UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Dissertação de Mestrado

Formas Normais de Sistemas Dinâmicos Reversíveis

Autor: **Gilmar Fernandes da Silva**

Orientador: **Prof. Dr. Marco Antonio Teixeira**

21 de Fevereiro de 2002

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

Formas Normais de Sistemas Dinâmicos Reversíveis

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e definida por Gilmar Fernandes da Silva e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 21 de fevereiro de 2002

Prof. Dr. Marco Antônio Teixeira
Orientador

1. Prof. Dr. Marco Antonio Teixeira
2. Profa. Dra. Míriam Garcia Manoel
3. Profa. Dra. Ketty Abaroa de Rezende

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

Dissertação de Mestrado defendida em 21 de fevereiro de 2002 e aprovada pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof (a). Dr (a). MARCO ANTONIO TEIXEIRA

Ketty A. de Rezende

Prof (a). Dr (a). KETTY ABAROA DE REZENDE

Prof (a). Dr (a). MÍRIAM GARCIA MANOEL

Aos meus pais, Valdomiro e Dalva, que muito me ensinaram.

Ao meu irmão, José Santana, e sua esposa, Neiliane, que sempre me apoiaram.

Às minhas sobrinhas, Nathália e Jeovana, que adoro muito.

Agradecimentos

No meu modo de ver, nunca realizamos um trabalho solitário pois sempre somos auxiliados, seja com idéias, com compreensão, com conselhos sinceros ou com o silêncio caridoso. Na realização desse trabalho tive muitos colaboradores e recebi apoios diversos, e é com alegria que agradeço:

À Deus por estar sempre presente em minha vida e por ter me proporcionado a oportunidade de completar mais uma fase da vida.

Ao Prof. Marco Antonio Teixeira pelo competente trabalho de orientação.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

À Núbia, em especial, pelo carinho e paciência.

Aos amigos de república Andrés, Silvia, Cleusiane, Miguel, Fabíola, Rosemberg, Élcio, Nilda, Ivanilde, Lidermir, Fernando, Carla e Rogério, que fizeram deste tempo longe de casa uma acolhedora e divertida convivência.

Ao Fernando Santos e Emerson pelas proveitosas discussões sobre o Látex.

Aos colegas do predinho pelo companheirismo.

Ao pessoal do "escritório" e do futebol pelos inúmeros momentos de descontração.

À Cidinha, Tânia e Ednaldo por me ajudarem a resolver os problemas burocráticos.

Ao IMECC por ter me concedido a oportunidade de fazer o mestrado.

Conteúdo

Resumo 1

Abstract 2

Introdução 3

1 Álgebras de Lie 5

2 Formas Normais 9

3 Simetrias 18

3.1 Caso Semi-simples 19

3.2 Caso Não Semi-simples 33

3.3 Simetrias Reversas 36

3.4 Sistemas Dinâmicos Reversíveis 38

4 Formas Normais de Sistemas Dinâmicos Reversíveis 42

4.1 Introdução e Exposição do Problema 42

4.2 Alguns Fatos Algébricos 44

4.3 Resultado Principal 46

A Convergência das P-transformações 52

A.1 Convergência da Transformação Normalizante 52

A.2 Transformações Normalizantes na Presença de Simetrias infinitesimais . . . 55

Bibliografia 57

Índice Alfabético 59

Resumo

Neste trabalho estudamos a teoria clássica de formas normais como também as propriedades simétricas de um campo de vetores. Almejamos a classificação de campos de vetores reversíveis. A seguinte questão é explorada:

Seja f um campo de vetores S-reversível definido sobre uma vizinhança de um dos seus pontos críticos simétricos. Sob quais condições podemos afirmar que a forma normal de Poincaré-Dulac de f também é S-reversível?

Abstract

In this work the classical theory of normal forms of vector field and their symmetric properties are studied. The main aim is to apply such study to the classification of reversible systems. The following question is explored:

Let f be an S-reversible vector field on a small neighborhood of a symmetric critical point. Under which conditions the Poincaré-Dulac normal form of f is also S-reversible?

Introdução

O objetivo deste trabalho é abordar, sob um ponto de vista algébrico, a teoria clássica de formas normais e as propriedades simétricas de uma classe de sistemas dinâmicos contínuos, ou seja, queremos estabelecer condições que possibilitem o estudo de certos sistemas (com ênfase aos sistemas reversíveis) em torno de seus pontos críticos.

Em geral, a teoria de formas normais nos oferece uma boa "simplificação" desse estudo. Através desta técnica podemos eliminar, por meio de mudanças de coordenadas formais, tangentes à identidade, os termos não lineares irrelevantes para este estudo. Estes termos são chamados de monômios ressonantes. A forma normal de Poincaré-Dulac é caracterizada por conter somente monômios ressonantes.

Por outro lado, as simetrias sustentam certas propriedades fundamentais de sistemas físicos, ajudando na formulação matemática e na interpretação de fenômenos naturais. O estudo das propriedades simétricas nos fornece algumas informações essenciais sobre os sistemas dinâmicos, como por exemplo, quando ele pode ser reduzido à sua parte linear. Iremos focalizar um tipo particular de simetria que é a simetria reversa.

O objetivo principal do trabalho é unir as teorias de formas normais e de simetrias reversas, obtendo com isto um resultado bastante significativo. Mais precisamente, se um sistema dinâmico $\dot{x} = f(x)$ é S-reversível, então queremos exibir condições sob as quais a sua forma normal canônica também é S-reversível. Este resultado representa uma "simplificação", em relação ao sistema inicial, muito maior do que a dada somente pela teoria de formas normais. As referências guias para confecção deste trabalho são [6, 9].

O trabalho está organizado da seguinte maneira:

No capítulo 1, fazemos uma breve introdução de alguns conceitos básicos da teoria das Álgebras de Lie. Estes conceitos estão seguidos de alguns exemplos.

No capítulo 2, apresentamos a teoria tradicional de formas normais. Nesta apresen-

tação estão as definições de matriz ressonante, monômios e vetores ressonantes, operador homológico, forma normal de Poincaré-Dulac e forma normal canônica. Apresentamos também os teoremas de Poincaré, de Dulac e de Poincaré-Dulac. Para melhor entendimento dos conceitos, em sua maioria eles estão acompanhados de exemplos.

No capítulo 3, apresentamos as propriedades simétricas de um sistema dinâmico. Elas são apresentadas em quatro seções, que são:

- Na seção 3.1, tratamos do caso em que a matriz da parte linear do sistema dinâmico é semi-simples. Nesta se encontra a demonstração do teorema da forma normal simultânea, o qual será de grande importância no problema de linearização de sistemas.

- Na seção 3.2, tratamos do caso em que a matriz da parte linear do sistema dinâmico é não semi-simples. Esta seção, apresenta resultados semelhantes aos da seção 3.1.

- Na seção 3.3, apresentamos a definição de simetrias reversas, seguida de alguns exemplos.

- Na seção 3.4, apresentamos a definição de sistemas dinâmicos reversíveis, seguida de alguns exemplos.

No capítulo 4, apresentamos o resultado principal deste trabalho. Este capítulo é dividido em três seções que são:

- Na seção 4.1, apresentamos uma introdução e exposição dos nossos objetivos neste capítulo. Também introduzimos a terminologia a ser usada ao longo deste capítulo.

- Na seção 4.2, apresentamos dois lemas que serão de grande importância na demonstração do resultado principal.

- Na seção 4.3, apresentamos o teorema principal e a sua demonstração, seguida de exemplos.

O final do texto contém um apêndice (sem demonstrações) apresentando uma breve discussão sobre a convergência de transformações normalizantes.

Capítulo 1

Álgebras de Lie

Neste capítulo introduziremos alguns conceitos básicos da teoria de Álgebras de Lie (para maiores detalhes, ver [14]). Estes conceitos serão de grande utilidade nos capítulos seguintes. Iniciaremos esta pequena introdução, com a definição do que vem a ser uma álgebra de Lie. Por isso,

Definição 1.1 *Uma Álgebra de Lie consiste de um espaço vetorial* $\mathbf{g}$ *munido de um produto (colchete ou comutador)*

$$[.,.] : \mathbf{g} \times \mathbf{g} \to \mathbf{g}$$

com as seguintes propriedades:

1. *é bilinear*

2. *anti-simétrico, isto é,* $[X, X] = 0$ *para todo* $X \in \mathbf{g}$ *(o que implica* $[X, Y] = -[Y, X]$ *para todo* $X, Y \in \mathbf{g}$ *e é equivalente se o corpo de escalares não é de característica dois)*

3. *satisfaz a identidade de Jacobi , isto é, para todo* $X, Y, Z \in \mathbf{g}$,

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

Neste trabalho, utilizaremos somente corpos de escalares com característica diferente de dois.

Exemplo 1.2 $\mathbf{gl}(n,\mathbb{K})$*: o espaço de todas as transformações lineares de um espaço vetorial de dimensão* n *sobre o corpo* $\mathbb{K}$ *o qual é isomorfo ao espaço das matrizes* $n \times n$ *com coeficientes em* $\mathbb{K}$*. O colchete é dado por*

$$[X, Y] = XY - YX$$

com X, Y *matrizes.*

Exemplo 1.3 *Álgebras abelianas :* $[X, Y] = 0$ *para quaisquer* $X, Y \in \mathbf{g}$.

Definição 1.4 *Seja* $\mathbf{g}$ *uma álgebra de Lie. Uma subálgebra de* $\mathbf{g}$ *é um subespaço vetorial* $\mathbf{h}$ *de* $\mathbf{g}$ *que é fechado pelo colchete, isto é,* $[X, Y] \in \mathbf{h}$ *se* $X, Y \in \mathbf{h}$.

Evidentemente, uma subálgebra de Lie é uma álgebra de Lie com a estrutura herdada pela estrutura de $\mathbf{g}$.

Definição 1.5 *Um ideal de uma álgebra de Lie* $\mathbf{g}$ *é um subespaço* $\mathbf{h} \subset \mathbf{g}$ *tal que* $[X, Y] \in \mathbf{h}$ *para todo* $X \in \mathbf{g}$ *e* $Y \in \mathbf{h}$.

O centro de uma álgebra de Lie $\mathbf{g}$ será denotado por $\mathbf{z}(\mathbf{g})$:

$$\mathbf{z}(\mathbf{g}) = \{X \in \mathbf{g};\ [X, Y] = 0,\ \textit{para todo } Y \in \mathbf{g}\},$$

ou seja, o centro de uma álgebra de Lie é o conjunto de seus elementos que comutam com todos os seus elementos. Evidentemente, $\mathbf{z}(\mathbf{g})$ é um ideal de $\mathbf{g}$.

Definição 1.6 *A série central descendente da álgebra de Lie* $\mathbf{g}$ *é definida, por indução, como*

$$\mathbf{g}^1 = \mathbf{g},\ \mathbf{g}^2 = [\mathbf{g}, \mathbf{g}],\ \mathbf{g}^3 = \left[\mathbf{g}, \mathbf{g}^2\right], \ldots,\ \mathbf{g}^k = \left[\mathbf{g}, \mathbf{g}^{k-1}\right].$$

Proposição 1.7 $[\mathbf{g}^i, \mathbf{g}^j] \subset \mathbf{g}^{i+j}$.

Demonstração: Por indução sobre j. Para $j = 1$ a inclusão é a definição de $\mathbf{g}^{i+1}$. Assumindo o resultado para j,

$$\begin{aligned}\left[\mathbf{g}^i, \mathbf{g}^{j+1}\right] = \left[\mathbf{g}^i, \left[\mathbf{g}^j, \mathbf{g}\right]\right] &\subset \left[\left[\mathbf{g}^i, \mathbf{g}^j\right], \mathbf{g}\right] + \left[\mathbf{g}^j, \left[\mathbf{g}^i, \mathbf{g}\right]\right];\ \text{(por 3 da definição 1.1)} \\ &\subset \left[\mathbf{g}^{i+j}, \mathbf{g}\right] + \left[\mathbf{g}^j, \mathbf{g}^{i+1}\right];\ \text{(pela hipótese de indução)} \\ &\subset \mathbf{g}^{i+j+1}.\end{aligned}$$

Portanto $[\mathbf{g}^i, \mathbf{g}^j] \subset \mathbf{g}^{i+j}$. □

Proposição 1.8 $\mathbf{g}^k$ *é o subespaço gerado por todos os possíveis produtos (colchetes) envolvendo* k *elementos de* $\mathbf{g}$: $[X_1, \ldots, [X_{k-1}, X_k] \ldots]$.

Demonstração: Para $k = 1$ ou 2, é imediato a partir da definição. Para $k \geq 2$, usa-se indução sobre k. Assuma o resultado para $k-1$. Os elementos de $\mathbf{g}^{k-1}$ são então da forma $\sum_i Z_i$ com Z_i produto de $k-1$ elementos de $\mathbf{g}$. Daí que $\mathbf{g}^k$ é gerado por elementos da forma

$$\sum_i [X_i, Z_i],$$

isto é, por produtos de k elementos. Vice-versa, todo elemento de $\mathbf{g}$ que pode ser escrito como produto de k elementos está em $\mathbf{g}^k$ como segue da proposição 1.7. □

Os seguintes fatos decorrem da caracterização de $\mathbf{g}^k$ dada nas proposições 1.7 e 1.8:

1. $\mathbf{g}^{k+1} \subset \mathbf{g}^k$, pois um produto de $k+1$ elementos também é um produto de k elementos. E daí que
2. $\mathbf{g}^k$ é um ideal para todo $k \geq 1$, pois $[\mathbf{g}, \mathbf{g}^k] = \mathbf{g}^{k+1} \subset \mathbf{g}^k$. De onde se conclui que a série central descendente é, de fato, descendente:

$$\mathbf{g}^1 = \mathbf{g} \supset \mathbf{g}^2 \supset \ldots \supset \mathbf{g}^k \supset \ldots$$

Exemplo 1.9 $\mathbf{g} = \mathbf{g}^1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$; $\mathbf{g}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$; $\mathbf{g}^3 = 0$, *assim* $\mathbf{g}^k = 0$ *para todo* $k \geq 3$.

Exemplo 1.10 $\mathbf{g} = \mathbf{g}^1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & * & * \\ 0 & a & * \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \right\}$; $\mathbf{g}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$;

$\mathbf{g}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$, *assim* $\mathbf{g}^k = 0$ *para todo* $k \geq 4$.

Definição 1.11 *Uma álgebra de Lie é nilpotente se sua série central descendente se anula em algum momento, isto é,*

$$\mathbf{g}^{k_0} = \{0\}$$

para algum $k_0 \geq 1$ *e (e, portanto,* $\mathbf{g}^k = 0$ *para todo* $k \geq k_0$*).*

Exemplo 1.12 *As álgebras abelianas são nilpotentes, pois* $[\mathbf{g}, \mathbf{g}] = 0$.

Exemplo 1.13 *Os exemplos 1.9 e 1.10 também são álgebras nilpotentes.*

Capítulo 2

Formas Normais

Neste capítulo, primeiramente apresentaremos alguns conceitos básicos com o objetivo de obtermos os resultados clássicos da teoria de Formas Normais. O texto básico utilizado, neste capítulo, foi [6].

A teoria de Formas Normais foi introduzida por Poincaré em sua tese como uma ferramenta para integrar sistemas não lineares. Embora soubesse que a integração desses sistemas em geral é impossível, a teoria de Formas Normais tem demonstrado ser uma ferramenta útil na análise local qualitativa e quantitativa de sistemas dinâmicos.

Considere a seguinte relação de equivalência: f_1 f_2 se, e somente se, existe uma vizinhança V de $0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $f_1|_V = f_2|_V$. Chamaremos a classe de equivalência de uma função f_1 por germe da função f_1, e, abusando da notação, usaremos o mesmo f_1 para denotar o germe $f_1 : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$

Seja $\mathcal{X}^n$ o espaço de germes das funções analíticas em $\mathbb{R}^n$ com $f(0) = 0$, isto é,

$$\mathcal{X}^n = \{f : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0) \text{ analíticas}; f(0) = 0\}.$$

Admitiremos que $\mathcal{X}^n$ está munido com a topologia C^∞. Por simplicidade, não faremos qualquer distinção entre um germe f e qualquer um de seus representantes (para maiores detalhes, ver [7]). Como a origem é um ponto crítico de f, vamos considerar a expansão de Taylor de um sistema dinâmico ao redor de um de seus pontos críticos. Seja então tal sistema dinâmico expressado por:

$$\dot{x} = f(x) = Ax + F(x) = Ax + \sum_{k \geq 2} F_k(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n \tag{2.1}$$

onde $A=(Df)(0)$ e cada F_k é uma n-upla de polinômios homogêneos de grau k. Claramente a cada função analítica f está associado um campo de vetores $X_f \in V$, onde V é o espaço real analítico $\mathbb{R}^n$ de campo de vetores,

$$X_f \equiv \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i} \equiv (f.\nabla)$$

Para facilitar a linguagem, daqui em diante, mencionaremos "o campo de vetores $f \in V$" para dizer "o campo de vetores $X_f \in V$".

A matriz A de (2.1) desempenha, neste contexto, um papel especial. Assumiremos, a menos em menção contrária, que a classe de campos de vetores satisfaz:

Propriedade P. A matriz $A=(Df)(0)$ é semi-simples, ou seja, diagonalizável.

Podemos então, devido a propriedade P, fixar coordenadas tais que A é diagonal.

Definição 2.1 *Sejam $\Lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ os autovalores da matriz A. Então A é ressonante se existem inteiros não negativos $\{q_1, \ldots, q_n\}$ e $r \in \{1, \ldots, n\}$ tais que*

$$(Q.\Lambda) \equiv \sum_{i=1}^{n} q_i\lambda_i = \lambda_r \quad e \quad |Q| \equiv \sum_{i=1}^{n} q_i \geq 2. \tag{2.2}$$

Neste caso, a ressonância é dita ser de ordem $|Q|$.

Exemplo 2.2 *Considere a matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

O polinômio característico de A é $p(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$. Logo os autovalores de A são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 2$. Obtemos de (2.2) que $q_1 + 2q_2 = \lambda_i$ com $i = 1, 2$. Se tomarmos $q_1 = 2$, $q_2 = 0$ e $i = 2$, então teremos uma ressonância de ordem 2.

Definição 2.3 *Uma mudança de coordenadas, tangente à identidade, da forma*

$$x \to \tilde{x} = x + h_k(x),$$

onde h_k é uma função polinomial homogênea de grau k, com $k \geq 2$, será chamada de P-transformação.

Teorema 2.4 (Poincaré) *Se a matriz A é não ressonante, então o sistema dinâmico (2.1) pode ser reduzido, por meio de P-transformações (formais), à sua parte linear.*

Observação 2.5 *Enfatizamos que estas séries (P-transformações), em geral, serão somente formais, ou seja, não podemos garantir em princípio a convergência destas séries produzidas em qualquer vizinhança da origem.*

Definição 2.6 $x^Q e_j \equiv (x_1^{q_1} \dots x_n^{q_n}) e_j$ *é um monômio ressonante de (2.1) se*

$$(Q.\Lambda) \equiv \sum_{i=1}^{n} q_i \lambda_i = \lambda_j, \text{ com } |Q| \equiv \sum_{i=1}^{n} q_i \geq 2.$$

Exemplo 2.7 *Considere o sistema dinâmico*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dot{x} = x + xy + x^3 y \\ \dot{y} = -2y + y^2 - 3x^2 y^2 \end{cases} \tag{2.3}$$

Observe que

$$A = (Df)(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Se e_1 e e_2 é a base canônica do $\mathbb{R}^2$, segue-se que $(x^3y)\,e_1$ e $(x^2y^2)\,e_2$ são monômios ressonantes de ordem 4, pois, chamando $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -2$ temos que

$$q_1\lambda_1 + q_2\lambda_2 = 3.1 + 1.(-2) = 1 = \lambda_1$$

$$m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 = 2.1 + 2.(-2) = -2 = \lambda_2.$$

Definição 2.8 *Definimos vetores ressonantes como aqueles que são combinações lineares de monômios ressonantes.*

Exemplo 2.9 *Considere o sistema (2.3). Já verificamos que $(x^3y)e_1$ e $(x^2y^2)e_2$ são monômios ressonantes com relação à A. Portanto, obtemos que $F = (x^3y, -3x^2y^2)$ é um vetor ressonante.*

Teorema 2.10 (Dulac) *Se a matriz A é ressonante, então o sistema dinâmico (2.1) pode ser reduzido, por meio de uma sequência de P-transformações (formais), à sua forma ressonante, ou seja, à forma $\dot{x} = Ax + \sum_{k\geq 2} \hat{F}_k(x)$ onde cada $\hat{F}_k$ é um vetor ressonante.*

Definição 2.11 *O sistema dinâmico (2.1), com A semi-simples, é dito estar na forma normal de Poincaré-Dulac se todos os termos não lineares F_{k_s} são ressonantes em relação à A.*

Exemplo 2.12 *Considere os sistemas*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dot{x} = x + x^3 y \\ \dot{y} = -2y - 3x^2y^2 \end{cases} \qquad g(x,y) = \begin{cases} \dot{x} = 2x + y + x^2 \\ \dot{y} = y \end{cases}$$

Estes sistemas estão na forma normal de Poincaré-Dulac, pois, pelos exemplos 2.2 e 2.7, temos que $F_4(x,y) = (x^3y, -3x^2y^2)$ é um vetor ressonante de ordem 4 em relação a matriz

$$(Df)(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

e $G_2(x,y) = (x^2, 0)$ é um vetor ressonante de ordem 2 em relação a matriz

$$(Dg)(0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Teorema 2.13 (Poincaré-Dulac) *O sistema dinâmico (2.1) pode ser reduzido, através de P-transformações (formais), à forma normal de Poincaré-Dulac.*

Em nosso trabalho, não faremos uma demonstração detalhada do Teorema de Poincaré-Dulac (para maiores detalhes, ver [1]). Enfatizamos que uma demonstração deste teorema pode ser feita utilizando os Lemas 2.17, 2.20 e 2.22.

Para qualquer série $f(x)$ temos um campo de vetores X_f sobre $\mathbb{R}^n, 0$ correspondente a esta série. Os campos de vetores correspondentes às séries (formais) formam uma álgebra de Lie com colchete de Lie usual $[.,.]$, isto é,

$$[X_f, X_g] = X_f X_g - X_g X_f.$$

Introduziremos o colchete de Lie-Poisson $\{.,.\}$ no espaço das funções vetoriais:

$$\{f,g\} = (Dg)f - (Df)g$$

o qual satisfaz em particular

$$[X_f, X_g] = X_f X_g - X_g X_f = X_{\{f,g\}} = (\{f,g\}.\nabla).$$

Definição 2.14 *O operador homológico $\mathcal{A}$ (também, às vezes, denotado por L_A) associado a matriz A é um operador linear definido como*

$$\mathcal{A}(g(x)) = \{Ax, g(x)\} = (Dg)(x)Ax - Ag(x).$$

Exemplo 2.15 *Considere*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dot{x} = 2x + x^2 \\ \dot{y} = y \end{cases}$$

Seja

$$g(x,y) = \begin{cases} \dot{x} = 2xy \\ \dot{y} = y^3 \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(g(x,y)) &= (Dg)(x,y)A(x,y) - Ag(x,y) \\ &= \begin{pmatrix} 2y & 2x \\ 0 & 3y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2xy \\ y^3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4xy + 2xy \\ 3y^3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4xy \\ y^3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2xy \\ 2y^3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Note que se A, B são duas matrizes $n \times n$ e $C = [A, B] = AB - BA$ o seu comutador, então temos que

$$\{Ax, Bx\} = (DBx)Ax - (DAx)Bx = (BA - AB)x = -Cx.$$

Como aplicação da identidade de Jacobi e do resultado anterior, obtemos o seguinte resultado:

Proposição 2.16 *Se $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são respectivamente os operadores homológicos associados às matrizes A, B e $C = [A, B]$, então $[\mathcal{A}, \mathcal{B}] = -\mathcal{C}$.*

Demonstração: Seja $g(x)$ uma função vetorial. Então,

$$\begin{aligned}
[\mathcal{A},\mathcal{B}](g(x)) &= \mathcal{A}\mathcal{B}(g(x)) - \mathcal{B}\mathcal{A}(g(x)) \\
&= \mathcal{A}(\{Bx, g(x)\}) - \mathcal{B}(\{Ax, g(x)\}) \\
&= \{Ax, \{Bx, g(x)\}\} - \{Bx, \{Ax, g(x)\}\} \\
&= \{\{Ax, Bx\}, g(x)\};\ \text{(por 2 e 3 da definição 1.1)} \\
&= \{-Cx, g(x)\} \\
&= -\mathcal{C}(g(x)).
\end{aligned}$$

Portanto $[\mathcal{A},\mathcal{B}] = -\mathcal{C}$. □

Lema 2.17 *Se aplicarmos P-transformações, do tipo $x \to \tilde{x} = x + h_m(x)$, no sistema dinâmico (2.1), então cada termo F_k com $k < m$ permanece inalterado e F_m é alterado para $\tilde{F}_m = F_m - \mathcal{A}(h_m)$.*

Demonstração: Sabemos que $\tilde{x} = x + h_m(x)$. Assim, $\dot{\tilde{x}} = [I + (Dh_m)(x)]\dot{x}$. Logo o sistema dinâmico (2.1) é transformado em

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= [I + (Dh_m)(x)]^{-1}\dot{\tilde{x}} \\
&= [I + (Dh_m)(x)]^{-1} f(\tilde{x}) \\
&= [I + (Dh_m)(x)]^{-1} f(x + h_m(x)) \\
&= [I - (Dh_m)(x) + O(|x|^m)] \left[A(x + h_m(x)) + \sum_{k\geq 2} F_k(x + h_m(x)) \right] \\
&= [I - (Dh_m)(x) + O(|x|^m)] \left[A(x + h_m(x)) + \left(\sum_{k\geq 2} F_k(x) + O\left(|x|^{k+1}\right) \right) \right] \\
&= Ax + \sum_{k=2}^{m-1} F_k(x) + [F_m(x) + Ah_m(x) - (Dh_m)(x)Ax] + O\left(|x|^{m+1}\right) \\
&= Ax + \sum_{k=2}^{m-1} F_k(x) + [F_m(x) - \mathcal{A}(h_m(x))] + O\left(|x|^{m+1}\right),
\end{aligned}$$

onde $O(|x|^{m+1})$ representa os termos homogêneos de ordem $m+1$ e ordens maiores. □

Observação 2.18 *Note que as P-transformações determinadas por h_k e $h'_k = h_k + \delta h_k$, com $\delta h_k \in Ker(\mathcal{A})$, conduzem à mesma $\tilde{F}_k$.*

Observação 2.19 *Se a propriedade P não for sustentada, ou seja, A é não semi-simples, então o Lema 2.17 (bem como outros resultados deste capítulo, e a definição de ressonância) continua válido sob certas condições. Neste caso, o operador a ser usado é o adjunto do operador homológico, $\mathcal{A}^+$. Considerando os subespaços vetoriais $V_{(J)}$ dos polinômios homogêneos com componentes $x^J = x_1^{j_1} x_2^{j_2} \dots x_n^{j_n}$ de grau $|J| = j_1 + \dots + j_n$, temos que $\mathcal{A} : V_j \to V_j$ e um produto escalar pode ser introduzido em cada V_j (ver definição explícita em [8]). Com a escolha conveniente do produto escalar (o produto escalar de Bargman em [8]) em V_j, obtemos simplesmente $\mathcal{A}^+ = \{A^+ x, .\}$.*

Lema 2.20 *Qualquer termo F_k, com $k \geq 2$, contido na $Im(\mathcal{A})$ pode ser eliminado, com h_k escolhido de maneira conveniente, através de uma P-transformação.*

Demonstração: Este resultado é um corolário do Lema 2.17, pois basta tomar um h_k conveniente tal que $\mathcal{A}(h_k) = F_k$. □

Definição 2.21 *A equação $\mathcal{A}(h_k) = F_k$ será chamada de equação homológica associada à matriz A. Para maior simplicidade a trataremos como equação homológica.*

Lema 2.22 *Se $F_k \in Ker(\mathcal{A})$ com $k \geq 2$, então este termo é ressonante em relação à A.*

Demonstração: Sabemos que F_k é uma combinação linear de monômios, de grau k, em uma base na qual A é diagonal. Seja $x = (x_1, \dots, x_n)$ as coordenadas com respeito a esta base. Assim, sem perda de generalidade, podemos supor $F_k \equiv x^k e_i \equiv (x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}) e_i$ e $|k| \geq 2$. Logo

$$\begin{aligned} 0 = \mathcal{A}(x^k e_i) &= (Dx^k e_i)(x)(Ax) - A(x^k e_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{x_i} x^k e_i \lambda_i x_i - \lambda_i x^k e_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} k_i \lambda_i x^k e_i - \lambda_i x^k e_i \\ &= [(k.\lambda) - \lambda_i] x^k e_i. \end{aligned}$$

onde $k = (k_1, \dots, k_n)$ e $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Como $x^k e_i \neq 0, (k.\lambda) - \lambda_i = 0$. Portanto F_k é ressonante em relação a matriz A. □

Os seguintes fatos são consequências do Lema 2.22:

1. Se A é diagonal, então $\mathcal{A}$ também é diagonal no espaço dos polinômios homogêneos.

2. Para cada $i = 1, \ldots, n$, o monômio $x^k e_i = (x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}) e_i$ é um autovetor de $\mathcal{A}$ com autovalor $(k.\lambda) - \lambda_i$.

3. Se todos os autovalores de $\mathcal{A}$ são diferentes de zero, então ele é invertível.

4. Se A não satisfaz a Propriedade P (ou seja, A tem blocos nilpotentes), então $\mathcal{A}$ também tem blocos nilpotentes. Apesar disso, mesmo que os autovalores de A tenham multiplicidades, os autovalores de $\mathcal{A}$ são dados pela mesma fórmula apresentada no item 2.

Observação 2.23 *Nos Lemas 2.17, 2.20 e 2.22 usamos a propriedade P para garantir que $Im(\mathcal{A})$ é um subespaço complementar do $Ker(\mathcal{A})$, isto é, $V = Ker(\mathcal{A}) \oplus Im(\mathcal{A})$. Se em particular a matriz A é normal, isto é, $[A, A^+] = 0$ onde A^+ é a matriz adjunta de A (note, entretanto, que qualquer matriz semi-simples A sempre pode ser transformada em uma matriz normal por meio de uma transformação linear, e qualquer matriz A normal é semi-simples), então $Ker(\mathcal{A})$ é precisamente o complementar ortogonal de $Im(\mathcal{A})$.*

Corolário 2.24 *Se A é não ressonante, então a equação homológica, $\mathcal{A}(h_k) = F_k$ com $k \geq 2$, é solúvel para todo k.*

Demonstração: Como $(k.\lambda) - \lambda_i \neq 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$, pela observação 2.23, $F_k \in Im(\mathcal{A})$. Logo, pelo Lema 2.20, podemos encontrar h_k tal que $\mathcal{A}(h_k) = F_k$ para todo $k \geq 2$. □

Veremos agora uma definição equivalente à definição 2.11, ou seja,

Definição 2.25 *O sistema dinâmico (2.1) está na forma normal de Poincaré-Dulac se $f \in Ker(\mathcal{A})$, ou equivalentemente, se $\{Ax, f\} \equiv \mathcal{A}(f) = 0$.*

Observação 2.26 *Em consequência das observações 2.18 e 2.23, obtemos que se a equação homológica, $\mathcal{A}(h_k) = F_k$ com $k \geq 2$, for solúvel, então podemos escolher de maneira única $h_k \in Im(\mathcal{A})$.*

Aproveitamos a oportunidade para definirmos a forma normal canônica de um sistema dinâmico, a qual será de grande utilidade no capítulo 4.

Definição 2.27 *Diremos que o sistema (2.1) está na forma normal canônica se no processo de reduzir f, por meio de P-transformações (formais), à forma normal de Poincaré-Dulac escolhermos somente $h_k \in Im(\mathcal{A})$, ou seja, se as P-transformações são determinadas por $h_k \in Im(\mathcal{A})$.*

Exemplo 2.28 *Consideraremos neste exemplo, $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$. Seja*

$$f(x) = \begin{cases} \dot{x}_1 = 3x_1 - x_2^2 + 5x_2^3 \\ \dot{x}_2 = x_2 \end{cases}$$

Note que $F_2(x) = (-x_2^2, 0) \in Im(\mathcal{A})$ e $F_3(x) = (5x_2^3, 0) \in Ker(\mathcal{A})$. Isto implica, pelo Lema 2.20, que F_2 pode ser eliminado. Queremos encontrar $h_2(y) \in Im(\mathcal{A})$ tal que a mudança de coordenada $x = y + h_2(y)$ elimine este termo. Seja $h_2(y) = (y_2^2, 0)$ (observe que $\mathcal{A}(F_2) = (x_2^2, 0) \in Im(\mathcal{A})$). Como $x = y + h_2(y)$,

$$x_1 = y_1 + y_2^2 \qquad x_2 = y_2$$

Segue que

$$y_1 = x_1 - x_2^2 \qquad y_2 = x_2$$

Isto implica que

$$\dot{y}_1 = \dot{x}_1 - 2x_2\dot{x}_2 \qquad \dot{y}_2 = \dot{x}_2,$$

onde $\dot{x}_1 = 3x_1 - x_2^2 + 5x_2^3$ e $\dot{x}_2 = x_2$. Logo,

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = 3x_1 - x_2^2 + 5x_2^3 - 2x_2^2 = 3(x_1 - x_2^2) + 5x_2^3 = 3y_1 + 5y_2^3 \\ \dot{y}_2 = \dot{x}_2 = x_2 = y_2 \end{cases}$$

Como $F_3(x) \in Ker(\mathcal{A})$, pelo Lema 2.22, este termo é ressonante (isto é, ele não pode ser eliminado). Portanto a forma normal canônica de $f(x)$ é:

$$\tilde{f}(y) = \begin{cases} \dot{y}_1 = 3y_1 + 5y_2^3 \\ \dot{y}_2 = y_2 \end{cases}$$

Capítulo 3

Simetrias

As simetrias surgem naturalmente em inúmeros fenômenos físicos. Em certos casos, elas ocupam um papel fundamental no estudo de sistemas dinâmicos. Neste capítulo, estudaremos campos de vetores que apresentam simetrias. Os textos básicos utilizados, neste capítulo, foram [6, 12].

A noção convencional de simetria consiste de uma aplicação no retrato de fase, Ω, de um campo de vetores que deixa invariante as trajetórias (caminhos no espaço de fase que são percorridos na mesma direção do tempo). Tal aplicação leva trajetórias de um sistema dinâmico para outras trajetórias do mesmo sistema.

Vamos definir o conceito de simetria associado ao grupo dos sistemas dinâmicos gerado por campos de vetores sobre algum aberto, Ω, do $\mathbb{R}^n$. Limitaremos a discussão para sistemas invertíveis.

Definição 3.0.1 *Um difeomorfismo $g : \Omega \to \Omega$ é uma simetria do sistema*

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = f(x), \qquad x \in \Omega$$

se $\frac{d}{dt}(g(x)) = f(g(x))$, ou seja, $(Dg)(x)f(x) = f(g(x))$.

Segue da definição 3.0.1 que simetrias levam trajetórias em trajetórias, preservando a direção do tempo nos trajetos percorridos.

Exemplo 3.0.2 *Seja*

$$f(x, y) = \begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = y \end{cases}$$

Considere

$$g(x,y) = (\lambda x, \lambda y).$$

Assim, obtemos que

$$(Dg)(x,y)f(x,y) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}.$$

Por outro lado,

$$f(g(x,y)) = f(\lambda x, \lambda y) = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}.$$

Portanto $g(x,y)$ é uma simetria de $f(x,y)$.

3.1 Caso Semi-simples

Estamos interessados nas propriedades simétricas de (2.1).

Definição 3.1.1 *A aplicação $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, onde $g(x) = Bx+G(x)$, é o gerador infinitesimal de uma simetria de (2.1) se $[X_f, X_g] = 0$ (ou, equivalentemente, se $\{f(x), g(x)\} = 0$).*

Precisamente, estas aplicações g são conhecidas como as simetrias de Lie do sistema dinâmico f.

Exemplo 3.1.2 *Seja*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dot{x} = -xy \\ \dot{y} = y \end{cases}$$

Considere

$$g(x,y) = (x^2 e^y, 0).$$

Vamos verificar que $g(x,y)$ é o gerador infinitesimal de uma simetria de $f(x,y)$.

$$\begin{aligned}
[X_f, X_g] &= X_f X_g - X_g X_f \\
&= \left(-xy\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(x^2e^y\frac{\partial}{\partial x}\right) - \left(x^2e^y\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(-xy\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right) \\
&= \left(-xy\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2e^y\right)\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2e^y\right)\frac{\partial}{\partial x}\right) - \left(x^2e^y\frac{\partial}{\partial x}(-xy)\frac{\partial}{\partial x} + x^2e^y\frac{\partial}{\partial x}(y)\frac{\partial}{\partial y}\right) \\
&= \left(-2x^2ye^y\frac{\partial}{\partial x} + x^2ye^y\frac{\partial}{\partial x}\right) - \left(-x^2ye^y\frac{\partial}{\partial x}\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Exemplo 3.1.3 *Seja*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = 3y - x^2 \end{cases}$$

Considere

$$g(x,y) = (x, 2x^2).$$

Vamos verificar, utilizando o outro método, que $g(x,y)$ é o gerador infinitesimal de uma simetria de $f(x,y)$.

$$\begin{aligned}
\{f(x,y), g(x,y)\} &= (Dg)(x,y)f(x,y) - (Df)(x,y)g(x,y) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4x & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ 3y - x^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2x & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ 2x^2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x \\ 4x^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ -2x^2 + 6x^2 \end{pmatrix} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Observe que qualquer sistema dinâmico do tipo (2.1) admite um gerador infinitesimal de simetria do tipo $g(x) = cf(x)$, com $c \in \mathbb{R}$, pois

$$\{f, cf\} = (Dcf)f - (Df)cf = (Df)cf - (Df)cf = 0.$$

Estes geradores infinitesimais são conhecidos como triviais.

Para facilitar a linguagem, daqui em diante, mencionaremos "simetria infinitesimal" para dizer "gerador infinitesimal de uma simetria".

Analogamente, se A satisfaz a propriedade P, podemos reescrever a definição de forma normal de Poincaré-Dulac da seguinte forma:

Definição 3.1.4 *O sistema dinâmico (2.1) está na forma normal de Poincaré-Dulac se a função linear Ax é uma simetria infinitesimal de f, isto é, $\{Ax, f\} = 0$ ou, equivalentemente, se $\{Ax, F_k\} = 0$ para todo $k \geq 2$.*

A partir daqui, assumiremos que o sistema dinâmico (2.1) admite uma simetria infinitesimal não trivial, ou seja, existe $g \neq cf$ tal que $[X_f, X_g] = 0$. Claramente, esta relação geométrica não depende da representação das coordenadas de X_f e X_g, isto é, ela ainda é conservada quando passamos para as coordenadas nas quais (2.1) está na forma normal de Poincaré-Dulac.

Denotaremos por $\mathcal{G}_f$ a álgebra das simetrias infinitesimais de f:

$$\mathcal{G}_f \equiv \{g; [X_f, X_g] = 0\} \equiv \{g; \{f, g\} = 0\}.$$

Também denotaremos por $\mathcal{D}_n$ a álgebra dos campos de vetores polinomiais em $\mathbb{R}^n$, e por $\mathcal{M} \subset \mathcal{D}_n$ a álgebra dos campos de vetores lineares em $\mathbb{R}^n$, isto é, de campos de vetores da forma $f(x) = Mx$, com M qualquer matriz $n \times n$. Usaremos a notação X_M para o campo de vetores X_{Mx}. Por último, chamaremos por $\mathcal{M}_f$ a subálgebra das simetrias infinitesimais lineares de f:

$$\mathcal{M}_f \equiv \{Bx; [X_B, X_f] = 0\} \equiv \{Bx; \{Bx, f\} = 0\}.$$

Para facilitar a notação, usaremos $B \in \mathcal{M}_f$ ao invés de $Bx \in \mathcal{M}_f$.

Observação 3.1.5 *Observe que $\mathcal{G}_f$ é o centralizador de f na álgebra $\mathcal{D}_n$ e $\mathcal{M}_f$ é justamente $\mathcal{M}_f = \mathcal{G}_f \cap \mathcal{M}$.*

Devemos ressaltar que $\mathcal{G}_f$ não tem somente uma estrutura de álgebra, mas também de módulo. Na verdade, seja $\mathcal{I}_f$ o conjunto das constantes de movimento, ou de integrais primeiras, para X_f, isto é,

$$\mathcal{I}_f \equiv \{\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}; X_f(\varphi) = 0\} \equiv \{\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}; (D\varphi)f(x) = 0\}.$$

É imediato verificar que $\mathcal{I}_f$ é uma álgebra. Temos ainda que, se $g_1, g_2 \in \mathcal{G}_f$ e $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{I}_f$ então $(\varphi_1 g_1 + \varphi_2 g_2) \in \mathcal{G}_f$, pois

$$\begin{aligned}\{f(x), \varphi_1(x)g_1(x) + \varphi_2(x)g_2(x)\} &= \{f(x), \varphi_1(x)g_1(x)\} + \{f(x), \varphi_2(x)g_2(x)\} \\ &= \varphi_1(x)\{f(x), g_1(x)\} + \varphi_2(x)\{f(x), g_2(x)\} \\ &= 0\end{aligned}$$

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE

Isto significa que o conjunto $\mathcal{G}_f$ é um módulo sobre $\mathcal{I}_f$.

Não faremos a demonstração do próximo resultado mas para maiores detalhes indicamos [15].

Lema 3.1.6 *O conjunto $\mathcal{G}_f$ é um módulo finitamente gerado sobre $\mathcal{I}_f$.*

Observação 3.1.7 *Observe que se f admite integral primeira não trivial, então $\mathcal{G}_f$ será de dimensão infinita como álgebra, ainda que tenha dimensão finita como módulo.*

Lema 3.1.8 *O conjunto $\mathcal{I}_f$ é invariante sob $\mathcal{G}_f$.*

Demonstração: Sejam $\varphi \in \mathcal{I}_f$ e $g \in \mathcal{G}_f$. Assim,

$$[X_f, X_g](\varphi) = X_f X_g(\varphi) - X_g X_f(\varphi) = 0.$$

Logo $X_f X_g(\varphi) = X_g X_f(\varphi)$. Como $X_f(\varphi) = 0$, $X_g X_f(\varphi) = 0 = X_f X_g(\varphi)$. Isto implica que $X_g(\varphi) = 0$. Portanto $X_g(\mathcal{I}_f) \subseteq \mathcal{I}_f$. □

Assumiremos para a simetria infinitesimal $g(x) = Bx+G(x)$ uma propriedade análoga à propriedade P para o campo de vetores f, ou seja,

Propriedade P'. A matriz $B = (Dg)(0)$ é semi-simples.

Quando uma sequência de P-transformações é executada simultaneamente sobre f e g de tal modo que f atinge sua forma normal de Poincaré-Dulac, evidentemente g não é necessariamente reduzida a sua forma normal de Poincaré-Dulac. O teorema seguinte diz que se g é uma simetria infinitesimal de f, então podemos levar simultaneamente f e g à forma normal de Poincaré-Dulac, ou melhor,

Teorema 3.1.9 *Se $f(x)$ e $g(x)$ satisfazem $\{f, g\} = 0$, então a sequência de P-transformações alterando f à forma normal de Poincaré-Dulac, $f \to \hat{f} \in Ker(\mathcal{A})$, também transforma g em $\tilde{g}$ tal que $\tilde{g} \in Ker(\mathcal{A})$. Mais ainda, existe uma sequência de P-transformações levando simultaneamente f e g à forma normal de Poincaré-Dulac (a qual chamaremos de forma normal simultânea), isto é,*

$$f \to \hat{f} \qquad g \to \hat{g} \qquad com\ \hat{f}, \hat{g} \in Ker(\mathcal{A}) \cap Ker(\mathcal{B}) \tag{3.1}$$

onde $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ são os operadores homológicos associados à $A = (Df)(0)$, $B = (Dg)(0)$ respectivamente.

Demonstração: Primeiramente, seja f expressa na forma normal de Poincaré-Dulac, ou seja, $f \to \hat{f} = Ax + \hat{F}$. A simetria infinitesimal g, sob esta sequência de P-transformações, é transformada em uma nova forma, $g \to \tilde{g} = Bx + \tilde{G}$ (não necessariamente normal; reservamos a notação $\hat{\cdot}$ somente para forma normal de Poincaré-Dulac). Como a propriedade comutativa, $\{f, g\} = 0$, independe das coordenadas de f e g, $\left\{\hat{f}, \tilde{g}\right\} = 0$ também. Expandindo $\hat{f}$ e $\tilde{g}$ em séries de potência formais, obtemos

$$\hat{f} = Ax + \sum_{j \geq 2} \hat{F}_j \qquad \tilde{g} = Bx + \sum_{j \geq 2} \tilde{G}_j$$

onde $\hat{F}_j$ e $\tilde{G}_j$ são funções polinomiais homogêneas de grau j. Olhando para os termos de primeira ordem nas séries expandidas, conseguimos imediatamente, de $\left\{\hat{f}, \tilde{g}\right\} = 0$, que $[A, B] = 0$. Procedendo, analogamente, para os termos de segunda ordem, obtemos que $\left\{Ax, \tilde{G}_2\right\} + \left\{\hat{F}_2, Bx\right\} = 0$, o qual implica que $\left\{Ax, \tilde{G}_2\right\} = \left\{Bx, \hat{F}_2\right\}$. Assim,

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}^2\left(\tilde{G}_2\right) &= \mathcal{A}\left(\left\{Ax, \tilde{G}_2\right\}\right) \\
&= \mathcal{A}\left(\left\{Bx, \hat{F}_2\right\}\right) \\
&= \left\{Ax, \left\{Bx, \hat{F}_2\right\}\right\} \\
&= \left\{\{Ax, Bx\}, \hat{F}_2\right\} + \left\{Bx, \left\{Ax, \hat{F}_2\right\}\right\} \qquad \text{(por 3 da definição 1.1)} \\
&= 0 \qquad \left(\text{ pois, } \{Ax, Bx\} = 0 \text{ e pela definição3.1.4, } \left\{Ax, \hat{F}_2\right\} = 0\right).
\end{aligned}$$

Segue, pelo fato de $\mathcal{A}^2\left(\tilde{G}_2\right) = \mathcal{A}\left(\mathcal{A}\left(\tilde{G}_2\right)\right) = 0$, que

$$\mathcal{A}\left(\tilde{G}_2\right) \in Ker(\mathcal{A}) \;\; e \;\; \mathcal{A}\left(\tilde{G}_2\right) \in Im(\mathcal{A}).$$

Como a matriz A é semi-simples, pela Observação 2.23, obtemos que $\mathcal{A}\left(\tilde{G}_2\right) = 0$, ou seja, $\tilde{G}_2 \in Ker(\mathcal{A})$. Nos termos de ordem $k > 2$ temos

$$\left\{Ax, \tilde{G}_k\right\} + \left\{\hat{F}_k, Bx\right\} = \sum_{j=2}^{k-1} \left\{\hat{F}_j, \tilde{G}_{k-j+1}\right\} \equiv \psi_k.$$

Afirmação 1 *Se $\hat{F}_j, \tilde{G}_i \in Ker(\mathcal{A})$, então $\left\{\hat{F}_j, \tilde{G}_i\right\} \in Ker(\mathcal{A})$.*

Vamos mostrar, usando indução sobre k, que $\psi_k \in Ker(\mathcal{A})$.
Para $k = 3$, como $\hat{F}_2, \tilde{G}_2 \in Ker(\mathcal{A})$, pela afirmação 1, $\left\{\hat{F}_2, \tilde{G}_2\right\} \in Ker(\mathcal{A})$.

Suponha para valores menores que $k-1$ a implicação seja verdadeira. Sabemos que

$$\sum_{j=2}^{k-1}\left\{\hat{F}_j,\tilde{G}_{k-j+1}\right\}=\sum_{j=2}^{k-2}\left\{\hat{F}_j,\tilde{G}_{k-j+1}\right\}+\left\{\hat{F}_{k-1},\tilde{G}_2\right\}$$

Sendo $\mathcal{A}$ um operador linear, segue que

$$\begin{aligned}\mathcal{A}\left(\sum_{j=2}^{k-1}\left\{\hat{F}_j,\tilde{G}_{k-j+1}\right\}\right)&=\mathcal{A}\left(\sum_{j=2}^{k-2}\left\{\hat{F}_j,\tilde{G}_{k-j+1}\right\}\right)+\mathcal{A}\left(\left\{\hat{F}_{k-1},\tilde{G}_2\right\}\right)\\&=\mathcal{A}\left(\left\{\hat{F}_{k-1},\tilde{G}_2\right\}\right)\text{ (pela hipótese de indução)}\\&=0\text{ (pela afirmação 1)}\end{aligned}$$

Assim, por indução, $\psi_k\in Ker(\mathcal{A})$. Este fato implica que

$$\mathcal{A}\left(\left\{Ax,\tilde{G}_k\right\}\right)=\mathcal{A}\left(\left\{Bx,\hat{F}_k\right\}\right)$$

Com raciocínio análogo ao que usamos para mostrar que $\tilde{G}_2\in Ker(\mathcal{A})$, concluímos que $\tilde{G}_k\in Ker(\mathcal{A})$ (para todo $k>2$). Logo $\hat{F},\tilde{G}\in Ker(\mathcal{A})$ e, portanto, $\hat{f},\tilde{g}\in Ker(\mathcal{A})$. Mas a série de transformações a qual normaliza f é, na verdade, completamente determinada por elementos no $Ker(\mathcal{A})$, ou seja, $\tilde{G}\in Ker(\mathcal{A})$ e $\mathcal{B}:Ker(\mathcal{A})\to Ker(\mathcal{A})$. Portanto, sem alterar a normalidade de $\hat{f}$, ainda podemos aplicar mudanças de coordenadas para colocar também $\tilde{g}$ na forma normal de Poincaré-Dulac com respeito à B. Para mostrarmos que $\hat{f}\in Ker(\mathcal{B})$, basta usar o mesmo argumento como antes para mostrar que $\tilde{g}\in Ker(\mathcal{A})$. Com isto, 3.1 é obtido. □

Demonstração: (da afirmação 1)

$$\begin{aligned}\mathcal{A}\left(\left\{\hat{F}_j,\tilde{G}_i\right\}\right)&=\left\{Ax,\left\{\hat{F}_j,\tilde{G}_i\right\}\right\}\\&=\left\{\left\{Ax,\hat{F}_j\right\},\tilde{G}_i\right\}+\left\{\hat{F}_j,\left\{Ax,\tilde{G}_i\right\}\right\}\text{ (por 3 da definição 1.1)}\\&=\left\{\mathcal{A}\left(\hat{F}_j\right),\tilde{G}_i\right\}+\left\{\hat{F}_j,\mathcal{A}\left(\tilde{G}_i\right)\right\}\\&=\left\{0,\tilde{G}_i\right\}+\left\{\hat{F}_j,0\right\}\text{ (por hipótese)}\\&=0.\end{aligned}$$

Portanto $\left\{\hat{F}_j,\tilde{G}_i\right\}\in Ker(\mathcal{A})$. □

Observação 3.1.10 *Claramente, no Teorema 3.1.9, os papeis de f e g podem ser invertidos. Veremos, ainda nesta seção, que este fato será usado no problema de linearização de sistemas dinâmicos.*

Imediatamente podemos estender o resultado do Teorema 3.1.9 se considerarmos não somente dois campos de vetores X_f e X_g mas uma álgebra abeliana $\mathbf{g}$ com dimensão $d+1$:

Teorema 3.1.11 *Suponha que f e $\{g_1, \ldots, g_d\}$ geram uma álgebra de Lie abeliana $\mathbf{g}$ sob o colchete de Lie-Poisson. Então, por meio de P-transformações (formais), podemos colocar $\{f = g_0, g_1, \ldots, g_d\}$ na forma normal simultânea, isto é,*

$$g_b \to \hat{g}_b \in \bigcap_{a=0}^{d} Ker(\mathcal{B}_a) \ (para\ b = 0, 1, \ldots, d),$$

onde $\mathcal{B}_a$ é o operador homológico associado à matriz $B_a = (Dg_a)(0)$ e $A \equiv B_0$.

Será de grande valor mais adiante, considerarmos os detalhes das relações entre $\mathcal{G}_f$ e $\mathcal{M}_f$ definidas acima. Elas serão frequentemente úteis ao considerarmos $\mathcal{G}_h$, $\mathcal{M}_h$ e $\mathcal{I}_h$ com $h(x) = Ax$, onde A é uma matriz. Neste caso, escreveremos simplificadamente $\mathcal{G}_A, \mathcal{M}_A$ e $\mathcal{I}_A$.

Enunciaremos por conveniência o resultado seguinte, o qual na verdade, já demonstramos e usamos (veja prova do Teorema 3.1.9).

Lema 3.1.12 *Se $g(x) = Bx + G(x)$ é uma simetria infinitesimal de $f(x) = Ax + F(x)$, então obtemos que $[A, B] = 0$, isto é, se $[X_f, X_g] = 0$, então $[X_A, X_B] = 0$.*

Corolário 3.1.13 *Se, em particular, $g(x) = Bx$, então $\mathcal{M}_f \subseteq \mathcal{M}_A$ e $\mathcal{M}_f \subseteq \mathcal{M}_{F(x)}$.*

Demonstração: Sabemos que

$$0 = [X_f, X_B] = \{f, Bx\} = \{Ax + F(x), Bx\} = \{Ax, Bx\} + \{F(x), Bx\}$$

Pelo Lema 3.1.12, $\{Ax, Bx\} = 0$, ou seja, $\mathcal{M}_f \subseteq \mathcal{M}_A$. Como $\{Ax, Bx\} = 0$, então $\{F(x), Bx\} = 0$, isto é, $\mathcal{M}_f \subseteq \mathcal{M}_{F(x)}$. □

Corolário 3.1.14 *Se o sistema dinâmico $f(x) = Ax + F(x)$ admitir uma simetria infinitesimal linear $g(x) = Bx$, então existe uma forma normal $\hat{f}$ a qual admite a mesma simetria infinitesimal $g(x) = Bx$, e esta forma normal satisfaz $\hat{f} \in Ker(\mathcal{A}) \cap Ker(\mathcal{B})$.*

Demonstração: Temos, pela hipótese, que $\{f, Bx\} = 0$. Como $\{f, Bx\} = -\{Bx, f\}$, então $\{Bx, f\} = 0$. Ainda temos, pelo Lema 3.1.12, que $\{Bx, Ax\} = 0$. Logo deduzimos que $f \in Ker(\mathcal{B})$ e $\mathcal{A} : Ker(\mathcal{B}) \to Ker(\mathcal{B})$. Isto implica que podemos colocar f na forma normal de Poincaré-Dulac com respeito à A, $f \to \hat{f} \in Ker(\mathcal{A})$, de tal maneira que $\hat{f}$ ainda permaneça no $Ker(\mathcal{B})$. □

Corolário 3.1.15 *Se $g(x) = Bx + G(x) \in \mathcal{G}_f$, então, uma vez colocadas na forma normal simultânea, $\hat{f} \in Ker(\mathcal{B})$, isto é, Bx é uma simetria infinitesimal linear de $\hat{f}$.*

Demonstração: Como f, g estão na forma normal simultânea, pelo Teorema 3.1.9, $\hat{f} \in Ker(\mathcal{A}) \cap Ker(\mathcal{B})$. Portanto $\left\{Bx, \hat{f}\right\} = 0$. □

Corolário 3.1.16 *Suponha que* $\mathbf{h}$ *é uma subálgebra maximal abeliana de* $\mathbf{g}$*, gerada por $h_a(x) = B_a x + G_a(x)$ (com $h_0 \equiv f$). Então, uma vez colocadas na forma normal simultânea, temos que $B_a \in \mathcal{M}_f$.*

Demonstração: Obtemos, pelo Teorema 3.1.9, que $\hat{h}_0 \equiv \hat{f} \in \bigcap_{a=0}^{d} Ker(B_a)$. Isto implica que $\left\{B_a x, \hat{f}\right\} = 0$. Como a propriedade comutativa não depende das coordenadas, $\{B_a x, f\} = 0$. Portanto $B_a \in \mathcal{M}_f$. □

Lema 3.1.17 *Se $f(x) = Ax + \sum_{k\geq 2} F_k(x)$ está na forma normal de Poincaré-Dulac, onde todos os autovalores de A são não nulos, então qualquer integral primeira $\varphi(x)$ de $\dot{x} = f(x)$ é também uma integral primeira do campo de vetores linearizado Ax.*

Demonstração: Podemos assumir que φ é não constante e $\varphi(0) = 0$. Isto diz que $\varphi = \sum_{j\geq 0} \varphi_{r+j}$ com $r \geq 1$ e $\varphi_r \neq 0$. Decompondo $X_f(\varphi) = 0$ em sua parte homogênea, obtemos que $X_A(\varphi_r) = 0$ (pois, se $X_A(\varphi_r) + X_F(\varphi_r) = 0$, então $X_A(\varphi_r) = 0$) e, além disso,

$$X_A(\varphi_{r+j}) + X_{F_2}(\varphi_{r+j-1}) + X_{F_3}(\varphi_{r+j-2}) + \ldots + X_{F_{j+1}}(\varphi_r) = 0, \forall j \geq 1. \tag{3.2}$$

Queremos mostrar que $X_A(\varphi_{r+j}) = 0$, para $j \geq 0$. Usaremos indução sobre j. Para $j = 0$, já mostramos que $X_A(\varphi_r) = 0$. Suponha que $X_A(\varphi_{r+k}) = 0$, para todo $k < j$. Aplicando X_A em (3.2), obtemos

$$X_A(X_A(\varphi_{r+j})) + X_A(X_{F_2}(\varphi_{r+j-1})) + X_A(X_{F_3}(\varphi_{r+j-2})) + \ldots + X_A(X_{F_{j+1}}(\varphi_r)) = 0. \tag{3.3}$$

UNICAMP

Sabemos, pelo fato de f está na forma normal de Poincaré-Dulac, que $X_A X_{F_i} = X_{F_i} X_A$, para todo $i \geq 2$. Assim, (3.3) torna-se

$$X_A(X_A(\varphi_{r+j})) + X_{F_2}(X_A(\varphi_{r+j-1})) + X_{F_3}(X_A(\varphi_{r+j-2})) + \ldots + X_{F_{j+1}}(X_A(\varphi_r)) = 0.$$

Logo, pela hipótese de indução,

$$X_{F_2}(X_A(\varphi_{r+j-1})) = X_{F_3}(X_A(\varphi_{r+j-2})) = \ldots = X_{F_{j+1}}(X_A(\varphi_r)) = 0.$$

Portanto, $X_A(X_A(\varphi_{r+j})) = 0$ para todo $j \geq 0$. Como X_A é invertível (pois os autovalores de A são não nulos), $X_A(\varphi_{r+j}) = 0$, para todo $j \geq 0$. □

Uma aplicação da teoria de formas normais simultâneas pode ser visto em problemas de linearização de sistemas dinâmicos. Claramente, se $Ker(\mathcal{A}) = 0$, então o sistema dinâmico é linearizável por meio de P-transformações (formais). Mas, seja qual for a matriz A, o campo de vetores linear $X_A = (Ax.\nabla)$ comuta com o campo de vetores S dado por $S = \sum_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i} = (Ix.\nabla)$, o qual será chamado de campo radial. Facilmente notamos que apenas os campos de vetores lineares comutam com S. Por outro lado, observamos que a matriz identidade não admite ressonância, pois para ela ser ressonante teria que satisfazer $|Q| \geq 2$. Entretanto,

$$\sum_{i=1}^{n} q_i \lambda_i = \sum_{i=1}^{n} q_i = |Q| = \lambda_j = 1.$$

Então podemos dizer que:

Corolário 3.1.18 *Um campo de vetores f (ou um sistema dinâmico $\dot{x} = f(x)$) pode ser linearizado se, e somente se, ele admite uma simetria infinitesimal $g(x) = Bx + G(x)$ tal que $B = (Dg)(0) = I$.*

Demonstração: Suponhamos que f pode ser linearizado (ou seja, existe uma sequência de P-transformações (formais) tal que $f \to Ax$) e, além disso, admita uma simetria infinitesimal $g(x) = Bx + G(x)$. Assim, pelo Lema 3.1.12, $[A, B] = AB - BA = 0$. Como A é uma matriz genérica semi-simples, $B = I$. Reciprocamente, suponhamos que f admite uma simetria infinitesimal $g(x) = Bx + G(x)$ tal que $B = (Dg)(0) = I$. Como $B = I$, $Ker(\mathcal{B}) = \{0\}$. Assim, pelo Teorema 3.1.9 (com o papel de f e g invertidos), temos que $\mathcal{A} : Ker(\mathcal{B}) \to Ker(\mathcal{B})$. Como B não admite ressonâncias, $Ker(\mathcal{A}) = \{0\}$. Portanto f pode ser linearizado. □

Exemplo 3.1.19 *Considere o sistema dinâmico em* $\mathbb{R}^2$*, dado por*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dot{x} = x + x^4 y \\ \dot{y} = -2y - x^3 y^2 \end{cases}$$

cuja parte linear é dada pela matriz

$$A = (Df)(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Seja

$$g(x,y) = (x + 4x^4 y, y - 4x^3 y^2).$$

Vamos verificar que $g(x,y)$ *é uma simetria infinitesimal de* $f(x,y)$

$$\begin{aligned} \{f(x,y), g(x,y)\} &= (Dg)f(x,y) - (Df)g(x,y) \\ &= \begin{pmatrix} 1 + 16x^3 y & 4x^4 \\ -12x^2 y^2 & 1 - 8x^3 y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x + x^4 y \\ -2y - x^3 y^2 \end{pmatrix} \\ &\quad - \begin{pmatrix} 1 + 4x^3 y & x^4 \\ -3x^2 y^2 & -2 - 2x^3 y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x + 4x^4 y \\ y - 4x^3 y^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x + 9x^4 y + 12x^7 y^2 \\ -2y + 3x^3 y^2 - 4x^6 y^3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x + 9x^4 y + 12x^7 y^2 \\ -2y + 3x^3 y^2 - 4x^6 y^3 \end{pmatrix} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Como $(Dg)(0) = B = I$*, pelo Corolário 3.1.18,* $f(x,y)$ *pode ser linearizado.*

Exemplo 3.1.20 *Consideraremos agora um sistema dinâmico em* $\mathbb{R}^3$*, aparentemente*

muito complicado, dado por

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \dot{x} = [\alpha x - y] - x^2 - [3xy^2 + 2\alpha y^3] - 6[x^3 y + \alpha x^2 y^2] \\ \quad -3[x^5 + 2\alpha x^4 y + y^5] - [2\alpha x^6 + 15x^2 y^4] - 30[x^4 y^3 + x^6 y^2] \\ \quad -3[x^{10} + 5x^8 y] \\ \dot{y} = [x + \alpha y] - [\alpha x^2 - 2xy] + [2x^3 + y^3] + [9x^2 y^2 + 4\alpha x y^3] \\ \quad +[15x^4 y + 12\alpha x^3 y^2] + [7x^6 12\alpha x^5 y + 6xy^5] \\ \quad +[4\alpha x^7 + 30x^3 y^4] + 60x^5 y^3 + 60x^7 y^2 + 6[5x^9 y + x^{11}] \\ \dot{z} = \beta z + [2xy + y^2(2\alpha - \beta)] \\ \quad +[2x^3 + 2x^2 y(2\alpha - \beta) + 3xy^2 + \alpha y^3 + y^3(2\alpha - \beta)] \\ \quad +[x^4(2\alpha - \beta) - 3\alpha x^2 y^2 + 6xy^3 + 2y^4] + [6x^3 y^2 + 8x^2 y^3 3y^5] \\ \quad +[12x^4 y^2 + 27x^2 y^4 + 12\alpha x y^5] + 9[5x^4 y^3 + 4\alpha x^3 y^4] \\ \quad +[2x^8 + 8x^6 y + 21x^6 y^2 + 36\alpha x^5 y^3 + 18xy^7] \\ \quad +[12\alpha x^7 y^2 + 90x^3 y^6] + 180x^5 y^5 + 180x^7 y^4 + 90x^9 y^3 + 18x^{11} y^2 \end{cases}$$

cuja parte linear é dada pela matriz

$$A = (Df)(0) = \begin{pmatrix} \alpha & -1 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix},$$

onde α e β são constantes reais. Apesar deste sistema dinâmico ser bastante complicado, podemos verificar explicitamente que $X_f = (f.\nabla)$ comuta com $X_g = (g.\nabla)$, onde $g(x,y,z) = (g_1(x,y,z), g_2(x,y,z), g_3(x,y,z))$ e cada componente é dada por:

$g_1(x,y,z) = x + -2y^3 - 6x^2y^2 - 6x^4 y - 2x^6$
$g_2(x,y,z) = y - x^2 + 4xy^3 + 12x^3y^2 + 4x^7 + 12x^5 y$
$g_3(x,y,z) = z + y^2 + 2x^2 y + 2y^3 + x^4 - 3x^2y^2 + 12xy^5 + 36x^3y^4 + 36x^5y^3 + 12x^7y^2.$

Observe que a parte linear do campo de vetores $X_g = (g.\nabla)$ corresponde à matriz identidade, ou seja, $(Dg)(0) = B = I$. Portanto, pelo Corolário 3.1.18, $f(x,y,z)$ pode ser linearizado.

Observação 3.1.21 *Se $n = 2$, $A = (Df)(0)$ tem autovalores distintos e f admite uma simetria infinitesimal $g(x) = Bx + G(x)$ com B não proporcional à A, então f pode ser linearizado. Na verdade, é suficiente considerarmos a combinação linear $\alpha f + \gamma g$ dando uma outra simetria infinitesimal tal que $\alpha A + \gamma B = I$.*

Exemplo 3.1.22 *Considere o seguinte sistema dinâmico em $\mathbb{R}^2$*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = 3y - x^2 \end{cases}$$

Temos que a parte linear dele é

$$A = (Df)(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Seja $g(x,y) = (g_1(x,y), g_2(x,y))$ uma simetria infinitesimal de $f(x,y)$. O cálculo explícito de $\{f,g\}$ é dado por

$$\begin{aligned} \{f(x,y), g(x,y)\} &= (Dg)(x,y)f(x,y) - (Df)(x,y)g(x,y) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 3y - x^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2x & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x}(x) + \frac{\partial g_1}{\partial y}(3y - x^2) - g_1 \\ \frac{\partial g_2}{\partial x}(x) + \frac{\partial g_2}{\partial y}(3y - x^2) - 2xg_1 + 3g_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Como $\{f(x,y),g(x,y)\}=0$, obtemos que

$$\begin{cases} \frac{\partial g_1}{\partial x}(x) + \frac{\partial g_1}{\partial y}(3y - x^2) - g_1 = 0 \\ \frac{\partial g_2}{\partial x}(x) + \frac{\partial g_2}{\partial y}(3y - x^2) - 2xg_1 + 3g_2 = 0 \end{cases}$$

Isto implica que

$$g(x,y) = z_1 = (x, 2x^2) \quad ou \quad g(x,y) = z_2 = (0, y - x^2).$$

Isto diz que $\mathcal{G}_f$ é gerado por $\{z_1, z_2\}$. Uma simetria infinitesimal de $f(x,y)$ é dada por

$$z(x,y) = 2z_1 + 8z_2 = (2x, 8y - 4x^2),$$

onde

$$(Dz)(0) = B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Como B não é proporcional à A, pela observação 3.1.21, $f(x,y)$ pode ser linearizado. Observe que $s(x,y) = 3f(x,y) - z(x,y)$ é uma simetria infinitesimal tal que $(Ds)(0) = I$.

Corolário 3.1.23 *Se o sistema dinâmico* $\dot{x} = f(x) = Ax + \sum_{k\geq 2} F_k(x)$ *admite uma simetria infinitesimal* $g(x) = Bx + G(x)$ *tal que* $Ker(\mathcal{A}) \cap Ker(\mathcal{B}) = \{0\}$ *(se, em particular,* B *não admite ressonância, isto é,* $Ker(\mathcal{B}) = \{0\}$*), então* f *pode ser linearizado.*

Demonstração: Temos, por hipótese, que $\{f, g\} = 0$. Assim, pelo Teorema 3.1.9, existe uma sequência de P-transformações (formais) tal que $\hat{f}, \hat{g} \in Ker(\mathcal{A}) \cap Ker(\mathcal{B})$. Como $Ker(\mathcal{A}) \cap Ker(\mathcal{B}) = \{0\}$, obtemos que $F_k \in Im(\mathcal{A})$ para todo $k \geq 2$ (pois, caso contrário $F_k \in Ker(\mathcal{A}) \cap Ker(\mathcal{B})$). Logo, pelo Lema 2.20, estes termos podem ser eliminados. Portanto, f pode ser linearizado. Em particular, se $Ker(\mathcal{B}) = \{0\}$, então deduzimos, pelo Teorema 3.1.9, que $\mathcal{A} : Ker(\mathcal{B}) \to Ker(\mathcal{B})$. Isto implica que $Ker(\mathcal{A}) = \{0\}$. Logo f pode ser linearizado. □

Exemplo 3.1.24 *Considere o seguinte sistema dinâmico em* $\mathbb{R}^2$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dot{x} = x + 2x^3y \\ \dot{y} = -5y + 6x^2y^2 \end{cases}$$

Uma simetria infinitesimal linear para este sistema é dada por

$$g(x,y) = (x, -2y).$$

Note que, a parte linear de f *e* g *são*

$$(Df)(0) = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \qquad (Dg)(0) = B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

respectivamente. Para encontrarmos o $Ker(\mathcal{A})$ *e o* $Ker(\mathcal{B})$*, precisamos determinar os termos que são ressonantes em relação às matrizes* A *e* B*. O termo* $x^{m_1}y^{m_2} \in Ker(\mathcal{A})$ *se*

$$m_1 - 5m_2 = \lambda_1 = 1 \qquad ou \qquad m_1 - 5m_2 = \lambda_2 = -5.$$

Isto nos diz que os termos ressonantes são da forma

$$\left(x^{5n+1}y^n\right)e_1 \quad e \quad \left(x^{5n}y^{n+1}\right)e_2, \quad para\ n = 1, 2, \ldots, \infty,$$

ou seja, $Ker(\mathcal{A}) = \{0, \alpha\left(x^{5n+1}y^n\right)e_1, \mu\left(x^{5n}y^{n+1}\right)e_2\}$ *com* $\alpha, \mu \in \mathbb{R}$*. Por outro lado, o termo* $x^{q_1}y^{q_2} \in Ker(\mathcal{B})$ *se*

$$q_1 - 2q_2 = \lambda_1 = 1 \qquad ou \qquad q_1 - 2q_2 = \lambda_2 = -2.$$

Os termos ressonantes são dados por

$$\left(x^{2n+1}y^n\right)e_1 \quad e \quad \left(x^{2n}y^{n+1}\right)e_2, \quad para\ n = 1, 2, \ldots, \infty$$

Logo, $Ker(\mathcal{B}) = \{0, \beta\left(x^{2n+1}y^n\right)e_1, \gamma\left(x^{2n}y^{n+1}\right)e_2\}$ *com* $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$. *Observe que, apesar do* $Ker(\mathcal{A})$ *e* $Ker(\mathcal{B})$ *ter dimensão infinita,* $Ker(\mathcal{A}) \cap Ker(\mathcal{B}) = \{0\}$. *Portanto, pelo Corolário 3.1.23,* f *pode ser linearizado.*

Na verdade, a simetria infinitesimal reduz o sistema dinâmico para sua parte linear e, portanto, obtemos que a forma normal simultânea dele é $\dot{x} = Ax$. Neste aspecto, notamos que $Ker(\mathcal{A}) \cap Ker(\mathcal{B})$ é gerado pelos vetores $u_s = (u_{1,s}, \ldots, u_{n,s})$ possuindo somente s componentes diferentes de zero. Estas componentes são iguais à $x_1^{u_1} \ldots x_n^{u_n}$, onde estes monômios x^u são ressonantes em relação à ambas matrizes A e B, ou seja, se λ_i são os autovalores de A e γ_i estes de B, isto diz que $(\lambda_i.u_i) = \lambda_s$ e $(\gamma_i.u_i) = \gamma_s$.

Teorema 3.1.25 *Se um sistema dinâmico em* $\mathbb{R}^n$ *pode ser linearizado, então ele admite* n *simetrias infinitesimais independentes comutando, as quais podem ser simultaneamente levadas à forma linear por meio de transformações de coordenadas. Se, em particular, a matriz* A *do sistema dinâmico é diagonalizável com autovalores reais, então – uma vez linearizado e* A *sendo diagonal –* $\xi_i = x_i\frac{\partial}{\partial x_i}$ *ao longo de cada direção* i*, são* n *simetrias infinitesimais lineares comutando com o sistema. Reciprocamente, se existe um sistema de coordenadas onde o sistema dinâmico admite* n *simetrias infinitesimais lineares independentes* $(B_ix.\nabla)$ *comutando tal que qualquer* B_i *é semi-simples, então o sistema dinâmico pode ser linearizado.*

Demonstração: Linearizando o sistema dinâmico, obtemos que $\dot{x} = Ax$ (onde A é uma matriz genérica semi-simples). Pelo Corolário 3.1.18, este sistema admite uma simetria infinitesimal g tal que $(Dg)(0) = B = I$. Isto implica que se as matrizes $I, A, \ldots, A^{n-1}$ são linearmente independentes, então elas fornecem as n simetrias infinitesimais lineares independentes comutando entre si. Ainda se este não for o caso, a existência destas n simetrias infinitesimais com as propriedades exigidas é facilmente verificada se colocarmos A na forma de Jordan. No caso da matriz A ser diagonal, os vetores correspondentes às colunas de A formam uma base do $\mathbb{R}^n$. Assim, a existência de n escalares independentes ξ_i é verificada se para cada coluna da matriz A associarmos à direção $x_i\frac{\partial}{\partial x_i}$. Reciprocamente, dado n matrizes semi-simples independentes B_i comutando, elas podem ser diagonalizadas

simultaneamente, ou melhor, existe uma base ordenada do $\mathbb{R}^n$ tal que cada matriz B_i é representada, em relação à esta base, por uma matriz diagonal: $B_i \to diag\left(\beta_1^{(i)}, \ldots, \beta_n^{(i)}\right)$. Agora, com respeito à base gerada pelos n vetores (linearmente independentes) dados por $\beta^i = \left(\beta_1^{(i)}, \ldots, \beta_n^{(i)}\right)$, a simetria infinitesimal $\sigma_i = (B_i x.\nabla)$ torna-se $\sigma_i \to \xi_i = x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, ou seja, as direções independentes ao longo de cada direção β^i. Isto diz que

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial}{\partial x_i} = (Ix.\nabla)$$

é uma simetria infinitesimal do sistema dinâmico. Portanto, pelo corolário 3.1.18, o sistema dinâmico pode ser linearizado. □

3.2 Caso Não Semi-simples

Como mencionamos acima, muitos resultados considerados anteriormente para a matriz A semi-simples também valem – às vezes sob uma versão fraca – para o caso não semi-simples. Neste caso a notação exigida ficará mais complicada.

Observação 3.2.1 *Utilizaremos um resultado bastante conhecido, o qual diz que uma matriz genérica A se decompõe de maneira única como $A = A_s + A_n$ onde A_s é semi-simples e A_n é nilpotente, além disso, estas comutam, isto é, $[A_s, A_n] = 0$.*

Lema 3.2.2 *Se $[A, B] = 0$, então $[A_s, B] = [A, B_s] = 0$.*

Demonstração: Escrevendo as matrizes A e B em coordenadas nas quais A se encontra na forma de Jordan (J_A), obtemos $A \to J_A = J_{A_s} + J_{A_n}$ e $B \to \tilde{B}$ (onde $\tilde{B}$ não é necessariamente a forma de Jordan de B). Sendo a propriedade comutativa independente das coordenadas, segue-se que

$$0 = \left[J_A, \tilde{B}\right] = \left[J_{A_s} + J_{A_n}, \tilde{B}\right] = \left[J_{A_s}, \tilde{B}\right] + \left[J_{A_n}, \tilde{B}\right]$$

Logo, $\left[J_{A_s}, \tilde{B}\right] = \left[\tilde{B}, J_{A_n}\right]$. Como $\tilde{B}$ é uma matriz genérica, $\left[J_{A_s}, \tilde{B}\right] = 0$. Portanto $[A_s, B] = 0$. Analogamente, mostra-se que $[A, B_s] = 0$. □

A definição de termos ressonantes será modificada levemente, no caso de matrizes com uma parte nilpotente, introduzindo os operadores homológicos $\mathcal{A}_s$,$\mathcal{A}^+$ associados, respectivamente, às matrizes A_s, A^+ onde $\mathcal{A}_s = \{A_s, .\}$ e $\mathcal{A}^+ = \{A^+, .\}$. Posteriormente

usaremos $\mathcal{B}_s, \mathcal{B}^+$ similarmente definidos. Assumiremos a escolha do produto escalar de Bargman em V_k ([8, 11]).

Definição 3.2.3 *$f(x) \in V$ é ressonante em relação à matriz A se $f(x) \in Ker(\mathcal{A}^+)$, ou seja, $\{A^+x, f(x)\} = 0$.*

Lema 3.2.4 *Os termos $\hat{F}(x) \in Ker(A^+)$ são séries de potência da forma $K(\varphi(x)).x$, onde K é uma matriz a qual comuta com A^+ e suas entradas são funções constantes de movimento (ou integrais primeiras) analíticas $\varphi(x)$ do tempo independente para o problema linear $\dot{x} = A^+x$.*

Demonstração: Pela hipótese, temos que $\mathcal{A}^+\left(\hat{F}\right) = \left(D\hat{F}\right)A^+x - A^+F = 0$. Como $\hat{F} = \left(\hat{F}_1, \ldots, \hat{F}_n\right)$, obtemos que a derivada direcional de $\hat{F}$ em cada direção x_i é dada por $\left(\frac{\partial F_k}{\partial x_i}\right)(A^+x)_j = (A^+F)_k$. Assim, obteremos as seguintes equações características na forma simétrica

$$\frac{d\hat{F}_1}{(A^+\hat{F})_1} = \ldots = \frac{d\hat{F}_n}{(A^+\hat{F})_n} = \frac{dx_1}{(A^+x)_1} = \ldots = \frac{dx_n}{(A^+x)_n} \tag{3.4}$$

Logo $\hat{F} = Kx$, onde K é uma matriz que comuta com $\mathcal{A}^+$ (pois, $\mathcal{A}^+(Kx) = 0$) e, ainda, depende das constantes de integração do subconjunto de equações envolvendo os n primeiros termos de $\frac{dx_j}{(A^+x)_j}$ em (3.4), os quais, são justamente as constantes de movimento (ou integrais primeiras) do problema linear $\dot{x} = A^+x$. □

Lema 3.2.5 *Seja $\mathcal{A}_s$ o operador homológico associado à parte semi-simples A_s da matriz A. Então,*

$$Ker(\mathcal{A}) \subseteq Ker(\mathcal{A}_s) \text{ e } Ker(\mathcal{A}^+) \subseteq Ker(\mathcal{A}_s) = Ker(\mathcal{A}_s^+).$$

Demonstração: Pelo Lema 3.2.2, se $[K, A^+] = 0$ então $[K, A_s] = [K, A_s^+] = 0$ (se colocarmos A na forma de Jordan (J_A) e calcularmos a matriz adjunta correspondente a parte semi-simples, então obteremos que $J_{A_s} = J_{A_s}^+$ e, portanto, $A_s = A_s^+$). Por outro lado, as soluções dos sistemas lineares $\dot{x} = A_sx$ e $\dot{x} = A^+x$ são, respectivamente, combinações dos termos $e^{\lambda_i t}$ e $t^k e^{\lambda_i t}$. Assim, as integrais primeira que podemos construir para o segundo sistema ($\dot{x} = A^+x$), com a propriedade de ser tempo independente e expressas em suas formas analíticas, certamente também serão integrais primeira do sistema $\dot{x} = A_sx$. Como a recíproca é falsa, pela analiticidade dos elementos no $Ker(\mathcal{A})$ e $Ker(\mathcal{A}^+)$, obtemos que $Ker(\mathcal{A}) \subseteq Ker(\mathcal{A}_s)$ e $Ker(\mathcal{A}^+) \subseteq Ker(\mathcal{A}_s) = Ker(\mathcal{A}_s^+)$. □

Observação 3.2.6 *O Teorema de Poincaré-Dulac, reformulado para o caso semi-simples, afirma que dado um campo de vetores $f(x) = Ax + F(x)$, então a parte não linear pode ser levada, através de P-transformações (formais), a uma forma normal em relação à $\mathcal{A}^+$, isto é, $F \to \hat{F} \in Ker(\mathcal{A}^+)$. Observe que, neste caso, a condição de ressonância $\mathcal{A}^+(F) = 0$ não pode ser estendida para a parte linear, ou seja, $Ax \notin Ker(\mathcal{A}^+)$. Entretanto, temos que $Ax \in Ker(\mathcal{A}_s)$ e portanto obtemos que $\hat{f} \in Ker(\mathcal{A}_s)$.*

Temos, para o caso não semi-simples, um teorema correspondente ao Teorema 3.1.9 que é dado por:

Teorema 3.2.7 *Sejam $f(x) = Ax + F(x)$, $g(x) = Bx + G(x)$ satisfazendo $[X_f, X_g] = 0$ e as partes semi-simples A_s, B_s de A, B matrizes normais. Então podemos formalmente, por meio de P-transformações, levarmos f, g em qualquer uma das seguintes Formas Normais Simultâneas:*

1. $F \to \hat{F} \in Ker(\mathcal{A}^+) \bigcap Ker(\mathcal{B}_s), \qquad G \to \hat{G} \in Ker(\mathcal{A}_s) \bigcap Ker(\mathcal{B}^+)$
2. $F \to \hat{F} \in Ker(\mathcal{A}^+) \bigcap Ker(\mathcal{B}_s), \qquad g \to \hat{g} \in Ker(\mathcal{A}_s) \bigcap Ker(\mathcal{B}_s)$
3. $f \to \hat{f} \in Ker(\mathcal{A}_s) \bigcap Ker(\mathcal{B}_s), \qquad G \to \hat{G} \in Ker(\mathcal{A}_s) \bigcap Ker(\mathcal{B}^+)$
4. $f, g \to \hat{f}, \hat{g} \in Ker(\mathcal{A}_s) \bigcap Ker(\mathcal{B}_s)$

Demonstração: Semelhante à prova do Teorema 3.1.9 □

Este resultado pode ser extendido, como no Teorema 3.1.11, para o caso de qualquer álgebra abeliana finita gerada por $g_a(x) = B_a x + G_a(x)$ com $a = 0, 1, \ldots, d$; ou seja,

Teorema 3.2.8 *Suponha que $\{f = g_0, g_1, \ldots, g_d\}$ gera uma álgebra de Lie abeliana $\mathbf{g}$ sob o colchete de Lie-Poisson. Então podemos colocar $\{f = g_0, g_1, \ldots, g_d\}$, por meio de uma sequência de P-transformações (formais), em qualquer uma das seguintes formas normais simultâneas:*

1. $G_j \to \hat{G}_j \in Ker(\mathcal{B}_j^+) \bigcap\limits_{\substack{a=0 \\ a \neq j}}^{d} Ker(\mathcal{B}_{a,s}), \qquad g_b \to \hat{g}_b \bigcap\limits_{\substack{a=0 \\ b \neq j}}^{d} Ker(\mathcal{B}_{a,s})$
2. $g_b \to \hat{g}_b \bigcap\limits_{a=0}^{d} Ker(\mathcal{B}_{a,s}), \ (b = 0, 1, \ldots, d)$

onde $\mathcal{B}_{a,s}$ é o operador homológico associado à parte semi-simples B_a.

Para álgebras não comutativas é, em geral, difícil (ou impossível) obtermos resultados similares. Uma exceção importante é dada por álgebras nilpotentes para a qual verificaremos no próximo teorema.

Teorema 3.2.9 *Seja* $\mathbf{g}$ *uma álgebra de Lie e* $\mathbf{h}$ *uma subálgebra nilpotente gerada por* $g_a = B_a + G_a(x)$ *com* $a = 0, 1, \ldots, d$. *Então podemos obter, por meio de P-transformações (formais), a mesma forma normal simultânea do Teorema 3.2.8.*

Demonstração: Sendo $\mathbf{h}$ uma subálgebra nilpotente, então existe um inteiro m não negativo tal que

$$\mathbf{h}^1 = \mathbf{h},\ \mathbf{h}^2 = [\mathbf{h}, \mathbf{h}],\ \mathbf{h}^3 = [\mathbf{h}, \mathbf{h}^2], \ldots,\ [\mathbf{h}, \mathbf{h}^m] = 0$$

O último comutador, $[\mathbf{h}, \mathbf{h}^m] = 0$, diz que:

1. O ideal $\mathcal{H}^m$, gerado por $\mathbf{h}^m$, é abeliano (pois $\mathbf{h}^m$ pertence ao centro de $\mathbf{h}$).

2. Qualquer campo de vetores em $\mathcal{H}^m$ comuta com qualquer $g_a \in \mathbf{h}$.

Assim, aplicando o Teorema 3.2.8 em $[g_a, \mathbf{h}^m] = 0$, para cada $g_a \in \mathbf{h}$, obteremos o resultado desejado. □

Observação 3.2.10 *Note que nos teoremas acima assumimos explicitamente que a parte semi-simples das matrizes envolvidas estão escritas como matrizes normais: de fato, isto pode ser obtido por meio de uma transformação linear, não somente no caso de uma simples matriz - como já notado - mas também para uma álgebra de matrizes nilpotentes (ou em particular, abeliana).*

3.3 Simetrias Reversas

Discutiremos um tipo particular de simetria que é a simetria reversa em sistemas dinâmicos com tempo contínuo.

Um sistema dinâmico com tempo contínuo pode admitir aplicações $R : \Omega \to \Omega$ que levam trajetórias para outras trajetórias revertendo a direção. Isto é, se $x(t)$ é solução de $\dot{x} = f(x)$, então $R(x(-t))$ também será solução do sistema, a qual é a reflexão por R da trajetória $x(-t)$ percorrida no sentido inverso do tempo. Tais aplicações serão chamadas de simetrias reversas.

Definição 3.3.1 *Um difeomorfismo $R : \Omega \to \Omega$ é uma simetria reversa do sistema dinâmico $f(x)$ se*

$$\frac{d}{dt}(R(x)) = -f(R(x))$$

ou, equivalentemente, se

$$(DR)(x)f(x) = -f(R(x)).$$

Dizemos que o sistema dinâmico $f(x)$ é fracamente reversível.

Exemplo 3.3.2 *Considere o seguinte sistema em $\mathbb{R}$*

$$\dot{x} = x(1-x).$$

Uma simetria reversa deste é dada por

$$R(x) = 1 - x,$$

pois,

$$-f(R(x)) = -f(1-x) = -(1-x)[1-(1-x)] = -x(1-x).$$

Por outro lado,

$$(DR)(x)f(x) = -f(x) = -x(1-x).$$

Ressaltamos que, em geral, as simetrias não precisam ser lineares. Vejamos agora um exemplo de simetria não linear.

Exemplo 3.3.3 *Seja*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dot{x} = xy - x^3 \\ \dot{y} = x + y^2 - x^4 \end{cases}$$

Considere $R(x,y) = (x, -y + 2x^2)$. A derivada de R no ponto (x,y) é

$$(DR)(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4x & -1 \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$(DR)(x,y)f(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4x & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} xy - x^3 \\ x + y^2 - x^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy - x^3 \\ -x - y^2 + 4x^2y - 3x^4 \end{pmatrix}.$$

Por outro lado,

$$-f(R(x,y)) = -f(x,-y+2x^2) = \begin{pmatrix} xy - x^3 \\ -x - y^2 + 4x^2y - 3x^4 \end{pmatrix}.$$

Portanto $(DR)(x,y)f(x,y) = -f(R(x,y))$.

3.4 Sistemas Dinâmicos Reversíveis

Com base na seção anterior, estamos prontos para definirmos sistemas dinâmicos reversíveis com relação a involução S.

Definição 3.4.1 *Seja M uma variedade diferenciável de dimensão n e de classe C^∞. Um difeomorfismo $\varphi : M \to M$ de classe C^∞ é chamado de involução se $\varphi^2 = I$.*

Teorema 3.4.2 (Montgomery-Bochner) *[13]*
Seja G um grupo compacto de difeomorfismos de uma variedade M de classe C^k $(k \geq 1)$ ou analítica. Suponha que cada difeomorfismo de G é de classe C^k ou analítico. Então na vizinhança de um ponto fixo estacionário, coordenadas admissíveis podem ser escolhidas tais que os difeomorfismos sejam lineares.

Observação 3.4.3 *Se considerarmos $G = \{I, \varphi\}$, em consequência do Teorema de Montgomery-Bochner, obtemos que toda involução, na vizinhança de um ponto fixo, pode ser linearizada. Assim, em nosso trabalho estaremos sempre supondo que $M = \mathbb{R}^n$ e $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é uma involução linear.*

Seja $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma simetria reversa linear do campo de vetores $f(x)$. Como S é linear,

$$(DS)(x)f(x) = Sf(x) = -f(S(x)).$$

Note que, neste caso, o sistema dinâmico f também pode ser visto como uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^∞.

Definição 3.4.4 *O sistema dinâmico (2.1) será chamado reversível se existir uma involução linear $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que*

$$f(S(x)) = -Sf(x). \tag{3.5}$$

Dizemos também que o campo de vetores $f(x)$ é S-reversível.

O nome reversível é devido ao fato que tal sistema é invariante sob a transformação

$$\begin{cases} x \to Sx \\ t \to -t \end{cases}$$

Vejamos agora alguns exemplos de sistemas dinâmicos reversíveis.

Exemplo 3.4.5 *Seja*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dot{x} = 3x^2y - 8y \\ \dot{y} = x - y^2 \end{cases}$$

Considere

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$f(S(x,y)) = f(x,-y) = \begin{pmatrix} -3x^2y + 8y \\ x - y^2 \end{pmatrix}.$$

Por outro lado,

$$-Sf(x) = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3x^2y - 8y \\ x - y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x^2y + 8y \\ x - y^2 \end{pmatrix}.$$

Portanto $f(x,y)$ é reversível.

Exemplo 3.4.6 *No plano todos os campos de vetores da forma*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dot{x} = yh_1(x,y^2) \\ \dot{y} = h_2(x,y^2) \end{cases}$$

são reversíveis com respeito a

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pois,

$$f(S(x,y)) = f(x,-y) = \begin{pmatrix} -yh_1(x,y^2) \\ h_2(x,y^2) \end{pmatrix}.$$

Por outro lado,

$$-Sf(x) = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} yh_1(x,y^2) \\ h_2(x,y^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -yh_1(x,y^2) \\ h_2(x,y^2) \end{pmatrix}.$$

Exemplo 3.4.7 *Seja*

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \dot{x} = xz + y - 2 \\ \dot{y} = -x + yz \\ \dot{z} = -x^2 - y^2 + 5 \end{cases}$$

Considere

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$f(S(x,y,z)) = f(-x,y,-z) = \begin{pmatrix} xz + y - 2 \\ x - yz \\ -x^2 - y^2 + 5 \end{pmatrix}.$$

Por outro lado,

$$-Sf(x,y,z) = -\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} xz + y - 2 \\ -x + yz \\ -x^2 - y^2 + 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xz + y - 2 \\ x - yz \\ -x^2 - y^2 + 5 \end{pmatrix}.$$

Portanto $f(x,y,z)$ é reversível.

Exemplo 3.4.8 *Seja*

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x - yz \\ \dot{z} = y^2 - 3 \end{cases}$$

Considere

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$f(S(x,y,z)) = f(x,-y,-z) = \begin{pmatrix} -y \\ -x - yz \\ y^2 - 3 \end{pmatrix}.$$

Por outro lado,

$$-Sf(x,y,z) = -\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ -x-yz \\ y^2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ -x-yz \\ y^2-3 \end{pmatrix}.$$

Portanto $f(x,y,z)$ é reversível.

Capítulo 4

Formas Normais de Sistemas Dinâmicos Reversíveis

Neste capítulo, apresentaremos o resultado principal deste trabalho. O texto básico utilizado, neste capítulo, foi [9].

4.1 Introdução e Exposição do Problema

No estudo de sistemas dinâmicos reversíveis, uma das muitas dificuldades reside no fato que embora seja fácil para decidir se um dado sistema dinâmico é reversível com respeito a uma dada involução S, não é fácil saber se dado um sistema dinâmico existe alguma involução S sob a qual ele é reversível. Neste aspecto, a teoria de formas normais é de grande utilidade na classificação de sistemas dinâmicos reversíveis. Em particular, ela será útil se pudermos encontrar condições sob as quais um sistema dinâmico S-reversível, quando reduzido a uma forma normal, esta forma normal é ainda S-reversível.

Este é, na verdade, um dos principais objetivos desta dissertação e demonstraremos abaixo que é possível encontrar tais condições para que a propriedade mencionada acima seja verdadeira.

O mesmo conceito pode ser expresso num caminho mais abstrato em termos de diagramas, o qual oferecerá uma oportunidade de introduzir a notação à ser usada no que segue-se.

Seja $\mathcal{N}$ o conjunto de campos de vetores de classe C^∞ definidos em $\mathbb{R}^n$. Seja $\mathcal{R}_S \subset \mathcal{N}$ o conjunto dos campos de vetores reversíveis com respeito à S. Sejam π_S a projeção

$\pi_S : \mathcal{N} \to \mathcal{R}_S$ (a qual está bem definida, pois, demonstraremos na próxima seção que se $S^2 = I$, então $\mathcal{N} = \mathcal{C}_S \oplus \mathcal{R}_S$ onde $\mathcal{C}_S = \{f \in \mathcal{N}; f(Sx) = Sf(x)\} \subset \mathcal{N}$), ϑ um operador o qual associa a cada campo de vetores sua forma normal canônica (ver Definição 2.27) e $\mathcal{P}$ o conjunto de campo de vetores escrito na forma normal canônica, isto é, $\mathcal{P} = \vartheta(\mathcal{N})$. Preferimos, então, provar que o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{N} & \xrightarrow{\vartheta} & \mathcal{P} \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_S} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_S} \\ \mathcal{R}_S & \xrightarrow{\vartheta} & \mathcal{P}_S \end{array}$$

Observamos que, a priori, os conjuntos $\vartheta(\mathcal{R}_S) \neq \pi_S(\mathcal{P})$. Na verdade, $\pi_S(\mathcal{P})$ representa o conjunto de campos de vetores na forma normal canônica os quais estão em $\mathcal{R}_S$, isto é, $\pi_S(\mathcal{P}) = (\mathcal{P} \cap \mathcal{R}_S) = \mathcal{P}_S$.

Observação 4.1.1 *Observe que se $w \in \mathcal{P}_S$, então $w \in \mathcal{R}_S$ e $\vartheta(w) = w$, portanto*

$$\mathcal{P}_S \subseteq \vartheta(\mathcal{R}_S) = \mathcal{P}'_S.$$

Pode acontecer que um campo de vetores reversível seja levado por ϑ em uma forma normal canônica não reversível (ou uma forma normal canônica reversível com respeito à uma S diferente). Vamos demonstrar que sob certas condições isto não ocorre, ou seja, $\mathcal{P}'_S = \mathcal{P}_S$.

Como já sugerimos anteriormente, consideraremos em nosso trabalho somente o caso de involuções lineares, isto é, S será uma matriz real $n \times n$. Note que, neste caso, $x = 0$ é necessariamente um ponto fixo de S. O caso de involuções não lineares é consideravelmente mais complicado, pois as transformações de coordenadas necessárias para levar o sistema dinâmico à uma forma normal também modificará a representação das coordenadas de S.

Exigiremos que a matriz A satisfaça uma propriedade mais forte em relação à propriedade P do Capítulo 2, ou seja,

Propriedade T. A matriz $A=(Df)(0)$ é normal, isto é, $[A, A^+] = 0$.

Neste caso, também temos $[\mathcal{A}, \mathcal{A}^+] = 0$. Isto implica, em particular, que

$$\mathcal{N} = Ker(\mathcal{A}) \oplus Im(\mathcal{A}). \tag{4.1}$$

Introduziremos a projeção θ na imagem de $\mathcal{A}$,

$$\begin{aligned} \theta \ : \ \mathcal{N} &\longrightarrow \quad Im(\mathcal{A}) \\ f &\longmapsto \theta(f) = \sum_{k\geq 1} \theta(F_k) \end{aligned}$$

Portanto, pela Observação 2.26, a equação homológica $\mathcal{A}(h_k) = \theta(F_k)$, $k \geq 2$, tem solução única, com relação h_k acima, para um $\delta h_k \in Ker(\mathcal{A})$.

Observação 4.1.2 *Obtemos, pelo fato do $Ker(\mathcal{A})$ ser justamente o complemento ortogonal da $Im(\mathcal{A})$, que*

$$\theta(F_k) = \begin{cases} 0, & se \quad F_k \in Ker(\mathcal{A}) \\ F_k, & se \quad F_k \in Im(\mathcal{A}) \end{cases}$$

Como mencionamos acima, a solução da equação homológica $\mathcal{A}(h_k) = \theta(F_k)$, com $k \geq 2$, é única desde que $h_k \in [Ker(\mathcal{A})]^c$. Se a propriedade T é satisfeita, então podemos exigir $h_k \in Im(\mathcal{A})$. Isto nos diz que podemos expressar f na forma normal canônica.

4.2 Alguns Fatos Algébricos

Considere a matriz S satisfazendo $S^2 = I$. Para esta matriz associaremos dois conjuntos de campos de vetores, ou seja, o conjunto $\mathcal{C}_S \subset \mathcal{N}$ de campos de vetores comutando com S e o conjunto $\mathcal{R}_S$ de campos de vetores, os quais são reversíveis com respeito à S (anti-comutando com S):

$$\mathcal{C}_S = \{f \in \mathcal{N}; f(Sx) = Sf(x)\} \subset \mathcal{N}$$

$$\mathcal{R}_S = \{f \in \mathcal{N}; f(Sx) = -Sf(x)\} \subset \mathcal{N}$$

Lema 4.2.1 *Se $S^2 = I$, então $\mathcal{N} = \mathcal{C}_S \oplus \mathcal{R}_S$.*

Demonstração: Primeiramente vamos mostrar que para todo $f \in \mathcal{N}$ existem campos de vetores $\phi \in \mathcal{C}_S$, $\psi \in \mathcal{R}_S$ tais que

$$f(x) = \phi(x) + \psi(x). \tag{4.2}$$

Utilizando a decomposição (4.2), obtemos

$$f(Sx) = \phi(Sx) + \psi(Sx) = S\phi(x) - S\psi(x). \tag{4.3}$$

Como S é um operador linear, ainda podemos obter de (4.2) que

$$Sf(x) - S\psi(x) = S\phi(x). \tag{4.4}$$

Substituindo $S\phi(x)$ em (4.3) obtemos que

$$f(Sx) = Sf(x) - 2S\psi(x). \tag{4.5}$$

Somando (4.3) com (4.4), temos que

$$f(Sx) = -Sf(x) + 2S\phi(x). \tag{4.6}$$

Assim, de (4.5) e (4.6), definimos

$$\phi(x) = \frac{1}{2}[Sf(Sx) + f(x)] \text{ e } \psi(x) = -\frac{1}{2}[Sf(Sx) - f(x)].$$

i) $\phi \in \mathcal{C}_S$, pois

$$\phi(Sx) = \frac{1}{2}[Sf(SSx) + f(Sx)] = \frac{1}{2}[Sf(x) + f(Sx)] = S\phi(x).$$

ii) $\psi \in \mathcal{R}_S$, pois

$$\psi(Sx) = -\frac{1}{2}[Sf(SSx) - f(Sx)] = \frac{1}{2}[f(Sx) - Sf(x)] = -S\psi(x).$$

iii) $\phi(x) + \psi(x) = \frac{1}{2}[Sf(Sx) + f(x)] + -\frac{1}{2}[Sf(Sx) - f(x)] = f(x)$.
Por outro lado,

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_S \cap \mathcal{R}_S &= \{f \in \mathcal{N}; f(Sx) = Sf(x) \text{ e } f(Sx) = -Sf(x)\} \\ &= \{f \in \mathcal{N}; Sf(x) = f(Sx) = -Sf(x)\} \\ &= \{0\}. \end{aligned}$$

Portanto $\mathcal{N} = \mathcal{C}_S \oplus \mathcal{R}_S$. □

Lema 4.2.2 *Se $h \in \mathcal{C}_S$, então $(Dh)(Sx) = S[(Dh)(x)]S^{-1}$.*

Demonstração: Considere a função $\tilde{h}(x) = h(Sx)$. Sua derivada é

$$(D\tilde{h})(x) = D[h(Sx)] = (Dh)(Sx)S.$$

Como $h(Sx) = Sh(x)$ (pois $h \in \mathcal{C}_S$), $\tilde{h}(x) = Sh(x)$. Logo,

$$(Dh)(Sx)S = (D\tilde{h})(x) = S[(Dh)(x)].$$

Portanto $(Dh)(Sx) = S[(Dh)(x)]S^{-1}$. □

Lema 4.2.3 *Se $h \in \mathcal{R}_S$, então $(Dh)(Sx) = -S[(Dh)(x)]S^{-1}$.*

Demonstração: A demonstração é semelhante à do Lema 4.2.2. □

4.3 Resultado Principal

Primeiramente, notemos que, como S é um operador linear, (3.5) implica que

$$F_n(Sx) = -SF_n(x)$$

o qual impõe em particular para o termo constante, $F_0(x) \equiv F_0$, que

$$SF_0 = -F_0(S(x)) = -F_0.$$

Assumiremos, então, que $F_0 = 0$; assim a decomposição,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(x) = Ax + \sum_{n=2}^{\infty} F_n(x),$$

se aplica.

Portanto, para $n = 1$ obtemos

$$AS = -SA. \tag{4.7}$$

Agora podemos começar a demonstrar o teorema principal. Dividimos a demonstração em poucos passos e assumiremos que o sistema dinâmico $f(x)$ é reversível.

Lema 4.3.1 *Se A satisfaz (4.7), então $\mathcal{A}$ permuta $\mathcal{C}_S$ e $\mathcal{R}_S$, isto é,*

$$\mathcal{A} : \mathcal{C}_S \to \mathcal{R}_S \quad e \quad \mathcal{A} : \mathcal{R}_S \to \mathcal{C}_S.$$

Demonstração: Seja $g(x) = \mathcal{A}(h)(x) = [(Dh)(x)]Ax - Ah(x)$. Agora, considere

$$g(Sx) = [(Dh)(Sx)]ASx - Ah(Sx),$$

a qual para $h(Sx) = \pm Sh(x)$ obtemos

$$\begin{aligned} g(Sx) &= \pm S[(Dh)(x)]S^{-1}ASx \mp ASh(x) \text{ (pelos Lemas 4.2.2 e 4.2.3)} \\ &= \mp S[(Dh)(x)]S^{-1}SAx \pm SAh(x) \text{ (devido 4.7)} \\ &= \mp S[(Dh)(x)]Ax \pm SAh(x) \\ &= \mp S\{[(Dh)(x)]Ax - Ah(x)\} \text{ (pois } S \text{ é um operador linear)} \\ &= \mp Sg(x). \end{aligned}$$

Desse fato, concluímos a demonstração do Lema. □

Corolário 4.3.2 *Se $\mathcal{A}(h) \in \mathcal{R}_S$, então $h = h_0 + h_1$ com $h_0 \in \mathcal{C}_S$ e $h_1 \in Ker(\mathcal{A})$.*

Demonstração: Sabemos pelo Lema 4.2.1 que $\mathcal{N} = \mathcal{C}_S \oplus \mathcal{R}_S$. Seja $h = h_0 + h_1$, onde $h_0 \in \mathcal{C}_S$ e $h_1 \in \mathcal{R}_S$. Assim $\mathcal{A}(h) = \mathcal{A}(h_0) + \mathcal{A}(h_1)$. Pelo Lema 4.3.1, temos que $\mathcal{A}(h_0) \in \mathcal{R}_S$ e $\mathcal{A}(h_1) \in \mathcal{C}_S$. Logo $\mathcal{A}(h) - \mathcal{A}(h_0) = \mathcal{A}(h_1)$, onde $\mathcal{A}(h) - \mathcal{A}(h_0) \in \mathcal{R}_S$ e $\mathcal{A}(h_1) \in \mathcal{C}_S$. Como $\mathcal{N} = \mathcal{C}_S \oplus \mathcal{R}_S$, $\mathcal{A}(h_1) = 0$. Portanto $h_1 \in Ker(\mathcal{A})$. □

Corolário 4.3.3 *Se $g \in \mathcal{R}_S \cap Im(\mathcal{A})$, então $\mathcal{A}(h) = g$ admite uma solução $h \in \mathcal{C}_S$.*

Demonstração: Como $g \in Im(\mathcal{A})$, existe $h = h_1 + h_2$ com $h_1 \in \mathcal{C}_S$ e $h_2 \in \mathcal{R}_S$ tal que $\mathcal{A}(h) = g$. Assim,

$$\mathcal{A}(h) = \mathcal{A}(h_1) + \mathcal{A}(h_2) = g.$$

Obtemos, pelo Lema 4.3.1, que $\mathcal{A}(h_1) \in \mathcal{R}_S$ e $\mathcal{A}(h_2) \in \mathcal{C}_S$. Logo

$$(\mathcal{A}(h_1) - g) + \mathcal{A}(h_2) = 0.$$

Como $\mathcal{N} = \mathcal{C}_S \oplus \mathcal{R}_S$, temos que $\mathcal{A}(h_1) - g = 0$ com $h_1 \in \mathcal{C}_S$. □

Deve ser enfatizado que $\mathcal{A}$ controla a transformação dos termos F_k de mesma ordem como também as funções h_k geradas pelas P-transformações, mas não as transformações induzidas em termos de ordem superior. Em particular, pode acontecer a priori que a ação da P-transformação com $h_k \in \mathcal{C}_S$ leva um campo de vetores reversível em um não reversível. Esta eventualidade é excluída pelo resultado seguinte.

Lema 4.3.4 *Se $f \in \mathcal{R}_S$ e $h \in \mathcal{C}_S$, então f é levada por meio de P-transformações, $x \to \tilde{x} = x + h(x)$, em um novo campo de vetores $\tilde{f} \in \mathcal{R}_S$.*

Demonstração: A expressão explícita de $\tilde{f}$ é dada, na demonstração do Lema 2.17, por

$$\tilde{f} = [I + (Dh)(x)]^{-1} f(x + h(x)).$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(Sx) &= [I + (Dh)(Sx)]^{-1} f(Sx + h(Sx)) \\
&= [SIS^{-1} + S(Dh)(x)S^{-1}]^{-1} f(Sx + h(Sx)) \text{ (pelo Lema 4.2.2)} \\
&= [SIS^{-1} + S(Dh)(x)S^{-1}]^{-1} f(Sx + Sh(x)) \text{ (pois } h \in \mathcal{C}_S) \\
&= S[I + (Dh)(x)]^{-1} S^{-1} f(S(x + h(x))) \text{ (pois } S \text{ é um operador linear)} \\
&= -S[I + (Dh)(x)]^{-1} S^{-1} S f(x + h(x)) \text{ (pois } f \in \mathcal{R}_S) \\
&= -S\tilde{f}(x)
\end{aligned}$$

Portanto $\tilde{f} \in \mathcal{R}_S$. □

Lema 4.3.5 *Sejam $S^2 = I$, a matriz A satisfazendo a propriedade T e θ a projeção $\theta : \mathcal{N} \to Im(\mathcal{A})$. Se $f \in \mathcal{R}_S$, então $\theta f \in \mathcal{R}_S$.*

Demonstração: Como $S^2 = I$ e $[A, A^+] = 0$, garantimos que o Lema 4.2.1 e a decomposição (4.1) são válidos. Consequentemente podemos decompor qualquer campo de vetores $f \in \mathcal{N}$ em:

$$f(x) = \phi_+(x) + \phi_-(x) + \psi_+(x) + \psi_-(x)$$

onde $\phi_\pm \in Ker(\mathcal{A})$, $\psi_\pm \in Im(\mathcal{A})$ e $\zeta_\pm(Sx) = \pm S\zeta(x)$ com $\zeta = \phi, \psi$. Sendo $f \in \mathcal{R}_S$, isto implica que devemos ter $\phi_+(x) = -\psi_+(x)$. Como estes pertencem à subespaços complementares (devido $[A, A^+] = 0$), necessariamente $\phi_+(x) = \psi_+(x) = 0$. Assim, pela hipótese de θ ser a projeção, $\theta : \mathcal{N} \to Im(\mathcal{A})$, obtemos $\theta(f) = \theta(\phi_-) + \theta(\psi_-) = \psi_- \in \mathcal{R}_S$ (pois $\phi_- \in Ker(\mathcal{A})$ e $\psi_- \in Im(\mathcal{A})$; portanto, pela Observação 4.1.2, temos que $\theta(\phi_-) = 0$ e $\theta(\psi_-) = \psi_-$). □

Isto também conclui a prova dos ingredientes necessários para demonstrarmos o resultado principal, o qual enunciaremos a seguir.

Teorema 4.3.6 *Sejam $S^2 = I$, $f \in \mathcal{R}_S$ e $A = (Df)(0)$ satisfazendo a propriedade T. Então a redução de f à forma normal canônica é S-reversível, ou seja, $w = \vartheta(f) \in \mathcal{R}_S$.*

Demonstração: Seja $f(x) = Ax + \sum_{k \geq 2} F_k(x) \in \mathcal{R}_S$. Pela hipótese, $f \in \mathcal{R}_S$, obtemos que $AS = -SA$. Podemos garantir, devido ao Lema 4.3.5, $\theta(F_k) \in \mathcal{R}_S$ para todo $k \geq 2$. Logo, pelo corolário 4.3.3, é possível escolher $h_k \in \mathcal{C}_S$ tal que $h_k \in Im(\mathcal{A})$, onde h_k é a

solução da equação homológica $\mathcal{A}(h_k) = \theta(F_k)$. Portanto, pelo Lema 4.3.4, $\vartheta(f) \in \mathcal{R}_S$, ou seja, $\vartheta : \mathcal{R}_S \to \mathcal{R}_S$. □

Corolário 4.3.7 $\vartheta(\mathcal{R}_S) \equiv \mathcal{P}'_S = \mathcal{P}_S \equiv \mathcal{P} \cap \mathcal{R}_S \equiv \pi_S(\mathcal{P})$.

Demonstração: Já mostramos, pelo Teorema 4.3.6, que $\vartheta : \mathcal{R}_S \to \mathcal{R}_S$. Isto implica que

$$\vartheta(\mathcal{R}_S) \equiv \mathcal{P}'_S \subseteq \vartheta(\mathcal{N}) \cap \mathcal{R}_S \equiv \mathcal{P} \cap \mathcal{R}_S \equiv \mathcal{P}_S.$$

Por outro lado, como já vimos, na observação 4.1.1, que ϑ é a identidade em $\mathcal{P}$, então

$$\vartheta(\mathcal{P}_S) = \vartheta(\mathcal{P} \cap \mathcal{R}_S) \equiv \mathcal{P} \cap \mathcal{R}_S \equiv \mathcal{P}_S \subseteq \vartheta(\mathcal{R}_S) \equiv \mathcal{P}'_S.$$

Portanto $\mathcal{P}'_S = \mathcal{P}_S$. □

Ressaltamos que sua prova também nos permite à identificar os sistemas dinâmicos reversíveis dos quais correspondem a uma forma normal canônica dada, ou seja,

Corolário 4.3.8 *Dado um campo de vetores $w(x) \in \mathcal{P}_S$ na forma normal, então um sistema dinâmico f tal que $\vartheta(f) = w$ pode ser obtido estendendo-se, por meio de P-transformações, à forma normal w com $h_k \in \mathcal{C}_S$.*

Exemplo 4.3.9 *Sejam A e S, dadas por*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Observe que $A = A^+$ e $\mathcal{A} = \mathcal{A}^+$, ou seja, a propriedade T é verificada. Seja

$$f(x,y) = \begin{cases} \dot{x} = f^+(x,y) \\ \dot{y} = f^-(x,y) \end{cases}$$

Queremos encontrar condições tais que $f \in \mathcal{R}_S$. Para isto, primeiramente, suponha que f tenha somente termos quadráticos, isto é,

$$f(x,y) = \begin{cases} \dot{x} = f^+(x,y) = x + a_1x^2 + a_2xy + a_3y^2 \\ \dot{y} = f^-(x,y) = -y + b_1x^2 + b_2xy + b_3y^2 \end{cases}$$

Pela condição de reversibilidade (f(Sx)=-Sf(x)), temos que

$$\begin{pmatrix} y + a_1y^2 + a_2xy + a_3x^2 \\ -x + b_1y^2 + b_2xy + b_3x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y - b_1x^2 - b_2xy - b_3y^2 \\ -x - a_1x^2 - a_2xy - a_3y^2 \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$\begin{cases} b_1 = -a_3 \\ b_2 = -a_2 \\ b_3 = -a_1 \end{cases}$$

Generalizando este fato para termos de qualquer ordem, obtemos que $f \in \mathcal{R}_S$ se, e somente se,

$$f(x,y) = \begin{cases} \dot{x} = f^+(x,y) = x + \sum_{i,j\geq 1}^{\infty} \alpha_{i,j}(x^iy^j) \\ \dot{y} = f^-(x,y) = -y + \sum_{i,j\geq 1}^{\infty} -\alpha_{j,i}(x^jy^i) \end{cases} \tag{4.8}$$

Observe que a matriz A é ressonante com ressonâncias do tipo $q_1 - q_2 = \lambda_1 = 1$ e $q_1 - q_2 = \lambda_2 = -1$. Isto implica que os monômios ressonantes são da forma

$$(x^{q_2+1}y^{q_2})e_1 \quad e \quad (x^{q_2-1}y^{q_2})e_2.$$

Logo $f \in Ker(\mathcal{A})$ se, e somente se,

$$f(x,y) = \begin{cases} \dot{x} = f^+(x,y) = x + \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m(xy)^m x \\ \dot{y} = f^-(x,y) = -y + \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m(xy)^m y \end{cases} \tag{4.9}$$

A teoria de formas normais nos diz que dado qualquer sistema f com parte linear A, podemos reduzir o problema estudando um sistema dado por $w = \vartheta(f) \in Ker(\mathcal{A})$, ou seja, um sistema da forma (4.9). O Teorema 4.3.6 garante que podemos considerar somente formas normais reversíveis, isto é, basta estudarmos o caso em que $f \in \mathcal{R}_S \cap Ker(\mathcal{A})$. No presente caso, temos que $f \in \mathcal{R}_S \cap Ker(\mathcal{A})$ se, e somente se,

$$f(x,y) = \begin{cases} \dot{x} = f^+(x,y) = x + \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m(xy)^m x \\ \dot{y} = f^-(x,y) = -y + \sum_{m=1}^{\infty} -\beta_m(xy)^m y \end{cases} \tag{4.10}$$

Claramente, isto representa uma grande simplificação com respeito a ambos sistemas (4.8) e (4.9).

Apêndice A

Convergência das P-transformações

Neste Apêndice, vamos estabelecer algumas condições nas quais podemos garantir a convergência das P-transformações.

A.1 Convergência da Transformação Normalizante

Como já enfatizado na Observação 2.5, a transformação normalizante, isto é, a sequência de P-transformações necessárias para levar o sistema dinâmico $f(x)$ à forma normal de Poincaré-Dulac, é em geral somente formal. Do mesmo modo, não podemos garantir que o raio de convergência destas transformações normalizantes é maior que zero. Estamos interessados na convergência ou divergência destas transformações normalizantes, e veremos que as propriedades simétricas do sistema pode desempenhar uma função importante neste problema. Assumiremos, como no Capítulo 2, que a matriz $A = (Df)(0)$ é semi-simples.

Uma condição suficiente para garantirmos a convergência da transformação normalizante é dada pelo critério de Poincaré (para maiores detalhes, ver [1]).

Definição A.1.1 *Seja $K \subset \mathbb{R}^n$. Definimos o envoltório convexo de K como a interseção de todos os conjuntos convexos que contém K.*

Teorema A.1.2 (Poincaré) *Se os autovalores, $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, da matriz $A = (Df)(0)$ do campo de vetores analítico f pertencem ao domínio de Poincaré, isto é, se o envoltório convexo dos pontos $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ no plano complexo não contém o zero, então a transformação normalizante é convergente e a forma normal é analítica.*

Exemplo A.1.3 *Considere o seguinte sistema dinâmico em* $\mathbb{R}^2$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dot{x} = x + x^2y^2 - x^4 + x^4y \\ \dot{y} = 3y + y^2 + y^3x - y^5x^2 \end{cases}$$

Cuja parte linear é dada por

$$A = (Df)(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Como os autovalores da matriz A pertencem ao domínio de Poincaré, pelo Teorema A.1.2, a transformação normalizante é convergente e a forma normal, $\hat{f}$*, é analítica.*

Exemplo A.1.4 *Considere o seguinte sistema dinâmico em* $\mathbb{R}^3$

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \dot{x} = -x + 2x^3y + 5xy^2z \\ \dot{y} = -3y + 3x^2y^2 + y^3z \\ \dot{z} = -9z + 4y^2z^2 \end{cases}$$

Cuja parte linear é dada por

$$A = (Df)(0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}.$$

Como os autovalores da matriz A pertencem ao domínio de Poincaré, pelo Teorema A.1.2, a transformação normalizante é convergente e a forma normal, $\hat{f}$*, é analítica.*

Também existem duas condições bastante utilizadas, dadas por Bruno, as quais chamaremos de Condição A e Condição ω (para maiores detalhes, ver [3, 4]). Elas garantem que uma função vetorial, $f(x) = Ax + F(x)$, pode ser levada, por uma transformação normalizante convergente, em uma forma normal. Por conveniência, expressaremos a Condição A em sua forma simples: Para esta finalidade, assumiremos por um momento que existe uma reta passando pela origem no plano complexo tal que esta reta contém todos autovalores da matriz A (ou seja, $\lambda_i = c_i\lambda_0$ para algum $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ e com $c_i \in \mathbb{R}$. Se todos os c_i tem o mesmo sinal, então a convergência é também garantida pelo Teorema A.1.2). Observe que se A é uma matriz real, isto implica que os autovalores são todos

reais ou todos imaginários puros. Então a Condição A diz o seguinte:

Condição A: Um campo de vetores $\hat{f}$ na forma normal satisfaz a Condição A se $\hat{f}$ tem a forma $\hat{f}(x) = Ax + \alpha(x)Ax$, onde $\alpha(x)$ é alguma série de potências com $\alpha(0) = 0$.

Na verdade, dependendo da posição dos autovalores da matriz A no plano complexo, existem versões diferentes da Condição A. Estas versões podem alterar a afirmação acima de acordo com [3]. Note, entretanto, que em muitas aplicações, e em particular quando a forma normal é linear, a formulação acima da Condição A é suficiente. A outra condição é:

Condição ω: Seja $\omega_k = min\,|(Q.\lambda) - \lambda_j|$ para todo $j = 1, \ldots, n$. Se toda n-upla de inteiros não negativos q_i satisfaz

$$1 < \sum_{i=1}^{n} q_i < 2^k \quad e \quad (Q.\lambda) = \sum_{i=1}^{n} q_i\lambda_i \neq \lambda_j,$$

então $\sum_{i=1}^{\infty} 2^{-k} ln(\omega_k^{-1}) < \infty$.

Esta condição foi desenvolvida para controlar o aparecimento de pequenos divisores nas séries de transformações normalizantes. Ela é mais fraca que a condição generalizada de Siegel, a qual diz que existem $\epsilon > 0$ e $\tau > 0$ tais que

$$|(Q.\lambda) - \lambda_j| > \epsilon \left[\sum_{i=1}^{n} |q_i|\right]^{-\tau}.$$

Ainda, é mais fraca que a simples condição

$$|(Q.\lambda) - \lambda_j| > \epsilon > 0,$$

para toda n-upla $Q = (q_1, \ldots, q_n)$ satisfazendo $(Q.\lambda) \neq \lambda_j$ (ver [3, 4]). Com estas duas condições, temos então:

Teorema A.1.5 (Bruno) *Se $A = (Df)(0)$ satisfaz a Condição ω e f pode ser levado, por meio de P-transformações, à uma forma normal $\hat{f}$ a qual satisfaz a Condição A, então existe uma transformação normalizante convergente para f.*

Aqui e no que segue "convergência" significará "convergência em alguma vizinhança aberta do ponto fixo $x_0 = 0$". Também assumiremos que a matriz $A = (Df)(0)$ sempre

satisfaz a Condição ω, ou seja,

Propriedade C A matriz $A = (Df)(0)$ satisfaz a Condição ω.

A.2 Transformações Normalizantes na Presença de Simetrias infinitesimais

Seja f um campo de vetores. Pode ser de grande ajuda, no problema de normalizar este campo, a presença de alguma simetria g. Discutiremos brevemente este fato.

Como para a matriz A, assumiremos que B satisfaz a Condição ω e também seja semi-simples. Um resultado simples mas útil, baseado na possível introdução de transformação normalizante convergente para a simetria g, é dado por (para maiores detalhes, ver [5]):

Teorema A.2.1 *Suponha que o sistema dinâmico $\dot{x} = f(x) = Ax + F(x)$ admita uma simetria infinitesimal analítica $g(x) = Bx + G(x)$, com B não proporcional à A. Assuma também que um dos seguintes casos ocorrem:*

1. *Os autovalores de B pertencem ao domínio de Poincaré.*

2. *Existe uma transformação de coordenadas levando g em uma forma normal $\hat{g}$, satisfazendo a Condição A (por exemplo, uma forma normal linear $\hat{g}(x) = Bx$).*

Então, existe uma transformação de coordenadas convergente levando (não somente g a uma forma normal mas também) o sistema dinâmico a forma $f \to Ax + \tilde{F}(x)$ onde $\tilde{F} \in Ker(\mathcal{B})$, ou seja, $\tilde{F}$ está na forma normal com respeito a B (não necessariamente com respeito à A).

Observação A.2.2 *De acordo com o Teorema 3.1.9, existe outra transformação de coordenadas (possivelmente formal) levando $\tilde{F}$ na forma normal com respeito a matriz A, mas ele não garante que esta outra transformação é convergente.*

O Teorema A.2.1 pode ser usado, por exemplo, no caso especial quando $Ker(\mathcal{B}) = \{0\}$ (por exemplo, se $B = I$). Portanto podemos usá-lo no problema de linearização de sistemas dinâmicos. De fato, agora os resultados da seção 3.1 podem ser completados da seguinte forma (para maiores detalhes, ver [5, 10]):

Corolário A.2.3 *Um sistema dinâmico $\dot{x} = f(x) = Ax + F(x)$ pode ser linearizado se, e só se, ele admite uma simetria infinitesimal $g(x) = Bx + G(x)$ tal que $B = (Dg)(0) = I$. Ainda mais, a transformação normalizante que lineariza f é convergente se, e somente se, existe uma simetria infinitesimal analítica deste tipo. Mais geral, se g é analítica e $Ker(\mathcal{B}) = \{0\}$, então a transformação normalizante que lineariza f é convergente.*

Observe que, se g é analítica, então a convergência da transformação normalizante é garantida pelo Teorema A.1.2, no caso em que $B = I$, e pelo Teorema de Bruno (em particular, pela Condição A em g) no outro caso geral em que $Ker(\mathcal{B}) = \{0\}$.

Exemplo A.2.4 *Considere o sistema dinâmico f e a simetria infinitesimal g como no Exemplo 3.1.19. Temos que $(Dg)(0) = B = I$. Isto implica que $Ker(\mathcal{B}) = \{0\}$. Como g é analítica, pelo Corolário A.2.3, a transformação normalizante que lineariza f é convergente. Note que, neste caso, $Ker(\mathcal{A})$ tem dimensão infinita e os autovalores da matriz A não pertencem ao domínio de Poincaré.*

Corolário A.2.5 *Com a mesma notação do Corolário A.2.3, se $Ker(\mathcal{A}) \cap Ker(\mathcal{B}) = \{0\}$ e g é analítica, então existe uma transformação normalizante convergente levando f em $Ker(\mathcal{A})$ e outra transformação normalizante levando g em $Ker(\mathcal{B})$. Ainda temos que, se g é linear, então a transformação normalizante linearizando $f \to Ax$ e $g \to Bx$ é convergente.*

Exemplo A.2.6 *Considere o sistema dinâmico f e a simetria infinitesimal g como no Exemplo 3.1.24. Temos que $Ker(\mathcal{A}) \cap Ker(\mathcal{B}) = \{0\}$ e g é analítica. Como g é linear, pelo Corolário A.2.5, a transformação normalizante que lineariza f é convergente.*

Bibliografia

[1] V. I. Arnold: *Geometrical methods in the theory of differential equations*; Springer-Verlag, New York, (1988).

[2] D. Bambusi, G. Cicogna, G. Gaeta, and G. Marmo: *Normal forms, symmetry and linearization of dynamical systems*; Journ. Phys. A, Math. Gen. **31**, 5065–5082 (1998).

[3] A. D. Bruno: *Analytical form of differential equations*; Trans. Moscow Math. Soc. **25**, 131 (1971); and **26**, 199 (1972).

[4] A. D. Bruno: *Local methods in nolinear differential equations*; Springer-Verlag, Berlin (1989).

[5] G. Cicogna and G. Gaeta: *Symmetry and perturbation theory in nonlinear dynamics*; Lectures Notes in Physics, New series m: Monographs, 57; Springer-Verlag, (1999).

[6] G. Cicogna and G. Gaeta: *Nonlinear symmetries and normal forms*; in "STP 98 – Symmetry and pertubation theory"(A. Degasperis and G. Gaeta, Eds.); World Scientific, Singapore 3–22 (1999).

[7] F. Dumortier: *Singularities of vector fields*; Monografia IMPA, **32**, Brasil, (1978).

[8] C. Elphick, E. Tirapegui, M. E. Brachet, P. Coullet, and G. Iooss: *A simple global characterisation for normal forms of singular vector fields*; Physica D **29**, 95–127(1987).

[9] G. Gaeta: *Normal forms of reversible dynamical systems*; International J. of Theoretical Phys., Vol. **33**, N° 9, 1917–1928 (1994).

[10] G. Gaeta and G. Marmo: *Non-perturbative linearization of dynamical systems*; Journ. Phys. A, Math. Gen. **29**, 5035–5048 (1996).

[11] G. Iooss and M. Adelmeyer: *Topics in bifurcation theory and applications*; World Scientific, Singapore (1992).

[12] J.S.W. Lamb: *Reversing symmetries in dynamical systems*; Phd Thesis, University of Amsterdam, (1994).

[13] D. Montegomery and L. Zippin: *Topological Transformation Groups*; Interscience, New York, (1955).

[14] L. A. B. San Martin: *Álgebras de Lie*; Editora da Unicamp, Brasil, (1999)

[15] S. Walcher: *On differential equations in normal forms*; Math. Ann. **291**, 293–314 (1991).