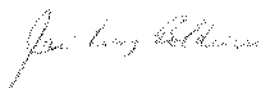


UM MODELO MATEMÁTICO PARA TIMBRE ORQUESTRAL

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida pelo Sr. Jônatas Manzolli e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 28 Setembro de 1988.



Prof. Dr. José Luiz Boldrini

Orientador

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

SETEMBRO - 1988

U N I C A M P
BIBLIOTECA CENTRAL

M319m

10006/BC

"UM MODELO MATEMÁTICO PARA TIMBRE ORQUESTRAL"

JÔNATAS MANZOLLI

Construção e desenvolvimento de um modelo que gerará um problema de programação não linear misto, cuja solução expressará o timbre de uma orquestra sinfônica.

À minha querida Eliana.

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador, Prof. Dr. José Luiz Boldrini, que além de prover os subsídios de conteúdo matemático, se empenhou nos assuntos musicais aqui tratados, que não deixaram de ser analisados cuidadosamente.

Ao meu colega de turma, Francisco de Assis Magalhães, pela ajuda nas questões computacionais.

Ao meu amigo, Prof. Dr. Adolfo Maia Junior, que sempre discutiu comigo importantes conceitos veiculados nesta dissertação.

À Profa. Maria Lúcia Leão de Almeida, que revisou a redação final.

A Maria de Lourdes Soares da Silva, pela dactilografia da tese.

Aos meus colegas de turma: o Zé, a Socorro, o Vinícius e o Chico, pelo incentivo e apoio.

Jônatas Manzolli

Campinas, segundo semestre, 1988.

I

A sombra conhece a luz,
o ultra-som escuta o som.
Os homens são sombras ultra-sônicas,
artesãos tecendo tranças nos caminhos.

II

Alguns são andarilhos,
outros passam os dias nas esquinas
contando fábulas.
Todos caminham, porque há caminhos,
as esquinas é que movem os quarteirões.

III

No céu ainda existe espaço,
os caminhos estão cheios de pés;
a terra prometida
está nos passos dos caminhantes.

IV

De repente, alguém descobre que pode voar,
rompe a barreira do som
e quando ela passa os seus passos vêm atrás.

V

Beduínos, ciganos, eremitas,
loucos viajantes.
Camelos, carroças, carros,
rotas, mapas, caminhos.
Os homens celebram os raios do sol
andando em caravanas.

VI

Os homens são nômades:
todos caminham, porque há caminhos,
diversos, mas os mesmos caminhos.
Basta olhar as sombras
nas trilhas que o tempo não apagou.

NOTAÇÃO

No texto existem três tipos de ilustrações: tabelas, gráficos e figuras; cada uma delas será denotada por suas iniciais "T", "G" e "F", respectivamente. Por exemplo, a ilustração G2.5 é o quinto gráfico do segundo capítulo.

As referências bibliográficas serão dadas entre colchetes.

As equações serão enumeradas por capítulos, ou seja, 2.3 é a terceira equação do segundo capítulo.

Passamos agora a nomear a notação que usamos separando-as em parâmetros e índices, variáveis, funções auxiliares e funções principais.

PARÂMETROS E ÍNDICES:

n = número de naipes da orquestra.

j = índice do j -ésimo naipe, $j = 1, 2, \dots, n$.

$k-1$ = número de intervalos de integração.

i = índice do i -ésimo intervalo, $i = 0, 1, \dots, k-1$.

$s-1$ = número de subintervalos de integração.

v = índice do v -ésimo subintervalo, $v = 0, 1, \dots, s-1$

M_i = i -ésimo CORTE DE INTEGRAÇÃO.

ζ_v = v -ésimo subintervalo de integração.

VARIÁVEIS:

w = logaritmo decimal da frequência.

x_j = número de instrumentos do j -ésimo naipe.

y_j = loudness musical do j -ésimo naipe.

FUNÇÕES AUXILIARES:

$g_j(w, y_j)$ = função sinal de $f_j(w, y_j)$ associada ao j -ésimo naipe.

$S_i(j)$ = função indicador do i -ésimo intervalo de integração associada ao índice do j -ésimo naipe.

FUNÇÕES PRINCIPAIS:

$F(w, X, Y)$ = Função-Timbre Orquestral.

$f_j(w, x_j, y_j)$ = Função-Timbre do j -ésimo naipe.

$G(w)$ = Função-Timbre Objetivo

$\Psi(X, Y)$ = Função Objetivo.

UM MODELO MATEMÁTICO PARA TIMBRE ORQUESTRAL

ÍNDICE

INTRODUÇÃO	i
CAPÍTULO I - FUNDAMENTAÇÃO MUSICAL	1
1.1. Nota Musical	1
1.2. Modos e Escalas	3
1.3. Timbre	10
1.4. Tópicos Relacionados à Percepção Sonora	12
CAPÍTULO II - A PERCEPÇÃO DO SOM	16
2.1. Intervalo de Audibilidade de Frequência	16
2.2. Percepção de Intensidade Sonora (Loudness).	18
2.3. Equação de Stevens	21
2.4. Percepção Timbrística	24
CAPÍTULO III - TÓPICOS DA ANÁLISE ACÚSTICA DO TIMBRE	29
3.1. Nota Musical: Sinal Periódico	29
3.2. Espectro de Fourier	37
3.3. Envelope Espectral	42
CAPÍTULO IV - TIMBRE ORQUESTRAL	51
4.1. Função Timbre de um Instrumento	53
4.2. Função Timbre de um Naípe	56
4.3. Função Timbre Orquestral	57

CAPÍTULO	V - SIMULAÇÃO DE TIMBRES ORQUESTRAS	61
	5.1. Um Problema de Programação Não Linear Misto	62
	5.2. Função-Timbre Objetivo - Um Caso Particular	64
	5.3. Função Objetivo	67
	5.4. Gradiente da Função Objetivo	72
	5.5. Métodos de Resolução do Problema	76
	5.5.1. Gradientes Conjugados	76
	5.5.2. Estratégia das Restrições Ativas	78
	5.5.3. Branch and Bound	81
ANEXO I :	Programa TORQ 1.1 e Resultados Computacionais	
ANEXO II :	Análise Gráfica do Timbre Orquestral	
BIBLIOGRAFIA		

UM MODELO MATEMÁTICO PARA TIMBRE ORQUESTRAL

INTRODUÇÃO

Verifica-se que historicamente a música e a matemática caminham juntas há muito tempo; a escola de Pitágoras, por exemplo, há 400 a.C. já se preocupava com a relação entre elas. Através da experiência de construir um monocórdio e medir os comprimentos de diversas cordas, demonstravam que os intervalos entre notas musicais seguem proporções de *números inteiros pequenos*. Os Pitagóricos extrapolavam tal relação para os fenômenos da natureza em geral, chegando a afirmar que os planetas do sistema solar orbitavam em torno da terra, em trajetórias circulares, descrevendo o que chamavam de "*Música das Esferas*".

Kepler aboliu, com suas três leis, as idéias geocêntricas, mas constatou que a velocidade angular dos planetas no ponto mais distante do sol — afélio — é proporcional à velocidade angular no ponto mais próximo — periélio —, e que estas relações são dadas por números inteiros pequenos, como no modelo pitagórico.

Encontra-se no trabalho de Johann Sebastian Bach um dos melhores exemplos do pensamento analítico contido na música. Quando Bach consagrou a escala temperada com seus 48 prelúdios e fugas do "Cravo Bem Temperado", não estava somente provando a versatilidade e maleabilidade da escala cromática; usando uma técnica estrita chamada FUGA, concretizou as bases de um sistema muito mais amplo: A TONALIDADE. A maneira singular com que esse grande compositor tratava

as funções tonais vem demonstrar não apenas que seu pensamento ao compor era conciso e formal, como, também, que a união histórica destas duas áreas do conhecimento humano trouxe resultados estéticos extremamente importantes, até hoje estudados.

Já Leibniz dizia ser a "música um exercício de aritmética feito pelo espírito, inconsciente de que está a contar".

No começo do século, Stravinski afirmava que a "matemática é um estudo tão útil a um compositor como o aprendizado de uma ou tra língua é útil a um poeta".

Os compositores contemporâneos já recorrem há muito tempo a modelos matemáticos para auxiliar sua técnica composicional, utilizando recursos tais como: Processos Estocásticos, Teoria de Conjuntos e de Grupos, Métodos de Pesquisa Operacional e ferramentas matemático-computacionais.

Este uso de estruturas matemáticas na música leva à discussão da natureza destas duas áreas. Não raro escutam-se expressões desavisadas:

- Música é pura arte; matemática, pura ciência.
- A música não propõe nenhum problema; a matemática se constitui somente deles.
- A música é totalmente intuitiva; a matemática, estritamente analítica.

Tais afirmações subestimam a música e tolhem a matemática, agindo como barreira à proposta do emprego de processos matemático-computacionais na composição musical.

Na música encontra-se o pensamento abstrato contido na matemática. A TONALIDADE é um sistema no qual um elemento musical, ou seja, um tema, pode ser explorado, transformado, revelado em contextos musicais diferentes, gerando um processo que preserva a estrutura organizacional pré-estabelecida. A matemática necessita da intuição e a sua beleza pode ser sentida.

A música e a matemática são duas grandes linguagens que foram separadas historicamente, apesar de terem estado incorporadas no princípio da civilização ocidental. Pensando nesse começo histórico, buscando uma nova forma de tratar os processos musicais, encontramos na matemática um meio eficiente e compacto de auxílio à análise musical.

Mais propriamente, estaremos interessados em estudar a formação do timbre de uma orquestra. O som de uma orquestra sinfônica, muitas vezes, chama a atenção pela complexidade, equilíbrio e pelo efeito estético percebido pelos sentidos. Este conjunto é constituído por uma variedade de instrumentos agrupados em subconjuntos chamados de NAIPES (com a restrição de que em um naipe devem estar instrumentos de mesmo timbre).

Percebe-se que a relação entre os instrumentos sinfônicos e a nossa percepção envolve fatores de três naturezas diferentes: estética, sensorial e física.

Os aspectos de natureza estética podem ser elucidados através de um exemplo emprestado às artes plásticas: um pintor, ao criar uma determinada coloração em suas telas, tem em mente, para conseguir seu objetivo, a quantidade de tinta necessária e a

intensidade de cada uma das cores.

De forma análoga, um músico ao orquestrar cria blocos timbrísticos que, ao serem contrapostos, caracterizam de maneira única sua linguagem sinfônica. Assim, pode-se perceber que trechos de uma obra determinada *descrevem características orquestrativas do seu compositor*.

Este trabalho, para justificar a construção de uma função-critério, apóia-se na idéia de que pequenos trechos caracterizam a linguagem timbrística do compositor. Esta função-critério será uma estrutura de *análise musical*, através da qual um programa de computador auxiliará a composição.

Pretendemos desenvolver uma *macro-estrutura* que propicie ao compositor os parâmetros necessários à rápida obtenção do efeito timbrístico desejado. O programa fornecerá a quantidade ideal de instrumentos por naipe e o loudness de cada naipe, para um trecho musical e uma orquestra proposta pelo músico.

A estrutura da tese é a seguinte: no primeiro capítulo discutem-se alguns tópicos de teoria musical. É mais fácil compreender todas as informações contidas na resolução do problema situando-o sob o ponto de vista musical. É fundamental, portanto, o conhecimento de conceitos como *Série Harmônica, Timbre e Percepção Auditiva*.

No segundo capítulo estuda-se percepção auditiva no seu aspecto fisiológico. Sabe-se que a audição não é linear, ou seja, *ou* vem-se mais claramente os sons médios, e mais atenuadamente os graves e os agudos. E, além deste fator, a percepção de intensidade chamada de loudness gera uma resposta que não é proporcional à soma das

intensidades dos estímulos. Existem curvas e equações que determinam este comportamento; através das mesmas estudaremos estas distorções.

No terceiro capítulo discute-se quais os aspectos da acústica musical que descrevem as propriedades timbrísticas de um instrumento. Estes fatores de natureza física são vinculados à ressonância de notas musicais chamadas de harmônicos. Cada instrumento, dependendo do material com que é construído, produz uma sequência de harmônicos peculiar. Verifica-se matematicamente que estas relações são descritas através da SÉRIE DE FOURIER e podem descrever o timbre de uma nota isolada através de um gráfico chamado de ESPECTRO DE FOURIER. Ainda nesse capítulo, descreve-se uma curva chamada de *Envelope Espectral* (definido como o Envelope dos Espectros de Fourier), curva que caracteriza o comportamento de todas as notas de um instrumento sinfônico.

No quarto capítulo, com o *Envelope Espectral*, constrói-se a *função-timbre de um instrumento*. E, por meio da superposição destas funções-timbre, estrutura-se a "FUNÇÃO-TIMBRE ORQUESTRAL".

No quinto capítulo, usando-se uma *Função-Timbre Objetivo* associada a um trecho musical, define-se uma "FUNÇÃO OBJETIVO" como sendo o *Mínimo Quadrado* (usando a Norma L_2) entre a *Função-Timbre Objetivo* e a *Função-Timbre Orquestral*. Finalmente chega-se a um *Problema de Programação Não Linear Misto* com variáveis relacionadas ao loudness de cada naipe e à quantidade de instrumentos no naipe. Para resolução deste problema desenvolve-se um programa que usa os métodos BRACH AND BOUND e GRADIENTES CONJUGADOS.

Finalmente, devemos ressaltar que muitos outros aspectos deveriam ser levados em conta para que este modelo matemático pudes-se explicitar totalmente o complexo problema da determinação do timbre de uma orquestra. Porém, é importante verificar que existe pouca pesquisa desenvolvida nesta área, o que torna difícil a busca de dados que venham esclarecer questões fundamentais e, por isso, nos restringimos ao modelo proposto.

Acreditamos que pesquisas envolvendo a matemática com novas áreas certamente ampliarão os conceitos e a visão da matemática aplicada. O desenvolvimento de um novo algoritmo nasce das necessidades reais do dia-a-dia. Assim, pensamos que o conhecimento humano analisado integralmente é a maneira mais natural e produtiva de se fazer ciência.

O importante é que este trabalho suscite outros de mesma natureza e que através deste procedimento se encontre uma forma de desenvolver a linguagem orquestral que ainda vive, em muitos momentos, das idéias de compositores do século passado.

CAPÍTULO I

FUNDAMENTAÇÃO MUSICAL

Para facilitar a compreensão dos capítulos que se seguem, procuramos introduzir aqui, de forma não rigorosa, conceitos musicais que posteriormente serão formalizados, e que criarão um elo entre a terminologia musical e os parâmetros do sistema a ser modelado.

1.1. NOTA MUSICAL

O som de *dó, ré, mi, fá...*etc a maioria das pessoas já ouviu produzido por instrumentos musicais. No entanto, esta trivialidade aparente pode ser aprofundada na medida em que se verifica que o mecanismo de *percepção musical* está relacionado à transcodificação do estímulo auditivo feita no cérebro, que o compara a códigos pré-estabelecidos.

Existem diversos parâmetros para tal associação: o cérebro reescalona o tempo de duração de um evento sonoro, associa a intensidade do som a uma medida diferente da medida física, e em particular, na percepção de frequência (altura de uma nota musical), faz uma audição seletiva que associa a uma variedade de sons justapostos uma frequência preponderante. Dessa forma, neste trabalho entendemos que:

- NOTA MUSICAL é um evento sônico ao qual se pode associar uma frequência preponderante. Tal frequência, que caracteriza a altura de uma nota musical, é chamada de FREQUÊNCIA FUNDAMENTAL.

Observação: Na realidade a expressão frequência fundamental (nota fundamental), se aplica a muitas situações musicais, mas neste trabalho definimos o conceito apenas para o caso particular acima.

Quando um instrumento musical gera um estímulo sonoro, e um indivíduo é capaz de dizer qual nota escuta, verifica-se que a frequência fundamental é a frequência da primeira função de uma SOMA DE FUNÇÕES PERIÓDICAS, soma esta que define uma NOTA TIMBRADA (nota tocada por um instrumento determinado).

A música é um processo dinâmico e nela a sucessão de eventos sonoros relacionados entre si passa a ter grande relevância. Na música tradicional este processo é chamado de MELODIA; contudo, no século XX, a experimentação levou os compositores a modificarem essa visão tonal. Assim, através de conceitos como o de ENTROPIA E ORDEM DE UM SISTEMA [3] [7], ampliaram a interação dinâmica da música e criaram novos processos composicionais [1] [5].

Para o entendimento deste texto, não é necessária a discussão da natureza dos processos tradicionais ou contemporâneos de composição. O essencial é que a música, ao ser analisada como um SISTEMA DINÂMICO, abrangerá estes dois processos. O que se modifica

em diferentes formas de ordenação de eventos sonoros, são as variáveis do sistema e alguns de seus parâmetros.

1.2. MODOS E ESCALAS

Um instrumento musical é uma fonte geradora de estímulos sonoros, agindo dentro de uma faixa bem determinada do espectro de frequências, isto é, para cada instrumento há um limitante inferior de frequência, que depende da sua construção e em geral é fixo; e um superior, que dependerá da virtuosidade do instrumentista.

Todavia, pode-se supor que estes limitantes são em média dados por f_{\min} (frequência mínima) e f_{\max} (frequência máxima) e assim define-se:

- *TESSITURA de um instrumento musical é o intervalo de frequência dado por $[f_{\min}, f_{\max}]$.*

Ainda analisando-se o instrumento como fonte sonora percebe-se o seguinte fato:

- *Uma vez que a tessitura é um intervalo contínuo de frequências, ao se fazer música discretiza-se o mesmo.*

Além de não varrer todo o espectro de frequência, os instrumentos tocam apenas algumas notas da faixa de frequência à qual estão limitados. Esta discretização é determinada por um PROCESSO HISTÓRICO. Partindo-se deste princípio, a compreensão do nosso modelo ocidental reporta-nos à Grécia e à experiência do monocórdio.

O primeiro tópico a ser ressaltado é que, para o mundo grego, só existiam números inteiros, e as experiências da escola de Pitágoras procuravam evidências apenas para este modelo discreto, resumido pela expressão: *TUDO É NÚMERO*.

As descobertas helênicas partiam do princípio da observação da natureza. Uma constatação muito importante feita por eles é que, ao se cantar ou tocar um instrumento musical, subdivide-se o espectro de frequência em partes inteiras. Há uma repetição de certos grupos finitos de notas que determinam o conjunto básico a partir do qual se construirá uma melodia.

Precisamos ressaltar que esta forma de relacionar as frequências com símbolos dentro de um grupo finito, já pré-estabelecido, está presente em diversas civilizações. Para cada uma delas a forma e o número de elementos destes grupos varia, e, o que é muito importante, *o conceito estético do som resultante é bem diferente*. Afirmamos que *a forma de cantar de uma civilização é produto natural do seu modelo de universo*.

Uma propriedade da música ocidental que, de tão fundamental, passa despercebida, é o fato de que, para a nossa cultura, a cada oito notas cantadas, a primeira e a última são consideradas *análogas*, ou seja, a partir da oitava nota o ciclo se repete. Este intervalo de notas é chamado de *OITAVA*.

Esta característica é tão sutil e enraizada da nossa cultura que quando soam juntas uma voz masculina e uma feminina, não se toma consciência, muitas vezes, de que as duas vozes, mesmo cantando a "*mesma nota*", não soam na mesma frequência: a voz feminina soa

oitava acima, portanto mais aguda que a voz masculina. Esta repetição que se faz de um ciclo de notas, foi talvez a primeira constatação grega dentro do contexto musical.

Para os gregos as notas estavam relacionadas a comprimento de cordas e eles descobriram que a extensão de uma corda soando uma oitava acima era exatamente a metade do comprimento de uma corda que emitia uma nota oitava abaixo. Em termos de frequência a relação é inversa, ou seja, dada uma nota inicial (f_0), a nota oitava acima (f_{oit}) é dada por:

$$f_{oit} = 2f_0 .$$

Existem infinitas maneiras de subdividir uma oitava em oito partes, contudo os gregos tinham maneiras bem definidas para esta discretização. Estes grupos de notas, chamados de MODOS GREGOS, têm nomes característicos: *Modo Jônio, Dórico, Frígio, Lídio, Mixolídio, Eóleo e Locrino.*

Uma consequência natural da discussão acima é que podemos formalizar a questão da discretização do espectro de frequência, feita na música ocidental, através do conceito matemático de *Grupo Cíclico*. Assim, dada uma subdivisão da oitava, dentro dela um conjunto de frequências é bem determinado (de modo construtivo), e definem-se as classes de equivalência dos elementos deste grupo, como sendo **as NOTAS MUSICAIS DESSE MODO.**

Sob este ponto de vista, percebe-se que o que determina um modo não é a frequência absoluta de cada nota associada a uma

classe, mas o intervalo de frequência existente entre as classes.

Por esta maneira de construir-se um modo e por razões relacionadas com a nossa percepção, que serão analisadas posteriormente no capítulo III, pode-se verificar a proximidade que existe entre a *Música serial* — produto do século XX, e a *Música Modal Grega* — produto do século IV a.C., Contemporaneamente, compositores importantes como Milton Babbitt [2], usam no seu trabalho composicional o conceito de grupo, que já estava implícito na música grega.

Esta análise não foi feita somente para mostrar que a nossa civilização utiliza poucos sons do espectro de frequências; ela tem o intuito de ressaltar que, quando se constrõem as relações entre as notas de um modo, está-se logaritmizando a frequência. Assim constata-se que:

- O ouvido humano percebe variações de frequência de forma logarítmica.

Para exemplificar a afirmação acima, faremos uma analogia entre a definição física (em termos de frequência) de uma oitava e a sua aferição musical:

FISICAMENTE: dado f_0 , a frequência f , oitava acima, é dada por:

$$f = 2f_0$$

MUSICALMENTE: dada a nota n_0 , a nota n , oitava acima, é dada por:

$$n = n_0 + R$$

Tl.1

dó	rê	mi	fá	sol	lá	si	dó
f	$\frac{9}{8}f$	$\frac{5}{4}f$	$\frac{4}{3}f$	$\frac{3}{2}f$	$\frac{5}{3}f$	$\frac{15}{8}f$	$2f$

Cada um dos modos gregos cria impressões sonoras características, porém dois deles foram perpetuados até hoje: o modo eólio e o jônio, conhecidos por: ESCALA MENOR E MAIOR. Os nomes associados às notas (dó, rê, mi, ...), não são gregos e foram dados posteriormente.

Visto que a nota musical é um evento sonoro, princípio anteriormente citado, os códigos associados às escalas, os quais são a base do sistema de informação musical (música tradicional), trazem dentro de si uma não-linearidade que acompanhará todo o processo de percepção sonora. É essencial que este fato seja evidenciado agora, pois no decorrer do próximo capítulo outros fenômenos relativos à percepção serão estudados, e neles, também, encontram-se associações não-lineares.

Existem outras formas de determinar sequências de notas musicais relacionadas com números naturais, porém a sequência mais importante para este trabalho é chamada de *Série Harmônica* e é determinada de forma muito mais simples.

- SÉRIE HARMÔNICA associada a uma frequência fundamental w_0 é a sequência de frequências determinadas pelos múltiplos inteiros de w_0 ,

onde: $w_0, 2w_0, 3w_0 \dots$ são chamados de HARMÔNICOS DA FUNDAMENTAL w_0 .

Os músicos em geral têm a série harmônica como um produto natural de sua percepção auditiva, o que vem demonstrar o quanto é importante o conhecimento qualitativo desta série de notas.



$$\text{SH}(N) = N * W_0$$

Fl.2

Já se estabeleceu que a fundamental é a nota preponderante de uma justaposição de outras notas. A série harmônica representa exatamente as notas que ressoam junto com a fundamental. É fácil ver também que, tomando-se apenas potências de 2, a série harmônica será determinada por uma sequência de notas defasadas, entre si, de uma oitava, e portanto notas identificadas com a fundamental (sob o ponto de vista de escala). Definimos agora:

- SOM PURO (ou tom puro): qualquer estímulo sonoro (em particular uma nota musical) que não tenha harmônicos ressoando consigo.

Observa-se que *Som Composto* é a definição complementar.

Estas expressões ressaltadas acima serão de extrema importância posteriormente, quando relacionarmos a série harmônica ao timbre de uma nota musical através do ESPECTRO DE FOURIER.

1.3. TIMBRE

Um outro tópico importante é o conceito de "TIMBRE". Pode-se caracterizá-lo, intuitivamente, como a maneira pela qual um instrumento soa e faz-nos distinguir qual instrumento está sendo tocado. O timbre tem um significado muito amplo neste trabalho, pois nosso objetivo é ampliar este conceito, restrito a um instrumento, definindo-o de forma mais ampla para um conjunto de instrumentos [4].

No dia-a-dia usa-se esta capacidade auditiva de seleção timbrística para distinguir qual pessoa fala, que objeto caiu e se quebrou em outra sala, que instrumento está tocando e em muitas outras ocasiões. Esta distinção é pessoal e é função da interação do ouvido com o estímulo sonoro. Por esta razão, nosso trabalho levará em conta as relações existentes entre a produção acústica do sinal e a sua percepção.

Por enquanto, pode-se afirmar intuitivamente:

- TIMBRE é a propriedade do som que caracteriza sua fonte.

Tendo em vista a maneira pela qual uma nota musical é percebida pelo cérebro, podemos afirmar:

- A noção de timbre é função de percepção das intensidades de cada harmônico.

O som característico de cada instrumento musical é função de dois aspectos:

1. *Matéria-prima de construção.*
2. *Forma de tocar o instrumento.*

Os instrumentos dentro da orquestra são classificados, em grande parte, pelo material com que são construídos:

- a. *cordas* (violinos, violas, cellos e contrabaixos)
- b. *madeiras* (flautas, oboês, corne-ingles, clarinetas e fagotes)
- c. *metais* (trumpetes, trompas, trombones e tubas).

O modo de tocar o instrumento, chamado de *ataque*, influencia grandemente o timbre, pois dependendo do toque, a forma de onda da nota musical mudará significativamente. Para os instrumentos de sopro a forma do bocal e da palheta de cada um é muito importante. No caso das madeiras, temos a seguinte subdivisão:

- a. *palheta simples* (clarinetas)
- b. *palheta dupla* (oboês, corne-ingles e fagotes).

Todos estes fatores físicos são responsáveis pela identificação do timbre e há uma subdivisão timbrística na orquestra, que pode ser caracterizada por subconjuntos assim:

- NAIPE é um subconjunto de instrumentos de mesmo timbre.

Os naipes são a base da estrutura do nosso modelo, pois partindo de uma função que determina o timbre de um naipe construiremos o timbre *orquestral*, do mesmo modo que um músico parte do timbre de cada naipe até abranger toda a orquestra.

1.4. TÓPICOS RELACIONADOS À PERCEPÇÃO AUDITIVA

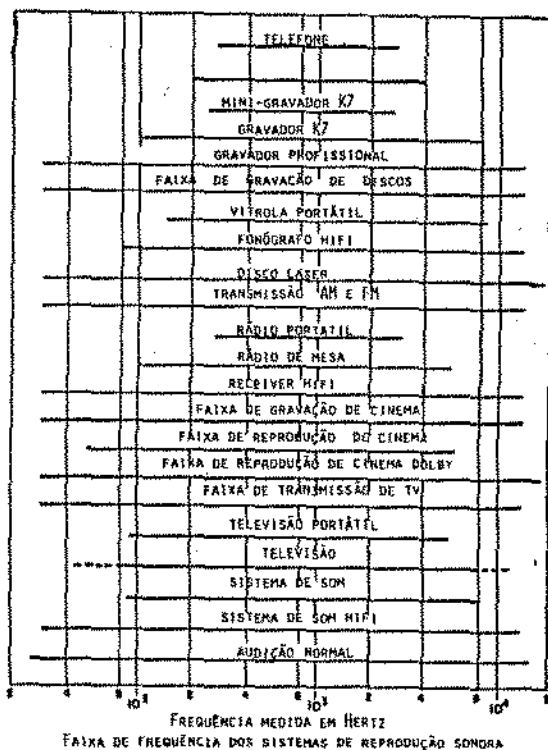
Todas as nossas considerações são no sentido de explicitar as informações necessárias ao entendimento do que significa *Timbre* e como ele é percebido. A partir de agora, focaliza-se a terminologia musical relativa à percepção auditiva dessa característica sonora.

Até este momento, apesar de já se ter mencionado a importância da interação do sinal acústico com o ouvido e o seu processamento posterior no cérebro, não se forneceu nenhuma medida que possa quantizar a percepção auditiva. Assim, seguem três propriedades vinculadas à nossa percepção:

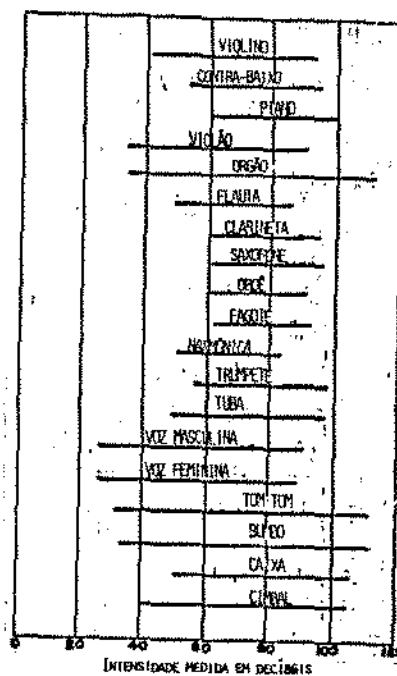
1. Não se escutam todas as frequências com igual intensidade.
2. O intervalo de intensidades percebidas pelo ouvido tem amplitude de aproximadamente 10^{12} .
3. Fixada uma frequência, a variação de intensidade não é percebida de forma linear.

Pode-se entender o primeiro fato acima como a maneira de o ouvido prestigiar as frequências médias do intervalo de audibilidade. Estas frequências estão vinculadas à maioria das informações acústicas do dia-a-dia. Veja gráfico (Gl.1) [20].

Entende-se intuitivamente o segundo fato como uma característica de grande importância na audição, pois através desta versatilidade um indivíduo pode perceber desde o som de uma folha de papel ao cair no chão até o estampido de um canhão. E, para caracterizar esta variação, costuma-se usar uma unidade de medida logarítmica chamada de DECIBEL (denotada por db). Veja gráfico (Gl.2)[20].



Gl.1



Gl.2

Por fim, entende-se o terceiro fato como um complemento do segundo na medida em que se, para uma frequência fixa, a intensidade fosse percebida de forma linear, o ouvido não seria capaz de perceber uma variedade tão grande de intensidades. O que a audição faz é uma mudança de escala que será bem determinada posteriormente (*Equação de Stevens*). Este fenômeno auditivo será levado em consideração ao construirmos o modelo matemático deste trabalho.

Este modo característico de o ouvido perceber intensidades pode ser resumido numa expressão bem conhecida para quem trabalha em áudio:

- *LOUDNESS* é a intensidade percebida pela audição.

A notação musical tem sinais que caracterizam o Loudness com que cada instrumento deve ser tocado durante um determinado trecho musical. São usadas palavras italianas para caracterizar uma variação que vai desde um piano-pianíssimo (escreve-se *ppp*, entende-se muito suave) até um forte-fortíssimo (escreve-se *fff*). Veja tabela (T1.2).

T1.2

<i>fff</i>	forte-fortíssimo
<i>ff</i>	fortíssimo
<i>f</i>	forte
<i>mf</i>	meio-forte
<i>mp</i>	meio-piano
<i>p</i>	piano
<i>pp</i>	pianíssimo
<i>ppp</i>	piano-pianíssimo

Com estas considerações pode-se caminhar para o desenvolvimento deste trabalho. No capítulo seguinte caracteriza-se a interação do ouvido com o sinal acústico de uma forma mais precisa, ou seja, discute-se a percepção auditiva.

CAPÍTULO II

A PERCEPÇÃO DO SOM

Quando se estuda um sistema musical, é necessário também analisar, além dos parâmetros físicos do som emitido, como funciona a *audição humana*. Precisa-se saber quais são, em particular, as reações do ouvido e da audição a estímulos acústicos. Não estamos interessados em estudar todo o processo, mas queremos salientar os seguintes conceitos:

1. *Intervalo de audibilidade de frequência*
2. *Percepção de intensidade sonora (loudness)*
3. *Equação de Stevens*
4. *Percepção timbrística.*

2.1. INTERVALO DE AUDIBILIDADE DE FREQUÊNCIA

O ouvido humano é sensível a sons que tenham no máximo frequências em torno de 15.000 Hz. Desta maneira, é suscetível a mudanças na pressão do ar que ocorram numa escala de tempo da ordem $1.5 \cdot 10^{-4}$ segundos. O tímpano, que é capaz de responder a frequências de comprimento de onda de $4.0 \cdot 10^{-4}$ milímetros, não é capaz de vibrar para comprimentos de onda que ultrapassem 10 metros. Um estímulo sonoro deve ter aproximadamente 30 Hz para sensibilizar o tímpano.

Uma vibração sonora da ordem de grandeza acima, muitas vezes poderá passar despercebida pelo cérebro, mesmo que o tímpano

seja capaz de reagir a esse estímulo.

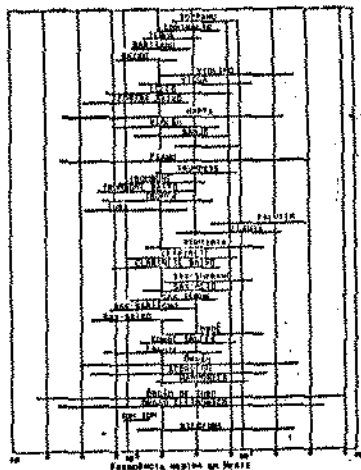
É interessante notar que, apesar de o tímpano ser sensível a mudanças de pressão do ar com períodos menores que $3.0 \cdot 10^{-2}$ segundos, o cérebro, que faz a audição real, é suscetível a eventos sonoros distanciados entre si somente por intervalos de tempos maiores que $5.0 \cdot 10^{-2}$ segundos. Um estímulo sonoro deve durar no mínimo 50 milésimos de segundo para que o cérebro reconheça sua frequência e timbre.

Para interpretar estímulos sonoros, o cérebro utiliza uma escala de tempo inteiramente diferente daquela que o tímpano utiliza. A função do mecanismo da audição é fazer a transdução entre as duas escalas de tempo.

Além destes fatores fisiológicos, que colocam todas as pessoas em igual condição de audibilidade, estamos sujeitos diariamente a poluição sonora e outros problemas que certamente causam traumas acústicos, e que diminuem nossa suscetibilidade auditiva.

Devido a estes fatores é impossível estabelecer uma faixa padrão para todas as pessoas. Por isso, toma-se FAIXA (RANGE) DE FREQUENCIA para um indivíduo com audição hipoteticamente média, como o intervalo dado por: $35 \pm 5 \text{ hz}$ a $15000 \pm 1000 \text{ hz}$.

Para se ter uma idéia do que significa esta variação em termos de estímulo sonoro, veja o gráfico a seguir [20].



G2.1

2.2. PERCEÇÃO DE INTENSIDADE SONORA (LOUDNESS)

É importante notar-se que os limites da audibilidade não são dados somente em função do fator *tempo*, mencionado acima. Tem ainda o ouvido, extremos vinculados à intensidade sonora. Muitas vezes, não se escutam estímulos cujas frequências estão dentro da faixa de audibilidade, porque a intensidade das mesmas é insuficiente para sensibilizar o tímpano.

Esta sensibilização não é assim tão simples. Há uma intensidade limite que é o limiar da audibilidade, porém ela varia de acordo com a frequência de maneira tal que, em primeira aproximação, pode-se dizer que se escutam com maior facilidade as frequências médias, ao passo que os sons agudos e graves são atenuados.

Visto que não se escutam todas as frequências com igual intensidade, pode-se definir uma unidade de medida de intensidade sonora, tomando-se uma referência que esteja numa posição privilegiada entre os dois extremos da faixa de audibilidade de frequências. Uma vez escolhida a referência, diversas pessoas seriam submetidas a medidas de maneira a verificar suas respostas à intensidade.

A referência padrão é 1000 hz e sabe-se que para 1000 hz

a intensidade mínima que se pode ouvir é de 10^{-12} WATT/m², chamada de LIMIAR DE AUDIBILIDADE, enquanto que a intensidade máxima é de 1 WATT/m², e é chamada de LIMITE DA DOR. Verifica-se a extensão da faixa de percepção de intensidade (maior que a faixa de frequência), pois entre o limiar da audibilidade e o limite da dor há uma variação de 10^{12} .

Devido a esta grande variação, seria natural que se determinasse uma unidade de medida de intensidade sonora em função de uma escala logarítmica, para que as medidas fossem tomadas em números de mesma grandeza. Esta unidade é chamada de DECIBEL (denotada por db), isto é, um estímulo sonoro de intensidade I (dada em watt/m²) tem SL db para

$$SL = 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right) \quad (2.1)$$

onde: \log é o logaritmo tomado na base 10, $I_0 = 10^{-12}$ watt/m² e SL é chamado de Sound Level. Observa-se que $1 \text{ db} = 10^{-11.9}$ watt/m².

Um exemplo desta medida pode ser dado da seguinte forma:

- o trompete tem uma variação de intensidade que vai de 56 db a 98 db,
- o violino, 42 db a 93 db.

Como a escala medida em db é logarítmica, o fato de a intensidade máxima do violino ser apenas 5 pontos abaixo da máxima do trompete, não significa que um violino tocando um fortíssimo (ff) esteja dispendendo quase a mesma energia que o trompete, pois:

- 93 db violino = $10^{-2.7}$ watt/m² ,
- 98 de trumpete = $10^{-2.2}$ watt/m² ,

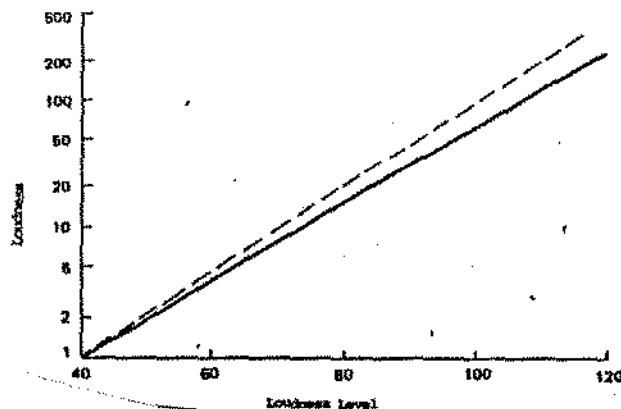
o que mostra que o trumpete toca aproximadamente 3 vezes mais "forte" que o violino. Existe uma escala subjetiva de *loudness instrumental*. Veja na tabela (T2.1) [19] alguns dados sobre o loudness de instrumentos musicais.

T2.1

Intensidade (Watt/m ²)	Loudness
1	Limite da Dor
10 ⁻¹	fff
10 ⁻²	ff
10 ⁻³	f
10 ⁻⁴	mf
10 ⁻⁵	p
10 ⁻⁶	pp
10 ⁻⁷	ppp
10 ⁻¹²	Límiar de Audibilidade

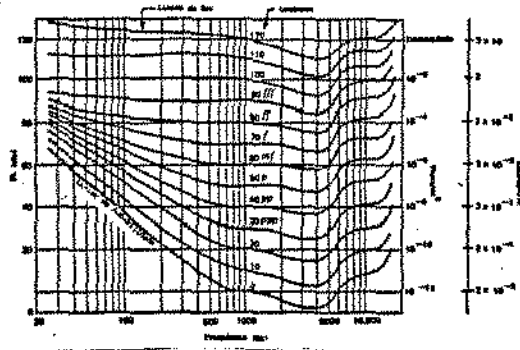
Medidos para
1000 Hz

Tendo em vista que a avaliação sensorial de intensidade é diferente da medida física, e para deixar claro que a relação entre estímulo e percepção não é linear, estas duas medidas são diferenciadas da seguinte forma: chama-se Loudness (L) a medida de percepção de intensidade sonora feita pelo ouvido e Loudness Level (L.L.) a medida física. Uma curva determinada por Stevens em 1955, relaciona estas duas medidas. Veja gráfico (G2.2) [19].



G2.2

Em virtude da dependência do *loudness* da frequência, FLETCHER E MUNSON em 1933 desenvolveram um diagrama que correlaciona curvas de igual *loudness* (L) com o *loudness level* (L.L.). A referência é a de 1000 hz. Verifica-se que o ouvido tem mais sensibilidade a frequências em torno desta referência. Veja gráfico (G2.3) [19] .



G2.3

2.3. EQUAÇÃO DE STEVENS

Outro fator importante na análise do *loudness* é que ao se fixar a frequência variando-se a intensidade, não se percebe de forma linear esta variação.

Quando muitas fontes sonoras soam simultaneamente, e em diferentes frequências, como no caso de uma orquestra, este problema se torna muito mais complexo. Na realidade o *loudness* nestas condições não é o mesmo para cada naipe e depende do intervalo de frequência entre notas tocadas por instrumentos de naipes diferentes. Assim, existem 3 situações possíveis [19]:

1. Para instrumentos com grande diferença de frequência o *loudness* percebido será o *loudness* do instrumento que estiver tocando com maior intensidade.

2. Para instrumentos com pequena diferença de frequência o loudness será dado pela seguinte relação:

$$L = \sum_{i=1}^n C \sqrt[3]{I_i} \quad (2.2)$$

3. Para instrumentos tocando em unísono ou quase em unísono o loudness será dado pela seguinte relação:

$$L = C \sqrt[3]{\sum_{i=1}^n I_i} \quad (2.3)$$

onde: L = loudness, C = constante que depende da frequência e do instrumento, I_i = intensidade com que o instrumento i toca e n = número de instrumentos do naipe. Estas conclusões fazem parte de um trabalho experimental de Stevens em 1970.

Partindo do princípio de que todos os instrumentos tocam em unísono em um naipe qualquer, pode-se agora relacionar a equação 3 com o número de instrumentos que tocam no naipe. Assim, a constante C fica desvinculada da frequência, e, como todos os instrumentos tocam com o mesmo loudness num trecho musical, podemos supor que a intensidade de todos os instrumentos é igual.

Normalizando todas as intensidades, ou seja, fazendo-se $I_i = 1$ para $i = 1, \dots, n$, partindo-se de (2.3) chega-se a seguinte equação:

$$L = C \sqrt[3]{n} \quad (2.4)$$

onde L = loudness, C = constante que depende do instrumento e n = número de instrumentos do naipe.

Pode-se definir, então, *loudness de naipes superpostos*. Analisando-se uma orquestra, verifica-se que apesar de um trecho musical varrer um intervalo relativamente grande de frequência, os naipes não estão muito distanciados entre si. Numa partitura de orquestra verifica-se que partindo do instrumento mais grave, existe em média sempre um instrumento mais agudo distanciados de no máximo duas oitavas.

Há casos extremos, pois nada impede que haja um dueto entre contra-fagote e flautim, mas são bem mais raros. Portanto, para este modelo tomaremos a distância entre os naipes uma "distância suficientemente boa", de modo que se possa usar a equação (2.2) para se definir *Loudness de Naipes Superpostos*. Associando-se a equação (2.2) com a (2.4) pode-se definir:

DEFINIÇÃO: Dado um conjunto orquestral com N naipes, cada um com n_i elementos e constantes C_i ($i = 1, \dots, N$), define-se *Loudness de Naipes Superpostos* (denotado por L_n) como:

$$L_n = \sum_{i=1}^N C_i \sqrt[3]{n_i} \quad (2.5)$$

Esta equação (2.5) será importante na montagem do modelo matemático, pois através dela consegue-se expressar a mudança de

escala que a percepção auditiva faz.

2.4. PERCEPÇÃO TIMBRÍSTICA

No capítulo anterior definiu-se *série harmônica* e foi dito que da percepção de intensidade de cada nota desta série, uma pessoa consegue identificar o timbre de um som. O mecanismo da audição realiza isto, no ouvido interno, transformando vibrações mecânicas em impulsos nervosos correspondentes às frequências da série harmônica para uma dada nota fundamental.

Consequentemente, o cérebro não interpreta o som como flutuações instantâneas de pressão do ar, mas como uma mistura de sons puros num espectro de frequências. Daí a diferença de tempo entre a resposta do cérebro e a do tímpano. Enquanto o primeiro faz uma análise de diversas frequências para uma dada nota fundamental, o segundo somente tem que responder de imediato a cada estímulo sonoro.

Posteriormente, esta análise de diferentes frequências associadas a uma dada nota fundamental será descrita matematicamente pela análise de Fourier de um sinal periódico. Por enquanto, é importante verificar que notas fundamentais de instrumentos diferentes geram necessariamente séries harmônicas diferentes.

Já foi dito no capítulo anterior que as frequências pares da série harmônica reforçarão a nota fundamental. Isto é interpretado do ponto de vista musical com a afirmação de que quanto mais intenso forem os harmônicos de oitava, mais "brilho" o instrumento apresentará.

Em contrapartida, as frequências ímpares que geram outros harmônicos (terça, quinta, sétima etc) fornecerão ao instrumento um som tão mais "anasalado" quanto mais intensos forem estes harmônicos.

Usando as expressões "brilho" e "anasalado", temos a intenção de mostrar como a relação física entre os harmônicos cria conceitos qualitativos a respeito do timbre. Na realidade cada indivíduo terá seu próprio conceito, mas sendo que existem instrumentos sinfônicos há muito tempo conhecidos, algumas relações entre os harmônicos *formam conceitos padrões* que propiciam a diferenciação entre os diversos naipes da orquestra.

No trabalho pioneiro "SENSATIONS OF TONES" [16], [17] , escrito por Helmholtz no século passado, uma análise é feita relacionando de forma intuitiva o conteúdo de harmônicos com o timbre resultante. Considerando-se que os instrumentos de medida de Helmholtz eram extremamente precários, o resultado de seu trabalho é surpreendente , na medida em que suas conclusões são ainda hoje uma importante fonte de informação.

Assim, citamos um trecho do seu trabalho, procurando conservar as suas próprias expressões:

"...1. Tons simples, como aqueles dos diapasões aplicados a câmeras de ressonância e os registros de oitavas dos órgãos de tubo, têm um som muito suave e agradável, livre de toda aspereza, mas são desprovidos de força e pesados nos graves.

"2. Tons musicais, os quais são acompanhados por uma série moderada de harmônicos mais baixos até, mais ou menos, o sexto harmônico, são harmoniosos e musicais. Comparados aos tons simples, são ricos e esplêndidos, e, ao mesmo tempo, perfeitamente doces e suaves se os harmônicos mais altos (acima do sexto) estiverem ausentes. A estes pertencem os tons musicais produzidos pelo "piano-forte", órgãos de tubos abertos, os tons suaves da voz humana e da trompa.

Os tons dos últimos instrumentos citados acima formam a transição para os tons musicais com harmônicos superiores, enquanto que os tons das flautas e dos tubos com pressão baixa nos registros de ar dos órgãos de tubo, se aproximam dos tons simples.

"3. Se somente os harmônicos numerados desigualmente (ímpares) estiverem presentes (como nos órgãos de tubo fechado, cordas do piano-forte percutidas no seu meio e clarinetas), a qualidade do tom é oca (pouco sonora) e, quando um grande número de harmônicos superiores estiver presente, anasalada.

Quando a fundamental predomina, a qualidade do tom é rica. Mas quando ela não é suficiente-

mente mais intensa que os harmônicos superiores, a qualidade do tom é pobre.

Então, a qualidade do tom em órgãos de tubo aberto é mais rica do que a encontrada nos de tubo fechado. Cordas tocadas com martelo no piano-forte geram tons de uma qualidade mais rica que quando tocadas por um bastão ou beliscadas pelo dedo. Os tons de flautas de palheta*.

"4. Quando os harmônicos mais altos que o sexto ou sétimo forem muito distintos, a qualidade do tom é cortada e áspera. A razão para isto, encontra-se nas dissonâncias que estes harmônicos formam uns com os outros.

O grau de aspereza pode ter diversas naturezas. Quando sua força é pequena para os harmônicos superiores, não diminui essencialmente a aplicação musical de tais tons; ao contrário, estes tons são de grande utilidade, pois dão caráter e expressão à música. Os mais importantes timbres desta descrição são aqueles de instrumentos de cordas tocadas com arco e a maioria das flautas de palheta*, harmônico e a voz humana.

* instrumentos de madeira de palheta dupla, (veja capítulo anterior) em câmaras de ressonância adequadas, têm uma qualidade mais rica que outros sem câmaras de ressonância.

A aspereza dos tons anasaladôs de instrumen-
tos de sopro é extremamente penetrante, estes
instrumentos são melhor adaptados para dar
impressão de força que outros com tons simi-
lares, mas de uma qualidade mais suave. Eles
são conseqüentemente pouco apropriados para
música artística, quando usados sozinhos, mas
produzem grande efeito numa orquestra, por-
que alta dissonância de harmônicos superio-
res resulta num tom musical mais penetran-
te..."

Com as informações acima, constata-se como a percepção
dos harmônicos é responsável pelo *Conceito Estético do Timbre*. A
questão estética não será discutida por este modelo; entretanto, na
estruturação do mesmo, forneceremos condições para que o músico mani-
pule as variáveis de maneira que ele mesmo crie o seu conceito esté-
tico.

Algumas concessões foram feitas no tocante ao problema
de não linearidade da audição. Acreditamos que um refinamento poste-
rior será necessário, na medida em que o problema, dentro das condi-
ções propostas inicialmente, for resolvido.

No próximo capítulo estuda-se uma forma de expressar ma-
tematicamente as relações vinculadas a cada nota musical. Posterior-
mente será analisada uma curva que traduzirá a distribuição harmôni-
ca de todas as notas de um instrumento.

CAPÍTULO III

TÓPICOS DA ANÁLISE ACÚSTICA DO TIMBRE

Este capítulo estuda o TIMBRE sob o ponto de vista da acústica. Já temos informações para descrever a percepção timbrística; necessita-se agora conceituar alguns parâmetros acústico-musicais que controlam a interação entre os instrumentos de uma orquestra.

A partir dos tópicos apresentados neste capítulo, o TIMBRE deixará de ser vinculado somente a notas musicais isoladas, para ter uma conotação global que descreverá o comportamento timbrístico de todas as notas de um instrumento musical.

Usando-se o conceito de expansão em SÉRIE DE FOURIER de um sinal periódico e tomando-se o *Espectro de Fourier* como base para caracterizar-se o *tímbre de uma nota*, constrói-se uma curva chamada de ENVELOPE ESPECTRAL, definida como: O ENVELOPE DOS ESPECTROS DE FOURIER de todas as notas de um instrumento musical.

Finalmente, descreve-se um procedimento experimental, desenvolvido por David Luce, para medir o *Envelope Espectral*. Faz-se então uma aproximação linear por partes, para as curvas encontradas por Luce.

3.1. NOTA MUSICAL: SINAL PERIÓDICO

Antes de estudarmos NOTA MUSICAL como um sinal periódico,

definimos FUNÇÃO HARMÔNICA, pois com este tipo de função, obtêm-se a expansão em *Série de Fourier* de um sinal periódico.

DEFINIÇÃO: Uma Função Harmônica é uma função $f : \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}$ da forma:

$$f(t) = A \text{ sen}(wt + \phi) \quad (3.1)$$

onde: A , w , ϕ , são constantes reais chamadas de amplitude, frequência e fase.

Observa-se que tal função é periódica de período $\frac{2\pi}{w}$.

Um instrumento musical tocando uma melodia é uma fonte de sinais acústicos variantes com o tempo. Ao escutar tal melodia, o ouvido humano está identificando uma sucessão de estímulos acústicos que são chamados de *notas musicais*. Já foi dito no capítulo anterior que o intervalo mínimo para que a audição identifique dois eventos sonoros como eventos distintos é de $5.0 \cdot 10^{-2}$ segundos.

Para a música este intervalo de tempo equivale a um andamento (*número de notas por minuto*) de 1200 notas por minuto, que é uma velocidade de execução aproximadamente seis vezes mais rápida do que o *prestíssimo*. Um trecho musical em geral é tocado com uma velocidade menor que 200 notas por minuto; veja tabela (T3.1).

TABELA DE ANDAMENTOS

	(Pulsos por Minuto)
<i>Largo</i>	40 - 60
<i>Larghetto</i>	60 - 66
<i>Adagio</i>	66 - 76
<i>Andante</i>	76 - 108
<i>Modrato</i>	108 - 120
<i>Allergro</i>	120 - 168
<i>Presto</i>	168 - 200
<i>Prestissimo</i>	200 - 210

T3.1

Mesmo assim, esta tabela de andamentos significa que na música tradicional há possivelmente estímulos em intervalos de tempo menor que a capacidade de identificação do ouvido. Na realidade, um andamento dá uma velocidade média de eventos sonoros; logo, existem notas tocadas em subdivisões deste pulso.

No capítulo anterior demonstrou-se que o cérebro não interpreta o som como flutuações instantâneas de pressão, mas como uma sequência de tons puros. Então, cada nota - evento sonoro - que se sucede numa melodia estará vinculada necessariamente a uma SÉRIE HARMÔNICA.

Aparentemente tais considerações são contraditórias, na medida em que escutamos notas timbradas, mesmo quando as notas são tocadas em velocidades próximas ao limite de nossa capacidade de percepção auditiva.

Para conciliar essa aparente contradição, recorre-se ao fato de que uma melodia está inserida num sistema chamado de TONALIDADE, e nesse contexto as notas estarão de tal forma correlacionadas, que podemos afirmar:

- EXISTE UMA SÉRIE HARMÔNICA RESULTANTE ASSOCIADA A UM TRECHO MUSICAL.

O que acontece na música tradicional, é que as notas de uma melodia são vinculadas a estruturas chamadas ACORDES, e os mesmos são constituídos por notas baseadas em uma série harmônica. Logo, quando uma melodia é tocada com um andamento dentro dos valores da tabela (T3.1), cada nova nota, embora seja um novo evento sonoro, será percebida dentro do conteúdo harmônico do acorde criado pela nota fundamental predominante (que inclusive dará o nome ao acorde que acompanha a melodia).

Pode-se verificar um exemplo desta propriedade musical quando se usa um violão para acompanhar uma melodia. Na realidade o processo consiste em ressaltar a série harmônica vinculada à fundamental predominante, isto é, em coincidir as notas do acorde com os harmônicos da série resultante.

Não vamos estender-nos muito mais nesta discussão, pois essas considerações são suficientes para a compreensão do modelo matemático que se seguirá. Entretanto, dois conceitos importantes, sob o ponto de vista da música contemporânea, que são corolários deste trabalho, serão ainda inseridos - e aqui se desvincula a questão estética, pois ambos vêm como consequência dos conceitos acústicos-fisiológicos, já discutidos. São eles:

1. Se uma sequência de notas soar numa velocidade significativamente maior que os

valores tradicionais, a percepção da mesma será a de uma massa contínua de harmônicos, e a noção de eventos discretos se perderá. Contemporaneamente é o que ocorre na música MINIMALISTA.

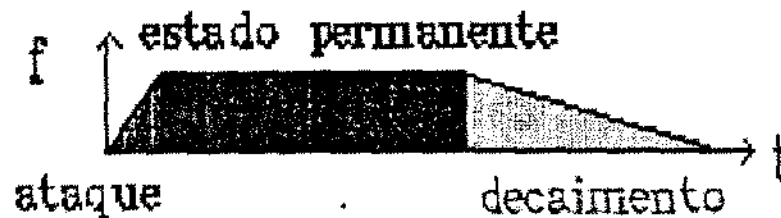
2. Se uma série, de doze notas cromáticas, do decaféonica ou não, for tocada em andamentos muito rápidos, o ouvido, após um certo tempo de repetição do evento, associará uma série harmônica e em consequência um acorde a esta série, não significando que numa sucessão de eventos, assim realizados, os acordes resultantes estejam num contexto tonal. Porém, esta afirmação APROXIMA A MÚSICA SERIAL DA MÚSICA MODAL. Veja modo no capítulo 1, seção 2.2.

Observação: Estas duas afirmações e alguns de seus subprodutos serão alvo de estudo posterior, quando nos preocuparemos exclusivamente com a questão musical, porém as mesmas foram inseridas neste trabalho em virtude da controvertida discussão contemporânea da ATONALIDADE. Na qualidade de músico queremos com tais afirmações romper com a barreira entre o *tonal* e o *atonal*, sugerindo um caminho irrestrito entre estes dois conceitos musicais.

Neste trabalho o tempo de execução de um trecho musical será sempre o tradicional, o que implica numa sucessão de estímulos

sonoros discretos. Em tais andamentos, percebe-se uma mudança de altura de uma nota para outra; sendo assim, cada nota estará vinculada a um evento periódico, pois percebemos uma *frequência bem definida*.

Todavia, o estímulo acústico que chega até o ouvido não tem características totalmente periódicas. Deste modo, visto que este estímulo é função do tempo, ele pode ser dividido em 3 momentos distintos: ataque, estado permanente e decaimento. Veja figura abaixo.



F3.1

Cada um destes estados tem características próprias e bem definidas:

O ATAQUE pode ser medido como o trecho do sinal a partir do momento em que o instrumentista sopra ou dedilha seu instrumento até o instante em que o sinal se estabiliza numa frequência bem definida (este intervalo de tempo é muito pequeno).

O ESTADO PERMANENTE tem a propriedade de ser periódico, estável e mais duradouro que os outros dois estados. Nesta condição pode-se medir a frequência fundamental da nota.

O DECAIMENTO conserva a periodicidade do estado anterior, porém, como há dissipação de energia, a característica deste estado

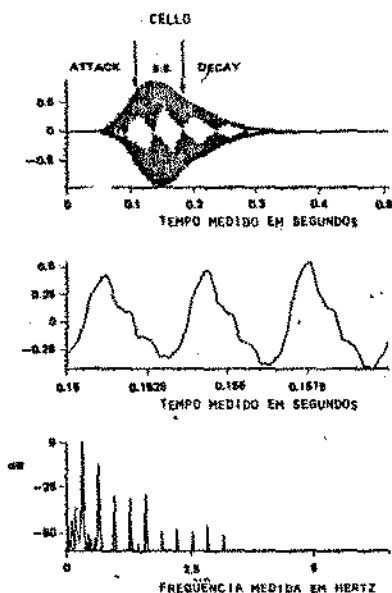
transiente é a de um sinal com amortecimento exponencial.

Tecidas estas considerações chega-se à seguinte definição:

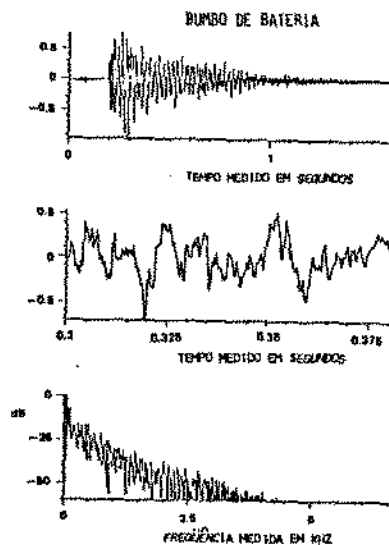
DEFINIÇÃO: NOTA MUSICAL é o sinal periódico associado a um instrumento musical e a uma frequência básica w e portanto com período $\frac{2\pi}{w}$.

Observa-se que a única parte do sinal emitido por um instrumento com estas características é o chamado de *Estado Permanente*, que de agora em diante será considerado como *NOTA MUSICAL*.

Nem todos os instrumentos musicais produzem sinais com estas características: os instrumentos de percussão, por exemplo, geram sons não periódicos, daí o motivo pelo qual os mesmos não têm notas definidas. Veja as figuras abaixo [16].



F3.2



F3.3

Em consequência da definição acima, uma nota musical pode ser decomposta em SÉRIE DE FOURIER (utilizando-se as funções harmônicas). Seja $S(t)$ uma nota musical e ela será escrita na forma:

$$S(t) = A_j \text{ sen}(j\omega t + \phi_j) \quad (3.2)$$

A constante ϕ_j está relacionada com a percepção de direção do som. A fase tem grande importância principalmente para problemas acústicos relacionados com salas de concertos, onde diversos estímulos acústicos soam simultaneamente e os ouvintes estão dispostos em diferentes pontos. Se a taxa de reverberação for muito alta, a informação sonora refletida distorcerá a informação principal. Num projeto de uma sala de concerto é fundamental que se leve em conta a taxa de reverberação com que a mesma será construída [18].

O ouvido humano associa a fase à direcionalidade do som, a fase está vinculada, além de questões inerentes à construção de salas de concerto, a efeitos como o de estereofonia. Sabe-se que:

- *Dois estímulos com fases diferentes não são percebidos com timbres diferentes.*

Assim, apesar de ser muito importante para a acústica o estudo de propriedades da fase no som, neste trabalho suporemos que as fontes geradoras, ou seja, os instrumentos musicais, estão em posições ideais e a taxa de reverberação é baixa, já que a fase não interfere na distinção do timbre [21].

3.2. ESPECTRO DE FOURIER

As constantes A_j e jw , $j \in \mathbb{N}$, têm propriedades bem definidas na música. A sequência definida por jw é exatamente a *Série Harmônica* cuja nota fundamental é w . A sequência determinada por $\{A_j\}$, é chamada de *Coefficientes de Fourier*, que são exatamente as amplitudes da *Série Harmônica* associada a jw . Usando-se estes dois parâmetros podem-se perceber dois pontos importantes:

- a. Como a sequência jw (série harmônica) fica bem definida para uma frequência fundamental w , pode-se decompor uma nota sabendo-se os valores da sequência $\{A_j\}$.
- b. Como os valores da sequência $\{A_j\}$ são exatamente as amplitudes dos harmônicos, da relação existente entre eles é que se identifica o timbre de um instrumento.

Podem-se quantizar os fatores de distinção entre um instrumento e outro como sendo dados por:

1. A quantidade e a distribuição (se são pares ou ímpares ou ambos, por exemplo) das frequências harmônicas.
2. A relação entre as intensidades dada pelo conjunto $\{A_j\}$.

A partir dessas informações, fica claro que os Coefficientes de Fourier $\{A_j\}$ de uma nota $S(t)$, têm uma função importante na identificação do timbre de uma nota musical. Constata-se que, se multiplicarmos todos os coeficientes pela mesma constante, a sensação de timbre ouvida será a mesma, o que leva a conclusão de que realmente o fator preponderante na identificação de um timbre é a proporcionalidade entre tais coeficientes [21] [18].

Pode-se escrever matematicamente esta relação normalizando-se os coeficientes. Toma-se como normalizador $A_{\max} = \max\{A_j\}$. Sabendo-se que o mesmo é único, podem-se normalizar todos os outros coeficientes em relação a ele. Então, segue naturalmente a seguinte definição:

DEFINIÇÃO: Dada uma nota $S(t)$ de frequência fundamental w_0 e seu respectivo conjunto de Coeficientes de Fourier $\{A_j\}$ define-se Espectro de Fourier Timbrístico, denotado por $H(w_0)$, pela sequência descrita por:

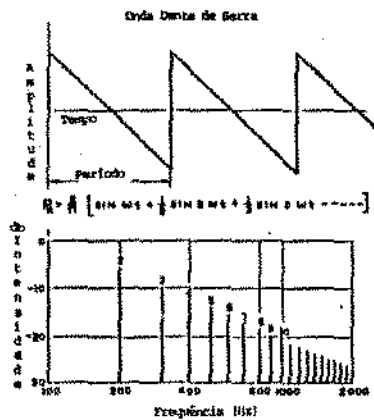
$$H(w_0) = \left\{ \frac{A_j}{A_{\max}} \right\}_{j=1}^{\infty} \quad (3.2)$$

Observa-se que na prática musical esta sequência é aproximada pelos seus ll primeiros elementos, ou seja, $H(w_0) = \left\{ \frac{A_j}{A_{\max}} \right\}_{j=1}^{ll}$

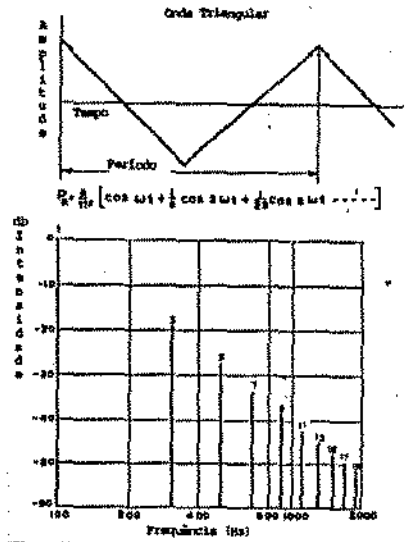
O Espectro de Fourier pode ser colocado num gráfico que associa as frequências harmônicas $(w, 2w, 3w, \dots)$ como abscissas e as respectivas amplitudes de Fourier como ordenadas. Estes parâmetros são,

em geral, medidos em *ciclos por segundo* . (Hertz,Hz) e em *decibéis* (Db), respectivamente.

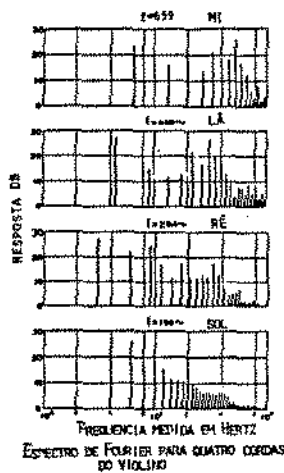
O espectro caracteriza a forma do sinal ou forma da onda, que neste estudo é emitida por um instrumento bem definido. Para exemplificar veja algumas formas de onda e seus respectivos espectros nas figuras abaixo [20].



F3.4



F3.5



F3.6

Precisa-se ressaltar que para os instrumentos musicais o Espectro de Fourier não tem, necessariamente, como mais intensa a amplitude da frequência fundamental. Verifica-se este fato, olhando-se novamente, na figura (F3.6) , os espectros das quatro cordas do violino.

Então a pergunta natural que se formula é a seguinte: Por que se escuta a fundamental como a frequência que define a nota musical?

No capítulo anterior foi estabelecida a importância do intervalo de oitava. Assim, desde que *toda frequência potência de 2 é oitava acima da frequência fundamental*, para a grande maioria dos instrumentos musicais uma destas frequências pares tem o harmônico mais intenso; logo, o mesmo reforçará a percepção da nota fundamental.

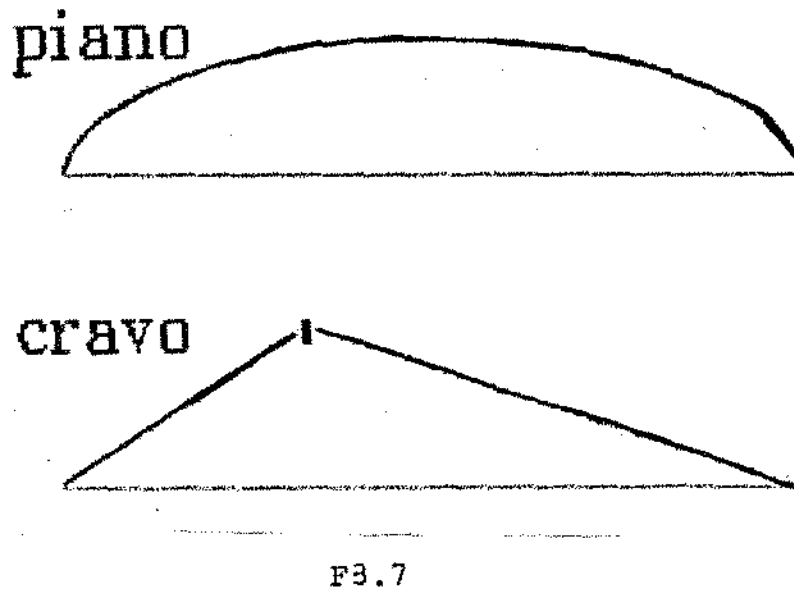
A diferença entre uma nota com a *intensidade da fundamental* maior que a intensidade das outras frequências harmônicas, e outra nota com a intensidade maior numa *frequência oitava acima da fundamental*, é que a segunda nota será percebida com mais "brilho".

Tradicionalmente, a orquestração tem um procedimento muito característico que é o de oitavar uma melodia tocada por um instrumento mais grave, através de um instrumento mais agudo tocando oitava acima. Esta é uma forma conhecida de se dar mais brilho à melodia ouvida.

Retomando o final do capítulo anterior, onde estão descritas as leis de Helmholtz, analisamos suas conclusões através do espectro de Fourier de uma nota. Para exemplificar esta analogia usamos uma comparação entre dois instrumentos musicais: *Cravo e o Piano*.

O conteúdo de harmônicos está basicamente vinculado à maneira pela qual o sinal é gerado e ao material com o qual o instrumento é fabricado. Para este exemplo a preocupação é somente com a geração de uma nota no piano e no cravo. No primeiro a corda é percutida e no segundo a corda é beliscada; logo, a forma de onda gerada pelas

cordas do piano é côncava, ao passo que, para o cravo, a forma será pontiaguda a partir do ponto em que a corda é beliscada. Veja a figura.



Pode-se perceber que a forma de onda do cravo está próxima de uma ONDA DENTE-DE-SERRA o que fará com que os harmônicos ímpares sejam tão intensos ou mais intensos que os pares, daí a característica sonora do cravo descrita por Helmutz na sua segunda lei como: "...oca (pouco sonora) e se um grande número de harmônicos superiores estiverem presentes, nasal..."

Em contrapartida no piano, onde a corda é percutida em $1/7$ do seu comprimento, o sétimo harmônico é eliminado, pois este ponto é exatamente o nó onde ele se forma. Desta maneira o conteúdo de harmônicos do piano é constituído essencialmente de harmônicos pares.

Quando se analisa a segunda lei de Helmutz, verifica-se que ele chama o timbre resultante no piano-forte de "ríco e

esplêndido". É compreensível, pois na época em que Helmholtz escreveu suas leis, este instrumento surgia como o portador de uma nova sonoridade. Além disso, sua expressão está baseada no fato de que no piano, ao contrário do que ocorre no cravo, a quantidade de harmônicos para os primeiros harmônicos (até o 7º) ressalta a fundamental.

Assim, usando-se os conceitos vinculados ao espectro de Fourier, analisa-se o timbre de cada nota isolada de um instrumento musical bem determinado. Para o modelo que se construirá posteriormente um outro conceito é necessário, uma curva que descreva o comportamento timbrístico de todas as notas do instrumento.

3.3. ENVELOPE ESPECTRAL

Pretende-se encontrar uma curva que, dada uma variação dinâmica de frequências e um trecho musical limitado por uma frequência máxima e mínima, relacione todos os harmônicos ouvidos neste trecho. Esta curva existe e é chamada de ENVELOPE ESPECTRAL (E.E.). Antes disso, para que o mesmo seja posteriormente bem definido, é necessária uma caracterização matemática de ENVELOPE DE UMA FAMÍLIA DE CURVAS.

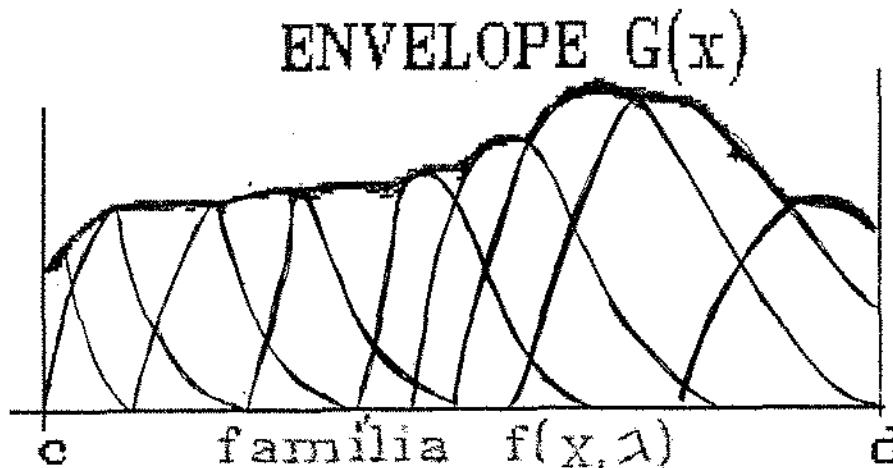
DEFINIÇÃO: Dado um intervalo de frequência $[c,d] \in \mathbb{R}$, um parâmetro $\lambda \in \mathbb{R}$ e uma família de curvas descrita por:

$$f(.,\lambda):[c,d] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ com } a \leq \lambda \leq b$$

define-se como envelope da família $f(x,\lambda)$, uma curva $g(x)$, na forma:

$$g(x) = \text{Max}_{\lambda} f(x, \lambda) \quad (3.3)$$

A $g(x)$ é uma curva que envolve a família de maneira tal que sempre toque a curva mais externa de $f(x, \lambda)$; veja a figura (3.8). Pode-se juntar a definição , para chegar-se a uma definição global para o timbre de um instrumento.



F3.8

Para isto observamos que, dado um instrumento musical com tessitura $[w_{\min}, w_{\max}]$ tocando uma nota musical de frequência fundamental $w_0 \in [w_{\min}, w_{\max}]$, pode-se obter uma função para cada w_0 :

$$\text{Int } H(w_0)(\cdot) : [w_{\min}, w_{\max}] \longrightarrow \mathcal{R}$$

obtida por interpolação linear por partes no Espectro de Fourier Timbrístico $H(w_0)$ do instrumento.

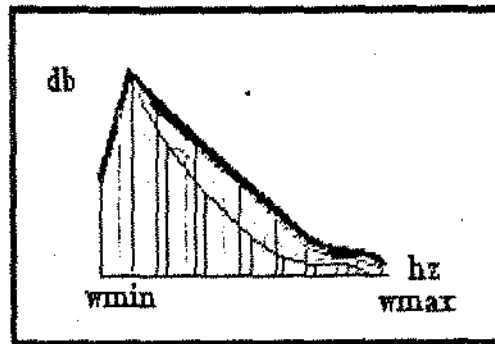
Tem-se portanto uma família de curvas parametrizadas por

$$w_0 \in [w_{\min}, w_{\max}] .$$

DEFINIÇÃO: O ENVELOPE ESPECTRAL, denotado por $E(w)$, de um instrumen
to musical é a função $E : [w_{\min}, w_{\max}] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$E(w) = \max\{\text{Int}\{H(w_0)(w)\} , w_{\min} \leq w_0 \leq w_{\max}\} \quad (3.4)$$

Observa-se que a interpolação se faz necessária, porque o espectro de Fourier determina uma sequência discreta de pontos; assim, para achar o máximo a cada w_0 , interpola-se de maneira a obter um espectro contínuo. Veja figura (3.9).



F3.9

A pergunta decorrente é: como calcular o Envelope Espectral de um instrumento musical?

Uma forma de obtê-lo é através de um procedimento experimental. Então, descrevemos agora um procedimento desenvolvido por David Luce com este objetivo [15], [13], [14].

1. Dado um instrumento musical, medem-se os espectros de Fourier de todas as frequências fundamentais (w_0) contidas em $[w_{\min}, w_{\max}]$ tocadas numa mesma intensidade.

2. Verifica-se qual é a frequência (w_{\max}) do harmônico de maior intensidade de todos os espectros medidos, ou seja, acha-se

$$N_{\max} = \max_{w_0} \max_w \{ \text{Int } H(w_0) (w) \}$$

3. Normaliza-se a amplitude de w_{\max} em relação a um valor pré-fixado (valor =1), assumindo-se que:

$$\text{Amplitude}(w_{\max}) = \frac{1}{N_{\max}}$$

4. Escalonam-se as amplitudes dos outros espectros tomando-se como referência o harmônico (H_0), de frequência mais próxima de w_{\max} . A partir de H_0 , normalizam-se as outras amplitudes, ou seja, efetuam-se uma interpolação e uma normalização:

$$\text{Int}(w, w_0) = \frac{1}{N_{\max}} \text{Int}\{H(w_0) (w)\}$$

OBSERVAÇÕES:

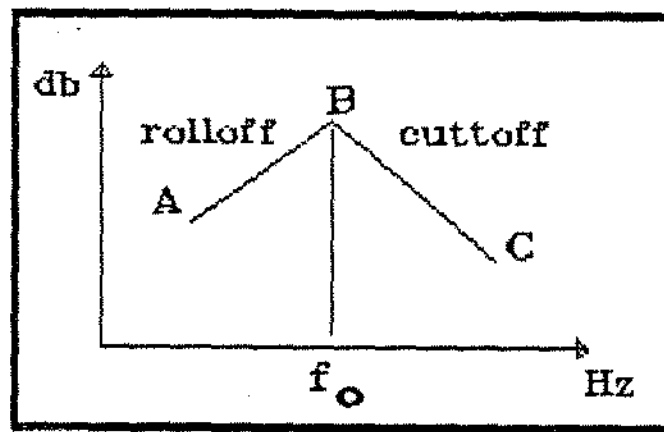
1. Devem-se medir os harmônicos depois de completados 10 ou mais ciclos do estado permanente, para minimizar as flutuações no harmônico de pequena amplitude.

2. Considerando-se instrumento e instrumentista devem -se tomar diversas medidas, para minimizar as distorções de afinação e variação de intensidade padrão.

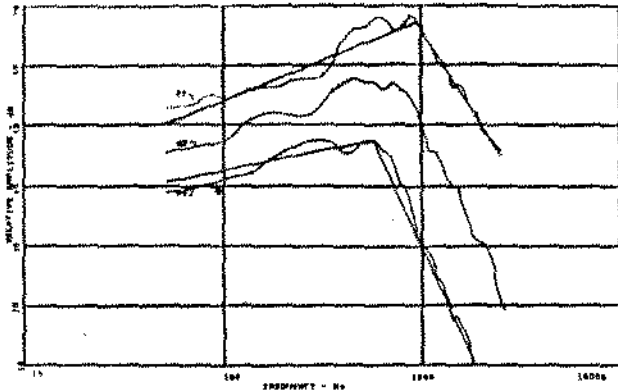
3. Já que as medidas são aferidas para uma intensidade fixa, o *Envelope Espectral* é função do loudness com que o instrumentista toca.

Os resultados de David Luce foram expressos em curvas que os gráficos das próximas páginas mostram. Note-se que a medida de intensidade é decibel (db) e a escala de medida de frequência é tomada como o logaritmo na base 10 da frequência ($w = \log(\text{freq})$) é a medida em hertz (Hz).

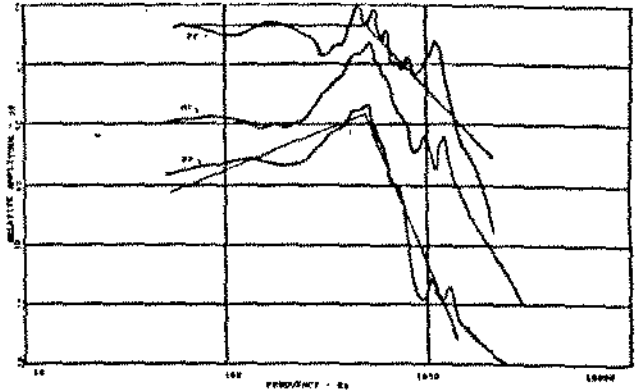
Percebe-se que estas curvas têm uma característica bem definida: elas são inicialmente crescentes, têm um pico e depois decrescem. Tendo em vista esta propriedade, Luce sugere que se recorra a uma aproximação linear por partes -tipo função chapéu -destas curvas como a forma mostrada na figura abaixo.



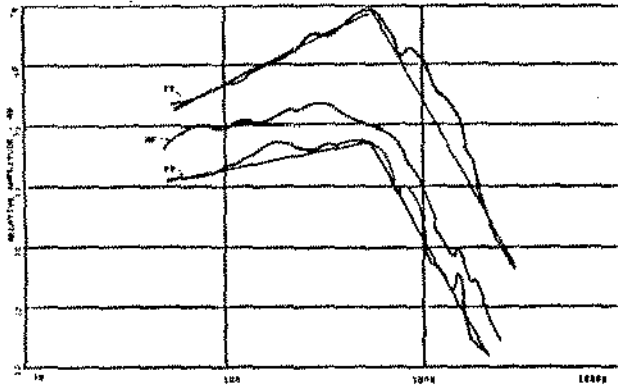
G3.1



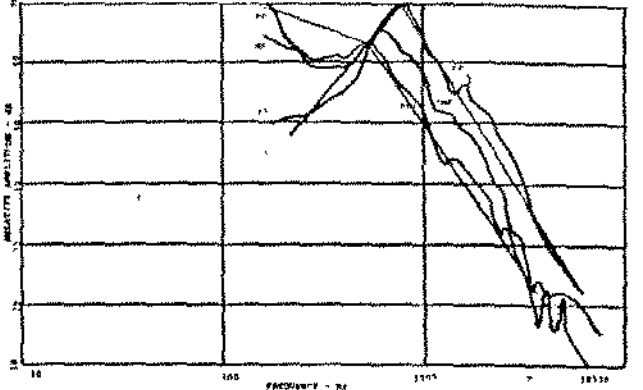
Envelope Espectral do Trombone



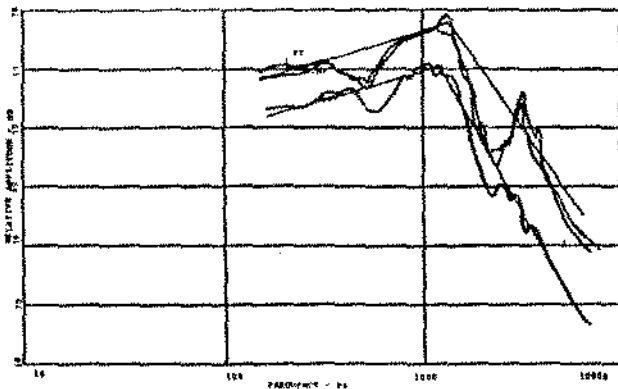
Envelope Espectral do Fagote



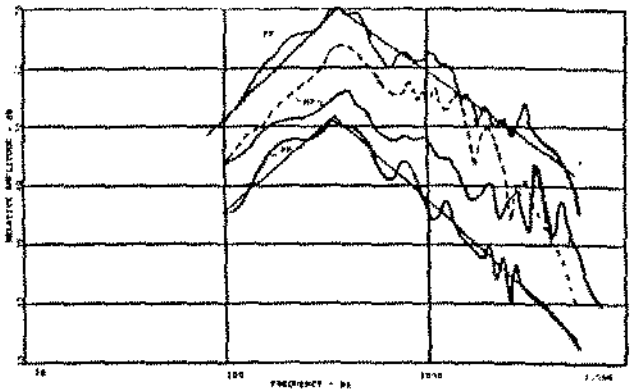
Envelope Espectral da Trompa



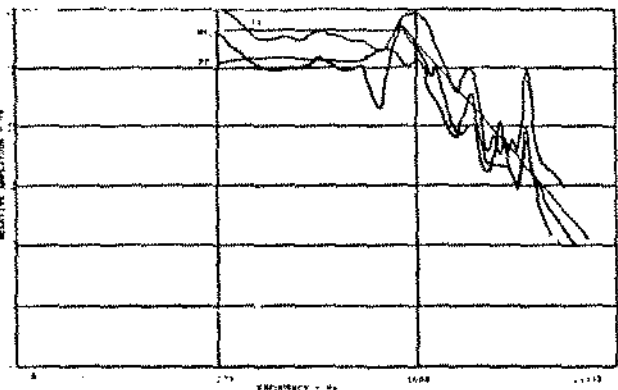
Envelope Espectral da Flauta



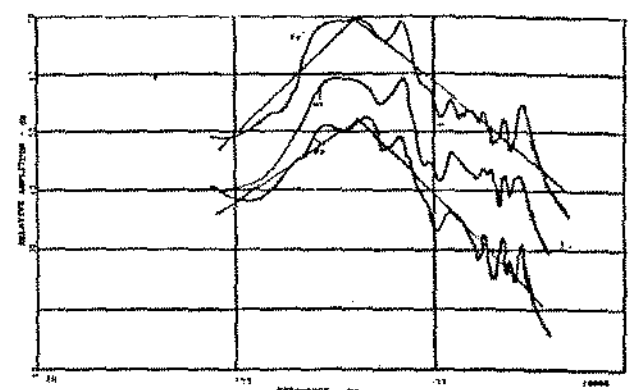
Envelope Espectral do Oboé



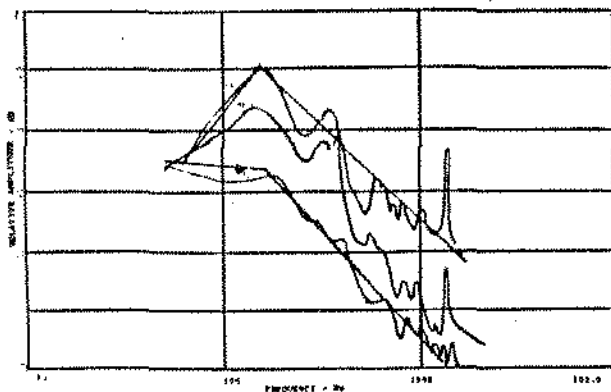
Envelope Espectral do Violino



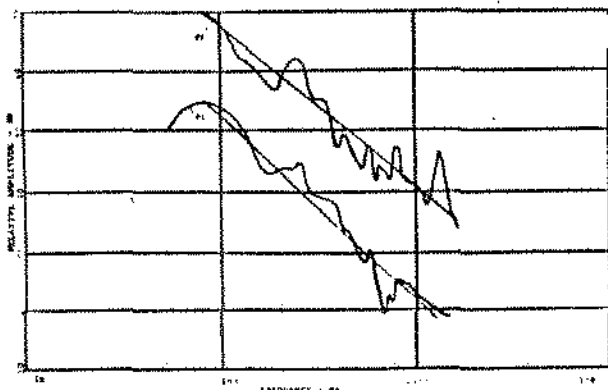
Envelope Espectral Corne Inglês



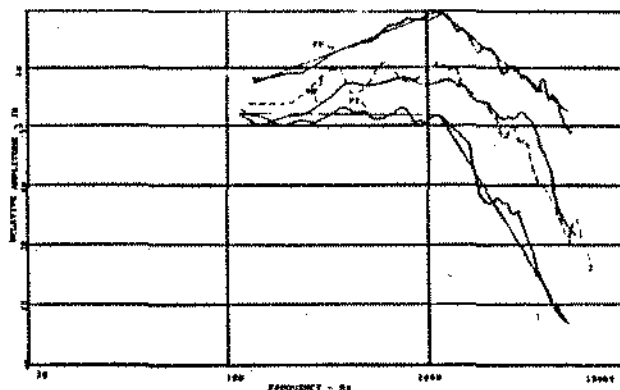
Envelope Espectral da Viola



Envelope Espectral do Cello



Envelope Espectral do Contra-Baixo



Envelope Espectral do Trompete

instrumento	f_0	Δf	f_{min}	f_{max}	f_0	Δf
flauta	63	7	261	2093	780	130
oboé	60	7	233	1568	1300	0
corne-ingles	65	*	164	698	900	*
fagote	52	14	58	523	520	0
trompete	53	17	164	932	1200	0
trompa	47	22	61	698	550	0
trombone	47	20	82	466	550	200
violino	52	18	193	3136	350	0
viola	53	17	130	1046	350	0
cello	44	16	65	523	160	0
c. baixo	55	15	41	329	80	0

*Dados insuficientes para interpretação.
Frequência medida em Hz.

Acima na tabela (T3.2), para cada instrumento, as frequências máxima e mínima (f_{min}, f_{max}), as frequências de esquina do Envelope Espectral pp (f_0) e a diferença entre a frequência de esquina do E.E. ff (f_1) e f_0 , ou seja, $\Delta f = f_1 - f_0$.

Usando-se esta aproximação, o *Envelope Espectral* pode ser escrito de uma forma muito simples que é função apenas da declividade (chamada *rolloff*) da reta AB à esquerda, da declividade (chamada de *cutoff*) da reta BC à direita e da frequência de corte f_c . Veja a tabela abaixo que contém os resultados experimentais de Luce para o procedimento de aproximação descrito acima [15].

instrumento	rolloff	Δr	cutoff	Δc
flauta	-13	46	-49	-7
oboé	10	0	-56	10
corne-inglês	*	*	-36	*
fagote	13	-13	-66	36
trumpete	0	13	-49	26
trompa	7	10	-66	0
trombone	7	7	-80	33
violino	26	7	-30	10
viola	20	10	-30	3
cello	7	26	-36	7
c. baixo	*	*	-33	3

T3.3

rolloff e cutoff para *Envelope Espectral*, ou seja, r_0 e c_0 respectivamente; $\Delta r = r_1 - r_0$ e $\Delta c = c_1 - c_0$, todos medidos em db/décadas.

Pode-se discutir a característica timbrística de cada instrumento estudado neste experimento sob o ponto de vista do *Envelope Espectral* aproximado linearmente. Vamos usar este procedimento para analisar, como exemplo, o timbre do trumpete.

O trumpete, quando tocado em pp, exibe um rolloff = 0 (declividade da reta à esquerda) e após a frequência de corte de 1200 Hz, o cutoff (declividade da reta à direita) é muito acentuado.

Essas características geram, neste loudness pp, um timbre onde a fundamental é

predominante, entretanto os harmônicos superiores decaem rapidamente quando se caminha para o registro agudo do instrumento, o que criará um timbre agradável ao ouvido, mas sem muita penetração.

Ao contrário, para o loudness ff, o rolloff e o cutoff são próximos, fator este que dará mais brilho e penetração ao som do instrumento. E, por causa desta distribuição homogênea do cutoff e rolloff, quando se caminha para o registro agudo não haverá o mesmo decaimento existente para notas tocadas em pp e o som será mais penetrante.

Neste capítulo caracterizou-se o *timbre global de um instrumento, através do Envelope Espectral*. Na seção a seguir discute-se uma forma de construir uma função que descreva o comportamento tímbrico de toda a orquestra tocando simultaneamente.

CAPÍTULO IV

TIMBRE ORQUESTRAL

Para construir um modelo matemático que descreverá o Tím
bre Orquestral, vamos associar todas as informações veiculadas nos
capítulos anteriores. É importante retomar o que foi discutido até ago-
ra, como uma forma de sintetizar os conceitos expostos. Sendo assim,
pode-se resumí-los nos seguintes tópicos:

1. *O timbre está fortemente relacionado com o loudness de um instrumento.*
2. *O Envelope Espectral representa a distribuição dos harmônicos de todas as notas de um instrumento e ele depende do loudness musical.*
3. *Visto que as notas tocadas por um instrumento vinculam um trecho musical à Série Harmônica da nota fundamental preponderante, pode-se associar esse trecho a essa distribuição bem determinada de harmônicos.*

Reunindo-se estes três conceitos básicos conclui-se a idéia fundamental do modelo matemático.

- O TIMBRE ORQUESTRAL É FUNÇÃO DA DISTRIBUIÇÃO

DE HARMÔNICOS GERADA PELAS NOTAS TOCADAS ENTRE A FREQUÊNCIA MÁXIMA E A MÍNIMA DE UM TRECHO MUSICAL. ASSIM, A SUPERPOSIÇÃO DOS ENVELOPES ESPECTRAIS DESSES INSTRUMENTOS DARÁ ESSE TIMBRE.

Logo, para aproximar o timbre de um instrumento para todos os loudness musicais, é necessário construir uma função $f(w,y)$, onde "w" é a frequência e "y" um parâmetro associado ao loudness do instrumento. Partindo do princípio que do experimento de Luce (Capítulo III) não obtemos um *Envelope Espectral* para cada loudness da tabela (Tl.2) do Capítulo I, a $f(w,y)$ será construída através de uma *interpolação linear*.

O timbre é função da interação do ouvido com o som; por esta razão, uma variável "x", associada a equação de Stevens (Capítulo II), multiplicará a *Função-Timbre de Um Instrumento*. Assim, esta função vinculada a distorção auditiva descreverá o *Timbre do Naípe*.

Sabendo-se que há "n" naipes diferentes na Orquestra, introduzimos o índice "j" ($j = 1,2,3,\dots,n$) e dessa forma a *Função-Timbre do naípe j* será denotada por $f_j(w, x_j, y_j)$.

Dadas as frequências máxima e mínima de um trecho musical, as $f_j(w, x_j, y_j)$ e as tessituras de cada instrumento do naípe (Capítulo I), verifica-se a frequência a partir da qual cada naípe fornece harmônicos para o trecho. Encontradas essas frequências, chamadas de *frequências de corte*, tem-se a *Função-Timbre Orquestral* associada a esse trecho musical, denotada por $F(w,X,Y)$ e descrita como

a somatória das $f_j(w, x_j, y_j)$ que atuam nesse intervalo.

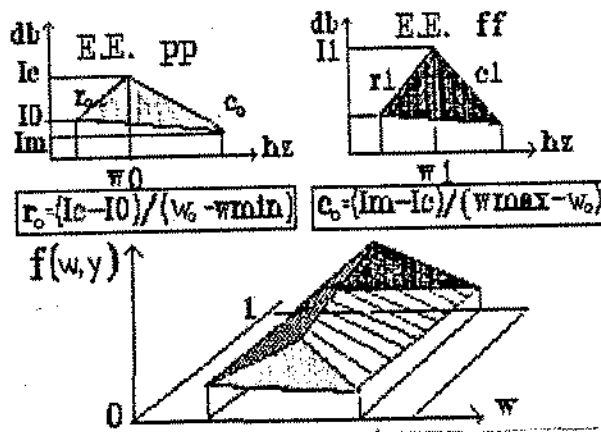
4.1. FUNÇÃO TIMBRE DE UM INSTRUMENTO

No capítulo anterior verificou-se que o Envelope Espectral pode ser associado a uma função do tipo função chapéu, e para construir-se a função-tímbre de um instrumento usa-se esta aproximação.

Num trecho musical, sabe-se que cada um dos naipes tocará em intensidade específica. Já se obteve a curva que descreve o timbre do naipe, curva que além da frequência (w), também depende da intensidade. Assim, usa-se um parâmetro "y" onde $0 \leq y \leq 1$, que caracterizará as variações de intensidade de um instrumento, partindo de $y=0$ onde o instrumento toca ppp até $y = 1$ com loudness fff.

Portanto, queremos construir uma $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, onde, $w = \log(\text{frequência})$ e $y = (\text{loudness musical})$.

Partindo-se das aproximações lineares (Capítulo III) para o Envelope Espectral, elas serão chamadas de $f(w, 0) = \text{envelope ppp}$ e $f(w, 1) = \text{envelope fff}$. Justapondo-se a estes dois E.E. em planos paralelos, obtém-se $f(w, y)$, fazendo-se uma interpolação linear entre tais curvas; veja a figura a seguir.



F4.1

Na realidade, a partir dessa aproximação linear, o que varia de um E.E. para outro são:

1. Taxas de rolloffs (declividades das retas à esquerda).
2. Taxas de cuttoffs (declividades das retas à direita).
3. Frequências de corte.

Assim, chamando-se (veja as tabelas T 3.2 e T 3.3):

- taxa de rolloff de $f(w,0) = r_0$,
- taxa de cuttoff de $f(w,0) = c_0$,
- frequência de corte de $f(w,0) = \omega_0 = \log(f_0)$,
- intensidade do harmônico de $f_0 = I_0$,
- taxa de rolloff de $f(w,1) = r_1$,
- taxa de cuttoff de $f(w,1) = c_1$,
- frequência de corte de $f(w,1) = \omega_1 = \log(f_1)$,
- intensidade do harmônico de $f_1 = I_1$,

obtêm-se as seguintes relações:

$$\Delta r = r_1 - r_0, \Delta c = c_1 - c_0, \Delta \omega = \omega_1 - \omega_0, \Delta I = I_1 - I_0 \quad (4.2)$$

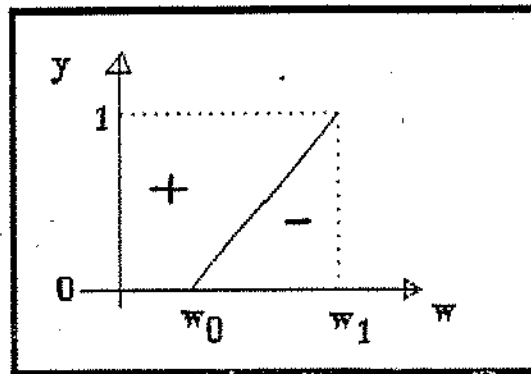
Para obtermos a função $f_e(w,y)$, à esquerda de $f(w,y)$, fazemos uma combinação convexa de retas, o que dá o seguinte resultado:

$$f_e(w,y) = (r_0 + y \Delta r) (w - (w_0 + y \Delta w)) + I_0 + y \Delta I \quad (4.3)$$

De modo similar, obtêm-se a função $f_l(w,y)$, à direita:

$$f_d(w,y) = (c_0 + y \Delta c) (w - (w_0 + y \Delta w)) + I_0 + y \Delta I \quad (4.4)$$

Dado um ponto (w_0, y_0) , para bem determinar $f(w_0, y_0)$, precisa-se de uma função que verifique o ramo da $f(w,y)$ na qual está o ponto dado. Com tal propósito, constrói-se a seguinte reta; veja gráfico (4.1).



G4.1

ou seja,

$$y = \frac{w - w_0}{\Delta w} \quad (4.5)$$

Assim definimos:

$$g(w,y) = \text{sign} [(w_0 + y \Delta w) - w] \quad (4.6)$$

Tal função verifica qual ramo da $f(w,y)$ será utilizado (veja gráfico G4.1)

Finalmente, $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ está bem determinada e é descrita por:

$$f(w,y) = \begin{cases} f_e(w,y) & \text{se } g(w,y) \geq 0 \\ f_d(w,y) & \text{se } g(w,y) \leq 0 \end{cases} \quad (4.7)$$

onde: $f_e(w,y)$, $f_d(w,y)$ e $g(w,y)$ estão em (4.3), (4.4) e (4.5) respectivamente.

4.2. FUNÇÃO TIMBRE DE UM NAIPE

A $f(w,y)$ descreve o timbre de um instrumento musical tocado com um determinado loudness; precisa-se porém, caracterizar a interação existente entre o naipe (diversas fontes sonoras de mesmo timbre) e o ouvido, pois o timbre de um naipe é função da percepção.

Sabe-se que não se percebe a variação de intensidade de forma linear. Portanto, em função desse fator, precisa-se fazer uma correção no modelo, de maneira que o mesmo leve em conta a interação entre o som produzido e o som percebido, ou seja, a percepção que um indivíduo terá ao aumentar-se o diminuir-se a quantidade de instrumentos de um naipe.

Partindo-se deste princípio toma-se "x" como sendo:

$$x = C \sqrt[3]{n} \quad (4.8)$$

onde temos acima a equação de Stevens, C = constante que depende do naipe e n = número de instrumentos que tocam no naipe.

Usando-se a equação (4.8), tem-se finalmente a *Função Timbre de Um Naípe* como uma $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$f(w, x, y) = x f(w, y) \quad (4.9)$$

onde: $f(w, y)$ está definida em (4.7) e "x" em (4.8). Observa-se que a expressão (4.9) pode ser vista como sendo a $f(w, y)$ ponderada pelo *fator de distorção auditiva* fornecido pela equação de Stevens.

Para generalizar a $f(w, x, y)$ para os "n" naipes da orquestra usamos o índice $j = 1, 2, 3, \dots, n$ (como já descrito acima). Assim, a FUNÇÃO-TIMBRE DO NAIPE j é:

$$f_j(w, x_j, y_j) = \begin{cases} x_j \{ (r_{0j} + y_j \Delta r_j) (w - (\omega_{0j} + y_j \Delta \omega_j)) + I_{0j} + y_j \Delta I_j \} & \text{se } g(w, y) \geq 0 \\ x_j \{ (c_{0j} + y_j \Delta c_j) (w - (\omega_{0j} + y_j \Delta \omega_j)) + I_{0j} + y_j \Delta I_j \} & \text{se } g(w, y) \leq 0 \end{cases} \quad (4.10)$$

onde: w é a variável associada ao logaritmo da frequência; x_j é associado ao número n_j de instrumentos que tocam no naípe j com $x_j = C_j \sqrt[3]{n_j}$ (C_j constante dependendo dos instrumentos que tocam no naípe); y_j é associada ao loudness com que cada instrumento do naípe j toca; Δr_j , Δc_j , r_{0j} , c_{0j} , ω_{0j} , I_{0j} , $\Delta \omega_j$, ΔI_j são as constantes definidas acima em (4.1) e (4.2) associadas ao naípe j .

4.3. FUNÇÃO-TIMBRE ORQUESTRAL

Partindo-se das conclusões do tópico anterior, consegue-se

generalizã-las para uma *Orquestra* através de uma
 $F: \mathbb{R}^{2n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$

Dadas as frequências *máxima* (max) e *mínima* (min) de um trecho musical cada naípe tem um intervalo de frequência no qual é capaz de tocar (*tessitura*). Cada E.E. tem um w_{\min} e um w_{\max} que são as frequências inicial e final da tessitura do naípe. Sendo assim, dados n -naípes tem-se o seguinte conjunto:

$$\{w_{\min j}, w_{\max j} \text{ com } j = 1, 2, 3, \dots, n\}. \quad (4.11)$$

Chamando-se os elementos do conjunto obtido em (4.11) de " N_j ", pode-se ordenar o mesmo (em ordem crescente) juntamente com min e o max do trecho musical, obtendo-se o seguinte resultado:

$$N_1 < \dots < N_{\ell 1} - 1 \leq \min < N_{\ell 1} < \dots < N_{\ell 2} < \dots < N_{\ell 2+1} < \dots < N_1 < \max \leq N_{\ell 2+1} < \dots < N_1 \quad (4.12)$$

onde: $\ell \leq 2n$.

Como a função a ser determinada está associada a um trecho musical, só frequências contidas entre [min,max] incrementarão o conteúdo de harmônicos do trecho. Então, cria-se um novo conjunto, que é subconjunto do conjunto (4.12), fazendo-se a seguinte renomeação:

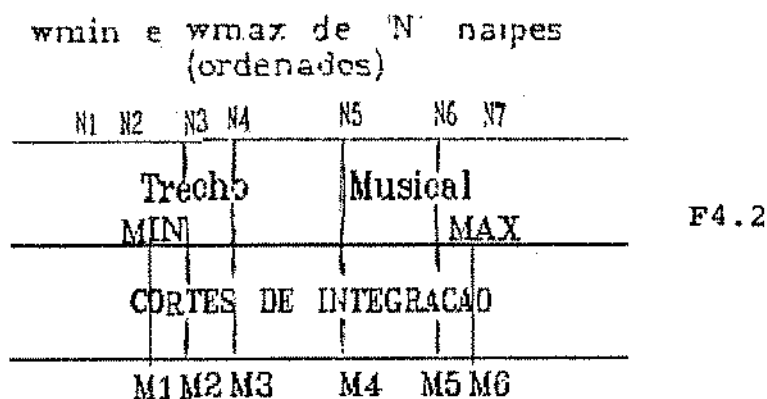
$$M_0 = \min, \quad M_1 = N_{\ell 1}, \quad M_2 = N_{\ell 1+1}, \dots, M_{\ell 2-\ell 1} = N_{\ell 2}, \quad (4.13)$$

$$M_{\ell 2-\ell 1+1} = \max .$$

Tomando-se $k = l_2 - l_1 + 1$ chega-se ao seguinte conjunto:

$$\{M_0, M_1, M_2, M_3, \dots, M_k\} \quad (4.14)$$

onde: chama-se "k" de número de cortes de integração. Veja figura abaixo:



Não se sabe quais funções estarão atuando num dado intervalo $(M_i, M_{i+1}]$, precisa-se ainda recorrer a um artifício matemático que indicará se um instrumento toca ou não nesse intervalo.

Com este objetivo cria-se uma função indicador descrita como uma $S_i : (1, 2, 3, \dots, k) \longrightarrow (0, 1)$ dada por:

$$S_i(j) = \begin{cases} 1 & \text{se } w_{\min j} \leq M_i \text{ e } w_{\max j} \geq M_{i+1} \\ 0 & \text{na situação complementar} \end{cases} \quad (4.15)$$

Partindo-se desses dados pode-se escrever de forma clara a FUNÇÃO-TIMBRE ORQUESTRAL.

DEFINIÇÃO: A Função Timbre-Orquestral é uma $F(\cdot, X, Y) : (M_0, M_k] \longrightarrow \mathcal{R}$,
definida para $w \in (M_i, M_{i+1}]$, com $i = 1, 2, \dots, k$, ou seja

$$F(w, X, Y) = \sum_{j=1}^n S_i(j) f_j(w, x_j, y_j) \quad (4.16)$$

onde: $f_j(w, x_j, y_j)$ são as funções determinadas pela equação (4.10).

Desta maneira consegue-se descrever o *timbre orquestral*. No capítulo que se segue, desenvolve-se uma forma de otimizar a *Função-Timbre Orquestral*. Criam-se condições para construir-se uma *Função-Timbre Objetivo* e estruturar-se um problema de *otimização* que consiga propiciar a *simulação de um timbre desejado para um determinado conjunto orquestral*.

CAPÍTULO V

SIMULAÇÃO DE TIMBRES ORQUESTRAIS

No capítulo anterior definiu-se a FUNÇÃO-TIMBRE ORQUESTRAL; neste capítulo, esta função será usada para construir-se uma FUNÇÃO OBJETIVO de um problema de programação não linear misto. Lembremos que as variáveis envolvidas x_j e y_j ($j = 1, \dots, n$ indica o número do naipe na orquestra), estarão associadas respectivamente a:

x_j número de instrumentos que tocam no j -ésimo naipe. Variável discreta limitada pelo número máximo e mínimo de instrumentos por naipe.

y_j loudness de cada instrumento do naipe. Variável real limitada no intervalo $[0,1]$.

Na realidade as duas variáveis do problema estão associados a valores discretos, porém y_j será considerada real na medida em que esta variável associa os valores de cada loudness musical a um subintervalo de $[0,1]$. O mesmo procedimento não é possível para x_j ; em muitas situações, tem-se que decidir entre 0 ou 1 ou 3 instrumentos tocando no naipe.

Por exemplo, numa composição para música de câmara, cada naipe é constituído por instrumentos solistas, então x_j estará

associado a valores 0 ou 1. Porém, quando o naipe é composto por violinos, onde o número de instrumentos é relativamente grande (da ordem de 20 a 25 instrumentos por naipe), não há mais necessidade que x_j seja discreto. Então, adotamos o seguinte procedimento:

- x_j é discreto quando $0 \leq n_j \leq 8$
 - x_j é real quando $n_j > 8$
- (5.1)

Este procedimento é necessário, pois ao diminuirmos o limitante superior da variável x_j , diminuiremos o número de partições do problema e o tempo de resolução computacional.

Finalmente, descrevem-se neste capítulo métodos de resolução do modelo, tais como: *BRANCH AND BOUND* e *GRADIENTES CONJUGADOS*. Todas estas informações serão levadas para um programa chamado *TORQ 1.1*, que será a ferramenta computacional de auxílio à composição.

5.1. UM PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO NÃO LINEAR MISTO

O problema que se coloca é o seguinte: quantos instrumentos devem tocar em cada naipe e com que loudness, para que um determinado timbre objetivo $G: [w_{\min}, w_{\max}] \rightarrow \mathcal{R}$ seja aproximado pela orquestra?

O critério de aproximação é a minimização da norma L_2 da diferença entre o timbre objetivo $(G(w))$ e o timbre orquestral efetivamente produzido $(F(w, X, Y))$ isto é, queremos (\hat{X}, \hat{Y}) tais que:

$$\Psi(\hat{X}, \hat{Y}) = \min_{(X, Y)} \Psi(X, Y)$$

$$S/A \begin{cases} 0 \leq Y_j \leq 1, \\ L_j \leq x_j \leq U_j \text{ (variáveis discretas)} \end{cases} \quad (5.2)$$

$$\text{com } \Psi(X, Y) = \sum_{i=0}^{k-1} \int_{M_i}^{M_{i+1}} |G(w) - F(w, X, Y)|^2 dw$$

onde: L_j e U_j = limitante inferior e superior do naipe j ,
 $F(w, X, Y)$ é a função-timbre orquestral e $j = 1, 2, \dots, n$.

Já sabemos que x_j está associado ao loudness descrito pela Equação de Stevens. Portanto, essa variável reescalona a curva associada ao timbre do naipe de maneira que o modelo reflita o loudness percebido por um indivíduo. Através deste procedimento consegue-se vincular o valor ótimo da função objetivo à percepção sonora. Logo, as canalizações associadas a x_j são determinadas por:

$$L_j = C_j \sqrt[3]{\min_j} \quad \text{e} \quad U_j = C_j \sqrt[3]{\max_j} \quad (5.3)$$

onde: \min_j = número mínimo de instrumentos no naipe j , \max_j = número máximo de instrumentos no naipe j , C_j = constante de correção de instrumentos do naipe j .

É muito importante ressaltar que x_j é VARIÁVEL DISCRETA E NÃO É UMA VARIÁVEL INTEIRA. Cada valor x_j está associado a um elemento de um conjunto Q_j , cuja construção é muito simples:

$$Q_j = \{q_k = C_j \sqrt[3]{k} \text{ com } k = (\min_j, \min_j+1, \min_j+2, \dots, \max_j)\} \quad (5.4)$$

onde: \min_j e \max_j são respectivamente a quantidade mínima e máxima de instrumentos do naipe j , com $\min_j \geq 0$; C_j é a constante de correção de intensidade associada ao naipe j , tal constante poderá ser obtida experimentalmente, ou calculando-se o percentual do número de instrumentos de cada naipe no total de instrumentos de uma orquestra sinfônica tradicional. Observa-se que os conjuntos Q_j terão no máximo 9 elementos, tendo em vista que para $x_j > C_j \sqrt[3]{8}$ esta variável será considerada real (Veja equação (5.1)).

5.2. FUNÇÃO TIMBRE OBJETIVO — UM CASO PARTICULAR

Em princípio a *função-timbre objetivo* pode ser de qualquer forma, desde que a mesma possa ser definida no intervalo de frequência onde a orquestra soará. Entretanto, para que esta função sirva de instrumento de análise do timbre orquestral de um trecho de uma determinada obra, obteremos uma $G(w)$ da mesma maneira que a função-timbre orquestral.

Então, partindo de um trecho musical qualquer, associado ao mesmo, construiremos uma $G : [\text{Min}, \text{Max}] \longrightarrow \mathbb{R}$, função que expressará o timbre percebido quando tocam um determinado conjunto de naipes. Por simplicidade, vincularemos a função $G(w)$ a um trecho musical por dois fatores:

$$Q_j = \{q_k = C_j \sqrt[3]{k} \text{ com } k = (\min_j, \min_j+1, \min_j+2, \dots, \max_j)\} \quad (5.4)$$

onde: \min_j e \max_j são respectivamente a quantidade mínima e máxima de instrumentos do naipe j , com $\min_j \geq 0$; C_j é a constante de correção de intensidade associada ao naipe j , tal constante poderá ser obtida experimentalmente, ou calculando-se o percentual do número de instrumentos de cada naipe no total de instrumentos de uma orquestra sinfônica tradicional. Observa-se que os conjuntos Q_j terão no máximo 9 elementos, tendo em vista que para $x_j > C_j \sqrt[3]{8}$ esta variável será considerada real (Veja equação (5.1)).

5.2. FUNÇÃO TIMBRE OBJETIVO — UM CASO PARTICULAR

Em princípio a *função-timbre objetivo* pode ser de qualquer forma, desde que a mesma possa ser definida no intervalo de frequência onde a orquestra soará. Entretanto, para que esta função sirva de instrumento de análise do timbre orquestral de um trecho de uma determinada obra, obteremos uma $G(w)$ da mesma maneira que a função-timbre orquestral.

Então, partindo de um trecho musical qualquer, associado ao mesmo, construiremos uma $G : [\text{Min}, \text{Max}] \longrightarrow \mathbb{R}$, função que expressará o timbre percebido quando tocam um determinado conjunto de naipes. Por simplicidade, vincularemos a função $G(w)$ a um trecho musical por dois fatores:

1. O *trecho musical* será definido pelo intervalo de frequência no qual todos os naipes não mudam de loudness, ou seja, há um loudness fixo y para cada naipe.
2. A $G(w)$ depende do conjunto de naipe que tocam no *trecho* e para cada um deles, o número de instrumentos x_j é constante.

Verifica-se que essas propriedades definem uma $f_j(w, x_j, y_j)$ - (função timbre orquestral) para cada naipe j . Assim, como essas funções não são contínuas no intervalo de frequência onde estão definidas, a $G(w)$ também não será contínua em todo o intervalo $(\min, \max]$. Precisamos encontrar seus pontos de descontinuidade e ordená-los num conjunto como fizemos no Capítulo IV, seção 4.3. Do mesmo modo, é necessária uma função indicador que verifique quais funções pertencem a um dado intervalo de corte.

Portanto, para que não se confunda a notação associada à $G(w)$, vamos renomear o conjunto de cortes e a função indicador.

(a) - O conjunto de corte será dado por:

$$C_g = \{P_h \text{ com } h = 0, 1, 2, \dots, u\} \quad (5.5)$$

onde: C_g é ordenado de forma crescente, $u+1$ é o número de cortes e $P_0 = \text{Min}$ e $P_u = \text{Max}$.

(b) - Chamamos a função indicador de $T_h(j)$ definida por:

$$T_h(j) \begin{cases} 1 & \text{se } w_{\min j} \leq P_h \text{ e } w_{\max} \geq P_{h+1} \\ 0 & \text{na situação complementar.} \end{cases} \quad (5.6)$$

Assim construída a FUNÇÃO TIMBRE OBJETIVO é uma $G : [\min, \max] \longrightarrow \mathcal{R}$, definida para $w \in (P_h, P_{h+1}]$, $h = 1, 2, \dots, u$ ou seja

$$G(w) = \sum_{j=1}^n T_h(j) f_j(w, x_j, y_j) \quad (5.7)$$

onde: $T_h(j)$ está definida em (5.6); $G(w)$ não depende de y_j nem de x_j , e em geral, pode ser uma função qualquer. Nosso procedimento, porém, é de aproximá-la por uma função linear por partes, a razão deste fato será entendida melhor quando calcularmos analiticamente o valor de $\Psi(X, Y)$. Assim, escrevemos $G(w)$ da seguinte forma:

$$G(w) = \begin{cases} \alpha_1 w + \beta_1 & \text{para } \text{Min} = P_0 \leq w \leq P_1 \\ \alpha_2 w + \beta_2 & \text{para } P_1 \leq w \leq P_2 \\ \alpha_3 w + \beta_3 & \text{para } P_2 \leq w \leq P_3 \\ \vdots & \vdots \\ \alpha_u w + \beta_u & \text{para } P_{u-1} \leq w \leq P_u = \text{Max} \end{cases} \quad (5.8)$$

Observa-se que para o caso particular da $G(w)$ construída em (5.7), α_h e β_h com $(h = 1, 2, \dots, n)$, podem ser obtidos a partir das equações do Capítulo IV - tópicos 4.1 e 4.2, como seguem abaixo:

$$\alpha_h = \begin{cases} T_h(j) \{x_j (r_{0j} + y_j \Delta r_j)\} & \text{se } g_j(w, y_j) \geq 0 \\ T_h(j) \{x_j (c_{0j} + y_j \Delta c_j)\} & \text{se } g_j(w, y_j) \leq 0 \end{cases} \quad (5.9)$$

$$\beta_h = \begin{cases} -T_h(j) \{x_j [(r_{0j} + y_j \Delta r_j) (w_{0j} + y_j \Delta w_j) + I_{0j} + y_j \Delta I_j]\} & \text{se } g_j(w, y_j) \geq 0 \\ -T_h(j) \{x_j [(c_{0j} + y_j \Delta c_j) (w_{0j} + y_j \Delta w_j) + I_{0j} + y_j \Delta I_{0j}]\} & \text{se } g_j(w, y_j) \leq 0 \end{cases} \quad (5.10)$$

5.3. FUNÇÃO OBJETIVO

Apesar de escrita em 5.1, numa forma compacta, a função objetivo $\Psi(X, Y)$ não é simples e acarreta muito tempo de cálculo computacional. O seu valor depende, a cada avaliação, dos valores de $\Psi(X, Y)$, portanto teríamos que calcular $k-1$ integrais (por algum método numérico) dado que $F(w, X, Y)$ e $G(w)$ não têm a mesma forma para cada intervalo de integração $(M_i, M_{i+1}]$.

Para minimizar esse problema, o cálculo de $\Psi(X, Y)$ será feito analiticamente, de maneira tal que explicita o valor das integrais. Logo, partindo de um intervalo arbitrário $(M_i, M_{i+1}]$ onde $M_0 < M_i$ e $M_k \geq M_{i+1}$, tem-se a seguinte integral:

$$\int_{M_i}^{M_{i+1}} (G(w) - F_{(M_i, M_{i+1})}(w, X, Y))^2 dw \quad (5.11)$$

$$= \int_{M_i}^{M_{i+1}} (G(w) - \sum_{j=1}^n x_j S_i(j) f_j(w, y_j))^2 dw$$

Analisando-se a expressão de $f_j(w, y_j)$, verifica-se que essa função é aproximada por funções lineares por partes, e existem pontos não diferenciáveis associados aos valores da reta $g_j(w, y_j)$ em cada intervalo $(M_i, M_{i+1}]$. Logo, para bem determinar a integral em dw , é necessário calcular-se esses pontos de não diferenciabilidade e dividir-se $(M_i, M_{i+1}]$ em subintervalos onde $f_j(w, y_j)$ será diferenciável.

Analisando as expressões (4.5) e (4.6) (capítulo IV) verifica-se que os "bicos" da $f(w, y)$ serão dados por:

- 1) $w_j^* = w_{0j}$ para $j = 1, 2, \dots, n$ quando $\Delta w_j = 0$
- 2) $w_j^* = w_{0j} + y_j \Delta w_j$ para $j = 1, 2, \dots, n$ quando $\Delta w_j \neq 0$

Para o segundo caso os pontos de não diferenciabilidade dependem de y_j . Portanto, para facilitar o cálculo da integral fazemos:

$$w_j^* = \frac{w_{1j} w_{\min} + w_{0j} w_{\max}}{w_{\min} + w_{\max}} \quad \text{para } w_{0j} > w_{1j}$$

Assim, podemos criar um conjunto de subintervalos de integração que contenha os w_j^* , para cada intervalo $[M_i, M_{i+1})$.

Vamos chamar os elementos desse conjunto (depois de ordenados) de ζ ; então escrevemos:

$$Cf = \{\zeta_v \quad \text{com } v = 1, 2, \dots, s-1\} \quad (5.13)$$

onde: $s \leq l$, $\zeta_0 = M_i$ e $\zeta_s = M_{i+1}$. Observa-se que apenas os extremos do intervalo de integração $(M_i, M_{i+1}]$ não dependem de y_j .

A partir do conjunto Cf, dividimos $(M_i, M_{i+1}]$ em $s-2$ subintervalos $(\zeta_v, \zeta_{v+1}]$ para $v = (1, 2, \dots, s-1)$. Então a expressão (5.11) pode ser calculada da seguinte forma:

$$\int_{M_i}^{M_{i+1}} (G(w) - \sum_{j=1}^n x_j S_i(j) f_j(w, y_j))^2 dw = \int_{\zeta_0}^{\zeta_1} (G(w) - \sum_{j=1}^n x_j S_0(j) f_j(w, y_j))^2 dw + \dots \quad (5.14)$$

$$\sum_{v=1}^{s-2} \int_{\zeta_v}^{\zeta_{v+1}} (G(w) - \sum_{j=1}^n x_j S_v(j) f_j(w, y_j))^2 + \int_{\zeta_{s-1}}^{\zeta_s} (G(w) - \sum_{j=1}^n x_j S_s(j) f_j(w, y_j))^2 dw .$$

Faz-se então, a mesma mudança de variável para as três integrais, tomando-se

$$\theta_v(w) \equiv \theta_v = G(w) - \sum_{j=1}^n x_j S_v(j) f_j(w, y_j) \quad (5.15)$$

com $v = 0, 1, \dots, S-1$ e $S \leq n+2$, e deste modo temos que

$$\frac{d\theta_v}{dw} = \frac{dG(w)}{dw} - \sum_{j=1}^n x_j S_v(j) \frac{\partial f_j}{\partial w}(w, y_j) \quad (5.16)$$

Tendo em vista que $G(w)$ é uma função linear por partes é fácil calcular sua derivada:

$$\frac{dG(w)}{dw} = \alpha_v \quad (5.17)$$

onde: α_v será igual ao definido em (5.9), se construirmos $G(w)$ como em (5.7), ou será o coeficiente angular da aproximação linear de $G(w)$ para o intervalo $(\zeta_v, \zeta_{v+1}]$.

O cálculo da derivada de $f_j(w, y_j)$ também fica simples, pois essa função é linear em relação a w .

$$\frac{\partial f_j}{\partial w}(w, y_j) = \begin{cases} r_{0j} + y_j \Delta r_j & \text{se } g(w, y_j) \geq 0 \\ c_{0j} + y_j \Delta c_j & \text{se } g(w, y_j) \leq 0 \end{cases} \quad (5.18)$$

Observa-se que tanto $\frac{dG(w)}{dw}$ como $\frac{\partial f_j}{\partial w}(x_j, y_j)$ não dependem de w ; logo, pode-se calcular a derivada da inversa, o que dá o seguinte resultado:

$$\frac{dw}{d\theta_v} = \frac{1}{\alpha_v - \sum_{j=1}^n x_j S_v(j) \frac{\partial f_j}{\partial w}(w, y_j)} \quad (5.19)$$

onde: α_v está definido em (5.17) e $\frac{\partial f_j}{\partial w}(w, y_j)$ em (5.18).

Chamando os extremos de integração na variável de C_v e C_{v+1} , segue-se que:

$$C_v = G(\zeta_v) - \sum_{j=1}^n x_j S_v(j) f_j(\zeta_v, y_j) \quad (5.20)$$

$$C_{v+1} = G(\zeta_{v+1}) - \sum_{j=1}^n x_j S_v(j) f_j(\zeta_{v+1}, y_j)$$

Pode-se calcular o valor da integral:

$$\int_{\zeta_v}^{\zeta_{v+1}} (G(w) - \sum_{j=1}^n x_j S_v(j) f_j(w, y_j)) dw = \int_{C_v}^{C_{v+1}} \theta_v^2 \frac{dw}{d\theta_v} d\theta_v =$$

$$= \frac{dw}{d\theta_v} \int_{C_v}^{C_{v+1}} \theta_v^2 d\theta_v = \frac{dw}{d\theta_v} \frac{C_{v+1}^3 - C_v^3}{3} =$$

$$= \frac{\{G(\zeta_{v+1}) - \sum_{j=1}^n x_j S_v(j) f_j(\zeta_{v+1}, y_j)\}^3 - \{G(\zeta_v) - \sum_{j=1}^n x_j S_v(j) f_j(\zeta_v, y_j)\}^3}{3\{\alpha_v - \sum_{j=1}^n x_j S_v(j) \frac{\partial f_j(w, y_j)}{\partial w}\}}$$

$$= \frac{P_v(x_j, y_j)}{H_v(x_j, y_j)} \quad (5.21)$$

O cálculo feito acima se restringiu a um subintervalo arbitrário $(\zeta_v^*, \zeta_{v+1}]$; logo, precisamos generalizá-lo para os "s" subintervalos contidos em $(M_i, M_{i+1}]$.

$$\int_{M_i}^{M_{i+1}} (G(w) - F_{(M_i, M_{i+1})}(w, X, Y))^2 dw = \sum_{v=0}^{s-1} \frac{P_{v+1}^{i+1}(x_j, y_j)}{H_{v+1}^{i+1}(x_j, y_j)} \quad (5.22)$$

observa-se que o índice "i+1" está associado ao intervalo de integração $(M_i, M_{i+1}]$.

Finalmente, encontra-se o valor total $\Psi(X, Y)$:

$$\Psi(X, Y) = \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{v=0}^{s-1} \frac{P_{v+1}^{i+1}(x_j, y_j)}{H_{v+1}^{i+1}(x_j, y_j)} \quad (5.23)$$

5.4. GRADIENTE DA FUNÇÃO OBJETIVO

Vamos calcular as coordenadas do $\Psi(X, Y)$. Entretanto, as variáveis x_j e y_j têm naturezas diferentes, por essa razão dividimos o cálculo em duas partes:

1. $\frac{\partial \Psi(X, Y)}{\partial x_j}$ com $j = 1, 2, \dots, n$
2. $\frac{\partial \Psi(X, Y)}{\partial y_j}$ com $j = 1, 2, \dots, n$

PARTE I:

Explicitamos o valor das derivadas parciais em relação

a x_j :

$$\frac{\partial \Psi(x_j, y_j)}{\partial x_j} = \frac{\sum_{i=0}^{k-1} \sum_{v=0}^{s-1} H_{v+1}(x_j, y_j) \frac{\partial P_{v+1}^{i+1}(x_j, y_j)}{\partial x_j} - \frac{\partial H_{v+1}^{i+1}(x_j, y_j)}{\partial x_j} P_{v+1}(x_j, y_j)}{[H_{v+1}^{i+1}(x_j, y_j)]^2} \quad (5.24)$$

$$\text{onde: } \frac{\partial H_{v+1}(x_j, y_j)}{\partial x_j} = -3 \sum_{j=1}^n S_v(j) \frac{\partial f_j}{\partial w}(w, y_j); \quad (5.25)$$

e

$$\frac{\partial P_{v+1}(x_j, y_j)}{\partial x_j} = -3 \{ [G(\zeta_{v+1}) - \sum_{j=1}^n x_j S_v(j) f_j(\zeta_{v+1}, y_j)]^2.$$

$$S_v(j) f_j(\zeta_{v+1}, y_j) - [G(\zeta_v) - \sum_{j=1}^n x_j S_v(j) f_j(\zeta_v, y_j)]^2 .$$

$$S_v(j) f_j(\zeta_v, y_j) \} \quad (5.26)$$

PARTE 2:

A forma do cálculo é similar à maneira feita acima. O que se modifica são as derivadas parciais, que agora são tomadas em relação a y_j . Então segue-se naturalmente:

$$\frac{\partial \Psi(x_j, Y_j)}{\partial y_j} = \frac{\sum_{i=0}^{k-1} \sum_{v=0}^{s-1} H_{v+1}^{i+1}(x_j, Y_j) \frac{\partial P_{v+1}^{i+1}(x_j, Y_j)}{\partial y_j} - \frac{\partial H_{v+1}^{i+1}(x_j, Y_j)}{\partial y_j} P_{v+1}^{i+1}(x_j, Y_j)}{[H_{v+1}^{i+1}(x_j, Y_j)]^2} \quad (5.27)$$

onde:

$$\frac{\partial H_{v+1}^{i+1}(x_j, Y_j)}{\partial y_j} = -3 \sum_{j=1}^n x_j S_v(j) \frac{\partial^2 f_j(w, Y_j)}{\partial w \partial y_j} ; \quad (5.28)$$

com

$$\frac{\partial^2 f_j(w, Y_j)}{\partial w \partial y_j} = \begin{cases} \Delta r_j & \text{se } g(w, Y_j) \geq 0 \\ \Delta c_j & \text{se } g(w, Y_j) \leq 0 \end{cases} \quad (5.29)$$

$$e \frac{\partial p_{v+1}(x_j, y_j)}{\partial y_j} = -3 \{ [G(\zeta_{v+1}) - \sum_{j=1}^n x_j S_v(j) f_j(\zeta_{v+1}, y_j)] \}^2$$

$$x_j S_v(j) \frac{\partial f_j(\zeta_{v+1}, y_j)}{\partial y_j} - [G(\zeta_v) - \sum_{j=1}^n x_j S_v(j) f_j(\zeta_v, y_j)]^2.$$

$$x_j S_v(j) \frac{\partial f_j(\zeta_v, y_j)}{\partial y_j} \} \quad (5.30)$$

$$\frac{\partial f_j(\zeta_v, y_j)}{\partial y_j} = \begin{cases} 2y_j \Delta r_j \Delta \omega_j + \zeta_v \Delta r_j + \Delta I_j + \omega_0 \Delta r_j + \Delta \omega r_{0j} & \text{se } g(w, y_j) \geq 0 \\ 2y_j \Delta c_j \Delta \omega_j + \zeta_v c_j + \Delta I_j + \omega_0 \Delta c_j + \Delta \omega c_{0j} & \text{se } g(w, y_j) \leq 0; \end{cases} \quad (5.31)$$

Observa-se que o cálculo de $\frac{\partial f_j(\zeta_{v+1}, y_j)}{\partial y_j}$ é similar ao anterior.

Na seção seguinte, discutiremos os algoritmos que usaremos na resolução do problema

5.5. MÉTODOS DE RESOLUÇÃO DO PROBLEMA

Pelas características das variáveis deste problema precisa-se, para resolvê-lo, de um método que tenha a propriedade de estar associado a um *problema misto canalizado*. Analisando-se a literatura, chega-se à conclusão de que esse método seria o *BRANCH AND BOUND* [8][9], pois ele trabalha com um problema relaxado da seguinte forma:

calcula-se o valor ótimo supondo-se que todas as variáveis são reais e depois verifica-se a integralidade da solução.

É necessário uma ferramenta que resolva o problema relaxado que é o seguinte:

um problema de programação não linear misto com variáveis canalizadas.

Para resolver-se o mesmo, usa-se um algoritmo chamado de *ESTRATÉGIA DAS RESTRIÇÕES ATIVAS (E.R.A.)*[11] acoplado ao método dos *GRADIENTES CONJUGADOS* [10][12].

5.5.1. GRADIENTES CONJUGADOS

Nas seções anteriores calculamos analiticamente o valor da *Função Objetivo* $\Psi(X,Y)$ e as coordenadas de seu *Gradiente*. Mesmo escritas numa forma mais simples, o cálculo de ambas acarreta muito tempo computacional. Logo, gastaríamos mais tempo ainda, para o

cálculo da segunda derivada. Por isso, optamos pelo MÉTODO DOS GRADIENTES CONJUGADOS que trabalha somente com a primeira derivada.

Usa-se normalmente uma formulação do Algoritmo de Resolução do Método dos G.G. para funções quadráticas [10]. Nesse algoritmo o primeiro passo é dado na direção contrária ao gradiente. Os passos subsequentes são dados numa direção que é uma combinação linear do gradiente corrente e da direção do vetor do passo anterior.

As propriedades importantes desse algoritmo são: o cálculo do vetor direção (d_k) é fácil e a convergência do método é garantida para funções quadráticas num número finito de iterações.

Porém, essa formulação não atende as condições do nosso problema, pois a função objetivo $\Psi(X,Y)$ não é quadrática. Assim, apresentamos os passos do algoritmo de Fletcher e Reeves, que se adapta à resolução de problemas não quadráticos [12].

(1) Condições iniciais: z^0 factível, $g^0 = -\nabla f(z^0)$ e $P_0 = I$.

(2) Para $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$, calcule:

(a) $s^k = P_k g^k$;

(b) $\lambda_k = \text{Min } f(z^k + \lambda s^k)$ (busca unidimensional);

(c) $z^{k+1} = z^k + \lambda_k s^k$, $g^{k+1} = -\nabla f(z^{k+1})$;

(d) $P_{k+1} = P_k - \frac{P_k \Delta g^k (\Delta g^k)^T P_k}{(\Delta g^k)^T P_k \Delta g^k}$;

(3) se $|g^n| < \epsilon$, pare; senão:

$$(4) P_0 = - \sum_{h=0}^{n-1} \lambda_h \frac{s^h (s^h)^T}{(\Delta g^h)^T s^h}, \quad z^0 = z^n, \quad g^0 = g^n,$$

$k = 0$, vá para (2).

onde: $\Delta g^k = g^{k+1} - g^k$ e $z = (x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n)$; observa-se que todas as componentes serão consideradas reais para efeito de cálculo computacional; posteriormente, verifica-se a integralidade das x_j no Branch and Bound.

5.5.2. ESTRATÉGIA DAS RESTRIÇÕES ATIVAS

Na secção 5.1, quando descrevemos o problema de programação não linear misto associado ao modelo, verificou-se que devido às condições físicas, as variáveis do problema seriam canalizadas, pois o valor ótimo de $\Psi(x, y)$ está numa região bem determinada. Nesta secção descrevemos um método que vai limitar a essa região o ponto ótimo.

A seguir, apresentamos uma descrição sucinta deste algoritmo já adaptado ao modelo [11].

Tendo em vista que $\Psi : D \subset \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $\Psi \in C^1(D)$, verificamos que $D \supset [L_1, U_1] \times \dots \times [L_{2n}, U_{2n}] = P$ é a região de factibilidade. Para tanto, assumimos que as restrições das componentes y_j sejam respectivamente:

$$L_1 = L_2 = \dots = L_n = 0 \quad \text{e} \quad U_1 = U_2 = \dots = U_n = 1$$

Observa-se que usamos agora a mesma notação para os limitantes, tanto para y_j quanto de x_j ; veja 5.1.

Assim, definimos uma FACE DE P por:

$$F_{\lambda}^j = \{z \in P \text{ tal que } z_i = L_i \text{ para } i \in I, \\ z_j = U_j \text{ para } j \in J\}$$

onde: os conjuntos I, J serão definidos abaixo; ressaltamos novamente que $z = (x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n)$.

Iteração Inicial, $k = 0$.

Dado $z^0 \in P$, criam-se 3 conjuntos de índice:

Conjunto $I = \{i \text{ tal que } z_i^0 = L_i\}$

Conjunto $J = \{j \text{ tal que } z_j^0 = U_j\}$

Conjunto $T = \{1, 2, 3, \dots, n\} - (I \cup J)$

Se $\frac{\Psi(z^0)}{z_i} \geq 0$ para todo $i \in I$, $\frac{\Psi(z^0)}{z_j} \leq 0$ para todo $j \in J$ e $\frac{\Psi(z^0)}{z_t} = 0$ para todo $t \in T$, parar. Se não, cami-

nha-se para outras iterações com os seguintes passos:

Passo 1: Dado z^{k+1} (obtido pelo método dos gradientes conjugados, descrito acima) tal que $\Psi(z^{k+1}) < \Psi(z^k)$ com $z^{k+1} \in F_{\lambda}^j$, algumas destas propriedades são verificadas.

(a) $z^{k+1} = L_i$ ou $z^{k+1} = U_i$ para algum $i \in T$.

(b) $\frac{\partial \Psi(z^{k+1})}{\partial z_i} = 0$ para todo $i \in T$.

Passo 2. Se z^{k+1} satisfaz (a), redefina os três conjuntos de índices:

$$I = \{i \text{ tal que } z^{k+1} = L_i\}$$

$$J = \{j \text{ tal que } z^{k+1} = U_j\}$$

$$T = \{1, \dots, n\} - (I \cup J)$$

Se z^{k+1} não satisfaz (a), mas satisfaz (b) então:

(1) Se $T = \{1, 2, \dots, n\}$ parar.

(2) Se $\frac{\partial \Psi(z^{k+1})}{\partial z_i} \geq 0$ para todo $i \in I$

e

$\frac{\partial \Psi(z^{k+1})}{\partial z_i} \leq 0$ para todo $i \in J$, parar.

Se (1) ou (2) são satisfeitos, redefina:

$$I = I - \{i \in I \text{ tal que } \frac{\partial \Psi(z^{k+1})}{\partial z_i} < 0\}$$

$$J = J - \{j \in J \text{ tal que } \frac{\partial \Psi(z^{k+1})}{\partial z_j} > 0\}$$

faça $k = k+1$ e volte ao passo 1.

5.5.3. BRANCH AND BOUND

Finalmente, passamos a descrever o algoritmo que vai gerenciar o programa. A cada iteração, encontra-se o ótimo de um problema de programação não linear canalizado, pelo método do gradiente conjugado associado a E.R.A.. Testa-se se o valor encontrado será o ótimo do problema misto, ou seja, se as componentes x_j ($j = 1, 2, \dots, n$) são discretas.

Se a solução não satisfizer a condição de integralidade, redefinem-se as canalizações do problema criando-se dois subproblemas novos. Esses subproblemas serão armazenados numa *Lista Mestra* e o processo terminará quando a *lista estiver vazia*.

Precisamos então de um critério de escolha do próximo subproblema a ser resolvido. Já sabemos que quanto menor for o tempo computacional, melhor o programa se adaptará ao contexto musical no qual há necessidade de uma resposta rápida.

Assim, usamos o critério de escolha na *Lista Mestra* como L.I.F.O. ("Last in first out"). Tal critério se adaptará melhor à questão de tempo computacional por dois fatores:

1. Tendo em vista que se escolhe o último problema alocado na lista mestra, essa estratégia alivia o gasto de memória e dá uma solução factível mais rápida.

2. Apesar de se criarem soluções inferiores, que seriam evitadas com outra técnica, este fato não aumentará muito o tempo computacional, pois quando uma variável alcançar um nível maior que 8, a mesma será considerada real.

Após essa rápida descrição, seguem abaixo os passos do algoritmo de resolução do problema através do Branch ou Bound [8]:

Informações necessárias a cada iteração k :

- (a) Limitante superior para o valor da função objetivo $\Psi(X,Y)$ (denotado por Z^*).

Observa-se que para a primeira iteração, $Z^* = \infty$ ou $Z^* =$ valor da função objetivo para uma solução factível.

- (b) Lista Mestra de subproblemas de Programação Não Linear Misto a serem resolvidos.

A única distinção entre eles são suas canalizações.

Observa-se que para a primeira iteração a lista mestra contém só o problema original.

Dado um k com $k = 1, 2, 3, \dots$, a ITERAÇÃO k pode ser descrita pelos seguintes passos:

Passo 1. Se a lista mestra $= 0$, *pare*.

Se não, retire o primeiro problema da mesma (L.I.F.O.).

Passo 2. Resolva o problema retirado no passo anterior (Problema de Programação Não Linear Misto) pelo método dos gradientes conjugados associado a E.R.A., supondo que todas as variáveis são reais.

Se este problema não tem solução factível ou se o valor encontrado para a função objetivo \bar{z} é maior que z^* , o mesmo já está sondado. Volte para o passo 1.

Se nenhuma das duas condições é satisfeita, vá ao passo 3.

Passo 3. Se todas as variáveis $x_j \in Q_j$ para $j = 1, 2, 3, \dots, n$, a condição de integralidade está satisfeita. Guarde a solução fazendo $z^* = z_k$ e retorne ao passo 1.

Passo 4. Escolha o primeiro x_j que não verifique o critério de integralidade e crie na Lista Mestra mais dois subproblemas como está descrito abaixo em (5.32).

Retorne ao passo 1.

Em virtude das peculiaridades do problema precisamos criar um critério de integralidade a uma posterior partição que se adaptem a ele sob o ponto de vista computacional. Já discutimos acima, na seção 5.1, a construção dos conjuntos Q_j ($j = 1, 2, \dots, n$) associados a cada naípe. Assim, para verificar-se a integralidade de x_j , usa-se o seguinte artifício:

Dado x_j e calculado $n_j = \frac{(x_j)^3}{c_j}$,

se $|n_j - \text{int}(n_j)| \leq \epsilon \implies x_j \in Q_j$, então fazemos $x_j = \text{int}(n_j)$, onde $\text{int}(n_j)$ é a parte inteira de n_j .

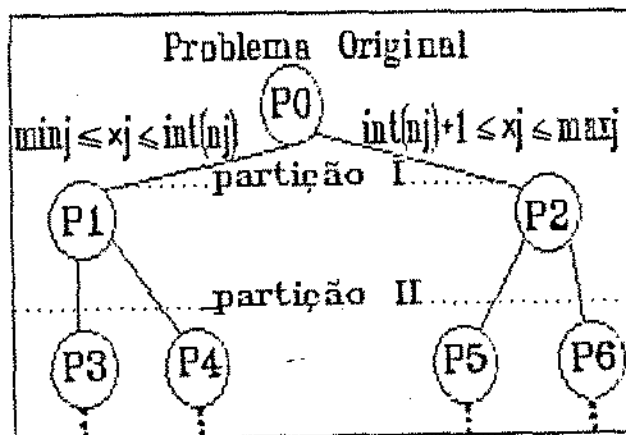
Se não, criamos dois novos subproblemas mudando as canalizações da variável x_j da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \text{subproblema 1} &\longrightarrow c_j \sqrt[3]{\min_j} \leq x_j \leq \text{int}(n_j) \\ \text{subproblema 2} &\longrightarrow \text{int}(n_j) + 1 \leq x_j \leq c_j \sqrt[3]{\max_j} \end{aligned} \tag{5.32}$$

Desta maneira cria-se uma árvore binária de subproblemas, cujo critério de partição é:

A primeira $x_j \notin Q_j$ será particionada como em (5.32).

Veja a figura abaixo:



F5.1

Os passos acima são estritamente vinculados ao programa TORQ 1.1, que seguirá no Anexo I. As informações dadas não descrevem o método Branch and Bound de forma geral, mas uma adaptação essencialmente feita para a resolução deste problema particular.

Chegamos, finalmente, a descrever todas as informações que achamos necessárias ao entendimento de nossa dissertação. Gostaríamos que este trabalho trouxesse novas leituras sobre questões orquestrais. Alguns subprodutos musicais vêm como consequência natural dos conceitos aqui discutidos e têm vital importância para a música dos nossos dias.

ANEXO I

PROGRAMA TORQ 1.1

E

RESULTADOS COMPUTACIONAIS

PROGRAMA TORQ 1.1 E RESULTADOS COMPUTACIONAIS

Neste primeiro anexo vamos discutir a estrutura do Programa TORQ 1.1 e alguns resultados computacionais obtidos através do mesmo. Apresentaremos três fluxogramas que descreverão os seus principais níveis; cada um deles descreverá uma macro estrutura lógica sem detalhar todos os passos do programa.

Da maneira que a arquitetura está estruturada, o programa, além de resolver um Problema de Programação Não Linear Misto, também cria arquivos de funções $G(w)$ e escreve gráficos que exprimem o timbre de uma orquestra, portanto a sua utilidade é de caráter composicional e analítico musical.

A FUNÇÃO (C) CRIA ARQUIVOS do TORQ 1.1, ou seja, é responsável pela inicialização dos arquivos ORQ.ARQ e Gw.ARQ, onde ficarão alocados os registros NAIPES e FUNCRTÉRIO respectivamente.

No primeiro registro estarão guardadas as informações sobre os naipes da orquestra, ou seja, os parâmetros descritos no capítulo IV que estruturam a Função-Timbre Orquestral.

No segundo registro estarão guardadas as informações necessárias para se caracterizar uma função $G(w)$ como a descrita no capítulo V, tópico 5.2..

A FUNÇÃO (R) BRANCH AND BOUND do TORQ 1.1 calcula o valor ótimo para o Problema de Programação Não Linear Misto descrito no capítulo V, seção 5.1.. A procedure GRADIENTES CONJUGADOS está dentro desta função, pois a cada interação o programa resolve um problema de programação não linear canalizado.

A FUNÇÃO (A) ATUALIZA ARQUIVOS do TORQ 1.1 preenche os registros dos arquivos descritos acima.

A FUNÇÃO (T) CONSTRÓI $G(w)$ do TORQ 1.1 é responsável por calcular e gravar, no arquivo $Gw.ARQ$, Funções-Timbre Objetivo com a formulação dada pelas equações 5.9 e 5.10. Na realidade esta função é composta, na medida em que se utiliza da FUNÇÃO ATUALIZA ARQUIVOS para gravar a $G(w)$ calculada.

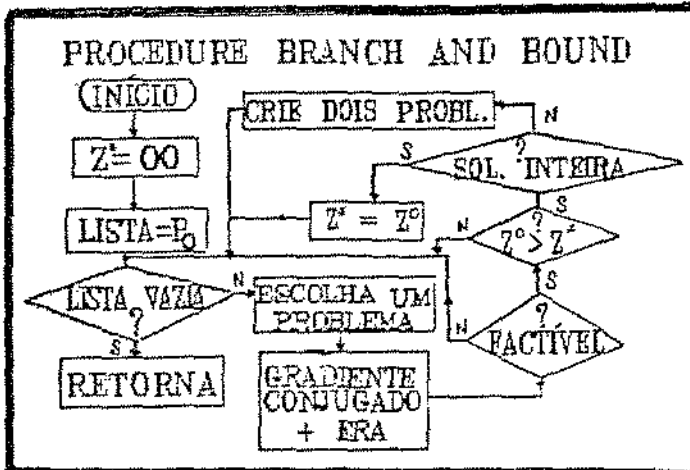
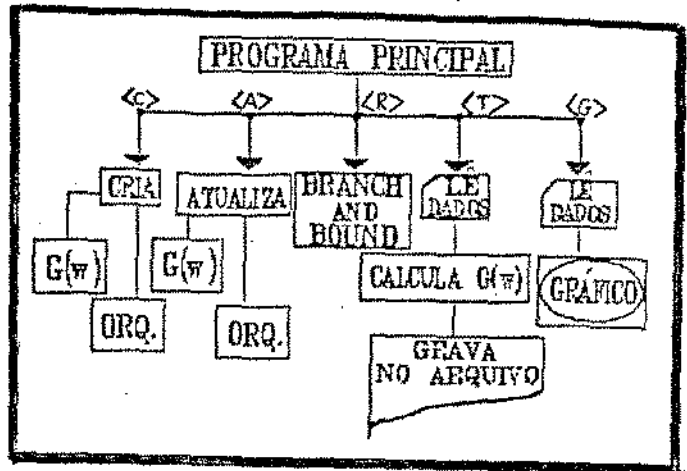
A FUNÇÃO (G) GRÁFICA do TORQ 1.1 desenha gráficos tanto das funções $G(w)$ quanto das $F(w, X^*, Y^*)$ depois de encontrado o ponto ótimo.

Os fluxogramas que se seguem descrevem:

- 1 - programa principal com as cinco funções (Fa 1.1).
- 2 - procedure branch and bound (Fa 1.2).
- 3 - procedure gradientes conjugados (Fa 1.3).

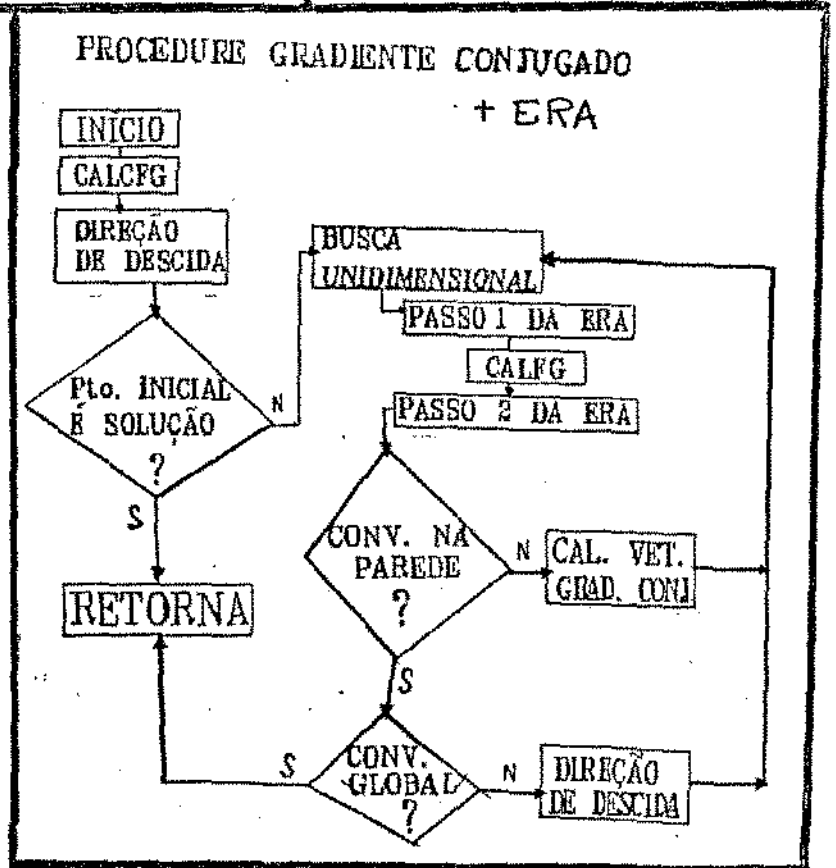
OBSERVAÇÃO: a ordem acima vai da estrutura mais externa à mais interna do programa.

Fa 1.1

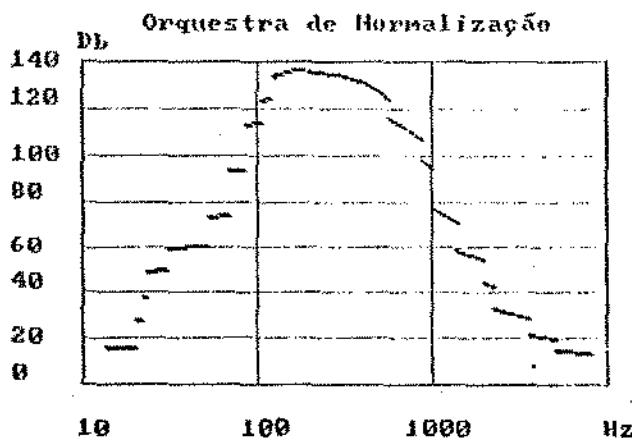


Fa 1.2

Fa 1.3



É necessário para que haja parâmetros de comparação entre as diversas funções $G(w)$ determinadas em (T) (função constrói $G(w)$) que se determine uma orquestra máxima de normalização que dimensionará os limites do programa. Para esta orquestra também serão calculados os coeficientes C_j relacionados com a Equação de Stevens. Deste modo seguem abaixo o gráfico da orquestra de normalização e uma tabela que contém na primeira coluna o nome do naipe, na segunda o número de instrumentos e na terceira os coeficientes C_j .



Ga 1.1

Orquestra de Normalização		
flauta	6	0.9534883
oboé	4	0.9889944
corne-inglês	8	0.9844901
fagole	6	0.9534883
trumpete	6	0.9379844
trompa	8	0.9534883
trombone	6	0.9534883
violino	40	0.6899224
viola	14	0.8914722
cello	14	0.8914722
c. baixo	10	0.9224806

Ta 1.1

O programa foi escrito em PASCAL e nossa implementação foi para computadores pessoais; assim, a aplicação do mesmo como ferramenta de composição e análise deve necessariamente estar vinculada a uma ambiência doméstica de maneira tal que o mesmo possa servir de ferramenta de trabalho diária para um músico.

Gostaríamos de ressaltar algumas aplicações do programa TORQ 1.1 . Já foram veiculados em seções anteriores, aplicações do mesmo à análise e à composição, todavia gostaríamos de descrever alguns exemplos práticos de como utilizá-lo.

Suponha que o regente de uma orquestra queira tocar uma obra de algum compositor com uma orquestra semelhante timbristicamente à orquestra original. Ele poderia utilizar o TORQ 1.1 para obter esta resposta. O seu procedimento seria construir uma $G(w)$ com a orquestra original da época, utilizando-se da Função Constrói Gw . Com o resultado calculado e gravado no arquivo $Gw.ARQ$ e partindo dos limites máximos e mínimos da orquestra com qual pretende tocar a música, ele pode utilizar a Função Branch and Bound para encontrar o equilíbrio que mais se aproxime da orquestra original.

Um segundo exemplo prático seria: um compositor planeja de antemão, para cada trecho da música, as faixas de frequência onde os naipes deverão atuar ; feito isto , para cada um deles o

compositor associa uma função $G(w)$ no arquivo Gw.ARQ. A partir daí ele passa a obter para cada trecho a quantidade de instrumentos e o loudness de cada naipe, a cada vez em que o programa é executado.

Uma outra forma de utilizar o programa será discutida no próximo anexo; nele mostramos como um gráfico será um importante instrumento de análise do timbre orquestral.

Seguem-se nas próximas páginas alguns resultados computacionais obtidos.

RESULTADO

Nº 1

***** Limitantes *****

frequencia minima do trecho = 58.000

frequencia maxima do trecho = 6282.000

-----Flautas-----

freq. min = 261.00 freq. max. = 6279.00

-----Oboes-----

freq. min = 233.00 freq. max. = 4704.00

-----Cornes-Ingleses-----

freq. min = 164.00 freq. max. = 2094.00

-----Fagotes-----

freq. min = 58.00 freq. max. = 1569.00

***** FUNCAO G(W) = V Sinfonia - A *****

80.00 >= 37.07*w + 67.0529 >= 69.50

139.00 >= 2.20*w + 133.4090 >= 80.00

160.00 >= 35.89*w + 126.3082 >= 139.00

277.00 >= -33.74*w + 279.7975 >= 160.00

350.00 >= 11.79*w + 260.5428 >= 277.00

350.00 >= 0.00*w + 0.0000 >= 350.00

987.00 >= -125.36*w + 609.4701 >= 350.00

1569.00 >= -90.50*w + 461.7562 >= 987.00

2640.00 >= -57.92*w + 322.5718 >= 1569.00

5280.00 >= -27.60*w + 166.7975 >= 2640.00

***** CANALIZACOES *****

4.000(1.514) >= x[1] >= 1.000 (0.953)

4.000(1.538) >= x[2] >= 1.000 (0.969)

4.000(1.563) >= x[3] >= 1.000 (0.984)

4.000(1.514) >= x[4] >= 1.000 (0.953)

***** VALORES INICIAIS *****

x[1] = 2.000 (1.201)

x[2] = 2.000 (1.221)

x[3] = 2.000 (1.240)

x[4] = 2.000 (1.201)

y[5] = 0.570--> mf

y[6] = 0.570--> mf

y[7] = 0.570--> mf

y[8] = 0.570--> mf

***** ITERACAO 1 *****

TEMPO DA ITERACAO = 15.93 TEMPO ACUMULADO = 15.93

XC1J = 0.95349 GC1J = 336.20060

LOWC1J = 0.95349 UPC1J = 1.51357

XC2J = 0.96899 GC2J = 420.56064

LOWC2J = 0.96899 UPC2J = 1.53818

XC3J = 0.98450 GC3J = 1157.26171

LOWC3J = 0.98450 UPC3J = 1.56279

XC4J = 1.20132 GC4J = 0.00000

LOWC4J = 0.95349 UPC4J = 1.51357

YC1J = 0.00000 GC5J = 282.03263

LOWC5J = 0.00000 UPC5J = 1.00000

YC2J = 0.00000 GC6J = 66.37713

LOWC6J = 0.00000 UPC6J = 1.00000

YC3J = 0.57000 GC7J = 0.00000

LOWC7J = 0.00000 UPC7J = 1.00000

YC4J = 0.57000 GC8J = 0.00000

LOWC8J = 0.00000 UPC8J = 1.00000

Z = 53060.74113

***** SOLUCAO OTIMA *****

EPSLON DE PARADA = 1.0000000000E-04

PRECISAO DA MAQUINA = 1.0000000000E-06

NUMERO DE AVALIACOES DA FUNCAO = 11

TEMPO TOTAL = 15.93 segundos.

VALOR OTIMO = 53060.7411940000

Numero de Flautas = 1

Tocando com intensidade ---> ppp

Numero de Oboes = 1

Tocando com intensidade ---> ppp

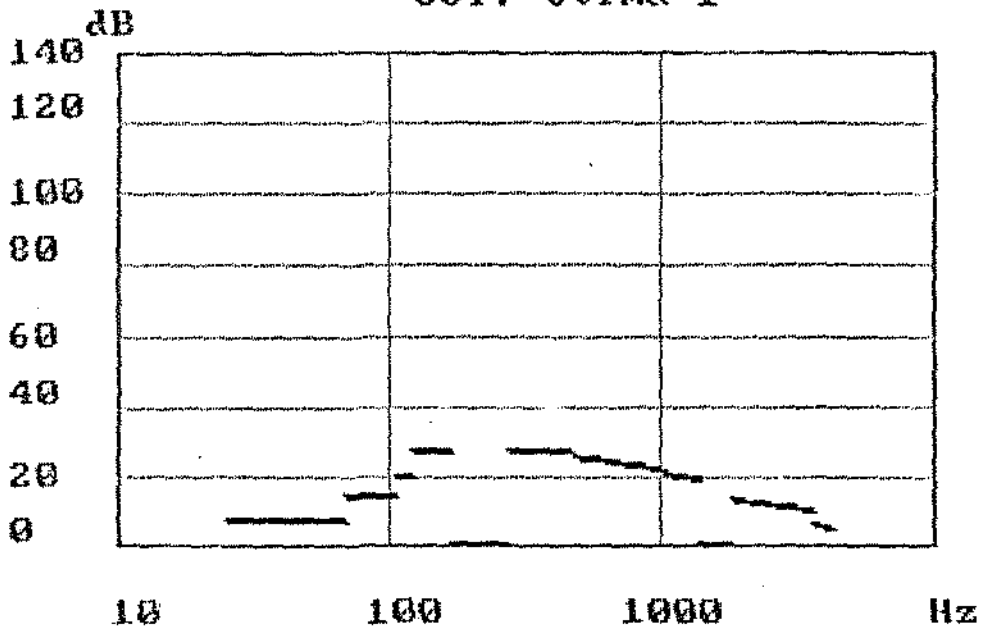
Numero de Cornes-Ingleses = 1

Tocando com intensidade ---> mf

Numero de Fagotes = 2

Tocando com intensidade ---> mf

Sol. Ótima 1



RESULTADO

Nº 2

***** Limitantes *****

frequencia minima do trecho = 61.000

frequencia maxima do trecho = 4500.000

-----Trumpetes-----

freq. min = 164.00 freq. max. = 2796.00

-----Trompas-----

freq. min = 61.00 freq. max. = 2094.00

-----Trombones-----

freq. min = 82.00 freq. max. = 1398.00

***** FUNCAO G(W) = Timbre VIII *****

58.00 >= 0.00*w + 81.3577 >= 41.00

61.00 >= 0.00*w + 144.2879 >= 58.00

65.00 >= 16.21*w + 165.6592 >= 61.00

80.00 >= 53.27*w + 151.3544 >= 65.00

82.00 >= 18.41*w + 217.7106 >= 80.00

130.00 >= 31.76*w + 243.2156 >= 82.00

160.00 >= 74.21*w + 234.2691 >= 130.00

164.00 >= 4.57*w + 387.7584 >= 160.00

196.00 >= 16.77*w + 415.8704 >= 164.00

233.00 >= 52.91*w + 400.5879 >= 196.00
261.00 >= 62.60*w + 435.3366 >= 233.00
350.00 >= 94.06*w + 408.9742 >= 261.00
350.00 >= 94.06*w + 408.9742 >= 350.00
350.00 >= 94.06*w + 408.9742 >= 350.00
440.00 >= -44.64*w + 761.8537 >= 350.00
520.00 >= -66.55*w + 894.2410 >= 440.00
550.00 >= -95.15*w + 971.9313 >= 520.00
750.00 >= -174.29*w + 1188.8023 >= 550.00
910.00 >= -232.46*w + 1356.0239 >= 750.00
987.00 >= -317.32*w + 1607.1295 >= 910.00
1200.00 >= -282.45*w + 1459.4157 >= 987.00
1300.00 >= -316.22*w + 1563.3917 >= 1200.00
1398.00 >= -370.48*w + 1732.3659 >= 1300.00
1569.00 >= -325.67*w + 1539.6392 >= 1398.00
1569.00 >= -325.67*w + 1539.6392 >= 1569.00
2094.00 >= -264.49*w + 1259.8342 >= 1569.00
2796.00 >= -201.56*w + 1021.5919 >= 2094.00
3138.00 >= -179.98*w + 889.5038 >= 2796.00
4704.00 >= -141.78*w + 693.2405 >= 3138.00
5268.00 >= -97.20*w + 489.5178 >= 4704.00
6279.00 >= -75.30*w + 357.1305 >= 5268.00
9408.00 >= -21.90*w + 132.3873 >= 6279.00

***** CANALIZACOES *****

4.000(1.489) >= x[1] >= 1.000 (0.938)

6.000(1.733) >= x[2] >= 1.000 (0.953)

4.000(1.514) >= x[3] >= 1.000 (0.953)

***** VALORES INICIAIS *****

X[1] = 2.000 (1.182)

X[2] = 4.000 (1.514)

X[3] = 2.000 (1.201)

Y[4] = 0.712--> f

Y[5] = 0.712--> f

Y[6] = 0.712--> f

***** ITERACAO 1 *****

TEMPO DA ITERACAO = 21.09 TEMPO ACUMULADO = 21.09

X[1] = 1.48896 G[1] = -11037.85008

LOW[1] = 0.93798 UP[1] = 1.48896

X[2] = 0.95349 G[2] = 7.90189

LOW[2] = 0.95349 UP[2] = 1.73260

X[3] = 1.51357 G[3] = -4064.04911

LOW[3] = 0.95349 UP[3] = 1.51357

Y[4] = 1.00000 G[4] = -24165.48524

LOW[4] = 0.00000 UP[4] = 1.00000

Y[5] = 0.00000 G[5] = 12.56504

LOW[5] = 0.00000 UP[5] = 1.00000

Y[6] = 1.00000 G[6] = -5904.97531

LOW[6] = 0.00000 UP[6] = 1.00000

Z = 425820.37861

***** SOLUCAO OTIMA *****

EPSILON DE PARADA = 1.0000000000E-04

PRECISAO DA MAQUINA = 1.0000000000E-06

NUMERO DE AVALIACOES DA FUNCAO = 16

TEMPO TOTAL = 21.09 segundos.

VALOR OTIMO = 425020.3786100000

Numero de Trumpetas = 4

Tocando com intensidade ---> fff

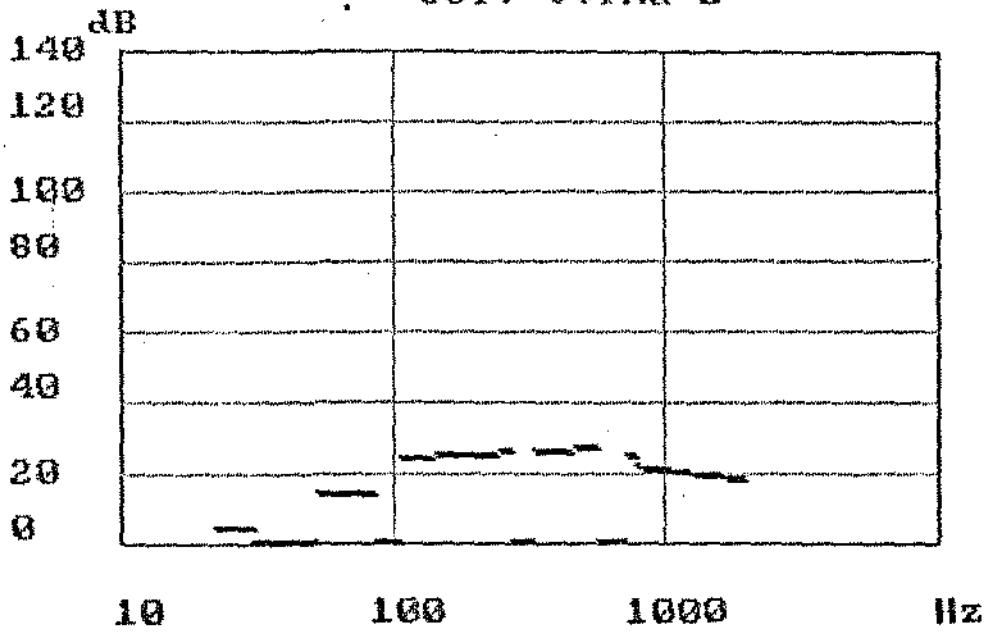
Numero de Trompas = 1

Tocando com intensidade ---> ppp

Numero de Trombones = 4

Tocando com intensidade ---> fff

Sol. Ótima 2



Para os dois resultados computacionais encontrados usamos funções $G(w)$, que serão apresentadas no próximo anexo. Para o primeiro exemplo dado, um trecho da V Sinfonia de Beethoven (trecho A), no qual tocam 8 violinos, 2 violas, 2 cellos e 2 contra-baixos e 1 clarinete, obtemos, através do programa, a orquestra formada de flautas, oboés, cornes-ingleses e fagotes que mais se aproxima timbristicamente da orquestra original tocando o trecho A da V Sinfonia.

O resultado apresentou uma combinação de 1 flauta tocando em ppp, 1 oboé em ppp, 1 corne-ingles em mf e 2 fagotes em mf. Esse resultado é compatível com a realidade musical, pois para orquestras com mais instrumentos de cordas o número de madeiras em cada naipe gira em torno de um a quatro. O fato de o corne-ingles e os dois fagotes estarem tocando numa intensidade maior (mf) está relacionado com a faixa de frequência em que o trecho A foi escrito, a qual é uma região grave (frequências baixas).

No segundo exemplo, usando uma orquestra sinfônica com todos os naipes tocando forte (timbre VIII, veja próximo anexo), constatamos que a melhor aproximação timbrística para mesma é um conjunto de naipes que contenha 4 trumpetes tocando fff, 1 trompa tocando ppp e 4 trombones tocando fff. O fato de encontrarmos apenas uma trompa tocando, nos leva à conclusão de que é mais equilibrada timbristicamente a combinação trompete e trombone.

O tempo de processamento para cada um dos resultados foi razoável. Também pudemos verificar no exemplo dois, onde usamos uma orquestra completa, que o tempo máximo de processamento foi de 21 segundos.

Outro fato importante que pudemos verificar é que, nos dois casos, o programa convergiu em uma iteração. Certamente este fato não será constante para qualquer combinação orquestral, porém o mesmo demonstra uma certa estabilidade do método numérico usado.

ANEXO II

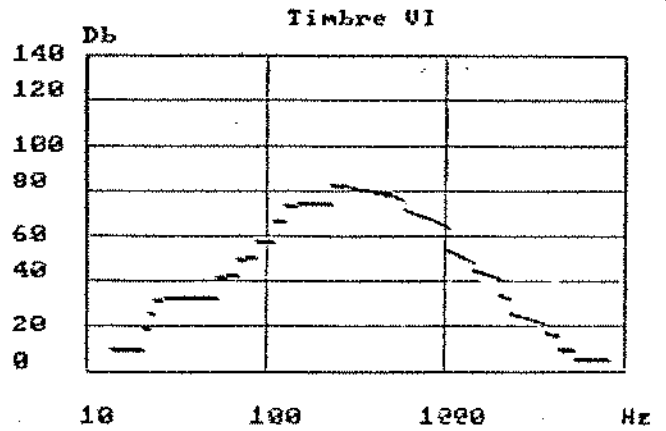
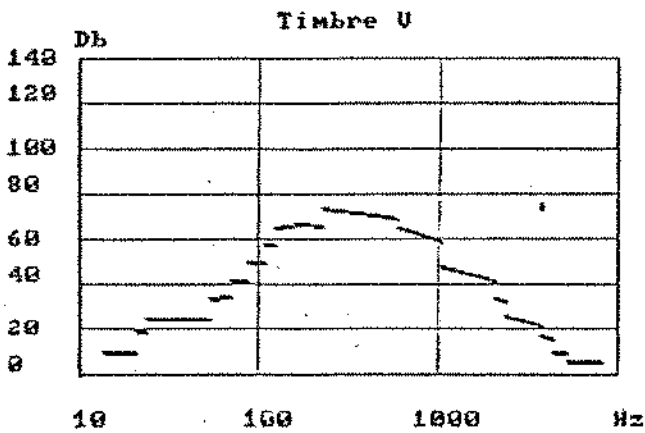
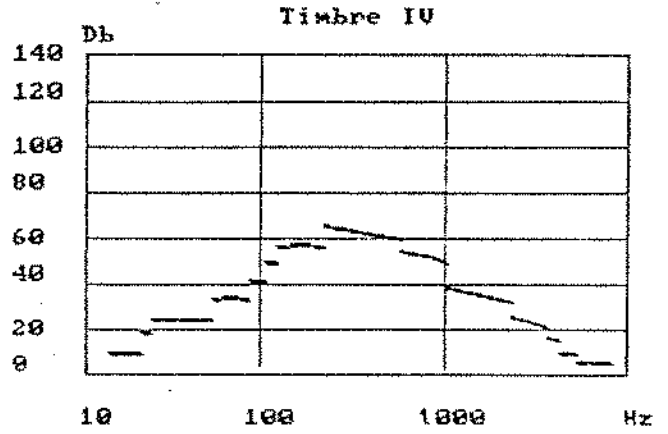
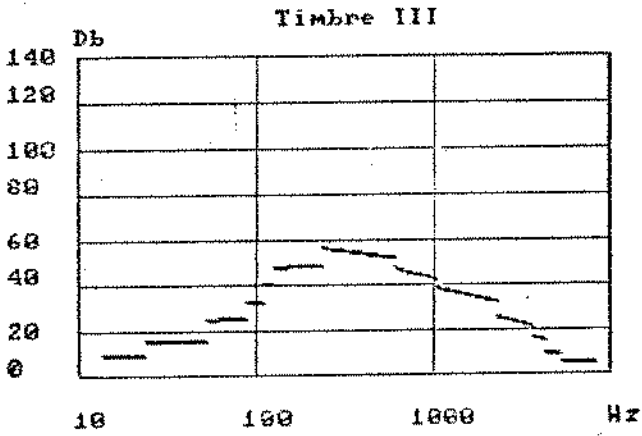
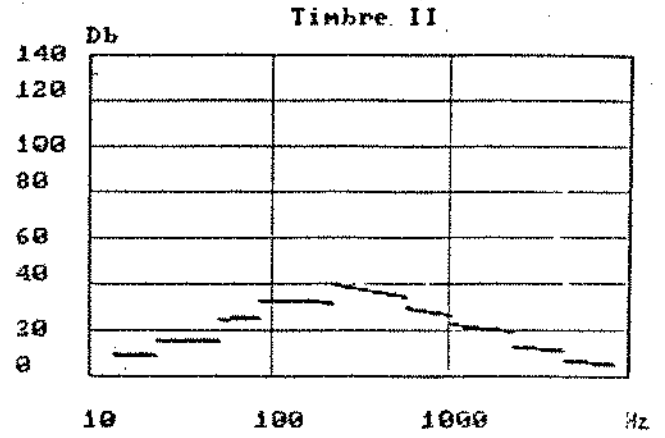
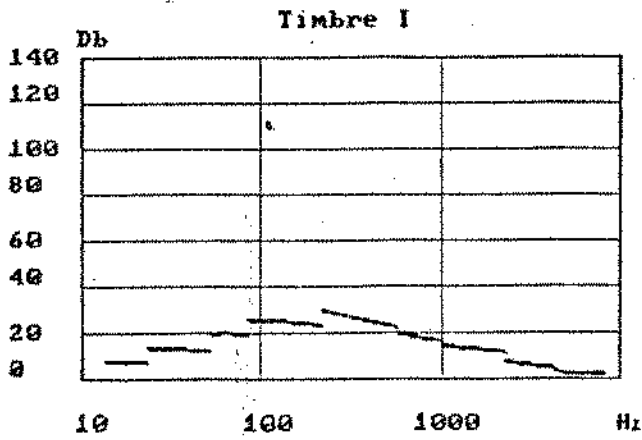
ANÁLISE GRÁFICA
DO
TIMBRE ORQUESTRAL

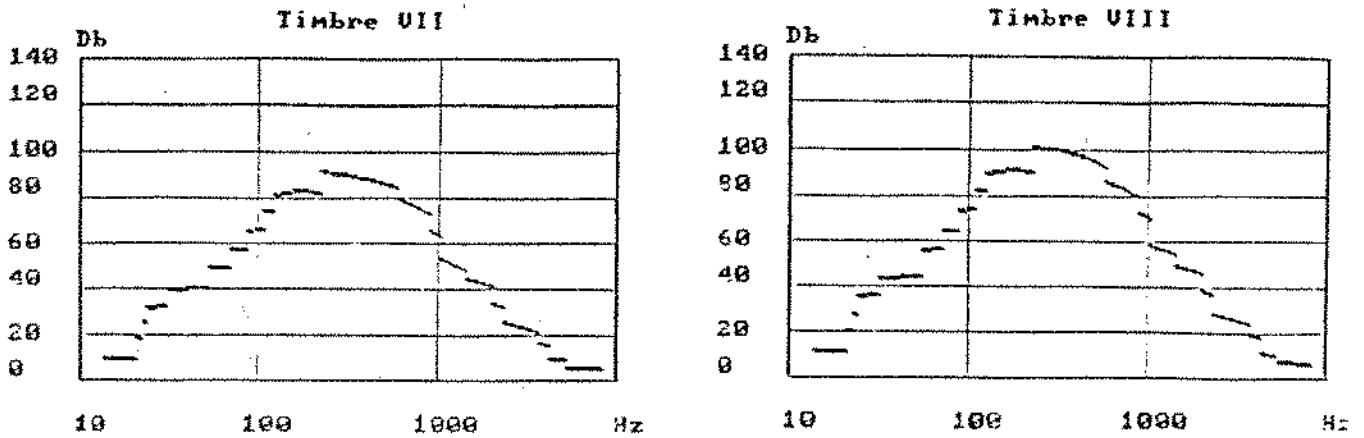
ANÁLISE GRÁFICA DO TIMBRE

Partindo-se das equações 5.9 e 5.10 e usando-se a orquestra máxima de normalização, descrita anteriormente no anexo I, pode-se desenvolver uma análise gráfica do timbre orquestral. Com essa intenção daremos neste anexo três exemplos de como analisar-se graficamente a distribuição dos harmônicos de uma orquestra sinfônica. No 1º exemplo, partindo-se de uma orquestra inicial de quatro violinos, duas violas, um cello e um contra-baixo, muda-se o timbre da orquestra colocando-se outros naipes, nos quais o número de instrumentos será igual a um. Abaixo encontra-se uma tabela que mostra como será a sequência dos naipes nos gráficos da próxima página.

	1	2	3	4	5	6	7	8
flauta			X	X	X	X	X	X
oboe			X	X	X	X	X	X
corne-ingles				X	X	X	X	X
fagote				X	X	X	X	X
trumpete					X	X	X	X
trompa						X	X	X
trombone							X	X
violino	X	X	X	X	X	X	X	X
viola	X	X	X	X	X	X	X	X
cello	X	X	X	X	X	X	X	X
c. baixo	X	X	X	X	X	X	X	X

OBSERVAÇÃO: para o primeiro (timbre I) e segundo gráficos (timbre II) a orquestra é a mesma, porém no primeiro todos os naipes tocam em ppp e no segundo todos tocam fff. No oitavo gráfico o número de instrumentos das cordas é o dobro da quantidade inicial. Para todos os gráficos, exceto o primeiro, todos os instrumentos tocam fff.





Fazendo uma rápida análise das curvas do timbre I ao timbre VIII, podemos verificar as seguintes propriedades:

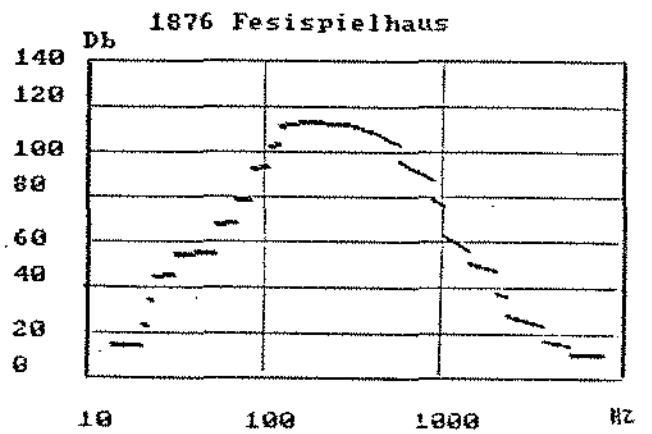
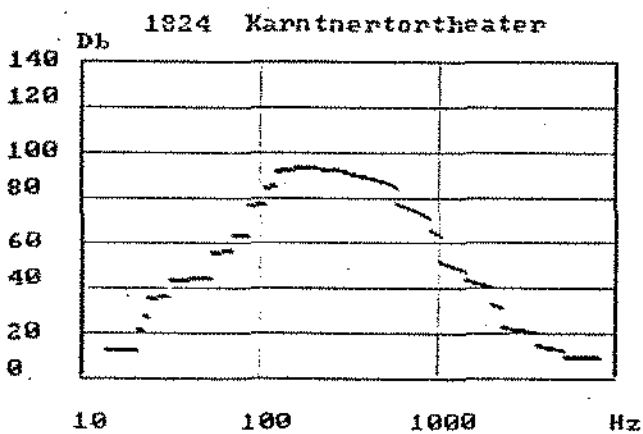
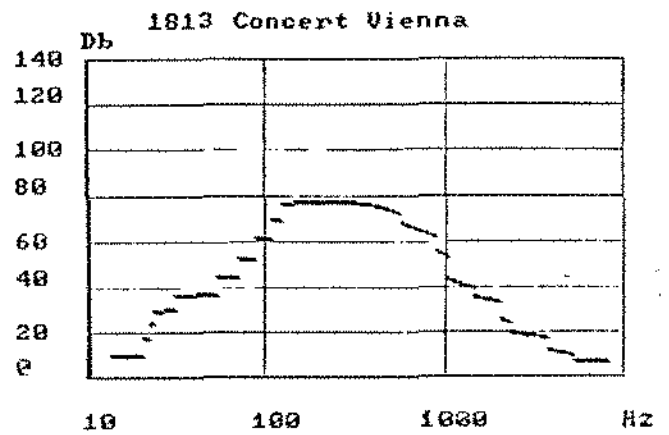
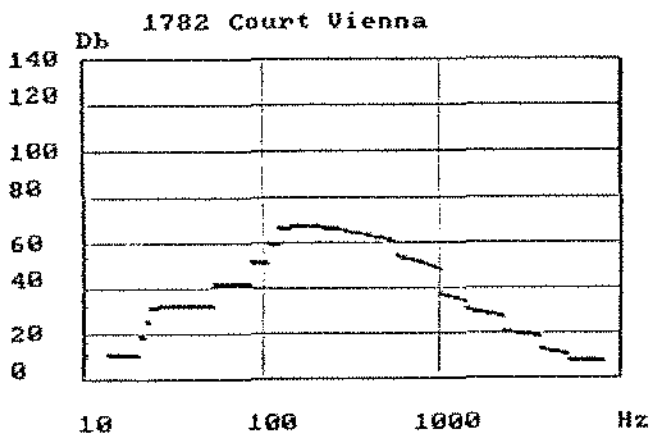
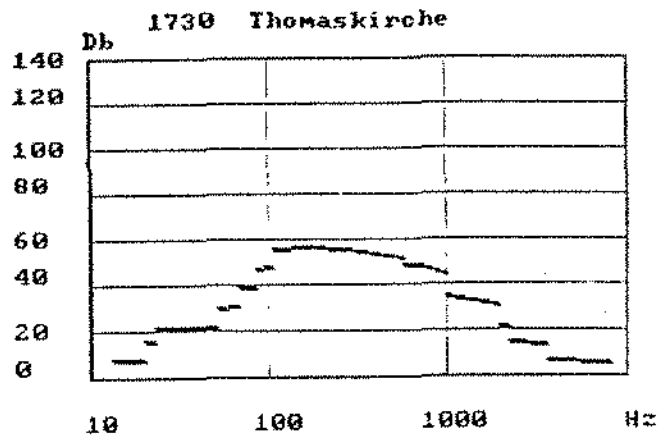
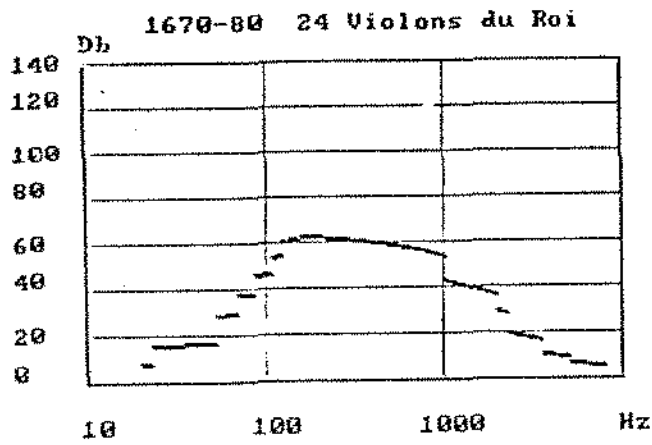
1. partindo do princípio de que a curva caracteriza o loudness dos harmônicos, vemos uma faixa de intensidade máxima próxima da região onde o ouvido humano tem maior loudness.
2. as madeiras (veja capítulo I, seção 1.) tendem a elevar o pico dessa faixa rapidamente.
3. os metais (veja capítulo I, seção 1.) não elevam o pico da faixa tão rapidamente, porém criam um alargamento da curva à esquerda.
4. as cordas não elevam o pico da faixa significativamente quando tocam mais forte, porém o uso de mais instrumentos de cordas tende a "suavizar" a concavidade da curva, ou seja, homogeneizar a dispersão dos harmônicos.

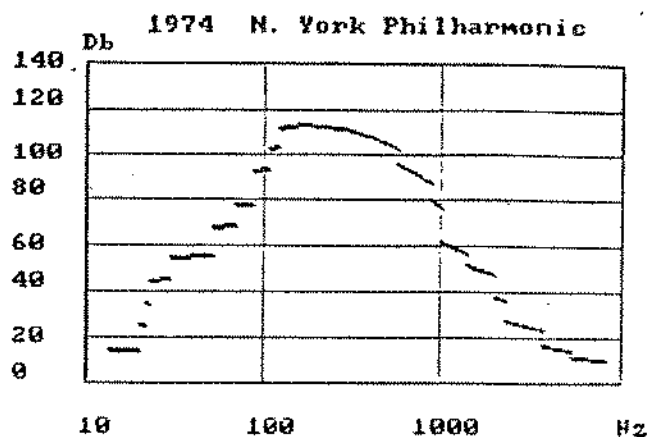
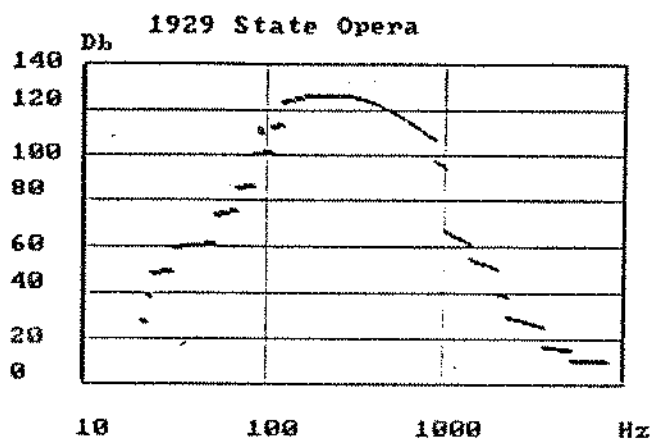
No exemplo a seguir usamos uma informação do Grove's [23], que numa tabela (TA2.1) fornece a distribuição de naipes e a quantidade de instrumentos que tocavam em algumas orquestras históricas.

Date	City	Institution	Composition of Orchestra													Reperion		
			STRING				WOODWIND				BRASS				Perc.			
			Violins	Violas	Cellos	Double Basses	Flutes	Oboes	Clarinets	Bassoons	Horns	Trompets/Corneetts	Trombones/Tubas	Timpani/other	Keyboard		Pucked strings	
1607	Mantua	Gonzaga Palace, theatre	4	4	2	2	3	2					4/2	4	6	6	Monteverdi <i>Orfeo</i>	
1634	London	King's Violins, masque	4	7	4												William Lawes, lute	
1665	Venice	Teatro SS Giovanni e Paolo	2	2		1										2	Cavalli	
1670s-80s	Paris	24 Violins du Roi, Opéra	6	12	6			2	2		1		2		1	1	Lully operas	
1708	Rome	Palazzo Bonelli, oratorio	6	2	1	1										1	A. Scarlatti <i>Annunciate</i>	
1708	Rome	Palazzo Bonelli, oratorio	23	4	6	6	1		4				2	1		1	Handel <i>La resurrezione</i>	
1713	Venice	church	26	6	-12-										1	1	Caldara cantata	
1726	London	King's Theatre	22	2	3	2		2	2		3	2				2	1	Handel operas
1730	Leipzig	Thomaskirche	6	4	2	1			3		2		3		1	2		Bach cantatas
1734	Dresden	court	12	4	5	2		3	3		2	2	2				2	Pisendel, Hasse, Vivaldi
1740s-50s	Naples	Teatro San Carlo	28	5	2	4			4		2		4		1	2		Purpora, Feo, Leo, Jommelli
1751	Paris	Opéra	16	6	7	5		2	3		4		1		1	1		Rameau
1754	London	Foundling Hospital Chapel	14	5	3	2			4		4					1	1	Handel <i>Messiah</i>
1754	Berlin	court	12	4	4	2	1	4	3		4	2	2		1	2	1	C.P.E. Bach, Graun, Quantz
1766	Venice	St Mark's church	12	6	4	5		2	2		2	2				2		Galuppi
1770s	Paris	Opéra	24	5	12	5		4	4	2	8	7	2		1	1		Gluck, Piccini
1770s	Salzburg	court	18	2	2	1		1	2		3	2	2	3	1	1		Leopold and Wolfgang Mozart, Michael Haydn
1770s	Mannheim	court	20	4	4	4		3	3	3	4	4	2		1	1		Mannheim school, Stamitz, Mozart
1778	Paris	Concert Spirituel	22	6	9	6		2	2	2	2	2	2		1			Gossec, J.C. Bach, Mozart, Haydn, Passello
1782	Vienna	court	12	4	3	3		2	2		2	2				2		Mozart, Salieri etc
1783	Eszterháza	court	10	2	2	2		2		2	2					1		Haydn
1791-3	London	Hanover Square Rooms	16	4	4	4		2	2		2	2	2		1	1		Haydn
1813	Vienna	concert	8	2	2	2		2	2	2	2	2	2	2	1			Beethoven
1814	Vienna	Redoutensaal, concert	36	14	12	17		2	2	2	2	2	2	2	1			Beethoven
1814	Milan	Teatro alla Scala	25	6	4	8		2	2	2	2	4	2	1	1/1			Rossini
1818	Naples	Teatro San Carlo	24	6	6	7		2	2	2	2	4	2	3	1/1			Rossini
1824	Vienna	Kärntnertheater, concert	24	10	6	6		2	2	2	2	2	2	2	1			Beethoven Ninth Symphony
1839	Leipzig	Gewandhaus, concert	17	5	5	4		2	2	2	2	2	2		1			Mendelssohn, Schumann
1839	Paris	Opéra	24	8	10	8		3	3	2	4	4	4	3	1/1			Meyerbeer, Halévy, Berlioz
1839	Paris	Opéra-Comique	16	5	6	6		3	3	3	3	6	3	4	1/1		2	Auber, Boieldieu
1845	Turin	Teatro Regio	21	4	4	6		3	2	2	2	4	2	3		1	1	Donizetti, Verdi
1865	Leipzig	Gewandhaus, concert	30	8	9	5		2	2	2	2	4	2	3	1			Mendelssohn, Schumann etc
1876	Bayreuth	Festspielhaus	32	12	12	8		4	4	4	3	8	4	5	1/2		6	Wagner Ring
1867	Karlsruhe	court	18	4	4	4		2	2	2	3	4	2	3	1			Brahms First Symphony
1900	Vienna	Philharmonic Orchestra	33	11	10	10		4	4	4	4	8	4	5	1/2	1		Mahler, Strauss etc
1905	Turin	Teatro Regio	25	7	7	7		3	3	3	3	8	4	3	1/1	2		Puccini, Wagner
1929	Dresden	State Opera	33	11	11	11		6	6	6	6	10	6	6	1/2	1		Strauss
1934	London	Boyd Neel Orchestra, concert	11	3	3	2		2			2					1	1	Respighi, Holst, Elgar, Vaughan Williams
1934	New York	New York Philharmonic, concert	34	12	12	9		4	4	5	4	6	4	4	1/1	2	1	Boulez, Carter

TA2.1

Veja, a seguir, gráficos associados a algumas das orquestras acima.





Analisando-se esse segundo exemplo, verifica-se que em toda a história das orquestras sempre a proporcionalidade de cordas em relação a outros naipes se manteve constante, ou seja, como já verificamos anteriormente, essa é uma forma de preservar uma boa distribuição de harmônicos.

Finalmente, no terceiro exemplo, passamos a analisar uma música conhecida, a "V Sinfonia de Beethoven"; para tal propósito voltamos a ressaltar que um trecho musical no sentido estrito de nossa análise terá um número de compassos qualquer, desde que no mesmo o número de naipes e o loudness de cada naipe se mantenham constantes para uma orquestra também constante.

Assim, usamos uma orquestra que possivelmente tenha sido a orquestra que Beethoven utilizou quando tocou pela primeira vez a V Sinfonia; veja na tabela TA2.1 a orquestra Redoutensaal, concert - 1814.

O trecho A será limitado pelos compassos 1 a 5, trecho B, compassos 6 a 17, trecho C, compassos 18 a 21 e trecho D, compassos 52 a 58 (veja a partitura dos trechos a seguir).

Symphony No.5

I
Allegro con brio (♩. 108) L. van Beethoven, Op. 67
1770 - 1827

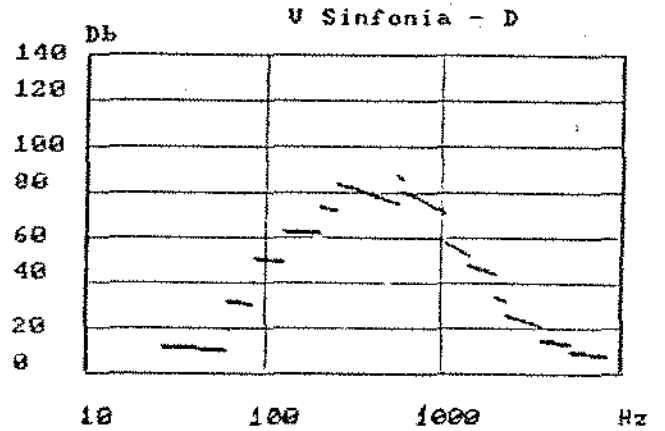
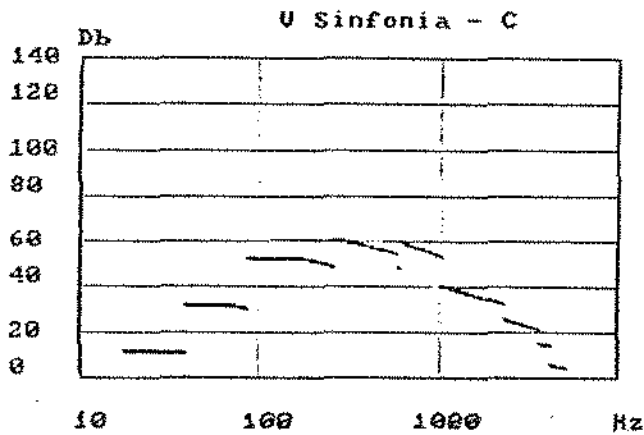
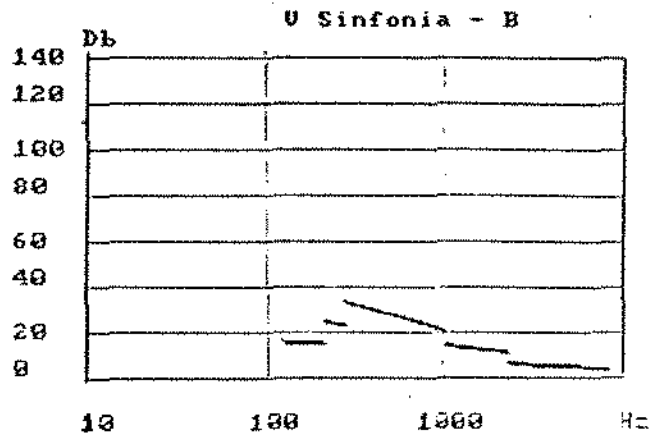
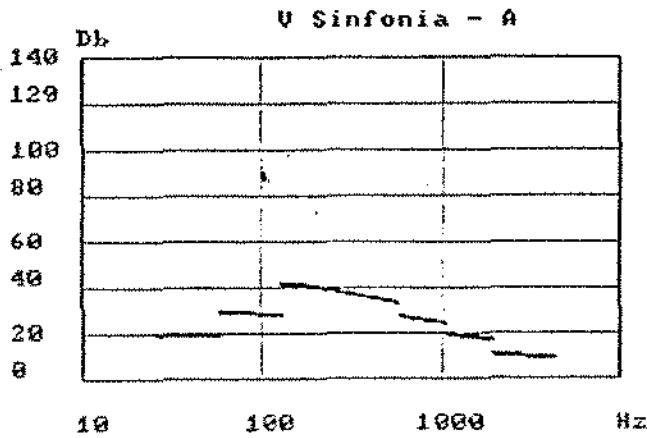
2 Flauti
2 Oboi
2 Clarinetti in B
2 Fagotti
2 Corni in Es
2 Trombe in C
Timpani in C-G
Violino I
Violino II
Violoncello
Contrabbasso

15 20
Fl.
Ob.
Cl.
Fg.
Cor. (E♭)
Tr. (C)
Tp.
Vi.
Vla.
Vc.
Cb.

Musical score for measures 50-54. The score includes staves for Flute (Fl.), Oboe (Ob.), Clarinet (Cl.), Bassoon (Fg.), Cor (E♭), Trumpet (Tr. C), Timpani (Timp.), Violin (VI.), Viola (Vla.), and Violoncello/Double Bass (Vc. Cb.). Measures 50-54 are marked with a large '50' at the top. The woodwinds and strings play sustained notes with various articulations and dynamics.

Musical score for measures 55-59. The score includes staves for Flute (Fl.), Oboe (Ob.), Clarinet (Cl.), Bassoon (Fg.), Cor (E♭), Trumpet (Tr. C), Timpani (Timp.), Violin (VI.), Viola (Vla.), and Violoncello/Double Bass (Vc. Cb.). Measures 55-59 are marked with a large '55' at the top. The woodwinds and strings play sustained notes with various articulations and dynamics. A large 'D' is written below the score, indicating a specific section or measure.

Veja a seguir quatro curvas associadas respectivamente aos trechos A, B, C e D.



Comparando-se o gráfico do trecho A com o gráfico B, verifica-se que no segundo trecho o corte dado pela frequência mínima é mais alto, e assim, diminuindo-se os graves, a simetria da curva fica descaracterizada. Nota-se também que a diminuição do loudness não acarreta uma diminuição significativa no pico da curva.

Passando-se de B para C, pois são trechos consecutivos, verifica-se claramente que a assimetria da curva B é compensada em C com a entrada de todos os instrumentos, o que mostra como a curvatura e a simetria do gráfico estão vinculadas ao efeito timbrístico que o compositor quer obter.

O gráfico D tem a mesma quantidade de naipes que o gráfico C, porém o loudness é ff, o que acarreta um pico mais elevado para a curva.

Comparando-se todos os gráficos obtidos aqui, percebe-se claramente que o timbre de uma orquestra pode ser caracterizado por uma curva normal. Esta conclusão nos leva à idéia de que quando um músico está escrevendo uma obra para orquestra, ao pensar nos efeitos timbrísticos de cada trecho de sua obra, ele está associando aos mesmos curvas normais com diferentes variâncias e médias. Tal fato nos leva a sugerir uma composição musical para qual, a priori, seriam pré-estabelecidas as curvas normais de cada trecho.

Os resultados obtidos não somente nesta seção como em toda a dissertação nos incentivam a continuar esta pesquisa, e o que nos parece natural é verificar, a partir destes resultados, o comportamento das funções aqui obtidas, não mais no domínio das frequências, mas no domínio do tempo. Com tal procedimento analisaremos os processos dinâmicos envolvidos na música.

BIBLIOGRAFIA

- [1] XENAKIS, IANNIS: "Formalized Music", London/Indiana University Press, 1971.
- [2] BORETZ, B. and CONE, E.T.: "Contemporary Music Theory", New York/W.W. Norton & Company, 1972.
- [3] KNOPOFF, L. and HUTCHINSON, W.: "Information Theory for Musical Continua", Journal of Music Theory, vol. 25, pág. 14-44, 1981.
- [4] PISTON, WALTER: "Orchestration", New York, W.W. Norton & Company 1955.
- [5] BRINDLE, SMITH REGINALD: "Serial Composition", Oxford, Oxford University Press, 1976.
- [6] BARRAUD, HENRY: "Para Compreender as Músicas de Hoje", São Paulo, Editora Perspectiva, 1977.
- [7] EHRENZWEIG, ANTON: "A Ordem Oculta da Arte", Rio de Janeiro, Zahar Editores, 1969.
- [8] CHRISTOFIDES, NICOS: "Combinatorial Optimization", New York, John Wiley & Sons, Inc., 1979.

- [9] MURTY, KATTA: "Linear and Combinatorial Programming", New York, John Wiley & Sons, Inc., 1976.

- [10] LUENBERGER, DAVID G.: "Linear and Nonlinear Programming", Addison-Wesley Publishing Company, 1984.

- [11] P. GILL, W. MURRAY: "Practical Optimization", Academic Press, 1981

- [12] ZOUTENDIJK, G.: "Mathematical Programming Methods", Amsterdam North-Holland Publishing Company, 1976.

- [13] LUCE, DAVID A.: "Dynamic Spectrum Changes of Orchestral Instruments", Journal of the Engineering Society, vol. 23, págs. 585-588, 1975.

- [14] LUCE, D.A. and CLARK, M.: "Physical Correlates of Brass Instrument Tones", Journal of Acoustic Society America, vol. 42, págs. 1232-1243, 1967.

- [15] LUCE, D.A. and CLARK, M.: "Intensities of Orchestral Instrument Scales Played at Prescribed Intensities", Journal of Engineering Society, vol. 13, pág. 151, 1965.

- [16] BATEMAN, WAYNE A.: "Introduction to Computer Music", New York, John Wiley & Sons, Inc., 1980.

- [17] HELMOLTZ, H.: "Sensation of Tones", New York, Dover Publication, Inc., 1954.
- [18] WINCKEL, FRITZ: "Music, Sound and Sensation", New York, Dover Publications, Inc., 1967.
- [19] ROEDERER, JUAN G.: "Introduction to the Physics and Psycho-physic of Music", London, The English Universities Press Ltda, 1973.
- [20] OLSON, HARRY F.: "Music, Physics and Engineering", New York, Dover Publications, Inc., 1967.
- [21] BENADE, ARTHUR H.: "Fundamentals of Musical Acoustics , New York, Oxford University Press, 1978.
- [22] J. MANZOLLI, J.L. BOLDRINI: "Um Modelo Matemático para Orquestração" XI Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, pags 170-172, Agosto de 1988.
- [23] GROVE'S: "Dictionary of Music and Musicians" 6^a edição - vol 13 pg 690.