

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Dissertação de Mestrado

Método dos Volumes Finitos para Leis de Conservação

Autor: Wanderson José Lambert

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Martins dos Santos

Co-Orientador: Prof. Dr. Petrônio Pulino

26 de junho de 2002

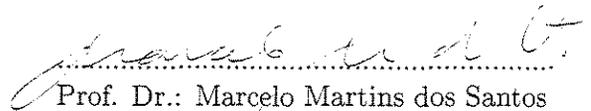
UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL



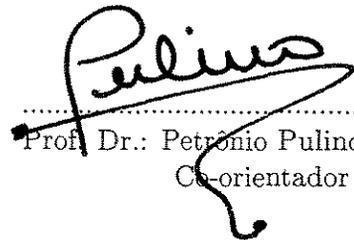
Método dos Volumes Finitos para Leis de Conservação

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por Wanderson José Lambert e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 26 de junho de 2002



Prof. Dr.: Marcelo Martins dos Santos
Orientador



Prof. Dr.: Petronio Pulino
Co-orientador

Banca Examinadora

- 1 Marcelo Martins dos Santos
- 2 Philippe Remy Bernard Devloo
- 3 Milton da Costa Lopes

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de MESTRE em Matemática.

00245712

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Lambert, Wanderson José

~~Wanderson José~~

Método dos volumes finitos para leis de conservação / Wanderson José
Lambert -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2002.

L176m

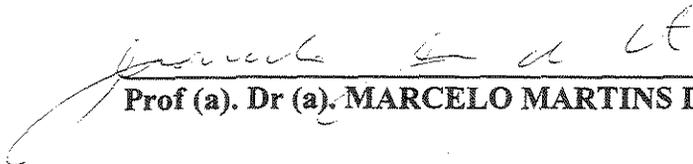
Orientador : Marcelo Martins dos Santos

Co-orientador: Petrônio Pulino

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Análise numérica. 2. Equações diferenciais parciais. 3. Leis de conservação (Física). 4. Dinâmica de fluidos. I. Santos, Marcelo Martins dos. II. Pulino, Petrônio. III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. IV. Título.

**Dissertação de Mestrado defendida em 26 de junho de 2002 e aprovada pela Banca
Examinadora composta pelos Profs. Drs.**



Prof (a). Dr (a). MARCELO MARTINS DOS SANTOS



Prof (a). Dr (a). MILTON DA COSTA LOPES FILHO



Prof (a). Dr (a). PHILIPPE REMY BERNARD DEVLOO

- “Quando tu nasceste todos em tua volta riam, só tu choravas; faças por viver de forma que quando tu morreres todos em tua volta chorem, só tu rias.” *Provérbio Chinês*
- “Projetistas fazem canais, arqueiros airam flechas, artífices modelam a madeira e o barro, o homem sábio modela-se a si mesmo”. *Buda*
- “A alegria está na luta, na tentativa, no sofrimento envolvido, não na vitória propriamente dita.” *Gandhi*
- “Há homens que lutam um dia e são bons; Há outros que lutam um ano e são melhores; Há os que lutam muitos anos e são muito bons; Mas há os que lutam toda a vida e estes são imprescindíveis”. *Bertold Brecht*
 - “Se você rouba idéias de um autor, é plágio. Se você rouba de muitos autores, é pesquisa.” *Wilson Mizner (1876-1933)*
 - “O sentido da vida consiste em que não tem nenhum sentido dizer que a vida não tem sentido”. *Niels Bohr (1885-1962)*
- “De tudo ficam três coisas: A certeza de que estamos começando, a certeza de que é preciso continuar e a certeza de que podemos ser interrompidos antes de terminar. Fazer da interrupção um caminho novo, fazer da queda um passo de dança, do medo uma escola, do sonho uma ponte, da procura um encontro, e, assim, terá valido a pena existir!” (Fernando Sabino)
 - “Talvez não tenhamos conseguido fazer o melhor, mas lutamos para que o melhor fosse feito... Não somos o que deveríamos ser, não somos o que iremos ser. Mas, graças a Deus, não somos o que éramos” (Martin Luther King)
 - “Nosso tempo está marcado pelas maravilhosas conquistas nos campos do entendimento e das aplicações técnicas dessas descobertas. Quem não se regozijaria com isso? Mas não nos esqueçamos de que não são apenas o conhecimento e as habilidades que conseguem levar a humanidade a uma vida feliz e digna. A humanidade tem toda a razão em colocar os proclamadores dos altos valores e padrões morais acima dos descobridores de verdades objetivas.” (Albert Einstein)
 - “Escolha um trabalho que você ame e não terá de trabalhar um único dia em sua vida.” (Confúcio)
- “As pessoas que vencem neste mundo são as que procuram as circunstâncias de que precisam e, quando não as encontram, as criam.” (Bernard Shaw)
 - “Faça o que pode, com o que tem, onde estiver.” (Roosevelt)
 - “Se queres ser feliz amanhã, tente hoje mesmo” (Lao Tsé)”.
- “A liberdade não tem qualquer valor se não inclui a liberdade de errar.” (Mahatma Gandhi)
- “Para todo problema complexo existe uma solução clara, simples e errada”. (George Bernard Shaw)
 - “O mais importante na comunicação é ouvir o que não foi dito.” (Peter F. Drucker)
 - “Quanto mais aumenta nosso conhecimento, mais evidente fica nossa ignorância.” (John Kennedy)
- “Há duas formas para viver sua vida. Uma é acreditar que não existe milagre. A outra é acreditar, que todas as coisas são um milagre.” (Albert Einstein)
 - “Para ser forte, você só terá de ser como a água. Porque é suave e flexível, é a mais necessária e forte de todas as coisas.” (Lao-Tsé)

Agradecimentos

- A Deus que, em silêncio, esconde os grandes mistérios da natureza em pequenos gestos.
- Ao Povo de São Paulo que, despercebidamente, vêm me apoiando todos estes anos na Unicamp. Desde o mais simples cidadão ao mais ilustre, devoto meus mais sinceros agradecimentos.
- Ao Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica, da Unicamp, pelos 6 anos de estudos.
- Aos meus orientadores: Marcelo Santos, pelos bons conselhos, orientação, paciência; e ao Petrônio Pulino que desde minha graduação vem tendo paciência e me indicando bons caminhos a seguir.
- Aos meus familiares que me ajudaram muito nestes 6 anos em Campinas;
- Aos meus novos amigos que adquiere no curso.
- Ao Paulo e Geraldo (Passarinho) dois grandes amigos que vieram de Minas, para fazer mestrado em Mecânica.
- À minhas amigas que sempre dividiram seu tempo comigo.
- E, como não poderia deixar de ser, aos meus antigos amigos que sempre me influenciaram na vida, e que juntos fomos capazes de fundarmos uma associação para ajudarmos ao próximo.
- À Catherine por todas as horas juntos e separados.
- À Milene por todo carinho, amizade e cumplicidade; pelo amor e paciência; por tudo que temos aprendido juntos.
- E, finalmente e sem ao qual não poderia ter chegado até aqui, Fapesp - Fundo de Amparo a Pesquisa de São Paulo, por todo o apoio e confiança recebidos. Que eu espero que continue sempre dando seu enorme apoio novas gerações de cientistas.

A minha mãe que sempre teve a coragem
de olhar pra frente mesmo quando tudo
parecia difícil .

Conteúdo

Resumo	v
Abstract	vi
Apresentação dos capítulos	vii
Introdução	ix
1 Aspectos Iniciais	1
1.1 Preliminares Teóricos	1
1.2 Lei de Conservação	9
1.3 Preliminares Numéricos	13
1.3.1 Convergência, Estabilidade e Consistência	17
2 Medidas de Young e Soluções em Medida	21
2.1 Convergência Fraca-Estrela	23
2.2 Medidas de Young	24
2.3 Soluções de Valores em Medida de Leis de Conservação Escalares com Condições de Fronteira	25
3 Método dos Volumes Finitos n-Dimensional	29
3.1 Estimativas Discretas para as Desigualdades de Entropia	32
3.1.1 Convergência do Método dos Volumes Finitos: Soluções em Medidas	50
3.2 Fluxos Numéricos	54
3.2.1 Volumes Finitos: Direction Splitting	55
3.2.2 Volumes Finitos: Sem Splitting	57
4 Simulações	59
4.1 Introdução	59
4.2 Volumes Finitos Unidimensionais	67
4.3 Método dos Volumes Finitos Bidimensional	81
4.4 Esquema de Volumes Finitos de Ordem mais Alta	98
4.5 Considerações Finais	99

Resumo

Neste trabalho, estudamos a convergência do Método dos Volumes Finitos aplicado a Leis de Conservação Escalares Multidimensional, seguindo os trabalhos de Cockburn et al. [7] e Benharbit et. al [3]. Tratamos aqui, o Problema de Valor Inicial e de Fronteira (PVIF).

O Método dos Volumes Finitos é aplicado a diversos problemas, principalmente em dinâmica de fluidos, desde os anos 50, mas somente nos últimos 15 anos que foi melhorado. A grande vantagem deste método é que ele trata bem geometrias complexas e choques, comuns em Leis de Conservação.

A convergência segue da unicidade da Solução em Medida (MV-Solution) para uma Lei de Conservação, Szepessy [59]. Compacidade Compensada, Soluções em Medida e Medidas de Young para Leis de Conservação apareceram primeiramente nos trabalhos de Murat [46]-[47], Tartar [62]-[63] and Diperna [15]-[17], para Problemas de Valor Inicial e para Sistemas de Leis de Conservação 2×2 ; e, depois disso, para um PVIF por Szepessy [59]. Seguindo estes artigos, Cockburn et al. and Benharbit et. al obtiveram, independentemente, a convergência forte para do esquema para a única solução entrópica descontínua no sentido de Bardos [2].

Abstract

In this report, we study the convergence of the Finite Volume Method applied to multidimensional Scalar Conservation Laws, follows from Cockburn et. al [7] and Benharbit et. al [3]. It is treated the Initial and Boundary Value Problem (IBVP).

Finite Volume Method is applied to several problems, mainly in fluid dynamical, since 50's years, but only in the last 15 years that has been improved. The great advantage this method is that is applied for complexes geometries and for shocks, commons in Conservation Laws.

The convergence follows from Szepessy's [59] uniqueness result in the class of the entropy measure-valued solution. Compensated Compactness, MV-Solution and Measure Young for Conservation Laws has been appeared from Murat [46]-[47], Tartar [62]-[63] and Diperna's works [15]-[17], for Initial Value Problem (IVP) and 2×2 Hyperbolic Systems of Conservation Laws; and, thereafter, for (BIVP) by Szepessy [59]. In follows these articles , Cockburn et al. and Benharbit et. al obtain, independently, the strong convergence of the scheme to the unique entropy discontinuous solution in the sense the Bardos [2].

Apresentação dos Capítulos

Neste trabalho estudamos o método dos volumes finitos aplicados a leis de conservação. Este é um método largamente usado hoje na simulação numérica de fluidos. Talvez uma de suas melhores características é que ele é aplicável a domínios gerais (para distinguir os domínios de diferenças finitas que serão os domínios que podem ser levados a um retângulo por alguma transformação de coordenadas, de domínios que não gozem da mesma propriedade, chamaremos o primeiro de **Domínio Euclidiano** e o segundo de **Domínio Não-Euclidiano**). Outra vantagem é que ele é um método explícito. Extremamente elegante, a teoria envolvida na demonstração da convergência deste método é uma ferramenta muito poderosa da análise numérica.

No primeiro capítulo, trataremos os preliminares teóricos e numéricos envolvidos no trabalho; tanto dos de leis de conservação quanto nos da formulação do método dos volumes finitos. Por ventura, algumas definições serão dadas no decorrer da dissertação quando forem do “escopo” da ocasião em que forem usadas. Também será feita uma coletânea de alguns teoremas que serão usados posteriormente. Conforme advertência do primeiro capítulo, nenhuma demonstração será feita destas afirmações, pois temos a intenção de trazer o máximo de informação possível mas que não sejamos demasiadamente longos e, também, porque eles já são de conhecimento de grande parte da comunidade científica. O nosso interesse em trazê-los aqui é de tornar a dissertação o mais acessível e clara possíveis.

No segundo capítulo, será feita uma breve descrição do método da compacidade compensada, de medidas de Young e Soluções em Medida. Como referências mais profundas para o estudo, indicamos os trabalhos de Murat [46]-[47], Tartar [62]-[63], Dacorogna [13], DiPerna [17] e Szepessy [59].

Trataremos os principais teoremas envolvidos na teoria e os particularmente relevantes à demonstração da convergência do método dos volumes finitos. Também, não faremos nenhuma demonstração das afirmações feitas neste capítulo, as demonstrações podem ser encontradas nas referências indicadas, que estão no final do trabalho.

No terceiro capítulo, será feita a demonstração da convergência do método dos volumes finitos para equações escalares de leis de conservação multidimensional. Neste capítulo, daremos a formulação matemática do método. Estudaremos mais profundamente o trabalho de Cockburn, Coquel e Lefloch [7] com algumas modificações. Iremos nos utilizar das estimativas feitas neste artigo e de algumas feitas no trabalho [3]. Vamos supor que o dado inicial é de variação limitada e que o dado de fronteira é suave. O domínio será poligonal (na realidade a aplicação do Teorema

13 de Szepessy exige apenas que a fronteira seja Lipschitziana, v. Capítulo 2, Seção 2.3). Estas modificações nos possibilitarão aplicar o teorema de Szepessy [59] e Capítulo 2, Teor. 13 que é uma versão da solução em medida para domínios com condições de fronteira. No trabalho de Szepessy, ele utiliza a solução de Bardos [2], e mostra que sujeita a estas condições, a seqüência aproximante sendo limitada em L^∞ o problema possui solução entrópica única no sentido de Bardos. Computacionalmente tais modificações não trazem grandes conseqüências, pois em geral vamos tomar dados iniciais e de fronteira satisfazendo as condições acima. Utilizaremos a teoria inicialmente introduzida nos Capítulos 1 e 2.

No quarto capítulo, apresentaremos o método dos volumes finitos em dimensão 1 e dimensão 2, apresentando gráficos e simulações numéricas dos esquemas implementados. Faremos vários experimentos para ilustrar o método e verificações da estabilidade condicional do método (ou seja, que sob certas relações entre o tamanho da malha e o passo temporal o método pode apresentar oscilações). Faremos algumas comparações com outros métodos de ordem 1. Também são feitas algumas observações de alguns métodos de ordem mais alta aplicados às leis de conservação.

Não traremos os programas implementados utilizados para a simulação numérica para que não tornemos este trabalho muito longo; para uma melhor referência indicamos [38].

Introdução

Nas mais diversas áreas tecnológicas, as leis de conservação têm um papel importante na simulação de fenômenos físicos. Uma lei de conservação escalar multidimensional é uma equação do seguinte tipo:

$$\partial_t u + \nabla \cdot f(u) = 0, \quad u(x, t) \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d \quad (1)$$

no qual $f = (f_1, f_2, \dots, f_d)$ é um campo em \mathbb{R}^d . Neste trabalho suporemos f de classe $C^2(\Omega)$. À lei de Conservação damos a condição inicial

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega \quad (2)$$

e uma condição de fronteira $u_1(x, t)$ a ser satisfeita num sentido apropriado (v.(8) abaixo).

Com o advento dos computadores, os métodos numéricos ganharam um papel fundamental nos estudos desse tipo de equação. Vários métodos para a resolução de (1)-(2) surgiram.

Inicialmente, Courant-Friedrichs e Lewy [11] (traduzido para o inglês [12]) propuseram um método de resolução numérica para a lei de conservação baseado em diferenças finitas (ver por exemplo [33], [38]). O método inicialmente proposto por eles era condicionalmente estável, de forma que que este, sob certas condições, poderia produzir oscilações espúrias. Uma outra dificuldade que o método possuía era que a convergência era apenas de ordem 1 (ver preliminares). Posteriormente muitas outras melhorias em diferenças finitas foram surgindo, um exemplo famoso, é o método de Lax-Wendroff [72] com “Flux Limiters”; os “Flux Limiters” tiveram sua aparição primeiramente no trabalho de Sweby [57].

Um outro exemplo, é encontrado em Tadmor [49]. Em vários de seus trabalhos ele propõe novas técnicas de resolução numérica de uma lei de conservação. Em um trabalho pioneiro [49], ele introduz uma técnica de aproximação diferente para a solução, utilizando-se não apenas da média pontual, mas também de uma relação entre as derivadas, este tipo de aproximação fornecia uma convergência de ordem 2. Posteriormente, em trabalhos mais recentes com a ajuda de Kurganov [37] e de Xu-Dong Liu [42], ele utilizou-se das mesmas idéias anteriores do trabalho [49] para melhorar a convergência, conseguindo convergências de ordem 3 em [42] e obtendo uma relação formal próxima entre uma lei de conservação e uma equação do tipo difusão convecção [37].

Outros autores também desenvolveram métodos interessantes. Em 1989, Engquist [21] introduziu uma série de algoritmos para filtrar as oscilações espúrias de métodos de convergência mais altas do que 1. Entretanto, a grande dificuldade enfrentada nestes tipos de métodos é que apesar de eles trabalharem bem numericamente, é extremamente complicada a demonstração da convergência para a solução entrópica; muitas vezes nem é possível tal demonstração.

Ainda nesta seqüência de idéias, em 1998 Gottlieb e Shu [27] trabalharam com métodos de Runge-Kutta temporais; neste artigo, [27], os autores utilizavam-se de discretizações no fluxo que não oscilavam e apenas faziam uma melhoria na discretização temporal, a vantagem deste método é que diminuíram um pouco a quantidade de cálculos mas ainda não tornavam o algoritmo muito eficiente; é computacionalmente caro, pois demanda uma grande quantidade de cálculos para se chegar solução numérica do problema (Para um resumo destes métodos veja [38]).

Entretanto, todos estes métodos só são aplicáveis a domínios euclidianos. Para domínios não euclidianos, diferenças finitas não funcionam muito bem, pois é impossível colocar uma malha de diferenças finitas sobre domínios quaisquer, ou seja, que não haja uma transformação de coordenadas entre um retângulo no plano cartesiano e o domínio em questão.

Pensando nisso, desenvolveram-se alguns métodos que pudessem ser tanto aplicáveis à Domínios Euclidianos, quanto para Domínios Não Euclidianos. Podemos citar, neste caso, dois métodos extremamente úteis que são o método dos Elementos Finitos (v. Cockburn [9], Johnson [32]) e o dos Volumes Finitos (v. Leveque [41], Maliska [44], Morton [45], Wang [71]).

O método dos volumes finitos tem suas idéias iniciais desde os anos 50, mas foi apenas nos últimos 10 anos que melhorias foram implementadas. Este método é largamente utilizado na simulação numérica em mecânica dos fluidos e a grande vantagem desse em relação aos de elementos finitos é que ele é explícito (ver preliminares) e é, portanto, melhor adaptável a qualquer discretização temporal. Entretanto, é condicionalmente estável.

Devido aos métodos numéricos modelarem a solução fraca da equação, surge o grande problema da não-unicidade na solução. Portanto, quando falamos em simulação numérica estamos interessados se o método desenvolvido converge para a solução fisicamente viável do problema, ou seja, a solução de entropia (veja exemplo (1) no qual a discretização proposta falha na convergência para a solução entrópica).

Uma solução da equação é dita entrópica se ela satisfaz a lei de conservação no sentido fraco, i. e.

$$\int_{\Omega \times \mathbb{R}_+} (u \partial_t \phi + f(u) \cdot \nabla \phi) dx dt + \int_{\Omega} u_0(x) \phi(x, 0) dx = 0 \quad (3)$$

para toda função ϕ , pelo menos continuamente diferenciável e de suporte compacto sobre o domínio Ω , e a seguinte desigualdade

$$\partial_t U(u) + \nabla \cdot F(u) \leq 0 \quad (4)$$

para todos os pares de entropia convexos:

Uma função Lipschitz contínua $(U, F) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ é dita ser um **par de entropia convexo** se U é uma função convexa e

$$\frac{dF}{du} = \nabla U \frac{df}{du} \quad (5)$$

A grande dificuldade na demonstração da convergência dos métodos é justamente provar que a solução encontrada pelo método é não somente a solução fraca (satisfaz (3)), mas também a solução entrópica do problema (satisfaz (4)). Em geral, para provar a convergência dos métodos para a solução fraca basta usar o Teorema de Lax-Wendroff [72] (Teorema Cap.1) (existem alguns métodos que são usados para a simulação numérica de uma lei de conservação, para os quais, até o momento, não se tem provada a demonstração de convergência para a solução entrópica, apenas para a solução fraca. Um exemplo disso, são os métodos tipo ENO [33], [38]). As demonstrações de convergência dos métodos numéricos, no final da década de 80 e início da década de 90, ganharam um impulso enorme, quando Szepessy [58], usou resultados de soluções

em medida do trabalho de DiPerna [17] para escrever o artigo “Shock capturing streamline diffusion finite element method for scalar conservation law in two dimension”, no qual mostrou a convergência desse método para uma lei de conservação escalar.

Usando as mesmas idéias, Kroner [34], demonstrou a convergência do método dos volumes finitos em duas dimensões sem fronteira. E mais tarde, Cockburn, Coquel e Lefloch [7] demonstraram a convergência para o método do volume finito para malhas não estruturadas e domínios quaisquer. Em 2000, Noelle [73] usou uma outra técnica, “Kinetic Formulation”, para a demonstração da convergência do método dos volumes finitos para um problema de Cauchy.

Para os problemas de fronteira devemos colocar mais alguma condições sobre a solução. Neste trabalho iremos considerar o método dos volumes finitos para um problema de valor inicial e de fronteira, PVIF, associado a uma lei de conservação multidimensional:

$$\partial_t u + \nabla \cdot f(u) = 0, \quad u(x, t) \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d \quad (6)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega \quad (7)$$

e, para todos os pares de entropia-fluxo de entropia (U, F) convexos e para quase todo $(x, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}_+$ (com respeito a $(d-1)$ -dimensional medida de Hausdorff),

$$\vec{n}(x, t) \cdot \{F(u(x, t)) - F(u_1(x, t)) - \nabla U(u_1(x, t)) \cdot (f(u(x, t)) - f(u_1(x, t)))\} \geq 0 \quad (8)$$

no qual $\vec{n} = \vec{n}(x, t)$ é a normal unitária exterior a $\partial\Omega$. Esta condição foi primeiramente proposta por Bardos et al. [2]. Para sistemas, ela foi também proposta posteriormente por Le Floch e Dubois [19].

A função fluxo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ é assumida ser de classe $C^2(\Omega)$ e Ω é um subconjunto aberto limitado do \mathbb{R}^d que tem uma fronteira poligonal $\partial\Omega$. O dado inicial u_0 será assumido pertencer a $L^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)$, (v. Def.14 Seção 1.2), e o dado de fronteira u_1 é suave.

A formulação (8) é realmente uma forma fraca, mas compatível, para a condição de fronteira padrão “ $u(x, t) = u_1(x, t)$ ”, $x \in \partial\Omega$ em outros tipos de equações. Notemos que a condição $u = u_1$ para ser satisfeita necessita de compatibilidade com o dado inicial u_0 . Por exemplo, no caso linear unidimensional $u_t - u_x = 0$ com $x \in \Omega = (0, \infty)$, a condição de fronteira $u(0, t) = u_1(0, t)$ só pode ser satisfeita se $u_1 = u_0$, como pode ser verificado facilmente pelo método das características. (Cf. “Condição de Lopantinski” para sistemas lineares Serre [52]-[53]).

Kruzkov mostrou em 1970 [36], que existe uma única solução entrópica para o problema de valor inicial (6)-(7) em $L^\infty(\Omega \times \mathbb{R}_+)$ (v. Teorema 7). Quanto ao problema de valor inicial e de fronteira (6)-(8), Bardos et al. [2] provaram a existência e unicidade da solução no espaço $BV(\Omega)$. Mais precisamente, eles mostraram que existe uma única solução $u \in BV(\Omega)$ tal que

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega \times \mathbb{R}_+} \{|u - c|\phi_t + |u - c|\nabla_x \phi\} dx dt + \int_{\Omega} |u(x, 0) - c|\phi(x, 0) dx \\ & - \int_{\partial\Omega \times \mathbb{R}_+} (f(u(x, t)) - f(c)) \cdot n(s) \operatorname{sgn}(u_1(s, t) - c) \phi(s, t) ds dt \geq 0 \end{aligned} \quad (9)$$

para toda ϕ não negativa em $C_0^1(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}_+)$ e para toda constante c em \mathbb{R} .

Em 1989, Szepessy [59] usou a técnica de soluções em medida, estendendo a teoria de DiPerna, aplicando a domínios quaisquer para definir uma solução que ele chamou de **mv-solution**, e mostrou que uma tal solução sob certas condições é uma solução no sentido de Bardos et al. [2]. Com esta técnica, em 1991 [60], Szepessy mostrou a convergência para o método de “Streamline Difusion” com condição de fronteira.

Em 1995, Cockburn, Coquel e Lefloch [7] e independentemente Benharbit [3], provaram a convergência do método dos volumes finitos com condições de fronteira. O presente trabalho, traz um estudo sobre o trabalho de Cockburn, Coquel e Lefloch [7] e de Benharbit [3]. Neste trabalho, é utilizada a teoria desenvolvida por Murat [46]-[47] e Tartar [62]-[63], DiPerna [17] e mais tarde adaptada a domínios limitados por Szepessy [59].

No capítulo 3, daremos a demonstração da convergência de tal método. Inicialmente será feita uma estimativa da aproximação, mostrando que a seqüência está em $L^\infty(\Omega \times \mathbb{R}_+)$. Isto é necessário pois a teoria de DiPerna [17] e Szepessy [59] usa este fato para a construção de medidas associadas à seqüência aproximante, como as propostas no capítulo 2.

Posteriormente será feita uma série de estimativas para as funções de entropia, fluxo de entropia e fluxo de entropia numérico. Todas estas estimativas serão usadas posteriormente na Seção 3.3, na teoria de soluções em medida. É importante salientar que nas estimativas não estaremos exigindo que $u_0 \in BV(\Omega)$, apenas que esteja em $L_1(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$. A exigência de $u_0 \in BV(\Omega)$ só será necessária quando aplicarmos o teorema de Szepessy (Teorema 13).

Como complemento do trabalho, no capítulo 4 será feita a simulação numérica de tal método em Matlab, para domínios em 1 e 2 dimensões espaciais e alguns métodos de diferenças finitas.

Capítulo 1

Aspectos Iniciais

“O mundo só será melhor quando tratarmos pedras como plantas; plantas como animais; animais como homens e homens como deuses.” (Gandhi)

Inicialmente, será importante introduzirmos algumas notações e teoremas que serão utilizados posteriormente.

Os teoremas não serão demonstrados pois estão extensivamente discutidos nas bibliografias indicados no final do trabalho. Os preliminares matemáticos conterão teoremas e resultados indispensáveis nos capítulos seguintes.

Na seção (1.2) será dada uma breve noção de uma lei de conservação e alguns resultados principais que são relevantes na teoria desse tipos de equação.

Na seção (1.3) será dada uma breve noção sobre os conceitos de análise numérica. Conceitos necessários para a posterior análise do método dos volumes finitos que será introduzido no capítulo 3, analisando sua convergência.

1.1 Preliminares Teóricos

Para todas as nossas notações vamos considerar Ω^n um subconjunto aberto qualquer do \mathbb{R}^n .

Definição 1 *{Noções e Notações básicas de análise}*

Se $u : \Omega^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função definida sobre Ω^n , o **suporte de u** é definido por

$$\text{spt}u = \Omega^n \cap \overline{\{x \mid u(x) \neq 0\}}$$

Aqui o fecho de $S \subset \mathbb{R}^n$ é denotado por \bar{S} . Se $S \subset \Omega^n$, \bar{S} compacto e também $\bar{S} \subset \Omega^n$, nós iremos escrever $S \subset\subset \Omega^n$.

A **fronteira de S** é definida por

$$\partial S = \bar{S} \cap \overline{(\mathbb{R}^n - S)}$$

O *diâmetro* de $E \subset \Omega^n$ é definido por

$$\text{diam}(E) = \sup\{|x - y| : x, y \in E\}$$

no qual $|\cdot|$ é a norma euclidiana do \mathbb{R}^n , i. e., para $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, temos que $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$.

Se $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ é uma n -upla de inteiros não negativos, α é chamado um *multi-índice* e o *comprimento* de α é

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$$

Se $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, nós iremos tomar

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$$

e $\alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!$.

A *derivada parcial* dos operadores será definida por $D_i = \partial/\partial x_i$ para $1 \leq i \leq n$, e as derivadas de ordem mais alta definidas por

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

O *gradiente* da função a valores reais u é denotado por

$$Du(x) = (D_1 u(x), \dots, D_n u(x))$$

Por $\mathbb{C}^0(\Omega^n)$ denotamos o *espaço das funções contínuas* sobre Ω^n . Mais geralmente, se k é um inteiro não negativo, possivelmente ∞ , tome

$$\mathbb{C}^k(\Omega^n) = \{u : \Omega^n \rightarrow \mathbb{R}, D^\alpha u \in \mathbb{C}^0(\Omega^n), 0 \leq |\alpha| \leq k\} \quad (|\alpha| < \infty \text{ se } k = \infty)$$

$$\mathbb{C}_0^k(\Omega^n) = \mathbb{C}^k(\Omega^n) \cap \{u : \text{sptu } u \text{ compacto, } \text{sptu } u \subset \Omega^n\} \quad (|\alpha| < \infty \text{ se } k = \infty)$$

e

$$\mathbb{C}^k(\bar{\Omega}^n) = \mathbb{C}^k(\Omega^n) \cap \{u : D^\alpha u \text{ tem uma extensão contínua até } \bar{\Omega}^n, 0 \leq |\alpha| \leq k\} \\ (|\alpha| < \infty \text{ se } k = \infty)$$

Chamamos de *funções testes* as funções que são infinitamente diferenciáveis e com suporte compacto e denotamos por

$$\mathbb{D}(\Omega^n) = \mathbb{C}_0^\infty(\Omega^n)$$

Denotaremos por $L^p(\Omega^n)$ o espaço das funções que verifiquem a seguinte desigualdade:

$$\int_{\Omega^n} |f(x)|^p dx < \infty$$

Quando $p = \infty$, o espaço é denotado por $L^\infty(\Omega^n)$ e as funções que pertençam a este espaço devem verificar que

$$\sup_{\Omega^n - A} |f(x)| < \infty$$

no qual A é um conjunto de medida nula.

Definição 2 {Função Regularizante de Heaviside}

Dizemos que uma função é Heaviside regularizante se ela tende para função de Heaviside, $x \in \Omega$,

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

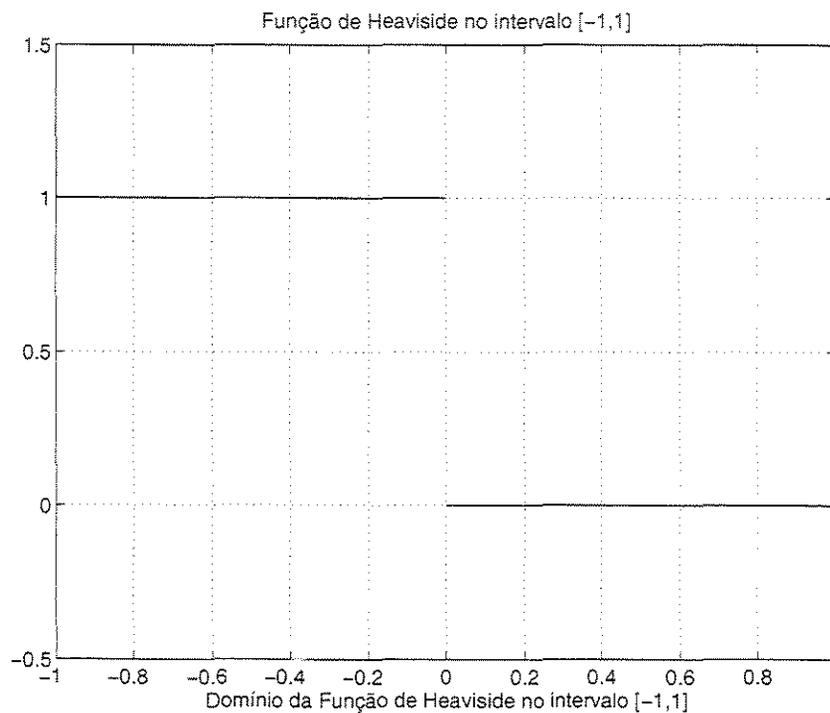


Figura 1.1: Função de Heaviside no intervalo $[-1, 1]$

Um exemplo de função regularizante, tem a seguinte forma:
Dado $\epsilon > 0$ a função vale

$$r_\epsilon = \begin{cases} 1 & \text{se } x < 0 \\ 1 - \frac{x}{\epsilon} & \text{se } 0 \leq x \leq \epsilon \\ 0 & \text{se } x > \epsilon \end{cases} \quad (1.1)$$

E a derivada, a menos de um número finito de pontos, vale

$$\frac{dr_\epsilon}{dx} = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \text{ ou } x > \epsilon \\ -\frac{1}{\epsilon} & \text{se } 0 < x < \epsilon \end{cases} \quad (1.2)$$

Sequência de Funções Tendendo para a Função de Heaviside

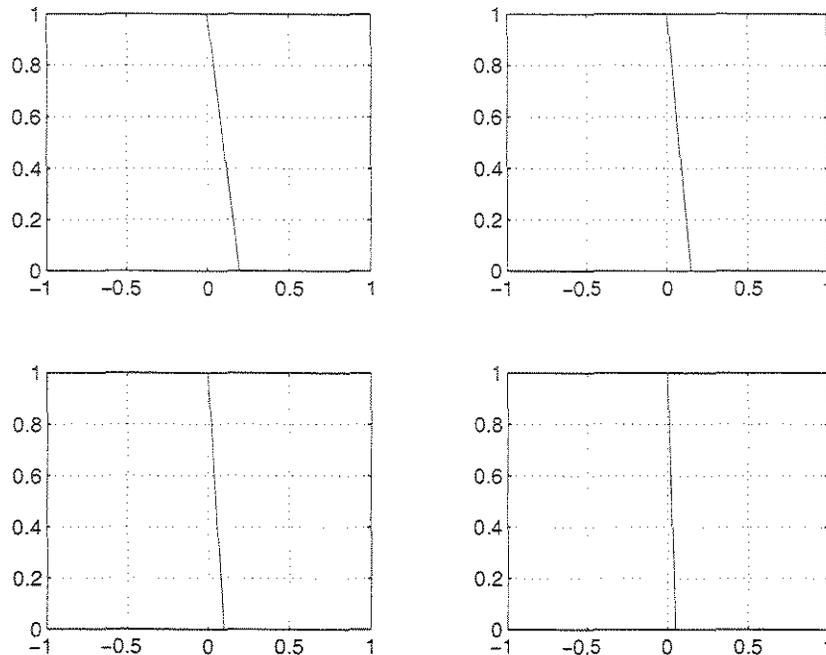


Figura 1.2: Funções regularizantes tendendo para a função de Heaviside

Definição 3 {Convolução}

Considere f e g duas funções mensuráveis de \mathbb{R}^n ; A **convolução** de f e g é a função $f * g$ definida por

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y)dy \quad (1.3)$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$ tal que a integral exista.

Propriedades

Assumindo que todas as integrais em questão existam, temos:

1. $f * g = g * f$
2. $(f * g) * h = f * (g * h)$
3. $(f * g)^z = f^z * g = f * g^z$ no qual $f^z(x) = f(x - z)$
4. $(\lambda f) * g = \lambda(f * g) = f * (\lambda g)$

5. $(f + g) * h = f * h + g * h$
6. $\text{spt}(f * g) \subset \text{spt}(f) + \text{spt}(g) \quad [= \{x + y : x \in \text{spt}(f), y \in \text{spt}(g)\}]$

Teorema 1 [24, pág. 237]

Se f é localmente integrável sobre \mathbb{R}^n e $g \in C^k(\Omega^n)$ tem suporte compacto, então $(f * g) \in C^k(\Omega^n)$

Dados φ qualquer função sobre \mathbb{R}^n e $t > 0$, fixamos

$$\varphi_t(x) = t^{-n} \varphi\left(\frac{x}{t}\right). \quad (1.4)$$

Então vale o seguinte teorema.

Teorema 2 [24, pág. 234]

Suponha $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx = a$.

1. Se $f \in L^p(\Omega^n)$ ($1 \leq p < \infty$), então $f * \varphi_t \rightarrow af$ na norma $L^p(\Omega^n)$ quando $t \rightarrow 0$.
2. Se f é limitada e uniformemente contínua, então $f * \varphi_t \rightarrow af$ uniformemente quando $t \rightarrow 0$.
3. Se $f \in L^\infty(\Omega^n)$ e f é contínua sobre os conjuntos abertos $U \subset \Omega^n$, então $f * \varphi_t \rightarrow af$ uniformemente sobre os conjuntos compactos de U quando $t \rightarrow 0$.

Definição 4 {Medida de Borel Regular} [24, pág. 205]

Seja μ uma medida de Borel e E um subconjunto de Borel (pertencente à σ -álgebra de Borel, gerada por todos os abertos de Ω^n) em Ω^n . Dizemos que μ é **medida regular externa** sobre $E \subset \Omega^n$ se

$$\mu(E) = \inf\{\mu(U); E \subset U, U \subset \Omega^n \text{ aberto}\}.$$

Chamamos de **medida regular interna** sobre $E \subset \Omega^n$ se

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K); K \subset E, K \text{ compacto}\}.$$

Se μ é externa e interna sobre todos os conjuntos de Borel, é chamada de **medida de Borel regular**.

Definição 5 {Medida de Radon}[24, pág. 205]

Dizemos que $\mu : \Omega^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ é uma **medida de Radon** se μ é Borel regular e finita nos compactos contidos em Ω^n .

Definição 6 {Medida de Radon Finita}[24, pág. 205]

Dizemos que $\mu : \Omega^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ é uma **medida de Radon finita** sobre Ω^n se, e somente se, $\mu(\Omega^n) < \infty$.

Definição 7 {Conjuntos de Medidas}

Denotaremos por

1. $M^+(\Omega^n)$ o conjunto das medidas de Radon não negativas em Ω^n .
2. $P(\Omega^n) = \{\mu \in M^+(\Omega^n), \mu(\Omega^n) = 1\}$ o conjunto das medidas de probabilidade.
3. $M(\Omega^n) = \{\mu = \mu_1 - \mu_2, \mu_1, \mu_2 \in M^+(\Omega^n)\}$ o conjunto das medidas de Radon com sinal.

A seguir definiremos uma medida sobre \mathbb{R}^n , a medida de Hausdorff, que nos será capaz de dar uma noção razoável de comprimento, área, volume, etc. para conjuntos de uma apropriada dimensão.

Isto é importante, pois a medida de Lebesgue sobre conjuntos de dimensão menores que os considerados sempre têm medida nula.

Definição 8 {Medida de Hausdorff}[24, pág. 322]

Para cada $\gamma \geq 0$, $\epsilon > 0$, e $E \subset \mathbb{R}^n$, tome

$$H_\epsilon^\gamma(E) = \inf \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \alpha(\gamma) 2^{-n\gamma} \text{diam}(A_i)^\gamma : E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, \text{diam} A_i < \epsilon \right\}$$

Pelo fato de $H_\epsilon^\gamma(E)$ ser não decrescente em ϵ , podemos definir a **medida de Hausdorff de dimensão γ** de E como

$$H^\gamma(E) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} H_\epsilon^\gamma(E)$$

no qual $\alpha(\gamma)$ denota o volume da bola unitária sobre \mathbb{R}^n , caso γ seja um inteiro positivo, caso contrário $\alpha(\gamma)$ pode ser tomada como uma constante arbitrária positiva.

Observação 1: A razão para requerer que $\alpha(\gamma)$ seja igual ao volume da bola unitária em \mathbb{R}^γ quando γ é um inteiro positivo, é garantir que $H^\gamma(E)$ concorda com a noção intuitiva de “ γ -área dimensional” quando E é um conjunto bem comportado.

Pode-se verificar que $H^\gamma(E)$ é de fato um pré-medida em \mathbb{R}^n . Tomando $|E|$ denotando a medida do conjunto E , temos as seguintes propriedades (comuns a toda medida, como a de Lebesgue ou de Radon):

1. Seja E_1, E_2, \dots uma sequência de conjuntos mensuráveis disjuntos então:

$$\left| \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \right| = \sum_{n=0}^{\infty} |E_i| ; \quad (1.5)$$

2. se $E_1 \subset E_2 \subset \dots$ são mensuráveis então:

$$\left| \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \right| = \lim_{i \rightarrow \infty} |E_i| ; \quad (1.6)$$

3. se $E_1 \supset E_2 \supset \dots$, então

$$\left| \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i \right| = \lim_{i \rightarrow \infty} |E_i| \quad (1.7)$$

desde que $|E_k| < \infty$ para algum k .

Uma diferença importantíssima entre as medidas de Hausdorff e Lebesgue (ou Radon) é que se estivermos num espaço \mathbb{R}^n , a medida de Lebesgue será sempre nula para conjuntos de dimensão menores que a dimensão n ; entretanto, a medida de Hausdorff poderá dar outros valores. Dessa forma ela será útil para diferenciar um ponto, de uma reta num espaço bidimensional o que não nos servirá a medida de Lebesgue. É possível que a medida de Hausdorff seja infinita mesmo para conjuntos limitados numa determinada dimensão.

Por exemplo, se considerarmos num espaço bidimensional um quadrado centrado no ponto $(0, 0)$ (que chamaremos de E), com lados 1. A medida de Lebesgue neste caso será 1. Entretanto a medida de Hausdorff $H^1_\epsilon(E)$ será ∞ .

O fato de que H^γ pode admitir valores infinitos mesmo para E limitados pode ser posto dentro de uma melhor perspectiva como segue. Para todo conjunto E mensurável, existe um número não negativo, $d = d(E)$ tal que

$$H^\gamma(E) = 0 \quad \text{se } \gamma > d$$

$$H^\gamma(E) = \infty \quad \text{se } \gamma < d$$

O número $d(E)$ é chamado de **dimensão de Hausdorff** de E .

Definição 9 {*Suporte de uma Medida*}

Seja μ uma medida não-negativa sobre Ω^n . Denotando por A a união de todos os conjuntos abertos em Ω^n no qual μ é nula, definimos o suporte de μ ao conjunto $\Omega \setminus A$.

Notação: $\text{spt}\mu$.

Se $\mu \in M(\Omega^n)$ é uma medida com sinal, então $\text{spt}\mu = \text{spt}\mu^+ \cup \text{spt}\mu^-$.

Observação 2: Dado um subconjunto fechado C de Ω^n , temos que $\text{spt}\mu \subset C$, se, e somente se, $\langle \mu, \phi \rangle = 0$ para toda função $\phi \in \mathcal{C}_0(\Omega^n - C)$. O conjunto \mathcal{C}_0 é o conjunto das **funções contínuas com suporte compacto**

$$\mathcal{C}_0(\Omega^n) = \{u : u : \Omega^n \longrightarrow \mathbb{R}, u \text{ contínua com suporte compacto}\}$$

Teorema 3 [24, pág. 205 e 216] *Teorema da Representação de Riesz.*

Seja $L : \mathcal{C}_0(\Omega^n) \longrightarrow \mathbb{R}$, um funcional linear, não negativo tal que

$$\sup\{L(f) : f \in \mathcal{C}_0(\Omega^n), \|f\|, \text{supp}f \subset K\} < \infty; \quad \forall K \subset \Omega^n, \text{compacto}$$

Então existe uma única $\mu \in M^+$ tal que

$$L(f) = \int_{\Omega} f(\lambda) d\mu(\lambda), \quad f \in \mathcal{C}_0(\Omega^n).$$

Desse teorema, podemos identificar as medidas de Radon não negativas com os funcionais lineares não negativos em $\mathcal{C}_0(\Omega^n)$.

Também é possível mostrar que

$$\mu(V) = \sup\{L(f) : f \in \mathcal{C}_0(\Omega^n), \|f\| \leq 1, \text{supp}f \subset V\}; \quad \forall V \subset \Omega^n, \text{aberto}$$

Definição 10 [24 pág. 161] {Topologia Fraca-*}

Seja E um espaço vetorial normado e E^* o seu dual topológico, ou seja,

$$E^* = \{T : E \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ linear e contínua}\}.$$

A topologia fraca-* de E , é a topologia gerada (v. 24, Capítulo 4) por todos os elementos de E^* .

Teorema 4 [24, pág. 162] Teorema de Banach-Alaoglu.

Se E é um espaço vetorial normado, a bola unitária fechada

$$B = \{f \in E^* : \|f\| \leq 1\}$$

é compacta na topologia fraca-* de E

Definição 11 {Convergência Fraca}

Se $\{v_n\}$ é uma seqüência limitada em $L^q(\Omega^n)$, $1 < q < \infty$; dizemos que $\{v_n\}$ converge fracamente para v , notação $v_n \rightharpoonup v$, se, e somente se,

$$\int_{\Omega} v_n \phi dx \longrightarrow \int_{\Omega} v \phi dx \quad \text{para todo } \phi \in L^p(\Omega^n), \quad (1.8)$$

no qual $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$.

Como consequência dos teoremas (3) e (4), vale o seguinte resultado

Teorema 5 [54, Teorema 4.4]

Se $\{\mu_k\}$ é uma seqüência de $M^+(\Omega^n)$ e $\sup_{k \in \mathbb{N}} \mu_k(U) < \infty$ para qualquer $U \subset \subset \Omega^n$, então existe $\{\mu_{k_j}\}$ subseqüência de $\{\mu_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ e $\mu \in M^+$ tal que $\{\mu_{k_j}\}$ converge fracamente para μ no seguinte sentido

$$\int_{\Omega} \phi d\mu_k \longrightarrow \int_{\Omega} \phi d\mu, \quad \forall \phi \in C^0(\Omega^n) \quad (1.9)$$

Usaremos a notação acima $v_n \rightharpoonup v$ (v. Definição 11) para denotar a convergência na topologia fraca-*. Assim, usando que o $L^\infty(\Omega)$ é o dual de $L^1(\Omega)$, podemos escrever que $v_n \rightharpoonup v$ se, e somente se,

$$\int_{\Omega} v_n \phi dx \longrightarrow \int_{\Omega} v \phi dx \quad \text{para todo } \phi \in L^1(\Omega^n). \quad (1.10)$$

Teorema 6 [24, pág. 102] Teorema de Jensen (Desigualdade de Jensen)

Sejam $J : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa e f uma função mensurável a valores reais em Ω . Assumamos que a medida de Ω^n , $M(\Omega^n) = \int_{\Omega^n} d\mu$ é finita suponha que $f \in L^1(\Omega^n)$. Seja $\langle f \rangle$ a média de f :

$$\langle f \rangle = \frac{1}{M(\Omega^n)} \int_{\Omega^n} f d\mu.$$

Então vale:

$$\langle J \circ f \rangle \geq J(\langle f \rangle). \quad (1.11)$$

Se J é estritamente convexa, então vale a igualdade em (1.11) se, e somente se, f é constante.

Desde que J é convexo e $\langle f \rangle$ é contínua, temos que $(J \circ f)(x) = J(f(x))$ também é mensurável em Ω .

1.2 Lei de Conservação

Uma lei de conservação modela uma grande quantidade de fenômenos na natureza. Na forma integral ela pode ser escrita como

$$\frac{d}{dt} \int_G u dx = - \int_{\partial G} f \cdot \vec{n} ds \quad (1.12)$$

no qual G é um domínio qualquer do \mathbb{R}^n limitado, com fronteira Lipschitziana; u pode ser uma função escalar ou vetorial cujas coordenadas representam as densidades de certas quantidades (e.g. massa, momento, energia); \vec{n} denota a normal unitária exterior a G e f representa o fluxo de u através da fronteira de G .

Observação 3: A variação da quantidade u no domínio G é devida somente às quantidades que entram e saem pela fronteira. Como \vec{n} é a normal exterior, então a variação de u dentro de G é igual a menos o fluxo pela fronteira.

Comutando a derivada em relação a t em (1.12) com o sinal da integração, usando o Teorema da Divergência no membro direito de (1.12) e usando a arbitrariedade do domínio G , obtemos a lei de conservação na forma diferencial.

Dependendo de u ser um escalar e da dimensão n de G , temos as seguintes possibilidades:

1. Equação na forma diferencial 1-dimensional no espaço:

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} f(u(x, t)) = 0 \quad (1.13)$$

$$u(x, t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

2. Equação na forma diferencial 2-dimensional no espaço:

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, y, t) + \frac{\partial}{\partial x} f(u(x, y, t)) + \frac{\partial}{\partial y} g(u(x, y, t)) = 0 \quad (1.14)$$

$$u(x, y, t) : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (f, g) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

3. Equação na forma diferencial n-dimensional no espaço:

$$\frac{\partial}{\partial t} u + \nabla \cdot F(u) = 0 \quad (1.15)$$

$$u(x_1, \dots, x_n, t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad F = (f_1, \dots, f_n) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

4. Sistema de equações 1-dimensional:

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} f(u(x, t)) = 0 \quad (1.16)$$

$$u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}^m, \quad f(u(x, t)) = \begin{pmatrix} f_1(u(x, t)) \\ f_n(u(x, t)) \\ \vdots \\ f_m(u(x, t)) \end{pmatrix}$$

5. Sistema de equações n -dimensional:

$$\frac{\partial}{\partial t} u + \sum_{\alpha=1}^n \nabla \cdot A^\alpha(u) = 0 \quad (1.17)$$

$$u : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}^m, \quad A^\alpha(u) = \begin{pmatrix} f_1^\alpha(u) \\ f_2^\alpha(u) \\ \vdots \\ f_m^\alpha(u) \end{pmatrix}$$

Nas equações (1.13), (1.14) e (1.15) a lei de conservação é dita estar na **forma escalar**. Na equação (1.16) e (1.17) é chamado de **sistema de leis de conservação**.

Nos preocuparemos basicamente com o caso escalar, com $u(x, t)$ definida para x num domínio $\Omega^n \subset \mathbb{R}^n$ e $t > 0$.

Uma grande dificuldade de uma lei de conservação é que mesmo havendo dados iniciais contínuos, a solução pode não existir continuamente para todo o tempo. Para haver solução, é necessário enfraquecer a noção de solução (v. [14], [33], [38] e [52]).

Um critério muito famoso que impõe uma condição para que uma função descontínua seja uma solução fraca é o chamado critério de **Rankine-Hugoniot**.

Definição 12 {Condição de Rankine-Hugoniot}

Seja u uma solução suave exceto ao longo de uma curva $\Gamma(t) = (x(t), t)$, sendo u_e a solução imediatamente esquerda da curva,

$$u_e = \lim_{x \rightarrow x(t)} (u(x, t)) \quad \text{para } x < x(t),$$

e u_d a solução imediatamente a direita da curva,

$$u_d = \lim_{x \rightarrow x(t)} (u(x, t)) \quad \text{para } x > x(t).$$

u é solução fraca (v. [14], [33], [38] e [52]) para (1.13) se, e somente se, vale a condição de **Rankine-Hugoniot**

$$s[u] = [f(u)]$$

no qual

$$[u] = u_d - u_e, \quad [f(u)] = f(u_d) - f(u_e) \quad \text{e} \quad s = x'(t)$$

(para a referência desta condição no caso de $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $n \geq 1$, veja [52])

O problema que aparece numa formulação fraca é que ganha-se em existência, mas perde-se em unicidade. Entretanto, na natureza é necessário não apenas que a solução exista, mas que ela seja única (já imaginou prever um fenômeno que têm infinitas soluções?). Para evitar esta dificuldade, surge um critério valiosíssimo para a escolha de uma solução única fisicamente viável, que é a noção de **entropia**.

No caso de $\Omega \subset \mathbb{R}^1$, dizemos que U é uma entropia com correspondente fluxo F , se F é dado por $F' = U' f'$ (conforme (5)).

Consideremos o problema de Cauchy para (1.13)

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial f(u(x,t))}{\partial x} = 0 & x \in \Omega, t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases} \quad (1.18)$$

Definição 13 {*Solução Entrópica*}

Se $u(x,t)$ é uma solução fraca para (1.18) (v.(3)), dizemos que ela é uma solução entrópica se ela satisfaz a seguinte desigualdade para todos os pares de entropia convexo (5)

$$\int_0^T \int_{\Omega} (U(u)\phi_t + F(u)\phi_x) dx dt + \int_{\Omega} U(u_0(x))\phi(x,0) dx \geq 0, \quad (1.19)$$

para toda ϕ função teste, $\phi \geq 0$.

Entropias particulares bastante utilizadas são as **entropias de Kruzkov**:

$$\begin{aligned} U(u) &= |u - k|, & k \in \mathbb{R} \\ F(u) &= (f(u) - f(k))\text{sgn}(u - k) \end{aligned} \quad (1.20)$$

no qual

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} \quad (1.21)$$

Uma grande utilidade destas entropias é que podemos formular a Definição anterior do seguinte modo:

Proposição 1 [52, pág. 35]

Uma função u mensurável e limitada sobre $(0,T) \times \mathbb{R}$ é um solução entrópica de (1.18) se, e somente se, ele satisfaz a desigualdade (1.19) para todo par de entropia-fluxo de entropia dado em (1.20).

Um resultado importante advindo destas Definições e Proposições acima, é o Teorema de unicidade devido a Kruzkov.

Teorema 7 [52, pág. 36]

Para toda função mensurável limitada u_0 sobre \mathbb{R} , existe uma e somente uma solução entrópica u de (1.18) em $L^\infty(\mathbb{R} \times [0, T]) \cap C([0, T]; L^1_{loc}(\mathbb{R}))$. Além disso, u satisfaz o princípio do máximo, para qualquer T positivo:

$$\| u \|_{L^\infty(\Omega)} \leq \| u_0 \|_{L^\infty(\mathbb{R})} \quad (1.22)$$

De uma forma mais explícita valem os seguintes resultados:

Proposição 2 [52 pág. 37]

Tomemos u_0 e v_0 sendo duas funções mensuráveis limitadas e u e v as respectivas soluções entrópicas. Tomemos também, $M = \sup\{|f'(s)|; s \in [\inf(u_0, v_0), \sup(u_0, v_0)]\}$. Então:

1. Para todo $t > 0$ e todo intervalo $[a, b]$, nós temos

$$\int_a^b |v(x,t) - u(x,t)| dx \leq \int_{a-Mt}^{b+Mt} |v_0(x) - u_0(x)| dx;$$

2. Em particular, se u_0 e v_0 coincidem sobre $\{x : |x - x_0| < d\}$, então u e v coincidem sobre o triângulo $\{(x, t) : |x - x_0| + Mt < d\}$.

3. Se $u_0 - v_0 \in L^1(\mathbb{R})$, então $u(t) - v(t) \in L^1(\mathbb{R})$ (escrevendo $u(t) := u(\cdot, t)$ e $v(t) := v(\cdot, t)$)

$$\|u(t) - v(t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|u_0 - v_0\|_{L^1(\mathbb{R})}$$

$$\int_{\mathbb{R}} (u(x, t) - v(x, t)) dx = \int_{\mathbb{R}} (v_0(x) - u_0(x)) dx$$

4. Se $u_0 \in L^1(\mathbb{R})$, então $u(t) \in L^1(\mathbb{R})$, para todo $t > 0$, e

$$\|u(t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R})}, \quad \int_{\mathbb{R}} u(x, t) dx = \int_{\mathbb{R}} u_0(x) dx$$

5. Se $u_0(x) \leq v_0(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, então vale que $u(x, t) \leq v(x, t)$, para $x \in \mathbb{R}$.

6. Se $u_0 \in BV(\mathbb{R})$, o espaço das funções de variação total limitada (v. Def. 15 abaixo), então $u(t) \in BV(\mathbb{R})$ e

$$TV(u(t)) \leq TV(u_0), \quad \forall t > 0$$

Para dimensões maiores, podemos colocar o problema de valor inicial associado com uma lei de conservação multidimensional da seguinte forma (v. (6)-(7))

$$\partial_t u + \nabla \cdot f(u) = 0, \quad u(x, t) \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d \quad (1.23)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega. \quad (1.24)$$

A existência e unicidade da solução entrópica (cf. Definição (5)) foi mostrada por Kruzkov em 1970 [36].

A variação total de uma função tem grande interesse na demonstração da convergência para alguns métodos numéricos. É possível mostrar, sob algumas restrições, que métodos numéricos que têm a variação total decrescente são convergentes. Estes são os chamados métodos TVD - Total Variation Diminishing (v. [32]).

Definição 14 Seja $\Pi : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ uma partição qualquer de $[a, b]$. Para $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, definimos a variação total de f por

$$TV_{[a,b]} = \sup_{\Pi} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \right\} \quad (1.25)$$

No caso discreto, definimos para uma sequência $v = \{u_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ de valores discretos u_j

$$TV(v) = \sum_{j=0}^{\infty} |u_{j+1} - u_j| \quad (1.26)$$

Definição 15 {Espaço BV}

Chamamos de espaço $BV(\Omega)$, ao espaço de funções nas quais estas tenham variação total limitada sobre Ω , ou seja,

$$BV(\Omega) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid TV_{\Omega}(f) < \infty\} \quad (1.27)$$

Mais geralmente, $BV(\Omega^n)$ é o espaço das funções u que são localmente integráveis numa região Ω^n e no qual as derivadas generalizadas são medidas localmente. (v. [70] para um estudo completo destes tópicos).

Para o problema de valor inicial e de fronteira (6)-(8), Bardos et al. mostraram em 1979 [2] a existência e unicidade da solução para os dados iniciais em um espaço $BV(\Omega^n)$.

1.3 Preliminares Numéricos

Existe um grande interesse de se fazer simulações numéricas envolvendo leis de conservação. Nesta parte, procuraremos enfatizar as notações mais importantes utilizadas e definições que serão usadas no decorrer do trabalho.

Vamos nos servir de algumas linhas para explicar um pouco do método de **diferenças finitas**. Este método foi o primeiro utilizado para a simulação numérica em Equações Diferenciais, entretanto seu valor não é apenas histórico. Ainda hoje, grande parte dos métodos desenvolvidos são do tipo de diferenças finitas com algumas melhorias.

No caso unidimensional vamos utilizar das seguintes notações:

Definição 16 {Notações para os Métodos de Diferenças Finitas 1-dimensional}

O domínio espacial será discretizado, ao qual chamaremos de **malha espacial**, através de uma partição da reta. Chamaremos cada ponto da partição de **nó**. Para facilitar a notação tomaremos a distância entre um nó e outro sendo a mesma.

Denotaremos o comprimento de cada intervalo entre um nó e outro por h ou Δx . Para a malha temporal, igualmente espaçada, denotaremos cada intervalo de tempo por τ ou Δt .

E definimos os pontos (x_j, t_n) da malha discretizada por

$$x_j = jh, \quad j = \dots, -1, 0, 1, 2, \dots \quad (1.28)$$

$$t_n = n\tau, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.29)$$

E um ponto médio dentro de um elemento (x_j, x_{j+1}) denotamos por

$$x_{j+1/2} = (j + \frac{1}{2})h, \quad j = \dots, -1, 0, 1, 2, \dots \quad (1.30)$$

Como em geral, em muitos casos, a solução pontual não é definida (devido a possíveis descontinuidades) e para que a solução fraca do problema seja de relevância física (solução entrópica), será conveniente ao invés de fazermos aproximações pontuais usarmos aproximações sobre as médias celulares. O método de diferenças finitas irá produzir aproximações $U_j^n \in \mathbb{R}$ das médias celulares para a solução exata da equação. Denotaremos a média celular por \bar{u}_j^n , i.e.

$$\bar{u}_j^n = \frac{1}{h} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u(x, t_n) dx. \quad (1.31)$$

Para os dados iniciais para o método numérico vamos usar $U_j^0 = \bar{u}_j^0$.

Também será útil definirmos uma função constante por partes $U_j(x, t)$ assumindo os valores U_j^n :

$$U_j(x, t) = U_j^n \quad \text{para} \quad (x, t) \in [x_{j-1/2}, x_{j+1/2}] \times [t_n, t_{n+1}).$$

Vamos assumir ainda que a razão entre o passo temporal e o passo espacial $\frac{\tau}{h}$ seja constante quando $\tau, h \rightarrow 0$.

Para o caso m -dimensional, seguimos a mesma idéia anterior, entretanto, agora devemos fazer algumas modificações:

Para todas as construções dos métodos vamos nos utilizar das seguintes notações:

Definição 17 {Notações para os Métodos de Diferenças Finitas m -dimensional}

No caso m dimensional vamos denotar qualquer ponto pertencente a \mathbb{R}^m pela m -upla (x_1, x_2, \dots, x_m) . Vamos supor que a malha espacial é uniformemente espaçada em cada coordenada. Denotaremos cada comprimento do intervalo entre um nó e outro de cada eixo coordenado por h_i ou Δx_i $i = 1, 2, \dots, m$. Para a malha temporal, igualmente espaçada, denotaremos cada intervalo de tempo por τ ou Δt . E definimos os pontos da malha $(x_{j_1}, \dots, x_{j_m}, t_n)$ por

$$x_{j_i} = j_i h_i, \quad j = \dots, -1, 0, 1, 2, \dots \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (1.32)$$

$$t_n = n\tau, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.33)$$

Para o ponto médio de cada intervalo (x_j, x_{j+1}) , tomaremos:

$$x_{j_i+1/2} = (j_i + \frac{1}{2})h_i, \quad j = \dots, -1, 0, 1, 2, \dots \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (1.34)$$

Como em geral, em muitos casos, a solução pontual não é definida (devido a possíveis descontinuidades) e para que a solução fraca do problema seja de relevância física (solução entrópica), será conveniente ao invés de fazermos aproximações pontuais usarmos aproximações sobre as médias celulares. O método de diferenças finitas irá produzir aproximações $U_{j_1 j_2 \dots j_m}^n \in \mathbb{R}$ das médias celulares para a solução $u(x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_m}, t_n)$ exata da equação. Denotaremos a média celular por

$$\bar{u}_{j_1 j_2 \dots j_m}^n = \frac{1}{|K|} \int_{x_{j_1-1/2}}^{x_{j_1+1/2}} \int_{x_{j_2-1/2}}^{x_{j_2+1/2}} \dots \int_{x_{j_m-1/2}}^{x_{j_m+1/2}} u(x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_m}, t_n) dx_1 dx_2 \dots dx_m \quad (1.35)$$

no qual $|K|$ é o volume:

$$|K| = (x_{j_1+1/2} - x_{j_1-1/2})(x_{j_2+1/2} - x_{j_2-1/2}) \dots (x_{j_m+1/2} - x_{j_m-1/2}).$$

Para os dados iniciais, teremos $U_{j_1 j_2 \dots j_m}^0 = \bar{u}_{j_1 j_2 \dots j_m}^0$.

Também será útil definirmos uma função constante por partes $U_{k_1, k_2, \dots, k_m}(x_1, x_2, \dots, x_m, t)$ assumindo os valores $U_{j_1, j_2, \dots, j_m}^n$.

$$U_{k_1, k_2, \dots, k_m}(x_1, x_2, \dots, x_m, t) = U_{j_1, j_2, \dots, j_m}^n \quad \text{para} \\ (x_1, x_2, \dots, x_m, t) \in [x_{j_1-1/2}, x_{j_1+1/2}] \times [x_{j_2-1/2}, x_{j_2+1/2}] \times \dots \times [x_{j_m-1/2}, x_{j_m+1/2}] \times [t_n, t_{n+1})$$

Vamos assumir ainda que a razão entre os passos temporais e o passo espacial $\frac{\tau}{h_i}$ para $i = 1, 2, \dots, m$ seja constante quando $k_i, h \rightarrow 0$.

O método das diferenças finitas é em geral obtido discretizando-se diretamente a equação diferencial, entretanto para uma lei de conservação, é importante notar que nem todo tipo de discretização fornece a solução entrópica. Observemos o seguinte exemplo

Exemplo 1 [33, pág. 31]

Consideremos um esquema numérico para aproximação da solução fraca de (1.18). Vejamos que não podemos discretizar (1.18) usando diferenças centradas (v. [64]).

De fato, tomando como valor inicial

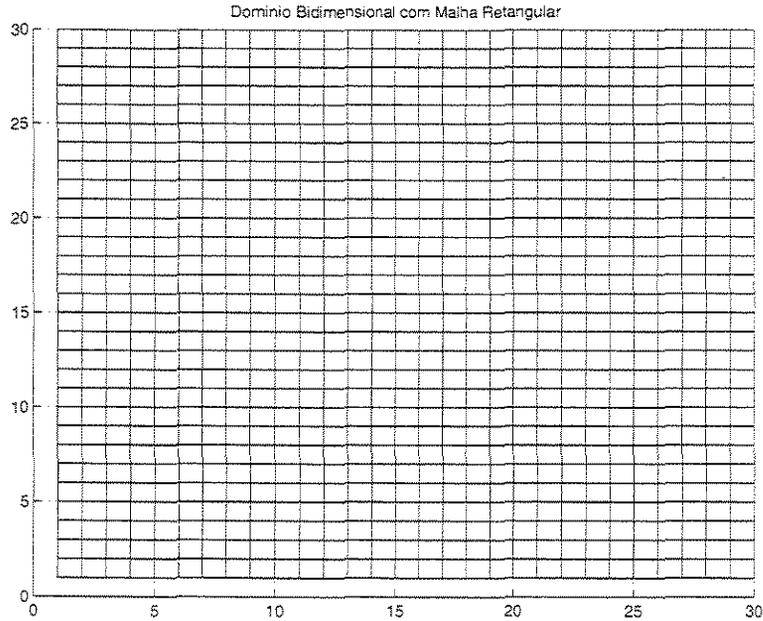


Figura 1.3: Figura Malha Bidimensional. $[0, 30] \times [0, 30] \in \mathbb{R}^2$

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } x > 0 \\ -1 & \text{para } x < 0, \end{cases} \quad (1.36)$$

o esquema numérico utilizando diferenças centradas

$$u_k^{n+1} - u_k^n = -\frac{\Delta x}{\Delta t} [f(u_k^{n+1}) - f(u_k^{n-1})]. \quad (1.37)$$

no caso de f convexa com f' crescente, não evolui no tempo, se $f(1) = f(-1)$, e.g. $f(u) = u^2$, o que contraria a solução real do problema (v. [40]). Portanto, a solução encontrada por este método não pode ser a solução entrópica.

Dessa forma, deveremos ser mais cuidadosos em procurarmos uma discretização para a lei de conservação. O seguinte lema nos fornece uma forma para obter uma solução aproximada da equação. Ele está enunciado em uma dimensão espacial, entretanto ele vale para dimensões maiores.

Lema 1 [32, pág. 31]

Seja u uma solução fraca para o problema de Cauchy (1.18). Admitamos que u seja contínua e tenha derivada primeira contínua sobre todo domínio $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ exceto numa curva suave $\Gamma = \{(\sigma(t), t) \mid t > 0\}$, ou seja, $u \in C^1((\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+) \setminus \Gamma)$. Vamos supor também que u satisfaça a condição de Rankine-Hugoniot ao longo de Γ .

Sejam (x_0, t_0) e V uma vizinhança de (x_0, t_0) com uma fronteira Lipschitziana. Então

$$\int_{\partial V} \vec{n} \cdot \begin{pmatrix} f(u) \\ u \end{pmatrix} = 0,$$

no qual \vec{n} é a normal unitária a V .

Tomando $V = (a, b) \times (\sigma, \varsigma)$ podemos escrever a igualdade imediatamente acima como:

$$-\int_{\sigma}^{\varsigma} f(u(a, \cdot)) - \int_a^b (u(\cdot, \sigma)) + \int_{\sigma}^{\varsigma} f(u(b, \cdot)) + \int_a^b (u(\cdot, \varsigma)) = 0 \quad (1.38)$$

ou ainda, ajuntando os termos correspondentes, como:

$$\int_{\sigma}^{\varsigma} [f(u(b, s)) - f(u(a, s))] ds + \int_a^b [(u(x, \varsigma)) - u(x, \sigma)] dx = 0 \quad (1.39)$$

Esta identidade é também chamada de forma integral da lei de conservação. Assumamos que tenhamos uma malha uniforme, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$. Usando a notação acima, com $\sigma = t^n$, $\varsigma = t^{n+1}$, $a = x_{i-1/2}$ e $b = x_{i+1/2}$, obtemos

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} [f(u(x_{i+1/2}, s)) - f(u(x_{i-1/2}, s))] ds + \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} [(u(x, t^{n+1})) - u(x, t^n)] dx = 0 \quad (1.40)$$

Esta identidade tem um importante significado físico. Vamos denotar as integrais em (1.40) por I_1 e I_2 respectivamente. Então $-I_1$ é a diferença entre os fluxos através de $x_{i+1/2}$ e $x_{i-1/2}$ durante o intervalo de tempo $[t^n, t^{n+1}]$ e I_2 é a mudança de massa no intervalo $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ durante o intervalo de tempo $[t^n, t^{n+1}]$. Então (1.40) significa que a massa é conservada.

Usando as notações anteriores para as aproximações, iremos escrever uma aproximação para (1.40) como

$$U_i^{n+1} - U_i^n = -\frac{\Delta t}{\Delta x} (g_{i+\frac{1}{2}}^n - g_{i-\frac{1}{2}}^n) \quad (1.41)$$

no qual g será a aproximação para a média do fluxo:

$$g_{i+\frac{1}{2}}^n = g(U_i^n, U_{i+1}^n) \sim \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(u(x_{i+1/2}, s)) ds \quad (1.42)$$

A função g é chamada de **fluxo numérico** e é dita consistente se

$$g(u, u) = f(u) \quad (1.43)$$

O esquema (1.41) é chamado de esquema numérico na forma conservativa. Uma razão muito importante para escrevermos o esquema nesta forma é que ele garante também a propriedade da conservação de massa mesmo para a solução discreta aproximada. Existem vários exemplos de métodos desse tipo. Um dos primeiros métodos desenvolvidos é o famoso método de Lax (v. Capítulo 4). Muitos exemplos desses métodos podem ser encontrados nas referências [33], [38]. No Capítulo 4, faremos experimentos numéricos envolvendo tanto o método dos volumes finitos quanto de diferenças finitas.

Um teorema extremamente útil na análise da convergência de métodos numéricos, é o chamado teorema de Lax-Wendroff [72].

Este teorema nos fornece uma condição para que uma solução seja uma solução fraca do problema, entretanto ele não garante que a solução fraca obtida seja a solução entrópica.

A grande dificuldade em se demonstrar a convergência de um método é justamente de mostrar que ele converge para a solução entrópica (fisicamente viável do problema). No caso unidimensional, o teorema de Lax-Wendroff pode ser escrito da seguinte forma:

Teorema 8 (Lax-Wendroff [72])

Seja $\{U_m\}_m$ uma solução discreta definida como (1.41) com respeito a $\Delta x = h_m$, $\Delta t = \lambda \tau_m$ e os valores iniciais u_i^0 . Assuma que $g \in C_0^1(\mathbb{R}^2)$ e que existe uma constante K tal que

$$\sup_m \sup_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+} |U_m(x, t)| \leq K$$

e que $U_m \rightarrow u$ para quase todo ponto em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ quando $m \rightarrow \infty$. Então u é uma solução fraca do problema de valor inicial (1.18)

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = 0 \quad \text{em } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \quad u(x, 0) = u_0 \quad x \in \mathbb{R}$$

Quando pensamos num método numérico estamos interessados se o método nos dá a solução correta. Para isto, devemos falar das seguintes propriedades para análises posteriores dos métodos numéricos.

1.3.1 Convergência, Estabilidade e Consistência

As noções de convergência, estabilidade e consistência são muito importantes para todo método numérico. Quando implementamos um método queremos saber se ele é válido, ou seja, se a solução que ele fornece é a solução do problema em questão.

Para estudar estas questões vamos definir alguns operadores que irão servir grandemente para explicarmos estas propriedades. Nesta parte estamos seguindo Leveque [39]. Primeiramente vamos definir o operador “aproximação” $\mathbb{H}_h(U^n)$. Ele pode ser entendido como

$$U^{n+1} = \mathbb{H}_h(U^n) \tag{1.44}$$

Aqui, U^{n+1} representa o vetor de aproximações U_i^{n+1} no tempo t_{n+1} . O valor U_i^{n+1} em um ponto particular i tipicamente depende de diversas variáveis provenientes do vetor U^n . Então podemos escrever

$$U_i^{n+1} = \mathbb{H}_h(U^n; i) \tag{1.45}$$

para dizer que U_i^{n+1} depende completamente do vetor U^n . Observe de (1.41) e de (1.45) que

$$\mathbb{H}_h(U^n; i) = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (g_{i+\frac{1}{2}}^n - g_{i-\frac{1}{2}}^n). \tag{1.46}$$

Em geral, estamos também interessados de que forma U_i^n aproxima a solução verdadeira. Para isto, definimos o **erro global** E_i^n como sendo a diferença entre a solução verdadeira e a solução calculada. Para leis de conservação será bastante útil ao invés de computarmos o erro pontualmente, calcularmos o erro relativamente a média celular da verdadeira solução, pois em geral a solução não é definida para todo ponto do domínio. Assim definimos

$$E_i^n = U_i^n - \bar{u}_i^n \tag{1.47}$$

Podemos definir uma **função erro** $E_h(x, t)$, contínua, que pode ser usada em geral para todo tipo de aproximação numérica. Em nosso caso específico de leis de conservação vamos usar as

funções $U_i(x, t)$ como aproximação da média celular e $\bar{u}(x, t)$ como a média celular em torno de x para uma malha de espaçamento h :

$$E_h(x, t) = U_i(x, t) - \bar{u}(x, t) \quad (1.48)$$

O método é **convergente** em alguma norma, $\| \cdot \|$ arbitrária se

$$\| E_h(\cdot, t) \| \longrightarrow 0 \quad \text{quando } h \longrightarrow 0, \quad (1.49)$$

para todo $t \geq 0$, e qualquer condição inicial em alguma classe de funções.

Podemos também definir o **erro de truncamento local** $L_h(x, t)$, que mede quanto a equação de diferenças modela a equação diferencial localmente. $L_h(x, t)$ pode ser definido substituindo a solução aproximada U_i^n , na equação de diferenças, pela solução verdadeira $\bar{u}(x_j, t_n)$ (a média celular). Pelo fato da solução verdadeira ser uma solução aproximada da solução proveniente da equação de diferenças, a forma de como a solução verdadeira satisfaz a equação de diferenças dá uma indicação quanto próxima está a equação diferencial e a solução aproximada.

O método é dito então **consistente**, em relação à norma $\| \cdot \|$, se

$$\| L_h(\cdot, t) \| \longrightarrow 0 \quad \text{quando } h \longrightarrow 0, \quad (1.50)$$

e é dito **consistente de ordem p** se para todas as condições iniciais suficientemente suaves com suporte compacto, existe uma constante C_L tal que

$$\| L_h(\cdot, t) \| \leq C_L h^p \quad \text{para todo } h < k_0, \quad t \leq T. \quad (1.51)$$

A fim de obter limitação do erro global, devemos assegurar que o erro local $L_h(\cdot, t_{i-1})$ não é aumentado indefinidamente se aplicarmos n vezes o método, esta exigência é o que chamamos de **estabilidade**.

A estabilidade dá uma indicação de que a solução não cresce muito rapidamente para pequenos intervalos de tempo. Em geral, quando à solução não é permitido o crescimento no decorrer do tempo, dizemos que o método vai ser estável se para todo tempo T existir uma constante C_s e um valor $k_0 > 0$ tal que

$$\| H_h^n \| \leq C_s \quad \text{para todo } n\tau \leq T, h < k_0,$$

no qual $\| H_h^n \|$ é o vetor aproximação para o nível de tempo n .

Para o caso linear, temos um teorema devido a Lax.

Teorema 9 [Lax 39]

Para um sistema linear, se o método é consistente e estável ele é convergente.

Entretanto, no caso não linear o Teorema 9 não é verdadeiro (para contra exemplos podem ser consultados [33], [40]). A demonstração da convergência de um método numérico é uma tarefa extremamente complicada.

Existem várias técnicas de demonstração da convergência de um método. No caso do método dos volumes finitos iremos utilizar-nos das técnicas de Solução em Medida que serão desenvolvidas no capítulo seguinte.

Os métodos de diferenças finitas e os de volume finitos tratados aqui neste trabalho são ditos ser **condicionalmente estáveis**, ou seja, deve haver uma relação a ser satisfeita que é, em geral, entre o diâmetro de cada elemento da malha, o tamanho do passo temporal e a velocidade do fluxo.

Uma relação bastante famosa na área de leis de conservação é a chamada **condição CFL** que foi introduzida por Courant, Fredrichs e Lewy em 1928 [11] (mais tarde traduzido para o inglês em [12]) no estudo dos métodos numéricos. Esta condição é necessária (mas não suficiente) que a malha satisfaça para que a solução numérica encontrada seja uma aproximação da solução exata:

$$\frac{\Delta t p_K}{|K|} \sup_{u \in [\min u, \max u]} \left| \frac{df}{du}(u) \right| \leq 1 \quad (1.52)$$

no qual $|K|$ é o volume n -dimensional (para uma malha espacial de um domínio $\Omega^n \subset \mathbb{R}^n$, $|K|$ denota a n -dimensional medida de Hausdorff) de cada elemento, e p_K é a soma dos comprimentos ($n - 1$ medida de Hausdorff) do lado de cada elemento. No caso do método Godunov (v. [28]), é imposto que a desigualdade não seja menor ou igual a 1, que é trocado por 0.5.

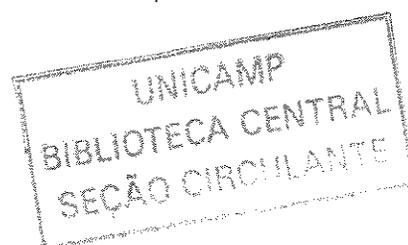
Definição 18 {*Método Explícito*}

Um método numérico é dito ser **explícito** quando a solução aproximada u_j^{n+1} dependa dos valores da solução aproximada somente nos tempos anteriores a $n + 1$, ou seja,

$$u_j^{n+1} = f(u_{(\cdot)}^n, \dots, u_{(\cdot)}^0) \quad (1.53)$$

no qual $u_{(\cdot)}^m$ $m = 1, 2, 3, \dots$ é usado para indicar que a dependência pode ser de qualquer região do espaço, mas apenas no tempo m .

Para evitar que as notações fiquem muito carregadas, no que segue no trabalho, iremos denotar Ω um subconjunto do \mathbb{R}^n para $n \in \mathbb{N}$.



Capítulo 2

Medidas de Young e Soluções em Medida

“As idéias claras servem para falar, porém, são quase sempre as idéias confusas que movem nossas relações.” Joseph Joubert

Soluções aproximadas de leis de conservação podem ser geradas de uma variedade imensa de formas: pelo método da viscosidade nula, através de diferenças aproximadas, pelo esquemas de relaxação, etc (v. [14], [53]). Uma ferramenta que se tem mostrado eficiente na prova da convergência destas soluções aproximadas, para equações escalares e uma grande classe de sistemas de duas equações, é o método chamado de **Compacidade Compensada**.

Neste método, as soluções são construídas como limites de seqüências de soluções aproximadas que são somente limitadas em algum espaço L^p (vamos assumir que as soluções são limitadas em L^∞). Como a limitação em L^p garante apenas a convergência fraca (cf. Definição 11 no Cap. 1) e as equações e sistemas são em geral não-lineares, temos uma grande dificuldade na verificação de que um limite fraco de uma seqüência aproximada seja uma solução do nosso problema. Esta dificuldade surge do fato de que a composição com uma função não-linear não é uma operação contínua com relação à topologia fraca (cf. e.g. Exemplo 2 na Seção 2.1). Soluções aproximadas podem desenvolver freqüências de altas oscilações de amplitude finita que destroem a consistência da solução aproximada com a lei de conservação.

Compacidade Compensada foi um método introduzido por L.Tartar [62] e F.Murat [46], [47] para o estudo de sistemas de equações parciais não-lineares e aplicado pela primeira vez com sucesso para sistemas por DiPerna[15]-[17]. A idéia de aplicação de Compacidade Compensada a sistemas de leis de Conservação foi devida a Tartar que descreveu um plano e aplicou-o com sucesso ao caso escalar em uma dimensão do espaço.

DiPerna utilizou estas idéias e escreveu um célebre artigo [17], estabelecendo noções importantes de Compacidade Compensada, Soluções em Medida e Medidas de Young. Em [17], Di Perna prova a unicidade da solução fraca de um sistema da seguinte forma

$$\begin{aligned} u_t + f(u)_x &= 0 \\ u : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2, \end{aligned} \tag{2.1}$$

sob certas condições sobre a função fluxo f .

Entretanto, no seu trabalho ele estuda domínios de definição infinito para a função u , ou seja, não há condições de fronteira a serem consideradas. A única exigência colocada sobre a seqüência

aproximante, $\{u^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ é que ela seja uniformemente limitada em L^∞

$$\| u^k \|_{L^\infty} \leq \text{constante}. \quad (2.2)$$

Szepessy [59], definiu o conceito de soluções em medida para leis de conservações escalares com condições iniciais e de fronteira. Neste trabalho, utilizando a solução no sentido de Bardos [2], ele prova um resultado de unicidade de solução análogo ao provado por DiPerna [17].

Mais tarde, a noção de Compacidade Compensada, Medidas de Young e Solução em Medida, passou a ter uma grande importância para a análise numérica, na demonstração da convergência de métodos numéricos para leis de conservação, quando Szepessy [58] usou resultados de soluções em medida do trabalho de DiPerna [17] para a escrever o artigo “Shock capturing streamline diffusion finite element method for scalar conservation law in two dimension”. Outros autores também demonstraram outros métodos, por exemplo, F. Coquel and P.G. LeFloch [8], provaram a convergência do método de diferenças finitas. Mais tarde, usando as mesmas idéias anteriores, Kroner [34] provou a convergência para o método dos volumes finitos para regiões sem fronteira e posteriormente B. Cockburn F. Coquel and P.G. LeFloch [7] e Benharbit [3] provaram a convergência, sob certas condições, do método dos volumes finitos para regiões com fronteira, que é o assunto deste trabalho.

Neste capítulo iremos apresentar os conceitos, mas para não nos alongarmos demasiadamente no assunto, vamos apresentar as definições e os teoremas sem demonstrá-los, todas as demonstrações podem ser encontradas nas referências.

2.1 Convergência Fraca-Estrela

Aqui vamos considerar Ω sendo um aberto de \mathbb{R}^n e K um conjunto fechado de \mathbb{R}^m . Consideramos uma sequência de funções $u^k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, mensuráveis tais que $u^k(x) \in K$ para quase todo $x \in \Omega$. Nós lembramos que se $1 < q \leq \infty$, o espaço $L^q(\Omega)$ é isométrico ao dual topológico de $L^p(\Omega)$ no qual p é o expoente conjugado: $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$. Então podemos definir a topologia fraca-* (cf. Definição 10 no Cap.1) de $L^q(\Omega)$ a qual dá a convergência de sequências:

$$u^k \rightharpoonup u \iff \left(\int_{\Omega} u^k v dx \rightarrow \int_{\Omega} u v dx, \forall v \in L^p(\Omega) \right) \quad (2.3)$$

Se $q = \infty$ a definição aqui coincide com (1.10).

Para a topologia fraca-*, operações não lineares são, em geral, não contínuas: o que quer dizer que $u^k \rightharpoonup u$ não implica que $g(u^k) \rightharpoonup g(u)$, para $g \in C(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^r)$.

Um exemplo clássico, encontrado em Tartar[60], é o seguinte

Exemplo 2 *Suponhamos que $f \in C^\infty(\Omega)$ seja periódica de período T . Tomemos $v_n(x) = f(nx)$. Então*

$$v_n \rightharpoonup \alpha$$

em $L^\infty(\Omega)$ com a topologia fraca-* no qual

$$\alpha = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) dx = \text{média de } f$$

Mas $(v_n)^2 \rightharpoonup \beta = \text{média de } f^2$, e $\beta \neq \alpha^2$, a não ser que f seja constante para quase todo ponto $x \in \mathbb{R}$ (v. Teorema de Jensen, Teorema 6 Cap.1).

Então, é usual, quando $\{u^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de soluções aproximadas do sistema de leis de conservação, querer saber quando $\{u^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ pertencendo a um determinado conjunto K , a qual conjunto o limite fraco desta sequência (denotado por $u(x)$) pertencerá. Esta questão é importante pois nos dá uma limitação da região em que a solução toma valores.

A proposição que responde a esta pergunta, pode ser formulada da seguinte forma

Proposição 1 [53, pág. 42]

Sejam $1 < q \leq \infty$ $\{u^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ e u sendo elementos de $L^q(\Omega)$, tais que $u^k \rightharpoonup u$. Se $u^k(x) \in K$ para quase todo $x \in \Omega$, então $u(x) \in \text{co}(K)$ para quase todo $x \in \Omega$, no qual $\text{co}(K)$ denota o fecho da envoltória convexa de K (ver capítulo 3, def. para $K \subset \mathbb{R}$).

Lembrando o Teorema 4 do Capítulo 1 (Banach-Alaoglu), o qual podemos aplicar a uma sequência $\{u^k\}_{k \in \mathbb{N}} \in L^q(\Omega)$ ($q > 1$) limitada, podemos extrair uma sub-sequência $\{u_{k_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ que converge na topologia fraco-*, para um limite u , o qual satisfaz

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|u_0\|_{L^q(\Omega)}$$

Reciprocamente, o teorema de Banach-Steinhaus (v. [1]) assegura que toda sequência, fracamente convergente é limitada.

2.2 Medidas de Young

Medidas de Young foram introduzidas por L. C. Young em 1937, foram usadas por um longo tempo dando acesso a problemas não solúveis de otimização (v. Serre [53]), descrevendo a correlação entre o limite fraco e todas as expressões não lineares $g(u^k)$ para toda a sequência dada $\{u^k\}_{k \in \mathbb{N}}$.

Em todos os teoremas seguintes, vamos assumir que $\{u^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ é uma sequência uniformemente limitada em $L^\infty(\Omega)$, ou seja, é o mesmo que dizer que K é limitado.

Nestas condições, existe o teorema seguinte extremamente poderoso:

Teorema 10 [53, pág. 44]

Suponhamos que K seja um conjunto limitado em \mathbb{R}^m e Ω um conjunto aberto em \mathbb{R}^n .

Seja $\{u_k\}$ uma sequência de funções mensuráveis, com $u_k : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$, tal que $u_k(x) \in K$ q.t.p., $x \in \Omega$. Então existe uma subsequência $\{u_{k_j}\}$ e uma família de medidas de probabilidade ν_x , q.t.p. $x \in \Omega$, sobre \mathbb{R}^m com $\text{spt} \nu_x \subset K$ tal que se f é qualquer função contínua em \mathbb{R}^m e

$$\bar{f}(x) := \langle \nu_x, f(\cdot) \rangle \equiv \int_{\mathbb{R}^m} f(\lambda) d\nu_x(\lambda) \quad \text{q.t.p.}$$

então

$$f(\{u^{k_j}\}) \rightharpoonup \bar{f} \quad \text{em } L^\infty(\Omega) \text{ fraco} - *.$$

Definição 19 {Família de Medidas de Young}

Chamamos a família $\{\nu_x\}$, $x \in \Omega$ q.t.p., de uma **família de medidas de Young** associada a sequência $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$.

Observemos que podemos considerar a aplicação $x \rightarrow \nu_x$, definida para $x \in \Omega$ q.t.p., como sendo um elemento do espaço

$$\mathcal{Y} := \{\nu : \Omega \rightarrow P(K)\} \quad (2.4)$$

no qual $P(K)$ denota o conjunto das medidas de probabilidades com suporte em K ; cf. Definição 7 do Cap. 1.

Definição 20 {Convergência no Sentido de Young}

Dizemos que uma família de funções limitadas $\{u^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ **converge no sentido de Young** para $\nu \in \mathcal{Y}$ se $G(u^k) \rightarrow l_G$ para toda função $G \in C_b(\mathbb{R}^m)$, com $l_G(x) = \langle \nu_x, G \rangle$ para quase todo ponto x .

Muito freqüentemente, tentamos mostrar que uma sequência, que nós sabemos convergir no sentido de Young, converge de fato no sentido forte, ou seja, na norma de um espaço de Lebesgue. Em termos de medidas de Young podemos expressar estas questões na seguinte Proposição.

Proposição 2 [53, pág. 47]

Seja $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ sendo uma sequência de $L^\infty(\Omega)$ convergente no sentido Young para uma medida ν . Tomemos u sendo o seu limite fraco-*. As seguintes afirmações são equivalentes:

1. Existe um $p \in [1, \infty]$ tal que $\|u^k - u\|_{L^p(\omega)} \rightarrow 0$ para todo conjunto limitado e aberto $\omega \subset \Omega$.
2. Para quase todo $x \in \Omega$, ν_x é uma medida de Dirac.

Nesta Dissertação, na demonstração da convergência do método dos volumes finitos, tomaremos Ω como sendo limitado, então é necessário implementarmos estas definições com outras que lidem com a condição de fronteira. Szepessy [59], definiu o conceito de soluções em medida para leis de conservação escalares com condições iniciais e de fronteira, que apresentaremos na próxima seção.

2.3 Soluções de Valores em Medida de Leis de Conservação Escalares com Condições de Fronteira

Seja Ω um conjunto aberto limitado do \mathbb{R}^n com uma fronteira Lipschitziana $\Gamma = \partial\Omega$ e uma normal exterior unitária \vec{n} . Consideremos para $u : \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, o problema de valor inicial e de fronteira:

$$u_t + \nabla \cdot f(u) = 0 \quad \text{em } \Omega \times \mathbb{R}_+, \quad (2.5)$$

$$u(\cdot, 0) = u_0, \quad (2.6)$$

$$(sgn(u(x, t) - c) - sgn(u_1(x, t) - c))(f(u(\bar{x}, t)) - f(c)) \cdot \vec{n}(x) \geq 0, \quad (2.7)$$

para todo $c \in \mathbb{R}$, no qual $f = (f_1, f_2, \dots, f_d) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $u_1 : \Gamma \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ são funções suaves dadas e $sgn : \mathbb{R} \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ é como em (1.21).

Como foi feito anteriormente, vamos considerar uma seqüência $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, satisfazendo (2.2). Pelo teorema 10, existe uma subseqüência que iremos denotar ainda por $\{u_k\}$ e uma medida de Young $\nu_{(\cdot)} : \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow P(\mathbb{R})$, de forma que se verifiquem as condições do Teorema 10.

À medida de Young $\nu_{(\cdot)} : \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow P(\mathbb{R})$ associaremos uma outra medida $\gamma\nu_{(\cdot)} : \Gamma \times \mathbb{R}_+ \rightarrow P(\mathbb{R})$ que consideramos ser o traço de ν sobre $\Gamma \times \mathbb{R}_+$. Para esta proposta, conforme Szepessy [59] introduzimos a mudança de coordenadas $x \rightarrow (\bar{x}, y)$ para x em uma vizinhança de Γ :

$$x = \bar{x} - y\vec{n}(\bar{x}) \quad (2.8)$$

no qual $(\bar{x}, y) \in \Gamma \times (0, \varepsilon)$, para algum $\varepsilon > 0$.

Desta forma temos o seguinte Teorema

Teorema 11 [59, Lema 1.1]

Seja $\nu : \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow P(\mathbb{R})$ uma medida de Young associada a seqüência $\{u^k\}$ como na seção anterior. Então existem uma seqüência $\{y_j \in (0, \varepsilon)\}$ com $y_j \rightarrow 0$ e uma aplicação $\gamma\nu_{(\cdot)} : \Gamma \times \mathbb{R}_+ \rightarrow Prob(\mathbb{R})$ tal que $spt\gamma\nu_{(\cdot)}(\bar{x}, t)$ é compacto (para quase todo $(\bar{x}, t) \in \Gamma \times \mathbb{R}_+$) e, para toda $f \in C(\mathbb{R})$, a função

$$\bar{f}(\bar{x}, t) := \langle \gamma\nu_{(\bar{x}, t)}, f \rangle \equiv \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) d\gamma\nu_{(\bar{x}, t)}(\lambda), \quad (2.9)$$

é mensurável e a seqüência

$$\left\{ \langle \nu_{(\bar{x}(\cdot, y_j), \cdot)}, f \rangle \right\},$$

converge para \bar{f} na topologia fraca-* de $L^\infty(\Gamma \times \mathbb{R}_+)$, i.e.

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\Gamma \times \mathbb{R}_+} \langle \nu_{(\bar{x}(\bar{x}, y_j), t)}, f \rangle \phi d\bar{x}dt = \int_{\Gamma \times \mathbb{R}_+} \bar{f} d\bar{x}dt. \quad (2.10)$$

Agora, portanto, estamos prontos para darmos a definição de soluções de valores em medida para (2.5)-(2.7)

Definição 21 [59] {*Solução em Medida*}

A medida de Young $\nu_{(\cdot)} : \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow P(\mathbb{R})$, associada a uma seqüência $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ uniformemente limitada, satisfazendo (2.2), é uma *solução em medida (mv-solução)* para (2.5)-(2.7) se para toda $\phi \in C_0^1(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}_+)$ não negativa e para toda constante $c \in \mathbb{R}$, tivermos a desigualdade

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega \times \mathbb{R}_+} (\langle \nu_{(x,t)}, |\lambda - c| \rangle \phi_t + \langle \nu_{(x,t)}, (\text{sgn}(\lambda - c))(f(\lambda) - f(c)) \rangle \cdot \nabla_x \phi) dxdt \\ & - \int_{\Gamma \times \mathbb{R}_+} \langle \gamma \nu_{(x,t)}, f(\lambda) - f(c) \rangle \cdot \vec{n}(\bar{x}) \phi \text{sgn}(u_1 - c) d\bar{x}dt \geq 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

e, além disso, o dado inicial é assumido no seguinte sentido:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\Omega} \langle \nu_{(x,t)}, |\lambda - u_0| \rangle dx = 0. \quad (2.12)$$

Em [3], Benharbit modifica a Definição 21. Usando a definição de Benharbit, a demonstração da convergência do método dos volumes finitos fica bem mais simples. Isto porque é mais fácil obter uma estimativa para os dados iniciais do que obter a convergência da medida nos dados iniciais.

Definição 22 [3] {*Solução em Medida*}

Uma medida de Young $\nu_{(\cdot)} : \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow P(\mathbb{R})$ é uma *mv-solução* para (2.11)-(2.12) se

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega \times \mathbb{R}_+} (\langle \nu_{(x,t)}, |\lambda - c| \rangle \phi_t + \langle \nu_{(x,t)}, (\text{sgn}(\lambda - c))(f(\lambda) - f(c)) \rangle \cdot \nabla_x \phi) dxdt \\ & - \int_{\Gamma \times \mathbb{R}_+} \langle \gamma \nu_{(x,t)}, f(\lambda) - f(c) \rangle \cdot \vec{n}(\bar{x}) \phi \text{sgn}(u_1 - c) dxdt + \int_{\Omega} |u_0(x) - c| \phi(x, 0) dx \geq 0, \quad (2.13) \\ & \forall \phi \geq 0 \in C_0^1(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}_+), \quad \forall c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

A Definição 22 é mais próxima da definição de Bardos [2] e proporciona, portanto, um critério mais simples para a verificação da convergência de soluções aproximadas (Teorema 13 abaixo). A demonstração a seguir, reproduzida de [3], estabelece que a Definição 22 é mais forte que a Definição 21.

Teorema 12 [3, Teorema 2.4]

Seja uma medida de Young $\nu : \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow P(\mathbb{R})$ uma *mv-solução* para (2.4)-(2.6) no sentido da Definição 22. Então é também uma *solução* no sentido da Definição 21. Em particular, a unicidade do Teorema 13 abaixo também segue para a *mv-solução* da Definição 22.

Demonstração

Tomando $\phi \in C_0^1(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}_+)$ em (2.13), imediatamente obtemos (2.11). Isto é óbvio pois basta escolher uma $\phi(x, 0)$ que se anula nos dados iniciais.

Tomando agora $\phi = r_\epsilon(t)\varphi(x)$ como uma função teste em (2.13) com $\varphi \in C^1(\bar{\Omega})$ positiva; e $r_\epsilon(t)$ uma regularização adequada da função de Heaviside em $t = t_0$, $t_0 > 0$ arbitrário, e tomando ϵ

tendendo a 0, obtemos

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left(\langle \nu_{(x,t_0)}, |\lambda - c| \rangle \varphi(x) dx + \int_0^{t_0} \langle \nu_{(x,t)}, (\text{sgn}(\lambda - c))(f(\lambda) - f(c)) \rangle \cdot \nabla_x \varphi \right) dx dt \\ & - \int_0^{t_0} \int_{\Gamma} \langle \gamma \nu_{(x,t)}, f(\lambda) - f(c) \rangle \cdot \vec{n}(\bar{x}) \phi \text{sgn}(u_1 - c) dx dt + \int_{\Omega} |u_0(x) - c| \phi(x, 0) dx \geq 0, \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\forall \phi \geq 0 \in C^1(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}_+), \quad \forall c \in \mathbb{R}, \quad t_0 > 0 \text{ q.t.p}$$

Fazendo $t_0 \rightarrow 0$ e depois escrevendo $t = t_0$, obtemos

$$\begin{aligned} & - \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\Omega} \langle \nu_{(x,t)}, |\lambda - c| \rangle \varphi(x) dx + \int_{\Omega} |u_0(x) - c| \varphi(x) dx \geq 0, \\ & \forall \varphi \in C^1(\bar{\Omega}), \quad \forall c \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Agora, considerando que a medida de Young está associada com uma seqüência de funções uniformemente limitada em $L^\infty(\Omega)$, tomando consecutivamente $c = +M$ e $c = -M$ com M suficientemente grande em (2.14), obtemos

$$\begin{aligned} & - \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\Omega} \langle \nu_{(x,t)}, \lambda \rangle \varphi(x) dx + \int_{\Omega} u_0(x) \varphi(x) dx = 0, \\ & \forall \varphi \in C^1(\bar{\Omega}), \quad t > 0 \text{ q.t.p.} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Considerando $|\lambda|^2$ como o limite de combinações convexas finitas de $|\lambda - c|$ e tomando $\varphi \equiv 1$ em (2.14), obtemos que

$$- \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\Omega} \langle \nu_{x,t}, |\lambda|^2 \rangle dx + \int_{\Omega} |u_0(x)|^2 dx \geq 0, \quad t > 0 \text{ q.t.p.} \quad (2.17)$$

Agora estamos prontos para provar que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\Omega} \langle \nu_{(x,t)}, |\lambda - u_0(x)|^2 \rangle dx = 0 \quad (2.18)$$

Observemos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \langle \nu_{(x,t)}, |\lambda - u_0(x)|^2 \rangle dx &= \int_{\Omega} \langle \nu_{(x,t)}, |\lambda|^2 - |u_0(x)|^2 - 2u_0(x)(\lambda - u_0(x)) \rangle dx \\ &= \int_{\Omega} \langle \nu_{(x,t)}, |\lambda|^2 - |u_0(x)|^2 \rangle dx - \int_{\Omega} 2u_0(x) \langle \nu_{(x,t)}, \lambda - u_0(x) \rangle dx \end{aligned} \quad (2.19)$$

Tomando $t \rightarrow 0$, usando (2.16) e (2.15), com $\varphi = u_0$ obtemos

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\Omega} \langle \nu_{(x,t)}, |\lambda - u_0(x)|^2 \rangle dx \leq 0,$$

logo

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\Omega} \langle \nu_{(x,t)}, |\lambda - u_0(x)|^2 \rangle dx = 0,$$

já que o integrando é não negativo. Podemos tomar $\varphi = u_0$ em (2.15) via regularização de u_0 , pois $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ e Ω é limitado.

Considerando que

$$|\lambda - u_0(x)| \leq \varepsilon + \frac{|\lambda - u_0(x)|^2}{\varepsilon}$$

para ε arbitrariamente positivo e que Ω é limitado, concluímos que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\Omega} \langle \nu_{x,t}, |\lambda - u_0(x)| \rangle dx = 0. \quad \blacksquare$$

O Teorema central para análise da Solução em Medida com condições de fronteira é o seguinte

Teorema 13 [59, Teorema 1.1]

Suponhamos que $u_0 \in BV(\Omega)$ e que a medida de Young ν associada a uma seqüência $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ seja uma mv -solução de (2.11)-(2.12) (em particular, vale no sentido da Definição 22). Então, para quase todo $(x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+$,

$$\nu_{(x,t)} = \delta_{u(x,t)}, \quad (2.20)$$

no qual u é a única solução de (2.5)-(2.7) no espaço BV .

Em particular, (a menos de uma passagem a uma subsequência) temos que $\{u_k\}$ converge fortemente para u , i.e. em $L^1_{loc}(\Omega \times \mathbb{R}_+)$ (cf. Proposição 2 na Seção 2.2)

Então para mostrar a convergência do método dos volumes finitos podemos usar somente o Teorema acima devido a Szepessy ([59]). Saliemos que em todas as estimativas e na existência das medidas basta a limitação da seqüência em $L^\infty(\Omega)$. A idéia da demonstração dos volumes finitos, é justamente conseguir condições para que a seqüência de aproximação do método seja uma mv -solução. Neste caso, teremos que a seqüência encontrada possui uma subsequência na que converge fortemente para a u . A convergência forte para toda a seqüência seguirá do teorema de unicidade da solução entrópica de Bardos. O Capítulo seguinte será todo dedicado a mostrar que o método dos volumes finitos satisfará a condição de ser uma mv -solução e que, portanto, o método numérico é convergente na norma do $L^p(\Omega)$ para qualquer $p \in [1, \infty)$.

Capítulo 3

Método dos Volumes Finitos n -Dimensional

“A verdadeira viagem de descoberta não consiste em procurar novas paisagens, mas em ter novos olhos.” Marcel Proust

Neste Capítulo vamos explicar em detalhes o método dos volumes finitos para uma Lei de Conservação escalar a várias variáveis espaciais com condições iniciais e de fronteira (v (2.5)-(2.7)). Provaremos que o método é convergente (localmente) em qualquer norma $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, para uma solução entrópica no problema de valor inicial e de fronteira (2.5)-(2.7), conforme a Definição 22 no Capítulo 2.

O método dos volumes finitos é baseado na propriedade de conservação local e pode ser definido sobre “triangulações” gerais. O mesmo é largamente utilizado em dinâmica dos fluidos computacional. Neste capítulo, daremos a demonstração do método para dimensão qualquer. No próximo Capítulo apresentaremos uma formulação uni e bidimensionais com simulações numéricas.

Por uma **triangulação** de um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, entendemos uma partição τ^h (h definido abaixo; v.(3.1)) por poliedros K quaisquer não vazios, abertos tais que:

$$\bigcup_{K \in \tau^h} \bar{K} = \bar{\Omega}$$

e dados dois poliedros distintos K e K' em τ^h , a intersecção $\bar{K} \cap \bar{K}'$ ou é uma face de K e K' , ou é um conjunto com dimensão de Hausdorff menor ou igual a $n - 2$. As faces do poliedro K serão denotadas por e . Por ν_K e $\nu_{e,K}$ denotaremos respectivamente as normais unitárias da fronteira ∂K e da face e de K , ambas apontando para o exterior de K ($\nu_{e,K} = \nu_K|_e$). Dada uma face e de K , K_e representa o único poliedro que compartilha a mesma face e com K .

O volume de K (n - medida de Hausdorff) e a $(n - 1)$ -medida de Hausdorff de e serão denotados, respectivamente, por $|K|$ e $|e|$. Por $\partial\tau^h$ nós denotamos o conjunto de todos os lados de elementos em τ^h que pertençam a $\partial\Omega$. Quando $K \in \tau^h$ admite um lado $e \in \partial\tau^h \cap \partial K$ nós usamos a notação K_e para denotar um elemento “fictício” localizado ao longo da fronteira de Ω . Este poliedro será usado para conter os dados de fronteira. Este é chamado de fictício pois o elemento após a fronteira não precisa existir, mas, de acordo com a definição do método (v. (3.7)), será importante para a implementação do mesmo.

Vamos considerar que

$$h = \sup_{K \in \tau^h} h_K < \infty \quad (3.1)$$

no qual h_K é o **diâmetro exterior do poliedro** (o maior diâmetro das faces do elemento). O **perímetro** de K , i. e. soma das medidas de suas faces, é definido como

$$p_k = \sum_{e \in \partial K} |e|$$

O **incremento do tempo** será denotado por τ , i.e. $\tau = \Delta t$, e assumimos que

$$\tau \longrightarrow 0 \quad \text{e} \quad \frac{h^2}{\tau} \longrightarrow 0 \quad \text{quando} \quad h \longrightarrow 0 \quad (3.2)$$

Também denotaremos $t_n = n\tau$; para que não haja confusão entre τ e τ^h (triangulação) a segunda sempre vem indicada com um h superior.

Definição 23 {Funções de Fluxo Numérico}

Associada com cada face “ e ” de cada poliedro $K \in \tau^h$, introduzimos uma família de funções $g_{e,K} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

1. **Consistência**

$$g_{e,K}(u, u) = f(u) \cdot \nu_{K,e} \quad (3.3)$$

válida para todos os números reais u e “ e ”.

2. **Localmente Lipschitzianas**, ou seja, dado $M > 0$ existe uma constante $C_{g_{e,K}} = C_{g_{e,K}}(M)$ tal que para todos $u, u', v, v' \in [-M, M]$, temos

$$|g_{e,K}(u, v) - g_{e,K}(u', v')| \leq C_{g_{e,K}}(M)(|u - u'| + |v - v'|) \quad (3.4)$$

3. **Conservação**

$$g_{e,K}(u, v) = -g_{e,K_e}(v, u) \quad (3.5)$$

Esta é uma propriedade de conservação, pois estabelece, grosseiramente, que o fluxo através do lado de um elemento é igual a menos o mesmo fluxo através do seu vizinho (lembramos que K_e é o elemento vizinho ao elemento K com a face e).

4. **Monotividade**

$$\frac{\partial g_{e,K}}{\partial u} \geq 0, \quad \frac{\partial g_{e,K}}{\partial v} \leq 0 \quad (3.6)$$

Observemos que como $g_{e,K}$ é localmente Lipschitz tem como constante de Lipschitz a norma do máximo da derivada localmente.

Observação: A existência de funções de fluxo numérico será demonstrada no Lema 3 neste Capítulo. Mais precisamente, vide (3.26) na demonstração do Lema 3 abaixo.

Definição 24 {Aproximação pelo Método dos Volumes Finitos}

A **aproximação pelo método dos volumes finitos** é definida através da família de fluxo numérico $g_{e,K}$ pelo seguinte esquema

$$u_K^{n+1} = u_K^n - \sum_{e \in \partial K} \frac{\tau|e|}{|K|} g_{e,K}(u_K^n, u_{K_e}^n) \quad (3.7)$$

para todos os poliedros K e para todos os naturais n .

Observamos que o método dos volumes finitos assim construído é um método explícito, conforme a Definição 18.

A condição inicial u_0 será tomada como a média sobre cada elemento K , e não pontualmente; isto é necessário, pois em geral a função $u(x, t)$ não é definida pontualmente (pode possuir descontinuidades em alguns pontos da solução):

$$u_K^0 = \frac{1}{|K|} \int_K u_0(x) dx \quad (3.8)$$

para todos os poliedros K .

Para $e \in \partial\tau^h$, tomamos

$$u_{K_e}^n = \frac{1}{\Delta t|e|} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_e u_1(x, t) dt d\Gamma. \quad (3.9)$$

Lembramos que u_1 é o dado da fronteira.

Definamos uma função constante por partes $u^h : \bar{\Omega} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$u^h(x, t) = u_K^n, \quad n\tau \leq t < (n+1)\tau, \quad x \in K \quad (3.10)$$

Como o método dos volumes finitos é um esquema explícito, devemos impor a restrição CFL (1.52). O principal resultado desse trabalho é o seguinte teorema (que será demonstrado no que segue):

Teorema 14 (Teorema Principal) [7, Teorema 2.1]

Suponhamos que a condição CFL (1.52) seja satisfeita. Então o método dos volumes finitos (3.7)-(3.10) nas condições acima é uniformemente estável e converge (localmente) em qualquer norma L^p , $1 \leq p < \infty$. Mais precisamente, para quaisquer $T > 0$ e $1 \leq p < \infty$, temos as seguintes estimativas e convergência:

$$\begin{aligned} \|u^h(T)\|_{L^p(\Omega)} &\leq \|u_0\|_{L^p(\Omega)} + \mathcal{O}(1) \|u_1\|_{L^1(L^1(\partial\Omega))}^{1/p} \|u_1\|_{L^\infty(L^\infty(\partial\Omega))}^{1-1/p} \\ &+ \mathcal{O}(1) \left(\|u_0\|_{L^p(\Omega)}^{1/p} + \|u_1\|_{L^\infty(L^\infty(\partial\Omega))}^{1/p} \right) \|u_1\|_{L^1(L^{1-1/p}(\partial\Omega))}^{1-1/p} \end{aligned} \quad (3.11)$$

e

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u^h - u\|_{L^p(\Omega \times (0, T))} = 0 \quad (3.12)$$

A demonstração do teorema será feita na seqüência do trabalho. Inicialmente será preciso fazer algumas estimativas para entropia e para o valor da aproximação u^h .

Observemos que (3.11) dá uma limitação ao método. Somente esta desigualdade não é suficiente para garantir a convergência do mesmo, nem para dar uma estabilidade. Entretanto, juntamente com a condição (3.12) tal estabilidade é imediatamente conseguida pois a convergência da seqüência aproximante é em alguma norma de L^p , que é uma convergência forte.

No capítulo seguinte iremos fazer algumas simulações numéricas do método dos volumes finitos. É fácil de perceber que caso a condição (1.52) não seja satisfeita a solução numérica obtida passa a oscilar. Por este fato, o método é dito condicionalmente estável (o que é verdade para quase todos os métodos numéricos simulando numericamente uma lei de conservação); v. Seção 1.3.1.

3.1 Estimativas Discretas para as Desigualdades de Entropia

Nesta seção contruiremos desigualdades de entropia discretas que serão usadas na demonstração do Teorema 14. Para isto nos utilizaremos das afirmações feitas na seção anterior e notações dos Capítulos 1 e 2.

Na Proposição 4, daremos uma estimativa para a dissipação nas soluções aproximadas; posteriormente, encontraremos uma nova forma das desigualdades de entropia discreta. Na seção 3.2, faremos a passagem para o limite nas desigualdades de entropia encontradas.

No Lema 2 abaixo, encontraremos uma limitação para a solução aproximada u_K , o que será utilizado para a construção da medida de Young seguindo as condições do Capítulo 2.

Lema 2 {Princípio do Máximo Local}

Para qualquer poliedro $K \in \tau^h$ e qualquer natural n , o método dos volumes finitos satisfaz, **Princípio do Máximo Local**

$$a \leq u_K^{n+1} \leq b \quad (3.13)$$

no qual $a = \min(u_K^n, \min_{e \in \delta K} u_{K_e}^n)$ e $b = \max(u_K^n, \max_{e \in \delta K} u_{K_e}^n)$.

Demonstração

Começemos reescrevendo (3.7) da seguinte forma

$$u_K^{n+1} = u_K^n - \frac{\tau|e|}{|K|} \sum_{e \in \partial K} \{g_{e,K}(u_K^n, u_{K_e}^n) + (g_{e,K}(u_K^n, u_K^n) - g_{e,K}(u_K^n, u_K^n))\} \frac{u_{K_e}^n - u_K^n}{u_{K_e}^n - u_K^n} \quad (3.14)$$

rearranjando os termos temos

$$\begin{aligned} u_K^{n+1} = & \left\{1 + \frac{\tau}{|K|} \sum_{e \in \partial K} \frac{g_{e,K}(u_K^n, u_{K_e}^n) - g_{e,K}(u_K^n, u_K^n)}{u_{K_e}^n - u_K^n} |e|\right\} u_K^n \\ & + \frac{\tau}{|K|} \sum_{e \in \partial K} \left\{-\frac{g_{e,K}(u_K^n, u_{K_e}^n) - g_{e,K}(u_K^n, u_K^n)}{u_{K_e}^n - u_K^n}\right\} |e| u_{K_e}^n \end{aligned} \quad (3.15)$$

que é uma combinação convexa de u_K^n e $(u_{K_e}^n)_{e \in \partial K}$. De fato, como estamos assumindo que o método é monótono, ou seja, satisfaz (3.6) e, em particular, é decrescente na segunda variável, temos

$$-\frac{\tau}{|K|} \frac{g_{e,K}(u_K^n, u_{K_e}^n) - g_{e,K}(u_K^n, u_K^n)}{u_{K_e}^n - u_K^n} \geq 0 \quad (3.16)$$

e

$$\begin{aligned} \sum_{e \in \partial K} \frac{\tau |e|}{|K|} \frac{g_{e,K}(u_K^n, u_{K_e}^n) - g_{e,K}(u_K^n, u_K^n)}{u_{K_e}^n - u_K^n} &\leq \sum_{e \in \partial K} \frac{\tau |e|}{|K|} \left\| \frac{df}{du} \right\|_{L^\infty} \\ &= \frac{\tau p_K}{K} \left\| \frac{df}{du} \right\|_{L^\infty} \leq 1. \end{aligned} \quad (3.17)$$

A última desigualdade é satisfeita pela condição CFL (1.52).

O princípio do máximo local (3.13), segue imediatamente de (3.15) observando que sendo u_K^{n+1} uma combinação convexa de u_K^n e $(u_{K_e}^n)_{e \in \partial K}$, então pertence ao mesmo intervalo contendo u_K^n e todos os $u_{K_e}^n$'s, i. e., u_K^{n+1} satisfaz (3.15). Mais precisamente, temos

$$\begin{aligned} u_K^{n+1} &\leq \left\{ 1 + \frac{\tau}{|K|} \sum_{e \in \partial K} \frac{g_{e,K}(u_K^n, u_{K_e}^n) - g_{e,K}(u_K^n, u_K^n)}{u_{K_e}^n - u_K^n} |e| \right\} b \\ &\quad + \frac{\tau}{|K|} \sum_{e \in \partial K} \left\{ -\frac{g_{e,K}(u_K^n, u_{K_e}^n) - g_{e,K}(u_K^n, u_K^n)}{u_{K_e}^n - u_K^n} \right\} |e| b \\ &\leq b. \end{aligned}$$

Analogamente temos $u_K^{n+1} \geq a$. ■

A seguinte decomposição foi introduzida em [61]:

$$u_K^n = \frac{1}{p_K} \sum_{e \in \partial K} |e| u_{K_e}^{n+1} \quad (3.18)$$

no qual

$$u_{K_e}^{n+1} = u_K^n - \frac{\tau p_K}{|K|} \left\{ g_{e,K}(u_K^n, u_{K_e}^n) - g_{e,K}(u_K^n, u_K^n) \right\}. \quad (3.19)$$

A desigualdade (3.18) será extremamente útil para análises posteriores, e é facilmente obtida de (3.3)-(3.5), utilizando-se (3.19).

Para isto basta observar que

$$\sum_{e \in \partial K} |e| g_{e,K}(u_K^n, u_K^n) = 0$$

pois em virtude da propriedade da consistência (3.3), temos

$$\begin{aligned} \sum_{e \in \partial K} |e| g_{e,K}(u_K^n, u_K^n) &= \sum_{e \in \partial K} |e| f(u_K^n) \cdot \nu_{e,K} = \int_{\partial K} f(u_K^n) \cdot \nu_K \\ &= \int_K \nabla \cdot f(u_K^n) = 0, \end{aligned}$$

no qual usamos o Teorema da Divergência e que o campo $f(u_K^n)$ é constante em K .

Vamos propor um **fluxo de entropia numérico** similarmente ao proposto para o fluxo numérico (v. Definição 23 neste Capítulo), seguindo [35].

Definição 25 {Fluxo de Entropia Numérico}

Seja $U : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função Lipschitziana e convexa, e tomemos (U, F) sendo um par de entropia para a Lei de Conservação (2.4). Um **fluxo de entropia numérico**, associado ao par (e, K) , $e \subset \partial K$ e a um fluxo numérico $g_{e,K}$, é uma função $G_{e,K}$ com as seguintes propriedades:

1. *Consistência com F*

$$G_{e,K}(u, u) = F(u) \cdot \nu_{e,K} \quad \forall u \in \mathbb{R}; \quad (3.20)$$

2. *Condição Local de Lipschitz.* Dado $M > 0$, existe uma constante $C_{G_{e,K}} = C_{G_{e,K}}(M)$ tal que para todos $u, u', v, v' \in [-M, M] \subset \mathbb{R}$ temos

$$|G_{e,K}(u, v) - G_{e,K}(u', v')| \leq C_{G_{e,K}}(M)(|u - u'| + |v - v'|); \quad (3.21)$$

3. *Conservação*

$$G_{e,K}(u, v) = -G_{e,K_e}(v, u), \quad \forall u, v \in \mathbb{R}; \quad (3.22)$$

4. *Condições de Compatibilidade*

$$\frac{\partial G_{e,K}}{\partial u}(u, v) = U'(u) \frac{\partial g_{e,K}}{\partial u}(u, v) \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial G_{e,K}}{\partial v}(u, v) = U'(u) \frac{\partial g_{e,K}}{\partial v}(u, v)$$

para quase todo ponto $u, v \in \mathbb{R}$

O seguinte lema é consequência das propriedades do fluxo numérico $g_{e,K}$. Este lema, que aparece primeiramente em Kroner [35] irá estabelecer uma relação entre a entropia, fluxos de entropia e fluxos numéricos de entropia, de forma que possamos caracterizá-los mais facilmente quando formos construir um esquema numérico posteriormente.

Lema 3 *As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *Para todas as entropias convexas Lipschitzianas U , existe um fluxo de entropia numérico $G_{e,K}$ e um fluxo numérico $g_{e,K}$ ao qual $G_{e,K}$ é associado.*
2. *Para todas as entropias de Kruzkov $U(\cdot, c)$, conforme (1.20), existe um fluxo de entropia numérico.*
3. *Existem funções Lipschitzianas $\phi_{e,K}, \psi_{e,K} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ com $\phi_{e,K}(0) = 0 = \psi_{e,K}(0)$,*

$$\phi_{e,K} \equiv \psi_{e,K_e} \quad (3.24)$$

e constantes $C_\phi(M), C_\psi(M) > 0$ tais que para quase todo $s \in [-M, M]$

$$C_\phi(M) \geq \phi'_{e,K}(s) \geq \frac{1}{2}|f'(s) \cdot \nu_{e,K}| \quad (3.25)$$

$$C_\psi(M) \geq \psi'_{e,K}(s) \geq \frac{1}{2}|f'(s) \cdot \nu_{e,K}|$$

e

$$g_{e,K}(u, v) = \frac{f(u) + f(v)}{2} \cdot \nu_{e,K} + \begin{cases} \phi_{e,K}(u) - \phi_{e,K}(v) & \text{para } v \geq u \\ \psi_{e,K}(u) - \psi_{e,K}(v) & \text{para } v < u \end{cases} \quad (3.26)$$

Demonstração

Pela definição de entropia de Kruzkov (1.20), (1) implica (2).

Agora vamos mostrar que (3) implica (1). Não é difícil checar que $g_{e,K}$ dado por (3.26) satisfaz as propriedades (3.3-3.6). De fato, a propriedade da consistência (3.3) é imediata.

A propriedade de $g_{e,K}$ ser Lipschitziana é imediata também pois é soma de funções Lipschitzianas.

A propriedade de conservação (3.5) é consequência que $\nu_{e,K} = -\nu_{e,K_e}$, de fato, trocando u por v em (3.26) e e, K por e, K_e no primeiro termo do lado direito desta mesma igualdade, temos

$$g_{e,K}(v, u) = \frac{f(v) + f(u)}{2} \cdot (-\nu_{e,K_e}) + \begin{cases} \phi_{e,K}(v) - \phi_{e,K}(u) & \text{para } v \geq u \\ \psi_{e,K}(v) - \psi_{e,K}(u) & \text{para } v < u \end{cases} \quad (3.27)$$

agora observando (3.24), e da relação acima

$$g_{e,K}(v, u) = -\frac{f(v) + f(u)}{2} \cdot (\nu_{e,K_e}) + \begin{cases} \psi_{e,K_e}(v) - \psi_{e,K_e}(u) & \text{para } v \geq u \\ \phi_{e,K_e}(v) - \phi_{e,K_e}(u) & \text{para } v < u \end{cases} \quad (3.28)$$

rearranjando os termos, encontramos

$$g_{e,K}(v, u) = -g_{e,K_e}(u, v) \quad (3.29)$$

A monotonicidade vem imediatamente derivando-se a função para quase todo ponto (vamos fazer para $\frac{\partial g_{e,K}}{\partial u}$ e $u > v$, os outros casos são semelhantes):

$$\frac{\partial g_{e,K}}{\partial u}(u, v) = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \nu_{e,K} + \frac{\partial \psi_{e,K}}{\partial u} \geq \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \nu_{e,K} + \frac{1}{2} \left| \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \nu_{e,K} \right| \geq 0$$

para o segundo termo estamos usando (3.25).

Agora dado um par de entropia (U, F) , tomemos

$$G_{e,K}(u, v) := F(0) \cdot \nu_{e,K} + \int_0^u U'(s) \partial_u g_{e,K}(s, v) ds + \int_0^v U'(t) \partial_v g_{e,K}(u, t) dt$$

Usando (3.23), e a definição do par de entropia (U, F) , podemos escrever a igualdade acima como:

$$G_{e,K} = \frac{F(u) + F(v)}{2} \cdot n_{ij} + \begin{cases} \int_v^u U'(s) \phi'(s) ds & \text{para } v \geq u \\ \int_v^u U'(s) \psi'(s) ds & \text{para } v < u \end{cases}$$

Então $G_{e,K}$ satisfaz (3.20-3.23), a verificação é similar a feita para $g_{e,K}$.

Finalmente, nós devemos mostrar que (2) implica (3).

Para isto tomemos uma função φ que satisfaz:

1. $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$;
2. $\text{spt} \phi \subset (-1, 1) \times (-1, 1)$;
3. $\varphi \geq 0$;

4. $\int \varphi = 1$;

5. e para $\epsilon > 0$ definimos $\varphi_\epsilon(s, t) := \frac{1}{\epsilon^2} \varphi\left(\frac{s}{\epsilon}, \frac{t}{\epsilon}\right)$.

Escolhamos $c := \frac{u+v}{2}$, quando $v \geq u + 4\epsilon$.

Então c satisfaz a seguinte desigualdade

$$u + 2\epsilon \leq c \leq v - 2\epsilon.$$

Escolhamos $\{e, K\}$ fixos e vamos por um instante esquecer dos índices de ν , g e G . Tomemos $U(s) := |s - c|$, a entropia de Kruzkov. Então para todo $(s, t) \in [-\epsilon, \epsilon] \times [-\epsilon, \epsilon]$,

$$U'(u - s) = -1 = -U'(v - t).$$

Como g , G e U são Lipschitzianas (3.23) dá-nos, para quase todo $(s, t) \in [-\epsilon, \epsilon] \times [-\epsilon, \epsilon]$, que

$$\begin{aligned} G_u(u - s, v - t) &= -g_u(u - s, v - t) \\ G_v(u - s, v - t) &= g_v(u - s, v - t), \end{aligned} \tag{3.30}$$

no qual os subíndices indicam derivadas parciais, i. e.

$$G_u = \partial_u G = \frac{\partial G}{\partial u}.$$

Consideremos as convoluções

$$\begin{aligned} G^\epsilon &:= \varphi_\epsilon * G \\ g^\epsilon &:= \varphi_\epsilon * g. \end{aligned}$$

Como G e g são funções Lipschitzianas, do Teorema 1, obtemos

$$\begin{aligned} G_u^\epsilon(u - s, v - t) &= -g_u^\epsilon(u - s, v - t) \\ G_v^\epsilon(u - s, v - t) &= g_v^\epsilon(u - s, v - t). \end{aligned} \tag{3.31}$$

Como $\varphi^\epsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$,

$$G_{uv}^\epsilon(u - s, v - t) = G_{vu}^\epsilon(u - s, v - t)$$

logo, de (3.31), obtemos que

$$g_{uv}^\epsilon(u, v) = 0 \quad \text{para } v \geq u + 4\epsilon$$

Analogamente, podemos concluir que

$$g_{uv}^\epsilon(u, v) = 0 \quad \text{para } v \leq u - 4\epsilon$$

Tomemos, agora, $v > u + 4\epsilon > 2\epsilon$. Dessa forma podemos concluir que:

$$\begin{aligned} g^\epsilon(u, v) &= g^\epsilon(u, u + 4\epsilon) + \int_{u+4\epsilon}^v g_v^\epsilon(u, t) dt \\ &= g^\epsilon(u, u + 4\epsilon) + \int_{u+4\epsilon}^v g_v^\epsilon(-2\epsilon, t) dt \\ &= g^\epsilon(u, u + 4\epsilon) + g^\epsilon(-2\epsilon, v) - g^\epsilon(-2\epsilon, u + 4\epsilon) \end{aligned} \tag{3.32}$$

Fazendo $\epsilon \rightarrow 0$, usando o Teorema 2 do Capítulo 1 e a propriedade de consistência (3.3), obtemos para $v > u > 0$, que

$$g(u, v) = f(u) \cdot \nu + g(0, v) - g(0, u)$$

Consideremos agora $v > 2\epsilon > u + 4\epsilon$. Então, analogamente,

$$\begin{aligned} g^\epsilon(u, v) &= g^\epsilon(u, 2\epsilon) + \int_{2\epsilon}^v g_v^\epsilon(u, t) dt \\ &= g^\epsilon(u, 2\epsilon) + \int_{2\epsilon}^v g_v^\epsilon(-2\epsilon, t) dt \\ &= g^\epsilon(u, 2\epsilon) + g^\epsilon(-2\epsilon, v) - g^\epsilon(-2\epsilon, -2\epsilon) \end{aligned} \quad (3.33)$$

logo,

$$g(u, v) = -f(0) \cdot \nu + g(0, v) + g(u, 0)$$

para $v > 0 > u$.

Analogamente aos anteriores, obtemos

$$g(u, v) = \begin{cases} f(u) \cdot \nu - g(0, u) + g(0, v) & \text{para } v > u > 0 \text{ ou } v < u < 0 \\ g(u, 0) + g(0, v) - f(0) \cdot \nu & \text{para } v > 0 > u \text{ ou } v < 0 < u \\ g(u, 0) - g(v, 0) - f(v) \cdot \nu & \text{para } 0 > v > u \text{ ou } 0 < v < u \end{cases} \quad (3.34)$$

Da relação acima, podemos escrever g da forma

$$g(u, v) = \frac{f(u) + f(v)}{2} \cdot \nu + \begin{cases} \phi(u) - \phi(v) & \text{para } v \geq u \\ \psi(u) - \psi(v) & \text{para } v < u \end{cases} \quad (3.35)$$

no qual

$$\phi(s) = \begin{cases} \frac{f(s) + f(0)}{2} \cdot \nu - g(0, s) & \text{para } s \geq 0 \\ g(s, 0) - \frac{f(s) + f(0)}{2} \cdot \nu & \text{para } s < 0 \end{cases} \quad (3.36)$$

e

$$\psi(s) = \begin{cases} g(s, 0) - \frac{f(s) + f(0)}{2} \cdot \nu & \text{para } s \geq 0 \\ \frac{f(s) + f(0)}{2} \cdot \nu - g(0, s) & \text{para } s < 0 \end{cases} \quad (3.37)$$

Podemos checar facilmente que ϕ e ψ satisfazem as propriedades em 3. De fato, observe que para quase todo $s \in \mathbb{R}$ podemos encontrar as derivadas das funções e valem

$$\phi'(s) = \begin{cases} \frac{f'(s)}{2} \cdot \nu - \frac{\partial g(0, s)}{\partial v} & \text{para } s \geq 0 \\ \frac{\partial g(0, s)}{\partial u} - \frac{f'(s)}{2} \cdot \nu & \text{para } s < 0 \end{cases} \quad (3.38)$$

$$\psi'(s) = \begin{cases} \frac{\partial g(0, s)}{\partial u} - \frac{f'(s)}{2} \cdot \nu & \text{para } s \geq 0 \\ \frac{f'(s)}{2} \cdot \nu - \frac{\partial g(0, s)}{\partial v} & \text{para } s < 0 \end{cases} \quad (3.39)$$

Agora observe que sendo tanto as funções g como f Lipschitzianas então as derivadas existem em quase todo os pontos e são finitas. Observando atentamente cada uma das desigualdades acima e lembrando que g é monótona em cada variável, ou seja, satisfaz (3.6), as funções ϕ satisfazem as propriedades em 3:

Suponhamos por exemplo que para algum s

$$\frac{f'(s)}{2} \cdot \nu \geq 0$$

temos

$$\phi'(s) = \begin{cases} \frac{f'(s)}{2} \cdot \nu - \frac{\partial g(0, s)}{\partial v} \geq \frac{f'(s)}{2} \cdot \nu & \text{para } s \geq 0 \\ \frac{\partial g(0, s)}{\partial u} - \frac{f'(s)}{2} \cdot \nu & \text{para } s < 0 \end{cases}$$

o que implica que

$$\phi'(s) \geq \left| \frac{f'(s)}{2} \cdot \nu \right|$$

no caso de

$$\frac{f'(s)}{2} \cdot \nu \leq 0$$

temos

$$\phi'(s) = \begin{cases} \frac{f'(s)}{2} \cdot \nu - \frac{\partial g(0, s)}{\partial v} & \text{para } s \geq 0 \\ \frac{\partial g(0, s)}{\partial u} - \frac{f'(s)}{2} \cdot \nu \geq \frac{f'(s)}{2} \cdot \nu & \text{para } s < 0 \end{cases}$$

o que implica que

$$\phi'(s) \geq \left| \frac{f'(s)}{2} \cdot \nu \right|$$

então em qualquer caso ϕ verifica (3.25).

Analogamente, mostra-se que ψ satisfaz as condições de (3).

Também é possível mostrar que (3.34) e (3.35) coincidem; por exemplo, suponha que $u > v > 0$, então temos por (3.35) que

$$g(u, v) = \frac{f(u) + f(v)}{2} \cdot \nu + g(u, 0) - \frac{f(u) + f(0)}{2} \cdot \nu - \left(g(v, 0) - \frac{f(v) + f(0)}{2} \cdot \nu \right)$$

o que finalmente nos fornece

$$g(u, v) = f(v) \cdot \nu + g(u, 0) - g(v, 0)$$

para as outras condições podemos proceder da mesma forma, e o lema está provado. \blacksquare

A seguir vamos provar dois lemas que nos levarão à Proposição 4 abaixo. Tal Proposição nos dá a estimativa central para a demonstração do nosso Teorema Principal: Teorema 14 deste Capítulo. Ela é uma estimativa que fornece, em particular, um controle na norma L^p para as aproximações de volumes finitos.

Lema 4 *Sejam $(U, F) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ um par de entropia convexo, com U de classe C^2 . E $G_{e,K} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma família de fluxos de entropia numérico, associados aos fluxos numéricos $g_{e,K}$. Sob estas condições vale a seguinte “desigualdade de entropia discreta”*

$$U(u_{K_e}^{n+1}) - U(u_K^n) + \frac{\tau p_K}{K} \{G_{e,K}(u_K^n, u_{K_e}^n) - G_{e,K}(u_K^n, u_K^n)\} \leq 0 \quad (3.40)$$

para todas as faces $e \in \partial K$, para todos os poliedros K , e para todos os naturais n , no qual $u_{K_e}^n$ é definido em (3.29).

Demonstração

Vamos fixar u_K^n e definir para todo $t \in [-M, M]$

$$p(t) = U\left(u_K^n - \frac{\tau p_K}{K} \{g_{e,K}(u_K^n, t) - g_{e,K}(u_K^n, u_K^n)\}\right) - U(u_K^n) + \frac{\tau p_K}{K} \{G_{e,K}(u_K^n, t) - G_{e,K}(u_K^n, u_K^n)\}.$$

Para facilitar a notação, escreveremos

$$g_{e,K}(u_K^n, t) - g_{e,K}(u_K^n, u_K^n) = \Delta_2 g_{e,K}(u_K^n, t)$$

e

$$G_{e,K}(u_K^n, t) - G_{e,K}(u_K^n, u_K^n) = \Delta_2 G_{e,K}(u_K^n, t).$$

Para quase todo $t \in [-M, M]$, podemos derivar $p(t)$ obtendo

$$p'(t) = U'\left(u_K^n - \frac{\tau p_K}{K} \Delta_2 g_{e,K}(u_K^n, t)\right) \left[-\frac{\tau p_K}{K} \frac{\partial g_{e,K}(u_K^n, t)}{\partial v} \right] + \frac{\tau p_K}{K} \frac{\partial G_{e,K}(u_K^n, t)}{\partial v}.$$

Agora observando de (3.23) que

$$\frac{\partial G_{e,K}}{\partial v} = \frac{\partial g_{e,K}}{\partial v} U',$$

ficamos com

$$p'(t) = \frac{\tau p_K}{K} \frac{\partial g_{e,K}(u_K^n, t)}{\partial v} \left[U'(t) - U'\left(u_K^n - \frac{\tau p_K}{K} \Delta_2 g_{e,K}(u_K^n, t)\right) \right]$$

Usando o fato que U é de classe $C^2(\Omega)$, temos

$$p'(t) = \frac{\tau p_K}{K} \frac{\partial g_{e,K}(u_K^n, t)}{\partial v} U''(\eta) \left[t - u_K^n + \frac{\tau p_K}{K} \Delta_2 g_{e,K}(u_K^n, \bar{\eta})(t - u_K^n) \right]$$

para algum η entre t e $u_K^n + \frac{\tau p_K}{K} \Delta_2 g_{e,K}(u_K^n, t)$ e $\bar{\eta}$ entre u_j^n e t .

Logo,

$$p'(t) = \frac{\tau p_K}{K} \frac{\partial g_{e,K}(u_K^n, t)}{\partial v} U''(\eta)(t - u_K^n) \left[1 - \frac{\tau p_K}{K} \Delta_2 g_{e,K}(u_K^n, \bar{\eta}) \right].$$

Como $g_{e,K}$ é decrescente na segunda variável, i.e.

$$\frac{\partial g_{e,K}(u_K^n, t)}{\partial v} \leq 0,$$

U é convexa, ou seja, $U'' \geq 0$ para os valores em que está definido e lembrando a condição CFL, ou seja, neste caso vale que

$$1 - \frac{\tau p_K}{K} \Delta_2 g_{e,K}(u_K^n, \bar{\eta}) \geq 0$$

temos finalmente que:

1. Se $t \leq u_K^n$

$$p'(t) \geq 0 \quad (3.41)$$

ou seja, é não decrescente. Desde que para $t = u_j^n$

$$p(t) = 0$$

Isto nos fornece imediatamente que

$$p(t) \leq 0$$

2. Se $t > u_K^n$

$$p'(t) \leq 0 \quad (3.42)$$

ou seja, é não crescente. Desde que para $t = u_j^n$

$$p(t) = 0$$

Isto nos fornece imediatamente que

$$p(t) \leq 0$$

em qualquer caso, $p(t) \leq 0$ e temos a afirmação demonstrada, se tomarmos $t = u_{K_e}^n$. ■

Em geral, vamos tomar $U = \frac{|u|^p}{p}$ ou $U = |u|^p$ como nossa entropia. Caso $1 \leq p < 2$ a função U não é de classe $C^2(\Omega)$, mas podemos tomar uma seqüência de funções de classe $C^2(\Omega)$ aproximando as entropias do tipo acima. Como a desigualdade (3.40) envolve apenas diferenças entre funções, a desigualdade é mantida para o limite das funções de classe $C^2(\Omega)$ tendendo para as entropias do tipo $U = \frac{|u|^p}{p}$; desse modo podemos deduzir o seguinte corolário:

Corolário

Sejam $1 \leq p < \infty$, e $G_{e,K} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma família de fluxos de entropia numérico, associados aos fluxos numéricos $g_{e,K}$. Sob estas condições vale a seguinte desigualdade de entropia discreta

$$|u_{K_e}^{n+1}|^p - |u_K^n|^p + \frac{\tau p K}{K} \{G_{e,K}(u_K^n, u_{K_e}^n) - G_{e,K}(u_K^n, u_K^n)\} \leq 0 \quad (3.43)$$

para todas as faces $e \in \partial K$, para todos os poliedros K , e para todos os naturais n , no qual $u_{K_e}^n$ é definido em (3.39).

Demonstração

Usando a observação após a demonstração do Lema 4, caso $1 \leq p < 2$ podemos tomar uma seqüência de funções convexas de classe $C^2(\Omega)$ tendendo para $U(u) = |u|^p$ no Lema 4. Caso $2 \leq p < \infty$, a função é de classe $C^2(\Omega)$, e a demonstração está terminada. ■

De forma análoga ao lema anterior, podemos encontrar a seguinte formulação discreta para a condição de fronteira.

Lema 5 Seja (U, F) um par de entropia qualquer, U de classe $C^2(\Omega)$. Entã o temos a seguinte desigualdade para a condição de fronteira:

$$G_{e,K}(u_K^n, u_{K_e}^n) - F(u_{K_e}^n) \cdot \nu_{e,K} - \nabla U(u_{K_e}^n) \{g_{e,K}(u_K^n, u_{K_e}^n) - f(u_{K_e}^n) \cdot \nu_{e,K}\} \geq 0 \quad (3.44)$$

para cada $e \in \partial K$ e qualquer n natural.

Demonstração

Seja \bar{u} uma variável definida como:

$$\bar{u} := u_{K_e}^n + \lambda \{g_{e,K}(u_K^n, u_{K_e}^n) - f(u_{K_e}^n) \cdot \nu_{e,K}\} \quad (3.45)$$

para $\lambda > 0$ suficientemente pequeno, podemos verificar analogamente à demonstração do Lema 4, que para cada $e \in \partial\tau^h$ e para cada natural n que \bar{u} satisfaz a seguinte desigualdade de entropia

$$U(\bar{u}) - U(u_{K_e}^n) - \lambda \{G_{e,K}(u_K^n, u_{K_e}^n) - F(u_{K_e}^n) \cdot \nu_{e,K}\} \leq 0 \quad (3.46)$$

Por outro lado, se utilizarmos a convexidade de U , e a definição de \bar{u} , encontramos

$$\begin{aligned} U(\bar{u}) - U(u_{K_e}^n) &\geq \nabla U(u_{K_e}^n) \{\bar{u} - u_{K_e}^n\} \\ &\geq \lambda \nabla U(u_{K_e}^n) \{g_{e,K}(u_K^n, u_{K_e}^n) - f(u_{K_e}^n) \cdot \nu_{e,K}\} \end{aligned} \quad (3.47)$$

Se substituirmos agora a desigualdade acima em (3.46) encontramos

$$\lambda \nabla U(u_{K_e}^n) \{g_{e,K}(u_K^n, u_{K_e}^n) - f(u_{K_e}^n) \cdot \nu_{e,K}\} - \lambda \{G_{e,K}(u_K^n, u_{K_e}^n) - F(u_{K_e}^n) \cdot \nu_{e,K}\} \leq 0$$

Como $\lambda > 0$, a demonstração está terminada. \blacksquare

Corolário 2

Seja $U = \frac{|u|^p}{p}$ com $1 \leq p < \infty$, então a desigualdade de fronteira (3.44) é ainda válida.

A demonstração é análoga a do Corolário 1.

Definição 26 {Módulo da Convexidade}

Seja U uma função estritamente convexa $C^2(\Omega)$ num intervalo (a, b) . Definimos o **módulo da convexidade de U** por

$$\alpha = \min\{U''(w) \mid w \in [a, b]\} \quad (3.48)$$

Proposição 3 Seja uma função qualquer $U : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ estritamente convexa de classe $C^2(\Omega)$ com ∇U também convexa. Então para cada natural n , vale a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned} &\sum_{e \in \partial\tau^h} U(u_K^n) |K| + \frac{\alpha}{2} \sum_{e \in \partial\tau^h} \sum_{e \in \partial K} \frac{|e| |K|}{pK} |u_{K_e}^{n+1} - u_K^{n+1}|^2 \\ &\leq \sum_{e \in \partial\tau^h} U(u_K^{n+1}) |K| + \|\nabla U(u_1)\|_{L^\infty} \left\| \frac{df}{du} \right\|_{L^\infty} \|u_1\|_{L^1([t_n, t_{n+1}], L^1)} \\ &\quad + 2 \max(\|u_0\|_{L^\infty}, \|u_1\|_{L^\infty}) \left\| \frac{df}{du} \right\|_{L^\infty} \|\nabla U(u_1)\|_{L^1([t_n, t_{n+1}], L^1)} \end{aligned} \quad (3.49)$$

no qual α é o módulo da convexidade de U .

Para podermos demonstrar a Proposição anterior será necessário estabelecermos algumas definições e um seguinte lema técnico para funções estritamente convexas de classe $C^2(\Omega)$.

Observemos que da estimativa (3.49) podemos encontrar uma limitação uniforme para a dissipação de entropia total. Para tanto, fixemos $U(u) = u^2/2$ em (3.49). Percebamos neste caso que a derivada segunda de $U(u)$ é constante e vale 1, i.e., $\alpha = 1$. Passando o primeiro termo do lado esquerdo de (3.49) para o lado direito e somando sobre todos os n , teremos uma série

telescópica; observando que $U(u_n^K)$ vai a 0 quando n vai para o infinito, obtemos imediatamente que, para k suficientemente pequeno:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{e \in \partial\tau^h} \sum_{e \in \partial K} \frac{|e||K|}{p_K} |u_{K_e}^n - u_K^n|^2 \\ & \leq \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + 3 \max(\|u_0\|_{L^\infty}, \|u_1\|_{L^\infty}) \left\| \frac{df}{du} \right\|_{L^\infty} \|u_1\|_{L^1(L^1)}, \end{aligned} \quad (3.50)$$

o que nos fornece imediatamente:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{e \in \partial\tau^h} \sum_{e \in \partial K} \frac{|e||K|}{p_K} |u_{K_e}^n - u_K^n|^2 \\ & \leq \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + 6 \max(\|u_0\|_{L^\infty}, \|u_1\|_{L^\infty}) \left\| \frac{df}{du} \right\|_{L^\infty} \|u_1\|_{L^1(L^1)}. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Definição 27 {Combinação Convexa}

Dizemos que $v = \sum_{j=1}^q a_j v_j$ é uma **combinação convexa** dos números reais v_1, v_2, \dots, v_q se

1. $a_j \in [0, 1]$; e
2. $\sum_{j=1}^q a_j = 1$.

Definição 28 {Fecho da Envoltória Convexa}

Seja v_1, v_2, \dots, v_q uma seqüência qualquer de números reais, chamamos de **fecho da envoltória convexa** (denotada por $Co\{v_1, v_2, \dots, v_q\}$) ao conjunto

$$Co\{v_1, v_2, \dots, v_q\} = [\min v_i, \max v_i] \quad 1 \leq i \leq q \quad (3.52)$$

Lema 6 Tomemos $v = \sum_{j=1}^q a_j v_j$ uma combinação convexa dos números reais v_1, v_2, \dots, v_q e seja U uma função estritamente convexa, $\mathcal{C}^2(\Omega)$. Então a seguinte desigualdade é satisfeita

$$U(v) + \frac{\beta}{2} \sum_{j=1}^q a_j |v_j - v|^2 \leq \sum_{j=1}^q a_j U(v_j) \quad (3.53)$$

no qual

$$\beta = \inf\{U''(w) \mid w \in Co\{v_1, v_2, \dots, v_q\}\}$$

Demonstração do Lema 6

Considere, conforme o afirmado no acima a seguinte seqüência $v = \sum_{j=1}^q a_j v_j$. Vamos supor que (3.53) é verdade para para qualquer seqüência então temos

$$U(v) + \frac{\beta}{2} \sum_{j=1}^q a_j |v_j - v|^2 \leq \sum_{j=1}^q a_j U(v_j)$$

Devido a função U ser de classe $\mathcal{C}^2(\Omega)$ podemos expandir cada $U(v_j)$ em torno de v pela série de Taylor. Substituindo isso em (3.53)

$$U(v) + \frac{\beta}{2} \sum_{j=1}^q a_j |v_j - v|^2 \leq \sum_{j=1}^q a_j U(v) + \sum_{j=1}^q a_j U'(v)(v_j - v) + \sum_{j=1}^q a_j \frac{U''(\xi_j)}{2} |v_j - v|^2$$

no qual ξ_j pertence ao intervalo ligando v e v_j

Usando o fato que $\sum_{j=1}^q a_j = 1$, cancelando os termos iguais e passando tudo para o lado esquerdo da desigualdade obtemos

$$0 \leq \left(\sum_{j=1}^q a_j \frac{U''(\xi_j)}{2} |v_j - v|^2 - \frac{\beta}{2} \sum_{j=1}^q a_j |v_j - v|^2 \right) + U'(v) \sum_{j=1}^q a_j (v_j - v)$$

sendo $U''(\xi_j) \geq \beta \forall \xi_j \in \mathbb{R}$ (devido a definição de β) e usando, novamente, que $v = \sum_{j=1}^q a_j v_j$, verificamos realmente que a desigualdade segue. ■

Demonstração da Proposição 3

Consideremos v como a seguinte combinação convexa

$$v = u_K^{n+1} = \sum_{e \in \partial K} \frac{|e|}{p_K} u_{K_e}^{n+1}$$

Aplicando o Lema 6 anterior para uma função convexa de classe $C^2(\Omega)$ qualquer (lembramos da observação feita após o Lema 4, dessa forma teremos que a desigualdade (3.53) poderá ser aplicada a qualquer função convexa da forma $U(u) = \frac{|u|^p}{p}$, apesar de o teorema exigir que a função U seja estritamente convexa, a desigualdade vale para $p = 1$, $\beta = 0$, que é a definição de uma função convexa), obtemos

$$U(u_K^{n+1}) + \frac{\alpha}{2} \sum_{e \in \partial K} \frac{|e|}{p_K} |u_{K_e}^{n+1} - u_K^{n+1}|^2 \leq \sum_{e \in \partial K} \frac{|e|}{p_K} U(u_{K_e}^{n+1}) .$$

Agora podemos multiplicar a desigualdade acima pelo volume de um elemento K qualquer

$$U(u_K^{n+1})|K| + \frac{\alpha}{2} \sum_{e \in \partial K} \frac{|e||K|}{p_K} |u_{K_e}^{n+1} - u_K^{n+1}|^2 \leq \sum_{e \in \partial K} \frac{|e||K|}{p_K} U(u_{K_e}^{n+1}) \quad (3.54)$$

somando agora com respeito a K , temos

$$\sum_{K \in \tau^h} U(u_K^{n+1})|K| + \frac{\alpha}{2} \sum_{K \in \tau^h} \sum_{e \in \partial K} \frac{|e||K|}{p_K} |u_{K_e}^{n+1} - u_K^{n+1}|^2 \leq \sum_{K \in \tau^h} \sum_{e \in \partial K} \frac{|e||K|}{p_K} U(u_{K_e}^{n+1}) \quad (3.55)$$

Por outro lado, podemos usar a desigualdade local de entropia (3.40) multiplicando cada termo por $\frac{|e||K|}{p_K}$ e somando com relação a $K \in \tau^h$ e $e \in \partial K$

$$\sum_{K \in \tau^h} \sum_{e \in \partial K} \frac{|e||K|}{p_K} U(u_{K_e}^{n+1}) - \sum_{K \in \tau^h} U(u_K^{n+1})|K| \leq -\tau \sum_{e \in \partial K} G_{e,K}(u_K^n, u_{K_e}^n)|e| \quad (3.56)$$

neste caso, exceto ao longo da fronteira $\partial\tau^h$, os termos do fluxo se cancelam pelo fato de valer a propriedade da consistência (3.27) de $G_{e,K}$. Podemos provar, similarmente ao feito para a função $g_{e,K}$, que $\sum_{e \in \partial K} G_{e,K}(u_K^n, u_{K_e}^n) = 0$.

Agora, da condição de contorno discreta (3.44) do Lema 5, após multiplicarmos cada termo por $-\tau|e|$, encontramos a seguinte limitação

$$\begin{aligned} & -\tau \sum_{e \in \partial K} G_{e,K}(u_K^n, u_{K_e}^n)|e| \\ & \leq - \sum_{e \in \partial K} \{ F(u_{K_e}^n) \cdot \nu_{e,K} + \nabla U(u_{K_e}^n)(g_{e,K}(u_K^n, u_{K_e}^n) - f(u_{K_e}^n) \cdot \nu_{e,K}) \} |e| \tau \end{aligned}$$

utilizando (3.56) e a limitação acima encontramos

$$\begin{aligned} & \sum_{K \in \tau^h} \sum_{e \in \partial K} \frac{|e||K|}{p_K} U(u_{K_e}^{n+1}) - \sum_{K \in \tau^h} U(u_K^{n+1})|K| \\ & \leq - \sum_{e \in \partial K} \{F(u_{K_e}^n) \cdot \nu_{e,K} + \nabla U(u_{K_e}^n)(g_{e,K}(u_K^n, u_{K_e}^n) - f(u_{K_e}^n) \cdot \nu_{e,K})\} |e|\tau \end{aligned} \quad (3.57)$$

por um lado nós temos

$$- \sum_{e \in \partial K} \{F(u_{K_e}^n) \cdot \nu_{e,K} |e|\} \leq \left\| \nabla U(u_1) \right\|_{L^\infty} \left\| \frac{df}{du} \right\|_{L^\infty} \|u_1\|_{L^1([t_n, t_{n+1}], L^1(\Omega))}$$

que é consequência imediata da definição do par *entropia, fluxo de entropia* e por outro lado, usando o teorema de Jansen e a hipótese de que ∇U é convexa, podemos passar a integral para fora de $\nabla U(u_{K_e}^n)$, levando-se em conta que $u_{K_e}^n$ é definido como:

$$u_{K_e}^n = \frac{1}{\Delta t |e|} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_e u_1(x, t) dt d\Gamma, \quad e \in \partial \tau^h$$

encontramos

$$\begin{aligned} & \sum_{K \in \tau^h} \sum_{e \in \partial K} \frac{|e||K|}{p_K} U(u_{K_e}^{n+1}) - \sum_{K \in \tau^h} U(u_K^{n+1})|K| \\ & \leq \left\| \frac{df}{du} \right\|_{L^\infty} 2 \max(\|u_0\|_{L^\infty}, \|u_1\|_{L^\infty}) \left\| \nabla U(u_1) \right\|_{L^1([t_n, t_{n+1}], L^1(\Omega))} \end{aligned}$$

Combinando (3.55) e (3.56) e usando as estimativas anteriores finalmente chegamos em (3.49). ■

A desigualdade do Lema 7 executará um papel importante na nossa demonstração, pois juntamente com a Proposição 2 anterior, dará uma desigualdade de entropia (local e globalmente) que envolva funções de apenas uma variável, i.e., as entropias $U(u)$ e o fluxo de entropia $F(u)$, mas não os fluxos numéricos.

Lema 7

Para todos os poliedros $K \in \tau^h$ e para todas as faces $e \in \partial K \setminus \partial \tau^h$, Consideremos um par de entropia convexa (U, F) . Então, usando o Lema 4, (3.40), encontramos a seguinte desigualdade:

$$\begin{aligned} & \frac{|K|}{|p_K|} U(u_{K,e}^{n+1}) + \frac{|K_e|}{|p_{K_e}|} U(u_{K_e,e}^{n+1}) - \frac{|K|}{|p_K|} U(u_K^n) - \frac{|K_e|}{|p_{K_e}|} U(u_{K_e}^n) \\ & + \tau \{F(u_{K_e}^n) - F(u_K^n)\} \cdot \nu_{e,K} \leq 0 \end{aligned} \quad (3.58)$$

Se $e \in \partial \tau^h$, usando o Lema 5, (3.43), temos

$$\begin{aligned} & \frac{|K|}{|p_K|} (U(u_{K,e}^{n+1}) - U(u_K^n)) + \nabla U(u_{K_e}^n)(g_{e,K}(u_K^n, u_{K_e}^n) - f(u_{K_e}^n) \cdot \nu_{e,K})\tau \\ & + \tau \{F(u_{K_e}^n) - F(u_K^n)\} \cdot \nu_{e,K} \leq 0 \end{aligned} \quad (3.59)$$

Demonstração

Consideremos a desigualdade de entropia local (3.40). Tomemos um poliedro K e uma face e que não pertence ao bordo de τ^h , i.e., $e \in \partial K \setminus \partial \tau^h$.

Observemos que (3.40) é válida para poliedro K e também para o seu vizinho K_e ,

$$U(u_{K,e}^{n+1}) - U(u_K^n) - \frac{\tau p_{K_e}}{|K_e|} \{G_{e,K}(u_K^n, u_{K_e}^n) - G_{e,K}(u_{K_e}^n, u_K^n)\} \leq 0 \quad (3.60)$$

no qual temos usado a propriedade de conservação (3.27). Observemos que $G_{e,K}(u_K^n, u_{K_e}^n) = -G_{e,K_e}(u_{K_e}^n, u_K^n)$. Se trocarmos K por K_e , K torna-se um elemento vizinho de K_e e teremos que $G_{e,K}(u_K^n, u_{K_e}^n) = -G_{e,K}(u_{K_e}^n, u_K^n)$.

Multipliquemos (3.40) por $|K|/p_K$ e a desigualdade (3.60) por $|K_e|/p_{K_e}$. Podemos então somar as desigualdades resultantes. Observe que os termos $G_{e,K}(u_K^n, u_{K_e}^n)$ se cancelam juntos, pela propriedade da conservação (3.22) e então resta-nos

$$\begin{aligned} \frac{|K|}{p_K} \{U(u_{K_e,e}^{n+1}) - U(u_K^n)\} + \frac{|K_e|}{p_{K_e}} \{U(u_{K_e,e}^{n+1}) - U(u_{K_e}^n)\} \\ + \tau \{G_{e,K}(u_{K_e}^n, u_{K_e}^n) - G_{e,K}(u_K^n, u_K^n)\} \leq 0 \end{aligned}$$

substituindo $G_{e,K}(u, u) = F(u) \cdot \nu_{e,K}$, na última desigualdade encontramos (3.58).

Se agora tomarmos $e \in \partial\tau^h$ consideremos a entropia discreta (3.40) válida para todo elemento $K \in \tau^h$ com $e \in \partial\tau^h$, e a condição de contorno (3.44) discreta para entropia. Para encontrarmos (3.59), basta multiplicarmos (3.44) por $(-\tau)$ e somarmos com (3.40) multiplicado por $\frac{|K|}{p_K}$, o que nos fornece imediatamente a desigualdade (3.59). Aqui estamos usando novamente a propriedade da consistência para a função $G_{e,K}$. ■

A seguinte proposição servirá para passarmos o limite para as condições estabelecidas no Capítulo 2. Esta é uma proposição importantíssima para estabelecermos a convergência do método.

Proposição 4

Seja $\phi = \phi(x, t)$ uma função não negativa de suporte compacto em um domínio $\bar{\Omega} \times \mathbb{R}_+$, e (U, F) um par de entropia convexa da forma estabelecida no Lema 3. Consideremos K um poliedro qualquer com uma face “ e ” e fixemos as seguintes igualdades

$$\phi_e^n := \frac{1}{\tau|e|} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_e \phi(x, t) dt d\Gamma(x) \quad (3.61)$$

$$\hat{\phi}_K^n := \sum_{e \in \partial K} \frac{|e|}{p_K} \phi_e^n \quad (3.62)$$

$$\partial_t \hat{\phi}_K^n := \frac{1}{\tau} (\hat{\phi}_K^n - \hat{\phi}_K^{n-1}) \quad (3.63)$$

Então, sob estas condições, temos as seguintes desigualdades

$$\begin{aligned} - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{K \in \tau^h} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_K \{U(u_K^n) \partial_t \hat{\phi}_K^n + F(u_K^n) \cdot \nabla \phi(x, t)\} dt dx \\ + \sum_{K \in \tau^h} \int_K U(u_K^0) \phi_K^0 dx + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{e \in \partial K} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_e \{F(u_{K_e}^n) \cdot \nu_{e,K} \\ + \nabla U(u_{K_e}^n)(g_{e,K}(u_K^n, u_{K_e}^n)) - f(u_{K_e}^n) \cdot \nu_{e,K}\} \phi(x, t) dt d\Gamma \leq E^h(\phi) \end{aligned} \quad (3.64)$$

com um "erro" dado por

$$E^h(\phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{K \in \tau^h} \sum_{e \in \partial K} \frac{|e||K|}{p_K} U(u_{K_e}^{n+1})(\hat{\phi}_K^n - \phi_e^n) \quad (3.65)$$

Observação 4: Antes de começarmos a prova observemos que usando a condição de conservação da "massa" ("massa", conforme já havíamos dito, representa qualquer grandeza, $\int u$ de uma lei de conservação), valem as igualdades

$$\sum_{K \in \tau^h} \sum_{e \in \partial K \setminus \partial \tau^h} \frac{|K_e||e|}{p_{K_e}} U(u_{K_e,e}^{n+1}) \phi_e^n = \sum_{K \in \tau^h} \sum_{e \in \partial K \setminus \partial \tau^h} \frac{|K||e|}{p_K} U(u_{K,e}^{n+1}) \phi_e^n \quad (3.66)$$

e

$$\sum_{K \in \tau^h} \sum_{e \in \partial K \setminus \partial \tau^h} \frac{|K_e||e|}{p_{K_e}} U(u_{K_e}^n) \phi_e^n = \sum_{K \in \tau^h} \sum_{e \in \partial K \setminus \partial \tau^h} \frac{|K||e|}{p_K} U(u_K^n) \phi_e^n \quad (3.67)$$

Observemos, também, que (devido à conservação do fluxo da lei de conservação):

$$\sum_{K \in \tau^h} \sum_{e \in \partial K \setminus \partial \tau^h} \tau |e| F(u_{K_e}^n) \cdot \nu_{e,K} \phi_e^n = - \sum_{K \in \tau^h} \sum_{e \in \partial K \setminus \partial \tau^h} \tau |e| F(u_K^n) \cdot \nu_{e,K} \phi_e^n \quad (3.68)$$

Observação 5: Teorema de Green para ϕ_e^n contínua, pode ser escrito cada poliedro K e para cada inteiro n como

$$\sum_{e \in \partial K} F(u_K^n) \cdot \nu_{e,K} \phi_e^n \tau |e| = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_K F(u_K^n) \cdot \nabla \phi(x, t) dt dx \quad (3.69)$$

Demonstração

Para encontrar as desigualdades (3.64)-(3.65), vamos nos utilizar de (3.58). De fato, multipliquemos (3.58) por $\phi_e^n |e|$ e somemos sobre todos os poliedros e todas as faces $e, e \notin \partial \tau^n$. Consideremos ainda da observação acima as identidades (3.66)-(3.67)

$$\begin{aligned} & \sum_{K \in \tau^h} \sum_{e \in \partial K \setminus \partial \tau^h} 2 \frac{|K||e|}{p_K} (U(u_{K_e}^{n+1}) - U(u_K^n)) \phi_e^n \\ & + \sum_{K \in \tau^h} \sum_{e \in \partial K \setminus \partial \tau^h} \tau |e| \{F(u_{K_e}^n) - F(u_K^n)\} \cdot \nu_{e,K} \phi_e^n \leq 0 \end{aligned} \quad (3.70)$$

Note de (3.68) que podemos reescrever a desigualdade anterior como

$$\sum_{K \in \tau^h} \sum_{e \in \partial K \setminus \partial \tau^h} \frac{|K||e|}{p_K} \{U(u_{K_e}^{n+1}) - U(u_K^n)\} \phi_e^n - \tau \sum_{K \in \tau^h} \sum_{e \in \partial K \setminus \partial \tau^h} F(u_K^n) \cdot \nu_{e,K} \phi_e^n |e| \leq 0 \quad (3.71)$$

Se tomarmos, agora, os lados $e \in \partial \tau^h$ podemos usar a desigualdade (3.59), depois de multiplicarmos por $\phi_e^n |e|$ e somarmos sobre todos os $e \in \partial \tau^n$

$$\begin{aligned} & \sum_{e \in \partial K} \left\{ \frac{|K|}{p_K} (U(u_{K_e}^{n+1}) - U(u_K^n)) - F(u_K^n) \cdot \nu_{e,K} \tau \right\} \phi_e^n |e| \\ & + \sum_{e \in \partial K} \{F(u_{K_e}^n) \cdot \nu_{e,K} + \nabla U(u_{K_e}^n)(g_{e,K}(u_K^n, u_{K_e}^n) - f(u_{K_e}^n) \cdot \nu_{e,K})\} \phi_e^n \tau |e| \leq 0 \end{aligned} \quad (3.72)$$

Somando as desigualdades (3.71) e (3.72)

$$\begin{aligned} & \sum_{K \in \tau^h} \sum_{e \in \partial K} \frac{|K||e|}{p_K} U(u_{K_e}^{n+1}) \phi_e^n - \sum_{K \in \tau^h} U(u_K^n) \hat{\phi}_K^n |K| - \sum_{K \in \tau^h} \sum_{e \in \partial K} F(u_K^n) \cdot \nu_{e,K} \phi_e^n \tau |e| \\ & + \sum_{e \in \partial K} \{F(u_{K_e}^n) \cdot \nu_{e,K} + \nabla U(u_{K_e}^n)(g_{e,K}(u_K^n, u_{K_e}^n) - f(u_{K_e}^n) \cdot \nu_{e,K})\} \phi_e^n \tau |e| \leq 0 \end{aligned} \quad (3.73)$$

Usando a combinação convexa (3.18) e a convexidade de U , deduzimos que

$$U(u_K^{n+1}) \leq \frac{1}{p_K} \sum_{e \in \partial K} |e| U(u_{K_e}^{n+1})$$

que implica, depois de uma multiplicação por $|K|$, somando sobre todos os K

$$\sum_{K \in \tau^h} |K| U(u_K^{n+1}) \hat{\phi}_K^n \leq \sum_{K \in \tau^h} \sum_{e \in \partial K} \frac{|K||e|}{p_K} U(u_{K_e}^{n+1}) \hat{\phi}_K^n \quad (3.74)$$

Usando o Teorema de Green (3.69), comparando (3.73) com (3.74) e somando sobre todos os n obtemos imediatamente

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{K \in \tau^h} |K| \{U(u_K^{n+1}) - U(u_K^n)\} \hat{\phi}_K^n - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{K \in \tau^h} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_K F(u_K^n) \cdot \nabla \phi dt dx \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{e \in \partial K} \{F(u_{K_e}^n) \cdot \nu_{e,K} + \nabla U(u_{K_e}^n)(g_{e,K}(u_K^n, u_{K_e}^n) - f(u_{K_e}^n) \cdot \nu_{e,K})\} \phi_e^n \tau |e| \leq E^h \end{aligned}$$

no qual E^h é definido por (3.65).

Para obtemos (3.64), basta integramos por partes o primeiro termo da desigualdade. A prova da proposição está então completa. ■

Observação 6: De (3.62) e (3.66) temos a seguinte igualdade

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{e \in \partial K} \sum_{K \in \tau^h} \frac{|e||K|}{p_K} U(u_K^{n+1}) (\hat{\phi}_K^n - \phi_e^n) = 0 \quad (3.75)$$

Para a passagem do limite nas desigualdades (3.64)-(3.65), nós precisamos um resultado técnico da teoria da aproximação.

O resultado abaixo é independente de qualquer relação com a teoria das leis de conservação, mas será extremamente útil para o término da demonstração do resultado do Teorema Principal 14.

Lema 8 Consideremos $\phi = \phi(x, t)$ uma função de classe $\mathcal{C}^2(\Omega \times \mathbb{R}_+)$ de suporte compacto. Sejam as ϕ_e^n , $\hat{\phi}_K^n$, $\partial_t \hat{\phi}_K^n$ definidas como em (3.61)-(3.63).

Sob estas condições, vale

$$\sup_{x \in K} \sup_{t_n \leq t \leq t_{n+1}} |\partial_t \phi(x, t) - \partial_t \hat{\phi}_K^n| \leq (\tau + \frac{4h_K}{3}) \|\phi\|_{\mathcal{C}^2((K \times t_n, t_{n+1}))} \quad (3.76)$$

para qualquer poliedro K , e todos os naturais n .

Se, ainda mais, “ e ” é uma face para K

$$|\phi_e^n - \hat{\phi}_K^n| \leq (\tau + \frac{4h_K}{3}) \|\phi\|_{\mathcal{C}^1((K \times t_n, t_{n+1}))} \quad (3.77)$$

Demonstração

Como $\phi(x, t)$ é de classe $C^2(\Omega \times \mathbb{R}_+)$, podemos expandí-la na segunda variável usando a série de Taylor em torno de t^n :

$$\phi(x, t) = \phi(x, t^n) + \phi_t(x, t^n)(t - t^n) + \frac{\phi_{tt}(x, \xi_t)(t - t^n)^2}{2}, \quad (3.78)$$

no qual ξ_t é um ponto entre t e t^n .

Então, usando a definição de ϕ_e^n (3.61) e integrando com relação ao tempo de t^n até t^{n+1} (lembrando que $\tau = t^n - t^{n-1}$), temos

$$\phi_e^n = \frac{1}{\tau|e|} \int_e \left[\phi(x, t^n)\tau + \frac{\phi_t(x, t^n)\tau^2}{2} + \frac{1}{2\tau} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \phi_{tt}(x, \xi_t)(t - t^n)^2 dt \right] d\Gamma \quad (3.79)$$

e, fazendo o mesmo usando a definição de ϕ_e^{n-1} e integrando com relação ao tempo de t^{n-1} até t^n , temos

$$\phi_e^{n-1} = \frac{1}{\tau|e|} \int_e \left[\phi(x, t^n)\tau - \frac{\phi_t(x, t^n)\tau^2}{2} + \frac{1}{2\tau} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \phi_{tt}(x, \xi_t)(t - t^n)^2 dt \right] d\Gamma \quad (3.80)$$

Daí e da definição de $\widehat{\partial_t \phi_k^n}$

$$\begin{aligned} \widehat{\partial_t \phi_k^n} &:= \frac{1}{\tau} \left[\widehat{\phi_K^n} - \widehat{\phi_K^{n-1}} \right] \\ &= \frac{1}{\tau} \sum_{e \in \partial K} \frac{|e|}{p_k} [\phi_e^n - \phi_e^{n-1}] \\ &= \frac{1}{\tau} \sum_{e \in \partial K} \frac{|e|}{p_k} \left[\frac{1}{\tau|e|} \int_e \left[\phi(x, t^n)\tau + \frac{\phi_t(x, t^n)\tau^2}{2} + \frac{1}{2\tau} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \phi_{tt}(x, \xi_t)(t - t^n)^2 dt \right] d\Gamma \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\tau|e|} \int_e \left[\phi(x, t^n)\tau - \frac{\phi_t(x, t^n)\tau^2}{2} + \frac{1}{2\tau} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \phi_{tt}(x, \xi_t)(t - t^n)^2 dt \right] d\Gamma \right] \end{aligned}$$

Simplificando a equação acima temos finalmente,

$$\widehat{\partial_t \phi_k^n} = \frac{1}{\tau} \sum_{e \in \partial K} \frac{1}{p_k} \left[\int_e \left[\phi_t(x, t^n) + \frac{1}{2\tau^2} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \phi_{tt}(x, \xi_t)(t - t^n)^2 dt - \frac{1}{2\tau^2} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \phi_{tt}(x, \xi_t)(t - t^n)^2 dt \right] d\Gamma \right]$$

Expandindo $(\phi_t(x, t^n))$ na variável t em torno de t^n temos

$$\phi_t(x, t^n) = \phi_t(x, t^n) + \phi_{tt}(x, \eta_t)(t - t^n)$$

no qual η_t é um ponto entre t e t^n .

Usando as igualdades acima, podemos escrever

$$\begin{aligned} \left| \partial_t \phi(x, t^n) - \widehat{\partial_t \phi_k^n} \right| &\leq \left| \phi_t(x, t^n) - \sum_{e \in \partial K} \frac{1}{p_k} \int_e \phi(x, t^n) d\Gamma \right| + \left| \phi_{tt}(x, \eta_t)(t - t^n) - \right. \\ &\quad \left. \sum_{e \in \partial K} \frac{1}{2\tau^2 p_k} \left[\int_e \left[\int_{t^n}^{t^{n+1}} \phi_{tt}(x, \xi_t)(t - t^n)^2 dt - \int_{t^{n-1}}^{t^n} \phi_{tt}(x, \xi_t)(t - t^n)^2 dt \right] d\Gamma \right] \right| \end{aligned}$$

Agora, devemos notar que estamos fazendo estas estimativas dentro de cada elemento, e, por hipótese, cada elemento é um poliedro convexo. Dessa forma, para qualquer dois pontos dentro do poliedro existe uma reta unindo estes dois pontos, então podemos aplicar o teorema do valor médio para integral, de tal forma que existe um a_e (que depende de cada lado do poliedro) que nos fornece

$$\int_e \phi(x, t^n) d\Gamma = |e| \phi(t^n, a_e)$$

Substituindo esta expressão no primeiro termo do lado esquerdo da desigualdade acima e teremos

$$\begin{aligned} \left| \phi_t(x, t^n) - \sum_{e \in \partial K} \frac{1}{p_k} \int_e \phi(x, t^n) d\Gamma \right| &= \left| \phi_t(x, t^n) - \sum_{e \in \partial K} \frac{|e|}{p_k} \phi(a_e, t^n) \right| \\ &= \left| \sum_{e \in \partial K} \frac{|e|}{p_k} [\phi_t(x, t^n) - \phi(a_e, t^n)] \right| \end{aligned}$$

novamente notando que estamos num poliedro convexo (ou seja, existe uma reta ligando os pontos entre x e a_e para todo x e a_e dentro do elemento), podemos aplicar o teorema do valor médio e temos finalmente

$$\begin{aligned} \left| \phi_t(x, t^n) - \sum_{e \in \partial K} \frac{1}{p_k} \int_e \phi(x, t^n) d\Gamma \right| &= \left| \sum_{e \in \partial K} \frac{|e|}{p_k} [\phi_t(\theta, t^n)(x - a_e)] \right| \\ &\leq h |\phi_t^x(\theta, t^n)| \end{aligned}$$

similarmente podemos encontrar a estimativa para

$$\left| \phi_{tt}(x, \eta_t)(t - t^n) - \sum_{e \in \partial K} \frac{1}{2\tau^2 p_k} \left[\int_e \left[\int_{t^n}^{t^{n+1}} \phi_{tt}(x, \xi_t)(t - t^n)^2 - \int_{t^{n-1}}^{t^n} \phi_{tt}(x, \xi_t)(t - t^n)^2 dt \right] d\Gamma \right] \right|$$

pelo fato das funções serem de classe $\mathbb{C}^2(\Omega \times \mathbb{R}_+)$, podemos tomar o máximo em cada de ϕ_{tt} e teremos, finalmente que

$$\begin{aligned} &\left| \phi_{tt}(x, \eta_t)(t - t^n) - \sum_{e \in \partial K} \frac{1}{2\tau^2 p_k} \left[\int_e \left[\int_{t^n}^{t^{n+1}} \phi_{tt}(x, \xi_t)(t - t^n)^2 - \int_{t^{n-1}}^{t^n} \phi_{tt}(x, \xi_t)(t - t^n)^2 dt \right] d\Gamma \right] \right| \\ &\leq \|\phi_{tt}\|_\infty \left\{ \left| (t - t^n) \right| + \left| \sum_{e \in \partial K} \frac{1}{2\tau^2 p_k} \left[\int_e \left[\int_{t^n}^{t^{n+1}} (t - t^n)^2 dt - \int_{t^{n-1}}^{t^n} (t - t^n)^2 dt \right] d\Gamma \right] \right| \right\} \end{aligned}$$

integrando, utilizando que

$$p_k = \sum_{e \in \partial K} |e|$$

e que

$$\max\{|t - t^n|, |t - t^{n-1}|\} = \tau$$

temos finalmente (3.76).

A demonstração de (3.77), é feita de forma similar, mas não será feita aqui, pois não acrescenta nada à teoria das leis de conservação. ■

3.1.1 Convergência do Método dos Volumes Finitos: Soluções em Medidas

Agora estamos aptos para aplicarmos a teoria desenvolvida no Capítulo 2 para a solução em medida.

Antes da aplicação dos teoremas para a convergência de uma solução em medida, precisamos provar o seguinte lema

Lema 9 *Sejam (U, F) um par de entropia de Kruzkov, e ϕ uma função teste não-negativa $\phi : \bar{\Omega} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, que se anula para t suficientemente grande, então, existe uma função g em $L^\infty(\partial\Omega \times \mathbb{R}_+)$ tal que*

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega \times \mathbb{R}_+} (\langle \nu, U \rangle \partial_t \phi + \langle \nu, F \rangle \nabla \cdot \phi) dt dx + \int_{\Omega} U(u_0(x)) \phi(0, x) dx \\ & + \int_{\partial\Omega \times \mathbb{R}_+} \{F(u_1) \cdot \vec{n} + \nabla U(u_1)(g - f(u_1)) \cdot \vec{n}\} \phi d\Gamma dt \leq 0 \end{aligned} \quad (3.81)$$

no qual \vec{n} é a normal unitária na fronteira de Ω .

Demonstração

Das estimativas de erro no lema 8, podemos passar o limite e teremos claramente que o primeiro termo do lado esquerdo da desigualdade (3.64) converge para

$$- \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\Omega} \{ \langle \nu, U \rangle \partial_t \phi + \langle \nu, F \rangle \nabla \cdot \phi \} dt dx + \int_{\Omega} U(u_0(x)) \phi(0, x) dx \quad (3.82)$$

Consideremos $g \in L^\infty(\partial\Omega \times \mathbb{R}_+)$ como sendo o limite fraco da sequência $\{g_{e,K}(u_K^n, u_{K_e}^n)\}$. Conforme a Definição 11, isto significa que para todas as funções testes com suporte compacto $\phi : \bar{\Omega} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{K \in \tau^h} g_{e,K}(u_K^n, u_{K_e}^n) \phi_e^n \tau |e| \rightarrow \int_{\mathbb{R}_+ \times \partial\Omega} g \phi d\Gamma dt$$

Desde que (pois estamos supondo que u_1 é suave) $\{u_{K_e}^n\} \rightarrow u_1$ fortemente e $\{g_{e,K}(u_K^n, u_{K_e}^n)\} \rightarrow g$ fracamente, conforme acima, podemos escrever o segundo termo do lado esquerdo de (3.63) como

$$\int_{\Omega \times \mathbb{R}_+} \{F(u_1) \cdot \vec{n} + \nabla U(u_1)(g - f(u_1)) \cdot \vec{n}\} \phi d\Gamma dt \quad (3.83)$$

que é o limite. Para o termo $E^h(\phi)$, erro, em (3.65), usaremos (3.75) somando com a função erro

$$E^h(\phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{K \in \tau^h} \sum_{e \in \partial K} \frac{|e||K|}{p_K} (U(u_{K_e}^{n+1}) - U(K^n)) (\hat{\phi}_K^n - \phi_e^n) .$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwartz na expressão acima, e usando o fato que $U(u) = |u - c|$ (entropia de Kruzkov), obtemos

$$|E^h(\phi)| \leq \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{e \in \partial K} \sum_{K \in \tau^h} \frac{|e||K|}{p_K} (u_{K_e}^{n+1} - u_K^{n+1})^2 \right\}^{1/2} \cdot \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{e \in \partial K} \sum_{K \in \tau^h} \frac{|e||K|}{p_K} (\hat{\phi}_K^n - \phi_e^n)^2 \right\}^{1/2}$$

Agora usando que

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{e \in \partial \tau^h} \sum_{e \in \partial K} \frac{|e||K|}{p_K} |u_{K_e}^n - u_K^n|^2 \\ & \leq \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + 6 \max(\|u_0\|_{L^\infty}, \|u_1\|_{L^\infty}) \left\| \frac{df}{du} \right\|_{L^\infty} \|u_1\|_{L^1(L^1)} . \end{aligned} \quad (3.84)$$

podemos observar que o lado esquerdo é limitado, e, no máximo de ordem 1, devido às hipóteses feitas sobre cada um dos termos. Junto com as estimativas de erro(3.76)-(3.77), temos

$$|E^h(\phi)| \leq \mathcal{O}(1) \|\phi\|_{C^1(\Omega \times \mathbb{R}_+)} \left(\sum_{(n,K) \in A} |K| \left(\tau + \frac{4h}{3K} \right)^2 \right)^{1/2}$$

Aqui estamos usando que a função ϕ tem suporte compacto, portanto a última soma é sobre um conjunto A de pares de números (n, K) , é uma soma finita, pois é feita somente sobre o suporte de ϕ . Usando (3.2), segue que

$$|E^h(\phi)| \leq \mathcal{O}(1) \|\phi\|_{C^1(\Omega \times \mathbb{R}_+)} \left(\tau^{1/2} + \frac{h}{\tau^{1/2}} \right) \longrightarrow 0 \quad (3.85)$$

Combinando estes resultado em (3.82)-(3.83) nós obtemos (3.81), e o lema está demonstrado. ■

Nós devemos obter uma relação entre a função g do Lema acima e a função fluxo na fronteira. O seguinte resultado será suficiente para estabelecermos esta relação.

Lema 10 *A função $g(u_K^n, u_1)$, conforme o Lema anterior, converge para $\langle \gamma\nu, f(\cdot) \rangle$ em $L^\infty(\partial\Omega \times \mathbb{R}_+)$, para a topologia fraco-*. E além, sendo os dados de fronteira regulares u_1 , temos que*

$$\begin{aligned} & \int_{\partial\Omega \times \mathbb{R}_+} \text{sgn}(u_1 - c) \langle \gamma\nu, g(u_1) - f(c) \cdot \vec{n} \rangle \phi d\sigma(x) dt \\ & = \int_{\partial\Omega \times \mathbb{R}_+} \text{sgn}(u_1 - c) \langle \gamma\nu, (f(\cdot) - f(c)) \cdot \vec{n} \rangle \phi d\sigma(x) dt \end{aligned}$$

no qual, $g(u_1) = g(u_K^n, u_1)$ e $f(\cdot) = f(u_K^n)$ na fronteira de Ω .

Demonstração [3, pág. 794-795]

Inicialmente deveremos mostrar que vale o seguinte resultado

$$\begin{aligned} & \int_{\partial\Omega \times \mathbb{R}_+} (\langle \gamma\nu, (f(\cdot) - f(c)) \text{sgn}(u_1(x, t) - c) \rangle \cdot \vec{n} - \\ & \langle \gamma\nu, g(u_1(x, t)) - f(c) \cdot \vec{n} \rangle \text{sgn}(u_1(x, t) - c)) \phi d\sigma(x) dt \geq 0, \\ & \forall \phi \text{ uma função teste positiva em } C_0^1(\partial\Omega \times \mathbb{R}_+) \end{aligned} \quad (3.86)$$

Inicialmente, basta tomar em (3.81) ϕ em $C_0^1(\bar{\Omega} \times \mathbb{R})$ que se anula na fronteira e a entropia de Kruzkov que teremos:

$$\int_{\Omega \times \mathbb{R}} \{ \langle \nu, |\lambda - c| \rangle \phi_t + \langle \nu, f(\lambda) - f(c) \text{sgn}(\lambda - c) \rangle \nabla \cdot \phi \} dx dt \geq 0 . \quad (3.87)$$

Podemos escolher funções testes especiais para a finalizarmos a demonstração. Seguindo a idéia de Szepessy [59], podemos tomar funções testes sendo funções positivas em $\mathbb{C}_0^1(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}_+)$, para os quais podemos escrever como

$$\phi(x, t) = \phi(x, t)\chi_\delta(x(\bar{x}, y)) + \phi(x, t)(1 - \chi_\delta(x(\bar{x}, y))) \quad (3.88)$$

no qual (\bar{x}, y) é um sistema de coordenadas locais, como em (2.8). A função $\chi_\delta(x(\bar{x}, y)) \in \mathbb{C}_0^1(\Omega \times \mathbb{R}_+)$ é definida, como em Szepessy [59]:

$$\chi_\delta(x(\bar{x}, y)) = \begin{cases} 0 & 0 \leq y < \delta \\ \frac{1}{2} + \frac{3(y-2\delta)}{4\delta} - \frac{1}{4}\left(\frac{y-2\delta}{\delta}\right)^3 & \delta \leq y \leq 3\delta \\ 1 & y > 3\delta \end{cases} \quad (3.89)$$

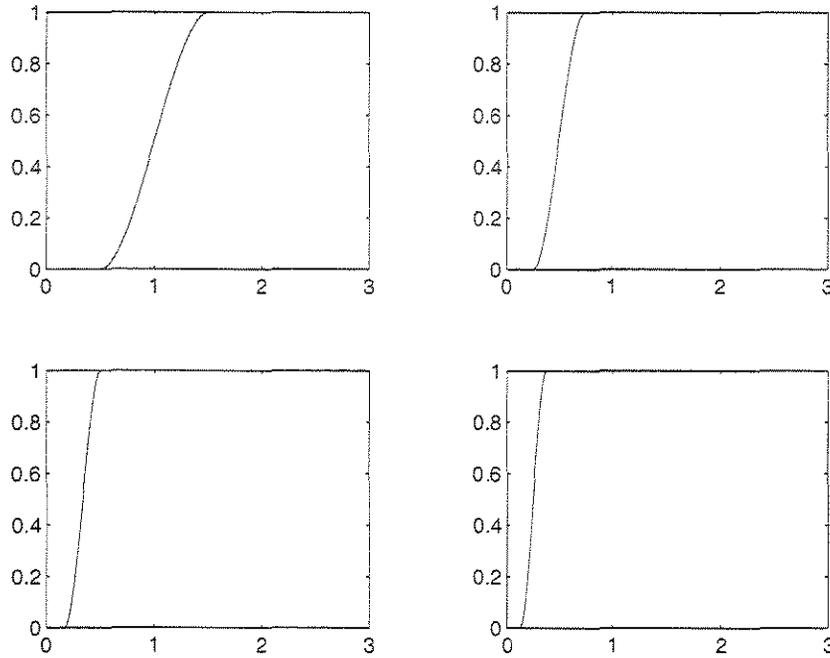


Figura 3.1: Figura Funções χ_δ a)- $\delta = 0.5$ b)- $\delta = 0.25$ c)- $\delta = \frac{0.5}{3}$ d)- $\delta = 0.125$

Agora, podemos substituir tal função teste na estimativa (3.81) com a entropia de Kruzkov e temos:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega \times \mathbb{R}} \{ \langle \nu, |\lambda - c| \rangle \phi_t + \langle \nu, (f(\lambda) - f(c)) \operatorname{sgn}(\lambda - c) \rangle \nabla \cdot \phi \} dx dt \\ & \quad - \int_{\partial \Omega \times \mathbb{R}} \{ \langle \gamma \nu, (g(u_1) - f(c) \cdot \vec{n}) \rangle \operatorname{sgn}(a - c) \phi d\sigma(x) dt \\ & = \int_{\Omega \times \mathbb{R}} \{ \langle \nu, |\lambda - c| \rangle (\phi \chi_\delta)_t + \langle \nu, (f(\lambda) - f(c)) \operatorname{sgn}(\lambda - c) \rangle \nabla \cdot (\phi \chi_\delta) \} dx dt \\ & + \int_{\Omega \times \mathbb{R}} \{ \langle \nu, |\lambda - c| \rangle (\phi(1 - \chi_\delta))_t + \langle \nu, (f(\lambda) - f(c)) \operatorname{sgn}(\lambda - c) \rangle \nabla \cdot (\phi(1 - \chi_\delta)) \} dx dt \\ & \quad - \int_{\partial \Omega \times \mathbb{R}} \{ \langle \gamma \nu, (g(u_1) - f(c) \cdot \vec{n}) \rangle \operatorname{sgn}(a - c) \phi d\sigma(x) dt \\ & \equiv A_\delta^1 + A_\delta^2 + A_\delta^3 \end{aligned}$$

A positividade do lado esquerdo da igualdade acima é devido a (3.81).

Observe que o termo é A_δ^1 é positivo devido a desigualdade (3.86), e porque $\phi\chi_\delta \in \mathbb{C}_0^1(\Omega \times \mathbb{R}_+)$, é uma função teste.

Sobre o segundo termo, seguindo Szepessy [57] (na relação (1.16)), fazendo δ tendendo a zero que teremos os termos sobre a fronteira da seguinte forma

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} A_\delta^2 = \int_{\partial\Omega \times \mathbb{R}_+} \langle \gamma\nu, (f(\cdot) - f(c)) \operatorname{sgn}(u_1 - c) \rangle \cdot \vec{n} \phi d\sigma(x) dt. \quad (3.90)$$

ajuntando as informações acima, concluímos que (3.85) segue.

Entretanto, o que necessitamos é da igualdade em (3.85), o que nos garantirá o resultado do Lema. Para tanto, basta tomarmos consecutivamente $c = 1 + \max\{\|u_0\|, \|u_1\|\}$ e $c = -1 - \max\{\|u_0\|, \|u_1\|\}$ em (3.85), notando a definição de $\operatorname{sgn}(x)$, (1.21) temos imediatamente

$$\int_{\partial\Omega \times \mathbb{R}_+} \{ \langle \gamma\nu, f(\cdot) \cdot \vec{n} \rangle - \langle \gamma\nu, g(u_1) \rangle \} \phi(x(\sigma), t) d\sigma dt = 0$$

Isto significa que g converge para $\langle \gamma\nu, f \rangle$ em $L^\infty(\partial\Omega \times \mathbb{R}_+)$, para a topologia fraco-* (conforme (1.10), Capítulo 1). Desde que estamos supondo que os dados de fronteira, u_1 são regulares, nós concluímos que

$$\begin{aligned} & \int_{\partial\Omega \times \mathbb{R}_+} \operatorname{sgn}(u_1 - c) \langle \gamma\nu, g(u_1) - f(c) \cdot \vec{n} \rangle \phi d\sigma(x) dt \\ &= \int_{\partial\Omega \times \mathbb{R}_+} \operatorname{sgn}(u_1 - c) \langle \gamma\nu, (f(\cdot) - f(c)) \cdot \vec{n} \rangle \phi d\sigma(x) dt \end{aligned}$$

o que termina a prova. \blacksquare

Demonstração do Teorema Principal 14

A prova do teorema central do trabalho é uma consequência imediata dos Teorema 13 e da proposição 2. Para isto basta usarmos o Lema 9 e o Lema 10 com a entropia de Kruzkov, e teremos a desigualdade (2.13) satisfeita. Desde que vale a (2.13), o Teorema 13 garante que

$$\nu(x, t) = \delta_{(x,t)},$$

ou seja, a medida converge para delta de Dirac. De acordo com a Proposição 2 do Capítulo 2, temos que u^k possui uma subsequência que converge fortemente para u em alguma norma $L^p(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}_+)$, $1 \leq p < \infty$. Devido ao teorema da unicidade de Bardos, temos que tal limite é o único o que implica que u_k converge fortemente para u . Da fórmula do erro, segue a de convergência (3.12).

Para mostrar a afirmação (3.13), basta tomarmos na desigualdade (3.49)

$$\begin{aligned} & \sum_{e \in \partial\tau^h} U(u_K^{n+1})|K| + \frac{\alpha}{2} \sum_{e \in \partial\tau^h} \sum_{e \in \partial K} \frac{|e||K|}{p_K} |u_{K_e}^{n+1} - u_K^{n+1}|^2 \\ & \leq \sum_{e \in \partial\tau^h} U(u_K^n)|K| + \|\nabla U(u_1)\|_{L^\infty} \left\| \frac{df}{du} \right\|_{L^\infty} \|u_1\|_{L^1([t_n, t_{n+1}], L^1)} \\ & + 2 \max(\|u_0\|_{L^\infty}, \|u_1\|_{L^\infty}) \left\| \frac{df}{du} \right\|_{L^\infty} \|\nabla U(u_1)\|_{L^1([t_n, t_{n+1}], L^1)} \end{aligned}$$

Notando que o termo $\frac{\alpha}{2} \sum_{e \in \partial \tau^h} \sum_{K \in \partial K} \frac{|e||K|}{pK} |u_{K_e}^{n+1} - u_K^{n+1}|^2$ é sempre maior ou igual a zero, podemos reescrever a desigualdade acima como:

$$\begin{aligned} \sum_{e \in \partial \tau^h} U(u_K^{n+1})|K| &\leq \sum_{e \in \partial \tau^h} U(u_K^n)|K| \\ &\quad \|\nabla U(u_1)\|_{L^\infty} \left\| \frac{df}{du} \right\|_{L^\infty} \|u_1\|_{L^1([t_n, t_{n+1}], L^1)} \\ &+ 2 \max(\|u_0\|_{L^\infty}, \|u_1\|_{L^\infty}) \left\| \frac{df}{du} \right\|_{L^\infty} \|\nabla U(u_1)\|_{L^1([t_n, t_{n+1}], L^1)} \end{aligned}$$

Agora aplicando recursivamente esta desigualdade, encontramos que

$$\begin{aligned} \sum_{e \in \partial \tau^h} U(u_K^n)|K| &\leq \sum_{e \in \partial \tau^h} U(u_0)|K| \\ &\quad \sum_{j=1}^{n-1} \|\nabla U(u_1)\|_{L^\infty} \left\| \frac{df}{du} \right\|_{L^\infty} \|u_1\|_{L^1([t_j, t_{j+1}], L^1)}, \\ &+ \sum_{j=1}^{n-1} 2 \max(\|u_0\|_{L^\infty}, \|u_1\|_{L^\infty}) \left\| \frac{df}{du} \right\|_{L^\infty} \|\nabla U(u_1)\|_{L^1([t_j, t_{j+1}], L^1)} \end{aligned}$$

válida para $U(u) = \frac{u^p}{p}$

Agora aplicar na desigualdade acima, as seguintes relações

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \quad (3.91)$$

$$\|fg\| \leq \|f\|_q \|g\|_p \quad (3.92)$$

válida para qualquer par de funções, no qual p e q são expoentes conjugados

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Na demonstração de (3.13) os coeficientes conjugados são tomados como $\frac{1}{p}$ e $1 - \frac{1}{p}$.

Tomando o limite quando quando a K vai a zero, obtemos imediatamente (3.13). ■

3.2 Fluxos Numéricos

Agora vamos estudar um pouco os fluxos numéricos que serão importantes para o problema dos volumes finitos. Para tanto, vamos fixar a notação como anteriormente, no qual e é uma face de um poliedro $K \in \tau^h$ qualquer na triangularização. O fluxo $g_{e,K}$ pode ser definido de várias formas, uma forma simples é defini-lo a partir dos fluxos unidimensionais, tais como os fluxos de Godunov, Lax-Friedrichs, Enquist-Osher (Capítulo 4 e [33], [38], [40]).

A maneira de se encontrar tais fluxos pode ser feita de duas formas diferentes:

1. {"Sem Splitting"} A definição mais natural consiste em definir $g_{e,K}$ como o fluxo unidimensional, satisfazendo a Definição 23, consistente com a seguinte equação diferencial unidimensional

$$\partial_t w + \partial_y (f(w) \cdot \nu_{e,K}) = 0, \quad t > 0, \quad y \in \mathbb{R} \quad (3.93)$$

no qual $\nu_{e,K}$ é a normal da face e do poliedro K .

2. {“Direction Splitting”} Um segundo tratamento é baseado na técnica de “direction splitting”. Neste caso $g_{e,K}$ é obtido através da composição de fluxos $g_{e,K}^i$, no qual cada função $g_{e,K}^i$ é um fluxo monótono consistente com

$$\partial_t w + \partial_y (f_i(w) \operatorname{sgn}(\nu_{e,K})) = 0, \quad t > 0, \quad y \in \mathbb{R} \quad (3.94)$$

no qual

$$\operatorname{sgn}(a) = \begin{cases} 1 & \text{se } a \geq 0 \\ -1 & \text{se } a < 0 \end{cases} \quad (3.95)$$

Dessa forma podemos expressar, $g_{e,K}$ como

$$g_{e,K} = \sum_{i=1, \dots, d} |\nu_{e,K}^i| g_{e,K}^i \quad (3.96)$$

3.2.1 Volumes Finitos: Direction Splitting

Apesar de que simularemos apenas os métodos sem “splitting”, será interessante estudarmos a construção dos métodos com “Direction Splitting”.

Para isto, tomemos $i = 1, \dots, d$ e fluxos numéricos $g_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tais que cada g_i seja consistente com f_i , (3.3), i. e.,

$$g_i(u, u) = f_i(u), \quad u \in \mathbb{R}. \quad (3.97)$$

Definamos as funções $L_{e,K}^i$ e $R_{e,K}^i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tais que, para todo $u, v \in \mathbb{R}$

$$L_{e,K}^i = \begin{cases} u & \text{se } \nu_{e,K}^i > 0 \\ v & \text{se } \nu_{e,K}^i \leq 0 \end{cases}$$

$$R_{e,K}^i(v, u) = L_{e,K}^i(v, u)$$

A fórmula

$$g_{e,K}^i(u, v) = \operatorname{sgn}(\nu_{e,K}^i) g_i(L_{e,K}^i(u, v), R_{e,K}^i(v, u)), \quad u, v \in \mathbb{R}$$

define um fluxo monótono consistente conforme (3.92). É simples de observar as propriedades (3.3)-(3.6) para o fluxo $g_{e,K}$ abaixo. Isto é verdade pois g_i é um fluxo monótono, o que já garante, por definição (3.5) e (3.6), para $g_{e,K}$ definido por (3.95)

$$g_{e,K} = \sum_{i=1, \dots, d} |\nu_{e,K}^i| g_i(L_{e,K}^i(u, v), R_{e,K}^i(v, u)) \quad (3.98)$$

A fórmula acima produz um fluxo monótono consistente com $f \cdot \nu_{e,K}$, para observar esta consistência, basta observar que por hipótese estamos supondo que cada fluxo g_i é consistente com f_i conforme acima.

Como ilustração podemos tomar os fluxos de Godunov e Lax-Friedrichs.

Godunov com Splitting

O fluxo de Godunov, será construído escolhendo $i = 1, \dots, d$, $g_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, no qual g_i é definida por

$$g_i(u, v) = f_i(w(0^+, u, v, f_i)), \quad u, v \in \mathbb{R} \quad (3.99)$$

no qual a função $w = w(\cdot, u, v, f_i)$ é solução do problema de Riemman (ver [28] para a construção do método de Godunov)

$$\begin{aligned} \partial_t w + \partial_y (f_i(w)) &= 0, \quad t > 0, \quad y \in \mathbb{R} \\ w(0, y) &= \begin{cases} u & \text{se } y < 0 \\ v & \text{se } y > 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.100)$$

O Método de Godunov com “Splitting” é, então, construído usando as mesmas técnicas de (3.93) e (3.95).

Método de Lax com Splitting

Um dos fluxos numéricos que tem sua aparição primeiramente na modelação calculacional de uma lei de conservação, é o fluxo de Lax-Friedrichs.

A vantagem desse fluxo é que ele é convergente, e estável desde que verifique-se a condição CFL (1.52).

Neste caso g_i será escolhida da forma que

$$g_i(u, v) = \frac{1}{2} (f_i(u) + f_i(v)) - \frac{1}{2\lambda_{e,K}} (v - u), \quad u, v \in \mathbb{R} \quad (3.101)$$

no qual, para $i = 1, \dots, d$, $\lambda_{e,K}^i$ é independente de u e v e é um número positivo. E se $\lambda_{e,K}^i$ satisfaz

$$\lambda_{e,K} = \lambda_{e,K_e} \quad (3.102)$$

e

$$\lambda_{e,K} \left\| \frac{df}{du} \right\|_{L^\infty} \leq 1 \quad (3.103)$$

é imediato que $g_{e,K}$ satisfaz (3.3)-(3.6), desde que $g_{e,K}$ é construído seguindo (3.95). Para mostrar que o fluxo satisfaz as condições da Definição 23, basta observarmos que o fato da função ser Lipschitziana é imediato, pois é soma de funções Lipschitzianas e cada g_i é Lipschitziana. A consistência é imediata, pois basta tomarmos em (3.100), $v = u$ e teremos que

$$g_{e,K}(u, u) = f(u) \cdot \nu_{e,K}$$

para $g_{e,K}$ construída segundo (3.95).

A conservação é obtida trocando u por v do lado esquerdo, notando que o segundo termo do lado direito de (3.100) inverte o sinal, temos a conservação para $g_{e,K}$ construída conforme (3.95) (lembre-se que $\nu_{e,K} = -\nu_{K,e}$). Agora derivando a função $g_{e,K}$ construída conforme (3.95), por cada uma das funções g_i conforme (3.100), para quase todo ponto e usando a condição (3.102), temos imediatamente que $g_{e,K}$ satisfaz a condição (3.6).

Observe que $g_{e,K}$ pode ser expressa através de (3.100) como (3.26) do Lema 3, no qual as funções ϕ e ψ são da forma

$$\phi = \psi = \frac{1}{\lambda_{e,K}} \text{ident}$$

no qual *ident* é a função identidade.

3.2.2 Volumes Finitos: Sem Splitting

Fluxo de Godunov Sem Splitting

O fluxo de Godunov sem Splitting é $g_{e,K}$ é definido por

$$g_i(u, v) = \nu_{e,K} \cdot f(w(0^+, u, v, f \cdot \nu_{e,K})), \quad u, v \in \mathbb{R} \quad (3.104)$$

no qual $w = w(0^+, u, v, f \cdot \nu_{e,K})$ é solução do correspondente problema de Riemman

$$\begin{aligned} \partial_t w + \partial_y (\nu_{e,K} \cdot f(w)) &= 0, \quad t > 0, \quad y \in \mathbb{R} \\ w(0, y) &= \begin{cases} u & \text{se } y < 0 \\ v & \text{se } y > 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.105)$$

Lax-Friedrichs Sem Splitting

O fluxo numérico de Lax-Friedrichs sem Splitting é definido por

$$g_{e,K}(u, v) = \frac{1}{2} (\nu_{e,K} \cdot f(u) + \nu_{e,K} \cdot f(v)) - \frac{1}{2\lambda_{e,K}} (v - u), \quad u, v \in \mathbb{R} \quad (3.106)$$

Aqui o coeficiente $\lambda_{e,K}$ é independente de u e v , satisfaz

$$\lambda_{e,K} = \lambda_{e,K_e} \quad (3.107)$$

e

$$\lambda_{e,K} \left\| \frac{df}{du} \right\|_{L^\infty} \leq 1 \quad (3.108)$$

É possível mostrar, conforme acima que o fluxo assim proposto satisfaz as condições (3.3)-(3.6). É importante salientar que os métodos com Splitting e os sem splitting não tem a sua formulação coincidente sempre.

Capítulo 4

Simulações

“Querer tornar-se bom já é ser bom. (Beauchêne)”

4.1 Introdução

As simulações numéricas vêm ganhando um enorme impulso nestas últimas décadas devido aos grandes avanços no desenvolvimento de computadores. Hoje em dia, uma grande quantidade dos laboratórios de tecnologia devem parte de suas conquistas aos métodos e simulações numéricos. As aplicações das técnicas computacionais são infindáveis, vão desde a codificação de genes, até o estudo do nascimento e desaparecimento de estrelas.

Na área de leis de conservação, as simulações numéricas tiveram seu início nos trabalhos de Courant [11] (depois traduzido para o inglês em [12]) em 1928. Em seus estudos, Courant utilizou-se de diferenças finitas. Ele percebeu entretanto que o método não era estável sempre, este devia satisfazer uma condição (mais tarde chamada de CFL (1.52) do Capítulo 1) que relacionava o tamanho da malha, com o tamanho do espaçamento temporal e a derivada do fluxo.

Talvez um primeiro método proposto para a resolução de (1.18) e que ainda serve como protótipo para as melhorias nos métodos de simulação numérica foi o de **Lax-Friedrichs** em 1954 [38]:

$$U_j^{n+1} = \frac{1}{2}(U_j^n + U_{j+1}^n) - \frac{k}{2h}(f(U_{j+1}^n) - f(U_{j-1}^n)) \quad (4.1)$$

Este método tem a propriedade de ser convergente para a solução entrópica, ou seja, a solução física do problema, desde que seja satisfeita a condição CFL (1.52).

O grande problema deste método é que ele “espalha” muito a solução em torno das regiões de choque (v. [33] e [40], no qual, a última referência mostra que o esquema de Lax Friedrichs aproxima melhor uma equação do parabólica).

Um outro método usado, menos difusivo é o método do **Upwind**:

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}[f(U_i^n) - f(U_{i-1}^n)]. \quad (4.2)$$

Este método espalha menos a região de choque, mas tem o inconveniente de que ele não trata bem fluxos que não sejam crescentes e mesmo para fluxos crescentes, quando há ondas de rarefação (v. [14], [40], [50], [52]) a solução não se comporta muito bem.

Como forma de evitar estes problemas que enfrenta o Upwind, Engquist e Osher [20] desenvolveram um método que seja aplicado a fluxos gerais. Eles observaram que se $f'(u) > 0$, poderia ser usado diferenças finitas atrasadas:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(u) \sim \frac{1}{\Delta x} [f(U_i^n) - f(U_{i-1}^n)];$$

e se $f'(u) < 0$ poderia ser usado diferenças finitas adiantadas

$$\frac{\partial}{\partial x} f(u) \sim \frac{1}{\Delta x} [f(U_{i+1}^n) - f(U_i^n)].$$

Então o caso geral, agrupando as duas possibilidades, pode ser obtido primeiramente definindo duas funções (que na realidade são apenas a parte positiva e negativa de uma função):

$$f^+(u) = f(0) + \int_0^u \max(f'(s), 0) ds, \quad f^-(u) = \int_0^u \min(f'(s), 0) ds.$$

Então nós temos que $f(u) = f^+(u) + f^-(u)$. E o fluxo numérico pode ser escrito como

$$g(v, w) = f^+(v) + f^-(w)$$

e o esquema, chamado de **Esquema de Engquist-Osher**, é escrito como

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [f^+(U_i^n) - f^+(U_{i-1}^n) + f^-(U_{i+1}^n) - f^-(U_i^n)]. \quad (4.3)$$

Um dos mais famosos métodos de ordem 1 (quando dizemos que um método tem ordem 1, queremos dizer que a discretização tem erro de grau 2), é o método de **Godunov** [28]. A idéia básica deste método é compor a solução global pela solução exata de problemas de Riemann localmente [28]. Esta idéia é largamente utilizada como protótipo para a construção de métodos de ordem maiores. Este é menos difusivo que os métodos anteriores, entretanto a condição CFL é mais restritiva neste caso.

A condição de CFL, no caso unidimensional, é dada por:

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \sup_{u \in [u_{min}, u_{max}]} |f'(u)| \leq \frac{1}{2}. \quad (4.4)$$

no qual I é a região da imagem da função.

O esquema pode ser escrito da seguinte forma:

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [F(U_i^n, U_{i+1}^n) - F(U_{i-1}^n, U_i^n)], \quad (4.5)$$

no qual F é o **Fluxo de Godunov**:

$$F(u_e, u_d) = \begin{cases} \min_{u_e \leq u \leq u_d} f(u) & \text{se } u_e \leq u_d \\ \max_{u_d \leq u \leq u_e} f(u) & \text{se } u_e > u_d. \end{cases} \quad (4.6)$$

Métodos de Ordem Maiores que 1

Os métodos de ordem 1 tem o inconveniente de que eles convergem muito lentamente para a solução do problema. Uma forma de evitar estas dificuldades é a obtenção de métodos que tenham a ordem de convergência maior do que 1.

Um dos primeiros métodos que usa ordem de convergência maior foi proposto por Richtmyer [51]. Este esquema numérico envolve dois passos (predictor-corrector)

$$\begin{cases} U_{j+1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{2}(U_{j-1}^n + U_{j+1}^n) - \frac{k}{2h}(f(U_{j+1}^n) - f(U_j^n)) \\ U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{k}{h}(f(U_{j+1/2}^{n+1/2}) - f(U_{j-1/2}^{n+1/2})). \end{cases} \quad (4.7)$$

Um grande inconveniente introduzido por este método são oscilações em torno dos choques, ou seja, o método não é estável.

Um outro método do mesmo tipo, foi proposto por MacCormack [43] em 1969, e usa primeiro uma diferença finita adiantada e depois uma diferença finita atrasada:

$$\begin{cases} U_j^* = U_j^n - \frac{k}{h}(f(U_{j+1}^n) - f(U_j^n)) \\ U_j^{n+1} = \frac{1}{2}(U_j^n + U_j^*) - \frac{k}{2h}(f(U_j^*) - f(U_{j-1}^*)). \end{cases} \quad (4.8)$$

Este também introduz oscilações nas regiões de choque, o que torna o esquema pouco útil. Entretanto, existem formas de tornar o esquema tratável numericamente. Podemos fazer uma mudança no método para que ele tenha propriedades desejáveis, por exemplo, não oscile e continue com a ordem de convergência 2. Uma primeira forma de fazer isso é impor condições para que o método seja TVD (Total Variation Diminishing).

Existem várias formas de tornar os métodos de ordem 2 acima TVD. Uma forma famosa proposta por Sweby [57], utiliza-se de limitadores. Os limitadores têm o papel de modificar os fluxos de ordem mais alta na região de choque. Observe que podemos escrever o fluxo de ordem mais alta $F_a(U; j)$ como a soma de um fluxo de ordem mais baixa $F_b(U; j)$ mais uma correção

$$F_a(U; j) = F_b(U; j) + [F_a(U; j) - F_b(U; j)]. \quad (4.9)$$

No método dos limitadores de fluxo, fazemos uma pequena modificação na correção

$$F_a(U; j) = F_b(U; j) + \Phi(U; j)[F_a(U; j) - F_b(U; j)], \quad (4.10)$$

no qual $\Phi(U; j)$ é o limitador. Observe que se os dados U são suaves perto de U_j então $\Phi(U; j)$ deverá ser perto de 1, enquanto se estivermos perto de descontinuidades nós queremos que $\Phi(U; j)$ esteja perto de 0. (Exemplos de limitadores podem ser encontrado em Sweby [57]).

Uma outra forma de estabilizar os métodos foi proposta por Engquist [21]. Esta forma não implica que o método seja TVD, mas diminui bastante a oscilação que aparece em torno dos choques. Nesta formulação, utilizam-se os resultados em cada nível filtrando-os. Para entender o método, suponha que U_j^{n+1} (dada como acima) seja uma aproximação da solução fraca. Com dados iniciais $U_j^0 = \bar{u}_0(x)$ dados por

$$U^{n+1} = \mathbb{H}_h(U^n)$$

$$U_j^0 = \bar{u}_0(x),$$

Estas soluções são acopladas com filtros ou projeções da seguinte forma:

$$v^{n+1} = \mathbb{H}_h(U^n) \quad (4.11)$$

$$U^{n+1} = P(v^n, u^n). \quad (4.12)$$

Algumas condições naturais para P são exigidas para que o esquema seja válido:

1. *Consistência.* Se a solução é suave, o filtro não deverá mudar muito a aproximação. Em particular, o método (4.11)-(4.12) deverá ser consistente,

$$\| U^{n+1} - v^{n+1} \| = O(\Delta t^2) \quad \text{para } v^{n+1} \text{ suave.}$$

A norma acima pode ser, por exemplo, a norma l_1 , a suavidade pode significar que a função não varia muito. É possível aqui exigir que a ordem de convergência do esquema não seja mudada pelo filtro;

2. *Forma Conservativa.* A fim de termos a convergência para a solução fraca do problema é necessário que o esquema (4.11)-(4.12) seja conservativo no seguinte sentido

$$\sum_j \phi(x_j)(U_j^{n+1} - v_j^{n+1}) \leq C \quad (4.13)$$

para toda função teste ϕ .

3. *TVD.* O filtro deverá forçar algum critério para garantir que não haja oscilações espúrias perto das descontinuidades. O critério usual para a lei de conservação escalar é que o método seja TVD;
4. *Mudança mínima.* Em cada passo o filtro deverá forçar 3, sem violar 1 ou 2, com poucas operações numéricas. Isto quer dizer que

$$|U_j^{n+1} - v_j^{n+1}| \neq 0$$

para poucos valores de j quanto seja possível e que o filtro seja neutro se v^{n+1} já satisfaz o critério 3.

A idéia da colocação de filtro é bastante direta. Entretanto, não é provado que exista uma classe de filtros que trabalhe bem para todos os métodos e que convirja para a solução real do problema. A grande vantagem dos filtros é que a sua implementação é bastante simples e o custo computacional é baixo, entretanto, pelo fato de não se ter demonstrada a convergência para estes tipos de métodos, não é possível saber se a solução encontrada é a correta. Em Engquist [21] é dada uma série de algoritmos para filtros usados em equações escalares (para exemplos dessas simulações, veja [38]).

Métodos semi-discretos também são freqüentemente usados. Nestes métodos escrevemos a equação diferencial (1.18) como

$$u_t = L(u) \quad (4.14)$$

no qual $L(u) = -f(u)_x$, o que reduz a lei de conservação a um sistema de EDOs.

Em Gottlieb [27], é usado o método de Runge-Kutta para resolver estas EDOs. Os esquemas são TVDs, a implementação é simples. Aqui, utilizamos a seguinte aproximação para o fluxo

$$\frac{1}{\Delta x}(F_{j+\frac{1}{2}} - F_{j-\frac{1}{2}}),$$

no qual o fluxo numérico $F_{j+\frac{1}{2}}$ é definido por

$$F_{j+\frac{1}{2}} = h(u_{j+\frac{1}{2}}^-, u_{j+\frac{1}{2}}^+) \quad (4.15)$$

com

$$u_{j-\frac{1}{2}}^- = U_j + \frac{1}{2} \minmod(U_{j+1} - U_j, U_j - U_{j-1}) \quad (4.16)$$

$$u_{j+\frac{1}{2}}^+ = U_{j+1} - \frac{1}{2} \minmod(U_{j+2} - U_{j+1}, U_{j+1} - U_j) \quad (4.17)$$

no qual

$$\minmod(a, b) = \frac{\text{sgn}(a) + \text{sgn}(b)}{2} \min(|a|, |b|) \quad (4.18)$$

O fluxo monótono h é como o fluxo de Godunov (4.6).

Esta aproximação proposta para o operador é do tipo MUSCL (métodos do tipo MUSCL - “Monotic Upstream-centered Scheme for Conservation Laws”, foram primeiro propostos pelos trabalhos de Van Leer [65]-[69], para melhor definição destes tipos de métodos veja [65]-[69] e Tadmor [49]).

Um exemplo de método Runge-Kutta TVD de segunda ordem (Gottlieb [27]), pode ser facilmente obtido (deve-se observar a condição CFL). A implementação computacional é bastante simples e o método é baseado em dois passos

$$u^1 = U^n + \Delta t L(U^n) \quad (4.19)$$

$$U^{n+1} = \frac{1}{2} U^n + \frac{1}{2} u^1 + \frac{1}{2} \Delta t L(u^1) \quad (4.20)$$

Em 1990, Tadmor e Nessyahu [49] propuseram um método de segunda ordem, usando diferenças centradas aproximando sistemas hiperbólicos não lineares. Estes métodos têm uma propriedade bastante interessante, são não oscilatórios. O método pode ser visto como uma extensão natural do esquema de primeira ordem de Lax-Friedrichs. Pelo fato do método de Lax-Friedrichs introduzir uma grande difusidade (solução espalha-se em torno da região de choque), foi utilizada interpolantes tipo MUSCL. A construção do método é extensa, e portanto será evitada, entretanto a idéia é direta [v.49].

Tadmor, juntamente com outros autores, construiu métodos de terceira ordem que são não oscilatórios (Tadmor [42]). Apesar desses métodos terem uma convergência de terceira ordem e serem não oscilatórios, eles possuem uma desvantagem de serem muito extensos para serem programados. Eles introduzem um grande número de funções auxiliares e o custo computacional é alto em relação aos métodos de ordem 2 (por exemplo, os do tipo Runge-Kutta).

Apesar da grande variedade dos métodos descritos acima, eles são aplicáveis somente a domínios cartesianos, ou seja, domínios que, por uma transformação de coordenadas qualquer, possam ser levados num “retângulo” (em uma dimensão, um intervalo; em duas dimensões, um retângulo; em 3 dimensões um paralelepípedo; etc.) do “espaço” (unidimensional, bidimensional, tridimensional, etc...).

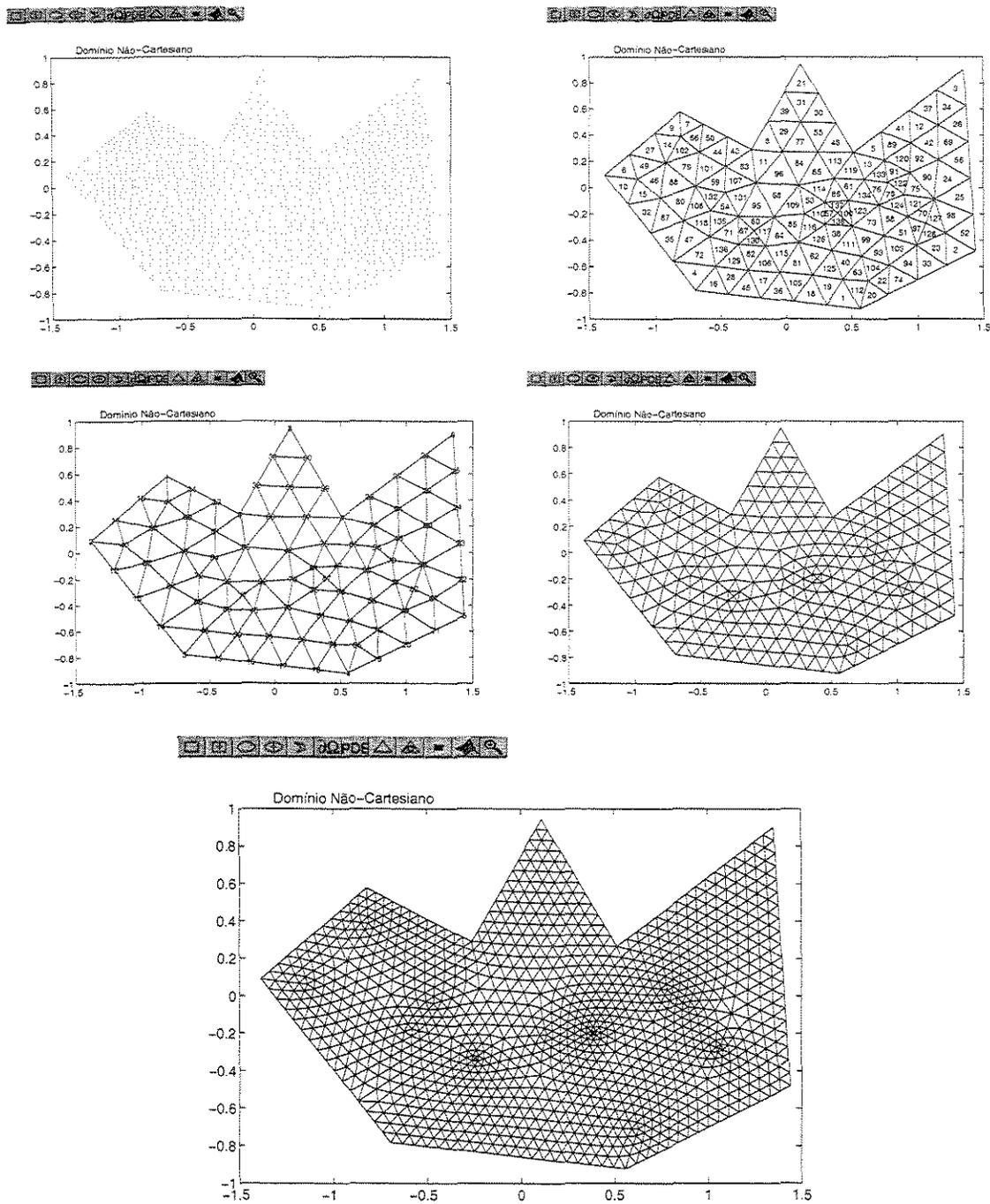


Figura 4.1: (a) Domínio Não-Cartesiano no Plano (b) Triangularização do Domínio com Numeração dos Elementos (c) Numeração dos Nós (d) Refinamento da Malha (e) Maior Refinamento da Malha

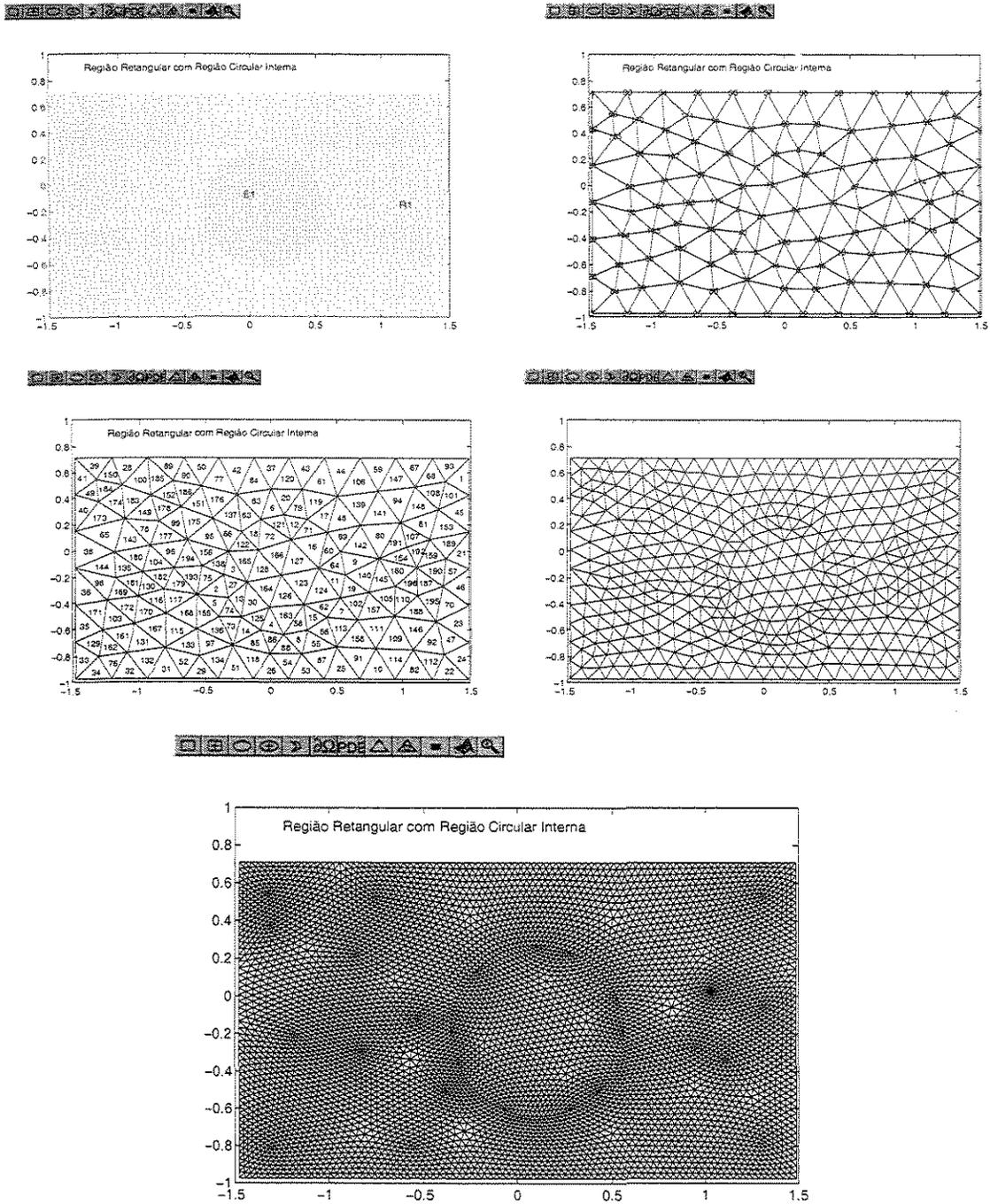


Figura 4.2: (a) Domínio Retangular com uma Região Circular (b) Triangularização do Domínio com Numeração dos Elementos (c) Numeração dos Nós (d) Refinamento da Malha (e) Maior Refinamento da Malha

Pensando nestas dificuldades e em geometrias menos “regulares”, desenvolveram-se métodos que pudessem ser aplicados a geometrias gerais .

Dois métodos basicamente destacam-se neste sentido, que são os métodos de elementos finitos e de volumes finitos.

O método de elementos finitos (v. [9], [32] para o caso de uma lei de conservação) têm sido, desde antes dos meados do século passado, “emprestado” dos engenheiros civis pelos matemáticos para a resoluções de equações diferenciais parciais. Este é um dos métodos mais largamente utilizados pelos cientistas; é uma das técnicas mais usadas na simulação numérica.

O método dos volumes finitos tem suas idéias iniciais desde os anos 50. Mas foi apenas nos últimos 10 anos que melhorias foram implementadas. Este é frequentemente usado para a simulação numérica em mecânica dos fluidos.

A grande vantagem desse em relação aos de elementos finitos é que ele é melhor adaptável a qualquer discretização temporal [64]. Entretanto, é condicionalmente estável. (Outros métodos que são aplicáveis a geometrias quaisquer são métodos tipo ENO. Nestes, são utilizadas reconstruções polinomiais para a obtenção dos mesmos. Em [38] é feito um estudo desses métodos. Evitaremos neste trabalho a apresentação do método para não nos alongarmos muito; para melhores referências consulte [33]).

Neste trabalho, demonstramos a convergência do método dos volumes finitos no Capítulo 3 para um problema de valor inicial e de fronteira (6)-(8), entretanto, neste formato o método tem convergência apenas de ordem 1, o que torna o método ineficiente. A motivação para o estudo do método dos volumes finitos é de sua aplicação em pesquisas posteriores no desenvolvimento de esquemas para a resolução de equações um pouco diferentes de uma lei de conservação (v. seção 4.5, abaixo). Como consolo, várias melhorias podem ser implementados no mesmo. Uma demonstração de convergência de ordem mais alta pode ser encontrada nos trabalhos de Kroner [36], no entanto, tal convergência é conseguida para um problema de Cauchy (apenas de valor inicial).

Nesta mesma direção, um problema que, pelo que tenho pesquisado, parece-me sem solução é a convergência do método do volume finito de ordens mais altas do que 1 para o problema de valor inicial e de fronteira. Possivelmente este ainda é um problema em aberto e a grande dificuldade de se chegar em tal demonstração reside no fato de obter estimativas razoáveis como as encontradas no Capítulo 3.

Um método de ordem mais alta demanda os cálculos em multipassos o que torna as estimativas complicadas. Tais estimativas podem surgir como um tópico de pesquisa em trabalhos posteriores. Neste Capítulo, simularemos o método dos volumes finitos uni e bidimensionais, comparando este com os de diferenças finitas mais usados. Para um conjunto maior de simulações indicamos [38].

4.2 Volumes Finitos Unidimensionais

Apesar de estarmos tratando aqui apenas os métodos de ordem 1, será interessante as simulações tanto as unidimensionais, quanto as bidimensionais (evitaremos a simulação para dimensões mais altas, pela complexidade da implementação computacional e a dificuldade de visualização da solução).

Em uma dimensão espacial a região do espaço para o tratamento do método será uma reta, pois, é necessário que a região na qual o problema está colocada seja conexa.

A malha de elementos finitos colocada sobre a região espacial é obtida através de uma partição do intervalo de domínio para o problema (vamos tomar os espaçamentos iguais para facilitar a notação e, como fizemos anteriormente, vamos denotar o espaçamento espacial por $K_i = x_{i+1} - x_i$).

Sobre cada região, vamos denotar inicialmente os dados iniciais u_0 , como sendo a integral dos dados iniciais sobre cada um dos intervalos da malha construída.

$$u_i^0 = \frac{1}{K_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} u_0(x) dx \quad (4.21)$$

Não definimos a solução pontualmente basicamente por dois motivos:

1. Porque, em geral, a solução não é definida em todos os pontos da malha, pode conter descontinuidades. Um exemplo clássico de tal condição é o problema de Riemman na qual a condição inicial toma os seguintes valores:

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x \geq 0 \end{cases} \quad (4.22)$$

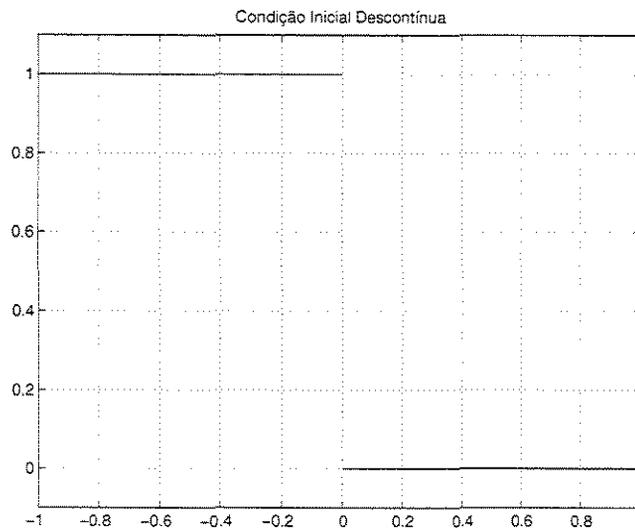


Figura 4.3: Condição Inicial Descontínua

ou, similarmente,

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases} \quad (4.23)$$

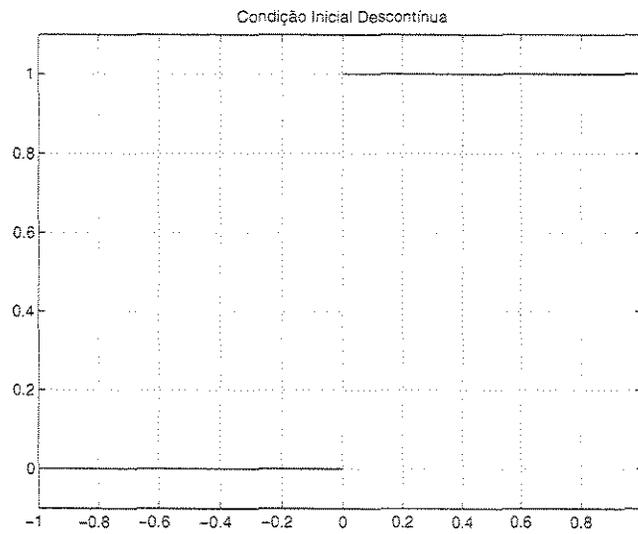


Figura 4.4: Condição Inicial Descontínua

2. Queremos que o método seja conservativo, ou seja, que a “massa” (que estamos tomando como sendo a grandeza considerada no problema) seja conservada em cada nível de tempo.

O método de volumes finitos (3.7), neste caso toma a seguinte forma

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{\tau}{K} g(u_i^n, u_{i-1}^n) + \frac{\tau}{K} g(u_i^n, u_{i+1}^n) \quad (4.24)$$

No qual os vizinhos a direita e a esquerda de um elemento x_i , são, respectivamente, x_{i-1} (com “lado”, no sentido de Hausdorff conforme o capítulo 3, $e = i - 1$ e $H^0(e) = 1$) e x_{i+1} (com “lado” $e = i + 1$ e $H^0(e) = 1$).

Para as simulações consideremos, por exemplo, os dois fluxos:

1. Fluxo de Burgers

$$f(u) = \frac{u^2}{2} \quad (4.25)$$

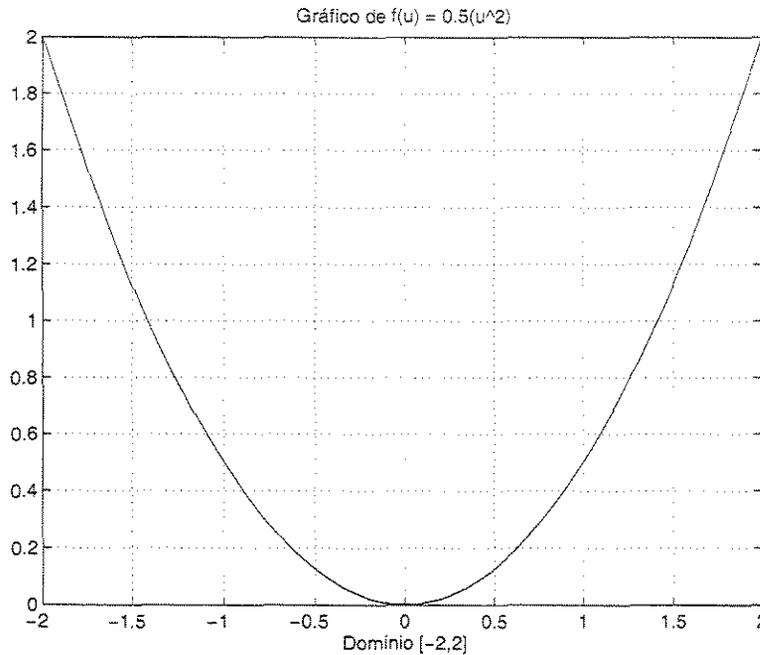


Figura 4.5: Fluxo de Burgers

Este fluxo é famoso e uma lei de conservação com $f(u)$ da forma (4.25) é chamado de fluxo de **Burgers**. Um exemplo descrito por esta equação é o chamado “modelo hidrológico”, v. [48].

2. Fluxo de Buckley-Leverret

Um outro fluxo que podemos considerar é o seguinte

$$f(u) = \frac{u^2}{u^2 + a(1-u)^2}; \quad (4.26)$$

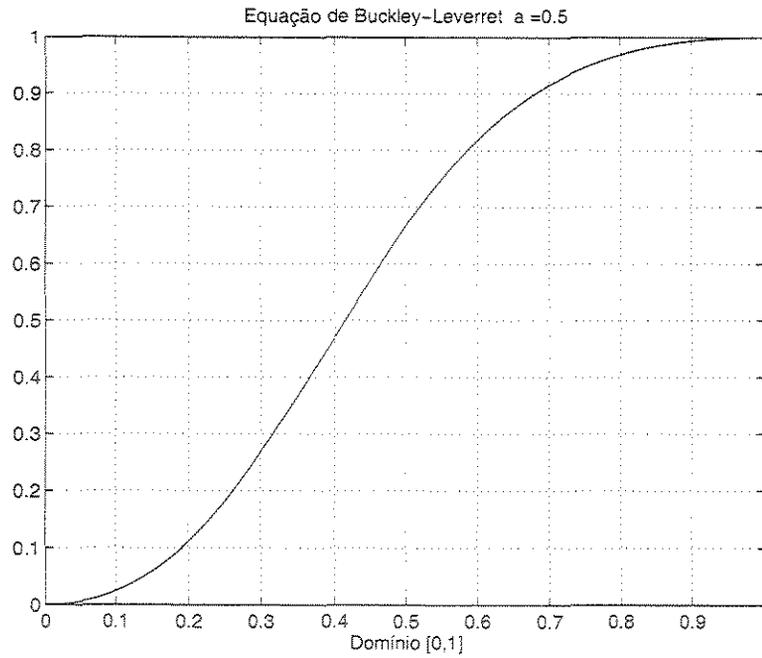


Figura 4.6: Fluxo de Buckley-Leverret

no qual a é uma constante.

Que é a chamado fluxo de **Buckley-Leverret** e usada no modelamento de problema de petróleo (v. [37], [40]).

Simulações

Primeiramente vamos simular o método dos volumes finitos para o fluxo de Burgers, tomando os dados iniciais nestes casos como os dados de Riemman (4.22).:

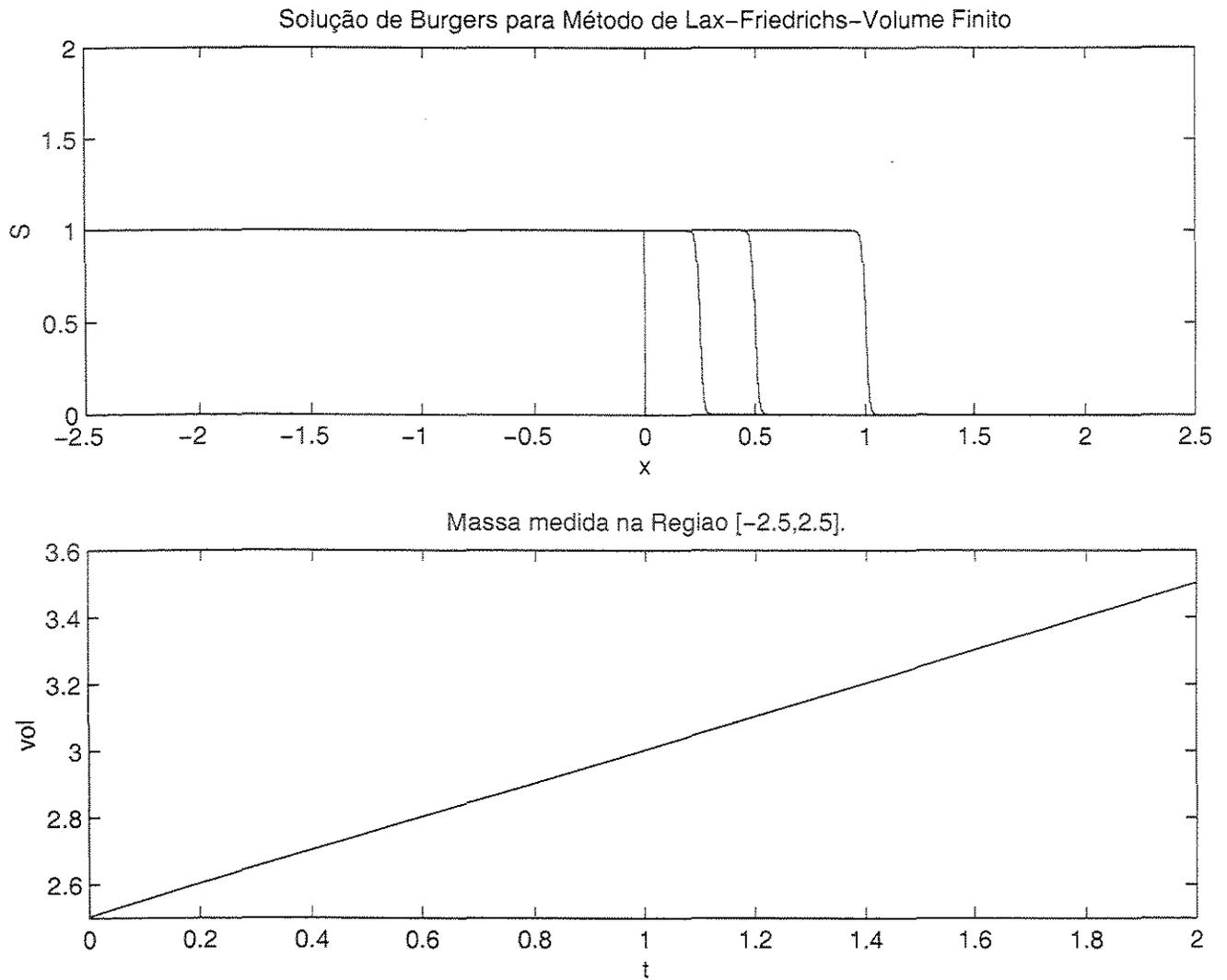


Figura 4.7: Métodos dos Volumes Finitos Ordem 1- Lax-Friedrichs. Para os tempos 0.5, 1 e 2. $n=1000$ pontos, $\Delta x = 0.005$ e $\tau = 0.001$. Observemos que a solução para este método é, visivelmente, parecida com a solução do método de Lax-Friedrichs para diferenças finitas; espalha mais a solução em torno dos choques que os métodos de Upwind e Godunov; a condição CFL também é verificada.

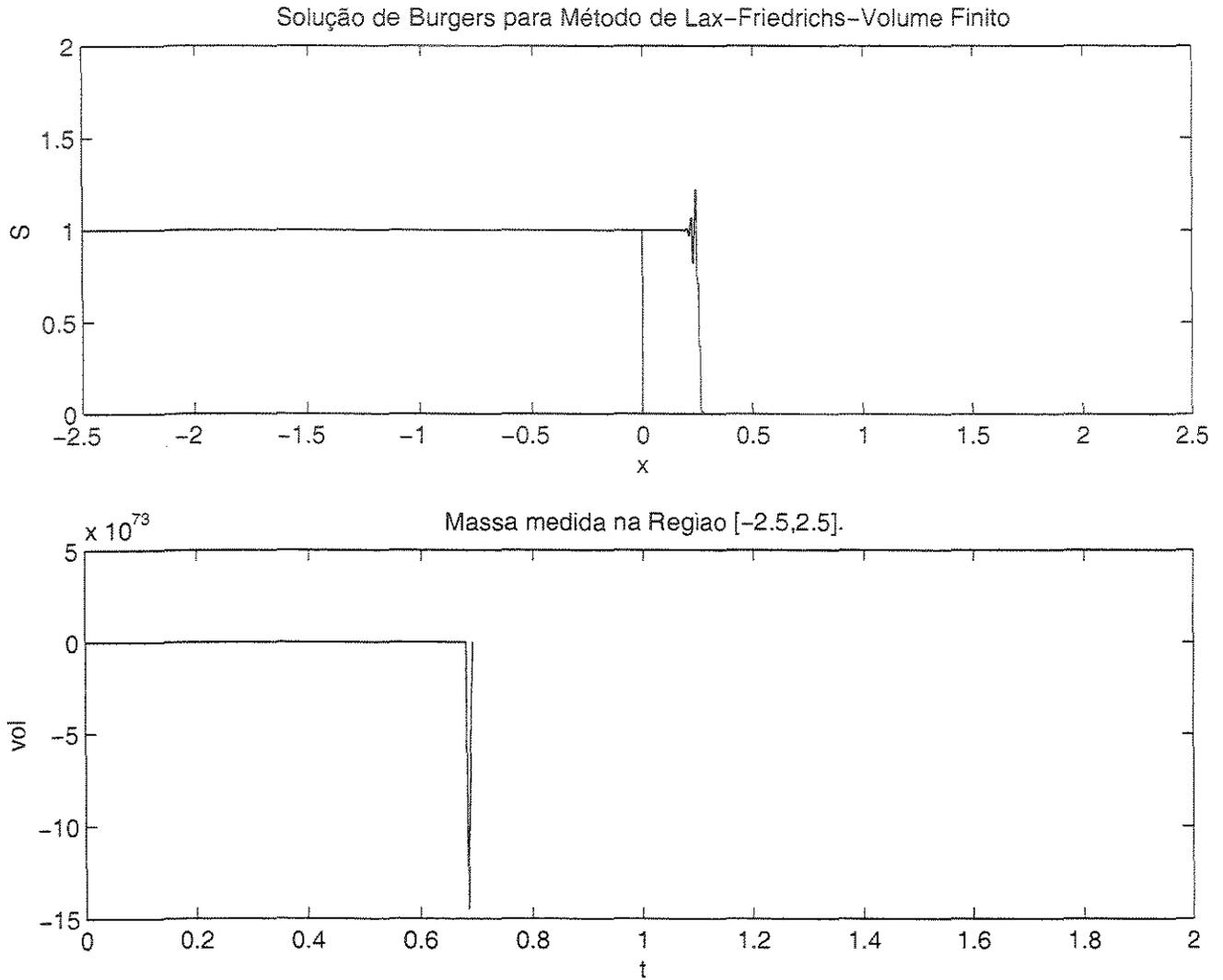


Figura 4.8: Métodos dos Volumes Finitos Ordem 1- Lax-Friedrichs; violação da condição CFL (1.52), o método torna-se instável. Para os tempos 0.5, 1 e 2. $n=1000$ pontos, $\Delta x = 0.005$ e $\tau = 0.006$. Neste caso há uma oscilação para a solução pois a condição CFL não é verificada. O lado esquerdo de (1.52), para este caso, é igual a 2. Observemos que a massa também explode, o que mostra que caso a condição CFL não seja satisfeita o esquema não é conservativo.

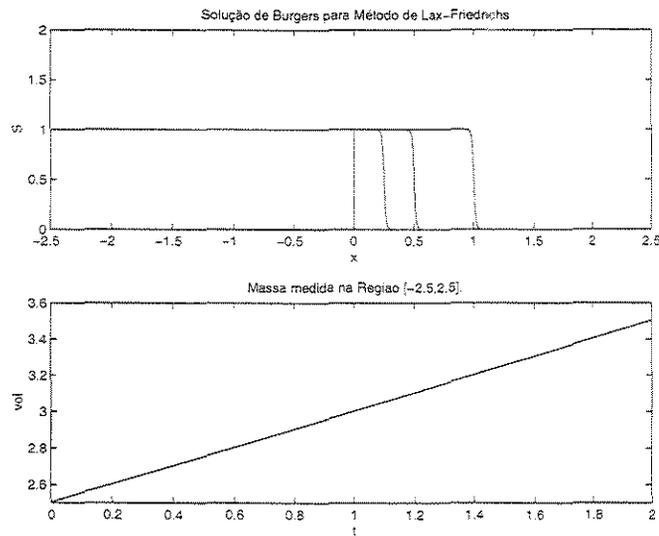


Figura 4.9: Métodos de Diferenças Finitas Ordem 1 - Lax-Friedrichs. Para os tempos 0.5, 1 e 2. $n=1000$ pontos, $\Delta x = 0.005$ e $\tau = 0.001$. Observemos neste caso que a condição CFL é satisfeita. O membro do lado esquerdo de (1.52) é 0.2. Observemos ainda que o choque é espalhado de forma visível em torno das soluções para os tempos 0.5, 1 e 2

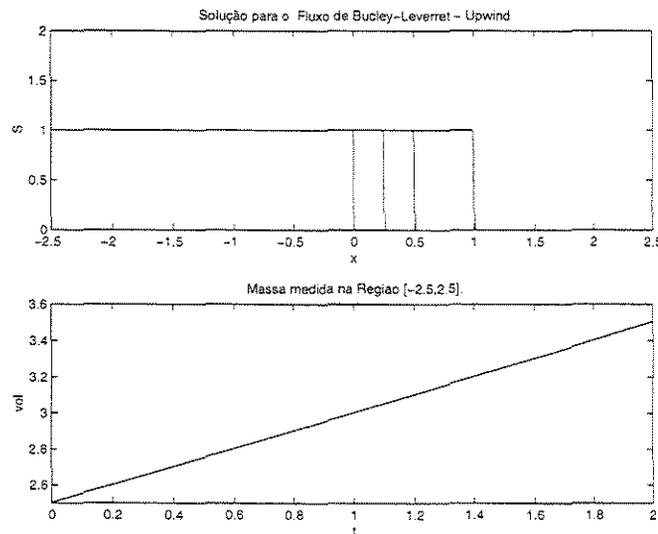


Figura 4.10: Métodos de Diferenças Finitas Ordem 1- Upwind. Para os tempos 0.5, 1 e 2. $n=1000$ pontos, $\Delta x = 0.005$ e $\tau = 0.001$. Visivelmente, este método é espalha menos a solução em torno da região de choque que o método de Lax-Friedrichs. A condição CFL também é verificada com o termo do lado esquerdo de (1.52) valendo 0.2.

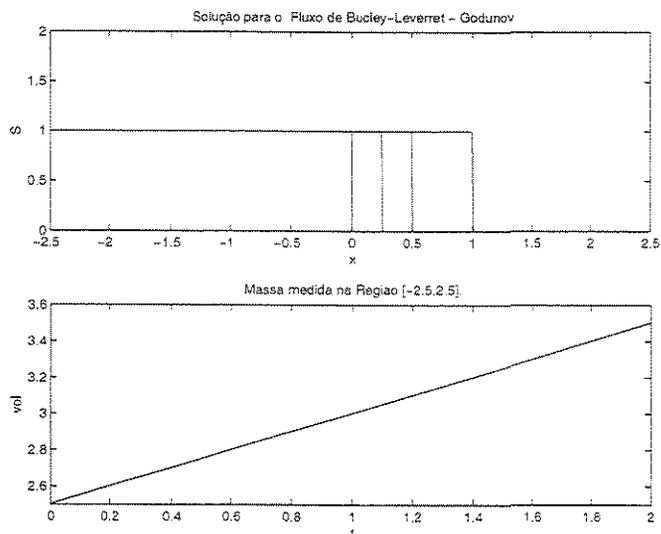


Figura 4.11: Métodos de Diferenças Finitas Ordem 1- Godunov. Para os tempos 0.5, 1 e 2. $n=1000$ pontos, $\Delta x = 0.005$ e $\tau = 0.001$. Visivelmente não há diferença entre este método e o Upwind. Observemos neste caso que a condição CFL também é satisfeita; neste caso temos, como nos anteriores, que o lado esquerdo de (1.52) também é 0.; entretanto, a condição de CFL para o método de Godunov impõe que o lado esquerdo de (1.52) seja menor que 0.5, v. (4.4).

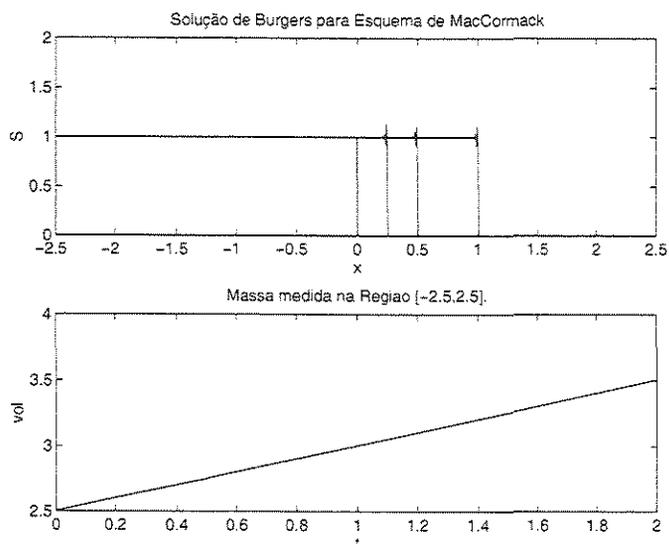


Figura 4.12: Métodos de Diferenças Finitas Ordem 2- MacCormack sem Filtro. Oscilações em torno dos choques. Para os tempos 0.5, 1 e 2. $n=1000$ pontos. $\Delta x = 0.005$ e $\tau = 0.001$. Observemos neste caso oscilações em torno do choque, apesar do método oscilar, como é satisfeita a condição CFL, o esquema é conservativo.

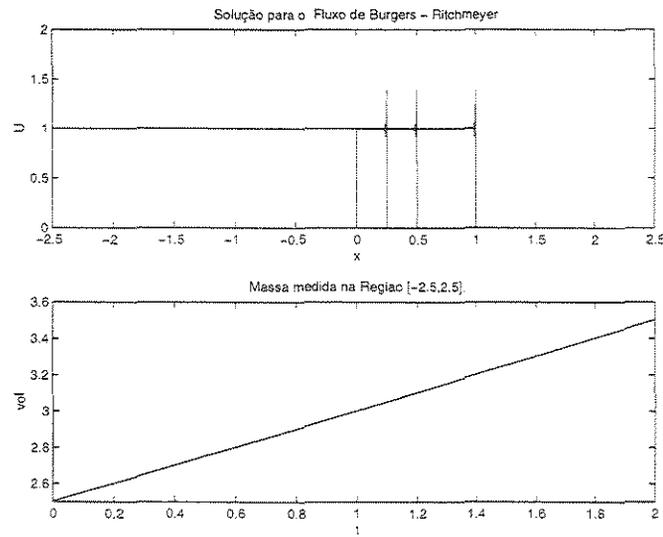


Figura 4.13: Métodos de Diferenças Finitas Ordem 2- Ritchmeyer Sem Filtro. Oscilações em torno dos choques. Para os tempos 0.5, 1 e 2. $n=1000$ pontos, $\Delta x = 0.005$ e $\tau = 0.001$. Observemos neste caso oscilações em torno do choque, apesar do método oscilar, como é satisfeita a condição CFL, o esquema é conservativo.

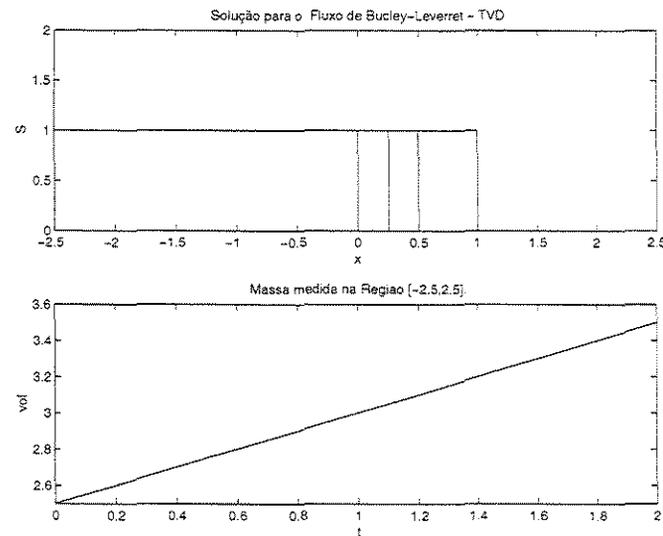


Figura 4.14: Métodos de Diferenças Finitas Ordem 2- TVD-Runge Kutta. Para os tempos 0.5, 1 e 2. $n=1000$ pontos, $\Delta x = 0.005$ e $\tau = 0.001$. O método possui uma convergência boa, espalha pouco a solução em torno da região de choque.

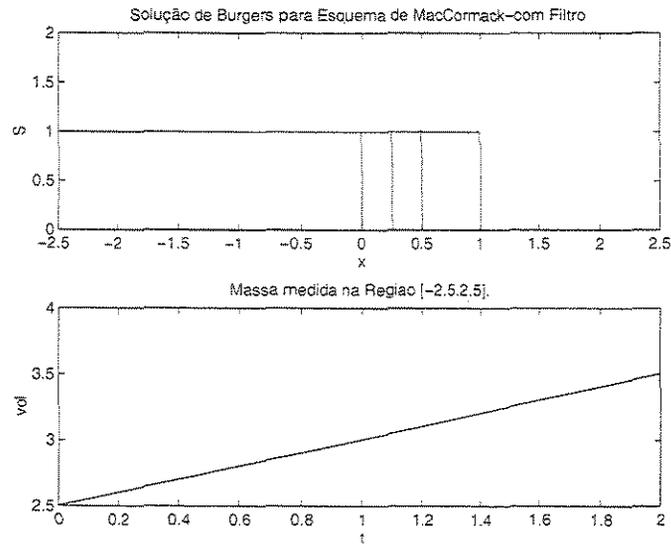


Figura 4.15: Métodos de Diferenças Finitas Ordem 2- MacCormack com Filtro. Para os tempos 0.5, 1 e 2. $n=1000$ pontos, $\Delta x = 0.005$ e $\tau = 0.001$. Apesar de que a solução parece ter um comportamento bom, neste caso ela é apenas melhorada pois o filtro retirou as oscilações nas regiões de choque. Observemos entretanto pequenas elevações nas soluções para os tempos $t = 1$ e $t = 2$. O filtro vale-se basicamente da propriedade de conservação do método.

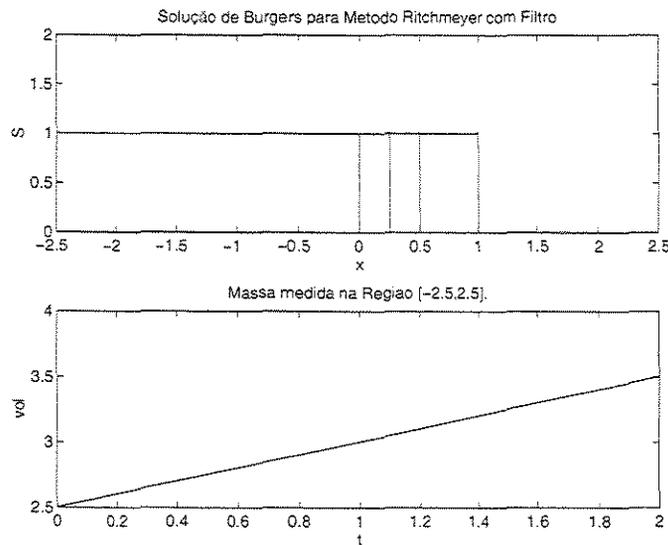


Figura 4.16: Métodos de Diferenças Finitas Ordem 2- Richtmeyer Com Filtro. Para os tempos 0.5, 1 e 2. $n=1000$ pontos, $\Delta x = 0.005$ e $\tau = 0.001$. Apesar de que a solução parece ter um comportamento bom, neste caso ela é apenas melhorada pois o filtro retirou as oscilações nas regiões de choque. Observemos entretanto pequenas elevações nas soluções para os tempos $t = 1$ e $t = 2$. O filtro vale-se basicamente da propriedade de conservação do método.

Para o fluxo de Buckley-Leverret podemos usar o método dos volumes finitos e utilizar-nos dos mesmos dados iniciais e encontramos:

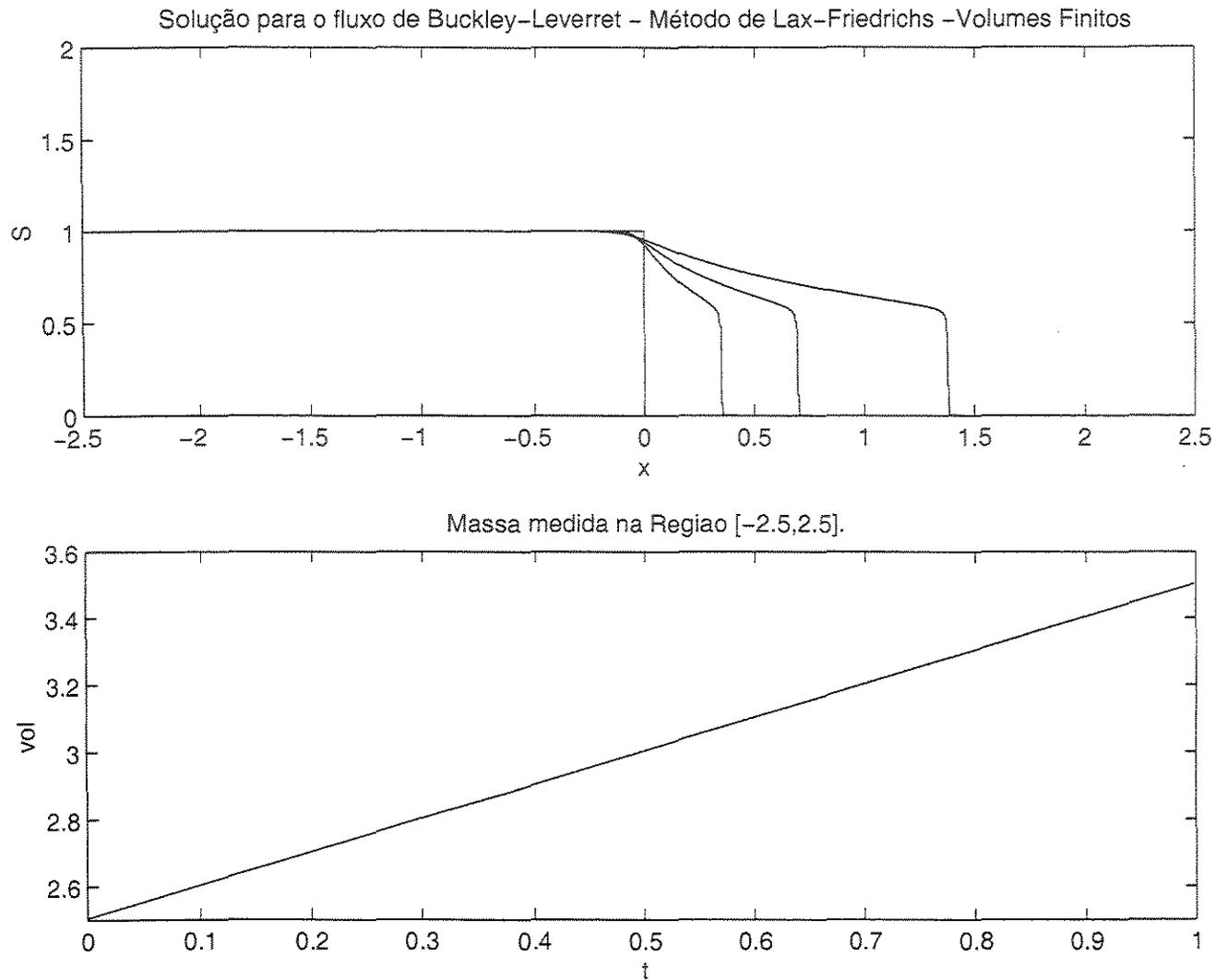


Figura 4.17: Métodos dos Volumes Finitos Ordem 1- Lax-Friedrichs. Para os tempos 0.25, 0.5 e 1. $n=1000$ pontos, $\Delta x = 0.005$ e $\tau = 0.001$. Observemos que a solução espalha-se tanto para trás quanto para frente em torno da condição inicial. Isto acontece pois o método de Lax é mais “difusivo” que os outros métodos. A vantagem do método de Lax é que ele pode ser aplicável tanto para as ondas de choque, quanto para as ondas de rarefação, o que não acontece para o método Upwind, por exemplo

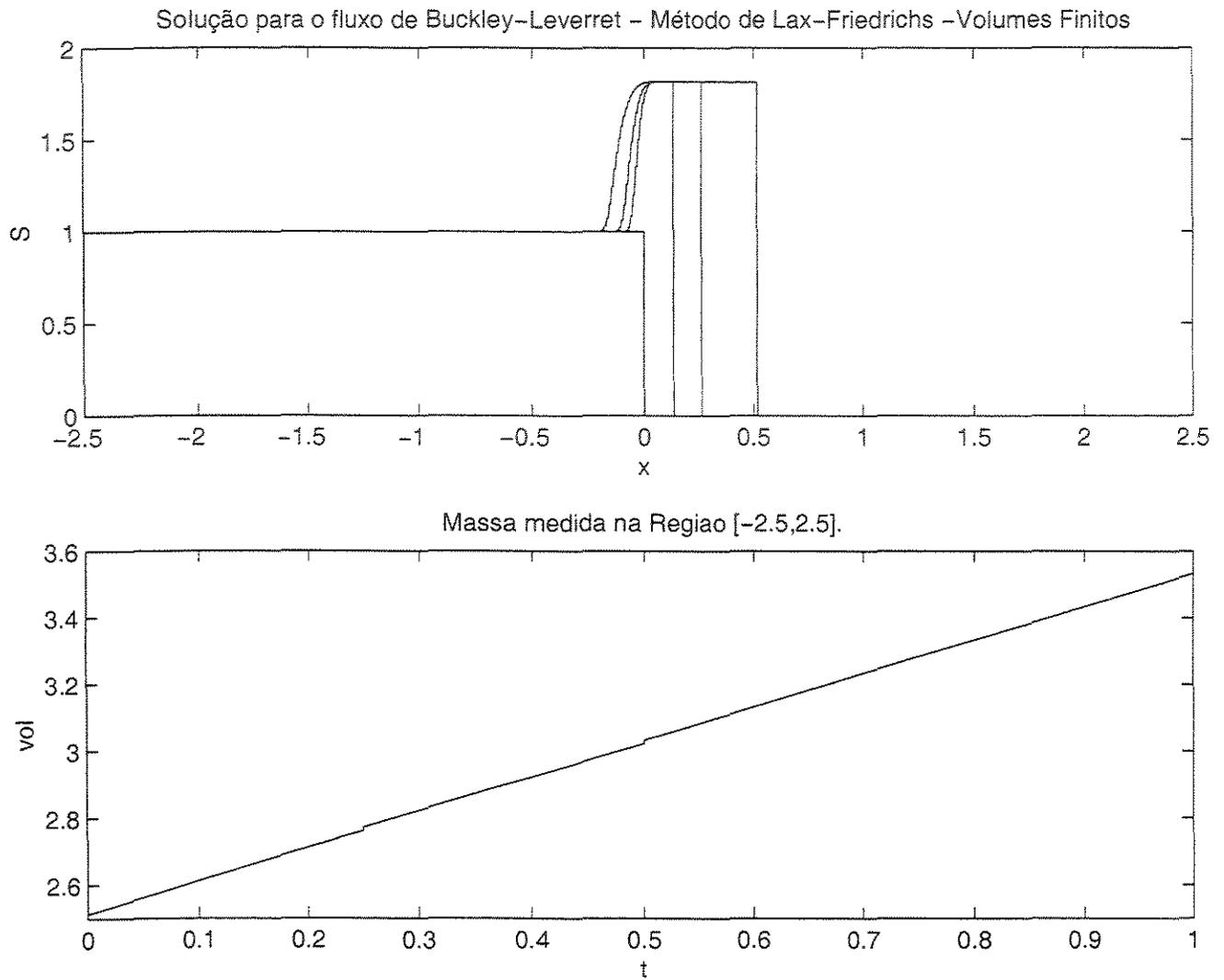


Figura 4.18: Métodos dos Volumes Finitos Ordem 1- Lax-Friedrichs; violação da condição CFL (1.52), o método torna-se instável. Para os tempos 0.25, 0.5 e 1. $n=1000$ pontos, $\Delta x = 0.005$ e $\tau = 0.01$. Observemos que houve oscilação forte, mas a massa aumentou apenas um pouco. Caso façamos o esquema evoluir mais no tempo, a massa também explodirá como no caso do fluxo de Burgers.

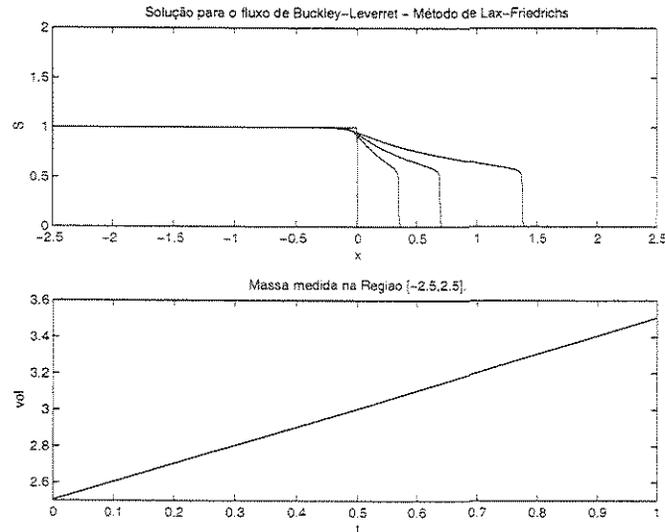


Figura 4.19: Métodos de Diferenças Finitas Ordem 1 - Lax-Friedrichs. Para os tempos 0.25, 0.5 e 1. $n=1000$ pontos, $\Delta x = 0.005$ e $\tau = 0.001$.

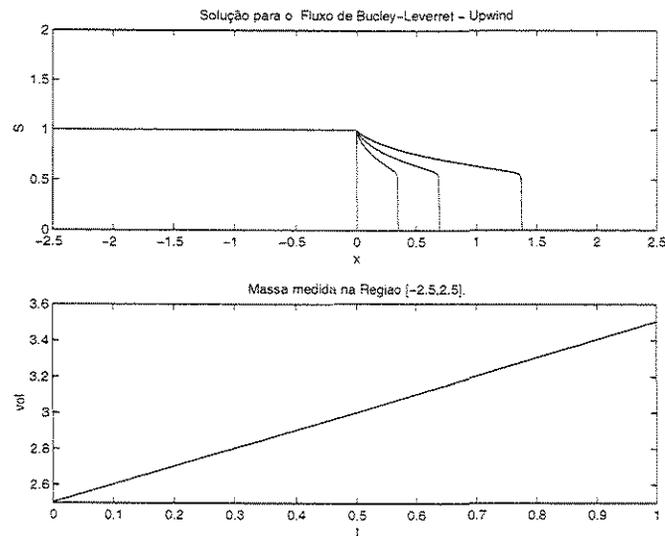


Figura 4.20: Métodos de Diferenças Finitas Ordem 1- Upwind. Para os tempos 0.25, 0.5 e 1. $n=1000$ pontos, $\Delta x = 0.005$ e $\tau = 0.001$. Observe neste caso que a solução não se espalha para trás. A diferença deste método para o de Lax, é que o anterior espalha a solução em todas as direções (difunde a solução (v. [40])), e este método só dá a solução evoluindo para frente no eixo x.

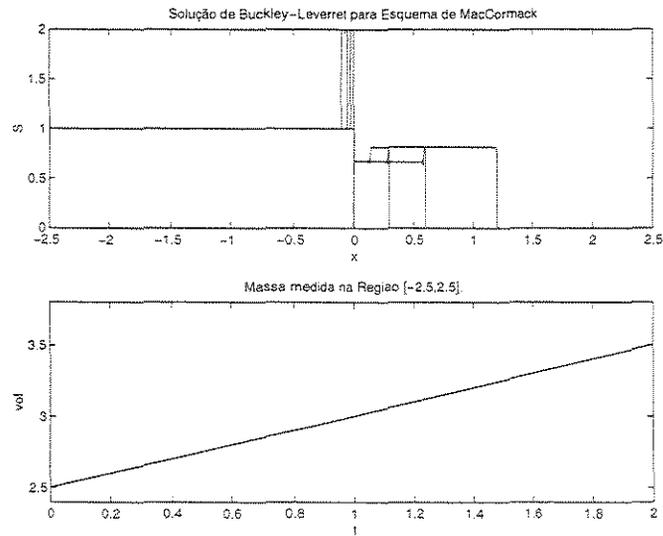


Figura 4.21: Métodos de Diferenças Finitas Ordem 2- MacCormack sem Filtro. Oscilações em torno dos choques. Para os tempos 0.25, 0.5 e 1. $n=1000$ pontos, $\Delta x = 0.005$ e $\tau = 0.001$. Houve altas oscilações entretanto, a massa ainda foi conservada.

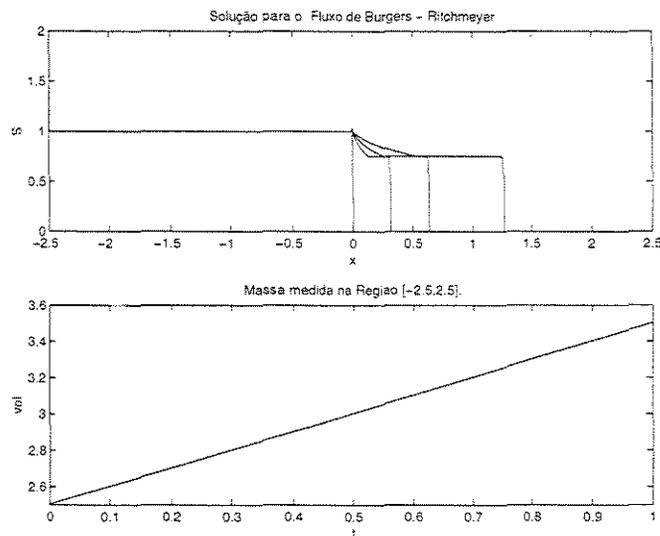


Figura 4.22: Métodos de Diferenças Finitas Ordem 2- Richtmyer Sem Filtro. Oscilações em torno dos choques. Para os tempos 0.25, 0.5 e 1. $n=1000$ pontos, $\Delta x = 0.005$ e $\tau = 0.001$

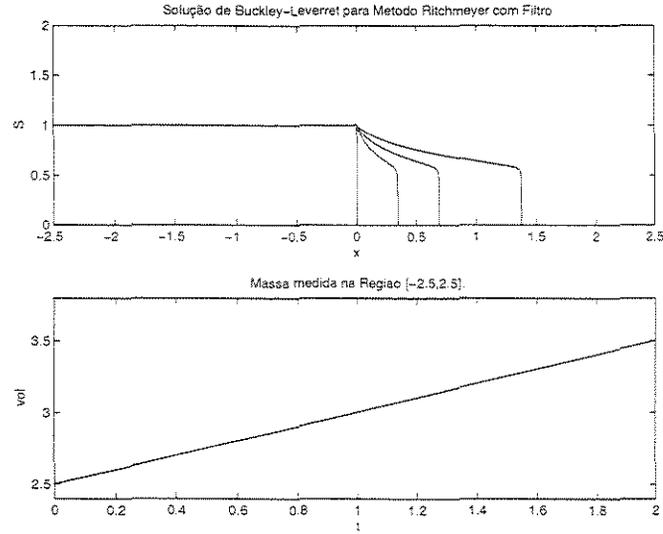


Figura 4.23: Métodos de Diferenças Finitas Ordem 2- Ritchmeyer Com Filtro. Para os tempos 0.25, 0.5 e 1. $n=1000$ pontos, $\Delta x = 0.005$ e $\tau = 0.001$

4.3 Método dos Volumes Finitos Bidimensional

Neste caso, os domínios considerados poderão ser diferentes de regiões que possam ser levadas a domínios Euclidianos.

O método dos Volumes Finitos em duas dimensões pode ser construído como se segue.

Inicialmente, precisamos estabelecer algumas definições e notações que serão usadas posteriormente. Conforme fizemos no Capítulo 3, podemos definir uma triangularização do domínio da seguinte forma:

Definição 29 {Triangularização}

Chamaremos um polígono fechado de k vértices de k -polígono. Para facilitar a notação vamos indexar cada elemento da triangularização por i ao invés de e . Isto é feito somente para efeito de aproximarmos nossa notação do método de diferenças finitas.

O conjunto

$$K := \{K_i \mid K_i \text{ é um polígono para } i \in I \subseteq \mathbb{N}\}$$

(no qual $I \subseteq \mathbb{N}$ é um conjunto de índices) é dito uma triangularização do domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ se as seguintes três propriedades são satisfeitas

1. $\Omega = \cup_{i \in I} K_i$
2. São localmente finitas, ou seja, para qualquer região escolhida sobre o domínio há apenas um número finito de polígonos cobrindo esta região.
3. Para dois diferentes T_i e T_j nós temos que $T_j \cap T_i = \emptyset$ (são disjuntos) ou $T_j \cap T_i = a$, (a medida de $H^0(T_j \cap T_i) = 1$), um vértice comum de T_i e T_j ou $T_j \cap T_i = a$ (a medida de $H^1(T_j \cap T_i) = \text{comprimento de } a$) é um lado comum de T_i e T_j

Notações 1 Tome $(K_j)_j$ denotando uma triangularização de $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Em particular, devemos usar a seguinte definição

1. K_j : o j -ésimo elemento da triangularização;
2. $|K_j|$: área de K_j ;
3. $K_{jl}, l = 1, \dots, k$: elementos vizinhos de K_j ;
4. u_j^n : aproximação da solução exata de u sobre K_j no tempo $n\Delta t$; a função u_j^n é assumida ser constante sobre K_j ;
5. u_{jl}^n : aproximação da solução exata de u sobre K_{jl} no tempo $n\Delta t$;
6. $u_j := u_j^n$;
7. e_{jl} : l -ésimo lado de K_j ;
8. $|e_{jl}|$: é a área do l -ésimo lado de K_j ;
9. z_{jl} : ponto médio do l -ésimo lado do elemento j ;
10. ν_{jl} : normal externa a e_{jl} de comprimento $|\nu_{jl}|$;
11. a normal unitária $\vec{n}_{jl} := \nu_{jl}/|\nu_{jl}|$; nós denotamos por x e y as coordenadas de \vec{n}_{jl} respectivamente por \vec{n}_{jlx} e \vec{n}_{jly} ;
12. $\text{diam}(K_j)$: o comprimento do maior lado de K_j ;
13. $h := \sup_{j \in I} \text{diam}(K_j)$;
14. Função de aproximação para qualquer t $u^n(z) := u_j^n$ se $z \in K_j$;
15. Função de aproximação $u_h(z, t) := u_j^n$ se $z \in T_j$ e $t^n \leq t < t^{n+1}$, $n = 0, 1, \dots$

Devemos assumir, como feito anteriormente que

$$\frac{\tau}{h^2} \longrightarrow 0$$

quando $\tau, h \longrightarrow 0$.

Definição 30 {Esquema de Volumes Finitos Bidimensional}

Para valor inicial u_0 , assumiremos pertencer a $L^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)$, e a aproximação a ser usada no método será dada por:

$$u_j^0 = \frac{1}{|K_j|} \int_{K_j} u_0 \quad (4.27)$$

e o dado de fronteira u_1 é suave.

A solução aproximada, u_j^n , é então definida por :

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{|T_j|} \sum_{l=1}^k g_{jl}(u_j^n, u_{jl}^n) \quad (4.28)$$

no qual para g_{jl} , $l = 1, \dots, k$, é o fluxo numérico, que tem as propriedades (3.3)-(3.6).

Os fluxos g podem ser construídos de várias formas. Podemos considerar os esquemas estudados anteriormente de Lax e de Godunov e um esquema devido a Engquist-Osher (em $1 - D$, o esquema abaixo reduz ao esquema de Engquist-Osher estudado anteriormente), que pode ser provado satisfazer as condições (3.3)-(3.6). Seja a lei de conservação escalar $2 - D$. Tome

$$c_{jl}(u) = \vec{n}_{jl} \cdot f(u)$$

e

$$c_{jl}^+(u) = c_{jl}(0) + \int_0^u \max\{c'_{jl}(s), 0\} ds \quad (4.29)$$

$$c_{jl}^-(u) = \int_0^u \min\{c'_{jl}(s), 0\} ds \quad (4.30)$$

Agora tome

$$g_{jl}(u, v) := |e_{jl}| [c_{jl}^+(u) + c_{jl}^-(v)] \quad (4.31)$$

Simulações Bidimensionais

Vamos escolher o fluxo de Burgers adaptado para duas dimensões (podemos também adaptar o fluxo de Buckley-Leverret, mas as simulações serão apenas uma extensão para este método).

$$f_1(u) = \frac{u^2}{2} \quad (4.32)$$

$$f_2(u) = \frac{u^2}{2} \quad (4.33)$$

Primeiramente vamos simular para uma região quadrada. Nossa região de definição será um quadrado centrado em $(0,0)$ com lados 0.6:

Vamos tomar os dados iniciais da seguinte forma

$$u(x, y, 0) = \begin{cases} 1 & \text{se } -0.1 < x < 0.1 \text{ e } -0.1 < y < 0.1 \\ 0 & \text{outro caso} \end{cases} \quad (4.34)$$

Observe que será necessário tomarmos os dados iniciais para a aproximação como sendo a integral dos dados iniciais reais do problema (v. (4.27)). Entretanto, como os dados são constantes em regiões e como vamos discretizar nosso domínio de forma que em cada elemento o dado inicial assuma apenas um valor: ou será sempre 1, ou sempre 0; a condição de que os dados iniciais para a simulação numérica é a integral dos dados iniciais, é imediatamente satisfeita.

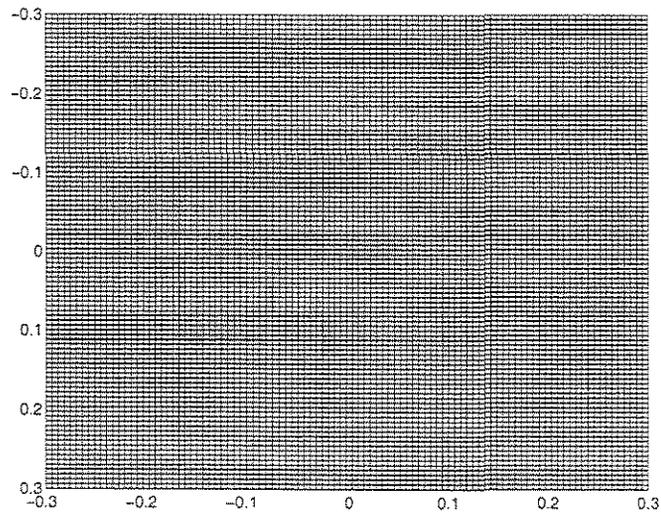


Figura 4.24: Domínio Retangular: Vista de cima. Diferenças finitas

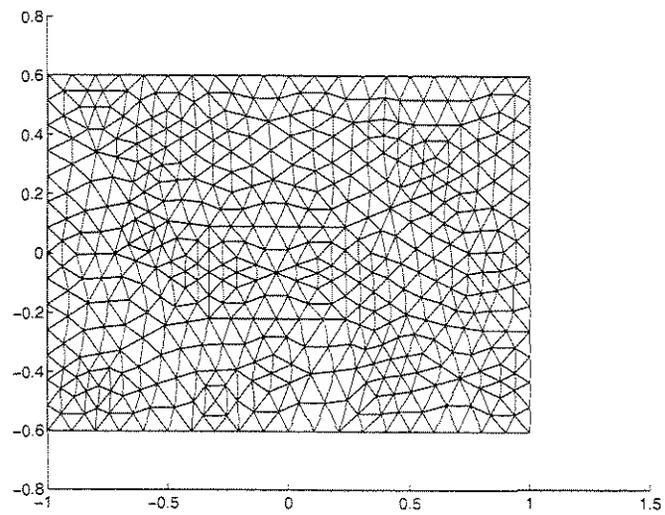


Figura 4.25: Domínio Retangular: Vista de cima. Triangularização Qualquer

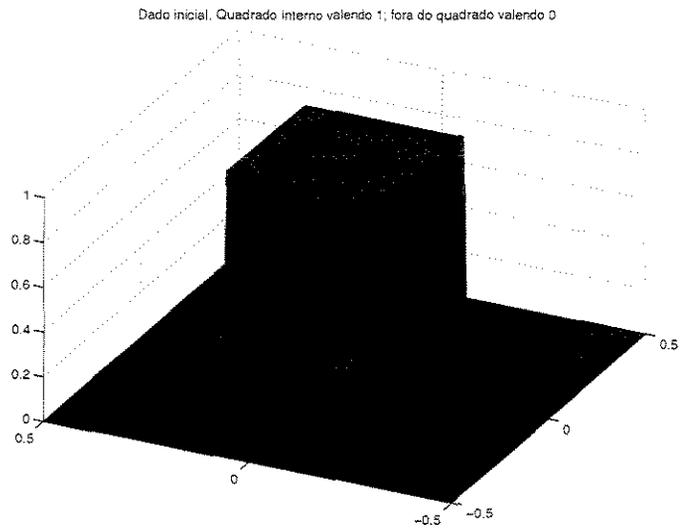


Figura 4.26: Dado Inicial - Domínio Retangular: Vista de lado

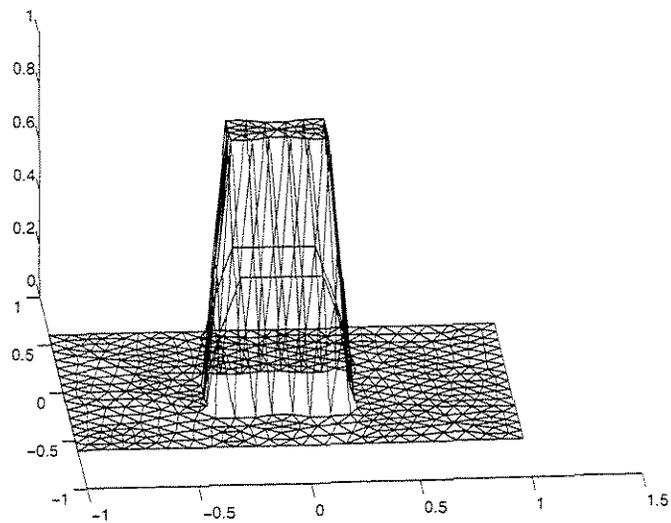


Figura 4.27: Dado Inicial - Domínio Retangular-Triangularização Qualquer: Vista de lado

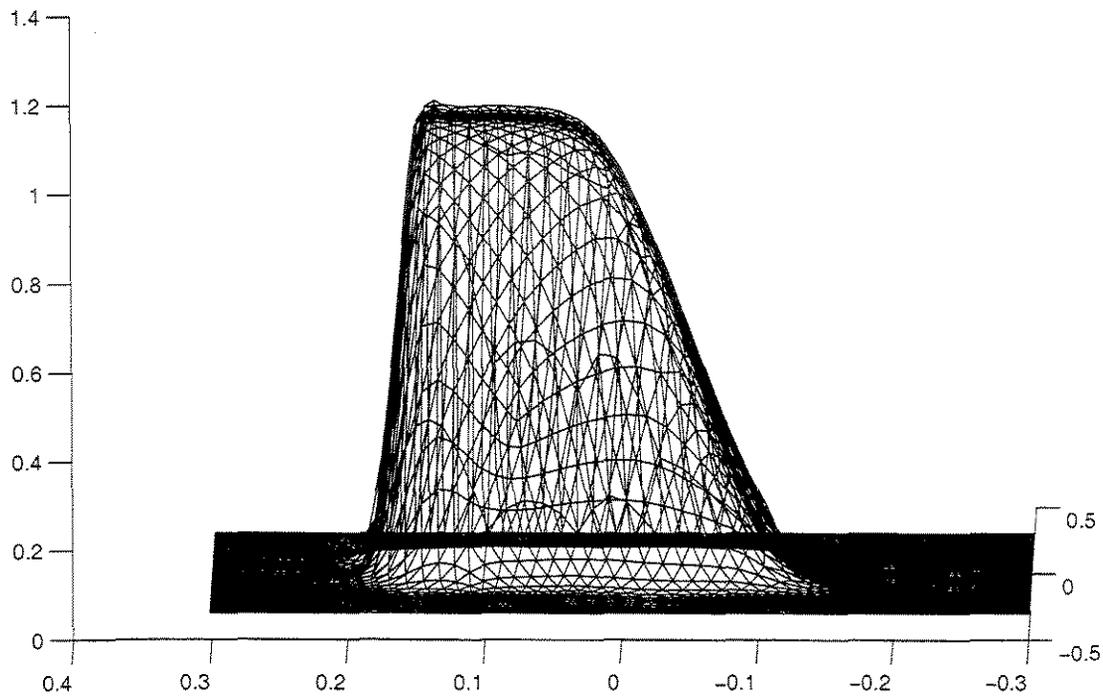


Figura 4.28: Método dos Volumes Finitos - Lax-Friedrichs. $\tau = 0.001$ $t = 0.15$. A solução virada. Observemos a região de choque que se forma entre 0.1 e 0.2, notemos como a solução é espalhada perto do choque. Este espalhamento advém do fato que o método tem convergência de ordem 1. Na região entre 0 e 0.1, a solução é mais suave, neste caso aparece uma onda de rarefação (v. [33], [40]). As ondas de rarefação têm a propriedade de serem soluções contínuas. Estas ondas não são tratadas bem pelos métodos Upwind, pois as características, neste caso, são dirigidas para trás (v. [33], [40]).

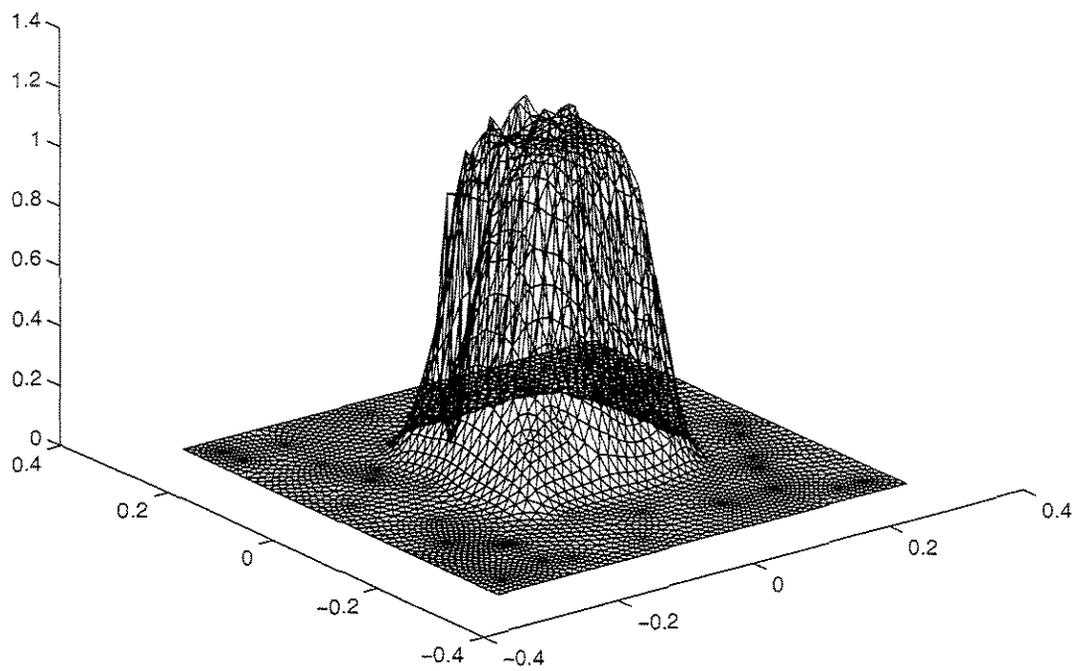


Figura 4.29: Método dos Volumes Finitos - Lax-Friedrichs. $\tau = 0.006$ $t = 0.06$. Instabilidade para o Método, não satisfeita a condição CFL. Observemos pequenas oscilações que aparecem na solução. Estas instabilidades fazem com que a solução num intervalo posterior “exploda”.

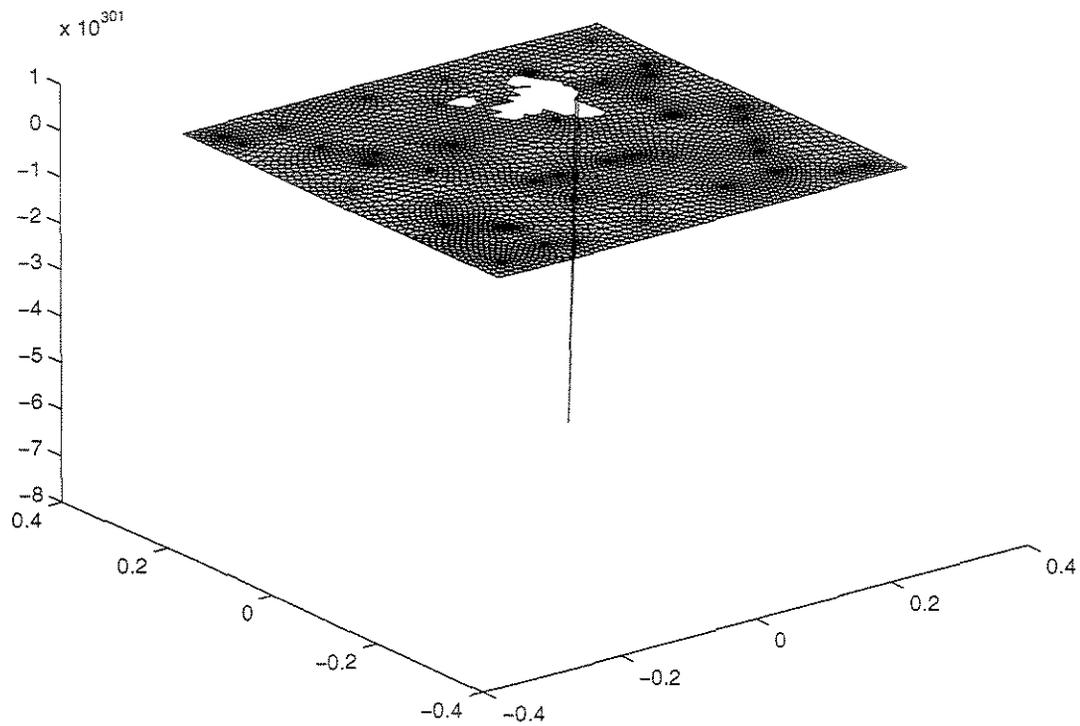


Figura 4.30: Método de Lax-Friedrichs. $\tau = 0.0065$ $t = 0.06$. Instabilidade para o Método, não satisfeita a condição CFL. Observe que uma pequena modificação no τ para o esquema a solução explode. Caso a condição CFL não seja satisfeita é muito difícil saber como evoluirá a solução.

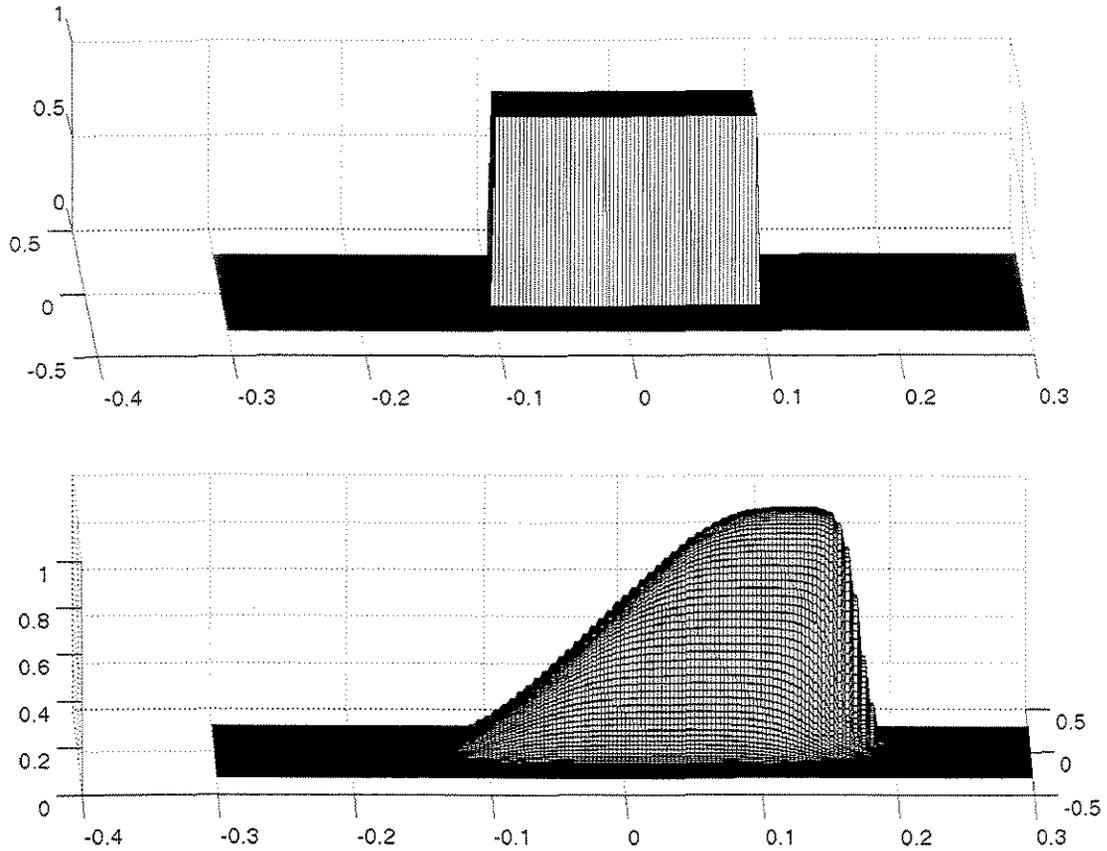


Figura 4.31: Método das Diferenças Finitas para Duas Dimensões, no domínio foram colocados 40000 elementos, $\tau = 0.001$ $t = 0.15$ - Lax-Friedrichs. Observemos as regiões de choque na direção crescente dos eixos x e y e uma onda de rarefação na direção decrescente na parte de trás do pulso.

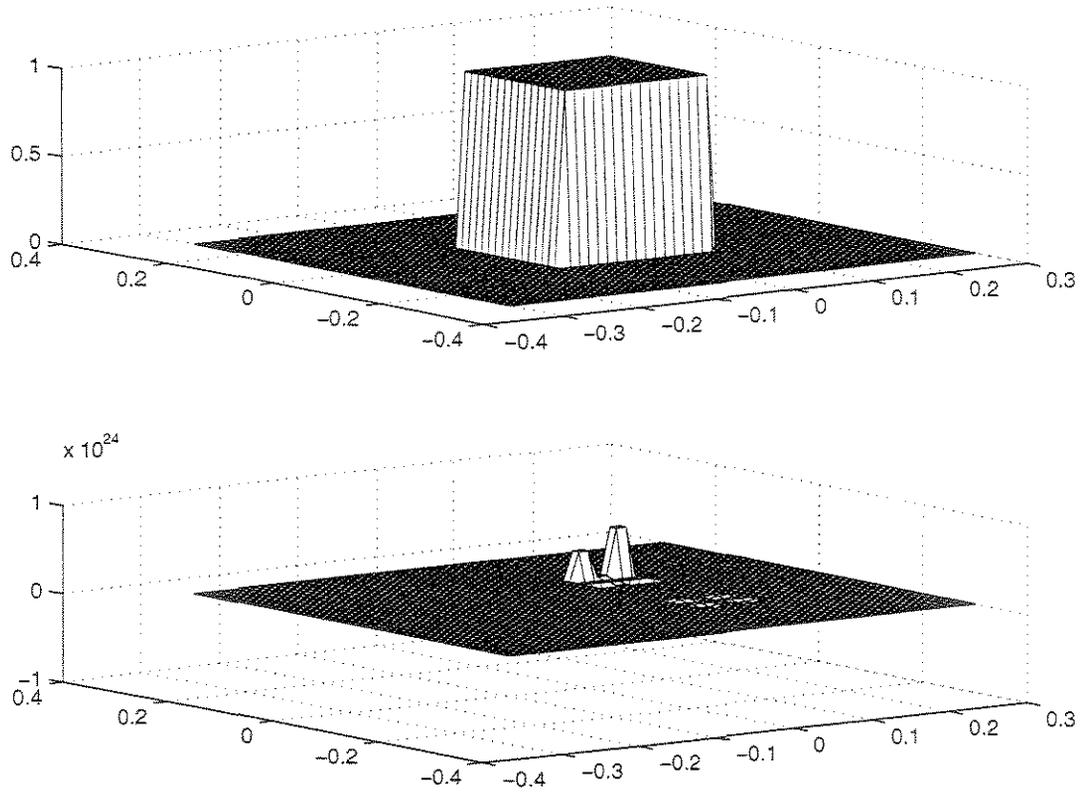


Figura 1: Método das diferenças finitas. Condição CFL não satisfeita, foram colocados 2500 elementos e $\tau = 0.1$, e tempo final $t = 0.2$. Observe que a solução explode apenas para duas iterações.

Vamos agora simular o método dos Volumes Finitos para uma Região na qual o método das diferenças finitas encontra muitas dificuldades para fornecer uma solução satisfatória. O Domínio é uma região quadrada com um círculo central. Sobre o qual definiremos os dados

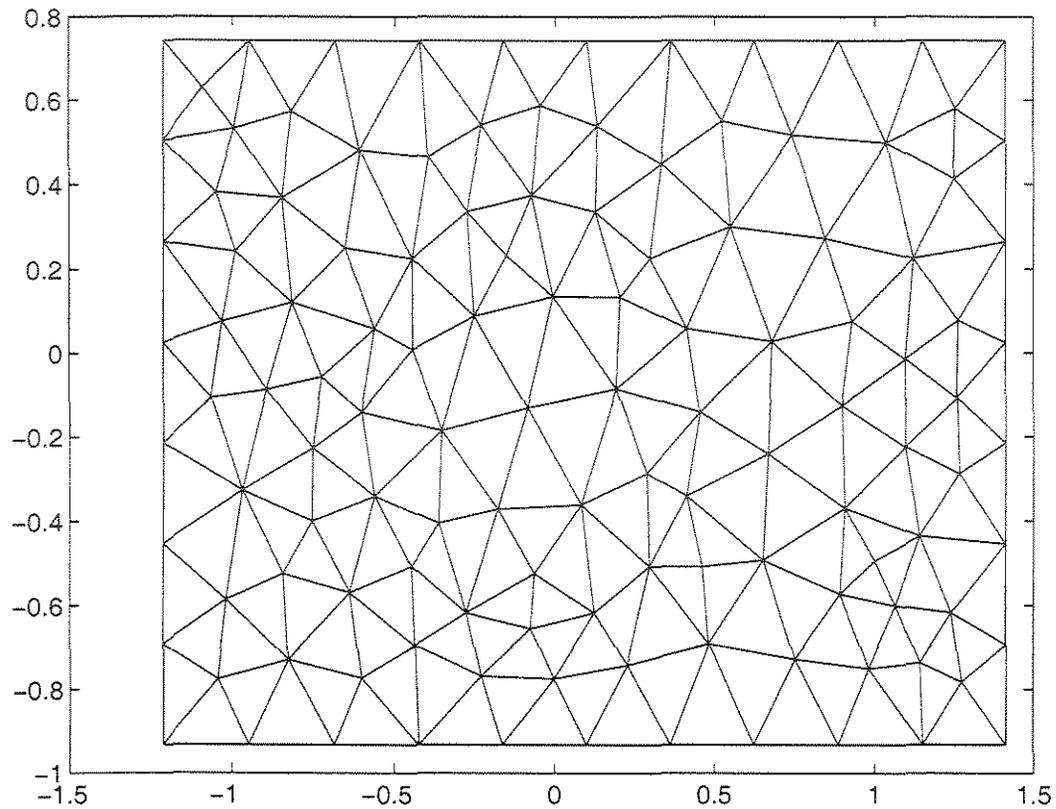


Figura 4.33: Domínio Quadrado com região interna circular.

iniciais

$$u_0(x, y, 0) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \text{ pertence ao círculo} \\ 0 & \text{outro caso} \end{cases} \quad (4.35)$$

Observe neste caso que os dados iniciais também serão constantes sobre cada elemento e não será necessário que integremos o mesmo para termos dados integrados. Podemos simular então esta equação de forma que teremos

Gráfico da Condição Inicial

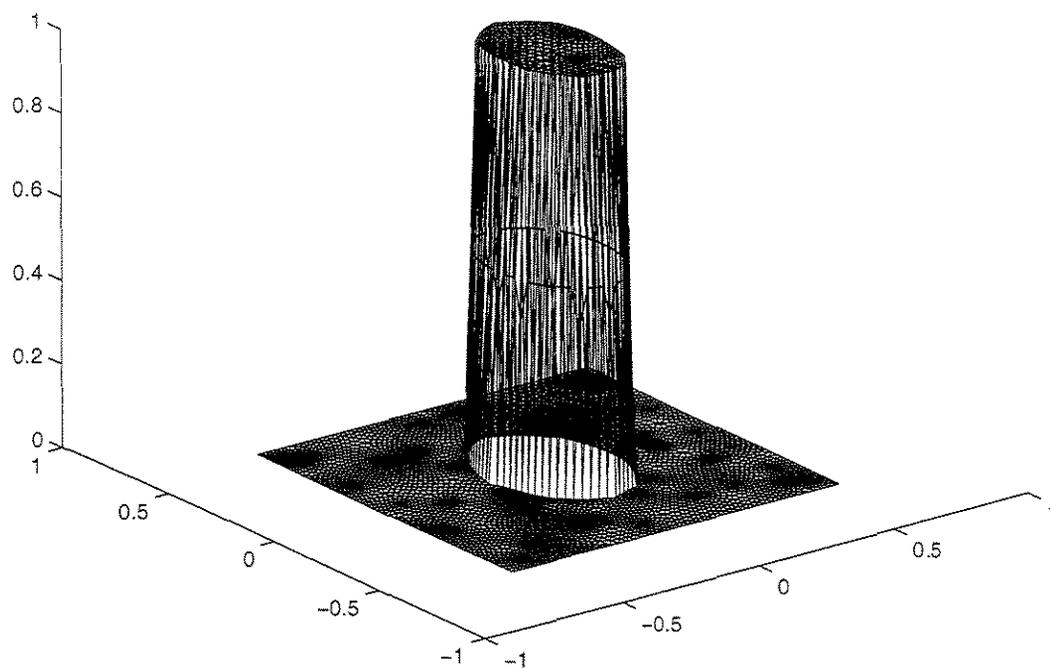


Figura 4.34: Domínio Quadrado com região interna circular. Dados Iniciais

Gráfico da Solução Equação De Burgers Bi-dimensional

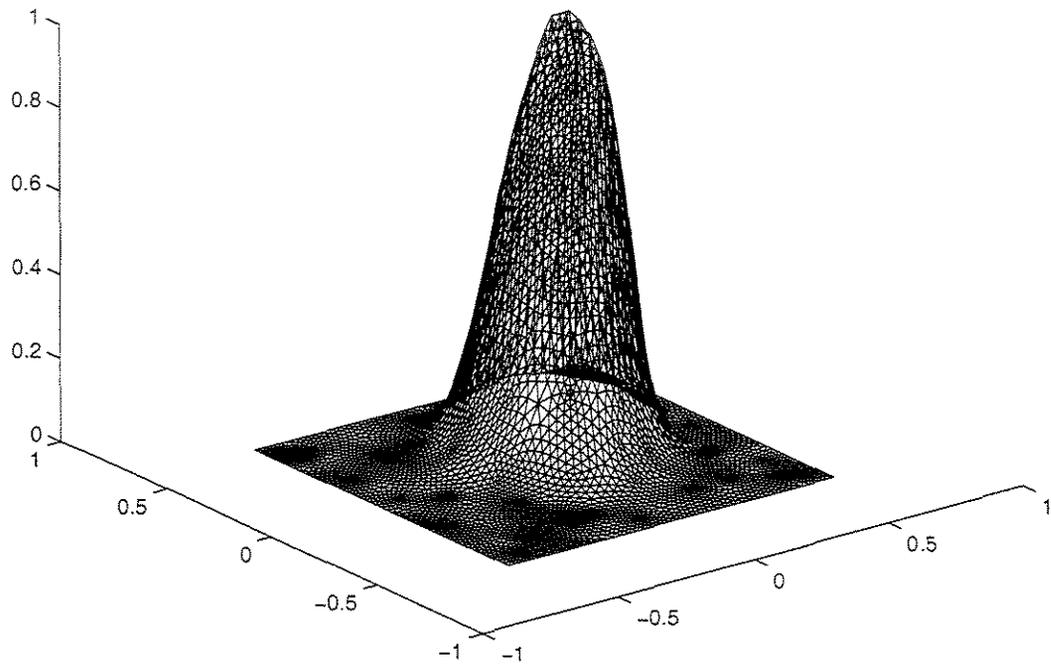


Figura 4.35: Método dos Volumes Finitos- Lax-Friedrichs. - Vista de Lado

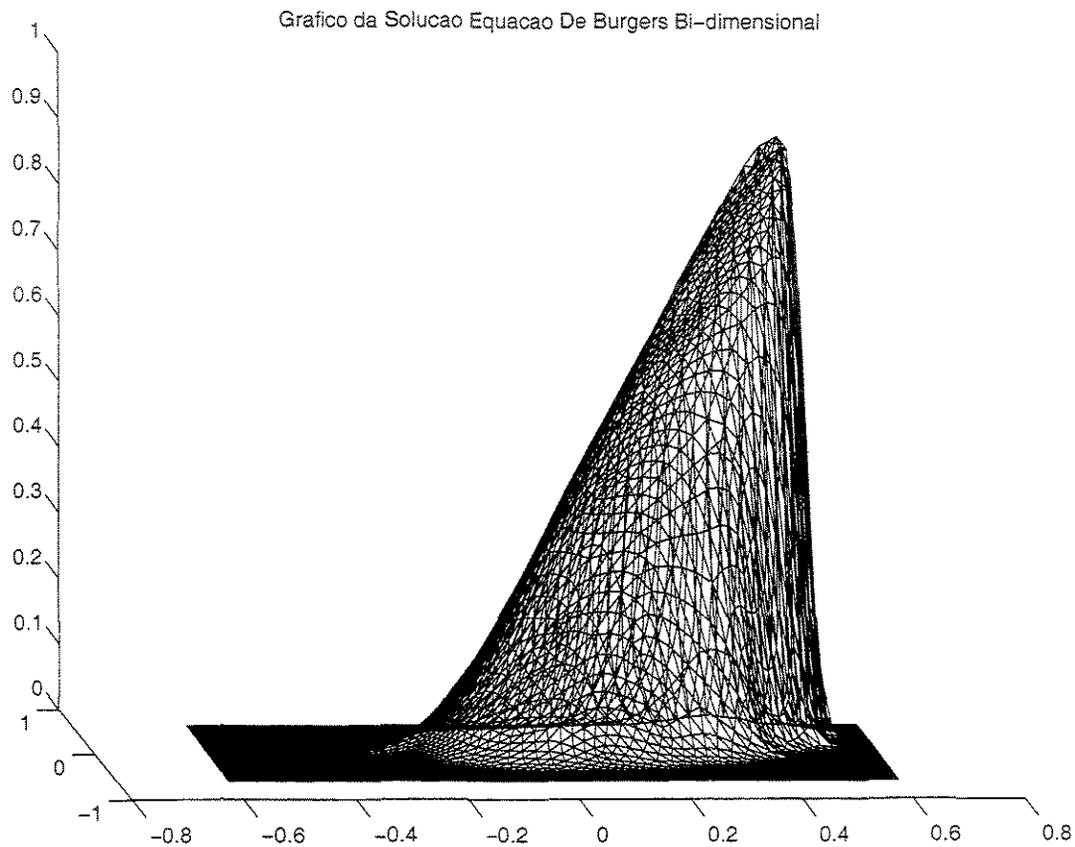


Figura 4.36: Método dos Volumes Finitos- Lax-Friedrichs. $\tau = 0.001$ $t = .4$. Observemos que a região de choque é espalhada e que na parte de trás do pulso há a formação de uma onda de rarefação. Observe também na parte superior a região circular com dados valendo 1 já está reduzida. Note que a solução não cresce no tempo.

Gráfico da Solução Equacao De Burgers Bi-dimensional

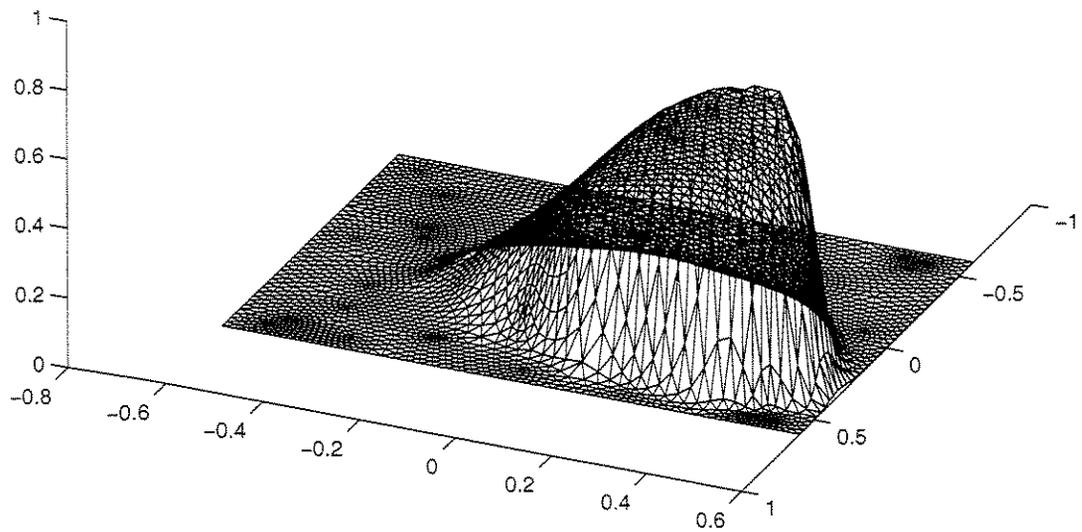


Figura 4.37: Método dos Volumes Finitos-Lax-Friedrichs. Evolução do pulso $\tau = 0.001$ $t = .4$. Observemos que ele se dirige em direção de crescimento do eixo x e eixo y . Isto está de acordo com a resposta teórica para a solução.

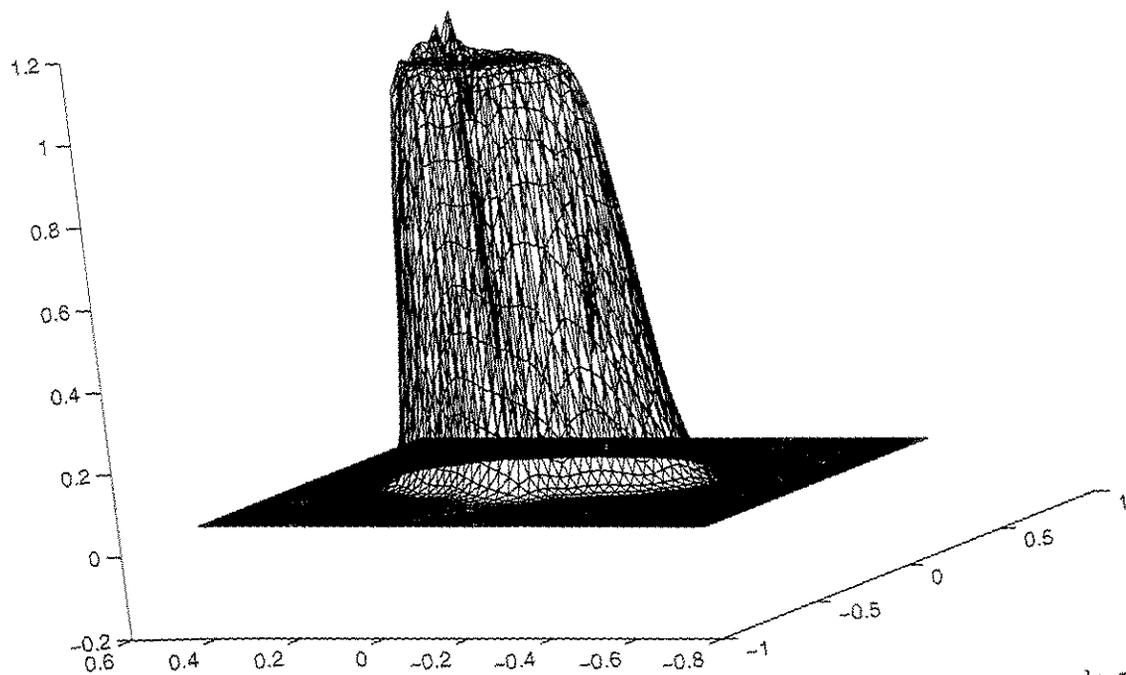


Figura 4.38: Método dos Volumes Finitos- Lax-Friedrichs. Oscilações em torno da região de choque.

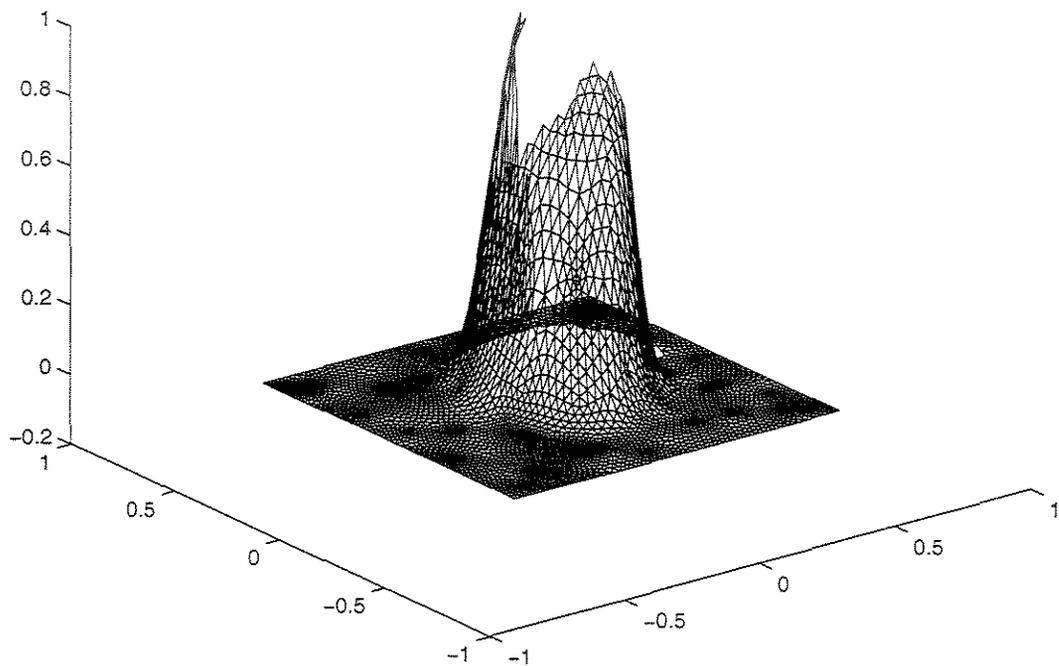


Figura 4.39: Método dos Volumes Finitos- Lax-Friedrichs. Oscilações em torno da região de choque. Neste caso a condição CFL é obtida numericamente tal que para qualquer triângulo na região, o lado esquerdo de (1.52) é maior que 1.2. A violação dessa condição faz com que a solução exploda para tempos finitos.

Como ilustração, podemos definir o método dos volumes finitos para o problema de Cauchy para convergência de ordem mais alta.

4.4 Esquema de Volumes Finitos de Ordem mais Alta

Os métodos apresentados anteriormente são métodos de ordem de convergência 1. O que torna os pouco eficiente. Entretanto, com uma reconstrução polinomial, é possível aumentar a ordem de convergência.

Uma forma de construir o método para o problema de Cauchy é como se segue, (v. [33]):

Definição 31 *Seja $u_0 \in L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$ com suporte compacto e u_0 dado como em (4.27). Suponhamos que u_j^n e a correspondente reconstrução linear $L(u^n)$ (v.[33]) já foram definidas. Tome g_{jl} um fluxo monótono satisfazendo (3.3)-(3.6). Um esquema de volume finito de ordem mais alta (no espaço) é definido por*

$$u_j^{n+1} := u_j^n - \frac{\Delta t}{|K_j|} \sum_{l=1}^3 g_{jl}(L_j^n(z_{jl}), L_{jl}^n(z_{jl})) \quad (4.36)$$

no qual $L_{jl}^n(z_{jl})$ é a reconstrução linear avaliada no polígono vizinho T_{jl} . O esquema de volume finito de ordem mais alta no espaço e no tempo de segunda ordem é definido pelo método de Runge-Kutta TVD (v. [27]) de segunda ordem:

$$u_j^{n+\frac{1}{2}} := u_j^n - \frac{\Delta t}{|T_j|} \sum_{l=1}^3 g_{jl}(L_j^n(z_{jl}), L_{jl}^n(z_{jl})) \quad (4.37)$$

$$u_j^{n+1} := \frac{1}{2}[u_j^n + u_j^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{|T_j|} \sum_{l=1}^3 g_{jl}(L_j^{n+\frac{1}{2}}(z_{jl}), L_{jl}^{n+\frac{1}{2}}(z_{jl}))] \quad (4.38)$$

no qual $L_j^{n+\frac{1}{2}}$ e $L_{jl}^{n+\frac{1}{2}}$ são definidos com os valores intermediários $u_j^{n+\frac{1}{2}}$. Também é possível estender estas definições para ordens mais altas tanto para o tempo (v. [27] para a implementação de Runge-Kutta temporal de ordem qualquer) como para o espaço (v. [33] para a melhores referências da reconstrução linear).

A convergência de esquema de volumes finitos para um problema de valor inicial de ordem mais alta é provada em [35].

Poderíamos similarmente, definirmos o método dos volumes finitos com fronteira, entretanto não saberíamos qual a hipótese colocar sobre as condições iniciais e de fronteira, pelo simples fato, de que é desconhecida, até o presente momento, a demonstração da convergência deste método. Possivelmente a hipótese de que o dado inicial é suave seria utilizada e a condição (8). As grandes dificuldades enfrentadas para demonstração, residem no fato de se encontrarem estimativas compatíveis com o esquema e a lei de conservação. Fato este que poderá motivar trabalhos posteriores.

4.5 Considerações Finais

Em [38], é estudado métodos tipo ENO (Essential Non-Oscillatory); e conexões formais entre as leis de conservação e uma equação tipo difusão convecção (v. [37]).

O grande interesse em se estudar o método de volumes finitos, mesmo de ordem 1, é de uma aplicação em posteriores pesquisas. Um tópico relevante de tais pesquisas são os chamados “métodos numéricos para soluções não clássicas difusivas dispersivas”[29] e [30].

Muitos modelos em mecânica contínua caem nesta categoria: elastodinâmica não linear, magneto-hidrodinâmica, dinâmica dos fluidos complexos, etc. Efeitos dispersivos têm várias fontes físicas : efeitos de capilaridade em fluidos viscosos, o efeito de Hall em fluidos magnéticos, etc. Os métodos numéricos para a solução de tais equações são basicamente os métodos de diferenças finitas, e uma implementação de algum método que seja aplicável a malhas não estruturadas (, ou seja, que pudessem ser domínios quaisquer) é um tópico de muito interesse prático. Posteriormente, um grande desafio nessa direção seria mostrar a convergência do método construído, pois para uma “equação difusiva dispersiva não-clássica” surge uma dificuldade importante, é que apenas o critério de Liu (v. Serre [52]) não é suficiente para garantir a unicidade da solução entrópica, nesse caso é necessária a colocação de um critério adicional “Kinetic Relation”[29]. O bom entendimento do método dos volumes finitos é um passo importante para uma possível obtenção de esquemas numéricos que satisfaçam tanto a equação como os critérios de unicidade. Portanto, este trabalho é relevante sob os aspectos de pesquisa fundamental, pois nos fornece bases teóricas suficientes para avançar no estudo de esquemas possivelmente de interesses mais práticos num campo inexplorado, vasto e importante para a simulação numérica.

Bibliografia

- [1] BACHMAN, G. AND NARICI, L. – *Functional Analysis*, 1966 , Academic Press International Edition
- [2] BARDOS, C. LEROUX, A. Y. AND NEDELEC, J. C. – *First order quasilinear equations with boundary conditions*, Comm. P.D.E. 4(9), pp. 1017-1034, 1979.
- [3] BENHARBIT, S. CHALABI, A. AND VILA, J. P. – *Numerical Viscosity and Convergence Of Finite Volume Methods for Conservation Laws With Boundary Conditions*, Siam J. Numer. Anal. , Vol 32, No , pp. 775-796 , June 1995
- [4] W. CAI, D. GOTTLIEB AND C.W. SHU – *Essentially Nonoscillatory Spectral Fourier Methods for Shock Wave Calculations* ,, Numer. Math of Comp Vol 52, 186 (1989)
- [5] C. CHALONS AND P.G. LEFLOCH – *A fully discrete scheme for diffusive-dispersive conservation laws* ,, Numerische Math. (2001).
- [6] CHAMPIER, S. , GALLOUËT T. AND HERBIN , R. – *Convergence of the upstream finite volume scheme for a nonlinear hyperbolic equation on a triangular mesh* ,, Numer. Math. 66, 139-157 (1993)
- [7] COCKBURN, B. , COQUEL, F. AND LEFLOCH , P. – *Convergence of the finite volume method for multidimensional conservation laws* ,, SIAM J. Numer. Anal. 32 (3), (1995) 687-705
- [8] COCKBURN, B. , COQUEL, F. AND LEFLOCH , P. – *Convergence of finite difference schemes for conservation laws in several space dimensions: a general theory*, SIAM J. Numer. Anal. 30(3), (1993) 675-700;
- [9] COCKBURN, B. AND SHU, C. W. – *TVB Runge-Kutta Local Projection Discontinuous Galerkin Finite Element Method for Conservation Laws II: General Framework*, Mathematics of Computation Volume 52, No 186, (1989) 411-435;
- [10] COQUEL, F. AND LEFLOCH , P. – *Convergence of finite difference schemes for conservation laws in several space dimensions: the corrected antidiffusive flux approach*, Math. Comp. 57 (195), (1991) 169-210;
- [11] COURANT, R., FRIEDRICHS, K. O. AND LEWY H. – *Über die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen Physik*, Math. An. 100 (1928) pp 32-70
- [12] COURANT, R., FRIEDRICHS, K. O. AND LEWY H. – *On The partial difference equations of mathematical physics*, IBM Journal, 1967, pp. 215-234

- [13] DACOROGNA, BERNARDO – *Weak Continuity and Weak Lower Semicontinuity of Non-Linear Functionals* Lecture Notes in Mathematics, (1982);
- [14] DAFERMOS, C. M. – *Hyperbolic Conservation Laws in Continuum Physics* ,(Grundlehren Der Mathematischen Wissenschaften, 325). Hardcover (1999);
- [15] DIPERNA, R.J. – *Convergence of approximate solutions to conservation laws* ,Arch. Rat. Mech. Na. 82, (1983) 27-70
- [16] DIPERNA, R.J. – *Convergence of the viscosity method for isentropic gas dynamics* ,Comm. Math. Phys. 91, (1983) 1-30
- [17] DIPERNA, R.J. – *Measure-valued solutions to conservation laws* ,Arch. Rat. Mech. Na. 88(3), (1985) 223-270
- [18] DUNFORD, N. AND SCHWARTZ, J. – *Linear Operators Part I: General Theory* , Interscience Publishers Inc., New York (1958)
- [19] DUBOIS, F. AND LEFLOCH, P. – *Boundary conditions for nonlinear hyperbolic systems de conservation laws* , Jour. off Diff. Equa. 71 (1988), 93-122.
- [20] ENGQUIST, B. , OSHER, S. – *One-side difference approximations for nonlinear conservation laws.*, Math of Comp. 36, (1981), 321-351.
- [21] ENGQUIST, B. , LOTSTEDT, P. AND SJORGREEN, B. – *Nonlinear Filters for Efficient Shock Computation*, Math of Comp Vol 52, 186 (1989)
- [22] EVANS, L.C. – *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island (1998)
- [23] FLETCHER, C. A. J. – *Computational Techniques for Fluid Dynamics*, Vol 1, Second Editions, Springer Verlag (1990)
- [24] FOLLAND, G. B. – *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*, John Wiley Sons, 1984
- [25] FRID, H. – *Compacidade Compensada Aplicada s leis de conservao*, 19o Colquio Brasileiro de Matematica, Impa (1993)
- [26] FRIEDRICHS, K. O. – *Symmetric hyperbolic linear differential equations*, Comm. Pure and Appl. Math. 7 (1954) pp.345-392
- [27] GOTTLIEB, S. AND SHU, C-W. – *Total Variation Diminishing Runge-Kutta Schemes*, Math of Comp Vol 67 73-85, (1998);
- [28] GODUNOV, S. K. – *Finite Difference Method for Numerical Computations of Discontinuous Solutions of the Equations of Fluid Dynamics*, Mat. Sbornik (1959), 271-306
- [29] HAYES, BRIAN T. AND LEFLOCH , P. – *Nonclassical Shocks and Kinetic Relations: Finite Difference Schemes* , SIAM J.Numer. Anal. 35 (6), (1998) 2169-2194
- [30] HAYES, BRIAN T. AND LEFLOCH , P. – *High-Order Schemes, Entropy Inequalities, and Nonclassical Shocks* , SIAM J.Numer. Anal. 37 (6), (2000) 2023-2060

- [31] IORIO, V. M. – *EDP - Um curso de Graduação*, Coleção Matemática Universitária, Impa, 1989.
- [32] JOHNSON, C. AND SZEPESSY, A. – *On the Convergence of a Finite Element Method for a Nonlinear Hyperbolic Conservation Law*, Math of Comp 49, No 180 (1987)
- [33] KRONER, DIETMAR – *Numerical Schemes for Conservation Laws*, Wiley Teubner, 1997.
- [34] KRONER, D. AND ROKYTA, M. – *Convergence of upwind finite volume schemes on unstructured grids for scalar conservation laws in two-dimensions* , SIAM J. Numer. Anal. 31 (1994) pp. 324-343
- [35] KRONER, D., NOELLE, S. AND ROKYTA, M. – *Convergence of higher order upwind finite volume schemes on unstructured grids for scalar conservation laws in several space dimensions* , Numer. Math. 71, 1995, pp. 527-560
- [36] KRUKOV, S. – *First order quasilinear equations in several independent variables* , Math. USSR Sb. 10 (1970), 217-243
- [37] KURGANOV, A. AND TADMOR, E. – *New-High Resolution Central Schemes for Nonlinear Conservation Laws and Convection-Diffusion Equations*, preprint, 2000.
- [38] LAMBERT, W. J. – *Relatório de trabalho*, preprint.,2002.
- [39] LAX, P.D. – *Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation*, Comm. Pure and Appl. Math. 7 , pp 159-193
- [40] LEVEQUE, R. J. – *Numerical Methods for Conservation Laws*, Birkhuser (1992).
- [41] LEVEQUE, R. J. – *High Resolution Finite Volume Methods on Arbitrary Grids via Wave Propagation*, Journal of Computational Physics 78, 36-63 (1988).
- [42] LIU, XU-DONG AND TADMOR , EITAN – *Third Order nonoscillatory central schemes for hyperbolic conservation laws*, 1996
- [43] MACCORMACK, R.W. – *The effects of viscosity in hiperbovelocity impact creating*, AIAA, Paper 69-354, 1969
- [44] MALISKA, C. R. – *Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional*, LTC (1995)
- [45] MORTON, K.W. AND PAISLEY, M.F. – *A Finite Volume Scheme with Shock Fitting for the Steady Euler Equations*, Journal of Computational Physics 80 (1989)
- [46] MURAT, F. – *Compacité par compensation: Condition nécessaire et suffisante de continuité faible sous une hypothèse de rang constant* , Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Sci. Fis. Math., 8(1981), 69-102
- [47] MURAT, F. – *Compacité par compensation*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Sci. Fis. Math., 5(1978), 489-507
- [48] NACHBIN, A. E TABAK, E. – *Equações Diferenciais em Modelagem Matemática Computacional*, 21o Colquio Brasileiro de Matemática, Impa (1997);

- [49] NESSYAHU, HAIM AND TADMOR, EITAN – *Non-oscillatory Central Differencing for Hyperbolic Conservation Laws*, J. Comp. Ph. 87, 408-463, 1990
- [50] RAVIART, P. A. AND GODLEWSKI, E. – *Numerical Approximation of Hyperbolic Systems of Conservation Laws*, (1996), Springer Verlag.
- [51] RITCHMYER, R.D. AND MORTON, K.W. – *Difference Methods for initial-value problems*, Interscience Publishers, 1967
- [52] SERRE, D. – *Systems of Conservation Laws: hyperbolicity, entropies, shock waves*, United Kingdom: Cambridge University Press, 1999, v.1
- [53] SERRE, D. – *Systems of Conservation Laws: geometric structures, oscillation and mixed problems*, United Kingdom: Cambridge University Press, 1999, v.2
- [54] SIMONS, L. – *Lectures on Geometric Measure Theory*, Proceedings of the Centre for Mathematical Analysis, Australian National University, vol III 1983
- [55] SMITH, G.D. – *Numerical Solution of Partial Differential Equations: Finite Difference Methods*, Third Edition, Oxford Applied Mathematics and Computing Science Series, 1985
- [56] SMOLLER, J. – *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*, 2nd ed., Springer-Verlag (1994);
- [57] SWEBY, P. K. – *High Resolution Schemes Using Flux Limiters for Hyperbolic Conservation Laws*, Siam J. Numer. Anal., Vol 21, No 5, October 1984
- [58] SZEPESSY, A. – *Convergence of a shock-capturing streamline diffusion finite element method for a scalar conservation law in two space dimension*, Math. Comp., 53 (1989), pp. 527-545
- [59] SZEPESSY, A. – *Measure valued solutions to scalar conservation laws with boundary conditions*, Arch. Rational Mech. Anal., Vol 107, (1989) pp. 181-193
- [60] SZEPESSY, A. – *Convergence of streamline diffusion finite element method for conservation law with boundary conditions*, RAIRO Model. Math. Anal. Numer. 25 (1991), 749-783
Comm. P. D. Eq. 14(10), (1989) 1329-1350
- [61] TADMOR, E. – *Numerical Viscosity and Entropy Condition for Conservative Difference Schemes*, Math. Comp., 43 (1984), pp. 369-382
- [62] TARTAR, L. – *Compensated compactness and applications to partial differential equations*, Nonlinear Analysis and Mechanics: Heriot-Watt Symposium, Vol. IV, pp. 136-212, ed. R.J. Knops. London Pitman, 1979 ;
- [63] TARTAR, L. – *The compensated compactness method applied to system of conservation laws, in Systems of nonlinear partial differential equations*, Ball, J. M. (ed.) NATO ASI series, C. Reidel Publishing Col. (1983).;
- [64] THOMAS, J.W. – *Numerical Partial Differential Equation: Finite Difference Methods*, Texts in Applied Mathematics, nmero 22) Hardcover (1995);
- [65] VAN LEER, B. – *Towards the ultimate conservative difference scheme I. The quest of monotonicity*, Springer Lecture Notes in Physics, 18 (1973), pp. 163-168

- [66] VAN LEER, B. – *Towards the ultimate conservative difference scheme II. Monotonicity and conservation combined in a second order scheme*, J. Comput. Phys., 14 (1974), pp. 361-370.
- [67] VAN LEER, B. – *Towards the ultimate conservative difference scheme III. Upstream-centered finite-difference schemes for ideal compressible flow*, J. Comput. Phys., 23 (1977), pp. 263-275.
- [68] VAN LEER, B. – *Towards the ultimate conservative difference scheme IV. A new approach to numerical convection*, J. Comput. Phys., 23 (1977), pp. 276-299.
- [69] VAN LEER, B. – *Towards the ultimate conservative difference scheme V. A seconde order sequel to Godunov's method*, J. Comput. Phys., 32 (1979), pp. 101-136.
- [70] VOLPERT, A.I. – *The space BV e quasilinear equations* Math. USSR Sb. 2, (1967), 257-267
- [71] WANG, J. C. T. AND WIDHOPF, G. F. – *A High-Resolution Scheme for the Euler Equations in Conservation Form*, Journal of Computational Physics, Vol 84, pp. 145-173, 1989
- [72] WENDROFF, M. AND LAX, P. – *Systems of conservation laws*, Comm. Pure Appl. Math., 13 (1960), pp. 217-237 No 3, pp. 742-757, March 2000
- [73] WESTDICKENBERG, M. AND NOELLE, S. – *A New Convergence Proof for Finite Volume Schemes Using the Kinetic Formulaion of Conservation Laws*, Siam J. Numer. Anal., Vol 37, No 3, pp. 742-757, March 2000

