observamos agora que $\omega(\dot\gamma(t)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\theta(\gamma(t)) = 0$, pois θ é constante ao longo de γ. Além disso, γ não contém zeros de ω e portanto $\omega(*\dot\gamma(t)) \neq 0$, para todo $t \in [0,1]$. Pela conexidade de $[0,1]$, $\omega(*\dot\gamma(t))$ tem sempre o mesmo sinal e portanto

$$\int_0^1 \omega(*\dot\gamma(t)) \neq 0,$$

o que nos dá uma contradição.

2. Formas transitivas e o teorema de Calabi

Vamos agora estudar condições que nos garantem que, dada uma 1-forma fechada ω, podemos colar métricas locais nas quais ω é co-fechada e obter uma métrica global com a mesma propriedade.

2.1. Definição. Seja M uma variedade diferenciável e ω uma 1-forma fechada. Fixamos $p \in M$. Definimos:

- $C^+_\omega(p) = \{q \in M :$ existe uma curva diferenciavel $\gamma : [0,1] \to M$ tal que $\gamma(0) = p,\ \gamma(1) = q,\ \omega(\dot\gamma(t)) > 0,\ \forall\, t \in (0,1]\}$.
- $C^-_\omega(p) = \{q \in M :$ existe uma curva diferenciavel $\gamma : [0,1] \to M$ tal que $\gamma(0) = p,\ \gamma(1) = q,\ \omega(\dot\gamma(t)) < 0,\ \forall\, t \in (0,1]\}$.

[3] T^+ é uma "variedade com bordo" e portanto, por resultados de topologia diferencial, pode ser "triangulada", i.e., dividida em conjuntos difeomorfos ao simplexo padrão Δ^n de tal modo que o conjuntos das faces destes simplexos tem a seguinte propriedade: ou a interseção de duas faces é vazia ou é uma face comum aos dois simplexos. Podemos então aplicar o teorema de Stokes, na forma dos capítulos anteriores.

[4] Isso significa $\dot\gamma(t) \neq 0$.

O conjunto $C^+_\omega(p)$ (respectivamente $C^-_\omega(p)$) será chamado o *futuro* (respectivamente o *passado*) de p e diremos que ω é *transitiva* se, para todo $p \in M$, o futuro e o passado de p são densos.

2.2. Observação. Observamos que se uma curva $\gamma : [0,1] \to M$ não tem auto-interseções, existe uma vizinhança U de $\gamma([0,1])$ que é contrátil (vizinhança tubular por exemplo). Nesta vizinhança, se ω é uma 1-forma fechada, ω é exata e portanto $\omega = \mathrm{d}f,\ f : U \to \mathbb{R}$. Agora $\omega(\dot\gamma) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\gamma(t))$. Portanto $\omega(\dot\gamma) > 0$, é equivalente ao fato da função $f \circ \gamma$ ser estritamente crescente em $(0,1]$.

2.3. Observação. A forma ω construída em 1.6 não é transitiva pois ao longo de curvas que unem um ponto no "toro superior"a um ponto do "toro inferior", a função θ tem que crescer e decrescer necessariamente.

A Proposição a seguir nos dá informações sobre o futuro e passado de um ponto:

2.4. Proposição. Seja M variedade diferenciável e ω uma 1-forma fechada.

(1) Para cada ponto $p \in X$ o futuro e o passado de p são abertos conexos em M.
(2) A fronteira do futuro e do passado de p consiste de pontos onde ω se anula e de hipersuperfícies integrais da distribuição *ker* ω [5].

Demonstração. Começamos observando que se $q \in C^+_\omega(p),\ \omega(q) \neq 0$. De fato, se $\omega(q) = 0$ e $\gamma : [0,1] \to M\ \gamma(1) = q$, então ω não pode ser positiva em $\dot\gamma(1)$. Isso vale, em particular para p. É claro também que $C^+_\omega(p)$ é conexos por caminhos pois todo ponto em $C^+_\omega(p)$ pode ser conectado a p por uma curva em $C^+_\omega(p)$. Vamos mostrar que $C^+_\omega(p)$ é aberto. Seja $q \in C^+_\omega(p)$. Como observado anteriormente, $\omega(q) \neq 0$. Existe então um sistema de coordenadas $(x_1, \dots, x_n)$ em uma vizinhança de q tal que $x_i(q) = 0, i = 1, \dots, n$ e $\omega = \mathrm{d}x_1$. Seja $\gamma : [0,1] \to M$ uma curva juntando p e q ao longo da qual ω é positiva. Em particular, perto de 1,γ está contida na vizinhança coordenada e $x_1(\gamma(t)) < 0$ pois $x_1(\gamma(t))$ é crescente e nulo quando $t = 1$. Fixamos então um tal t_0. Se q' é suficientemente próximo de q, x_1 é crescente ao longo do segmento σ que une $\gamma(t_0)$ a q'. Juntando $\gamma|_{[0,t_0]}$ com σ e suavizando a quina em t_0 se obtém uma curva diferenciável entre p e q' ao longo da qual ω é positiva.

Vamos agora considerar um ponto q da fronteira de $C^+_\omega(p)$. Se $\omega(q) \neq 0$, podemos considerar em uma vizinhança U de q um sistema de coordenadas locais como acima. Então

[5]Lembramos que uma hipersuperfície $\Sigma \subseteq M$ é uma hipersuperfície integral de *ker* ω se para todo $q \in \Sigma,\ T_q\Sigma = Ker\ \omega(q)$. O fato da forma ω ser fechada garante que no aberto onde $\omega \neq 0$, *ker* ω tem dimensão $(n-1)$ e que para qualquer ponto deste aberto passa uma hipersuperfície integral de *ker* ω (Teorema de Frobenius).

pelo mesmo argumento usado anteriormente, $C_\omega^+(p) \cap U = \{(x_1, \ldots, x_n) \in U : x_1 < 0\}$ e portanto sua fronteira é dada pela interseção de U com o hiperplano $x_1 = 0$ que é, de fato uma hipersuperfície integral de $ker\ \omega$ (pois $\omega = \mathrm{d}x_1$). □

Nos lemas a seguir ω será uma 1-forma fechada, transitiva e genérica. Primeiramente vamos mostrar que as condições para que ω seja localmente intrinsecamente harmônica são verificadas.

2.5. Lema. *Se $\omega(p) = 0$, $index(\omega, p) \neq 0, n$.*

Demonstração. Suponha $index(\omega, p) = 0$. Em coordenadas locais, em uma vizinhança de p, $\omega = \mathrm{d}f$, $f = \sum_1^n x_i^2$. Portanto f não pode decrescer ao longo de uma curva que sai de p. Portanto $C_\omega^-(p)$, é vazio. Analogamente, se $index(\omega, p) = n$, $C_\omega^+(p) = \emptyset$. □

A próxima propriedade é, como veremos, equivalente à transitividade.

2.6. Lema. *Para cada ponto $p \in M$ tal que $\omega(p) \neq 0$, passa um caminho γ simples, diferenciável e fechado ao longo do qual ω é estritamente positiva.*

Demonstração. Uma vez que $C_\omega^+(p)$ e $C_\omega^-(p)$ são ambos abertos e densos, então a intersecção também o é. Seja q um ponto na intersecção. Então, como ω não se anula em p e nem em q, existem caminhos orientados γ_1 de p a q e γ_2 de q a p, ao longo dos quais ω é estritamente positivo, incluindo os pontos finais. Suavizando o caminho composto fechado, obtemos um caminho diferenciável fechado, ainda passando por p. Assim, para obter um caminho simples a partir deste, caso ele não seja, seja q' a primeira auto-intersecção do caminho orientado fechado, logo após p, correspondente ao valor t_1 de um parâmetro global, seja $t_2 > t_1$ o último valor do parâmetro antes do caminho se fechar, em q'. Desprezando o segmento entre t_1 e t_2 obtemos novamente um caminho fechado com uma possível descontinuidade da tangente em q'. Este caminho pode ser novamente suavizado em torno de q', sem criar novos pontos de intersecção. A eliminação dos pontos de intersecção requer a repetição deste processo, induzindo, no fim, um caminho simples, fechado e orientado que passa por p e que $\omega > 0$. □

Estamos agora em condições de provar o resultado principal deste trabalho:

2.7. Teorema. *Seja $\omega \in \Omega^1(M)$ uma forma fechada, genérica e transitiva. Existe então uma métrica riemanniana g em M tal que ω é cofechada (em relação a g).*

Demonstração. A estratégia da demonstração será achar uma forma *fechada* $\psi \in \Omega^{(n-1)}(M)$ e uma métrica riemanniana em M tal que $\psi = *\omega$. Sendo ψ fechada, ω será cofechada e portanto harmônica nesta métrica. Isso será feito em dois passos:

- Uma "boa" ψ determina uma métrica tal que $\psi = *\omega$. Este fato não depende da transitividade de ω.
- Se ω é transitiva, então existe uma "boa" ψ. Neste passo usaremos a transitividade na forma do lema 2.6.

O próximo lema toma conta do primeiro passo:

2.8. Lema. *Suponha exista uma forma $\psi \in \Omega^{(n-1)}(M)$ tal que:*

(1) *Se $\omega(p) \neq 0$, $\omega \wedge \psi(p) > 0$*[6].

(2) *Se $\omega(p) = 0$, existe uma métrica riemanniana g_p em uma vizinhança U_p de p, tal que $\psi = *_{g_p}\omega$.*

Então existe uma métrica riemanniana g em M, tal que $\psi = *_g\omega$.

Demonstração. Suponhamos $n = 2$. Sejam $p_1, \ldots, p_k$ os zeros de ω, e U_i, V_i vizinhanças de p_i tais que:

(1) $\overline{V_i} \subseteq U_i$, $U_i \cap U_j = \emptyset, i \neq j$.

(2) Em cada U_i existe uma métrica g_{p_i} tal que $\psi = *_{g_{p_i}}$, em U_i.

Seja $U = \cup U_i$, $V = M \setminus \cup\overline{V_i}$, e $\{\phi_0, \phi_1\}$ uma partição da unidade dominada pelo recobrimento $\{U, V\}$. Em U temos uma métrica riemanniana g_0 tal que $\psi = *_{g_0}\omega$. Em V consideramos o tensor:

$$g_1 = \omega \otimes \omega + \psi \otimes \psi.$$

Claramente g_1 é um tensor simétrico. Além disso, se $X \neq 0$ for um vetor tal que $g_1(X,X) = 0$, teríamos $\omega(X)^2 + \psi(X)^2 = 0$ e portanto $X \in Ker\ \omega \cap Ker\ \psi$. Se Y é um vetor linearmente independente com X, teríamos $\omega \wedge \psi(X,Y) = \omega(X)\psi(Y) - \omega(Y)\psi(X) = 0$, contradizendo o fato que $\omega \wedge \psi > 0$ em V. Então g_1 é definido positivo e portanto é uma métrica riemanniana em V. Observamos que ω e ψ são linearmente independentes em V pois, como já observamos, a intersecção dos núcleos é trivial. Se $\{e_1, e_2\}$ é a base dual de $\{\omega, \psi\}$, $\{e_1, e_2\}$ é g_1-ortonormal. Em particular $*_{g_1}\omega = \pm\psi$.

Consideramos então a métrica riemanniana:

$$g = \phi_0\ g_0 + \phi_1\ g_1.$$

[6] Isso significa que $\omega \wedge \psi$ é positiva quando calculada em uma base positiva de T_pM.

g é globalmente definida em M e é imediato verificar que $\{\omega, \psi\}$ é uma base ortonormal em $M \setminus \{p_1, \ldots, p_k\}$. Portanto $\psi = \pm *_g \omega$. Mas o complementar dos zeros de ω é conexo e $\omega \wedge \psi \neq 0$ neste conjunto e $\omega \wedge \psi > 0$ em um subconjunto não vazio. Em particular $\omega \wedge \psi > 0$ no complementar dos zeros de ω e portanto $\psi = *_g \omega$.

Vamos agora estudar o caso $n \geq 3$. O argumento que usaremos não se aplica ao caso $n = 2$, como veremos, e tem aspectos interessantes em si mesmo. Usaremos também, sem maiores comentários, alguns fatos básicos da teoria dos fibrados.

Vamos começar com um fato de álgebra multilinear. Seja $\mathbb{E}$ um espaço vetorial orientado. Consideramos o espaço vetorial $\mathbf{H}(\mathbb{E}) = Hom(\Lambda^1(\mathbb{E}), \Lambda^{(n-1)}(\mathbb{E}))$. Consideramos o subespaço dos operadores "simétricos":

$$\mathbf{H}_s(\mathbb{E}) = \{\tau \in \mathbf{H} : \ \forall\, \beta, \gamma \in \Lambda^1(\mathbb{E}),\ \beta \wedge \tau(\gamma) = \gamma \wedge \tau(\beta)\},$$

e o convexo dos operadores "positivos":

$$\mathbf{H}_s^+(\mathbb{E}) = \{\tau \in \mathbf{H}_s : \ \forall\, \beta \in \Lambda^1(\mathbb{E}),\ \beta \wedge \tau(\beta) > 0\}.$$

Seja

$$S(\mathbb{E}) = \{g \in T^{(0,2)}(\mathbb{E}) : g \text{ é simetrico e } g(X, X) > 0,\ \forall X \neq 0\},$$

o convexo dos produtos escalares em $T^{(0,2)}(\mathbb{E})$. Temos então uma aplicação natural:

$$St : S(\mathbb{E}) \longrightarrow \mathbf{H}_s^+(\mathbb{E}) \qquad St(g) = *_g,$$

$*_g$ sendo, como antes, o operador estrela de Hodge associado a g.

Afirmação: Se $n = dim\mathbb{E} \geq 3$ então St é uma bijeção.[7]

Demonstração. Fixamos uma base positiva $\{e_1, \ldots e_n\}$ de $\mathbb{E}$ e a base dual $\{\omega_1, \ldots \omega_n\}$ em $\mathbb{E}^* = \Lambda^1(\mathbb{E})$. Dado um produto escalar g em $\mathbb{E}$ denotamos com o mesmo símbolo a matriz que representa g na base fixada, i.e., $g = (g_{ij}) := (g(e_i, e_j))$ e com $g^{-1} := (g^{ij})$ a matriz inversa. Se $\beta = \sum b_i \omega_i \in \Lambda^1(\mathbb{E})$, $\|\beta\|^2 = \sum_{i,j} g^{ij} b_i b_j$ e, por 1.12:

$$*_g \beta = (\ \det(g))^{\frac{1}{2}} \sum_{k,i=1,\ldots,n} (-1)^{(k+1)} g^{ik}\ b_i\ \omega_1 \wedge \cdots \wedge \hat{\omega_k} \wedge \cdots \wedge \omega_n.$$

De outro lado um morfismo $\tau : \Lambda^1 \to \Lambda^{(n-1)}$ é representado por:

$$\tau(\beta) = \sum_{k,i=1,\ldots n} (-1)^{(k+1)} G^{ik}\ b_i\ \omega_1 \wedge \cdots \wedge \hat{\omega_k} \wedge \cdots \wedge \omega_n,$$

[7] A afirmação não pode ser verdadeira se $n = 2$. De fato se $\mathbb{E}$ é um espaço de dimensão $2k$, $* : \Lambda^k(\mathbb{E}) \to \Lambda^k(\mathbb{E})$ é invariante conforme, i.e., duas métricas que diferem por uma constante induzem o mesmo operador estrela em dimensão k.

onde a matriz $G = (G^{ij})$ é simétrica, respectivamente positiva ou semipositiva se, e somente se, τ é simétrico, respectivamente positivo ou semipositivo.

Das fórmulas anteriores segue que, dado um produto escalar g em $\mathbb{E}$, a matriz que representa $*_g : \Lambda^1 \to \Lambda^{(n-1)}$ é a matiz:

$$G = (\det g)^{\frac{1}{2}} g^{-1}.$$

Em particular, $\det G = (\det g)^{\frac{n-2}{2}}$. Portanto, se $n \geq 3$, o produto escalar g pode ser recuperado da matriz G pela fórmula:

$$g = (\det G)^{\frac{1}{n-2}} G^{-1}.$$

$\square$

O argumento da afirmação se globaliza facilmente. Consideramos

$$\Lambda^p(M) := \cup_{x \in M} \Lambda^p(T_x M),$$

o fibrado vetorial das p-formas exteriores, e

$$\mathbb{H}(M) := \cup_{x \in M} Hom(\Lambda^1(T_x M), \Lambda^{(p-1)}(T_x M)),$$

o fibrado dos morfismos de $\Lambda^1(M)$ em $\Lambda^{(n-1)}(M)$.

Podemos considerar o fibrado vetorial dos homomorfismo simétricos:

$$\mathbb{H}_s(M) = \{\tau \in \mathbb{H}_s(T_x M), \text{ por algum } x \in M\},$$

e o subfibrado (não vetorial) dos homomorfismos positivos:

$$\mathbb{H}_s^+(M) = \{\tau \in \mathbb{H}_s^+(T_x(M), \text{ por algum } x \in M\}.$$

Seja $Riem(M)$ o conjunto das métricas riemannianas em M. $Riem(M)$ é um fibrado sobre M com fibra, sobre x, $S(T_x(M))$. Temos uma aplicação natural:

$$St : Riem(M) \longrightarrow \mathbb{H}_s^+(M), \quad St(g) := *_g.$$

Se $n \geq 3$, St é inversível em cada fibra e portanto globalmente inversível.

Pelo acima, procurar uma métrica g tal que $*_g \omega = \psi$ é equivalente a procurar uma seção τ de $\mathbb{H}_s^+(M)$ tal que $\tau(\omega) = \psi$.

Afirmação: Existe $\tau \in H_s^+(M)$ tal que $\tau(\omega) = \psi$.

Demonstração. Seja $\{W_i\}$ um recobrimento aberto de M, localmente finito, com as seguintes propriedades:

(1) W_i é contrátil.

(2) Se $p \in W_i,\ \omega(p) = 0$, então $\omega(q) \neq 0,\ \forall\ q \in W_i \setminus \{p\}$, e $W_i \subseteq U_p$.

(3) Se $\omega \neq 0$ em W_i, então $W_i \cap \overline{V_q} = \emptyset$ onde V_q são as vizinhanças dos zeros de ω e $\overline{V_q} \subseteq W_j \subseteq U_q$.

Seja $\{\phi_i\}$ uma partição da unidade dominada por $\{W_i\}$.Se p é um zero de ω e $W_i \subseteq U_p$, definimos:

$$\tau_i = \phi_i *_{g_p} \text{ em } W_i, \tau_i = 0 \text{ em } M \setminus W_i.$$

Suponha agora $\omega \neq 0$ em W_i. Consideramos a aplicação:

$$\Psi_q : \Lambda^1(M) \longrightarrow \Lambda^n(M) \cong \mathbb{R}, \qquad \Psi_q(\alpha) = \alpha \wedge \psi(q), \quad q \in W_i.$$

Os Ψ_q são não nulos pois $\omega \wedge \psi > 0$ em W_i. Portanto os núcleos são $(n-1)$-dimensionais. A reunião destes núcleos define portanto um subfibrado de $\Lambda^1(W_i)$ que é trivial pois W_i é contrátil[8]. Existem portanto formas diferenciais $\{\omega_2, \ldots, \omega_n\}$ que, em q, geram o núcleo de Ψ_q. Além disso $\omega(q) \notin Ker\Psi_q$ e portanto, posto $\omega = \omega_1$, $\{\omega_i : i = 1, \ldots, n\}$ é uma base de $\Lambda^1(T_qM)$, $\forall q \in W_i$. Portanto temos:

$$\psi = \sum_{k=1,\ldots,n} \psi_k \omega_1 \wedge \cdots \hat{\omega_k} \wedge \cdots \wedge \omega_n.$$

Agora $\omega_1 \wedge \psi > 0, \omega_k \wedge \psi = 0, k \geq 2$ e portanto $\psi = \psi_1 \omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_n, \psi_1 > 0$.

Consideramos as $(n-1)$ formas $\eta_k = \psi_1 \omega_1 \wedge \cdots \hat{\omega_k} \wedge \cdots \wedge \omega_n$. Em cada ponto de W_i, $\{\eta_k\}$ é uma base das $(n-1)$-formas e:

$$\eta_1 = \psi, \qquad \omega_k \wedge \eta_l = \delta_{kl} \omega \wedge \psi.$$

Definimos então $\tau_i \in Hom(\Lambda^1(M), \Lambda^{(n-1)}(M))$, estendendo por linearidade (onde não é zero),

$$\tau_i(\omega_k) = \phi_i \eta_k.$$

Observamos que os τ_i são simétricos e positivos semi-definidos e:

$$\tau = \sum_i \tau_i$$

é bem definido, pois em cada ponto os τ_i são nulos exceto por um número finito de índices, simétrico, pois os t_i são simétricos e positivo definido pois em cada ponto os τ_i's não nulos são positivos definidos. Além disso, $\tau(\omega) = \psi$, pois $\sum_i \phi_i(x) = 1\ \forall\ \ x \in M$. □

Juntando agora as duas afirmações, concluímos que existe uma métrica riemanniana g tal que $*_g \omega = \tau(\omega) = \psi$. □

[8]É um fato geral que fibrados sobre espaços contráteis são triviais.

O próximo lema nos permite de achar uma "boa ψ", pelo menos localmente.

2.9. Lema. Se $p \in M, \omega(p) \neq 0$, existe uma forma fechada ψ tal que $\omega \wedge \psi \geq 0,\ \omega \wedge \psi(p) > 0$.

Demonstração. Por 2.6 existe uma curva simples fechada $\gamma : [0,1] \to M$ tal que $\omega(\dot{\gamma}) > 0$. Para $t \in [0,1]$ temos uma hipersuperfície integral da distribuição $Ker\omega$, Σ_t, que passa por $\gamma(t)$. Esta hipersuperfície é transversal a γ pois $\dot{\gamma}(t) \notin Ker\omega = T_{\gamma(t)}\Sigma_t$.

Da teoria geral das folheações, temos que para todo $t_0 \in [0,1]$, existe $\epsilon > 0$ e um difeomorfismo:

$$f_{t_0} : (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \times D_\epsilon^{(n-1)} \longrightarrow U_{t_0} \subseteq M,$$

tal que $f_{t_0}(t,0) = \gamma(t)$ e, fixado $t_1 \in (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$, $\ f_{t_0}(t_1, \cdot)$ é um difeomorfismo de $D_\epsilon^{(n-1)}$ em uma vizinhança aberta de $\gamma(t_1)$ em Σ_{t_1}. Podemos cobrir a imagem de γ com um número finito de abertos deste tipo, obtendo uma vizinhança aberta U da imagem de γ que é um fibrado de discos sobre S^1. Além disso, este fibrado é orientável, definindo como positiva uma base $\{X_1, \ldots, X_{(n-1)}\}$ de $T_{\gamma(t)}\Sigma_t$ tal que a base $\{\dot{\gamma}(t), X_1, \ldots, X_{(n-1)}\}$ seja uma base positiva de $T_{\gamma(t)}M$. É conhecido que um tal fibrado é trivial, i.e., existe um difeomorfismo:

$$T : S^1 \times D_\epsilon^{(n-1)} \longrightarrow U,$$

e este difeomorfismo manda $\{t\} \times D_\epsilon^{(n-1)}$ em Σ_t.

Seja agora $h : [0, \epsilon) \to [0,1]$ uma função diferenciável tal que $h(t) = 1$ se $t \leq \epsilon/3$ e $h(t) = 0$ se $t \geq 2\epsilon/3$. Consideramos em $S^1 \times D_\epsilon^{(n-1)} \longrightarrow U$, a forma:

$$\tilde{\psi}_p(t, x_1, \ldots x_{(n-1)}) = h(\sum_{i=1}^{(n-1)} x_i^2) \mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{(n-1)}.$$

Temos então $\mathrm{d}\tilde{\psi}_p = \frac{\partial h}{\partial t}\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{(n-1)} = 0$ pois h não depende de t. Também $T^*\omega \wedge \tilde{\psi}_p(\partial/\partial t, \partial/\partial x_1, \ldots, \partial/\partial x_{(n-1)}) = \omega(\dot{\gamma}(t))\tilde{\psi}_p(\partial/\partial x_1, \ldots, \partial/\partial x_{(n-1)})$ pois $\partial/\partial x_i \in Ker\omega$ e portanto $T^*\omega \wedge \tilde{\psi}_p$ é não negativa e positiva em uma vizinhança de $S^1 \times \{0\}$. A forma $(T^{-1})^*\tilde{\psi}$ é uma forma em U que se anula em uma vizinhança de ∂U e portanto, pondo $\psi = 0$ em $M \setminus U$ obtemos uma forma *fechada*, globalmente definida tal que $\omega \wedge \psi \geq 0$ e $\omega \wedge \psi(p) > 0$. $\square$

Vamos concluir a demonstração do teorema.

Sejam $p_1, \ldots, p_k$ os zeros de ω. Consideramos $D_r^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < r\}$, o disco aberto de raio r. Sejam $\sigma_l : D_1^n \to V_1^{(l)} \subseteq M$ cartas locais tais que $V^{(l)} \cap V^{(s)} = \emptyset$, se $l \neq s$, $\sigma_l(0) = p_l$

e

$$f \circ \sigma_l = c_l - \frac{n - j_l}{2} \sum_{h=1}^{j_l} x_h^2 + \frac{j}{2} \sum_{i=j_l+1}^{n} x_i^2,$$

onde $\mathrm{d}f = \omega$ em $V^{(l)}$, $j_l = index(\omega, p_l) \neq 0, n$.

Definimos $V_t^{(l)} := \sigma_l(D_t^n)$, $V_t = \cup_l V_t^{(l)}$. Para $q \in M \setminus V_1$ existe, pelo lema anterior, uma $(n-1)$-forma fechada ψ_q tal que $(\omega \wedge \psi_q) > 0$ em $U_q = \{x \in M : \psi(x) \neq 0\} \ni q$ e $\psi_q = 0$ em $V_{t(q)}$ por algum $t(q) \in (0, 1)$.

Podemos então cobrir $M \setminus V_1$ com um número finito de vizinhanças $U_{q_1}, \ldots, U_{q_k}$. Se $\delta_0 = inf\{t(q_s)\}$, $\psi_{q_h} = 0$ em V_{δ_0}, para todo h. A forma

$$\psi' = \sum_{i=1}^{k} \psi_{q_i},$$

tem as seguintes propriedades:

(1) ψ é fechada e $\psi' = 0$ em V_{δ_0}.
(2) $\omega \wedge \psi' > 0$ onde $\psi' \neq 0$.
(3) Fixada uma métrica riemanniana auxiliar e $\epsilon > 0$, existe $\delta_1 \in (\delta_0, 1)$ tal; que $\omega \wedge \psi' > \epsilon$ em $M \setminus V_{\delta_1}$.

Vamos agora definir uma forma fechada em V_1, que, oportunamente somada a ψ' nos dará uma forma com as propriedades desejadas.

Seja $K : M \to [0, 1]$ uma função diferenciável e tal que $K = 1$ em V_{δ_1}, $K = 0$ em uma vizinhança de $M \setminus V_1$. Em cada sistema de coordenadas $\sigma_l : D_1^n \to V^{(l)}$, consideramos a $(n-2)$-forma:

$$\chi_l = K \sum_{h=1}^{j} \sum_{i=j+1}^{n} (-1)^{(h+i)} x_h x_i \mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \mathrm{d}\hat{x}_h \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\hat{x}_i \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n,$$

onde $j = j_l = index(\omega, p_l)$. As formas χ_l se estendem a uma forma definida em M pondo $\chi = \chi_l$ em $V_1^{(l)}$, $\chi = 0$ em $M \setminus V_1$.

Observamos que em $V_{\delta_1}^{(l)}$ temos:

$$f = c_l - \frac{n - j}{2} \sum_{h=1}^{j} x_h^2 + \frac{j}{2} \sum_{i=j+1}^{n} x_i^2,$$

$$\omega = \mathrm{d}f = -\sum_{h=1}^{j} (n - j) x_h \mathrm{d}x_h + \sum_{i=j+1}^{n} x_i \mathrm{d}x_i.$$

Portando, em relação à métrica plana g_0 (em relação a qual f é harmônica):

$$*_{g_0}\omega = -\sum_{h=1}^{j}(n-j)(-1)^h x_h \mathrm{d}x_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\hat{x}_h\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_n + \sum_{i=j+1}^{n} j(-1)^i x_i \mathrm{d}x_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\hat{x}_i\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_n.$$

De outro lado, em $V_{\delta_1}^{(l)}$, $K=1$ e portanto:

$$\mathrm{d}\chi = \sum_{h=1}^{j}(\sum_{i=j+1}^{n}(-1)^{(h+i)}x_i\mathrm{d}x_h\wedge\mathrm{d}x_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\hat{x}_h\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\hat{x}_i\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_n)+$$

$$\sum_{i=j+1}^{n}(\sum_{h=1}^{j}(-1)^{(h+i)}x_h\mathrm{d}x_h\wedge\mathrm{d}x_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\hat{x}_h\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\hat{x}_i\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_n) = *_{g_0}\omega.$$

Pondo $\psi" = \mathrm{d}\chi$, obtemos uma $(n-1)$-forma tal que:

(1) $\psi"$ é exata (portanto fechada).

(2) $\psi" = 0$ em $M\setminus V_1$.

(3) Existe uma métrica riemanniana g_0 em V_{δ_1} tal que $\psi" = *_{g_0}\omega$ (em particular $\omega\wedge\psi" > 0$ em $V_{\delta_1}\setminus\{p_1,\dots p_k\}$).

Seja H uma constante positiva a ser determinada. Consideramos a forma:

$$\psi = H\psi' + \psi".$$

Temos então:

(1) Em $M\setminus V_1$, $\omega\wedge\psi > 0$, pois $\psi" = 0, \omega\wedge\psi' > 0$.

(2) Existe uma métrica riemanniana g_0 em V_{δ_0} tal que $\psi = *_{g_0}\omega$, pois $\psi' = 0$.

(3) Em $V_{\delta_1}\setminus V_{\delta_0}$, $\omega\wedge\psi" > 0$, $\omega\wedge\psi' \geq 0$, e portanto $\omega\wedge\psi > 0$.

(4) Em $V_1\setminus V_{\delta_1}$, $\omega\wedge\psi'(e_1,\dots,e_n) > \epsilon$ onde $\{e_1,\dots,e_n\}$ é uma base ortonormal positiva na métrica auxiliar. Portanto se H é suficientemente grande, $H\psi'+\psi"(e_1,\dots,e_n) > 0$.

A forma ψ é fechada e verifica as condições do lema 2.8 e portanto existe uma métrica riemanniana g em M tal que $\psi = *_g\omega$. Em relação a g, $*g\omega$ é fechada e ω é cofechada e portanto harmônica. □

Bibliografia

[1] Armstrong, M. A., Basic Topology, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1983.

[2] Bott, R.; Tu, L. W., Diferential Forms in Algebraic Topology, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.

[3] Calabi, Eugenio An intrinsic characterization of harmonic one-forms. Global Analysis (Papers in Honor of K. Kodaira) pp. 101–117 Univ. Tokyo Press, Tokyo, 1969.

[4] do Carmo, Manfredo P. Differential forms and applications. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[5] do Carmo, M. P., Geometria Riemanniana, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 1979.

[6] Lima, E. L.: Introdução às Variedades Diferenciáveis, EMMA, Porto Alegre, 1960.

[7] Lima, E. L.: Introduccion a la Cohomologia de de Rham, IMCA, PUC del Perú, Lima, 2001.

[8] Lima, E. L., Curso de Análise, Volume 2, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro 1989.

[9] Guillemin, V.; Pollack, A. Differential topology. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1974.

[10] Hirsch, M. W.; Smale, S. Differential equations, dynamical systems, and linear algebra. Pure and Applied Mathematics, Vol. 60. Academic Press, New York-London, 1974.

[11] Mercuri, F.; Hodge Theory, Notas de Aula, 1988.

[12] Munkres, J., Topology: A First Course, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1975.

[13] Rotman, J. J., An Introduction to the Theory of Groups, Third edition. Allyn and Bacon, Inc., Boston, MA, 1984.

[14] Perko, L., Differential Equations and Dynamical Systems, Texts in Applied Mathematics, 7. Springer-Verlag, New York, 1991.

[15] Simons, G. F., Introduction to Topology and Modern Analysis, McGraw-Hill, 1963.

[16] Singer, M.; Thorpe, J. A., Lecture Notes on Elementary Topology and Geometry, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1976.

[17] Sotomayor, J., Lições de Equações Diferenciais Ordinárias, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 1979.

[18] Spivak, M. , Calculo en Variedades, Editoral Reverté S.A., 19xx.

[19] Spivak, M., A Comprehensive Introduction to Diferential Geometry, Volume I, Perish Inc., 1999

[20] Spivak, M., Diferential Geometry, Volume II, 1970.

[21] Warner, F. W., Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1983.

Índice Remissivo

Cadeia
  Singular, 30
    Bordo, 30
Campo Vetorial, 15
Cohomologia
  de Rham, 39
  Reduzida, 25
Complexo
  Cadeias, 11
  Cocadeias, 11, 20
  de Rham, 20
Contrátil, 21
Cubos Singulares, 32

Derivação, 15

Estrelado, 23
Exterior
  Forma, 4
  Produto, 5

Fibrado Tangente, 15
Forma
  Exata, 20
  Exterior, 4, 17
  Fechada, 20

Grupo
  de Homologia, 31
  dos Bordos, 31
  dos Ciclos, 31

Hodge
  Estrela, 48
Homotopia, 21
  Algébrica, 33
  Equivalência de, 21

Jordan
  Curva de, 28
  Teorema da Curva de, 28
Jordan-Alexander
  Teorema da Dualidade, 27

Lema
  dos Cinco, 10
  Hopf, 50
Lie
  Álgebra de, 17
  Produto de, 16

Operador
  Codiferencial, 48
  Laplace-Beltrami, 48

Poincaré
  Dualidade, 52
  Lema, 23

Seqüência
  Exata, 9
  Mayer-Vietoris
    Cohomologia, 24
    Homologia, 35

Semi exata, 11, 20
Simplexo, 29
Padrão, 29
Singular, 29

Tensor, 3
Alternado, 4
Tensorial
Álgebra, 4
Produto, 3
Transposta, 6, 18

Wedge, 26