

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO
CIENTÍFICA

JOSUÉ GERALDO DAMASCENO

Família de Aplicações Bilhares
geradas pelo Fluxo de Curvatura

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO
CIENTÍFICA

JOSUÉ GERALDO DAMASCENO

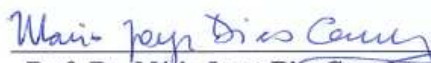
**Família de Aplicações Bilhares
geradas pelo Fluxo de Curvatura**

TESE DE DOUTORADO APRESENTADA
AO INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ES-
TATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA
DA UNICAMP PARA OBTENÇÃO DO
TÍTULO DE DOUTOR EM MATEMÁTICA

ORIENTADOR: Prof. Dr. Mário Jorge Dias Carneiro

COORIENTADOR: Prof. Dr. Marco Antonio Teixeira

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA TESE DEFENDIDA PELO
ALUNO JOSUÉ GERALDO DAMASCENO, E ORIENTADA PELO PROF. DR. MÁRIO JORGE
DIAS CARNEIRO


Prof. Dr. Mário Jorge Dias Carneiro - Orientador


Prof. Dr. Marco Antonio Teixeira - Coorientador

CAMPINAS
2011

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA POR ANA REGINA MACHADO – CRB8/5467
BIBLIOTECA DO INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E
COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA – UNICAMP

D18f	Damasceno, Josué Geraldo, 1975- Família de aplicações bilhares geradas pelo fluxo de curvatura / Josué Geraldo Damasceno. - Campinas, SP : [s.n.], 2011. Orientador: Mário Jorge Dias Carneiro. Coorientador: Marco Antonio Teixeira. Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. 1. Teoria dos sistemas dinâmicos. 2. Fluxo de curvatura. 3. Bilhar (Matemática). 4. Curvas invariantes. I. Carneiro, Mário Jorge Dias. II. Teixeira, Marco Antonio, 1944-. III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. IV. Título.
------	---

Informações para Biblioteca Digital

Título em inglês: Family of billiards maps generated by curvature flow

Palavras-chave em inglês:

Dynamical systems theory

Curvature flow

Billiards (Mathematics)

Invariant curves

Área de concentração: Matemática

Titulação: Doutor em Matemática

Banca examinadora:

Mário Jorge Dias Carneiro [Orientador]

Luiz Antonio Barrera San Martin

Clodoaldo Grotta Ragazzo

Rafael Oswaldo Ruggiero Rodriguez

Vanderlei Minori Horita

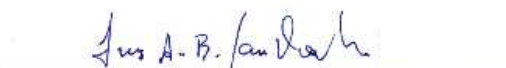
Data da defesa: 07-12-2011

Programa de Pós-Graduação: Matemática

Tese de Doutorado defendida em 07 de dezembro de 2011 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.


Prof(a). Dr(a). MARIO JORGE DIAS CARNEIRO


Prof(a). Dr(a). LUIZ ANTONIO BARRERA SAN MARTIN


Prof(a). Dr(a). CLODOALDO GROTTA RAGAZZO


Prof(a). Dr(a). RAFAEL OSWALDO RUGGIERO RODRIGUEZ


Prof(a). Dr(a). VANDERLEI MINORI HORITA

“Então respondeu Jó
ao Senhor:
Bem sei que tudo
podes,
e nenhum dos teus
planos pode ser
frustrado.” (Jó 42:1,2)

Agradecimentos

Ao concluir este trabalho agradeço:

À Deus por sua maravilhosa graça da qual sou alvo.

À minha família que, com amor, me apoia, incentiva e sempre está presente em todos os momentos da minha vida.

À Fabíula, minha esposa e fiel companheira que, com paciência e carinho, ajudou-me a enfrentar os obstáculos encontrados pelo caminho. Principalmente por sua dedicação e amor.

Aos Profs. Clodoaldo Grotta Ragazzo, Luiz Antonio Barrera San Martin, Rafael Oswaldo Ruggiero Rodriguez e Vanderlei Minori Horita por gentilmente terem aceito o convite para compor a banca examinadora.

Ao Professor Mário Jorge Dias Carneiro, não apenas pela sua excelente orientação, mas também por ter sido um verdadeiro amigo e um pai nos conselhos. Agradeço também, pelo exemplo de caráter e honestidade que tem sido para mim, pela confiança desprendida, acreditando sempre no meu trabalho e pela paciência e exigência necessárias.

Ao Professor Marco Antônio Teixeira pela coorientação.

Aos professores e funcionários do departamento de matemática da Universidade Estadual de Campinas.

Aos professores Paulo César Carrião(UFMG) e Olímpio Hiroshi Miyagakide (UFJF), pelo incentivo e conselhos que ajudaram o meu desenvolvimento.

Aos colegas e amigos da pós-graduação.

Aos colegas e amigos do departamento de matemática da Universidade Federal de Ouro Preto.

Ao CNPq e Capes pelo apoio financeiro.

Resumo

Descrevemos algumas propriedades dinâmicas de uma família de aplicações bilhares sobre curvas convexas(ovais) as quais são deformadas pelo fluxo de curvatura. Quando a mesa se deforma, a razão entre as curvaturas mínima e máxima converge a 1 e por um resultado clássico de Gage e Hamilton, depois de uma normalização, as curvas tendem a um círculo. Como consequência, a região de Lazutkin, isto é, a região que contém cáusticas convexas, cresce gradualmente. Descreveremos algumas birfurcações dinâmicas nesse processo, em particular, descreveremos o que acontece com a família de órbitas de período dois e as órbitas "zig-zag"

Abstract

We describe some dynamical properties of one parameter families of billiards on convex curves (ovals) which are deformed by the curvature flow. As the billiard table deforms, the ratio between minimal and maximal curvature converges to 1 and by a classical result of Gage and Hamilton [GH], after a normalization, the curves tend to a circle. As a consequence, the Lazutkin region, i.e. the region that contains convex caustics, gradually increases. We describe some dynamical bifurcations in this process, in particular, we describe what happens with the family of period two orbits and the "zig-zag" orbits.

Sumário

1	Fluxo de Curvatura	3
1.1	Origem do fluxo de curvatura	3
1.2	Curvas de Evolução no Plano	4
1.3	Curvas estritamente convexas no plano	8
1.3.1	O Fluxo Normalizado	14
1.3.2	Equações de evolução da evoluta	16
1.3.3	Análise da evolução dos vértices	18
2	Bilhares	21
2.1	Estudo de órbitas de período 2	22
2.1.1	Caracterização dinâmica dos diâmetros de uma curva convexa	23
2.2	Família de Bilhares sobre curvas geradas pelo Fluxo de Curvatura	25
2.3	Estudo dos diâmetros Hiperbólicos	27
2.4	Estudo dos diâmetros Parabólicos	30
2.4.1	Interpretação geométrica através da evolução da evoluta	30
2.4.2	Estudo das bifurcações	31
3	Órbitas periódicas do tipo Zig-Zag	37
3.1	Primeira Antípoda A_1	37
3.1.1	A dinâmica da aplicação A_1	41
3.2	Segunda Antípoda A_2	42
3.3	Estimativas de A_n através dos invariantes da curva	49
4	Curvas Invariantes	52
4.1	Cáusticas	54
4.2	Existência de Curvas Invariantes	57
4.3	O teorema de Lazutkin	58
4.3.1	Questões	62

Introdução

Em 1986, M. Gage e R. Hamilton provaram que o fluxo de curvatura contrai uma curva fechada plana, simples, convexa e suave, num ponto. Durante a evolução a curva permanece convexa tornando-se circular a medida que encolhe, no seguinte sentido: a razão do raio inscrito pelo raio circunscrito tende a um, a razão da curvatura máxima pela curvatura mínima tende a um, as derivadas de ordem superior da curvatura convergem a zero. Se além disso aplicarmos uma homotetia a cada curva de evolução e uma renormalização no intervalo de evolução de maneira que cada curva tenha área igual a π obtemos uma nova família de curvas que no limite assintótico converge na topologia C^∞ ao círculo de raio um.

O Problema do Bilhar sobre uma curva fechada plana, simples e convexa consiste em descrever o movimento livre de uma partícula na região limitada pela curva, com velocidade unitária e reflexões elásticas quando colide com o bordo. As propriedades que estudamos no Problema do Bilhar são: existência de pontos periódicos, classificação de pontos periódicos, existência de curvas rotacionais invariantes, existência de outros conjuntos invariantes que são gráficos sobre subconjuntos compactos do círculo, existência de órbitas que se aproximam, no futuro ou passado, de outras órbitas.

Nesse trabalho estudamos a transição da dinâmica do bilhar de uma curva fechada plana, simples, convexa e suave sob a ação do fluxo de curvatura normalizado. No primeiro capítulo fazemos uma descrição dos resultados de Gage e Hamilton sobre o fluxo de curvatura, segundo capítulo apresentamos um estudo da evolução das órbitas de período dois. Nesse estudo obtivemos (Teorema A) que para órbitas de período dois do tipo diâmetro hiperbólico, o ângulo entre as variedades estáveis e instáveis tende a zero quando evoluímos a curva pelo fluxo de curvatura. Já as órbitas periódicas de período dois do tipo diâmetro parabólico (Teorema B), sob certas condições de não degenerescência sobre a soma das curvaturas, estas órbitas desaparecerão.

No terceiro capítulo, apresentamos um estudo sobre órbitas do tipo zig-zag (Teorema C). Essas são órbitas periódicas que iniciam seguindo a direção normal à curva e depois de um certo número de batidas encontram a curva na direção do vetor normal. Portanto, retornam ao ponto de origem seguindo o mesmo caminho no sentido inverso. Nosso resultado afirma que órbitas desse tipo desaparecem com a evolução do fluxo de curvatura. No quarto

capítulo apresentamos um estudo sobre curvas invariantes. Em 1973, Lazutkin[21] provou que curvas convexas suficientemente regulares possuem cáusticas convexas arbitrariamente próximas do bordo(região de Lazutkin). Em outras palavras, Lazutkin provou a existência de curvas invariantes arbitrariamente próximas da fronteira do espaço de fase do bilhar. Nosso resultado(Teorema D) descreve ampliação da região de Lazutkin ao longo da evolução pelo fluxo de curvatura.

Finalizamos esse trabalho com algumas questões ainda em aberto que serão objetos de futuras investigações que pretendemos desenvolver.

Fluxo de Curvatura

A análise Geométrica tem sido alvo de intensa e frutífera pesquisa nas últimas décadas por ter sido utilizada na resolução de problemas relevantes e desafiadores no campo da matemática entre os quais podemos citar o problema da geometrização de Thurston, a conjectura de Poincaré e o teorema de existência de geodésicas sobre superfícies.

O ingrediente principal desse estudo é a "equação do calor". A seguir enunciamos um resultado devido a M. Gage e R. Hamilton o qual será ferramenta fundamental em nosso trabalho sobre o estudo de aplicações bilhares sobre curvas planas regulares convexas:

Se M é uma curva convexa mergulhada em $\mathbb{R}^2$, a equação do calor contrai M a um ponto. A curva permanece convexa e torna-se circular a medida que encolhe, no sentido que,

- (a) a razão do raio inscrito pelo raio circunscrito tende a 1, e
- (b) a razão da curvatura máxima pela curvatura mínima tende a 1;
- (c) as derivadas de ordem superior da curvatura converge a 0 uniformemente.

1.1 Origem do fluxo de curvatura

Sejam M e M' variedades riemannianas e $F_t : M \rightarrow M'$ uma aplicação suave. O Laplaciano de F é definido intrinsecamente como uma secção do pull-back do fibrado tangente de M' ,

$$\Delta F \in C^\infty(M, F^*TM'),$$

e é dada pelo traço da matriz das derivadas segunda em qualquer dois sistemas de coordenadas normais sobre M e M' . Quando F é uma imersão isométrica, o Laplaciano de F é dado por $\Delta F = kN$, onde k é a curvatura média (o traço da segunda forma fundamental) e N é o vetor normal unitário. Podemos deformar a imersão F pela equação do calor:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \Delta F \text{ ou } \frac{\partial F}{\partial t} = kN$$

Do ponto de vista geométrico, essa equação tem um significado interessante associado a um princípio variacional: Seja $\mathcal{M}$ o espaço de todas as subvariedades imersas M de uma variedade M' . $\mathcal{M}$ tem a estrutura de uma variedade de dimensão infinita modelada sobre um espaço de Fréchet [14]. O espaço tangente $T_M\mathcal{M}$ a $\mathcal{M}$ em M é naturalmente indentificado com o espaço $C^\infty(M)$ de funções f sobre M , onde a variação em M é dada por mover infinitesimalmente uma distância f na direção normal. O volume $V(M)$ de M dá uma função em $\mathcal{M}$ cuja derivada na direção de uma variação normal é

$$dV(M)f = - \int_M f k.$$

E segue que a equação do calor $\frac{\partial F}{\partial t} = kN$ descreve o fluxo gradiente para a função de Morse V .

Para uma curva compacta M em uma superfície M' a qual é ou compacta ou convexa em ∞ Matthew Grayson provou que se a curva inicial está mergulhada, então ela permanece mergulhada, e contrai-se a um ponto ou uma geodésica ver [12], [13]. Esse resultado, pela teoria de Morse, tem implicações importantes sobre o problema de existência de geodésicas em superfícies.

1.2 Curvas de Evolução no Plano

Voltamos nossa atenção ao caso especial de uma curva não necessariamente convexa no plano. Nossa referência principal é o artigo [10]. Tomemos $M = S^1$ com parâmetro $u \bmod 2\pi$ e escrevemos a curva como $X(u) = (x(u), y(u))$.

Uma curva de evolução é uma aplicação suave $(t, u) \mapsto X(t, u)$ com as seguintes :

- (i) o domínio de X é $(0, T] \times S^1$
- (ii) $X(t, \cdot)$ é uma curva regular, e fechada para cada $t \in (0, T]$.

Obteremos equações de evolução para o comprimento da curva, sua curvatura e para a área da região que ela limita.

O comprimento de arco s ao longo da curva é único a menos de uma constante, mas a derivada com respeito ao comprimento de arco é $\frac{\partial}{\partial s}$ está definida unicamente. Podemos

escrever a equação do calor para a curva como o sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} \\ \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} \end{cases}$$

A derivada $\frac{\partial}{\partial t}$ é tomada mantendo fixos os valores do parâmetro u . O operador $\frac{\partial}{\partial s}$ é dado em termos de u por

$$\frac{\partial}{\partial s} = \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial u} \quad (1.1)$$

onde $v = \sqrt{(\frac{\partial x}{\partial u})^2 + (\frac{\partial y}{\partial u})^2}$. O parâmetro comprimento de arco é $ds = v du$

Sejam T e N os vetores unitários tangente e normal(apontando para dentro) a curva. As equações de Frenet são

$$\frac{\partial T}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial s} T \frac{\partial s}{\partial u} = v k N$$

$$\frac{\partial N}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial s} N \frac{\partial s}{\partial u} = -v k T$$

Lema 1.1 *A derivada de v com respeito a t é $\frac{\partial v}{\partial t} = -k^2 v$.*

DEM.: Usando as equações de Frenet e evolução, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(v^2) &= \frac{\partial}{\partial t} \langle \frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial u} \rangle \\ &= 2 \langle \frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial t} \rangle \\ &= 2 \langle v T, \frac{\partial}{\partial u}(k N) \rangle \\ &= 2 \langle v T, \frac{\partial k}{\partial u} N - v k^2 T \rangle \\ &= -2v^2 k^2 \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{\partial v}{\partial t} = -v k^2.$$

■

Lema 1.2 *Se $L = \int_0^{2\pi} v du$, então*

$$\frac{\partial L}{\partial t} = - \int k^2 ds.$$

DEM.:

$$\frac{\partial L}{\partial t} = \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} v du = - \int_0^{2\pi} k^2 v du = - \int_0^L k^2 ds.$$

Lema 1.3

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial}{\partial t} + k^2 \frac{\partial}{\partial s}$$

DEM.:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial s} &= \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial u} = k^2 \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial u} \\ &= k^2 \frac{\partial}{\partial s} + \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial}{\partial t} + k^2 \frac{\partial}{\partial s} \end{aligned}$$

Lema 1.4 $\frac{\partial}{\partial t} T = \frac{\partial k}{\partial s} N$ e $\frac{\partial}{\partial t} N = -\frac{\partial k}{\partial s} T$.

DEM.:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} T &= \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} X = \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} X + k^2 \frac{\partial}{\partial s} X \\ &= \frac{\partial}{\partial s} (kN) + k^2 T \\ &= \frac{\partial k}{\partial s} N - k^2 T + k^2 T = \frac{\partial k}{\partial s} N \end{aligned}$$

A segunda equação segue de

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \langle T, N \rangle = \langle \frac{\partial T}{\partial t}, N \rangle + \langle T, \frac{\partial N}{\partial t} \rangle$$

pois $\frac{\partial N}{\partial t}$ deve ser perpendicular a N .

Lema 1.5 *Seja θ o ângulo entre o vetor tangente e o eixo x . Então*

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial k}{\partial s} \quad (1.2)$$

DEM.: Como $T = (\cos \theta, \sin \theta)$, temos:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial \theta}{\partial t} N.$$

Por comparação das componentes, o resultado segue do lema 1.4. I

Lema 1.6

$$\frac{\partial k}{\partial t} = \frac{\partial^2 k}{\partial s^2} + k^3.$$

DEM.: Derivando a função $k(t, u) = k(t, s(t, u))$ com relação a t e usando o operador $\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial s}$ do lema 1.3 temos:

$$\frac{\partial k}{\partial t} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial s \partial t} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial t \partial s} + k^2 \frac{\partial \theta}{\partial s} = \frac{\partial^2 k}{\partial s^2} + k^3. I$$

Lema 1.7 Denotamos por A a área região limitada pela curva C . Então

$$\frac{\partial A}{\partial t} = -2\pi.$$

DEM.:

$$\begin{aligned} A &= \int_D dx dy = \frac{1}{2} \int_C -y dx + x dy = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(-y \frac{dx}{du} + x \frac{dy}{du} \right) du \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \langle X, vN \rangle du \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial t} &= -1/2 \int_0^{2\pi} \left(\langle \frac{\partial X}{\partial t}, vN \rangle + \langle X, \frac{\partial v}{\partial t} N \rangle + \langle X, v \frac{\partial N}{\partial t} \rangle \right) du \\ &= -1/2 \int_0^{2\pi} \left(kv + \langle X, -k^2 vN \rangle + \langle X, -v \frac{\partial k}{\partial s} T \rangle \right) du \\ &= -1/2 \int_0^{2\pi} \left(kv + -k^2 v \langle X, N \rangle + \langle X, -\frac{\partial k}{\partial u} T \rangle \right) du \end{aligned}$$

Integrando o último termo por partes temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial t} &= -1/2 \int_0^{2\pi} \left(kv + -k^2 v \langle X, N \rangle + \langle \frac{\partial X}{\partial u}, kT \rangle + \langle X, k^2 vN \rangle \right) du \\ &= -1/2 \int_0^{2\pi} \left(kv + \langle \frac{\partial X}{\partial u}, kT \rangle \right) du \\ &= - \int_0^{2\pi} kv du = - \int_0^L k ds \\ &= - \int_0^{2\pi} k \frac{d\theta}{k} = -2\pi. I \end{aligned}$$

Teorema 1.1 *Seja $X : S^1 \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma família a um parâmetro de curvas fechadas satisfazendo a equação de evolução $\frac{\partial X}{\partial t} = \Delta X = kN$. Se $|k(u, t)| < C$ (C é uma constante) e se a curva inicial $X(0, \cdot)$ está mergulhada, então $X(t, \cdot) : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma curva mergulhada para cada t .*

A demonstração utiliza o princípio do máximo para mostrar que o comprimento de qualquer segmento de reta ligando dois pontos distintos da curva de evolução tem um mínimo estritamente positivo. Veja [10] (páginas 76-79) para mais detalhes. No mesmo trabalho eles provaram que de fato a curvatura permanece limitada, teorema 1.4.

1.3 Curvas estritamente convexas no plano

Voltamos nossa atenção agora para curvas convexas no plano. Nessa situação estudar o fluxo de curvatura é equivalente a estudar um problema de valor inicial para uma certa equação diferencial parabólica. No artigo [10], Gage e Hamilton, obtiveram estimativas necessárias a priori para a existência de solução para essa equação, consequentemente provando que uma curva convexa converge a um ponto.

Para curvas convexas usamos o parâmetro θ , o ângulo entre a reta tangente e uma direção fixa(eixo x). Escrevemos a curvatura em função desse novo parâmetro e o trabalho seguinte é determinar quais funções positivas periódicas de período 2π dão origem a curvaturas de curvas convexas.

Lema 1.8 *Uma função 2π -periódica representa a curvatura de uma curva plana simples, C^2 e estritamente convexa se e somente se*

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta}{k(\theta)} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{\sin \theta}{k(\theta)} d\theta = 0$$

DEM.: Suponhamos que k seja a função curvatura da curva. Então a relação acima segue do fato que $\int_0^L T ds = 0$ (a curva é fechada). Reciprocamente, dada uma função positiva k arbitrária, a curva associada, a menos de translação, é definida por

$$x(\theta) = \int_0^\theta \frac{\cos \alpha}{k(\alpha)} d\alpha, \quad y(\theta) = \int_0^\theta \frac{\sin \alpha}{k(\alpha)} d\alpha$$

Essa curva é fechada, tem curvatura igual a k e a aplicação de Gauss é uma função um a um, donde concluímos que a curva é simples. ■

Observação 1.1 Dado $(t, u) \in S^1 \times (0, T]$, temos associado o ângulo $\theta(t, u)$ entre a tangente em $X(t, u)$ e o eixo x . Queremos encontrar a evolução das curvas em termos de θ e t como variáveis independentes.

Seja $(t, u) \mapsto \theta(t, u)$ a função que faz corresponder ao par (t, u) o ângulo θ . Então,

$$\frac{\partial \theta}{\partial u} = \frac{\partial \theta}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial u} = kv.$$

Como as curvas de evolução são estritamente convexas, temos que $\frac{\partial \theta}{\partial u} > 0$. Então, aplicando o teorema da Função Implícita, para cada θ fixado existe um único $u(t, \theta)$ tal que:

$$\theta = \theta(t, u(t, \theta))$$

e

$$\frac{\partial}{\partial t} N(\theta) = \frac{\partial}{\partial t} N(\theta(t, u(t, \theta))) = 0$$

Portanto, podemos escrever as curvas evolução nos parâmetros t e θ como variáveis independentes. Mais ainda, tomando (t, u) como variáveis independentes das curvas de evolução, podemos reparametrizar as curvas usando o ângulo θ como parâmetro posição e a coordenada t como parâmetro tempo.

Lema 1.9 A curvatura da família $\{X(t, \theta)\}$ satisfaz a seguinte equação diferencial:

$$\frac{\partial k}{\partial t} = k^2 \frac{\partial^2 k}{\partial \theta^2} + k^3.$$

DEM.: Aplicando a regra da cadeia :

$$\frac{\partial k}{\partial \hat{t}} = \frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial k}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \hat{t}} = \frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial k}{\partial \theta} \frac{\partial k}{\partial s} = \frac{\partial k}{\partial t} + k \left(\frac{\partial k}{\partial \theta} \right)^2$$

por outro lado

$$\frac{\partial^2 k}{\partial s^2} = \frac{\partial \theta}{\partial s} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \theta}{\partial s} \frac{\partial k}{\partial \theta} \right) = k \left(\frac{\partial k}{\partial \theta} \right)^2 + k^2 \frac{\partial^2 k}{\partial \theta^2}.$$

O lema 1.6 implica por sua vez:

$$\frac{\partial k}{\partial \hat{t}} = \frac{\partial^2 k}{\partial s^2} + k^3$$

Logo,

$$\frac{\partial k}{\partial t} = k^2 \frac{\partial^2 k}{\partial \theta^2} + k^3.$$

Observação 1.2 Nas coordenadas (t, θ) temos:

$$\frac{\partial X}{\partial t} = kN - \frac{\partial k}{\partial \theta} T \quad (1.3)$$

Com efeito. Como $X(\hat{t}, u) = X(t, \theta(\hat{t}, u))$, $N(\theta) = N(\hat{t}, u)$, e $\frac{\partial t}{\partial \hat{t}} = 1$ temos

$$\frac{\partial}{\partial \hat{t}} X = \frac{\partial X}{\partial t} + \frac{\partial X}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \hat{t}}.$$

Aplicando agora o lema 1.7, temos

$$\frac{\partial X}{\partial t}(t, \theta) = k(t, \theta)N(\theta) - \frac{\partial k}{\partial \theta}(t, \theta)T(\theta) \quad (1.4)$$

Observação 1.3 Podemos remover a componente tangencial da equação (1.4) sem alterar os traços das curvas de evolução. Isto é, as curvas soluções da equação 1.4 são equivalentes as da equação:

$$\frac{\partial X}{\partial t}(t, \theta) = k(t, \theta)N(\theta) \quad (1.5)$$

Teorema 1.2 Para curvas convexas o fluxo de curvatura é equivalente ao problema de valor inicial para a seguinte equação diferencial parabólica:

Encontre $k : [0, T) \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$, periódica na segunda coordenada, satisfazendo:

(i) $k \in C^{1+\alpha, 2+\alpha}([0, 2\pi] \times [0, T-\epsilon))$ para todo $\epsilon > 0$, onde α é a classe de diferenciabilidade de $k_0 = k(0, \cdot)$;

(ii) $k_t = k^2 k_{\theta\theta} + k^3$;

(iii) $k(\theta, 0) = \psi(\theta)$ onde ψ satisfaz:

a) $\psi \in C^{1+\alpha}([0, 2\pi], \psi(2\pi) = \psi(0))$;

b) $\psi(\theta) > 0$ e

c) $\int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta}{\psi(\theta)} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{\sin \theta}{\psi(\theta)} d\theta = 0$

DEM.: Ver [10]

Observação 1.4 Observemos que a equação do lema 1.9 é uma equação estritamente parabólica. É possível provar a existência e unicidade para essa equação em um curto intervalo de tempo

usando resultados padrões sobre equações parabólicas e em seguida usar o lema 1.8 para obter as curvas de evolução.

Definição 1.1 Escolhido um ponto O , origem, no interior de uma curva X , definimos a função suporte de X como sendo a distância da origem a reta tangente à curva, isto é,

$$h(\theta) = - \langle X(\theta), N(\theta) \rangle .$$

Lema 1.10 A função suporte satisfaz a seguintes relações com os invariantes geométricos da curva:

$$\frac{1}{k} = \frac{\partial^2 h}{\partial \theta^2} + h \tag{1.6}$$

$$L = \int_0^{2\pi} h d\theta \tag{1.7}$$

$$A = 1/2 \int_0^{2\pi} [h^2 - \left(\frac{\partial h}{\partial \theta}\right)^2] d\theta \tag{1.8}$$

DEM.: Para provar (1.6), observe que

$$\frac{\partial h}{\partial \theta} = - \langle T, X \rangle$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 h}{\partial \theta^2} = - \langle N, X \rangle - \frac{1}{k} \langle T, T \rangle$$

$$\therefore \frac{1}{k} = \frac{\partial^2 h}{\partial \theta^2} + h$$

Para (1.7),

$$\begin{aligned}
L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(x_\theta)^2 + (y_\theta)^2} d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left\langle \frac{1}{k}T, \frac{1}{k}T \right\rangle^{1/2} d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{k} d\theta
\end{aligned}$$

(1.6) e o fato que $\frac{\partial h}{\partial \theta}$ é periódica implicam

$$L = \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial^2 h}{\partial \theta^2} + h \right) d\theta = \int_0^{2\pi} h d\theta$$

Para (1.8),

$$\begin{aligned}
A &= 1/2 \oint_X x dy - y dx \\
&= 1/2 \oint_X \left(x \frac{dy}{ds} - y \frac{dx}{ds} \right) ds \\
&= -1/2 \oint_X \langle X, N \rangle ds \\
&= 1/2 \oint_X h ds = 1/2 \int_0^{2\pi} h/k d\theta = 1/2 \int_0^{2\pi} \left(h \frac{\partial^2 h}{\partial \theta^2} + h^2 \right) d\theta \\
&= \frac{1}{2} h \frac{\partial h}{\partial \theta} \Big|_0^{2\pi} - 1/2 \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial h}{\partial \theta} \right)^2 d\theta + \int_0^{2\pi} h^2 d\theta = 1/2 \int_0^{2\pi} \left(h^2 - \left(\frac{\partial h}{\partial \theta} \right)^2 \right) d\theta
\end{aligned}$$

Observemos que:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -k.$$

DEM.:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial t} \langle X, N \rangle \\
&= -\langle kN, N \rangle = -k
\end{aligned}$$

Teorema 1.3 *Se k satisfaz a equação*

$$k_t = k^2 k_{\theta\theta} + k^3$$

então $k_{\min}(t) = \inf\{k(t, \theta) | 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ é uma função não decrescente.

DEM.: A demonstração é por contradição: Seja ϵ tal que $k_{\min}(0, \cdot) > \epsilon > 0$, e suponhamos que $k_{\min}(t) = k_{\min}(0) - \epsilon$ para algum t . Seja $t_0 = \inf\{t | k_{\min}(t) = k_{\min}(0) - \epsilon\}$. A continuidade de k assegura que este mínimo é atingido em algum ponto (t_0, θ_0) . Nesse ponto,

$$\frac{\partial k}{\partial t}(t_0, \theta_0) \leq 0, \quad \frac{\partial^2 k}{\partial \theta^2}(t_0, \theta_0) \geq 0 \quad \text{e} \quad k(t_0, \theta_0) > 0.$$

o que é uma contradição pois k é solução da equação $k_t = k^2 k_{\theta\theta} + k^3$. ■

Teorema 1.4 *Se $k : S^1 \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz as hipóteses do teorema 1.2, e as áreas das regiões limitadas pelas curvas de evolução são limitadas inferiormente por uma constante estritamente positiva, então $k(t, \theta)$ é limitada em $S^1 \times [0, T)$*

DEM.: O comprimento das curvas decrescem durante a evolução de modo que o limite inferior uniforme sobre a área produz um limite superior uniforme em $k^*(t)$ e por sua vez, através das estimativas integral e pontual, produz um limite superior uniforme em $k(t, \theta)$. ■

Teorema 1.5 $\frac{k_{\min}(t)}{k_{\max}(t)} \rightarrow 1$.

DEM.: Ver [10] ■

Teorema 1.6 *(Desigualdade Isoperimétrica) Sejam C uma curva simples fechada, L o comprimento de C e A a área limitada por ela. Então*

$$\frac{L^2}{A} \geq 4\pi$$

DEM.: Ver [7], [20] ■

Teorema 1.7 *(Desigualdade de Bonnesen)*

$$\frac{L^2}{A} - 4\pi \geq \frac{\pi^2}{A} (r_{ext} - r_{int}).$$

Proposição 1.1 *O tempo maximal de existência de soluções para o fluxo pela curvatura correspondente à curva inicial convexa, $X(\cdot, 0)$, é sempre finito e limitado superiormente*

$\frac{1}{2k_{\min}(0)^2}$ onde $k_{\min}(0)$ denota o valor mínimo da curvatura inicial. Mais ainda, se $k_{\min}(0) > 0$ é o ínfimo da curvatura inicial $X(\cdot, 0)$ então

$$k(t, \theta) \geq k_{\min}(0)$$

para quaisquer $t \in [0, T)$ e $\theta \in S^1$.

DEM.: Ver [9] ■

Teorema 1.8 *Se $X(t, \theta) : [0, T) \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma solução maximal do fluxo pela curvatura com curva inicial convexa, então $T = \frac{A_0}{2\pi}$, onde A_0 é a área da curva inicial $X(0, \cdot)$. Em outras palavras a curvatura permanece limitada enquanto as curvas da evolução possuírem alguma área e, na verdade, a curvatura só explode, isto é, $\|K\|_\infty$ deixa ser limitada, quando a área das curvas zera.*

1.3.1 O Fluxo Normalizado

O último teorema da seção anterior afirma que o valor maximal do tempo de existência de solução para a equação do fluxo de curvatura é proporcional a área da região limitada pela curva inicial. O fluxo normalizado, que passamos a expor nessa seção, consiste em uma homotetia e uma reparametrização no tempo de modo que a região limitada pela curvas seja constante igual a π e o tempo maximal igual a ∞ .

Seja $X(t, \theta) : [0, T) \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma solução maximal do fluxo de curvatura

$$X_t = kN$$

Chamemos de $\overline{X} = \overline{X}(\tau, \theta) = [0, \infty) \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ por

$$\overline{X}(\tau, \theta) = \mu X(t, \theta),$$

onde $\mu = \sqrt{\frac{\pi}{A(t)}} = \frac{1}{\sqrt{2T-2t}}$ e $\tau = -1/2 \log(2T - 2t)$ O significado geométrico disso é aplicar uma homotetia de fator μ às curvas do fluxo original X de modo que $A(\overline{X}) = \mu^2 A(X) = \pi$.

A equação do fluxo é:

$$\frac{d\overline{X}}{d\tau} = (-\overline{h} + \overline{k}) N + (\overline{h}_\theta - \overline{k}_\theta) T$$

Proposição 1.2 *A função suporte, a curvatura, o comprimento e a área das curvas normalizadas evoluem de acordo com*

$$\bar{h}_\tau = -\bar{k} + \bar{h}$$

$$\bar{k}_\tau = \bar{k}^2 \bar{k}_{\theta\theta} + \bar{k}^3 - \bar{k}$$

$$\bar{L}_\tau = -\int \bar{k} d\theta + L$$

$$\bar{A}_\tau = 0$$

onde $\bar{k} = \mu k$ e $\bar{h} = \mu h$

DEM.: Ver [9] ■

Em [9] prova-se que existe um ponto $P_\infty \in \mathbb{R}^2$ que está contido no interior de cada uma das curvas e, portanto, as curvas do fluxo normalizado possuem raio interior limitado inferiormente por uma constante positiva e diâmetro limitado superiormente independente de τ . Mais ainda, h e h' são limitadas uniformemente em τ . Além disso vale as seguintes desigualdades:

$$\bar{h} \leq \bar{D}$$

$$\bar{L} \leq \pi \bar{D}$$

$$|\bar{h}_\theta| \leq 3\pi \bar{D}$$

onde $\bar{D}$ é o diâmetro de $\bar{X}$.

Finalmente destacamos o decaimento exponencial das derivadas da curvatura ao longo do fluxo normalizado. Elas mostram em particular que as curvas convergem na topologia C^∞ para um círculo de raio 1.

Teorema 1.9 $\|\frac{\partial^l \bar{k}}{\partial \theta^l}\|_\infty \leq C(l)e^{-2\alpha\tau}$ para $l \geq 1$, $0 < \alpha < 1$.

DEM.: Ver [10] ■

Para o fluxo não normalizado temos:

Corolário 1.1 $\|\frac{\partial^l k}{\partial \theta^l}\|_\infty \leq C(l)(T-t)^{\alpha-1/2}$ para $l \geq 1$, $0 < \alpha < 1$.

DEM.: Ver [10] ■

1.3.2 Equações de evolução da evoluta

Nesta subsecção descrevemos a evolução das curvas ao longo do fluxo de curvatura. Recorde-mos que a evoluta é o lugar geométrico do centro de curvatura, isto é:

Definição 1.2 *Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada regular plana. Suponha que $k(u) \neq 0$, $u \in I$. Chama-se evoluta de α a curva $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por*

$$\beta(u) = \alpha(u) + \frac{1}{k(u)}N(u).$$

Em outras palavras, a evoluta da curva α é o lugar geométrico dos centros de curvatura.

O Teorema dos Quatro Vértices nos diz que uma curva plana, simples, fechada e suave possui pelo menos quatro vértices distintos ($k'(u) = 0$).

Seja $X(t, \cdot)$ uma curva integral do fluxo de curvatura normalizado. Então a evoluta de $X(t, \cdot)$ é dada por:

$$E(t, \theta) = X(t, \theta) + R(t, \theta)N(\theta).$$

Lembrando que $X = -hN + h'T$, temos:

$$E = h_\theta T + (R - h)N.$$

A Evoluta também possui uma equação de evolução. De fato,

$$\begin{aligned} E_t &= X_t + R_t N \\ &= (k - h)N - (k' - h')T - \frac{k_t}{k^2}N \\ &= (k - h - k'' - k + 1/k)N + (h' - k')T \\ &= (h'' - k'')N + (h' - k')T \end{aligned}$$

A pergunta natural que podemos fazer é: se a evoluta da curva inicial $X(0, \theta)$ está contida na região limitada pela curva $X(0, \cdot)$, então é possível que em algum momento ela intersecte a curva?

Proposição 1.3 *Existe um valor T tal que a evoluta da curva de evolução está inteiramente contida na região limitada pela curva.*

DEM.: Seja $I = \int_{S^1} 2 \log h d\theta$. Logo

$$\begin{aligned} I_t &= 2 \int_{S^1} \frac{h_t}{h} d\theta \\ &= 2 \int_{S^1} \frac{h-k}{h} d\theta = 2 \int_{S^1} \frac{kh-k^2}{hk} d\theta \\ &= 2 \int_{S^1} (1 - \frac{k}{h}) d\theta = 4\pi - 2 \int_{S^1} \frac{k^2}{kh} d\theta \end{aligned}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} \int_{S^1} \frac{h^2-2kh}{kh} d\theta &= \int_{S^1} h(h'' + h) d\theta - 4\pi \\ &= \int_{S^1} h^2 - h'^2 d\theta - 4\pi = -2\pi \end{aligned}$$

Logo

$$I_t = -2 \int_{S^1} \frac{(h-k)^2}{kh} d\theta \leq -C \int_{S^1} (h-k)^2 d\theta \leq 0$$

Usando a definição de I e o fato de que existe um ponto interior comum a todas as curvas de evolução:

$$\int_{S^1} \log h^{P_0}(t, \theta) d\theta \geq \limsup \int_{S^1} \log h^{P_n}(t, \theta) d\theta$$

Logo

$$I(t) \geq -2\pi + 2\pi \log(\rho/2)$$

onde ρ é o raio do círculo interno a todas as curvas de evolução. Como $I_t \leq 0$, temos então que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} I_t = 0$$

e portanto segue que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} k = \lim_{t \rightarrow \infty} h = 1$$

Assim, se t é suficientemente grande temos

$$\begin{aligned} \ell(t, \theta) - R(t, \theta) &= ((h(t, \theta) + h(t, \theta + \pi))^2 + (h'(t, \theta) + h'(t, \theta + \pi))^2)^{1/2} \\ &\quad - R(t, \theta) \geq h(t, \theta) + h(t, \theta + \pi) - R(t, \theta) > 0 \end{aligned}$$

o que mostra que evoluta está contida no interior da região limitada pela curva de evolução.

■

Observação 1.5 O termo $k - h$ satisfaz uma equação diferencial não linear parabólica.

Com efeito.

$$\begin{aligned}
(k-h)_t &= k^2 k'' + k^3 - k - h + k \\
&= k^2 k'' - k^2 h'' + k^3 + k^2 \frac{1}{k} - k^2 h - h \\
&= k^2 (k-h)'' + (k^2 + 1)(k-h)
\end{aligned} \tag{1.9}$$

1.3.3 Análise da evolução dos vértices

Consideremos a equação parabólica:

$$\frac{\partial k}{\partial t} = k^2 \frac{\partial^2 k}{\partial \theta^2} + k^3 - k.$$

Além disso, vamos supor que no instante inicial $t = 0$, a curva $X(0, \cdot)$ seja estritamente convexa e que existe um ponto $\theta_0 \in S^1$ tal que

$$\begin{cases} k'(0, \theta_0) = 0 \\ k''(0, \theta_0) = 0 \end{cases}$$

O ponto crítico $(0, \theta_0)$ pode ser:

- 1 - um ponto de mínimo absoluto ou relativo;
- 2 - máximo absoluto ou relativo;
- 3 - ponto de inflexão.

Como a função curvatura das curvas dessa família satisfaz a equação parabólica:

$$k_t = k^2 k'' + k^3 - k$$

então no ponto $(0, \theta_0)$ temos:

$$k_t = k(k-1)(k+1) \tag{1.10}$$

A primeira observação que fazemos é que se $k(0, \theta_0) = 1$, então $k_t(0, \theta_0) = 0$ e portanto o ponto é estacionário.

A segunda, é que se $k(0, \theta_0) > 1$, então $(0, \theta_0)$ não pode ser um mínimo absoluto da curvatura. Com efeito. Se $k(0, \theta_0) = k_{\min}(0) > 1$, então $k(0, \theta) > 1$, para todo $\theta \in [0, 2\pi)$.

Logo

$$\frac{L^2}{A} = \frac{\left(\int_0^{2\pi} h(0, \theta) d\theta\right)^2}{A} = \frac{\left(\int_0^{2\pi} R(0, \theta) d\theta\right)^2}{A} < \frac{4\pi^2}{\pi} = 4\pi$$

o que contradiz a desigualdade Isoperimétrica:

$$\frac{L^2}{A} \geq 4\pi.$$

Portanto a hipótese de que $k(0, \theta_0) > 1$ é um mínimo absoluto conduz a um absurdo.

Observação 1.6 (FORMA DO JATO DE $k(t, \theta)$)

A expansão de Taylor de $k(t, \theta)$ em torno de $t_0 > 0$ com θ fixo, é:

$$k(t, \theta) = k(t_0, \theta) + \frac{\partial k}{\partial t}(t_0, \theta)(t - t_0) + \frac{\partial^2 k}{\partial t^2}(t_0, \theta) \frac{(t - t_0)^2}{2!} + \cdots + \frac{\partial^n k}{\partial t^n}(t_0, \theta) \frac{(t - t_0)^n}{n!} + O_n(|t - t_0|, \theta) \quad (1.11)$$

Por outro lado,

$$\frac{\partial k}{\partial t} = k^2 \frac{\partial^2 k}{\partial \theta^2} + k^3 - k$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 k}{\partial t^2} &= 2 \frac{\partial k}{\partial t} \frac{\partial^2 k}{\partial \theta^2} + 3 \frac{\partial k}{\partial t} k^2 - \frac{\partial k}{\partial t} + k^2 \frac{\partial^3 k}{\partial \theta^2 \partial t} \\ &= \frac{\partial k}{\partial t} [2 \frac{\partial^2 k}{\partial \theta^2} + 3k^2 - 1] + k^2 \frac{\partial^3 k}{\partial \theta^2 \partial t} \\ &= \frac{\partial k}{\partial t} [2 \frac{\partial^2 k}{\partial \theta^2} + 3k^2 - 1] + k^2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} [k^2 \frac{\partial^2 k}{\partial \theta^2} + k^3 - k] \\ &= \frac{\partial k}{\partial t} [2 \frac{\partial^2 k}{\partial \theta^2} + 3k^2 - 1] + k^2 \frac{\partial}{\partial \theta} [2k \frac{\partial k}{\partial \theta} \frac{\partial^2 k}{\partial \theta^2} + k^2 \frac{\partial^3 k}{\partial \theta^3} + 3k^2 \frac{\partial k}{\partial \theta} - \frac{\partial k}{\partial \theta}] \\ &= \frac{\partial k}{\partial t} [2 \frac{\partial^2 k}{\partial \theta^2} + 3k^2 - 1] \\ &\quad + k^2 [2 \left(\frac{\partial k}{\partial \theta}\right)^2 \frac{\partial^2 k}{\partial \theta^2} + 2k \left(\frac{\partial^2 k}{\partial \theta^2}\right)^2 + 4k \frac{\partial k}{\partial \theta} \frac{\partial^3 k}{\partial \theta^3} - \frac{\partial^2 k}{\partial \theta^2} + 6k \left(\frac{\partial k}{\partial \theta}\right)^2 + 3k^2 \frac{\partial^2 k}{\partial \theta^2} + k^2 \frac{\partial^4 k}{\partial \theta^4}] \\ &= [k^2 \frac{\partial^2 k}{\partial \theta^2} + k^3 - k] [2 \frac{\partial^2 k}{\partial \theta^2} + 3k^2 - 1] \\ &\quad + k^2 [2 \left(\frac{\partial k}{\partial \theta}\right)^2 \frac{\partial^2 k}{\partial \theta^2} + 2k \left(\frac{\partial^2 k}{\partial \theta^2}\right)^2 + 4k \frac{\partial k}{\partial \theta} \frac{\partial^3 k}{\partial \theta^3} - \frac{\partial^2 k}{\partial \theta^2} + 6k \left(\frac{\partial k}{\partial \theta}\right)^2 + 3k^2 \frac{\partial^2 k}{\partial \theta^2} + k^2 \frac{\partial^4 k}{\partial \theta^4}] \end{aligned} \quad (1.12)$$

Logo, $\frac{\partial^2 k}{\partial t^2}$ é uma soma algébrica envolvendo os jatos de k em relação a variável θ até a ordem 6. Assim podemos escrever

$$\frac{\partial^2 k}{\partial t^2}(t, \theta) = F_2(J^4 k)(t, \theta)$$

$$\frac{\partial^3 k}{\partial t^3} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 k}{\partial t^2} \right) = \frac{\partial}{\partial t} F_2(J^4 k) = F_3(J^6 k)$$

Afirmção: $\frac{\partial^n k}{\partial t^n} = F_n(J^{2n} k)$

Suponhamos que a fórmula vale para um inteiro positivo $n \geq 1$, e mostremos que também vale para $n + 1$.

$$\frac{\partial^{n+1} k}{\partial t^{n+1}} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^n k}{\partial t^n} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (F_n(J^{2n} k)) = F_{n+1} \frac{\partial}{\partial t} (J^{2n} k) = F_{n+1} J^{2n} \left(\frac{\partial k}{\partial t} \right) = F_{n+1} J^{2n} (J^2 k) = F_{n+1} J^{2(n+1)} k$$

Voltemos à nossa análise sobre os pontos críticos da função curvatura. Como citamos no apêndice, o resultado de Gage-Hamilton [10], diz que a curvatura das curvas de evolução pelo fluxo de curvatura normalizado converge uniformemente a 1. Então é interessante analisarmos a evolução dos pontos críticos da função curvatura a fim de tirarmos alguma informação para o problema do bilhar.

Suponhamos que θ_0 seja um ponto crítico de mínimo de $k(t_0, \cdot)$ e que $k(t_0, \theta_0) > 1$. Da equação parabólica da curvatura:

$$\frac{\partial k}{\partial t} = k^2 \frac{\partial^2 k}{\partial \theta^2} + k^3 - k = k^2 \frac{\partial^2 k}{\partial \theta^2} + k(k-1)(k+1) \quad (1.13)$$

temos então que $\frac{\partial k}{\partial t}(t_0, \theta_0) > 0$. Logo a função curvatura é crescente na direção de θ_0 .

Por outro lado, se θ_0 for um ponto crítico de máximo e $k(t_0, \theta_0) < 1$, então $\frac{\partial k}{\partial t}(t_0, \theta_0) < 0$. Temos portanto que a função curvatura é decrescente na direção de θ_0 .

Como $\frac{k_{\max}}{k_{\min}} \rightarrow 1$ temos que a amplitude das oscilações da função curvatura diminui a medida que t cresce.

É importante notar também que nos pontos de inflexão ($k'(t_0, \theta_0) = k''(t_0, \theta_0) = 0$) onde $k(t_0, \theta_0) = 1$ temos que o ponto é estacionário

$$\frac{dk}{dt}(t_0, \theta_0) = 0.$$

Bilhares

Considere uma região U no plano $\mathbb{R}^2$ limitada por uma curva X simples (sem auto-interseção), regular, de classe C^k , fechada.

Associamos a essa região uma aplicação bi-dimensional definida da seguinte forma: dado um ponto $p \in X$, tomemos a reta $\rho(p, \phi)$ que passa por p e faz um ângulo ϕ com o vetor tangente a X em p . Ao par (p, ϕ) associamos o par (p_1, ϕ_1) formado pelo ponto p_1 de interseção da reta $\rho(p, \phi)$ com X e o ângulo ϕ_1 entre $\rho(p, \phi)$ e o vetor tangente a X em p_1 , de acordo com a regra ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão.

Mais precisamente, se X é uma curva plana, estritamente convexa e orientada positivamente, parametrizada por $\theta \in [0, 2\pi]$, o ângulo entre o vetor tangente e uma direção dada, uma aplicação do tipo bilhar associada à X é uma aplicação $T(\theta, \phi) = (\theta_1, \phi_1)$ tal que se ϕ é o ângulo entre $X'(\theta)$ e $X(\theta_1) - X(\theta)$, então ϕ_1 é o ângulo entre $X(\theta_1) - X(\theta)$ e $X'(\theta_1)$.

Observemos que $0 \leq \phi \leq \pi$ e que $\phi = 0$ e $\phi = \pi$ são invariantes. Logo, podemos considerar a aplicação definida no cilindro aberto $[0, 2\pi] \times (0, \pi)$.

Esta aplicação possui uma função geratriz:

$$L(\theta, \tilde{\theta}) = ||X(\theta) - X(\tilde{\theta})||$$

onde $|| \cdot ||$ denota a distância euclidiana isto é:

$$L(\theta, \tilde{\theta})^2 = \langle X(\tilde{\theta}) - X(\theta), X(\tilde{\theta}) - X(\theta) \rangle .$$

Derivando L , obtemos:

$$L\partial_1 L = - \langle X'(\theta), X(\tilde{\theta}) - X(\theta) \rangle$$

e

$$L\partial_2 L = \langle X'(\tilde{\theta}), X(\tilde{\theta}) - X(\theta) \rangle$$

Logo,

$$\partial_1 L = -\frac{1}{L} \langle X'(\theta), X(\tilde{\theta}) - X(\theta) \rangle = -R(\theta) \cos \phi \quad (2.1)$$

$$\partial_2 L = \frac{1}{L} \langle X'(\tilde{\theta}), X(\tilde{\theta}) - X(\theta) \rangle = R(\tilde{\theta}) \cos \phi_1 \quad (2.2)$$

Portanto, $T(\theta, \phi) = (\Theta, \Phi)$ se e somente se, $R(\theta) \cos \phi = -\partial_1 L(\theta, \Theta)$ e $R(\Theta) \cos \Phi = \partial_2 L(\theta, \Theta)$.

Observemos também que se X for estritamente convexa (curvatura positiva) então fixado θ , a aplicação $\phi \mapsto \Theta(\theta, \phi)$ é estritamente crescente, o que equivale à condição twist: $\frac{\partial \Theta}{\partial \phi} > 0$.

Proposição 2.1 *A aplicação bilhar é diferenciável e sua matriz derivada DT nas coordenadas (θ, ϕ) é dada por:*

$$DT = \frac{1}{R(\Theta) \sin \Phi} \begin{bmatrix} L - R(\theta) \sin \phi & L \\ L - R(\Theta) \sin \Phi - R(\theta) \sin \phi & L - R(\Phi) \sin \Phi \end{bmatrix}$$

2.1 Estudo de órbitas de período 2

Os diâmetros de uma curva convexa

Esta seção foi tirada do artigo [5] bem como as demonstrações das proposições que seguem abaixo.

Seja X uma curva parametrizada por $\theta \in [0, 2\pi]$, o ângulo entre o vetor tangente e uma dada direção. Seja $T(\theta)$ e $N(\theta)$ os vetores unitários tangente e normal. Então $X'(\theta) = R(\theta)T(\theta)$, $T(\theta + \pi) = -T(\theta)$ e $N(\theta + \pi) = -N(\theta)$.

Dado uma curva convexa fechada existe pelo menos um diâmetro e uma largura, caracterizados pelos máximos e mínimos globais das distâncias entre pontos com tangentes paralelas (ver [17]).

Definição 2.1 θ_0 é diâmetro de X se $X(\theta_0) - X(\theta_0 + \pi)$ é paralelo a $N(\theta_0)$.

Proposição 2.2 *Seja $L(\theta) = |X(\theta_0) - X(\theta_0 + \pi)|$. Então θ_0 é diâmetro de X se, e somente se,*

$$\frac{dL}{d\theta}(\theta_0) = 0.$$

DEM.:

$$\begin{aligned}
2L \frac{dL}{d\theta} &= 2 \langle X'(\theta) - X'(\theta + \pi), X(\theta) - X(\theta + \pi) \rangle \\
&= 2 \langle R(\theta)T(\theta) - R(\theta + \pi)T(\theta + \pi), X(\theta) - X(\theta + \pi) \rangle \\
&= 2 \langle (R(\theta) + R(\theta + \pi))T(\theta), X(\theta) - X(\theta + \pi) \rangle.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{dL}{d\theta}(\theta_0) = 0 \Leftrightarrow \langle T(\theta_0), X(\theta_0) - X(\theta_0 + \pi) \rangle = 0.$$

■

Seja $L_0 = L(\theta_0)$, $R_0 = R(\theta_0)$ e $R_\pi = R(\theta_0 + \pi)$.

Proposição 2.3 *Seja θ_0 um diâmetro. Se $L_0 - (R_0 + R_\pi) \neq 0$, então θ_0 é um diâmetro isolado.*

DEM.:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\theta} \left(2L \frac{dL}{d\theta} \right) &= 2 \left(\frac{dL}{d\theta} \right)^2 + 2L \frac{d^2L}{d\theta^2} \\
&= 2 \langle (R'(\theta) + R'(\theta + \pi))T(\theta) + (R(\theta) + R(\theta + \pi))N(\theta), X(\theta) - X(\theta + \pi) \rangle \\
&\quad + \langle (R(\theta) + R(\theta + \pi))T(\theta), (R(\theta) + R(\theta + \pi))T(\theta) \rangle
\end{aligned}$$

No diâmetro θ_0 ,

$$2L(\theta_0) \frac{d^2L}{d\theta^2}(\theta_0) = 2 \left(-L_0(R_0 + R_\pi) + (R_0 - R_\pi)^2 \right) = -2(R_0 + R_\pi)(L_0 - (R_0 + R_\pi))$$

e temos que se $L_0 - (R_0 + R_\pi) \neq 0$ então θ_0 é um ponto crítico isolado.

■

2.1.1 Caracterização dinâmica dos diâmetros de uma curva convexa

Seja X uma curva C^k , $k \geq 2$, e T sua aplicação bilhar associada.

Se θ_0 é diâmetro para X então $(\theta_0, \frac{\pi}{2})$ é uma órbita periódica de T de período 2, e como observamos, toda aplicação bilhar sobre uma curva estritamente convexa tem pelo menos duas órbitas dessas. A caracterização dinâmica dessas órbitas é dada pelos autovalores de

$$DT^2(\theta_0, \pi/2) = \frac{1}{R_0 R_\pi} \begin{bmatrix} L_0 - R_\pi & L_0 \\ L_0 - R_0 - R_\pi & L_0 - R_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_0 - R_0 & L_0 \\ L_0 - R_0 - R_\pi & L_0 - R_\pi \end{bmatrix}$$

Donde segue-se que:

1. $(\theta_0, \pi/2)$ é hiperbólico se

$$* L_0 - (R_0 + R_\pi) > 0 \text{ ou se}$$

$$* L_0 - (R_0 + R_\pi) < 0 \text{ e } (L_0 - R_0)(L_0 - R_\pi) < 0;$$

2 $(\theta_0, \pi/2)$ é elíptica se $L_0 - (R_0 + R_\pi) < 0$ e $(L_0 - R_0)(L_0 - R_\pi) > 0$;

3 $(\phi_0, \pi/2)$ é parabólico se

$$* L_0 - (R_0 - R_\pi) = 0 \text{ ou}$$

$$* L_0 - (R_0 + R_\pi) < 0 \text{ e } (L_0 - R_0)(L_0 - R_\pi) = 0$$

Diremos que um diâmetro é hiperbólico, elíptico ou parabólico se a órbita periódica de período 2 é, respectivamente, hiperbólica, elíptica ou parabólica. Uma consequência dessa caracterização, é que para $k \geq 3$, o maior diâmetro de uma curva estritamente convexa, se isolado, é hiperbólico ver [22]. De fato,

$$\frac{d^2 L}{d\theta^2}(\theta_0) = -\frac{(R_0 + R_\pi)(L_0 - (R_0 - R_\pi))}{L_0} < 0$$

O menor diâmetro, por outro lado, pode ser de qualquer tipo.

Quando θ_0 é elíptico, os autovalores de $DT^2_{(\theta_0, \pi/2)}$ são dados por

$$e^{\pm i\gamma} = \frac{\text{tr} DT^2}{2} \pm i\sqrt{1 - \frac{\text{tr} DT^2}{2}}$$

e logo,

$$\cos \gamma = 2 \frac{(L - R_\pi - R_0)(L_0 - R_\pi)}{R_0 R_\pi} - 1.$$

2.2 Família de Bilhares sobre curvas geradas pelo Fluxo de Curvatura

A proposta dessa seção é fazer um estudo local das órbitas de período dois sobre a família de aplicações bilhares geradas pelo fluxo de curvatura normalizado.

Descreveremos agora a equação de evolução dos diâmetros sobre a família de curvas geradas pelo fluxo pela curvatura normalizado. Denotemos por L o comprimento da corda que liga os pontos $X(t, \theta)$ e $X(t, \theta + \pi)$ ($T(\theta) = -T(\theta + \pi)$), isto é

$$L = ||X(\theta) - X(\theta + \pi)||.$$

Escrevendo essa expressão em termos da função suporte, temos:

$$\begin{aligned} L^2 &= ||-h(\theta)N(\theta) + h'(\theta)T(\theta) + h(\theta + \pi)N(\theta + \pi) - h'(\theta + \pi)T(\theta + \pi)||^2 \\ &= ||-h(\theta)N(\theta) + h'(\theta)T(\theta) - h(\theta + \pi)N(\theta) + h'(\theta + \pi)T(\theta)||^2 \\ &= ||-(h(\theta) + h(\theta + \pi))N(\theta) + (h'(\theta) + h'(\theta + \pi))T(\theta)||^2 \\ &= (h(\theta) + h(\theta + \pi))^2 + (h'(\theta) + h'(\theta + \pi))^2 \end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\Rightarrow L \frac{dL}{d\theta} = (h(\theta) + h(\theta + \pi))(h'(\theta) + h'(\theta + \pi)) + (h'(\theta) + h'(\theta + \pi))(h''(\theta) + h''(\theta + \pi))$$

Por outro lado, $h'' = R - h$.

Logo,

$$\frac{dL}{d\theta} = \frac{1}{L}(h'(\theta) + h'(\theta + \pi))(R(\theta) + R(\theta + \pi))$$

No ponto crítico, isto é, no diâmetro, temos que

$$\frac{dL}{d\theta} = 0 \Leftrightarrow h'(\theta) + h'(\theta + \pi) = 0.$$

Proposição 2.4 *Seja θ_0 um diâmetro. Se $h''(\theta_0) + h''(\theta_0 + \pi) \neq 0$, então θ_0 é um diâmetro isolado.*

Observação 2.1 *Note que no ponto crítico θ_0 , temos que $L_0 = h(\theta_0) + h(\theta_0 + \pi)$ e portanto*

podemos escrever

$$h''(\theta_0) + h''(\theta_0 + \pi) = L_0 - (R(\theta_0) + R(\theta_0 + \pi)).$$

Observe que um ponto crítico da função $L(\theta)$ se isolado, então ou ele é hiperbólico, ou ele é elíptico.

Teorema 2.1 *Os diâmetros isolados correspondentes a pontos críticos de máximo da função L são sempre hiperbólicos.*

DEM.: Este fato segue diretamente da fórmula de MacKay-Meiss, veja [1],[11]. ■

Por outro lado, se $h''(t_0, \theta_0) + h''(t_0, \theta_0 + \pi) \neq 0$, então aplicamos o teorema da Função Implícita para obter uma vizinhança V_0 de θ_0 e uma aplicação $\zeta : V_0 \rightarrow \mathbb{R} \ t \mapsto \theta(t)$, de mesma classe de diferenciabilidade de X , tal que

$$\frac{dL}{d\theta}(t, \theta(t)) = h'(t, \theta(t)) + h'(t, \theta(t) + \pi) = 0$$

Proposição 2.5 *(Equação de evolução do diâmetro) A equação de evolução dos diâmetros da família de curvas geradas pelo fluxo de curvatura é dada por:*

$$\frac{dL}{dt} = L - \frac{R(\theta) + R(\theta + \pi)}{R(\theta)R(\theta + \pi)}$$

DEM.: Com efeito.

$$(L(t, \theta(t)))_t = \frac{\partial L}{\partial t} + \frac{\partial L}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial t}$$

No diâmetro $\theta(t)$ temos $(L(t, \theta(t)))_t = \frac{\partial L}{\partial t}$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} 2L \frac{dL}{dt} &= 2 < (k - h)(\theta + \pi)N(\theta + \pi) - (k - h)'(\theta + \pi)T(\theta + \pi) - (k - h)(\theta)N(\theta) \\ &\quad + (k - h)'(\theta)T(\theta), X(\theta + \pi) - X(\theta) > \\ &= -2(k - h)(\theta + \pi)L - 2(k - h)(\theta)L \\ \therefore \frac{dL}{dt} &= h(\theta + \pi) + h(\theta) - k(\theta) - k(\theta + \pi) = L - \frac{R(\theta) + R(\theta + \pi)}{R(\theta)R(\theta + \pi)} \end{aligned}$$

■

2.3 Estudo dos diâmetros Hiperbólicos

Estudaremos agora a variação do ângulo entre os espaços estáveis e instáveis nos diâmetros hiperbólicos.

Teorema 2.2 (Teorema A) *Suponhamos uma curva de diâmetros hiperbólicos $\{\theta_t\}_t$, não degenerados, sobre as curvas de evolução do fluxo de curvatura normalizado. Então o ângulo entre as variedades estáveis e instáveis tende a zero.*

DEM.: Com efeito. Basta calcular o ângulo entre os autovetores correspondentes e mostrar que ele converge a zero quando t se torna arbitrariamente grande. Desde que

$$[DT^2] = \frac{1}{R_0 R_\pi} \begin{bmatrix} L - R_\pi & L \\ L - (R_0 + R_\pi) & L - R_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L - R_0 & L \\ L - (R_0 + R_\pi) & L - R_\pi \end{bmatrix}$$

Portanto,

$$\det[T^2 - \lambda I] = (\lambda - (L - R_0)(L - R_\pi)) + L(L - (R_0 + R_\pi))^2 - 4L(L - R_0)(L - R_\pi)(L - (R_0 + R_\pi))$$

$$\therefore \lambda = (L - R_0)(L - R_\pi) + L(L - (R_0 + R_\pi)) \pm 2\sqrt{L(L - R_0)(L - R_\pi)(L - (R_0 + R_\pi))}$$

Logo, $[T^2 - \lambda I]v = 0$ implica:

$$\begin{bmatrix} \pm 2\sqrt{L(L - R_0)(L - R_\pi)(L - (R_0 + R_\pi))} & 2L(L - R_\pi) \\ 2(L - R_0)(L - (R_0 + R_\pi)) & \pm 2\sqrt{L(L - R_0)(L - R_\pi)(L - (R_0 + R_\pi))} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0$$

Então, os autovetores de T^2 são:

$$U_1 = (2L(L - R_\pi), 2\sqrt{L(L - R_0)(L - R_\pi)(L - (R_0 + R_\pi))})$$

$$U_2 = (2L(L - R_\pi), -2\sqrt{L(L - R_0)(L - R_\pi)(L - (R_0 + R_\pi))})$$

Por outro lado, o ângulo entre os autovetores de T^2 pode ser calculado através do módulo do produto externo entre eles:

$$||U_1 \times U_2|| = 8L(L - R_\pi)\sqrt{L(L - R_0)(L - R_\pi)(L - (R_0 + R_\pi))}$$

Quando $t \rightarrow \infty$, $R_\pi \rightarrow 1$ e $R_0 \rightarrow 1$. Logo $\|U_1 \times U_2\| \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$, o que por sua vez implica que o ângulo entre os autovetores tende a zero. ■

Teorema 2.3 *Seja $X(t, \cdot)$ uma família de curvas de evolução pelo fluxo de curvatura. Suponhamos que curva inicial $X_0 = X(0, \cdot)$ tenha um diâmetro hiperbólico θ_0 tal que $L(0, \theta_0) - (R(0, \theta_0) + R(0, \theta_0)) = \frac{2C_2}{1 + e^{2\alpha}}$, onde C_2 e α são constantes dadas em 1.9 (ver [10]). Então se θ_0 for diâmetro de alguma outra curva evolução, digamos $X(t, \cdot)$, θ_0 também será um diâmetro hiperbólico de $X(t, \cdot)$.*

DEM.: Com efeito. Os diâmetros são dados pelo equação:

$$h'(t, \theta) + h'(t, \theta + \pi) = 0$$

e se θ é diâmetro então $L(t, \theta) = h(t, \theta) + h(t, \theta + \pi)$.

Seja $w = h(t, \theta) + h(t, \theta + \pi) - R(t, \theta) - R(t, \theta + \pi)$. Logo,

$$\begin{aligned} w_t &= h(t, \theta) + h(t, \theta + \pi) - k(t, \theta) - k(t, \theta + \pi) + \frac{k_t}{k^2}(\theta) + \frac{k_t}{k^2}(\theta + \pi) \\ &= h(t, \theta) + h(t, \theta + \pi) - R(t, \theta) - R(t, \theta + \pi) + k''(t, \theta) + k''(t, \theta + \pi) \\ &= w + k''(t, \theta) + k''(t, \theta + \pi) \end{aligned}$$

Resolvendo a equação $w_t - w = k''(\theta) + k''(\theta + \pi)$

$$\begin{aligned} w_t e^{-t} - w e^{-t} &= e^{-t}(k''(\theta) + k''(\theta + \pi)) \\ (w e^{-t})' &= e^{-t}(k''(\theta) + k''(\theta + \pi)) \\ w e^{-t} - w_0 &= \int_0^t e^{-s}(k''(s, \theta) + k''(s, \theta + \pi))ds \\ w &= w_0 e^t + e^t \int_0^t e^{-s}(k''(s, \theta) + k''(s, \theta + \pi))ds \end{aligned}$$

De 1.9 segue que:

$$\|k''\|_\infty < C_2 e^{-2\alpha t}$$

Logo,

$$w_0 e^t - 2C_2 e^t \int_0^t e^{-s} e^{-2\alpha} ds \leq w \leq w_0 e^t + 2C_2 e^t \int_0^t e^{-s} e^{-2\alpha} ds$$

$$w_0 e^t - 2C_2 e^t \int_0^t e^{-s(1+2\alpha)} ds \leq w \leq w_0 e^t + 2C_2 e^t \int_0^t e^{-s(1+2\alpha)} ds$$

$$w_0 e^t + \frac{2C_2}{1+2\alpha} e^t e^{-s(1+2\alpha)} \Big|_0^t \leq w \leq w_0 e^t - \frac{2C_2}{1+2\alpha} e^t e^{-s(1+2\alpha)} \Big|_0^t$$

$$w_0 e^t + \frac{2C_2}{1+2\alpha} e^{-2\alpha t} - \frac{2C_2}{1+2\alpha} e^t \leq w \leq w_0 e^t - \frac{2C_2}{1+2\alpha} e^{-2\alpha t} + \frac{2C_2}{1+2\alpha} e^t$$

$$(w_0 - \frac{2C_2}{1+2\alpha}) e^t + \frac{2C_2}{1+2\alpha} e^{-2\alpha t} \leq w \leq (w_0 + \frac{2C_2}{1+2\alpha}) e^t - \frac{2C_2}{1+2\alpha} e^{-2\alpha t}$$

Usando a hipótese de que $w_0(\theta_0) = w(0, \theta_0) = \frac{2C_2}{1+2\alpha}$, temos que

$$0 < \frac{2C_2}{1+2\alpha} e^{-2\alpha t} < w(t, \theta_0) = L(t, \theta_0) - (R(t, \theta_0) + R(t, \theta_0))$$

Logo, se θ_0 é uma diâmetro da curva $X(t, \cdot)$ segue da caracterização de diâmetros (seção 2.1.1) que θ_0 é um diâmetro hiperbólico. ■

Observação 2.2 Se $w_0(\theta_0) \geq \frac{2C_2}{1+2\alpha}$, então toda vez que θ_0 for diâmetro ele será hiperbólico. Em particular, nestas condições, existe um tempo $T > 0$ tal que θ_0 não é mais diâmetro para $t > T$

Teorema 2.4 Seja $X(t, \cdot)$ uma família de curvas de evolução pelo fluxo de curvatura. Suponhamos curva inicial $X_0 = X(0, \cdot)$ tenha um diâmetro elíptico θ_0 tal que $L(0, \theta_0) - (R(0, \theta_0) + R(0, \theta_0)) \leq -\frac{2C_2}{1+e^{2\alpha}}$, onde C_2 e α são constantes dadas em 1.9 (ver [10]). Suponhamos também que as evolutas das curvas de evolução estão contidas nas regiões limitadas de suas respectivas curvas. Então se θ_0 for diâmetro de alguma outra curva evolução, digamos $X(t, \cdot)$, θ_0 também será um diâmetro elíptico de $X(t, \cdot)$.

DEM.: Com efeito. Pela desigualdade :

$$(w_0 - \frac{2C_2}{1+2\alpha}) e^t + \frac{2C_2}{1+2\alpha} e^{-2\alpha t} \leq w \leq (w_0 + \frac{2C_2}{1+2\alpha}) e^t - \frac{2C_2}{1+2\alpha} e^{-2\alpha t}$$

obtida no teorema anterior temos que

$$w(t, \theta_0) \leq (w_0(0, \theta_0) + \frac{2C_2}{1+2\alpha}) e^t - \frac{2C_2}{1+2\alpha} e^{-2\alpha t} \leq -\frac{2C_2}{1+2\alpha} e^{-2\alpha t} < 0.$$

Como as possibilidades de diâmetro hiperbólico reverso ou parabólico isolado estão eliminadas, θ é um diâmetro elíptico. ■

Observação 2.3 *A hipótese de que todas as evolutas estão contidas nas regiões limitadas pelas curvas de evolução é perfeitamente factível. De fato, pela proposição 1.3 segue que existe um tempo t_0 tal que a evoluta $E(t, \cdot)$ está contida na região limitada de $X(t, \cdot)$ para todo $t \geq t_0$. Portanto não há perda de generalidade em supor que $t_0 = 0$*

Observação 2.4 *No caso em que θ_0 é um diâmetro elíptico da curva inicial $X(0, \cdot)$ e $E(0, \theta_0)$ está no complementar da região limitada por $X(0, \cdot)$. Então, se $w_0(\theta_0) \leq -\frac{2C_2}{1+e^{2\alpha}}$ temos que a evolução do diâmetro θ_0 é: Elíptico ou Hiperbólico Reverso - Parabólico Isolado-Elíptico.*

Corolário 2.1 *Se a curva inicial $X(0, \cdot)$ tem um diâmetro hiperbólico θ_0 tal que $w(0, \theta_0) = \frac{2C_2}{1+2\alpha}$ ou um diâmetro elíptico θ_0 tal que $w(0, \theta_0) \leq -\frac{2C_2}{1+2\alpha}$. Então não existem curvas de largura constante durante a evolução do fluxo de curvatura .*

Observação 2.5 *Como w está limitado então $w_0 \leq \frac{2C_2}{1+2\alpha}$*

2.4 Estudo dos diâmetros Parabólicos

2.4.1 Interpretação geométrica através da evolução da evoluta

Consideremos a equação que determina os diâmetros:

$$h'(t, \theta(t)) + h'(t, \theta(t) + \pi) = 0$$

Se θ é um diâmetro hiperbólico da curva inicial $X(0, \cdot)$ então $h''(0, \theta) + h''(0, \theta + \pi) \neq 0$ (Sem perda de generalidade podemos supor que $h''(0, \theta) + h''(0, \theta + \pi) < 0$, ver 1.3). Portanto do teorema da Função Implícita obtemos uma curva de diâmetros hiperbólicos $t \mapsto \theta(t)$.

Logo

$$h'_t(t, \theta(t)) + h'_t(t, \theta(t) + \pi) + (h''(t, \theta(t)) + h''(t, \theta(t) + \pi))\theta'(t) = 0$$

$$\therefore \theta' = -\frac{k'(t, \theta(t)) + k'(t, \theta(t) + \pi)}{L - R(t, \theta(t)) - R(t, \theta(t) + \pi)}$$

Considerando novamente a função $w(t, \theta) = h(t, \theta(t)) + h(t, \theta(t) + \pi) - R(t, \theta(t)) - R(t, \theta(t) + \pi)$ temos que sobre essa curva $w(t, \theta) > 0$. A função $w(t, \theta)$ mede a distância entre os pontos da cáustica(ver a figura abaixo)

Queremos saber quais condições, em um diâmetro hiperbólico, para que haja afastamento ou aproximação, ou seja, $w_t > 0$ ou $w_t < 0$, o que significa "maior" ou "menor" hiperbolicidade.

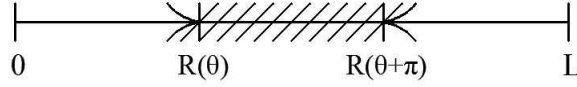


Figura 2.1:

Observe que isso pode ser interpretado como aumento ou diminuição do ângulo entre variedades estáveis e instáveis.

Como vimos antes,

$$w_t(t, \theta) = w(t, \theta) + k''(t, \theta) + k''(t, \theta + \pi)$$

Afastamento: se $w_t > 0$ então o ângulo entre W^s e W^u será crescente. Nesse caso o valor de w só começará a decrescer quando $w(t, \theta) + k''(t, \theta) + k''(t, \theta + \pi) < 0$ (Em particular, $k''(t, \theta) + k''(t, \theta + \pi) < 0$). É importante observamos que esse afastamento não é "eterno". De fato, as funções suporte e raio de curvatura permanecem limitadas durante a evolução pelo fluxo de curvatura.

Aproximação: se $w_t < 0$ então o ângulo entre W^s e W^u será decrescente. Nesse caso teremos

$$\begin{aligned} 0 < w < -k''(t, \theta) - k''(t, \theta + \pi) \\ \therefore 0 < w < C_2 e^{-2\alpha t} \end{aligned}$$

Exemplo 2.1 No caso da elipse, o diâmetro coincide com os vértices, de curvatura máxima, então haverá aproximação até chegar o momento, finito, $t_0 > 0$ em que $w(t_0, \theta_0) = 0$. Neste instante o diâmetro será parabólico.

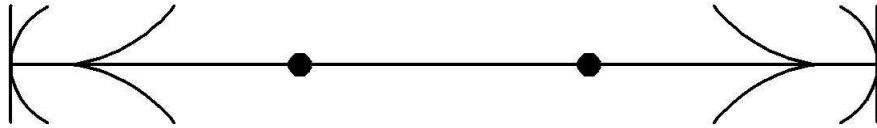


Figura 2.2:

Podemos recuperar hiperbolicidade?

Isto nos leva a fazer o seguinte estudo

2.4.2 Estudo das bifurcações

Suponhamos então que exista um tempo t_0 para o qual a curva de evolução $X(t_0, \cdot)$ tenha um diâmetro parabólico θ_0 .

Como vimos na seção 2.2, θ é um diâmetro parabólico da curva de evolução $X(t, \cdot)$ se:

$$\begin{cases} h'(t, \theta) + h'(t, \theta + \pi) = 0 \\ h''(t, \theta) + h''(t, \theta + \pi) = 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \text{Seja } Z(t, \theta) &= E(t, \theta + \pi) - E(t, \theta) \\ &= -(h'(t, \theta + \pi) + h'(t, \theta)) T + (h(t, \theta + \pi) + h(t, \theta) - R(t, \theta) - R(t, \theta + \pi)) N \end{aligned}$$

Assim, temos a seguinte equivalência:

$$Z(t, \theta) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} h'(t, \theta) + h'(t, \theta + \pi) = 0 \\ h''(t, \theta) + h''(t, \theta + \pi) = 0 \end{cases}$$

Assim, se θ_0 é um diâmetro parabólico (degenerado) da curva $X(0, \cdot)$ temos $Z(0, \theta_0) = 0$ (sem perda de generalidade, tomamos o instante inicial). Veja figura

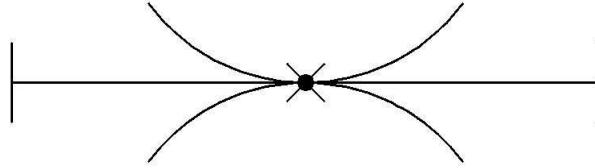


Figura 2.3:

Para estudarmos a evolução desse ponto tomamos a derivada parcial de Z com relação a variável t :

$$Z_t(t, \theta) = Z(t, \theta) + (k'(t, \theta + \pi) + k'(t, \theta)) T(\theta) + (k''(t, \theta + \pi) + k''(t, \theta)) N(\theta)$$

Se $k'(0, \theta_0 + \pi) + k'(0, \theta_0) \neq 0$ temos um cruzamento ou disjunção. Veja figura

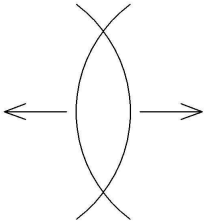


Figura 2.4: cruzamento

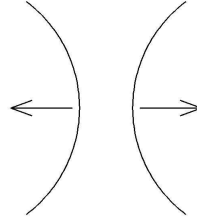


Figura 2.5: disjunção

No caso (a) não há mais diâmetro.

No caso (b) para $t > 0$ novos diâmetros hiperbólicos.

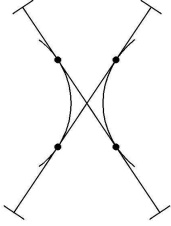


Figura 2.6: novos diâmetros



Figura 2.7: deslizamento

Se $k''(0, \theta_0 + \pi) + k''(0, \theta_0) \neq 0$ temos um "deslizamento"

Notemos que $\frac{\partial Z}{\partial \theta} = -[R'(\theta + \pi) + R'(\theta)]N(\theta)$. Se $R'(\theta + \pi) + R'(\theta) \neq 0$ obtemos uma família de diâmetros parabólicos parametrizada por t : $Z(t, \theta(t)) = 0$

Mas se $R'(\theta_0 + \pi) + R'(\theta_0) = 0$, juntamente com $k'(\theta_0 + \pi) + k'(\theta_0) = 0$, temos:

$$k'(\theta_0) \left[\frac{1}{k^2(\theta_0)} - \frac{1}{k^2(\theta_0 + \pi)} \right] = 0$$

ou equivalentemente

$$k'(\theta_0)[k(\theta_0) - k(\theta_0 + \pi)][k(\theta_0) + k(\theta_0 + \pi)] = 0$$

Logo $k'(\theta_0) = 0 = k'(\theta_0 + \pi)$, vértices concidentes ou $R(\theta_0) = R(\theta_0 + \pi)$ o que implica $L = 2R(\theta_0)$.

Teorema 2.5 (Teorema B) : *Seja θ_0 um diâmetro parabólico da curva $X(t_0, \cdot)$. Se existe um inteiro positivo n tal que $k^{(n)}(t_0, \theta_0) + k^{(n)}(t_0, \theta_0 + \pi) \neq 0$, ou que $k^{(n)}(t, \theta_0) + k^{(n)}(t, \theta_0 + \pi)$ não é identicamente nulo numa vizinhança $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, então existe t_1 ($t_1 = t_0$ se $k^{(n)}(t_0, \theta_0) + k^{(n)}(t_0, \theta_0 + \pi) \neq 0$) e um número positivo δ tal que em $V_0 = \{(\theta, t) : 0 < |\theta - \theta_0| < \delta, |t - t_1| < \delta\}$ não temos diâmetro parabólico para as curvas de evolução do fluxo de curvatura.*

DEM.: Os diâmetros parabólicos são determinados pelas equações:

$$1- h'(t, \theta) + h'(t, \theta + \pi) = 0$$

$$2- h''(t, \theta) + h''(t, \theta + \pi) = 0$$

Como $h_t = h - k$, temos:

$$h(t, \theta) + h(t, \theta + \pi) = e^t (h(t_0, \theta) + h(t_0, \theta + \pi)) - e^t \int_{t_0}^t e^{-s} (k(s, \theta) + k(s, \theta + \pi)) ds$$

Definimos agora a função $f : (0, \infty) \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}$, dada por:

$$f(t, \theta) = h'(t, \theta) + h'(t, \theta + \pi).$$

Como θ_0 é um diâmetro parabólico de $X(t_0, \cdot)$, temos $f(t_0, \theta_0) = f'(t_0, \theta_0) = 0$. Além disso,

$$f_t(t_0, \theta_0) = -(k'(t_0, \theta_0) + k'(t_0, \theta_0 + \pi))$$

Caso a) $k'(t_0, \theta_0) + k'(t_0, \theta_0 + \pi) \neq 0$.

Então

$$\nabla f(t_0, \theta_0) = (f'(t_0, \theta_0), f_t(t_0, \theta_0)) = (0, k'(t_0, \theta_0) + k'(t_0, \theta_0 + \pi)) \neq 0$$

Isto implica que existe uma vizinhança $V_0 = (\theta_0 - \delta, \theta_0 + \delta) \times (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ de (t_0, θ_0) tal que $f(t, \theta) \neq 0$ para todo $(t, \theta) \in V_0$, com $t \neq t_0$. Portanto na vizinhança $(\theta_0 - \delta, \theta_0 + \delta)$ as curvas $X(t, \cdot)$ não tem diâmetros para $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, com $t \neq t_0$.

Caso b_1) $k'(t_0, \theta_0) + k'(t_0, \theta_0 + \pi) = 0$ mas a soma $k'(t, \theta_0) + k'(t, \theta_0 + \pi)$ não é identicamente nula numa vizinhança de t_0 .

Se a soma $k'(t, \theta_0) + k'(t, \theta_0 + \pi)$ não é identicamente nula numa vizinhança de t_0 então existe um ponto t' nessa vizinhança tal que

$$k'(t', \theta_0) + k'(t', \theta_0 + \pi) \neq 0.$$

Logo, $f(t', \theta_0) \neq 0$. Como $f(t, \theta)$ é contínua, existe uma vizinhança de θ_0 tal que

$$f(t', \theta) \neq 0.$$

Ou seja, não temos diâmetros numa vizinhança de θ_0 quando a curva evolui.

Caso b_2) $k'(t, \theta_0) + k'(t, \theta_0 + \pi)$ é identicamente nula numa vizinhança de t_0 .

Neste caso, suponhamos que existe um intervalo maximal $(t_0 - b, t_0 + b)$, $b > 0$, tal que $k'(t, \theta_0) + k'(t, \theta_0 + \pi) = 0$ para todo $t \in (t_0 - b, t_0 + b)$. Portanto, θ_0 é diâmetro de $X(t, \cdot)$ para todo $t \in (t_0 - b, t_0 + b)$, e

$$f'(t, \theta_0) = - \int_{t_0}^t e^{-s} (k''(s, \theta_0) + k''(s, \theta_0 + \pi)) ds$$

pois θ_0 é um diâmetro parabólico da curva $X(t_0, \cdot)$. Se $k''(t_0, \theta_0) + k''(t_0, \theta_0 + \pi) \neq 0$ então procedendo analogamente como no caso a) temos que existe uma vizinhança V_1 de (t_0, θ_0) tal que $f'(t, \theta) \neq 0$ em $V_1 \setminus (t_0, \theta_0)$.

Portanto não temos diâmetro parabólico para $t \neq t_0$ em V_1 .

Se $k''(t_0, \theta_0) + k''(t_0, \theta_0 + \pi) = 0$ mas a soma $k''(t, \theta_0) + k''(t, \theta_0 + \pi)$ não é identicamente nula numa vizinhança de t_0 , então procedendo analogamente como no caso b_1) temos que existe um ponto t' tal que $k''(t', \theta_0) + k''(t', \theta_0 + \pi) \neq 0$ e uma vizinhança V_1 de (t', θ_0) tal que $f'(t, \theta) \neq 0$ em V_1 .

Se a soma $k''(t, \theta_0) + k''(t, \theta_0 + \pi)$ é identicamente nula numa vizinhança de t_0 . Como no caso b_2) suponhamos que existe um intervalo maximal $(t_0 - b, t_0 + b)$, $b > 0$, tal que $k''(t, \theta_0) + k''(t, \theta_0 + \pi) = 0$ para todo $t \in (t_0 - b, t_0 + b)$.

Se $k'''(t_0, \theta_0) + k'''(t_0, \theta_0 + \pi) \neq 0$, então existe uma vizinhança $W = (\theta_0 - \delta, \theta_0 + \delta)$ de θ_0 tal que $k''(t_0, \theta) + k''(t_0, \theta + \pi) \neq 0$ em $W - \{\theta_0\}$. Como $k''(t, \theta) + k''(t, \theta + \pi)$ é contínua, existe uma vizinhança V_2 de (t_0, θ_0) tal que

$$k''(t, \theta) + k''(t, \theta + \pi) \neq 0 \text{ em } V_2 \setminus V_2 \cap \{\theta = \theta_0\}.$$

Logo, diminuindo V_2 se necessário, temos que $f'(t, \theta) \neq 0$ em $V_2 - V_2 \cap \{\theta = \theta_0\}$. Com efeito. Note que

$$h''(t, \theta) + h''(t, \theta + \pi) = e^t (h''(t_0, \theta) + h''(t_0, \theta + \pi)) - e^t \int_{t_0}^t e^{-s} (k''(s, \theta) + k''(s, \theta + \pi)) ds$$

se $h''(t_0, \theta) + h''(t_0, \theta + \pi) \neq 0$, novamente pela continuidade, $h''(t, \theta) + h''(t, \theta + \pi) \neq 0$ para t suficientemente próximo de t_0 . Portanto existe uma vizinhança V_2 de (t_0, θ_0) tal que $f'(t, \theta) \neq 0$ em $V_2 - \{\theta = \theta_0\}$. Por outro lado, se $h''(t_0, \theta) + h''(t_0, \theta + \pi) = 0$, então $h''(t, \theta) + h''(t, \theta + \pi) = -e^t \int_{t_0}^t e^{-s} (k''(s, \theta) + k''(s, \theta + \pi)) ds \neq 0$ para t suficientemente próximo de t_0 . Portanto $f'(t, \theta) \neq 0$ em $V_2 \setminus V_2 \cap \{\theta = \theta_0\}$.

Se $k'''(t_0, \theta_0) + k'''(t_0, \theta_0 + \pi) = 0$ mas a soma $k'''(t, \theta_0) + k'''(t, \theta_0 + \pi)$ não é identicamente nula numa vizinhança de t_0 , então procedemos analogamente como no caso b_1). Se $k'''(t, \theta_0) + k'''(t, \theta_0 + \pi) = 0$ é identicamente nula numa vizinhança de t_0 , então procedemos

analogamente como no caso b_2), analisando o quarto jato da soma $k(t_0, \theta) + k(t_0, \theta + \pi)$.

Suponhamos então que $k^{(n)}(t_0, \theta_0) + k^{(n)}(t_0, \theta_0 + \pi)$ seja o primeiro jato não nulo da soma $k''(t_0, \theta) + k''(t_0, \theta + \pi)$ em θ_0 o qual existe por hipótese. Logo,

$$k''(t_0, \theta) + k''(t_0, \theta + \pi) = (k^{(n)}(t_0, \theta_0) + k^{(n)}(t_0, \theta_0 + \pi)) \frac{(\theta - \theta_0)^n}{n!} + O_n \neq 0$$

para $\theta \neq \theta_0$. Como a função $k''(t, \theta_0) + k''(t, \theta_0 + \pi)$ é contínua existe uma vizinhança V_n de (t_0, θ_0) tal que $k''(t, \theta) + k''(t, \theta + \pi) \neq 0$ em $V_n \setminus V_n \cap \{\theta = \theta_0\}$. Portanto existe uma vizinhança V_2 de (t_0, θ_0) tal que $f'(t, \theta) \neq 0$ em $V_2 \setminus V_2 \cap \{\theta = \theta_0\}$. **■**

Proposição 2.6 *Uma órbita periódica de período dois parabólica, não pode ser dois pontos críticos de máximo local da função curvatura se os valores da função curvatura nesses pontos forem menor que um.*

DEM.: Com efeito. Suponhamos por absurdo que θ_0 é um ponto periódico de período dois parabólico da aplicação bilhar T^{t_0} sobre a curva $X(t_0, \cdot)$ e que $k(t_0, \theta_0), k(t_0, \theta_0 + \pi) < 1$. Como $L(t_0, \theta_0) = R(t_0, \theta_0) + R(t_0, \theta_0 + \pi) > 2$ temos que a curva $X(t_0, \cdot)$ contém em seu interior um círculo C_0 de raio igual a $r_0 = \min\{R(t_0, \theta_0), R(t_0, \theta_0 + \pi)\} > 1$. Logo,

$$A(X(t_0, \cdot)) > A(C_0) = r_0^2 \pi > \pi.$$

Por outro lado, $A(X(t_0, \cdot)) = \pi$ e portanto temos uma contradição. **■**

Não sabemos quais implicações geométricas sobre as curvas de evolução se todos os jatos da soma $k(t, \theta_0) + k(t, \theta_0 + \pi)$ é nulo para todo $t > 0$.

Não sabemos quais são as implicações geométricas sobre a evolução se todos os jatos da soma $k(t, \theta_0) + k(t, \theta_0 + \pi)$ são nulos.

Questão: Pode para todo $t > 0$ e todo inteiro positivo n , $k^{(n)}(t, \theta_0) + k^{(n)}(t, \theta_0 + \pi) = 0$?

Órbitas periódicas do tipo Zig-Zag

3.1 Primeira Antípoda A_1

Existência de órbitas de período $2n$

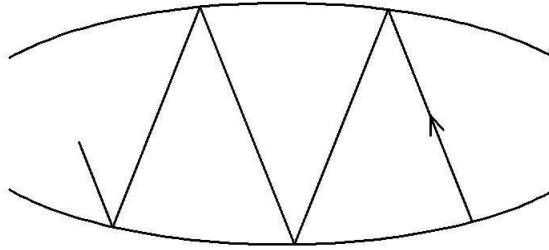


Figura 3.1:

Seja α uma curva estritamente convexa de classe C^k , T sua aplicação bilhar associada. Sabemos que os diâmetros de α correspondem a órbitas periódicas de período 2. Gostaríamos agora de analisar órbitas especiais que provêm da duplicação do diâmetro. Essas são órbitas periódicas que iniciam seguindo a direção normal à curva e depois de um certo número de batidas encontram a curva na direção do vetor normal. Portanto, retornam ao ponto de origem seguindo o mesmo caminho no sentido inverso, ou seja a frente de onda sofre uma reversão de sentido.

No caso $n = 1$, começamos com uma curva inicial cuja evoluta tenha pelo menos um vértice exterior a região limitada pela curva. Com respeito a este vértice tomamos dois raios r_1 e r_2 , tangentes à evoluta, de tal forma que se interceptam fora da região limitada pela curva e abaixo do vértice. Como o raio máximo é decrescente com a evolução do tempo, esse vértice ficará interno e portanto terá que passar pela fronteira da região limitada pela curva. Quando isso ocorrer o ponto da interseção dos raios r_1 e r_2 já passou pela fronteira em um

instante t_0 . Logo, a aplicação bilhar da curva $X(t_0, \cdot)$ tem um ponto periódico do tipo zig-zag de período 4. Nem sempre podemos garantir que a aplicação bilhar de uma curva fechada tenha órbitas do tipo zig-zag de período $2n$. Neste capítulo estudaremos órbitas zig-zag de período $4n$. Mostraremos que ao longo da evolução do fluxo de curvatura essas só existem para períodos cada vez maiores.

Dado um instante t , tomemos a curva estritamente convexa $X(t, \cdot)$, parametrizada pelo ângulo θ , na família de curvas geradas pelo fluxo de curvatura. Estudaremos agora a dinâmica da aplicação $\pi_1 \circ T$ restrita a reta horizontal $\mathbf{S}^1 \times \{\pi/2\}$.

Dado $\theta \in S^1$ e a direção $\phi = \pi/2$, denotemos por $X(t, A(\theta))$ o ponto sobre a curva $X(t, \cdot)$, primeira batida da frente de onda, isto é $X(t, A(\theta)) = X(t, \theta) + \lambda(t, \theta)N(\theta)$. A aplicação A definida implicitamente pela equação

$$F(\theta, A) = \langle X(A) - X(\theta), T(\theta) \rangle = 0,$$

está bem definida. De fato. Suponhamos por absurdo que $\frac{\partial F}{\partial A} = \langle X'(A), T(\theta) \rangle = 0$. Então $X'(A) // N(\theta)$, donde $A = \theta + \pi/2$ (ou $\theta + 3\pi/2$). Mas nesse caso

$$X(\theta + \pi/2) - X(\theta) // N(\theta)$$

contradizendo a convexidade de X . Logo, $\frac{\partial F}{\partial A} \neq 0$ e pelo o teorema da função implícita, a aplicação $A : \theta \mapsto \theta_1(\theta)$ está bem definida numa vizinhança V de θ e é da mesma classe de diferenciabilidade das curvas de evolução, isto é, C^∞ .

Definição 3.1 *Dado $\theta \in S^1$ e a direção $\phi = \pi/2$, denotemos por $X(t, \theta_1(\theta))$ o ponto sobre a curva $X(t, \cdot)$ da primeira batida da frente de onda. Chamamos de **primeira antípoda** a aplicação $A_1 : \theta_0 \mapsto \theta_1(t, \theta_0)$ definida implicitamente pela equação:*

$$F(\theta_0, \theta_1) = \langle X(t, \theta_1) - X(t, \theta_0), T(\theta_0) \rangle = 0 \quad (3.1)$$

Teorema 3.1 *Os pontos críticos de A_1 correspondem aos pontos onde a evoluta intersecta a curva.*

DEM.: Tomando a derivada parcial com respeito a A_1 na equação (3.1):

$$\frac{\partial}{\partial \theta_1} F(\theta_0, A_1) = \langle X'(A_1), T(\theta_0) \rangle \neq 0,$$

pois a curva $X(t, \cdot)$ é estritamente convexa. Então, pelo teorema da Função Implícita, A_1 é diferenciável da mesma classe de F e

$$\begin{aligned}\frac{dA_1}{d\theta_0} &= -\frac{\langle X(A_1) - X(\theta_0), N_0 \rangle - R_0}{R_1 \langle T_1, T_0 \rangle} \\ &= -\frac{L_1 - R_0}{R_1 \langle T_1, T_0 \rangle}\end{aligned}$$

$$\frac{dA_1}{d\theta_0} = 0 \Leftrightarrow L_1 = R_0$$

■

Definição 3.2 *Sejam $X(t, \cdot)$ uma curva da evolução e $A_1(t, \cdot)$ a primeira antípoda. Definimos $L_1 : S^1 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, a função comprimento da corda, por:*

$$L_1(t, \theta) = \langle X(t, A_1(\theta)) - X(t, \theta), N(\theta) \rangle$$

Queremos estudar o comportamento assintótico das aplicações $A_1(t, \cdot)$ e $L_1(t, \cdot)$ quando $t \rightarrow \infty$.

Lema 3.1 $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial A_1(t, \theta)}{\partial t} = 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial L_1(t, \theta)}{\partial t} = 0$.

DEM.: Novamente, pela convexidade de $X(t, \cdot)$ podemos aplicar o Teorema da Função Implícita para obter:

$$\frac{\partial}{\partial t} A_1 = -\frac{\frac{\partial F}{\partial t}}{\frac{\partial F}{\partial \theta_1}}.$$

Assim, basta provar que $\frac{\partial F}{\partial t} \rightarrow 0$. Por outro lado,

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial t} &= \langle \frac{\partial X}{\partial t}(t, \theta_1) - \frac{\partial X}{\partial t}(t, \theta), T(\theta) \rangle \\ &= \langle (k - h)|_{(t, A_1)} N(A_1) - (k' - h')|_{(t, A_1)} T(A_1) - (k - h)|_{(t, \theta)} N(\theta) + (k' - h')|_{(t, \theta)} T(\theta), T(\theta) \rangle \\ &= (k - h)|_{(t, A_1)} \langle N(A_1), T(\theta) \rangle - (k' - h')|_{(t, A_1)} \langle T(A_1), T(\theta) \rangle + (k' - h')|_{(t, \theta)}\end{aligned}$$

Como $k - h \rightarrow 0$, $k' - h' \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$, temos que $\frac{\partial F}{\partial t} \rightarrow 0$. Donde $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial A_1}{\partial t} = 0$.

Para a segunda afirmação, observemos que:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L_1}{\partial t}(t, \theta) &= \frac{\partial}{\partial t} \langle X(t, A_1) - X(t, \theta), N(\theta) \rangle \\ &= \frac{\partial A_1}{\partial t} \langle X'(t, A_1), N(\theta) \rangle + \langle X_t(t, A_1) - X_t(t, \theta), N(\theta) \rangle\end{aligned}$$

Então, pela primeira parte desse lema mais o fato de que $k - h \rightarrow 0$, $k' - h' \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$, temos que $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial L_1}{\partial t} = 0$. ■

Teorema 3.2 *A função ângulo ϕ_1 , definida por*

$$\arccos \langle T(A_1), \frac{X(A_1) - X}{L_1} \rangle,$$

converge uniformemente a $\pi/2$ quando t se torna arbitrariamente grande. Isto é,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_1(t, \cdot) = \pi/2. \quad (3.2)$$

DEM.: É suficiente mostrarmos que $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d\phi_1}{dt} = 0$. Derivando a expressão

$$L_1 \cos \phi_1 = \langle T(A_1), X(A_1) - X \rangle$$

com relação a t , temos:

$$\begin{aligned} -\frac{d\phi_1}{dt} \sin \phi_1 &= (A_1)_t \langle N(A_1), \frac{X(A_1) - X}{L_1} \rangle + \frac{1}{L_1} \langle T(A_1), (k - h)_{A_1} N_{A_1} - (k - h)'_{A_1} T(A_1) - (k - h)N + (k - h)'T \rangle \\ &= -1/L_1 \frac{\partial L_1}{\partial t} \langle T(A_1), \frac{X(A_1) - X}{L_1} \rangle. \end{aligned}$$

Por outro lado, $k - h$, $(k - h)'$, $(k - h)''$ tendem a zero quando $t \rightarrow \infty$ e pelo lema 3.1 $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial A_1(t, \theta)}{\partial t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial L_1(t, \theta)}{\partial t} = 0$. Logo

$$\frac{d\phi_1}{dt} \rightarrow 0,$$

e portanto $\phi_1(t, \theta)$ converge uniformemente a $\pi/2$ na topologia C^∞ . ■

Corolário 3.1 $L_1(t, \cdot) \rightarrow 2$ uniformemente quando $t \rightarrow \infty$.

Teorema 3.3 *Existe um tempo t_0 tal que $A_1(t, \cdot)$ é um difeomorfismo para todo $t > t_0$.*

DEM.: Com efeito. A função $t \mapsto R(t, \theta)$ converge uniformemente a 1 enquanto $L_1 = L(A_1(\theta))$ converge uniformemente a 2. Logo existe um tempo t_0 tal que para todo $t > t_0$ $R_0 = R(t, \theta) < L_1$, o que por sua vez implica que

$$\frac{dA_1}{d\theta} > 0.$$

■

Teorema 3.4 *A aplicação A_1 converge uniformemente na topologia C^∞ para a aplicação $A_\infty = id + \pi$. Mais ainda, existe um $t_0 > 0$ suficientemente grande tal que $A(t, \cdot)$ é uma difeomorfismo para cada $t > t_0$.*

DEM.: Para a primeira afirmação note que:

$$T(A_1(\theta), \phi_1) \rightarrow (\theta, \pi/2).$$

Como ϕ_1 converge uniformemente a $\pi/2$ e $\frac{\partial A_1}{\partial t} \rightarrow 0$ temos que $A_1(t, \cdot)$ converge uniformemente para a aplicação $A_\infty = id + \pi$. A segunda afirmação segue do teorema 3.3. ■

Vamos agora refletir um pouco sobre as consequências desse teorema. A primeira delas, de caráter geométrico, pode ser descrita pelo corolário:

Corolário 3.2 *A família de gráficos da aplicação A converge uniformemente na topologia C^∞ para o gráfico da aplicação $A_\infty = id + \pi$ quando $t \rightarrow \infty$.*

3.1.1 A dinâmica da aplicação A_1

Proposição 3.1 *As órbitas periódicas de período dois da aplicação A_1 correspondem às órbitas periódicas de período dois do bilhar.*

DEM.: De fato. Primeiramente, note que

$$A_1^2(\theta_0) = \theta_0 \Leftrightarrow T^2(\theta_0, \pi/2) = (\theta_0, \pi/2).$$

Além disso, A_1 é um difeomorfismo que preserva orientação para $t > t_0$ e a aplicação bilhar não tem ponto periódico de período dois hiperbólico reverso ($(L - R_0)(L - R_1) < 0$). Logo θ_0 é um ponto fixo instável de A_1^2 se $\frac{dA_1^2}{d\theta}(\theta_0) > 1$ e estável se $\frac{dA_1^2}{d\theta}(\theta_0) < 1$. Por outro lado,

$$\frac{dA_1^2}{d\theta}(\theta_0) = \frac{L - R_0}{R_1} \frac{L - R_1}{R_0}$$

donde $\frac{dA_1^2}{d\theta}(\theta_0) > 1 \Leftrightarrow L - R_0 - R_1 > 0$. Logo, um ponto fixo instável de A_1^2 corresponde a um ponto fixo hiperbólico de T^2 e vice-versa.

Se θ_0 é estável, $\frac{dA_1^2}{d\theta}(\theta_0) < 1 \Leftrightarrow L - R_0 - R_1 < 0$. Como $(L - R_0)(L - R_1) > 0$ para $t > t_0$, temos que um ponto fixo estável de A_1^2 corresponde a um ponto fixo elíptico de T^2 e vice-versa.

Para os pontos fixos do tipo sela-nó de A_1^2 , temos $\frac{dA_1^2}{d\theta}(\theta_0) = \frac{L - R_0}{R_1} \frac{L - R_1}{R_0} = 1$ o que equivale a $L - R_0 - R_1 = 0$. Logo, um ponto fixo do tipo sela-nó de A_1^2 corresponde a um ponto fixo parabólico de T^2 e vice-versa. ■

Observação 3.1 1. Como os diâmetros da curva $X(t, \cdot)$ correspondem a pontos fixos hiperbólicos de T^2 , temos que A_1^2 tem pelo menos dois pontos fixos instáveis. Então, mesmo que A_1^2 tenha pontos fixos do tipo sela-nó, existirá pelo menos dois pontos fixos fracamente estáveis.

2. Os conjuntos α e ω -recorrentes de A_1 são órbitas periódicas de período dois.

3.2 Segunda Antípoda A_2

Consideremos agora a segunda frente de onda que parte de $X(t, \theta)$ numa direção $\phi(\theta)$, isto é:

$$E(\theta, \lambda) = X(\theta) + \lambda v_\phi, \quad (3.3)$$

onde $v_\phi = T(\theta) \cos \phi + N(\theta) \sin \phi$. Estamos interessados em determinar a envoltória dessa família, isto é, queremos encontrar uma função $\lambda(\theta)$ de modo que a curva $\beta(\theta) = X(\theta) + \lambda(\theta)v_{\phi(\theta)}$ seja tangente ao raio $E(\theta, \lambda)$ no ponto β . Para isto, note que:

$$\beta'(\theta) = X'(\theta) + \lambda'(\theta)v_\phi + \lambda(\theta)v'_\phi$$

Por outro lado, β é tangente à reta $E(\theta, \lambda) = X(\theta) + \lambda v_\phi(\theta)$ o que implica $\beta' \perp v_\phi^\perp$. Logo,

$$\beta' \cdot v_\phi^\perp = 0 \text{ (condição de focalização de família de raios)}$$

$$\Rightarrow \lambda = -\frac{X' \cdot v_\phi^\perp}{v'_\phi \cdot v_\phi^\perp} \quad \therefore \quad \beta(\theta) = X(\theta) - \frac{X' \cdot v_\phi^\perp}{v'_\phi \cdot v_\phi^\perp} v_\phi$$

Por outro lado,

$$v_\phi^\perp = -T \sin \phi + N \cos \phi$$

Derivando a equação de v_ϕ , temos:

$$\begin{aligned} v'_\phi &= N \cos \phi - \phi' T \sin \phi - T \sin \phi + \phi' N \cos \phi \\ &= (1 + \phi') v_\phi^\perp. \end{aligned}$$

Logo

$$\beta = X + \frac{R \sin \phi}{1 + \phi'} v_\phi \quad (3.4)$$

O que temos feito é exatamente o cálculo da cáustica determinada pela frente de onda.

Consideremos agora o ponto da segunda batida da frente de onda, $X(t, \theta_2(\theta_1, \phi_1))$, determinado implicitamente pela equação:

$$F_2(\theta_1, \theta_2) = \langle X(t, \theta_2) - X(t, \theta_1), v^\perp(\theta_1) \rangle = 0$$

Como $\frac{\partial}{\partial \theta_2} F_2 = R(t, \theta_2) \cdot T(\theta_2), v^\perp(\theta_1) \rangle \neq 0$, aplicamos teorema da Função Implícita para garantir a existência de uma aplicação $A_2 : \theta_1 \mapsto \theta_2$ a qual está bem definida, isto é para cada θ_1 existe um único $A_2(\theta_1)$ tal que

$$F_2(\theta_1, A_2(\theta_1)) = 0$$

Além disso, A_2 é da mesma classe de diferenciabilidade de $X(t, \cdot)$.

Definição 3.3 Dado $\theta_0 \in S^1$ e a direção $\phi_0 = \pi/2$, denotemos por $X(t, \theta_1(\theta_0))$, $X(t, \theta_2(\theta_0))$ os pontos da primeira e segunda batida da frente de onda, respectivamente. Chamamos de **segunda antípoda** a aplicação $A_2 : \theta_1 \mapsto \theta_2(t, \theta_0)$ definida implicitamente pela equação:

$$F_2(\theta_1, \theta_2) = \langle X(t, \theta_2) - X(t, \theta_1), v^\perp(\theta_1) \rangle = 0 \quad (3.5)$$

Temos a seguinte questão:

O que corresponde o ponto crítico da segunda antípoda?

Na direção à resposta dessa questão temos o seguinte teorema:

Teorema 3.5 O ponto crítico da segunda antípoda corresponde exatamente ao ponto onde a cáustica intersecta curva.

DEM.: O ponto da segunda batida da frente de onda é determinado pela equação:

$$\langle X(A_2(\theta_0)) - X(A_1(\theta_0)), v_\phi^\perp(A_1(\theta_0)) \rangle = 0.$$

Logo,

$$\begin{aligned} 0 &= \langle X'(A_2(\theta_0)), v_\phi^\perp(A_1(\theta_0)) \rangle \frac{\partial A_2}{\partial \theta_0} - \langle X'(A_1(\theta_0)), v_\phi^\perp(A_1(\theta_0)) \rangle \frac{\partial A_1}{\partial \theta_0} + \langle X(A_2(\theta_0)) - X(A_1(\theta_0)), v_\phi \rangle (\phi'(A_1(\theta_0)) + 1) \frac{\partial A_1}{\partial \theta_0} \\ &= \langle X'(A_2(\theta_0)), v_\phi^\perp(A_1(\theta_0)) \rangle \frac{\partial A_2}{\partial \theta_0} - R(A_1(\theta_0)) \cdot T(A_1(\theta_0)), v_\phi^\perp(A_1(\theta_0)) \rangle \frac{\partial A_1}{\partial \theta_0} + (\phi'(A_1(\theta_0)) + 1) \frac{\partial A_1}{\partial \theta_0} \|X(A_2(\theta_0)) - X(A_1(\theta_0))\| \\ &= \langle X'(A_2(\theta_0)), v_\phi^\perp(A_1(\theta_0)) \rangle \frac{\partial A_2}{\partial \theta_0} - R(A_1(\theta_0)) \sin(\phi(A_1(\theta_0))) \frac{\partial A_1}{\partial \theta_0} + (\phi'(A_1(\theta_0)) + 1) \frac{\partial A_1}{\partial \theta_0} \|X(A_2(\theta_0)) - X(A_1(\theta_0))\| \end{aligned}$$

Pelo teorema 3.3 existe um $T > 0$ tal que $\frac{\partial A_1}{\partial \theta_0}(t, \theta_0) \neq 0$ para todo $t > T$. Então, $\frac{\partial A_2}{\partial \theta_0}(t, \theta_0) = 0$ é equivalente a

$$\|X(A_2(\theta_0)) - X(A_1(\theta_0))\| = \frac{R(A_1(\theta_0)) \sin(\phi(A_1(\theta_0)))}{1 + \phi'(A_1(\theta_0))}$$

O que é equivalente a condição da cáustica intersepar a fronteira de $X(t, \cdot)$. ■

Analisemos agora comportamento assintótico da segunda antípoda. Denotemos por

$$\begin{aligned} L_2(t, \theta) &= \langle X(t, A_2(t, \theta)) - X(t, A_1(t, \theta)), \cos \phi_1(t, A_1(t, \theta))T(A_1(t, \theta)) + \sin \phi_1(t, A_1(t, \theta))N(A_1(t, \theta)) \rangle \\ &= \|X(t, A_2(t, \theta)) - X(t, A_1(t, \theta))\|, \end{aligned}$$

o comprimento da corda correspondente a segunda batida da frente de onda.

Teorema 3.6 *A aplicação segunda antípoda é de classe C^∞ .*

DEM.: A demonstração é análoga a da primeira antípoda. ■

Lema 3.2 $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial A_2}{\partial t} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial L_2}{\partial t} = 0.$

DEM.: Derivando a equação

$$\langle X(A_2) - X(A_1), v^\perp(A_1) \rangle = 0,$$

com relação a variável t temos,

$$\begin{aligned} (A_2)_t \langle X'(A_2), v_\phi^\perp(A_1) \rangle &- (A_1)_t \langle X'(A_1), v_\phi^\perp(A_1) \rangle + \\ &\langle X_t(A_2), v_\phi^\perp(A_1) \rangle - \langle X_t(A_1), v_\phi^\perp(A_1) \rangle - (\phi(A_1) + A_1)_t \langle X(A_2) - X(A_1), v_\phi(A_1) \rangle = 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Como as curvas de evolução pelo fluxo pela curvatura são estritamente convexas, temos que $\langle X'(A_2), v_\phi^\perp(A_1) \rangle \neq 0$. Por outro lado, $(A_1)_t, (\phi(A_1))_t, k - h$ e $k' - h'$ tendem a zero quando $t \rightarrow \infty$. Segue portanto que $(A_2)_t \rightarrow 0$.

Para a demonstração da segunda parte note que

$$L_2 = \langle X(A_2) - X(A_1), v_\phi(A_1) \rangle$$

Tomando agora a derivada parcial de L_2 com respeito a t , temos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L_2}{\partial t} &= \langle (A_2)_t X'(A_2) - (A_1)_t X'(A_1), v_{\phi_1} \rangle + \langle X_t(A_2) - X_t(A_1), v_{\phi_1} \rangle + \langle X(A_2) - X(A_1), (v_{\phi_1})_t \rangle \\ &= \langle (A_2)_t X'(A_2) - (A_1)_t X'(A_1), v_{\phi_1} \rangle + \langle X_t(A_2) - X_t(A_1), v_{\phi_1} \rangle + [(A_1)_t + (\phi_1)_t] \langle X(A_2) - X(A_1), v_{\phi_1}^\perp \rangle\end{aligned}$$

Como $k - h$, $k' - h'$, $\frac{\partial A_1}{\partial t}$ e $\frac{\partial A_2}{\partial t}$ tendem a zero quando $t \rightarrow \infty$, temos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial L_2}{\partial t} = 0.$$

■

Corolário 3.3 *A função ângulo ϕ_2 , definida por*

$$\arccos \langle T(A_2), \frac{X(A_2) - X(A_1)}{L_2} \rangle,$$

converge uniformemente a $\pi/2$ quando t se torna arbitrariamente grande. Isto é,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_2(t, \cdot) = \pi/2. \quad (3.7)$$

DEM.: É suficiente mostrarmos que $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial \phi_2}{\partial t} = 0$. Derivando a expressão

$$L_2 \cos \phi_2 = \langle T(A_2), X(A_2) - X(A_1) \rangle$$

com relação a t , temos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L_2}{\partial t} \cos \phi_2 - L_2 \sin \phi_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial t} &= (A_2)_t \langle N(A_2), X(A_2) - X(A_1) \rangle - \langle T(A_2), (A_2)_t X'(A_2) - (A_1)_t X'(A_1) \rangle \\ &+ \langle T(A_2), X_t(A_2) - X_t(A_1) \rangle.\end{aligned}$$

Por outro lado, $k - h$, $(k - h)'$, $(L_2)_t$, $(A_1)_t$ e $(A_2)_t$ tendem a zero quando $t \rightarrow \infty$. Logo

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial t} \rightarrow 0.$$

■

Observando a equação:

$$\langle X(A_{j+1}) - X(A_j), v_{\phi_j}^\perp \rangle = 0$$

e portanto

$$\begin{aligned} (A_{j+1})_t < X'(A_{j+1}), v_{\phi_j}^\perp > - (A_j)_t < X'(A_j), v_{\phi_j}^\perp > + \\ < X_t(A_{j+1}) - X_t(A_j), v_{\phi_j}^\perp > - (\phi_j + A_j)_t < X(A_{j+1}) - X(A_j), v_{\phi_j} > = 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

segue por indução o seguinte resultado mais geral:

Lema 3.3 $\frac{\partial A_j}{\partial t} \rightarrow 0, \frac{\partial L_j}{\partial t} \rightarrow 0, \frac{\partial \phi_j}{\partial t} \rightarrow 0.$

Observação 3.2 *Todos os pontos sobre o círculo são diâmetros, então o fluxo de curvatura faz $\{L_j\}$ e $\{\phi_j\}$ convergirem pontualmente a 2 e $\pi/2$ respectivamente para todo j quando $t \rightarrow \infty$. Segue do lema 3.3 que esta convergência é uniforme.*

Teorema 3.7 *Existe um tempo t_0 suficientemente grande tal que a aplicação $A_2(t, \cdot)$ é um difeomorfismo para cada $t > t_0$.*

DEM.:

No caso da segunda atípoda, usamos a equação:

$$< X(\theta_2) - X(\theta_1), v_{\phi_1}^\perp(\theta_1) > = < X_2 - X_1, v_1^\perp > = 0,$$

onde ϕ_1 é o ângulo de saída da aplicação bilhar na segunda iterada, e $v_{\phi_1} = \cos \phi_1 T_1 + \sin \phi_1 N_1$. Derivando implicitamente a equação acima, temos:

$$\frac{dA_2}{d\theta} < X'_2, v_1^\perp > = < X'_1, v_1^\perp > \frac{dA_1}{d\theta} + \left(\frac{dA_1}{d\theta} + \frac{d\phi_1}{d\theta} \right) L_2 \quad (3.9)$$

Seja $\tilde{v}_1$ o refletido de v_1 com relação ao vetor normal a X_1 ,

$$\tilde{v}_1 = -\cos \phi_1 T_1 + \sin \phi_1 N_1.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} < X_1 - X_0, \tilde{v}_1^\perp > = 0, \\ \Rightarrow \frac{dA_1}{d\theta} < X'_1, \tilde{v}_1^\perp > = < X'_0, \tilde{v}_1^\perp > + \left(\frac{dA_1}{d\theta} - \frac{d\phi_1}{d\theta} \right) L_1 \end{aligned} \quad (3.10)$$

Das equações (3.9) e (3.10) obtemos:

$$\begin{aligned}
\frac{dA_2}{d\theta} \langle X'_2, v_1^\perp \rangle &= \langle X'_1, v_1^\perp \rangle \frac{dA_1}{d\theta} + \left(\frac{dA_1}{d\theta} - \frac{dA_1}{d\theta} \left[1 - \frac{\langle X'_1, \tilde{v}_1^\perp \rangle}{L_1} \right] + \frac{\langle X'_0, \tilde{v}_1^\perp \rangle}{L_1} \right) L_2 \\
&= \left(2L_2 + \langle X'_1, v_1^\perp \rangle - \langle X'_1, \tilde{v}_1^\perp \rangle \frac{L_2}{L_1} \right) \frac{dA_1}{d\theta} + \langle X'_0, \tilde{v}_1^\perp \rangle \frac{L_2}{L_1} \\
&= \left(2L_2 + R_1 \langle T_1, v_1^\perp \rangle - R_1 \langle T_1, \tilde{v}_1^\perp \rangle \frac{L_2}{L_1} \right) \frac{dA_1}{d\theta} + R_0 \langle T_0, \tilde{v}_1^\perp \rangle \frac{L_2}{L_1} \\
&= \left(2L_2 - R_1 \sin \phi_1 \frac{L_2 + L_1}{L_1} \right) \frac{dA_1}{d\theta} + R_0 \langle T_0, \tilde{v}_1^\perp \rangle \frac{L_2}{L_1}
\end{aligned}$$

Quando $t \rightarrow \infty$, $L_1, L_2 \rightarrow 2$, $R_0, R_1, R_2 \rightarrow 1$ e $\langle T_0, \tilde{v}_1^\perp \rangle \rightarrow -1$. Segue-se então que o lado direito da última equação acima converge a 1 quando $t \rightarrow \infty$. Logo, existe um tempo $t_1 < \infty$ tal que $\frac{dA_2}{d\theta} > 0$ para todo $t > t_1$. Mais ainda, como $\langle X'_2, v_1^\perp \rangle \rightarrow 1$ temos que $\frac{dA_2}{d\theta} \rightarrow 1$.

■

Este resultado comprova o que é aparente segundo a evolução pelo fluxo pela curvatura, uma vez que as curvas de evolução convergem para círculo na topologia C^∞ .

Vemos então que a aplicação antípoda $A_2(t, \cdot) : \mathbf{S}^1 \rightarrow \mathbf{S}^1$ torna-se um difeomorfismo com a evolução do fluxo de curvatura. Isso traz como consequência dinâmica a inexistência de órbitas de período 4 do tipo zig-zag. Com efeito. Seja θ_0 uma órbita do tipo zig-zag de período 4. Então $A_2^2(\theta_0) = \theta_0$ o que implica que o número de rotação, $\rho(A_2)$, é igual a $1/2$. Por outro lado, todos os diâmetros de $X(t, \cdot)$ são pontos fixos de A_2 o que implica $\rho(A_2) = 0$, o que é absurdo. Portanto não existe órbitas do tipo zig-zag de período 4.

Considerando agora a terceira frente de onda definimos, de maneira análoga a primeira e segunda antípoda, a terceira antípoda $A_3 : \theta_2 \mapsto \theta_3$ definida implicitamente pela equação:

$$\langle X(t, \theta_3) - X(t, \theta_2), v_{\phi_2}^\perp(t, \theta_2) \rangle = 0$$

Continuando esse processo sucessivamente também definimos a n -ésima antípoda A_n , como sendo a aplicação associada a n -ésima frente de onda definida implicitamente pela equação:

$$\langle X(t, \theta_n) - X(t, \theta_{n-1}), v_{\phi_{n-1}}^\perp(t, \theta_{n-1}) \rangle = 0.$$

Proposição 3.2 *A aplicação $A_n(t, \cdot)$ é diferenciável.*

DEM.: A afirmação segue do teorema da Função Implícita. ■

Teorema 3.8 *Existe um tempo t_0 suficientemente grande tal que a aplicação $A_n(t, \cdot)$ é um difeomorfismo para cada $t > t_0$.*

DEM.: A demonstração é por indução. Os casos $n = 1, 2$ já foram demonstrados, para termos uma pista de como aplicar indução faremos o caso $n = 3$. Para simplificar a notação chamamos, $X(\theta_i) = X_i$ e $v_{\phi_i}(\theta_i) = v_i$.

Na terceira antípoda, temos:

$$\langle X(A_3) - X(A_2), v_2^\perp(A_2) \rangle = \langle X_3 - X_2, v_2^\perp \rangle = 0.$$

$$\frac{dA_3}{d\theta} \langle X'_3, v_2^\perp \rangle = \frac{dA_2}{d\theta} \langle X'_2, v_2^\perp \rangle + \left(\frac{dA_2}{d\theta} + \frac{d}{d\theta}(\phi_2) \right) L_3 \quad (3.11)$$

Por outro lado,

$$\langle X_2 - X_1, \tilde{v}_2^\perp \rangle = 0.$$

$$\Rightarrow \frac{dA_2}{d\theta} \langle X'_2, \tilde{v}_2^\perp \rangle = \frac{dA_1}{d\theta} \langle X'_1, \tilde{v}_2^\perp \rangle + \left(\frac{dA_2}{d\theta} - \frac{d}{d\theta}\phi_2 \right) L_2 \quad (3.12)$$

$$\Rightarrow L_2 \frac{d}{d\theta}\phi_2 = \frac{dA_1}{d\theta} \langle X'_1, \tilde{v}_2^\perp \rangle + \frac{dA_2}{d\theta} (L_2 - \langle X'_2, \tilde{v}_2^\perp \rangle) \quad (3.13)$$

A partir das equações (3.11) e (3.13) obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{dA_3}{d\theta} \langle X'_3, v_2^\perp \rangle &= \frac{dA_2}{d\theta} \left(\langle X'_2, v_2^\perp \rangle - \frac{L_3}{L_2} \langle X'_2, \tilde{v}_2^\perp \rangle + 2L_3 \right) + \frac{dA_1}{d\theta} \frac{L_3}{L_2} \langle X'_2, \tilde{v}_2^\perp \rangle \\ &= \frac{dA_2}{d\theta} \left(-R_2 \sin \phi_2 - \frac{L_3}{L_2} R_2 \sin \phi_2 + 2L_3 \right) - \frac{L_3}{L_2} \frac{L_1 - R_0}{R_1 \sin \phi_1} R_1 \sin \phi_1 \\ &= \frac{dA_2}{d\theta} \left(2L_3 - \frac{L_3 + L_2}{L_2} R_2 \sin \phi_2 \right) - \frac{L_3}{L_2} \frac{L_1 - R_0}{R_1} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Quando $t \rightarrow \infty$, $L_i \rightarrow 2$ para $i = 0, 1, 2$, $R_i \rightarrow 1$ para $i = 0, 1, 2, 3$, $\frac{dA_2}{d\theta} \rightarrow 1$ e $\phi_1, \phi_2 \rightarrow \pi/2$. Portanto, o lado direito da equação (3.14) tende a 1 quando $t \rightarrow \infty$. Logo, existe um número t_3 suficientemente grande tal que $\frac{dA_3}{d\theta} > 0$ para todo $t > t_3$.

Suponhamos agora que existe um número t_n suficientemente grande tal que $\frac{dA_n}{d\theta} > 0$ para todo $t > t_n$, além suponhamos que $\frac{dA_i}{d\theta} \rightarrow 1$ quando $t \rightarrow \infty$. Logo,

$$\langle X_{n+1} - X_n, v_n^\perp \rangle = 0.$$

$$\frac{dA_{n+1}}{d\theta} \langle X'_{n+1}, v_n^\perp \rangle = \frac{dA_n}{d\theta} \langle X'_n, v_n^\perp \rangle + \left(\frac{dA_n}{d\theta} + \frac{d\phi_n}{d\theta} \right) L_n \quad (3.15)$$

Por outro lado,

$$\langle X_n - X_{n-1}, \tilde{v}_n^\perp \rangle = 0.$$

$$\Rightarrow \frac{dA_n}{d\theta} \langle X'_n, \tilde{v}_n^\perp \rangle = \frac{dA_{n-1}}{d\theta} \langle X'_{n-1}, \tilde{v}_n^\perp \rangle + \left(\frac{dA_n}{d\theta} - \frac{d\phi_{n-1}}{d\theta} \right) L_{n-1} \quad (3.16)$$

$$\Rightarrow \frac{d\phi_n}{d\theta} L_{n-1} = \frac{dA_{n-1}}{d\theta} \langle X'_{n-1}, \tilde{v}_n^\perp \rangle + \frac{dA_n}{d\theta} (L_{n-1} - \langle X'_n, \tilde{v}_n^\perp \rangle) \quad (3.17)$$

A partir das equações (3.15) e (3.17) obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{dA_{n+1}}{d\theta} \langle X'_{n+1}, v_n^\perp \rangle &= \frac{dA_n}{d\theta} \left(\langle X'_n, v_n^\perp \rangle - \frac{L_n}{L_{n-1}} \langle X'_n, \tilde{v}_n^\perp \rangle + 2L_n \right) + \frac{dA_{n-1}}{d\theta} \frac{L_n}{L_{n-1}} \langle X'_{n-1}, \tilde{v}_n^\perp \rangle \\ &= \frac{dA_n}{d\theta} \left(-R_n \sin \phi_n - \frac{L_n}{L_{n-1}} R_n \sin \phi_n + 2L_n \right) - \frac{dA_{n-1}}{d\theta} \frac{L_n}{L_{n-1}} R_{n-1} \sin \phi_{n-1} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Agora, usamos a hipótese de indução: quando $t \rightarrow \infty$, $L_i \rightarrow 2$, $R_i \rightarrow 1$ e $\frac{dA_i}{d\theta_0} \rightarrow 1$ para $i = 0, \dots, n$ mais o fato que $\{\phi_i\}$ converge uniformemente a $\pi/2$. Portanto, o lado direito da equação (3.18) tende a 1 quando $t \rightarrow \infty$. Logo, existe um número $\hat{t}_{n+1}$ suficientemente grande tal que $\frac{dA_{n+1}}{d\theta_0} > 0$ para todo $t > \hat{t}_{n+1}$. ■

Teorema 3.9 (Teorema C) *Existe t_0 suficientemente grande tal que a aplicação bilhar de $X(t, \cdot)$ não possui órbitas de período $2n$ do tipo zig-zag para $t \geq t_0$.*

DEM.: A prova é análoga a da segunda antípoda A_2 . ■

3.3 Estimativas de A_n através dos invariantes da curva

Sejam D , o diâmetro e L , a largura da curva X . Queremos encontrar agora uma estimativa para as antípodas em termos desses invariantes.

$$\frac{dA_1}{d\theta} R_1 \sin \phi_1 = L_1 - R_0,$$

com $1 - \epsilon_1 < \sin \phi_1 \leq 1$. Logo,

$$\frac{L - R_{\max}}{R_{\max}} \leq \frac{dA_1}{d\theta} \leq \frac{D - R_{\min}}{(1 - \epsilon_1)R_{\min}}.$$

Tomemos $m_1 = \frac{L - R_{\max}}{R_{\max}}$ e $M_1 = \frac{D - R_{\min}}{(1 - \epsilon_1)R_{\min}}$.

$$\frac{dA_2}{d\theta} R_2 \sin \phi_2 = \left(2L_2 - \frac{L_2 + L_1}{L_1} R_1 \sin \phi_1 \right) \frac{dA_1}{d\theta} - R_0 \frac{L_2}{L_1}$$

onde $1 - \epsilon_3 < \sin \phi_3 \leq 1$. Logo,

$$\frac{2}{R_{\max}} \left(L - \frac{D}{L} R_{\max} \right) m_1 - \frac{D}{L} \frac{R_{\max}}{(1 - \epsilon_2)R_{\min}} \leq \frac{dA_2}{d\theta} \leq \frac{2}{R_{\min}(1 - \epsilon_2)} \left(D - \frac{L}{D} R_{\min}(1 - \epsilon_1) \right) M_1 - L \frac{R_{\min}}{R_{\max}}$$

Tomemos

$$\begin{aligned} m_2 &= \frac{2}{R_{\max}} \left(L - \frac{D}{L} R_{\max} \right) m_1 - \frac{D}{L} \frac{R_{\max}}{R_{\min}} \\ M_2 &= \frac{2}{R_{\min}(1 - \epsilon_2)} \left(D - \frac{L}{D} R_{\min}(1 - \epsilon_1) \right) M_1 - L \frac{R_{\min}}{R_{\max}} \end{aligned}$$

A equação da terceira antípoda é dada por:

$$\frac{dA_3}{d\theta} R_2 \sin \phi_3 = \left(2L_3 - \frac{L_2 + L_3}{L_2} R_2 \sin \phi_2 \right) \frac{dA_2}{d\theta} - \frac{dA_1}{d\theta} \frac{L_2}{L_2} R_1 \sin \phi_1$$

onde $1 - \epsilon_2 < \sin \phi_2 \leq 1$. Logo,

$$\frac{2m_2}{R_{\max}} \left(L - \frac{D}{L} R_{\max} \right) - M_1 \frac{D}{L} \frac{R_{\max}}{R_{\min}} \leq \frac{dA_3}{d\theta} \leq \frac{2M_2}{R_{\min}(1 - \epsilon_3)} \left(D - \frac{L}{D} R_{\min}(1 - \epsilon_2) \right) - m_1 \frac{L}{D} \frac{R_{\min}}{R_{\max}} (1 - \epsilon_1)$$

Observemos que as constantes m_2 e M_2 dependem das constantes $m_1, M_1, \epsilon_1, \epsilon_2$. Continuando esse processo, para n -ésima antípoda obtemos as seguintes limitações:

$$\frac{2M_{n-1}}{R_{\max}} \left(L - \frac{D}{L} R_{\max} \right) - M_{n-2} \frac{D}{L} \frac{R_{\max}}{R_{\min}} \leq \frac{dA_n}{d\theta} \leq \frac{2M_{n-1}}{R_{\min}(1 - \epsilon_n)} \left(D - \frac{L}{D} R_{\min}(1 - \epsilon_{n-1}) \right) - M_{n-2} \frac{L}{D} \frac{R_{\min}}{R_{\max}} (1 - \epsilon_{n-2}) \quad (3.19)$$

Quando $t \rightarrow \infty$, $D, L \rightarrow 2$, $R_{\min}, R_{\max} \rightarrow 1$ e $\epsilon_i \rightarrow 0$ para todo i . Então $m_1, M_1 \rightarrow 1$

quando $t \rightarrow \infty$. Não é difícil de verificar que $m_2, M_2 \rightarrow 1$ quando $t \rightarrow \infty$. Suponhamos por indução que $m_i, M_i \rightarrow 1$ quando $t \rightarrow \infty$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$. Por outro lado,

$$m_{n+1} = \frac{2M_n}{R_{\max}} \left(L - \frac{D}{L} R_{\max} \right) - M_{n-1} \frac{D}{L}$$

$$M_{n+1} = \frac{2M_n}{R_{\min}(1-\epsilon_{n+1})} \left(D - \frac{L}{D} R_{\min}(1-\epsilon_n) \right) - M_{n-1} \frac{L}{D} \frac{R_{\min}}{R_{\max}} (1-\epsilon_{n-1})$$

Portanto, $m_{n+1}, M_{n+1} \rightarrow 1$ quando $t \rightarrow \infty$ pela hipótese de indução. Isto implica que $\frac{dA_n}{d\theta} \rightarrow 1$, quando $t \rightarrow \infty$, para todo n . Logo, dado n , existe t_n suficientemente grande tal que

$$\frac{dA_n}{d\theta} > 0.$$

Curvas Invariantes

A motivação do estudo de curvas invariantes vem da Mecânica Celeste, e trata-se do estudo de estabilidade do sistema solar sobre pequenas perturbações. Matemáticos como Laplace, Lagrange, Poisson, Weierstrass, Poincaré, Birkhoff, entre outros, se envolveram com esse problema, ver [18].

Definição 4.1 Dizemos que Γ é uma curva rotacional invariante por uma aplicação do tipo twist f se Γ é a imagem de uma curva parametrizada contínua, fechada e simples (sem auto-interseção), homotopicamente não trivial, tal que $f(\Gamma) = \Gamma$.

Exemplo 4.1 O cilindro está completamente folheado por curvas rotacionais invariante pela aplicação twist que no recobrimento, se escreve: $F(x, y) = (x + y, y)$ e restrita a cada uma das curvas ($y = c$) temos uma rotação.

Exemplo 4.2 O bilhar no círculo. $T : (\theta, \phi) \rightarrow (\theta + 2\phi, \phi)$. Como a segunda variável é preservada, o espaço de fase (θ, ϕ) é totalmente folheado por curvas invariantes do tipo $\phi = \phi_0$.

Exemplo 4.3 O bilhar na elipse.

Destacamos algumas propriedades conhecidas do bilhar elíptico:

- 1) Existem dois pontos de período dois, que correspondem aos eixos da elipse. Apesar de ambos serem pontos periódicos de mesmo período observa-se a grande diferença na dinâmica próxima a estes pontos.

Para o diâmetro maior o ponto periódico associado é instável (hiperbólico do tipo sela) existem condições iniciais bem próximas ao diâmetro, após um certo tempo se afastam do diâmetro. Além disso, existe uma curva de condições iniciais cujas órbitas tendem assintoticamente à órbita periódica.

Ao passo que o diâmetro menor corresponde a um ponto periódico estável, ou seja, pontos suficientemente próximos do diâmetro menor e com ângulo de saída próximo a $\pi/2$ permanecerão sempre numa vizinhança deste diâmetro.

- 2) *Raios que passam por um dos focos da elipse quando refletidos passarão pelo outro foco e com o passar do tempo as cordas correspondentes terão inclinações cada vez menores tendendo(mas nunca atingindo) o eixo maior da elipse.*

Isto segue da propriedade da elipse: os raios que partem de um dos focos refletem em raios que passam pelo outro foco.

Esta propriedade geométrica tem as seguintes implicações:

- 3) *Cordas que cruzam o eixo maior da elipse entre os focos quando refletidas, geram cordas que cruzam o eixo maior entre os focos. As cordas correspondentes envolvem hipérbolas confocais com a elipse do bilhar.*
- 4) *Cordas que cruzam o eixo maior em pontos fora do segmento entre os focos quando refletidas voltarão a cruzar o eixo maior fora dos focos. As cordas correspondentes envolvem elipses confocais com a elipse do bilhar. As órbitas correspondentes a tais cordas estão contidas em curvas homotopicamente não triviais no cilindro.*

O bilhar na elipse retém alguma semelhança com o bilhar no círculo: existe um sub-anel que está totalmente folheado por curvas invariantes restrito às quais a aplicação bilhar é uma rotação.

Teorema 4.1 (Birkhoff) *Seja $f : S^1 \times \mathbb{R} \rightarrow S^1 \times \mathbb{R}$ uma aplicação do tipo twist de classe C^1 que preserva orientação . Suponhamos que U seja um conjunto aberto relativamente compacto e homeomorfo ao cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$. Se U é invariante por f e está contido no conjunto não errante de f , então a fronteira de U é o gráfico de uma função Lipschitz $g : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$*

DEM.:Ver [1], [17]. ■

Corolário 4.1 *Se γ é uma curva invariante rotacional, isto é, não homotopicamente trivial, por uma aplicação do tipo twist que preserva área então γ é gráfico de uma função Lipschitz.*

Algumas aplicações do teorema da curva Invariante de Birkhoff.

Proposição 4.1 *Suponha que F seja uma aplicação do tipo twist e z um ponto tal que*

$$\limsup \frac{\pi(F^k(z))}{k} = b$$

$$\liminf \frac{\pi(F^k(z))}{k} = a$$

com $a < b$. Então não existe curva invariante Γ cujo número de rotação $\rho(\Gamma)$ satisfaz

$$a < \rho(\Gamma) < b.$$

DEM.: Ver [1] ■

Corolário 4.2 *Suponha que $\phi_1 < \phi_2$ sejam duas funções definidas no círculo cujos gráficos Γ_1 e Γ_2 sejam curvas invariantes rotacionais por uma aplicação do tipo twist F que preserva área.*

Se $\rho(\Gamma_1)$ e $\rho(\Gamma_2)$ denotam os respectivos números de rotação então $\rho(\Gamma) < \rho(\Gamma_2)$

DEM.: Ver [1] ■

4.1 Cáusticas

Voltemos nossa atenção agora ao exemplo 4.3. O espaço de fase é totalmente folheado por curvas invariantes, algumas rotacionais outras homotopicamente triviais. As curvas invariantes rotacionais, como foi visto, estão associadas aos raios que intersectam o eixo maior da elipse em pontos fora do segmento entre os focos.

As curvas homotopicamente triviais estão associadas aos raios que intersectam o segmento entre os focos.

O que faz a desconexão entre esses dois conjuntos são os raios que passam pelos focos, e que correspondem a duas curvas invariantes rotacionais que se intersectam na órbita periódica de período dois correspondente ao diâmetro maior.

As curvas invariantes rotacionais do bilhar definem uma família de raios que tangenciam uma elipse confocal com a elipse bordo do bilhar. Esta propriedade, é válida em geral para os bilhares convexos. Ou seja, cada curva invariante rotacional define uma família de raios que tangenciam uma curva, denominada cáustica, no interior do bilhar.

Definição 4.2 *Uma cáustica no bilhar definido por uma curva C é uma curva γ situada no interior de C tal que todo raio tangente a γ se reflete em C em um raio tangente a γ .*

O teorema seguinte nos mostra como associar uma curva invariante rotacional como uma cáustica(condição de focalização). A demonstração feita aqui é a mesma feita em [1].

Teorema 4.2 *A cada curva invariante rotacional e diferenciável, contida no anel $S^1 \times (0, \frac{\pi}{2})$, está associada um cáustica no interior do bilhar.*

DEM.: Seja Λ uma curva invariante rotacional que é o gráfico de uma função diferenciável ϕ definida no bordo do bilhar C . Se $\alpha(s)$ é a parametrização de C por comprimento de arco, então $\Lambda = (s, \phi(s))$. Suponhamos que $0 < \phi(s) < \frac{\pi}{2}$ é classe C^1 .

Seja $v_\phi(s) = \cos(\phi(s))\alpha'(s) + \sin(\phi(s))\eta(s)$, onde $\eta(s)$ é o vetor normal a C no ponto $\alpha(s)$. $v_\phi(s)$ é um campo de vetores unitário que faz um ângulo $\phi(s)$ com a tangente a C .

Considere a família de raios definida por $r(s, \lambda) = \alpha(s) + \lambda v_\phi(s)$. Queremos calcular a envoltória desta família ou seja queremos encontrar uma função $\lambda(s)$ tal que a curva $\beta(s) = \alpha(s) + \lambda(s)v_\phi(s)$ é tangente ao raio $r(s, \lambda)$ no ponto $\beta(s)$.

Utilizando as fórmulas de Frenet,

$$\begin{cases} \alpha'(s) = k(s)\eta(s) \\ \eta' = -k\alpha'(s) \end{cases}$$

temos:

$$\beta'(s) = \alpha'(s) + \lambda'(s)\eta(s) + \lambda(s)[k(s) + \phi'(s)]v_\phi^\perp(s), \quad (4.1)$$

onde $v_\phi^\perp(s) = -\sin(\phi(s))\alpha'(s) + \cos(\phi(s))\eta(s)$.

Como $\beta(s)$ é tangente ao raio $r(s, \lambda)$, temos:

$$\langle \beta'(s), v_\phi^\perp(s) \rangle = 0$$

ou seja:

$$-\sin(\phi(s)) + \lambda(s)[k(s) + \phi'(s)] = 0$$

Esta é a chamada condição de focalização de família de raios.

Se $[k(s) + \phi'(s)] \neq 0$, então obtemos uma cáustica associada à curva invariante

$$\beta(s) = \alpha(s) + \frac{\sin(\phi(s))}{k(s) + \phi'(s)}v_\phi(s).$$

Se $k(s_0) + \phi'(s_0) = 0$, então a condição de focalização implica que $\sin(\phi(s_0)) = 0$, ou seja $(s_0, \phi(s_0))$ é um ponto da fronteira do anel o que implica $\phi(s_0) = 0$ ou $\phi_0 = \pi$, o que contradiz a nossa hipótese. ■

O bilhar na elipse é integrável: o espaço de fase é totalmente folheado por curvas in-

variantes que estão associadas às cáusticas na elipse: elipses confocais e hipérboles confocais com a elipse do bilhar.

Existe uma famosa conjectura atribuída a Birkhoff a qual afirma que se uma vizinhança de uma curva suave estritamente convexa é folheada por cáusticas, então a curva é uma elipse.

Observação 4.1 *As cáusticas, em geral, não são curvas regulares. Contudo, se a curva invariante estiver suficientemente próxima do bordo do anel, podemos encontrar condições para que a cáustica seja uma curva regular.*

Note que a aplicação bilhar é invariante pela reflexão em torno da reta $\phi = \pi/2$. Isto implica que se uma curva invariante cruza esta reta então a cáustica pode não ser regular.

Voltando ao exemplo da elipse, 4.3. Seja O a órbita periódica de período dois, correspondente ao diâmetro(eixo maior). Está órbita é hiperbólica e as variedades estáveis e instáveis, $W^s(O)$ e $W^u(O)$, respectivamente, são duas curvas invariantes que contém O . A cáustica associada a essas curvas coincide com os dois focos da elipse.

O próximo resultado tem uma propriedade geométrica interessante sobre as cáusticas: se apagássemos a curva da fronteira C podemos redesenhá-la através da cáustica. Ademais, podemos desenhar a fronteira C de um bilhar a partir de uma convexa γ dada, de modo que γ seja uma cáustica. Para isso, façamos um laço, com folga, em torno de γ , estique-o com um lápis e faça-o deslizar, bem esticado, em torno da curva. A curva traçada C é o bordo do bilhar com cáustica γ .

Proposição 4.2 *(O parâmetro de Lazutkin) Seja γ uma cáustica de um bilhar convexo com fronteira C ambas orientadas positivamente(sentido antihorário).*

Dado um ponto $y \in \gamma$, considere o raio positivo r_y tangente a γ em y . Sejam $x \in r_y \cap C$ e $z \in \gamma$ o ponto da cáustica tangente ao raio refletido em x .

Se $m(y, z)$ é o comprimento de arco em γ entre y e z , $|y - x| = \text{dist}(y, x)$, $|x - z| = \text{dist}(x, z)$, então:

$$|y - x| + |x - z| - m(y, z)$$

é constante. Chama-se parâmetro de Lazutkin a constante associada à cáustica.

DEM.:Ver [1]. I

Proposição 4.3 *Seja γ a cáustica correspondente a uma curva invariante da aplicação bilhar de uma curva convexa C . Então γ está contida no interior da região limitada por C .*

DEM.: Ver [20] ■

O próximo resultado é devido a John Mather e nos dá uma caracterização de bilhares que não possuem curvas invariantes.

Teorema 4.3 *Seja C uma curva C^2 com pelo menos um ponto de curvatura zero, tal que a componente conexa limitada do seu complementar é convexa. Então o bilhar a ela associado possui a seguinte propriedade:*

Existe um ponto $(p_0, \phi_0) \in C \times (0, \pi)$ tal que se (p_n, ϕ_n) denota a órbita de (p_0, ϕ_0) , então $\phi_n \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$ e $\phi_n \rightarrow \pi$ quando $n \rightarrow -\infty$.

DEM.: Ver [1]. ■

4.2 Existência de Curvas Invariantes

O resultado a seguir assegura a existência de curvas invariantes rotacionais numa vizinhança de um ponto fixo elíptico genérico, isto é, que possui algum invariante de Birkhoff não nulo.

Teorema 4.4 *Suponha que $f : U \subset (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$, onde U é um aberto de $\mathbb{R}^2$ seja uma aplicação analítica real que preserva área com ponto fixo elíptico na origem. Se a Forma Normal de Birkhoff de f , numa vizinhança de 0, se escreve em coordenadas complexas $(z, \bar{z})$, $\Phi(z) = e^{iP(|z|^2)}z + O(|z|^q)$, onde P é um polinômio real de grau menor ou igual que $\frac{q}{2} - 1$ e não constante, então 0 é um ponto fixo estável.*

Mais precisamente, para todo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno existe uma curva analítica γ , contida num anel em torno de 0, homotopicamente não trivial e invariante por f , $f(\gamma) = \gamma$.

Para o estudo de estabilidade o mais importante é encontrar curvas invariantes separando os bordos do anel. Contudo, a existência de tais curvas só podem, por enquanto, ser estabelecidas para pequenas perturbações das então chamadas aplicações twist

$$\begin{cases} r_1 = r \\ \theta_1 = \theta + \alpha(r) \end{cases} \quad (4.2)$$

as quais evidentemente preservam área. Tais aplicações twist giram cada círculo $r = c$ por ângulo $\alpha(r)$.

Teorema 4.5 *(Teorema Twist de Moser) Seja $\alpha(r) \in C^l$ e $|\alpha'(r)| \geq \nu > 0$ em $a < r < b$, para algum l com*

$$l \geq 5 \quad (4.3)$$

ϵ é um número positivo.

Então existe um δ o qual depende de $\epsilon, l, \alpha(r)$ tal que toda aplicação $F(r, \theta) = (f(r, \theta), \theta + g(r, \theta))$ do anel $A = \{a < r < b\}$ em $\mathbb{R}^2$ que preserva área com $f, g \in C^l$ e

$$|f - r|_l + |g - \alpha(r)|_l < \nu\delta \quad (4.4)$$

possui uma curva invariante da forma

$$\begin{cases} r = c + u(\xi) \\ \theta = \xi + v(\xi) \end{cases} \quad (4.5)$$

em A onde u, v são continuamente diferenciável, de período 2π e satisfaz

$$|u|_1 + |v|_1 < \epsilon,$$

e c é uma constante em (a, b) . Além disso, a aplicação induzida dessa curva é dada por

$$\xi \rightarrow \xi + \omega$$

onde ω é incomensurável com 2π , e satisfaz a condição Diofantina: existem números, σ e τ positivos tais que para todos os inteiros não nulos, p, q temos:

$$\left| \frac{\omega}{2\pi} - \frac{p}{q} \right| \geq \sigma q^{-\tau}.$$

De fato, cada escolha de ω na imagem de $\alpha(r)$ e satisfazendo a condição Diofantina dá origem a uma tal curva invariante.

A primeira versão desse teorema foi provada com a estimativa da alta diferenciabilidade $l \geq 333$. E foi mais tarde provado por Rüssman para $l \geq 5$.

4.3 O teorema de Lazutkin

O teorema de Lazutkin diz que se a curva do bilhar for estritamente convexa (curvatura positiva) e suficientemente diferenciável, então existe uma família de cáusticas numa vizinhança do bordo do bilhar, cuja união tem área positiva.

A questão que levantamos em nosso problema de curvas geradas pelo fluxo de curvatura normalizado é que a medida que t se torna arbitrariamente grande as curvas de evolução se tornam estritamente convexas e convergem, na topologia C^∞ , ao círculo de raio igual a um.

Uma vez que bilhar do círculo é o limite assintótico das aplicações bilhares associadas às curvas evolução é de se esperar que para t suficientemente grande a vizinhança do bordo da curva de evolução onde se localizam as cáusticas do teorema de Lazutkin "aumente"?

Como a demonstração do teorema de Lazutkin é baseada na teoria KAM, podemos formular essa questão da seguinte maneira:

- O domínio das estimativas do teorema KAM aumenta com a evolução das curvas? Isto é, a limitação para os ângulos de saídas ϕ , na vizinhança do bordo para o teorema de Lazutkin aumenta com a evolução de t ?

A seguir expomos o roteiro de R. Douady para a demonstração do teorema de Lazutkin.

Seja $\mathbb{A} = S^1 \times \mathbb{R}$ o cilindro e $f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$, $(\theta, r) \mapsto (\theta', r')$ um difeomorfismo C^k , $k \geq 1$. Admitimos que numa vizinha de $\mathbb{A}_0 = S^1 \times \{0\}$, f seja dado na forma:

$$\begin{cases} \theta' = \theta + \alpha + \eta(\theta)r + \sigma(r) \\ r' = r + \sigma(r) \end{cases}$$

O próximo resultado de devido a M.R. Herman e é conhecido como teorema das curvas transladadas.

Teorema 4.6 *Seja $\alpha \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$, $k \in \mathbb{R}_+ - \mathbb{N}$, $\phi \in C^k(\mathbb{A}_\epsilon, \mathbb{R})$, onde $\mathbb{A}_\epsilon = S^1 \times (-\epsilon, \epsilon)$, e $f : \mathbb{A}_\epsilon \rightarrow \mathbb{A}$,*

$$(\theta, r) \mapsto (\theta + \alpha + r, r + \phi(\theta, r)).$$

Suponhamos que $k > 3$ e que α satisfaz a condição Diofantina: existe $0 < \gamma \leq \epsilon$ tal que para todo $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $|\alpha - \frac{p}{q}| \geq \frac{\gamma}{q^2}$. Então existe um $\delta > 0$, que somente depende de k , tal que se

$$\|\phi\|_k \leq \delta \gamma^2,$$

então existe um número real λ e aplicações $\Psi \in C^{k-1}(S^1, (-\epsilon, \epsilon))$ e $g \in \text{Diff}_0^{k-2}(S^1)$ que verificam:

$$f(g(\theta), \Psi \circ g(\theta)) = (g(\theta), \Psi \circ g(\theta + \alpha) + \lambda) \quad (4.6)$$

Além disso a tripla (λ, Ψ, g) é única se impormos a condição $g(0) = 0$ e

$$|\lambda| + \|\Psi\|_{k-1} + \|g - id\|_{k-2} \leq \frac{\|\phi\|_k}{\delta\gamma} \quad (4.7)$$

Observação 4.2 O gráfico de Ψ é uma curva de $\mathbb{A}_\epsilon$ transladada de λ verticalmente por f . Se f tem a propriedade de interseção, então $\lambda = 0$ e $f \circ F = F \circ R_\alpha$, onde $F : \theta \mapsto (g(\theta), \Psi \circ g(\theta))$.

Corolário 4.3 Seja $f \in C^k(\mathbb{A}_\epsilon, \mathbb{A})$ um difeomorfismo admitindo, em uma vizinhança de $\mathbb{A}_0$, um desenvolvimento limite na forma:

$$f(\theta, r) = (\theta + \alpha + \eta(\theta)r + \sigma(r), r + \sigma(r)) \quad (4.8)$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\eta \in C^{k-1}(S^1, \mathbb{R}_+^*)$.

Suponhamos que f tem a propriedade de interseção bem como sua iteradas e que se $\alpha \in \mathbb{Q}$, $k > 5$, e que se α é irracional diofantino, $k = \infty$. Então, para todo γ e todo $k' < k - 4$, existe um $\delta > 0$ tal que, se

$$K = \{a \in \mathbb{R} : |a - \alpha| \leq \delta \text{ e para todo } \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, \quad |a - \frac{p}{q}| \geq \frac{\gamma|a - \alpha|}{q^2}\}$$

e existe uma aplicação $F : S^1 \times K \rightarrow \mathbb{A}_\epsilon$, contínua, injetiva, e isotópica a injeção natural tal que :

$$f \circ F = F \circ R$$

onde $R : S^1 \times K \rightarrow S^1 \times K$, $(\theta, a) \mapsto (\theta + a, a)$.

As aplicações $F_a : \theta \mapsto F(\theta, a)$ são de classe $C^{k'}$ e temos

$$\lim_{a \rightarrow \alpha} \|F_a - F_\alpha\|_{C^{k'}} = 0$$

com $R_\alpha(\theta) = (\theta, 0)$.

Teorema 4.7 Se $k > 6$, existe um conjunto de Cantor K formado por irracionais de $[0, 1/2)$ e de 0 , tal que , para todo $\alpha \in K$, existe uma cáustica C_α de classe $C^{1+\epsilon}$, $\epsilon > 0$, de número de rotação α . O homeomorfismo de C associado a C_α é $C^{1+\epsilon}$ conjugado a R_α . As cáusticas C_α e as conjugações de R_α dependem continuamente de α .

DEM.: Ver [6]. ■

Observação 4.3 Esse teorema foi provado inicialmente por Lazutkin ver [21], com $k \geq 558$

O próximo teorema é o resultado principal desse capítulo. Ele diz que a vizinhança do bordo que é folheada por curvas invariantes aumenta com a evolução de t .

Teorema 4.8 (Teorema D) *Seja $X(t, \cdot)$ uma curva de evolução pelo fluxo de curvatura normalizado. Dado t e um número $\epsilon(t) > 0$ tal que $U(\epsilon(t))$ é uma vizinhança tubular do bordo de $X(t, \cdot)$. Então existe um conjunto $\Gamma_{\epsilon(t)} \subset U(\epsilon(t))$ tal que:*

- 1) $\Gamma_{\epsilon(t)} = \bigcup \{\text{cáusticas de } X(t, \cdot)\}$
- 2) $\mu(\Gamma_{\epsilon(t)}) > 0$, (tem medida de Lebesgue positiva).
- 3) o número de rotação das cáusticas em $\Gamma_{\epsilon(t)}$ satisfaz a condição Diofantina.
- 4) a função $t \mapsto \epsilon(t)$ é monótona não decrescente.

DEM.: A fim de aplicarmos o teorema de Herman temos que encontrar um sistema de coordenadas adequado.

Olhamos agora para a expansão de Taylor da curva em torno do ponto θ :

$$X(t, \theta_1) = X(t, \theta) + X'(t, \theta)(\theta_1 - \theta) + \frac{X''(t, \theta)}{2!}(\theta_1 - \theta)^2 \dots \frac{X^{(n)}(t, \theta)}{n!}(\theta_1 - \theta)^n + R_n$$

com

$$\lim_{|\theta_1 - \theta| \rightarrow 0} \frac{R_n}{|\theta_1 - \theta|^n} = 0.$$

Utilizando as fórmulas de Frenet, $X' = RT$, $T' = N$, $N' = -T$ e o fato que temos uma estimativa uniforme das derivadas da função curvatura (e portanto da função raio de curvatura), isolamos os termos que não envolvem essas derivadas:

$$\begin{aligned} X(t, \theta_1) &= X(t, \theta) + R(t, \theta) \{ \sin(\theta_1 - \theta) T(\theta) + [1 - \cos(\theta_1 - \theta)] N(\theta) \} + \\ &\quad + S(t, \theta_1, \theta) T(\theta) + S_1(t, \theta_1, \theta) N(\theta) \end{aligned} \tag{4.9}$$

Usando agora o fato que a curva converge ao círculo pelo fluxo de curvatura podemos escrever a aplicação bilhar na seguinte forma normal:

$$(\theta, \phi) \mapsto (\theta_1 = \theta + 2\phi + \sum_{i=1}^n a_i \phi^i + O(n), \phi_1 = \phi + \sum_{i=2}^n b_i \phi^i + O(n))$$

onde os coeficientes a_i e b_i são somas algébricas das derivadas da função curvatura $k(t, \theta)$. Como $\|k^{(j)}\|_\infty \leq C(j)e^{-2\alpha t}$ para todo $j \geq 1$ e $0 < \alpha < 1$ existem constantes A_i e B_i tais que

$$|a_i| < A_i e^{-2\alpha t}, \quad \text{e} \quad |b_i| < B_i e^{-2\alpha t}$$

Fazendo a mudança de coordenadas $(\theta, \phi) \mapsto (\theta, \theta_1 - \theta)$ obtemos:

$$(\hat{\theta}_1 = \hat{\theta} + \hat{\phi}, \hat{\phi}_1 = \hat{\phi} + \sum_2^m c_l \hat{\phi}^l + O(m)) \quad (4.10)$$

onde c_l também tem um decaimento exponencial. Escrevendo $\Phi(\hat{s}, \hat{\phi}) = \sum_2^m c_l \hat{\phi}^l + O(m)$ segue que para cada k existe uma constante C_k a qual depende de $\hat{\phi}$ de modo que

$$\|\Phi\|_k < e^{-2\alpha t} C_k(\|\hat{\phi}\|)$$

Embora a constante C_k dependa de ϕ , ela é limitada e portanto é superada rapidamente pelo decaimento exponencial $e^{-2\alpha t}$.

Usando uma nova mudança de coordenadas, podemos escrever a forma normal 4.10 na forma:

$$(\hat{\theta}_1 = \hat{\theta} + \omega + \hat{\phi}, \hat{\phi}_1 = \hat{\phi} + \Phi_\omega(\hat{\phi})) \quad (4.11)$$

onde ω satisfaz a condição diofantina: $|\omega - p/q| \geq \frac{\gamma}{q^\tau}$ onde $\tau > 1$ e $\gamma > 0$.

Como $\|\Phi_\omega(\hat{\phi})\|_k < e^{-2\alpha t} C(k)$ obtemos para t suficientemente grande $\|\Phi_\omega\|_k < \delta\gamma^2$. Logo aplicando o teorema de Herman provamos o teorema. ■

Observação 4.4 *Destacamos que no problema de curvas invariantes no bordo do bilhar, o qual é gerado pelo fluxo de curvatura, não há mais restrição sobre os ângulos de saída. No caso geral de um bilhar convexo, cujo bordo é uma curva de classe C^k , $k \geq 6$, conforme demonstrou Douady, a hipótese que os ângulos de saída são pequenos próximo de zero é fundamental.*

4.3.1 Questões

1. Pode para todo $t > 0$ e todo inteiro positivo n , $k^{(n)}(t, \theta_0) + k^{(n)}(t, \theta_0 + \pi) = 0$?

2. Existe um tempo T_0 para o qual o conjunto de "ilhas" elípticas na região primária desaparece totalmente?
3. o que acontece com o bilhar exterior ?

Referências Bibliográficas

- [1] Addas-Zanata S., Grotta-Ragazzo C., Dias Carneiro, M.J., Introdução à Dinâmica de Aplicações do Tipo Twist, 25º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, 2005.
- [2] Birkhoff G.(1920): Surface transformations and their dynamical applications. Acta Math. 43.1-119.
- [3] Birkhoff G. : American Mathematical Society, Colloquium Publications, vol. 9.
- [4] Chou, Kai-Seng; Zhu, Xi-Ping The curve shortening problem. Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2001.
- [5] Dias Carneiro M.J., Oliffson Kampffhorst S. e Pinto de Carvalho, S. (2003): Elliptical Islands in strictly convex billiards, Ergodic Theory and Dynamical Systems, Inglaterra, v. 23, n. 3, p. 799-812, 2003.
- [6] Douady, R.(1982) Applications du Théorème des tores invariants. Thèse 3ème cycle- Université Paris VII
- [7] Gage M., An isoperimetric inequality with applications to curve shortening, Duke Math. Journal, 50, 1225-1229(1983).
- [8] Gage M., Evolving plane curves by curvature in relative geometries, Duke Math. Journal, 50, 441-466(1993).
- [9] Gage, Michael E. Evolving plane curves by curvature in relative geometries II. Duke Math. J. 72 (1993), no. 2, 441–466.
- [10] Gage M. and Hamilton R. S., The Heat equation shrinking convex plane curves, J. Differential Geometry, 23, 69-96(1986).
- [11] Gole, Christophe. Symplectic twist maps : global variational techniques. Singapore ; River Edge, NJ : World Scientific, 2001.

- [12] Grayson, M., The heat equation shrinks embedded plane curves to round points, J. Differential Geometry, 26, 285-314(1987).
- [13] Grayson, M., Shortenning embedded curves, Ann. of Math., 129, 71-121(1989)
- [14] Hamilton, R. S. The inverse function theorem of Nash and Moser, BULLETIN (New Series) OF THE AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY Volume 7, Number 1, July 1982
- [15] Herman, M.R. Sur les courbes invariantes par difféomorphismes de l'anneau, Astérisque 103-104, Soc. Math. France, 1983.
- [16] Hirsch, Morris W. Differential topology. Graduate Texts in Mathematics, No. 33. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1976. x+221 pp.
- [17] Katok, Anatole; Hasselblatt, Boris Introduction to the modern theory of dynamical systems. With a supplementary chapter by Katok and Leonardo Mendoza. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 54. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [18] Moser, Jürgen Stable and random motions in dynamical systems. With special emphasis on celestial mechanics. Reprint of the 1973 original. With a foreword by Philip J. Holmes. Princeton Landmarks in Mathematics. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001.
- [19] R. Osserman, Bonnesen-style isoperimetric inequalities, Amer. Math. Monthly 86 (1979).
- [20] Tabachnikov S.(1995): Billiards. Panoramas et Synthèses, Soc. Math. France.
- [21] V.F. Lazutkin. The existence of Caustics for a Billiard Problem in a Convex Domain, Math. USSR Izvestija, t. 7, 1973, p. 185-214.
- [22] V.V. Kozlov. Two-link billiard trajectories: extremal properties and stability. J. Appl. Maths Mechs. 64/6(2000), 903-907.