YAMIT YESID YALANDA MUELAS

MODIFICAÇÕES DO TENSOR DE RICCI E APLICAÇÕES

CAMPINAS
2012

.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

YAMIT YESID YALANDA MUELAS

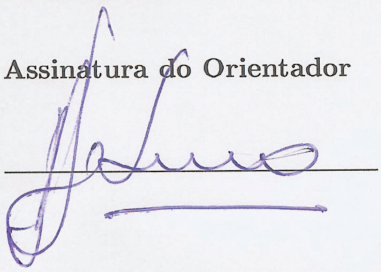
MODIFICAÇÕES DO TENSOR DE RICCI E APLICAÇÕES

Orientador: Prof. Dr. Diego Sebastian Ledesma

Dissertação de mestrado apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Unicamp para obtenção do título de Mestre em Matemática.

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO
DEFENDIDA PELO ALUNO YAMIT YESID YALANDA MUELAS
E ORIENTADA PELO PROF. DR. DIEGO SEBASTIAN LEDESMA

Assinatura do Orientador



CAMPINAS
2012

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA POR
ANA REGINA MACHADO - CRB8/5467
BIBLIOTECA DO INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E
COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA - UNICAMP

Y12m

Yalanda Muelas, Yamit Yesid, 1988-
Modificações do tensor de Ricci e aplicações / Yamit Yesid Yalanda Muelas. – Campinas, SP : [s.n.], 2012.

Orientador: Diego Sebastian Ledesma.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

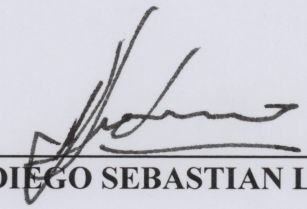
1. Geometria riemaniana. 2. Cálculo tensorial. 3. Tensor de Ricci. 4. Bochner, Teorema de. I. Ledesma, Diego Sebastian,1979-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

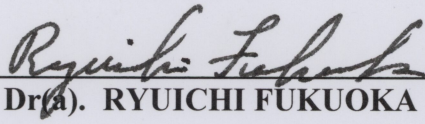
Título em inglês: Modifications of the Ricci tensor and applications
Palavras-chave em inglês:
Geometry, Riemannian
Calculus of tensors
Ricci tensor
Bochner's theorem
Área de concentração: Matemática
Titulação: Mestre em Matemática
Banca examinadora:
Diego Sebastian Ledesma [Orientador]
Rafael de Freitas Leão
Ryuichi Fukuoka
Data de defesa: 19-10-2012
Programa de Pós-Graduação: Matemática

Dissertação de Mestrado defendida em 19 de outubro de 2012 e aprovada

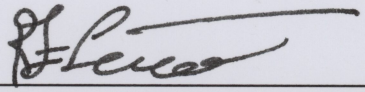
Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof.(a). Dr(a). DIEGO SEBASTIAN LEDESMA



Prof.(a). Dr(a). RYUICHI FUKUOKA



Prof.(a). Dr(a). RAFAEL DE FREITAS LEÃO

Dedico este trabalho às pessoas da minha comunidade, que em seu caminho através deste mundo só conheceram o horror da guerra, com a esperança de que diálogos de paz que colocarão fim à guerra no meu país.

Agradecimentos

Ao professor Diego Sebastián Ledesma, pela participação no caminho do engrandecimento profissional, por todo o respeito e a paciência que teve comigo e pelo apoio em momento difícil da minha vida.

À minha família pelo apoio emocional e ao CNPq.

A todas as pessoas que participaram, contribuindo para realização deste trabalho, direta ou indiretamente, meu agradecimento.

...donde las estirpes condenadas a cien años de soledad tengan por fin y para siempre una segunda oportunidad sobre la tierra.

– Gabriel Garcia Márquez, *La soledad de América Latina*

Resumo

Nesta dissertação apresentamos generalizações de três resultados muito conhecidos em geometria Riemanniana: o Teorema de Myers, o Teorema de Bochner e o Teorema de decomposição de Cheeger-Gromoll. Em particular veremos que fazendo uma pequena modificação sobre os requisitos destes teoremas no que se refere ao tensor de Ricci, os resultados permanecem inalterados.

Abstract

In this dissertation we present generalizations of three well-known results in Riemannian geometry: The Myers's theorem, Bochner's theorem and the Cheeger-Gromoll splitting theorem. In particular, we will prove that making a small modification of the requirements of these theorems related to the Ricci tensor, the results remain unchanged.

Conteúdo

Introdução **1**

1 Conceitos Básicos da Geometria Riemanniana **4**

1.1 Variedades Diferenciáveis 4

1.2 Tensores em variedades 7

1.3 Derivada de Lie 8

1.4 Métrica Riemanniana 9

1.5 Conexão Riemanniana 11

1.6 Curvatura 14

1.7 Aplicação exponencial 16

1.8 Variação do comprimento de arco e Energia 19

1.9 Segunda forma fundamental 20

2 Resultados preliminares **23**

2.1 Gradiente, Divergência, Hessiano e Laplaciano 23

2.2 Fórmula de Bochner-Weitzenböck generalizada 26

2.3 Principio do máximo 29

2.4 Funções de Busemann 31

3 Modificações do tensor de Ricci e Aplicações **34**

3.1 O Teorema de Myers Generalizado 34

3.2 Teorema de Bochner 38

4 Uma generalização do teorema de decomposição de Cheeger-Gromoll via o tensor de Ricci Barkry-Emery **41**

4.1 Estimativa sobre a função de Busemann 41

4.2 Teorema de Cheeger-Gromoll generalizado 43

Introdução

Neste trabalho estudamos generalizações de três teoremas de muita importância em Geometria Riemanniana e com muitas aplicações. Em primeiro lugar consideramos o teorema de Myers que teve a sua primeira versão em 1941 e pode ser enunciado da seguinte forma

Teorema 0.1. *Seja M uma variedade Riemanniana de dimensão n completa e conexa tal que o tensor de Ricci satisfaz*

$$Ric \geq (n-1)C > 0.$$

Então M é compacta com grupo fundamental finito e

$$diam(M) \leq \frac{\pi}{\sqrt{C}}.$$

O teorema de Bochner enunciado pela primeira vez em [12] pode ser escrito como

Teorema 0.2. *Seja M uma variedade Riemanniana compacta e orientável tal que o tensor de Ricci é não-negativo. Então todo campo vetorial harmônico é paralelo.*

e tem como corolário

Corolário 0.1. *Seja M uma variedade Riemanniana compacta e orientável tal que em algum ponto o tensor de Ricci é positivo. Então todo campo vetorial harmônico é identicamente nulo.*

E finalmente o teorema de Cheeger-Gromoll enunciado pela primeira vez em 1971 em [1], pode ser enunciado como

Teorema 0.3 (Teorema de decomposição de Cheeger-Gromoll)**.** *Seja M uma variedade Riemanniana completa de dimensão n com $Ric \geq 0$. Então M decompõe-se isometricamente como $N \times \mathbb{R}^l$, onde N é uma variedade Riemanniana Completa sem linhas, onde $\mathbb{R}^l$ é o espaço euclidiano de dimensão l.*

Observamos que os enunciados destes teoremas tem como condições limitações do tensor de Ricci , portanto é natural perguntar-se se enfraquecendo estas condições ainda continuam valendo os resultados. Em particular podemos considerar as seguintes modificações ao tensor de Ricci

$$\widehat{Ric} = Ric + \mathcal{L}_V g.$$

Para $k > 0$

$$\widetilde{Ric} = Ric + \mathcal{L}_V g - kV^* \otimes V^*,$$

e finalmente para uma função $\phi \in C^2(M)$,

$$Ric_\phi = Ric + \mathrm{Hess}(\phi),$$

é chamado de tensor de Ricci-Bakry-Emery. Um operador deste tipo é importante no estudo de processos de difusão como aparece em [7].

Para as primeiras duas modificações podemos generalizar o teorema de Myers como segue

Teorema 0.4. *Seja M uma variedade Riemanniana completa e conexa de dimensão n. Supondo que M admite um campo de vetores V satisfazendo as desigualdades*

$$Ric + \mathcal{L}_V g \geq (n-1)C > 0$$

e $|V| \leq r$. Então M é compacta e o diâmetro satisfaz

$$diam(M) \leq \frac{\pi}{(n-1)C}\Big(\sqrt{2}r + \sqrt{2r^2 + (n-1)^2 C}\Big).$$

Teorema 0.5. *Seja M uma variedade Riemanniana completa e conexa de dimensão n. Suponha que M admite um campo de vetores V satisfazendo as desigualdades*

$$Ric + \mathcal{L}_V g - kV^* \otimes V^* \geq (n-1)C > 0,$$

onde $k > 0$. Então M é compacta e seu diâmetro satisfaz

$$diam(M) \leq \frac{\pi}{\sqrt{(n-1)C}}\sqrt{n - 1 + \frac{4}{k}}.$$

Para o teorema de Bochner

Teorema 0.6. *Seja M uma variedade Riemanniana fechada, orientada e conexa de dimensão n. Suponha que M admite um campo de vetorial V satisfazendo a desigualdade*

$$Ric + \mathcal{L}_V g - div(V)g \geq 0.$$

Então

(1) Todo campo de vectores harmônico é paralelo.

(2) Se existe uma constante positiva $C > 0$ tal que

$$Ric + \mathcal{L}_V g - div(V)g \geq C, \tag{1}$$

então no existe um campo de vetores harmônico não-trivial.

Por último para o tensor de Ricci-Bakry-Emery temos uma generalização do teorema de decomposição de Cheeger-Gromoll

Teorema 0.7. *Seja M uma variedade Riemanniana completa de dimensão n com $Ric + \mathrm{Hess}(\phi) \geq 0$ para alguma função $\phi \in C^\infty(M)$ a qual é uniformemente limitada em M. Então M decompõe-se isometricamente como $N \times \mathbb{R}^l$, onde N é uma variedade Riemanniana Completa sem linhas. Mais ainda a função ϕ é constante no conjunto $\mathbb{R}^l$ da decomposição.*

Esta dissertação está dividida da seguinte forma:

No primeiro capitulo apresentamos conceitos básicos da geometria Riemanniana de forma geral com os resultados e as notações que serão utilizadas a maior parte deste capítulo está baseada na referência [3].

No segundo capitulo são apresentados alguns resultados preliminares com as suas demonstrações, que serão úteis nos seguintes dois capítulos. Alguns destes resultados podem ser achados em [8] e [5].

No terceiro capitulo, são demonstradas duas generalizações do teorema de Myers e uma do teorema de Bochner. Tais demonstrações estão baseadas no artigo [10] o qual faz uso de uma técnica conhecida como Técnica de Bochner.

Finalmente no último capitulo demostramos a generalização do teorema de decomposição de Cheeger-Gromoll. Este capítulo está baseado nos artigos [4], [13] .

1

Conceitos Básicos da Geometria Riemanniana

Neste capítulo preliminar, apresentamos algumas definições e fatos básicos sobre geometria riemanniana e introduzimos a notação que será utilizada nesta dissertação. A referência básica é o livro Geometria Riemanniana de M.P. Do Carmo [3].

1.1 Variedades Diferenciáveis

Seja M uma variedade diferenciável. Uma aplicação diferenciável $\alpha : (-\epsilon, -\epsilon) \longrightarrow M$ é chamada uma curva em M. Seja $\alpha(0) = p \in M$, e seja $C^\infty(M)$ o conjunto das funções de M diferenciáveis em p. O vetor tangente à curva α é a função $\alpha'(0) : C^\infty(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\alpha'(0)f = \frac{d(f \circ \alpha)}{dt}\Big|_{t=0}, \quad f \in C^\infty(M).$$

Um vetor tangente em p é o vetor tangente em $t = 0$ de alguma curva $\alpha : (-\epsilon, -\epsilon) \longrightarrow M$ com $\alpha(0) = p$. Denotamos por T_pM o conjunto dos vetores tangentes a M em um ponto p. O espaço dual do espaço tangente T_pM é chamado de espaço cotangente de M no ponto p e será denotado por T_p^*M.

Uma função $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita diferenciável se para todo $p \in M$ e (U, φ) carta local em torno de p tem-se que

$$f \circ \varphi : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},$$

é diferenciável.

Analogamente se M e N são variedades diferenciáveis de dimensão m e n respectivamente, uma função $f : M \longrightarrow N$ é dita diferenciável se para cada $p \in M$ e quaisquer cartas (U, φ) de p e (V, ψ) de $f(p)$ temos que

$$\psi^{-1} f \circ \varphi : U \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^n,$$

é diferenciável.

Definição 1.1. *Sejam M e N duas variedades diferenciáveis de dimensão m e n respectivamente e $f : M \longrightarrow N$ uma função diferenciável. A diferencial de f em um ponto p é a aplicação $df(p) : T_pM \longrightarrow T_{f(p)}N$ tal que*

$$df(p)(v) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f \circ \varphi^{-1}(p + tv),$$

onde (U, φ) é uma carta local em torno de p.

Para uma variedade diferenciável M de dimensão n o fibrado tangente é definido como sendo

$$TM = \cup_{p \in M} T_pM$$

munido da aplicação projeção $\pi : TM \longrightarrow M$ tal que

$$\pi(p, w) = p.$$

Observamos que TM é uma variedade diferenciável, de fato se consideramos $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ um atlas da variedade M, para cada α definimos $d\varphi_\alpha : TU_\alpha \longrightarrow T\varphi_\alpha(U_\alpha)$ tal que

$$d\varphi(x, v) = (\varphi(x), d\varphi(x)(v)),$$

então $(TU_\alpha, d\varphi_\alpha)$ é uma estrutura diferenciável e

$$d\varphi_\alpha^{-1}(p, W) = (x_0, d\varphi(x_0)^{-1}(W)),$$

é a inversa de φ_α, onde $x_0 = \varphi^{-1}(p)$.

(TM, M, π) com a estrutura diferenciável dada é chamado de fibrado tangente. De maneira análoga pode ser definido o fibrado cotangente (T^*M, M, π) com o espaço total $T^*M = \cup_{p \in M} T_p^*M$ e $\pi(p, w) = p$.

Dada uma variedade diferenciável M de dimensão n, um campo de vetores X é uma correspondência que a cada ponto p de M associa um vetor $X(p)$ no T_pM e uma $1-$forma θ sobre M é uma correspondência que a cada ponto p de M associa um vetor $\theta(p)$ no T_p^*M. Em termos de aplicações, X é uma seção de M no fibrado tangente TM *i.e.* $\pi \circ X = I_M$ e θ uma seção do fibrado cotangente.

Denotamos por $\mathcal{X}(M)$ o conjunto dos campos de vetores tangentes em M, por $\Omega(M)$ o conjunto das $1-$formas em M e por $C^\infty(M)$ o conjunto das funções reais de classe C^∞ definidas em M. Seja $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M$ uma parametrização ao redor de um ponto $p \in M$ e $X \in \mathcal{X}(M)$, se consideramos $\{\partial_i\}_{i=1}^n$ a base de T_pM associada a φ e $\{dx_i\}_{i=1}^n$ a base de T_p^*M associada a φ, podemos escrever

$$X(p) = \sum_{i=1}^{n} a_i(p)\partial_i \quad \text{e} \quad \omega(p) = \sum_{i=1}^{n} b_i(p)dx_i,$$

onde $a_i : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ e $b_i : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ são funções em U. Dado um campo vetorial X dizemos que X é diferenciável se as funções a_i são diferenciáveis. analogamente se θ é uma $1-$forma sobre M, θ é dita diferenciável se as funções a_i são diferenciáveis.

No que segue os elementos de $\mathcal{X}(M)$ e $\Omega(M)$ serão diferenciáveis.

Exemplo 1.1. *A diferencial de uma função $f \in C^\infty(M)$ define uma 1-forma df tal que $(df)(v) = v(f)$ para todo vetor tangente v de M.*

Se $p \in M$ então $(df)(p) : T_pM \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é um funcional linear e para todo campo de vetores $X \in \mathcal{X}(M)$ a função $(df)(X) = Xf$ é diferenciável.

Em um sistema de coordenadas $(U, (x_1, \ldots, x_n))$ de M, as 1-formas $dx_1, \ldots, dx_n$ associadas formam uma base dual. Se θ é uma 1-forma, então

$$\theta = \sum_i \theta(\partial_i)dx_i,$$

em U. Se $f \in C^\infty(M)$ e $df(\partial_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ então

$$df = \sum_i \frac{df}{dx_i}dx_i.$$

A diferencial satisfaz as seguintes propriedades:

(1) $d : C^\infty(M) \longrightarrow \Omega(M)$ é linear sobre $\mathbb{R}$.

(2) Se $f, g \in C^\infty(M)$,então $d(fg) = gdf + fdg$.

(3) Se $f \in C^\infty(M)$ e $h \in C^\infty(\mathbb{R})$, então $d(h(f)) = h'(f)df$.

1.2 Tensores em variedades

Definição 1.2. *Um (r,k)-tensor T em uma variedade Riemanniana é uma aplicação*

$$T : \underbrace{\mathcal{X}(M) \times \cdots \times \mathcal{X}(M)}_{r-vezes} \times \underbrace{\Omega(M)(M) \times \cdots \times \Omega(M)}_{k-vezes} \longrightarrow C^\infty(M),$$

tal que se $Y_1, \ldots, Y_k \in \mathcal{X}(M)$ e $\omega_1, \ldots, \omega_r \in \Omega(M)$, então

(1) Para quaisquer $f, g \in C^\infty(M)$

$$T(Y_1, \ldots, fY_s, \ldots, Y_k, \omega_1, \ldots, g\omega_l, \ldots, \omega_r) = fgT(Y_1, \ldots, Y_s, \ldots, Y_k, \omega_1, \ldots, \omega_l, \ldots, \omega_r),$$

(2) Para todo $X_s \in \mathcal{X}(M)$

$$\begin{aligned} T(Y_1, \ldots, Y_s + X_s, \ldots, Y_k, \omega_1, , \ldots, \omega_r) &= T(Y_1, \ldots, Y_s, \ldots, Y_k, \omega_1, \ldots, \omega_r) + \\ & \quad T(Y_1, \ldots, X_s, \ldots, Y_k, \omega_1, \ldots, \omega_r), \end{aligned}$$

(3) Para todo $\alpha \in \Omega(M)$

$$\begin{aligned} T(Y_1, \ldots, Y_k, \omega_1, \ldots, \omega_l + \alpha, \ldots, \omega_r) &= T(Y_1, \ldots, Y_k, \omega_1, \ldots, \omega_l, \ldots, \omega_r) + \\ & \quad T(Y_1, \ldots, Y_k, \omega_1, \ldots, \alpha, \ldots, \omega_r). \end{aligned}$$

Seja $p \in M$. O valor de $T(Y_1, \ldots, Y_k, \omega_1, \ldots, \omega_r)(p)$ só depende dos valores em p das componentes de T, e dos valores de $Y_1, \ldots, Y_r, \omega_1, \ldots, \omega_r$ em p.

Definição 1.3. *Um $(k,0)$tensor T é dito alternado se*

$$T(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_k) = -T(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_k),$$

para quaisquer $v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_k \in T_pM$.

Denotamos por $\Omega^k(M)$ o conjunto de todos os $(k,0)-$tensores alternados. Em particular uma 1-forma é um $(1,0)-$tensor.

Definição 1.4. *Uma função T que a cada $p \in M$ associa $T(p) \in \Omega^k(M)$ é denominada uma $k-$forma em M.*

Seja $\omega \in \Omega^k(M)$ uma k-forma diferencial de uma variedade diferenciável M. O diferencial de ω, $d\omega$, é definido como sendo a $k+1$-forma em $\Omega^{k+1}(M)$ tal que

$$\begin{aligned} d\omega(X_0,\ldots,X_k) &= \sum_{i=0}^{k}(-1)^i X_i(\omega(X_0,\ldots,\widehat{X}_i,\ldots,X_k)) \\ &\quad -\sum_{i<j}^{k+1}(-1)^{i+j}(\omega([X_i,X_j],X_0,\ldots,\widehat{X}_i,\ldots,\widehat{X}_j,\ldots,X_k)). \end{aligned}$$

1.3 Derivada de Lie

Seja X um campo de vetores em uma variedade completa M. Denotamos por Φ_t o fluxo associado a X. O fluxo Φ_t induz ações

$$\begin{aligned} {\Phi_t}^* : C^\infty(M) &\longrightarrow C^\infty(M) \\ \Phi_{t*} : \mathcal{X}(M) &\longrightarrow \mathcal{X}(M) \\ {\Phi_t}^* : \Omega(M) &\longrightarrow \Omega(M) \end{aligned}$$

tais que para $Y \in \mathcal{X}(M)$, $\omega \in \Omega(M)$ e $f \in \Omega(M)$

$$\begin{aligned} {\Phi_t}^* f &= f \circ \Phi_t \\ (\Phi_{t*}Y)f(p) &= Y(f\circ\Phi)(p) \\ ({\Phi_t}^*\omega)Y &= \omega(\Phi_{t*}Y) \end{aligned}$$

Dado um $(r,k)-$tensor T, definimos a derivada de Lie de T ao longo de X no ponto p como sendo

$$\mathcal{L}_X T_p(Y_1,\ldots,Y_k,\omega_1,\ldots,\omega_r)(p) := \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} T(\Phi_{-t_*}Y_1,\ldots,\Phi_{-t_*}Y_k,{\Phi_{-t}}^*\omega_1,\ldots,{\Phi_{-t}}^*\omega_r)(p).$$

Intuitivamente $\mathcal{L}_X T$ mede como o tensor T varia ao longo de X. As seguintes propriedades podem ser achadas em [9] no capitulo 18.

Proposição 1.1. *Seja M uma variedade diferenciável e sejam $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ campos de vetores então*

(a) *Se $f \in C^\infty(M)$, a derivada de Lie de f ao longo de X é igual à derivada direcional de f ao longo do campo de vetores*

$$\mathcal{L}_X f = X(f) = df(X),$$

em particular $\mathcal{L}$ é uma derivação.

(b) *A derivada de Lie de Y ao longo de X coincide com o comutador de X e Y i.e*

$$\mathcal{L}_X Y f = [X, Y]f = (XY - YX)f, \text{ para toda função } f \in C^\infty(M).$$

(c) *Para todo $(r, 0)-$tensor T*

$$(\mathcal{L}_X T)(Y_1, \ldots, Y_r) = \mathcal{L}_X(T(Y_1, \ldots, Y_r)) - T([X, Y_1], Y_2, \ldots, Y_r) - \cdots - T(Y_1, \ldots, [X, Y_r]).$$

1.4 Métrica Riemanniana

Definição 1.5. *Uma métrica Riemanniana em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que associa a cada ponto $p \in M$ um produto interno*

$$g_p : T_pM \times T_pM \longrightarrow \mathbb{R},$$

tal que para um sistema de coordenadas arbitrário $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M$ em torno de p, com $\varphi(x) = q \in \varphi(U)$ e $\partial_i(q) = \partial_i(0, \ldots, 1, \ldots, 0)$, a função $g_{ij} : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g_{ij}(q) = g_q(\partial_i(q), \partial_j(q))$$

é uma função diferenciável em U.

Se M é uma variedade diferenciável munida de uma métrica Riemanniana g, dizemos que (M, g) é uma variedade Riemanniana.

Se (M, g) é uma variedade Riemanniana, $p \in M$ e $X, Y \in T_pM$ acostuma-se escrever $\langle X, Y\rangle_p = g_p(X, Y)$.

Definição 1.6. *Sejam M e N duas variedades Riemannianas. Um difeomorfismo $f : M \longrightarrow N$ é chamado de isometria se*

$$\langle u, v\rangle_p = (df_p(u), df_p(v))_{f(p)}, \quad \forall p \in M, \forall u, v \in T_pM.$$

É fácil ver que o conceito de isometria estabelece uma relação de equivalência entre duas variedades Riemannianas.

Uma métrica Riemanniana também pode ser vista como um $(2,0)-$tensor da seguinte forma.

Definição 1.7. *Seja (M,g) uma variedade Riemanniana, o tensor métrico $G : C^\infty(M) \times \mathcal{X}(M) \longrightarrow C^\infty(M)$ definido por $G(X,Y) = g(X,Y) = \langle X,Y\rangle$, é um $(2,0)-$tensor e suas componentes no referencial $\{X_i\}$ são coeficientes g_{ij} da métrica Riemanniana em um sistema de coordenadas dado.*

O seguinte teorema garante a existência de uma métrica Riemanniana em uma variedade diferenciável Hausdorff e é uma aplicação simples da existência da partição da unidade.

Teorema 1.1. *Toda variedade diferenciável de Hausdorff com base enumerável possui uma métrica Riemanniana.*

Demonstração. Ver por exemplo [3] página 47. □

Nesta dissertação, as variedades diferenciáveis consideradas serão Hausdorff e com base enumerável.

Exemplo 1.2. *O espaço euclidiano $M = \mathbb{R}^n$ é trivialmente uma variedade diferenciável e se para todo $p \in M$, $T_pM \cong \mathbb{R}^n$ define-se*

$$\langle \partial_i, \partial_j \rangle_p = \delta_{ij}$$

M é uma variedade riemanniana.

Exemplo 1.3. *O conjunto $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ com a métrica g tal que $g(u,v) = \langle u,v\rangle_{\mathbb{R}^n}$ para quaisquer $u,v \in T_pS^{n-1}$, é uma variedade Riemanniana, onde $T_pS^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$.*

Exemplo 1.4. *Seja $\mathbb{H} = \{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$, $\mathbb{H}$ é trivialmente uma variedade diferenciável. Basta considerar a carta $Id : \mathbb{H} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{H}$. Seja $p = (p_1,\ldots,p_n) \in \mathbb{H}$ e sejam $u,v \in T_p\mathbb{H}$ então a aplicação $g_p : T_p\mathbb{H} \times T_p\mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$g_p(u,v) = \frac{1}{x_n^2}\langle u,v\rangle_{\mathbb{R}^n},$$

é uma métrica Riemanniana sobre $\mathbb{H}$. Logo $(\mathbb{H},g)$ é uma variedade Riemanniana esta variedade Riemanniana é chamada de espaço hiperbólico.

Definição 1.8. *Sejam M e N variedades diferenciáveis, uma aplicação $\varphi : M \longrightarrow N$ é uma imersão. Se $d\varphi_p : T_pM \longrightarrow T_{\varphi(p)}N$ é injetiva para todo $p \in M$*

Exemplo 1.5. *Sejam M e N duas variedades diferenciáveis e seja $f : M \longrightarrow N$ uma imersão, se N tem uma estrutura Riemanniana, f induz uma estrutura Riemanniana em M tal que para todo $p \in M$*

$$\langle u, v\rangle = \langle df_p(u), df_p(v)\rangle_{f(p)} \text{ para quaisquer } u, v \in T_pM$$

A métrica de M induzida por uma imersão é chamada métrica induzida por f e, neste caso, f é chamada de imersão isométrica.

Exemplo 1.6. *Sejam (M_1, g_1) e (M_2, g_2) duas variedade Riemannianas e seja $M = M_1 \times M_2$, M é uma variedade diferenciável com a estrutura diferenciável do produto. Sejam*

$$\pi_1 : M_1 \times M_2 \longrightarrow M_1 \text{ e } \pi_2 : M_1 \times M_2 \longrightarrow M_2$$

as projeções canônicas, podemos introduzir uma métrica Riemanniana sobre M definindo

$$g_{(p,q)}(u, v) = g_{1_p}(d\pi_1(u), d\pi_1(v)) + g_{2_q}(d\pi_2(u), d\pi_2(v)),$$

para todo $(p, q) \in M$ e $u, v \in T_{(p,q)}M$. A variedade Riemanniana $(M_1 \times M_2, g)$ é chamada de produto Riemanniano.

1.5 Conexão Riemanniana

Nesta seção apresentamos a noção de conexão sobre uma variedade Riemanniana que vai permitir definir por exemplo o conceito de derivada covariante de um campo de vetores ao longo de uma curva e o conceito de transporte paralelo.

Definição 1.9. *Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M é uma aplicação*

$$\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M),$$

tal que, para todo $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ e quaisquer $f, g \in C^\infty(M)$

(i) $\nabla_{X+Y}Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$,

(ii) $\nabla_{fX}Z = f\nabla_X Z$,

(iii) $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,

(iv) $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$.

Sejam $p \in M$ e $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ coordenadas locais em torno de p, então para $X = \sum_i a_i\partial_i$ e $Y = \sum_i b_j\partial_j$ temos que

$$\nabla_X Z = \sum_k \Big(\sum_{ij} a_i b_j \Gamma_{ij}^k + X(b_k) \Big) \partial_k,$$

onde cada Γ_{ij}^k é definido pela expressão $\nabla_{\partial_i}\partial_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_k$. Os coeficientes Γ_{ij}^k são chamados de *símbolos de Christoffel* da conexão.

Definição 1.10. *Dada uma curva diferenciável $\alpha : I = (a,b) \subset \mathbb{R} \longrightarrow M$, um campo de vetores ao longo de α é uma função $V : I \longrightarrow TM$ tal que $V(t) \in T_{\alpha(t)}M$.*

Seja $t \in I$. Em coordenadas temos a base $\{\frac{d}{dt}\}$ em $T_tI = \mathbb{R}$. O campo vetorial $d\alpha(\frac{d}{dt})$que denotaremos por $\alpha'(t)$ é chamado de vetor tangente á curva α em $\alpha(t)$.

A seguinte proposição nos dá uma maneira de derivar campos de vetores ao longo de curvas diferenciáveis de uma variedade munida de uma conexão afim.

Proposição 1.2. *Seja M uma variedade Riemanniana com uma conexão afim ∇ e $\alpha : I \longrightarrow M$ uma curva diferenciável. Então para cada campo V ao longo de α, existe um único campo denotado por $\frac{DV}{dt}$ ao longo de α, denominado derivada covariante de V ao longo de α, tal que*

(a) $\frac{D}{dt}(V+W) = \frac{D}{dt}(V) + \frac{D}{dt}(W)$.

(b) $\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}$.

(c) Se V é a restrição de um campo Y definido numa vizinhança de $\alpha(I)$, então $\frac{DV}{dt} = \nabla_{\alpha'(t)}Y$.

Demonstração. Ver [3] página 57. □

Definição 1.11. *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇. Um campo de vetores V ao longo de uma curva $\gamma : I \longrightarrow M$ tal que $\frac{DV}{dt} = 0$ é chamado de paralelo.*

Teorema 1.2 (Existência e unicidade de campos vetoriais paralelos)**.** *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ e $\gamma : I \longrightarrow M$ uma curva diferenciável em M. Se $t_0 \in I$ e $v \in T_{\gamma(t_0)}M$, então existe um único campo de vetores paralelo $V(t)$ definido sobre I que satisfaz $V(t_0) = v$.*

Demonstração. Ver por exemplo [3] página 58.

□

Definição 1.12. *O campo $V(t)$ da proposição anterior é chamado de transporte paralelo de $v = V(t_0)$ ao longo de γ.*

Dizemos que uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M é simétrica se

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \quad \text{para todo} \quad X, Y \in \mathcal{X}(M).$$

Observamos que se ∇ é simétrica, então em um sistema de coordenadas $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ para todo $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

Definição 1.13. *Uma conexão afim ∇ em uma variedade Riemanniana M é compatível com a métrica se*

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle, \quad \textit{para todo} \quad X, Y \in \mathcal{X}(M).$$

O seguinte teorema é um resultado de grande importância na geometria Riemanniana pois garante a existência de uma única conexão afim, simétrica e compatível com a métrica Riemanniana da variedade diferenciável.

Teorema 1.3. *Toda variedade Riemanniana possui uma única conexão afim simétrica e compatível com a métrica.*

Demonstração. Ver por exemplo [3] página 61. □

Dada uma variedade Riemanniana M a conexão afim simétrica e compatível com a métrica é chamada de conexão Riemanniana ou de Levi-Civita de M. A partir daqui consideraremos as variedades Riemannianas com suas respectivas conexões Riemannianas.

Podemos estender a noção de derivada covariante da seguinte forma.

Definição 1.14. *Seja T um $(r,0)$-tensor, a diferencial covariante ∇T de T é um $(r+1,0)-$tensor dado por*

$$\nabla T(Y_1,\ldots,Y_r,Z) = Z(T(Y_1,\ldots,Y_r) - \sum_{i=1}^{r} T(Y_1,\ldots,\nabla_Z Y_i,\ldots,Y_r).$$

Para $Z \in \mathcal{X}(M)$, a derivada covariante $\nabla_Z T$ de T em relação a Z é um tensor de ordem r dado por

$$\nabla_Z T(Y_1,\ldots,Y_r) = \nabla T(Y_1,\ldots,Y_r,Z)$$

Definição 1.15. *Um $(r,0)$-tensor T é chamado de paralelo se $\nabla T \equiv 0$.*

Se M é uma variedade Riemanniana e $X \in \mathcal{X}(M)$ é fácil ver que a derivada de Lie do tensor métrico satisfaz

$$(\mathcal{L}_X g)(V,W) = \langle \nabla_V X, W\rangle + \langle \nabla_W X, V\rangle,$$

pois

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_X g)(V,W) &= \mathcal{L}_X\langle V,W\rangle - \langle [X,V],W\rangle - \langle V,[X,W]\rangle \\ &= X\langle V,W\rangle - \langle \nabla_X V - \nabla_V X, W\rangle - \langle V, \nabla_X W - \nabla_W X\rangle \\ &= \langle \nabla_V Z, W\rangle + \langle \nabla_W Z, V\rangle.\end{aligned}$$

1.6 Curvatura

Nesta seção introduzimos o conceito de curvatura numa variedade Riemanniana que, intuitivamente, mede o quanto uma variedade Riemanniana deixa de ser euclidiana. Definimos também curvatura seccional e o tensor de Ricci.

Será usada notação de Einstein onde omitimos o sinal de somatório em somas que aparecem índices repetidos, por exemplo

$$\sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k X_k \equiv \Gamma_{ij}^k X_k.$$

Definição 1.16. *A curvatura R de uma variedade Riemanniana M é uma correspondência que a cada par $X,Y \in \mathcal{X}(M)$ associa a aplicação*

$$R(X,Y) : \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M)$$

definida por

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z.$$

Em coordenadas locais a curvatura pode ser escrita como

$$R(\partial_i, \partial_j)\partial_k = R^l_{ij\,k}\partial_l,$$

onde

$$R^l_{ij\,k}\partial_l = \partial_i \Gamma^l_{jk} - \partial_j \Gamma^l_{ik} + \Gamma^s_{jk}\Gamma^l_{is} - \Gamma^s_{ik}\Gamma^l_{js},$$

ver por exemplo [3] página 103. Os coeficientes $R^l_{ij\,k}$ são chamados de componentes do tensor de curvatura e os coeficientes R_{ijkl}, definidos por $R_{ijkl} := R^l_{ij\,k}$ são denominados coeficientes de Ricci.

Usando a métrica podemos definir um (4,0)-tensor associado a R

$$R(X,Y,Z,W) = \langle R(X,Y)W, Z\rangle.$$

Definição 1.17. *A curvatura seccional de um 2-plano $\sigma \in T_pM$ é definido como sendo*

$$K(\sigma) = R(X,Y,X,Y),$$

onde $\{X,Y\}$ é uma base ortonormal de σ.

Pode-se mostrar que, se $\sigma \in T_pM$ é um subespaço de dimensão 2 com base $\{X,Y\}$, então $K(X,Y)$ não depende da escolha da base de σ. Assim a curvatura seccional de σ de uma variedade Riemanniana M num ponto p fica bem definida.

Definição 1.18. *Seja M uma variedade Riemanniana e seja $p \in M$ o tensor de curvatura de Ricci no ponto p, denotado por Ric_p é um tensor covariante simétrico definido por*

$$Ric_p(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} \langle R(X(p), e_i)Y(p), e_i\rangle,$$

onde $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é uma base ortonormal de T_pM.

Dizemos que $Ric_p \geq k$ sempre que para todo $V \in T_pM$

$$Ric_p(V,V) \geq k\langle V, V\rangle.$$

Se M é uma variedade Riemanniana de curvatura seccional não-negativa em todos os pontos, então o mesmo acontece com a curvatura de Ricci, isto é, $Ric_p \geq 0$ para todo $p \in M$.

1.7 Aplicação exponencial

A noção de derivada covariante permite definir o conceito de aceleração de uma curva c de uma variedade M o que permite definir as curvas de aceleração nula que são chamadas de geodésicas. Em Geometria Riemanniana as geodésicas têm um papel fundamental e nesta seção encontramos alguns resultados básicos sobre geodésicas.

Definição 1.19. *Seja M uma variedade diferenciável, dizemos que uma curva $\alpha : I \longrightarrow M$ é uma geodésica se*

$$\frac{D}{dt}\alpha(t) = 0$$

É fácil ver que se uma curva α é uma geodésica então α' tem norma constante, se $|\alpha'| = 1$ dizemos que a geodésica α está normalizada.

Definição 1.20. *Seja M uma variedade Riemanniana e $\gamma : [a, b] \longrightarrow M$ uma curva, o comprimento de γ é dado por*

$$\rho(\gamma) := \int_a^b |\gamma'(t)|dt$$

Definição 1.21. *Um segmento de geodésica $\gamma : [a, b] \longrightarrow M$ é chamado de minimizante se $\rho(\gamma) \leq \rho(c)$, onde c é uma curva qualquer diferenciável por partes ligando $\gamma(a)$ a $\gamma(b)$.*

Usando o teorema de existência e unicidade de soluções de equações diferenciais ordinárias, tem-se o seguinte resultado:

Proposição 1.3. *Sejam $p \in M$ e $v \in T_pM$. Então a menos de escolha de I existe uma única geodésica $\gamma : I \longrightarrow M$ tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$.*

Dado $v \in T_pM$, denotamos por γ_v a única geodésica de M que parte de p com velocidade v.

Definição 1.22. *Seja $U_p = \{v \in T_pM : \gamma_v$ está definida num intervalo contendo $[0, 1]\}$, a aplicação $exp_p : U_p \longrightarrow M$, definida por $exp_p(v) = \gamma_v(1)$ é chamada de aplicação exponencial.*

Proposição 1.4. *A aplicação exponencial satisfaz as seguintes propriedades:*

(a) Para cada $v \in T_pM$, a geodésica γ_v é dada por $\gamma_v(t) = exp_p(tv)$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

(b) A aplicação exponencial é diferenciável.

Demonstração. Ver por exemplo [3] página 71. □

Observamos que é possível aumentar a velocidade de uma geodésica diminuindo o seu intervalo de definição.

Para todo $p \in M$, temos que

$$\begin{aligned} d(exp_p)_0(v) &= \frac{d}{dt}(exp_p(tv))|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}(\gamma_v(t))|_{t=0} \\ &= \gamma_v'(t)|_{t=0} \\ &= v. \end{aligned}$$

Então $d(exp_p)_0$ é o operador identidade de T_pM, usando o teorema de função inversa temos que exp_p é um difeomorfismo local numa vizinhança de 0 em T_pM. Portanto existem uma vizinhança V da origem de T_pM e uma vizinhança U de p, tais que $exp_p : V \longrightarrow U$ é um difeomorfismo. O aberto U é chamado de *vizinhança normal* de p.

Para o estudo das propriedades globais das variedades Riemannianas é conveniente considerar as variedades onde as geodésicas são definidas para todo $t > 0$.

Definição 1.23. *Uma variedade Riemanniana M é geodesicamente completa se, para cada $p \in M$, a aplicação a aplicação exp_p está definida para todo $v \in T_pM$, isto é, as geodésicas $\gamma(t)$ que partem de p estão definidas para todos os valores de $t \in \mathbb{R}$.*

Definição 1.24. *Dados dois pontos $p, q \in M$ e definimos a distância entre p e q como*

$$\begin{aligned} d(p,q) &= inf\big\{\rho(\alpha); \alpha : [a,b] \longrightarrow M \text{ é uma curva diferenciável por partes tal que} \\ &\quad \alpha(a) = p \text{ e } \alpha(b) = q\big\}. \end{aligned}$$

Pode-se mostrar que d define uma métrica sobre M e a topologia induzida por d coincide com a topologia inicial de M.

O seguinte teorema torna importante o conceito de completitude.

Teorema 1.4 (Hopf-Rinow)**.** *Seja M uma variedade Riemanniana e seja $p \in M$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) exp_p *está definida em todo* $v \in T_pM$.

(ii) *Os limitados e fechados de* M *são compactos.*

(iii) M *é um espaço métrico completo.*

(iv) M *é geodesicamente completa.*

Além disso, cada uma das afirmações acima implica que

(iv) *Para todo* $q \in M$ *exite uma geodésica* γ *ligando* p *a* q *satisfazendo* $\ell(\gamma) = d(p, q)$.

Demonstração. Ver por exemplo [3] página 162. □

Definição 1.25. *Dada uma variedade Riemanniana* M *definimos o diâmetro de* M *como*

$$diam(M) = sup\{d(p, q) : p, q \in M\}.$$

Corolário 1.1. *Uma variedade Riemanniana completa é compacta se, e somente se*

$$diam(M) < \infty.$$

Seja $A \subset \mathbb{R}^2$ tal que a fronteira de A seja uma curva diferenciável por partes. Uma superfície parametrizada em uma variedade M é uma aplicação diferenciável $s : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow M$

Lema 1.1 (Lema de simetria)**.** *Se* M *é uma variedade Riemanniana e* $s : A \longrightarrow M$ *é uma superfície parametrizada então:*

$$\frac{D}{\partial v}\frac{\partial s}{\partial u} = \frac{D}{\partial u}\frac{\partial s}{\partial v}.$$

Demonstração. Ver por exemplo [3] página 76. □

Lema 1.2 (Lema de Gauss)**.** *Seja* $p \in M$ *e seja* $v \in T_pM$ *tal que* $\exp_p v$ *esteja definida. Se* $w \in T_pM$*, então*

$$\langle (d\exp_p)_v(v), (d\exp_p)_v(w)\rangle = \langle v, w\rangle.$$

Demonstração. Ver por exemplo [3] página 77. □

1.8 Variação do comprimento de arco e Energia

Nesta seção encontramos alguns resultados que sobre geodésicas que serão úteis nos capítulos seguintes.

Definição 1.26. *Seja $\gamma : [a,b] \longrightarrow M$ uma curva diferenciável por partes. Uma variação de γ é uma aplicação contínua $f : [a,b] \times (-\epsilon,\epsilon) \longrightarrow M$ tal que:*

(a) $f(t,0) = \gamma(t), \quad t \in [0,a]$,

(b) existe uma subdivisão de $[0,a]$ por puntos $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{k+1} = a$, tal que a restrição de f a cada $[t_i, t_{i+1}] \times (-\epsilon,\epsilon)$, $1 \leq i \leq k$ é diferenciável.

Uma variação diz-se própria se

$$f(0,s) = \gamma(0) \quad e \quad f(a,s) = \gamma(a) \text{ para todo } s \in (-\epsilon,\epsilon).$$

Teorema 1.5 (Primeira variação da energia)**.** *Seja $\gamma : [0,a] \longrightarrow M$ uma geodésica com vetor velocidade unitário, seja $\alpha : [0,a] \times (-\delta,\delta) \longrightarrow M$ uma variação de γ, e V o seu campo variacional. A variação da função energia*

$$E(s) = \int_0^s |\frac{df}{dt}(s,t)|^2 dt$$

é dada pela fórmula:

$$\frac{1}{2}E'(0) = -\langle V(0), \dot{\alpha}(0)\rangle + \langle V(a), \dot{\alpha}(a)\rangle.$$

Demonstração. Ver por exemplo [3] página 215. □

Teorema 1.6 (Primeira variação comprimento de arco)**.** *Seja $\gamma : [0,a] \longrightarrow M$ uma geodésica com vetor velocidade unitário, seja $\alpha : [0,a] \times (-\delta,\delta) \longrightarrow M$ uma variação de γ, e V o seu campo variacional. Para t fixo denotamos $\alpha_s = \alpha(t,s)$, a primeira variação de $\rho(\alpha_s)$ é dada pela fórmula:*

$$\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \rho(\alpha_s) = \langle V, \dot{\gamma}\rangle|_{t=a}^{t=b}.$$

Demonstração. Ver por exemplo [6] página 180. □

Teorema 1.7 (Segunda variação do comprimento de arco)**.** *Seja $\gamma : [a,b] \longrightarrow M$ uma geodésica com vetor velocidade unitário, seja $\alpha : [a,b] \times (-\delta, \delta) \longrightarrow M$ uma variação de γ, e V o seu campo variacional. A segunda variação de $\rho(\alpha_s)$ é dada pela fórmula:*

$$\frac{d^2}{ds^2}\Big|_{s=0}\rho(\alpha_s) = \int_a^b \Big(\Big| \frac{D}{\partial t}V^{\perp} \Big|^2 - \langle R(V^{\perp},\dot{\gamma})\dot{\gamma}, V^{\perp}\rangle \Big)\, dt + \langle \nabla_V V, \dot{\gamma}\rangle \Big|_{t=a}^{t=b},$$

onde $V^{\perp}$ é a componente normal de V.

Demonstração. Ver por exemplo [6] página 181. □

Definição 1.27. *Seja γ uma geodésica e sejam V e W dois campos variacionais ao longo de γ, diferenciáveis por partes e se anulando nas extremidades. A forma do índice de γ é a forma quadrática associada à forma bilinear simétrica I definida por*

$$I(V,W) = \int_a^b \left(\langle \frac{DV}{\partial t}, \frac{DW}{\partial t} \rangle - \langle R(\dot{\gamma},V)W, \dot{\gamma}\rangle \right) dt.$$

Da definição anterior segue o seguinte resultado

Corolário 1.2. *Seja Γ uma variação própria de uma geodésica normal γ cujo campo de variação é um campo de vetores normal próprio V, a segunda variação de $L(\Gamma)$ é $I(V,V)$. Em particular se γ é minimizante, então $I(V,V) \geq 0$ para todo campo vetorial normal próprio.*

1.9 Segunda forma fundamental

Sejam M e $\widetilde{M}$ e seja $f : M \longrightarrow \widetilde{M}$ uma imersão. Considerando $M \subset \widetilde{M}$, em cada ponto $p \in M$, $T_p\widetilde{M}$ decompõe-se como soma direta

$$T_p\widetilde{M} = T_pM \oplus (T_pM)^{\perp},$$

onde $(T_pM)^{\perp}$ é o complemento ortogonal de T_pM em $T_p\widetilde{M}$.

A conexão Riemanniana de M será indicada por ∇ e conexão Riemanniana de $\widetilde{M}$ será indicada por $\widetilde{\nabla}$. Para $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ com $\widetilde{X}$ e $\widetilde{Y}$ extensões locais em $\widetilde{M}$ pode-se demonstrar que

$$\nabla_X Y = (\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y})^T,$$

onde $(\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y})^T$ é a componente tangencial de $\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}$.

Definição 1.28. *Sejam X, Y e Z campos vetoriais locais definidos em um aberto $U \in M$ e seja*

$$\mathcal{X}(U)^{\perp} = \{X : U \longrightarrow T\widetilde{M} \text{ diferenciável } : X(p) \in T_pM^{\perp}, \text{ para todo } p \in M\}.$$

A aplicação $B : \mathcal{X}(U) \times \mathcal{X}(U) \longrightarrow \mathcal{X}(U)^{\perp}$ dada por

$$B(X, Y) = \widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y} - \nabla_X Y,$$

está bem definida, além disso satisfaz que

(1) $B(X + Z, Y) = B(X, Y) + B(Z, Y)$.

(2) $B(X, Y + Z) = B(X, Y) + B(X, Z)$.

(3) Para quaisquer $f \in C^{\infty}(M)$

$$B(fX, Y) = fB(X, Y).$$

(4) Para quaisquer $f \in C^{\infty}(M)$

$$B(X, fY) = fB(X, Y).$$

Pela bilinearidade de B temos que em um sistema de coordenadas o valor de $B(X, Y)(p)$ só depende de $X(p)$ e $Y(p)$, então para $p \in M$ e $\eta \in (T_pM)^{\perp}$ a aplicação $H_\eta : T_pM \times T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$H_\eta(u, v) = \langle B(u, v), \eta\rangle, \quad u, v \in T_pM,$$

é uma forma bilinear e simétrica, isto permite a seguinte definição.

Definição 1.29. *A forma quadrática II_η definida em T_pM por*

$$II_\eta(u) = H_\eta(u, u)$$

é chamada de segunda forma fundamental de f em p com respeito a η.

Definição 1.30. *Uma imersão $f : M \longrightarrow \widetilde{M}$ é geodésica em $p \in M$ se para todo $\eta \in (T_pM)^{\perp}$ a segunda forma fundamental é identicamente nula em p. A imersão é dita totalmente geodésica se ela é geodésica para todo ponto $p \in M$.*

Proposição 1.5. *uma imersão $f : M \longrightarrow \widetilde{M}$ é geodésica em $p \in M$ se e somente se toda geodésica de M partindo de p é geodésica de $\widetilde{M}$ em p.*

Demonstração. Sejam $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = x$. Sejam N uma extensão local, normal a M, de um vetor η em p e X uma extensão local normal a M, de $\gamma'(t)$. Como X e N são perpendiculares, no ponto p temos

$$\begin{aligned} H_\eta(x,x) &= \langle S_\eta(x), x\rangle \\ &= -\langle \widetilde{\nabla}_X N, X\rangle \\ &= -X\langle N, X\rangle + \langle N, \widetilde{\nabla}_X X\rangle \\ &= \langle N, \widetilde{\nabla}_X X\rangle. \end{aligned}$$

Temos então que uma curva σ é uma geodésica no ponto p se e somente se, para todo $x \in T_pM$, a geodésica γ de M que é tangente a x em p satisfaz que $\widetilde{\nabla}_X X(p)$ não tem componente normal. Segue daí o resultado □

2

Resultados preliminares

Os resultados deste capítulo formam a base para os resultados dos próximos capítulos.

2.1 Gradiente, Divergência, Hessiano e Laplaciano

Nesta seção serão definidos conceitos e provados alguns resultados usados nos próximos capítulos.

Definição 2.1. *Seja M uma variedade Riemanniana e seja $f \in C^\infty(M)$. O gradiente de f é definido como o campo vetorial* $\mathrm{grad} f$ *em M que em um ponto $p \in M$, satisfaz*

$$\langle \mathrm{grad} f, v \rangle = df_p(v)$$

Definição 2.2. *Sejam M uma variedade Riemanniana e $X \in \mathcal{X}(M)$ e $T_X : T_pM \longrightarrow T_pM$ dado $T_X(Y(p)) = \nabla_Y X(p)$. A divergência de X como a função $div(X) : M \longrightarrow \mathbb{R}$ é dada por*

$$div(X) = \mathrm{tr}(T_X).$$

Definição 2.3. *Sejam M uma variedade Riemanniana e $f \in C^\infty(M)$. O Hessiano de f,* $\mathrm{Hess} f$ *como a forma bilinear simétrica tal que para $X, Y \in \mathcal{X}(M)$*

$$\mathrm{Hess} f(X, Y) = X(Yf) - (\nabla_X Y)f,$$

Equivalentemente pode-se definir o Hessiano por

$$\mathrm{Hess} f(X, Y) = \langle \nabla_X(\mathrm{grad} f), Y \rangle.$$

pois

$$\begin{aligned}\langle \nabla_X(\mathrm{grad} f), Y\rangle &= X(\langle \mathrm{grad} f, Y\rangle) - \langle \mathrm{grad} f, \nabla_X Y\rangle \\ &= X(Y(f))) - \nabla_X Y(f) \\ &= \mathrm{Hess} f(X,Y).\end{aligned}$$

Em coordenadas locais

$$\mathrm{Hess}(f)_{ij} = \partial_i\partial_j f - (\partial_k f)\Gamma_{ij}^k$$

Definição 2.4. *Seja M uma variedade Riemanniana e seja $f \in \mathcal{D}(M)$ O operador Laplaciano de Hodge $\Delta : C^\infty(M) \longrightarrow \mathcal{D}(M)$ é definido por*

$$\Delta f = \mathrm{tr}(\mathrm{Hess} f),$$

Proposição 2.1. *Seja M uma variedade Riemanniana de dimensão n e $p \in M$. Existe uma vizinhança $U \subset M$ de p e n campos de vetores $E_1, \ldots . E_n \in \mathcal{X}(U)$, ortonormais em cada ponto de U, tais que $(\nabla_{E_i} E_j)(p) = 0$. Esta família de campos de vetores é chamada de referencial geodésico em p*

Demonstração. Seja $B_\epsilon(p)$ uma bola geodésica em p e seja $\{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base ortonormal de T_pM. Então para $x \in B_\epsilon(p)$ fixo existe $v_x \in T_pM$ tal que $exp_p(v_x) = x$. Definindo a geodésica normalizada

$$\gamma(t) = exp_p(tv),$$

tem-se que γ liga p a x e satisfaz que $\gamma(|v_x|) = x$.

Definindo os campos vetoriais E_i sobre γ por

$$E_i(t) = P(v_i)(t), \quad i = 1 \ldots, n$$

onde P é o transporte paralelo de v_i ao longo de γ de p até q. Para todo $i = 1 \ldots, n$, os campos E_i são ortonormais, pois o transporte paralelo é uma isometria. Além disso, se

$$\gamma_i(t) = exp_p t(v_i), \quad i = 1 \ldots, n$$

com $t \in (\epsilon, -\epsilon)$, por definição de γ_i

$$E_j(f_i(t)) = \gamma_i'(t).$$

Considerando $P_{i,t} : T_pM \longrightarrow T_{\gamma_j(t)}M$ o transporte paralelo de γ_i de 0 até t nota-se que para cada $i = 1 \ldots, n$ e cada $k = 1 \ldots, n$

$$P_{i,t}(E_k(\gamma_i(t))) = v_k$$

logo

$$(\nabla_{E_i} E_j)(p) = \frac{d}{dt} P_{i,t}^{-1}(E_i(\gamma(t)))|_{t=0} = \frac{d}{dt} v_i|_{t=0} = 0.$$

□

Proposição 2.2. *Seja $\{E_1, \ldots E_n\}$ um referencial geodésico em p tem-se as seguintes fórmulas*

(1) $\nabla f(p) = \sum_i (E_i(f))E_i(p)$,

(2) $divX(p) = \sum_i (E_i\langle X, E_i\rangle)(p)$.

(3) $\Delta f(p) = \sum_i E_i^2 f(p)$.

Demonstração. (1) Como $\{E_1(p), \ldots E_n(p)\}$ é uma base ortonormal de T_pM, segue que se

$$\nabla f(p) = \sum_{i=1}^{n} a_i(p) E_n(p),$$

então $a_i(p) = \langle \nabla f(p), E_i(p)\rangle = df_p(E_i(p)) = E_i(p)(f)$, logo $\nabla f(p) = \sum_i (E_i(f))E_i(p)$.

(2) Considerando $T_X : T_pM \longrightarrow T_pM$ tal que $T_X(Y(p)) = \nabla_Y X(p)$ tem-se que

$$\begin{aligned} T_X(E_i(p)) &= \nabla_{E_i}\Big(\sum_j \langle X, E_j\rangle E_j\Big)(p) \\ &= \Big(E_i\langle X, E_j\rangle\Big)E_j(p) + \langle X, E_j\rangle \nabla_{E_i} E_j(p) \\ &= \Big(E_i\langle X, E_j\rangle\Big)E_j(p), \end{aligned}$$

daí por definição

$$div(X) = \mathrm{tr}(T_X) = \sum_i E_i\langle X, E_i\rangle(p).$$

(3) Como $\nabla_{E_i} E_j = 0$ então

$$\Gamma_{ij}^k = 0,$$

logo

$$\Delta f = \mathrm{tr}(\mathrm{Hess} f) = \sum_i E_i(E_i(f)).$$

□

2.2 Fórmula de Bochner-Weitzenböck generalizada

Nesta seção apresentamos uma generalização de um resultado muito importante a fórmula de Bochner-Weitzenböck, que é uma adaptação do resultado que aparece em [13].

Lema 2.1. *Sejam M uma variedade Riemanniana, $X, Z \in \mathcal{X}(M)$ campos vetoriais e $f \in C^\infty(M)$ então*

$$\langle \nabla_X \mathrm{grad} f, Y\rangle = \langle \nabla_Y \mathrm{grad} f, X\rangle,$$

ou equivalentemente

$$\mathrm{Hess} f(X,Y) = \mathrm{Hess} f(Y,X).$$

Demonstração. Usando as propriedades de conexão Riemanniana temos

$$\begin{aligned} \langle \nabla_X \mathrm{grad} f, Y\rangle &= X\langle \mathrm{grad} f, Y\rangle - \langle \mathrm{grad} f, \nabla_X Y\rangle, \\ \langle \nabla_Y \mathrm{grad} f, X\rangle &= Y\langle \mathrm{grad} f, X\rangle - \langle \mathrm{grad} f, \nabla_Y X\rangle, \end{aligned}$$

daí

$$\begin{aligned} \langle \nabla_X \mathrm{grad} f, Y\rangle - \langle \nabla_Y \mathrm{grad} f, X\rangle &= (X\langle \mathrm{grad} f, Y\rangle - \langle \mathrm{grad} f, \nabla_X Y\rangle) + (Y\langle \mathrm{grad} f, X\rangle - \langle \mathrm{grad} f, \nabla_Y X\rangle) \\ &= XY(f) - YX(f) - \langle \mathrm{grad} f, \nabla_X Y - \nabla_Y X\rangle) \\ &= [X,Y](f) - [X,Y](f) \\ &= 0, \end{aligned}$$

logo

$$\langle \nabla_X \mathrm{grad} f, Y\rangle = \langle \nabla_Y \mathrm{grad} f, X\rangle.$$

□

Teorema 2.1 (Fórmula de Bochner-Weitzenböck)**.** *Seja M uma variedade Riemanniana completa. Então para toda função $f \in C^3(M)$, tem-se*

$$\frac{1}{2}\Delta|\mathrm{grad} f|^2 = |\mathrm{Hess} f|^2 + \langle \mathrm{grad} f, \nabla(\Delta f)\rangle + Ric(\mathrm{grad} f, \mathrm{grad} f),$$

pontualmente.

Demonstração. Seja $p \in M$ fixo e seja $\{E_i\}_{i=1}^n$ um referencial geodésico em p, então

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta|\mathrm{grad} f|^2 &= \frac{1}{2}E_iE_i\langle \mathrm{grad} f, \mathrm{grad} f\rangle \\
&= E_i\langle \nabla_{E_i}\mathrm{grad} f, \mathrm{grad} f\rangle \\
&= E_i\langle \nabla_{\nabla f}\mathrm{grad} f, E_i\rangle \\
&= \langle \nabla_{E_i}\nabla_{\mathrm{grad} f}\nabla f, E_i\rangle + \langle \nabla_{\mathrm{grad} f}\mathrm{grad} f, \nabla_{E_i}E_i\rangle.
\end{aligned}$$

No ponto p

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta|\mathrm{grad} f|^2 &= \langle \nabla_{E_i}\nabla_{\mathrm{grad} f}\mathrm{grad} f, E_i\rangle \\
&= \langle R(E_i, \mathrm{grad} f)\mathrm{grad} f, E_i\rangle + \langle \nabla_{\mathrm{grad} f}\nabla_{E_i}\mathrm{grad} f, E_i\rangle + \langle \nabla_{[E_i,\mathrm{grad} f]}\mathrm{grad} f, E_i\rangle \\
&= \langle Ric(\mathrm{grad} f, \mathrm{grad} f)\rangle + \langle \nabla_{\mathrm{grad} f}\nabla_{E_i}\mathrm{grad} f, E_i\rangle + \mathrm{Hess}(f)([E_i, \mathrm{grad} f], E_i),
\end{aligned}$$

como

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_{\mathrm{grad} f}\nabla_{E_i}\mathrm{grad} f, E_i\rangle &= \mathrm{grad} f\langle \nabla_{E_i}\mathrm{grad} f, E_i\rangle - \langle \nabla_{E_i}\mathrm{grad} f, \nabla_{\mathrm{grad} f}E_i\rangle \\
&= \mathrm{grad} f\langle \nabla_{E_i}\mathrm{grad} f, E_i\rangle - 0 \quad \text{em} \quad p \\
&= (\mathrm{grad} f)\mathrm{tr}(\mathrm{Hess} f) \\
&= (\mathrm{grad} f)\Delta f \\
&= \langle \mathrm{grad} f, \mathrm{grad}(\Delta f)\rangle,
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hess}(f)([E_i, \mathrm{grad} f], E_i) &= \mathrm{Hess}(f)(E_i\mathrm{grad} f - \mathrm{grad} f E_i, E_i) \\
&= \mathrm{Hess}(f)(\nabla_{E_i}\mathrm{grad} f - \nabla_{\mathrm{grad} f}E_i, E_i) \\
&= \mathrm{Hess}(f)(\nabla_{E_i}\mathrm{grad} f, E_i) - \mathrm{Hess}(f)(\nabla_{\mathrm{grad} f}E_i, E_i) \\
&= \mathrm{Hess}(f)(\nabla_{E_i}\mathrm{grad} f, E_i) - 0, \quad \text{em} \quad p \\
&= \mathrm{Hess}(f)(E_i, E_i\mathrm{grad} f) \\
&= \langle \nabla_{E_i}\mathrm{grad} f, \nabla_{E_i}\mathrm{grad} f\rangle \\
&= |\mathrm{Hess}(f)|^2
\end{aligned}$$

temos finalmente

$$\frac{1}{2}\Delta|\mathrm{grad} f|^2 = |\mathrm{Hess} f|^2 + \langle \mathrm{grad} f, \mathrm{grad}(\Delta f)\rangle + Ric(\mathrm{grad} f, \mathrm{grad} f).$$

Assim pela arbitrariedade do ponto p segue o resultado. □

Lema 2.2. *Seja M uma variedade Riemanniana completa. Então para toda função $f \in C^3(M)$ e toda função $\phi \in C^2(M)$, tem-se*

$$-(\text{grad}\phi)|\text{grad}f|^2 = -2\langle \text{grad}f, \text{grad}\langle \text{grad}f, \text{grad}\phi\rangle\rangle + 2\text{Hess}\phi(\text{grad}f, \text{grad}f)$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}
-(\text{grad}\phi)|\text{grad}f|^2 &= -\text{grad}\phi\langle \text{grad}f, \text{grad}f\rangle \\
&= -2\langle \nabla_{\nabla\phi}\text{grad}f, \text{grad}f\rangle \\
&= -2\langle \nabla_{\text{grad}f}\text{grad}f, \text{grad}\phi\rangle \\
&= -2\text{grad}f\langle \text{grad}f, \text{grad}\phi\rangle + 2\langle \text{grad}f, \nabla_{\text{grad}f}\text{grad}\phi\rangle \\
&= -2\langle \text{grad}f, \nabla\langle \text{grad}f, \text{grad}\phi\rangle\rangle + 2\text{Hess}\phi(\text{grad}f, \text{grad}f) \\
&= -2\langle \text{grad}f, \nabla(\text{grad}\phi(f))\rangle + 2\text{Hess}\phi(\text{grad}f, \text{grad}f).
\end{aligned}$$

□

Por simplicidade a partir daqui usaremos ∇ para denotar o operador gradiente. Com esta notação enunciamos o seguinte teorema que é o objetivo desta seção.

Teorema 2.2 (Fórmula de Bochner-Weitzenböck generalizada)**.** *Seja M uma variedade Riemanniana completa e seja $L = \Delta - \nabla\phi\cdot\nabla$. Então para toda função $f \in C^3(M)$ e toda função $\phi \in C^2(M)$*

$$L|\nabla f|^2 = 2|\text{Hess}f|^2 + 2\langle \nabla Lf, \nabla f\rangle + 2(Ric(\nabla f, \nabla f) + \text{Hess}(\phi)(\nabla f, \nabla f)),$$

pontualmente.

Demonstração.

$$\begin{aligned}
L|\nabla f|^2 &= \Delta|\nabla f|^2 - \nabla\phi(|\nabla f|^2) \\
&= 2|\text{Hess}f|^2 + 2\langle \nabla f, \nabla\Delta f\rangle + 2Ric(\nabla f) - 2\langle \nabla f, \nabla(\nabla\phi(f))\rangle + 2\text{Hess}\phi(\nabla f) \\
&= 2|\text{Hess}f|^2 + 2\langle \nabla Lf, \nabla f\rangle + 2(Ric(\nabla f, \nabla f) + 2\text{Hess}(\phi)(\nabla f, \nabla f)).
\end{aligned}$$

□

2.3 Principio do máximo

Nesta seção estudamos uma generalização do principio do máximo para operador de difusão $L = \Delta - \nabla\phi \cdot \nabla$, escrevendo primeiro o principio do máximo clássico.

Proposição 2.3 (Principio do máximo)**.** *Seja $u : D \subset R^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 satisfazendo*

$$L[u] = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \geq 0,$$

em um domínio conexo D onde L é um operador elíptico, se as funções a_{ij} e b_{ij} são uniformemente limitadas e u atinge um máximo em um ponto de D. Então u é constante em D.

Demonstração. ver por exemplo [11] página 61. □

Definição 2.5. *Uma função f em M satisfaz $Lf \geq 0$ no sentido de barreira, se para todo $q \in M$ e $\epsilon > 0$, existe uma função de classe C^∞ $f_{q,\epsilon}$ em uma vizinhança de q, tal que $f_{q,\epsilon} \leq f$ mas $f_{q,\epsilon}(q) = f(q)$, e $Lf_{q,\epsilon}(q) \geq -\epsilon$. Tal $f_{q,\epsilon}$ é chamada de função suporte de f.*

Teorema 2.3 (Principio do máximo de Calabi-Hopf)**.** *Seja (M, g) uma variedade diferenciável completa e conexa, $\phi \in C^2(M)$, e $L = \Delta - \nabla\phi \cdot \nabla$. Seja f uma função continua em M tal que $Lf \geq 0$ no sentido de barreira. Então f atinge um máximo ou é constante.*

Demonstração. Seja $p \in M$ um máximo local, então p é um máximo de f num aberto V que contém p. Suponhamos que f não é constante e consideremos uma bola geodésica $B_p(\delta)$ tal que $f(z) < f(p)$ para algum $z \in \partial B_p(\delta)$. Por outro lado consideremos (U, φ) um sistema de coordenadas normais tal que

$$p = \varphi(0, \ldots, 0),$$

e

$$z = \varphi(\delta, 0, \ldots, , 0).$$

Definindo $h : B_p(\delta) \longrightarrow R$ por

$$h(\varphi(x_1, \ldots, x_n)) = x_1 - C(x_2^2 + \cdots + x_n^2),$$

onde $C > 0$ é suficientemente grande tal que: se $y \in \partial B_p(\delta)$ e $f(y) = f(p)$ então $h(y) < 0$.

Notamos que

$$|\nabla h(\varphi(x_1,\ldots,x_n))|^2 = 1 + 4C(x_2^2+\cdots+x_n^2) \neq 0 \quad , \quad \Delta h(\varphi(x_1,\ldots,x_n)) = -C(n-1).$$

Seja $\psi : B_p(\delta) \longrightarrow R$ definida por

$$\psi(\varphi) = e^{ah(\varphi)} - 1,$$

então

$$\begin{aligned} \Delta\psi &= (a^2|\nabla h|^2 + a\Delta h)e^{ah}, \\ |\nabla\psi| &= ae^{ah}\sqrt{1+4C^2(x_1^2+\cdots+x_n^2)}, \end{aligned}$$

assim para a suficientemente grande

$$\Delta\psi > 0, \qquad a|\nabla h|^2 + \Delta h \geq |\nabla\phi|\sqrt{1+4\delta^2C^2},$$

e $\psi(p) = 0$, logo para $0 < \eta < 1$ suficientemente pequeno

$$(f+\eta\psi)|_{\partial B_p(\delta)} < f(p), \qquad (f+\eta\psi)(p) = f(p),$$

então $f + \eta\psi$ tem um máximo em algum ponto $q \in B_p(\delta)$. Como $f_{q,\epsilon}$ é suporte de f em q temos

$$Lf_{q,\epsilon} \geq -\epsilon.$$

então

$$\begin{aligned} L(f_{q,\epsilon}+\eta\psi) &= Lf_{q,\epsilon} + \eta L\psi \\ &\geq -\epsilon + \Delta\psi - \eta\langle\nabla\phi,\nabla\psi\rangle \end{aligned}$$

de outro lado

$$\begin{aligned} \Delta\psi - \eta\langle\nabla\phi,\nabla\psi\rangle &\geq (a^2|\nabla h|^2 + a\Delta h)e^{ah} - \eta|\nabla\phi||\nabla\psi| \\ &\geq ae^{ah}|\nabla\phi|\sqrt{1+4\delta^2C^2} - \eta|\nabla\phi||\nabla\psi| \\ &\geq ae^{ah}|\nabla\phi|\Big(\sqrt{1+4\delta^2C^2} - \eta\sqrt{1+4C^2(x_1^2+\cdots+x_n^2)}\,\Big) \\ &> 0, \end{aligned}$$

daí

$$L(f_{q,\epsilon} + \eta\psi) \geq -\epsilon,$$

além disso $(f_{q,\epsilon} + \eta\psi)(q) = (f + \eta\psi)(q)$ portanto $f_{q,\epsilon} + \eta\psi$ é uma função suporte para de $f + \eta\psi$ e para ϵ suficientemente pequeno

$$L(f_{q,\epsilon} + \eta\psi) > 0,$$

o que não é possível pela Proposição 2.3 □

Um resultado importante de regularidade sobre operadores elípticos em equações diferenciais que será utilizado nesta dissertação é o seguinte.

Proposição 2.4. *Seja $u \in C^2(D)$ uma solução da equação*

$$Lu = f,$$

em um conjunto aberto D onde f e os coeficientes de do operador elíptico L estão em $C^\infty(D)$. Então $u \in C^\infty(D)$.

Demonstração. Ver por exemplo [2] página 109. □

2.4 Funções de Busemann

Nesta seção e no que segue desta dissertação as geodésicas serão consideradas normalizadas.

Definição 2.6. *Seja $\gamma : [0, \infty) \longrightarrow M$ uma geodésica definida. Se o conjunto dos números $t \geq 0$ para os quais $d(\gamma(0), \gamma(t)) = t$ é da forma $[0, t_0]$, o ponto $\gamma(t_0)$ é chamado ponto mínimo de p ao longo de γ. Definimos o cut locus ou lugar dos pontos mínimos de p, indicado por $Cut(p)$ como a união de todos os pontos mínimos de p ao longo de todas as geodésicas que partem de p.*

Definição 2.7. *Um raio γ é uma geodésica definida em $[0, \infty)$ tal que γ é minimizante de $\gamma(0)$ a $\gamma(t)$ para todo $t \geq 0$. Uma linha é uma geodésica definida em $(-\infty, \infty)$ que é minimizante em cada intervalo.*

Se M é uma variedade Riemanniana completa e não compacta e $p \in M$, então existe um raio γ tal que $\gamma(0) = p$. Para provar isto consideramos uma sequência $q_m \in M$ tal que

$$\lim_{m\to\infty} d(p, q_m) = \infty,$$

e seja δ_n uma geodésica minimizante ligando p a q_m partindo de p. Daí $\dot{\delta}_m(0)$ é uma sequência de pontos na esfera unitária $S^{n-1} \subset T_pM$. Pela compacidade de S^{n-1} existe um ponto de acumulação $v \in S^{n-1}$. Portanto existe uma subsequência $\{t_k\} \subset \{t_m\}$ tal que $\dot{\delta}_k(0)$ converge ao vetor v. Seja $\delta : [0, \infty) \longrightarrow M$ a geodésica definida por

$$\delta(s) = exp_p(sv),$$

então $\dot{\delta}(0) = v$ e para um s_0 fixado temos

$$\lim_{m\to\infty} \delta_m(s_0) = \delta(s_0),$$

e como a função distância é continua

$$\lim_{m\to\infty} d(p, \delta_m(s_0)) = d(p, \delta(s_0)),$$

mas para m suficientemente grande $d(p, \delta_m(s_0)) = s_0$, logo

$$d(p, \delta(s_0)) = s_0,$$

portanto δ é um raio.

Do outro lado nem toda variedade completa e não compacta possui uma linha, basta considerar uma superfície como o parabolide de revolução.

Lema 2.3. *Seja γ um raio, se definimos $b_r^\gamma : M \longrightarrow R$ como sendo*

$$b_r^\gamma(x) = r - d(x, \gamma(r))$$

1 Para $x \in M$ fixo b_r^γ é crescente em r.

2 b_r^γ é limitada por $d(x, \gamma(0))$.

3 A família de funções $\{b_r^\gamma\}$ é uniformente continua e para cada γ, b_r^γ é Lipschitziana com constante de Lipschitz igual a 1.

Demonstração. (1) Pela desigualdade triângular, para todo $s > r$,

$$d(x, \gamma(r)) - d(x, \gamma(s)) \leq d(\gamma(r), \gamma(s)) = r - s,$$

então

$$(r - d(x, \gamma(r))) - (s - d(x, \gamma(x, \gamma(s))) \geq 0$$

logo $b_r^\gamma(x) \geq b_s^\gamma(x)$.

(2) Pela desigualdade triângular

$$b_r^\gamma(x) = r - d(x, \gamma(r)) \leq d(x, \gamma(0))$$

(3) Seja r fixo pela definição de b_r^γ temos

$$|b_r^\gamma(x) - b_r^\gamma(y)| = |d(x, \gamma(r)) - d(y, \gamma(r))| \leq d(x, y),$$

logo a família b_r^γ é uniformente continua. □

O Lema 2.3 permite fazer a seguinte definição

Definição 2.8. *Seja γ um raio, a função de Busemann associada a γ, b^γ é definida por*

$$b^\gamma(x) = \lim_{t \to \infty} \{t - d(x, \gamma(t))\}.$$

Se $\gamma : (-\infty, \infty) \longrightarrow M$ é uma linha, podemos associar a ela duas funções de Busemann, a saber:

$$b^+(x) = \lim_{t \to \infty} t - d(x, \gamma(+t)),$$

e

$$b^-(x) = \lim_{t \to \infty} t - d(x, \gamma(-t)).$$

3

Modificações do tensor de Ricci e Aplicações

Um dos principais Teoremas de estrutura para variedades Riemannianas com restrição sobre a curvatura de Ricci é o teorema de Myers que dá informação sobre a topologia da variedade. Neste capítulo o objetivo é demonstrar duas generalizações do teorema de Myers usando duas modificações do tensor de Ricci e de uma generalização do teorema de Bochner.

3.1 O Teorema de Myers Generalizado

Teorema 3.1. *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana completa e conexa de dimensão n. Suponha que M admite um campo de vetores V satisfazendo as desigualdades*

$$Ric + \mathcal{L}_V g \geq (n-1)C > 0 \tag{3.1}$$

e $|V| \leq r$. Então M é compacta e o diâmetro satisfaz

$$diam(M) \leq \frac{\pi}{(n-1)C}\Big(\sqrt{2}r + \sqrt{2r^2 + (n-1)^2 C}\Big).$$

É claro que se $V = 0$, temos o teorema de Myers.

Demonstração. 3.1

Sejam $p, q \in M$. Pela completitude de M existe uma geodésica minimizante γ ligando p a q de comprimento l. Seja

$$\{E_1 = \dot{\gamma}, E_2, \ldots, E_n\},$$

um conjunto de vetores ortonormais, tais que $\{E_1(0), E_2(0), \ldots, E_n(0)\}$ é um referencial geodésico em p e os campos vetoriais $E_2, \ldots, E_n$ são paralelos ao longo de γ.

Seja $f \in C^\infty([0,l])$ tal que $f(0) = f(l) = 0$. Então a forma do índice satisfaz

$$I(fE_i, fE_i) = \int_0^l (\langle \dot{f}E_i, \dot{f}E_i\rangle - \langle R(fE_i, \dot{\gamma})\dot{\gamma}, fE_i\rangle)\ dt$$

somando

$$\begin{aligned}
\sum_{i=2}^{n} I(fE_i, fE_i) &= \int_0^l ((n-1)\dot{f}^2 - \sum_{i=2}^{n} f^2\langle R(E_i, \dot{\gamma})\dot{\gamma}, E_i\rangle)\ dt \\
&= \int_0^l ((n-1)\dot{f}^2 - \sum_{i=2}^{n} f^2\langle R(E_i, \dot{\gamma})\dot{\gamma}, E_i\rangle + f^2\langle R(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})\dot{\gamma}, \dot{\gamma}\rangle)\ dt \\
&= \int_0^l ((n-1)\dot{f}^2 - \sum_{i=1}^{n} f^2\langle R(E_i, \dot{\gamma})\dot{\gamma}, E_i\rangle)\ dt \\
&= \int_0^l ((n-1)\dot{f}^2 - f^2 Ric(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}))\ dt.
\end{aligned}$$

Usando 3.1 temos que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=2}^{n} I(fE_i, fE_i) &\leq \int_0^l ((n-1)\dot{f}^2 + f^2\mathcal{L}_V\langle\dot{\gamma}, \dot{\gamma}\rangle - (n-1)Cf^2)\ dt \\
&= \int_0^l ((n-1)(\dot{f}^2 - Cf^2) + f^2\mathcal{L}_V\langle\dot{\gamma}, \dot{\gamma}\rangle)\ dt \\
&= \int_0^l ((n-1)(\dot{f}^2 - Cf^2) + 2f^2\langle\nabla_{\dot{\gamma}}V, \dot{\gamma}\rangle)\ dt
\end{aligned}$$

como γ é uma geodésica $\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = 0$ e dado que ∇ é uma conexão temos

$$\begin{aligned}
\dot{\gamma}\langle V, \dot{\gamma}\rangle &= \langle\nabla_{\dot{\gamma}}V, \gamma\rangle + \langle V, \nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}\rangle \\
&= \langle\nabla_{\dot{\gamma}}V, \gamma\rangle,
\end{aligned}$$

logo

$$\sum_{i=2}^{n} I(fE_i, fE_i) \leq \int_0^l ((n-1)(\dot{f}^2 - Cf^2) + 2f^2\dot{\gamma}\langle V, \dot{\gamma}\rangle)\ dt,$$

onde $2f^2\dot{\gamma}\langle V,\dot{\gamma}\rangle = 2f^2\frac{d}{dt}\langle V,\dot{\gamma}\rangle(\gamma(t))$, assim

$$2f^2\dot{\gamma}\langle V,\dot{\gamma}\rangle = -4f\dot{f}\langle V,\dot{\gamma}\rangle + 2\frac{d}{dt}(f^2\langle V,\dot{\gamma}\rangle),$$

integrando a ambos lados

$$\begin{aligned}\int_0^l 2f^2\dot{\gamma}\langle V,\dot{\gamma}\rangle &= \int_0^l -4f\dot{f}\langle V,\dot{\gamma}\rangle dt + 2(f^2\langle V,\dot{\gamma}\rangle)|_0^l,\\ &= \int_0^l -4f\dot{f}\langle V,\dot{\gamma}\rangle dt,\end{aligned}$$

pela desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$\int_0^l -f\dot{f}\langle V,\dot{\gamma}\rangle dt \leq \Big(\int_0^l f^2\dot{f}^2 dt\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_0^l \langle V,\dot{\gamma}\rangle^2 dt\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Como $\dot{\gamma}$ é unitário $\langle V,\dot{\gamma}\rangle^2 \leq \langle V,V\rangle$ e usando o fato que $|V| \leq r$ temos

$$\Big(\int_0^l \langle V,\dot{\gamma}\rangle^2\Big)^{\frac{1}{2}} \leq r\sqrt{l}.$$

Então

$$\int_0^l -f\dot{f}\langle V,\dot{\gamma}\rangle dt \leq r\sqrt{l}\Big(\int_0^l f^2\dot{f}^2 dt\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Logo

$$\sum_{i=2}^n I(fE_i,fE_i) \leq \int_0^l (n-1)(\dot{f}^2 - Cf^2)dt + 4r\sqrt{l}\Big(\int_0^l f^2\dot{f}^2 dt\Big)^{\frac{1}{2}},$$

tomando $f(t) = \operatorname{sen}(\frac{\pi t}{l})$, tem-se $\dot{f}(t) = \frac{\pi}{l}\cos(\frac{\pi t}{l}))$ e

$$\begin{aligned}\sum_{i=2}^n I(fE_i,fE_i) &\leq (n-1)\int_0^l \left(\tfrac{\pi^2}{l^2}\cos^2\left(\tfrac{\pi t}{l}\right) - C\operatorname{sen}^2\Big(\tfrac{\pi t}{l}\Big)\right)dt + \frac{2\pi r}{\sqrt{l}}\left(\int_0^l \operatorname{sen}\Big(\frac{2\pi t}{l}\Big)\right)^{\frac{1}{2}} dt\\ &= (n-1)\int_0^l \left(\frac{\pi^2}{l^2} - \Big(\frac{\pi^2}{l^2}+C\Big)\operatorname{sen}^2\Big(\tfrac{\pi t}{l}\Big)\right) dt + \pi\sqrt{2}r\\ &= (n-1)\left(\frac{\pi^2}{l} - \Big(\frac{\pi^2}{l^2}+C\Big)\frac{l}{2}\right) + \pi\sqrt{2}r\\ &= -\frac{1}{2l}((n-1)Cl^2 - 2\sqrt{2}r\pi l - (n-1)\pi^2),\end{aligned}$$

se $(n-1)Cl^2 - 2\sqrt{2}r\pi l - (n-1)\pi^2 > 0$ então $\frac{1}{2}E''(0) = \sum_{i=2}^n I(fE_i,fE_i) < 0$, logo $I(fE_m,fE_m) < 0$ para algum m o que contradiz o Corolário 1.2. □

Se M é uma variedade Riemanniana, dado um campo vetorial V denota-se por V^* a 1-forma associada a V tal que $V^*(Y) = \langle V, Y\rangle$. Podemos obter uma outra generalização do Teorema 3.1 sem impor $|V| \leq r$.

Teorema 3.2. *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana completa e conexa de dimensão n. Suponha que (M, g) admite um campo de vetores V satisfazendo as desigualdades*

$$Ric + \mathcal{L}_V g - kV^* \otimes V^* \geq (n-1)C > 0, \tag{3.2}$$

onde $k > 0$. Então M é compacta e seu diâmetro satizfaz

$$diam(M) \leq \frac{\pi}{\sqrt{(n-1)C}}\sqrt{n-1+\frac{4}{k}}$$

Demonstração. De forma análoga à demonstração do teorema 3.1 e usando 3.2

$$\begin{aligned}
\sum_{i=2}^{n} I(fE_i, fE_i) &= \int_0^l ((n-1)\dot{f}^2 - f^2 Ric(\dot{\gamma},\dot{\gamma}))\ dt \\
&\leq \int_0^l ((n-1)\dot{f}^2 + f^2\mathcal{L}_V\langle\dot{\gamma},\dot{\gamma}\rangle - kf^2 V^*\otimes V^*(\dot{\gamma},\dot{\gamma}) - (n-1)Cf^2)\ dt \\
&= \int_0^l ((n-1)(\dot{f}^2 - Cf^2) - 4f\dot{f}\langle V,\dot{\gamma}\rangle)\ dt + k\int_0^l f^2\langle V,\dot{\gamma}\rangle^2\ dt,
\end{aligned}$$

fazendo $P = -\dot{f}$ e $T = f\langle V,\dot{\gamma}\rangle$, pela desigualdade de Cauchy-Schwartz

$$\begin{aligned}
\int_0^l -f\dot{f}\langle V,\dot{\gamma}\rangle dt &\leq \left(\int_0^l P^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^l T^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\int_0^l \dot{f}^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^l f^2\langle V,\dot{\gamma}\rangle^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Tomando $A = \int_0^l \frac{2}{k}\dot{f}^2 dt \geq 0$, $B = \int_0^l \frac{k}{2} f^2\langle V,\dot{\gamma}\rangle^2 dt \geq 0$ e usando que $\sqrt{AB} \leq \frac{A+B}{2}$ temos

$$\int_0^l -f\dot{f}\langle V,\dot{\gamma}\rangle dt \leq \int_0^l (\tfrac{1}{k}\dot{f}^2 + \tfrac{k}{4}f^2\langle V,\dot{\gamma}\rangle^2) dt,$$

daí

$$\int_0^l -4f\dot{f}\langle V,\dot{\gamma}\rangle\ dt \leq \int_0^l ((n-1+\tfrac{4}{k})\dot{f}^2 - kf^2\langle V,\dot{\gamma}\rangle^2)\ dt,$$

e logo

$$\sum_{i=2}^{n} I(fE_i, fE_i) \leq \int_0^l \left((n-1+\tfrac{4}{k})\dot{f}^2 - (n-1)Cf^2\right)\ dt,$$

fazendo $f(t) = \text{sen}(\frac{\pi t}{l})$

$$\sum_{i=2}^{n} I(fE_i, fE_i) \leq \frac{\pi^2}{l}(\pi^2(n-1+\frac{4}{k}) - (n-1)Cl^2),$$

analogamente à demonstração do teorema 3.1 temos

$$l \leq \frac{\pi}{\sqrt{(n-1)C}}\sqrt{n-1+\frac{4}{k}}.$$

□

3.2 Teorema de Bochner

Definição 3.1. *Seja $X \in \mathcal{X}(M)$, existe uma única $1-$forma θ_X associada a X tal que para todo $Y \in \mathcal{X}(M)$*

$$\theta_X(Y) = \langle X, Y\rangle.$$

X é dito harmônico se $d\theta_X = 0$ e $div(X) = 0$.

Proposição 3.1. *X é um campo vetorial harmônico se e somente se $div(X) = 0$ e $\langle \nabla_Y X, Z\rangle = \langle \nabla_Z X, Y\rangle$.*

Demonstração. Da Definição 3.1 X é harmônico se e somente se $d\theta_X = 0$ e $div(X) = 0$. Como

$$\begin{aligned} d\theta_X(Y,Z) &= Y\theta_X(Z) - Z\theta_X(Y) - \theta_X([Y,Z]) \\ &= \langle \nabla_Y X, Z\rangle + \langle X, \nabla_Y Z\rangle - \langle \nabla_Z X, Y\rangle - \langle X, \nabla_Z Y\rangle - \langle X, [Y,Z]\rangle \\ &= \langle \nabla_Y X, Z\rangle - \langle \nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Y Z\rangle - \langle X, \nabla_Z Y\rangle - \langle X, [Y,Z]\rangle \\ &= \langle \nabla_Y X, Z\rangle - \langle \nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, [Y,Z]\rangle - \langle X, [Y,Z]\rangle \\ &= \langle \nabla_Y X, Z\rangle - \langle \nabla_Z X, Y\rangle, \end{aligned}$$

segue o resultado.

□

Lema 3.1. *Seja Y um campo vetorial harmônico então*

$$div(\nabla_Y Y) = Ric(Y,Y) + \langle \nabla Y, \nabla Y\rangle.$$

Demonstração. Seja $p \in M$ fixo e seja $\{E_i\}_{i=1}^n$ um referencial geodésico em p, então pela Proposiçao 2.2

$$\begin{aligned} div(\nabla_Y Y) &= E_i\langle \nabla_Y Y, E_i\rangle \\ &= \langle \nabla_{E_i}\nabla_Y Y, E_i\rangle + \langle \nabla_Y Y, \nabla_{E_i} E_i\rangle \\ &= \langle \nabla_{E_i}\nabla_Y Y, E_i\rangle \\ &= R(Y, E_i, Y, E_i) + \langle \nabla_Y \nabla_{E_i} Y, E_i\rangle + \langle \nabla_{[E_i,Y]} Y, E_i\rangle \\ &= Ric(Y,Y) + Y\langle \nabla_{E_i} Y, E_i\rangle - \langle \nabla_{E_i} Y, \nabla_Y E_i\rangle + \langle \nabla_{[E_i,Y]} Y, E_i\rangle \\ &= Ric(Y,Y) + Y(div(Y)) - \langle \nabla_{E_i} Y, \nabla_Y E_i\rangle + \langle \nabla_{[E_i,Y]} Y, E_i\rangle. \end{aligned}$$

No ponto p pela Proposiçao 3.1 $\langle \nabla_{[E_i,Y]} Y, E_i\rangle = \langle \nabla_{E_i} Y, [E_i, Y]\rangle$ e $\langle \nabla_{E_i} Y, E_i\rangle = E_i\langle Y, E_i\rangle = div(Y) = 0$, então

$$\begin{aligned} div(\nabla_Y Y) &= Ric(Y,Y) - \langle \nabla_{E_i} Y, \nabla_Y E_i\rangle + \langle \nabla_{E_i} Y, [E_i, Y]\rangle \\ &= Ric(Y,Y) - \langle \nabla_{E_i} Y, \nabla_Y E_i\rangle + \langle \nabla_{E_i} Y, \nabla_{E_i} Y - \nabla_Y E_i\rangle \\ &= Ric(Y,Y) + \langle \nabla_{E_i} Y, \nabla_{E_i} Y\rangle - 2\langle \nabla_{E_i} Y, \nabla_Y E_i\rangle \\ &= Ric(Y,Y) + \langle \nabla Y, \nabla Y\rangle - 2\langle \nabla_{E_i} Y, \nabla_Y E_i\rangle, \end{aligned}$$

como $\nabla_Y E_i = 0$, então

$$div(\nabla_Y Y) = Ric(Y,Y) + \langle \nabla Y, \nabla Y\rangle.$$

Pela arbitrariedade do ponto o resultado segue. □

Teorema 3.3. *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana fechada, orientada e conexa de dimensão n. Suponha que (M, g) admite um campo vetorial V satisfazendo a desigualdade*

$$Ric + \mathcal{L}_V g - div(V)g \geq 0. \tag{3.3}$$

Então

(1) Todo campo de vetores harmônico é paralelo.

(2) Se existe uma constante positiva $C > 0$ tal que

$$Ric + \mathcal{L}_V g - div(V)g \geq C, \tag{3.4}$$

então não existe um campo de vetores harmônico não-trivial.

Demonstração. (1)Seja Y um campo vetorial harmônico e seja W definido por

$$W = \nabla_Y Y + 2\langle Y, V\rangle Y - \langle Y, Y\rangle V,$$

então tomando a divergência de W e usando que $div(Y) = 0$, temos

$$\begin{aligned} div(W) &= div(\nabla_Y Y) + 2Y(\langle Y, V\rangle) + 2\langle Y, V\rangle div(Y) - V(\langle Y, Y\rangle) - (\langle Y, Y\rangle) div(V) \\ &= div(\nabla_Y Y) + 2\langle \nabla_Y Y, V\rangle + 2\langle Y, \nabla_Y V\rangle - 2\langle \nabla_V Y, Y\rangle - \langle Y, Y\rangle div(V). \end{aligned}$$

Pelo Lema 2.1 $\langle \nabla_V Y, Y\rangle = \langle \nabla_Y Y, V\rangle$, daí

$$\begin{aligned} div(W) &= div(\nabla_Y Y) + 2\langle Y, \nabla_Y V\rangle - \langle Y, Y\rangle div(V) \\ &= div(\nabla_Y Y) + \mathcal{L}_V g(Y, Y) - \langle Y, Y\rangle div(V). \end{aligned}$$

Aplicando o Lema 3.1

$$div(W) = Ric(Y, Y) + \langle \nabla Y, \nabla Y\rangle + \mathcal{L}_V g(Y, Y) - \langle Y, Y\rangle div(V)$$

integrando a ambos lados

$$0 = \int_M div(W)\ dvol \tag{3.5}$$

$$= \int_M (Ric(Y, Y) + \langle \nabla Y, \nabla Y\rangle + \mathcal{L}_V g(Y, Y) - \langle Y, Y\rangle div(V))\ dvol \tag{3.6}$$

pela desigualdade 3.3 deve acontecer que

$$0 \geq \int_M \langle \nabla Y, \nabla Y\rangle\ dvol.$$

Do outro lado, como $\langle \nabla Y, \nabla Y\rangle \geq 0$ então

$$0 \leq \int_M \langle \nabla Y, \nabla Y\rangle\ dvol.$$

logo $\langle \nabla Y, \nabla Y\rangle = 0$, portanto $\nabla Y = 0$, então Y é paralelo.

(2) Supondo que existe um campo de vetores Y harmônico não-trivial por 3.4 e 3.5

$$0 \geq \int_M (C\langle Y, Y\rangle + \langle \nabla Y, \nabla Y\rangle)\ dvol,$$

como $0 \leq \int_M (C\langle Y, Y\rangle + \langle \nabla Y, \nabla Y\rangle)\ dvol$, então $C\langle Y, Y\rangle = \langle \nabla Y, \nabla Y\rangle = 0$. Logo $\langle Y, Y\rangle = 0$ pois $C > 0$, então $Y = 0$ o que contradiz o fato de Y ser não trivial.

□

4

Uma generalização do teorema de decomposição de Cheeger-Gromoll via o tensor de Ricci Barkry-Emery

O teorema de decomposição de Cheeger-Gromoll é um dos teoremas de estrutura mais importantes da Geometria Riemanniana para variedades não compactas e possui muitas aplicações. Neste capítulo demonstraremos uma generalização deste teorema, demonstrando antes alguns resultados importantes que serão usados na demonstração.

4.1 Estimativa sobre a função de Busemann

Teorema 4.1. *Sejam M uma variedade Riemanniana completa e $\phi \in C^2(M)$ tais que*

$$Ric + Hess(\phi) \geq 0, \tag{4.1}$$

em M. Seja $p \in M$ fixo definimos a função distância $\rho : M \longrightarrow \mathbb{R}$ como sendo $\rho(x) = dist(p,x)$. Então para $L = \Delta - \nabla\phi \cdot \nabla$ tem-se

$$L\rho(q) \;\leq\; \frac{n-1}{\rho(q)} - \frac{2}{\rho(q)}\phi(q) + \frac{1}{\rho^2(q)}\int_0^{\rho(q)} \phi \circ \gamma \; dt \text{ para todo } q \in M \setminus cut(p)$$

onde γ é uma geodésica normal minimal ligando p a q.

Demonstração. Dado $q \in M$ seja $\gamma : [0, \rho(q)] \longrightarrow M$ a geodésica minimal normal de p a q e sejam $E_1(t), \ldots, E_{n-1}(t)$ campos de vetores ortonormais e paralelos ao longo de γ, ortogonais, definidos a partir do transporte paralelo de um referencial geodésico em p a longo de γ sendo $\{E_1(0), \ldots, E_{n-1}(0), \dot{\gamma}(0)\}$ é uma base de $T_{\gamma(0)}M$.

Definimos os campos de vectores $\{X_i(t)\}_{i=1}^{n-1}$ ao longo de γ por

$$X_i(t) = \frac{t}{\rho(q)} E_i(t), \quad i = 2 \ldots n-1.$$

Considerando a base $\{X_1(t), \ldots, X_{n-1}(t), X_n(t) = \dot{\gamma}(t)\}$ de $T_{\gamma(t)}M$ e usando que os E_i são paralelos, temos

$$\begin{aligned} \Delta\rho(q) &= \text{traço}(\text{Hess}\rho) \\ &= \sum_{i=1}^{n} X_i^2(\rho) - \nabla_{X_i} X_i(\rho), \end{aligned}$$

usando a primeira variação do comprimento de arco do Teorema 1.6

$$\nabla_{X_i} X_i \rho = \langle \nabla_{X_i} X_i, \dot{\gamma} \rangle |_{t=0}^{t=\rho(q)}$$

e pela segunda variação do comprimento Teorema 1.7 ,

$$X_i^2 \rho = \int_0^{\rho(q)} (|(\nabla_{\dot{\gamma}} X_i)^{\perp}|^2 - \langle R(X_i, \dot{\gamma})\dot{\gamma}, X_i \rangle) dt + \langle \nabla_{X_i} X_i, \dot{\gamma} \rangle |_{t=0}^{t=\rho(q)},$$

logo

$$X_i^2 \rho \leq \int_0^{\rho(q)} (|\nabla_{\dot{\gamma}} X_i|^2 - \langle R(X_i, \dot{\gamma})\dot{\gamma}, X_i \rangle) dt,$$

daí

$$\begin{aligned} \Delta\rho(q) &\leq \int_0^{\rho(q)} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \left(|\nabla_{\dot{\gamma}} X_i|^2 - \langle R(X_i, \dot{\gamma})\dot{\gamma}, X_i \rangle \right) \right) dt \\ &= \int_0^{\rho(q)} \Big(\frac{n-1}{\rho^2(q)} - \frac{t^2}{\rho^2(q)} Ric(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) \Big) dt \\ &\leq \frac{n-1}{\rho(q)} + \int_0^{\rho(q)} \frac{t^2}{\rho^2(q)} \text{Hess}(\phi)(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) dt \\ &= \frac{n-1}{\rho(q)} + \frac{1}{\rho^2(q)} \int_0^{\rho(q)} t^2 \frac{d^2}{dt^2} (\phi \circ \gamma) dt \\ &= \frac{n-1}{\rho(q)} + \frac{d}{dt}(\phi \circ \gamma)(q) - \frac{2}{\rho^2(q)} \int_0^{\rho(q)} t \frac{d}{dt} (\phi \circ \gamma) dt \\ &= \frac{n-1}{\rho(p)} + \langle \nabla\phi, \dot{\gamma} \rangle(q) - \frac{2}{\rho(q)} \phi(q) + \frac{1}{\rho^2(q)} \int_0^{\rho(q)} \phi \circ \gamma dt, \end{aligned}$$

logo para $L = \Delta - \nabla\phi \cdot \nabla$

$$\begin{aligned} L\rho(q) &= \Delta\rho(q) - \langle \nabla\phi, \dot{\gamma} \rangle(q) \\ &\leq \frac{n-1}{\rho(q)} - \frac{2}{\rho(q)}\phi(q) + \frac{1}{\rho^2(q)} \int_0^{\rho(q)} \phi \circ \gamma \; dt \text{ para todo } q \in M \setminus cut(p) \end{aligned}$$

onde γ é uma geodésica normal minimal ligando p a q. □

4.2 Teorema de Cheeger-Gromoll generalizado

Finalmente passamos a demonstrar o principal teorema desta seção.

Lema 4.1. *Sejam M uma variedade Riemanniana, $\gamma : [0, \infty) \longrightarrow M$ um raio em M e $q \in M$ fixo. Se δ_m é a geodésica minimizante ligando q a $\gamma(t_m)$ com vetor inicial unitário $\dot{\delta}_m(0)$, então existe uma sequência t_k tal que $\dot{\delta}_k(0)$ converge a $X \in T_qM$ e a geodésica δ tal que $\dot{\delta}(0) = X$ é um raio.*

Demonstração. Seja $q \in M$ fixo. Então $\dot{\delta}_m(0)$ é uma sequência de pontos na esfera unitária $S^{n-1} \subset T_qM$, logo pela compacidade de S^{n-1} existe um ponto de acumulação $X \in S^{n-1}$, portanto existe uma subsequência $\{t_k\} \subset \{t_m\}$ tal que $\dot{\delta}_k(0)$ converge ao vetor X. Seja $\delta : [0, \infty) \longrightarrow M$ a geodésica definida por

$$\delta(s) = exp_q(sX).$$

Então $\dot{\delta}(0) = X$ e para um s_0 fixado

$$\lim_{k \to \infty} \delta_k(s_0) = \delta(s_0),$$

e como a função distância é continua

$$\lim_{k \to \infty} d(q, \delta_k(s_0)) = d(q, \delta(s_0)),$$

mas para k suficientemente grande $d(q, \delta_k(s_0)) = s_0$, logo

$$d(q, \delta(s_0)) = s_0,$$

portanto δ é um raio. □

Lema 4.2. *Seja M uma variedade Riemanniana completa e seja γ um raio. Se $Ric + \mathrm{Hess}(\phi) \geq 0$ para alguma função suave ϕ uniformemente limitada em M então as funções de Busemann associadas a γ que chamamos b^γ satisfazem*

$$Lb^\gamma \geq 0,$$

no sentido de barreira.

Demonstração. Sejam $p = \gamma(0)$ e b^γ a função de Busemann ao longo do raio γ. então para $q \in M$ seja δ a geodésica saindo de q gerada por X. Pelo Lema 4.1 temos que δ é um raio, logo q não pertence ao cut-locus de $\delta(r)$ para todo $r > 0$. Então

$$f_r^\gamma(q)(x) = r - d(x, \delta(r)) + b^\gamma(q),$$

é de classe C^∞ numa vizinhança U ao redor de q. Seja $x \in U$, então pela desigualdade triangular

$$d(x, \delta(r)) \leq d(x, q) + d(q, \delta(r)) = d(x, q) + r,$$

logo $-d(x, q) \leq r - d(x, \delta(r))$. De forma análoga $r - d(x, \delta(r)) \leq d(q, r)$ daí

$$0 \leq r - d(x, \delta(r)),$$

portanto f_r^γ satisfaz que $f_r^\gamma \leq b^\gamma$ com $f_r^\gamma(q) = b^\gamma(q)$. Além disso pelo Teorema 4.1 temos

$$\begin{aligned} Lf_r^\gamma(x) &= -Ld(\delta(r), x) \\ &\geq \frac{n-1}{d(\delta(r), x)} - \frac{2\phi(x)}{d(\delta(r), x)} + \frac{2}{d(\delta(r), x)^2} \int_0^{d(\delta(r), x)} \phi \circ \sigma dt \end{aligned}$$

onde σ é uma geodésica minimal ligando $\delta(r)$ e x. Asim para todo $\epsilon > 0$, com r suficientemente grande, $Lf_r^\gamma(x) \geq -\epsilon$ para x numa vizinhança de q. Logo f_r^γ é uma função suporte para b^γ. □

Lema 4.3. *Seja M uma variedade diferenciável completa e conexa. Se $Ric + \mathrm{Hess}(\phi) \geq 0$ para alguma função suave ϕ limitada em M. Suponha que M contem uma linha γ. Então as funções de Buseman b^+ e b^- associadas aos raios $\gamma^+(t) = \gamma(t)$ e $\gamma^+(t) = \gamma(-t)$, $t \leq 0$, são ambas suaves e satisfazem $Lb^+ = Lb^- = 0$.*

Demonstração. Pelo lema 4.2, $L(b^+ + b^-) \geq 0$ no sentido de barreira. Seja $x \in M$. Pela desigualdade triangular

$$2t = d(\gamma(t), \gamma(-t)) \leq d(\gamma(t), x) + d(x, \gamma(-t)).$$

Logo

$$t - d(\gamma(t), x) + t - d(x, \gamma(-t)) \leq 0,$$

segue daí que $b^+ + b^- \leq 0$ em M. Do outro lado, $(b^+ + b^-)(\gamma(0)) = 0$, então pelo Teorema 2.3

$$b^+ + b^- \equiv 0 \text{ sobre } M.$$

Como $Lb^+ \geq 0$ e $Lb^- \geq 0$ então

$$0 \leq Lb^+ = -Lb^- \leq 0,$$

mostra que $L(b^+) = L(b^-) = 0$ no sentido de barreira. Logo pela Proposição 2.4 b^+ e b^- são suaves. □

Lema 4.4. *Seja M uma variedade diferenciável completa e conexa. Seja*

$$Ric + \text{Hess}(\phi) \geq 0$$

para alguma função suave ϕ a qual é limitada em M. Suponha que M contem uma linha γ. Então $|\nabla b^+| = 1$ e ∇b^+ é um campo de vetores paralelo.

Demonstração. Como b^+ é de Lipschitz com constante igual a 1 então ∇b^+ satisfaz

$$|\nabla b^+|^2 \leq 1,$$

logo a função $H : M \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$H(x) = |\nabla b^+(x)|^2 - 1,$$

satisfaz que $H(x) \leq 0$. Além disso

$$\begin{aligned}
(b^+ \circ \gamma)(t) &= \lim_{r\to\infty} r - d(\gamma(t), \gamma(r)) \\
&= \lim_{r\to\infty} r - d(\gamma(0), \gamma(r)) + d(\gamma(0), \gamma(r)) - d(\gamma(t), \gamma(r)) \\
&= \lim_{r\to\infty} r - d(\gamma(0), \gamma(r)) + t \\
&= (b^+ \circ \gamma)(0) + t,
\end{aligned}$$

então

$$\frac{d}{ds}(b^+ \circ \gamma)(s) \;\; = \;\; 1,$$

portanto $\langle \nabla b^+, \dot{\gamma}(s) \rangle = 1$ e pela desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$1 = |\langle \nabla b^+, \dot{\gamma}(s) \rangle| \leq |\nabla b^+||\dot{\gamma}(s)| \leq 1.$$

Logo $|\nabla b^+ \circ \gamma(s)| = 1$ e $\nabla b^+(q) = \dot{\gamma}(s)$, daí $H(\gamma(s)) = 0$.

Por outro lado, da definição de H,

$$LH = L|\nabla b^+|^2.$$

Assim usando a fórmula generalizada de Bochner-Weitzenböck (Proposição 2.2)

$$L|\nabla f|^2 = 2|\mathrm{Hess}(f)|^2 + 2\langle \nabla Lf, \nabla f \rangle + 2\big(Ric + \mathrm{Hess}(\phi)\big)(\nabla f, \nabla f),$$

para $f = b^+$, temos que

$$\begin{aligned} LH &= 2|\mathrm{Hess}(b^+)|^2 + 2\langle \nabla Lb^+, \nabla b^+ \rangle + 2\big(Ric + \mathrm{Hess}(\phi)\big)(\nabla b^+, \nabla b^+) \\ &\geq 2|\mathrm{Hess}(b^+)|^2 \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

isto último como resultado da desigualade $Ric + \mathrm{Hess}(\phi) \geq 0$. Então $H(x) \leq 0$, $LH \geq 0$ e $H(\gamma(s)) = 0$, logo pelo Principio do Máximo $H \equiv 0$, ou equivalentemente $|\nabla b^+|^2 = 1$.

Falta mostrar que o campo vetorial ∇b^+ é paralelo. Aplicando a fórmula generalizada de Bochner-Weitzenböck para $f = b^+$, pelo lema 4.3 e usando que $Ric + \mathrm{Hess}(\phi) \geq 0$ temos

$$L|\nabla b^+|^2 \geq 2|\mathrm{Hess}(b^+)|^2 \geq 0.$$

Como $|\nabla b^+|^2 = 1$ então $\mathrm{Hess}(b^+) = 0$, logo $\nabla_X(\nabla b^+) = 0$ para todo $X \in \mathcal{X}(M)$, portanto ∇b^+ é paralelo.

□

Lema 4.5. *Seja M uma variedade diferenciável completa e conexa. Seja $Ric + \mathrm{Hess}(\phi) \geq 0$ para alguma função suave ϕ limitada em M. Suponha que M contém uma linha γ, e seja $N = \{x \in M; b^+(x) = 0\}$ onde b^+ é a função de Buseman associada a γ. Então para todo ponto $p \in M$ existe uma única linha δ perpendicular a N passando por p.*

Demonstração. Seja $p \in M$. Pelo lema 4.1 existem pelo menos dois raios diferentes δ_1 e δ_2 partindo de p construídos a partir de γ. Sejam $b_1^{\pm}$ e $b_2^{\pm}$ as respectivas funções de Buseman, então

$$\begin{aligned}(b_1^+ \circ \delta_1)(t) &= \lim_{r\to\infty} r - d(\delta_1(t), \delta_1(t)) \\ &= \lim_{r\to\infty} r - d(\delta_1(0), \delta_1(r)) + d(\delta_1(0), \delta_1((r)) - d(\delta_1(t), \delta_1(r)) \\ &= \lim_{r\to\infty} r - d(\delta_1(0), \delta_1(r)) + t \\ &= (b_1^+ \circ \delta_1)(0) + t,\end{aligned}$$

analogamente $(b_2^- \circ \delta_2)(s) = (b_2^- \circ \delta_2)(0) + s$.

Agora, pela desigualdade triangular

$$d(\delta_2(s), \delta_1(t)) + d(\delta_1(t), \delta_1(r)) \geq d(\delta_2(s), \delta_1(r)).$$

Então

$$\begin{aligned}d(\delta_2(s), \delta_1(t)) &\geq (b_1^+ \circ \delta_1)(t) - (b_1^+ \circ \delta_2)(s) \\ &\geq (b_1^+ \circ \delta_1)(t) + (b_2^- \circ \delta_2)(s) \\ &= (b_1^+ \circ \delta_1)(0) + t + (b_2^- \circ \delta_2)(0) + s \\ &= t + s + b_1^+(p) + b_2^-(p) \\ &= t + s.\end{aligned}$$

Assim $d(\delta_2(s), \delta_1(t)) \geq t + s$. Pela desigualdade triangular $d(\delta_2(s), \delta_1(t)) \leq t + s$, logo

$$d(\delta_2(s), \delta_1(t)) = t + s.$$

O que implica que δ_1 e δ_2 são dois raios de uma mesma linha δ, logo estes raios são únicos.

Para finalizar a demonstração seja $y \in N$

$$\begin{aligned}d(y, \delta_1(t)) &\geq (b_1^+ \circ \delta_1)(t) - b_1^+ y(y) \\ &= (b_1^+ \circ \delta_1)(0) + t - b_1^+ y(y) \\ &= t,\end{aligned}$$

logo δ_1 realiza a mínima distância entre p e N, portanto é perpendicular a N. □

Teorema 4.2. *Seja M uma variedade Riemanniana completa de dimensão n com $Ric + \mathrm{Hess}(\phi) \geq 0$ para alguma função ϕ suave a qual é limitada em M. Se M possui uma linha, então M decompõe-se isometricamente como $N \times \mathbb{R}$, onde $N = \{x \in M; b^+(x) = 0\}$. Mais ainda a função ϕ é constante no conjunto $\mathbb{R}$ da decomposição.*

Demonstração. Pelo Lema 4.4, $X = \nabla b^+$ é um campo de vetores unitário e paralelo. O cunjunto $N = \{x \in M; b^+(x) = 0\}$ é uma subvariedade de M e se α é uma curva diferenciável em N, $(b^+ \circ \alpha)(t) = 0$, logo

$$\frac{d}{dt}(b^+ \circ \alpha)(t) = \langle \nabla b^+, \dot{\alpha} \rangle = 0.$$

o que implica que $\dot{\alpha} \perp X$.

Para $p \in N$, $\widetilde{Y} \in \mathcal{X}(N)$ e $Y \in \mathcal{X}(M)$ uma extensão de Y, $Y \perp X$

$$\begin{aligned} \langle \widetilde{\nabla}_{\widetilde{Y}} \widetilde{Y} - \nabla_Y Y, X \rangle_M &= \langle \widetilde{\nabla}_{\widetilde{Y}} \widetilde{Y}, X \rangle_M - \langle \nabla_Y Y, X \rangle_M \\ &= \langle \widetilde{\nabla}_{\widetilde{Y}} \widetilde{Y}, X \rangle_M - Y \langle Y, X \rangle_M + \langle Y, \nabla_Y X \rangle_M, \end{aligned}$$

como $\widetilde{\nabla}_{\widetilde{Y}} \widetilde{Y} \in T_p N \perp X$ e X é paralelo

$$\langle \widetilde{\nabla}_{\widetilde{Y}} \widetilde{Y} - \nabla_Y Y, X \rangle_M = 0,$$

então N é totalmente geodésica.

Escolhendo uma orientação para M, considermos $F : N \times \mathbb{R} \longrightarrow M$ definida por,

$$F(x, t) = \exp_x(t\dot{\delta}(0)),$$

onde δ é a única geodésica perpendicular a N que passa por $\delta(0) = x \in N$. Mostraremos que F é uma isometria entre $N \times \mathbb{R}$ e M.

Para ver a sobrejetividade de F, seja $p \in M$. Pelo Lema 4.5 existe uma única linha δ perpendicular a N com $\delta(0) = q \in N$ passando por p. Logo $p = F(q, t_0)$ para algum t_0, então F é sobrejetiva.

Do outro lado se $F(x_1, t_1) = F(x_2, t_2) = p$, então $t_1 = t_2 = d(p, N)$ e pela unicidade da linha perpendicular a N passando por p temos que $x_1 = x_2$. Como δ é uma linha e exp_p é um difeomorfismo local, então F é um difeomorfismo.

Falta mostrar que a função F é uma isometria entre N e o conjunto $\{x \in M; b^+(x) = t\}$. De fato se $q \in N$, $v = \frac{\partial}{\partial t}$ e $w \in T_qM$ pelo Lema de Gauss

$$\begin{aligned}\langle dF_{(t,x)}(v), dF_{(t,x)}(w)\rangle &= \langle (d\exp_x)_v(v), (d\exp_x)_v(w)\rangle \\ &= \langle v, w\rangle.\end{aligned}$$

Agora se $u, v \in T_qN$, seja $h(t) = \langle dF_{(t,x)}(u), dF_{(t,x)}(v))\rangle$, então

$$\begin{aligned}h'(t) &= X\langle dF_{(t,x)}(u), dF_{(t,x)}(v))\rangle \\ &= \langle \nabla_X dF_{(t,x)}(u), dF_{(t,x)}(v))\rangle + \langle dF_{(t,x)}(u), \nabla_X dF_{(t,x)}(v))\rangle.\end{aligned}$$

Pelo Lema de Simetria e usando o fato de X ser paralelo

$$\begin{aligned}h'(t) &= \langle \nabla_{dF_{(t,x)}(u)} X, dF_{(t,x)}(v))\rangle + \langle dF_{(t,x)}(u), \nabla_{dF_{(t,x)}(v))} X\rangle \\ &= 0,\end{aligned}$$

logo h é constante e $h(t) = h(0) = \langle dF_{(0,x)}(u), dF_{(0,x)}(v))\rangle = \langle u, v\rangle$. Segue então que F é uma isometria.

Agora identificando M com a variedade produto $N \times \mathbb{R}$ e aplicando a fórmula generalizada de Bochner-Weitzenböck em $f = b^+$ temos

$$0 = L|\nabla b^+|^2 = 2(Ric + \mathrm{Hess}(\phi))(\nabla b^+, \nabla b^+) = 2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi.$$

Daí ϕ é linear em cada linha de M. Como ϕ é limitada superiormente, então deve ser constante em cada linha. Isto prova o teorema.

□

Corolário 4.1. *Seja M uma variedade Riemanniana completa de dimensão n com $Ric + \mathrm{Hess}(\phi) \geq 0$ para alguma função $\phi \in C^2(M)$ a qual é limitada em M. Então M decompõe-se isometricamente como $N \times \mathbb{R}^l$, onde N é uma variedade Riemanniana Completa sem linhas. Mais ainda a função ϕ é constante no conjunto $\mathbb{R}^l$ da decomposição.*

Demonstração. Se M possui uma linha, pelo teorema 4.2 $M = N_1 \times \mathbb{R}$ e

$$(Ric + \mathrm{Hess}(\phi))(\nabla b^+, \nabla b^+) = 0,$$

agora, para todo $p \in M$, conseguimos uma base de T_pM, $\{E_1, \ldots, E_{n-1}, \nabla b^+\}$ tal que

$$(Ric + \mathrm{Hess}(\phi))(\nabla b^+, E_i) = 0.$$

Como $\nabla b^+ \phi = 0$

$$Ric_N + \mathrm{Hess}_N(\phi) = Ric_M + \mathrm{Hess}_M(\phi) \geq 0.$$

Então se N possuir mais uma linha, o teorema anterior pode ser aplicado de novo e o resultado segue por indução. □

Bibliografia

[1] Gromoll D. Cheeger J. Splitting theorem for manifolds of nonnegative ricci curvature. *J. Differential Geometry*, vol 30:119–128, 1971.

[2] Neil S. Trudinger David Gilbarg. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Springer-verlag, 175 fifth avenue, New York, 2001. 1 edição.

[3] M.P. Do Carmo. *Geometria Riemanniana*. Projeto Euclides, Rio de Janeiro, 2008. 4 edição.

[4] Zhenlei Zhang Fuquan Fang, Xiang-Dong Li. Two generalizations of cheeger-gromoll splitting theorem via bakry-Émery ricci curvature. *arXiv:0707.0526*.

[5] Gang John W. Morgan. Ricci flow and the poincaré conjecture. *arXiv:math/0607607v2*.

[6] Jürgen Jost. *Riemannian Geometry and Geometric Analysis*. Springer-verlag, Berlin Heidelberg, 2008. 5 edição.

[7] Michel Ledoux. The geometry of markov diffusion generators. *Annales de la faculté des sciences de Toulouse*, vol 9:305–366, 2000.

[8] John M. Lee. *Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature*. Springer-verlag, 175 fifth avenue, New York, 1997. 1 edição.

[9] John M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*. Springer-verlag, 175 fifth avenue, New York, 2000. 1 edição.

[10] M. Limoncu. Modifications to ricci tensor ans aplications. *Springer Basel*, vol 95:191–199, 2010.

[11] Hans F. Weinberger Murray H. Protter. *Maximum Principles in Differential Equations.* Springer-verlag, 175 fifth avenue, New York, 1967. 1 edição.

[12] W. Martin S. Bochner. *Several Complex Variables.* Princeton University Press, Berlin Heidelberg, 1948. 1 edição.

[13] Shun-Hui Zhu. The comparison geometry of ricci curvature. *MSRI Publications*, vol 30:239–242, 1997.