



CARLOS RENATO MEDEIROS

MEMÓRIAS ASSOCIATIVAS BASEADAS EM
INF-SEMI-RETICULADOS COMPLETOS

CAMPINAS

2012



UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

**INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA
E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA**

CARLOS RENATO MEDEIROS

**MEMÓRIAS ASSOCIATIVAS BASEADAS EM
INF-SEMI-RETICULADOS COMPLETOS**

Orientador: Prof. Dr. Peter Sussner

Dissertação de mestrado apresentada ao Instituto de
Matemática, Estatística e Computação Científica da Unicamp
para obtenção do título de Mestre em matemática aplicada.

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO
DEFENDIDA PELO ALUNO CARLOS RENATO MEDEIROS
E ORIENTADA PELO PROF. DR. PETER SUSSNER.

Assinatura do Orientador

CAMPINAS

2012

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA POR
ANA REGINA MACHADO - CRB8/5467
BIBLIOTECA DO INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E
COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA - UNICAMP

Medeiros, Carlos Renato, 1983-
M467m Memórias associativas baseadas em inf-semirreticulados
completos / Carlos Renato Medeiros. – Campinas, SP : [s.n.], 2012.

Orientador: Peter Sussner.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas,
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Teoria de reticulados. 2. Morfologia matemática. 3. Memória
associativa. I. Sussner, Peter, 1961-. II. Universidade Estadual de
Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação
Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em inglês: Associative memories based on complete inf-semilattice

Palavras-chave em inglês:

Lattice theory

Mathematical morphology

Associative memory

Área de concentração: Matemática Aplicada

Titulação: Mestre em Matemática Aplicada

Banca examinadora:

Peter Sussner [Orientador]

Fernando Antonio Campos Gomide

Junior Barrera

Data de defesa: 12-11-2012

Programa de Pós-Graduação: Matemática Aplicada

Dissertação de Mestrado defendida em 12 de novembro de 2012 e aprovada

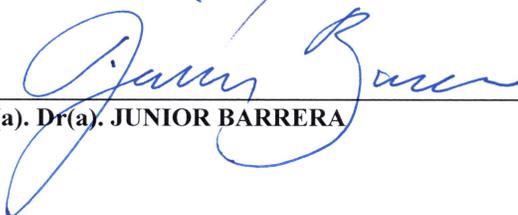
Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof.(a). Dr(a). PETER SUSSNER



Prof.(a). Dr(a). FERNANDO ANTONIO CAMPOS GOMIDE



Prof.(a). Dr(a). JUNIOR BARRERA

À minha grande e preciosa família.

*“Não que sejamos capazes, por nós mesmos,
de pensar alguma coisa, como se partisse de nós mesmos,
mas a nossa capacidade vem de Deus.”*

II Co 3.5

Agradecimentos

Agradeço a Deus o amor, a fé e a vida. Minha inspiração para amar, crer, viver e criar.

Agradeço minha família o apoio e amor incondicionais. Sempre presentes e lutando por mim, até mais do que eu mesmo. Antonio Carlos Medeiros e Akie Medeiros, maravilhosos pais, e meus irmãos Ana Carolina Okada e Ermanno Noboru Medeiros.

Sou grato ao meu orientador, Prof. Dr. Peter Sussner, os ensinamentos dentro e fora da universidade, a amizade e orientação.

Minha gratidão ao Profs. Drs. Fernando Antonio Campos Gomide, Junior Barrera, Laécio Carvalho de Barros e Marcos Eduardo Ribeiro do Valle Mesquita pelas críticas e sugestões ao presente trabalho. Agradeço também a coordenação e secretaria de pós-graduação os serviços prestados com zelo e carinho por nós, alunos, e aos demais professores do IMECC/Unicamp e DMAT/Unesp, campus de Ilha Solteira, a minha formação adquirida, em particular, ao meu orientador de iniciação científica, Prof. Dr. Edson Donizete de Carvalho.

Ao MiLab¹, o espaço e recursos para pesquisar, meus agradecimentos, mas principalmente aos grandes amigos B. Amaro, E. Laureano, F. Fidalgo, H. Félix e E. Miqueles que tornam o laboratório em um lugar único e agradável. Também me acompanharam e agradeço as belas composições de Bach, Denver & the MHO, Neal Morse, Tourniquet e outros.

Agradeço a CAPES o apoio financeiro, essencial para a realização deste trabalho.

¹<http://www.milab.ime.unicamp.br/>

Resumo

Em meados dos anos 90, a memória associativa morfológica (MAM) foi apresentada como um modelo de memória associativa distributiva que realiza determinadas operações morfológicas definidas na teoria matemática de álgebra minimax. Os modelos de MAMs vêm em duas versões diferentes que são tolerantes a diferentes tipos de ruído nos padrões de entrada. Para superar esta desvantagem, recorreremos à teoria mais recente da morfologia matemática em inf-semirreticulado cujos operadores elementares são auto-duais e definimos um modelo de memória associativa neste quadro.

Palavras-chave: Reticulado Completo, Inf-Semirreticulado Completo, Reticulado com Ordem de Grupo, Morfologia Matemática, Imagem em Tons de Cinza, Rede Neural (Morfológica), Memória Associativa (Morfológica).

Abstract

In the mid 1990's, the morphological associative memory (MAM) was introduced as a distributive associative memory model that performs certain morphological operations defined in the mathematical theory of minimax algebra. MAM models come in two different versions that are tolerant to different types of noise in the input patterns. To overcome this drawback, we resort to the more recent theory of mathematical morphology (MM) on inf-semilattices whose elementary operators are self-dual and we define an associative memory (AM) model in this framework.

Keywords: Complete Lattice, Complete Inf-Semilattice, Lattice-Ordered Group, Mathematical Morphology, Gray-Scale Image, (Morphological) Neural Network, (Morphological) Associative Memory.

Sumário

Abreviações	xix
Notações	xxi
Lista de Figuras	xxiii
Lista de Tabelas	xxv
Apresentação	1
1 Morfologia matemática em reticulados completos	5
1.1 Aspectos históricos	6
1.1.1 Morfologia matemática binária	6
1.1.2 Morfologia matemática em tons de cinza	8
1.2 Reticulados completos	10
1.3 Morfologia matemática em reticulados completos	16
2 Memórias associativas morfológicas	21
2.1 Redes neurais artificiais	21
2.2 Memórias associativas	23
2.3 Memórias associativas morfológicas	24
2.4 Memórias autoassociativas morfológicas	28
3 Morfologia matemática em inf-semirreticulados completos	35
3.1 Inf-semirreticulados completos	36
3.2 Morfologia matemática em inf-semirreticulados completos	42

4	Memórias associativas morfológicas em inf-semirreticulados completos	47
4.1	Modelo $\hat{\mathcal{M}}_{XY}^p$	48
4.2	Modelo \mathcal{M}^p	54
4.3	Resultados computacionais	66
5	Conclusão	69
A	Resultados computacionais	73
	Referências Bibliográficas	79
	Índice Remissivo	87

Abreviações

- AM Associative Memory, página 19
- AMM Autoassociative Morphological Memory, página 23
- ANN Artificial Neural Network, página 17
- blog bounded lattice ordered group, página 20
- cisl complete inf-semilattice, página 29
- MAM Morphological Associative Memory, página 19
- MNN Morphological Neural Network, página 18
- poset partially ordered set, página 8
- RSE Relative Squared Error, página 45

Notações

Notação	Descrição	Página
$\mathcal{L}, \mathcal{M}, \dots$	Reticulado	10
$\mathbb{L}, \mathbb{M}, \dots$	Reticulado completo	10
$\mathcal{L}, \mathcal{M}, \dots$	Inf-semirreticulado completo	29
\leq	Relação de ordem parcial em poset e/ou reticulado	7
\bigvee, \vee	Supremo relativo a \leq	10
\bigwedge, \wedge	Ínfimo relativo a \leq	10
δ	Dilatação	13
ε	Erosão	13
\mathbf{x}	Vetor/padrão	19
$\tilde{\mathbf{x}}$	Versão ruidosa de \mathbf{x}	19
x_i^ξ	i -ésimo elemento do vetor \mathbf{x}^ξ	22
r^*, A^*, \dots	Conjugado de r, A, \dots	21
\boxtimes	Produto mínimo relativo a \leq	21
\boxplus	Produto máximo relativo a \leq	21
$\mathcal{M}_{XY}, \mathcal{W}_{XY}$	MAMs de associações X com Y	22
M_{XY}, W_{XY}	Matrizes de pesos sinápticos das MAMs	22
	$\mathcal{M}_{XY}, \mathcal{W}_{XY}$	
\preceq	Relação de ordem parcial em cisl	30
\lrcorner, \llcorner	Ínfimo em cisl em relação a ordem parcial \preceq	30
\preceq_r	Relação de ordem parcial em cisl com referência r	32

Notação	Descrição	Página
\wedge_r	Ínfimo em cisl relativo a \preceq_r	32
$\mathcal{L}^+, \mathbb{L}^+, \mathcal{L}^+, \dots$	Cone, conjunto dos elementos positivos de $\mathcal{L}, \mathbb{L}, \mathcal{L}, \dots$	34
x^+, \mathbf{x}^+, X^+	Parte positiva de x, \mathbf{x}, X	34, 46
x^-, \mathbf{x}^-, X^-	Parte negativa de x, \mathbf{x}, X	34
\mathbf{x}^\pm	Elemento arbitrário de um cone	47
$+_r$	Adição em l -grupo cuja ordem do cisl resultante é \preceq_r	35
\boxtimes_r	Produto mínimo relativo a \preceq_r	40
μ_p	Filtro estatístico de ordem p (rank filter)	41
$\mu(\mathbf{x}), \bar{\mathbf{x}}, \bar{X}$	Filtro mediana (aplicado em \mathbf{x}, X)	41
$\hat{\mathcal{M}}_{XY}^\rho$	Memória de associações X com Y em cisl com ordem \preceq_ρ	41
$\hat{\mathcal{M}}_{XY}^\wedge$	Modelo $\hat{\mathcal{M}}_{XY}^\rho$ com $\rho = \wedge Y$	42
$\mathbb{G}_0^n, \mathbb{G}_r^n$	Cisl $(\mathbb{G}^n, \preceq_0)$, $(\mathbb{G}^n, \preceq_r)$	46, 48
X_Z	Matriz $X - Z$	48
M_{XX}^+	Matriz dos pesos sinápticos M_{X+X+}	46
\mathcal{M}_{XX}^+	MAM (em $(\mathbb{G}^n)^+$) dada pela matriz M_{X+X+}	47
\mathcal{M}_{XX}	MAM dada pela extensão do operador \mathcal{M}_{XX}^+ em \mathbb{G}_0^n	47
\mathcal{M}^r	MAM dada pela extensão do operador \mathcal{M}_{XX}^+ em \mathbb{G}_r^n	48
\mathcal{M}^ρ	Generalização do modelo \mathcal{M}^r para referência variável ρ	52
ν	Filtro média aritmética	52
ω	Filtro Wiener	52

Lista de Figuras

1.1	Imagens binária e em tons de cinza	9
2.1	Padrões originais: conjunto X de imagens usadas ao longo da dissertação	31
2.2	Versão ruidosa \tilde{X} do conjunto X , usada nos testes dos modelos	31
2.3	Saída de \mathcal{M}_{XX}	32
2.4	Saída de \mathcal{W}_{XX}	33
3.1	Relações de ordem parcial \leq e \preceq	37
3.2	Ínfimo no cisl (\mathbb{R}, \preceq_r)	40
4.1	Mediana \bar{X} dos padrões de X	50
4.2	Mediana dos padrões ruidosos de \tilde{X}	51
4.3	Saída do modelo $\hat{\mathcal{M}}_{\bar{X}X}^{\wedge}$	51
4.4	Referência variável: saída do modelo $\hat{\mathcal{M}}_{\bar{X}X}^{\mu}$	51
4.5	Referência variável: saída do modelo $\hat{\mathcal{M}}_{\bar{X}X}^{\mathbf{x}^{\xi}}$	52
4.6	Saída do modelo heteroassociativo $\hat{\mathcal{M}}_{\bar{X}X}^{\wedge}$ composto com μ_8	53
4.7	Saída do modelo \mathcal{M}^0	60
4.8	Saída do modelo \mathcal{M}^1	60
4.9	Saída do modelo $\mathcal{M}^{0.5}$	60
4.10	Ruído binário em X	61
4.11	Recordação do modelo $\mathcal{M}^{0.5}$ para imagens com ruído binário	62
4.12	Saída do modelo \mathcal{M}^{μ}	63
4.13	Saída do modelo $\mathcal{M}^{\mu(\mathbf{x}^{\xi})}$	64
4.14	Filtros mediana, média e Wiener como referência para o modelo \mathcal{M}^{ρ}	65

Lista de Tabelas

4.1	RSEs: modelos \mathcal{M}_{XX} , $\hat{\mathcal{M}}_{XX}^{\wedge}$, $\hat{\mathcal{M}}_{XX}^{\mu}$, $\hat{\mathcal{M}}_{XX}^{x^{\xi}}$ e $\hat{\mathcal{M}}_{XX}^{\wedge} \circ \mu_8$	53
4.2	RSEs: modelos \mathcal{M}_{XX} , \mathcal{W}_{XX} , \mathcal{M}^0 , \mathcal{M}^1 , $\mathcal{M}^{0.5}$ e $\mathcal{M}_{0.5}$ em imagens com ruído binário	62
4.3	RSEs: medianas de \tilde{X} e X e modelos \mathcal{M}^{μ} e $\mathcal{M}^{\mu(x^{\xi})}$	64
4.4	Médias dos RSEs dos modelos \mathcal{M}_{XX} , $\hat{\mathcal{M}}_{XX}^{\mu}$, $\hat{\mathcal{M}}_{XX}^{\wedge}$, $\mathcal{M}^{0.5}$ e \mathcal{M}^{μ} e mediana de \tilde{X}	67
1.1	Média dos RSEs: ruído Gaussiano	73
1.2	Média dos RSEs: ruído Gaussiano e filtros mediana, média e Wiener	74
1.3	Média dos RSEs: ruído speckle	74
1.4	Média dos RSEs: ruído salt & pepper	75
1.5	Média dos RSEs: ruído salt	75
1.6	Média dos RSEs: ruído pepper	76
1.7	Média dos RSEs: padrões incompletos (metade vertical esquerda preta)	76
1.8	Média dos RSEs: padrões incompletos (metade horizontal superior branca)	77
1.9	Média dos RSEs: ruído binário	77
1.10	Média dos RSEs: padrões originais	78

Apresentação

O conectivismo é uma proposta de inteligência computacional inspirada na estrutura do sistema nervoso biológico, principalmente no cérebro humano. Nesta proposta o sistema aprende (via um conjunto de dados), podendo executar operações não lógicas, transformações e comparações, assim, a estrutura de rede neural artificial baseia-se no conhecimento que temos do sistema nervoso biológico [27].

O aprendizado, em certo sentido, é um processo de formação de associações entre padrões relacionados. Aristóteles observou que a memória humana conecta itens que são similares, contrárias, ocorrem proximamente ou ocorrem em sucessão. Neste contexto, a memorização de um padrão pode ser considerada como a associação do padrão com ele mesmo [12].

Neste trabalho, estudamos a associação de imagens por meio de uma rede neural artificial particular, a *memória associativa morfológica* (MAM) [37]. As MAMs são modelos de memórias associativas descritas por uma rede neural morfológica, isto é, pertencem a uma classe de redes neurais artificiais que efetuam uma operação elementar da morfologia matemática (possivelmente seguida por uma aplicação de uma função de ativação) em cada nó, introduzidas por Ritter e Sussner [36] e representam um dos primeiros modelos de redes neurais morfológicas para padrões com valores reais.

A morfologia matemática é a teoria para a análise de estruturas espaciais, sendo que a análise é baseada na teoria de conjuntos, geometria integral e teoria de reticulados [45]. Inicialmente, Serra e Matheron desenvolveram a morfologia matemática para estudos de geometria de meios porosos e análise de texturas em imagens binárias e a base matemática era a teoria de conjuntos. Posteriormente, a

morfologia matemática foi estendida para imagens em tons de cinza e sua base teórica foi generalizada para reticulados completos [1]. Desde então, a teoria de reticulados completos tem papel fundamental na morfologia matemática, como os modelos originais de MAMs que efetuam certas operações definidas na teoria matemática da álgebra minimax [4, 5, 7] e que podem ser consideradas operações elementares da morfologia matemática em reticulados completos [21, 40, 43].

As MAMs, junto de sua versão fuzzy, ganharam importância com suas extensas aplicações que incluem reconhecimento e classificação de padrões [54, 58], predição [59], autolocalização em robótica baseada em visão [34, 49], compressão de imagens [16], segmentação de imagem colorida [57] e análise hiperespectral de imagens [38]. As memórias associativas morfológicas fuzzy surgiram do fato que a classe dos conjuntos fuzzy forma um reticulado completo e considera muitos modelos de memória associativa fuzzy [55, 58, 59].

Outro avanço na morfologia matemática ocorreu com os estudos de Heijmans e Keshet sobre uma abordagem para uma morfologia autodual por meio de inf-semirreticulado [22]. Segundo eles, operadores morfológicos autoduais resultam de modo natural quando a ordem em questão é autodual visto que a caracterização de classes particulares de operadores da morfologia matemática dependem, quase inteiramente, da escolha da ordem parcial. Também mencionam a ocorrência dos operadores morfológicos em pares, dado o princípio da dualidade em reticulados, impede a construção de ferramentas que tratam fundo e primeiro plano da mesma forma. É neste artigo, intitulado *Inf-Semilattice Approach to Self-Dual Morphology*, que inspirados na construção de um operador de erosão em inf-semirreticulado completo, consideramos a relação de ordem parcial proposta e desenvolvemos o primeiro modelo de MAM em inf-semirreticulado completo.

O presente trabalho é organizado em ordem cronológica. Em uma visão mais geral, pode ser separado em duas partes: Os capítulos 1 e 2 tratam do desenvolvimento da morfologia matemática (a partir de 1964) e dos primeiros modelos de MAMs em meados dos anos 90, respectivamente. Na segunda metade,

o capítulo 3 aborda os estudos de morfologia matemática em inf-semirreticulados (2002) e finalmente, no capítulo 4, apresentamos o que vem a ser o primeiro modelo de MAM em inf-semirreticulado completo. Cada uma destas partes obedece a mesma regra: um capítulo considera a teoria enquanto que o capítulo seguinte trata da aplicação desta teoria no contexto de memórias associativas morfológicas.

MORFOLOGIA MATEMÁTICA EM RETICULADOS COMPLETOS

Morfologia, etimologicamente, significa estudo das formas. Morfologia matemática, segundo Soille [45], é a teoria para a análise de estruturas espaciais, sendo que a análise é baseada na teoria de conjuntos, geometria integral e teoria de reticulados.

Em 1964, os estudos de Jean Serra [42, 43] e George Matheron [29] sobre geometria de meios porosos e análise de texturas, com o objetivo de extrair informações de imagens binárias a partir de transformações de formas, culminaram no desenvolvimento da morfologia matemática. Operadores elementares foram criados a partir das operações de adição e subtração de conjuntos definidas por Hermann Minkowski [30, 31] e Hugo Hadwiger [17, 18].

A generalização da teoria para o domínio dos reticulados completos ocorreu mais tarde com a observação de Serra e Matheron sobre a dependência de uma relação de ordem nos resultados obtidos para conjuntos e funções [1, 43].

1.1 Aspectos históricos

1.1.1 Morfologia matemática binária

O elemento primitivo de uma imagem, no contexto de processamento digital de imagem, é o *pixel* ou *elemento de imagem*. Uma imagem binária é composta por dois tipos de pixels: primeiro plano e fundo [11].

Inicialmente, a morfologia matemática era restrita a imagens binárias. Nos estudos de Serra e Matheron, os meios porosos são binários no sentido de que um ponto de um meio poroso ou pertence a um poro ou a matriz em torno dos poros. Os objetos considerados (grãos) eram representados matematicamente por subconjuntos ou, equivalentemente, por funções binárias [45].

As imagens binárias podem ser consideradas como Euclidianas ou discretas. Uma *imagem binária Euclideana* é identificada com um subconjunto \mathbf{A} de \mathbf{X} onde \mathbf{X} denota o espaço Euclidiano \mathbb{R}^d ou o espaço digital \mathbb{Z}^d com d inteiro positivo, no caso de processamento de imagens, $d = 2$. Em implementação digital considera-se uma *imagem discreta* como um subconjunto da grade Cartesiana bidimensional.

Na identificação de uma imagem binária com um subconjunto \mathbf{A} de \mathbf{X} , no caso de suporte negro, os pixels do fundo (\mathbf{X}) são pretos e os pixels do primeiro plano (\mathbf{A}) são brancos, assim, chamamos o subconjunto \mathbf{A} de imagem. No suporte branco, os pixels do fundo são brancos e os pixels do primeiro plano são pretos. Banon e Barrera mostram em [1] a equivalência entre subconjuntos e funções binárias, assim, uma imagem também é identificada por uma função binária f de \mathbf{X} (ou um subconjunto $\mathcal{D}_f \subset \mathbf{X}$) em $\{0, 1\}$.

Com alguns conceitos de teoria dos conjuntos (união, intersecção, complemento), geométricos e algébricos, definimos *soma de Minkowski* e *subtração de Minkowski*, respectivamente, por

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{X} : \exists \mathbf{a} \in \mathbf{A} \text{ e } \exists \mathbf{b} \in \mathbf{B}, \mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{b}\} \quad (1.1)$$

e

$$\mathbf{A} \setminus \mathbf{B} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{X} : \forall \mathbf{b} \in \mathbf{B}, (\exists \mathbf{a} \in \mathbf{A}, \mathbf{x} = \mathbf{a} - \mathbf{b})\} \quad (1.2)$$

com $\mathbf{A}, \mathbf{B} \subset \mathbf{X}$. Os símbolos $+$ e $-$ nas definições anteriores são intuitivos, todavia, uma definição formal destas operações pode ser encontrada na seção 4.1 de [1].

Dados um subconjunto $\mathbf{A} \subset \mathbf{X}$ e um elemento $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$, definimos a *translação* de \mathbf{A} por \mathbf{x} como

$$\mathbf{A}_{\mathbf{x}} = \{\mathbf{a} + \mathbf{x} : \mathbf{a} \in \mathbf{A}\}$$

e a *reflexão* de \mathbf{A} com relação a origem como

$$\check{\mathbf{A}} = \{-\mathbf{a} : \mathbf{a} \in \mathbf{A}\}.$$

Equivalente a (1.1), $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \bigcup_{\mathbf{b} \in \mathbf{B}} \mathbf{A}_{\mathbf{b}} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{X} : \check{\mathbf{B}}_{\mathbf{x}} \cap \mathbf{A} \neq \emptyset\}$ e equivalente a (1.2), $\mathbf{A} \setminus \mathbf{B} = \bigcap_{\mathbf{b} \in \mathbf{B}} \mathbf{A}_{-\mathbf{b}} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{X} : \mathbf{B}_{\mathbf{x}} \subset \mathbf{A}\}$.

Segundo Matheron, o conhecimento que temos sobre uma imagem depende de como a analisamos (observamos) [11]. Matheron referia-se ao padrão predefinido *elemento estruturante*, um subconjunto \mathbf{S} de \mathbf{X} (logo, uma imagem). Do elemento estruturante depende a informação estrutural e sua natureza sobre a imagem. Geometricamente, a imagem é analisada no processamento morfológico com o elemento estruturante quantificando a maneira em que este se encaixa (ou não se encaixa) dentro da imagem.

Os operadores (ou transformações) elementares da morfologia matemática são *dilatação* e *erosão* e estão associados ao elemento estruturante.

Sejam $\mathbf{A} \subset \mathbf{X}$ uma imagem binária e $\mathbf{S} \subset \mathbf{X}$ um elemento estruturante. A *dilatação binária* (ou apenas *dilatação*) da imagem \mathbf{A} pelo elemento estruturante \mathbf{S} é definida como

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \oplus \mathbf{S} &= \{\mathbf{x} \in \mathbf{X} : \mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{s}, \mathbf{a} \in \mathbf{A}, \mathbf{s} \in \mathbf{S}\} \\ &= \bigcup_{\mathbf{s} \in \mathbf{S}} \mathbf{A}_{\mathbf{s}} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{X} : \check{\mathbf{S}}_{\mathbf{x}} \cap \mathbf{A} \neq \emptyset\} \end{aligned} \quad (1.3)$$

e a *erosão binária* (ou apenas *erosão*) da imagem \mathbf{A} pelo elemento estruturante \mathbf{S} é definida como

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \ominus \mathbf{S} &= \{\mathbf{x} \in \mathbf{X} : \forall \mathbf{s} \in \mathbf{S}, (\exists \mathbf{a} \in \mathbf{A}, \mathbf{x} = \mathbf{a} - \mathbf{s})\} \\ &= \bigcap_{\mathbf{s} \in \mathbf{S}} \mathbf{A}_{-\mathbf{s}} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{X} : \mathbf{S}_{\mathbf{x}} \subset \mathbf{A}\}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

As expressões (1.3) e (1.4) correspondem à abordagem de Stanley Sternberg [46], coincidentes com as soma (1.1) e subtração (1.2) de Minkowski. Serra [42] define a dilatação ligeiramente diferente:

$$\mathbf{A} \oplus \check{\mathbf{S}} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{X} : \mathbf{S}_{\mathbf{x}} \cap \mathbf{A} \neq \emptyset\}. \quad (1.5)$$

A caracterização de dilatação e erosão, bem como a condução da morfologia matemática, em um contexto mais geral requer uma estrutura algébrica, contudo, a extensão da morfologia para imagens em tons de cinza a precede.

1.1.2 Morfologia matemática em tons de cinza

Imagens binárias mostram-se limitadas quando se trata de representação, visto que esta visão do mundo em dois valores é simplificada e em muitas circunstâncias não tem relação com a realidade [33] enquanto que uma imagem em tons de cinza relaciona-se com a realidade, a menos de cores.

Uma *imagem em tons de cinza* difere de uma imagem binária no contradomínio, ou seja, enquanto identificamos uma imagem binária com uma função $g : \mathcal{D}_g \subset \mathbf{X} \rightarrow \{0, 1\}$, uma imagem em tons de cinza pode ser identificada com uma função $f : \mathcal{D}_f \subset \mathbf{X} \rightarrow \mathcal{G}$, onde \mathcal{G} é um conjunto cujos valores correspondem aos tons de cinza da imagem. Esta diferença pode ser vista na figura 1.1 onde temos uma mesma imagem em uma versão binária e em tons de cinza. Denotamos por $\mathcal{G}^{\mathbf{X}}$ o conjunto das imagens definidas em \mathbf{X} que assumem valores em \mathcal{G} , desta forma, dizemos que $f \in \mathcal{G}^{\mathbf{X}}$ é uma imagem. O gráfico de uma imagem $f \in \mathcal{G}^{\mathbf{X}}$ é o conjunto dos pontos (x, y) tais que $x \in \mathcal{D}_f$ e $y = f(x)$.



Figura 1.1: Imagens binária (esquerda) e em tons de cinza (direita)

Ainda no contexto de relacionar uma imagem com a realidade, falta incorporar cor (ou outros dados, conforme a necessidade), assim, temos o conceito de *imagem multicanal*. Uma imagem multicanal consiste de um vetor de imagens monocanais $f_i : \mathcal{D}_f \subset \mathbf{X} \rightarrow \mathcal{G}$ (binária ou tons de cinza) definidas sobre um domínio comum \mathcal{D}_f . O valor de cada pixel $p \in \mathcal{D}_f$ de um imagem f de m canais é um vetor $f(p) = (f_1(p), f_2(p), \dots, f_m(p))$ [45]. Cada canal f_i é processado como uma única imagem em tons de cinza, portanto, nos restringimos às imagens em tons de cinza.

Naturalmente, as operações da morfologia matemática binária não são aplicáveis às imagens em tons de cinza, logo, estas também devem ser estendidas. A abordagem *threshold* [42] de Serra considera a classe idêntica ao conjunto de subconjuntos de retas, a classe de elementos estruturantes chatos. A erosão (dilatação) por um elemento estruturante chato pode ser vista como a erosão (dilatação) de uma imagem por um conjunto. Sternberg, porém, estabeleceu a ligação entre os conceitos aplicados a subconjuntos e funções através da noção de “*sombra de uma função*”, abordagem conhecida como *umbra* [46].

A relação de inclusão na teoria de conjuntos e a ordem de funções herdada da relação de ordem dos números inteiros (reais) levaram Matheron e Serra a generalizar a teoria para o domínio dos *reticulados completos* ao perceberem que os resultados obtidos tinham a relação de ordem em comum [1], desde então, a morfologia matemática é definida e estudada em reticulados completos, como conclui

Ronse em [40].

1.2 Reticulados completos

A teoria de reticulados é um ramo bem estabelecido da matemática pura e aplicada que cresceu a partir da lógica proposicional e foi descoberta independentemente por Dedekind durante sua pesquisa sobre ideais de números algébricos [9]. Suas aplicações envolvem áreas como morfologia matemática [43, 53], teoria de conjuntos fuzzy [14], inteligência computacional [23, 24, 50, 54, 58], decisões automáticas [60] e análise de conceito formal [13].

Para Garrett Birkhoff [2], a teoria de reticulados concerne às propriedades da relação binária \leq e as propriedades mais básicas conduz ao conceito de poset.

1.2.1 Definição (ordem parcial). *Seja X um conjunto não vazio. Uma ordem parcial em X é uma relação binária \leq definida em X tal que para todo $x, y, z \in X$, a relação \leq satisfaz*

$$1. \ x \leq x; \quad (\text{Reflexividade})$$

$$2. \ x \leq y \text{ e } y \leq x, \text{ então } x = y; \quad (\text{Antissimetria})$$

$$3. \ x \leq y \text{ e } y \leq z, \text{ então } x \leq z. \quad (\text{Transitividade})$$

Na definição 1.2.1, dizemos que X é um *conjunto parcialmente ordenado* ou *poset* (partially ordered set) e denotamos por (X, \leq) . Se $\forall x, y \in (X, \leq)$ temos $x \leq y$ ou $y \leq x$, então \leq é uma *ordem total* em X e o poset (X, \leq) é dito *totalmente ordenado* ou *corrente*.

Em um poset (X, \leq) , também escrevemos $y \geq x$ em vez de $x \leq y$, logo, a relação \leq' dada por $x \leq' y \Leftrightarrow x \geq y$ é uma ordem parcial, chamada *ordem parcial dual* e o poset (X, \leq') é chamado *poset dual*. Esta relação de dualidade é conhecida como *princípio da dualidade*.

1.2.2 Definição (operadores em posets). Sejam (X, \leq_X) e (Y, \leq_Y) posets e $x, y \in X$, o operador $\psi : X \rightarrow Y$ é dito

- *isotônico (ou crescente)* se preserva a ordem, isto é, se $x \leq_X y$ implica $\psi(x) \leq_Y \psi(y)$;
- *decrecente* se reverte a ordem, isto é, se $x \leq_X y$ implica $\psi(y) \leq_Y \psi(x)$;
- *isomorfismo (automorfismo se $Y = X$)* se ψ é uma bijeção entre X e Y tal que ψ e seu inverso ψ^{-1} são isotônicos;
- *isomorfismo dual (automorfismo dual se $Y = X$)* se ψ é uma bijeção entre X e Y tal que ψ e seu inverso ψ^{-1} são decrescentes.

1.2.3 Definição (negação). Seja ν uma involução no poset (X, \leq) , isto é, $\nu : X \rightarrow X$ com $\nu^2 = Id$, Id o operador identidade em X . O operador ν será uma

- *o-negação* se $\nu \neq Id$ e ν é um automorfismo, ou seja, ν é uma bijeção involutiva diferente da identidade que preserva a ordem;
- **-negação* se ν é um automorfismo dual, ou seja, ν é uma bijeção involutiva que reverte a ordem.

Na definição anterior, simplificaremos a notação $\nu(x)$, $x \in X$, por x^ν e quando necessário distinguir a negação, escreveremos x° ou x^* se, respectivamente, ν é uma o-negação ou *-negação.

1.2.4 Definição (negação de operador). Sejam X e Y posets com suas respectivas negações ν_X e ν_Y e $\psi : X \rightarrow Y$ um operador. O operador

$$\begin{aligned} \psi^\nu : X &\rightarrow Y \\ x &\mapsto (\psi(x^{\nu_X}))^{\nu_Y} \end{aligned}$$

é chamado de *negação de ψ* com respeito às negações ν_X e ν_Y .

Ainda nas hipóteses da definição 1.2.4, $(\psi^\nu)^\nu = \psi$ e se $\psi^\nu = \psi$, dizemos que o operador ψ é ν -autodual (ou simplesmente autodual).

Um operador $\alpha : Y \longrightarrow Y$, Y um poset, é *antiextensivo* se

$$\alpha(y) \leq y, y \in Y. \quad (1.6)$$

Se um operador $\beta : X \longrightarrow X$, X um poset, é tal que

$$x \leq \beta(x), x \in X, \quad (1.7)$$

então dizemos que é *extensivo*.

Seja Y um subconjunto do poset (X, \leq) . Um *limitante superior* de Y é um elemento $u \in X$ tal que $y \leq u, \forall y \in Y$. Analogamente, l é um *limitante inferior* de Y se $l \leq y, \forall y \in Y$. Um limitante (superior ou inferior) não pertence necessariamente a Y , logo, não é único, todavia, se um limitante pertence a Y , então sua unicidade decorre diretamente do item 2 da definição 1.2.1. O conjunto U dos limites superiores de Y é um subconjunto de X e caso U possua um limitante inferior u_0 em U , é chamado *menor limitante superior* ou *supremo* de Y , isto é, $u_0 \in X$ é supremo de Y se u_0 satisfaz

$$(i) \quad y \leq u_0, \forall y \in Y;$$

$$(ii) \quad u_0 \leq u \text{ para todos os limitantes superiores } u \text{ de } Y.$$

De forma semelhante, quando existir o maior limitante inferior $l_o \in X$ de Y , é chamado *ínfimo* de Y . Denotamos o supremo de Y por $\sup Y$ ou $\bigvee Y$ e o ínfimo de Y por $\inf Y$ ou $\bigwedge Y$. Quando $Y = \{y_i : i \in I\}$ para algum conjunto I de índices, denotamos os supremo e ínfimo de Y por $\bigvee_{i \in I} y_i$ e $\bigwedge_{i \in I} y_i$ respectivamente e no caso de $Y = \{x, y\}$, por $x \vee y$ e $x \wedge y$.

1.2.5 Definição (reticulado e reticulado completo [21]). Um poset \mathcal{L} é chamado *reticulado* se todo subconjunto finito de \mathcal{L} possui ínfimo e supremo. Um reticulado \mathbb{L} é chamado *completo* se todo subconjunto de \mathbb{L} possui ínfimo e supremo.

Um reticulado \mathcal{L} que possui elementos $O, I \in \mathcal{L}$ tais que $O \leq x \leq I, \forall x \in \mathcal{L}$ é dito *limitado*, e os elementos O e I são chamados *limites universais*, assim, todo reticulado completo é limitado. Se todo subconjunto não vazio e limitado de um reticulado \mathcal{L} possui ínfimo e supremo em \mathcal{L} , então \mathcal{L} é um *reticulado condicionalmente completo*.

Quando a ordem de um reticulado completo é total, dizemos ser uma *corrente completa*. O conjunto vazio possui ínfimo e supremo em um reticulado limitado \mathcal{L} , são eles

$$\bigwedge \emptyset = \bigvee \mathcal{L} = I, \quad \bigvee \emptyset = \bigwedge \mathcal{L} = O.$$

Denotaremos reticulados por $\mathcal{L}, \mathcal{M}, \dots$ e reticulados completos por $\mathbb{L}, \mathbb{M}, \dots$

1.2.6 Exemplos (reticulados).

1. O conjunto dos números reais \mathbb{R} com a relação de ordem usual é uma corrente, logo, reticulado. O conjunto $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ (ou $\mathbb{R}_{\pm\infty}$) é reticulado completo.
2. A coleção $\mathcal{P}(E)$ de todos os subconjuntos de um conjunto E com a relação de inclusão \subset é um reticulado completo. Para qualquer família A de subconjuntos $\{S_a : a \in A\} \subset E$, $\bigvee_{a \in A} S_a = \bigcup_{a \in A} S_a$ e $\bigwedge_{a \in A} S_a = \bigcap_{a \in A} S_a$, além disso, $O = \emptyset$ e $I = E$.
3. Dado um reticulado completo \mathbb{L} com ordem $\leq_{\mathbb{L}}$ e um conjunto não vazio E qualquer, o conjunto \mathbb{L}^E de todas as funções de E em \mathbb{L} é reticulado completo com a ordem $f \leq g, f, g : E \rightarrow \mathbb{L}$, se $f(x) \leq_{\mathbb{L}} g(x)$ para todo $x \in E$ e o supremo e ínfimo são dados respectivamente por

$$\left(\bigvee_{i \in I} f_i \right) (x) = \bigvee_{i \in I} (f_i(x)), x \in E$$

e

$$\left(\bigwedge_{i \in I} f_i \right) (x) = \bigwedge_{i \in I} (f_i(x)), x \in E$$

para uma família f_i qualquer em \mathbb{L}^E . Fazemos distinção das ordens em \mathbb{L} e \mathbb{L}^E , entretanto, uma vez que o reticulado \mathbb{L}^E herda propriedades do reticulado \mathbb{L} (como completude e negação, mas se \mathbb{L} é uma corrente, \mathbb{L}^E não será necessariamente uma corrente), é comum não fazer tal distinção na notação.

1.2.7 Leis de De Morgan ([21]). *Sejam \mathcal{L} um reticulado com *-negação e x_i uma família finita em \mathcal{L} , então*

$$\left(\bigwedge_{i \in I} x_i \right)^* = \bigvee_{i \in I} x_i^*,$$

$$\left(\bigvee_{i \in I} x_i \right)^* = \bigwedge_{i \in I} x_i^*.$$

Se \mathcal{L} é reticulado completo, estas leis continuam válidas para famílias infinitas.

1.2.8 Definição (homomorfismo de reticulados, [6, 15]). *Sejam \mathcal{L} e \mathcal{M} reticulados. Um homomorfismo de reticulados é uma função $\vartheta : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{M}$ tal que*

$$\vartheta(x \vee y) = \vartheta(x) \vee \vartheta(y) \text{ e } \vartheta(x \wedge y) = \vartheta(x) \wedge \vartheta(y)$$

para todo $x, y \in \mathcal{L}$.

Na definição anterior, se ϑ é uma bijeção, diremos que ϑ é um *isomorfismo de reticulados* e neste caso é equivalente dizer que ϑ e ϑ^{-1} são isotônicas.

Os reticulados exemplificados em 1.2.6 possuem uma propriedade em comum salientada na próxima definição:

1.2.9 Definição (Reticulado distributivo [21]). *Um reticulado \mathcal{L} é distributivo se*

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

e

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

para todos $x, y, z \in \mathcal{L}$.

Birkhoff apresenta em [2] a seguinte caracterização de reticulado distributivo:

1.2.10 Proposição. *Para que um reticulado seja distributivo, é necessário e suficiente que*

$$a \wedge x = a \wedge y \text{ e } a \vee x = a \vee y \text{ implica } x = y. \quad (1.8)$$

1.2.11 Leis distributivas infinitas. *Dizemos que o reticulado completo \mathbb{L} satisfaz as leis distributivas infinitas se*

$$y \wedge \bigvee_{i \in I} x_i = \bigvee_{i \in I} (y \wedge x_i) \quad (1.9)$$

$$y \vee \bigwedge_{i \in I} x_i = \bigwedge_{i \in I} (y \vee x_i) \quad (1.10)$$

para qualquer família x_i em \mathbb{L} e $y \in \mathbb{L}$. Em particular, chamamos a equação (1.9) de lei distributiva infinita do supremo e a equação (1.10) de lei distributiva infinita do ínfimo.

Mencionamos no início da seção que a teoria de reticulados concerne às propriedades da relação binária \leq , mas isto não exige um reticulado de possuir outras propriedades ou estruturas, por exemplo, a seguinte definição:

1.2.12 Definição ([2]). *Um reticulado com ordem de grupo (ou l -grupo) é um grupo tal que ao mesmo tempo é reticulado e toda translação de grupo é isótona.*

A definição anterior pode ser generalizada para *posets*, os chamados *po-grupos*. Assim como Birkhoff [2], usaremos a notação aditiva para a notação da operação do grupo \mathcal{L} , isto é, as translações do grupo são escritas como $x \rightarrow a+x+b$, o elemento neutro do grupo como 0 e o inverso aditivo de x como $-x$, com $x, a, b, 0 \in \mathcal{L}$.

1.2.13 Proposição. *A afirmação que toda translação de grupo é isótona em \mathcal{L} é equivalente a*

$$\text{se } x \leq y, \text{ então } a + x + b \leq a + y + b, \forall a, b \in \mathcal{L}. \quad (1.11)$$

Birkhoff observa que em qualquer po-grupo \mathcal{L} , toda translação de grupo é um automorfismo e como consequência o único po-grupo limitado é o po-grupo trivial $\mathcal{L} = \{0\}$. Tal fato leva a definir *l-grupo completo* como um *l-grupo* tal que, como reticulado, é um *reticulado condicionalmente completo*.

1.3 Morfologia matemática em reticulados completos

Em reticulados completos, os operadores dilatação e erosão são definidos como operadores que comutam com as operações de supremo e ínfimo respectivamente.

1.3.1 Definição (dilatação e erosão). *Sejam \mathbb{L} e \mathbb{M} reticulados completos. O operador $\delta : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{M}$ é uma dilatação (algébrica) se para todo $X \subset \mathbb{L}$,*

$$\delta \left(\bigvee X \right) = \bigvee_{x \in X} \delta(x). \quad (1.12)$$

Analogamente, o operador $\varepsilon : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{L}$ é uma erosão (algébrica) se para todo $X \subset \mathbb{M}$,

$$\varepsilon \left(\bigwedge X \right) = \bigwedge_{x \in X} \varepsilon(x). \quad (1.13)$$

Com certa semelhança, define-se os operadores anti-dilatação e anti-erosão:

1.3.2 Definição (anti-dilatação e anti-erosão). *Sejam \mathbb{L} e \mathbb{M} reticulados completos. O operador $\bar{\delta} : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{M}$ é uma anti-dilatação se para todo $X \subset \mathbb{L}$,*

$$\bar{\delta} \left(\bigvee X \right) = \bigwedge_{x \in X} \bar{\delta}(x). \quad (1.14)$$

Analogamente, o operador $\bar{\varepsilon} : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{L}$ é uma anti-erosão se para todo $X \subset \mathbb{M}$,

$$\bar{\varepsilon} \left(\bigwedge X \right) = \bigvee_{x \in X} \bar{\varepsilon}(x). \quad (1.15)$$

O adjetivo “algébrico” acompanha os nomes dos operadores nas definições 1.3.1 e 1.3.2 quando queremos ressaltar que estes são definidos a partir de certas propriedades algébricas [49], contrastando assim com as definições de dilatação e erosão binárias, por exemplo. Também é possível definir dilatação e erosão em posets:

1.3.3 Definição (dilatação e erosão em posets). *Sejam \mathcal{L} e \mathcal{M} posets. O operador $\delta : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{M}$ é uma dilatação se para todo $X \subset \mathcal{L}$ tal que o supremo $\bigvee X$ existe, então $\bigvee_{x \in X} \delta(x)$ existe em \mathcal{M} e $\delta\left(\bigvee X\right) = \bigvee_{x \in X} \delta(x)$. A erosão $\varepsilon : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{L}$ é definida similarmente.*

1.3.4 Definição (adjunção). *Sejam $(\mathbb{L}, \leq_{\mathbb{L}})$ e $(\mathbb{M}, \leq_{\mathbb{M}})$ reticulados completos e δ e ε operadores, $\delta : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{M}$ e $\varepsilon : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{L}$. O par (ε, δ) é uma adjunção entre \mathbb{L} e \mathbb{M} se*

$$\delta(x) \leq_{\mathbb{M}} y \iff x \leq_{\mathbb{L}} \varepsilon(y) \quad (1.16)$$

para todo $x \in \mathbb{L}$, $y \in \mathbb{M}$.

A adjunção desempenha um papel importante na morfologia matemática relacionando os operadores de dilatação e erosão por meio de uma dualidade [10, 28, 40] como veremos na proposição a seguir:

1.3.5 Proposição. *Sejam $(\mathbb{L}, \leq_{\mathbb{L}})$ e $(\mathbb{M}, \leq_{\mathbb{M}})$ reticulados completos e os operadores $\delta : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{M}$ e $\varepsilon : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{L}$.*

1. *Se (ε, δ) é uma adjunção, ε é uma erosão e δ é uma dilatação;*
2. *Para toda dilatação δ existe uma única erosão adjunta ε dada por*

$$\varepsilon(y) = \bigvee \{x \in \mathbb{L} : \delta(x) \leq_{\mathbb{M}} y\}, y \in \mathbb{M} \quad (1.17)$$

tal que (ε, δ) é uma adjunção;

3. Para toda erosão ε existe uma única dilatação adjunta δ dada por

$$\delta(x) = \bigwedge \{y \in \mathbb{M} : x \leq_{\mathbb{L}} \varepsilon(y)\}, x \in \mathbb{L} \quad (1.18)$$

tal que (ε, δ) é uma adjunção.

Além da dualidade, destacamos outras propriedades da adjunção:

1.3.6 Proposição. *Seja (ε, δ) uma adjunção entre \mathbb{L} e \mathbb{M} , então ε e δ são operadores crescentes e*

$$\delta\varepsilon \leq Id_{\mathbb{M}}; \quad (1.19)$$

$$\varepsilon\delta \geq Id_{\mathbb{L}}; \quad (1.20)$$

$$\varepsilon\delta\varepsilon = \varepsilon; \quad (1.21)$$

$$\delta\varepsilon\delta = \delta. \quad (1.22)$$

O operador dado pela composição em (1.19), $\alpha = \delta\varepsilon$, nas condições da proposição 1.3.6, possui as seguintes propriedades [21]:

- α é crescente;
- α é antiextensivo (equação (1.6));
- α é idempotente, isto é, $\alpha^2 = \alpha$.

Um operador α que satisfaz estas três propriedades (crescente, antiextensivo e idempotente) é dito ser uma *abertura*. Dualmente, um operador β crescente, extensivo (1.7) e idempotente é um *fechamento*, como a composição (1.20).

1.3.7 Proposição. *Se $\vartheta : \mathbb{L} \longrightarrow \mathbb{M}$ é um isomorfismo de reticulados, então o par $(\vartheta, \vartheta^{-1})$ é uma adjunção entre \mathbb{L} e \mathbb{M} .*

A adjunção também pode ser definida em posets, bastando trocar “reticulados completos” por “posets” na definição 1.3.4 enquanto que na proposição 1.3.5, a erosão adjunta é definida em

$$\mathcal{M}[\delta] = \{y \in \mathcal{M} : \text{o conjunto } \{x \in \mathcal{L} : \delta(x) \leq_{\mathcal{M}} y\} \text{ possui supremo em } \mathcal{L}\}$$

e (ε, δ) é uma adjunção entre \mathcal{L} e $\mathcal{M}[\delta]$, semelhantemente, a dilatação adjunta é definida em

$$\mathcal{L}[\varepsilon] = \{x \in \mathcal{L} : \text{o conjunto } \{y \in \mathcal{M} : x \leq_{\mathcal{L}} \varepsilon(y)\} \text{ possui ínfimo em } \mathcal{M}\}$$

e (ε, δ) é uma adjunção entre $\mathcal{L}[\varepsilon]$ e \mathcal{M} .

A negação também desempenha um papel na dualidade dos operadores dilatação e erosão [3, 32, 44, 56] da seguinte forma: a *-negação de uma dilatação é uma erosão e a *-negação de uma erosão é uma dilatação.

A próxima proposição sintetiza as dualidades por adjunção e negação:

1.3.8 Proposição. *Sejam \mathbb{L} e \mathbb{M} reticulados completos e os operadores $\delta : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{M}$ e $\varepsilon : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{L}$.*

1. *Se ambos reticulados \mathbb{L} e \mathbb{M} possuem uma *-negação, (ε, δ) é uma adjunção entre \mathbb{L} e \mathbb{M} se, e somente se, $(\delta^*, \varepsilon^*)$ é uma adjunção entre \mathbb{M} e \mathbb{L} ;*
2. *Se ambos reticulados \mathbb{L} e \mathbb{M} possuem uma \circ -negação, (ε, δ) é uma adjunção entre \mathbb{L} e \mathbb{M} se, e somente se, $(\varepsilon^\circ, \delta^\circ)$ é uma adjunção entre \mathbb{L} e \mathbb{M} .*

As proposições 1.3.6, 1.3.7 e 1.3.8 continuam válidas se formuladas para posets. Finalizamos esta seção com a seguinte observação:

Vimos no exemplo 1.2.6 que a coleção $\mathcal{P}(E)$ de todos os subconjuntos de um conjunto E com a relação de inclusão \subset e que o conjunto \mathbb{L}^E de todas as funções de E no reticulado completo \mathbb{L} com a ordem pontual herdada de \mathbb{L} são reticulados completos. Também vimos nas seções 1.1.1 e 1.1.2 que, respectivamente, uma imagem binária (Euclideana) é identificada com um subconjunto \mathbf{A} de \mathbf{X} ($\mathbf{X} = \mathbb{Z}^d$ ou $\mathbf{X} = \mathbb{R}^d$) e que uma imagem em tons de cinza pode ser identificada com uma função $f : \mathcal{D}_f \subset \mathbf{X} \rightarrow \mathcal{G}$. Se $\mathcal{G} = \mathbb{L}$ (isto é, se \mathcal{G} é um reticulado completo), então o contexto de reticulado completo pode ser aplicado nas morfologias matemáticas binária e em tons de cinza, ou seja, as morfologias matemáticas binária e

em tons de cinza podem agora ser tratadas como casos particulares da morfologia matemática em reticulados completos.

MEMÓRIAS ASSOCIATIVAS

MORFOLÓGICAS

O conectivismo é uma proposta de inteligência computacional que confia na possibilidade de modelar uma estrutura do sistema nervoso biológico, como o cérebro humano. Nesta proposta o sistema aprende, podendo executar operações não lógicas, transformações e comparações.

Os modelos de redes neurais artificiais tentam alcançar bom desempenho através de conexões densas de elementos computacionais simples, assim, a estrutura de rede neural artificial baseia-se no conhecimento que temos do sistema nervoso biológico [27].

2.1 Redes neurais artificiais

O cérebro é um computador (sistema de processamento de informação) altamente complexo, não linear e paralelo, o qual possui a capacidade de organizar seus constituintes estruturais: os *neurônios*. [20]. Os neurônios transmitem sinais entre eles por meio de impulsos elétricos que afetam os neurônios aferentes na *sinapse*, uma conexão simples que pode ou inibir ou excitar a geração de impulsos

no neurônio aferente. Dizemos então que o cérebro é uma *rede neural biológica*.

Uma *rede neural artificial* (ANN, Artificial Neural Network) é um modelo de computação paralela composto de densas unidades de processamento adaptativas interconectadas, sendo neural não como um modelo fiel da rede neural biológica ou da cognição, mas no sentido de que pode ser inspirada na neurociência [19].

A inspiração no modelo biológico estende-se em vários níveis: A eficiência com a qual a sinapse transfere o sinal difere entre as sinapses e essa diferença é chamada de *peso* no contexto de redes neurais artificiais, neste caso, manifesta-se como um fator multiplicativo que modifica o sinal de entrada. Assim como o neurônio biológico, o neurônio artificial é um elemento de processamento que recebe um ou mais sinais de entrada e apresenta apenas uma saída. O modelo artificial assemelha-se ao modelo biológico em dois aspectos [20]:

- O conhecimento é adquirido pela rede a partir de sua iteração com o ambiente através de um processo de aprendizagem;
- Conexões entre os neurônios, conhecidos como pesos sináptcos, são utilizados para armazenar o conhecimento adquirido.

Alternativamente, podemos definir uma rede neural artificial como uma estrutura de processamento formada por neurônios artificiais conectados por pesos sinápticos. Os padrões das conexões entre os neurônios (*arquitetura*), o método de determinação dos pesos nas conexões (*aprendizado* ou *treinamento*) e a *função de ativação* caracterizam a rede neural artificial [12].

Dentre diversos modelos de redes neurais artificiais, destacamos as *redes neurais morfológicas* (MNNs, morphological neural networks), introduzidas por Jennifer Davidson e Gerhard Ritter [8, 35] onde é apresentada como uma rede neural expressada por equações não lineares, e as memórias associativas, tratadas na seção seguinte. Existem dois pontos de vista na morfologia matemática que influenciaram fortemente no desenvolvimentos das MNNs e seus algoritmos de aprendizado:

da perspectiva geométrica ou topológica, morfologia matemática representa a teoria para o processamento e análise de objetos, isto é, imagens ou sinais, por meio de outros objetos chamados elementos estruturantes [41]. Da perspectiva algébrica, morfologia matemática é uma teoria de operadores em reticulados completos, recentemente estendida para inf-semirreticulados completos [22, 26, 25].

2.2 Memórias associativas

O aprendizado, em certo sentido, é um processo de formação de associações entre padrões relacionados. Aristóteles observou que a memória humana conecta itens (ideias, sensações, ...) que são similares, contrárias, ocorrem proximalmente ou ocorrem em sucessão. Os padrões que associamos juntos podem ser do mesmo tipo ou modalidade sensorial (imagens, por exemplo) ou de diferentes tipos (como associar um aroma com um sentimento), logo, a memorização de um padrão pode ser considerada como a associação do padrão com ele mesmo, neste contexto [12].

As *memórias associativas (neurais)* (AMs, associative memories) são uma classe de redes neurais de camada única em que os pesos são determinados de forma que a rede pode armazenar um conjunto de associações de padrões. Cada associação é um par (\mathbf{x}, \mathbf{y}) de vetores de entrada-saída chamado *memória fundamental*. O processo de determinar uma memória associativa é conhecido como *fase de armazenamento* onde apresenta-se o conjunto de memórias fundamentais $\{(\mathbf{x}^\xi, \mathbf{y}^\xi) : \xi = 1, \dots, k\}$ e a rede ajusta seus pesos para guardar os padrões. A rede aprende não somente os específicos pares de padrões apresentados no treinamento mas pode também exibir resposta desejada quando dado uma entrada similar, em outras palavras, o objetivo é encontrar um mapeamento F tal que $F(\mathbf{x}^\xi) = \mathbf{y}^\xi$, $\xi = 1, \dots, k$ e se $\tilde{\mathbf{x}}^\xi$ é uma versão ruidosa de \mathbf{x}^ξ , deseja-se que $F(\tilde{\mathbf{x}}^\xi) = \mathbf{y}^\xi$. Quando o conjunto das memórias fundamentais é do tipo $\{(\mathbf{x}^\xi, \mathbf{x}^\xi) : \xi = 1, \dots, k\}$, dizemos que a memória é *autoassociativa*, caso contrário (se $\mathbf{x}^\xi \neq \mathbf{y}^\xi$), a memória é *heteroas-*

sociativa.

As capacidades de armazenamento de informação e de reconhecer padrões com parte de seus dados perdidos ou desordenados são características louváveis de memórias associativas, entretanto, a memória pode criar associações que não fazem parte do conjunto de memórias fundamentais, conhecidas como *memórias espúrias*.

2.3 Memórias associativas morfológicas

As *memórias associativas morfológicas* (MAMs, morphological associative memories) são modelos de memórias associativas descritas por uma rede neural morfológica, apresentadas por Ritter e Sussner [36] e representam os primeiros modelos de redes neurais morfológicas para padrões com valores reais. Os modelos clássicos são descritos em termos de produtos matriciais substituindo as operações de soma e produto por operações correspondentes em reticulados [36, 37].

Raymond Cuninghame-Green desenvolveu um cálculo não linear de matrizes baseado nos produtos max e min, a *álgebra minimax*, onde encontramos as estruturas algébricas chamadas *belt* e *blog* (bounded lattice ordered group) [4]. A estrutura de *blog* é diferente de *l*-grupo, de fato, *blog* é definido como um reticulado limitado \mathbb{G} tal que o conjunto dos elementos finitos \mathbb{F} (no nosso caso, $\mathbb{F} = \mathbb{G} \setminus \{O, I\}$) é um *l*-grupo. Como o único reticulado limitado com ordem de grupo é o *l*-grupo trivial $\{0\}$, também chamamos um *blog* de *extensão de reticulado limitado com ordem de grupo* ou *extensão de l-grupo*. Se \mathbb{G} é completo, \mathbb{F} é *l*-grupo condicionalmente completo e dizemos que \mathbb{G} é uma *extensão de l-grupo completo* [50]. Os conjuntos $\overline{\mathbb{Z}}$ e $\overline{\mathbb{R}}$, devidamente equipados com certas operações, constituem exemplos importantes de *blogs*, prosseguiremos então com \mathbb{G} uma extensão de *l*-grupo completo, $-\infty$ e $+\infty$ seus limites universais e $\mathbb{F} = \mathbb{G} \setminus \{-\infty, \infty\}$. Estendemos as operações aritmética e

lógica de \mathbb{G} da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
a + (-\infty) &= (-\infty) + a = -\infty & \forall a \in \mathbb{G} \setminus \{+\infty\} \\
a + (+\infty) &= (+\infty) + a = +\infty & \forall a \in \mathbb{G} \setminus \{-\infty\} \\
(-\infty) + (+\infty) &= (+\infty)(-\infty) = -\infty \\
a \vee (-\infty) &= (-\infty) \vee a = a & \forall a \in \mathbb{G}
\end{aligned} \tag{2.1}$$

O sistema $(\mathbb{G}, \vee, +)$ é um belt e se as operações “+” e “ \vee ” são vistas como multiplicação e adição, $-\infty$ age como o elemento neutro no belt $(\mathbb{G}, \vee, +)$, mas $+\infty$ não age como neutro no sistema $(\mathbb{G}, \wedge, +)$, então definimos uma nova operação “+’” como

$$\begin{aligned}
a +' b &= a + b & a, b \in \mathbb{G} \\
a +' (-\infty) &= (-\infty) +' a = -\infty & \forall a \in \mathbb{G} \setminus \{+\infty\} \\
a +' (+\infty) &= (+\infty) +' a = +\infty & \forall a \in \mathbb{G} \setminus \{-\infty\} \\
(-\infty) + (+\infty) &= (+\infty)(-\infty) = +\infty
\end{aligned} \tag{2.2}$$

e $a \wedge (+\infty) = (+\infty) \wedge a = a$, $\forall a \in \mathbb{G}$. A estrutura do belt $(\mathbb{G}, \wedge, +')$ é dual do belt $(\mathbb{G}, \vee, +)$. As operações duais “+” e “+’” introduzem uma assimetria entre $-\infty$ e $+\infty$ e a estrutura resultante é o blog $(\mathbb{G}, \vee, \wedge, +, +')$ [39]. Essa dualidade fornece a ideia de *elemento dual* ou *conjugado*. Seja $r \in \mathbb{G}$, lembrando que em um grupo arbitrário $-x$ denota o inverso de x , o conjugado r^* de r é definido por

$$r^* \equiv \begin{cases} -r & \text{se } r \in \mathbb{F} \\ -\infty & \text{se } r = +\infty \\ +\infty & \text{se } r = -\infty \end{cases} \tag{2.3}$$

e para quaisquer $r, s \in \mathbb{G}$, decorrem da definição de conjugado:

$$(r^*)^* = r \tag{2.4}$$

$$(r \wedge s)^* = r^* \vee s^* \text{ e } (r \vee s)^* = r^* \wedge s^* \tag{2.5}$$

Dadas duas matrizes $A, B \in \mathbb{G}^{n \times m}$, o máximo e mínimo entre as

matrizes A e B são dados respectivamente por

$$\begin{aligned} C &= A \vee B, \quad c_{ij} = a_{ij} \vee b_{ij} \text{ e} \\ D &= A \wedge B, \quad d_{ij} = a_{ij} \wedge b_{ij} \end{aligned} \quad (2.6)$$

para $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq m$. Tem-se as seguintes propriedades:

$$(A \vee B)^* = A^* \wedge B^* \text{ e } (A \wedge B)^* = A^* \vee B^*. \quad (2.7)$$

No caso de matrizes, a conjugação da matriz A é a matriz transposta dos elementos de A conjugados, isto é, dada a matriz $A \in \mathbb{G}^{n \times m}$, a matriz $B = A^* \in \mathbb{G}^{m \times n}$ é tal que $b_{ij} = (a_{ji})^*$.

Os modelos de MAMs tratados neste trabalho estão definidos na extensão de l -grupo completo $(\mathbb{G}, \vee, \wedge, +, +')$ por dois tipos de produto de matrizes: *produto máximo* e *produto mínimo*. Assumiremos neste capítulo \mathbb{G} uma extensão de l -grupo completo.

Sejam as matrizes $A \in \mathbb{G}^{n \times k}$ e $B \in \mathbb{G}^{k \times m}$. As matrizes $C = A \boxtimes B \in \mathbb{G}^{n \times m}$ e $D = A \boxdot B \in \mathbb{G}^{n \times m}$ são, respectivamente, os produto máximo e produto mínimo de A por B , definidos pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned} c_{ij} &= \bigvee_{l=1}^k (a_{il} + b_{lj}) \\ d_{ij} &= \bigwedge_{l=1}^k (a_{il} +' b_{lj}). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Ainda nas condições da definição de produto máximo e produto mínimo, temos as relações de dualidade

$$(A \boxtimes B)^* = A^* \boxdot B^* \text{ e } (A \boxdot B)^* = A^* \boxtimes B^*. \quad (2.9)$$

Consideremos o conjunto $\{(\mathbf{x}^\xi, \mathbf{y}^\xi) : \xi = 1, \dots, k\}$ das memórias fundamentais, onde $\mathbf{x}^\xi = [x_1^\xi \dots x_n^\xi]^T \in \mathbb{G}^n$ e $\mathbf{y}^\xi = [y_1^\xi \dots y_m^\xi]^T \in \mathbb{G}^m$ (denotaremos as matrizes $[\mathbf{x}^1 \dots \mathbf{x}^k] \in \mathbb{G}^{n \times k}$ e $[\mathbf{y}^1 \dots \mathbf{y}^k] \in \mathbb{G}^{m \times k}$ por X e Y respectivamente).

A fase de armazenamento das MAMs consiste em determinar as matrizes de pesos sinápticos $M_{XY}, W_{XY} \in \mathbb{G}^{m \times n}$ em termos de produto máximo e produto mínimo como segue:

$$M_{XY} = Y \boxtimes X^* = \bigvee_{\xi=1}^k \mathbf{y}^\xi \boxtimes (\mathbf{x}^\xi)^* \quad (2.10)$$

$$W_{XY} = Y \boxdot X^* = \bigwedge_{\xi=1}^k \mathbf{y}^\xi \boxdot (\mathbf{x}^\xi)^*. \quad (2.11)$$

Os elementos das matrizes M_{XY} e W_{XY} são descritos pelas equações

$$m_{ij} = \bigvee_{\xi=1}^k \left(y_i^\xi + (x_j^\xi)^* \right) \quad \text{e} \quad w_{ij} = \bigwedge_{\xi=1}^k \left(y_i^\xi + ' (x_j^\xi)^* \right) \quad (2.12)$$

e obtemos

$$W_{XY} = (M_{YX})^* \quad (2.13)$$

a partir das equações (2.9) e (2.10).

Um novo par $(\mathbf{x}^{k+1}, \mathbf{y}^{k+1})$ pode ser adicionado ao conjunto das memórias fundamentais $\{(\mathbf{x}^\xi, \mathbf{y}^\xi) : \xi = 1, \dots, k\}$ nas memórias M_{XY} e W_{XY} da seguinte forma:

$$M_{XY}^{\text{nova}} = M_{XY} \vee \left[\mathbf{y}^{k+1} + (\mathbf{x}^{k+1})^* \right] \quad \text{e} \quad W_{XY}^{\text{nova}} = W_{XY} \wedge \left[\mathbf{y}^{k+1} + ' (\mathbf{x}^{k+1})^* \right]. \quad (2.14)$$

Estes modelos de MAMs podem ser descritos através de operadores $\mathcal{M}_{XY} : \mathbb{G}^n \rightarrow \mathbb{G}^m$ em termos da matriz $M_{XY} \in \mathbb{G}^{m \times n}$ e produto mínimo e $\mathcal{W}_{XY} : \mathbb{G}^n \rightarrow \mathbb{G}^m$ em termos da matriz $W_{XY} \in \mathbb{G}^{m \times n}$ e produto máximo. Dado um padrão de entrada $\mathbf{x} \in \mathbb{G}^n$, os processos de recordação de um padrão $\mathbf{y} \in \mathbb{G}^m$ nos modelos M_{XY} e W_{XY} são dados respectivamente pelas equações

$$\mathbf{y} = \mathcal{M}_{XY}(\mathbf{x}) = M_{XY} \boxtimes \mathbf{x} \quad \text{e} \quad (2.15)$$

$$\mathbf{y} = \mathcal{W}_{XY}(\mathbf{x}) = W_{XY} \boxdot \mathbf{x}. \quad (2.16)$$

Os operadores (2.15) e (2.16) representam, respectivamente, uma erosão (algébrica) e dilatação (algébrica) do reticulado completo \mathbb{G}^n para o reticulado

completo \mathbb{G}^m , isto é, \mathcal{M}_{XY} comuta com o operador ínfimo e \mathcal{W}_{XY} comuta com o operador supremo. Atentamos para o fato que $\tilde{\mathbf{x}}$ é uma versão corrompida de \mathbf{x} com *ruído erosivo* se $\tilde{\mathbf{x}} \leq \mathbf{x}$ e uma dilatação é usada para remover o ruído. De forma semelhante, $\tilde{\mathbf{x}}$ é uma versão corrompida de \mathbf{x} com *ruído dilatativo* se $\mathbf{x} \leq \tilde{\mathbf{x}}$ e uma erosão é usada para remover o ruído.

Quando apresentado os padrões originais, a recordação não é perfeita em geral, valendo assim a seguinte relação:

$$W_{XY} \boxtimes X \leq Y \leq M_{XY} \boxtimes X. \quad (2.17)$$

A matriz dos pesos sinápticos W_{XY} representa o supremo das matrizes A_i tais que $A_i \boxtimes X \leq Y$ para $i \in I$, I algum conjunto de índices. Similarmente, M_{XY} representa o ínfimo das matrizes B_i tais que $Y \leq B_i \boxtimes X$.

2.3.1 Proposição. *Se existem matrizes A e B tais que $A \boxtimes X = Y$ e $B \boxtimes X = Y$, então são satisfeitas as desigualdades*

$$\begin{aligned} A \leq W_{XY} \leq M_{XY} \leq B \quad e \\ W_{XY} \boxtimes X = Y = M_{XY} \boxtimes X. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Em contrapartida, os modelos autoassociativos recobram perfeitamente os padrões originais e sob certas condições, até mesmo quando há ruído. Veremos na próxima seção esta e outras propriedades.

2.4 Memórias autoassociativas morfológicas

Se o conjunto das memórias fundamentais é da forma $\{(\mathbf{x}^\xi, \mathbf{x}^\xi) : \xi = 1, \dots, k\}$, $\mathbf{x}^\xi \in \mathbb{G}^n$ para $\xi = 1, \dots, k$, obtemos as *memórias autoassociativas morfológicas* (AMMs, autoassociative morphological memories) \mathcal{M}_{XX} e \mathcal{W}_{XX} definidas por

$$\mathcal{M}_{XX}(\mathbf{x}) = M_{XX} \boxtimes \mathbf{x} \quad e \quad \mathcal{W}_{XX}(\mathbf{x}) = M_{XX} \boxtimes \mathbf{x} \quad (2.19)$$

onde

$$M_{XX} = X \boxtimes X^* = \bigvee_{\xi=1}^k \mathbf{x}^\xi \boxtimes (\mathbf{x}^\xi)^* \quad \text{e} \quad (2.20)$$

$$W_{XX} = X \boxtimes X^* = \bigwedge_{\xi=1}^k \mathbf{x}^\xi \boxtimes (\mathbf{x}^\xi)^*.$$

A fase de recordação das AMMs pode ser descrita em termos dos seus pontos fixos e bacias de atração [47, 48, 54]. Um vetor $\mathbf{x} \in \mathbb{G}^n$ é um *ponto fixo* de \mathcal{M}_{XX} (\mathcal{W}_{XX}) se $M_{XX} \boxtimes \mathbf{x} = \mathbf{x}$ ($W_{XX} \boxtimes \mathbf{x} = \mathbf{x}$) e denotamos o conjunto dos pontos fixos de \mathcal{M}_{XX} (\mathcal{W}_{XX}) por $F(\mathcal{M}_{XX})$ ($F(\mathcal{W}_{XX})$). A proposição seguinte garante a capacidade absoluta de armazenamento das memórias \mathcal{M}_{XX} e \mathcal{W}_{XX} .

2.4.1 Proposição. *Para todo $X = [\mathbf{x}^1 \dots \mathbf{x}^k] \in \mathbb{G}^{n \times k}$, ambos os conjuntos $F(\mathcal{M}_{XX})$ e $F(\mathcal{W}_{XX})$ incluem o conjunto das memórias fundamentais $\{\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^k\}$. Além disso, para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{G}^n$, tem-se $M_{XX} \boxtimes \mathbf{x} = \check{\mathbf{x}}$ e $W_{XX} \boxtimes \mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}$, onde $\check{\mathbf{x}}$ denota o ínfimo de \mathbf{x} em $F(\mathcal{M}_{XX})$ e $\hat{\mathbf{x}}$ o supremo de \mathbf{x} em $F(\mathcal{W}_{XX})$.*

2.4.2 Corolário. *Seja $X \in \mathbb{G}^{n \times k}$. O conjunto $F(\mathcal{M}_{XX})$ consiste de todos $M_{XX} \boxtimes \mathbf{x}$ tais que $\mathbf{x} \in \mathbb{G}^n$. Semelhantemente, o conjunto $F(\mathcal{W}_{XX})$ consiste de todos $W_{XX} \boxtimes \mathbf{x}$ tais que $\mathbf{x} \in \mathbb{G}^n$. Além disso, $M_{XX} \boxtimes \mathbf{x} = \mathbf{x}^\xi$ implica em $\mathbf{x}^\xi \leq \mathbf{x}$ e $W_{XX} \boxtimes \mathbf{x} = \mathbf{x}^\xi$ implica em $\mathbf{x} \leq \mathbf{x}^\xi$.*

O corolário anterior afirma que a fase de recordação das AMMs é realizada em um único passo, isto é, o padrão recordado pelas AMMs são pontos fixos [54]. A seguir, um exemplo numérico:

2.4.3 Exemplo. Seja $X = [\mathbf{x}^1 \ \mathbf{x}^2 \ \mathbf{x}^3] \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$,

$$X = \begin{bmatrix} 0.8 & 1.0 & 0.3 \\ 0.2 & 0.5 & 0.4 \\ 0.7 & 0.0 & 0.9 \\ 0.1 & 0.3 & 0.6 \end{bmatrix}. \quad (2.21)$$

Pela expressão (2.20), determinamos

$$M_{XX} = [\mathbf{x}^1 - (\mathbf{x}^1)^T] \vee [\mathbf{x}^2 - (\mathbf{x}^2)^T] \vee [\mathbf{x}^3 - (\mathbf{x}^3)^T] = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.6 & 1.0 & 0.7 \\ 0.1 & 0.0 & 0.5 & 0.2 \\ 0.6 & 0.5 & 0.0 & 0.6 \\ 0.3 & 0.2 & 0.3 & 0.0 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

e da equação (2.13), obtemos $W_{XX} = -(M_{XX})^T$. Verifica-se que $M_{XX} \boxtimes \mathbf{x}^\xi = W_{XX} \boxtimes \mathbf{x}^\xi = \mathbf{x}^\xi$, $\xi = 1, 2$ e 3 (proposição 2.4.1). Consideremos $\tilde{X} = [\tilde{\mathbf{x}}^1 \ \tilde{\mathbf{x}}^2 \ \tilde{\mathbf{x}}^3] \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$,

$$\tilde{X} = \begin{bmatrix} 0.8 & 1.0 & 0.3 \\ 0.0 & 0.6 & 0.1 \\ 0.7 & 0.0 & 1.0 \\ 0.1 & 0.5 & 0.6 \end{bmatrix}, \quad (2.23)$$

então

$$Y_M = M_{XX} \boxtimes \tilde{X} = \begin{bmatrix} 0.6 & 1.0 & 0.3 \\ 0.0 & 0.5 & 0.1 \\ 0.5 & 0.0 & 0.6 \\ 0.1 & 0.3 & 0.3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad Y_W = W_{XX} \boxtimes \tilde{X} = \begin{bmatrix} 0.8 & 1.0 & 0.4 \\ 0.2 & 0.6 & 0.5 \\ 0.7 & 0.2 & 1.0 \\ 0.1 & 0.5 & 0.6 \end{bmatrix}, \quad (2.24)$$

onde $\mathbf{y}_M^\xi = M_{XX} \boxtimes \tilde{\mathbf{x}}^\xi$ e $\mathbf{y}_W^\xi = W_{XX} \boxtimes \tilde{\mathbf{x}}^\xi$, $\xi = 1, 2$ e 3 . Notamos que $\mathbf{y}_M^2 = \mathbf{x}^2$, $\mathbf{y}_W^1 = \mathbf{x}^1$ e que na ordem usual em \mathbb{R}^4 , $\tilde{\mathbf{x}}^1 \leq \mathbf{x}^1$ e $\mathbf{x}^2 \leq \tilde{\mathbf{x}}^2$.

Utilizaremos X (2.21) e \tilde{X} (2.23) no exemplo 4.2.6. Também ilustramos os modelos com aplicação em imagens, como segue:

Consideraremos os seguintes conjuntos de imagens (obtidas do banco de dados do *Computer Vision Group* da Universidade de Granada, Espanha. Chamaremos os padrões $\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^{10}$ de aircraft, voit, lena, church, tree, cameraman, clock, barche, papav e leopard, respectivamente.)¹ como sendo o conjunto das memórias fundamentais e suas respectivas versões ruidosas a serem usados nos exemplos decorrentes ao longo desta dissertação:

¹imagens disponíveis em <http://decsai.ugr.es/cvg/welcome.html>.



Figura 2.1: Imagens (padrões) originais, de cima para baixo, da esquerda para a direita, $\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^{10}$, respectivamente 4.2.05.pgm, voit.pgm, lena.pgm, nat4.pgm, 4.1.06.pgm, cameraman.pgm, clock.pgm, barche.pgm, papav.pgm e leopard.pgm, como consta em <http://decsai.ugr.es/cvg/index2.php>.

As imagens utilizadas têm resolução de 256×256 pixels e convertidas por meio do método “row-scan” para dez padrões (vetores) em \mathbb{R}^{65536} , onde são operadas. Esta leitura das imagens para vetores estabelece uma bijeção entre $\mathbb{R}^{256 \times 256}$ e \mathbb{R}^{65536} , assim, referiremos às imagens apenas como $\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^{10}$, independente dos espaços onde se encontram (os espaços são facilmente identificados pelo contexto).

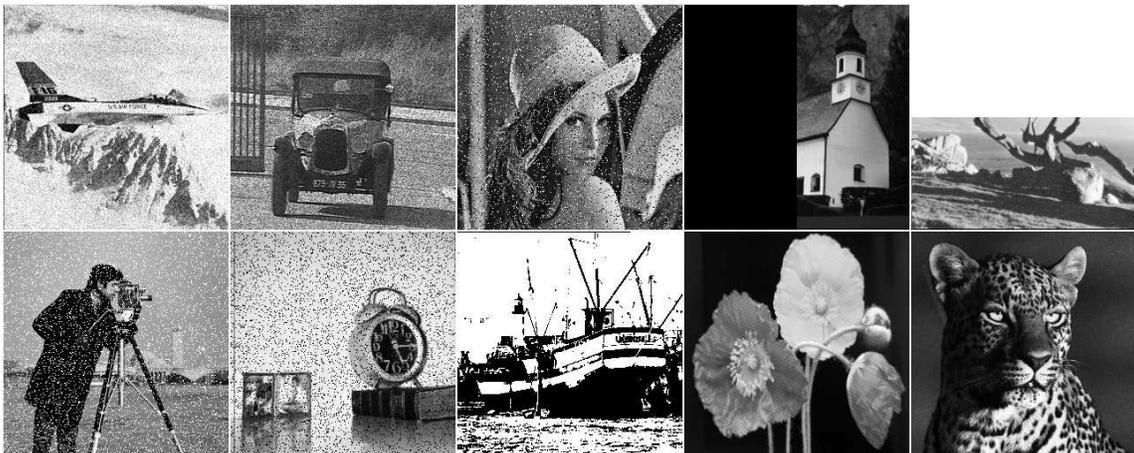


Figura 2.2: Versões ruidosas $\tilde{\mathbf{x}}^1, \dots, \tilde{\mathbf{x}}^{10}$ de $\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^{10}$.

Os experimentos foram realizados no blog $(\overline{\mathbb{R}}^{65536}, \vee, \wedge, +, +')$ com as imagens lidas em $[0, 1]^{65536} \subset \overline{\mathbb{R}}^{65536}$ onde os valores 0 e 1 representam respectivamente os pixels brancos e pretos, valores intermediários (entre 0 e 1) correspondem a tons de cinza e os valores que não pertencem ao intervalo não possuem significado na escala de tons de cinza. Os ruídos adicionados foram Gaussiano de média 0 e variância 0.01 em \mathbf{x}^1 , speckle de variância 0.04 em \mathbf{x}^2 , salt & pepper de densidade 0.1 em \mathbf{x}^3 , incompleto (metade vertical esquerda preta) em \mathbf{x}^4 , incompleto (metade horizontal superior branca) em \mathbf{x}^5 , salt de densidade 0.1 em \mathbf{x}^6 , pepper de densidade 0.1 em \mathbf{x}^7 , arredondamento dos pixels em \mathbf{x}^8 (resultando em uma versão binária de \mathbf{x}^8 , chamaremos de ruído binário) e nenhum em \mathbf{x}^9 e \mathbf{x}^{10} . Com a ordem usual do blog, $\tilde{\mathbf{x}}^4 \leq \mathbf{x}^4$, $\mathbf{x}^5 \leq \tilde{\mathbf{x}}^5$, $\mathbf{x}^6 \leq \tilde{\mathbf{x}}^6$, $\tilde{\mathbf{x}}^7 \leq \mathbf{x}^7$, $\mathbf{x}^9 = \tilde{\mathbf{x}}^9$, $\mathbf{x}^{10} = \tilde{\mathbf{x}}^{10}$ e os demais não são comparáveis.

Sejam $X = [\mathbf{x}^1 \ \mathbf{x}^2 \ \dots \ \mathbf{x}^{10}]$ e $\tilde{X} = [\tilde{\mathbf{x}}^1 \ \tilde{\mathbf{x}}^2 \ \dots \ \tilde{\mathbf{x}}^{10}]$. As figuras a seguir representam os padrões de saída $M_{XX} \boxtimes \tilde{X}$ e $W_{XX} \boxtimes \tilde{X}$:



Figura 2.3: Imagens recordadas pela memória \mathcal{M}_{XX} quando apresentado \tilde{X} como entrada.

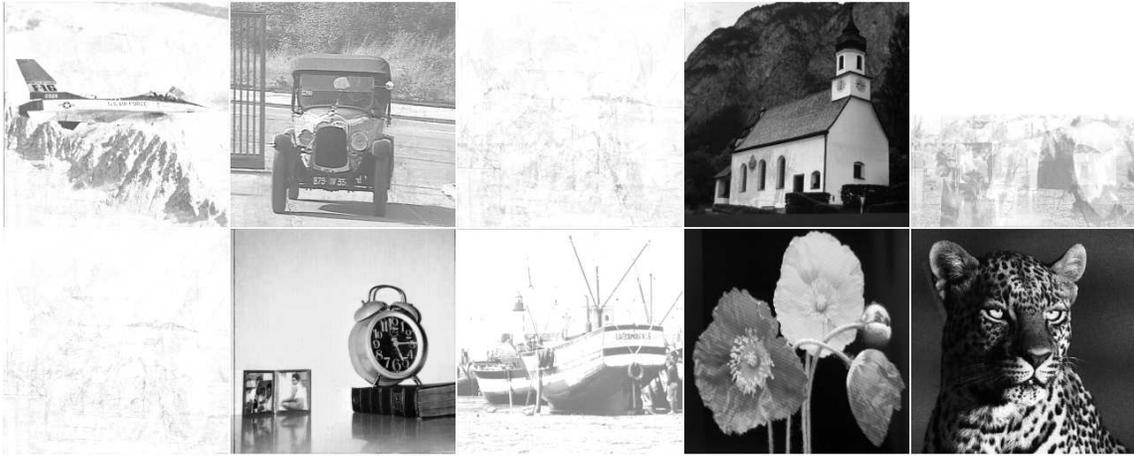


Figura 2.4: Imagens recordadas pela memória \mathcal{W}_{XX} quando apresentado \tilde{X} como entrada.

Como esperado, dado que \tilde{x}^9 e \tilde{x}^{10} não possuem ruído, \tilde{x}^5 e \tilde{x}^6 possuem ruídos dilativos e \tilde{x}^4 e \tilde{x}^7 possuem ruídos erosivos, a memória \mathcal{M}_{XX} teve bom desempenho na recordação dos padrões \tilde{x}^5 e \tilde{x}^6 e \mathcal{W}_{XX} teve bom desempenho na recordação dos padrões \tilde{x}^4 e \tilde{x}^7 . Ambas recordaram perfeitamente (a menos de erros numéricos) os padrões \tilde{x}^9 e \tilde{x}^{10} .

Padrões como \tilde{x}^8 que não são comparáveis com o original segundo a ordem do reticulado, isto é, se \tilde{x} é uma versão ruidosa de \mathbf{x} no blog \mathbb{L} tal que não tem-se $\tilde{x} \leq \mathbf{x}$ ou $\mathbf{x} \leq \tilde{x}$, em alguns casos, não são recordados por estas AMMs, ainda que haja pouco ruído. Diante disso, é natural indagar a existência de alguma ordem tal que tenha-se $\tilde{x} \leq \mathbf{x}$ ou $\mathbf{x} \leq \tilde{x}$ para qualquer versão ruidosa \tilde{x} de \mathbf{x} e que seja possível construir uma memória associativa.

Estudamos no próximo capítulo uma relação de ordem parcial proposta por Henk Heijmans e Renato Keshet. Esta ordem define uma estrutura de inf-semirreticulado completo no conjunto em questão, assim, o estudo da morfologia matemática em inf-semirreticulado completo deve-se a escolha desta ordem. O passo seguinte é definir uma memória associativa inspirada nas memórias \mathcal{M}_{XY} e \mathcal{M}_{XX} , tal que também é erosão, e analisar o uso de imagens como um parâmetro desta

ordem.

MORFOLOGIA MATEMÁTICA EM INF-SEMIRRETICULADOS COMPLETOS

Heijmans e Keshet propuseram uma abordagem inf-semirreticulado como base alternativa para processamento morfológico de imagem com o objetivo de criar operadores autoduais, tais quais decorrem naturalmente quando a ordem parcial considerada é autodual, por sua vez, proveniente de semirreticulados (completos) [22].

Birkhoff ([2]) define *semirreticulado* como um sistema com uma única operação binária, idempotente, comutativa e associativa. Esta definição está relacionada com a definição equivalente de Dedekind de *reticulado* como um sistema com duas operações binárias idempotentes, comutativas, associativas e absortivas. Neste trabalho, estamos interessados em um tipo específico de semirreticulado: inf-semirreticulado completo, logo, apresentamos na seção a seguir sua definição como poset semelhante à definição 1.2.5, onde trataremos de inf-semirreticulados completos assim como feito em [22], porém, com outra finalidade.

3.1 Inf-semirreticulados completos

3.1.1 Definição (inf-semirreticulado e inf-semirreticulado completo).

Um poset \mathcal{L} é chamado *inf-semirreticulado* se todo subconjunto finito não vazio de \mathcal{L} possui ínfimo. O poset \mathcal{L} é chamado *inf-semirreticulado completo* (*cisl*, *complete inf-semilattice*) se todo subconjunto não vazio de \mathcal{L} possui ínfimo.

No contexto de inf-semirreticulados completos, denotaremos a ordem parcial por \preceq , o ínfimo por \wedge e o supremo por \vee quando existir. Alguns subconjuntos de um cisl \mathcal{L} podem ter supremo, porém, em geral um cisl \mathcal{L} não possui maior elemento $I \in \mathcal{L}$, caso contrário, seria um reticulado completo (proposição 2.12 de [21]), assim, dado um subconjunto $X \subset \mathcal{L}$, se o conjunto $Y = \{y \in \mathcal{L} : x \preceq y, \forall x \in X\}$ dos limitantes superiores de X é não vazio, então o supremo de X é o ínfimo de Y , isto é, $\vee X = \wedge Y$.

3.1.2 Exemplos (cisl).

1. O conjunto dos números reais \mathbb{R} (ou $\overline{\mathbb{R}}$) é um cisl com a seguinte ordem parcial \preceq :

$$x \preceq y \text{ se } 0 \leq x \leq y \text{ ou } y \leq x \leq 0, \quad (3.1)$$

$x, y \in \mathbb{R}$. Referiremos a \mathbb{R} com esta ordem parcial como (\mathbb{R}, \preceq) ou apenas como \mathbb{R}_0 . Interpretamos (\mathbb{R}, \preceq) como a concatenação das correntes (\mathbb{R}_-, \geq) e (\mathbb{R}_+, \leq) , ou seja, $\wedge \mathbb{R}_0 = 0$ e dados $x, y \in \mathbb{R}$, se x e y pertencem à mesma corrente \mathbb{R}_+ (\mathbb{R}_-), então o ínfimo $x \wedge y$ e o supremo $x \vee y$ coincidem respectivamente com o ínfimo $x \wedge y$ e o supremo $x \vee y$ de \mathbb{R}_+ (\mathbb{R}_-), senão, se x e y pertencem a correntes distintas, os conjuntos dos limitantes inferior e superior de $\{x, y\}$ segundo a ordem \preceq são respectivamente $L = \{z \in \mathbb{R} : z \preceq x \text{ e } z \preceq y\} = \{0\}$ e $U = \{z \in \mathbb{R} : x \preceq z \text{ e } y \preceq z\} = \emptyset$, isto é, $x \wedge y = 0$ e não existe o supremo de x e y neste caso. A figura 3.1 ilustra a diferença entre as relações de ordem \leq e \preceq .

2. Dado um cisl $(\mathcal{L}, \preceq_{\mathcal{L}})$ e um conjunto não vazio E qualquer, o conjunto $\mathcal{M} = \mathcal{L}^E$ de todas as funções de E em \mathcal{L} também é um cisl com a ordem $f \preceq g$, $f, g : E \rightarrow \mathcal{L}$, se $f(x) \preceq_{\mathcal{L}} g(x)$ para todo $x \in E$. O ínfimo e a \circ -negação $\nu_{\mathcal{L}}$ em \mathcal{L} são estendidos pontualmente para \mathcal{M} :

$$\left(\bigwedge_{i \in I} f_i \right) (x) = \bigwedge_{i \in I} (f_i(x)), x \in E$$

para uma família f_i qualquer em \mathcal{M} e

$$\nu(f)(x) = \nu_{\mathcal{L}}(f(x)), x \in E.$$

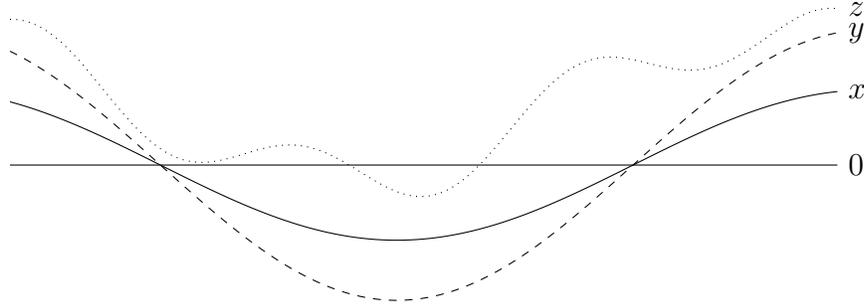


Figura 3.1: Relações de ordem parcial \leq e \preceq : $x \leq z$, $y \leq z$ e $x \preceq y$, mas $y \not\preceq x$.

Na definição 1.2.3 de negação, fizemos distinção entre \circ -negação e $*$ -negação. Em reticulados completos, esta diferença fica evidente na proposição 1.3.8 (se ε é uma erosão, ε^* é uma dilatação enquanto que ε° é uma erosão), já em semirreticulados, a presença de uma $*$ -negação conduz ao seguinte fato: um cisl \mathcal{L} que possui uma $*$ -negação é um *reticulado completo*. Uma das leis de De Morgan (1.2.7) sugere como obter o supremo neste caso, de fato, o supremo de uma família x_i em \mathcal{L} com uma $*$ -negação é dado por

$$\bigvee_{i \in I} x_i = \left(\bigwedge_{i \in I} x_i^* \right)^*.$$

Negações diferentes podem estar associadas a um mesmo operador, como é o caso do operador $\nu : \overline{\mathbb{R}} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $\nu(x) = -x$. ν é uma bijeção involutiva que

reverte a ordem no reticulado completo $(\overline{\mathbb{R}}, \leq)$, isto é, ν é uma $*$ -negação em $(\overline{\mathbb{R}}, \leq)$. ν é também uma bijeção involutiva no cisl $(\overline{\mathbb{R}}, \preceq)$, etretanto, preserva a ordem, ou seja, $x \preceq y$ se, e somente se, $x^\circ \preceq y^\circ$, portanto, ν é uma \circ -negação no cisl $(\overline{\mathbb{R}}, \preceq)$ e a ordem \preceq é dita *autodual*.

As próximas proposições e definições são referentes às bijeções em cisl:

3.1.3 Proposição. *Sejam $(\mathcal{L}, \preceq_{\mathcal{L}})$ um cisl, \mathcal{M} um conjunto não vazio e $f : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{M}$ uma bijeção. Então \mathcal{M} é um cisl com a ordem parcial \preceq_f dada por*

$$x \preceq_f y \iff f^{-1}(x) \preceq_{\mathcal{L}} f^{-1}(y),$$

$x, y \in \mathcal{M}$ e o ínfimo de uma família x_i qualquer no cisl (\mathcal{M}, \preceq_f) é dado por

$$\bigwedge_f x_i = f \left(\bigwedge_{i \in I} f^{-1}(x_i) \right).$$

3.1.4 Definição (isomorfismo em cisl). *A bijeção ϑ entre os cisl $(\mathcal{L}, \preceq_{\mathcal{L}})$ e $(\mathcal{M}, \preceq_{\mathcal{M}})$ é um isomorfismo de cisl se*

$$\vartheta \left(\bigwedge_{i \in I} x_i \right) = \bigwedge_{i \in I} \vartheta(x_i)$$

para toda família x_i em \mathcal{L} .

Uma importante classe de cisl remete às leis distributivas infinitas (1.2.11), os *inf-semirreticulados completos de referência* (cisl de referência). A equação 1.8 caracteriza um reticulado distributivo, todavia, sua ocorrência em reticulados recebe a seguinte definição:

3.1.5 Definição (Elemento de referência [22]). *Seja (\mathcal{L}, \leq) um reticulado. Um elemento $r \in \mathcal{L}$ é chamado elemento de referência se para quaisquer $x, y \in \mathcal{L}$ temos $x \wedge r = y \wedge r$ e $x \vee r = y \vee r$ se, e somente se, $x = y$.*

Para a próxima proposição, dado um reticulado (\mathcal{L}, \leq) e $r \in \mathcal{L}$, definimos a relação binária \preceq_r em $\mathcal{L} \times \mathcal{L}$ por

$$x \preceq_r y \text{ se } \begin{cases} r \wedge y \leq r \wedge x \\ r \vee y \geq r \vee x. \end{cases} \quad (3.2)$$

No caso de existir o maior elemento I (menor elemento O) no reticulado (\mathcal{L}, \leq) , I (O) é elemento de referência e a relação binária na equação 3.2 coincide com a ordem \leq (ordem dual \geq).

3.1.6 Proposição (cisl de referência [22]). *Seja \mathcal{L} um reticulado completo que satisfaz as leis distributivas infinitas. Se r é um elemento de referência em \mathcal{L} , então a relação binária \preceq_r é uma ordem parcial em \mathcal{L} e (\mathcal{L}, \preceq_r) é um cisl com menor elemento r e ínfimo de uma família x_i em \mathcal{L} dado por*

$$\begin{aligned} \bigwedge_r x_i &= \left(r \wedge \bigvee_{i \in I} x_i \right) \vee \bigwedge_{i \in I} x_i \\ &= \left(r \vee \bigwedge_{i \in I} x_i \right) \wedge \bigvee_{i \in I} x_i. \end{aligned} \quad (3.3)$$

No exemplo 3.1.2, $(\overline{\mathbb{R}}, \leq)$ satisfaz as leis distributivas infinitas e $0 \in \overline{\mathbb{R}}$ é elemento de referência, logo, a ordem \preceq (equação 3.1) do exemplo é equivalente a ordem \preceq_r na equação 3.2 com $r = 0$ e o ínfimo de uma família x_i em $(\overline{\mathbb{R}}, \preceq)$ é dado por

$$\bigwedge x_i = \left(0 \wedge \bigvee_{i \in I} x_i \right) \vee \bigwedge_{i \in I} x_i = \left(0 \vee \bigwedge_{i \in I} x_i \right) \wedge \bigvee_{i \in I} x_i.$$

Na figura 3.2, um exemplo de ínfimo em (\mathbb{R}, \preceq_r) . Como veremos na próxima proposição, o cisl de referência $(\overline{\mathbb{R}}, \preceq_0)$ é um caso particular.

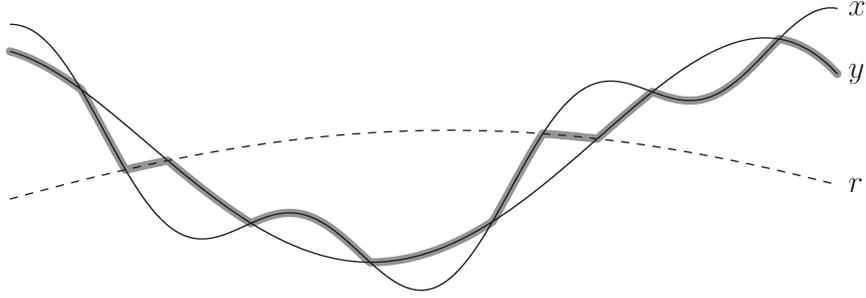


Figura 3.2: Em destaque (cinza), ínfimo de x e y no cisl (\mathbb{R}, \preceq_r) .

3.1.7 Proposição. *Para toda corrente completa, as leis distributivas infinitas são satisfeitas e todo elemento é elemento de referência.*

A proposição 3.1.7 permanece válida para corrente condicionalmente completa desde que os ínfimo e supremo existam no conjunto, isto é, se \mathcal{L} é uma corrente condicionalmente completa, então $\mathbb{L} = \mathcal{L} \cup \{0, I\}$ é uma corrente completa [2] e para toda família x_i em \mathcal{L} e $y \in \mathcal{L}$ tais que $\bigvee_{i \in I} x_i, \bigwedge_{i \in I} x_i \in \mathcal{L}$, as equações 1.9 e 1.10 são satisfeitas, de fato, também temos x_i uma família em \mathbb{L} e $y, \bigvee_{i \in I} x_i, \bigwedge_{i \in I} x_i \in \mathbb{L}$.

3.1.8 Exemplo. O reticulado completo (\mathcal{L}^E, \leq) , $\mathcal{L} = \overline{\mathbb{R}}$ ou $\overline{\mathbb{Z}}$, com a ordem, supremo e ínfimo definidos como no exemplo 1.2.6, satisfaz as leis distributivas infinitas e cada função $r \in \mathcal{L}^E$ é um elemento de referência, logo, $\mathcal{F}_r = (\mathcal{L}^E, \preceq_r)$ é um cisl. O operador $\vartheta_r : \mathcal{F}_r \rightarrow \mathcal{F}_0$, $x \mapsto x - r$ é um isomorfismo com inverso ϑ^{-1} dado por $\vartheta^{-1}(x) = \vartheta_{-r}(x) = x + r$ para r finito, assim, dado um operador ψ_0 em \mathcal{F}_0 , obtemos o operador ψ em \mathcal{F}_r dado por $\psi(x) = \psi_0(x - r) + r$ tal que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{F}_r & \xrightarrow{\psi} & \mathcal{F}_r \\
 x \mapsto x - r \downarrow & & \uparrow x \mapsto x + r \\
 \mathcal{F}_0 & \xrightarrow{\psi_0} & \mathcal{F}_0
 \end{array}$$

isto é, $\psi = \vartheta^{-1}\psi_0\vartheta$, em particular, a \circ -negação $\nu(x) = -x$ em \mathcal{F}_0 define a \circ -negação $\nu_r(x) = \nu_0(x - r) + r = 2r - x$ em \mathcal{F}_r .

Há uma outra maneira de obter um cisl de referência, neste caso, a construção do cisl (seção 5 de [22]) é feita em um l -grupo (definição 1.2.12). Assumiremos daqui adiante $(\mathcal{L}, +, \leq)$ um l -grupo, 0 o elemento neutro relativo a operação $+$ do grupo e $-x$ o inverso aditivo de x em \mathcal{L} . Definimos o *cone* \mathcal{L}^+ como

$$\mathcal{L}^+ = \{x \in \mathcal{L} : 0 \leq x\}. \quad (3.4)$$

Os elementos do cone \mathcal{L}^+ são ditos *positivos*. Se $x, y \in \mathcal{L}^+$, então $x + y \in \mathcal{L}^+$, além disso, $\mathcal{L}^+ \cap -\mathcal{L}^+ = \{0\}$. Para qualquer elemento $x \in \mathcal{L}^+$, definimos os elementos $x^+, x^- \in \mathcal{L}^+$ como

$$x^+ = x \vee 0 \text{ e } x^- = -(x \wedge 0) \quad (3.5)$$

e o *valor absoluto* de $x \in \mathcal{L}$ por

$$|x| = x^+ + x^-. \quad (3.6)$$

Verifica-se que

$$(-x)^+ = x^- \text{ e } (-x)^- = x^+. \quad (3.7)$$

3.1.9 Proposição. *Para todo $x, y \in \mathcal{L}$, temos*

1. $x = x^+ - x^-$;
2. $|x| > 0$ se $x \neq 0$;
3. $x^+ \wedge x^- = 0$;
4. $|x| = x \vee -x$;
5. $|x - y| = (x \vee y) - (x \wedge y)$.

3.1.10 Definição. *Dois elementos positivos $x, y \in \mathcal{L}$ são ditos serem *disjuntos* (ou *ortogonais*) se $x \wedge y = 0$.*

Conforme a definição 3.1.10, x^+ e x^- são disjuntos para todo $x \in \mathcal{L}$ pelo item 3 da proposição 3.1.9. Equivalente a definição 3.1.10:

$$x, y \text{ são disjuntos} \iff x \vee y = x + y. \quad (3.8)$$

Definimos a relação binária \preceq em \mathcal{L} da seguinte forma:

$$x \preceq y \text{ se } x^+ \leq y^+ \text{ e } x^- \leq y^-. \quad (3.9)$$

3.1.11 Proposição. (\mathcal{L}, \preceq) é um cisl com ínfimo de uma coleção $\{x_i\}$, $i \in I$, I um conjunto de índices, dado por

$$\bigwedge_{i \in I} x_i = \bigwedge_{i \in I} x_i^+ - \bigwedge_{i \in I} x_i^-. \quad (3.10)$$

O ínfimo satisfaz

$$\left(\bigwedge_{i \in I} x_i \right)^+ = \bigwedge_{i \in I} x_i^+ \text{ e } \left(\bigwedge_{i \in I} x_i \right)^- = \bigwedge_{i \in I} x_i^-. \quad (3.11)$$

O menor elemento de (\mathcal{L}, \preceq) é 0.

3.1.12 Exemplos.

1. O reticulado (\mathcal{L}^E, \leq) do exemplo 3.1.8 com $\mathcal{L} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{Z} e adição $(x + y)(p) = x(p) + y(p)$ para $p \in E$ define o l -grupo $(\mathcal{L}^E, +, \leq)$, e o cisl (\mathcal{L}^E, \preceq) coincide com o cisl \mathcal{F}_0 .
2. Considerando ainda o reticulado (\mathcal{L}^E, \leq) , dado $r \in \mathcal{L}^E$, definimos a adição $+_r$ como

$$(x +_r y)(p) = x(p) + y(p) - r(p). \quad (3.12)$$

Então $(\mathcal{L}^E, +_r, \leq)$ é um l -grupo, o elemento neutro do grupo $(\mathcal{L}^E, +_r)$ é r e o cisl $(\mathcal{L}^E, \preceq_r)$ é o cisl de referência \mathcal{F}_r .

3.2 Morfologia matemática em inf-semirreticulados completos

A teoria de reticulados completos mostrou ser apropriada para a morfologia matemática, mesmo assim é possível definir operadores como dilatação e erosão em posets, assim, reformulamos a definição de erosão e a proposição da dilatação adjunta para cisl.

3.2.1 Definição (erosão em cisl). *Sejam \mathcal{L} e \mathcal{M} cisl. O operador $\varepsilon : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{L}$ é uma erosão se para todo $X \subset \mathcal{M}$ não vazio,*

$$\varepsilon \left(\bigwedge X \right) = \bigwedge_{x \in X} \varepsilon(x).$$

A definição de erosão em cisl coincide com a definição 3.1.4 de isomorfismo em cisl, assim, define-se também erosão em cisl como um isomorfismo de cisl.

3.2.2 Proposição. *Sejam \mathcal{L} e \mathcal{M} cisl e \mathcal{N} um poset. Assuma que $\varepsilon_1 : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{M}$ e $\varepsilon_2 : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ são erosões e que $\varepsilon = \varepsilon_2 \varepsilon_1$. Então ε é uma erosão de \mathcal{L} em \mathcal{N} .*

3.2.3 Proposição. *Sejam $(\mathcal{L}, \preceq_{\mathcal{L}})$ e $(\mathcal{M}, \preceq_{\mathcal{M}})$ cisl e $\varepsilon : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{L}$ uma erosão. Definimos o subconjunto $\mathcal{L}[\varepsilon] \subset \mathcal{L}$ como*

$$\mathcal{L}[\varepsilon] = \{x \in \mathcal{L} : \exists y \in \mathcal{M} \text{ tal que } x \preceq_{\mathcal{L}} \varepsilon(y)\}.$$

Se $\mathcal{L}[\varepsilon]$ é não vazio, então o operador $\delta : \mathcal{L}[\varepsilon] \rightarrow \mathcal{M}$ dado por

$$\delta(x) = \bigwedge \{y \in \mathcal{M} : x \preceq_{\mathcal{L}} \varepsilon(y)\}, x \in \mathcal{L}[\varepsilon]$$

é a dilatação adjunta e o par (ε, δ) é uma adjunção entre $\mathcal{L}[\varepsilon]$ e \mathcal{M} .

Há outras proposições relevantes sobre adjunção e propriedades de invariância nas seções 3.3 e 3.4 de [22], dentre elas, destacamos duas proposições concernentes à família de funções ρ_v , $v \in \mathbb{R}$ definida em \mathbb{R}_0 por

$$\rho_v(t) = \begin{cases} t + v & \text{se } t, t + v > 0 \\ t - v & \text{se } t, t - v < 0 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3.13)$$

3.2.4 Proposição. *A família ρ_v satisfaz as seguintes propriedades:*

1. $\rho_0 = Id$;
2. $\rho_w \rho_v = \rho_{v+w}$ se $v, w \geq 0$;

$$3. \rho_{-w}\rho_{-v} = \rho_{-v-w} \text{ se } v, w \geq 0;$$

$$4. \rho_{-w}\rho_v = \rho_{v-w} \text{ se } v \geq w \geq 0;$$

$$5. (\rho_v)^\circ = \rho_v \text{ para todo } v.$$

3.2.5 Proposição. Para todo $v \geq 0$, o par (ρ_{-v}, ρ_v) define uma adjunção em \mathbb{R}_0 .

Definimos erosão, dilatação adjunta e adjunção em cisl , entretanto, nosso interesse está na autodualidade. Enquanto que a negação de uma erosão é uma dilatação e a negação reverte a ordem parcial em reticulados completos, Heijmans e Keshet mostram em [22] que operadores morfológicos autoduais resultam de modo natural quando a ordem em questão é autodual. Veremos a seguir uma erosão ε autodual no sentido que $\varepsilon(-x) = -\varepsilon(x)$ para todo $x \in \mathcal{L}$:

3.2.6 Definição. Um par de operadores ψ^+, ψ^- em \mathcal{L}^+ é dito preservador de disjunção (ou que preserva a disjunção) se

$$x \wedge y = 0 \Rightarrow \psi^+(x) \wedge \psi^-(y) = 0, x, y \in \mathcal{L}^+. \quad (3.14)$$

O operador ψ^+ é chamado preservador de disjunção se o par ψ^+, ψ^+ preserva a disjunção.

3.2.7 Proposição. O par ψ^+, ψ^- preserva a disjunção se ambos operadores são antiextensivos (equação 1.6), contudo, a recíproca não é verdadeira.

3.2.8 Proposição ([22]). Sejam os operadores ψ^+, ψ^- em \mathcal{L}^+ preservadores de disjunção. Definimos o operador ψ em \mathcal{L} por

$$\psi(x) = \psi^+(x^+) - \psi^-(x^-), x \in \mathcal{L}. \quad (3.15)$$

- Se ψ^+, ψ^- são crescentes em (\mathcal{L}^+, \leq) , então ψ é crescente em (\mathcal{L}, \preceq) ;
- se $\psi^+ = \psi^-$, então ψ é autodual, isto é, $\psi(-x) = -\psi(x), x \in \mathcal{L}$;
- se $\psi^+ = \psi^-$ são antiextensivos em (\mathcal{L}^+, \leq) , então ψ é antiextensivo em (\mathcal{L}, \preceq) ;

- se $\psi^+ = \psi^-$ são idempotentes, então ψ é idempotente.

3.2.9 Corolário. *Sejam ε^+ uma erosão em (\mathcal{L}^+, \leq) que preserva a disjunção e ε sua extensão em \mathcal{L} dada por*

$$\varepsilon(x) = \varepsilon^+(x^+) - \varepsilon^+(x^-), x \in \mathcal{L}. \quad (3.16)$$

Então ε define uma erosão em (\mathcal{L}, \preceq) . Para todo $y \in \mathcal{L}[\varepsilon]$, temos $y^+, y^- \in \mathcal{L}^+[\varepsilon^+]$ e a dilatação adjunta $\delta : \mathcal{L}[\varepsilon] \rightarrow \mathcal{L}$ é dada por

$$\delta(y) = \delta^+(y^+) - \delta^+(y^-), \quad (3.17)$$

onde $\delta^+ : \mathcal{L}^+[\varepsilon^+] \rightarrow \mathcal{L}^+$ é a dilatação adjunta de ε^+ .

Este corolário mostra como construir uma erosão em um semirreticulado e será empregado no próximo capítulo para definirmos um novo modelo de memória associativa morfológica.

MEMÓRIAS ASSOCIATIVAS MORFOLÓGICAS EM INF-SEMIRRETICULADOS COMPLETOS

Vimos na seção 2.3 que as memórias \mathcal{M}_{XY} e \mathcal{W}_{XY} representam, respectivamente, uma erosão e dilatação (algébricas) em \mathbb{G}^n e que usamos uma dilatação (erosão) para remover ruído erosivo (dilativo), todavia, a noção de ruído erosivo/dilativo depende da ordem em questão, logo, é desejável uma relação de ordem \leq tal que se $\tilde{\mathbf{x}}$ é uma versão ruidosa de \mathbf{x} , então $\mathbf{x} \leq \tilde{\mathbf{x}}$. Esta relação será possível no cisl $(\mathcal{L}^n, \preceq_{\mathbf{x}})$, porém, nem sempre dispomos de \mathbf{x} , veremos então o uso de outras referências e suas propriedades. Neste capítulo, \mathbb{G} é a extensão de l -grupo completo $\overline{\mathbb{Z}}$ ou $\overline{\mathbb{R}}$.

Apresentamos duas maneiras de obter um cisl de referência, cada qual nos conduzirá a um modelo de memória associativa. Por se tratar de um cisl, estudaremos apenas modelos de memórias baseados na MAM \mathcal{M}_{XY} .

4.1 Modelo $\hat{\mathcal{M}}_{XY}^\rho$

O cisl de referência (\mathcal{L}, \preceq_r) (proposição 3.1.6) proveniente da ordem da definição 3.1.5 concebe naturalmente um modelo de memória associativa ao substituir a relação de ordem \leq de \mathbb{G} pela relação de ordem \preceq_r , obtemos então o sistema $(\mathbb{G}, \gamma_r, \lambda_r, +, +')$. Exigiremos adicionalmente nesta seção apenas que \mathbb{G} satisfaça as leis distributivas infinitas (hipótese da proposição 3.1.6). Neste novo sistema, não temos mais a estrutura de blog, pois a adição não é distributiva sobre os supremo e ínfimo, todavia, podemos definir as operações produto máximo e produto mínimo da seguinte forma:

Sejam $A \in \mathbb{G}^{n \times k}$, $B \in \mathbb{G}^{k \times m}$ e \mathbf{r} um elemento de referência em \mathbb{G}^n . As matrizes $C = A \boxplus_{\mathbf{r}} B$ (quando existir o supremo) e $D = A \boxminus_{\mathbf{r}} B$ são, respectivamente, o produto máximo e o produto mínimo de A e B dadas por

$$\begin{aligned} c_{ij} &= \bigvee_{l=1}^k (a_{il} + b_{lj}) \\ d_{ij} &= \bigwedge_{l=1}^k (a_{il} +' b_{lj}), \end{aligned} \tag{4.1}$$

na forma de colunas, as equações (4.1) ficam

$$\begin{aligned} C_{*j} &= \bigvee_{l=1}^k_{\mathbf{r}} (A_{*l} + b_{lj}) \\ D_{*j} &= \bigwedge_{l=1}^k_{\mathbf{r}} (A_{*l} +' b_{lj}), \end{aligned} \tag{4.2}$$

onde nesta notação, A_{*j} é a j -ésima coluna da matriz A .

Seja o conjunto $\{(\mathbf{x}^\xi, \mathbf{y}^\xi) : \xi = 1, \dots, k\}$ das memórias fundamentais, onde $\mathbf{x}^\xi = [x_1^\xi \dots x_n^\xi]^T \in \mathbb{G}^n$ e $\mathbf{y}^\xi = [y_1^\xi \dots y_m^\xi]^T \in \mathbb{G}^m$ (denotaremos as matrizes $[\mathbf{x}^1 \dots \mathbf{x}^k] \in \mathbb{G}^{n \times k}$ e $[\mathbf{y}^1 \dots \mathbf{y}^k] \in \mathbb{G}^{m \times k}$ por X e Y respectivamente), como considerado na seção 2.3 e $\mathbf{r} \in \mathbb{G}^m$ elemento de referência. Análogo à expressão

(2.10), determinamos, quando existir o supremo, $\hat{M}_{XY}^{\mathbf{r}} \in \mathbb{G}^{m \times n}$ como

$$\hat{M}_{XY}^{\mathbf{r}} = Y \boxtimes_{\mathbf{r}} X^*, \quad (4.3)$$

onde os elementos de $\hat{M}_{XY}^{\mathbf{r}}$ são dados por

$$\hat{m}_{ij}^{\mathbf{r}} = \bigvee_{\xi=1}^k \bigwedge_{r_i} \left(y_i^\xi + \left(x_j^\xi \right)^* \right). \quad (4.4)$$

No caso de $\mathbf{r} \in \mathbb{G}^m$, $r_i = -\infty$, $i = 1, \dots, n$, para qualquer $Z \in \mathbb{G}^{m \times n}$

$$\bigwedge_{\mathbf{r}} Z = \bigwedge Z \text{ e } \bigvee_{\mathbf{r}} Z = \bigvee Z, \quad (4.5)$$

logo,

$$\hat{m}_{ij}^{-\infty} = \bigvee_{\xi=1}^k \bigwedge_{-\infty} \left(y_i^\xi + \left(x_j^\xi \right)^* \right) = \bigvee_{\xi=1}^k \left(y_i^\xi + \left(x_j^\xi \right)^* \right) = m_{ij}, \quad (4.6)$$

isto é, as matrizes $\hat{M}_{XY}^{-\infty}$ e M_{XY} coincidem neste caso, portanto, por simplicidade de notação, usaremos M_{XY} no lugar de $\hat{M}_{XY}^{-\infty}$. Computada a matriz M_{XY} , para uma referência $\mathbf{r} \in \mathbb{G}^m$, o modelo $\hat{\mathcal{M}}_{XY}^{\mathbf{r}}$ é descrito por $\hat{\mathcal{M}}_{XY}^{\mathbf{r}}(\mathbf{x}) = M_{XY} \boxtimes_{\mathbf{r}} \mathbf{x}$, $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{G}^n$. A referência não precisa ser constante, assim, se $X, Y \in \mathbb{G}^{n \times k}$ e a referência é variável (depende de \mathbf{x}) ou é $\mathbf{r} \in \mathbb{G}^n$, denotaremos por $\rho(\mathbf{x})$ ($\rho : \mathbb{G}^n \mapsto \mathbb{G}^n$) e temos o modelo mais geral dado por

$$\hat{\mathcal{M}}_{XY}^\rho(\mathbf{x}) = M_{XY} \boxtimes_{\rho(\mathbf{x})} \mathbf{x}, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{G}^n, \quad (4.7)$$

onde $M_{XY} \boxtimes_{\rho(\mathbf{x})} \mathbf{x} = \bigwedge_{l=1}^n \bigwedge_{\rho(\mathbf{x})} (M_{*l} + x_l)$.

Ao substituir a ordem usual \leq pela ordem $\preceq_{\rho(\mathbf{x})}$ (basta substituir \mathbf{r} por $\rho(\mathbf{x})$ em (3.2)), perdemos a distributividade da adição sobre o supremo e ínfimo. Uma alternativa seria substituir a adição pela operação definida pela família de funções ρ_v (3.13), porém, tal operação não é associativa. A principal consequência de perder estas propriedades é que o operador $\hat{\mathcal{M}}_{XY}^\rho$ não comuta com o ínfimo $\bigwedge_{\rho(\mathbf{x})}$, portanto, não é uma erosão no sentido algébrico, mesmo assim, este modelo encontra-se nesta seção pois é inspirado na MAM \mathcal{M}_{XY} . Por outro lado, temos

$$\rho(\mathbf{x}) \preceq_{\rho(\mathbf{x})} \hat{\mathcal{M}}_{XY}^\rho(\mathbf{x}) \quad (4.8)$$

50 Memórias associativas morfológicas em inf-semirreticulados completos

e no caso autoassociativo

$$\rho(\mathbf{x}) \preceq_{\rho(\mathbf{x})} \hat{\mathcal{M}}_{XX}^{\rho}(\mathbf{x}) \preceq_{\rho(\mathbf{x})} \mathbf{x}. \quad (4.9)$$

O caso ideal é quando $\rho(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$. Se $\tilde{\mathbf{x}}$ é uma versão ruidosa de \mathbf{x} , então

$$\mathbf{x} \preceq_{\mathbf{x}} \tilde{\mathbf{x}} \text{ e } \mathbf{x} \preceq_{\mathbf{x}} \hat{\mathcal{M}}_{XX}^{\mathbf{x}}(\tilde{\mathbf{x}}) \preceq_{\mathbf{x}} \tilde{\mathbf{x}}. \quad (4.10)$$

Utilizamos o filtro estatístico de ordem (também conhecido como *rank filter*) nos experimentos realizados para obter referências (figura 4.2) ou pré-processar as entradas e para obter referência em exemplos (figura 4.1), dados custo computacional baixo e resultados obtidos. Cada elemento x_{ij} de \mathbf{x} (enquanto \mathbf{x} possui duas dimensões) é substituído pelo p -ésimo elemento no conjunto ordenado de uma vizinhança de x_{ij} pelo filtro e denotaremos por $\mu_p(\mathbf{x})$. A vizinhança adotada é o quadrado de tamanho 3×3 (com borda espelhada) com centro em x_{ij} , assim, se $p = 5$, temos a mediana (eventualmente, denotaremos $\mu_5(\mathbf{x})$ por apenas $\mu(\mathbf{x})$ ou $\bar{\mathbf{x}}$). Se $X = [\mathbf{x}^1 \dots \mathbf{x}^k]$, então $\bar{X} = [\bar{\mathbf{x}}^1 \dots \bar{\mathbf{x}}^k]$ e quanto maior p , mais claro o resultado. Quando $\rho(\mathbf{x}) = \mu_p(\mathbf{x})$ (ou alguma outra função que representa outro filtro diferente), substituiremos ρ pela função em questão, por exemplo, $\mathcal{M}_{XY}^{\mu_p}$ e \boxtimes_{μ_p} . Se $\rho = \wedge Y$, denotaremos por $\hat{\mathcal{M}}_{XY}^{\wedge}$. As figuras a seguir mostram as diferentes saídas produzidas pelo modelo $\hat{\mathcal{M}}_{XX}^{\rho}$ quando apresentado as figuras 2.2 sob diferentes referências:



Figura 4.1: Mediana dos padrões originais apresentados na figura 2.1.



Figura 4.2: Mediana dos padrões apresentados na figura 2.2.



Figura 4.3: $\mathbf{y}^\xi = \hat{\mathcal{M}}_{XX}^\wedge(\tilde{\mathbf{x}}^\xi)$.



Figura 4.4: Referência variável: cada saída foi obtida por $\mathbf{y}^\xi = \hat{\mathcal{M}}_{XX}^\mu(\tilde{\mathbf{x}}^\xi)$.



Figura 4.5: Referência variável: $\mathbf{y}^\xi = \hat{\mathcal{M}}_{XX}^{\mathbf{x}^\xi}(\tilde{\mathbf{x}}^\xi)$.

4.1.1 Proposição. Sejam $X = [\mathbf{x}^1 \dots \mathbf{x}^k] \in \mathbb{G}^{n \times k}$ e $\rho : \mathbb{G}^n \mapsto \mathbb{G}^n$. Se $\rho(\mathbf{x}^\xi) \leq \mathbf{x}^\xi$, $\forall \xi, 1 \leq \xi \leq k$, então $\hat{\mathcal{M}}_{XX}^\rho(\mathbf{x}^\xi) = \mathbf{x}^\xi$.

Demonstração. Da definição do modelo em (4.7), segue que

$$\hat{\mathcal{M}}_{XX}^\rho(\mathbf{x}^\xi) = M_{XX} \boxtimes_{\rho(\mathbf{x}^\xi)} \mathbf{x}^\xi = \left(\rho(\mathbf{x}^\xi) \wedge \bigvee_{j=1}^n (M_{*j} + ' x_j^\xi) \right) \vee \bigwedge_{j=1}^n (M_{*j} + ' x_j^\xi),$$

mas $\bigwedge_{j=1}^n (M_{*j} + ' x_j^\xi) = M_{XX} \boxtimes \mathbf{x}^\xi = \mathbf{x}^\xi \leq \bigvee_{j=1}^n (M_{*j} + ' x_j^\xi)$, logo,

$$\left(\rho(\mathbf{x}^\xi) \wedge \bigvee_{j=1}^n (M_{*j} + ' x_j^\xi) \right) \vee \bigwedge_{j=1}^n (M_{*j} + ' x_j^\xi) = (\rho(\mathbf{x}^\xi)) \vee \mathbf{x}^\xi = \mathbf{x}^\xi. \quad \blacksquare$$

O modelo heteroassociativo pode ser empregado da seguinte forma: calculamos a matriz $M_{\bar{X}X}$ e apresentamos $\mu_p(\tilde{\mathbf{x}})$ com $\rho = \bigwedge X$, equacionando,

$$\hat{\mathcal{M}}_{\bar{X}X}^\wedge(\mu_p(\mathbf{x})) = M_{\bar{X}X} \boxtimes_\wedge \mu_p(\mathbf{x}). \quad (4.12)$$

A figura 4.6 exibe o resultado para $p = 8$ (valor de p adotado apenas para exemplificar e que apresentou, nos testes realizados em geral, melhor resultado considerando uma vizinhança 3×3):



Figura 4.6: Modelo $\hat{\mathcal{M}}_{\bar{X}\bar{X}}^{\wedge} \circ \mu_8$: $\mathbf{y}^{\xi} = \hat{M}_{\bar{X}\bar{X}} \boxtimes_{\wedge} \mu_8(\bar{\mathbf{x}}^{\xi})$.

Modelo	\mathcal{M}_{XX}	$\hat{\mathcal{M}}_{\bar{X}\bar{X}}^{\wedge}$	$\hat{\mathcal{M}}_{\bar{X}\bar{X}}^{\mu}$	$\hat{\mathcal{M}}_{\bar{X}\bar{X}}^{\mathbf{x}^{\xi}}$	$\hat{\mathcal{M}}_{\bar{X}\bar{X}}^{\wedge} \circ \mu_8$
Figura	2.3	4.3	4.4	4.5	4.6
aircraft	0.4015	0.4009	0.0805	0.0018	0.0642
voit	0.3410	0.3403	0.1701	0.0036	0.1255
lena	0.9603	0.8576	0.0778	0.0013	0.0396
church	0.9403	0.8583	0.7558	0	0.8470
tree	0.0277	0.0277	0.5892	0.0277	0.0787
cameraman	0.0047	0.0047	0.0874	0.0047	0.0342
clock	0.9876	0.9140	0.0673	0	0.0748
barche	0.7793	0.7482	0.6044	0	0.7157
papav	$< 10^{-16}$	$< 10^{-16}$	0.0274	0	0.0338
leopard	$< 10^{-16}$	$< 10^{-16}$	0.0900	0	0.0582

Tabela 4.1: Erro relativo quadrático.

Na tabela 4.1, exibimos a comparação entre o modelo clássico \mathcal{M}_{XX} e os diferentes resultados obtidos por $\hat{\mathcal{M}}_{XY}^{\rho}$ por meio do *erro relativo quadrático*

(RSE, Relative Squared Error) dado por

$$e(\mathbf{y}^\xi) = \frac{\|\mathbf{y}^\xi - \mathbf{x}^\xi\|_2}{\|\mathbf{x}^\xi\|_2} \quad (4.13)$$

onde \mathbf{y}^ξ é a saída de um modelo para a entrada $\tilde{\mathbf{x}}^\xi$.

O próximo modelo também está definido no mesmo cisl, porém, visto sob a óptica da proposição 3.1.11. A principal diferença é que esta abordagem permitirá construir o novo modelo segundo o corolário 3.2.9, resultando em uma memória associativa que faz uma erosão, portanto, morfológica.

4.2 Modelo \mathcal{M}^ρ

O fundamento deste novo modelo é o mesmo utilizado por Heijmans e Keshet ([22]) para construir operadores autoduais: decomposmos um sinal em suas partes positivas e negativas, processamos ambas partes independentemente e sintetizamos as partes resultantes no sinal transformado. O conceito de positivo e negativo será relativo ao elemento de referência (finito), entretanto, com o auxílio do diagrama do exemplo 3.1.8, consideraremos o elemento neutro como referência e o processamento das partes consistirá na aplicação da memória \mathcal{M}_{XX} .

Seja a extensão de l -grupo completo \mathbb{G}^n , $X = [\mathbf{x}^1 \ \dots \ \mathbf{x}^k] \in \mathbb{G}^{n \times k}$ e $0 \in \mathbb{G}^n$ o elemento neutro. A relação de ordem (3.9) define o cisl (\mathbb{G}^n, \preceq) , análogo ao cisl \mathcal{F}_0 , assim, também denotaremos (\mathbb{G}^n, \preceq) por \mathbb{G}_0^n . Definimos a matriz

$$\begin{aligned} X^+ &= \left[(\mathbf{x}^1)^+ \ \dots \ (\mathbf{x}^k)^+ \ (\mathbf{x}^1)^- \ \dots \ (\mathbf{x}^k)^- \right] \\ &= \left[\mathbf{x}^1 \vee 0 \ \dots \ \mathbf{x}^k \vee 0 \ - (\mathbf{x}^1 \wedge 0) \ \dots \ - (\mathbf{x}^k \wedge 0) \right] \in (\mathbb{G}^{n \times 2k})^+ \end{aligned} \quad (4.14)$$

como a matriz cuja ξ -ésima coluna é o vetor $(\mathbf{x}^\xi)^+$ e a $(\xi + k)$ -ésima coluna é o vetor $(\mathbf{x}^\xi)^-$. A matriz $M_{X^+X^+} = X^+ \boxtimes (X^+)^* \in \mathbb{G}^{n \times n}$, a qual denotaremos por M_{XX}^+ , possui a seguinte propriedade:

4.2.1 Proposição. *Seja $X = [\mathbf{x}^1 \ \dots \ \mathbf{x}^k] \in \mathbb{G}^{n \times k}$. Então a matriz M_{XX}^+ é tal que $m_{ij}^+ \geq 0$.*

Demonstração. Pela definição de X^+ , $(x^+)^\xi_j \geq 0$ para todo $1 \leq \xi \leq 2k$ e $1 \leq j \leq n$ e existe um conjunto de índices I_j com pelo menos k índices tal que $(x^+)_j^p = 0, \forall p \in I_j$. Tomamos $q \in I_j$ tal que $(x^+)_j^q = 0$, logo,

$$0 \leq (x^+)_i^q = (x^+)_i^q + \left((x^+)_j^q \right)^* \leq \bigvee_{\xi=1}^{2k} (x^+)_i^\xi + \left((x^+)_j^\xi \right)^* = m_{ij}^+. \quad (4.15)$$

Em particular, $m_{ii}^+ = 0$. ■

No lema a seguir, \mathbf{x}^\pm é um elemento qualquer em $(\mathbb{G}^n)^+$ e \mathcal{M}_{XX}^+ é o operador definido pela matriz M_{XX}^+ , isto é, $\mathcal{M}_{XX}^+(\mathbf{x}^\pm) = M_{XX}^+ \boxtimes \mathbf{x}^\pm$.

4.2.2 Lema. \mathcal{M}_{XX}^+ é um operador antiextensivo em $(\mathbb{G}^n)^+$.

Demonstração. Primeiramente, verificamos que, de fato, \mathcal{M}_{XX}^+ é um operador em $(\mathbb{G}^n)^+$: Seja $\mathbf{x}^\pm \in (\mathbb{G}^n)^+$. Para todo $1 \leq i, j \leq n$, $m_{ij}^+ + x_j^\pm \geq 0$, logo, $\bigwedge_{j=1}^n m_{ij}^+ + x_j^\pm \geq 0$, portanto, $\mathcal{M}_{XX}^+(\mathbf{x}^\pm) \in (\mathbb{G}^n)^+$. Por outro lado, para todo i , $1 \leq i \leq n$, tem-se $x_i^\pm = x_i^\pm + m_{ii}^+ \geq \bigwedge_{i=1}^n m_{ij}^+ + x_i^\pm$, assim, $\mathcal{M}_{XX}^+(\mathbf{x}^\pm) \leq \mathbf{x}^\pm$. ■

Ao ver o cone $(\mathbb{G}^n)^+$ como um subconjunto de \mathbb{G}^n , temos que X^+ e \mathbf{x}^\pm são elementos de \mathbb{G}^n , logo, $\mathcal{M}_{XX}^+ \in \mathbb{G}^{n \times n}$. Este ponto de vista permite interpretar o operador \mathcal{M}_{XX}^+ como uma restrição em $(\mathbb{G}^n)^+$ do operador \mathcal{M}_{X+X^+} definido em \mathbb{G}^n , assim, \mathcal{M}_{X+X^+} é uma erosão em \mathbb{G}^n , em particular, \mathcal{M}_{XX}^+ é erosão em $(\mathbb{G}^n)^+$ pois $\mathcal{M}_{XX}^+(\mathbf{x}^\pm) \in (\mathbb{G}^n)^+$.

O operador \mathcal{M}_{XX}^+ , pela proposição 3.2.7 e lema 4.2.2, preserva a disjunção. Consideremos sua extensão

$$\mathcal{M}_{XX}(\mathbf{x}) = \mathcal{M}_{XX}^+(\mathbf{x}^+) - \mathcal{M}_{XX}^+(\mathbf{x}^-) \quad (4.16)$$

em (\mathbb{G}^n, \preceq) . Temos o seguinte teorema:

4.2.3 Teorema. O modelo \mathcal{M}_{XX} é uma memória associativa morfológica que recobra perfeitamente os padrões originais e representa uma erosão em (\mathbb{G}^n, \preceq) .

56 Memórias associativas morfológicas em inf-semirreticulados completos

Demonstração. Se $\mathbf{x} \in X$, então $\mathbf{x}^+, \mathbf{x}^- \in X^+$, $\mathcal{M}_{XX}^+(\mathbf{x}^+) = \mathbf{x}^+$ e $\mathcal{M}_{XX}^+(\mathbf{x}^-) = \mathbf{x}^-$, logo, $\mathcal{M}_{XX}(\mathbf{x}) = \mathcal{M}_{XX}^+(\mathbf{x}^+) - \mathcal{M}_{XX}^+(\mathbf{x}^-) = \mathbf{x}^+ - \mathbf{x}^-$, pela proposição 3.1.9, $\mathbf{x}^+ - \mathbf{x}^- = \mathbf{x}$. A erosão definida por \mathcal{M}_{XX} segue diretamente do corolário 3.2.9, lema 4.2.2 e que \mathcal{M}_{XX}^+ é erosão em $(\mathbb{G}^n)^+$. ■

4.2.4 Proposição. A erosão \mathcal{M}_{XX} , para todo $\mathbf{x} \in (\mathbb{G}^n, \preceq)$, é autodual no sentido que $\mathcal{M}_{XX}(-\mathbf{x}) = -\mathcal{M}_{XX}(\mathbf{x})$ e satisfaz $0 \preceq \mathcal{M}_{XX}(\mathbf{x}) \preceq \mathbf{x}$.

Demonstração. Seja $\mathbf{x} \in (\mathbb{G}^n, \preceq)$ qualquer. Então

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{XX}(-\mathbf{x}) &= \mathcal{M}_{XX}^+(0 \vee (-\mathbf{x})) - \mathcal{M}_{XX}^+(-(0 \wedge -\mathbf{x})) \\ &= \mathcal{M}_{XX}^+(-(0 \wedge \mathbf{x})) - \mathcal{M}_{XX}^+(0 \vee \mathbf{x}) \\ &= -(\mathcal{M}_{XX}^+(0 \vee \mathbf{x}) - \mathcal{M}_{XX}^+(-(0 \wedge \mathbf{x}))) = -\mathcal{M}_{XX}(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Do lema 4.2.2, $0 \leq \mathcal{M}_{XX}^+(\mathbf{x}^+) \leq \mathbf{x}^+$ e $0 \leq \mathcal{M}_{XX}^+(\mathbf{x}^-) \leq \mathbf{x}^-$, mas $\mathcal{M}_{XX}(\mathbf{x}) = \mathcal{M}_{XX}^+(\mathbf{x}^+) - \mathcal{M}_{XX}^+(\mathbf{x}^-)$, então $\mathcal{M}_{XX}(\mathbf{x}) \vee 0 = \mathcal{M}_{XX}^+(\mathbf{x}^+)$ e $-(\mathcal{M}_{XX}(\mathbf{x}) \wedge 0) = \mathcal{M}_{XX}^+(\mathbf{x}^-)$, ou seja, $0 \leq (\mathcal{M}_{XX}(\mathbf{x}))^+ \leq \mathbf{x}^+$ e $0 \leq (\mathcal{M}_{XX}(\mathbf{x}))^- \leq \mathbf{x}^-$, assim, $0 \preceq \mathcal{M}_{XX}(\mathbf{x}) \preceq \mathbf{x}$. ■

Para definir o modelo \mathcal{M}_{XX} em $(\mathbb{G}^n, \preceq_{\mathbf{r}})$, $\mathbf{r} \in \mathbb{G}^n$ referência finita, podemos redefinir a soma em \mathbb{G}^n pela equação 3.12, isto é, obtemos o cisl $(\mathbb{G}^n, \preceq_{\mathbf{r}})$ a partir da extensão de l -grupo completo $(\mathbb{G}^n, +_{\mathbf{r}}, \leq)$. Apresentaremos a seguir uma outra forma de definir o modelo \mathcal{M}_{XX} em $(\mathbb{G}^n, \preceq_{\mathbf{r}})$, inspirado no diagrama do exemplo 3.1.8:

O menor elemento de $(\mathbb{G}^n, \preceq_{\mathbf{r}})$ é \mathbf{r} , que também é o elemento neutro de $(\mathbb{G}^n, +_{\mathbf{r}}, \leq)$. Dados $X, Z \in \mathbb{G}^{n \times k}$, definimos a matriz $X_Z = X - Z \in \mathbb{G}^{n \times k}$. No caso onde $Z = R \in \mathbb{G}^{n \times k}$ de colunas $R_{*j} = \mathbf{r}$, a matriz X_R^+ pertence a $(\mathbb{G}^{n \times 2k})^+$ pois

$$\begin{aligned} \vartheta : \mathbb{G}_{\mathbf{r}}^n &\longrightarrow \mathbb{G}_0^n \\ \mathbf{x} &\longmapsto \mathbf{x} - \mathbf{r} \end{aligned} \quad (4.17)$$

é um isomorfismo de reticulados. Definimos o modelo $\mathcal{M}^{\mathbf{r}}$ em $(\mathbb{G}^n, \preceq_{\mathbf{r}})$ como

$$\mathcal{M}^{\mathbf{r}}(\mathbf{x}) = M_{X_R X_R}^+ \boxtimes ((\mathbf{x} - \mathbf{r})^+) - M_{X_R X_R}^+ \boxtimes ((\mathbf{x} - \mathbf{r})^-) + \mathbf{r}, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{G}^n. \quad (4.18)$$

O modelo $\mathcal{M}^{\mathbf{r}}$ pode ser reformulado como

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{\mathbf{r}} : \mathbb{G}_{\mathbf{r}}^n &\longrightarrow \mathbb{G}_{\mathbf{r}}^n \\ \mathbf{x} &\longmapsto \mathcal{M}_{X_R X_R}(\mathbf{x} - \mathbf{r}) + \mathbf{r} = \vartheta^{-1} \mathcal{M}_{X_R X_R} \vartheta(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (4.19)$$

A seguir, uma proposição relativa ao modelo $\mathcal{M}^{\mathbf{r}}$ cuja prova decorre diretamente do teorema 4.2.3 e da proposição 4.2.4:

4.2.5 Proposição. *A memória associativa (morfológica) $\mathcal{M}^{\mathbf{r}}$ recobra perfeitamente os padrões originais e para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{G}_{\mathbf{r}}^n$, a saída $\mathcal{M}^{\mathbf{r}}(\mathbf{x}) \in \mathbb{G}_{\mathbf{r}}^n$ satisfaz $\mathbf{r} \preceq_{\mathbf{r}} \mathcal{M}^{\mathbf{r}}(\mathbf{x}) \preceq_{\mathbf{r}} \mathbf{x}$.*

Demonstração. $\vartheta : \mathbb{G}_{\mathbf{r}}^n \longrightarrow \mathbb{G}^n$ é um isomorfismo, portanto, uma erosão. Da proposição 3.2.2 e equação 4.19, $\mathcal{M}^{\mathbf{r}} = \vartheta^{-1} \mathcal{M}_{X_R X_R} \vartheta$ é uma erosão em $\mathbb{G}_{\mathbf{r}}^n$ e $\mathcal{M}^{\mathbf{r}}(\mathbf{x}^{\xi}) = \mathcal{M}_{X_R X_R}(\mathbf{x}^{\xi} - \mathbf{r}) + \mathbf{r}$, mas $(\mathbf{x}^{\xi} - \mathbf{r})$ pertence ao conjunto das memórias fundamentais de $\mathcal{M}_{X_R X_R}$, portanto, $\mathcal{M}_{X_R X_R}(\mathbf{x}^{\xi} - \mathbf{r}) + \mathbf{r} = (\mathbf{x}^{\xi} - \mathbf{r}) + \mathbf{r} = \mathbf{x}^{\xi}$. Ao aplicar o isomorfismo ϑ^{-1} na desigualdade $0 \preceq \mathcal{M}_{X_R X_R}(\mathbf{x} - \mathbf{r}) \preceq (\mathbf{x} - \mathbf{r})$, obtemos $\mathbf{r} \preceq_{\mathbf{r}} \mathcal{M}_{X_R X_R}(\mathbf{x} - \mathbf{r}) + \mathbf{r} \preceq_{\mathbf{r}} (\mathbf{x} - \mathbf{r}) + \mathbf{r}$, isto é, $\mathbf{r} \preceq_{\mathbf{r}} \mathcal{M}^{\mathbf{r}}(\mathbf{x}) \preceq_{\mathbf{r}} \mathbf{x}$. ■

4.2.6 Exemplo. Sejam $X = [\mathbf{x}^1 \ \mathbf{x}^2 \ \mathbf{x}^3]$, $\tilde{X} = [\tilde{\mathbf{x}}^1 \ \tilde{\mathbf{x}}^2 \ \tilde{\mathbf{x}}^3] \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ como considerados no exemplo 2.4.3, isto é,

$$X = \begin{bmatrix} 0.8 & 1.0 & 0.3 \\ 0.2 & 0.5 & 0.4 \\ 0.7 & 0.0 & 0.9 \\ 0.1 & 0.3 & 0.6 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \tilde{X} = \begin{bmatrix} 0.8 & 1.0 & 0.3 \\ 0.0 & 0.6 & 0.1 \\ 0.7 & 0.0 & 1.0 \\ 0.1 & 0.5 & 0.6 \end{bmatrix}$$

e $R \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$, $R = [\mathbf{r} \ \mathbf{r} \ \mathbf{r}]$ com $\mathbf{r} = 0.5$. Aplicamos o isomorfismo (4.17) em X . Como definido em (4.14), a nova matriz da memória fundamental é

$$X_R^+ = \left[(\mathbf{x}^1 - \mathbf{r})^+ \ (\mathbf{x}^2 - \mathbf{r})^+ \ (\mathbf{x}^3 - \mathbf{r})^+ \ (\mathbf{x}^1 - \mathbf{r})^- \ (\mathbf{x}^2 - \mathbf{r})^- \ (\mathbf{x}^3 - \mathbf{r})^- \right]$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{bmatrix} (0.3)^+ & (0.5)^+ & (-0.2)^+ & (0.3)^- & (0.5)^- & (-0.2)^- \\ (-0.3)^+ & (0.0)^+ & (-0.1)^+ & (-0.3)^- & (0.0)^- & (-0.1)^- \\ (0.2)^+ & (-0.5)^+ & (0.4)^+ & (0.2)^- & (-0.5)^- & (0.4)^- \\ (-0.4)^+ & (-0.2)^+ & (0.1)^+ & (-0.4)^- & (-0.2)^- & (0.1)^- \end{bmatrix} \\
 & \\
 &= \begin{bmatrix} 0.3 & 0.5 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.2 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.3 & 0.0 & 0.1 \\ 0.2 & 0.0 & 0.4 & 0.0 & 0.5 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.1 & 0.4 & 0.2 & 0.0 \end{bmatrix},
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

analogamente,

$$\tilde{\mathbf{X}}_R^+ = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.5 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.2 \\ 0.0 & 0.1 & 0.0 & 0.5 & 0.0 & 0.4 \\ 0.2 & 0.0 & 0.5 & 0.0 & 0.5 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.1 & 0.4 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix}. \tag{4.21}$$

Notamos que cada linha da matriz X_R^+ possui $k = 3$ entradas nulas, como mencionado na demonstração da proposição 4.2.1.

A matriz do modelo \mathcal{M}^r de associações dos pares $\left((\mathbf{x}^\xi)^+, (\mathbf{x}^\xi)^+\right)$ e $\left((\mathbf{x}^\xi)^-, (\mathbf{x}^\xi)^-\right)$, $\xi = 1, 2$ e 3 , é

$$M_{X_R X_R}^+ = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0.3 & 0.0 & 0.3 & 0.1 \\ 0.5 & 0.5 & 0.0 & 0.3 \\ 0.4 & 0.2 & 0.4 & 0.0 \end{bmatrix}.$$

Denotaremos $M_{X_R X_R}^+ \boxtimes (\tilde{\mathbf{x}}^\xi - \mathbf{r})^+$ por $(\mathbf{y}^\xi)^+$ e $M_{X_R X_R}^+ \boxtimes (\tilde{\mathbf{x}}^\xi - \mathbf{r})^-$ por $(\mathbf{y}^\xi)^-$, $\xi = 1, 2$ e 3 . Notamos que $(\tilde{\mathbf{x}}^\xi - \mathbf{r})^+$ e $(\tilde{\mathbf{x}}^\xi - \mathbf{r})^-$ são, respectivamente, as ξ -ésima e

$(\xi + 3)$ -ésima colunas da matriz $\tilde{\mathbf{X}}_R^+$. Obtemos

$$(\mathbf{y}^1)^+ = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.0 \\ 0.2 \\ 0.0 \end{bmatrix}, \quad (\mathbf{y}^2)^+ = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.1 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{bmatrix}, \quad (\mathbf{y}^3)^+ = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ 0.4 \\ 0.1 \end{bmatrix} \quad e$$

$$(\mathbf{y}^1)^- = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.3 \\ 0.0 \\ 0.4 \end{bmatrix}, \quad (\mathbf{y}^2)^- = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ 0.3 \\ 0.0 \end{bmatrix}, \quad (\mathbf{y}^3)^- = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.1 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{bmatrix}.$$

Assim, por (4.18), $\mathbf{y}^\xi = \mathcal{M}^r(\tilde{\mathbf{x}}^\xi) = (\mathbf{y}^\xi)^+ - (\mathbf{y}^\xi)^- + \mathbf{r}$,

$$\mathbf{y}^1 = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.2 \\ 0.7 \\ 0.1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}^2 = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 0.6 \\ 0.2 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}^3 = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.4 \\ 0.9 \\ 0.6 \end{bmatrix}.$$

No exemplo 2.4.3, o modelo \mathcal{M}_{XX} recuperou apenas o padrão $\tilde{\mathbf{x}}^2$, o único com ruído dilativo segundo a ordem usual. Por outro lado, o modelo \mathcal{M}^r recuperou os padrões $\tilde{\mathbf{x}}^1$ e $\tilde{\mathbf{x}}^3$, de fato, segundo (3.9), observamos em (4.20) e (4.21) que $(\mathbf{x}^1)^+ \leq (\tilde{\mathbf{x}}^1)^+$, $(\mathbf{x}^3)^+ \leq (\tilde{\mathbf{x}}^3)^+$, $(\mathbf{x}^1)^- \leq (\tilde{\mathbf{x}}^1)^-$ e $(\mathbf{x}^3)^- \leq (\tilde{\mathbf{x}}^3)^-$, isto é, $\mathbf{x}^1 \preceq_{0.5} \tilde{\mathbf{x}}^1$ e $\mathbf{x}^3 \preceq_{0.5} \tilde{\mathbf{x}}^3$.

O uso de referências no modelo \mathcal{M}^r é sem dúvidas um diferencial quando comparado com os modelos originais de MAMs, além disso, a escolha da referência exerce um papel importante na saída do modelo. Os efeitos de diferentes referências podem ser observados nas figuras a 4.7, 4.8 e 4.9 que exibem $\mathbf{y}^\xi = \mathcal{M}^r(\tilde{\mathbf{x}}^\xi)$:

60 Memórias associativas morfológicas em inf-semirreticulados completos



Figura 4.7: Saída do modelo \mathcal{M}^0 .

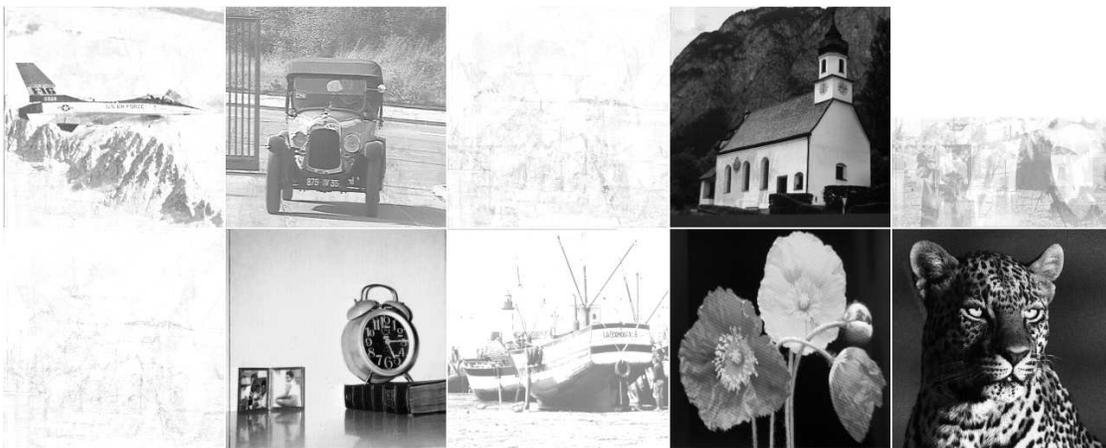


Figura 4.8: Saída do modelo \mathcal{M}^1 .



Figura 4.9: Saída do modelo $\mathcal{M}^{0.5}$.

O modelo \mathcal{M}^r apresenta um resultado parecido com o do modelo \mathcal{M}_{XX} quando a referência é $\mathbf{r} = 0$ (figura 4.7) e parecido com o modelo \mathcal{W}_{XX} quando a referência é $\mathbf{r} = 1$ (figura 4.8). Esta semelhança pode ser melhor observada na tabela 4.2. O modelo $\mathcal{M}^{0.5}$ não é tolerante a nenhum dos ruídos apresentados, exceto o binário em barche, como mostra a figura 4.9. O ruído binário em barche é um arredondamento dos pixels, isto é, $\tilde{x}_i^8 = 1$ se $x_i^8 \geq 0.5$, senão, $\tilde{x}_i^8 = 0$, para todo $1 \leq i \leq 65536$. O resultado é uma imagem binária com a seguinte propriedade: $\mathbf{x}^8 \preceq_{0.5} \tilde{\mathbf{x}}^8$. Na figura 4.10, diferentes densidades de ruído binário foram usados, a figura 4.11 exibe o resultado obtido por $\mathcal{M}^{0.5}$ e o RSE deste experimento está na última coluna da tabela 4.2:

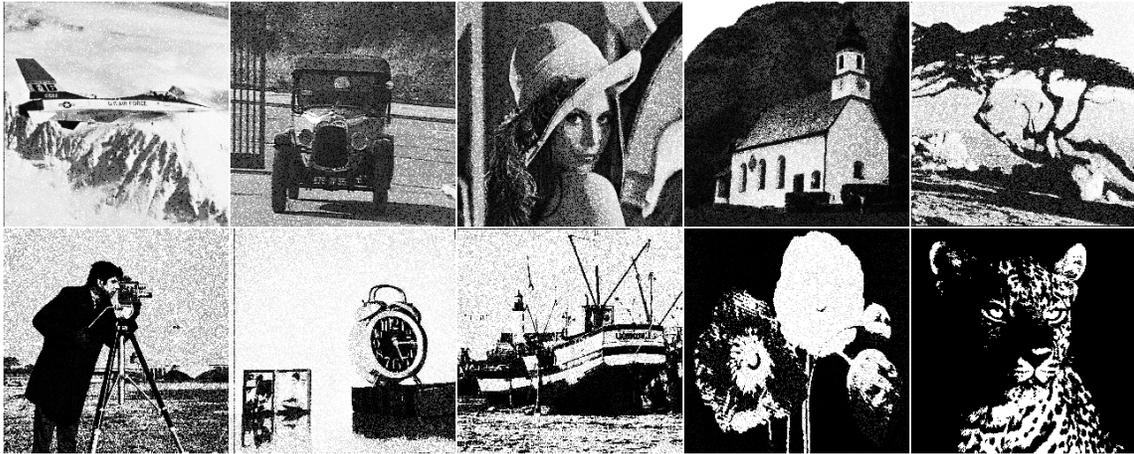


Figura 4.10: $\tilde{\mathbf{x}}^\xi$ com ruído binário aplicado em $(10\xi)\%$ dos pixels. Em todos os casos $\tilde{\mathbf{x}}^\xi$ representa uma versão de \mathbf{x}^ξ com ruído dilativo em $(\mathbb{G}^n, \preceq_{0.5})$, isto é, $\mathbf{x}^\xi \preceq_{0.5} \tilde{\mathbf{x}}^\xi$, $\xi = 1, \dots, 10$.

62 Memórias associativas morfológicas em inf-semirreticulados completos



Figura 4.11: Recordação do modelo $\mathcal{M}^{0.5}$ para padrões da figura 4.10.

Modelo	\mathcal{M}_{XX}	\mathcal{W}_{XX}	\mathcal{M}_0	\mathcal{M}_1	$\mathcal{M}_{0.5}$	$\mathcal{M}_{0.5}$
Figura	2.3	2.4	4.7	4.8	4.9	4.11
aircraft	0.4015	0.2249	0.4015	0.2194	0.2656	0.0026
voit	0.3410	0.5803	0.3371	0.5802	0.2470	0.0085
lena	0.9603	1.3434	0.9474	1.3193	0.4274	0.0134
church	0.9403	0.0605	0.9292	0.0647	0.4261	0.0134
tree	0.0277	0.7645	0.0277	0.7604	0.3041	0.0078
cameraman	0.0047	1.1539	0.0047	1.1292	0.3942	0.0194
clock	0.9876	0.0037	0.9775	0.0037	0.3837	0.0092
barche	0.7793	0.7495	0.7755	0.7253	0.0213	0.0172
papav	$< 10^{-16}$	$< 10^{-16}$	$< 10^{-16}$	$< 10^{-16}$	$< 10^{-16}$	0.0240
leopard	$< 10^{-16}$	$< 10^{-16}$	$< 10^{-16}$	$< 10^{-16}$	$< 10^{-16}$	0.0187

Tabela 4.2: Erro relativo quadrático.

Assim como o modelo $\hat{\mathcal{M}}_{XY}^\rho$, podemos empregar o modelo \mathcal{M}^f com referência variável $\rho(\mathbf{x})$. Uma forma de fazer isso é, assumindo que em certas

ocasiões, $\rho(\tilde{\mathbf{x}})$ fornece uma aproximação razoável para \mathbf{x} (ruído salt & pepper e ρ filtro mediana, por exemplo), armazenar os pares $((\mathbf{x}^\xi - \rho(\mathbf{x}^\xi)), (\mathbf{x}^\xi - \rho(\mathbf{x}^\xi)))$, $\xi = 1, \dots, k$ e apresentar os padrões $\tilde{\mathbf{x}} - \rho(\tilde{\mathbf{x}})$, como mostram as figuras 4.12 e 4.13. Chamaremos este modelo de \mathcal{M}^ρ e é definido por

$$\mathcal{M}^\rho(\mathbf{x}) = \mathcal{M}_{X_{\rho(\mathbf{x})} X_{\rho(\mathbf{x})}}(\mathbf{x} - \rho(\mathbf{x})) + \rho(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} \in \mathbb{G}^n. \quad (4.22)$$

Por outro lado, $(\mathbf{x}^\xi - \rho(\mathbf{x}^\xi))$ pertence ao conjunto das memórias fundamentais de $\mathcal{M}_{X_{\rho(\mathbf{x})} X_{\rho(\mathbf{x})}}$, então

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^\rho(\mathbf{x}^\xi) &= \mathcal{M}_{X_{\rho(\mathbf{x})} X_{\rho(\mathbf{x})}}(\mathbf{x}^\xi - \rho(\mathbf{x}^\xi)) + \rho(\mathbf{x}^\xi) \\ &= (\mathbf{x}^\xi - \rho(\mathbf{x}^\xi)) + \rho(\mathbf{x}^\xi) = \mathbf{x}^\xi, \forall \xi = 1, \dots, k, \end{aligned} \quad (4.23)$$

como mostra a tabela 4.3 para as figuras papav e leopard. Além do filtro mediana (μ), também empregamos os filtros média e Wiener, denotados por ν e ω , respectivamente e substituímos ρ em \mathcal{M}^ρ pela função que representa o filtro aplicado.



Figura 4.12: Saída do modelo \mathcal{M}^μ .

Figura 4.13: Saída do modelo $\mathcal{M}^{\mu(\mathbf{x}^{\xi})}$.

Comparamos o filtro mediana (colunas 2 e 4) com o modelo \mathcal{M}^{ρ} tendo a imagem mediana-filtrada como referência (colunas 3 e 5). Os resultados estão na tabela 4.3:

Modelo	$\mu(\tilde{\mathbf{x}}^{\xi})$	\mathcal{M}^{μ}	$\mu(\mathbf{x}^{\xi})$	$\mathcal{M}^{\mu(\mathbf{x}^{\xi})}$
Figura	4.2	4.12	4.1	4.13
aircraft	0.0812	0.0749	0.0593	0.0485
voit	0.1768	0.1672	0.1298	0.1124
lena	0.0779	0.0660	0.0635	0.0464
church	0.7558	0.7553	0.0525	0.0473
tree	0.5902	0.5896	0.0595	0.0375
cameraman	0.1062	0.0965	0.0856	0.0439
clock	0.0674	0.0623	0.0504	0.0248
barche	0.6080	0.6060	0.0748	0.0707
papav	0.0401	$< 10^{-16}$	0.0401	$< 10^{-16}$
leopard	0.1303	$< 10^{-16}$	0.1303	$< 10^{-16}$

Tabela 4.3: Erro relativo quadrático.

Temos $(X - \rho(X))^+ \in (\mathbb{G}^{n \times 2k})^+$, $(\mathbf{x} - \rho(\mathbf{x}))^+$ e $(\mathbf{x} - \rho(\mathbf{x}))^- \in$

$(\mathbb{G}^n)^+$, portanto, $\mathcal{M}_{X_{\rho(\mathbf{x})}X_{\rho(\mathbf{x})}}$ é um operador em \mathbb{G}^n e da proposição 4.2.4, vale a desigualdade

$$\rho(\mathbf{x}) \preceq_{\rho(\mathbf{x})} \mathcal{M}^\rho(\mathbf{x}) \preceq_{\rho(\mathbf{x})} \mathbf{x}, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{G}^n. \quad (4.24)$$

Interpretamos a equação 4.24 como uma aproximação de \mathbf{x} na direção de $\rho(\mathbf{x})$ segundo a ordem $\preceq_{\rho(\mathbf{x})}$ por meio de \mathcal{M}^ρ , isto é, se $0 \leq (\rho(\mathbf{x}))_i \leq x_i$ para algum $i, 1 \leq i \leq n$, então $(\rho(\mathbf{x}))_i \leq (\bar{\mathcal{M}}(\mathbf{x}))_i \leq x_i$ (o caso $x_i \leq (\rho(\mathbf{x}))_i \leq 0$ é análogo e esta interpretação estende-se às desigualdades das proposições 4.2.4 e 4.2.5).

A figura 4.14 exhibe diferentes resultados do modelo \mathcal{M}^ρ para referências obtidas pelos filtros mediana, média e Wiener. Os RSEs deste exemplo para $\rho(\tilde{\mathbf{x}})$ foram 0.1192, 0.1206 e 0.0965 e para $\mathcal{M}^\rho(\tilde{\mathbf{x}})$ foram 0.1083, 0.1051 e 0.0955, ambos respectivamente para os filtros mediana, média e Wiener. Na tabela 1.2, a comparação das aplicações destes três filtros no modelo \mathcal{M}^ρ para o ruído Gaussiano de média 0 e variância 0.01.

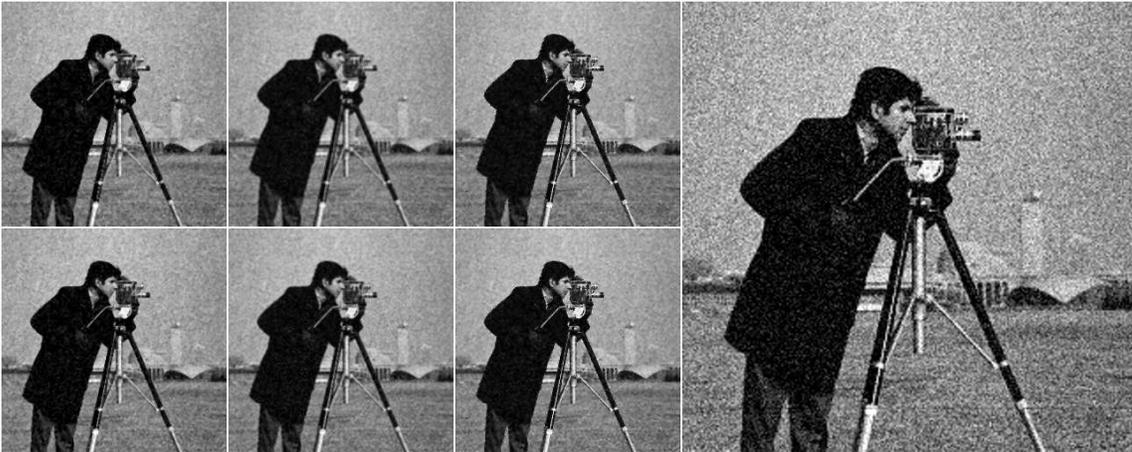


Figura 4.14: Figura maior: imagem com ruído Gaussiano de média 0 e variância 0.01. Na linha superior, respectivamente, os filtros mediana, média e Wiener aplicados na imagem com ruído Gaussiano e na linha inferior, os respectivos resultados obtidos pelo modelo \mathcal{M}^ρ para cada filtro.

Cada um dos modelos apresentados neste capítulo possui tolerância a ruídos e capacidades de recordação particulares. Na próxima seção, comparamos

os modelos por meio de resultados computacionais.

4.3 Resultados computacionais

Os resultados computacionais apresentados nesta seção foram obtidos como nas seções anteriores, isto é, consideramos o mesmo conjunto de dez imagens de resolução 256×256 pixels exibido na figura 2.1. Cada um dos ruídos Gaussiano, speckle, salt & pepper, salt e pepper foram aplicados aleatoriamente 100 vezes nos 10 padrões originais sob as condições da figura 2.2, ou seja, Gaussiano de média 0 e variância 0.01, speckle de variância 0.04 e salt & pepper, salt e pepper, todos de densidade 0.1. (linhas 2 a 6 da tabela 4.4), gerando assim um conjunto de 1000 padrões ruidosos para cada um dos ruídos citados. Cada um destes conjuntos de 1000 padrões ruidosos foram apresentados para os modelos \mathcal{M}_{XX} , $\hat{\mathcal{M}}_{XX}^{\mu}$, $\hat{\mathcal{M}}_{XX}^{\wedge} \circ \mu_8$, $\mathcal{M}^{0.5}$, \mathcal{M}^{μ} e o filtro mediana μ , respectivamente colunas 2, 3, 4, 5, 6 e 7 da tabela 4.4 e das tabelas do apêndice A. Os outros padrões incompletos (metade vertical esquerda preta e metade horizontal superior branca), versões binárias dos padrões originais e padrões originais (respectivamente linhas 7, 8, 9 e 10 da tabela 4.4) foram gerados e submetidos uma única vez a cada um dos modelos, pois estes padrões são únicos.

A tabela 4.4 apresenta, para cada modelo, nas linhas 2 a 6 as médias dos RSEs médios e nas linhas 7 a 10 o RSE médio. Estes dados estão detalhados no apêndice A. Comparações com outros modelos podem ser encontradas em [51] e [52].

Ruído	\mathcal{M}_{XX}	$\hat{\mathcal{M}}_{XX}^{\mu}$	$\hat{\mathcal{M}}_{\bar{X}X}^{\Lambda}$	$\mathcal{M}^{0.5}$	\mathcal{M}^{μ}	$\mu(\tilde{\mathbf{x}}^{\xi})$
Gaussiano	0.5058	0.1146	0.1176	0.3553	0.1101	0.1157
Speckle	0.3409	0.1361	0.1201	0.3028	0.1350	0.1395
Salt & pepper	0.9660	0.0869	0.0423	0.4778	0.0765	0.0870
Salt	0.0048	0.0861	0.0406	0.3863	0.0892	0.0984
Pepper	0.9814	0.0962	0.0837	0.2699	0.0870	0.0964
Inc. v. pr.	0.9473	0.6883	0.8524	0.3434	0.6790	0.6796
Inc. h. br.	0.0498	0.8254	0.0869	0.4444	0.8095	0.8104
Binário	0.7479	0.6068	0.6667	0.0232	0.5567	0.5584
Padrão orig.	$< 10^{-16}$	0.1833	0.0364	$< 10^{-16}$	$< 10^{-17}$	0.0746

Tabela 4.4: Médias dos RSEs.

CONCLUSÃO

Concluimos este trabalho destacando os modelos \mathcal{M}_{XX} e \mathcal{M}^f , os primeiros modelos de MAMs em inf-semirreticulado completo. Também temos o bom desempenho do modelo heteroassociativo $\hat{\mathcal{M}}_{\bar{X}X}^\wedge$ com filtro estatístico de ordem com μ_8 (expressão 4.12 e figura 4.6), a capacidade de $\mathcal{M}^{0,5}$ para recuperar versões binárias dos padrões originais (figuras 4.10 e 4.11) e o uso de diferentes referências nos modelos $\hat{\mathcal{M}}_{XY}^\rho$ e \mathcal{M}^ρ (em (4.10), (4.12) e (4.22)), todos em inf-semirreticulado completo.

Como resultados teóricos, temos:

1. a proposição 4.1.1 que estabelece a condição para recobrimento perfeito dos padrões por $\hat{\mathcal{M}}_{XX}^\rho$;
2. uma relação entre o padrão de saída e elemento de referência para o modelo $\hat{\mathcal{M}}_{XY}^\rho$ na expressão (4.8);
3. uma relação entre o padrão de entrada, padrão de saída e elemento de referência para o modelo $\hat{\mathcal{M}}_{XX}^\rho$ em (4.9);
4. a proposição 4.2.1 sobre as entradas da matriz M_{XX}^+ ;
5. o lema 4.2.2 que caracteriza o operador \mathcal{M}_{XX}^+ definido pela matriz M_{XX}^+ como sendo antiextensivo em $(\mathbb{G}^n)^+$;

6. o teorema 4.2.3 onde mostramos que o modelo \mathcal{M}_{XX} é uma memória associativa morfológica no inf-semirreticulado completo (\mathbb{G}^n, \preceq) ;
7. a proposição 4.2.4 sobre a autodualidade de \mathcal{M}_{XX} ;
8. a proposição 4.2.5 onde estabelecemos o modelo \mathcal{M}^r , uma generalização do modelo \mathcal{M}_{XX} para $(\mathbb{G}^n, \preceq_r)$;
9. o modelo \mathcal{M}^ρ em 4.22, generalização do modelo \mathcal{M}^r .

Os modelos de memórias em inf-semirreticulado apresentados têm em comum a relação de ordem parcial \preceq_ρ e inspiração no modelo clássico \mathcal{M}_{XY} . O parâmetro ρ é o elemento de referência que pode ser constante \mathbf{r} ou uma imagem (padrão de entrada processado pelo filtro mediana $\rho(\mathbf{x})$, por exemplo).

O modelo $\hat{\mathcal{M}}_{XY}^\rho$ foi obtido, em poucas palavras, trocando apenas a relação de ordem. A nova relação de ordem, além de permitir o uso de padrões diferentes como elementos de referência, também permite associar padrões distintos. As saídas obtidas para os diferentes usos de referências e associações do modelo $\hat{\mathcal{M}}_{XY}^\rho$ estão ilustradas nas figuras 4.3, 4.4, 4.5 e 4.6. Em contrapartida, a soma usual não é mais distributiva em relação ao supremo e ínfimo, a principal consequência é que $\hat{\mathcal{M}}_{XY}^\rho$ não comuta com \bigwedge_ρ e portanto $\hat{\mathcal{M}}_{XY}^\rho$ não representa uma erosão no sentido algébrico.

O modelo \mathcal{M}_{XX} representa, de fato, a primeira memória associativa em inf-semirreticulado. A partir da extensão de l -grupo completo $(\mathbb{G}^n, +, \leq)$, obtemos o reticulado $((\mathbb{G}^n)^+, \leq)$ e o cisl (\mathbb{G}^n, \preceq) , assim, ao definir o operador \mathcal{M}_{XX}^+ como uma restrição de \mathcal{M}_{XX} em $(\mathbb{G}^n)^+$, temos suas propriedades como erosão, capacidade absoluta de armazenamento e convergência em único passo. Estas características são preservadas pela extensão \mathcal{M}_{XX} de \mathcal{M}_{XX}^+ . As saídas obtidas para diferentes referências fixas estão ilustradas nas figuras 4.7, 4.8 e 4.9. A figura 4.10 traz um ruído tal que $\mathbf{x} \preceq_{0,5} \tilde{\mathbf{x}}$ com a saída na figura 4.11. As referências variáveis com o modelo \mathcal{M}^ρ estão ilustradas nas figuras 4.12, 4.13 e 4.14.

No capítulo 2, adotamos um conjunto de 10 imagens com suas versões ruidosas, respectivamente figuras 2.1 e 2.2. Estes dados foram utilizados ao longo do trabalho e as tabelas 4.1, 4.2 e 4.3 trazem os erros (RSEs) cometidos por cada modelo para cada uma das imagens. Para comparar melhor os modelos, criamos conjuntos de dados a partir das 10 imagens iniciais. Cada um dos ruídos Gaussiano, speckle, salt & pepper, salt e pepper foram aplicados aleatoriamente 100 vezes gerando assim um conjunto de 1000 padrões ruidosos apresentados aos novos modelos, ao modelo original \mathcal{M}_{XX} e ao filtro mediana, além de versões incompletas e binárias que foram geradas e apresentadas uma única vez. A tabela 4.4 traz a média dos RSEs médios onde podemos ver que para os ruídos Gaussiano, speckle, salt & pepper, pepper, incompleto vertical preto e binário, todos os modelos apresentados aqui obtiveram resultados melhores do que o modelo original \mathcal{M}_{XX} , apenas com os ruídos salt e incompleto branco, ruídos dilativos segundo a ordem usual, que o modelo original foi melhor do que qualquer outro. Como previsto, o modelo \mathcal{M}^p recobra perfeitamente os padrões originais. Os dados desta tabela estão delhados por figuras e modelos nas tabelas do apêndice A, exceto a tabela 1.2 que traz os resultados obtidos pelo modelo \mathcal{M}^p com os filtros mediana, média (aritmética) e Wiener.

RESULTADOS COMPUTACIONAIS

Modelo	\mathcal{M}_{XX}	$\hat{\mathcal{M}}_{XX}^{\mu}$	$\hat{\mathcal{M}}_{XX}^{\Lambda}$	$\mathcal{M}^{0.5}$
aircraft	0.4183	0.0808	0.0777	0.2682
voit	0.6176	0.1621	0.1382	0.2960
lena	0.5663	0.1148	0.1291	0.3343
church	0.5149	0.1140	0.1344	0.4899
tree	0.4762	0.0956	0.1071	0.3040
cameraman	0.4946	0.1131	0.1057	0.2898
clock	0.4162	0.0742	0.0884	0.2758
barche	0.5015	0.1092	0.1045	0.2601
papav	0.4879	0.1021	0.1326	0.4541
leopard	0.5647	0.1803	0.1581	0.5805
média	0.5058	0.1146	0.1176	0.3553

Tabela 1.1: Ruído Gaussiano.

Modelo	\mathcal{M}^μ	μ	\mathcal{M}^ν	ν	\mathcal{M}^ω	ω
aircraft	0.0754	0.0815	0.0725	0.1286	0.0630	0.1036
voit	0.1524	0.1638	0.1420	0.2505	0.1285	0.2057
lena	0.1118	0.1153	0.1010	0.2118	0.1037	0.1803
church	0.1129	0.1143	0.1040	0.2165	0.1076	0.1855
tree	0.0926	0.0957	0.0866	0.1661	0.0837	0.1403
cameraman	0.1084	0.1188	0.1056	0.1962	0.0958	0.1598
clock	0.0697	0.0746	0.0640	0.1243	0.0598	0.1042
barche	0.1046	0.1097	0.0970	0.1840	0.0938	0.1534
papav	0.1021	0.1023	0.0926	0.1961	0.1038	0.1623
leopard	0.1712	0.1810	0.1583	0.2847	0.1482	0.2326
média	0.1101	0.1157	0.1024	0.1959	0.0988	0.1628

Tabela 1.2: Ruído Gaussiano e filtros mediana (μ), média (ν) e Wiener (ω).

Modelo	\mathcal{M}_{XX}	$\hat{\mathcal{M}}_{XX}^\mu$	$\hat{\mathcal{M}}_{XX}^\lambda$	$\mathcal{M}^{0.5}$	\mathcal{M}^μ	μ
aircraft	0.3508	0.1217	0.1258	0.3198	0.1202	0.1232
voit	0.3402	0.1698	0.1315	0.2462	0.1667	0.1768
lena	0.3363	0.1321	0.1141	0.2746	0.1316	0.1354
church	0.3391	0.1243	0.1133	0.3539	0.1235	0.1256
tree	0.3432	0.1262	0.1283	0.3126	0.1254	0.1275
cameraman	0.3406	0.1387	0.1073	0.2405	0.1391	0.1476
clock	0.3511	0.1150	0.1301	0.3222	0.1141	0.1165
barche	0.3429	0.1387	0.1234	0.2445	0.1378	0.1411
papav	0.3349	0.1239	0.1046	0.3321	0.1242	0.1243
leopard	0.3303	0.1708	0.1229	0.3818	0.1672	0.1773
média	0.3409	0.1361	0.1201	0.3028	0.1350	0.1395

Tabela 1.3: Ruído speckle.

Modelo	\mathcal{M}_{XX}	$\hat{\mathcal{M}}_{XX}^{\mu}$	$\hat{\mathcal{M}}_{\bar{X}X}^{\Lambda}$	$\mathcal{M}^{0.5}$	\mathcal{M}^{μ}	μ
aircraft	0.9793	0.0684	0.0297	0.3767	0.0609	0.0684
voit	0.9648	0.1396	0.0628	0.3310	0.1237	0.1397
lena	0.9625	0.0766	0.0413	0.4279	0.0652	0.0767
church	0.9602	0.0682	0.0410	0.6664	0.0590	0.0683
tree	0.9715	0.0735	0.0439	0.3907	0.0652	0.0736
cameraman	0.9673	0.0964	0.0409	0.4173	0.0856	0.0969
clock	0.9784	0.0570	0.0291	0.3928	0.0509	0.0571
barche	0.9712	0.0847	0.0336	0.3310	0.0740	0.0847
papav	0.9597	0.0544	0.0362	0.6646	0.0468	0.0544
leopard	0.9448	0.1505	0.0646	0.7794	0.1334	0.1506
média	0.9660	0.0869	0.0423	0.4778	0.0765	0.0870

Tabela 1.4: Ruído salt & pepper.

Modelo	\mathcal{M}_{XX}	$\hat{\mathcal{M}}_{XX}^{\mu}$	$\hat{\mathcal{M}}_{\bar{X}X}^{\Lambda}$	$\mathcal{M}^{0.5}$	\mathcal{M}^{μ}	μ
aircraft	0.0020	0.0649	0.0214	0.0796	0.0665	0.0734
voit	0.0048	0.1236	0.0643	0.3201	0.1339	0.1486
lena	0.0048	0.0769	0.0421	0.3994	0.0789	0.0886
church	0.0052	0.0829	0.0381	0.6187	0.0819	0.0889
tree	0.0038	0.0709	0.0475	0.2296	0.0741	0.0815
cameraman	0.0051	0.0856	0.0352	0.3943	0.0942	0.1046
clock	0.0025	0.0553	0.0235	0.1406	0.0556	0.0610
barche	0.0052	0.0815	0.0315	0.2771	0.0839	0.0934
papav	0.0064	0.0705	0.0368	0.6351	0.0691	0.0745
leopard	0.0076	0.1485	0.0653	0.7688	0.1540	0.1693
média	0.0048	0.0861	0.0406	0.3863	0.0892	0.0984

Tabela 1.5: Ruído salt.

Modelo	\mathcal{M}_{XX}	$\hat{\mathcal{M}}_{XX}^{\mu}$	$\hat{\mathcal{M}}_{XX}^{\wedge}$	$\mathcal{M}^{0.5}$	\mathcal{M}^{μ}	μ
aircraft	0.9897	0.0760	0.0737	0.3822	0.0693	0.0761
voit	0.9824	0.1486	0.1043	0.1545	0.1337	0.1488
lena	0.9791	0.0864	0.0739	0.2091	0.0768	0.0866
church	0.9784	0.0792	0.0792	0.3093	0.0716	0.0794
tree	0.9842	0.0823	0.0861	0.3370	0.0752	0.0825
cameraman	0.9820	0.1069	0.0952	0.1886	0.0978	0.1075
clock	0.9885	0.0667	0.0808	0.3826	0.0615	0.0668
barche	0.9855	0.0927	0.0762	0.2144	0.0831	0.0928
papav	0.9768	0.0639	0.0584	0.2603	0.0576	0.0641
leopard	0.9675	0.1589	0.1093	0.2615	0.1433	0.1591
média	0.9814	0.0962	0.0837	0.2699	0.0870	0.0964

Tabela 1.6: Ruído pepper.

Modelo	\mathcal{M}_{XX}	$\hat{\mathcal{M}}_{XX}^{\mu}$	$\hat{\mathcal{M}}_{XX}^{\wedge}$	$\mathcal{M}^{0.5}$	\mathcal{M}^{μ}	μ
aircraft	0.9651	0.6946	0.8974	0.4374	0.6919	0.6922
voit	0.9476	0.7326	0.8374	0.2817	0.7219	0.7228
lena	0.9286	0.5982	0.8237	0.2115	0.5918	0.5921
church	0.9403	0.7633	0.8470	0.4261	0.7553	0.7558
tree	0.9528	0.6941	0.8797	0.4065	0.6880	0.6883
cameraman	0.9434	0.6520	0.8393	0.2606	0.6431	0.6439
clock	0.9755	0.7644	0.9038	0.4768	0.7631	0.7634
barche	0.9636	0.7336	0.8656	0.3296	0.7266	0.7270
papav	0.9292	0.6243	0.8233	0.3106	0.6224	0.6226
leopard	0.9270	0.6259	0.8070	0.2936	0.5858	0.5883
média	0.9473	0.6883	0.8524	0.3434	0.6790	0.6796

Tabela 1.7: Padrões incompletos (metade vertical esquerda preta).

Modelo	\mathcal{M}_{XX}	$\hat{\mathcal{M}}_{XX}^{\mu}$	$\hat{\mathcal{M}}_{\bar{X}X}^{\Lambda}$	$\mathcal{M}^{0.5}$	\mathcal{M}^{μ}	μ
aircraft	0.0236	0.2779	0.0426	0.1108	0.2581	0.2595
voit	0.0537	1.0020	0.1458	0.4529	0.9855	0.9865
lena	0.0434	0.9367	0.0941	0.4671	0.9233	0.9239
church	0.0868	1.2498	0.1189	0.7365	1.2378	1.2381
tree	0.0277	0.6021	0.0787	0.3041	0.5896	0.5902
cameraman	0.0478	0.7472	0.0730	0.4170	0.7286	0.7296
clock	0.0123	0.2439	0.0270	0.1270	0.2262	0.2273
barche	0.0150	0.5087	0.0333	0.2260	0.4916	0.4926
papav	0.0976	1.1284	0.1168	0.6924	1.1205	1.1207
leopard	0.0904	1.5577	0.1393	0.9097	1.5343	1.5352
média	0.0498	0.8254	0.0869	0.4444	0.8095	0.8104

Tabela 1.8: Padrões incompletos (metade horizontal superior branca).

Modelo	\mathcal{M}_{XX}	$\hat{\mathcal{M}}_{XX}^{\mu}$	$\hat{\mathcal{M}}_{\bar{X}X}^{\Lambda}$	$\mathcal{M}^{0.5}$	\mathcal{M}^{μ}	μ
aircraft	0.6027	0.3226	0.5739	0.0105	0.2930	0.2947
voit	0.8860	0.8587	0.7637	0.0258	0.7848	0.7871
lena	0.8405	0.7440	0.7463	0.0344	0.7129	0.7137
church	0.7408	0.5990	0.6408	0.0295	0.5569	0.5578
tree	0.6797	0.4958	0.5951	0.0139	0.4432	0.4444
cameraman	0.7938	0.7118	0.7214	0.0376	0.6562	0.6590
clock	0.6000	0.3210	0.5684	0.0124	0.2885	0.2899
barche	0.7793	0.6498	0.7157	0.0213	0.6060	0.6080
papav	0.7594	0.6111	0.6868	0.0276	0.5801	0.5809
leopard	0.7966	0.7540	0.6553	0.0187	0.6459	0.6487
média	0.7479	0.6068	0.6667	0.0232	0.5567	0.5584

Tabela 1.9: Versões binárias dos padrões originais.

Modelo	\mathcal{M}_{XX}	$\hat{\mathcal{M}}_{XX}^{\mu}$	$\hat{\mathcal{M}}_{\bar{X}X}^{\Lambda}$	$\mathcal{M}^{0.5}$	\mathcal{M}^{μ}	μ
aircraft	$< 10^{-15}$	0.1392	0.0185	$< 10^{-16}$	$< 10^{-17}$	0.0593
voit		0.2492	0.0582			0.1298
lena		0.1724	0.0372			0.0635
church		0.1758	0.0342			0.0525
tree		0.1644	0.0431			0.0595
cameraman		0.1944	0.0317			0.0856
clock		0.1140	0.0204			0.0504
barche		0.1718	0.0286			0.0748
papav		0.1407	0.0338			0.0401
leopard		0.3116	0.0582			0.1303
média	$< 10^{-16}$	0.1833	0.0364	$< 10^{-16}$	$< 10^{-17}$	0.0746

Tabela 1.10: Padrões originais.

Referências Bibliográficas

- [1] BANON, G. J. F. E BARRERA, J. *Bases da Morfologia Matemática para Análise de Imagens Binárias*. Recife, PE, 1994.
- [2] BIRKHOFF, G. *Lattice Theory*, 3 ed. American Mathematical Society, Providence, 1993.
- [3] BLOCH, I., AND MAITRE, H. Fuzzy mathematical morphologies: a comparative study. *Pattern Recognition* 28, 9 (1995), 1341–1387.
- [4] CUNINGHAME-GREEN, R. *Minimax Algebra: Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems* 166. Springer-Verlag, New York, 1979.
- [5] CUNINGHAME-GREEN, R. Minimax algebra and applications. In *Advances in Imaging and Electron Physics*, P. Hawkes, Ed., vol. 90. Academic Press, New York, NY, 1995, pp. 1–121.
- [6] DAVEY, B. A., AND PRIESTLEY, H. A. *Introduction to lattices and Order*. Cambridge University Press, 2002.
- [7] DAVIDSON, J. Foundation and applications of lattice transforms in image processing. In *Advances in Electronics and Electron Physics*, P. Hawkes, Ed., vol. 84. Academic Press, New York, NY, 1992, pp. 61–130.
- [8] DAVIDSON, J., AND RITTER, G. A theory of morphological neural networks. In *Digital Optical Computing II* (July 1990), vol. 1215 of *Proceedings of SPIE*, pp. 378–388.
- [9] DEDEKIND, R. Über die von drei Moduln erzeugte Dualgruppe. *Mathematische Annalen* 53 (1900), 371–403.

-
- [10] DENG, T., AND HEIJMANS, H. Grey-scale morphology based on fuzzy logic. *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 16, 2 (Mar. 2002), 155–171.
- [11] DOUGHERTY, E., AND LOTUFO, R. Hands-on morphological image processing. In *SPIE Tutorial Texts in Optical Engineering*, vol. TT59. SPIE Press, Bellingham, NJ, 2003.
- [12] FAUSETT, L. *Fundamentals of Neural Networks: Algorithms, Architectures, and Applications*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1994.
- [13] GANTER, B., AND WILLE, P. *Formal Concept Analysis*. Springer, Berlin, Germany, 1999.
- [14] GOGUEN, J. L-fuzzy sets. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 18, 1 (Apr. 1967), 145–174.
- [15] GRÄTZER, G. *General Lattice Theory*. Birkhäuser, Basel, 1978.
- [16] GUZMAN, E., POGREBNIAK, O., YAÑES, C., AND SANCHEZ FERNANDEZ, L. P. Morphological transform for image compression. *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing* 2008 (2008).
- [17] HADWIGER, H. Minkowskische Addition und Subtraktion Beliebiger Punktmengen und die Theoreme von Erhard Schmidt. *Mathematische Zeitschrift* 53 (1950), 210–218.
- [18] HADWIGER, H. *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie*. Springer-Verlag, Berlin, 1957.
- [19] HASSOUN, M. H. *Fundamentals of Artificial Neural Networks*. MIT Press, Cambridge, MA, 1995.
- [20] HAYKIN, S. *Neural Networks: A Comprehensive Foundation*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1999.

- [21] HEIJMANS, H. *Morphological Image Operators*. Academic Press, New York, NY, 1994.
- [22] HEIJMANS, H. J. A. M., AND KESHET, R. Inf-semilattice approach to self-dual morphology. *J. Math. Imaging and Vision* 17 (July 2002), 55–80.
- [23] KABURLASOS, V. *Towards a Unified Modeling and Knowledge-Representation Based on Lattice Theory*. Springer, Berlin, Germany, 2006.
- [24] KABURLASOS, V. G. FINs: Lattice theoretic tools for improving prediction of sugar production from populations of measurements. *IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetics, Part B - Cybernetics* 34, 2 (2004), 1017–1030.
- [25] KESHET (KRESCH), R. Mathematical morphology on complete semilattices and its applications to image processing. *Fundam. Inf.* 41, 1-2 (jan 2000), 33–56.
- [26] KRESCH, R. Extension of morphological operations to complete semilattices and its applications to image and video processing. In *Proceedings of the fourth International Symposium on Mathematical Morphology and its Applications to Image and Signal Processing* (Norwell, MA, USA, 1998), ISMM '98, Kluwer Academic Publishers, pp. 35–42.
- [27] LIPPMANN, R. An introduction to computing with neural nets. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing ASSP-4* (1987), 4–22.
- [28] MARAGOS, P. Lattice image processing: A unification of morphological and fuzzy algebraic systems. *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 22, 2-3 (May 2005), 333–353.
- [29] MATHERON, G. *Random Sets and Integral Geometry*. Wiley, New York, 1975.
- [30] MINKOWSKI, H. Volumen und oberfläche. *Mathematische Annalen* 57 (1903), 447–495.

- [31] MINKOWSKI, H. *Gesammelte Abhandlungen*. Teubner Verlag, Leipzig-Berlin, 1911.
- [32] NACHTEGAEL, M., AND KERRE, E. Connections between binary, gray-scale and fuzzy mathematical morphologies. *Fuzzy Sets and Systems* 124, 1 (Nov. 2001), 73–85.
- [33] PEDRYCZ, W., AND GOMIDE, F. *Fuzzy Systems Engineering: Toward Human-Centric Computing*. Wiley-IEEE Press, New York, 2007.
- [34] RADUCANU, B., GRAÑA, M., AND ALBIZURI, X. F. Morphological scale spaces and associative morphological memories: Results on robustness and practical applications. *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 19, 2 (2003), 113–131.
- [35] RITTER, G. X., AND DAVIDSON, J. L. Recursion and feedback in image algebra. In *SPIE's 19th AIPR Workshop on Image Understanding in the 90's* (McLean, Va., Oct. 1990), Proceedings of SPIE.
- [36] RITTER, G. X., AND SUSSNER, P. An introduction to morphological neural networks. In *Proceedings of the 13th International Conference on Pattern Recognition* (Vienna, Austria, 1996), pp. 709–717.
- [37] RITTER, G. X., SUSSNER, P., AND DE LEON, J. L. D. Morphological associative memories. *IEEE Transactions on Neural Networks* 9, 2 (1998), 281–293.
- [38] RITTER, G. X., AND URCID, G. A lattice matrix method for hyperspectral image unmixing. *Information Sciences* 181 (2011), 1787–1803.
- [39] RITTER, G. X., AND WILSON, J. N. *Handbook of Computer Vision Algorithms in Image Algebra*, 2 ed. CRC Press, Boca Raton, 2001.
- [40] RONSE, C. Why mathematical morphology needs complete lattices. *Signal Processing* 21, 2 (Oct. 1990), 129–154.

- [41] SCHMITT, M. *Des algorithmes morphologiques à l'intelligence artificielle*. 1989.
- [42] SERRA, J. *Image Analysis and Mathematical Morphology*. Academic Press, London, 1982.
- [43] SERRA, J. *Image Analysis and Mathematical Morphology, Volume 2: Theoretical Advances*. Academic Press, New York, 1988.
- [44] SINHA, D., AND DOUGHERTY, E. R. A general axiomatic theory of intrinsically fuzzy mathematical morphologies. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 3, 4 (November 1995), 389–403.
- [45] SOILLE, P. *Morphological Image Analysis*. Springer Verlag, Berlin, 1999.
- [46] STERNBERG, S. Grayscale morphology. *Computer Vision, Graphics and Image Processing* 35 (1986), 333–355.
- [47] SUSSNER, P. Fixed points of autoassociative morphological memories. In *Neural Networks, 2000. IJCNN 2000, Proceedings of the IEEE-INNS-ENNS International Joint Conference on (2000)*, vol. 5, pp. 611–616 vol.5.
- [48] SUSSNER, P. Generalizing operations of binary morphological autoassociative memories using fuzzy set theory. *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 9, 2 (Sept. 2003), 81–93. Special Issue on Morphological Neural Networks.
- [49] SUSSNER, P., ESMI, E., VILLAYERDE, I., AND GRAÑA, M. The Kosko sub-*sethood* fuzzy associative memory (KS-FAM): Mathematical background and applications in computer vision. *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 42, 2-3 (feb 2012), 134–149.
- [50] SUSSNER, P., AND ESMI, E. L. Morphological perceptrons with competitive learning: Lattice-theoretical framework and constructive learning algorithm. *Information Sciences* 181, 10 (2011), 1929 – 1950. Special Issue on Information Engineering Applications Based on Lattices.

- [51] SUSSNER, P., AND MEDEIROS, C. R. Auto-associative memories based on complete inf-semilattices. In *Uncertainty Modeling in Knowledge Engineering and Decision Making, Proceedings of the 10th International FLINS Conference* (Istanbul, Turkey, August 2012), pp. 732–737.
- [52] SUSSNER, P., AND MEDEIROS, C. R. An introduction to morphological associative memories in complete lattices and inf-semilattices. In *FUZZ-IEEE* (Brisbane, Australia, June 2012), pp. 1419–1426.
- [53] SUSSNER, P., NACHTEGAEL, M., MÉLANGE, T., DESCHRIJVER, G., ESMI, E. L., AND KERRE, E. E. Interval-valued and intuitionistic fuzzy mathematical morphologies as special cases of \mathbf{L} -fuzzy mathematical morphology. *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 43, 1 (may 2011), 50–71.
- [54] SUSSNER, P., AND VALLE, M. E. Gray-scale morphological associative memories. *IEEE Transactions on Neural Networks* 17, 3 (May 2006), 559–570.
- [55] SUSSNER, P., AND VALLE, M. E. Implicative fuzzy associative memories. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 14, 6 (2006), 793–807.
- [56] SUSSNER, P., AND VALLE, M. E. Classification of fuzzy mathematical morphologies based on concepts of inclusion measure and duality. *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 32, 2 (2008), 139–159.
- [57] URCID, G., VALDIVIEZO-N., J.-C., AND RITTER, G. X. Lattice algebra approach to color image segmentation. *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 42, 2-3 (feb 2012), 150–162.
- [58] VALLE, M. E., AND SUSSNER, P. A general framework for fuzzy morphological associative memories. *Fuzzy Sets and Systems* 159, 7 (April 2008), 747–768.
- [59] VALLE, M. E., AND SUSSNER, P. Storage and recall capabilities of fuzzy morphological associative memories with adjunction-based learning. *Neural Networks* 24, 1 (January 2011), 75–90.

- [60] XU, Y., RUAN, D., QIN, K., AND LIU, J. *Lattice-Valued Logic*. Springer, Heidelberg, Germany, 2003.

Índice Remissivo

- abertura, 18
- adjunção
 - poset, 18
 - reticulado completo, 17
- blog, 24
- cisl, 36
 - isomorfismo, 38
 - referência, 38
- cone, 41
- conjugado, 25
- corrente, 10
 - completa, 13, 40
- dilatação, 7, 16, 27
 - adjunta, 18, 43
 - anti- -, 16
 - binária, 7
- elemento
 - de referência, 38
 - disjunto, 41
 - estruturante, 7
 - positivo, 41
- erosão, 7, 16, 27, 43
 - adjunta, 17
 - anti- -, 16
 - binária, 8
- fechamento, 18
- filtro
 - média, 63
 - mediana, 50
 - Wiener, 63
- imagem
 - binária, 6
 - multicanal, 9
 - tons de cinza, 8
- ínfimo, 12
- l -grupo, 15, 24
 - completo, 16
 - condicionalmente completo, 24
 - extensão de -, 24
- leis
 - de De Morgan, 14
 - distributivas infinitas, 15
- memória

- associativa, 23
- associativa morfológica, 24
- espúria, 24
- fundamental, 23, 48
- operador
 - antiextensivo, 12
 - autodual, 12
 - decrecente, 11
 - extensivo, 12
 - idempotente, 18
 - isotônico, 11
 - negação, 11
 - preservador de disjunção, 44
- ordem
 - autodual, 38
 - parcial, 10
 - parcial dual, 10
 - total, 10
- pixel, 6, 31
- ponto fixo, 29
- poset, 10
 - dual, 10
 - isomorfismo, 11
 - negação, 11
- rede neural
 - artificial, 22
 - morfológica, 22
- reflexão, 7
- reticulado, 12, 35
 - com ordem de grupo, 15
 - completo, 12, 37
 - condicionalmente completo, 13
 - distributivo, 14
 - homomorfismo, 14
 - isomorfismo, 14
 - limitado, 13
- ruído, 28, 47
- semirreticulado, 35
 - inf- -, 36
- supremo, 12
- threshold, 9
- translação, 7
- umbra, 9
- valor absoluto, 41