

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E
COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA

Generalização do Método de Continuação no Traçamento de Raios Utilizando o Conceito dos Autômatos Finitos

Autor: CARLOS PIEDRAHÍTA

Orientador: PROF. DR. MARTIN TYGEL

Co-orientador: PROF. DR. LÚCIO TUNES DOS SANTOS

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas, como parte dos pré-requisitos para obtenção do Título de Doutor em Matemática Aplicada.

Julho de 2002

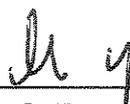


UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

Generalização do Método de Continuação no Traçamento de Raios Utilizando o Conceito dos Autômatos Finitos

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por Carlos Piedrahíta e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 11 de Julho de 2002



Prof. Dr. Martin Tygel
Orientador



Prof. Dr. Lúcio Tunes dos Santos
Co-orientador

Banca Examinadora

1. Prof. Dr. Martin Tygel
2. Prof. Dr. Jörg D. W. Schleicher
3. Prof^ª. Dr^ª. Vera Lúcia da R. Lopes
4. Prof^ª. Dr^ª. M^ª. Aparecida D. Ehrhardt
5. Prof. Dr. João Carlos Ribeiro Cruz

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de DOUTOR em Matemática Aplicada.

817542000

UNIDADE 30
Nº CHAMADA T/UNICAMP
P595g
V _____ EX _____
TOMBO BC/ 51033
PROC 16.837102
C _____ DX _____
PREÇO R\$ 11,00
DATA 27/09/02
Nº CPD _____

CM00174302-1

BIB ID 259199

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

~~159199~~
P595g
Piedrahíta, Carlos
Generalização do método de continuação no traçamento de raios utilizando o conceito dos autômatos finitos / Carlos Piedrahíta -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2002.
Orientador : Martin Tygel
Co-orientador: Lúcio Tunes dos Santos
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.
1. Newton-Raphson, Método. 2. Métodos de continuação. 3. Teoria dos autômatos. 4. Ótica geométrica. I. Tygel, Martin. II. Santos, Lúcio Tunes dos. III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. IV. Título.

Tese de Doutorado defendida em 11 de julho de 2002 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof (a). Dr (a). MARTIN TYGEL



Prof (a). Dr (a). JÖRG DIETRICH WILHELM SCHLEICHER



Prof (a). Dr (a). VERA LUCIA DA ROCHA LOPES



Prof (a). Dr (a). JOÃO CARLOS RIBEIRO CRUZ



Prof (a). Dr (a). MARIA APARECIDA DINIZ EHRHARDT

“A mi linda bebé y a todos nuestros sueños”.

Agradecimentos

Ao meu orientador, Prof. Dr. Martin Tygel, pelos conhecimentos ensinados e pela paciência e apoio em todos estes anos.

Ao meu co-orientador, Prof. Dr. Lúcio Tunes dos Santos, pela clareza nos conceitos da Matemática Aplicada, e por sua contínua disposição para me ensinar.

Ao Prof. Dr. Norman Bleistein, por sua participação na gestação desta tese e suas orientações iniciais.

Ao Prof. Dr. Jörg Schleicher, pelos excelentes diálogos acadêmicos mantidos.

Ao Prof. Dr. Nir Cohen pela amizade e colaboração nestes anos.

Ao Prof. Dr. Paul Docherty, pela troca de algumas idéias acadêmicas.

Aos colegas do LGM, Andrés, Farid, José Fernando, Lucas, Ricardo e Rodrigo, que me ajudaram e ensinaram sempre.

Ao Cantão, por compartilhar comigo, constante e cuidadosamente, sua amizade e seus conhecimentos computacionais. Seu apoio foi fundamental.

À Fátima e à Cidinha, pela colaboração constante nos assuntos administrativos.

À Diana, minha eterna amiga, colaboradora e esposa, pelo amor e camaradagem.

A Federico, Isaac, Alicia e Simone, que já têm um espaço em meu coração.

Ao Oscar Jaramillo, meu eterno guardião.

Aos meus pais, César, Livia e Teresa, por seu amor incondicional e seu acreditar sempre.

À minha grande família, pelo carinho e pela energia constante.

Ao Herman, pela amizade e pelos infinitos diálogos matemáticos.

À equipe de Numérica, Alejandro, Carlos, Elkin, Farid e Jairo pela energia, criatividade, amizade e sonhos compartilhados.

Aos colegas do laboratório, Alfredo, Frank, Nestor, Saul e Trino, pelos anos de amizade e de trabalho.

À Yolanda Aguiar, minha chefe em Exploração, por apoiar a pesquisa no ICP.

Ao ICP, por apoiar a pesquisa na indústria petroleira na Colômbia.

Ao NJDP, pela sabedoria e apoio constante.

A todos, eu agradeço.

Sumário

Agradecimentos	ix
Lista de Símbolos	xix
Resumo	xxiii
Abstract	xxv
1 Introdução	1
2 Teoria dos Raios	7
2.1 Introdução	7
2.2 Meio Acústico	7
2.2.1 Meios Acústicos com Densidade Constante	7
2.2.2 Meios Acústicos com Densidade Variável	10
2.3 Meio Elástico	11
2.4 Método das Características e Equação Iconal	16
2.4.1 Método das Características	16
2.4.2 Aplicação do Método das Características à Equação Iconal	18
2.4.3 Escolhas Especiais do ζ nas Equações Características da Equação Iconal	18
2.4.4 Soluções Analíticas das Equações Características da Equação Iconal . .	19
2.5 Aproximação da Teoria dos Raios para Ondas através de uma Interface	21
2.5.1 Dois Meios Acústicos Separados por uma Interface	21
2.5.2 Dois Meios Elásticos Isotrópicos Separados por uma Interface	26
2.6 Modelos Multi-Regiões	26

3	O Método de Continuação no Traçamento de Raios	29
3.1	Introdução	29
3.2	Formulação Geral do Problema de Traçamento de Raios	30
3.3	Assinatura do Raio	32
3.4	Sistema Não-Linear	35
3.5	Procedimentos de Solução do Sistema Não-Linear	37
3.6	Método de Continuação	39
3.6.1	Continuação em Velocidades e Receptores	40
3.6.2	Implementação de Seqüências de Continuação	46
3.6.3	Bifurcação	47
3.6.4	Múltiplas Soluções	47
3.7	Primeiro Raio na Classe	48
3.8	Critérios de Parada dos Algoritmos	48
3.9	Extensão do Método de Continuação a Modelos Não-Homogêneos onde a Equação Iconal é Integrável por Camadas	49
4	Cálculo de Amplitudes	51
4.1	Introdução	51
4.2	Equações Básicas	51
4.3	Amplitude ao Longo do Raio em Meios Acústicos sem Interfaces	53
4.3.1	Tubo de Raios	54
4.3.2	Cáusticas	56
4.3.3	Condições de Fonte Pontual	57
4.4	Amplitude ao Longo do Raio em Meios Acústicos Através de uma Interface	59
4.5	Amplitude ao Longo do Raio em Modelos Multi-regiões	63
4.5.1	Amplitude ao Longo do Raio em Meios Acústicos com Velocidade Constante por Sub-regiões	66
4.5.2	Amplitude ao Longo do Raio em Modelos Acústicos Multi-camadas	66
4.6	Amplitude ao Longo do Raio em Modelos Acústicos 2.5D	67
4.7	Amplitude ao Longo do Raio em Meios Acústicos com Densidade Variável	68
4.7.1	Amplitude ao Longo do Raio em Meios Acústicos com Densidades Diferentes Separados por uma Interface	69

4.7.2	Amplitude ao Longo do Raio em Meios Acústicos Multi-regiões com Variações na Densidade	70
4.7.3	Amplitude ao Longo do Raio em Meios Acústicos com Densidade Constante por Sub-regiões	72
4.8	Amplitude ao Longo do Raio em Meios Elásticos Isotrópicos	73
4.8.1	Amplitude ao Longo do Raio em um Meio Elástico sem Descontinuidades	74
4.8.2	Amplitude ao Longo do Raio em Meios Elásticos Separados por uma Interface	75
4.8.3	Amplitude ao Longo do Raio em um Meio Elástico em um Modelo Multi-regiões	77
4.8.4	Amplitude ao Longo de um Raio em Modelos 2.5D Elásticos, com Densidade e Velocidade Constante por Sub-Regiões	78
4.9	Correções na Amplitude ao Longo do Raio Produzida pelas Cústicas	79
5	Dinâmica Simbólica e Traçamento de Raios	81
5.1	Introdução	81
5.2	Teoria de Grafos	81
5.3	Relação entre a Teoria de Grafos e um Modelo Sísmico	84
5.3.1	Partição do Modelo Sísmico	84
5.3.2	Grafo de Representação do Modelo Sísmico	84
5.4	Autômatos Finitos	85
5.5	Relação entre os Autômatos Finitos e um Modelo Sísmico	92
5.5.1	Construção do Autômato de um Modelo Sísmico	92
5.5.2	Traçamento de Raios Usando Autômatos Finitos	97
6	Programas e Exemplos	101
6.1	Introdução	101
6.2	Programas	101
6.2.1	O CSHOT	101
6.2.2	O OCTRAL	103
6.3	Exemplos	106
6.3.1	Modelo de Cunha	107
6.3.2	Modelo de Lente	108

6.3.3	Modelo de Falhas	111
6.3.4	Modelo de Domo	115
6.4	Validação do Modelamento Feito pelo OCTRAL	116
6.4.1	Modelo de uma Camada Horizontal	119
6.4.2	Modelo Multi-camadas	126
6.4.3	Modelo de Cunha	127
6.4.4	Modelo de Lente	131
7	Conclusões e Trabalhos Futuros	139
7.1	Conclusões	139
7.2	Trabalhos Futuros	142
	Referências Bibliográficas	145
A	Aproximação Assintótica da Equação de Onda	151
B	O Método do Disparo	153
C	Método de Busca Aleatória	157
D	Método de Continuação no Traçamento Tridimensional de Raios	159
D.1	Formulação do Problema	159
D.2	Solução das Equações	161
E	Dedução da Fórmula Recursiva Multi-Camada para Meios Acústicos 2.5D	163
E.1	O Tubo de Raios	163
E.2	Modelos Multi-Camadas 2.5D com Velocidade Constante por Camadas	167

Lista de Figuras

1.1	Modelo de geometria complexa: interfaces que se interceptam.	3
1.2	Modelo de geometria complexa: interfaces não definidas em todo o domínio. .	3
2.1	Partição do raio em uma interface.	22
3.1	Modelo sísmico 2D, multi-camadas.	31
3.2	Representação do problema geral de traçamento de raios em um modelo 2D. .	32
3.3	Raios com diferentes assinaturas.	34
3.4	Representação geométrica da Lei de Snell	36
4.1	Coordenadas do raio.	54
4.2	Partição do raio em uma interface.	60
4.3	Modelo sísmico multi-regiões	63
4.4	Modelo sísmico multi-camadas.	67
4.5	Dois meios separados por uma interface com densidades diferentes.	70
5.1	Grafo com arestas dirigidas e não-dirigidas.	82
5.2	Modelo sísmico multi-regiões 2D.	85
5.3	Grafo de representação de um modelo sísmico.	86
5.4	Representação de um raio como um caminho de um grafo.	87
5.5	Autômato finito.	89
5.6	Autômato de um modelo, fonte e receptor na mesma interface.	92
5.7	Autômato de um modelo, fonte e receptor em diferentes interfaces.	93
5.8	Modelo sísmico elástico e seu autômato finito.	94
5.9	Autômato de um modelo com falha geológica que interrompe a superfície da Terra.	96

5.10	Autômato de um modelo de Sísmica de poço.	97
5.11	Representação de um raio em um modelo acústico e seu autômato finito.	99
5.12	Representação de um raio em um modelo elástico e seu autômato finito.	99
6.1	Espectro de frequência da fonte.	103
6.2	Modelo de cunha.	107
6.3	Autômato que representa o modelo de cunha.	108
6.4	Classe de raios determinada por v_1v_1 e (L_0, L_1, L_0)	108
6.5	Classe de raios determinada por $v_1v_2v_2v_1$ e $(L_0, L_1, L_2, L_1, L_0)$	109
6.6	Classe de raios determinada por $v_1v_2v_3v_3v_2v_1$ e $(L_0, L_1, L_2, L_4, L_2, L_1, L_0)$	109
6.7	Classe de raios determinada por $v_1v_2v_3v_3v_1$ e $(L_0, L_1, L_2, L_1, L_0)$	109
6.8	Modelo de lente.	110
6.9	Autômato que representa o modelo de lente.	111
6.10	Classe de raios determinada por v_1v_1 e (L_0, L_1, L_0)	111
6.11	Classe de raios determinada por $v_1v_2v_2v_1$ e $(L_0, L_1, L_2, L_1, L_0)$	112
6.12	Classe de raios determinada por $v_1v_2v_1v_1v_2v_1$ e $(L_0, L_1, L_2, L_3, L_2, L_1, L_0)$	112
6.13	Classe de raios determinada por $v_1v_2v_1v_1$ e por $(L_0, L_1, L_2, L_3, L_0)$	112
6.14	Modelo de falhas.	113
6.15	Autômato que representa o modelo de falhas.	114
6.16	Três classes de raios diferentes em um modelo de falhas.	114
6.17	Modelo de domo.	115
6.18	Três classes de raios diferentes em um modelo de domo.	116
6.19	Dois raios de uma classe em um modelo de domo salino.	117
6.20	Traçamento de raios feito pelo OCTRAL, modelo de uma interface.	119
6.21	Traçamento de raios feito pelo CSHOT, modelo de uma interface.	120
6.22	Comparação dos sismogramas gerados pelo OCTRAL e pelo CSHOT (sem dividir pela área do filtro), modelo de uma interface.	121
6.23	Comparação dos sismogramas gerados pelo OCTRAL e pelo CSHOT (dividindo pela área do filtro), modelo de uma interface.	122
6.24	Comparação do traço número 38 do sismograma da Figura (6.22).	123
6.25	Comparação do traço número 38 do sismograma da Figura (6.23).	124

6.26	Comparação entre as amplitudes do OCTRAL, “+”, e do CSHOT (dividindo pela área do filtro), “o”, com o valor analítico da amplitude, “o”.	125
6.27	Traçamento de raios feito pelo OCTRAL, modelo multi-camadas.	126
6.28	Traçamento de raios feito pelo CSHOT, modelo multi-camadas.	127
6.29	Comparação dos sismogramas gerados pelo OCTRAL e pelo CSHOT (dividindo pela área do filtro), modelo multi-camadas.	128
6.30	Comparação do traço número 51 dos sismogramas, modelo multi-camadas.	129
6.31	Modelo de cunha, multi-regiões.	129
6.32	Modelo multi-camadas “simulando” um modelo de cunha.	130
6.33	Traçamento de raios feito pelo OCTRAL, modelo de cunha.	130
6.34	Traçamento de raios feito pelo CSHOT, modelo de cunha.	131
6.35	Comparação dos sismogramas gerados pelo OCTRAL e pelo CSHOT (sem dividir pela área do filtro), modelo de cunha.	132
6.36	Comparação dos sismogramas gerados pelo OCTRAL e pelo CSHOT (dividindo pela área do filtro), modelo de cunha.	133
6.37	Comparação do traço número 5 dos sismogramas da Figura (6.35).	134
6.38	Comparação do traço número 5 dos sismogramas da Figura (6.36).	135
6.39	Modelo de lente, multi-regiões.	136
6.40	Modelo multi-camadas “simulando” um modelo de lente.	136
6.41	Traçamento de raios feito pelo OCTRAL, modelo de lente.	137
6.42	Sismograma feito pelo OCTRAL, modelo de lente.	137
E.1	O tubo de raios entre duas interfaces consecutivas.	164
E.2	Superfície de observação.	169

Lista de Símbolos¹

- \mathbf{x} : Vetor variável espacial.
 t : Tempo.
 $u(\mathbf{x}, t)$: Pressão em um meio acústico.
 $v(\mathbf{x})$: Velocidade de propagação da onda em um meio, em uma posição \mathbf{x} .
 $f(t)$: Pulso real no domínio do tempo.
 r : Distância de \mathbf{x} à origem.
 ∇^2 : Operador laplaciano.
 ω : Freqüência angular.
 $\hat{u}(\mathbf{x}, \omega)$: Transformada de Fourier no tempo de $u(\mathbf{x}, t)$.
 $\hat{f}(\omega)$: Transformada de Fourier de $f(t)$.
 $A_0(\mathbf{x}) = A_0$: Amplitude da onda na posição \mathbf{x} , num meio acústico.
 $\tau(\mathbf{x})$: Tempo de trânsito da onda até a posição \mathbf{x} .
 $U(\mathbf{x}, t)$: Extensão analítica de $u(\mathbf{x}, t)$.
 $F(t)$: Pulso analítico de $f(t)$.
 $g(t)$: Transformada de Hilbert de $f(t)$.
 \mathcal{H} : Transformada de Hilbert.
 $\mathcal{P.V.}$: Valor principal de uma integral.
 ∇ : Operador gradiente.
 $\rho(\mathbf{x})$: Densidade de um meio na posição \mathbf{x} .
 $\lambda(\mathbf{x})$: Constante de Lamé.
 $\mu(\mathbf{x})$: Constante de Lamé.
 $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$: Vetor deslocamento de uma partícula na posição \mathbf{x} , no tempo t .
 $u_k(\mathbf{x}, t)$: Componente k -ésima de $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$.
 \ddot{u}_k : Segunda derivada parcial de u_k respeito ao tempo.
 $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}$: Vetor complexo da amplitude.
 $A_k(\mathbf{x})$: k -ésima componente da amplitude, na posição \mathbf{x} .
 P : Ondas primárias.
 S : Ondas secundárias.
 Γ : Matriz de Christoffel.
 Γ_{ij} : Componente (ij) da Matriz de Christoffel.

¹Ordenados segundo sua aparição no texto.

- δ_{ij} : Delta de Kronecker.
 \mathbf{p} : Vetor vagarosidade.
 $\alpha(\mathbf{x})$: Velocidade de propagação da onda P na posição \mathbf{x} .
 $\beta(\mathbf{x})$: Velocidade de propagação da onda S na posição \mathbf{x} .
 $D(\mathbf{x})$: Valor complexo da amplitude das ondas P , na posição \mathbf{x} .
 e_1, e_2 : Vetores de polarização das ondas S .
 $B(\mathbf{x}), C(\mathbf{x})$: Amplitudes complexas nas direções e_1 e e_2 , respectivamente.
 \mathbf{N} : Vetor unitário na direção do vetor vagarosidade.
 $E(x, y, z, h, r, q, m) = 0$: Equação diferencial parcial de primeira ordem.
 ζ : Parâmetro de proporcionalidade nas equações características.
 σ : Parâmetro de integração ao longo da curva característica.
 \mathbf{E} : Ponto de intersecção de um raio com uma interface.
 Σ : Superfície que separa dois meios.
 R^-, R^+ : Meios (acústicos/elásticos) separados por Σ .
 $v^-(\mathbf{x}) = v^-$: Velocidade no ponto \mathbf{x} medida no meio R_- .
 $v^+(\mathbf{x}) = v^+$: Velocidade no ponto \mathbf{x} medida no meio R_+ .
 \mathbf{n} : Vetor unitário normal à superfície Σ .
 ϵ : Índice de orientação do raio respeito à normal \mathbf{n} .
 u_I : Onda incidente.
 u_R : Onda refletida.
 u_T : Onda transmitida.
 A^I : Amplitude da onda incidente.
 A^R : Amplitude da onda refletida.
 A^T : Amplitude da onda transmitida.
 τ_I : Tempo de trânsito da onda incidente.
 τ_R : Tempo de trânsito da onda refletida.
 τ_T : Tempo de trânsito da onda transmitida.
 q_1, q_2 : Parâmetros da superfície Σ .
 \mathbf{p}^I : Vetor vagarosidade incidente.
 \mathbf{p}^R : Vetor vagarosidade refletido.
 \mathbf{p}^T : Vetor vagarosidade transmitido.
 σ^I : Projeção de \mathbf{p}^I na normal \mathbf{n} .
 σ^R : Projeção de \mathbf{p}^R na normal \mathbf{n} .
 σ^T : Projeção de \mathbf{p}^T na normal \mathbf{n} .
 ∇_q : Componente do gradiente na superfície Σ .
 θ^I : Ângulo entre \mathbf{n} e \mathbf{p}^I .
 θ^R : Ângulo entre \mathbf{n} e \mathbf{p}^R .
 θ^T : Ângulo entre \mathbf{n} e \mathbf{p}^T .
 ϕ^R : Ângulo entre o vetor vagarosidade da onda S refletida e a \mathbf{n} .
 ϕ^T : Ângulo entre o vetor vagarosidade da onda S transmitida e a \mathbf{n} .

- α_- : Velocidade das ondas P no meio R_- .
 α_+ : Velocidade das ondas P no meio R_+ .
 β_- : Velocidade das ondas S no meio R_- .
 β_+ : Velocidade das ondas S no meio R_+ .
 L_I : Interface I -ésima do modelo sísmico.
 N_I : $N_I + 1$ representa o número total de interfaces em um modelo sísmico.
 $f_i(x)$: Função que representa a i -ésima interface do modelo sísmico.
 N_R : Número total de regiões em um modelo sísmico.
 R : Domínio geométrico do modelo sísmico.
 R_j : Sub-região j -ésima do modelo sísmico.
 E_0 : Ponto onde está localizada a fonte do raio.
 E_{N+1} : Ponto onde está localizado o receptor do raio.
 N : Número de interfaces interceptadas pelo raio.
 i_1, i_2, \dots, i_N : Assinatura de interfaces.
 j_1, j_2, \dots, j_{N+1} : Assinatura de velocidades.
 v_{jk} : Velocidade da onda na k -ésima sub-região atravessada pelo raio.
 E_k : Ponto de intersecção do raio com a i_k -ésima interface.
 t_k : Vetor tangente na i_k -ésima interface, no ponto E_k .
 ϕ_k : k -ésima equação não-linear que representa a Lei de Snell no ponto E_k .
 Φ : Sistema não-linear de N equações e N incógnitas que representa os raios.
 X : Abscissas de todos os E_k , $k = 1, \dots, N$.
 V : Vetor de parâmetros das velocidades do raio.
 X^* : Zero de Φ .
 l : Contador no Método de Newton.
 Φ' : Matriz Jacobiana de Φ .
 x_k : Abscissa do ponto E_k .
 z_k : Ordenada do ponto E_k .
 Δ_{x_k} : $x_k - x_{k-1}$.
 Δ_{z_k} : $z_k - z_{k-1}$.
 D_k : $[(\Delta x_k)^2 + (\Delta z_k)^2]^{\frac{1}{2}}$.
 X^0 : Aproximação inicial no Método de Newton.
 Λ : Parâmetro de homotopia.
 $\mathcal{X}(\Lambda)$: Caminho homotópico de soluções.
 $H(\mathcal{X}(\Lambda), \Lambda)$: Família de sistemas não-lineares.
 \mathcal{V} : Caminho homotópico do vetor de parâmetros das velocidades.
 \mathcal{X}^0 : Aproximação de Taylor da primeira iteração do Método de Newton.
 B : Matriz bidiagonal de ordem $N \times (N + 1)$.
 $\mathcal{E}_{N+1}(\Lambda)$: Caminho homotópico da posição do receptor.
 N_C : Número máximo de pontos na seqüência de continuação.
 $x(\sigma)$: Representação paramétrica do raio.
 Q : Variável de integração de superfície.
 γ_1 : Coordenada do raio denominada ângulo azimutal.
 γ_2 : Coordenada do raio denominada ângulo de disparo.
 $A(\sigma)$: Valor da amplitude ao longo do raio no valor do parâmetro σ .

- $J(\sigma)$: Jacobiano do raio para o valor do parâmetro σ .
 $A(\mathbf{E})$: amplitude (acústica/elástica) no ponto \mathbf{E} .
 κ : Índice KMAH.
 \mathcal{L} : Divergência geométrica.
 \mathcal{R} : Coeficiente de reflexão (acústico/elástico).
 \mathcal{T} : Coeficiente de transmissão (acústico/elástico).
 \mathcal{K} : Coeficiente de reflexão ou transmissão (acústico/elástico).
 \mathbf{E}^- : Limite ao ponto \mathbf{E} ao longo do ramo incidente do raio.
 \mathbf{E}^+ : Limite ao ponto \mathbf{E} ao longo do ramo refletido/transmitido do raio.
 θ^- : Ângulo entre o vetor vazarosidade incidente e a \mathbf{n} , no ponto \mathbf{E} .
 θ^+ : Ângulo entre o vetor vazarosidade refletido/transmitido e a \mathbf{n} , no ponto \mathbf{E} .
 $G(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_0, t_0)$: Função de Green da equação de onda.
 $[\mathcal{P}, \mathcal{N}]$: Grafo.
 \mathcal{P} : Conjunto de nós de um grafo.
 \mathcal{N} : Conjunto de arestas de um grafo.
 $\mathcal{O}(l)$: Origem da aresta l .
 $\mathcal{T}(l)$: Fim da aresta l .
 $G(\mathcal{R})$: Grafo de representação do modelo.
 \mathcal{W} : Alfabeto ou conjunto de símbolos.
 \mathcal{W}^* : Todas as palavras de \mathcal{W} .
 ϖ : Palavra vazia.
 \mathcal{A} : Autômato finito.
 \mathcal{P}_0 : Subconjunto de estados iniciais.
 \mathcal{F} : Subconjunto de estados finais.
 δ : Função de transição.
 $\hat{\delta}$: Função de transição estendida.
 $L(\mathcal{A})$: Linguagem aceita por \mathcal{A} .
 $\mathcal{A}(\mathcal{R})$: Autômato do modelo.
 N_E : Número de estados do autômato.
 N_W : Número de símbolos do autômato.
 \sim : Aproximação assintótica.
 \mathcal{O} : Domínio de definição das interfaces, em modelos tridimensionais.
 Δy_k : $y_k - y_{k-1}$.
 H_k : $[(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2 + (\Delta z_k)^2]^{\frac{1}{2}}$.
 Ψ : Sistema de traçamento de raios 3D.
 \mathbf{Y} : Solução do sistema de equações $\Psi(\mathbf{Y}) = 0$.
 \mathcal{D} : Caixa N -dimensional no espaço \mathbb{R}^N .
 N_A : Número de pontos no método de busca aleatória.
 $\Delta \eta$: Vetor deslocamento da frente de onda na superfície de observação.

Resumo

O objetivo fundamental desta tese é estender o Método de Continuação de traçamento de raios para modelos sísmicos que possuam uma geometria complexa. Esses modelos são usados na exploração do hidrocarbonetos, por exemplo, cunhas, lentes e falhas, dentre outros.

Para fazer essa extensão utilizamos os conceitos, oriundos da Dinâmica Simbólica, de autômato finito e de linguagem aceita. Esses conceitos nos permitiram montar o sistema não-linear que representa o traçamento de raios. O sistema é resolvido utilizando o Método de Newton e o Método de Continuação nos parâmetros do modelo. Além desses métodos numéricos, também utilizamos uma busca aleatória para encontrar a primeira aproximação do primeiro raio da classe de equivalência definida pela assinatura do raio. Assim, nesta tese, relacionamos alguns conceitos dos Sistemas Dinâmicos Finitos com a Teoria dos Raios.

Estendemos as fórmulas da amplitude ao longo do raio de modelos multi-camadas até modelos multi-regiões (modelos particionados em sub-regiões arbitrarias). Em particular, encontramos as amplitudes ao longo do raio para modelos 2.5D, em meios acústicos e elásticos. Essas fórmulas foram implementadas computacionalmente para a construção de sismogramas.

Criamos e implementamos uma biblioteca computacional que chamamos OCTRAL, utilizando a linguagem interpretativa OCTAVE. Isto permitiu fazer traçamentos de raios e sismogramas sintéticos usando os conceitos teóricos anteriormente expostos. Através do OCTRAL, fizemos diferentes testes usando como referência a biblioteca CSHOT do pacote computacional *Seismic Unix* (SU), desenvolvido e mantido pelo *Center for Wave Phenomena* da *Colorado School of Mines*. Esses testes nos permitiram fazer comparações em diferentes modelos sísmicos. Dessas comparações, concluímos que o OCTRAL foi capaz de estender o CSHOT para modelos acústicos e elásticos multi-regiões, como requerido para as aplicações mais realistas.

Abstract

The fundamental goal of this thesis is to extend the continuation method used in ray tracing to seismic models that have a complex geometry. These models are common in hydrocarbon exploration, as for example, wedges, lenses, faults, etc.

To accomplish this aim we used concepts such as finite automatas and accepted languages, that arise from Symbolic Dynamics. These concepts permit us to assemble the non-linear system that represents ray tracing. The system is solved using Newton's Method and Continuation Methods in the parameters of the model. Also we use a random search to look for the first approximation of the first ray of the equivalence class defined by the ray signature. In this way, we relate some concepts of Finite Dynamical Systems with Ray Theory.

The formulas that provide the value of the amplitude along a ray were extended from multi-layered models to multi-region models (seismic model partitioned in arbitrary sub-regions). In particular, we find expressions for the amplitudes along a ray for 2.5D models in acoustic and elastic media. These formulas were implemented for the construction of seismograms.

We created and implemented a computational library called OCTRAL, written in the interpretative language OCTAVE. With the algorithms implemented in OCTRAL, we made different tests using as reference the CSHOT library of the public domain computational package Seismic Unix (SU), developed and maintained by the Center for Wave Phenomena at the Colorado School of Mines. From the comparisons between OCTRAL and CSHOT, we conclude that OCTRAL is able to extend CSHOT to acoustic and elastic multi-region models, as required for more-realistic applications.

Capítulo 1

Introdução

A teoria dos raios é uma teoria matemática desenvolvida para encontrar soluções aproximadas (assintóticas) de equações diferenciais; ela dá suporte à Ótica Geométrica. Esta teoria é conhecida também por outros nomes como “Método de séries de Debye” e “Método de séries de raios”, dentre outros.

As aplicações da teoria dos raios a problemas físicos são conhecidas desde os inícios da Ótica, e permitiram resolver problemas básicos como a reflexão, a transmissão e propagação em sistemas com espelhos e lentes, dentre outros.

A teoria dos raios baseia-se em um método de aproximação de uma equação de onda (eletromagnética, acústica ou elástica) em alta frequência (comprimento de onda muito pequeno), utilizando um tipo de solução especial para resolvê-la. A validade desse método depende da ordem de magnitude da frequência (altas frequências) e está relacionada com a escala do problema (comprimento de onda versus tamanho do objeto de interesse).

A teoria dos raios permite resolver, de forma aproximada, porém eficiente, problemas complicados da Ótica, da Acústica, da Radio-física e da Sísmica, dentre outras áreas. Em épocas recentes, esta teoria tem tido um ressurgimento muito importante, e a partir dos trabalhos de Babich e Keller, nos anos cinqüenta, tem sido possível dar uma fundamentação teórica adequada a este método (Lewis, 1965; Kline & Kay, 1965).

Em Sísmica de Exploração, nossa área de interesse, esta técnica pode ser utilizada para construir sismogramas sintéticos para meios acústicos, elásticos isotrópicos e elásticos anisotrópicos (Červený, 2001). Para essa aplicação, os comprimentos de onda (frequências)

são da ordem de 70 m (30 Hz), pequenas, se temos em conta o tamanho dos objetos de interesse, que é de centenas e milhares de metros.

Matematicamente, a teoria dos raios é uma extensão do método WKBJ¹ das equações diferenciais ordinárias às equações diferenciais parciais. Em resumo, a idéia central é supor um tipo de solução como uma série assintótica (Apêndice A), onde cada termo da série é um produto entre um fator que representa a amplitude e uma função com certo nível de descontinuidade, que depende do tempo de trânsito do evento de interesse. Essa série é substituída na equação de onda no domínio da frequência, isto é, na Equação de Helmholtz. Igualando coeficientes da série, encontramos equações de ordem inferior que permitem construir as chamadas soluções assintóticas ou raios. Todo nosso trabalho baseia-se na Ótica Geométrica de ordem zero, onde apenas o primeiro termo da série é considerado.

O traçamento de raios, parte fundamental da teoria dos raios, é um método matemático e computacional que permite, utilizando os conceitos da Ótica Geométrica, simular o comportamento de um meio acústico ou elástico submetido a uma vibração.

Este método tem importância científica e tecnológica. Em particular, o traçamento de raios vem sendo utilizado na indústria do petróleo para a construção de modelos e imagens do subsolo, usadas na exploração de hidrocarbonetos.

Existe uma diversidade de técnicas para fazer traçamento de raios, com diferentes níveis de precisão e complexidade computacional. Um método conhecido na exploração do petróleo é o denominado Método de Continuação, inicialmente discutido por Keller & Perozzi (1983), Fawcett & Keller (1985) e Docherty (1985). Este método é muito eficiente computacionalmente, porém, suas diferentes implementações, comentadas na literatura, ficam somente em modelos multi-camadas, sem ser generalizadas para modelos de geometria complexa.

Os modelos sísmicos de geometria complexa são, por exemplo, modelos cujas interfaces tenham intersecções (Figura 1.1), ou modelos cujas interfaces não estejam definidas em todo seu domínio (Figura 1.2). Exemplo do primeiro modelo são as denominadas discordâncias angulares que acontecem quando um fenômeno tectônico produz uma rotação de algumas camadas da Terra em relação às outras. Exemplo do segundo modelo são as estruturas

¹O método WKBJ é um método assintótico para encontrar soluções aproximadas de equações diferenciais ordinárias, inicialmente aplicado a problemas de Mecânica Quântica. Este método deve seu nome aos pesquisadores que o utilizaram inicialmente: Wenzel, Krammers, Brillouin e Jeffreys.

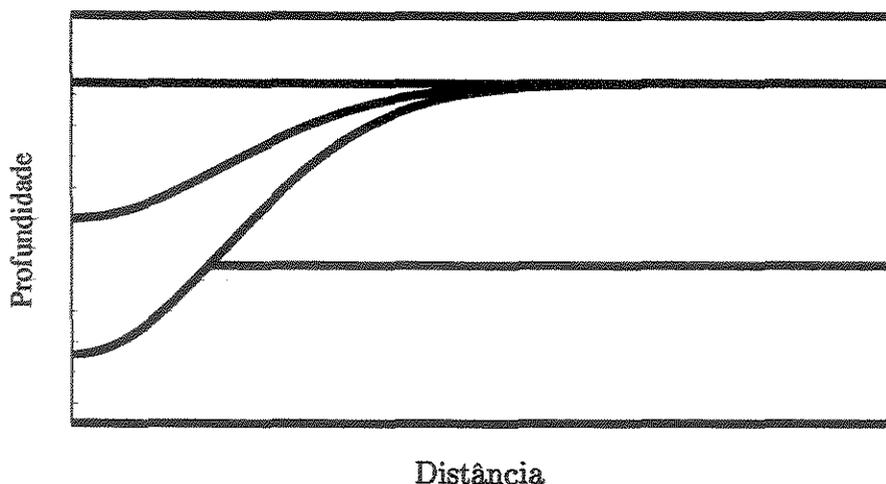


Figura 1.1: Modelo de geometria complexa: interfaces que se interceptam.

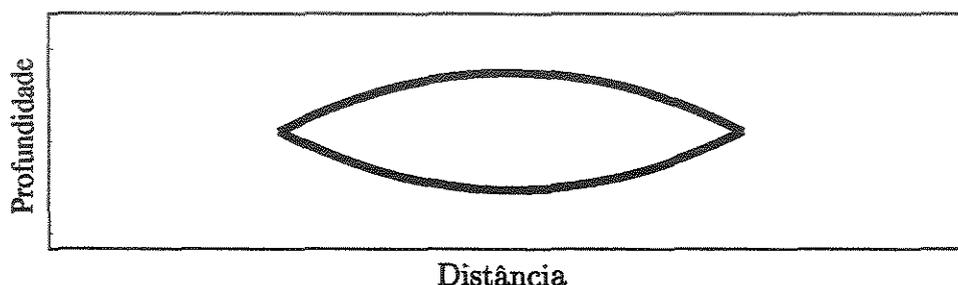


Figura 1.2: Modelo de geometria complexa: interfaces não definidas em todo o domínio.

formadas por depósito sedimentário fluvial (lentes).

A importância destes modelos de geometria complexa é notória na exploração de zonas de geologia estrutural ou tectônica complexa, apresentadas nas zonas montanhosas do Canadá e da Colômbia. Nesses países se têm encontrado campos enormes de petróleo, como por exemplo o campo de Cusiana (na cordilheira oriental dos Andes colombianos).

O objetivo fundamental desta tese é estender o Método de Continuação, utilizado no traçamento de raios, para modelos sísmicos que possuam uma geometria complexa. Para fazer esta extensão utilizamos os conceitos de autômato finito e de linguagem aceita. Esses conceitos, oriundos da teoria matemática da computação, permitem montar o sistema não-linear requerido para o traçamento de raios. Esse sistema é resolvido utilizando os Métodos de Newton e de Continuação (métodos numéricos locais) nos parâmetros do modelo. Além desses métodos numéricos, também utilizamos uma busca aleatória para encontrar a primeira

aproximação do Método de Newton. Assim, nesta tese, estamos relacionando alguns conceitos dos Sistemas Dinâmicos Finitos (os autômatos) com a teoria dos raios.

Estendemos, também, as fórmulas da amplitude ao longo do raio de modelos multi-camadas até modelos multi-regiões. Em particular, encontramos as amplitudes ao longo do raio para modelos 2.5D, em meios acústicos e elásticos. Essas fórmulas são implementadas computacionalmente para a construção de sismogramas.

Para essa construção precisamos encontrar os tempos de trânsito, as amplitudes e o número de pontos de cáustica ao longo do raio. Nesse sentido, nós calculamos o tempo de trânsito e as amplitudes utilizando o OCTRAL (biblioteca computacional criada e implementada nesta tese), estabelecendo uma comparação desses cálculos com os respectivos cálculos obtidos pelo CSHOT (biblioteca computacional implementada por Docherty, 1985). Mas, também estudamos teoricamente os algoritmos implementados por Keller & Perozzi (1983). Assim, fazendo uma comparação entre estes três métodos, é importante destacar:

- O algoritmo implementado por Keller & Perozzi utiliza métodos numéricos de continuação e de Newton para fazer o traçamento de raios e, portanto, encontrar os tempos de trânsito. Após a determinação dos pontos onde o raio intercepta as interfaces, este algoritmo utiliza fórmulas analíticas para encontrar o valor das amplitudes e para avaliar o número de pontos de cáustica (índice KMAH) ao longo do raio.
- O algoritmo implementado por Docherty (CSHOT) utiliza também o Método de Continuação e de Newton para fazer o traçamento de raios. No entanto, o cálculo da amplitude final do raio se faz através de um procedimento numérico, utilizando os raios vizinhos ao raio central para construir o chamado tubo de raios. O CSHOT não calcula o número de pontos de cáustica ao longo do raio, embora utilize o tubo de raios para identificar em que raios acontecem pontos de cáustica.
- O OCTRAL faz traçamento de raios utilizando Métodos de Continuação, de Newton e também utiliza conceitos da Matemática Discreta para fazer traçamento de raios considerando modelos complexos. O cálculo das amplitudes é feito utilizando o método numérico do tubo de raios de Docherty. O OCTRAL também não calcula o número de pontos de cáustica ao longo do raio. Assim, os sismogramas construídos não possuem

a mudança de fase devido a esses pontos. A determinação do índice KMAH, utilizando métodos numéricos similares ao cálculo de amplitudes, será objeto de trabalhos futuros.

Os capítulos que compõem esta tese foram organizados de modo que o leitor compreenda, em etapas, o assunto em estudo.

No Capítulo 2, fazemos um resumo da teoria dos raios e de como se obtêm as Equações Iconal e de Transporte de ordem zero para meios contínuos (acústicos ou elásticos). Apresentamos também uma dedução da Lei de Snell, baseada na aproximação geométrica de ordem zero.

No Capítulo 3, transformamos o problema do traçamento de raios na resolução de um sistema não-linear; para solucionar esse sistema usamos o Método de Newton e o Método de Continuação.

No Capítulo 4, apresentamos a denominada parte dinâmica da teoria dos raios, isto é, deduzimos as fórmulas para avaliar a amplitude ao longo de um raio.

No Capítulo 5, parte fundamental desta tese, definimos alguns conceitos, vindos da Teoria da Computação (autômato do modelo e palavra aceita), para, a partir deles, estender o Método de Continuação a modelos de geometria complexa.

No Capítulo 6, apresentamos a biblioteca computacional OCTRAL, que criamos e implementamos para realizar o traçamento de raios e sismogramas sintéticos em modelos de geometria complexa. Também ilustramos os algoritmos propostos com vários exemplos.

No Capítulo 7, à guisa de conclusões, discutimos o potencial da utilização da teoria dos autômatos no traçamento de raios. Vários tópicos abordados nesta tese podem ser melhorados ou ampliados em trabalhos futuros, como indicado também neste capítulo.

Finalmente, nos apêndices, apresentamos demonstrações e algoritmos que ajudam o leitor a uma melhor compreensão do texto principal, sem perder a continuidade do mesmo.

Capítulo 2

Teoria dos Raios

2.1 Introdução

Neste capítulo apresentamos, primeiramente, as idéias básicas da teoria dos raios: a obtenção da Equação Iconal e da Equação de Transporte para meios acústicos ou elásticos. Depois, transformamos o problema de resolver a Equação Iconal no problema de resolver um sistema de equações ordinárias, denominadas equações características, utilizando o método das características (traçamento de raios)¹. Posteriormente, deduzimos a Lei de Snell para um meio descontínuo, baseada na aproximação geométrica de ordem zero. E, finalmente, definimos os modelos multi-regiões.

2.2 Meio Acústico

Deduzimos, nesta seção, a Equação Iconal e a Equação de Transporte, quer para um meio acústico com densidade constante, quer para um meio acústico com densidade variável.

2.2.1 Meios Acústicos com Densidade Constante

Consideremos inicialmente o problema da propagação em um meio acústico com densidade constante, onde a equação de onda está dada por:

$$\nabla^2 u(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{v^2(\mathbf{x})} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (2.1)$$

¹Resolvemos a Equação de Transporte utilizando o traçamento de raios no Capítulo 4.

onde $u(\mathbf{x}, t)$ é a pressão, o vetor \mathbf{x} é a variável espacial, t é o tempo, e $v(\mathbf{x})$ é uma função escalar que determina o valor da velocidade na posição \mathbf{x} .

As soluções da equação (2.1) para um meio homogêneo ($v(\mathbf{x}) = \text{constante}$) são não dispersivas, isto é, a forma das soluções não muda no tempo.

No caso de uma fonte pontual na origem, a solução é (Aki & Richards, 1980)

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{r} f\left(t - \frac{r}{v}\right). \quad (2.2)$$

A solução (2.2) representa uma onda esférica, onde $f(t)$ é a forma original da onda (suposta um pulso² real), e $r = |\mathbf{x}|$ é a distância do ponto \mathbf{x} à origem.

Da equação (2.2) podemos observar que a forma do pulso permanece a mesma, propagando-se com velocidade c e com amplitude que diminui com o inverso de r . A solução acima nos leva a procurar soluções similares para a equação (2.1) em meios não-homogêneos ($v = v(\mathbf{x})$), isto é, em meios onde a velocidade depende da posição \mathbf{x} .

É conveniente trabalhar a equação (2.1) no domínio da frequência. Aplicando a Transformada de Fourier nessa equação, esta converte-se na chamada Equação de Helmholtz

$$\nabla^2 \hat{u}(\mathbf{x}, \omega) + \frac{\omega^2}{v^2(\mathbf{x})} \hat{u}(\mathbf{x}, \omega) = 0, \quad (2.3)$$

onde ω é a frequência angular e \hat{u} é a Transformada de Fourier de u , definida como

$$\hat{u}(\mathbf{x}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\mathbf{x}, t) e^{i\omega t} dt. \quad (2.4)$$

Notemos que a transformada de Fourier de (2.2) é dada por

$$\hat{u}(\mathbf{x}, \omega) = \frac{\hat{f}(\omega)}{r} \exp\left\{i\omega \left(\frac{r}{v}\right)\right\}. \quad (2.5)$$

Na equação acima, $\frac{1}{r} = A_0(\mathbf{x})$ e $\frac{r}{v} = \tau(\mathbf{x})$, elas representam, respectivamente, a amplitude e o tempo de trânsito da onda ao longo da reta que une a origem $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ao ponto de observação de coordenadas \mathbf{x} .

²Um pulso é uma onda cuja duração é curta comparada com a escala de tempo de interesse (Sheriff, 1988).

Este caso simples sugere a busca de uma solução aproximada (*Ansatz*) na forma

$$\hat{u}(\boldsymbol{x}, \omega) = A_0(\boldsymbol{x}) e^{i\omega\tau(\boldsymbol{x})} \hat{f}(\omega), \quad (2.6)$$

onde $A_0 = A_0(\boldsymbol{x})$ e $\tau(\boldsymbol{x})$ são a amplitude e o tempo de trânsito da onda na posição \boldsymbol{x} , respectivamente. Estas quantidades devem ser determinadas. A equação (2.6) representa a chamada aproximação da Ótica Geométrica de ordem zero. Esta aproximação inicial pode ser interpretada como o primeiro termo de uma série em ω^{-1} (Apêndice A). Como veremos adiante, o fator de amplitude $A_0(\boldsymbol{x})$ pode ser complexo.

Expressão do *Ansatz* no domínio do tempo

É interessante agora reescrever a expressão (2.6) no domínio do tempo. Neste caso, obtemos

$$U(\boldsymbol{x}, t) = A_0(\boldsymbol{x}) F(t - \tau(\boldsymbol{x})), \quad (2.7)$$

onde $U(\boldsymbol{x}, t)$ é a extensão analítica de $u(\boldsymbol{x}, t)$ e $F(t)$ é o chamado pulso analítico definido pelo pulso real $f(t)$. Conforme Červený(2001), no seu Apêndice A, temos

$$F(t) = f(t) + i g(t), \quad (2.8)$$

onde $g(t)$ representa a Transformada de Hilbert do pulso $f(t)$, dado por

$$g(t) = \mathcal{H}[f(t)] = \frac{1}{\pi} \mathcal{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} d\vartheta \frac{f(\vartheta)}{\vartheta - t}. \quad (2.9)$$

Como o sinal observado nos receptores é um sinal real, temos que a forma final do sismograma³ a ser obtido deve ser dado por

$$u(\boldsymbol{x}, t) = \text{Re} \{ A_0(\boldsymbol{x}) F(t - \tau(\boldsymbol{x})) \}. \quad (2.10)$$

Determinação do tempo de trânsito e da amplitude

Consideraremos agora a determinação do tempo de trânsito $\tau(\boldsymbol{x})$ (real) e da amplitude $A_0(\boldsymbol{x})$ (em geral complexa) a partir da equação de onda.

³Lembremos que um sismograma é a representação gráfica da parte real da solução de uma equação de onda.

Ao inserir a solução sugerida (2.6) na Equação de Helmholtz, obtemos uma equação polinomial em $(-i\omega)$, de segundo grau:

$$0 = [\nabla^2 A_0(\mathbf{x})] (-i\omega)^0 + [2\nabla A_0(\mathbf{x}) \cdot \nabla \tau(\mathbf{x}) + A_0(\mathbf{x}) \nabla^2 \tau(\mathbf{x})] (-i\omega)^1 + \left[\nabla \tau(\mathbf{x}) \cdot \nabla \tau(\mathbf{x}) - \frac{1}{v^2(\mathbf{x})} \right] (-i\omega)^2. \quad (2.11)$$

Como esta equação é válida para todas as frequências, os coeficientes de cada potência de $(-i\omega)$ devem ser iguais a zero, de forma independente. Assim, temos três expressões e dois incógnitas, $\tau(\mathbf{x})$ e $A_0(\mathbf{x})$ (que não dependem de ω). Portanto, a equação (2.11) não pode ser satisfeita exatamente. Para altas frequências, porém, os termos significativos serão o coeficiente de $(-i\omega)^2$ e o coeficiente de $(-i\omega)$ (Červený, 2001). São esses os termos que igualamos a zero:

$$\begin{aligned} \nabla \tau \cdot \nabla \tau - \frac{1}{v^2} &= 0, \\ 2\nabla A_0 \cdot \nabla \tau + A_0 \nabla^2 \tau &= 0. \end{aligned} \quad (2.12)$$

A primeira equação de (2.12) é a denominada Equação Iconal e representa o tempo de trânsito da frente de onda. E a segunda equação é a denominada Equação de Transporte e representa a variação da amplitude espacialmente.

2.2.2 Meios Acústicos com Densidade Variável

Se consideramos um meio acústico com densidade variável espacialmente, a equação de onda estará dada por

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho} \nabla u \right) = \frac{1}{\rho v^2(\mathbf{x})} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (2.13)$$

onde $u = u(\mathbf{x}, t)$ é a pressão e $\rho = \rho(\mathbf{x})$ é a densidade do meio (Červený, 2001).

Aplicando a mesma abordagem do caso da equação acústica com densidade constante (aproximação da Ótica Geométrica), vamos supor que

$$u(\mathbf{x}, t) = A_0(\mathbf{x}) F[t - \tau(\mathbf{x})]. \quad (2.14)$$

Substituindo a equação (2.14) na equação (2.13), obtemos uma equação em potências de $(-i\omega)$. Igualando os coeficientes dessa equação a zero, chegamos a equações similares ao caso da equação acústica com densidade constante. Por exemplo, para o caso em que o coeficiente de $(-i\omega)^2$ seja igual a zero, obtemos a Equação Iconal

$$\nabla\tau \cdot \nabla\tau = \frac{1}{v^2(\mathbf{x})}. \quad (2.15)$$

Observamos que essa equação não depende da densidade, isto é, o tempo de trânsito somente depende da velocidade do meio. Para o caso em que o coeficiente de $(-i\omega)$ seja igual a zero obtemos a primeira Equação de Transporte para um meio com densidade variável

$$2\nabla \left(\frac{A_0}{\sqrt{\rho}} \right) \cdot \nabla\tau + \left(\frac{A_0}{\sqrt{\rho}} \right) \nabla^2\tau = 0. \quad (2.16)$$

Notemos que a equação (2.16) e a segunda das equações (2.12) têm a mesma forma ao substituir $(A_0/\sqrt{\rho})$ por A_0 .

2.3 Meio Elástico

Se consideramos um meio elástico isotrópico⁴, a equação de onda em forma vetorial é (Červený, 2001)

$$(\lambda + \mu)\nabla\nabla \cdot \mathbf{u} + \mu\nabla^2\mathbf{u} + \nabla\lambda\nabla \cdot \mathbf{u} + \nabla\mu \times \nabla \times \mathbf{u} + 2(\nabla\mu \cdot \nabla)\mathbf{u} = \rho\mathbf{u}, \quad (2.17)$$

onde $\lambda = \lambda(\mathbf{x})$ e $\mu = \mu(\mathbf{x})$ são parâmetros do meio que variam espacialmente, chamados Constantes de Lamé; $\rho = \rho(\mathbf{x})$ é a densidade; e $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ é um vetor que representa o deslocamento de uma partícula do meio do ponto de equilíbrio, localizada na posição \mathbf{x} , no tempo t . Esta equação é chamada de equação elastodinâmica.

A dedução das equações básicas para as aproximações nas altas frequências da equação elastodinâmica é similar ao caso acústico, com a diferença de que o problema é de tipo vetorial e temos que considerar as componentes. Vamos utilizar, a seguir, as componentes escalares das equações e também suas formas vetoriais para mostrar os resultados, dependendo de qual seja mais ilustrativa em cada caso. Também será utilizada a notação usual do cálculo tensorial

⁴Em um meio elástico isotrópico, as propriedades do meio não dependem da direção, somente da posição.

(Lass, 1950), em particular, nesta seção será utilizada a notação de Einstein⁵, sendo que todos os sub-índices tomarão os valores de 1,2,3.

A equação de onda para um meio elástico e isotrópico, em forma de componentes, tem a forma

$$(\lambda + \mu)u_{j,kj} + \mu u_{k,jj} + \lambda_{,k}u_{j,j} + \mu_{,j}(u_{k,j} + u_{j,k}) = \rho \ddot{u}_k, \quad k = 1, 2, 3, \quad (2.18)$$

onde $\ddot{u}_k = \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2}$.

A aproximação na Ótica Geométrica para o vetor deslocamento é

$$u_k(\mathbf{x}, t) = A_k(\mathbf{x})F[t - \tau(\mathbf{x})], \quad k = 1, 2, 3, \quad (2.19)$$

onde $u_k(\mathbf{x}, t)$ é a k -ésima componente do deslocamento, e $A_k(\mathbf{x})$ é a k -ésima componente do vetor da amplitude $\mathbf{A}(\mathbf{x})$, as quais possuem uma variação suave com a posição; e $\tau(\mathbf{x})$ é o tempo de trânsito.

Derivando a equação (2.19) com respeito às coordenadas espaciais e substituindo na equação (2.18), transformamos a equação elastodinâmica nas seguintes equações

$$N_k(\mathbf{A})(-i\omega)^2 - M_k(\mathbf{A})(-i\omega) + L_k(\mathbf{A}) = 0, \quad \text{para } k = 1, 2, 3; \text{ com } \mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{x}) \quad (2.20)$$

onde

$$\begin{aligned} N_k(\mathbf{A}) &= -\rho A_k + (\lambda + \mu)A_j \tau_{,k} \tau_{,j} + \mu A_k \tau_{,j} \tau_{,j}, \\ M_k(\mathbf{A}) &= (\lambda + \mu)[A_{j,k} \tau_{,j} + A_{j,j} \tau_{,k} + A_{j,kj}] + \mu[2A_{k,j} \tau_{,j} + A_k \tau_{,jj}] \\ &\quad + \lambda_{,k} A_j \tau_{,j} + \mu_{,j} A_k \tau_{,j} + \mu_{,j} A_j \tau_{,k}, \\ L_k(\mathbf{A}) &= (\lambda + \mu)A_{j,kj} + \mu A_{k,jj} + \lambda_{,k} A_{j,j} + \mu_{,j}(A_{k,j} + A_{j,k}), \end{aligned} \quad (2.21)$$

para $k = 1, 2, 3$.

Similar ao caso acústico, igualando a zero os coeficientes do polinômio em $(-i\omega)$, temos que

⁵Nesta notação os sub-índices duplos representam uma soma sobre esses sub-índices. Por exemplo, no caso tridimensional, $a_{ii} \equiv \sum_{i=1}^3 a_{ii}$. Uma vírgula antes do sub-índice representa a derivada parcial respeito à variável i -ésima, por exemplo, $a_{,i} \equiv \frac{\partial a}{\partial x_i}$. Por exemplo, no nosso caso $u_{j,kj} \equiv \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_j}$

$$N_k(\mathbf{A}) = 0, \quad k = 1, 2, 3, \quad (2.22)$$

e

$$M_k(\mathbf{A}) = 0, \quad k = 1, 2, 3. \quad (2.23)$$

As equações representadas em (2.22) são as Equações Iconais das ondas elásticas. Elas possuem dois tipos de soluções na aproximação das altas frequências, que correspondem aos dois tipos de ondas que podem propagar-se em um meio elástico. De um lado, as chamadas ondas *P* (primárias), onde o movimento das partículas é paralelo à propagação (movimento longitudinal); e, de outro, as chamadas ondas *S* (secundárias), onde o movimento das partículas é perpendicular à propagação (movimento transversal)⁶. A partir das equações representadas em (2.23) vamos encontrar as Equações de Transporte para as amplitudes das ondas *P* e *S*.

Se analisamos as equações representadas em (2.22) mais detalhadamente, observamos que estas podem ser escritas como

$$\sum_{j=1}^3 (\Gamma_{ij} - \delta_{ij}) A_j = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.24)$$

onde cada

$$\Gamma_{ij} = \frac{\lambda + \mu}{\rho} \tau_{,i} \tau_{,j} + \frac{\mu}{\rho} \delta_{ij} \tau_{,k} \tau_{,k}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (2.25)$$

é uma componente da chamada Matriz de Christoffel, Γ , e $\delta_{i,j}$ é o Delta de Kronecker definido por $\delta_{i,j} = 1$ se $i = j$, e, $\delta_{i,j} = 0$ se $i \neq j$. Observemos que a equação (2.24) é uma equação de valores e vetores próprios. Para resolver esta equação definimos, como no caso acústico, o vetor vagarosidade \mathbf{p} ,

$$\mathbf{p} = \nabla \tau; \quad (2.26)$$

assim se pode demonstrar (Červený, 2001) que os valores próprios da matriz Γ são

$$\begin{aligned} G_1(\mathbf{x}, \mathbf{p}) &= G_2(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \beta^2(\mathbf{x}) (\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}), \\ G_3(\mathbf{x}, \mathbf{p}) &= \alpha^2(\mathbf{x}) (\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}), \end{aligned} \quad (2.27)$$

⁶No início da Sismologia as primeiras ondas observadas em um sismograma foram denominadas de ondas primárias *P*, e, as seguintes, ondas secundárias *S*. Estes termos se mantêm até hoje.

onde

$$\alpha = \alpha(\mathbf{x}) = \left[\frac{\lambda(\mathbf{x}) + 2\mu(\mathbf{x})}{\rho(\mathbf{x})} \right]^{1/2} \quad \text{e} \quad \beta = \beta(\mathbf{x}) = \left[\frac{\mu(\mathbf{x})}{\rho(\mathbf{x})} \right]^{1/2}. \quad (2.28)$$

Também se pode demonstrar que os correspondentes vetores próprios de Γ , \mathbf{g}_1 , \mathbf{g}_2 , e \mathbf{g}_3 possuem as seguintes direções: \mathbf{g}_3 tem a direção do vetor vagarosidade; e \mathbf{g}_1 e \mathbf{g}_2 são mutuamente perpendiculares e também perpendiculares ao vetor vagarosidade. As direções de \mathbf{g}_1 e \mathbf{g}_2 não podem ser determinadas em forma única da equação (2.24).

A interpretação física das equações (2.22) e (2.23) é que, nas altas frequências, existem dois tipos de ondas se propagando em um meio elástico isotrópico:

1. Ondas P .

O tempo de trânsito das ondas P satisfaz a Equação Iconal

$$\nabla_{\tau} \cdot \nabla_{\tau} = \frac{1}{\alpha^2(\mathbf{x})}, \quad (2.29)$$

onde $\alpha(\mathbf{x})$ é a velocidade de propagação das ondas P .

O vetor deslocamento \mathbf{u} tem a direção de \mathbf{p} , portanto,

$$\mathbf{A} = D(\mathbf{x})\mathbf{N}, \quad (2.30)$$

onde $D = D(\mathbf{x})$ é o valor complexo da amplitude da onda P , e onde

$$\mathbf{N} = \alpha \mathbf{p} \quad (2.31)$$

é um vetor unitário que possui a direção da onda, e $D(\mathbf{x})$ satisfaz a equação (2.23), ou seja,

$$M_k(\mathbf{A}) = M_k(D\mathbf{N}) = 0, \quad k = 1, 2, 3. \quad (2.32)$$

Multiplicando cada equação por $p_i = \tau_i$ e simplificando, temos a Equação de Transporte das ondas P :

$$2\nabla_{\tau} \cdot \nabla(\sqrt{\rho\alpha^2}D) + \sqrt{\rho\alpha^2}D\nabla^2_{\tau} = 0. \quad (2.33)$$

2. Ondas S .

O tempo de trânsito das ondas S satisfaz a Equação Iconal

$$\nabla\tau \cdot \nabla\tau = \frac{1}{\beta^2(\mathbf{x})}, \quad (2.34)$$

onde $\beta(\mathbf{x})$ é a velocidade de propagação das ondas S .

O vetor de deslocamento é polarizado no plano perpendicular a \mathbf{N} , ou seja, o deslocamento das partículas acontece no plano tangente à frente de onda. Definimos o vetor vagarosidade das ondas S por:

$$\mathbf{p} = \nabla\tau = \frac{\mathbf{N}}{\beta}, \quad (2.35)$$

onde \mathbf{N} é o vetor unitário perpendicular à frente de onda $\tau(\mathbf{x})$, sendo $\tau(\mathbf{x})$ constante.

Para representar o deslocamento vetorialmente, definimos dois vetores unitários, mutuamente perpendiculares, \mathbf{e}_1 e \mathbf{e}_2 , ambos perpendiculares a \mathbf{N} , isto é, estes vetores geram o plano do vetor deslocamento. Denominamos \mathbf{e}_1 e \mathbf{e}_2 vetores de polarização das ondas S . Assim, o vetor solução \mathbf{u} está dado por

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = B(\mathbf{x})\mathbf{e}_1 + C(\mathbf{x})\mathbf{e}_2, \quad (2.36)$$

onde $B(\mathbf{x})$ e $C(\mathbf{x})$ são as componentes que representam as amplitudes complexas nas direções de polarização do deslocamento da partícula do meio.

Se substituirmos a equação (2.36) na equação (2.23) e tomarmos \mathbf{e}_1 e \mathbf{e}_2 de forma conveniente, podemos demonstrar que $B = B(\mathbf{x})$ e $C = C(\mathbf{x})$ satisfazem as seguintes Equações de Transporte (Červený, 2001)

$$\begin{aligned} 2\nabla\tau \cdot \nabla(\sqrt{\rho\beta^2}B) + (\sqrt{\rho\beta^2}B)\nabla^2\tau &= 0, \\ 2\nabla\tau \cdot \nabla(\sqrt{\rho\beta^2}C) + (\sqrt{\rho\beta^2}C)\nabla^2\tau &= 0, \end{aligned} \quad (2.37)$$

respectivamente.

Observamos, na equação anterior, que as duas componentes B e C estão desacopladas; portanto, \mathbf{e}_1 e \mathbf{e}_2 são chamados vetores de polarização das ondas S .

2.4 Método das Características e Equação Iconal

Existem muitas formas de resolver a Equação Iconal, por exemplo, utilizando diferenças finitas, métodos de passo rápido, e, em particular, resolvendo as chamadas equações características. Nós vamos utilizar o método das características para transformar a Equação Iconal, uma equação diferencial parcial, em um sistema de equações ordinárias que dependam de uma variável independente σ , e assim encontrar a solução da Equação Iconal. Esse sistema de equações pode, em certos casos, ser resolvido analiticamente. Esse tipo de solução será a utilizada neste trabalho.

2.4.1 Método das Características

O método das características consiste em transformar uma equação diferencial parcial em um sistema de equações diferenciais ordinárias, denominadas equações características.

Esse método permite resolver problemas de valores iniciais. Nosso problema consistirá em resolver uma equação diferencial parcial (EDP) de primeira ordem

$$E(x, y, z, h, r, q, m) = 0, \quad (2.38)$$

onde

$$h(\mathbf{x}) \quad (2.39)$$

é a variável dependente e também desconhecida; x, y, z são as variáveis independentes; e

$$r = \frac{\partial h}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial h}{\partial y}, \quad m = \frac{\partial h}{\partial z} \quad (2.40)$$

são as derivadas parciais de h com respeito a x, y e z , respectivamente. Além disso, $h(\mathbf{x})$ tem que satisfazer condições de fronteira ao longo de uma curva no espaço tridimensional. Esta curva depende de um parâmetro ξ , $\xi \in [0, 1]$, tal que $x = x_0(\xi)$, $y = y_0(\xi)$ e $z = z_0(\xi)$.

A solução desse problema, em caso de existir, é uma superfície Ω em \mathbb{R}^7 , onde um ponto da superfície

$$(x, y, z, r, q, m, h) \in \Omega \quad (2.41)$$

satisfaz

$$E(x, y, z, r, q, m, h) = 0, \quad h(\mathbf{x}) = h_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \text{à curva}. \quad (2.42)$$

Bleistein (1984) demonstra que, dadas certas condições sobre a Matriz Jacobiana, uma solução pode ser obtida resolvendo o sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\frac{dx}{E_r} = \frac{dy}{E_q} = \frac{dz}{E_m} = \frac{-dr}{E_x + rE_h} = \frac{-dq}{E_y + qE_h} = \frac{-dm}{E_z + mE_h} = \frac{dh}{rE_r + qE_q + mE_m}. \quad (2.43)$$

As equações deste sistema são todas iguais a um parâmetro de proporcionalidade que denotaremos pelo símbolo ζ .

Renomeando as coordenadas da equação (2.43) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z, \\ r_1 = r, \quad r_2 = q, \quad r_3 = m, \end{aligned} \quad (2.44)$$

o sistema pode ser escrito assim

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{d\sigma} = \zeta E_{r_i} \quad \text{e} \quad \frac{dr_i}{d\sigma} = -\zeta (E_{x_i} + r_i E_h), \quad \text{para } i = 1, 2, 3, \\ \frac{dh}{d\sigma} = \zeta \sum_{k=1}^3 r_k E_{r_k}, \end{aligned} \quad (2.45)$$

onde σ é o parâmetro de integração ao longo de uma curva denominada **curva característica**.

O parâmetro σ tem diferentes interpretações físicas ou matemáticas, dependendo da escolha do parâmetro de proporcionalidade ζ . Esse parâmetro será selecionado em cada problema de acordo com a nossa conveniência⁷.

A solução do problema ao longo da superfície solução pode ser escrita da forma

$$x_i = x_i(\sigma, \xi) \quad \text{e} \quad r_i = r_i(\sigma, \xi), \quad \text{para } i = 1, 2, 3; \quad h = h(\sigma, \xi), \quad (2.46)$$

onde ξ^8 determina uma curva característica dada, o ponto inicial da curva, enquanto σ varia ao longo da curva característica.

⁷Outra maneira de interpretar o parâmetro ζ é utilizando a chamada formulação variacional da Equação Iconal. Dessa forma, diferentes ζ correspondem a diferentes Hamiltonianos do sistema de raios (Červený, 2001).

⁸Este ξ é o mesmo parâmetro do qual depende a curva de condição na fronteira, mencionado anteriormente

2.4.2 Aplicação do Método das Características à Equação Iconal

Se aplicamos o método das características à Equação Iconal⁹:

$$\left(\frac{\partial\tau}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\tau}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial\tau}{\partial x_3}\right)^2 = \frac{1}{v^2(\mathbf{x})}, \quad (2.47)$$

observando que $h = \tau$, $r_i = \frac{\partial\tau}{\partial x_i}$, e lembrando que $\frac{\partial\tau}{\partial x_i} = p_i$, temos o sistema

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{d\sigma} &= 2\zeta p_i, \quad \text{e} \quad \frac{dp_i}{d\sigma} = \zeta \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{v^2(\mathbf{x})} \right), \quad \text{para } i = 1, 2, 3, \\ \frac{d\tau}{d\sigma} &= 2\zeta \sum_{k=1}^3 p_k p_k = 2\zeta p^2, \end{aligned} \quad (2.48)$$

onde p é a norma do vetor vagarosidade p , $p = \|\mathbf{p}\|$. Este sistema, de sete equações, corresponde ao sistema das equações características. Porém, observamos que as primeiras seis equações estão desacopladas em relação à última, formando um sistema desacoplado de seis EDO. Portanto, para encontrar a solução da Equação Iconal podemos encontrar a solução do sistema desacoplado (será uma curva característica pertencente a \mathbb{R}^6). Utilizamos esta solução para encontrar τ na última equação integrando respeito a σ . Assim, $\tau(\sigma)$ é a solução da Equação Iconal ao longo da curva característica, cuja projeção no espaço \mathbb{R}^3 é o chamado raio, no léxico da Ótica e da Sísmica.

2.4.3 Escolhas Especiais do ζ nas Equações Características da Equação Iconal

Nas equações características podemos fazer diferentes escolhas particulares de ζ , que simplificam o sistema convenientemente, dependendo do problema em questão. Em particular são muito utilizadas as três opções descritas a seguir (Bleistein, 1984).

⁹Seja acústica ou elástica, a forma da Equação Iconal é idêntica, somente varia a função de velocidade no meio.

Caso $\zeta = 1/2$

As equações características (2.48) simplificam-se assim:

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{d\sigma} = p_i \quad \text{e} \quad \frac{dp_i}{d\sigma} = p \frac{\partial p}{\partial x_i}, \quad \text{para } i = 1, 2, 3, \\ \frac{d\tau}{d\sigma} = p^2. \end{aligned} \tag{2.49}$$

Neste caso, o σ tem unidades de *distância* \times *velocidade*. Este parâmetro é conhecido na Ótica como comprimento ótico (*optical length*) (Sommerfeld, 1964). Utilizaremos este parâmetro, no Capítulo 4, nas fórmulas da amplitude.

Caso $\zeta = 1/2p$

As equações características (2.48) simplificam-se assim:

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{d\sigma} = \frac{p_i}{p} \quad \text{e} \quad \frac{dp_i}{d\sigma} = \frac{\partial p}{\partial x_i}, \quad \text{para } i = 1, 2, 3, \\ \frac{d\tau}{d\sigma} = p. \end{aligned} \tag{2.50}$$

As unidades de σ são de *tempo* \times *velocidade*, e σ pode ser associado ao comprimento de arco ao longo do raio.

Caso $\zeta = 1/2p^2$

As equações características (2.48) simplificam-se assim:

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{d\sigma} = \frac{p_i}{p^2} \quad \text{e} \quad \frac{dp_i}{d\sigma} = \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial x_i}, \quad \text{para } i = 1, 2, 3 \\ \frac{d\tau}{d\sigma} = 1. \end{aligned} \tag{2.51}$$

As unidades do parâmetro σ são de *tempo*, e σ pode ser associado ao tempo de trânsito da frente de onda.

2.4.4 Soluções Analíticas das Equações Características da Equação Iconal

Nesta tese vamos considerar modelos para os quais as equações características podem ser **integradas analiticamente** em sub-regiões que compõem um modelo.

Duas situações muito simples, mas muito importantes e freqüentemente utilizadas na sismica de exploração, são aquelas em que consideramos meios homogêneos, e meios não-homogêneos onde o gradiente do inverso da velocidade ao quadrado é constante (Červený, 2001). Resolveremos, a seguir, analiticamente, as equações características nestes dois tipos de meios.

Meios Homogêneos

Se integramos o sistema (2.49) ($\zeta = 1/2$) em um meio homogêneo ($v(x) = \text{constante}$), obtemos

$$\begin{aligned} x_i(\sigma) &= x_{i0} + p_{i0}\sigma \quad \text{e} \quad p_i(\sigma) = p_{i0}, \quad \text{para } i = 1, 2, 3 \\ \tau &= \tau_0 + p_0^2\sigma, \end{aligned} \tag{2.52}$$

onde o vetor (x_{i0}) é a posição inicial do raio, o vetor (p_{i0}) é a direção inicial do raio (vetor vagarosidade inicial), p_0 é a norma do vetor vagarosidade inicial e τ_0 é o tempo de trânsito inicial (usualmente $\tau_0 = 0$).

Estas equações representam um segmento de reta com ponto inicial x_{i0} e direção p_{i0} .

Meios Não-Homogêneos onde o Gradiente do Inverso da Velocidade ao Quadrado é Constante

Assumamos que v^{-2} é dada pela seguinte relação:

$$v^{-2}(\mathbf{x}) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3; \quad a_1, a_2, a_3 \text{ são números reais.}$$

Consideremos uma região do espaço onde $v^{-2}(\mathbf{x}) > 0$ e um ponto inicial \mathbf{x}_0 nessa região, ou seja, $v_0^{-2} = v^{-2}(\mathbf{x}_0) > 0$, onde $\mathbf{x}_0 = (x_{i0})$ e com direção inicial do raio $\mathbf{p}_0 = (p_{i0})$.

A solução do sistema de traçamento de raios (2.49), com $\zeta = 1/2$ é

$$x_i(\sigma) = x_{i0} + p_{i0}(\sigma - \sigma_0) + \frac{1}{4}a_i(\sigma - \sigma_0)^2, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$p_i(\sigma) = p_{i0} + \frac{1}{2}a_i(\sigma - \sigma_0), \quad i = 1, 2, 3,$$

$$\tau(\sigma) = \tau(\sigma_0) + v_0^{-2}(\sigma - \sigma_0) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 a_i p_{i0}(\sigma - \sigma_0)^2 + \frac{1}{12} \left(\sum_{i=1}^3 a_i^2 \right) (\sigma - \sigma_0)^3,$$

onde, σ_0 é o valor inicial de σ . Observando a primeira das equações concluímos que o raio é uma parábola nessa região.

2.5 Aproximação da Teoria dos Raios para Ondas através de uma Interface

Nas seções anteriores, utilizamos a aproximação nas altas frequências para encontrar um sistema de ED. Esse sistema representa a trajetória do raio em um meio onde os parâmetros do meio são diferenciáveis, por exemplo, a velocidade $v(\mathbf{x})$.

Os modelos de interesse na Sísmica de Exploração são usualmente compostos por sub-regiões, onde se cumprem essas condições de diferenciabilidade. Porém, os parâmetros podem ter descontinuidades bruscas de uma sub-região a outra sub-região dada. Nestes casos, o método das aproximações assintóticas ou Ótica Geométrica também pode ser utilizado.

Vamos demonstrar, nesta seção, que para o caso de uma onda que viaja de uma região à outra, com uma mudança brusca na velocidade (descontinuidade na velocidade), se pode utilizar a conhecida Lei de Snell. Dessa forma, podemos continuar propagando um raio em outro meio (o qual pode ser o mesmo no caso da reflexão) e aplicar a Equação Iconal para propagar o raio de novo. No Capítulo 4, consideraremos as fórmulas de amplitude relacionadas com situações desse tipo.

2.5.1 Dois Meios Acústicos Separados por uma Interface

Vamos encontrar, em um meio acústico, expressões que permitam avaliar a direção do raio depois de ter atingido uma superfície (para um meio elástico a análise é análoga). Para esse fim, vamos supor um raio incidente em um ponto \mathbf{E} de coordenadas \mathbf{x} pertencente a uma superfície Σ , de forma que a velocidade tenha descontinuidades¹⁰ através de Σ . Suponhamos, também, dois meios, R^- e R^+ separados por Σ como na Figura (2.1). A velocidade no ponto \mathbf{x} , medida no meio R^- , é igual a $v^-(\mathbf{x})$, e a velocidade no ponto \mathbf{x} , medida no meio R^+ , é igual a $v^+(\mathbf{x})$.

A normal \mathbf{n} à interface Σ pode estar orientada para qualquer dos dois lados da interface

¹⁰Outros sinônimos para superfícies, onde a velocidade tem descontinuidade, são “refletor” ou “interface”. Esses termos também serão usados neste trabalho.

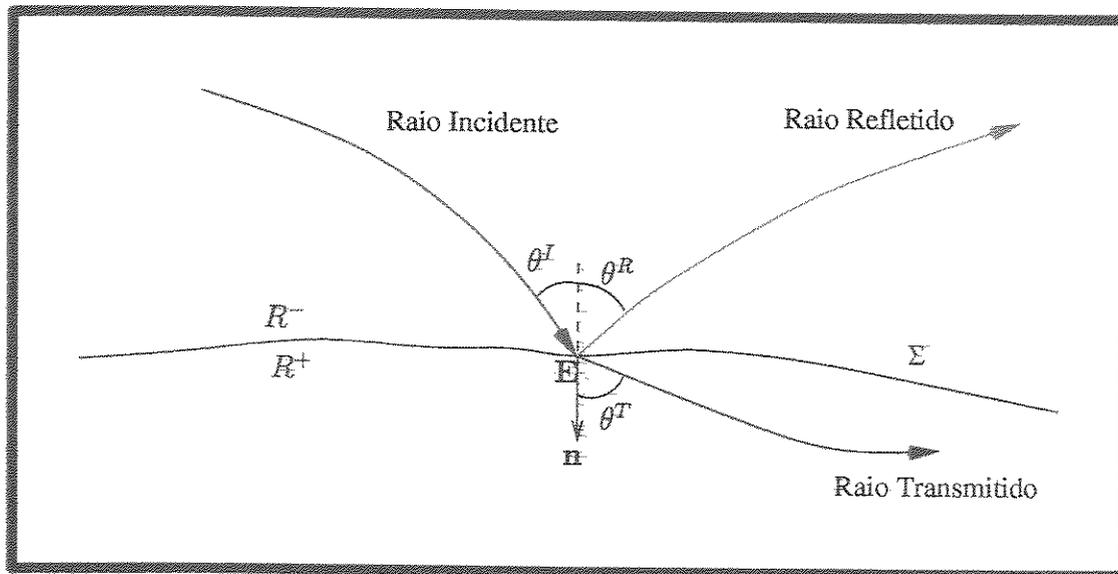


Figura 2.1: Partição do raio em uma interface.

Σ , isto é, para o semi-espaco R^- , ou para o semi-espaco R^+ . Para diferenciar estes dois casos, definimos um índice de orientação

$$\epsilon = \text{sgn}(\mathbf{p}^I \cdot \mathbf{n}), \quad (2.53)$$

onde o vetor \mathbf{p}^I representa o vetor vagarosidade da onda incidente.

Das propriedades de um meio contínuo, temos continuidade na solução através de Σ .

Assumamos uma onda incidente da forma

$$u_I(\mathbf{x}, \omega) \sim A^I(\mathbf{x})e^{i\omega\tau_I(\mathbf{x})}, \quad (2.54)$$

onde A^I é a amplitude da onda incidente. E suponhamos, também, que a onda incidente na superfície gera uma onda refletida u_R e uma onda transmitida u_T , e que estas ondas têm a mesma forma assintótica

$$u_R(\mathbf{x}, \omega) \sim A^R(\mathbf{x})e^{i\omega\tau_R(\mathbf{x})}, \quad (2.55)$$

onde A^R é a amplitude da onda refletida e

$$u_T(\mathbf{x}, \omega) \sim A^T(\mathbf{x})e^{i\omega\tau_T(\mathbf{x})}, \quad (2.56)$$

onde A^T é a amplitude da onda transmitida.

A solução da equação de onda acústica no ponto \mathbf{E} é

$$\begin{aligned} u &= u_I + u_R, \quad \text{se } x \in R^+, \\ u &= u_T, \quad \text{se } x \in R^-, \end{aligned} \quad (2.57)$$

e a condição de que a solução seja contínua em Σ nos leva à equação (Červený, 2001)

$$A^I(\mathbf{x})e^{i\omega\tau_I(\mathbf{x})} + A^R(\mathbf{x})e^{i\omega\tau_R(\mathbf{x})} = A^T(\mathbf{x})e^{i\omega\tau_T(\mathbf{x})}, \quad \mathbf{x} \in \Sigma. \quad (2.58)$$

Estas soluções não poderiam coincidir assintoticamente em Σ , a menos que as fases coincidam¹¹, portanto,

$$\tau_I(\mathbf{x}) = \tau_R(\mathbf{x}) = \tau_T(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Sigma. \quad (2.59)$$

Da equação 2.59 concluímos que os componentes dos gradientes de τ_I , τ_R e τ_T , na superfície Σ , devem ser iguais.

Para encontrar um resultado que possamos utilizar na construção dos raios, definamos uma parametrização na superfície (Bleistein, 1984)

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(q_1, q_2), \quad (2.60)$$

onde q_1 e q_2 são os parâmetros da superfície. Diferenciando a equação 2.59 com respeito a q_i e q_2 , temos

$$\nabla\tau_I \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_i} = \nabla\tau_R \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_i} = \nabla\tau_T \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2. \quad (2.61)$$

Estas equações nos permitem afirmar que a projeção do gradiente do tempo de trânsito, em duas direções linearmente independentes na superfície Σ , é igual para as ondas incidente, refletida e transmitida. Isto é, as projeções dos vetores vazarosidade nessas direções são iguais.

Se definimos o operador

$$\nabla_q = \nabla - \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \nabla) = \nabla - \mathbf{n} \frac{\partial}{\partial n}, \quad (2.62)$$

¹¹Utilizando conceitos básicos da análise complexa (Rudin, 1974), é fácil demonstrar que o conjunto de funções $\{e^{ia(x)}, e^{ib(x)}, e^{ic(x)}\}$ é linearmente independente. Portanto, a única forma de que uma combinação linear com coeficientes não-nulos, de funções exponenciais complexas, seja igual a zero, é que os termos das fases sejam iguais, isto é, $a(x) = b(x) = c(x)$.

onde \mathbf{n} é o vetor normal unitário na superfície Σ , temos que ∇_q é a componente do gradiente na superfície. Esta componente é igual para a onda incidente, a refletida e a transmitida. Portanto, podemos escrever

$$\nabla_q \tau_I = \nabla_q \tau_R = \nabla_q \tau_T. \quad (2.63)$$

Se fizermos uma decomposição dos vetores vagarosidade em componentes tangenciais e normais, temos que

$$\mathbf{p}^I = \mathbf{p}_q^I + \sigma^I \mathbf{n}, \quad \mathbf{p}^R = \mathbf{p}_q^R + \sigma^R \mathbf{n}, \quad \mathbf{p}^T = \mathbf{p}_q^T + \sigma^T \mathbf{n}, \quad (2.64)$$

onde $\sigma^I, \sigma^R, \sigma^T$ são escalares; e $\mathbf{p}_q^I, \mathbf{p}_q^R, \mathbf{p}_q^T$ são os componentes tangenciais dos vetores vagarosidade $\mathbf{p}^I, \mathbf{p}^R, \mathbf{p}^T$, respectivamente. Observemos que $\mathbf{p}_q^I, \mathbf{p}_q^R, \mathbf{p}_q^T$ são iguais pela equação (2.63).

Os números $\sigma^I, \sigma^R, \sigma^T$ são os comprimentos das projeções dos vetores vagarosidade $\mathbf{p}^I, \mathbf{p}^R, \mathbf{p}^T$, respectivamente, sobre o vetor normal. Portanto, esses escalares podem ser escritos como

$$\sigma^I = \mathbf{p}^I \cdot \mathbf{n}, \quad \sigma^R = \mathbf{p}^R \cdot \mathbf{n}, \quad \sigma^T = \mathbf{p}^T \cdot \mathbf{n}. \quad (2.65)$$

Das equações (2.65), (2.64) e (2.63) temos que

$$\mathbf{p}^I - \mathbf{n} (\mathbf{p}^I \cdot \mathbf{n}) = \mathbf{p}^R - \mathbf{n} (\mathbf{p}^R \cdot \mathbf{n}) = \mathbf{p}^T - \mathbf{n} (\mathbf{p}^T \cdot \mathbf{n}). \quad (2.66)$$

Vamos agora determinar \mathbf{p}^T .

Da igualdade das componentes tangenciais $\mathbf{p}_q^I = \mathbf{p}_q^T$, temos que

$$\mathbf{p}^T = \mathbf{p}_q^I + \sigma^T \mathbf{n}. \quad (2.67)$$

Se utilizamos esta última equação e a Equação Iconal para a onda refletida, chegamos a

$$\sigma^T = \epsilon \left[\frac{1}{v^{+2}} - \frac{1}{v^{-2}} + (\mathbf{p}^I \cdot \mathbf{n})^2 \right]^{1/2}, \quad (2.68)$$

onde $v^+ = v^+(\mathbf{E})$ e $v^- = v^-(\mathbf{E})$. A equação final para o vetor vagarosidade da onda transmitida é, portanto,

$$\mathbf{p}^T = \mathbf{p}^I - \left\{ (\mathbf{p}^I \cdot \mathbf{n}) - \epsilon \left[\frac{1}{v^{+2}} - \frac{1}{v^{-2}} + (\mathbf{p}^I \cdot \mathbf{n})^2 \right]^{1/2} \right\} \mathbf{n}. \quad (2.69)$$

Vamos agora determinar o vetor vagarosidade das ondas refletidas. A escolha do sinal é oposta

$$\text{sgn}(\sigma^R) = \text{sgn}(\mathbf{p}^R \cdot \mathbf{n}) = -\text{sgn}(\mathbf{p}^I \cdot \mathbf{n}) = -\epsilon. \quad (2.70)$$

Portanto, para as ondas refletidas, substituímos ϵ por -1 e v_2 por v_1 . Então,

$$\mathbf{p}^R = \mathbf{p}^I - 2(\mathbf{p}^I \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}. \quad (2.71)$$

As equações (2.71) e (2.69) são as equações finais para os vetores vagarosidade \mathbf{p}^T e \mathbf{p}^R das ondas transmitidas e refletidas, respectivamente. Podemos agora propagar, de novo, o raio no segundo meio, no caso da reflexão ou transmissão.

A forma usual de apresentar essas idéias nos livros de Ótica é utilizando o conceito de plano de incidência. Para esse fim, definimos o plano de incidência como o plano especificado pelo vetor normal unitário \mathbf{n} e pelo vetor vagarosidade da onda incidente \mathbf{p}^I . A equação (2.66) implica que os vetores vagarosidade-refletido e transmitido, \mathbf{p}^R e \mathbf{p}^T , estão situados no plano de incidência. Também definimos θ^I , θ^R e θ^T como os ângulos entre a normal e os vetores vagarosidade da onda incidente, refletida e transmitida, respectivamente.

Fazendo o produto escalar a ambos os lados da equação (2.69) e o vetor tangente na interface, pertencente ao plano de incidência, temos que

$$\frac{\sin \theta^I}{v^-} = \frac{\sin \theta^T}{v^+}, \quad (2.72)$$

ou seja, a conhecida **Lei de Snell de Transmissão**.

Similarmente, fazendo o produto escalar entre o vetor (2.71) e o vetor tangente, pertencente ao plano de incidência, temos que

$$\frac{\sin \theta^I}{v^-} = \frac{\sin \theta^R}{v^+}, \quad (2.73)$$

ou seja, a **igualdade dos ângulos de incidência e reflexão**, um caso particular da Lei de Snell.

Equações correspondentes são válidas para ondas elásticas em meios isotrópicos e anisotrópicos. A seguir, consideraremos o caso elástico isotrópico.

2.5.2 Dois Meios Elásticos Isotrópicos Separados por uma Interface

As idéias desenvolvidas na sub-seção anterior são similarmente aplicáveis para o estudo de uma onda que atinge uma interface que separa dois meios elásticos (Červený, 2001 e Aki & Richards, 1980). Porém, neste caso, onde dois meios elásticos isotrópicos são separados por uma interface, temos que levar em conta o chamado fenômeno de conversão. Esse fenômeno ocorre quando uma onda P ou S atinge uma superfície que separa dois meios elásticos, podendo-se provar que a onda divide-se em quatro tipos de ondas: uma onda P refletida, uma onda P transmitida, uma onda S refletida e uma onda S transmitida.

Se temos uma onda P incidente (é similar para uma onda S incidente) se satisfaz que

$$\frac{\sin \theta^I}{\alpha_-} = \frac{\sin \theta^R}{\alpha_-} = \frac{\sin \theta^T}{\alpha_+} = \frac{\sin \phi^R}{\beta_-} = \frac{\sin \phi^T}{\beta_+}, \quad (2.74)$$

onde α_- e α_+ são as velocidades das ondas P no meio R^- e R^+ , respectivamente; β_- e β_+ são as velocidades das ondas S no meio R^- e R^+ , respectivamente; θ^I, θ^R e θ^T são os ângulos formados entre os vetores vanguarda de tipo P (incidente, refletido e transmitido) e o vetor normal; e, finalmente, ϕ^R e ϕ^T são os ângulos formados entre os vetores vanguarda de tipo S (refletida e transmitida) e a normal.

A equação (2.74) é a Lei de Snell generalizada para meios elásticos. Esta equação nos permite encontrar a direção dos raios refletidos e transmitidos (P ou S).

2.6 Modelos Multi-Regiões

Nesta tese estamos considerando modelos onde as equações características possam ser **integradas analiticamente** em sub-regiões, com essas sub-regiões separadas por superfícies, onde os parâmetros das equações (velocidade ou densidade) possuem descontinuidade através delas. Denominamos esses modelos (seja acústico ou elástico) como modelos multi-regiões. Sua definição matemática será apresentada no Capítulo 4.

Nos modelos multi-regiões, o problema do traçamento de raios se reduz a encontrar os pontos de intersecção do raio com as interfaces do modelo. Ou, dito de outra forma, se reduz a um sistema não-linear (será analisado detalhadamente no Capítulo 3).

Para fazer o traçamento de raios nos modelos multi-regiões, utilizamos as equações (2.72),

(2.73) e a Iconal (2.15), no caso de modelos acústicos, onde $v(\boldsymbol{x})$ é contínua em blocos (sub-regiões). Similarmente, utilizando as equações (2.74) e a Iconal (2.29) ou (2.34), no caso de modelos elásticos. Os algoritmos que permitem fazer o traçamento de raios, nesses modelos, serão discutidos no Capítulo 3 e no Capítulo 5.

A solução da Equação Iconal é denominada a parte **cinemática** da teoria de raios, que foi desenvolvida neste capítulo. A parte **dinâmica** da teoria de raios, ou seja, o cálculo e as fórmulas da amplitude ao longo do raio (em modelos acústicos ou elásticos), vai ser estudada no Capítulo 4.

Capítulo 3

O Método de Continuação no Traçamento de Raios

3.1 Introdução

Neste capítulo mostramos como transformar o problema do traçamento de raios na resolução de um sistema não-linear; esse sistema é resolvido pelo Método de Newton. Assim, o problema do traçamento de raios para muitos receptores é, portanto, equivalente a resolver um conjunto de sistemas não lineares que dependem de um parâmetro. Para solucionar esses sistemas, utilizamos o Método de Continuação.

O Método de Continuação é um método numérico que permite resolver, de forma eficiente, um conjunto de sistemas não-lineares. Este método pode ser utilizado para construir o traçamento de raios em um modelo composto por blocos de velocidade constante, quer em modelos acústicos, quer em modelos elásticos.

Descrevemos como funciona o método matemática e computacionalmente para modelos 2D, considerando apenas os modelos onde as interfaces não possuem intersecções¹. O Método de Continuação no traçamento de raios foi descrito, inicialmente, nos trabalhos de Keller & Perozzi (1983). Essas idéias foram implementadas e refinadas no trabalho de Docherty (1985) na biblioteca computacional CSHOT, a qual faz parte do SU².

¹O Método de Continuação foi estendido para modelos 3D multi-camadas por Fawcett & Keller (1985), como mostrado no Apêndice (D).

²O SU deve seu nome às siglas em Inglês da expressão *Seismic Unix*. O SU é uma biblioteca computacional desenvolvida pelo grupo *Center for Wave Phenomena (CWP)*, de *Colorado School of Mines* (Golden, Colorado, Estados Unidos). Esta biblioteca, de domínio público, é utilizada para o processamento, inversão e

3.2 Formulação Geral do Problema de Traçamento de Raios

Assumamos que a Terra é representada por um domínio de duas dimensões R , ou, por um domínio tridimensional com simetria cilíndrica em relação a um eixo perpendicular ao plano de interesse (modelo 2.5D). Assim, o modelo matemático que representa a Terra é um domínio de duas dimensões, subdividido por uma partição de subconjuntos ou sub-regiões, para os quais os parâmetros físicos do modelo (em particular a velocidade $v(\mathbf{x})$ ou a densidade $\rho(\mathbf{x})$, onde o ponto \mathbf{x} é um ponto arbitrário dentro da sub-região) são constantes.

Assumamos que o modelo da Terra está contido dentro de um retângulo definido por $\{(x, z) : a \leq x \leq b, 0 \leq z \leq c\}$. Também assumamos que as interfaces entre as sub-regiões (as fronteiras entre elas) e a superfície da Terra são funções de classe C^2 que não se interceptam no intervalo $[a, b]$,

$$L_i = \{(x, z) \mid x \in [a, b], z = f_i(\mathbf{x})\}, \quad i = 0, 1, \dots, N_I. \quad (3.1)$$

Ou seja, todo o domínio é dividido em N_R subconjuntos disjuntos, como mostrado na Figura (3.1), podendo, assim, construir uma partição do domínio R . Neste capítulo, chamaremos esses subconjuntos como regiões, sub-regiões ou camadas.

Em termos formais, temos uma coleção de subconjuntos fechados R_n que satisfazem as seguintes condições:

$$R = \bigcup_{j=1}^{N_R} R_j, \quad (3.2)$$

$$R_k \cap R_j = \partial R_k \cap \partial R_j, \quad k, j = 1, 2, \dots, N_R,$$

ou seja, as intersecções das sub-regiões são apenas curvas no plano.

Usaremos a convenção $i = 0$ para denotar o índice que representa a superfície da Terra, e nosso domínio de interesse será $z \geq 0$ (em Geofísica o eixo Z é orientado positivamente em direção do subsolo da terra). Chamemos por Int o conjunto de índices $\{0, 1, \dots, N_I\}$

modelamento sísmico. A criação e implementação do CSHOT foi parte da tese de doutorado de Paul Docherty em 1985.

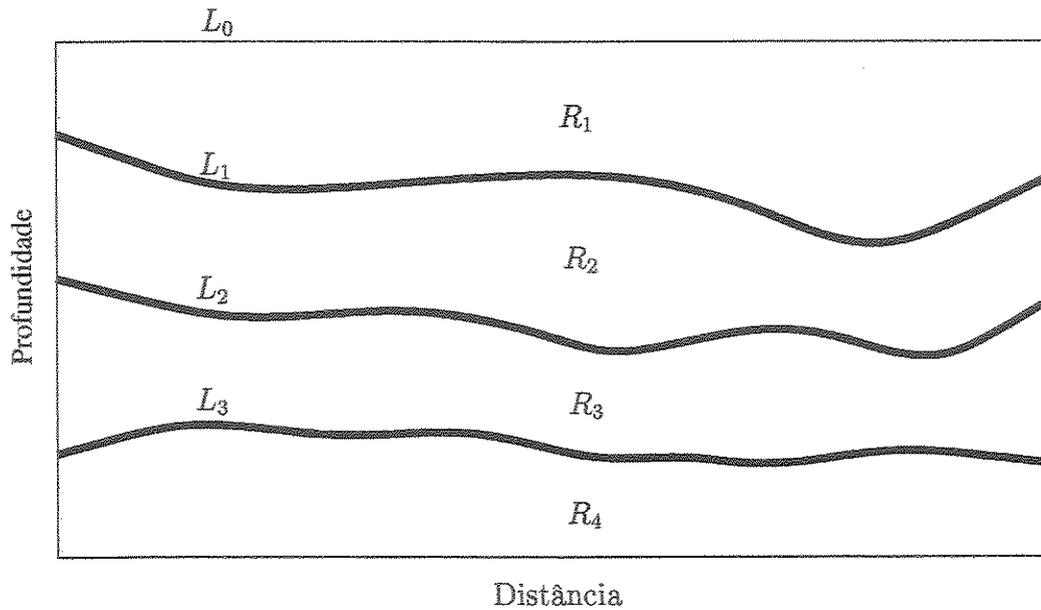


Figura 3.1: Modelo sísmico 2D, multi-camadas.

que representam todas as interfaces. Similarmente, definamos Reg ao conjunto de índices $\{1, \dots, N_R\}$ que representam as camadas. Usaremos estas idéias para definir o conceito de assinatura mais adiante.

O problema é construir um raio que una dois pontos dados no domínio³.

Para a solução cinemática do problema, ou seja, para encontrar os tempos de trânsito, levamos em conta:

- Um raio que une dois pontos que pertencem a uma região onde a velocidade é suave, satisfaz a Equação Iconal. Isso tem que ser satisfeito em cada uma das regiões que o raio percorre. Particularmente, para o caso de velocidade constante, a solução da Equação Iconal é um segmento de linha reta, dentro de cada sub-região.
- Quando acontece uma descontinuidade na velocidade de propagação, o raio satisfaz a Lei de Snell nas intersecções com as interfaces.

Formalmente, o problema pode ser escrito assim: dados dois pontos \mathbf{E}_0 (a localização da fonte) e \mathbf{E}_{N+1} (a localização do receptor), ambos localizados em interfaces fixas (não necessariamente na interface L_0), e uma seqüência de inteiros positivos i_1, i_2, \dots, i_N que representam

³Este problema é conhecido na literatura técnica em Inglês como *two-point ray tracing* (Červený, 2001).

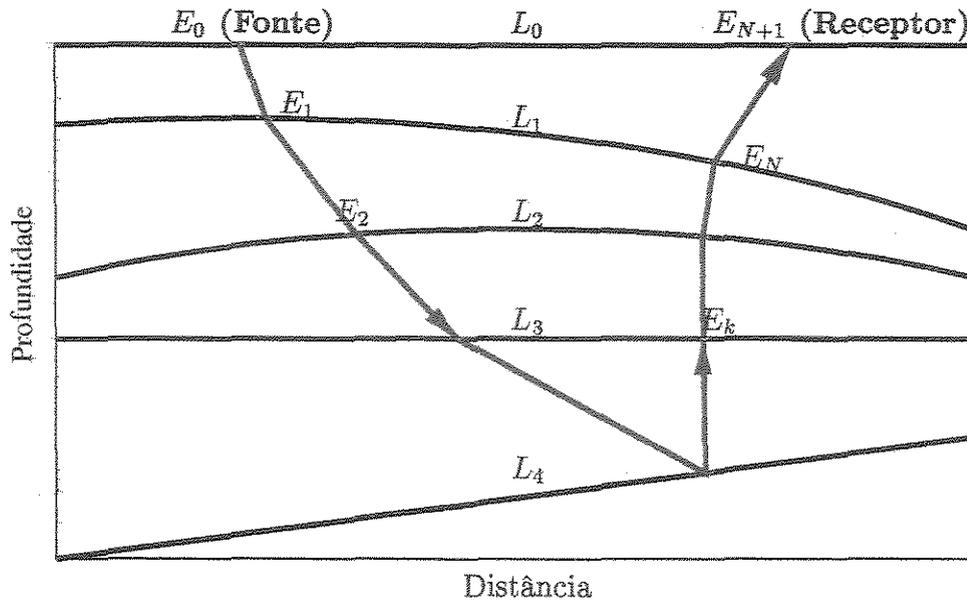


Figura 3.2: Representação do problema geral de traçamento de raios em um modelo 2D.

os índices das N interfaces interceptadas pela trajetória do raio, então, precisamos encontrar E_k , para $k = 1, 2, \dots, N$. Em outras palavras, o problema é encontrar a abscissa de cada um dos pontos de intersecção da k -ésima interface com o raio (em total N abscissas). Nesses pontos de intersecção, a Lei de Snell é satisfeita.

O raio pode ser descrito entre dois pontos consecutivos de intersecção, como o segmento de linha reta $[E_{k-1}, E_k]$, para $k = 1, 2, \dots, N+1$, como representado na Figura (3.2) para um modelo sísmico 2D. Observemos que o raio possui N pontos de intersecção com as interfaces, além de dois pontos nos extremos (a fonte e o receptor). Isto dá um total de $N + 2$ pontos, que geram $N + 1$ segmentos de linha (estas quantidades são importantes na implementação computacional dos algoritmos para fazer traçamento de raios).

Nota: Os modelos considerados nesta tese não levam em conta as interfaces laterais do modelo, que separam as camadas do modelo da região exterior. Apenas levaremos em conta as interfaces internas, a interface superior (superfície da Terra) e a interface inferior do modelo.

3.3 Assinatura do Raio

Em Sismologia ou Sísmica, a assinatura do raio é uma forma de representar a natureza de um raio dado. Lembremos que dois tipos de ondas podem ser geradas em um meio elástico:

uma onda P longitudinal e uma onda S cizalhante. O tipo de onda determina a natureza do raio. Quando uma onda atinge uma superfície onde há uma descontinuidade na velocidade, se produz o fenômeno de conversão. Isto é, o raio pode mudar sua natureza de um tipo a outro (de P a S ou vice-versa) ou permanecer do mesmo tipo. Se consideramos a m -ésima sub-região do modelo, vamos denotar as velocidades pela seguinte numeração global:

$$\begin{cases} \alpha_m \equiv v_{2m}, \text{ velocidade de propagação da onda tipo } P \text{ na } m\text{-ésima camada,} \\ \beta_m \equiv v_{2m-1}, \text{ velocidade de propagação da onda tipo } S \text{ na } m\text{-ésima camada.} \end{cases} \quad (3.3)$$

Como foi mencionado na seção 3.2, um raio que possui N pontos de intersecção define $N + 1$ segmentos de linha em sua trajetória. Dada a fonte, o receptor e as interfaces interceptadas para cada segmento de linha, temos duas possibilidades de tipo de raio. Em outras palavras, o raio pode mudar de tipo várias vezes durante a trajetória. Isso gera um total de 2^{N+1} tipos de raios que podem conectar dois pontos dados, interceptando uma seqüência de interfaces dadas.

Conforme a discussão anterior, podemos construir duas seqüências finitas que caracterizam a natureza do raio completamente. Uma é a seqüência de N inteiros positivos, que denominaremos de assinatura das interfaces, i_1, i_2, \dots, i_N , onde cada um dos índices i_k para $k = 1, \dots, N$ identifica as N interfaces interceptadas pelo raio. A outra seqüência, $j_1, j_2, \dots, j_N, j_{N+1}$, que denominaremos assinatura das velocidades (esta seqüência, que será retomada no Capítulo 5, pode ser de números, letras ou símbolos), está relacionada às $N + 1$ sub-regiões que o raio percorre. Esta seqüência nos informa acerca do tipo de conversão que o raio possui em cada sub-região em particular, da seguinte forma:

se consideramos a k -ésima sub-região atravessada pelo raio, então a velocidade de propagação das ondas nessa sub-região será denotada por v_{j_k} , onde o símbolo j_k é definido assim:

$$j_k = \begin{cases} 2m, & \text{se temos uma onda tipo } P \text{ no } k\text{-ésimo segmento do raio,} \\ 2m - 1, & \text{se temos uma onda tipo } S \text{ no } k\text{-ésimo segmento do raio,} \end{cases} \quad (3.4)$$

onde m é o correspondente índice global da camada onde está localizado o k -ésimo segmento do raio.

O caso acústico fica como uma situação particular, onde a assinatura da velocidade somente possui um tipo de raio em cada sub-região.

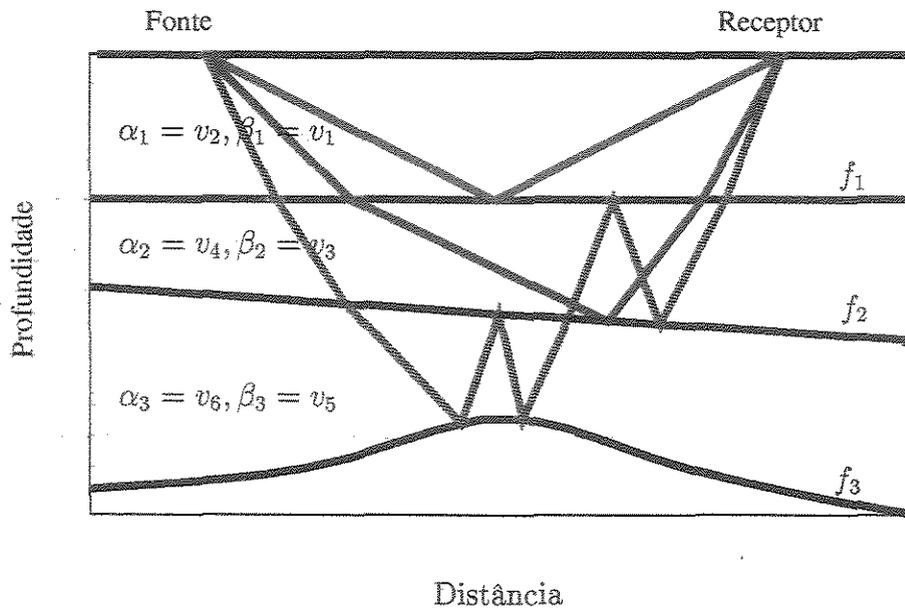


Figura 3.3: Raios com diferentes assinaturas.

Com esta informação, a assinatura é definida por

$$[i_1, i_2, \dots, i_N; j_1, j_2, \dots, j_{N+1}], \quad (3.5)$$

onde i_k representa a k -ésima interface interceptada pelo raio, e j_k representa a velocidade na k -ésima região atravessada pelo raio⁴.

Se consideramos meios acústicos, somente temos ondas P , portanto, a notação da assinatura, neste caso, fica como um caso particular do caso elástico.

Exemplos de diferentes assinaturas de raios são mostrados na Figura (3.3). A assinatura do raio vermelho é $[1; 2, 2]$, a assinatura do raio azul é $[1, 2, 1; 2, 4, 3, 1]$ e a assinatura do raio verde é $[1, 2, 3, 2, 3, 2, 1, 2, 1; 2, 4, 6, 6, 6, 6, 4, 4, 4, 2]$.

Fixada uma assinatura, podemos definir uma relação de equivalência no conjunto de raios do modelo sísmico (acústico/elástico). Dois raios se relacionam se possuem a mesma fonte, interceptam as mesmas interfaces e atravessam as mesmas regiões (com os mesmos parâmetros de velocidade), mas, com diferentes receptores. Esta relação gera uma classe de equivalência. Depois de obter o primeiro raio de uma classe (Apêndices B e C), os outros

⁴A notação de assinatura que nós apresentamos difere da apresentada por Perozzi (1980), isto para manter a coerência com as idéias que introduziremos no Capítulo 5.

raios são obtidos por um procedimento de continuação nos receptores, como será explicitado mais adiante.

Podemos definir outra relação de equivalência no conjunto de raios, mas, para modelos elásticos: dois raios se relacionam se possuem a mesma fonte, o mesmo receptor, as mesmas interfaces interceptadas e atravessam as mesmas regiões, mas, deixando as velocidades como parâmetros livres (o vetor de parâmetros de velocidades pode ser diferente para cada raio). Lembremos que para cada segmento do raio existem dois possíveis valores da velocidade de propagação do raio. Essa relação gera uma classe de equivalência. Depois de obter o primeiro raio de uma classe (Apêndices B e C), os outros raios convertidos são obtidos por um procedimento de continuação nas velocidades, como será explicitado mais adiante. Assim, esta classe pode ter, no máximo, 2^{N+1} raios.

Essas duas classes de equivalência de raios serão importantes para a implementação computacional dos algoritmos de traçamento de raios, mostrada nesta tese.

O conceito de assinatura será utilizado para estender o algoritmo de continuação em situações onde se apresentam intersecções das interfaces. Esta situação acontece em modelos sísmicos de interesse como, por exemplo, falhas, cunhas, lentes, dentre outros. No Capítulo 5, definiremos o conceito do autômato do modelo, um tipo particular de grafo que gera assinaturas para este tipo de situações.

3.4 Sistema Não-Linear

Como para resolver o problema descrito na seção 3.2 não precisamos resolver equações diferenciais, porque a Equação Iconal possui soluções analíticas em cada sub-região, então ele pode ser caracterizado completamente pelos pontos de intersecção $\mathbf{E}_k = (x_k, z_k)$, onde $z_k = f_{i_k}(x_k)$, para $i \leq k \leq N$.

Aplicando a Lei de Snell no ponto \mathbf{E}_k , como mostrado na Figura (3.4), e utilizando a representação do vetor tangente na k -ésima interface em \mathbf{E}_k , $\mathbf{t}_k = (1, f'_{i_k}(x_k))$ temos as seguintes equações:

$$v_{j_{k+1}} \left\langle \mathbf{t}_k, \frac{\mathbf{E}_k - \mathbf{E}_{k-1}}{\|\mathbf{E}_k - \mathbf{E}_{k-1}\|} \right\rangle - v_{j_k} \left\langle \mathbf{t}_k, \frac{\mathbf{E}_{k+1} - \mathbf{E}_k}{\|\mathbf{E}_{k+1} - \mathbf{E}_k\|} \right\rangle = 0, \quad (3.6)$$

para $k = 1, 2, \dots, N$, onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto interno entre vetores. Na Figura (3.4) θ_k^-

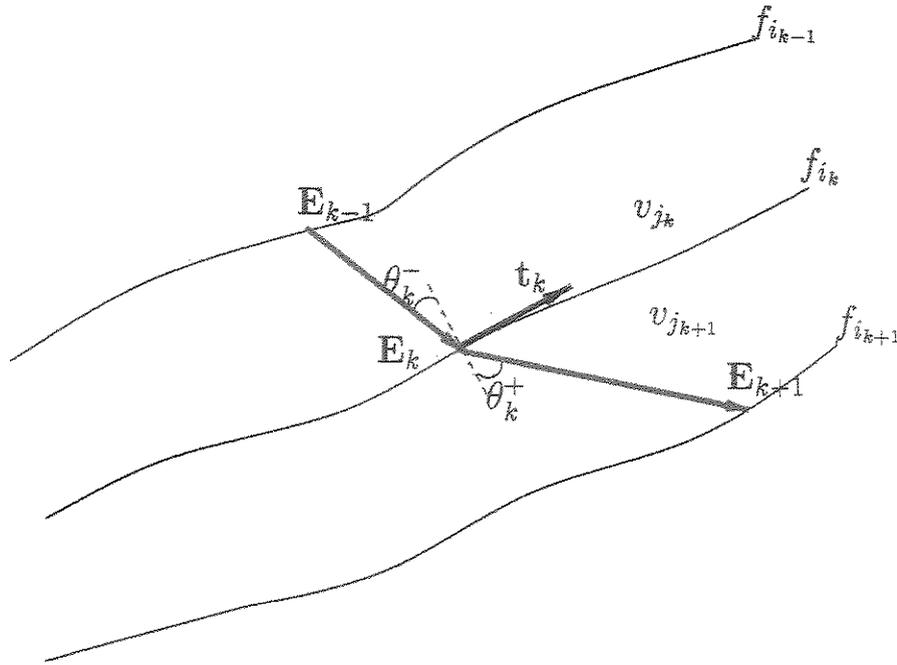


Figura 3.4: Representação geométrica da Lei de Snell

é o ângulo entre o vetor vagarosidade incidente e a normal, e θ_k^+ é o ângulo entre o vetor vagarosidade refletido/transmitido e a normal.

Substituindo \mathbf{E}_k e \mathbf{t}_k na equação (3.6) temos um sistema não-linear de N equações e N incógnitas, x_1, x_2, \dots, x_N , onde a k -ésima equação é dada por:

$$\begin{aligned} \phi_k \equiv & v_{j_{k+1}} \frac{(x_k - x_{k-1}) + f'_{i_k}(x_k)(f_{i_k}(x_k) - f_{i_{k-1}}(x_{k-1}))}{[(x_k - x_{k-1})^2 + (f_{i_k}(x_k) - f_{i_{k-1}}(x_{k-1}))^2]} \\ & - v_{j_k} \frac{(x_{k+1} - x_k) + f'_{i_k}(x_k)(f_{i_{k+1}}(x_{k+1}) - f_{i_k}(x_k))}{[(x_{k+1} - x_k)^2 + (f_{i_{k+1}}(x_{k+1}) - f_{i_k}(x_k))^2]} = 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Em forma compacta o sistema não-linear pode ser escrito como

$$\Phi(\mathbf{X}, \mathbf{V}) \equiv (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N)^T = \mathbf{0}, \quad (3.8)$$

onde

$$\mathbf{X} \equiv (x_1, x_2, \dots, x_N)^T \in \mathbb{R}^N, \quad (3.9)$$

e

$$\mathbf{V} \equiv (v_{j_1}, v_{j_2}, \dots, v_{j_{N+1}})^T \in \mathbb{R}^{N+1} \quad (3.10)$$

é o vetor de parâmetros de velocidades, sendo v_{j_k} , $1 \leq k \leq N + 1$, a k -ésima componente do vetor \mathbf{V} , que representa a velocidade do raio na k -ésima região percorrida.

3.5 Procedimentos de Solução do Sistema Não-Linear

Para a solução do sistema não-linear apresentado na seção anterior, usaremos o Método de Newton (Dennis & Schnabel, 1983)⁵. Este método é um procedimento iterativo baseado na aproximação de primeira ordem dada pela Série de Taylor.

Seja

$$\Phi : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N \quad (3.11)$$

uma função vetorial tal que

$$\Phi(\mathbf{X}, \mathbf{V}) = (\Phi_1(\mathbf{X}, \mathbf{V}), \Phi_2(\mathbf{X}, \mathbf{V}), \dots, \Phi_N(\mathbf{X}, \mathbf{V}))^T, \quad (3.12)$$

onde \mathbf{X} é o vetor que representa a variável independente e \mathbf{V} é o vetor dos parâmetros do sistema não-linear.

Seja \mathbf{X}^* um zero de Φ , ou seja, $\Phi(\mathbf{X}^*) = \mathbf{0}$. Se damos condições apropriadas de continuidade e um ponto inicial conveniente \mathbf{X}^0 , podemos garantir que a seguinte seqüência iterativa

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^{l+1} &= \mathbf{X}^l + \mathbf{D}^l, \\ -(\Phi')^l \mathbf{D}^l &= \Phi^l, \end{aligned} \quad (3.13)$$

converge a uma solução do sistema, onde l é um contador inteiro, $\mathbf{X}^l = (x_1^l, x_2^l, \dots, x_N^l)^T$ é a l -ésima aproximação da solução, \mathbf{D}^l é o passo de \mathbf{X}^l na l -ésima iteração, $\Phi^l = \Phi(\mathbf{X}^l)$, e $(\Phi')^l = \Phi'(\mathbf{X}^l, \mathbf{V})$ é a avaliação da Matriz Jacobiana em \mathbf{X}^l (Ortega & Rheinboldt, 1970).

Para nosso problema de traçamento de raios, a Matriz Jacobiana Φ' é uma matriz tridiagonal $N \times N$, isto é:

⁵Existem outros métodos para solucionar sistemas de equações não-lineares, por exemplo, o Método Quase-Newton. Esse método é mais eficiente que o Método de Newton para problemas de grande porte. Nossa escolha pelo Método de Newton para resolver o sistema não-linear em questão, deve-se, principalmente, a que os sistemas não-lineares que representam o traçamento de raios são, em geral, sistemas de baixo porte (tamanhos menores e iguais que 10). Existem, na literatura, trabalhos que utilizam o Método Quase-Newton para solucionar sistemas que representam o traçamento de raios, dentre eles, Pérez & Lopes (a ser publicado).

$$\Phi' = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_2 & a_2 & b_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_3 & a_3 & b_3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & c_{N-1} & a_{N-1} & b_{N-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & c_N & a_N \end{pmatrix}.$$

Isso se deve ao fato de que a Lei de Snell em cada interface depende da interface prévia, presente e próxima do índice em questão. As componentes da diagonal, sub-diagonal e super-diagonal são dadas pelas expressões

$$a_k = \frac{v_{j_{k+1}}}{D_k} \left[1 + z_k'' \Delta z_k + (z_k')^2 - \left(\frac{\Delta x_k + z_k' \Delta z_k}{D_k} \right)^2 \right] + \frac{v_j}{D_{k+1}} \left[1 - z_k'' \Delta z_{k+1} + (z_k')^2 - \left(\frac{\Delta x_{k+1} + z_k' \Delta z_{k+1}}{D_{k+1}} \right)^2 \right], \quad (3.14)$$

$$b_k = -\frac{v_{j_{k+1}}}{D_k} \left[1 + z_{k-1}' z_k' - \left(\frac{\Delta x_k + z_{k-1}' \Delta z_k}{D_k} \right) \left(\frac{\Delta x_k + z_k' \Delta z_k}{D_k} \right) \right],$$

$$c_k = -\frac{v_j}{D_{k+1}} \left[1 + z_k' z_{k+1}' - \left(\frac{\Delta x_{k+1} + z_k' \Delta z_{k+1}}{D_{k+1}} \right) \left(\frac{\Delta x_{k+1} + z_{k+1}' \Delta z_{k+1}}{D_{k+1}} \right) \right],$$

para $1 \leq k \leq N$, $2 \leq k \leq N$, e, $1 \leq k \leq N - 1$, respectivamente, onde usamos a notação

$$\Delta x_k \equiv x_k - x_{k-1}, \quad \Delta z_k \equiv z_k - z_{k-1}, \quad 1 \leq k \leq N + 1,$$

$$z_k' \equiv \frac{df_{i_k(x_k)}}{dx_k}, \quad z_k'' \equiv \frac{d^2 f_{i_k(x_k)}}{dx_k^2}, \quad 1 \leq k \leq N \quad (3.15)$$

$$D_k \equiv [(\Delta x_k)^2 + (\Delta z_k)^2]^{1/2}, \quad 1 \leq k \leq N + 1.$$

Se o Método de Newton é aplicado e gera uma seqüência convergente a \mathbf{X}^* , pode-se demonstrar (Ortega & Rheinboldt, 1970) que a convergência é quadrática. Isto é,

$$\|\mathbf{X}^{l+1} - \mathbf{X}^*\| \leq C \|\mathbf{X}^l - \mathbf{X}^*\|^2, \quad (3.16)$$

para uma constante positiva C na interação l -ésima. Portanto, em condições adequadas, o Método de Newton converge muito rápido.

Nota: Uma solução válida do sistema (3.8), $\mathbf{X}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_N^*)$, deve satisfazer a seguinte restrição:

$$a \leq x_i^* \leq b, \quad 1 \leq i \leq N,$$

onde a e b são os limites das abscissas do modelo sísmico. Doravante, um raio será considerado uma solução válida do sistema.

3.6 Método de Continuação

Um dos inconvenientes do Método de Newton é que ele não pode garantir a convergência à solução, em caso de existir, a menos que a aproximação inicial \mathbf{X}^0 esteja suficientemente perto da solução. Isto é, a aproximação inicial para a solução de um sistema não-linear pode não ser suficientemente boa para garantir a convergência do método, embora a solução exista e $\Phi'(X^*)$ seja bem condicionado (Ascher et al, 1995).

Uma abordagem intuitiva para melhorar a aproximação inicial \mathbf{X}^0 do Método de Newton é resolver, inicialmente, um problema mais simples que esteja *perto* do problema de interesse. A solução do problema simples é utilizada para produzir um ponto inicial melhorado para o problema original.

O procedimento consiste em resolver um conjunto de sistemas não-lineares, começando, primeiro, por um sistema para o qual conhecemos sua solução. Posteriormente, perturbamos este sistema mudando os parâmetros do mesmo, e utilizamos a solução do primeiro sistema para encontrar uma primeira aproximação dos outros sistemas. A seguir, vamos descrever estes conceitos formalmente.

A idéia é que o sistema não-linear original

$$F(\mathbf{X}) = \mathbf{0}, \quad F : U \subset \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N, \quad (3.17)$$

esteja contido na seguinte família de problemas não-lineares

$$H(\mathbf{X}, \Lambda) = \mathbf{0}, \quad 0 \leq \Lambda \leq 1, \quad (3.18)$$

onde Λ é o denominado parâmetro de homotopia, e onde

$$H(\mathbf{X}, 0) = \mathbf{0} \quad (3.19)$$

é fácil de resolver (ou é conhecido), e onde

$$H(\mathbf{X}, 1) = F(\mathbf{X}), \quad (3.20)$$

ou seja, é o sistema não-linear a resolver.

Definimos o conceito de um caminho contínuo de solução $\mathcal{X}(\Lambda)$ (também chamado na literatura como caminho homotópico) como a função de Λ

$$\mathcal{X} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^N, \quad (3.21)$$

definida pela identidade

$$H(\mathcal{X}(\Lambda), \Lambda) = \mathbf{0}, \quad 0 \leq \Lambda \leq 1. \quad (3.22)$$

Em outras palavras, $\mathcal{X}(\Lambda)$ é a solução da equação parametrizada (3.22).

O método consiste em mover-se ao longo do caminho com os passos maiores possíveis desde a solução $\mathcal{X}(0)$ conhecida, que resolve a equação (3.19), até a solução $\mathcal{X}(1) = \mathbf{X}^*$ requerida, que resolve a equação (3.17). Este procedimento é chamado **Método de Continuação**.

3.6.1 Continuação em Velocidades e Receptores

Podemos aplicar o método de continuação, isto é, o método homotópico, nos valores das velocidades ou nos receptores. Isso garante que podemos *deformar* o problema de um sistema conhecido a um outro sistema. A seguir, vamos descrever como os métodos de continuação podem ser aplicados para obter as aproximações iniciais apropriadas para diferentes conjuntos de sistemas não-lineares, caracterizados por um parâmetro vetorial.

Continuação em Velocidades

O sistema não-linear (3.8) é caracterizado por um vetor de velocidades \mathbf{V} . Para enfatizar a dependência do vetor com respeito a um parâmetro, substituímos este vetor por $\mathcal{V}(\Lambda)$. Este vetor representa os valores das velocidades das $N + 1$ camadas percorridas pelo raio relativas ao parâmetro Λ . O vetor é um elemento da combinação convexa⁶ que une dois vetores de \mathbb{R}^{N+1} : $\hat{\mathbf{V}}$ que representa os parâmetros de uma equação não-linear de solução conhecida, e \mathbf{V} que representa os parâmetros de uma equação não-linear a ser resolvida. Formalmente temos

$$\mathcal{V}(\Lambda) = \Lambda \mathbf{V} + (1 - \Lambda) \hat{\mathbf{V}}, \quad 0 \leq \Lambda \leq 1. \quad (3.23)$$

⁶Uma combinação convexa é um subconjunto de um espaço vetorial linear que, geometricamente, representa o segmento no espaço que une dois pontos dados.

Portanto, $\mathcal{V}(0) = \widehat{\mathbf{V}}$ e $\mathcal{V}(1) = \mathbf{V}$, e as soluções do sistema (3.8), utilizando $\widehat{\mathbf{V}}$ e \mathbf{V} , são $\mathcal{X}(0)$ e $\mathcal{X}(1)$, respectivamente. Isto é, o problema original é encaixado em uma família Φ de problemas parametrizados que representa, fisicamente, uma família de raios com a fonte e o receptor fixos e variações nos parâmetros de velocidades

$$\Phi(\mathcal{X}(\Lambda), \mathcal{V}(\Lambda)) = 0, \quad 0 \leq \Lambda \leq 1. \quad (3.24)$$

A idéia básica do algoritmo é utilizar a solução conhecida para um valor de Λ dado, para encontrar a aproximação inicial no Método de Newton para o valor do parâmetro $\Lambda + \Delta\Lambda$.

Utilizando a Aproximação de Taylor de primeira ordem, temos

$$\mathcal{X}^0(\Lambda + \Delta\Lambda) \approx \mathcal{X}(\Lambda) + (\Delta\Lambda)\dot{\mathcal{X}}(\Lambda), \quad (3.25)$$

o que representa uma perturbação do raio conhecido e uma primeira aproximação para avaliar o novo raio, com precisão da ordem de $(\Delta\Lambda)^2$. Podemos obter $\dot{\mathcal{X}}(\Lambda) \equiv \frac{d\mathcal{X}}{d\Lambda}$ substituindo a equação (3.23) na equação (3.8) e diferenciando.

Utilizando a notação $\Phi'(\mathcal{X}, \mathcal{V}) = \frac{\partial\Phi}{\partial\mathcal{X}}$, a equação (3.24) e diferenciando, obtemos

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\mathcal{X}} \frac{d\mathcal{X}}{d\Lambda} + \frac{\partial\Phi}{\partial\mathcal{V}}[\mathbf{V} - \widehat{\mathbf{V}}] = 0. \quad (3.26)$$

Ou em forma equivalente,

$$\Phi'(\mathcal{X}(\Lambda), \mathcal{V}(\Lambda)) \frac{d\mathcal{X}}{d\Lambda} = -B(\mathcal{X}(\Lambda), \mathcal{V}(\Lambda))(\mathbf{V} - \widehat{\mathbf{V}}), \quad (3.27)$$

onde $\mathbf{V} - \widehat{\mathbf{V}} = \frac{\partial\mathcal{V}(\Lambda)}{\partial\Lambda}$, e onde B é a matriz bidiagonal $N \times (N + 1)$

$$\frac{\partial\Phi[\mathcal{X}, \mathcal{V}]}{\partial\mathcal{V}}. \quad (3.28)$$

Especificamente, utilizando a notação das equações (3.15), temos que a linha k -ésima

de B possui os seguintes elementos

$$\begin{aligned} B_{k,k} &\equiv \frac{\partial \phi_k}{\partial v_k} = - \left(\frac{\Delta x_{k+1} + z'_k \Delta z_{k+1}}{D_{k+1}} \right), \\ B_{k,k+1} &\equiv \frac{\partial \phi_k}{\partial v_{k+1}} = - \left(\frac{\Delta x_k + z'_k \Delta z_k}{D_k} \right), \\ B_{k,j} &\equiv \frac{\partial \phi_k}{\partial v_j} = 0, \end{aligned} \quad (3.29)$$

para $j \neq k, j \neq (k+1), 1 \leq k \leq N$.

O lado direito da equação (3.27) é portanto igual a

$$- \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_{22} & B_{23} & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & B_{33} & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & B_{N-1,N} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & B_{N,N} & B_{N,N+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 - \hat{v}_1 \\ v_2 - \hat{v}_2 \\ v_3 - \hat{v}_3 \\ v_4 - \hat{v}_4 \\ \vdots \\ v_N - \hat{v}_N \end{pmatrix}.$$

Como conhecemos $\Phi'(\mathcal{X}(\Lambda), \mathbf{V}(\Lambda))$, podemos obter $\frac{d\mathcal{X}}{d\Lambda}(\Lambda)$ resolvendo a equação (3.27).

O procedimento descrito anteriormente permite encontrar todos os raios de uma classe dada, onde a fonte, o receptor e a seqüência das interfaces são fixas. Podemos encontrar todas as possíveis ondas convertidas entre dois pontos dados, com uma seqüência de interfaces interceptadas fixas, utilizando este procedimento.

Cada um desses raios pode ser construído utilizando homotopia. Começamos a partir de um dos elementos da classe e nos movimentamos no espaço de parâmetros, em combinações convexas. Utilizamos o método de continuação em velocidades para construir um raio a partir do raio anteriormente encontrado. Selecionamos todos os possíveis valores do parâmetro até esgotar todas as possibilidades (existem no máximo 2^{N+1} assinaturas de velocidades, se temos N pontos de intersecção).

O algoritmo de continuação em velocidades pode ser simplificado ainda mais se fazemos as variações do vetor de parâmetros na ordem apropriada. Por exemplo, se selecionamos dois vetores de parâmetros iguais em todas as suas componentes, exceto na k -ésima posição, temos

o seguinte resultado

$$\mathbf{V} - \widehat{\mathbf{V}} = (0, \dots, 0, v_k - \hat{v}_k, 0, \dots, 0), \quad (3.30)$$

e, portanto, o lado direito do sistema linear (3.27) é igual a

$$(0, \dots, b_{k,k+1}(v_k - \hat{v}_k), b_{k,k}(v_k - \hat{v}_k), \dots, 0)^T. \quad (3.31)$$

O que foi dito anteriormente sugere um algoritmo, a saber:

consideremos um modelo elástico, fixadas a assinatura de interfaces i_1, i_2, \dots, i_N , a posição da fonte e a posição do receptor. Vamos descrever um procedimento recursivo para gerar os possíveis 2^{N+1} raios com diferentes assinaturas de velocidades, definidas pelos diferentes tipos de raios convertidos. Para isso, vamos utilizar o Método de Continuação em velocidades e a simplificação do método, dada pela equação anterior.

Inicialmente temos um vetor de parâmetros de velocidades e a solução do sistema não-linear correspondente. Por exemplo, todas as velocidades das ondas tipo P . Construímos outro vetor de velocidades igual ao anterior, exceto o primeiro componente, ou seja, todos os valores de velocidade mudam unicamente no primeiro componente. Aplicamos continuação em velocidades, e obtemos a solução respectiva.

Passamos ao segundo componente do vetor do parâmetro de velocidades. A partir dos dois vetores de parâmetros anteriores, deixamos fixos todos os valores de velocidades, exceto os segundos componentes. Aplicamos continuação em velocidades, e obtemos outros dois vetores de parâmetros de velocidades e suas correspondentes soluções (em caso de existir). Assim, já temos quatro vetores de parâmetros e quatro soluções associadas.

Seguimos ao terceiro componente e aplicamos de novo continuação, para obter um total de oito vetores de parâmetros e oito soluções associadas.

Desta forma, podemos continuar iterativamente com cada componente, até chegar ao $N + 1$ -ésimo. Obtemos, assim, 2^{N+1} vetores de velocidade e, possivelmente, 2^{N+1} soluções associadas a todos os tipos de raios convertidos.

Continuação na Posição do Receptor

Se conhecemos um raio para umas posições da fonte e do receptor dadas, \mathbf{E}_0 e \mathbf{E}_{N+1} , respectivamente, é intuitivo utilizar a solução do raio que une estes dois pontos como uma

aproximação inicial para encontrar a solução do raio que une os pontos \mathbf{E}_0 e \mathbf{E}'_{N+1} , onde \mathbf{E}'_{N+1} é um receptor localizado perto do receptor original.

Esta idéia pode ser formulada matematicamente assim:

consideremos o vetor que define a posição do receptor como um vetor de parâmetros, e apliquemos o método de continuação para continuar a solução desde \mathbf{E}_{N+1} até \mathbf{E}'_{N+1} .

De forma análoga ao caso de continuação em velocidades, podemos definir um vetor de parâmetros $\mathcal{E}_{N+1} = (x_{N+1}, y_{N+1})$, que depende do parâmetro Λ , $0 \leq \Lambda \leq 1$, pela expressão

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{N+1}(\Lambda) &\equiv \Lambda \mathbf{E}'_{N+1} + (1 - \Lambda) \mathbf{E}_{N+1} \\ &= \Lambda (x'_{N+1}, y'_{N+1}) + (1 - \Lambda) (x_{N+1}, y_{N+1}). \end{aligned} \quad (3.32)$$

À medida que Λ percorre o intervalo $[0, 1]$, as coordenadas do receptor mudam de \mathbf{E}_{N+1} até \mathbf{E}'_{N+1} .

Como no caso de continuação em velocidades, denotamos a solução do sistema não-linear, dependente da posição do receptor $\mathcal{E}_{N+1}(\Lambda)$, como $\Phi(\mathcal{X}(\Lambda), \mathbf{V}, \mathcal{E}_{N+1}(\Lambda)) = 0$. Vamos denotar a solução deste sistema por $\mathcal{X}(\Lambda)$.

Também utilizamos uma Aproximação de Taylor de primeira ordem para encontrar a primeira aproximação à solução com o parâmetro igual a $\Lambda + \Delta\Lambda$,

$$\mathcal{X}^0(\Lambda + \Delta\Lambda) \approx \mathcal{X}(\Lambda) + (\Delta\Lambda) \dot{\mathcal{X}}(\Lambda), \quad (3.33)$$

onde $\dot{\mathcal{X}}(\Lambda)$ é agora obtido substituindo (3.32) em (3.8).

Para enfatizar a dependência do Jacobiano $\Phi(\mathbf{X}, \mathbf{V})$, com respeito às coordenadas do receptor, escrevemos a família de sistemas dependentes do parâmetro Λ como:

$$\Phi(\mathcal{X}(\Lambda), \mathbf{V}, \mathcal{E}_{N+1}(\Lambda)) = 0, \quad (3.34)$$

onde $\mathcal{X}(\Lambda)$ é o caminho homotópico de soluções, \mathbf{V} o vetor de parâmetros de velocidades fixo e $\mathcal{E}_{N+1}(\Lambda)$ é a posição do receptor que depende de Λ .

Diferenciando a equação anterior, obtemos

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathcal{X}}(\mathcal{X}(\Lambda), \mathbf{V}, \mathcal{E}_{N+1}(\Lambda)) \dot{\mathcal{X}}(\Lambda) + \frac{\partial \Phi}{\partial \mathcal{E}_{N+1}}(\mathcal{X}(\Lambda), \mathbf{V}, \mathcal{E}_{N+1}(\Lambda)) [\mathbf{E}_{N+1} - \mathbf{E}'_{N+1}]^T = 0, \quad (3.35)$$

onde

$$[\mathbf{E}_{N+1} - \mathbf{E}'_{N+1}]^T = \frac{\partial \mathcal{E}_{N+1}(\Lambda)}{\partial \Lambda},$$

e utilizando a notação para o Jacobiano temos, finalmente,

$$\Phi'(\mathcal{X}(\Lambda), \mathcal{V}(\Lambda), \mathcal{E}_{N+1}(\Lambda)) \frac{d\mathcal{X}}{d\Lambda} = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathcal{E}_{N+1}}(\mathcal{X}(\Lambda), \mathcal{V}, \mathcal{E}_{N+1}(\Lambda)) [\mathbf{E}_{N+1} - \mathbf{E}'_{N+1}]^T, \quad (3.36)$$

onde o lado direito desta equação é o produto de uma matriz $N \times 2$ por um vetor de 2 componentes.

Utilizando esta informação e o fato de que $\frac{\partial \phi_k}{\partial \mathcal{E}_{N+1}} = 0$, para $1 \leq k \leq N-1$, como pode ser observado de (3.7) (as coordenadas do receptor somente aparecem na última linha), o lado direito da equação é igual a

$$\left[0, 0, \dots, 0, \frac{\partial \phi_N}{\partial x_{N+1}}(x_{N+1} - x'_{N+1}) + \frac{\partial \phi_N}{\partial z_{N+1}}(z_{N+1} - z'_{N+1}) \right]^T, \quad (3.37)$$

onde

$$\frac{\partial \phi_N}{\partial x_{N+1}} = -\frac{v_N}{D_{N+1}} \left[1 + \left(\frac{\Delta x_{N+1}}{D_{N+1}} \right)^2 + f'_{i_N}(x_N) \frac{\Delta x_{N+1} \Delta z_{N+1}}{D_{N+1}^2} \right] \quad (3.38)$$

e

$$\frac{\partial \phi_N}{\partial z_{N+1}} = -\frac{v_N}{D_{N+1}} \left[f'_{i_N}(x_N) \left(1 + \left(\frac{\Delta z_{N+1}}{D_{N+1}} \right)^2 \right) + \frac{\Delta x_{N+1} \Delta z_{N+1}}{D_{N+1}^2} \right], \quad (3.39)$$

onde D_{N+1} está definido como na equação (3.15).

Se temos os receptores em uma superfície plana, como é o caso em muitas aplicações geofísicas, então $z_{N+1} = z'_{N+1}$ portanto, o último termo do vetor em (3.37) simplifica-se muito mais.⁷

⁷O método de continuação em receptores tem diferentes aplicações, por exemplo, pode ser utilizado para encontrar raios paraxiais. Lembremos que na teoria paraxial se precisa, para traçamento de raios, que o raio a se construir esteja em uma região perto de um raio central dado (Hubral et al., 1992a, 1992b; Rüger, 1993). Porém, com o Método de Continuação podemos construir raios paraxiais, de forma eficiente, fazendo pequenas perturbações na posição do receptor do raio central.

Nota: Para utilizar o Método de Continuação não se precisa que a posição da fonte ou do receptor esteja em alguma superfície em particular, aliás, elas poderiam, inclusive, não estar em nenhuma superfície. Nesses casos, apenas precisamos fixar as coordenadas da fonte e do receptor, e a assinatura, para montar o sistema não-linear. Contudo, nos exemplos computacionais, implementados nesta tese, vamos considerar modelos onde as fontes e os receptores estejam localizados na superfície da Terra.

3.6.2 Implementação de Seqüências de Continuação

A forma como o Método de Continuação é implementado na prática, consiste em construir uma seqüência finita de soluções $\{\mathcal{X}_l\}_{l=0}^L$, estando cada um de seus elementos relacionado um a um com os elementos de uma seqüência finita de números $\{\Lambda_l\}_{l=0}^L$, de tal forma que satisfazem as seguintes condições

$$H(\mathcal{X}_l, \Lambda_l) = 0, \quad 0 \leq \Lambda_l \leq 1, \quad (3.40)$$

onde $H(\mathcal{X}, \Lambda) = 0$ é a extensão ao problema $F(\mathbf{X}) = 0$, como já foi discutido anteriormente.

Tomamos uma seqüência de números igualmente espaçados

$$\Lambda_l = \frac{l}{N_C}, \quad 0 \leq l \leq N_C,$$

onde N_C é igual ao número de pontos internos ao longo da combinação convexa com a estamos realizando o método de continuação.

O algoritmo implementado começa com $N_C = 1$ (Keller & Perozzi, 1983) ou, equivalentemente, $\Delta\Lambda = 1$ na equação (3.25). Se o Método de Newton não convergir em certo número de passos, então dobramos N_C , ou seja, dividimos $\Delta\Lambda$ por 2, e assim por diante. Observemos que, neste processo, o número de elementos da seqüência aumenta (em potências de 2), gerando-se uma seqüência de continuação mais densa, ou seja, com mais pontos na combinação convexa. Nessa seqüência mais densa tentamos todo o processo novamente.

Fixamos um valor máximo de N_C , por exemplo $2^7 = 128$. Se o método de continuação não gera uma solução do sistema, dada a solução anterior, para o valor N_C , então desistimos de resolver a equação (3.24) para esse parâmetro vetorial de velocidades. Nesse caso, consideramos que o sistema não possui solução. Isto é, não existe um raio para a assinatura dada.

Portanto, precisamos começar de novo utilizando um processo de busca inicial, como por exemplo, o método do disparo (Apêndice B). Com o método do disparo, procuramos um raio para uma assinatura diferente. Se obtemos uma solução, começamos o algoritmo de continuação em velocidades e receptores de novo, para obter outros possíveis raios.

Destacamos que na implementação computacional que nós fizemos, dos métodos de continuação descritos anteriormente, não se apresentaram instabilidades devido às sensibilidades do cálculo das derivadas do caminho homotópico. Explicamos isto assim: os termos das matrizes, que correspondem ao sistema 3.27 (para velocidades) e ao sistema 3.36 (para receptores), possuem expressões que dependem das posições dos pontos consecutivos que compõem o raio. Em particular, elas dependem de Δx_k , Δz_k , D_k e z'_k . Os deltas não são, em geral, quantidades pequenas, e o cálculo de z'_k , o valor da derivada da interface f_{i_K} no ponto E_k , é avaliado por uma expressão analítica (devido a que as interfaces são representadas computacionalmente como *splines* cúbicos).

3.6.3 Bifurcação

Dentro de uma classe de igual assinatura é possível que, a partir de um valor do parâmetro, o Método de Continuação não serva mais para seguir construindo o resto dos raios. Isto pode acontecer pelo fenômeno de bifurcação. Ele é uma característica dos sistemas não-lineares que dependem de um parâmetro Λ . Acontece quando, para um valor do parâmetro, Λ_0 , não existe uma vizinhança onde a solução possa ser estendida de forma unívoca, produzindo-se mudanças qualitativas na solução do sistema ao redor de Λ_0 (Seydel, 1994). Para os valores Λ_0 , onde acontece esta bifurcação, perde-se a relação de homotopia.

3.6.4 Múltiplas Soluções

O Método de Newton e o Método de Continuação, no caso de convergir, apenas encontram uma solução do sistema não-linear, no caso de que essa solução esteja dentro do domínio do modelo sísmico, essa solução é um raio. Mas, podem existir outras soluções do sistema, também contidas no domínio do modelo. Essas outras soluções não são encontradas por nosso algoritmo. Para poder obter TODAS as possíveis soluções dentro do modelo (fixada a fonte, o receptor e a assinatura), teríamos que utilizar outro procedimento de busca, por exemplo a Teoria de Otimização Global. Deixamos este problema para trabalhos futuros.

3.7 Primeiro Raio da Classe

O primeiro raio de uma classe de raios, para uma assinatura dada, não pode ser encontrado pelo procedimento de continuação. Isto acontece devido ao fato de não possuir um raio ou solução para um sistema prévio. Portanto, nosso procedimento de busca tem que ser diferente.

Implementamos dois procedimentos para encontrar este raio: o método do disparo e o método da busca aleatória (Apêndices B e C).

A idéia, em ambos os algoritmos, é procurar uma solução de um sistema não-linear, sem possuir nenhuma suposição inicial. Os dois métodos são, entretanto, muito diferentes nos conceitos matemáticos utilizados. O leitor pode consultar os Apêndices B e C para os detalhes algorítmicos de cada método.

3.8 Critérios de Parada dos Algoritmos

Método de Newton

O critério de parada no Método de Newton é baseado na norma do sistema não-linear ($\|\Phi\|$) na l -ésima iteração, e na quantidade de iterações máximas. Escolhemos, neste trabalho, o número de iterações máximas de 200. Dessa forma, se a norma do valor do sistema não é menor que um valor prescrito, por exemplo 10^{-4} , em 200 iterações, consideramos que o sistema não converge.

Método de Continuação

Definimos anteriormente N_C como o número máximo de pontos na seqüência de continuação do método. No nosso caso, $N_C = 2^7 = 128$. Se utilizando esse número, o método não converge, voltamos ao método de busca aleatória.

Método de Busca Aleatória

Utilizamos uma busca aleatória com um máximo de N_A iterações, para testar a convergência do método. Neste trabalho, escolhemos um N_A máximo de 200 iterações aleatórias. No caso de não conseguir uma solução para esse número de iterações, consideramos que o sistema não possui solução.

Método de disparo

Fazemos uma varredura do ângulo de disparo, por exemplo cada grau, e testamos se o ponto final está perto à localização do receptor (no máximo uma distância de 100 m). Se não estiver perto, fazemos uma nova varredura mais fina, cada 0.1 grau. Se esta nova varredura não fornece um ponto final perto a um receptor, consideramos que o raio não existe.

3.9 Extensão do Método de Continuação a Modelos Não-Homogêneos onde a Equação Iconal é Integrável por Camadas

Alguns exemplos, dentre outros, de modelos não-homogêneos onde a Equação Iconal é integrável por camadas, são aqueles onde a velocidade está representada assim:

- $v(\mathbf{x}) = a + bz$, a função da velocidade depende da profundidade z , com a e b constantes.
- $\nabla \frac{1}{v^2(\mathbf{x})} = \text{constante}$

Para este tipo de modelos (elásticos/acústicos) são válidas todas as considerações que apresentamos neste capítulo sobre o Método de Continuação.

Mas, é importante destacar que, nestes modelos, o sistema não-linear, a ser resolvido pelo Método de Continuação, difere bastante do obtido em modelos com velocidades constantes (onde o vetor vazarosidade incidente e refletido/transmitido está definido totalmente pelos pontos de intersecção do raio com uma interface, anterior e posterior, respectivamente).

Nestes modelos acontece que o raio em uma camada já não é um segmento de reta, ele pode ser um arco de círculo ou outra curva. Portanto, o vetor vazarosidade, incidente e refletido/transmitido, em cada ponto da intersecção depende das soluções analíticas das equações características em cada camada.

Fazer uma descrição detalhada dos sistemas não-lineares destes modelos (e sua comparação com os sistemas de modelos de velocidade constante) pode ser interessante, com o intuito de construir modelos mais complexos, do ponto de vista físico. Deixamos esta idéia como proposta de trabalhos futuros.

Capítulo 4

Cálculo de Amplitudes

4.1 Introdução

Neste capítulo, deduzimos as fórmulas para o cálculo das amplitudes ao longo de um raio no receptor (parte dinâmica da teoria dos raios), utilizando o conceito do tubo de raios. Essa construção utiliza o princípio de conservação de energia e permite encontrar a amplitude no ponto final do raio a partir das amplitudes no ponto inicial do raio. Essa construção é apresentada para meios acústicos e elásticos 3D. Além disso, deduzimos as fórmulas para o caso dos modelos 2.5D, ou seja, modelos 3D com uma simetria cilíndrica.

Para poder generalizar o Método de Continuação a esses modelos, precisamos montar o sistema não-linear de forma que considere interfaces definidas pela assinatura, embora estas tenham uma distribuição geométrica complexa dentro do modelo. Com esse fim, definimos os modelos multi-regiões, os quais possuem a complexidade geométrica que procuramos.

Destacamos que, para modelos simples, os cálculos numéricos da amplitude, utilizando o tubo de raios, coincidem com o cálculo da amplitude utilizando fórmulas analíticas. Assim, validamos a correspondência entre a solução computacional e os princípios físicos da teoria de raios.

4.2 Equações Básicas

No Capítulo 2, mostramos como a partir da Equação de Helmholtz

$$\nabla^2 u(\mathbf{x}, \omega) + \frac{\omega^2}{v^2(\mathbf{x})} u(\mathbf{x}, \omega) = 0, \quad (4.1)$$

onde \mathbf{x} é o vetor de posição, ω é a frequência angular e $u(\mathbf{x}, \omega)$ é a pressão, e utilizando a aproximação da Ótica Geométrica

$$u(\mathbf{x}, \omega) \sim A_0(\mathbf{x})e^{i\omega\tau(\mathbf{x})}, \quad (4.2)$$

obtivemos a Equação Iconal

$$\|\nabla\tau\|^2 = \frac{1}{v^2(\mathbf{x})}, \quad (4.3)$$

onde τ é o tempo de trânsito e $\|\cdot\|$ é a norma usual de vetores. Também obtivemos a Equação de Transporte

$$\nabla A_0 \cdot \nabla\tau + A_0 \nabla^2\tau = 0. \quad (4.4)$$

Como neste capítulo deduziremos fórmulas que avaliam a amplitude ao longo dos raios, vamos utilizar algumas das equações do Capítulo 2, em particular, da Equação Iconal. Essa equação é resolvida através das curvas características (Bleistein, 1984) ou raios. Ao longo dessas curvas, podemos representar $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\sigma)$, onde σ é o parâmetro escalar que descreve o raio. A equação do raio é dada por

$$\frac{d\mathbf{x}(\sigma)}{d\sigma} = \zeta \nabla\tau, \quad (4.5)$$

que representa a condição de ortogonalidade do raio com respeito à frente de onda. Neste capítulo escolhemos $\zeta = 1/2$. Lembremos que as unidades de σ estão dadas por *comprimento*²/*tempo*.

Multiplicando (4.5) por si mesma, calculando o gradiente do resultado e utilizando (A.7), chegamos a

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{d\sigma^2} = \frac{1}{2} \nabla \left[\frac{1}{v(\mathbf{x})^2} \right]. \quad (4.6)$$

Introduzindo o vetor vagarosidade

$$\mathbf{p} = \nabla\tau, \quad (4.7)$$

temos então

$$\|\mathbf{p}\| = \frac{1}{v(\mathbf{x})}. \quad (4.8)$$

Podemos reescrever (4.5) e (4.6) em termos de \mathbf{p} como:

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\sigma} = \mathbf{p}, \quad (4.9)$$

e

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\sigma} = \frac{1}{2} \nabla \left[\frac{1}{v(\mathbf{x})^2} \right]. \quad (4.10)$$

As equações (4.7), (4.9) e (4.10) serão utilizadas para encontrar a amplitude A a partir da Equação de Transporte (4.4) ao longo do raio. Precisamos de uma equação adicional para esse fim. Diferenciando τ com respeito a σ temos

$$\frac{d\tau}{d\sigma} = \nabla \tau \cdot \frac{d\mathbf{x}}{d\sigma} = \|\mathbf{p}\|^2 = \frac{1}{v^2(\mathbf{x})}. \quad (4.11)$$

4.3 Amplitude ao Longo do Raio em Meios Acústicos sem Interfaces

Nesta seção vamos encontrar expressões para a amplitude ao longo do raio para um meio acústico representado pela equação (2.3) com velocidade contínua no domínio, com densidade constante e sem nenhum tipo de descontinuidade. Voltando à Equação de Transporte (4.4), multiplicamos ambos os membros por A e podemos reescrevê-la como uma divergência

$$\nabla \cdot (A_0^2 \nabla \tau) = 0. \quad (4.12)$$

Para um volume fechado V e tendo Q como superfície de fronteira, supondo adequadas condições de continuidade para a velocidade v e superfície Q , podemos aplicar o Teorema da Divergência

$$\int_V \nabla \cdot (A_0^2 \nabla \tau) \, dV = \int_Q A_0^2 \nabla \tau \cdot \mathbf{n} \, dQ = 0. \quad (4.13)$$

Na equação acima, dV e dQ são os diferenciais de volume e área, respectivamente, da região em questão; e \mathbf{n} é o vetor unitário normal à superfície.

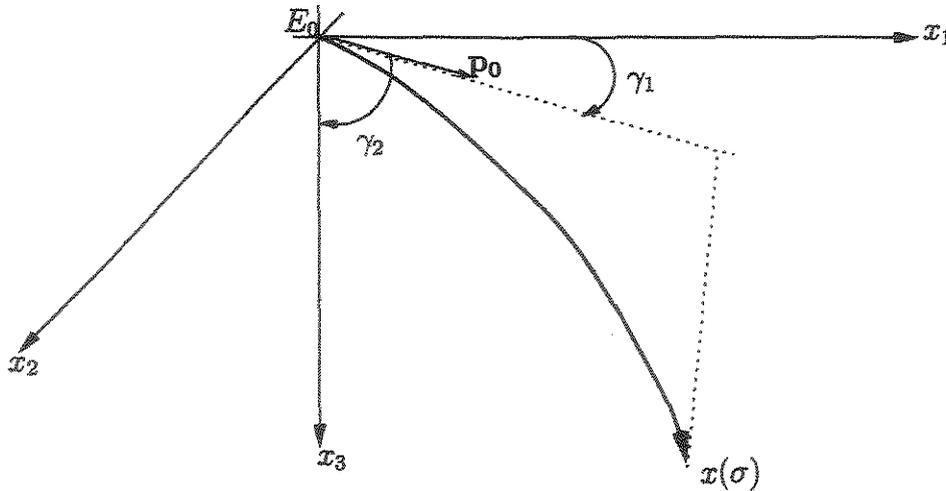


Figura 4.1: Coordenadas do raio.

4.3.1 Tubo de Raios

Podemos descrever o vetor posição de um raio, \mathbf{x} , através das chamadas coordenadas do raio $\mathbf{x}(\sigma, \gamma_1, \gamma_2)$. Na Figura (4.1), γ_1 e γ_2 são ângulos polares do raio no ponto inicial, também chamados de ângulo azimutal e ângulo de disparo, respectivamente. Estes ângulos determinam o raio, que é descrito pelo parâmetro σ . Considerando um raio fixo, chamado raio central, $\mathbf{x}(\sigma, \gamma_1, \gamma_2)$, os raios em sua vizinhança, determinados por perturbações diferenciais dos parâmetros angulares γ_1 e γ_2 , formam o chamado *tubo de raios* relativo ao raio central considerado. Para γ_1 e γ_2 fixos, o vetor normal à frente de onda num ponto do raio determinado por σ é dado por

$$\mathbf{n} = v(\mathbf{x}) \frac{d\mathbf{x}}{d\sigma}. \quad (4.14)$$

Para este tubo de raios, o diferencial de área transversa, dQ , nas coordenadas $(\sigma, \gamma_1, \gamma_2)$, é dado por

$$dQ = \left| \mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \gamma_1} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \gamma_2} \right| d\gamma_1 d\gamma_2. \quad (4.15)$$

Uma interpretação da fórmula acima é que dQ representa a projeção de uma superfície de σ constante sobre uma superfície de fase constante.

Introduzimos agora o *Jacobiano do raio*

$$J(\sigma, \gamma_1, \gamma_2) = v(\mathbf{x}) \left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \gamma_1} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \gamma_2} \right|. \quad (4.16)$$

O Jacobiano corresponde, simplesmente, ao determinante da Matriz Jacobiana da transformação das coordenadas do raio em relação às coordenadas cartesianas ortogonais.

Consideremos agora que V , na equação (4.13), é o volume (infinitesimal) definido pelo tubo de raios em torno do raio central, limitado nos extremos por duas frentes de onda definidas. Como o tubo de raios tem espessura infinitesimal ao longo do raio central, podemos considerar γ_1 e γ_2 sem variações ao longo do tubo. Portanto, $\nabla \tau$ será perpendicular à área inicial e à área final do tubo, e paralelo aos lados do tubo. Reduzindo o tubo de raios ao raio central, podemos aproximar a integral de superfície (4.13) à diferença entre as integrais nos extremos do tubo. Não havendo variação da normal nestas superfícies, obtemos o resultado

$$\frac{A^2(\sigma)}{v(\sigma)} \Delta Q = \frac{A^2(\sigma_0)}{v(\sigma_0)} \Delta Q_0, \quad (4.17)$$

onde $A(\sigma)$ e $A(\sigma_0)$ são os valores da amplitude nas duas superfícies extremas do tubo. E ΔQ_0 e ΔQ representam as áreas das superfícies da frente de onda que delimitam o tubo no seu ponto inicial e final, respectivamente.

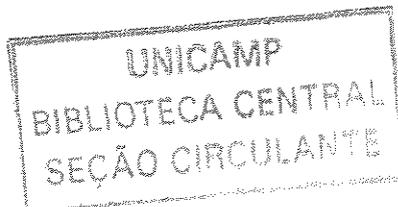
Notemos que um tubo de raios é determinado pelos parâmetros angulares fixos. Desta maneira, o Jacobiano no tubo somente tem variação ao longo do parâmetro σ , isto é, $J(\sigma) = J(\sigma, \gamma_1, \gamma_2)$. As áreas da superfícies inicial (em σ_0) e final (em σ) podem ser aproximadas usando a equação (4.15), assim

$$\Delta Q_0 \approx J(\sigma_0) \Delta \gamma_1 \Delta \gamma_2 \quad \text{e} \quad \Delta Q \approx J(\sigma) \Delta \gamma_1 \Delta \gamma_2. \quad (4.18)$$

A substituição na equação (4.17) leva a

$$A(\sigma) = A(\sigma_0) \sqrt{\frac{v(\sigma)}{v(\sigma_0)}} \sqrt{\frac{J(\sigma_0)}{J(\sigma)}}. \quad (4.19)$$

O quociente dos Jacobianos na equação (4.19) pode ser interpretado como uma medida da expansão ou contração do tubo de raios.



Segundo esta fórmula, a amplitude pode ter valores reais ou imaginários positivos ou negativos, dependendo dos sinais dos Jacobianos, ou ainda ficar sem sentido nenhum quando o Jacobiano é nulo. Na próxima sub-seção, vamos dar um sentido físico a estas situações.

Uma outra forma de interpretar a equação (4.17) é através da definição da chamada densidade de energia ao longo do raio

$$\frac{A^2(\sigma)}{v(\sigma)}. \quad (4.20)$$

A equação (4.17) expressa o princípio de conservação da energia ao longo de um raio. A densidade de energia é constante em todos os pontos do raio. Observemos, finalmente, que, se temos um campo de velocidade contínuo, podemos avaliar $A(\sigma)$ em qualquer ponto do raio, desde que $J(\sigma)$ seja conhecido.

Nota: nas fórmulas de amplitude, vamos utilizar, frequentemente, a seguinte notação: para denotar a amplitude em um ponto \mathbf{E} do raio, escrevemos $A(\mathbf{E}) \equiv A(\sigma_{\mathbf{E}})$, onde $\sigma_{\mathbf{E}}$ é o valor do parâmetro do raio correspondente ao ponto \mathbf{E} . Para o ponto inicial do raio, com valor inicial do parâmetro $\sigma = \sigma_0$, vamos denotar a amplitude inicial por $A(\mathbf{E}_0) \equiv A(\sigma_0)$.

4.3.2 Cáusticas

A equação (4.19) fica sem sentido se o quociente dos Jacobianos é nulo, $J(\sigma) = 0$. Esse tipo de situação acontece, fisicamente, quando o tubo de raios é deformado em uma curva ou em um ponto, chamadas de curvas cáusticas ou pontos de cáustica, respectivamente. Os pontos de cáustica representam pontos de singularidade da trajetória de um raio, uma vez que nesses pontos a amplitude torna-se infinita.

Esta situação tem sido observada na prática como mudanças de fase, quando uma onda atravessa um tipo de cáustica. Para poder estender a equação (4.19) a estes casos e ter uma expressão que possua uma transição contínua da fase nas cáusticas, várias teorias têm sido desenvolvidas. Dentre elas, está a chamada Teoria de Maslov (Chapman 1978, 1985; Kratsov & Orlov 1999). Utilizando esta teoria físico-matemática, definimos a raiz quadrada do Jacobiano como

$$\sqrt{J} = |J|^{\frac{1}{2}} e^{-i\frac{\pi}{2}\kappa}, \quad (4.21)$$

onde κ é o chamado índice KMAH do raio¹. Esse índice representa o número de pontos de cáustica com consideração de sua multiplicidade. Existem dois tipos possíveis de pontos de cáustica ao longo do raio, eles são chamados de pontos de cáustica de primeira e de segunda ordem. Um ponto de cáustica de primeira ordem é um ponto do raio no qual o tubo de raios se reduz a uma curva perpendicular à direção de propagação. O valor do índice KMAH aumenta em dois cada vez que o raio passa por um desses pontos. Um ponto de cáustica de segunda ordem, também chamado de ponto de foco, é um ponto do raio para o qual o tubo de raios se reduz a um ponto. O valor do índice KMAH aumenta em um cada vez que o raio passa por um ponto de foco. Para os modelos 2D ou 2.5D, os pontos de cáustica somente são de segunda ordem.

A raiz quadrada do valor absoluto do Jacobiano, $\sqrt{|J|}$, é conhecida como *divergência geométrica*² do raio central e vamos denotá-la por \mathcal{L} , ou seja,

$$\mathcal{L} = \sqrt{|J(\sigma)|}. \quad (4.22)$$

Desta forma, damos sentido à raiz quadrada no caso em que J seja negativo.

Podemos demonstrar que, embora o quociente dos Jacobianos fique indefinido numa cáustica, a amplitude final possui uma mudança de fase total igual a $-\frac{\pi}{2} \sum \kappa_i$, onde $\sum \kappa_i$ é a soma de todos os índices KMAH ao longo do raio.

Nota: nas seções seguintes, vamos escrever as fórmulas de amplitude utilizando o valor absoluto do Jacobiano. Sendo que na seção (4.9) apresentamos a mudança na fase que deve ser feita nas fórmulas finais de amplitude, devido às cáusticas.

4.3.3 Condições de Fonte Pontual

Para a situação de uma fonte pontual localizada em \mathbf{E}_0 , um raio qualquer $\mathbf{x}(\sigma, \gamma_1, \gamma_2)$, definido por parâmetros angulares γ_1 e γ_2 , e tendo o ponto de partida \mathbf{E}_0 especificado por

¹O termo KMAH foi introduzido em 1980 por Ziolkowski & Deschamps, como reconhecimento aos trabalhos de Keller em 1958, Maslov em 1965, Arnold em 1967 e Hörmander em 1971 (Červený, 2001).

²Na literatura técnica existem diversas formas de definir a divergência geométrica.

$\sigma_0 = 0$, satisfaz as condições iniciais

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(0, \gamma_1, \gamma_2) &= \mathbf{E}_0, \\ \tau(0, \gamma_1, \gamma_2) &= 0, \\ \mathbf{p}(0, \gamma_1, \gamma_2) &= \frac{1}{v(\mathbf{E}_0)} (\cos \gamma_1 \sin \gamma_2, \sin \gamma_1 \sin \gamma_2, \cos \gamma_2). \end{aligned} \quad (4.23)$$

Em uma vizinhança infinitesimal da fonte, podemos considerar a velocidade do meio como constante. Assim, perto da fonte, as frentes de onda podem ser aproximadas por superfícies esféricas centradas em \mathbf{E}_0 . A solução da Equação de Helmholtz para o caso de velocidade constante é a Função de Green (Bleistein, 1984) dada por

$$u(\mathbf{x}, \omega) = \frac{1}{4\pi r} \exp\{i\omega r/v\}, \quad (4.24)$$

onde

$$r = \|\mathbf{x} - \mathbf{E}_0\| \quad (4.25)$$

é a distância entre um ponto qualquer do raio $\mathbf{x}(\sigma, \gamma_1, \gamma_2)$ e o ponto inicial $\mathbf{x}(0, \gamma_1, \gamma_2) = \mathbf{E}_0$. Neste caso, as superfícies de τ constante e σ constante são iguais, e os raios são segmentos de linha reta; portanto, o valor do parâmetro σ na intersecção do raio com a esfera é igual a σ_r , onde $\sigma_r = v\tau$.

Nesta situação simples, podemos representar a transformação das coordenadas do raio para as coordenadas cartesianas como

$$\begin{aligned} x &= r \cos \gamma_1 \sin \gamma_2, \\ y &= r \sin \gamma_1 \sin \gamma_2, \\ z &= r \cos \gamma_2, \end{aligned} \quad (4.26)$$

ou seja, as frentes de onda são superfícies esféricas e as coordenadas do raio coincidem com as coordenadas esféricas perto do ponto inicial. Derivando (4.26) com respeito a γ_1 e γ_2 , temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \gamma_1} &= r(-\sin \gamma_1 \sin \gamma_2, \cos \gamma_1 \sin \gamma_2, 0), \\ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \gamma_2} &= r(\cos \gamma_1 \cos \gamma_2, \sin \gamma_1 \cos \gamma_2, -\sin \gamma_2). \end{aligned} \quad (4.27)$$

Portanto, o diferencial de área da superfície perto da fonte é igual a

$$dQ_r = \left| \mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \gamma_1} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \gamma_2} \right| d\gamma_1 d\gamma_2 = r^2 \sin \gamma_2 d\gamma_1 d\gamma_2, \quad (4.28)$$

o que fornece a expressão do Jacobiano do raio em um ponto perto da fonte,

$$|J(\sigma_r)| = r^2 \sin \gamma_2. \quad (4.29)$$

Para dar um sentido à fonte pontual, avaliamos o limite do produto $A(\sigma_r) \sqrt{|J(\sigma_r)|}$, quando o raio da esfera tende a zero

$$\begin{aligned} \lim_{\sigma_r \rightarrow 0} A(\sigma_r) \sqrt{|J(\sigma_r)|} &= \lim_{\sigma_r \rightarrow 0} \left[\frac{v}{4\pi \sigma_r} \right] \left[\frac{\sigma_r}{v} \sqrt{\sin \gamma_2} \right] \\ &= \frac{\sqrt{\sin \gamma_2}}{4\pi}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Finalmente, podemos avaliar a amplitude em um ponto qualquer $\mathbf{x}(\sigma, \gamma_1, \gamma_2)$, ao longo do raio, para uma fonte pontual utilizando o limite (4.30) e a equação (4.19). Fazendo o limite quando σ_r tende a zero, temos que

$$\begin{aligned} A(\sigma) &= \lim_{\sigma_r \rightarrow 0} A(\sigma_r) \sqrt{\frac{v(\sigma)}{v(\sigma_r)}} \sqrt{\frac{|J(\sigma_r)|}{|J(\sigma)|}} \\ &= \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{v(\sigma)}{v(\sigma_0)}} \sqrt{\frac{\sin \gamma_2}{|J(\sigma)|}}, \end{aligned} \quad (4.31)$$

onde $v(\sigma_0)$ é a velocidade do meio na posição da fonte.

De acordo com a notação definida anteriormente, $A(\mathbf{E}_0)$, a amplitude inicial, fica definida se consideramos o limite anterior. Nas próximas seções, $A(\mathbf{E}_0)$ pode ser uma fonte pontual ou outro valor inicial da amplitude.

4.4 Amplitude ao Longo do Raio em Meios Acústicos Através de uma Interface

Nesta seção, vamos calcular as fórmulas da amplitude para um raio que atinge uma interface ou superfície de descontinuidade nas velocidades. Como já foi analisado na seção 2.5,

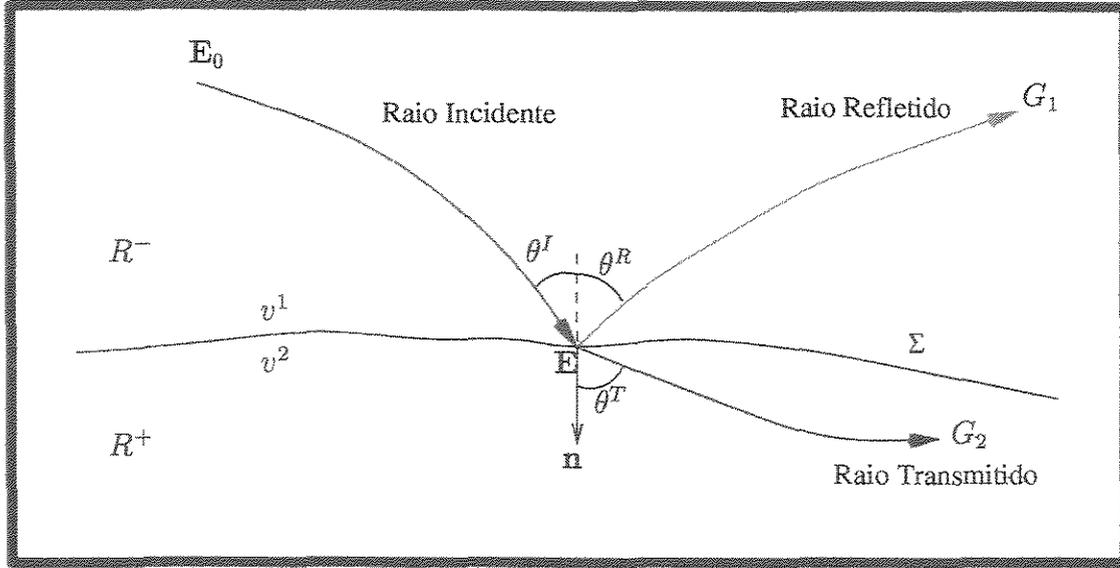


Figura 4.2: Partição do raio em uma interface.

nesse caso a energia da onda é particionada em um raio refletido e outro transmitido. Isto é, temos duas regiões semi-infinitas, R^- e R^+ , separadas por uma superfície suave Σ , como mostrado na Figura (4.2). As velocidades nos meios R^- e R^+ são contínuas. Se atravessamos a superfície Σ , a velocidade sofre uma descontinuidade. O raio incidente tem ponto inicial E_0 , está no meio R^- e intercepta Σ no ponto E . O ponto final pode estar na região R^- (caso de reflexão), ou na região R^+ (caso de transmissão). A superfície Σ é o conjunto de descontinuidades da função de velocidade da propagação de onda. A função de velocidade $v(\mathbf{x})$ é descontínua em E através da superfície Σ . Denotemos por $v^- = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow E} v(\mathbf{x})$ (em R^-) e por $v^+ = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow E} v(\mathbf{x})$ (em R^+).

Para deduzir expressões que forneçam uma medição da mudança de amplitude, quando o raio atinge a interface, vamos utilizar a aproximação assintótica,

$$u_I(\mathbf{x}, \omega) \sim A^I(\mathbf{x})e^{i\omega\tau_I(\mathbf{x})}, \quad (4.32)$$

onde A^I é a amplitude da onda incidente no ponto \mathbf{x} e $\tau_I(\mathbf{x})$ é o tempo de trânsito do raio incidente. Também utilizamos a equação de continuidade no campo,

$$u_I + u_R = u_T, \quad (4.33)$$

onde u_I , u_R e u_T são os campos incidente, refletido e transmitido, respectivamente. Precisamos de outra condição para encontrar as amplitudes iniciais do campo refletido e transmitido. Esta condição é dada pela continuidade das derivadas normais do campo total na fronteira em P . Matematicamente, podemos escrever

$$\frac{\partial u_I}{\partial n} + \frac{\partial u_R}{\partial n} = \frac{\partial u_T}{\partial n}, \quad (4.34)$$

onde $\frac{\partial}{\partial n}$ é a derivada direcional na direção da norma \mathbf{n} .

Resolvendo o sistema das equações (4.33) e (4.34), podemos obter os dados iniciais A^R e A^T , para o campo refletido u_R e o campo transmitido u_T , respectivamente, a partir da amplitude da onda incidente, A^I . Para esse fim, definimos os coeficientes de reflexão e de transmissão:

$$\mathcal{R} = \frac{A^R}{A^I}, \quad (4.35)$$

e

$$\mathcal{T} = \frac{A^T}{A^I}, \quad (4.36)$$

respectivamente. Esses números são uma medida da variação da amplitude, portanto, da partição da energia do raio, no caso em que o raio intercepte uma interface.

A expressão final do coeficiente de reflexão, em termos das velocidades e dos ângulos de incidência e transmissão (Figura 4.2), é

$$\mathcal{R} = \frac{v^+ \cos \theta^I - v^- \cos \theta^T}{v^+ \cos \theta^I + v^- \cos \theta^T}, \quad (4.37)$$

e a expressão final do coeficiente de transmissão, em termos das velocidades e dos ângulos de incidência e transmissão (Figura 4.2), é

$$\mathcal{T} = \frac{2v^+ \cos \theta^I}{v^+ \cos \theta^I + v^- \cos \theta^T}, \quad (4.38)$$

onde θ^I é o ângulo entre a direção do raio incidente e a normal no ponto E , e θ^T é o ângulo entre a direção do raio transmitido e a normal.

Doravante, representaremos por \mathcal{K} o coeficiente de reflexão ou transmissão (acústico/elástico) em uma interface.

Já podemos encontrar a amplitude ao longo de um raio que atinge uma interface e se propaga de novo. Fazendo referência à Figura (4.2), consideremos um raio com ponto inicial \mathbf{E}_0 , que intercepte um ponto \mathbf{E} na superfície Σ e que esteja particionado em dois raios, um refletido e outro transmitido. Também vamos utilizar a notação \mathbf{E}^- e \mathbf{E}^+ para nos referir ao mesmo ponto geométrico \mathbf{E} , mas o considerado como ponto de incidência ou ponto de reflexão/transmissão, respectivamente.

Aplicando a equação (4.19) e utilizando o coeficiente de reflexão dado na equação (4.37), a amplitude $A(G_1)$, no ponto final G_1 do raio refletido, é

$$\begin{aligned} A(G_1) &= \left[A(\mathbf{E}_0) \sqrt{\frac{v^-}{v(\mathbf{E}_0)}} \sqrt{\frac{|J(\mathbf{E}_0)|}{|J(\mathbf{E}^-)|}} \right] \mathcal{R} \left[\sqrt{\frac{v(G_1)}{v^-}} \sqrt{\frac{|J(\mathbf{E}^-)|}{|J(G_1)|}} \right] \\ &= A(\mathbf{E}_0) \sqrt{\frac{v(G_1)}{v(\mathbf{E}_0)}} \sqrt{\frac{|J(\mathbf{E}_0)|}{|J(G_1)|}} \mathcal{R}. \end{aligned} \quad (4.39)$$

De forma análoga, aplicando a equação (4.19) e utilizando o coeficiente de transmissão dado na equação (4.38), a amplitude $A(G_2)$, no ponto final G_2 do raio transmitido, é

$$\begin{aligned} A(G_2) &= \left[A(\mathbf{E}_0) \sqrt{\frac{v^-}{v(\mathbf{E}_0)}} \sqrt{\frac{|J(\mathbf{E}_0)|}{|J(\mathbf{E}^-)|}} \right] \mathcal{T} \left[\sqrt{\frac{v(G_2)}{v^+}} \sqrt{\frac{|J(\mathbf{E}^+)|}{|J(G_2)|}} \right] \\ &= A(\mathbf{E}_0) \sqrt{\frac{v(G_2)}{v(\mathbf{E}_0)}} \sqrt{\frac{v^-}{v^+}} \sqrt{\frac{\cos \theta^+}{\cos \theta^-}} \sqrt{\frac{|J(\mathbf{E}_0)|}{|J(G_2)|}} \mathcal{T}. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Este último resultado se deve ao fato de que o quociente dos Jacobianos é igual ao quociente dos cossenos dos ângulos antes e depois da intersecção do raio com a interface (Červený, 2001), ou seja,

$$\frac{|J(\mathbf{E}^+)|}{|J(\mathbf{E}^-)|} = \frac{\cos \theta^+}{\cos \theta^-}. \quad (4.41)$$

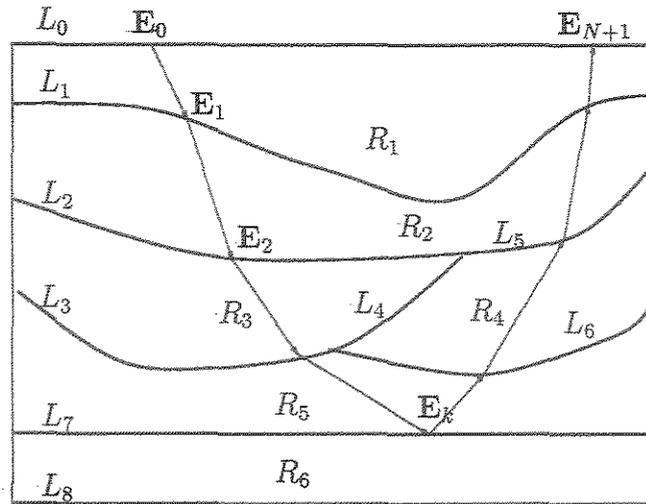


Figura 4.3: Modelo sísmico multi-regiões

4.5 Amplitude ao Longo do Raio em Modelos Multi-regiões

Vamos considerar uma generalização do caso anterior, que chamaremos de modelo multi-regiões. Este tipo de modelo inclui os modelos multi-camadas como um caso particular. Um modelo multi-região é um modelo tridimensional definido por um domínio R , composto por várias sub-regiões R_i , com $i = 0, 1, \dots, M$, tais que

$$R = \bigcup_{j=1}^{N_R} R_n, \quad R_i \cap R_j = \partial R_i \cap \partial R_j, \quad (4.42)$$

$$\partial R_i \cap \partial R_j = L_k, \quad 1 \leq i, j \leq N_R, \quad i \neq j, \quad 1 \leq k \leq N_I,$$

onde ∂R_j é a fronteira da j -ésima sub-região, N_R é o número total de sub-regiões, L_k é a k -ésima superfície de descontinuidade (ou interface), e N_{I+1} é o número total de interfaces. Isto é, a intersecção de sub-regiões ocorre somente nas superfícies L_k , $k = 1, 2, \dots, N_I^3$, em \mathbb{R}^3 , portanto, não se tem superposição de sub-regiões (Figura 4.3). Esta é a descrição geométrica do modelo.

De acordo com a descrição física do modelo, para cada sub-região R_i temos definida

³Neste trabalho, estamos considerando L_0 como a superfície que representa a superfície da Terra, ela não poderia ser a intersecção entre duas sub-regiões.

uma função do campo de velocidade da onda no interior da sub-região $\text{int}(R_j)$, isto é,

$$v_j(\mathbf{x}) : \text{int}(R_j) \longrightarrow \mathbb{R}^+, \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, N_R, \quad (4.43)$$

onde v_j é uma função diferenciável positiva e contínua. Se construirmos uma função que descreva a velocidade de propagação $v(\mathbf{x})$ globalmente no modelo, ela vai estar definida no domínio R , exceto no conjunto de interfaces $\cup_{k=1}^{N_I} L_k$. As funções $v_j(\mathbf{x})$, para cada $j = 1, 2, \dots, N_R$, são restrições diferenciáveis com continuidade em $\text{int}(R_j)$ da função $v(\mathbf{x})$, isto é,

$$v_j(\mathbf{x}) = v(\mathbf{x}), \quad \text{para cada } \mathbf{x} \in \text{int}(R_j). \quad (4.44)$$

Para todo ponto \mathbf{E} que pertence a uma superfície de intersecção L_k , tal que $L_k = \partial R_i \cap \partial R_j$, temos que

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{E}^i} v_i(\mathbf{x}) \neq \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{E}^j} v_j(\mathbf{x}), \quad (4.45)$$

onde \mathbf{E}^i e \mathbf{E}^j representam os limites direcionais ao ponto \mathbf{E} , aproximando-se desde a região R_i e R_j , respectivamente. Ou seja, L_k é a fronteira entre as duas sub-regiões R_i e R_j , e também é um subconjunto de descontinuidades para a função de velocidade da onda $v(\mathbf{x})$.

Utilizando a mesma notação do Capítulo 3, ou seja, considerando um raio com assinatura

$$[i_1, i_2, \dots, i_N; j_1, j_2, \dots, j_N, j_{N+1}]$$

que percorre $N + 1$ sub-regiões do modelo, $R_{i_1}, R_{i_2}, \dots, R_{i_{N+1}}$, temos N interfaces definindo uma seqüência de pontos \mathbf{E}_k , com $k = 0, 1, 2, \dots, N, N + 1$, onde \mathbf{E}_0 é a fonte, \mathbf{E}_{N+1} é o receptor, e $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \dots, \mathbf{E}_N$ são os pontos de intersecção nas superfícies que o raio intercepta (Figura 4.3).

Para encontrar a amplitude final do raio temos que aplicar as equações (4.39) e (4.40) de propagação e transmissão (ou reflexão) em forma iterativa.

Podemos encontrar uma expressão para a amplitude final do raio no receptor \mathbf{E}_{N+1} , sendo conhecida a amplitude na fonte \mathbf{E}_0 . Para o primeiro ponto \mathbf{E}_1 , por exemplo, antes de atingir a interface, temos

$$A(\mathbf{E}_1^-) = A(\mathbf{E}_0) \sqrt{\frac{v(\mathbf{E}_1^-)}{v(\mathbf{E}_0^+)}} \sqrt{\frac{|J(\mathbf{E}_0)|}{|J(\mathbf{E}_1^-)|}}, \quad (4.46)$$

depois da reflexão ou transmissão temos

$$A(\mathbf{E}_1^+) = A(\mathbf{E}_0) \sqrt{\frac{v(\mathbf{E}_1^-)}{v(\mathbf{E}_0^+)}} \sqrt{\frac{|J(\mathbf{E}_0)|}{|J(\mathbf{E}_1^-)|}} \mathcal{K}_1, \quad (4.47)$$

onde \mathcal{K}_1 é o coeficiente de reflexão ou transmissão da primeira interface interceptada.

Podemos aplicar o procedimento anterior em forma iterativa. Devido a que o raio percorre $N + 1$ regiões e intercepta N interfaces, então fazemos o produto da amplitude inicial $A(\mathbf{E}_0)$ pelos fatores da equação (4.46), $N + 1$ vezes (levando em conta as regiões). Multiplicamos o resultado anterior N vezes pelos fatores da equação (4.47) (levando em conta as interfaces). Esse produto nos leva ao seguinte resultado:

$$\begin{aligned} A(\mathbf{E}_{N+1}) &= A(\mathbf{E}_0) \prod_{n=1}^N \left[\sqrt{\frac{v(\mathbf{E}_n^-)}{v(\mathbf{E}_{n-1}^+)}} \sqrt{\frac{|J(\mathbf{E}_{n-1}^+)|}{|J(\mathbf{E}_n^-)|}} \mathcal{K}_n \right] \left[\sqrt{\frac{v(\mathbf{E}_{N+1}^-)}{v(\mathbf{E}_N^+)}} \sqrt{\frac{|J(\mathbf{E}_N^+)|}{|J(\mathbf{E}_{N+1}^-)|}} \right] \\ &= A(\mathbf{E}_0) \sqrt{\frac{|J(\mathbf{E}_0)|}{|J(\mathbf{E}_{N+1}^-)|}} \sqrt{\frac{v(\mathbf{E}_{N+1}^-)}{v(\mathbf{E}_0^+)}} \prod_{n=1}^N \left[\frac{v(\mathbf{E}_n^-)}{v(\mathbf{E}_n^+)} \right]^{1/2} \left[\frac{|J(\mathbf{E}_n^+)|}{|J(\mathbf{E}_n^-)|} \right]^{1/2} \mathcal{K}_n, \end{aligned} \quad (4.48)$$

onde \mathbf{E}_n^- e \mathbf{E}_n^+ representam a aproximação ao ponto \mathbf{E}_n , na interface L_n , desde a sub-região R_{i_n} e $R_{i_{n+1}}$, respectivamente.

O quociente dos valores absolutos dos Jacobianos $\frac{|J(\mathbf{E}_n^+)|}{|J(\mathbf{E}_n^-)|}$ é simplesmente igual ao quociente entre os produtos internos do vetor vazarosidade normalizado e o vetor normal unitário à n -ésima superfície, antes e depois da intersecção, ou seja

$$\frac{|J(\mathbf{E}_n^+)|}{|J(\mathbf{E}_n^-)|} = \frac{\cos \theta_n^+}{\cos \theta_n^-}, \quad (4.49)$$

onde θ_n^+ é o ângulo do raio com a normal, antes da intersecção com a n -ésima superfície; e θ_n^- é o ângulo do raio com a normal, depois da intersecção com a n -ésima superfície.

Portanto, a expressão final da amplitude no ponto \mathbf{E}_{N+1} do raio, em termos dos ângulos de incidência e reflexão (ou transmissão), é

$$A(\mathbf{E}_{N+1}) = A(\mathbf{E}_0) \sqrt{\frac{|J(\mathbf{E}_0)|}{|J(\mathbf{E}_{N+1}^-)|}} \sqrt{\frac{v(\mathbf{E}_{N+1}^-)}{v(\mathbf{E}_0^+)}} \prod_{n=1}^N \left[\frac{v(\mathbf{E}_n^-)}{v(\mathbf{E}_n^+)} \right]^{1/2} \left[\frac{\cos \theta_n^+}{\cos \theta_n^-} \right]^{1/2} \mathcal{K}_n. \quad (4.50)$$

4.5.1 Amplitude ao Longo do Raio em Meios Acústicos com Velocidade Constante por Sub-regiões

No caso de meios onde a velocidade permanece constante em cada sub-região, a equação (4.50) simplifica-se, pois $v(\mathbf{E}_n^+) = v(\mathbf{E}_{n+1}^-)$, para $n = 1, \dots, N$. A fórmula da amplitude final simplifica-se assim

$$A(\mathbf{E}_{N+1}) = A(\mathbf{E}_0) \sqrt{\frac{|J(\mathbf{E}_0)|}{|J(\mathbf{E}_{N+1})|}} \prod_{n=1}^N \left[\frac{\cos \theta_n^+}{\cos \theta_n^-} \right]^{1/2} \mathcal{K}_n. \quad (4.51)$$

4.5.2 Amplitude ao Longo do Raio em Modelos Acústicos Multi-camadas

Um modelo multi-camadas é um caso particular dos modelo multi-região. Neste modelo, as sub-regiões estão definidas de forma que cada uma delas tenha somente duas sub-regiões como vizinhas, e cada interface esteja definida de um extremo a outro do domínio do modelo (Figura 4.4). Este tipo de modelo tem uma motivação geológica no conceito da estratificação da Terra no processo de sedimentação através das eras geológicas. Este caso, embora muito simples, pois não leva em conta falhas e lentes geológicos (por exemplo, bolsas de gás) ou terminações bruscas nas interfaces ao longo do domínio do modelo, tem sido usado com êxito em muitas situações da exploração sísmica e da Sismologia.

Como os modelos multi-camadas são um caso particular dos modelos multi-regiões, a fórmula da amplitude final nestes modelos é a mesma fórmula da equação (4.50),

$$A(\mathbf{E}_{N+1}) = A(\mathbf{E}_0) \sqrt{\frac{|J(\mathbf{E}_0)|}{|J(\mathbf{E}_{N+1})|}} \sqrt{\frac{v(\mathbf{E}_{N+1}^-)}{v(\mathbf{E}_0^+)}} \prod_{n=1}^N \left[\frac{v(\mathbf{E}_n^-)}{v(\mathbf{E}_n^+)} \right]^{1/2} \left[\frac{\cos \theta_n^+}{\cos \theta_n^-} \right]^{1/2} \mathcal{K}_n, \quad (4.52)$$

e para o caso de velocidade constante por camada, a amplitude final simplifica-se à equação (4.51) assim:

$$A(\mathbf{E}_{N+1}) = A(\mathbf{E}_0) \sqrt{\frac{|J(\mathbf{E}_0)|}{|J(\mathbf{E}_{N+1})|}} \prod_{n=1}^N \left[\frac{\cos \theta_n^+}{\cos \theta_n^-} \right]^{1/2} \mathcal{K}_n. \quad (4.53)$$

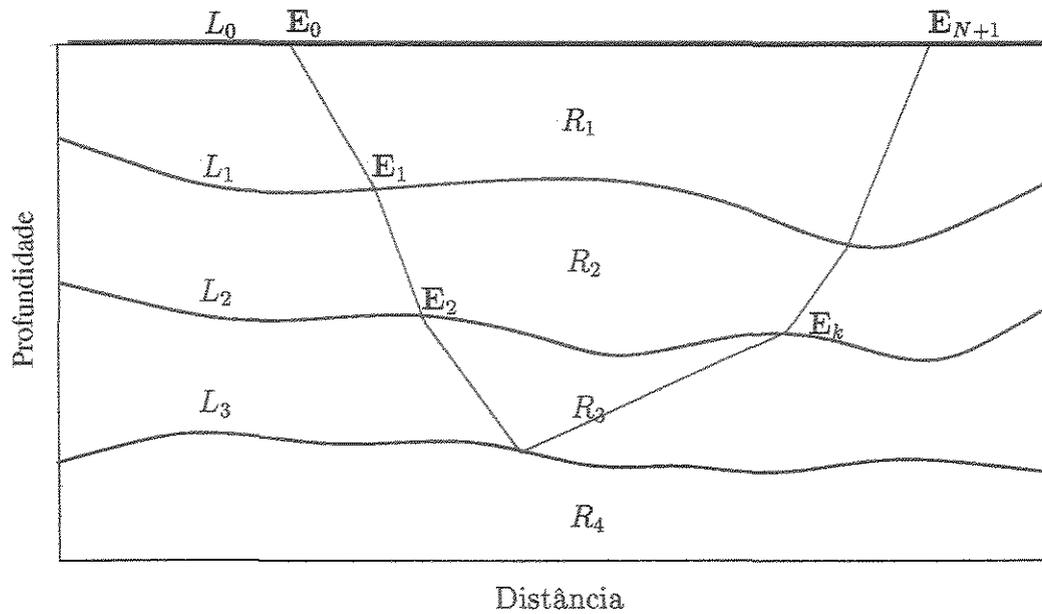


Figura 4.4: Modelo sísmico multi-camadas.

4.6 Amplitude ao Longo do Raio em Modelos Acústicos 2.5D

Vamos apresentar as fórmulas para o cálculo da divergência geométrica nos chamados modelos 2.5D. Um modelo 2.5D é um modelo para o qual os parâmetros não têm variação na direção fora do plano, ou seja, na direção perpendicular à nossa linha de observação. Esta simplificação é válida para estruturas geológicas para as quais a inclinação da estrutura nessa direção é quase zero. Para este tipo particular de situação, a divergência geométrica pode ser avaliada em termos de quantidades em um plano de observação (Bleistein, 1986).

As hipóteses geométricas dos modelos 2.5D são

$$v = v(x_1, x_3), \quad \mathbf{E}_0 = (x_1^{(0)}, 0, x_3^{(0)}), \quad (4.54)$$

e nossa linha de observação é ao longo do eixo x_1 . No Apêndice E, apresentaremos a dedução da fórmula da divergência geométrica para modelos 2.5D multi-camadas. Os argumentos do Apêndice E estão baseados em Docherty (1986).

Amplitude ao Longo do Raio em Modelos Multi-Regiões 2.5D com Velocidade Constante por Sub-Regiões

A equação (E.27) é estendível aos modelos multi-regiões com velocidade constante por camadas, já que o Jacobiano, $|J(\mathbf{E}_{N+1})|$, pode ser representado a partir de variáveis medidas no plano de observação. Finalmente, chegamos à mesma equação (4.56), mas agora utilizamos a seqüência de pontos definida pelo raio, como já foi descrito na seção 4.5, para construir as quantidades requeridas pela fórmula da amplitude.

O valor absoluto do Jacobiano no receptor está dado pela equação (E.22),

$$|J(\sigma_{N+1})| = \frac{\sigma_{N+1} \sin \gamma_2}{v(\mathbf{E}_0)} \left\| \frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial \gamma_2} \right\| \cos \theta_{N+1}, \quad (4.55)$$

onde $v(\mathbf{E}_0)$ é a velocidade na posição inicial do raio, $\boldsymbol{\eta}$ é um vetor medido ao longo da superfície de observação, γ_2 é o ângulo de disparo do raio no plano de observação, e θ_{N+1} é o ângulo que o raio faz com a normal na superfície de observação. A partir desta expressão, a fórmula final da amplitude ao longo do raio para meios multi-camadas pode ser deduzida, fórmula (E.27),

$$A(\mathbf{E}_{N+1}) = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{\sum_{k=1}^{N+1} v_{j_k} D_k}{v_{j_1}} \right]^{-1/2} \left[\left\| \frac{d\boldsymbol{\eta}}{d\gamma_2} \right\| \cos \theta_{N+1} \right]^{-1/2} \prod_{n=1}^N K_n \left[\frac{\cos \theta_n^+}{\cos \theta_n^-} \right]^{1/2}, \quad (4.56)$$

onde v_{j_k} é a velocidade na k -ésima camada percorrida pelo raio, D_k é a k -ésima longitude do segmento do raio, K_n é o n -ésimo coeficiente de reflexão/transmissão, e, finalmente, θ_n^+ e θ_n^- são os ângulos de incidência e reflexão, respectivamente, na n -ésima interface.

4.7 Amplitude ao Longo do Raio em Meios Acústicos com Densidade Variável

Para meios acústicos que têm variação na densidade, a equação de onda no domínio da frequência é (Bleistein, 1986)

$$\rho \nabla \cdot \left[\frac{1}{\rho} \nabla u \right] + \frac{\omega^2}{v^2} u = 0, \quad (4.57)$$

onde $\rho \equiv \rho(\mathbf{x})$ é a função de densidade, espacialmente variável e $u \equiv u(\mathbf{x}, \omega)$ é a pressão.

Fazendo a mesma aproximação assintótica da seção 4.3

$$u(\mathbf{x}, \omega) \sim A_d(\mathbf{x})e^{i\omega\tau(\mathbf{x})}, \quad (4.58)$$

onde $A_d = A_d(\mathbf{x})$ é a amplitude correspondente, se pode demonstrar que se obtém a Equação de Transporte

$$2\nabla A_d \cdot \nabla\tau + A_d\rho\nabla\left(\frac{1}{\rho}\right) \cdot \nabla\tau + A_d\nabla^2\tau = 0. \quad (4.59)$$

Dividindo por $\sqrt{\rho}$ e construindo uma divergência exata, chegamos a que a expressão $\frac{A_d}{\sqrt{\rho}}$ satisfaz a equação de transporte com densidade constante (equação (4.4))

$$2\nabla\left(\frac{A_d}{\sqrt{\rho}}\right) \cdot \nabla\tau + \frac{A_d}{\sqrt{\rho}}\nabla^2\tau = 0. \quad (4.60)$$

Utilizando o parâmetro σ , de forma que $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\sigma)$, podemos demonstrar que $A_d(\mathbf{x})$ satisfaz

$$A_d(\sigma) = A_d(\sigma_0)\sqrt{\frac{v(\sigma)\rho(\sigma)}{v(\sigma_0)\rho(\sigma_0)}}\sqrt{\frac{|J(\sigma_0)|}{|J(\sigma)|}}, \quad (4.61)$$

onde $A_d(\sigma_0)$ é a amplitude inicial.

4.7.1 Amplitude ao Longo do Raio em Meios Acústicos com Densidades Diferentes Separados por uma Interface

Neste caso vamos fazer algumas considerações análogas ao caso de uma mudança brusca na velocidade.

Consideremos dois meios separados por uma interface Σ , onde existe uma descontinuidade na densidade (Figura 4.5). Neste caso, temos duas funções $v(\mathbf{x})$ e $\rho(\mathbf{x})$, onde alguma das duas tem descontinuidades ao longo de Σ^4 . Analogamente ao caso de dois meios semi-infinitos separados por uma interface sem variação de densidade, podemos utilizar a continuidade nos deslocamentos e nas derivadas normais à superfície (Červený, 2001) para chegar às seguintes conclusões:

⁴Em particular, se temos duas regiões com as mesmas velocidades de propagação de onda, mas com diferentes densidades, podemos obter uma partição da energia baseada, somente, na mudança de densidade. Mas, neste caso, a Lei de Snell não produz efeito nenhum sobre a trajetória do raio.

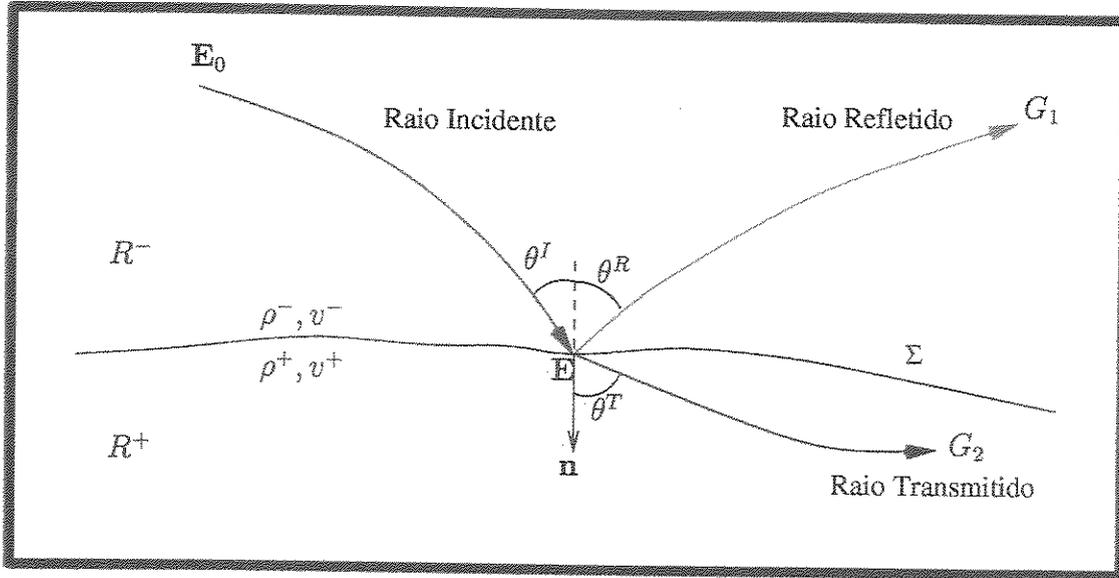


Figura 4.5: Dois meios separados por uma interface com densidades diferentes.

1. A Lei de Snell é independente das mudanças de densidade.
2. Os coeficientes de reflexão, \mathcal{R} , e transmissão, \mathcal{T} , dependem das mudanças de densidade no ponto \mathbf{E} , e são dados pelas seguintes expressões

$$\mathcal{R} = \frac{\rho^+ v^+ \cos \theta^I - \rho^- v^- \cos \theta^R}{\rho^+ v^+ \cos \theta^I + \rho^- v^- \cos \theta^R}, \quad (4.62)$$

$$\mathcal{T} = \frac{2\rho^+ v^+ \cos \theta^I}{\rho^+ v^+ \cos \theta^I + \rho^- v^- \cos \theta^R},$$

onde

$$v^- = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{E}^-} v(\mathbf{x}), \quad v^+ = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{E}^+} v(\mathbf{x}), \quad (4.63)$$

e

$$\rho_1 = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{E}^-} \rho(\mathbf{x}), \quad \rho_2 = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{E}^+} \rho(\mathbf{x}). \quad (4.64)$$

4.7.2 Amplitude ao Longo do Raio em Meios Acústicos Multi-regiões com Variações na Densidade

Como na seção (4.5), vamos considerar uma região tridimensional particionada em sub-regiões (Figura 4.3). Os mesmos conceitos e notação desta seção são válidos para este caso,

mas, além disso, temos que considerar uma função de densidade $\rho(\boldsymbol{x})$. Esta função $\rho(\boldsymbol{x})$ está definida no domínio R (exceto nas fronteiras das sub-regiões). As restrições desta função ρ ao interior das sub-regiões definem funções diferenciáveis com continuidade, isto é, a função $\rho(\boldsymbol{x})$ é uma função C^1 no interior das sub-regiões e tem descontinuidades nas fronteiras entre sub-regiões. Matematicamente, podemos escrever isto da forma

$$\begin{aligned} \rho_j &\equiv \rho|_{\text{int}(R_j)}, \\ \rho_j : \text{int}(R_j) &\longrightarrow \mathbb{R}, \quad \rho_j \in C^1(\text{int}(R_j)), \\ \text{para } 1 \leq j &\leq N_R. \end{aligned} \quad (4.65)$$

Queremos encontrar a amplitude no ponto final de um raio que percorre um modelo multi-regiões, com variações na velocidade e na densidade, caracterizado por funções v_j e ρ_j definidas em sub-regiões R_j . Podemos aplicar, iterativamente, a equação (4.61) de propagação num meio com variação na densidade, e a equação (4.62) dos coeficientes de reflexão e transmissão. Utilizamos de novo a notação do Capítulo 3, onde um raio percorre $N + 1$ sub-regiões $R_{i_1}, R_{i_2}, \dots, R_{i_{N+1}}$, e define uma seqüência de pontos $\mathbf{E}_0, \mathbf{E}_1, \dots, \mathbf{E}_N, \mathbf{E}_{N+1}$, onde \mathbf{E}_0 é a fonte, \mathbf{E}_{N+1} é o receptor, e, \mathbf{E}_n , para $n = 1, 2, \dots, N$, são os pontos de intersecção do raio com as interfaces.

A amplitude final do raio vem dada por:

$$\begin{aligned} A(\mathbf{E}_{N+1}) &= \\ &= A(\mathbf{E}_0) \prod_{n=1}^N \left[\sqrt{\frac{\rho(\mathbf{E}_n^-)v(\mathbf{E}_n^-)}{\rho(\mathbf{E}_{n-1}^+)v(\mathbf{E}_{n-1}^+)}} \sqrt{\frac{|J(\mathbf{E}_{n-1}^+)|}{|J(\mathbf{E}_n^-)|}} \mathcal{K}_n \right] \left[\sqrt{\frac{\rho(\mathbf{E}_{N+1}^-)v(\mathbf{E}_{N+1}^-)}{\rho(\mathbf{E}_N^+)v(\mathbf{E}_N^+)}} \sqrt{\frac{|J(\mathbf{E}_N^+)|}{|J(\mathbf{E}_{N+1}^-)|}} \right] \\ &= A(\mathbf{E}_0) \sqrt{\frac{|J(\mathbf{E}_0)|}{|J(\mathbf{E}_{N+1})|}} \sqrt{\frac{\rho(\mathbf{E}_{N+1}^-)v(\mathbf{E}_{N+1}^-)}{\rho(\mathbf{E}_0^+)v(\mathbf{E}_0^+)}} \prod_{n=1}^N \left[\frac{\rho(\mathbf{E}_n^-)v(\mathbf{E}_n^-)}{\rho(\mathbf{E}_n^+)v(\mathbf{E}_n^+)} \right]^{1/2} \left[\frac{|J(\mathbf{E}_n^+)|}{|J(\mathbf{E}_n^-)|} \right]^{1/2} \mathcal{K}_n. \end{aligned} \quad (4.66)$$

As expressões $\rho(\mathbf{E}_0^+)v(\mathbf{E}_0^+)$ e $\rho(\mathbf{E}_{N+1}^-)v(\mathbf{E}_{N+1}^-)$ representam o limite do produto da densidade pela velocidade, avaliado nos dois extremos do raio, na fonte e no receptor, respectivamente.

4.7.3 Amplitude ao Longo do Raio em Meios Acústicos com Densidade Constante por Sub-regiões

Similarmente, como na seção 4.5.1, consideremos um meio para o qual as velocidades e densidades são *constantes* por sub-regiões. A fórmula para a amplitude no ponto final do raio, equação (4.66), simplifica-se bastante, pois

$$\rho(\mathbf{E}_n^+)v(\mathbf{E}_n^+) = \rho(\mathbf{E}_{n+1}^-)v(\mathbf{E}_{n+1}^-) \quad \text{para } n = 0, 1, \dots, N.$$

Portanto, o produto dos quocientes $\prod_{n=0}^N \frac{\rho(\mathbf{E}_{n+1}^-)v(\mathbf{E}_{n+1}^-)}{\rho(\mathbf{E}_n^+)v(\mathbf{E}_n^+)}$ passa a ser igual a 1, e a expressão final da amplitude é igual a

$$A(\mathbf{E}_{N+1}) = A(\mathbf{E}_0) \sqrt{\frac{|J(\mathbf{E}_0)|}{|J(\mathbf{E}_{N+1})|}} \prod_{n=1}^N \left[\frac{\cos \theta_n^+}{\cos \theta_n^-} \right]^{1/2} \mathcal{K}_n. \quad (4.67)$$

Amplitude ao Longo do Raio em Modelos Multi-Regiões 2.5D com Velocidade e Densidade Constante por Sub-Regiões

O caso de um modelo 2.5D multi-regiões, com parâmetros constantes por sub-regiões e com fonte pontual, pode ser analisado utilizando os argumentos do Apêndice E, para o cálculo do Jacobiano final, e da seção (4.3.3), para a fonte pontual.

A Função de Green no domínio do tempo para a equação (4.57) (Červený, 2001) é

$$G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0) = \frac{\rho(r)}{4\pi r} \delta\left(t - t_0 - \frac{r}{v}\right), \quad (4.68)$$

onde r é a distância do ponto \mathbf{x} até \mathbf{x}_0 , portanto, a amplitude no ponto \mathbf{x} é dada por

$$A_d(\mathbf{x}) = \frac{\rho(r)}{4\pi r}. \quad (4.69)$$

Para o caso da fonte pontual, consideremos um ponto do raio, $\mathbf{x}(\sigma_r)$, perto da fonte, pertencente a uma esfera centrada na fonte de raio r . Similar ao caso sem variações em

densidade, fazemos o ponto tender à fonte, então temos que

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} A_d(\mathbf{x}(\sigma_r)) J(\mathbf{x}(\sigma_r)) &= \lim_{r \rightarrow 0} \left[\frac{\rho(r)}{4\pi r} \right] \left[r \sqrt{\sin \gamma_2} \right] \\ &= \frac{\rho_{j_1}}{4\pi} \sqrt{\sin \gamma_2}, \end{aligned} \quad (4.70)$$

onde ρ_{j_1} é a densidade na posição da fonte.

Do Apêndice E, temos que

$$|J(\sigma_{N+1})| = \frac{\sigma_{N+1} \sin \gamma_2}{v(\mathbf{E}_0)} \left\| \frac{\partial \eta}{\partial \gamma_2} \right\| \cos \theta_{N+1}, \quad (4.71)$$

portanto, a amplitude final é igual a

$$\begin{aligned} A(\mathbf{E}_{N+1}) &= \lim_{r \rightarrow 0} \left[\frac{\rho(r)}{4\pi r} \right] \frac{[r \sqrt{\sin \gamma_2}]}{\sqrt{\frac{\sigma_{N+1} \sin \gamma_2}{v(\mathbf{E}_0)} \left\| \frac{\partial \eta}{\partial \gamma_2} \right\| \cos \theta_{N+1}}} \prod_{n=1}^N \left[\frac{\cos \theta_n^+}{\cos \theta_n^-} \right]^{1/2} \mathcal{K}_n \\ &= \frac{\rho_{j_1}}{4\pi} \left[\frac{\sum_{k=1}^{N+1} v_{j_k} D_k}{v_{j_1}} \right]^{-1/2} \left[\left\| \frac{d\eta}{d\gamma_2} \right\| \cos \theta_{N+1} \right]^{-1/2} \prod_{n=1}^N \mathcal{K}_n \left[\frac{\cos \theta_{n+}}{\cos \theta_{n-}} \right]^{1/2}, \end{aligned} \quad (4.72)$$

onde ρ_{j_1} é a densidade da primeira sub-região atravessada pelo raio, e v_{j_1} é a velocidade na primeira sub-região atravessada pelo raio.

Nota: Nesta tese, a forma que adotamos para apresentar as equações da amplitude é com o intuito de facilitar a comparação com os resultados do artigo de Docherty (1986).

4.8 Amplitude ao Longo do Raio em Meios Elásticos Isotrópicos

Como já se explicou na seção 2.3, um meio elástico isotrópico está representado pela seguinte equação de onda, no domínio do tempo (Červený, 2001)

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu(\nabla \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \nabla \mu \times (\nabla \times \mathbf{u}) \\ + 2(\nabla \mu \cdot \nabla) \mathbf{u} = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{u}, \end{aligned} \quad (4.73)$$

onde $\lambda(\mathbf{x})$ e $\mu(\mathbf{x})$ são os chamados Parâmetros de Lamé, $\rho(\mathbf{x})$ é a densidade do meio e \mathbf{u} é o vetor de deslocamentos da partícula.

Lembremos que nas *altas frequências*, dois tipos de ondas podem existir e elas propagam-se independentemente uma da outra: ondas de tipo P , para as quais a propagação das partículas no meio é na direção da onda, e ondas de tipo S , para as quais a propagação das partículas é perpendicular à propagação da onda. Esses dois tipos de onda têm diferentes velocidades de propagação. No Capítulo 2, denotamos por $\alpha(\mathbf{x})$ e por $\beta(\mathbf{x})$ as funções de velocidade de propagação das ondas P e S no ponto \mathbf{x} do domínio, respectivamente.

4.8.1 Amplitude ao Longo do Raio em um Meio Elástico sem Descontinuidades

Para encontrar as fórmulas da amplitude ao longo do raio em um meio elástico, utilizamos as Equações de Transporte (2.33) e (2.37) para as ondas P e S , respectivamente.

1. Ondas P .

Seja

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}) = \alpha A(\mathbf{x})\mathbf{p}, \quad (4.74)$$

o vetor deslocamento, onde $A(\mathbf{x})$ é a função escalar de amplitude de valores complexos. Se consideramos a expressão $\sqrt{\rho\alpha^2}A$, podemos escrever a Equação de Transporte da forma

$$\nabla \cdot (\rho\alpha^2 A A^* \nabla T) = 0, \quad (4.75)$$

onde A^* é o número complexo conjugado de A .

2. Ondas S .

Definimos dois vetores \mathbf{e}_1 e \mathbf{e}_2 , mutuamente perpendiculares e perpendiculares ao vetor \mathbf{p} , escolhidos de forma adequada (Červený, 2001). Então, a representação vetorial do deslocamento está dada por

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}) = B(\mathbf{x})\mathbf{e}_1 + C(\mathbf{x})\mathbf{e}_2, \quad (4.76)$$

onde $B(\mathbf{x})$ e $C(\mathbf{x})$ são as funções escalares de amplitude da onda S , que satisfazem as Equações de Transporte.

Como no caso das ondas P , podemos reescrever as Equações de Transporte em forma de divergência como

$$\nabla \cdot (\rho\beta^2 BB^* \nabla T) = 0, \quad \text{e} \quad \nabla \cdot (\rho\alpha^2 CC^* \nabla T) = 0. \quad (4.77)$$

Para um meio onde os parâmetros são diferenciáveis com continuidade, podemos resolver a Equação de Transporte ao longo de um raio. Integrando as equações (4.75) e (4.77) em um tubo de raios, para um domínio *sem* descontinuidades (como na seção (4.3.1)), conseguimos, finalmente, a amplitude no ponto final do raio em termos da amplitude inicial. Integrando a Equação de Transporte elástica para as ondas P , ao longo do tubo de raios, obtemos

$$A(\sigma) = \left[\frac{\rho(\sigma_0)\alpha(\sigma_0) |J(\sigma_0)|}{\rho(\sigma)\alpha(\sigma) |J(\sigma)|} \right]^{1/2} A(\sigma_0). \quad (4.78)$$

Similarmente para as ondas S , obtemos a solução para as Equações de Transporte

$$\begin{aligned} B(\sigma) &= \left[\frac{\rho(\sigma_0)\alpha(\sigma_0) |J(\sigma_0)|}{\rho(\sigma)\alpha(\sigma) |J(\sigma)|} \right]^{1/2} B(\sigma_0), \\ C(\sigma) &= \left[\frac{\rho(\sigma_0)\alpha(\sigma_0) |J(\sigma_0)|}{\rho(\sigma)\alpha(\sigma) |J(\sigma)|} \right]^{1/2} C(\sigma_0). \end{aligned} \quad (4.79)$$

4.8.2 Amplitude ao Longo do Raio em Meios Elásticos Separados por uma Interface

No caso da propagação em um meio dividido por uma interface Σ , fazendo uma análise análoga ao caso acústico (continuidade nos deslocamentos totais e nas derivadas normais totais à interface), obtemos os coeficientes de reflexão e transmissão elásticos.

Este caso é mais complicado que o caso acústico, pois podemos ter o fenômeno de conversão. Por este fenômeno, uma onda tipo P pode tornar-se uma onda tipo S , podendo ser transmitida ou refletida. Assim, teremos quatro possibilidades, PP , PS , SS , SP , e duas situações físicas, reflexão e transmissão. Isso dá, no total, oito coeficientes, quatro de reflexão

e quatro de transmissão (Červený et al., 1977):

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{PP} &= D^{-1} [q^2 p^2 P_1 P_2 P_3 P_4 + \rho_1 \rho_2 (\beta_1 \alpha_2 P_1 P_4 - \alpha_1 \beta_2 P_2 P_3) \\
&\quad - \alpha_1 \beta_1 P_3 P_4 Y^2 + \alpha_2 \beta_2 P_1 P_2 X^2 - \alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2 p^2 Z^2], \\
\mathcal{R}_{SS} &= D^{-1} [q^2 p^2 P_1 P_2 P_3 P_4 - \rho_1 \rho_2 (\beta_1 \alpha_2 P_1 P_4 - \alpha_1 \beta_2 P_2 P_3) \\
&\quad - \alpha_1 \beta_1 P_3 P_4 Y^2 + \alpha_2 \beta_2 P_1 P_2 X^2 - \alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2 p^2 Z^2], \\
\mathcal{R}_{PS} &= 2\epsilon D^{-1} \alpha_1 p P_1 (q P_3 P_4 Y + \alpha_2 \beta_2 X Z), \\
\mathcal{R}_{SP} &= -2\epsilon D^{-1} \beta_1 p P_2 (q P_3 P_4 Y + \alpha_2 \beta_2 X Z), \\
\mathcal{T}_{PP} &= 2D^{-1} \alpha_1 \rho_1 P_1 (\beta_2 P_2 X + \beta_1 P_4 Y), \\
\mathcal{T}_{SS} &= 2D^{-1} \beta_1 \rho_1 P_2 (\alpha_1 P_3 Y + \alpha_2 P_1 X), \\
\mathcal{T}_{PS} &= -2\epsilon D^{-1} \alpha_1 \rho_1 P_1 (q P_2 P_3 - \beta_1 \alpha_2 Z), \\
\mathcal{T}_{SP} &= 2\epsilon D^{-1} \beta_1 \rho_1 p P_2 (q P_1 P_4 - \alpha_1 \beta_2 Z),
\end{aligned} \tag{4.80}$$

onde

$$\begin{aligned}
D &= [q^2 p^2 P_1 P_2 P_3 P_4 + \rho_1 \rho_2 (\beta_1 \alpha_2 P_1 P_4 + \alpha_1 \beta_2 P_2 P_3) \\
&\quad + \alpha_1 \beta_1 P_3 P_4 Y^2 + \alpha_2 \beta_2 P_1 P_2 X^2 + \alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2 p^2 Z^2],
\end{aligned} \tag{4.81}$$

e

$$\begin{aligned}
q &= 2(\rho_2 \beta_2^2 - \rho_1 \beta_1^2), \\
X &= \rho_2 - qp^2, \\
Y &= \rho_1 + qp^2, \\
Z &= \rho_2 - \rho_1 - qp^2, \\
P_1 &= (1 - \alpha_1^2 p^2)^{1/2}, \\
P_2 &= (1 - \beta_1^2 p^2)^{1/2}, \\
P_3 &= (1 - \alpha_2^2 p^2)^{1/2}, \\
P_4 &= (1 - \beta_2^2 p^2)^{1/2},
\end{aligned} \tag{4.82}$$

onde α_1 e α_2 são as velocidades no primeiro e segundo meio, respectivamente; ρ_1 e ρ_2 são as densidades no primeiro e segundo meio, respectivamente; e p é o valor da componente tangencial do vetor vagarosidade do raio.

4.8.3 Amplitude ao Longo do Raio em um Meio Elástico em um Modelo Multi-regiões

Um raio, em um meio elástico em um modelo multi-regiões, está composto por $N + 1$ curvas diferenciáveis no espaço tridimensional, e sua natureza física pode ser diferente em cada curva, pois cada curva que representa um ramo do raio pode ser uma onda do tipo P ou tipo S .

De forma similar à seção 4.5, podemos generalizar o método do tubo de raios para um meio elástico. Para isto, apliquemos iterativamente as fórmulas da amplitude final para ondas tipo P , dada na equação (4.78), ou tipo S , dada na equação (4.79). Então, se temos um raio que atravessa $N + 1$ regiões e intercepta N interfaces, fazemos $N + 1$ multiplicações entre as equações (4.78) e (4.79), dependendo do tipo de onda em cada ramo do raio. O resultado anterior o multiplicamos pelo produto dos N coeficientes de reflexão/transmissão, dados pela equação (4.80). Obtemos, assim, o seguinte resultado

$$A(\mathbf{E}_{N+1}) = A(\mathbf{E}_0) \prod_{n=1}^N \left[\sqrt{\frac{\rho(\mathbf{E}_n^+)v(\mathbf{E}_n^+)}{\rho(\mathbf{E}_n^-)v(\mathbf{E}_n^-)}} \sqrt{\frac{|J(\mathbf{E}_n^+)|}{|J(\mathbf{E}_n^-)|}} \mathcal{K}_n \right] \times \left[\sqrt{\frac{\rho(\mathbf{E}_0^+)v(\mathbf{E}_0^+)}{\rho(\mathbf{E}_{N+1}^-)v(\mathbf{E}_{N+1}^-)}} \sqrt{\frac{|J(\mathbf{E}_0^+)|}{|J(\mathbf{E}_{N+1}^-)|}} \right]. \quad (4.83)$$

Escrevendo esta última equação em termos da divergência geométrica e os cosenos dos ângulos entre a normal e o raio, temos finalmente que

$$A(\mathbf{E}_{N+1}) = A(\mathbf{E}_0) \sqrt{\frac{|J(\mathbf{E}_0)|}{|J(\mathbf{E}_{N+1})|}} \sqrt{\frac{\rho(\mathbf{E}_0)v(\mathbf{E}_0)}{\rho(\mathbf{E}_{N+1})v(\mathbf{E}_{N+1})}} \prod_{n=1}^N \left[\sqrt{\frac{\rho(\mathbf{E}_n^+)v(\mathbf{E}_n^+)}{\rho(\mathbf{E}_n^-)v(\mathbf{E}_n^-)}} \sqrt{\frac{\cos \theta_j^+}{\cos \theta_j^-}} \mathcal{K}_n \right], \quad (4.84)$$

onde \mathcal{K}_n representa o coeficiente de reflexão ou transmissão elástico na n -ésima interface, dependendo do tipo de conversão em cada ramo de raio. Esta expressão coincide com a equação (2.53) de Červený et al., (1977).

4.8.4 Amplitude ao Longo de um Raio em Modelos 2.5D Elásticos, com Densidade e Velocidade Constante por Sub-Regiões

Para um modelo 2.5D elástico, com densidade e velocidade constante por sub-regiões, são válidos os mesmos argumentos que para o caso acústico. Mas, existem duas diferenças: a primeira é que vamos ter que considerar que em cada sub-região podem acontecer conversões dos tipos de onda que se propagam (que deve ser levado em conta para avaliar os coeficientes de reflexão/transmissão); e, a segunda, também temos que utilizar uma Função de Green na equação elastodinâmica para encontrar o $\lim_{\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}_0} A(\mathbf{E})J(\mathbf{E})$, onde \mathbf{E} é um ponto ao longo do raio que se aproxima da fonte.

Inicialmente avaliemos o limite. Para esse fim, consideremos um ponto $\mathbf{x}(\sigma_r)$, ao longo do raio, perto da fonte e pertencente a uma superfície esférica centrada em \mathbf{E}_0 e de raio r . A Função de Green da Equação Elastodinâmica para um meio de densidade e velocidade constante possui aproximadamente uma amplitude igual a

$$\frac{1}{4\pi \rho v^2 r}, \quad (4.85)$$

onde $v = \alpha$ ou $v = \beta$ é o valor da velocidade para ondas \mathbf{E} ou \mathbf{E}_0 , respectivamente; e r é a distância do centro da esfera ao ponto $\mathbf{x}(\sigma_r)$. Então, fazendo o limite quando o raio da esfera tende a zero, temos que

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} A(\mathbf{x}(\sigma_r)) \sqrt{|J(\mathbf{x}(\sigma_r))|} &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi \rho(\mathbf{x}(\sigma_r)) v^2 r} \sqrt{r^2 \sin \gamma_1} \\ &= \frac{1}{4\pi \rho(\mathbf{E}_0) v(\mathbf{E}_0)^2} \sqrt{\sin \gamma_1}, \end{aligned} \quad (4.86)$$

onde $\rho_{\mathbf{E}_0}$ e $v_{\mathbf{E}_0}$ são a densidade e a velocidade na posição da fonte, respectivamente.

Utilizando a assinatura da propagação, a equação (4.84) da amplitude final, o valor do limite, equação (4.86), o Jacobiano para um modelo 2.5D, a equação (E.22), e os coeficientes de reflexão e transmissão, que agora são coeficientes elásticos, podemos encontrar o valor da amplitude final:

$$A(\mathbf{E}_{N+1}) = \frac{1}{4\pi \rho_{J_1} v_{j_1}^{3/2}} \left[\sum_{k=1}^{N+1} v_{j_k} D_k \right]^{-1/2} \left[\left\| \frac{d\eta}{d\gamma_2} \right\| \cos \theta_{N+1} \right]^{-1/2} \prod_{k=1}^N \mathcal{K}_j \left[\frac{\cos \theta_k^+}{\cos \theta_k^-} \right]^{1/2}. \quad (4.87)$$

Lembremos que nesta situação $v(\mathbf{E}_0) = v_{j_1}$ e $\rho(\mathbf{E}_0) = \rho_{j_1}$, ou seja, a velocidade e a densidade da primeira sub-região atravessada pelo raio coincidem com a velocidade e a densidade na posição da fonte, respectivamente.

4.9 Correções na Amplitude ao Longo do Raio Produzida pelas Cústicas

Cada vez que um raio cruza uma cústica, se produz uma mudança de fase na onda. Esta informação deve ser utilizada na construção final do sismograma. Se denotamos por $\kappa(\mathbf{E}_{N+1}, \mathbf{E}_0)$ ao índice KMAH do raio que une uma fonte \mathbf{E}_0 e um receptor \mathbf{E}_{N+1} , a mudança de fase está dada pela expressão (Červený, 2001)

$$T^c(\mathbf{E}_{N+1}, \mathbf{E}_0) = -\frac{1}{2}\pi\kappa(\mathbf{E}_{N+1}, \mathbf{E}_0). \quad (4.88)$$

Após a determinação da correção da fase devido às cústicas, obtemos como expressão final para o sismograma

$$U(\mathbf{E}_{N+1}, t) = \text{Re} [A(\mathbf{E}_{N+1}) e^{iT^c(\mathbf{E}_{N+1}, \mathbf{E}_0)} F(t - \tau(\mathbf{E}_{N+1}, \mathbf{E}_0))], \quad (4.89)$$

onde, segundo a equação (4.66),

$$A(\mathbf{E}_{N+1}) = A(\mathbf{E}_0) \sqrt{\frac{|J(\mathbf{E}_0)|}{|J(\mathbf{E}_{N+1})|}} \sqrt{\frac{\rho(\mathbf{E}_{N+1})v(\mathbf{E}_{N+1})}{\rho(\mathbf{E}_0)v(\mathbf{E}_0)}} \prod_{n=1}^N \left[\sqrt{\frac{\rho(\mathbf{E}_n^-)v(\mathbf{E}_n^-)}{\rho(\mathbf{E}_n^+)v(\mathbf{E}_n^+)}} \sqrt{\frac{\cos \theta_j^+}{\cos \theta_j^-}} \mathcal{K}_n \right], \quad (4.90)$$

para o caso acústico; e, segundo a equação (4.84),

$$A(\mathbf{E}_{N+1}) = A(\mathbf{E}_0) \sqrt{\frac{|J(\mathbf{E}_0)|}{|J(\mathbf{E}_{N+1})|}} \sqrt{\frac{\rho(\mathbf{E}_0)v(\mathbf{E}_0)}{\rho(\mathbf{E}_{N+1})v(\mathbf{E}_{N+1})}} \prod_{n=1}^N \left[\sqrt{\frac{\rho(\mathbf{E}_n^+)v(\mathbf{E}_n^+)}{\rho(\mathbf{E}_n^-)v(\mathbf{E}_n^-)}} \sqrt{\frac{\cos \theta_j^+}{\cos \theta_j^-}} \mathcal{K}_n \right], \quad (4.91)$$

para o caso elástico.

Estas fórmulas nos dão, finalmente, o valor correto da amplitude no ponto final (receptor) do raio.

Neste trabalho não fizemos o cálculo do índice KMAH. Conforme indicado na introdução deste tese, a determinação do índice KMAH utilizando métodos numéricos similares ao cálculo de amplitudes será objeto de trabalhos futuros.

Capítulo 5

Dinâmica Simbólica e Traçamento de Raios

5.1 Introdução

Neste capítulo, representamos o traçamento de raios em um modelo multi-região, acústico ou elástico, utilizando os conceitos da Dinâmica Simbólica. Essa disciplina estuda as seqüências (finitas ou infinitas) de símbolos a partir de conceitos geométricos, físicos, etc.

Inicialmente, transformamos o problema do traçamento de raios em um problema de Matemática Discreta. Visualizando o traçamento de raios como um movimento de uma partícula virtual ao longo de um domínio (utilizando o conceito de autômato finito), podemos representar um raio como uma seqüência finita de símbolos que possui informação das interfaces interceptadas pelo raio (utilizando os conceitos de palavra aceita e de caminho de estados).

A partir dessa representação do raio como uma seqüência, podemos resolver um sistema não-linear, como foi detalhado no Capítulo 3, e encontrar os pontos que definem o raio.

Finalmente, utilizamos o Método de Continuação para encontrar todos os raios dentro da chamada classe de equivalência dos raios.

5.2 Teoria de Grafos

Vejamos algumas definições e propriedades básicas da teoria de grafos (Voss, 1993) que utilizaremos, posteriormente, para o traçamento de raios.

Definição. 5.2.1 Dado um conjunto \mathcal{P} e um conjunto \mathcal{N} , $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{P} \times \mathcal{P}$, a dupla $[\mathcal{P}, \mathcal{N}]$ é chamada **grafo**. Se temos para todo $p \in \mathcal{P}$, $(p, p) \notin \mathcal{N}$, então $[\mathcal{P}, \mathcal{N}]$ é denominado um **grafo sem laços**. Se $(p, q) \in \mathcal{N}$ implica que $(q, p) \in \mathcal{N}$, dizemos que $[\mathcal{P}, \mathcal{N}]$ é um **grafo não dirigido**. Os elementos de \mathcal{P} são chamados **pontos** ou **nós**, ou **vértices** do grafo, e os elementos de \mathcal{N} são as **arestas dirigidas** de $[\mathcal{P}, \mathcal{N}]$. Se $(p, q) \in \mathcal{N}$, e $(q, p) \in \mathcal{N}$, chamamos o conjunto $\{p, q\}$ como uma **aresta não-dirigida** do grafo. Em forma abreviada, dizemos que $\{p, q\}$ é uma **aresta** de $[\mathcal{P}, \mathcal{N}]$.

Exemplo 5.2.1 Seja $\mathcal{P} = \{p, q, r, x, y\}$ e $\mathcal{N} = \{(p, q), (q, p), (r, q), (q, r), (p, r), (r, p), (r, x), (x, x)\}$. Uma ilustração do grafo $[\mathcal{P}, \mathcal{N}]$ é apresentada na Figura (5.1). Observamos, nessa figura, que o nó x tem uma aresta (x, x) (representada pelo círculo maior).

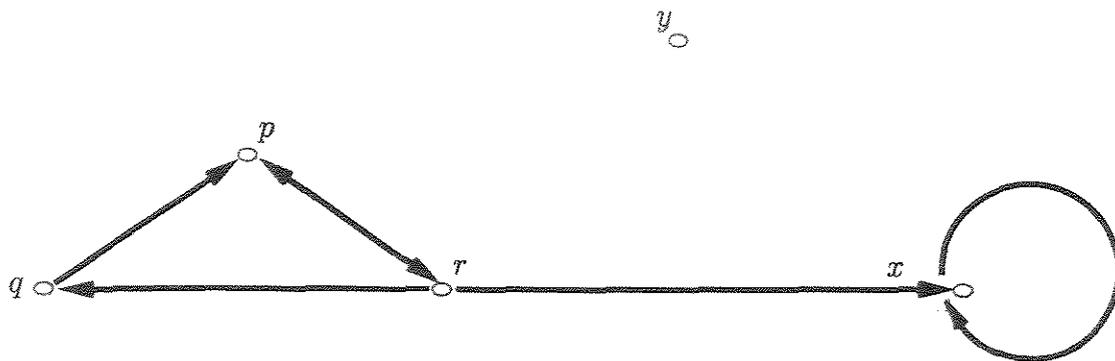


Figura 5.1: Grafo com arestas dirigidas e não-dirigidas.

Um grafo pode ser representado por um desenho de pontos e linhas no plano, como no Exemplo (5.2.1). Embora os desenhos sejam ilustrativos, eles não têm validade nas demonstrações da teoria. As linhas não têm que ser linhas retas ou linhas circulares, e os pontos de intersecção entre duas linhas na representação planar de um grafo não têm nenhum significado. Essas representações servem somente como ferramenta heurística para demonstrações lógicas ou algorítmicas.

Definição. 5.2.2 Uma **seqüência de arestas** (k_1, k_2, \dots, k_n) é uma **seqüência de arestas dirigidas** com $k_i = (p_i, q_i) \in \mathcal{N}$, e $q_i = p_{i+1}$ para $i = 1, 2, \dots, n - 1$. O número n é chamado de **comprimento da seqüência de arestas**.

Definição. 5.2.3 *Uma seqüência simples de arestas é uma seqüência de arestas, com $k_i \neq k_j$ para $i \neq j$. Uma seqüência fechada simples de arestas ou circuito satisfaz a condição de periodicidade $q_n = p_1$. Denominamos uma seqüência de arestas com periodicidade $q_n = p_1$, mas com elementos que podem ser iguais, como **circuito geral**.*

Definição. 5.2.4 *Um grafo $[\mathcal{P}, \mathcal{N}]$ para o qual dois pontos quaisquer $p, q \in \mathcal{P}$ podem ser conectados entre si por uma seqüência de arestas é chamado **grafo conexo**.*

As definições anteriores, relacionados com grafo, não consideram a possibilidade de existência de arestas diferentes que unem um mesmo par de nós. Para esse fim, definimos uma extensão dos grafos que vai ser muito útil na representação da trajetória do raio, o denominado *multi-grafo dirigido*.

Definição. 5.2.5 *Um multi-grafo dirigido (MGD) é formado por uma dupla de conjuntos, \mathcal{P} e \mathcal{N} , e por duas funções \mathcal{O}, \mathcal{T} . As funções estão definidas assim: $\mathcal{O} : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{P}$ e $\mathcal{T} : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{P}$. O multi-grafo está denotado por $[\mathcal{P}, \mathcal{N}]$. Denominamos \mathcal{P} de conjunto de nós, e \mathcal{N} de conjunto de arestas do MGD. Dado um elemento $a \in \mathcal{N}$, o Nó $\mathcal{O}(a)$ é a origem da aresta a e $\mathcal{T}(a)$ é o nó denominado o fim da aresta.*

Podemos notar que não colocamos na definição anterior a condição $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{P} \times \mathcal{P}$, justamente para estender o conceito. Doravante, grafo quer dizer multi-grafo.

Definição. 5.2.6 *Dado um grafo $[\mathcal{P}, \mathcal{N}]$, para cada $p \in \mathcal{P}$, definimos*

$$U(p) = \{q \in \mathcal{P} \mid \text{existe } l \in \mathcal{N}\},$$

tais que $\mathcal{O}(l) = p$ e $\mathcal{T}(l) = q$, ou $\mathcal{O}(l) = q$ e $\mathcal{T}(l) = p$, a vizinhança de pontos de p , como o subconjunto de pontos de \mathcal{P} que possuem uma aresta e p como origem ou fim da aresta. Os pontos de $U(p)$ são denominados pontos vizinhos de p .

Definição. 5.2.7 *Dado um grafo $[\mathcal{P}, \mathcal{N}]$, uma seqüência (p_1, \dots, p_n) de pontos de \mathcal{P} é denominada um **caminho** em \mathcal{P} , se pontos sucessivos p_i e p_{i+1} são vizinhos em $[\mathcal{P}, \mathcal{N}]$. A seqüência (p) que possui só um ponto $p \in \mathcal{P}$ também é um caminho em $[\mathcal{P}, \mathcal{N}]$. O número $n - 1$ de arestas dirigidas entre os pontos do caminho é chamado de **comprimento do caminho**.*

Definição. 5.2.8 *Dois pontos $p, q \in [\mathcal{P}, \mathcal{N}]$ estão conectados se existe um caminho (p, \dots, q) de pontos de \mathcal{P} .*

5.3 Relação entre a Teoria de Grafos e um Modelo Sísmico

5.3.1 Partição do Modelo Sísmico

Como já foi visto no Capítulo 4, um modelo sísmico multi-regiões é um subconjunto fechado R de \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 . R pode ser particionado como uma união de subconjuntos fechados

$$R_i \subset R, \text{ com } i = 1, \dots, N_R, \quad (5.1)$$

que satisfazem as seguintes condições:

$$R = \bigcup_{i=1}^{N_R} R_i, \quad R_i \cap R_j = \partial R_i \cap \partial R_j, \quad (5.2)$$

$$\partial R_i \cap \partial R_j = L_k, \quad 1 \leq i, j \leq N_R, \quad i \neq j, \quad 1 \leq k \leq N_I,$$

onde ∂R_j é a fronteira da j -ésima sub-região, N_R é o número total de sub-regiões, L_k é a k -ésima interface e N_I é o número total de interfaces. Em outras palavras, a intersecção de sub-regiões ocorre somente nas interfaces $L_k, k = 1, 2, \dots, N_I$, e, portanto, não se tem superposição de sub-regiões (Figura 5.2). Estas idéias são igualmente válidas em 2D e 3D, pois somente dependem das relações de vizinhança entre sub-regiões.

5.3.2 Grafo de Representação do Modelo Sísmico

Definamos o grafo da partição, no plano ou no espaço, como um grafo que representa uma partição de um modelo. Vamos chamar esse grafo de *Grafo de Representação* e o denotaremos por $G(R)$. Em particular, em um grafo de representação de um modelo sísmico, um nó representam uma interface, uma aresta representa a conectividade entre duas interfaces, ou, dito de outra forma, uma aresta representa a sub-região que conecta duas interfaces¹ (Figura 5.3).

¹Conectividade no sentido topológico (Blackett, 1968).

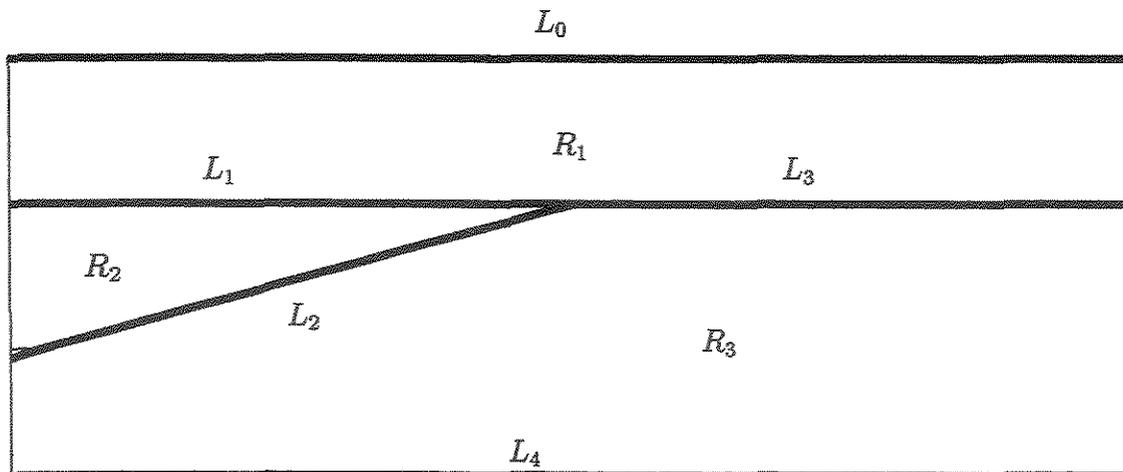


Figura 5.2: Modelo sísmico multi-regiões 2D.

Assim, a trajetória de um raio dado, em um modelo multi-regiões, pode ser agora representada como um caminho no grafo $G(R)$. Este caminho começa na interface onde está localizada a fonte do raio (nó inicial), passa pelas outras interfaces interceptadas pelo raio (na ordem estabelecida pela assinatura do raio), e termina no nó final (interface onde está localizado o receptor do raio). As arestas, neste caminho, representam as regiões atravessadas pelo raio.

Por exemplo, a trajetória do raio, na Figura (5.4), está representada no grafo pelo caminho $(L_0, L_1, L_2, L_4, L_3, L_0)$.

5.4 Autômatos Finitos

A partir do conceito de grafo de representação de um modelo $G(R)$, vamos introduzir o conceito do autômato finito associado a um modelo sísmico. Um autômato finito é uma estrutura matemática utilizada em Ciência da Computação para representar conceitos como compiladores, gramáticas, etc. (Hopcroft & Ullman, 1979). Vejamos algumas definições básicas para chegar, posteriormente, à construção formal do conceito.

Definição. 5.4.1 *Dado um conjunto finito \mathcal{W} denominado alfabeto, definimos os símbolos como os elementos de \mathcal{W} .*

Definição. 5.4.2 *Uma palavra é uma seqüência finita de símbolos justapostos.*

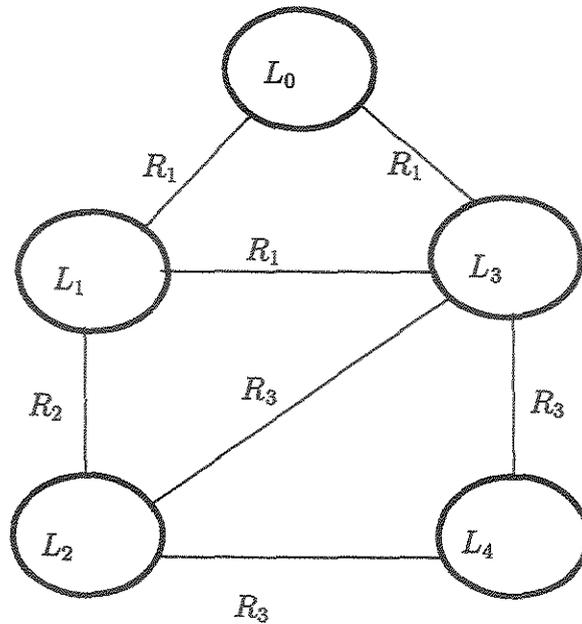


Figura 5.3: Grafo de representação de um modelo sísmico.

Exemplo 5.4.1 Considerando o conjunto das letras da língua portuguesa como o alfabeto \mathcal{W} , se tem que a , b , c são símbolos, e $abcb$ é uma palavra.

Definição. 5.4.3 O comprimento de uma palavra w , denotado por $|w|$, é o número de símbolos que compõem a palavra.

Exemplo 5.4.2 Por exemplo, $abcb$ tem comprimento 4.

Definição. 5.4.4 A palavra vazia, denotada por ϖ , é uma palavra composta de zero símbolos. Portanto $|\varpi| = 0$.

Definição. 5.4.5 Um prefixo é uma palavra formada por qualquer quantidade de símbolos que estão no princípio de uma palavra dada. Analogamente, um sufixo é qualquer palavra formada por símbolos no final de uma palavra dada. Um prefixo ou um sufixo de uma palavra, diferente da própria palavra, são denominados prefixo próprio ou sufixo próprio, respectivamente.

Exemplo 5.4.3 $abcb$ tem prefixos próprios ϖ , a , ab e abc . Os sufixos próprios de $abcb$ são ϖ , b , cb , bc .

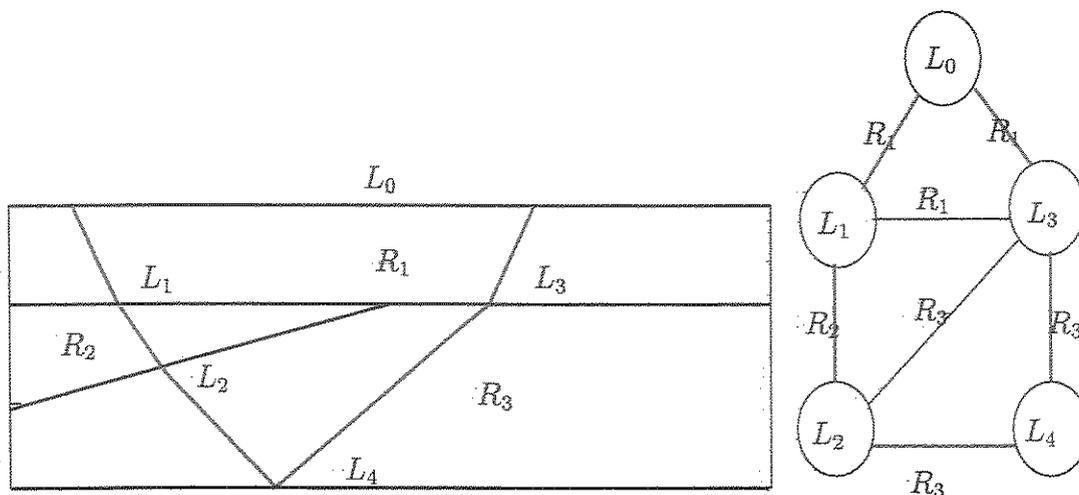


Figura 5.4: Representação de um raio como um caminho de um grafo.

Definição. 5.4.6 A concatenação de duas palavras é a palavra formada escrevendo a primeira, seguida da segunda, sem nenhum espaço entre elas. A justaposição é utilizada como a operação binária de concatenação entre duas palavras.

Exemplo 5.4.4 A concatenação entre $abcb$ e aa é $abcbaa$. Se w e x são palavras, então wx é a concatenação das duas palavras.

A palavra vazia é a identidade para a operação de concatenação, isto é, $\varpi w = w\varpi = w$ para toda palavra w .

Definição. 5.4.7 Uma linguagem formal é um conjunto de palavras de algum alfabeto \mathcal{W} . O conjunto vazio, \emptyset , e o conjunto unitário formado pela palavra vazia, $\{\varpi\}$, são casos particulares de linguagens formais.

Definição. 5.4.8 O conjunto de todas as palavras de um alfabeto fixo \mathcal{W} é uma linguagem, denotado por \mathcal{W}^* . Este conjunto é infinito, pois possui palavras de todos os tamanhos.

Exemplo 5.4.5 Se $\mathcal{W} = \{a\}$, então $\mathcal{W}^* = \{\varpi, a, aa, aaa, \dots\}$. Se $\mathcal{W} = \{0, 1\}$, então $\mathcal{W}^* = \{\varpi, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, \dots\}$.

Podemos visualizar a operação de concatenação como uma função $*$, tal que,

$$* : \mathcal{W}^* \times \mathcal{W}^* \longrightarrow \mathcal{W}^*,$$

de tal forma que se w e x são palavras, então $w * x \equiv *(w, x) = wx$.

Vamos agora dar a definição formal de autômato finito (Arbib et al, 1984).

Definição. 5.4.9 *Um autômato finito \mathcal{A} é um conjunto de cinco objetos,*

$$\mathcal{A} = (\mathcal{P}, \mathcal{N}, \mathcal{W}, \mathcal{P}_0, \mathcal{F}), \quad (5.3)$$

onde

\mathcal{P} = Conjunto de nós, denominados estados,

\mathcal{W} = Alfabeto,

\mathcal{N} = Conjunto de arestas, denominadas transições de estado,

$$\mathcal{N} \subseteq \mathcal{P} \times \mathcal{W} \times \mathcal{P}, \quad (5.4)$$

\mathcal{P}_0 = Estados iniciais, ($\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}$),

\mathcal{F} = Estados finais, ($\mathcal{F} \subset \mathcal{P}$).

Podemos visualizar um autômato finito (AF) como um grafo direcionado, composto de cinco objetos: os nós (os estados do sistema); um alfabeto \mathcal{W} (um conjunto finito de símbolos arbitrários); as arestas (com direção); um subconjunto de estados denominados estados iniciais; e um outro subconjunto de estados, denominado conjunto de estados finais.

O conjunto \mathcal{N} das arestas direcionadas é usualmente representado na literatura como uma função, denominada **função de transição**, denotada por

$$\delta : \mathcal{P} \times \mathcal{W} \longrightarrow 2^{\mathcal{P}},$$

onde $2^{\mathcal{P}}$ é o conjunto potência de \mathcal{P} (conjunto de todos os subconjuntos de \mathcal{P}). Assim, esta função envia duplas de objetos em subconjuntos de \mathcal{P} . Em outras palavras, a função de transição representa a aplicação de símbolos do alfabeto sobre um estado. Consideremos o seguinte exemplo como ilustração:

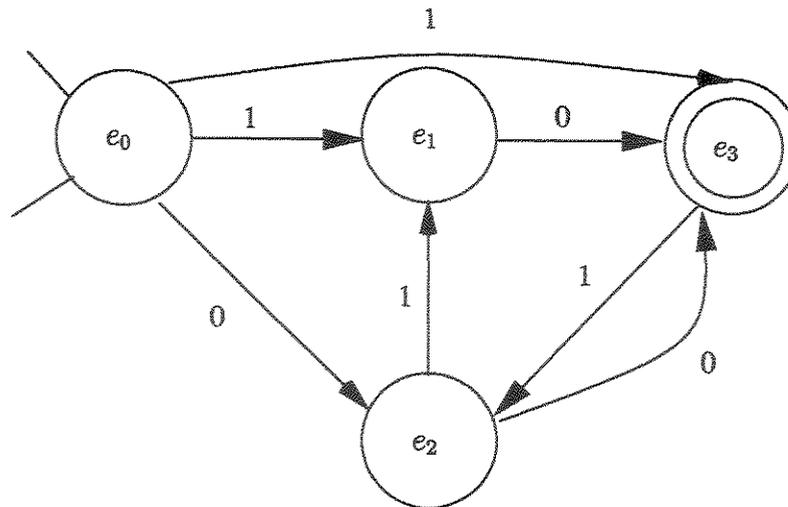


Figura 5.5: Autômato finito.

Exemplo 5.4.6 *Sejam, como representado na Figura (5.5),*

$$\mathcal{P} = \{e_0, e_1, e_2, e_3\},$$

$$\mathcal{W} = \{0, 1\},$$

$$\mathcal{N} = \{(e_0, 1, e_1), (e_0, 0, e_2), (e_0, 1, e_3), (e_1, 0, e_3), (e_3, 1, e_2), \\ (e_2, 0, e_3), (e_2, 1, e_1)\},$$

(5.5)

$$\mathcal{P}_0 = \{p_0\},$$

$$\mathcal{F} = \{e_3\}.$$

A função de transição (na verdade outra forma de escrever \mathcal{N}) é dada por:

$$\begin{array}{ll} \delta(e_0, 0) = \{e_2\}, & \delta(e_0, 1) = \{e_1, e_2\} \\ \delta(e_1, 0) = \{e_3\}, & \delta(e_1, 1) = \emptyset \\ \delta(e_2, 0) = \{e_3\}, & \delta(e_2, 1) = \{e_1\} \\ \delta(e_3, 0) = \emptyset, & \delta(e_3, 1) = \{e_2\} \end{array}$$

É também usual, na literatura técnica, descrever esta função por uma tabela. Para nosso exemplo construímos a Tabela (5.1).

Como podemos ver na Figura (5.5), o autômato é representado como um multi-grafo. Em geral, a representação gráfica destes multi-grafos é a seguinte:

Estados	Símbolos	
	0	1
e_0	$\{e_2\}$	$\{e_1, e_3\}$
e_1	$\{e_3\}$	\emptyset
e_2	$\{e_3\}$	$\{e_1\}$
e_3	\emptyset	$\{e_2\}$

Tabela 5.1: Tabela que representa a função de transição.

* Os nós são desenhados como círculos, e em cada círculo vai o símbolo do estado correspondente.

* As arestas são representadas por setas direcionadas², cada uma delas rotuladas com seu correspondente símbolo do alfabeto.

* Os estados iniciais são usualmente desenhados como círculos que têm dois segmentos de reta diagonais, representando as entradas do autômato.

* O conjunto de estados finais é representado por dois círculos concêntricos ou, em caso de ter mais de um estado, por vários pares de círculos concêntricos. Dentro de cada par vai o símbolo do estado correspondente.

É importante notar que um dos propósitos fundamentais de um autômato é a representação da geração de *palavras* através de um caminho em um grafo. Estendemos, na seguinte definição, o conceito de função de transição para os casos nos que, sobre um estado, se aplica uma palavra (não somente um símbolo).

Definição. 5.4.10 Definimos a função de transição estendida $\hat{\delta}$,

$$\hat{\delta} : 2^{\mathcal{P}} \times \mathcal{W}^* \rightarrow 2^{\mathcal{P}},$$

por um processo recursivo, da seguinte forma:

Primeiro passo.

Para todo estado $q \in \mathcal{P}$, temos que $\hat{\delta}(\{q\}, \varpi) = \{q\}$.

²Quando uma aresta está direcionada nos dois sentidos, colocamos uma linha sem setas.

Passo recursivo.

Para toda palavra w , $w \in \mathcal{W}^*$, para todo símbolo a , $a \in \mathcal{W}^*$, e para todo subconjunto de estados $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}$, temos que

$$\hat{\delta}(\mathcal{O}, wa) = \cup_{q \in \hat{\delta}(\mathcal{O}, w)} \delta(q, a).$$

O primeiro passo afirma que sem ler um símbolo de entrada o AF não muda de estado; e o passo recursivo diz como encontrar o estado depois de ler uma palavra não-vazia.

Exemplo 5.4.7 Considerando o Exemplo 5.4.6, seja $\mathcal{O} = \{e_0, e_3\}$ e a palavra $w = 10$. Aplicando a função de transição, temos em forma recursiva que:

$$\hat{\delta}(\{e_0, e_3\}, 1) = \{e_1, e_2\}, \text{ pois } \delta(e_0, 1) = e_1 \text{ e } \delta(e_3, 1) = e_2.$$

Aplicando o passo recursivo, novamente, temos

$$\hat{\delta}(\{e_0, e_3\}, 10) = \hat{\delta}(\{e_1, e_2\}, 0) = \{e_3\}, \text{ pois } \delta(e_1, 0) = e_3 \text{ e } \delta(e_2, 0) = e_3.$$

Portanto, $\hat{\delta}(\{e_0, e_3\}, 10) = \{e_3\}$

Se aplicamos $\hat{\delta}$ à dupla composta por um conjunto unitário e um símbolo, temos que $\hat{\delta}(\{q\}, a) = \delta(\hat{\delta}(\{q\}, \varpi), a) = \delta(q, a)$. Isto é, não existe discordância entre δ e $\hat{\delta}$ nos casos para os que ambos estejam definidos; portanto, por conveniência usaremos, doravante δ , em vez de $\hat{\delta}$.

Definição. 5.4.11 Uma palavra w se diz aceita por um autômato finito, $\mathcal{A} = (\mathcal{P}, \mathcal{N}, \mathcal{W}, e_0, \mathcal{F})$, se $\delta(e_0, w) = e$ para algum e em \mathcal{F} .

Uma palavra aceita por um autômato finito é uma seqüência finita de símbolos pertencentes ao alfabeto \mathcal{W} , que caracterizam as arestas usadas para construir o caminho. A palavra aceita é uma seqüência de símbolos de \mathcal{W} tais que a seqüência de arestas determinada começa a partir do estado inicial (nó inicial) e termina em um dos estados finais (nó final).

Definição. 5.4.12 Uma linguagem aceita por \mathcal{A} , denotada por $L(\mathcal{A})$, é um subconjunto de \mathcal{W}^* , tal que $L(\mathcal{A}) = \{w | \delta(e_0, w) \in \mathcal{F}\}$.

Observemos que a linguagem aceita pelo autômato é equivalente ao conjunto das palavras aceitas, ou caminhos que unem o estados iniciais com os estado finais.

Exemplo 5.4.8 Considerando os dados do exemplo anterior, temos que a linguagem aceita pelo autômato, $L(\mathcal{A})$, é:

$$\{1, 10, 00, 010, 110, 1010, 0010, 11010, 01010 \dots\}. \quad (5.6)$$

Este exemplo mostra uma propriedade interessante dos autômatos finitos: o conjunto das palavras aceitas é, em geral, um conjunto infinito de seqüências finitas.

5.5 Relação entre os Autômatos Finitos e um Modelo Sísmico

5.5.1 Construção do Autômato de um Modelo Sísmico

A partir do grafo de representação $G(R)$ de um modelo multi-regiões, mostrado na seção (5.3.2), podemos construir um autômato que represente as possíveis trajetórias de um raio.

Definamos o autômato $\mathcal{A}(R)$ do modelo da seguinte forma (Figura 5.6) e (Figura 5.7):

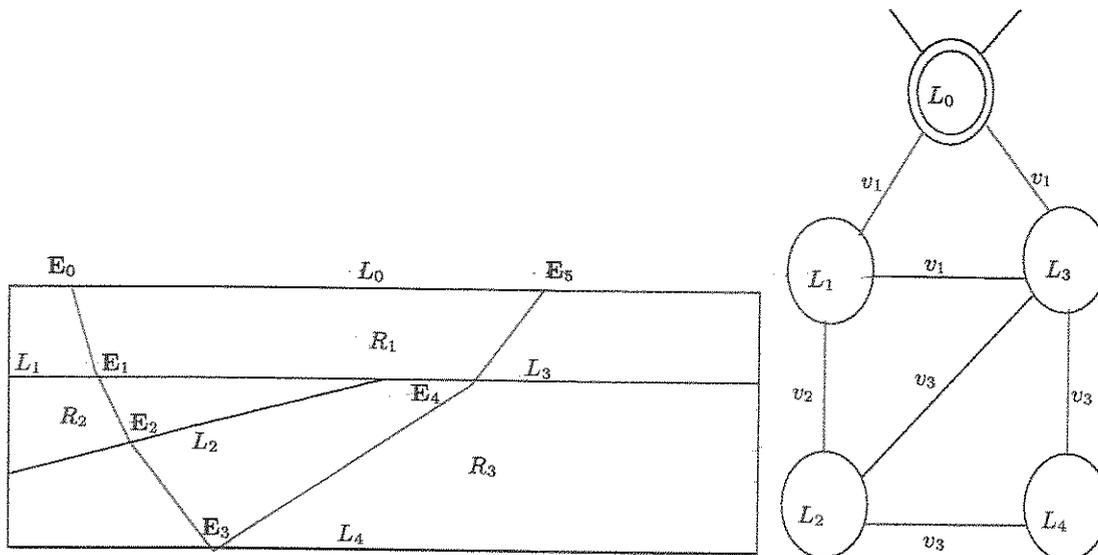


Figura 5.6: Autômato de um modelo, fonte e receptor na mesma interface.

1. Os nós (\mathcal{P}), equivalem às interfaces do modelo ($L_i, i = 0, 1, \dots, N_I$).

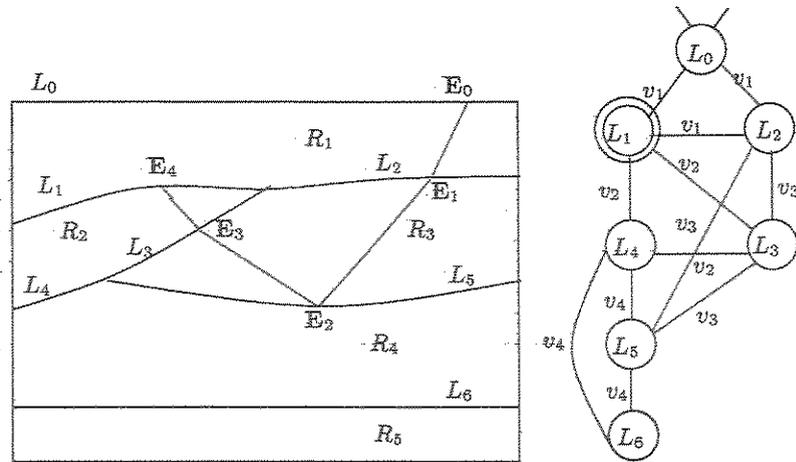


Figura 5.7: Autômato de um modelo, fonte e receptor em diferentes interfaces.

2. As arestas, (\mathcal{N}), ou conectividade entre estados, equivalem às regiões do modelo, que unem as respectivas interfaces, (R_j , $j = 1, \dots, N_R$).
3. O alfabeto (\mathcal{W}), equivale ao conjunto de símbolos que representam as velocidades nas sub-regiões do modelo (v_{jk}).
4. Os estados iniciais (\mathcal{P}_0), equivalem às interfaces do modelo onde estão localizadas as fontes.
5. Os estados finais (\mathcal{F}), equivalem às interfaces do modelo onde estão localizados os receptores.

Por exemplo, o autômato da Figura (5.6) é definido por:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P} &= \{L_0, L_1, L_2, L_3, L_4\} \\
 \mathcal{W} &= \{v_1, v_2, v_3\} \\
 \mathcal{N} &= \{(L_0, v_1, L_1), (L_0, v_1, L_3), (L_1, v_2, L_2), (L_1, v_1, L_0), (L_1, v_1, L_3), \\
 &\quad (L_2, v_2, L_1), (L_2, v_3, L_3), (L_2, v_3, L_4), (L_4, v_3, L_3), (L_4, v_3, L_2), \\
 &\quad (L_3, v_3, L_4), (L_3, v_3, L_2), (L_3, v_1, L_1), (L_3, v_1, L_0)\} \\
 \mathcal{P}_0 &= \{L_0\} \\
 \mathcal{F} &= \{L_0\}
 \end{aligned}$$

Nota: A representação de um modelo elástico como um autômato finito está mostrada na Figura (5.8). Nesta representação, devemos levar em conta que cada aresta do grafo possui

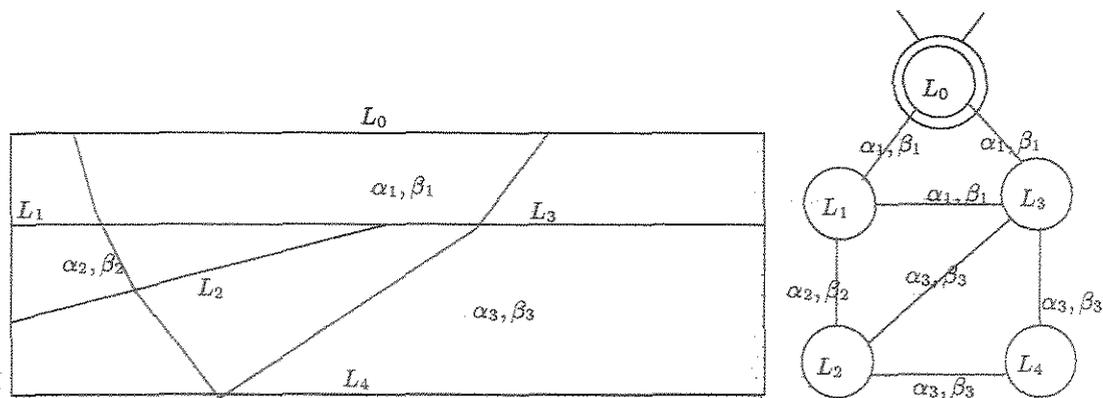


Figura 5.8: Modelo sísmico elástico e seu autômato finito.

dois símbolos associados: o primeiro, representa a velocidade de propagação da onda tipo P , na região respectiva; o segundo, representa a velocidade da onda tipo S , na região respectiva.

O autômato $\mathcal{A}(R)$ do modelo sísmico é um autômato muito particular, pois tem duas propriedades que em geral os autômatos não possuem. São elas:

1. Entre dois nós que têm conectividade, sempre existem arestas nos dois sentidos com o mesmo símbolo. Isto é, dados dois estados $e, q \in \mathcal{P}$, conectados por um símbolo, $x \in \mathcal{W}$, temos que $\delta(e, x) = q$ e $\delta(q, x) = e$. Fisicamente, isto representa o princípio de reciprocidade do raio, ou seja, que as posições da fonte e do receptor podem ser permutadas entre si, e continuam definindo o mesmo raio.
2. Dados dois estados $e_1, e_2 \in \mathcal{N}(e)$, ou seja, vizinhos de e , e dado $a \in \mathcal{W}$, que satisfazem $\delta(e, a) = e_1$ e $\delta(e, a) = e_2$, então temos que $\delta(e_1, a) = e_2$. Fisicamente, isto exclui a possibilidade de que duas regiões com a mesma velocidade estejam separadas por uma interface.

Em suma, estamos estabelecendo um morfismo³ entre a partição de um modelo sísmico e um autômato finito. A relação interna da partição do modelo, que representamos no autômato, é a de conectividade topológica. Duas interfaces diferentes do modelo estão conectadas topologicamente, se existe um arco, no interior de uma sub-região, que una um ponto de uma interface com outro ponto da outra interface. A representação desta relação no autômato está dada pela função de transição.

³Um morfismo é uma função que estabelece uma correspondência entre dois tipos de objetos matemáticos, e suas respectivas relações próprias.

Neste morfismo, o raio corresponde a uma palavra aceita e a um caminho de estados específico. A partir dessa palavra e desse caminho é construído o sistema não-linear de equações (como será mostrado adiante). Falamos de morfismo topológico, e não geométrico, pois uma palavra e um caminho específico representam uma classe de trajetórias de raios.

Por exemplo, considerando a Figura (5.6), o autômato que representa o modelo tem como conjunto de estados iniciais $\{L_0\}$ e conjunto de estados finais $\{L_0\}$. E o raio está representado pelo caminho de estados $(L_0, L_1, L_2, L_4, L_3, L_0)$ e a palavra aceita $v_1 v_2 v_3 v_3 v_1$. Esta palavra e este caminho representam TODOS os raios que possuem a fonte e o receptor na interface L_0 , e que interceptam as interfaces L_1, L_2, L_4 e L_3 , nessa ordem. Veremos, mais adiante, como construir todos os raios da classe de equivalência, com uma assinatura dada.

Considerando a Figura (5.7), o autômato que representa o modelo tem como conjunto de estados iniciais $\{L_0\}$ e conjunto de estados finais o conjunto $\{L_1\}$. E o raio está representado pelo caminho de estados $(L_0, L_2, L_5, L_3, L_1)$ e a palavra aceita $v_1 v_3 v_3 v_2$. Esta palavra e este caminho representam TODOS os raios que possuem a fonte na interface L_0 e o receptor na interface L_1 , e que interceptam as interfaces L_2, L_5 , e L_3 , nessa ordem.

Os modelos sísmicos implementados computacionalmente nesta tese, que representamos como autômatos, têm algumas particularidades, a saber:

1. A fonte e o receptor do raio estão localizados dentro de alguma interface.
2. A fonte e o receptor estão localizados na mesma interface (como acontece tipicamente na Sísmica de Exploração).

Consideramos estas particularidades na implementação computacional dos modelos, com o intuito de facilitar sua representação como autômatos. Mas, é importante ressaltar que isto não nos faz perder generalidade nas aplicações, pois:

- No caso em que a fonte ou o receptor estejam localizados fora de uma interface, ou seja, no interior de uma sub-região, utilizamos a interface que esteja na fronteira da sub-região em questão como L_0 .
- No caso em que a fonte e o receptor estejam localizados em interfaces diferentes, como mostrado na Figura (5.7), também podemos construir os autômatos correspondentes.

Este caso apresenta-se, por exemplo, em falhas geológicas que interrompem a superfície da Terra e Sísmica de poço. A seguir, veremos estes exemplos detalhadamente.

Se consideramos um modelo, como mostrado na Figura (5.9), onde temos uma falha geológica L_2 , que interrompe a superfície da Terra, podemos definir o autômato $\mathcal{A}(R)$ do modelo da seguinte forma: a superfície da Terra será igual à união das duas interfaces L_0 e L_1 (ou mais, se tivéssemos mais falhas). Assim, definimos os estados iniciais do autômato pelo conjunto $\{L_0, L_1\}$, e os estados finais pelo conjunto $\{L_0, L_1\}$. Dessa forma, podemos representar um raio que possui uma fonte localizada em L_0 , a um lado da falha, e o receptor em L_1 , ao outro lado da falha. O raio está representado pelo caminho de estados L_0, L_2, L_3, L_1 , e a palavra aceita $v_1 v_2 v_2$.

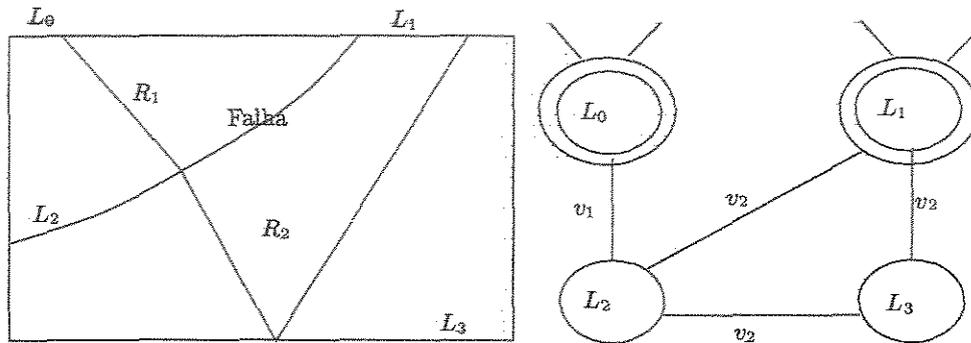


Figura 5.9: Autômato de um modelo com falha geológica que interrompe a superfície da Terra.

Suponhamos, para o modelo de Sísmica de poço (VSP)⁴, como mostrado na Figura (5.10), que a fonte está localizada na superfície da Terra, L_0 , e que o receptor está localizado em uma porção do poço, L_w , dentro de uma sub-região do modelo. Lembremos que, fisicamente, L_w não é uma interface propriamente dita, mas, nela está localizado o receptor, por isto será representada no autômato como o estado final. Assim, podemos representar o raio por seu caminho L_0, L_2, L_5, L_3, L_w , e pela palavra aceita $v_1 v_3 v_3 v_2$.

⁴Sigla em Inglês de *Vertical Seismic Profile*, ou seja, Perfil Sísmico Vertical. Designa-se assim aos levantamentos sísmicos nos que as ondas geradas na superfície são registradas por geofones, colocados em diferentes profundidades no interior do poço (Duarte, 1997).

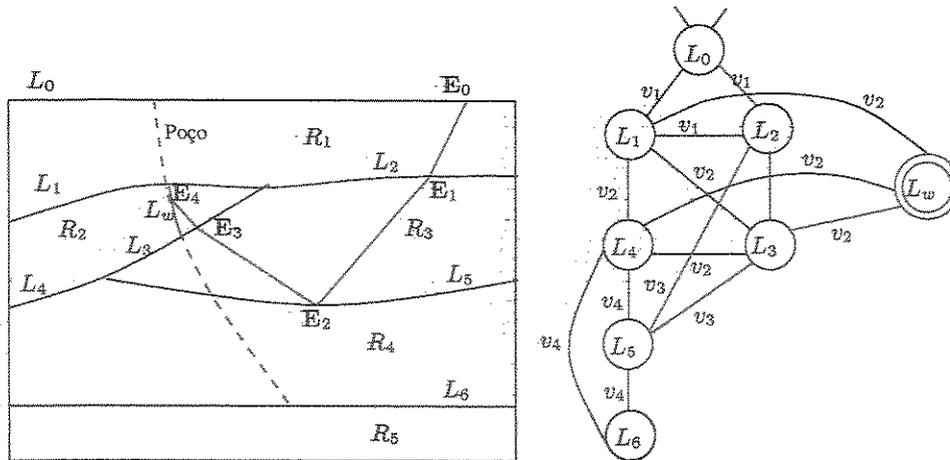


Figura 5.10: Autômato de um modelo de Sísmica de poço.

5.5.2 Traçamento de Raios Usando Autômatos Finitos

Como foi dito anteriormente, o raio corresponde, no autômato do modelo, a uma palavra aceita e a um caminho de estados específico. A partir dessa palavra e desse caminho, vamos montar o sistema não-linear de equações que representa o traçamento de raios, para, posteriormente, mostrar como funciona o algoritmo computacional implementado para o traçamento de raios.

Relação entre a Assinatura de um Raio e o Caminho de Estados e a Palavra Aceita desse Raio

A relação entre o traçamento de raios e os autômatos finitos, está dada pela relação entre a assinatura do raio, no modelo, e o caminho de estados e a palavra aceita do raio, no autômato. Vejamos como se dá esta relação:

Se o raio tem a fonte na interface L_{i_0} , o receptor na interface $L_{i_{N+1}}$, intercepta as interfaces L_{i_1}, \dots, \dots e L_{i_N} , e atravessa as regiões $R_{j_1}, R_{j_2}, \dots, R_{j_N}$, e $R_{j_{N+1}}$ com velocidades $v_{j_1}, v_{j_2}, \dots, v_{j_N}$, e $v_{j_{N+1}}$, respectivamente, então a assinatura é dada por

$$[i_1, i_2, \dots, i_N; j_1, j_2, \dots, j_N, j_{N+1}].$$

Chamando a assinatura de f , definamos as seguintes funções:

$$\begin{aligned}
 l(f) &= (L_{i_0}, L_{i_1}, \dots, L_{i_N}, L_{i_{N+1}}), \\
 r(f) &= v_{j_1} v_{j_2} \dots v_{j_N} v_{j_{N+1}}.
 \end{aligned}
 \tag{5.7}$$

No autômato do modelo, observemos que $l(f)$ corresponde ao caminho de estados do raio, e $r(f)$ corresponde à palavra aceita do raio. Assim, fixando a interface onde está a fonte L_{i_0} e interface onde está o receptor $L_{i_{N+1}}$, observemos que existe uma correspondência bijetora entre a assinatura de um raio e o caminho de estados e a palavra aceita desse raio. Desta forma, poderemos falar quer da assinatura do raio, quer do caminho de estados e palavra aceita do raio, para determinar o raio em questão.

Como foi dito no Capítulo 3, a assinatura do raio define uma classe de equivalência de raios no modelo sísmico. Correspondentemente, o caminho de estado e palavra aceita do raio, no autômato, definem a mesma classe de equivalência de raios.

Por exemplo, na Figura (5.11), um modelo acústico, a interface onde está a fonte é L_0 , a interface onde está o receptor é L_1 , a assinatura do raio é $[2, 5, 3; 1, 3, 3, 2]$. Ou, de forma equivalente, no autômato do modelo, o caminho de estados do raio é $(L_0, L_2, L_5, L_3, L_1)$, e a palavra aceita do raio é $v_1 v_3 v_3 v_2$.

No exemplo da Figura (5.12), um modelo elástico, a interface onde está a fonte é L_0 , a interface onde está o receptor é L_0 , a assinatura do raio é $[1, 2, 4, 3; 2, 4, 5, 5, 2]$. Ou, de forma equivalente, no autômato do modelo, o caminho de estados do raio é $(L_0, L_1, L_2, L_4, L_3, L_0)$ e a palavra aceita do raio é $\alpha_1 \alpha_2 \beta_3 \beta_3 \alpha_1$.

Nota: Dentro do conjunto infinito de palavras de um autômato, $\mathcal{L}(\mathcal{A})$, podemos selecionar subconjuntos finitos de palavras que tenham algum interesse geofísico. Estes subconjuntos representam classes de raios. Apresentamos, a seguir, algumas classes específicas de raios, baseadas somente nos tipos de palavras aceitas:

- A classe de raios representada por uma palavra que não possui uma sub-sequência de dois símbolos iguais consecutivos. Por exemplo, $v_1 v_2 v_3 v_1$. A esta classe de raios pertence o raio transmitido.
- A classe de raios representada por uma palavra que possui somente uma sub-sequência

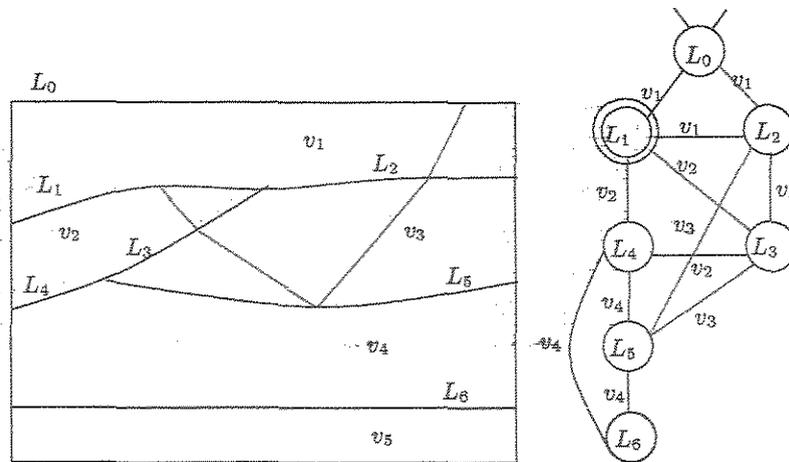


Figura 5.11: Representação de um raio em um modelo acústico e seu autômato finito.

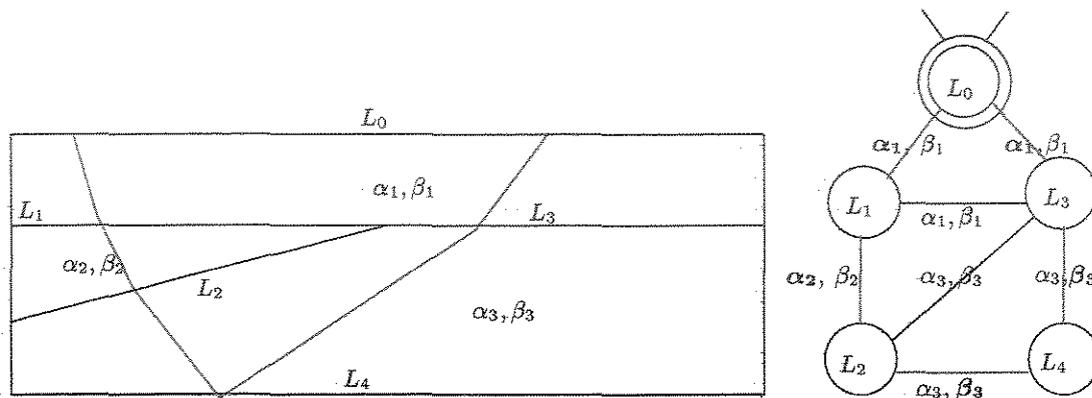


Figura 5.12: Representação de um raio em um modelo elástico e seu autômato finito.

de dois símbolos iguais consecutivos. Por exemplo, $v_1 \widehat{v_2 v_2} v_1 \dots$. Um raio refletido primário faz parte desta classe de raios.

- A classe de raios representada por uma palavra que tem duas ou mais sub-sequências diferentes, cada uma com símbolos iguais consecutivos. Por exemplo, $v_1 v_2 \widehat{v_3 v_3} \widehat{v_2 v_2} \dots$. Uma múltipla faz parte desta classe de raios.

Uma representação de um outro tipo de múltipla, é dada por uma palavra que possui, pelo menos, uma sub-sequência de três símbolos iguais consecutivos. Por exemplo, $v_1 \widehat{v_2 v_2 v_2} v_1 \dots$.

Assim, a partir desta taxonomia, podemos selecionar ou descartar diferentes classes de raios, de acordo ao problema que nos interesse solucionar.

Construção dos raios da classe de equivalência

A partir do caminho de estados e da palavra aceita, que representam um raio, montamos o sistema não-linear que descreve a trajetória desse raio

$$\Phi(\mathbf{X}, \mathbf{V}) = \mathbf{0},$$

onde \mathbf{X} deve satisfazer as restrições:

$$a_{i_k} \leq x_i \leq b_{i_k}, \quad 1 \leq k \leq N,$$

sendo a_{i_k} e b_{i_k} os limites esquerdo e direito, do domínio de definição da k -ésima interface interceptada pelo raio.

Em outras palavras, serão considerados como soluções válidas do sistema, isto é, raios do modelo multi-regiões, os \mathbf{X} que satisfaçam

$$\mathbf{X} \in \prod_{k=1}^N [a_{i_k}, b_{i_k}]$$

$\mathcal{D} = \prod_{k=1}^N [a_{i_k}, b_{i_k}]$ é uma caixa em \mathbb{R}^N , que define as restrições da solução do sistema não-linear.

Nos programas computacionais implementados nesta tese, chamamos de “barreiras” os intervalos $[a_{i_k}, b_{i_k}]$.

Depois de montado o sistema não-linear, encontra-se o primeiro raio da classe e constroem-se os outros raios da classe utilizando o Método de Continuação. O algoritmo que implementa estas idéias é descrito no próximo capítulo.

Capítulo 6

Programas e Exemplos

6.1 Introdução

Apresentamos, neste capítulo, uma descrição da biblioteca computacional OCTRAL. Esta biblioteca foi criada e implementada por nós, para implementar computacionalmente o Método de Continuação, no traçamento de raios, usando autômatos finitos. Apresentamos, também, vários exemplos de traçamento de raios e sismogramas, construídos com esta biblioteca, para algumas situações típicas de modelos multi-regiões. Para validar o modelamento realizado pelo OCTRAL, fazemos algumas comparações com o modelamento realizado pela biblioteca computacional CSHOT.

6.2 Programas

6.2.1 O CSHOT

O CSHOT é uma biblioteca computacional, de domínio público, cujos programas foram implementados em FORTRAN. O CSHOT faz parte do *Seismic Unix (SU)*¹ e foi criado e implementado na tese de doutorado de Paul Docherty em 1985.

O CSHOT permite fazer modelamento sísmico em modelos 2.5D acústicos, utilizando traçamento de raios pelo Método de Continuação. Ele é muito eficiente computacionalmente e tem sido utilizado, por mais de quinze anos, no *CWP* e pela indústria geofísica em geral. Porém, o CSHOT, tem limitações muito severas na geometria dos modelos. A razão dessas

¹O *SU* é uma biblioteca computacional desenvolvida pelo grupo *Center for Wave Phenomena (CWP)*, de *Colorado School of Mines* (Golden, Colorado, Estados Unidos).

limitações está na forma como foi concebido o algoritmo, pois o CSHOT considera os modelos sempre como domínios multi-camadas, definidos por sub-regiões que estão limitadas por interfaces na parte superior e inferior, sem nenhum tipo de intersecção.

Portanto, muitos casos de interesse na indústria do petróleo não podem ser modelados com este tipo de algoritmo. Alguns deles são: cunhas, onde se produz uma intersecção das interfaces; lentes, que estão definidas por interfaces que não cruzam o domínio totalmente; falhas, que representam deformações do subsolo; e domos, com estruturas nos flancos.

Para esses casos, o CSHOT aborta ou não dá resposta correta. Contudo, isso não invalida os algoritmos implementados por Docherty (1985); apenas mostra a necessidade de criar outros programas, utilizando outros conceitos computacionais, que possam-se adaptar a estas novas situações.

Consideramos importante ressaltar a forma como o CSHOT faz os sismogramas (Docherty, 1986). O sismograma no CSHOT está definido por uma série de tempo da função $s(t)$, dada por

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A \hat{f}(\omega) e^{-i\omega(t-\tau)} d\omega,$$

onde A é a amplitude calculada pelo tubo de raios, τ é o tempo de trânsito do evento de interesse e $\hat{f}(\omega)$ é o espectro de frequência da fonte. Para avaliar esta integral, o CSHOT utiliza o algoritmo da Transforma Rápida de Fourier (Brigham, 1974).

Observemos que quando $t = \tau$ obtemos o valor

$$s(t) = A \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A \hat{f} d\omega,$$

ou seja, a amplitude pico nos sismogramas está multiplicada pela área do espectro de frequências da fonte. No CSHOT, a integral está definida como a área de um filtro passa-faixa que define o espectro de frequências da fonte. Assim, para obter a amplitude pico para um evento, temos que dividir pela integral. Nos exemplos apresentados nesta tese, o filtro é trapezoidal, definido por quatro frequências, como mostrado na Figura (6.1).

Como a fonte é causal, temos que considerar também as frequências negativas (Červený,

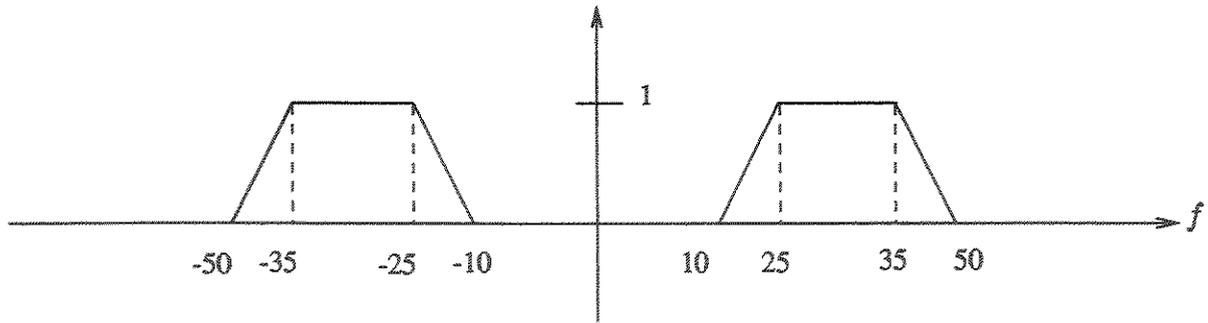


Figura 6.1: Espectro de frequência da fonte.

2001). Portanto, a área do filtro, ou em forma equivalente, o fator de escala é dado por

$$2 \cdot \left[\frac{(25 - 10)}{2} \cdot 1 + (35 - 25) \cdot 1 + \frac{(50 - 35)}{2} \cdot 1 \right] = 50,$$

onde o 2 considera os dois trapézios simétricos no domínio da frequência.

Os experimentos numéricos, realizados nesta tese com modelos de uma interface, mostraram que dividindo os valores numéricos máximos dos traços do CSHOT pelo fator de escala 50, os novos valores ficam perto das amplitudes verdadeiras. Isto foi verificado através de uma solução analítica. Baseados neste fato, poderíamos especular que para outros modelos, com geometria considerada pelo CSHOT, os novos valores das amplitudes também ficam perto das amplitudes verdadeiras.

Devido ao fato de que o CSHOT utiliza um interpolador tipo sinc, esse fator de escala pode variar um pouco de um traço para outro². Esta variação sempre está perto de 50.

6.2.2 O OCTRAL

O OCTRAL é uma biblioteca computacional que criamos e implementamos na linguagem OCTAVE³. Nesta biblioteca, implementamos computacionalmente as idéias desenvolvidas no percurso desta tese, permitindo testar a viabilidade das mesmas. Assim, o OCTRAL nos permite estender o traçamento de raios de modelos 2.5D multi-camadas até modelos

²As informações que apresentamos aqui foram discutidas, através de correios eletrônicos, com John Stockwell (john@dix.mines.edu), administrador do *SU* em *Colorado School of Mines*.

³O OCTAVE é uma linguagem interpretada de cálculo numérico análoga ao MATLAB. Essa linguagem é de livre distribuição e os códigos são abertos. Faz parte da licença GPL, que opera no sistema LINUX.

(acústicos/elásticos) 2.5D multi-regiões⁴, utilizando o Método de Continuação e os autômatos finitos.

Esta biblioteca computacional (*scripts* e funções) e diferentes exemplos, de interesse geofísico, estão disponíveis no seguinte endereço eletrônico:

[http:// www.lgm.ime.unicamp.br/~cpiedrah/Archivos/Programs/Octave](http://www.lgm.ime.unicamp.br/~cpiedrah/Archivos/Programs/Octave)

O algoritmo principal, implementado nesta biblioteca, para o traçamento de raios e a construção de sismogramas, se apresenta a seguir.

Algoritmo para o Traçamento de Raios e Construção de Sismogramas

1. Entrar os Dados

Entramos os dados do modelo ao computador: interfaces, velocidades, localização das fontes e dos receptores.

2. Construir o Autômato finito

Construímos o autômato finito que representa o modelo sísmico. Esta construção é feita manualmente.

3. Construir a Classe de Raios

A partir do autômato, construímos um sub-conjunto de palavras aceitas de nosso interesse e seu correspondente caminho de estados.⁵ Esta informação é guardada em duas matrizes, uma de palavras, e outra dos caminhos correspondentes. Seleccionamos uma palavra na matriz, e seu correspondente caminho de estados na outra matriz, determinando assim uma classe de raios.

4. Montar o sistema não-linear

Seleccionamos a localização de uma fonte e de um receptor. Com esta informação e com a informação obtida no passo anterior, montamos o sistema não-linear.

5. Encontrar o Primeiro Raio da Classe

⁴Neste momento, estamos fazendo outra versão do OCTRAL que permita o traçamento de raios em modelos 3D multi-regiões, homogêneo em cada sub-região. Esta versão não está sendo incluída nesta tese.

⁵Esta construção pode ser feita manual o computacionalmente. Já fizemos uma primeira versão de um programa computacional que nos permite construir essas palavras, implementado em C++, e baseado na função de transição determinada pelo autômato. Nos exemplos mostrados nesta tese, na próxima seção, esta construção foi feita manualmente.

Como não temos um raio específico dessa classe de raios, aplicamos o método do disparo (Apêndice B), ou o método da busca aleatória (Apêndice C) para obtê-lo. Assim temos o primeiro raio da classe.

6. Encontrar os Outros Raios da classe

Como já conhecemos uma solução para o sistema não-linear dado, aplicamos o Método de Continuação em receptores e o Método de Newton, para encontrar os outros raios da classe, correspondentes às diferentes posições dos receptores com a mesma assinatura. Este processo é feito com todos os receptores da configuração.

Terminado o anterior, mudamos a posição da fonte e voltamos ao passo 5. Continuamos este processo iterativamente até esgotar todas as fontes da configuração do modelo.

Se o Método de Newton não convergir, pode ser que para esse par fonte-receptor, com a assinatura dada, o sistema não tenha solução; ou pode ser que o Método de Continuação não tenha gerado uma boa aproximação inicial para o Método de Newton. Nessa situação, voltamos ao método do disparo ou de busca aleatória para procurar um outro raio, e voltamos ao Método de Continuação.

Encontrados todos os raios para uma classe particular, voltamos ao passo 3, até esgotar todas as palavras aceitas e seu correspondente caminho de estados.

7. Calcular Tempos e Amplitudes

À medida que o traçamento dos raios é feito, avaliamos os tempos de trânsito e as amplitudes de cada raio. Para avaliar as amplitudes, utilizamos as fórmulas enunciadas no Capítulo 4. Isto fornece dois números, τ e A , onde τ é o tempo de trânsito e A é a amplitude. O número τ é guardado em uma matriz de tempos, e o número A é guardado em uma matriz de amplitudes.

8. Construção do sismograma

Terminado o traçamento de raios, utilizamos a matriz de tempos e a matriz de amplitudes para construir o sismograma sintético.

Neste tese, utilizamos uma fonte representada por um Pulso de Ricker,

$$f(t) = [1 - 2(\pi f_p)^2 t^2] \exp[-(\pi f_p)^2 t^2],$$

onde f_p é a frequência pico de 30 Hz.

Construímos a extensão analítica da fonte, $F(t)$, e para cada par fonte-receptor modificamos o sinal analítico, utilizando a forma $AF(t - \tau)$. Esta última expressão, representa o sinal modificado para o evento em questão. Dado um par fonte-receptor existem vários eventos que são registrados no traço, representados pelos diferentes caminhos.

Definimos TR , uma função do tempo de registro que representa esse par fonte-receptor. Ela é construída somando todos os caminhos possíveis que unem a fonte com o receptor, isto é,

$$TR = \sum_i A_i F(t - \tau_i), \quad (6.1)$$

onde t é a variável que representa o tempo de registro, e i é o índice do caminho, que representa uma classe de raios com uma assinatura dada.

Finalmente, construímos uma série de tempo, definida por uma discretização de $\text{Re}\{TR\}$ (utilizamos uma discretização temporal definida pelo tempo de amostra, usualmente de 2 ms ou 4 ms). Esta série de tempo é graficada e constitui um traço do sismograma.

Nota: Os critérios de parada para os métodos numéricos utilizados já foram explicitados na seção (3.8), assim: para o Método de Newton, até 200 iterações; para o Método de Continuação, até 128 pontos da seqüência de continuação; para o método de busca aleatória, até 200 buscas; e para o método de disparo, a varredura do ângulo de disparo tem um valor mínimo de 0.1 grau.

6.3 Exemplos

Apresentamos, nesta seção, vários exemplos do traçamento de raios para meios acústicos, em diferentes tipos de modelos multi-regiões, construídos com o OCTRAL.

Nota: Embora o OCTRAL permita trabalhar as unidades dos valores numéricos no sistema inglês e no sistema MKS, as unidades utilizadas nos exemplos desta tese serão no sistema inglês. Isto, com o intuito de fazer algumas comparações posteriores entre o OCTRAL e o CSHOT. Os valores numéricos utilizados no OCTRAL, como parâmetros dos modelos, são os mesmos dos apresentados nos exemplos do manual do CSHOT, que utiliza unidades inglesas.

Assim, as unidades de distância estão dadas em pés (ft), e as de velocidade em pés por segundo (ft/s).

6.3.1 Modelo de Cunha

Este exemplo é importante, na sísmica de exploração, pelo tipo de geometria que ele envolve, pois esta geometria representa, muitas vezes, um possível depósito de petróleo. As cunhas são uma boa aproximação geométrica das formas que o subsolo tem, em regiões denominadas discordâncias angulares.

Neste tipo de modelos, as interfaces não estão definidas ao longo de todo o domínio e, além disso, apresentam intersecções, como mostrado na Figura (6.2).

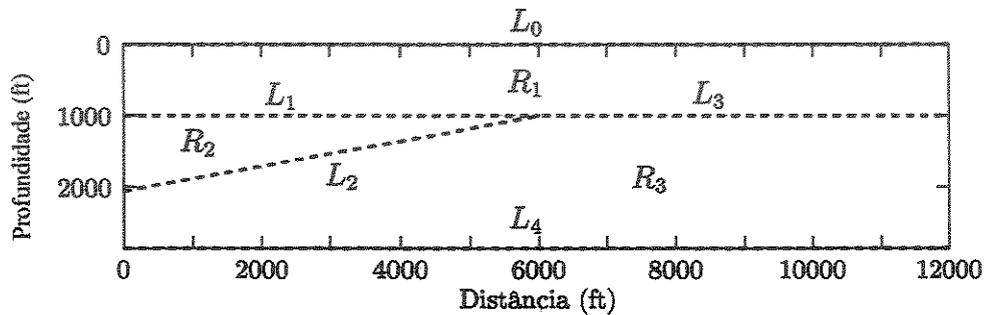


Figura 6.2: Modelo de cunha.

No modelo sísmico da cunha, temos quatro interfaces de interesse, L_1 , L_2 , L_3 e L_4 e, além disso, a superfície da Terra, L_0 , onde estão localizados a fonte e o receptor. As velocidades do modelo em cada sub-região, estão dadas por $v_1 = 2500$ ft/s, $v_2 = 3500$ ft/s e $v_3 = 4000$ ft/s, respectivamente.

No autômato do modelo, representado na Figura (6.3), temos:

$$\mathcal{P} = \{L_0, L_1, L_2, L_3, L_4\}, \mathcal{P}_0 = \{L_0\}, \mathcal{F} = \{L_0\} \text{ e } \mathcal{W} = \{v_1, v_2, v_3\}.$$

Lembremos que as classes de raios, no autômato, estão determinadas por uma palavra aceita e por seu correspondente caminho de estados. Vejamos, então, o traçamento de quatro classes de raios, fixando a posição da fonte na coordenada (0,0).

1. A classe de raios, determinada pela palavra aceita $v_1 v_1$ e pelo caminho de estados (L_0, L_1, L_0) , está representada na Figura (6.4).

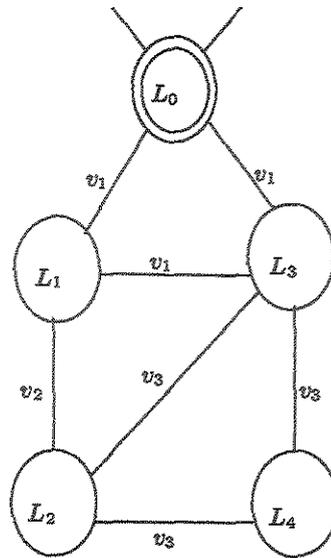


Figura 6.3: Autômato que representa o modelo de cunha.

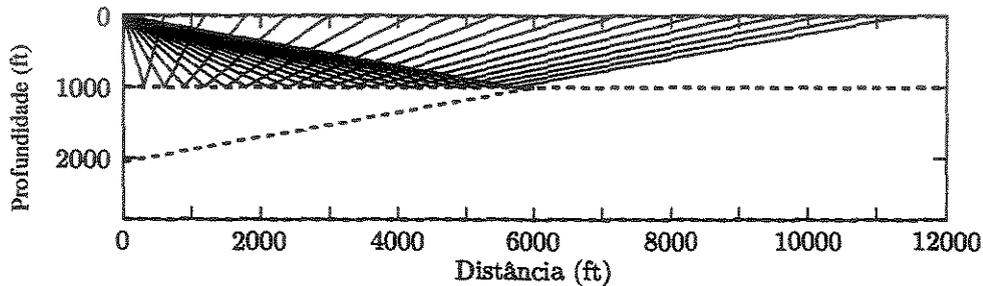


Figura 6.4: Classe de raios determinada por v_1v_1 e (L_0, L_1, L_0) .

2. A classe de raios, determinada pela palavra aceita $v_1v_2v_2v_1$ e pelo caminho de estados $(L_0, L_1, L_2, L_1, L_0)$, está representada na Figura (6.5).
3. A classe de raios, determinada pela palavra aceita $v_1v_2v_3v_3v_2v_1$ e pelo caminho de estados $(L_0, L_1, L_2, L_4, L_2, L_1, L_0)$, está representada na Figura (6.6).
4. A classe de raios, determinada pela palavra aceita $v_1v_2v_3v_3v_1$ e pelo caminho de estados $(L_0, L_1, L_2, L_1, L_0)$, está representada na Figura (6.7).

6.3.2 Modelo de Lente

Este tipo de estrutura geológica, mostrada na Figura (6.8), é de interesse por ser usualmente uma zona onde se acumula gás.

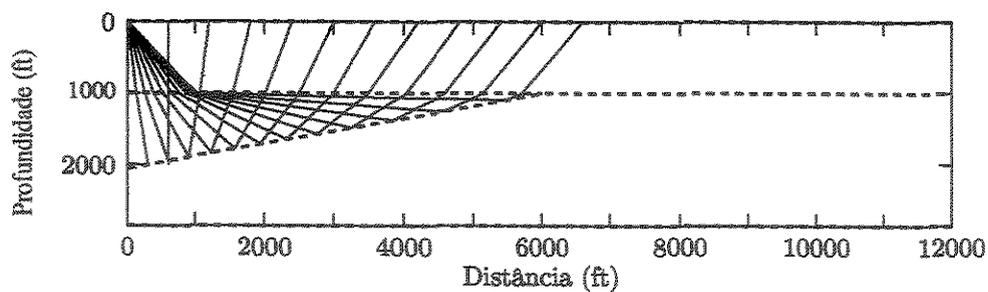


Figura 6.5: Classe de raios determinada por $v_1 v_2 v_2 v_1$ e $(L_0, L_1, L_2, L_1, L_0)$.

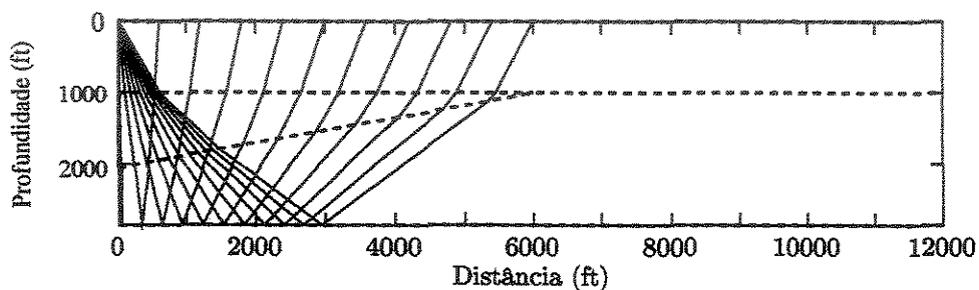


Figura 6.6: Classe de raios determinada por $v_1 v_2 v_3 v_3 v_2 v_1$ e $(L_0, L_1, L_2, L_4, L_2, L_1, L_0)$.

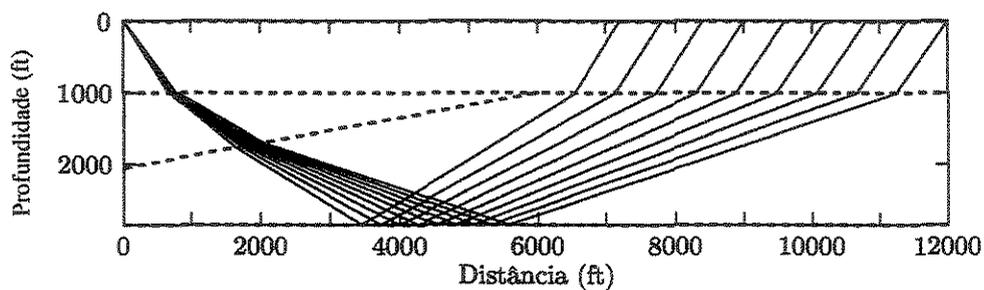


Figura 6.7: Classe de raios determinada por $v_1 v_2 v_3 v_3 v_1$ e $(L_0, L_1, L_2, L_1, L_0)$.

Neste tipo de modelos, as interfaces não estão definidas ao longo de todo o domínio.

No modelo sísmico da lente, temos três interfaces de interesse, L_1 , L_2 e L_3 e, além disso, a superfície da Terra, L_0 , onde estão localizados a fonte e o receptor. As velocidades do modelo são: $v_1 = 4000$ ft/s, para a sub-região simplesmente conexa (Conway, 1978); e $v_2 = 6000$ ft/s, para a sub-região conexa do modelo.

No autômato do modelo, representado na Figura (6.9), temos:

$$\mathcal{P} = \{L_0, L_1, L_2, L_3\}, \mathcal{P}_0 = \{L_0\}, \mathcal{F} = \{L_0\} \text{ e } \mathcal{W} = \{v_1, v_2\}.$$

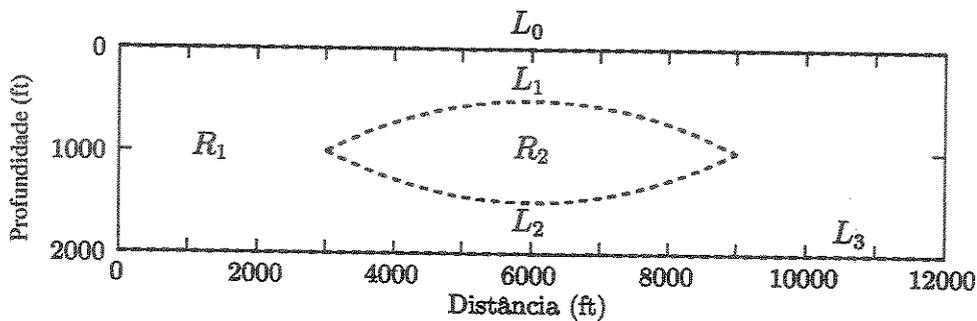


Figura 6.8: Modelo de lente.

Vejamos o traçamento de quatro classes de raios, fixando a posição da fonte na coordenada (6000,0).

1. A classe de raios, determinada pela palavra aceita v_1v_1 e pelo caminho de estados (L_0, L_1, L_0) , está representada na Figura (6.10).
2. A classe de raios, determinada pela palavra aceita $v_1v_2v_2v_1$ e pelo caminho de estados $(L_0, L_1, L_2, L_1, L_0)$, está representada na Figura (6.11).
3. A classe de raios, determinada pela palavra aceita $v_1v_2v_1v_1v_2v_1$ e pelo caminho de estados $(L_0, L_1, L_2, L_3, L_2, L_1, L_0)$, está representada na Figura (6.12)
4. A classe de raios, determinada pela palavra aceita $v_1v_2v_1v_1$ e pelo caminho de estados $(L_0, L_1, L_2, L_3, L_0)$, está representada na Figura (6.13).

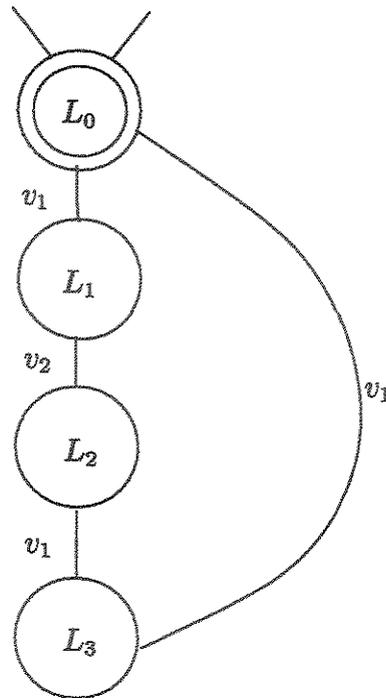


Figura 6.9: Autômato que representa o modelo de lente.

6.3.3 Modelo de Falhas

Os modelos com falhas representam estruturas que possuem deformações. Por exemplo, na zona montanhosa da Colômbia, as possíveis estruturas onde o petróleo fica acumulado têm esse formato. Na Figura (6.14) apresentamos um modelo desse tipo. Nestes modelos, as interfaces não estão definidas ao longo de todo o domínio e, além disso, apresentam intersecções.

Neste modelo sísmico com falhas, temos sete interfaces de interesse, $L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, L_6, L_7$ e, além disso, a superfície da Terra, L_0 , onde estão localizados a fonte e o receptor. As

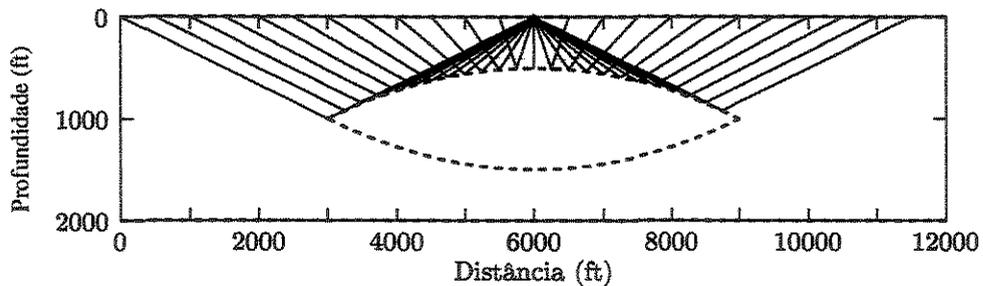


Figura 6.10: Classe de raios determinada por v_1v_1 e $(L_0, L_1.L_0)$.

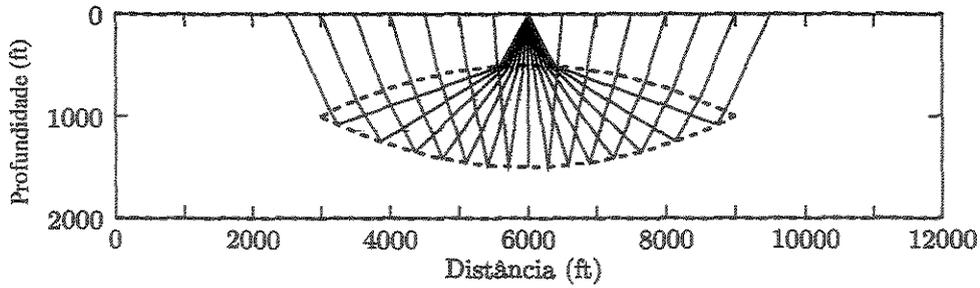


Figura 6.11: Classe de raios determinada por $v_1 v_2 v_2 v_1$ e $(L_0, L_1, L_2, L_1, L_0)$.

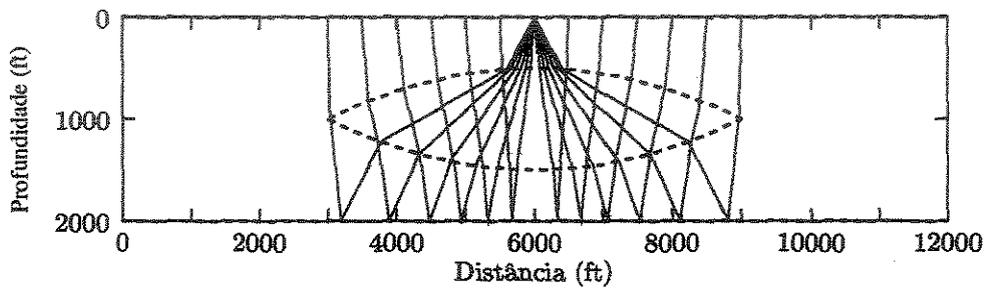


Figura 6.12: Classe de raios determinada por $v_1 v_2 v_1 v_1 v_2 v_1$ e $(L_0, L_1, L_2, L_3, L_2, L_1, L_0)$.

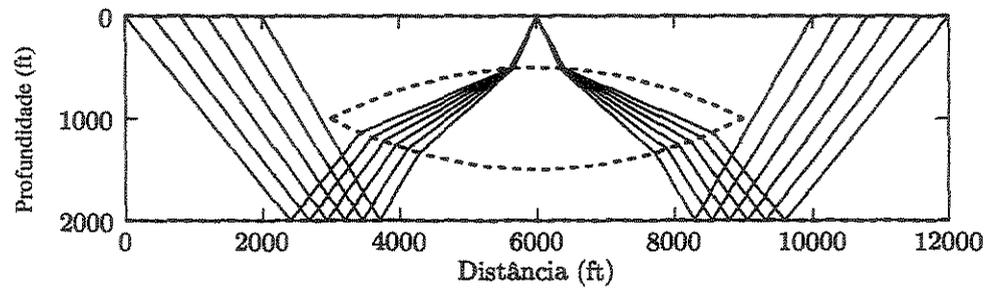


Figura 6.13: Classe de raios determinada por $v_1 v_2 v_1 v_1$ e por $(L_0, L_1, L_2, L_3, L_0)$.

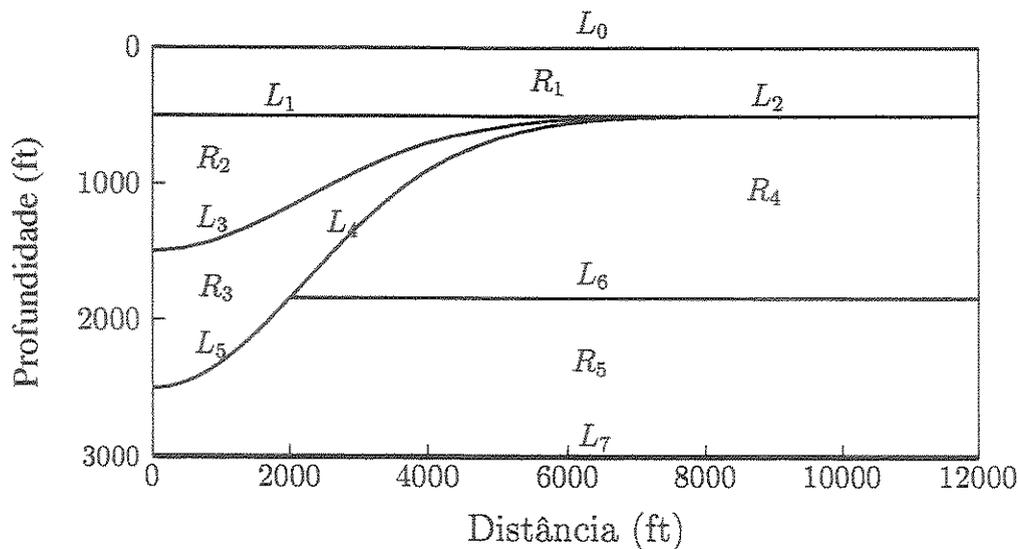


Figura 6.14: Modelo de falhas.

velocidades do modelo em cada sub-região, estão dadas por $v_1 = 5000$ ft/s , $v_2 = 7000$ ft/s, $v_3 = 8000$ ft/s, $v_4 = 8400$ ft/s e $v_5 = 16000$ ft/s, respectivamente.

No autômato do modelo, representado na Figura (6.15), temos:

$$\mathcal{P} = \{L_0, L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, L_6, L_7\}, \mathcal{P}_0 = \{L_0\}, \mathcal{F} = \{L_0\} \text{ e } \mathcal{W} = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}.$$

Vejamos o traçamento de três classes de raios, representado na Figura (6.16), fixando a posição da fonte na coordenada (0,0):

1. A classe de raios, determinada pela palavra aceita $v_1 v_1$ e pelo caminho de estados (L_0, L_1, L_0) , está representada pelos raios vermelhos.
2. A classe de raios, determinada pela palavra aceita $v_1 v_2 v_3 v_4 v_4 v_1$ e pelo caminho de estados $(L_0, L_1, L_3, L_4, L_6, L_2, L_0)$, está representada pelos raios azuis.
3. A classe de raios, determinada pela palavra aceita $v_1 v_2 v_3 v_5 v_5 v_4 v_1$ e pelo caminho de estados $(L_0, L_1, L_3, L_5, L_7, L_6, L_2, L_0)$, está representada pelos raios verdes.

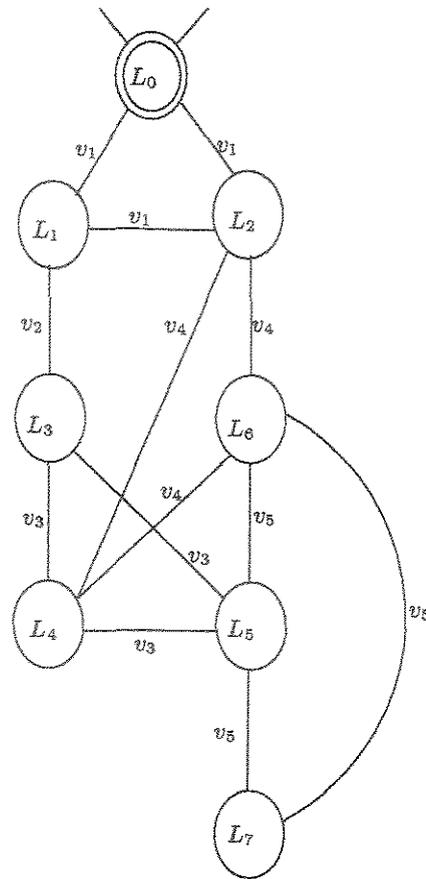


Figura 6.15: Autômato que representa o modelo de falhas.

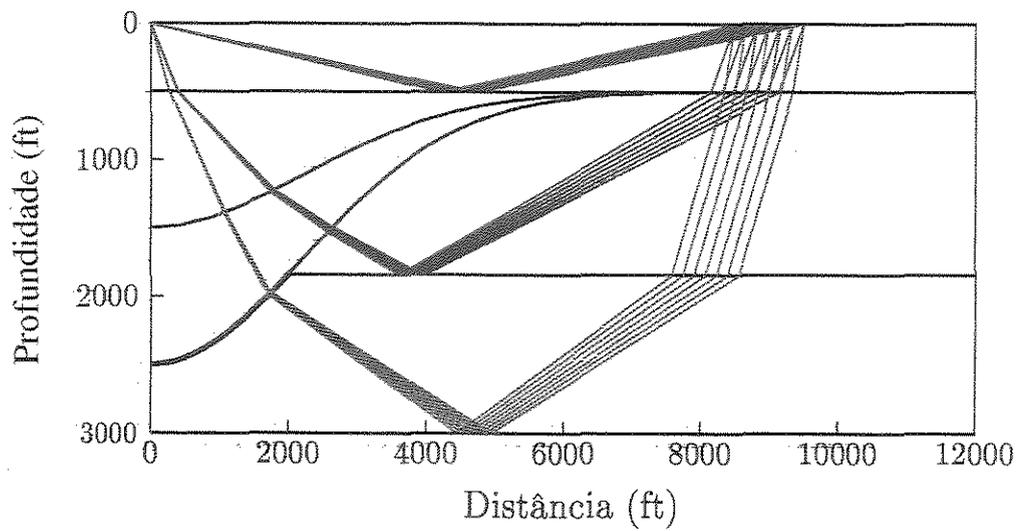


Figura 6.16: Três classes de raios diferentes em um modelo de falhas.

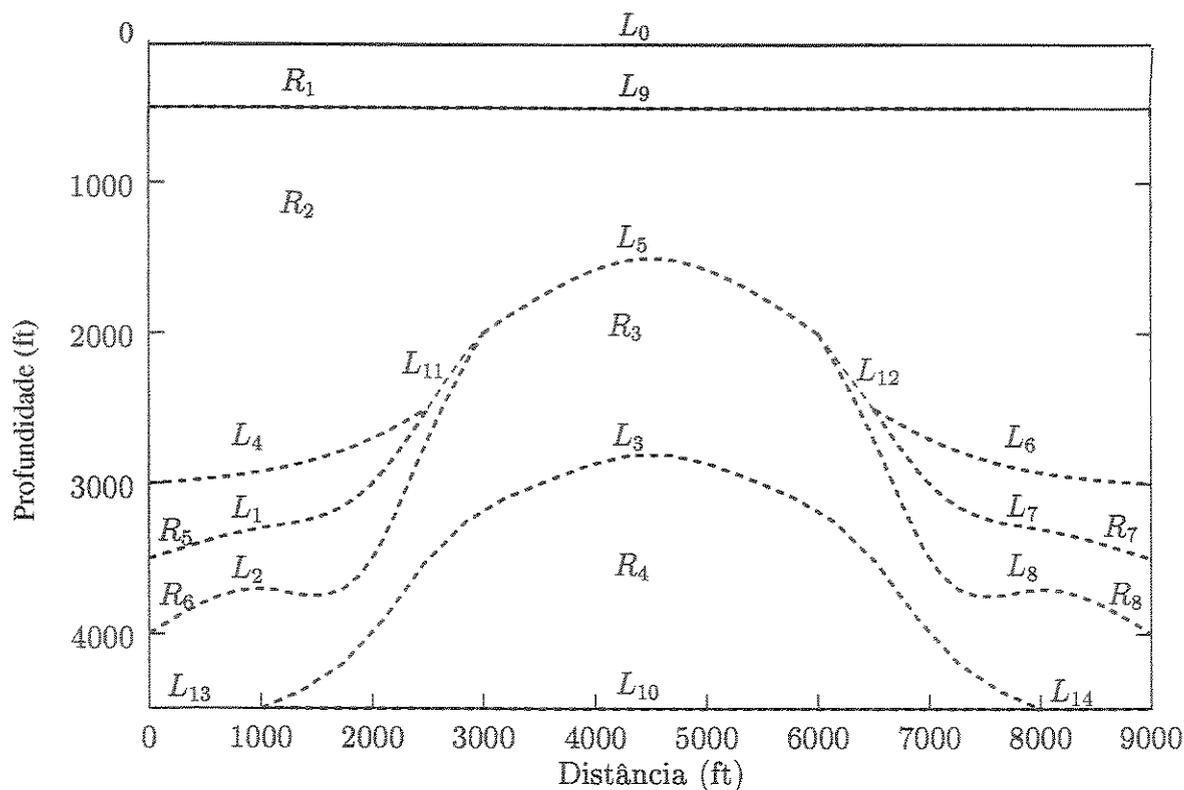


Figura 6.17: Modelo de domo.

6.3.4 Modelo de Domo

Os domos são estruturas geológicas que aparecem em situações de intrusão⁶ salina, isto é, as camadas são deformadas por um fluxo de um material viscoso (sal fundido) que produz uma forma geométrica, como é ilustrado na Figura (6.17). Este tipo de estrutura pode ser um possível reservatório de hidrocarbonetos, pois o óleo ou o gás podem ficar presos nos flancos do domo. Os flancos de domos são reservatórios comuns em diferentes bacias do mundo, especialmente no golfo de México.

Neste modelo de domo, temos quatorze interfaces de interesse, $L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, L_6, L_7, L_8, L_9, L_{10}, L_{11}, L_{12}, L_{13}, L_{14}$ e, além disso, a superfície da Terra, L_0 , onde estão localizados a fonte e o receptor. As velocidades do modelo em cada sub-região, estão dadas por $v_1 = 2500$ ft/s, $v_2 = 3500$ ft/s, $v_3 = 4000$ ft/s, $v_4 = 5000$ ft/s, $v_5 = 7000$ ft/s, $v_6 = 7500$ ft/s, $v_7 = 7000$

⁶Domo de sal: intrusão salífera que corta verticalmente as rochas sedimentares. Sua formação se deve ao comportamento fluídico do sal e ao fato da sua densidade ser menor que a das rochas encaixantes. (Duarte, 1997).

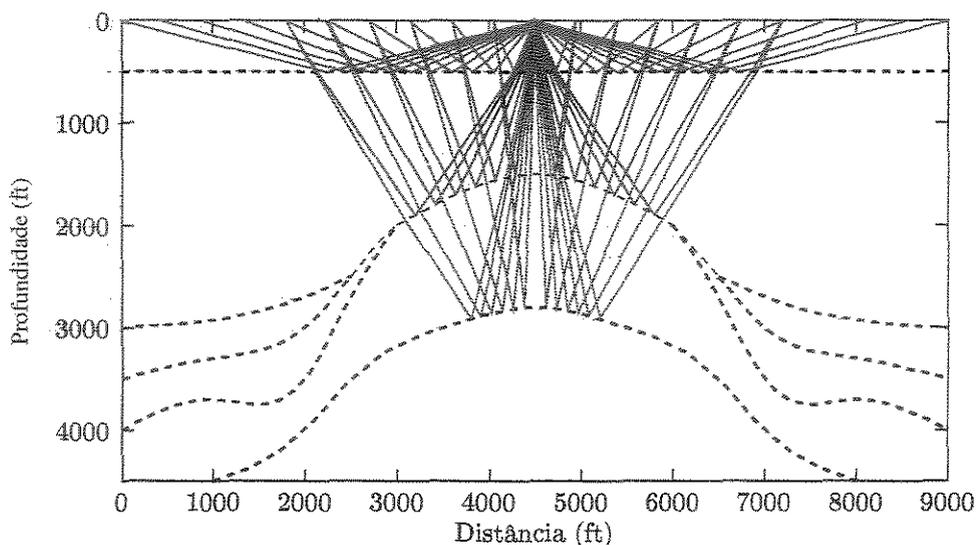


Figura 6.18: Três classes de raios diferentes em um modelo de domo.

ft/s e $v_8 = 7500$ ft/s, respectivamente.

Vejamos o traçamento de três classes de raios, representado na Figura (6.18), fixando a posição da fonte na coordenada (4500,0):

1. A classe de raios, determinada pela palavra aceita v_1v_1 e pelo caminho de estados (L_0, L_9, L_0) , está representada pelos raios vermelhos.
2. A classe de raios, determinada pela palavra aceita $v_1v_2v_2v_1$ e pelo caminho de estados $(L_0, L_9, L_5, L_9, L_0)$, está representada pelos raios azuis.
3. A classe de raios, determinada pela palavra aceita $v_1v_2v_3v_3v_2v_1$ e pelo caminho de estados $(L_0, L_9, L_5, L_3, L_5, L_9, L_0)$, está representada pelos raios verdes.

Na Figura (6.19), vemos dois raios pertencentes à classe determinada pela palavra $v_1v_2v_5v_6v_6v_5v_2v_1$ e pelo caminho de estados $(L_0, L_9, L_4, L_1, L_2, L_1, L_4, L_9, L_0)$, com uma fonte em (0,0). Observemos que estes raios entram pelo flanco do domo salino.

6.4 Validação do Modelamento Feito pelo OCTRAL

No mercado existem diversos programas que fazem traçamento de raios para modelos sísmicos de geometria complexa. Cada um deles usa métodos numéricos específicos nos algo-

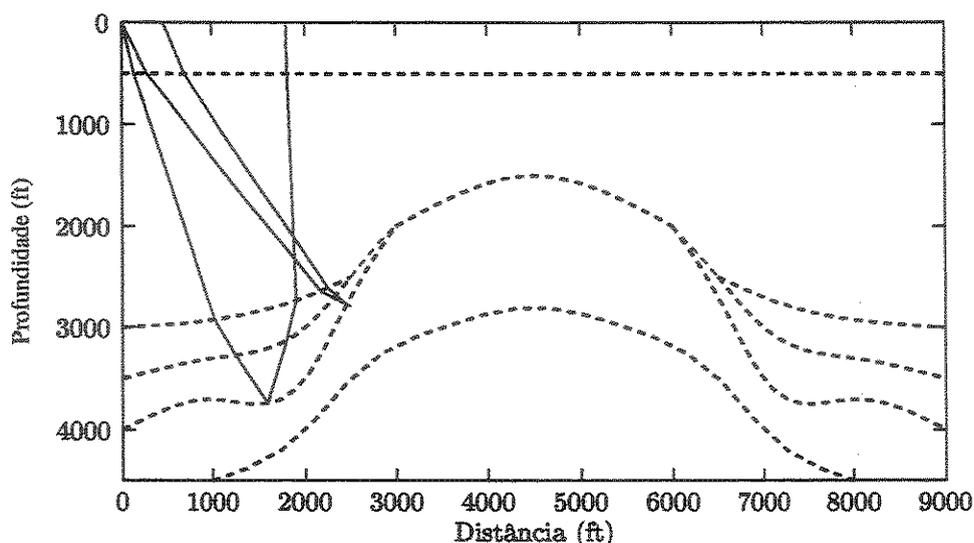


Figura 6.19: Dois raios de uma classe em um modelo de domo salino.

ritmos para realizar o traçamento. Dentre esses programas podemos citar SEIS88, NORSAR[©] e GXII[©].

Em particular, o SEIS88⁷ (Červený et al, 1977; Červený et al, 1988) faz traçamento de raios em modelos 2D e 2.5D, elásticos e heterogêneos por blocos. O traçamento é feito integrando as equações características do raio, através do Método de Runge-Kutta. As intersecções do raio com as interfaces do modelo são obtidas utilizando o Método de Newton e o método da bissecção.

Porém, para a validação dos algoritmos e programas criados e implementados nesta tese, através do OCTRAL, nós selecionamos programas que utilizam o Método de Continuação para o traçamento de raios, descartando, assim, as comparações com o SEIS88 e com outros programas.

Nossa escolha, baseada no objetivo fundamental desta tese, que é a extensão do Método de Continuação para o traçamento de raios em modelos de geometria complexa, nos levou a fazer as comparações com o CSHOT, justamente porque ele utiliza continuação em seus algoritmos de traçamento.

Para comparar os resultados que o OCTRAL e o CSHOT geram, analisaremos quatro modelos particulares, mostrando o traçamento de raios e os respectivos sismogramas:

⁷Criado e implementado por Vlastislav Červený e Ivan Pšenčík, do Departamento de Geofísica da Universidade de Charles (República Checa).

1. Modelo de uma camada horizontal.
2. Modelo multi-camadas.
3. Modelo com interfaces que se interceptam (cunha).
4. Modelo com interfaces não definidas em todo o domínio (lente).

Antes de iniciar as comparações entre o modelamento feito pelo OCTRAL e pelo CSHOT é importante lembrar que, como foi mencionado anteriormente, nos dois programas, ambos os sismogramas são feitos de forma diferente: no OCTRAL eles são calculados e construídos no domínio do tempo, utilizando a extensão analítica da fonte (pulso tipo Ricker), enquanto que no CSHOT eles são calculados no domínio da frequência, e construídos no domínio do tempo, utilizando a Transformada Inversa Rápida de Fourier.

Outra forma de verificar a precisão numérica do OCTRAL (sem precisar de comparações) é construindo uma matriz, que temos chamado matriz de resíduos, da seguinte forma: para um experimento sísmico com uma fonte fixa, n caminhos e n palavras aceitas (n assinaturas) e r receptores, definimos uma matriz Res de dimensões $n \times r$. Nesta matriz, o componente $Res(i, j)$ está definido como $\|\Phi(\mathbf{X})\|$, sendo $\Phi(\mathbf{X}) = 0$ o sistema de equações não-lineares que define o raio, e $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^N$ representa o raio que une a fonte dada e o receptor j -ésimo, através do caminho i -ésimo. Dito de outra forma, esta matriz contém todos os erros numéricos do traçamento de raios, de todas as assinaturas consideradas, para todos os receptores.

Desta forma, se o valor máximo dos valores absolutos de cada um dos componentes desta matriz é pequeno, então garantimos que as soluções dos sistemas não-lineares estão bastante perto dos raios físicos. Isto é, garantimos a precisão dos algoritmos implementados no OCTRAL. Estas idéias serão exemplificadas no modelo multi-camadas.

Finalmente, podemos garantir a validade do método de traçamento de raios feito pelo OCTRAL, considerando alguns dos critérios que determinam a validade do método de traçamento de raios em geral. Em particular, consideramos o critério, de tipo heurístico, que diz que o comprimento da onda, λ , deve ser muito mais pequeno que uma dimensão característica do modelo, l , (raio de curvatura das interfaces, dimensões do modelo, profundidade, etc.). Isto é, $\lambda \ll l$ (Bleistein, 1984; Kratsov & Orlov, 1990; Červený, 2001). Nos exemplos

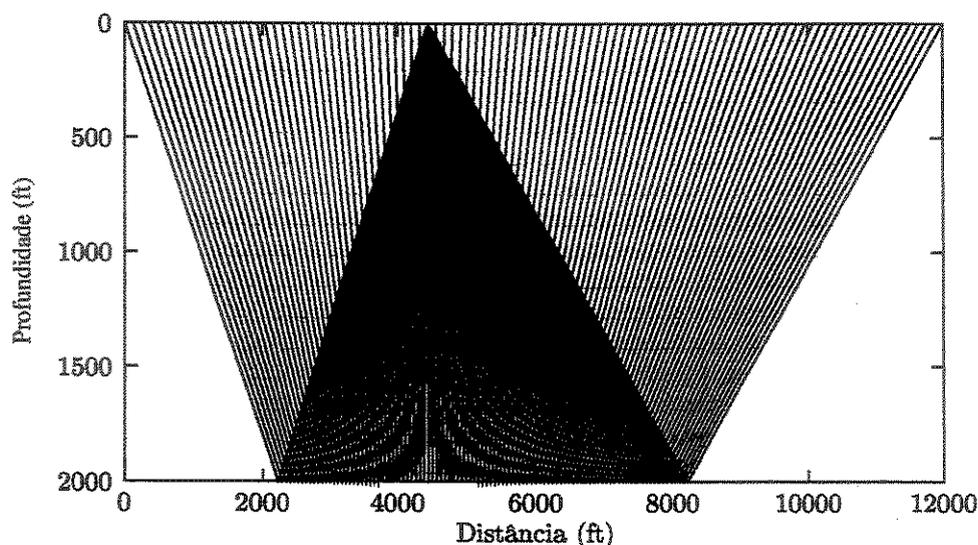


Figura 6.20: Traçamento de raios feito pelo OCTRL, modelo de uma interface.

considerados nesta tese o comprimento de onda do raio é aproximadamente de 300 ft, e as dimensões características típicas dos modelos são da ordem de 3000 ft. Segundo o critério de Bleistein (1984), $300 \ll 3000$.

6.4.1 Modelo de uma Camada Horizontal

Apresentamos um exemplo de um modelo composto por uma interface horizontal, a 2000 ft de profundidade da superfície da Terra. A velocidade na camada do modelo é $v_1 = 8000$ ft/s e a velocidade embaixo da interface é $v_2 = 10000$ ft/s. A fonte está localizada na superfície da Terra, na coordenada (4440,0). Os 101 receptores estão localizados na superfície da Terra, igualmente espaçados, cada 120 ft; o primeiro receptor está localizado na coordenada (0,0).

O traçamento de raios feito pelo OCTRL é mostrado na Figura (6.20), e o traçamento de raios feito pelo CSHOT é mostrado na Figura (6.21). Observamos, nessas figuras, que o traçamento de raios em ambos os programas é equivalente. Corroboramos isto com os valores dos tempos de trânsito do evento, nos sismogramas mostrados na Figura (6.23). Desta forma, validamos a parte cinemática do OCTRL.

Nota: Neste exemplo, em particular, mostramos, na Figura (6.22), os sismogramas construídos pelo OCTRL e pelo CSHOT (sem dividir pela área do filtro); e, na Figura (6.23), os sismogramas construídos pelo OCTRL e pelo CSHOT (depois de dividir os valores dos tra-

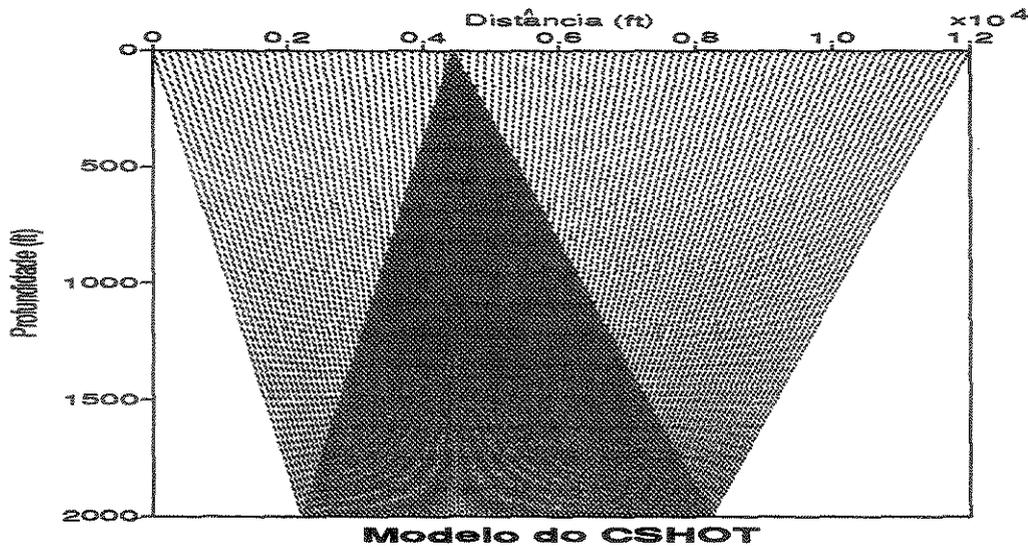


Figura 6.21: Traçamento de raios feito pelo CSHOT, modelo de uma interface.

ços pela área do filtro). Da mesma forma, mostramos os traços número 38, nas Figuras (6.24) e (6.25), em cada um dos sismogramas, respectivamente. Isto, com o intuito de que o leitor veja as diferenças entre eles, mas, nossas comparações serão feitas utilizando o sismograma e o traço do CSHOT já corrigidos.

Os valores da amplitude podem ser comparados considerando um traço, por exemplo, o número 38 (traço com afastamento nulo da fonte), mostrado na Figura (6.25). Concluindo que existe uma coincidência entre as amplitudes pico para este traço.

Para comparar as amplitudes pico dos outros traços observados nos sismogramas, utilizamos a fórmula analítica da amplitude para este modelo (Portugal, 1998), dada por:

$$A = \frac{\mathcal{R}}{4\pi d},$$

onde \mathcal{R} é o coeficiente de reflexão da interface, e d é a distância total do percurso do raio. Neste caso,

$$d = 2\sqrt{h^2 + (a)^2},$$

onde h é a profundidade da camada, e a é o afastamento do receptor.

Na Figura (6.26) comparamos as amplitudes máximas de cada um dos traços dos sismogramas gerados pelo OCTRAL e pelo CSHOT (dividindo pela área do filtro), com o valor

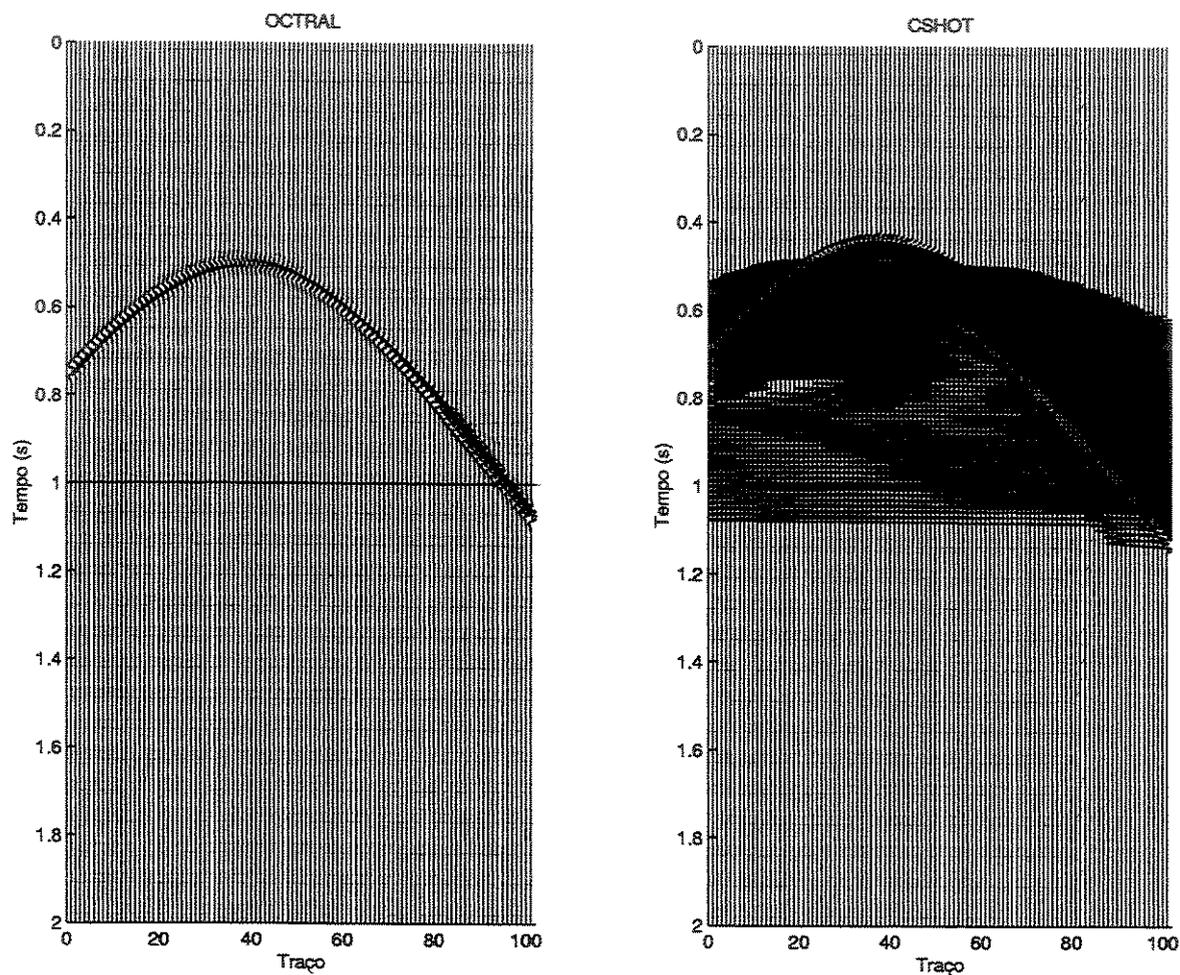


Figura 6.22: Comparação dos sismogramas gerados pelo OCTRL e pelo CSHOT (sem dividir pela área do filtro), modelo de uma interface.

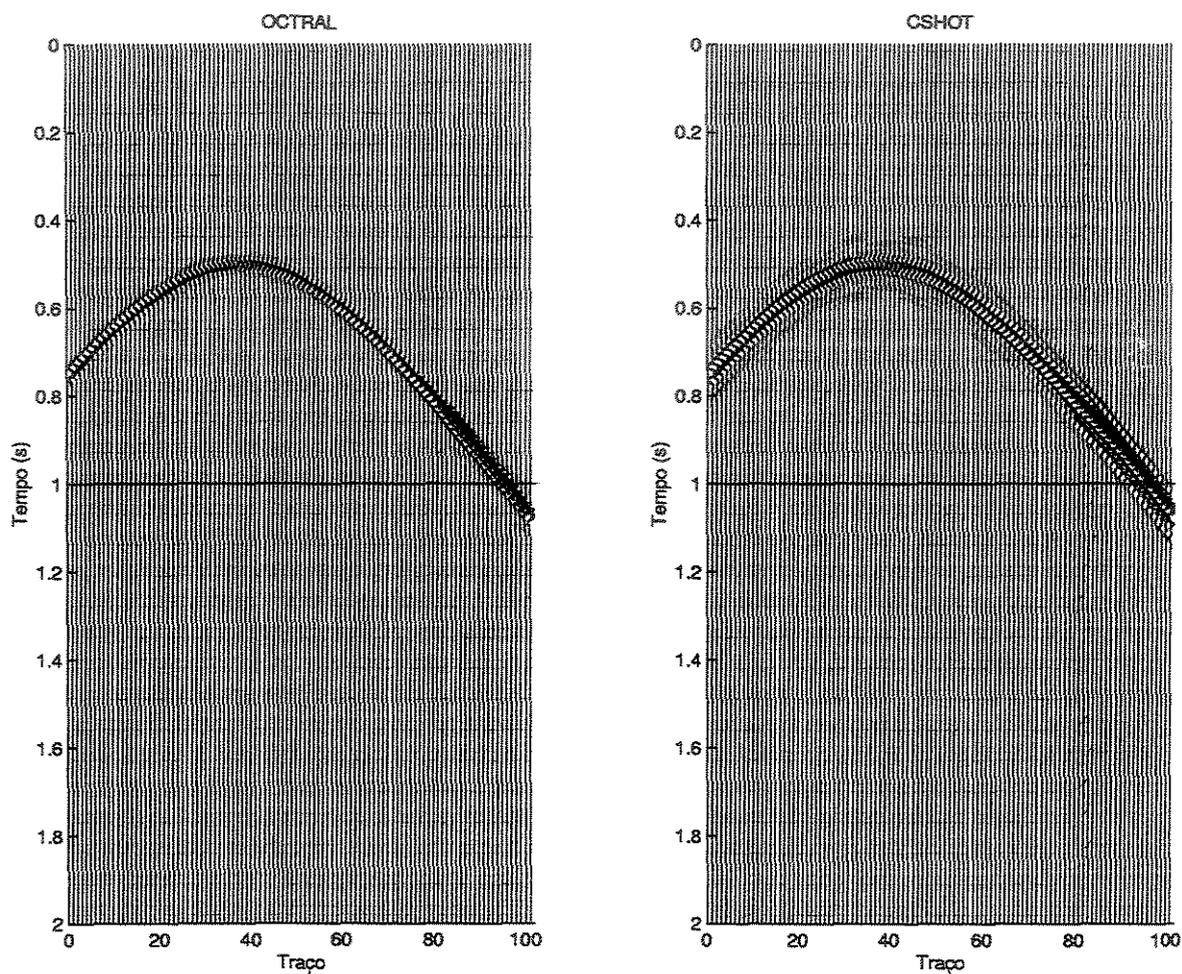


Figura 6.23: Comparação dos sismogramas gerados pelo OCTRAL e pelo CSHOT (dividindo pela área do filtro), modelo de uma interface.

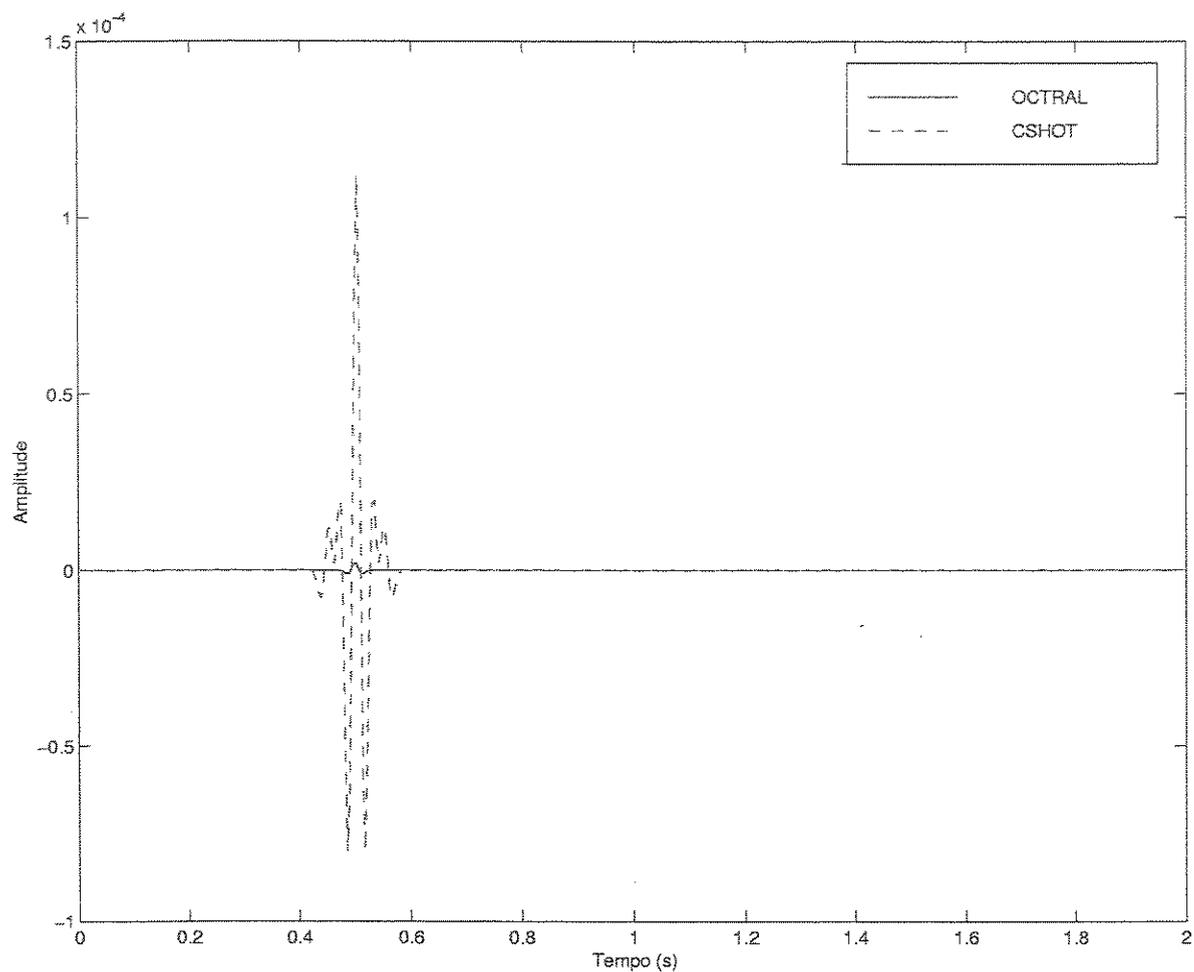


Figura 6.24: Comparação do traço número 38 do sismograma da Figura (6.22).

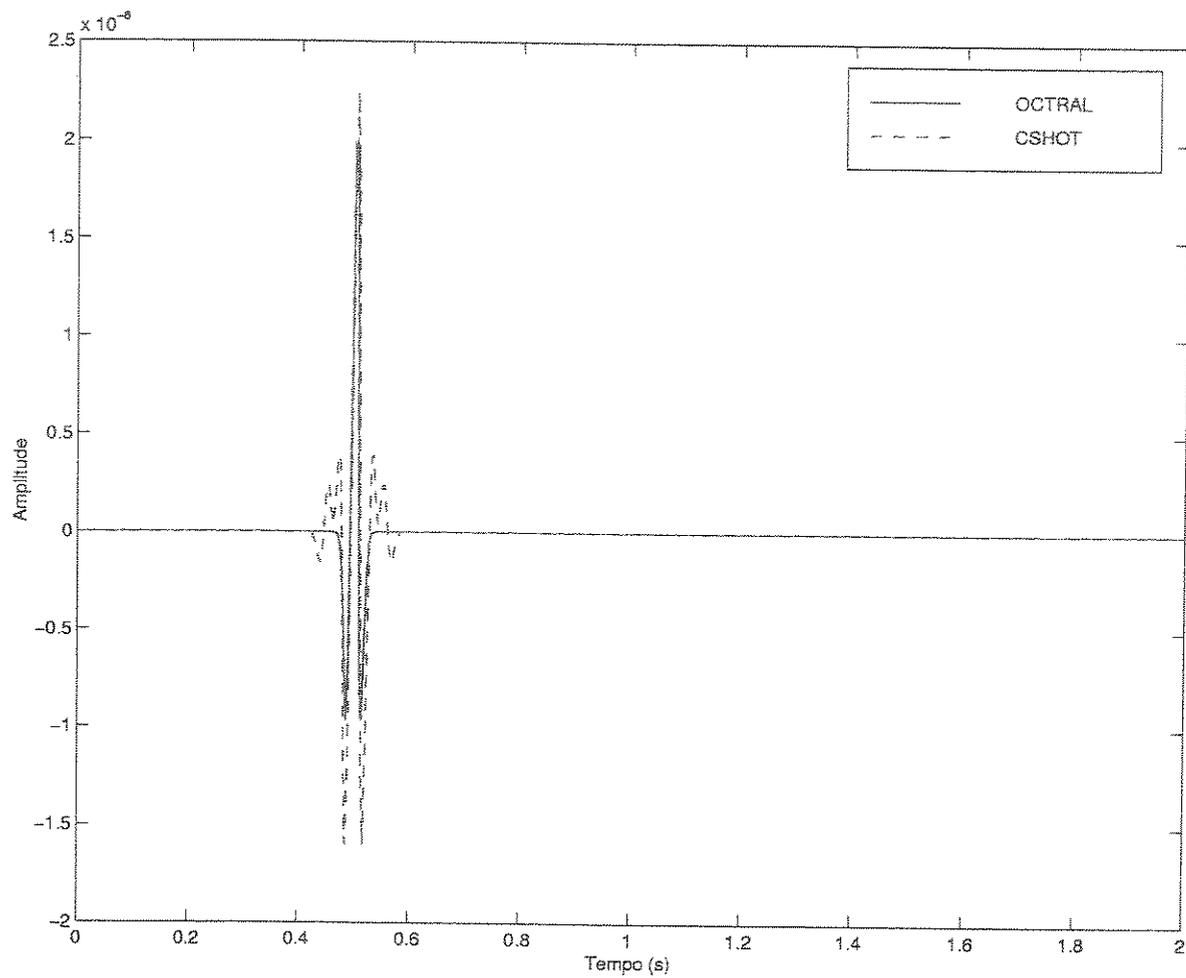


Figura 6.25: Comparação do traço número 38 do sismograma da Figura (6.23).

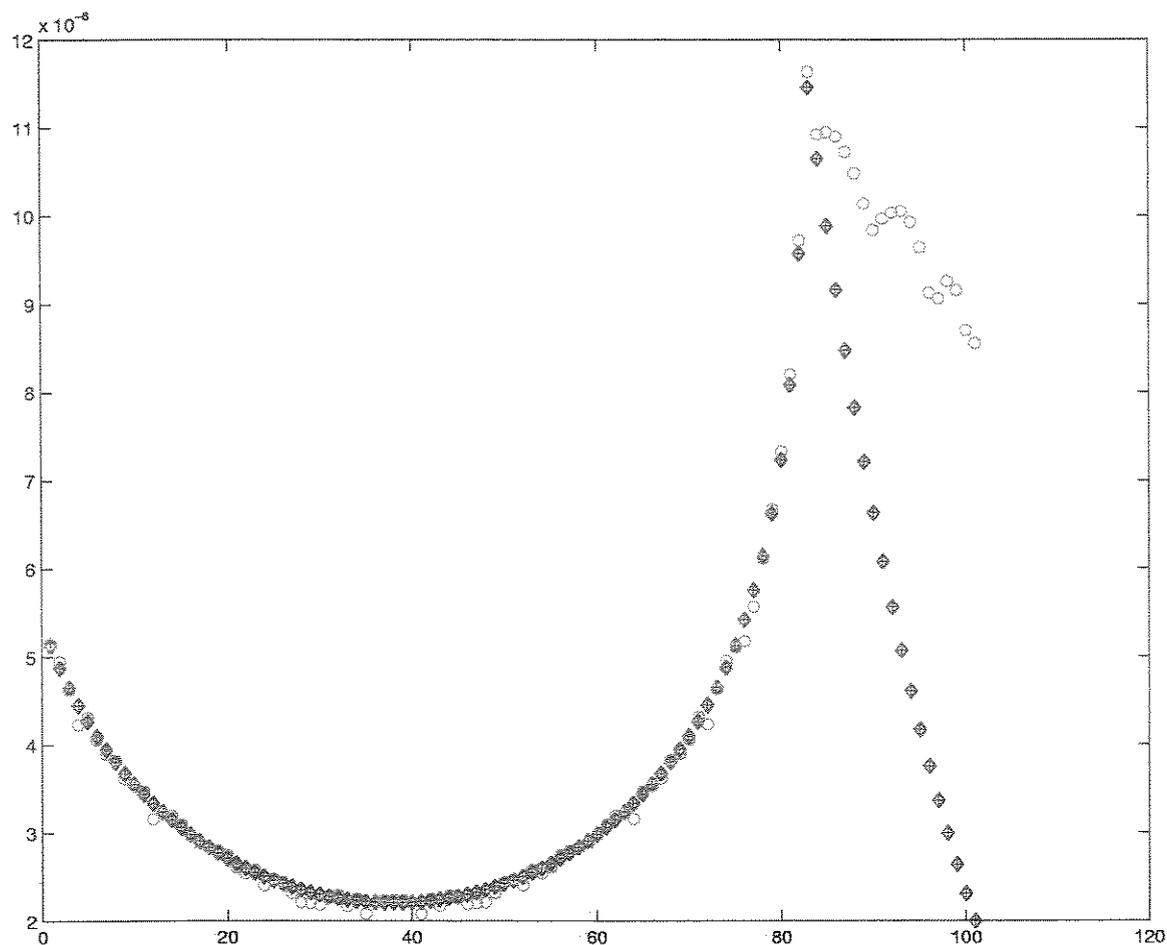


Figura 6.26: Comparação entre as amplitudes do OCTRAL, “+”, e do CSHOT (dividindo pela área do filtro), “o”, com o valor analítico da amplitude, “◇”.

analítico da amplitude (representado pelo símbolo ◇). Podemos concluir que as amplitudes conseguidas pelo OCTRAL (representadas pelo símbolo +) estão bastante perto das amplitudes conseguidas pela fórmula analítica, em todos os traços, com um erro aproximado de 0.12%.

As amplitudes conseguidas pelo CSHOT (representadas pelo símbolo o) estão, também, perto da solução analítica: nos traços menos afastados da fonte, o erro é de aproximadamente 2.31%; nos traços mais afastados da fonte este erro aumenta; assim, o erro aproximado, em todos os traços, é 4.59%.

Em ambos os casos, o erro calculado baseia-se na norma da diferença dos dois vetores que possuem os respectivos valores da amplitude, para todos os traços.

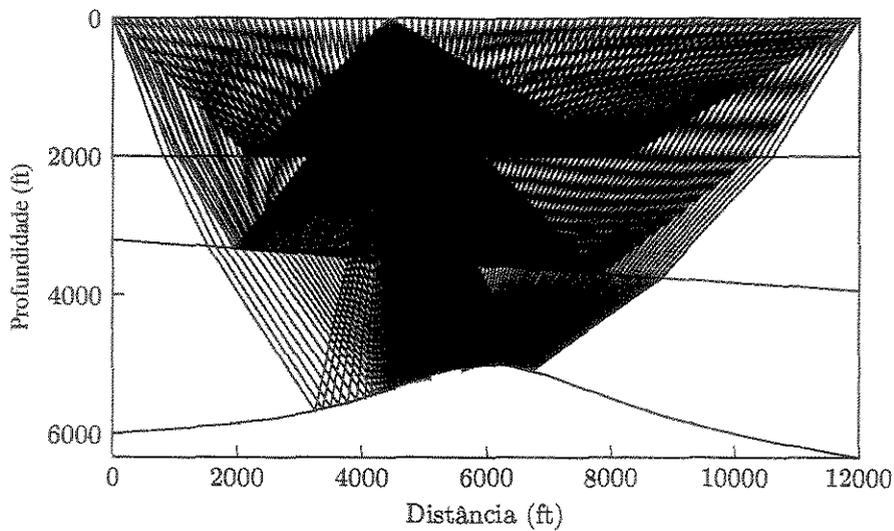


Figura 6.27: Traçamento de raios feito pelo OCTRAL, modelo multi-camadas.

6.4.2 Modelo Multi-camadas

Apresentamos um exemplo de um modelo multi-camadas, com três interfaces de interesse, além da superfície da Terra. As velocidades nas camadas do modelo são $v_1 = 8000$ ft/s, $v_2 = 10000$ ft/s, $v_3 = 12000$ ft/s e $v_4 = 13000$ ft/s. A fonte está localizada na superfície da Terra, na coordenada (4440,0). Os 101 receptores estão localizados na superfície da Terra, igualmente espaçados, cada 120 ft; o primeiro receptor está localizado na coordenada (0,0). Este exemplo utiliza os valores das velocidades iguais ao modelo apresentado no exemplo 09 do manual do CSHOT (Docherty, 1991).

Podemos observar, nas Figuras (6.27) e (6.28), a semelhança visual das classes de raios dos dois modelamentos feitos pelo OCTRAL e pelo CSHOT (dividindo pela área do filtro), respectivamente. Na Figura (6.29) podemos observar a semelhança dos sismogramas construídos por ambos os programas. Também observamos, na Figura (6.30), a comparação entre os dois traços número 51 de cada um dos sismogramas, onde podemos confirmar a igualdade dos tempos de trânsito para esses eventos.

Verificamos também a precisão numérica do OCTRAL, neste modelo, utilizando a matriz de resíduos. Aqui a matriz é da ordem de 3×101 , pois temos 3 classes de raios e 101 receptores. O máximo valor absoluto dos componentes da matriz $Res_{3 \times 101}$ é 0.098956, considerado um número pequeno.

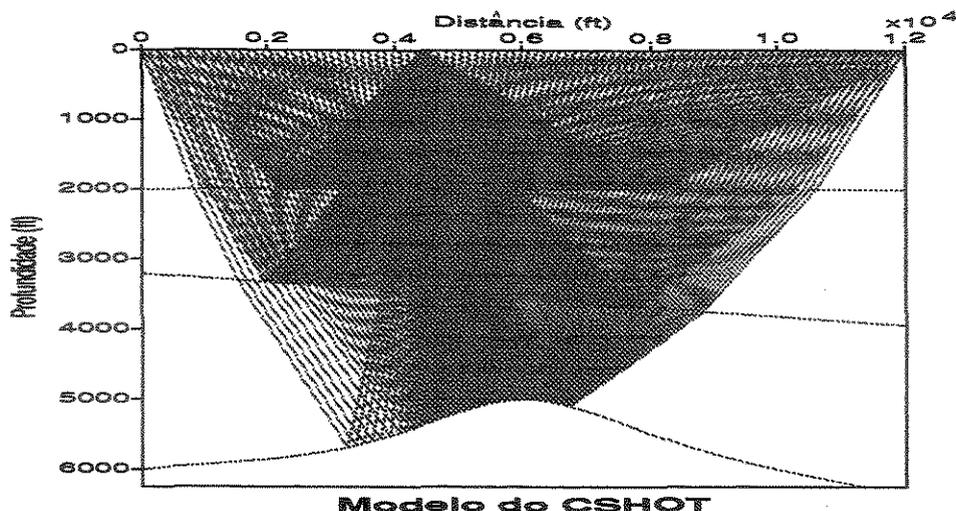


Figura 6.28: Traçamento de raios feito pelo CSHOT, modelo multi-camadas.

6.4.3 Modelo de Cunha

Apresentamos um exemplo de um modelo de cunha, com quatro interfaces de interesse e três regiões, como mostrado na Figura (6.31). A velocidade na primeira região do modelo é $v_1 = 8000$ ft/s, a velocidade na segunda região é $v_2 = 10000$ ft/s, a velocidade na terceira região é $v_3 = 12000$ ft/s e a velocidade embaixo da última interface é $v_4 = 13000$ ft/s. A fonte está localizada na superfície da Terra, na coordenada (0,0). Os 31 receptores estão localizados na superfície da Terra, igualmente espaçados, cada 400 ft; o primeiro receptor está localizado na coordenada (0,0).

Como já foi dito anteriormente, o CSHOT não faz traçamento para este tipo de modelos. Porém, vamos tentar “simular” um modelo parecido a partir de um modelo multi-camadas, e observar seu comportamento no traçamento de raios.

Para isto, suponhamos um modelo multi-camadas, como mostrado na Figura (6.32). A idéia é deformar este modelo, fazendo com que a interface L_{c2} se intercepte com a interface L_{c1} a partir do ponto (6000,1000) até o ponto (12000, 1000). Em outras palavras, trata-se de deformar topologicamente o modelo multi-camadas, mediante um homeomorfismo⁸, para que ele se assemelhe ao modelo de cunha, multi-regiões.

⁸Um homeomorfismo é uma função bicontínua entre dois espaços topológicos. O homeomorfismo preserva as propriedades topológicas dos espaços, como, por exemplo, a conectividade (Blackett, 1968).

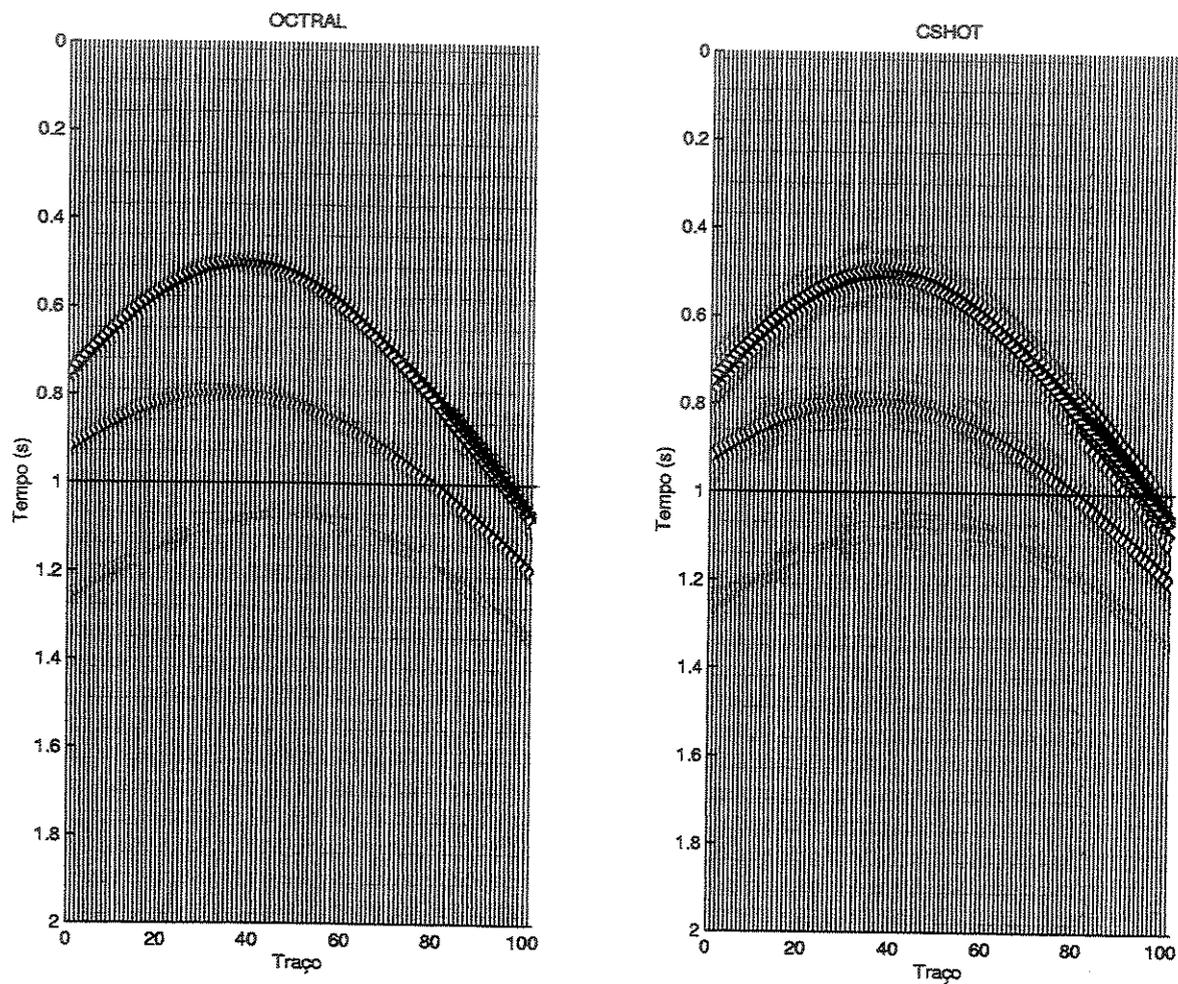


Figura 6.29: Comparação dos sismogramas gerados pelo OCTRAL e pelo CSHOT (dividindo pela área do filtro), modelo multi-camadas.

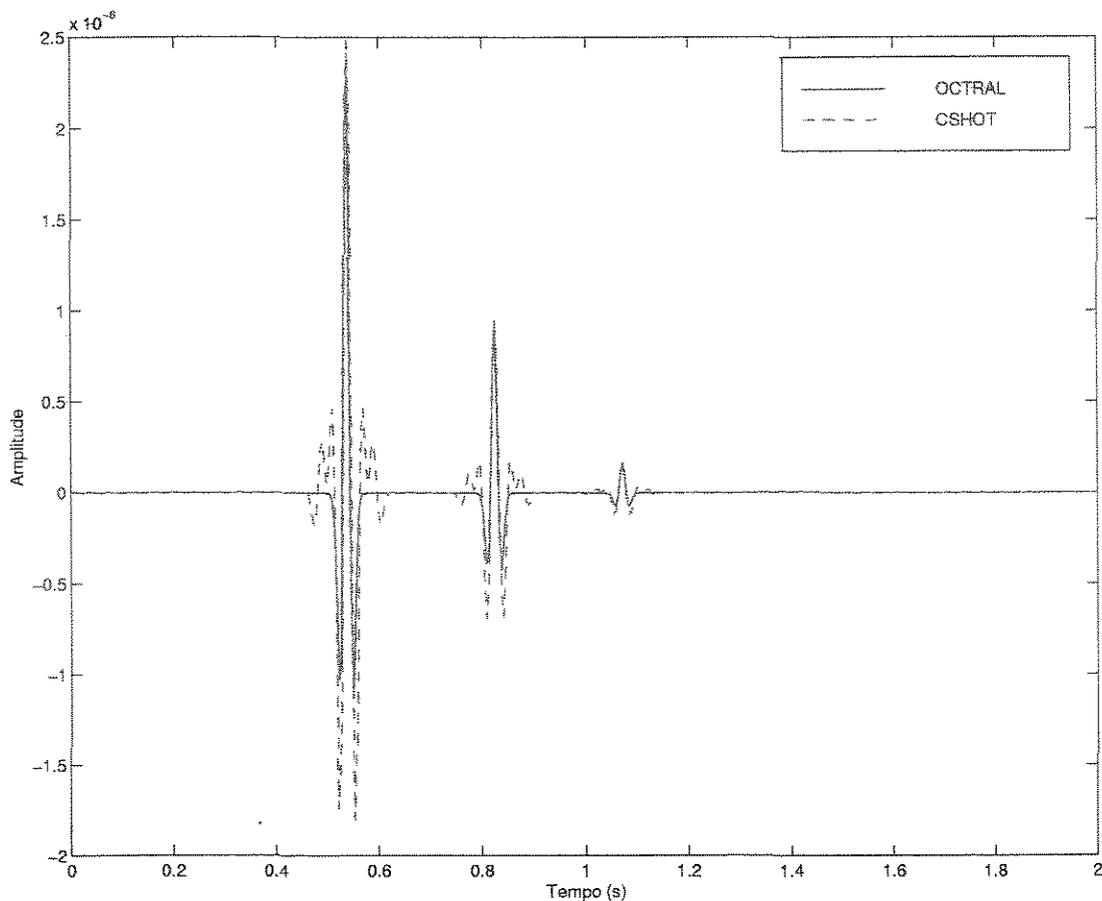


Figura 6.30: Comparação do traço número 51 dos sismogramas, modelo multi-camadas.

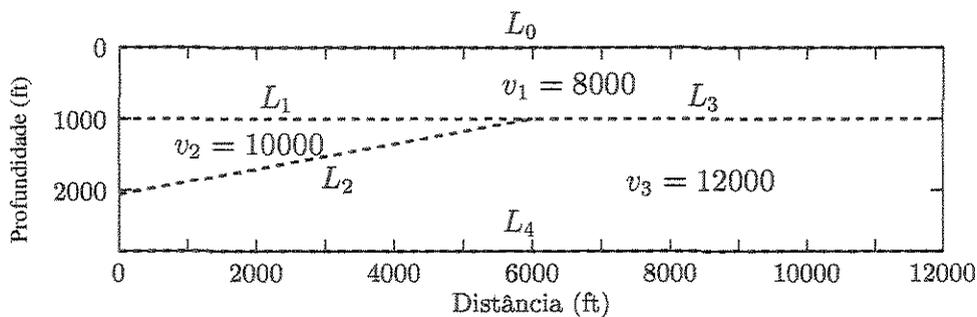


Figura 6.31: Modelo de cunha, multi-regiões.

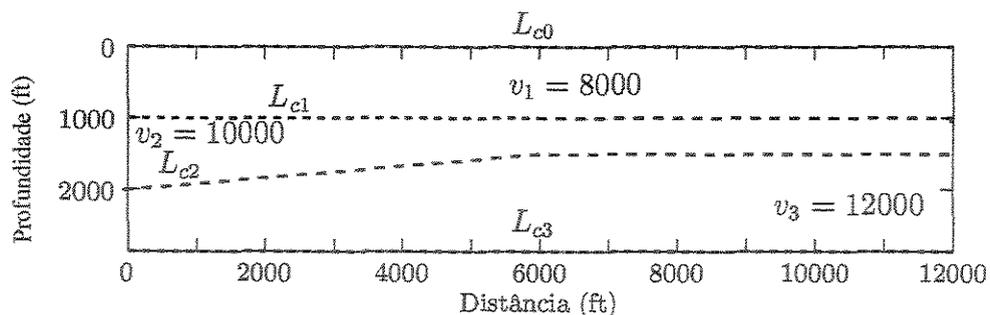


Figura 6.32: Modelo multi-camadas “simulando” um modelo de cunha.

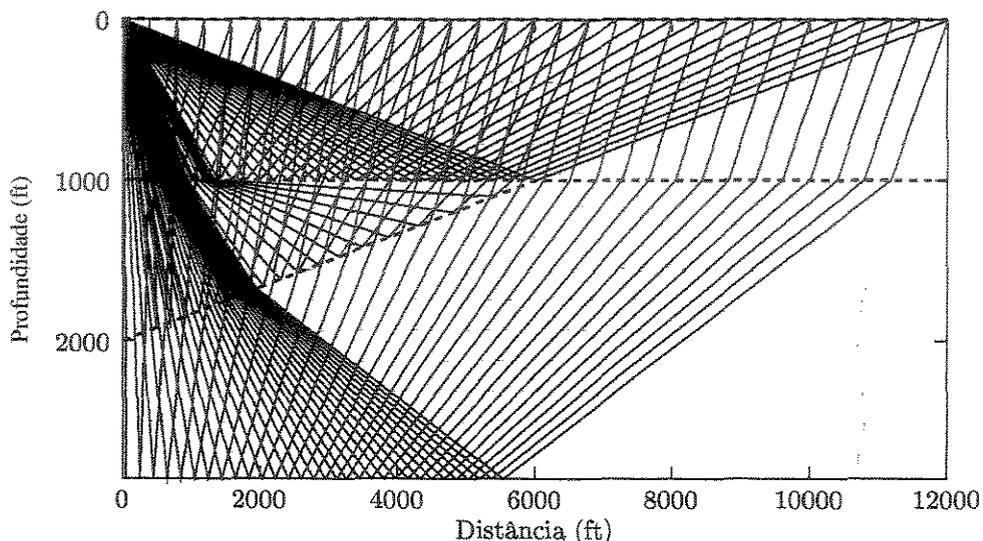


Figura 6.33: Traçamento de raios feito pelo OCTRAL, modelo de cunha.

Observemos no traçamento de raios, mostrado nas Figuras (6.33) e (6.34), que o CSHOT não consegue construir todos os raios de assinatura definida pelo caminho (L_0, L_1, L_2, L_4, L_3) e pela palavra aceita $v_1 v_2 v_3 v_1$, enquanto que o OCTRAL consegue construir todos os raios dessa classe.

Na comparação dos sismogramas, na Figura (6.35), onde o sismograma do CSHOT não está dividido pela área do filtro, observamos que perdem-se alguns eventos, já na Figura (6.36), onde o sismograma do CSHOT está dividido pela área do filtro, observamos que os valores da amplitude no sismograma do CSHOT são muito pequenos, comparados com os valores do OCTRAL. Na Figura (6.37), que mostra o traço número 5 dos sismogramas da Figura (6.35), observamos a coincidência dos tempos de trânsito dos eventos. Já na Figura (6.38), que

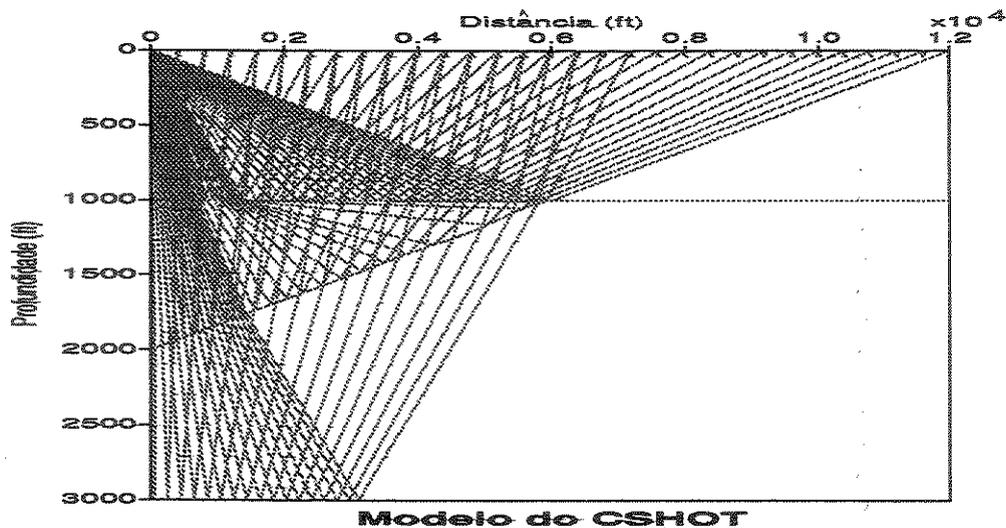


Figura 6.34: Traçamento de raios feito pelo CSHOT, modelo de cunha.

mostra o traço número 5 dos sismogramas da Figura (6.36), observamos que as amplitudes pico do traço são muito diferentes. Todo o anterior, nos permite verificar que, de fato, o CSHOT não consegue construir os sismogramas adequados para este tipo de modelos. Enquanto que o OCTRAL faz completamente o traçamento de raios e constrói os sismogramas adequadamente.

6.4.4 Modelo de Lente

Apresentamos um exemplo de um modelo de lente, com três interfaces de interesse e duas regiões, como mostrado na Figura (6.39). A velocidade na primeira região do modelo é $v_1 = 4000$ ft/s, a velocidade na segunda região é $v_2 = 6000$ ft/s e a velocidade embaixo da última interface é $v_3 = 8000$ ft/s. A fonte está localizada na superfície da Terra, na coordenada (6000,0). Os 31 receptores estão localizados na superfície da Terra, igualmente espaçados, cada 400 ft; o primeiro receptor está localizado na coordenada (0,0).

Este modelo é um exemplo típico com o qual o CSHOT não consegue lidar, pois suas interfaces não estão definidas em todo o domínio.

De forma análoga ao exemplo anterior, vamos tentar “simular” um modelo parecido a partir de um modelo multi-camadas, e observar seu comportamento no traçamento de raios.

Para isso, suponhamos um modelo multi-camadas, como mostrado na Figura (6.40). A

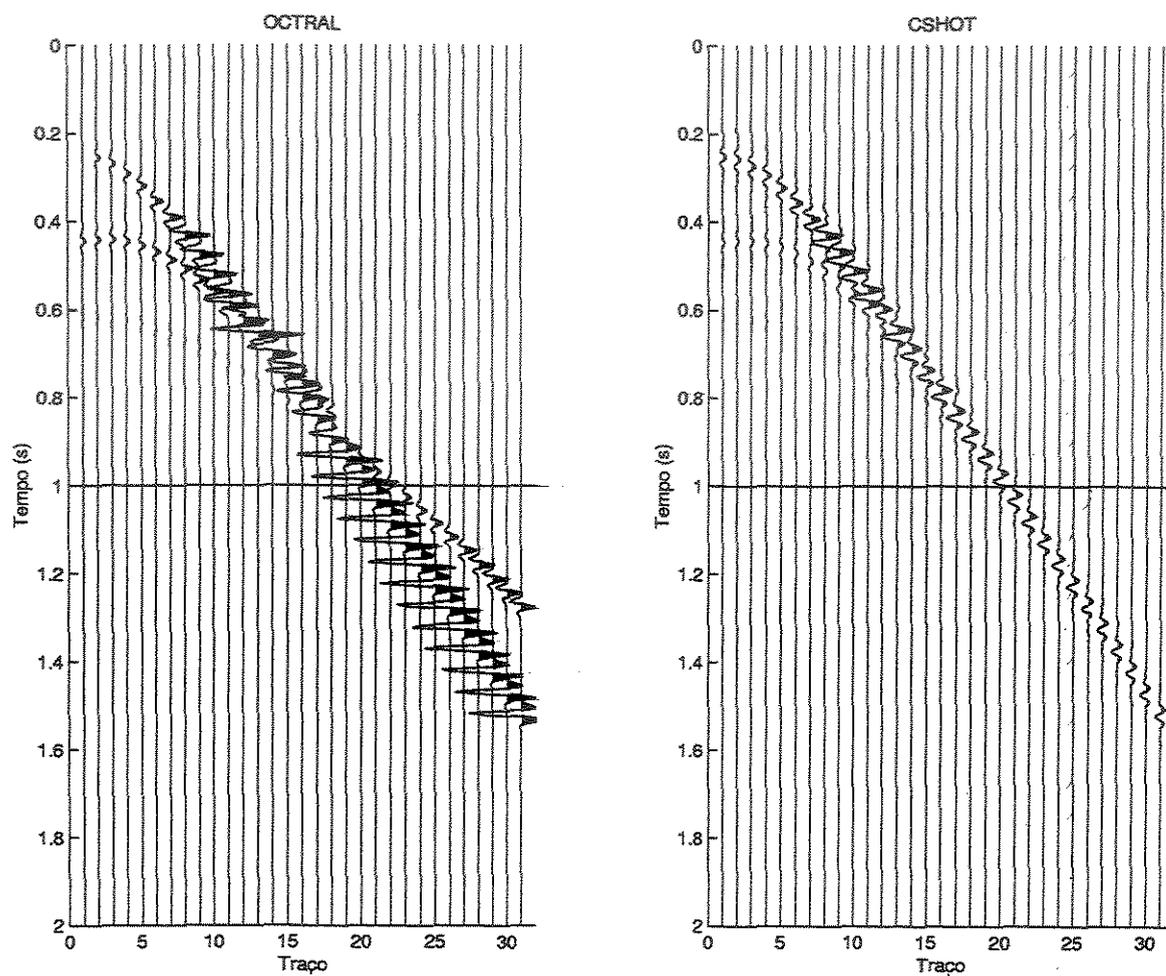


Figura 6.35: Comparação dos sismogramas gerados pelo OCTRL e pelo CSHOT (sem dividir pela área do filtro), modelo de cunha.

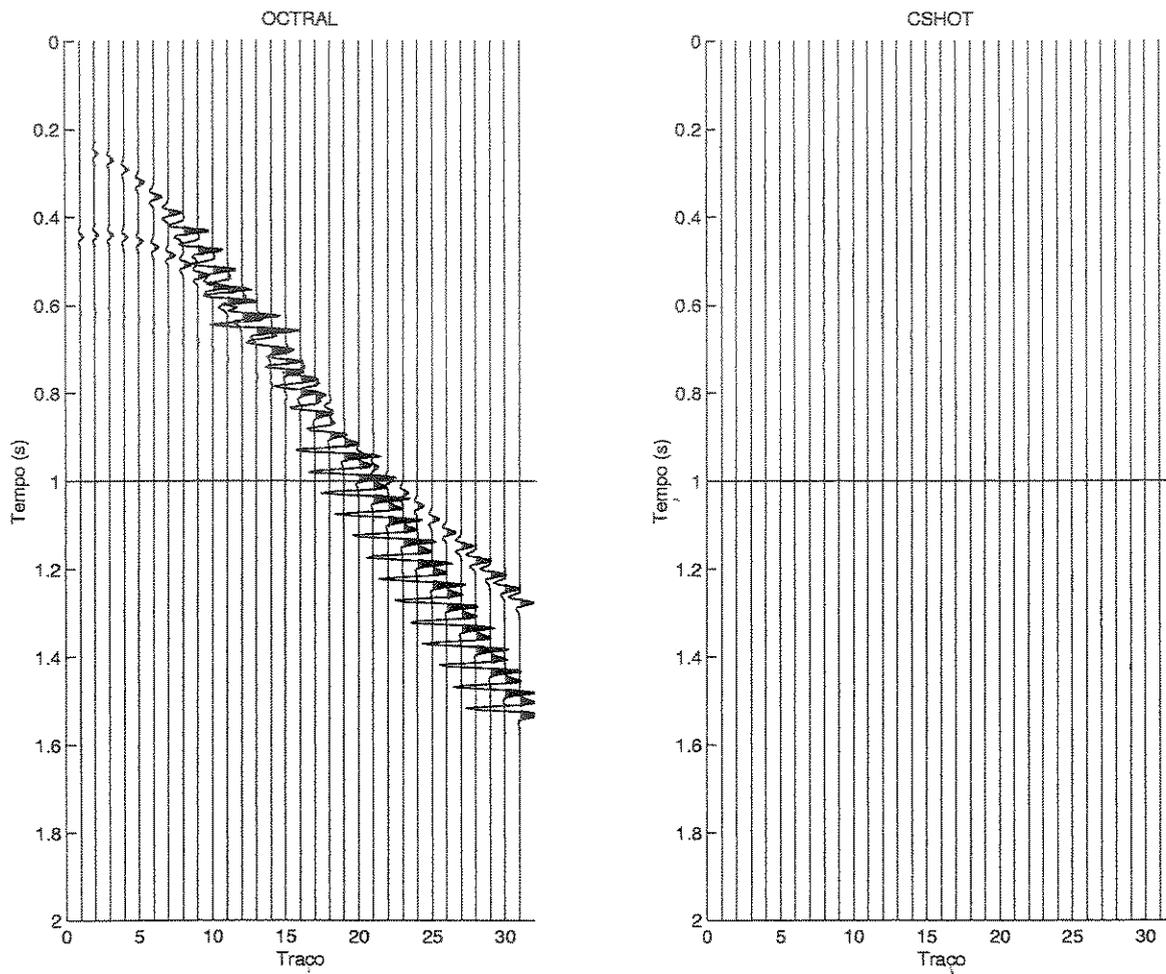


Figura 6.36: Comparação dos sismogramas gerados pelo OCTRLAL e pelo CSHOT (dividindo pela área do filtro), modelo de cunha.

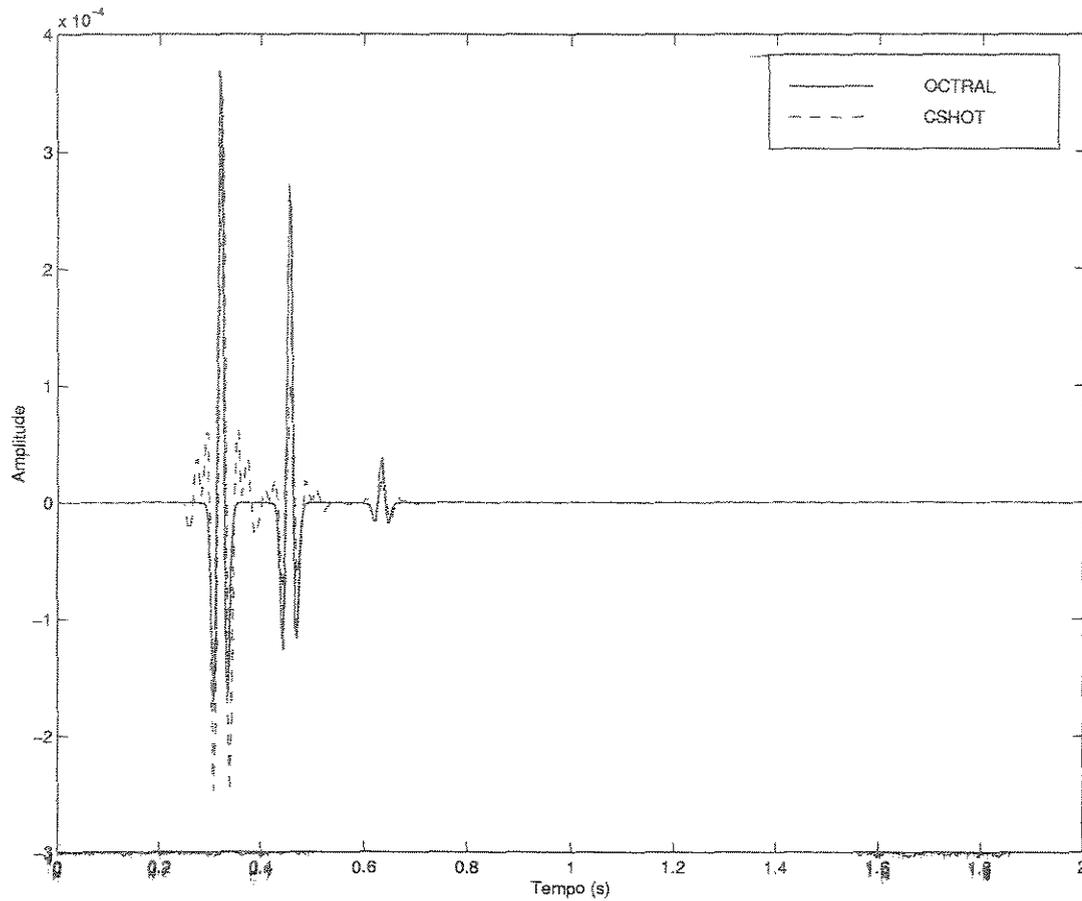


Figura 6.37: Comparação do traço número 5 dos sismogramas da Figura (6.35).

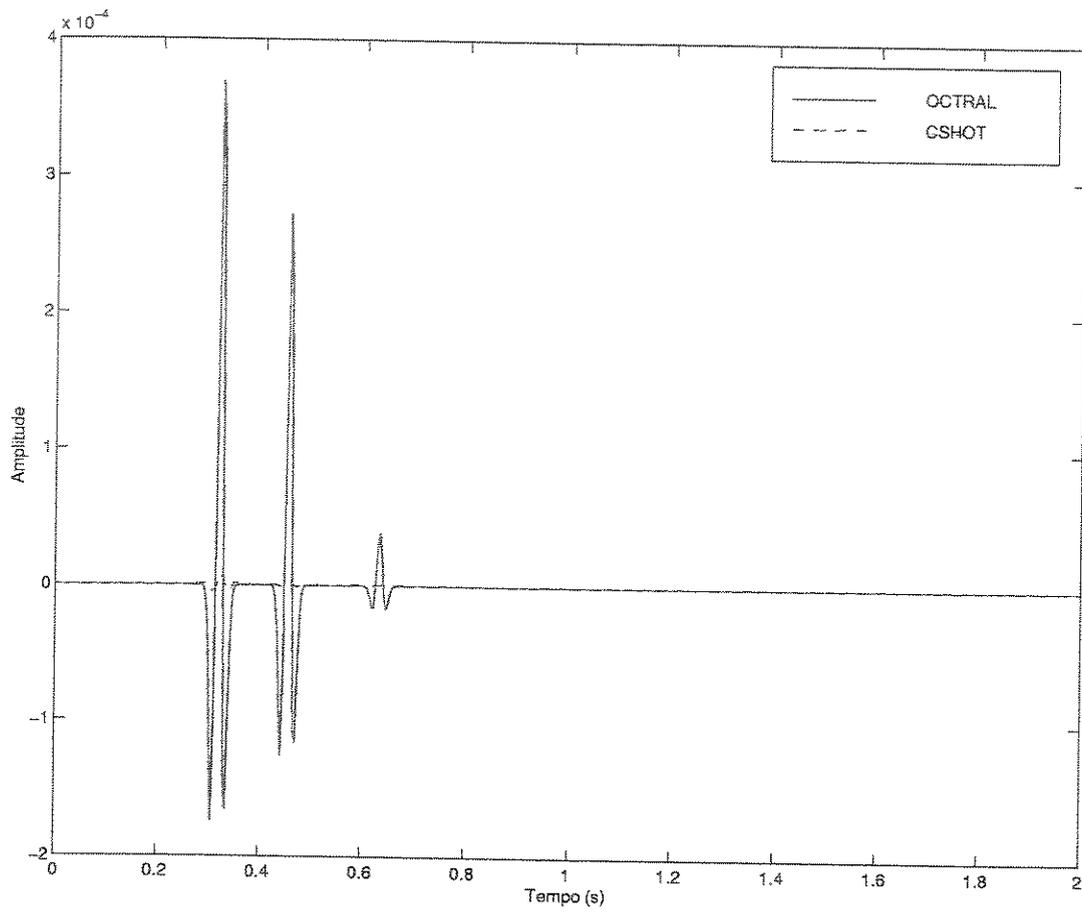


Figura 6.38: Comparação do traço número 5 dos sismogramas da Figura (6.36).

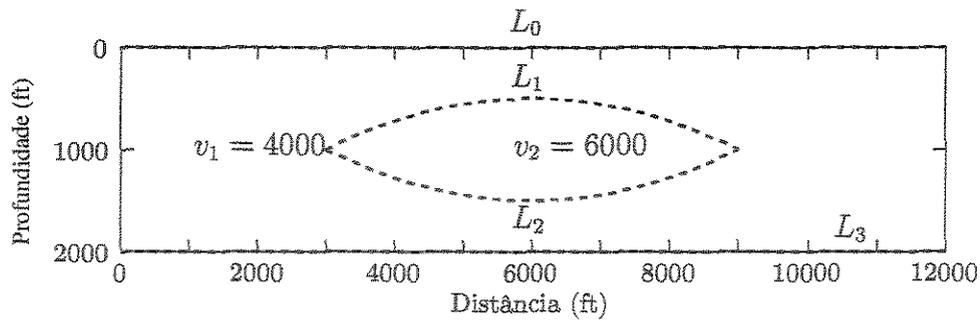


Figura 6.39: Modelo de lente, multi-regiões.

idéia é deformar este modelo, fazendo com que as interfaces L_{c1} e L_{c2} se interceptem nos segmentos compreendidos entre os pontos (0,1000) e (3000,1000), e os pontos (9000,1000) e (12000,1000). Em outras palavras, trata-se de deformar topologicamente o modelo multi-camadas, mediante um homeomorfismo, para que ele se assemelhe ao modelo de lentes, multi-regiões.

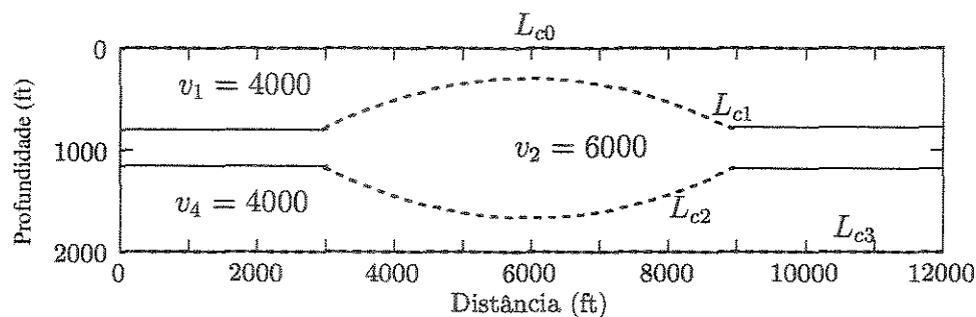


Figura 6.40: Modelo multi-camadas “simulando” um modelo de lente.

O OCTRAL consegue fazer o traçamento de raios, mostrado na Figura (6.41), e o respectivo sismograma, mostrado na Figura (6.42). Enquanto, que o CSHOT, dependendo do modelo, ou aborta ou faz um traçamento incompleto (não traça vários raios de cada classe).

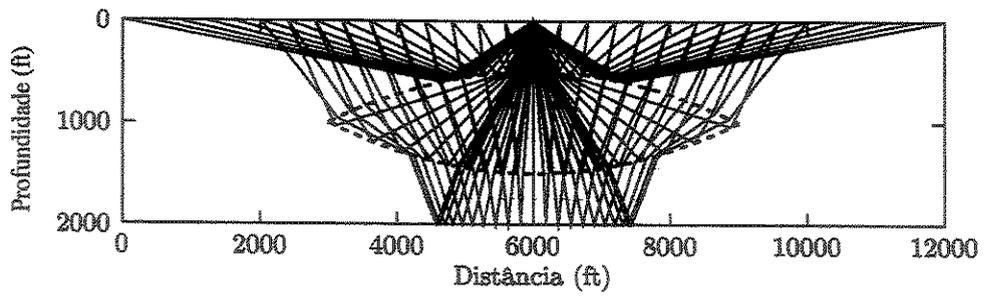


Figura 6.41: Traçamento de raios feito pelo OCTRAL, modelo de lente.

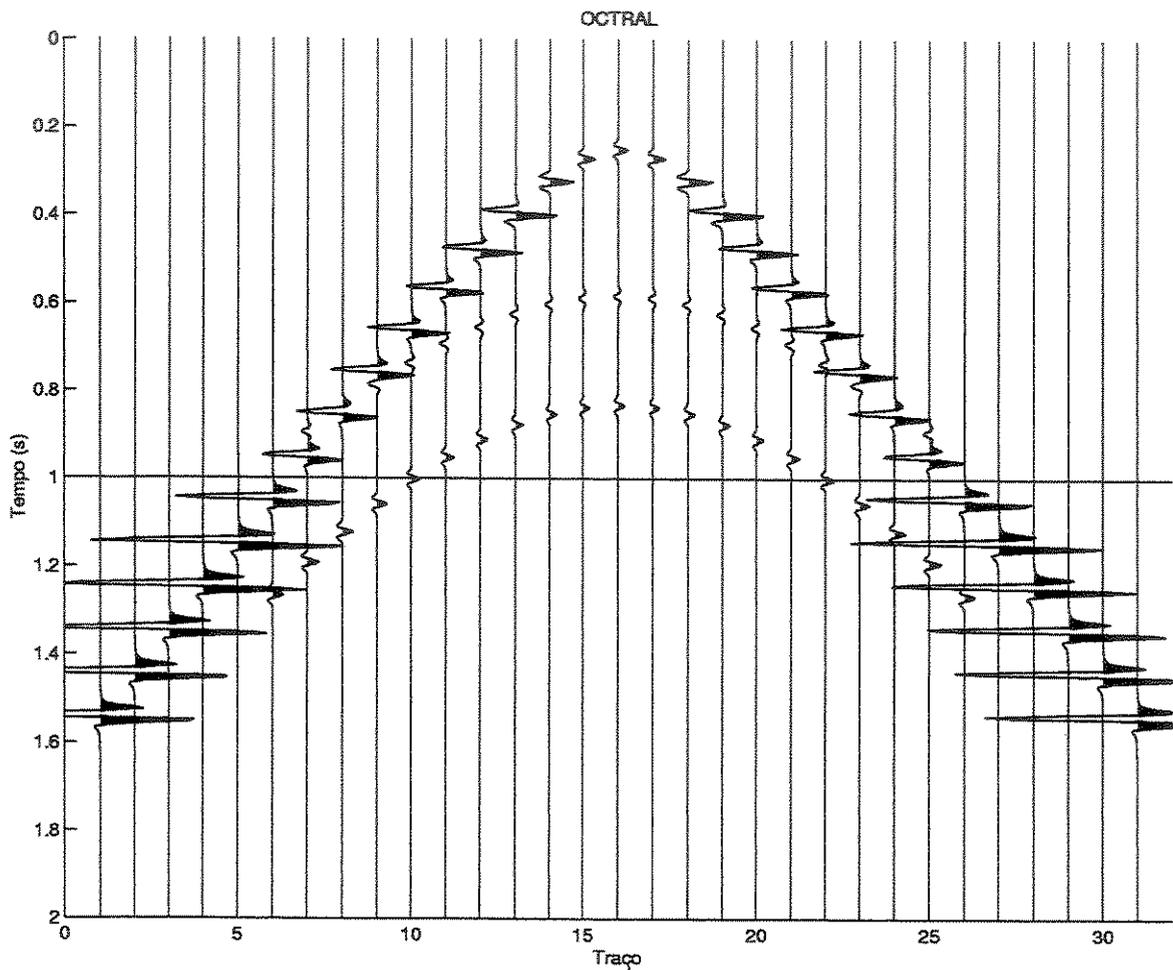


Figura 6.42: Sismograma feito pelo OCTRAL, modelo de lente.

Capítulo 7

Conclusões e Trabalhos Futuros

7.1 Conclusões

Este estudo surgiu da necessidade de estender o Método de Continuação para o traçamento de raios em modelos que têm geometria complexa. Para atingir esse objetivo, definimos e relacionamos várias idéias matemáticas e computacionais.

Estas idéias matemáticas são oriundas da Dinâmica Simbólica. Esta teoria foi desenvolvida em 1930, por Marston Morse e George Hedlund (Béal & Perrin, 1999), para descrever como se pode representar a trajetória de um ponto que percorre diferentes subconjuntos de uma superfície dada. Essas idéias vêm sendo utilizadas em problemas físicos (Hao & Zheng, 1988) e biológicos (Edwards et al, 2001).

Assim, representamos, nesta tese, um modelo sísmico como um autômato finito, e um raio como uma seqüência finita de símbolos do autômato: a palavra aceita e caminho de estados. Com essas formas de representação, fizemos o traçamento de raios para modelos de geometria complexa multi-regiões 2.5D, acústicos e elásticos, utilizando o Método de Continuação. Estas idéias teóricas, foram implementadas na biblioteca computacional que criamos, OCTRL.

Desta forma, podemos enunciar os seguintes resultados de tipo teórico:

- Encontramos uma relação entre conceitos geométricos e conceitos da Matemática Discreta. Em particular, definimos o conceito de autômato finito de um modelo sísmico. Representamos as trajetórias dos raios utilizando seqüências de símbolos (palavra aceita e caminho de estado).

- Esse morfismo entre objetos (modelos sísmicos e autômatos) baseia-se na relação de conectividade entre interfaces. Na verdade, o que o autômato do modelo representa é a estrutura topológica do modelo. Este morfismo resultou ser adequado na descrição do traçamento de raios em modelos de geometria complexa. Pensamos que o estudo topológico de modelos sísmicos pode ajudar ao estudo qualitativo dos mesmos. Por exemplo, poderia servir para determinar as condições necessárias para a existência de um raio.
- Definimos o conceito de modelo multi-regiões, permitindo uma representação mais precisa dos tipos de modelos que apresentam-se na sísmica de exploração. Em particular, para modelos sísmicos 2.5D multi-regiões, acústicos e elásticos, estendemos as fórmulas da amplitude ao longo do raio.

Os resultados de tipo computacional conseguidos são:

- Criamos e implementamos uma biblioteca computacional OCTRAL, de programas escritos na linguagem OCTAVE. O OCTRAL permite fazer o traçamento de raios em modelos 2.5D multi-regiões, utilizando o Método de Continuação. Em particular, nós fizemos traçamento de raios em modelos que podem ter interfaces definidas apenas em uma porção do domínio, e em modelos com intersecção de suas interfaces.
- Entre as várias rotinas computacionais, que fazem parte da biblioteca, destacamos:
 - A elaboração de um método heurístico, baseado em buscas aleatórias, para a busca de uma primeira aproximação para o Método de Newton.
 - Um algoritmo que faz traçamento de raios utilizando uma assinatura dada, determinada por uma palavra aceita e seu correspondente caminho de estados.
- O OCTRAL apresenta uma boa qualidade no traçamento de raios, notamos isto a partir das comparações que fizemos com o CSHOT. O programa tem versatilidade e o usuário pode controlar quais assinaturas de raios são as de seu interesse, podendo representar classes de raios primários ou múltiplas.
- Em geral, a precisão do método do traçamento, utilizado pelo OCTRAL, foi testada avaliando a norma da matriz de resíduos, definida no Capítulo 6. Para inúmeros exemplos,

comprovamos que a norma desta matriz era muito pequena. Este teste e as comparações realizadas com o traçamento de raios feito pelo CSHOT, nos permitem garantir que os pontos de intersecção dos raios com as interfaces, encontradas pelo OCTRAL, estão muito perto da solução do problema.

- Os valores das amplitudes, no OCTRAL, são calculados utilizando o tubo de raios. Nos experimentos computacionais feitos para um modelo de uma camada, definido por uma interface horizontal, demonstramos a precisão do cálculo numérico do tubo respeito à fórmula analítica.
- A estrutura do OCTRAL permite que esta biblioteca seja ampliada e modificada no futuro, por exemplo, criando interfaces gráficas para o usuário.
- Os algoritmos do OCTRAL podem ser também estendidos para modelos 3D, mas na atualidade temos apenas resultados parciais a respeito, utilizando os conceitos do autômato do modelos para modelos tridimensionais e o Método de Continuação mostrado no Apêndice (D).
- Visando à possibilidade de modelos mais complexos, já começamos a implementação dos algoritmos do OCTRAL em linguagem C. Este processo está em andamento mas, nossa idéia, é que todas as rotinas de traçamento fiquem nesta linguagem. Temos denominado esta biblioteca em C de RAYTRAL. Nela existe, por exemplo, uma estrutura chamada *interface.h*, ela possui toda a informação relacionada com os pontos de intersecção do raio com as interfaces, os ângulos, os coeficientes de reflexão e transmissão, dentre outras. Também temos uma rotina que permite a geração automática de palavras aceitas e seus correspondentes caminhos de estados.

Ressaltamos que no mercado existem outros programas para traçamento de raios em modelos que têm geometria complexa, como o SEIS88, NORSAR[©], GXII[©], dentre outros. Mas, esses programas utilizam outros métodos numéricos e computacionais, diferentes dos propostos neste trabalho (combinação de autômatos finitos e continuação). Pensamos que a alternativa proposta neste tese abre portas teóricas e práticas de interesse no modelamento sísmico, isto pela potencialidade da Teoria dos Sistemas Dinâmicos. Por exemplo, o morfismo estabelecido entre modelos sísmicos e autômatos finitos pode permitir estudar, de forma

qualitativa, algumas propriedades de modelos sísmicos complexos, como existência e unicidade do raio. Algumas outras idéias são propostas como trabalhos futuros.

7.2 Trabalhos Futuros

A partir das diversas questões levantadas durante a realização desta tese, sugerimos vários temas que podem ser abordados em trabalhos futuros, a saber:

- **Existência e Unicidade**

Utilizando conceitos da análise não-linear e da teoria de continuação (Zangwill & Garcia, 1981), pode-se o sistema não-linear que descreve o traçamento de raios. A pergunta fundamental é de tipo qualitativo: será que, dado o problema básico (Capítulo 3), a estrutura do sistema não-linear permite saber, sem resolver o sistema, se um raio existe ou não entre uma fonte, um receptor e com uma determinada assinatura?

Um possível ponto de partida para resolver essa pergunta pode ser a natureza da Matriz Jacobiana do sistema não-linear. Por exemplo, pesquisar sobre o comportamento dos vetores próprios da Matriz Jacobiana no domínio do problema (Ortega & Reinboldt, 1970).

Outras perguntas qualitativas que surgem estão relacionadas com os efeitos de um parâmetro no modelo. Por exemplo, dado um modelo e fixando uma fonte e uma assinatura: como varia o sistema não-linear, considerando as coordenadas do receptor como parâmetro? Existem valores para os quais ocorre uma bifurcação (Seydel, 1988)? Isto é, é possível que o sistema mude sua natureza totalmente para um valor do parâmetro dado?

Perguntas como essas, embora teóricas, têm uma aplicação prática no desenho de uma aquisição sísmica real, em termos da iluminação na zona de interesse. Implementando critérios adequados para analisar a variação em função de um parâmetro, poder-se-ia estudar a eficiência de um arranjo de geofones para obter uma iluminação das interfaces objetivos (Gibson et al., 1998 e Volker et al., 1998).

- **Otimização Global**

Para conseguir o primeiro raio da classe de equivalência (Capítulo 3) pode-se, de um lado, testar os métodos de Otimização Global; e, de outro lado, podem-se utilizar os

métodos probabilísticos em Otimização Global (Hirsch & Smale, 1979), como por exemplo o método de Monte Carlo (Decker, 1991). Esses métodos poderiam ser comparados computacionalmente com o método do disparo.

No caso da existência de multi-caminhos (*multi-pathing*) entre uma fonte, um receptor e uma assinatura dada, pode-se testar o método de Otimização Global utilizando a análise de intervalos para encontrar TODAS as possíveis soluções do sistema não-linear, dentro de uma caixa no espaço \mathbb{R}^N (Hansen, 1992), onde N representa o número de pontos de intersecção do raio com as interfaces.

● Modelos Sísmicos com Incerteza

Utilizando os conceitos da Teoria Difusa (Klir & Folger, 1988), é possível quantificar o nível de incerteza de um evento (possibilidade). Podemos aplicar esses conceitos para modelar os efeitos das incertezas dos parâmetros na resposta do modelo sísmico (sismograma). Em particular, poderia utilizar-se o conceito de número e aritmética difusa (Kaufmann & Gupta, 1991) para representar os parâmetros do modelo.

Como é comum na sísmica de exploração, os parâmetros do modelo são desconhecidos, sendo representados por um intervalo de incerteza, ou mais especificamente por um número difuso.

O sistema não-linear determinístico considerado no Capítulo 3 é substituído por um sistema difuso não-linear (Dubois & Prade, 1980). Este tipo de problema tem sido considerado na literatura da Teoria Difusa, sendo possível dar uma interpretação à solução do mesmo.

Desta forma, podemos analisar um modelo sísmico, onde as velocidades do modelo são números difusos. Esta etapa inicial transforma o modelo em um problema difuso. Este tipo de modelagem tem sido feita por exemplo em Petrofísica. A etapa posterior é resolver o sistema na forma difusa e dar uma interpretação, utilizando a teoria das possibilidades, para que seja de utilidade para geólogos, geofísicos e engenheiros na indústria do petróleo.

Pensamos que utilizando conceitos de reconhecimento de formas, lógica difusa e gramáticas livres de contexto, poderiam ser analisados dados reais. Diferentes tipos de

palavras seriam testadas em um autômato que descreva uma interpretação geofísica particular. Com estes algoritmos se poderia tentar validar a interpretação geológica com dados sísmicos reais.

- **Cálculo de Cáusticas**

Neste trabalho, pensamos como calcular o número KMAH (Capítulo 4) para fazer as correções da fase na expressão final da aproximação de ordem zero no receptor. Para modelos multi-regiões, com cada sub-região homogênea, este cálculo pode ser feito encontrando expressões analíticas para as Matrizes de Fresnel, e, a partir destas, encontrar tal número utilizando a fatoração descrita em Hubral et al (1993). Como trabalho futuro propomos, então, encontrar expressões analíticas para esse tipo de modelos, e implementar algoritmos que façam as correções devidas a todas as cáusticas ao longo do raio.

- **Modelos com Sub-regiões Não-Homogêneas, que Possuem Equações Características Integráveis**

Este tipo de modelos, não-homogêneos, possuem sub-regiões para as quais temos soluções analíticas das equações características. O problema do traçamento de raios, poderia ser resolvido em forma similar ao caso de modelos homogêneos, considerando um sistema não-linear que represente a Lei de Snell em cada ponto de intersecção. Este sistema é muito mais complexo que no caso homogêneo (Perozzi, 1980), e a montagem do sistema poderia ser realizado utilizando o conceito do autômato do modelo.

- **Generalização para Modelos com Equações Características Não Integráveis**

Estender o conceito do autômato do modelo (Capítulo 5) para o caso em que as equações características não sejam sistemas integráveis analiticamente. Neste caso, teríamos um sistema de equações diferenciais com valores na fronteira (Ascher et al., 1995), além de um sistema não-linear de equações algébricas. Este tipo de problema é conhecido na literatura como Equações Diferenciais Algébricas (Brenan et al., 1996).

Referências Bibliográficas

AKI, K. & RICHARDS, P., (1980), *Quantitative Seismology. Theory and Methods*, Volume I, New York:W.H. Freeman and Company.

ARBID, M., KFOURY, A.J. & MOLL, R.N., (1984), *Series and Monographs in Computer Science*, New York: Springer-Verlag.

ASCHER, U.M., MATTHEIJ, R.M.M. & RUSSELL, R.D., (1995), *Numerical Solution of Boundary Value Problems for ordinary Differential Equations*, Philadelphia: SIAM Press.

BÉAL, M.P. & PERRIN, D., (1999), *Symbolic Dynamics and Finite Automata*, Handbook of Symbolic Dynamics, Internet.

BLACKETT, D.W., (1968), *Elementary Topology - A combinatorial and algebraic approach*, New York: Academic Press.

BLEISTEIN, N., *Mathematical Methods for Wave Phenomena*, (1984), New York:Academic Press, .

BLEISTEIN, N., (1986), " Two-and-one-half Dimensional in Plane Wave propagation", *Geophysical Prospecting*, **34**, 686-703.

BRENAN, K., CAMPBELL, S.L., PETZOLD, S.L., (1996), *Numerical Solution of Initial-Value Problems in Differential-Algebraic Equations*, Philadelphia: SIAM. BRIGHAM, O.E., (1974), *The Fast Fourier Transform*, Englewood Cliffs: Prentice-Hall.

CHAPMAN, C.H.,(1978), "A new method for computing synthetic seismograms", *Geophys. J.R. Astr. Soc.*, **54**, 481-518.

CHAPMAN, C.H., (1985), "Ray theory and its extensions: WKB and Maslov seismograms", *J. Geophys.*, **58**, 27-43.

ČERVENÝ, V., (2001), *Seismic Wavefields in Three-Dimensional Isotropic and Anisotropic Structures*, Cambridge University Press.

ČERVENÝ, V., MOLOTKOV, I.A. & PŠENČÍK, I., (1977), *Ray Method in Seismology*, Praha: Univerzita Karlova.

CONWAY, J.B., (1978), *Functions of One Complex Variable*, New York: Springer Verlag.

DECKER, K.M., (1991), "The Monte Carlo method in science and engineering: Theory and Application", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **89**, 463-483.

DENNIS, J.E. & SCHNABEL, R.B., (1983), *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations*, New Jersey: Prentice-Hall, Englewood Cliffs.

DOCHERTY, P., (1985), *A Fast Ray Tracing Routine for Laterally Inhomogeneous Media*, CWP-018, Golden: Center for wave Phenomena, Colorado School of Mines.

DOCHERTY, P., (1986), *Two-And-One-Half Dimensional Common Shot Modeling*, CWP-050, Golden: Center for wave Phenomena, Department of Mathematics, Colorado School of Mines.

DOCHERTY, P., (1991), "Documentation for the 2.5D common-shot modeling program CSHOT", CWP-U08R, Golden: Center for Wave Phenomena, Colorado School of Mines, julho.

DUARTE, O., (1997), *Dicionário Encilopédico Inglês-Português de Geofísica e Geologia*, Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Geofísica.

DUBOIS, D., & PRADE, H., *Fuzzy Sets and Systems*, (1980), New York: Academic Press.

EDWARDS, R., SIEGELMANN, H.T., AZIZA, K. & GLASS, L., (2001), "Symbolic Dynamics and Computation in Model Gene Networks", *CHAOS*, vol **11**, No. 1, Março, American Institute of Physics.

- FAWCETT, J. & KELLER, H.B., (1985), "Three-Dimensional Ray Tracing and Geophysical Inversion in Layered Media", *SIAM J. APPL. MATH.*, Vol. 45, No. 3, Junho.
- GIBSON, R. & TZIMEAS, C. & LAVELY, E., (1998), "Optimal Seismic Survey Design for Imaging and Inference of Elastic Properties", Expanded Abstracts, 68th Annual Meeting SEG, Volume I, SEG.
- HANSEN, E., (1992), *Global Optimization using Interval Analysis*, Marcel Dekker Inc., USA.
- HAO, B.L. & ZHENG, W.M., (1998), *Applied Symbolic Dynamics and Chaos*, Singapore: World Scientific.
- HIRSCH, M. & SMALE, S., (1979), "On Algorithms for Solving $f(x) = 0$ " Communications on Pure and Applied mathematics, vol XXXII, 281-312, John Wiley & Sons, Inc.
- HOPCROFT, J.E. & ULLMAN, J.D., (1979), *Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation*, Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company, Reading.
- HUBRAL, P., SCHLEICHER, J., & TYGEL, M., (1992a), "Three-Dimensional Paraxial Ray properties - Part I. Basic Relations", *J. Seis. Expl.*, 1, 265-279.
- HUBRAL, P., SCHLEICHER, J., & TYGEL, M., (1992b), "Three-Dimensional Paraxial Ray properties - Part II. Applications", *J. Seis. Expl.*, 1, 347-362.
- HUBRAL, P. & TYGEL, M. & SCHLEICHER, J., (1993), "Three-Dimensional Primary Zero-Offset Reflections", *Geophysics*, 58, 692-702.
- HUBRAL, P., TYGEL, M. & SCHLEICHER, J., (1995), "Geometrical-Spreading and Ray-Caustic decomposition of Elementary Seismic Waves", *Geophysics*, 60, 1195-1202.
- KAUFFMAN, A. & GUPTA, A., (1991), *Introduction to fuzzy arithmetic: Theory and applications*, New York: Van Nostrand Reinhold.
- KELLER, H. & PEROZZI, D.J. (1983), "Fast Seismic Ray Tracing", *SIAM J. APPL. MATH.*,

Vol. 43, No. 4, agosto.

KLINE, M. & KAY, I. W., (1965), "Electromagnetic Theory and Geometrical Optics", New York: Interscience.

KLIR, G. & FOLGER, T., , (1988) *Fuzzy sets, uncertainty, and information*, New Jersey: Prentice Hall.

KRATSOV, Y. & ORLOV, Y., (1980), *Geometrical optics of inhomogeneous media*, Berlin: Springer-Verlag
KRATSOV, Y. & ORLOV, Y., (1999), *Caustics, Catastrophes and Wave Fields*, segunda edição, Berlin: Springer-Verlag.

LASS, H., (1950), *Vector and Tensor Analysis*, New York: McGraw-Hill Book Company.

LEWIS, R.M., (1965), "Asymptotic Theory of Wave Propagation", *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 20, 191-250. ORTEGA, J.M. & RHEINBOLDT, W.C., (1970), *Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables*, Serie: Computer Science and Applied Mathematics, San Diego: Academic Press.

PÉREZ, R. & LOPES, V.L., "Recent Applications and Numerical Implementation of Quasi-Newton Methods for Solving Nonlinear Systems of Equations", *Applied Numerical Mathematics* (a ser publicado).

PEROZZI, D.J., (1980), *I. Seismic Ray-Tracing in Piecewise Homogeneous Media II. Analysis of Optimal Step Size Selection in Homotopy and Continuation methods*, Pasadena: Tese de Doutorado, Instituto de Tecnologia de California.

PORTUGAL, R., (1998), *Análise de uma Equação da Onda Acústica para Meios com Simetria Cilíndrica 2.5D*, Tese de Mestrado, Campinas: IMECC.

RUDIN, W., (1974), *Real and Complex Analysis*, segunda edição, McGraw-Hill Book Company.

RÜGER, A., (1993), *Dynamic Ray Tracing and its Application in Triangulated Media*, CWP-139, Colorado: Center for Wave Phenomena, Julho.

SEYDEL, R., (1988), *From Equilibrium to Chaos - Practical Bifurcation and Stability Analysis*, New York: Elsevier Science Publishing Co., Inc.

SHERIFF, R. E., (1988), *Encyclopedic Dictionary of Exploration Geophysics*, Segunda Edição, Society of Exploration Geophysicists.

SOMMERFELD, A., (1964), *Optics, Lecturs on Theoretical Physics*, New York: Academic Press, Vol. 4.

TUCKER, A., (1995), *Applied Combinatorics*, terceira edição, New York: John Wiley and Sons, Inc.

VOLKER, A.W.F. & BLACQUIÈRE, G. & ONGKIEHONG, L., (1998), *Optimization of 3D data acquisition geometries*, Expanded Abstracts, 68th Annual Meeting SEG, Volume I, SEG.

VOSS, K., (1993), *Discrete Images, Objects, and Functions in Z^n* . Berlin: Springer-Verlag.

ZANGWILL, W.I. & GARCIA, C.B., (1981), *Pathways to Solutions, Fixed Points, and Equilibria*, Englewood Cliffs: Prentice-Hall, Inc.

Apêndice A

Aproximação Assintótica da Equação de Onda

Um *Ansatz*¹ para a equação de onda tem a forma de uma série assintótica (Bleistein, 1984) assim:

$$u(\mathbf{x}, \omega) \sim \hat{f}(\omega) \sum_{n=0}^N \frac{A_n(\mathbf{x})}{(-i\omega)^n} e^{i\omega\tau(\mathbf{x})}, \quad (\text{A.1})$$

onde o símbolo \sim (aproximação assintótica) significa que

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \left| \frac{u(\mathbf{x}, \omega) - \hat{f}(\omega) \sum_{n=0}^N \frac{A_n(\mathbf{x})}{(-i\omega)^n} e^{i\omega\tau(\mathbf{x})}}{(-i\omega)^{N+1}} \right| = 0. \quad (\text{A.2})$$

O aspecto importante desta aproximação é a separação da frequência ω e da variável espacial \mathbf{x} . Pode-se demonstrar (Chapman, 1985) que a série (A.1) é assintótica e divergente.

Nas altas frequências somente o termo principal é importante. Esta aproximação é chamada **Ótica Geométrica de ordem zero**. Já para frequências finitas, os termos de ordem superior permitem representar a distorção do pulso na propagação.

No domínio do tempo, a série (A.1) se reduz a

$$u(x, t) = \text{Re} \left\{ F(t) \star \sum_{n=0}^{\infty} A_n(\mathbf{x}) h_n[t - \tau(\mathbf{x})] \right\}, \quad (\text{A.3})$$

¹Termo alemão que significa aproximação ou suposição inicial.

onde \star é a operação convolução, as funções $h_n(t)$ são

$$h_0(t) = \delta(t), \quad h_1(t) = H(t), \quad h_2(t) = tH(t), \dots, \quad (\text{A.4})$$

ou seja, a Função Delta de Dirac, a Função Degrau de Heaviside e suas integrais de ordem superior, respectivamente, e $F(t)$ é a extensão analítica do sinal $f(t)$, isto é,

$$F(t) = f(t) + ig(t), \quad (\text{A.5})$$

sendo $g(t)$ a Transformada de Hilbert de $f(t)$.

Substituindo a suposição (A.1) na equação de onda (2.1), obtemos uma série de potências de $(-i\omega)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \{ (-i\omega)^{2-n} A_n [\nabla\tau \cdot \nabla\tau - v^{-2}] + (-i\omega)^{1-n} [2\nabla\tau \cdot \nabla A_n + A_n \nabla^2\tau] + (-i\omega)^{-n} \nabla^2 A_n \} = 0. \quad (\text{A.6})$$

Igualando a zero os coeficientes de cada potência, obtemos (Bleistein et al, 1999) para $n = 0$, a chamada **Equação Iconal**

$$\nabla\tau \cdot \nabla\tau = \frac{1}{v^2(\mathbf{x})}, \quad (\text{A.7})$$

que representa o tempo de trânsito das frentes de onda.

Para $n = 1$, temos a primeira Equação de Transporte, que chamaremos **Equação de Transporte**

$$2\nabla A_0 \cdot \nabla\tau + A_0 \nabla^2\tau = 0, \quad (\text{A.8})$$

onde A_0 representa a amplitude da aproximação de ordem zero.

Finalmente para $n \geq 2$, temos as Equações de Transporte de ordem superior

$$2\nabla A_{n-1} \cdot \nabla\tau + A_{n-1} \nabla^2\tau = -\nabla^2 A_{n-1}. \quad (\text{A.9})$$

Nesta tese, apenas consideraremos a primeira Equação de Transporte, ou seja, a aproximação da Ótica Geométrica de ordem zero. Isto é, apenas vamos ter em conta as equações (A.7) e (A.8).

Apêndice B

O Método do Disparo

Nesta tese, o método do disparo¹ (MD) é uma versão discreta do problema de valores iniciais para as equações dos raios, isto é, dada uma fonte, uma assinatura e um ângulo inicial, determinamos o ponto final (receptor).

Este método diferencia-se da abordagem descrita no Capítulo 3, pois, nessa abordagem, conhecíamos o ponto inicial e final do raio e avaliávamos os pontos intermediários resolvendo um sistema não-linear. Enquanto que no método do disparo, conhecemos o ponto inicial e o ângulo inicial do raio, e não conhecemos o ponto final do mesmo.

No MD aplicamos três processos em forma iterativa: propagação, intersecção e a Lei de Snell.

1. Damos as coordenadas da fonte, (x_0, z_0) , o ângulo inicial $\theta_0 = \gamma_2^2$ e a assinatura $[i_1, i_2, \dots, i_N; j_1, j_2, \dots, j_N, j_{N+1}]$. Damos também um valor de tolerância de erro, ϵ_D , para a distância final do raio com respeito a algum receptor. Um valor típico de ϵ_D é 10. Comparando com 10^3 (as ordens de magnitude do modelo), ϵ_D é muito pequeno.

Inicializamos o vetor direção do raio (vetor vagarosidade normalizado):

$$(\cos \theta_0, \sin \theta_0). \tag{B.1}$$

A partir deste vetor definimos a reta r_0 em forma paramétrica, como o lugar geométrico

¹Chamado de *Shooting Method*, em Inglês.

²Lembremos que (γ_1, γ_2) é a coordenada angular do raio. Para modelos 2D e 2.5D, o disparo está determinado totalmente pela quantidade γ_2 , o ângulo de disparo no plano XZ .

de pontos em \mathbb{R}^2 , tais que

$$\begin{aligned}x(\nu) &= x_0 + \nu \cos \theta_0, \\z(\nu) &= z_0 + \nu \sin \theta_0.\end{aligned}\tag{B.2}$$

2. Fazemos um laço nas $N - 1$ interfaces diferentes da superfície e atualizamos o valor do ponto de disparo em cada ponto de intersecção (x_k, z_k) :

Para $k = 0, 1, \dots, N - 1$ Faça

Encontrar a intersecção da k -ésima linha reta r_k com a interface L_{k+1} .

Para isto, utilizamos o método de bissecção e o Método de Newton em uma variável na equação $g_k(\nu) = 0$, onde $g_k(\nu) = z_k + \nu \sin \theta_k - f_{i_k}(x_k + \nu \cos \theta_k)$ ³.

No caso de encontrar um ν_k que satisfaça a equação $g_k = 0$, atualizar o novo ponto de disparo:

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= x_k + \nu_k \cos \theta_0, \\z_{k+1} &= z_k + \nu_k \sin \theta_0.\end{aligned}\tag{B.3}$$

Avaliar a normal e, portanto, o ângulo de incidência, θ_k^- , entre o segmento do raio r_k e a k -ésima interface.

Calcular o novo ângulo de disparo, θ_k^+ , usando a Lei de Snell. A partir do novo ângulo, encontramos a nova direção do raio em coordenadas referidas aos eixos definidas pela normal e pela tangente à superfície no ponto.

Avaliamos a tangente no ponto de intersecção e aplicamos uma rotação de coordenadas e transformamos o vetor direção em coordenadas globais.

Fim

3. Fazemos o último disparo e tentamos encontrar a intersecção do raio com a interface L_{N+1} (superfície onde está o receptor). Encontrado (x_{N+1}, z_{N+1}) comparamos a posição do $x_{N+1}(\theta_0)$ (colocamos a dependência funcional com respeito ao ângulo inicial para enfatizar) com respeito às coordenadas dos receptores.
4. Se existe um elemento do conjunto do receptores, com abscissa x^* , que satisfaça a seguinte condição

³Para $k = 0$, $\theta_0 = \theta_0^+ = \gamma_1$.

Se $\|x_{N+1} - x^*\| \leq \epsilon_D$ então

O raio encontrado é satisfatório

Senão

Voltamos ao primeiro passo e incrementamos um delta de ângulo ou ângulo de disparo e procuramos novamente.

Fim

Nos implementamos o método do disparo na linguagem OCTAVE, na biblioteca computacional OCTRAL, no programa chamado `shooting.m`.

Comparando a solução obtida por este método, ou seja, o vetor de abscissas

(x_1, x_2, \dots, x_N) , com a solução obtida pelo Método de Newton, encontramos que as diferenças relativas entre as normas das duas soluções é inferior a 0.1%.

Este método tem a desvantagem de ser muito sensível às variações do ângulo de disparo. Para alguns modelos com intersecção de interfaces, ele pode perder o primeiro raio da classe facilmente. Também ele apresenta mais complexidade computacional que o método de busca aleatória. Por estes motivos, escolhemos, finalmente, o método de busca aleatória para encontrar o primeiro raio da classe.

Apêndice C

Método de Busca Aleatória

Este método baseia-se na construção de uma seqüência aleatória finita de pontos pertencentes a uma caixa N -dimensional, e na utilização de cada um desses pontos como ponto inicial no Método de Newton. O método de busca aleatória é um método alternativo ao método do disparo.

Consideremos o sistema não-linear

$$\Phi(\mathbf{X}, \mathbf{V}) \equiv (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N)^T = \mathbf{0}, \quad (\text{C.1})$$

onde $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ é a incógnita do problema. Este sistema possui restrições dadas pelo modelo físico, pois cada x_k pertence à k -ésima superfície interceptada pelo raio. Um modelo sísmico é composto por interfaces ou superfícies limitadas espacialmente. Para o caso 2D, cada interface é uma curva que tem um domínio de definição restrito a um intervalo $[a_k, b_k]$, $1 \leq k \leq N$, onde a_k é o limite inferior e b_k é o limite superior do domínio de definição da k -ésima interface.

Se temos que construir um raio com assinatura de intersecções $[i_1, i_2, \dots, i_N]$, então a busca da solução está restrita a uma caixa determinada pelos respectivos índices da assinatura. Ou seja, a solução do sistema (C.1) é um elemento pertencente à caixa N -dimensional

$$\mathcal{D} = \prod_1^N [a_{i_k}, b_{i_k}]. \quad (\text{C.2})$$

O método proposto constrói em forma aleatória uma seqüência de pontos pertencentes a \mathcal{D} ,

$$\mathbf{X}_k^0, \quad k = 1, 2, \dots, N_A, \quad (\text{C.3})$$

onde N_A é o tamanho da seqüência aleatória.

Cada um desses pontos é utilizado como um primeiro ponto para começar o Método de Newton. Usamos cada um deles sucessivamente, procurando que um deles converja. Em caso afirmativo, utilizamos este primeiro raio para construir o primeiro raio da classe. No caso contrário, se utilizamos todos os pontos iniciais sem encontrar um raio, incrementamos N_A (por exemplo duplicamos o número) e construímos uma nova seqüência, com mais pontos, dentro da caixa, começando, novamente o teste com todos os pontos da nova seqüência.

No caso de não conseguirmos convergência para nenhum dos pontos iniciais utilizados, continuamos de uma forma iterativa testando os pontos da seqüência e construindo seqüências mais finas (o dobro de elementos da seqüência anterior). Se, finalmente, N_A excede um número arbitrário, 200 por exemplo, sem encontrar uma solução, então consideramos que o problema de traçamento de raios com valores na fronteira não possui solução. Modificamos a posição da fonte e o receptor para começar de novo a busca aleatória.

Este método é muito mais estável que o método do disparo para obter um primeiro raio da classe correspondente. No método do disparo para certos modelos, pode se perder a solução do problema por uma pequena perturbação do ângulo inicial.

O método de busca aleatória tem uma complexidade computacional menor que fazer uma amostragem regular na caixa \mathbb{D} . Por exemplo, se temos uma assinatura do raio que define N pontos de intersecção, uma amostragem regular de k divisões em cada dimensão geraria k^N pontos iniciais para fazer a busca. Obviamente, $N_A = 200 \ll k^N$.

A modo de exemplo, para uma assinatura com 7 pontos de intersecção e uma amostragem determinística de 10 divisões por dimensão, teríamos um total de 10^7 pontos iniciais para testar. Essa é uma quantidade enorme de testes para serem feitos utilizando o Método de Newton. Se, pelo contrário, testamos 200 pontos em forma aleatória dentro da caixa \mathbb{D} , a complexidade computacional do problema se reduz em várias ordens de magnitude, além de ter uma amostragem de toda a caixa N -dimensional.

Os experimentos nos têm mostrado que o método de busca aleatória, consegue encontrar um primeiro raio da classe com quantidades da ordem aproximada de 100 amostras aleatórias. Parece-nos que as bases teóricas deste método estão no Método de Monte Carlo, o qual é usado para fazer avaliação de integrais e expressões complexas, utilizando amostragens aleatórias.

Apêndice D

Método de Continuação no Traçamen- to Tridimensional de Raios

D.1 Formulação do Problema

Este apêndice diz sobre a extensão do Método de Continuação para o traçamento de raios, em modelos 3D multi-camadas. Para a construção deste apêndice, nos baseamos no artigo de Fawcett & Keller (1985).

Consideremos um modelo elástico multi-camadas tridimensional, onde a superfície (interface) L_i entre camadas é dada por uma expressão da forma

$$L_i = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = z_i(x, y) = f_i(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{O}\}, \quad i = 1, \dots, N_I, \quad (\text{D.1})$$

onde \mathbb{O} é um subconjunto aberto de \mathbb{R}^2 que define o domínio das interfaces, e N_I é a quantidade de interfaces que o modelo possui.

Cada camada do modelo é um meio homogêneo elástico com parâmetros constantes α , β e ρ , que representam a velocidade da onda tipo P , a velocidade da onda tipo S e a densidade, respectivamente, em cada camada. Entre as camadas, temos descontinuidades nos valores dos parâmetros. Portanto, um raio em cada camada é um segmento de linha reta, e pode ser especificado totalmente definindo o ponto inicial e o ponto final do segmento.

Consideremos um raio que une um ponto inicial (fonte) \mathbf{E}_0 , e um ponto final (receptor) \mathbf{E}_{N+1} , interceptando N pontos, $\mathbf{E}_{i_1}, \mathbf{E}_{i_2}, \dots, \mathbf{E}_{i_N}$, nas interfaces (o k -ésimo ponto pertence à interface L_{i_k} , $k = 1, 2, \dots, N$), e com uma assinatura $[i_1, i_2, \dots, i_N; j_1, j_2, \dots, j_N, j_{N+1}]$.

A fonte e o receptor pertencem às superfícies f_{i_0} e $f_{i_{N+1}}$, respectivamente. Estas superfícies, em geral, podem ser diferentes mas, usualmente, nos problemas geofísicos, elas coincidem e são exatamente a superfície da Terra.

Vamos definir a seguinte notação:

A normal na k -interface interceptada no k -ésimo ponto é igual a

$$\mathbf{N}_k \equiv \left(\frac{-\partial f_{i_k}}{\partial x}, \frac{-\partial f_{i_k}}{\partial y}, 1 \right). \quad (\text{D.2})$$

O vetor $\mathbf{E}_{i_k} - \mathbf{E}_{i_{k-1}}$ representa o k -ésimo segmento do raio, para $k = 1, \dots, N+1$.

Utilizando uma notação similar à do Capítulo 3, temos:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_k &\equiv (x_k, y_k, z_{i_k}), \quad k = 1, 2, \dots, N, \\ H_k &\equiv \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2 + (\Delta z_k)^2}, \quad k = 1, 2, \dots, N+1, \\ \Delta x_k &\equiv x_k - x_{k-1}, \quad \Delta y_k \equiv y_k - y_{k-1}, \quad \Delta z_k \equiv z_{i_k} - z_{i_{k-1}}. \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

A velocidade no k -ésimo segmento do raio é igual a v_{j_k} , $k = 1, \dots, N+1$, e pode ser α ou β , em cada camada, dependendo da assinatura do modelo.

O **problema básico** então, consiste em encontrar as coordenadas x_k e y_k do k -ésimo ponto, para $k = 1, \dots, N$. A coordenada z de cada ponto \mathbf{E}_k é conhecida, pois $z_k = f_{i_k}(x_k, y_k)$ da Equação (D.1).

A Lei de Snell em forma vetorial, na k -ésima interface, pode ser escrita como

$$\frac{v_{j_{k+1}}}{H_k} (\mathbf{E}_k - \mathbf{E}_{k-1}) \times \mathbf{N}_k = \frac{v_{j_k}}{H_{k+1}} (\mathbf{E}_{k+1} - \mathbf{E}_k) \times \mathbf{N}_k, \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, N, \quad (\text{D.4})$$

onde \times é o produto vetorial entre dois vetores.

Em termos de componentes, temos $2N$ equações

$$\begin{aligned} \frac{v_{j_{k+1}}}{H_k} \left(\Delta x_k + \frac{\partial f_{i_k}}{\partial x_k} \Delta z_k \right) - \frac{v_{j_k}}{H_{k+1}} \left(\Delta x_{k+1} + \frac{\partial f_{i_k}}{\partial x_j} \Delta z_{k+1} \right) &= 0 \\ \frac{v_{j_{k+1}}}{H_k} \left(\Delta y_k + \frac{\partial f_{i_k}}{\partial y_k} \Delta z_k \right) - \frac{v_{j_k}}{H_{k+1}} \left(\Delta y_{k+1} + \frac{\partial f_{i_k}}{\partial y_k} \Delta z_{k+1} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

para $k = 1, 2, \dots, N$.

Temos então um sistema não-linear de $2N$ equações e $2N$ incógnitas que podemos escrever assim:

$$\Psi(\mathbf{Y}; \mathbf{m}) = 0, \quad (\text{D.6})$$

onde

$$\mathbf{Y} \equiv (x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_N, y_N) \quad (\text{D.7})$$

e \mathbf{m} denota um vetor de parâmetros do modelo (velocidades ou coordenadas do receptor, por exemplo).

D.2 Solução das Equações

As equações (D.6) são um sistema não-linear, portanto, podem ser utilizados os métodos descritos no Capítulo 3. Isto é, fazemos inicialmente uma busca global para encontrar o primeiro raio da classe.

Encontrado um primeiro raio, podemos então aplicar o Método de Newton e o Método de Continuação para encontrar os outros raios, que serão soluções a sistemas não-lineares, cada um deles representando uma mudança do sistema inicial. Por exemplo, mudando a posição do receptor até esgotar todas as possibilidades, utilizando continuação nos receptores, conseguimos todos os raios da classe pertencentes a um disparo.

Depois de traçado um raio para um par fonte-receptor, podemos avaliar os tempos de trânsito do raio entre a fonte e o receptor, com uma assinatura dada. Esses tempos de trânsito os denotamos por $\tau(\mathbf{E}_0, \mathbf{E}_{N+1})$. Essa avaliação pode ser feita utilizando os valores das variáveis intermediárias que são obtidas a partir dos pontos de intersecção, isto é,

$$\tau(\mathbf{E}_0, \mathbf{E}_{N+1}) = \sum_{k=1}^{N+1} \frac{H_k}{v_{j_k}}. \quad (\text{D.8})$$

Apêndice E

Dedução da Fórmula Recursiva Multi-Camada para Meios Acústicos 2.5D

E.1 O Tubo de Raios

A seguir, vamos deduzir a fórmula final da amplitude em um modelo multi-camadas acústico 2.5D, conforme os argumentos dados em Docherty (1986). Este tipo de modelo é o considerado no CSHOT. Vamos deduzir a expressão da amplitude final para um meio multi-camadas, com velocidades constantes por camada.

A equação (4.31) é válida somente quando é aplicada em regiões com velocidade contínua entre interfaces. Se consideramos os fenômenos de reflexão e transmissão temos que ter em conta os coeficientes de reflexão e transmissão na interface.

No Capítulo 4, definimos o tubo de raios como um volume do espaço, de tal forma que as superfícies laterais do tubo são paralelas à direção do raio considerado, o raio central. Para um meio multi-camadas com velocidade constante em cada uma delas, o tubo de raios é composto por uma seqüência de tubos conectados nas interfaces atingidas pelo raio, desde a superfície onde está localizada a fonte, até a superfície onde está localizado o receptor, mudando a direção em cada camada de acordo com a Lei de Snell.

Consideremos uma seqüência de $N + 2$ pontos, $\mathbf{E}_0, \mathbf{E}_1, \dots, \mathbf{E}_N, \mathbf{E}_{N+1}$, que definem um raio com a fonte localizada em \mathbf{E}_0 e o receptor localizado em \mathbf{E}_{N+1} , com assinatura

$[i_1, i_2, \dots, i_N; j_1, j_2, \dots, j_n, j_{N+1}]$. Temos, então, $N+1$ segmentos de raio e $N+1$ sub-tubos adjacentes. Para cada tubo deve ser satisfeita a Equação de Transporte. Vamos utilizar a

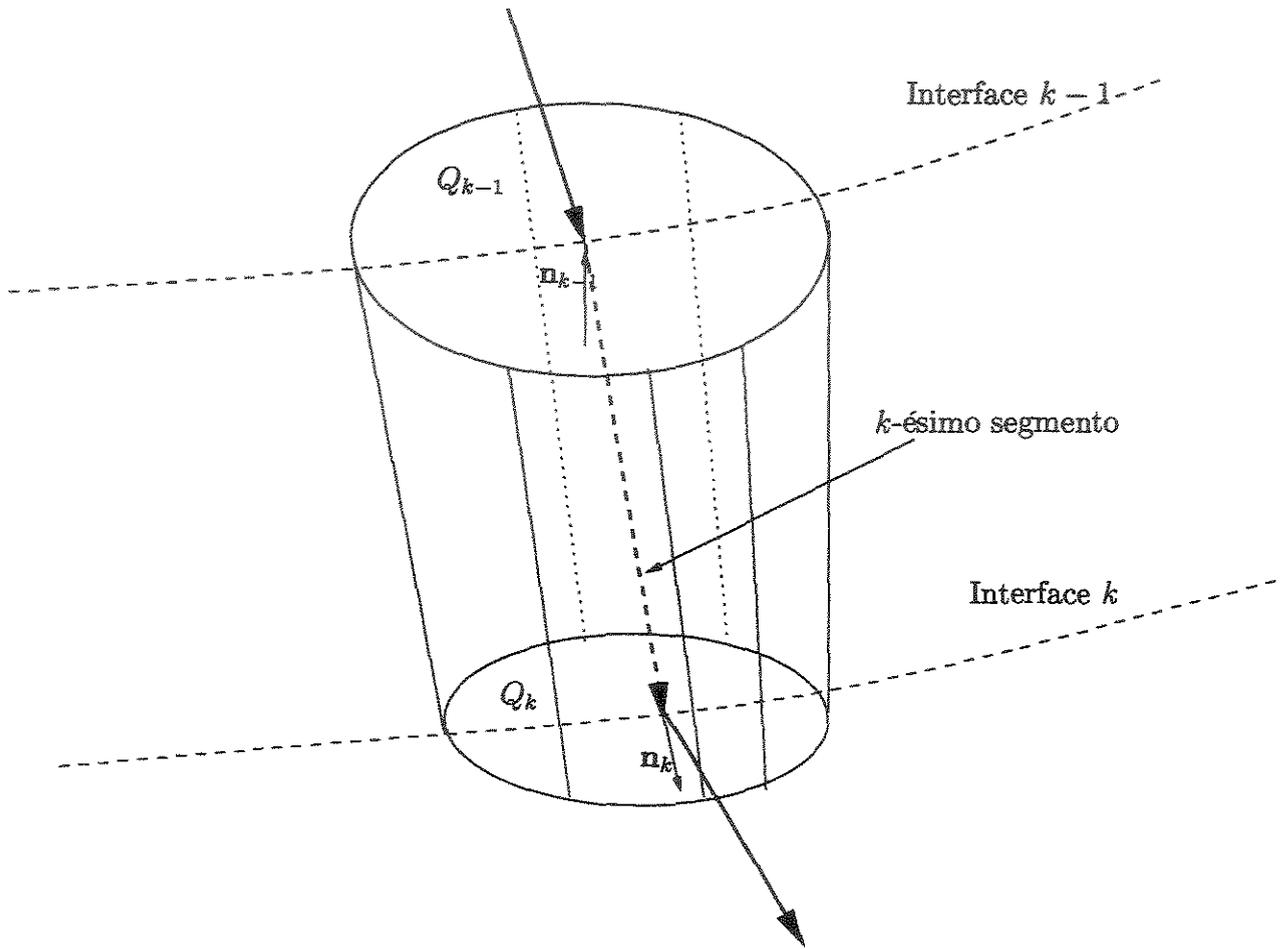


Figura E.1: O tubo de raios entre duas interfaces consecutivas.

forma integral desta equação, correspondente à equação (4.13). Aplicando o Teorema da Divergência, temos no k -ésimo sub-tubo, mostrado na Figura (E.1), que

$$\int_{\Delta Q_k} A_{k-}^2 \nabla \tau_{k-} \cdot \mathbf{n}_{k-} dQ = \int_{\Delta Q_{k-1}} A_{(k-1)+}^2 \nabla \tau_{(k-1)+} \cdot \mathbf{n}_{(k-1)+} dQ, \text{ para } k = 1, 2, \dots, N+1, \quad (\text{E.1})$$

onde A_k denota o valor da amplitude na k -ésima interface interceptada pelo raio, e os sub-índices associados ao símbolo “-” referem-se aos raios incidentes, e os sub-índices associados ao símbolo “+” referem-se aos raios refletidos/transmitidos.

Na equação (E.1), os raios transmitidos através da i_{k-1} -ésima interface são incidentes na i_k -ésima interface. Nessa equação, estamos considerando um tubo de raios muito fino, o que implica que as superfícies ΔQ_k são pequenas.

Em geral, as superfícies ΔQ_k , para $k = 1, 2, \dots, N$, não são superfícies de fase constante, pois elas são construídas tangentes às interfaces nos pontos de intersecção, as quais são independentes da fase do raio. O esquema usado para facilitar o método, descrito a seguir, é tornar as superfícies ΔQ_0 e ΔQ_{N+1} de fase constante, para simplificar os cálculos e finalmente poder avaliar A_{N+1} em termos da amplitude inicial conhecida A_0 .

Também sabemos que na interface i_k temos

$$A_{k+} = \mathcal{K}_k A_{k-}, \quad (\text{E.2})$$

onde \mathcal{K}_k pode designar o coeficiente de reflexão \mathcal{R}_k ou o coeficiente de transmissão \mathcal{T}_k , na interface i_k .

Para encontrar a amplitude no ponto final do raio, fazemos um processo recursivo. Para começar este processo, devemos avaliar o caso em que $k = 1$. Para este fim, definimos a primeira superfície, ΔQ_0 , como uma superfície esférica de centro na posição da fonte pontual e de raio r muito pequeno. Suponhamos também, que o meio ao redor do ponto inicial é homogêneo com velocidade v_{j_1} . Desta forma, a superfície inicial ΔQ_0 coincide com uma superfície de fase constante. A amplitude nesta superfície é dada pela amplitude da Função de Green, conforme a equação (4.24)

$$A_0 = \frac{1}{4\pi r}. \quad (\text{E.3})$$

Da equação (4.29) conhecemos a área transversa no tubo de raios que emana da fonte e intercepta a esfera,

$$\Delta Q_0 = r^2 \sin \gamma_2 \Delta \gamma_2 \Delta \gamma_1. \quad (\text{E.4})$$

Portanto, temos para a primeira camada que

$$\begin{aligned} \int_{\Delta Q_1} A_{1-}^2 \nabla \tau_{1-} \cdot \mathbf{n}_{1-} dQ_1 &= \int_{\Delta Q_0} A_{0+}^2 \nabla \tau_{0+} \cdot \mathbf{n}_{0+} dQ_0 \\ &= \frac{1}{(4\pi)^2 v_{j_1} r^2} (r^2 \sin \gamma_2) \Delta \gamma_2 \Delta \gamma_1, \\ &= \frac{1}{(4\pi)^2 v_{j_1}} \sin \gamma_2 \Delta \gamma_2 \Delta \gamma_1. \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

No k -ésimo segmento, de velocidade v_{j_k} , aproximamos (E.1) por

$$\frac{\cos \theta_k^-}{v_{j_k}} \int_{\Delta Q_k} A_k^2 dQ = \frac{\cos \theta_{k-1}^+}{v_{j_{k-1}}} \int_{\Delta Q_{k-1}} A_{(k-1)+}^2 dQ, \quad 2 \leq k \leq N+1, \quad (\text{E.6})$$

onde θ_k^- e θ_k^+ são os ângulos de incidência e transmissão, respectivamente, na k -ésima interface. Se levamos em conta que $A_k = A_{k-}$ e substituindo a equação (E.2), então a equação (E.6) se reduz a

$$\int_{\Delta Q_k} A_k^2 dQ = \frac{\cos \theta_{k-1}^+}{\cos \theta_k^-} \mathcal{K}_{k-1}^2 \int_{\Delta Q_{k-1}} A_{k-1}^2 dQ, \quad 2 \leq k \leq N+1. \quad (\text{E.7})$$

No ponto final do raio consideramos a superfície ΔQ_{N+1} , de fase constante, e aproximamos as integrais, obtendo

$$\begin{aligned} \int_{\Delta Q_{N+1}} \frac{A_{N+1}^2}{v_{j_{N+1}}} dQ &= \int_{\Delta Q_N} A_{N+}^2 \nabla \tau_{N+} \cdot \mathbf{n}_{N+} dQ \\ &= \frac{\cos \theta_N^+}{v_{j_{N+1}}} \mathcal{K}_N^2 \int_{\Delta Q_N} A_N^2 dQ. \end{aligned} \quad (\text{E.8})$$

Aplicando a relação recursiva (E.7), aproximando a primeira integral da equação (E.8) e usando os dados iniciais (E.5) em (E.8), temos que a amplitude no ponto final do raio é

$$A_{N+1}^2 = \frac{\sin \gamma_2 \Delta \gamma_2 \Delta \gamma_1}{(4\pi)^2 \Delta Q_{N+1}} \prod_{k=1}^N \mathcal{K}_k^2 \frac{\cos \theta_k^+}{\cos \theta_k^-} = \frac{\sin \gamma_2}{(4\pi)^2 J(\sigma_{N+1})} \prod_{k=1}^N \mathcal{K}_k^2 \frac{\cos \theta_k^+}{\cos \theta_k^-}. \quad (\text{E.9})$$

Dada a trajetória do raio, podemos avaliar os termos do produto da equação (E.9). O ângulo de disparo é conhecido se a trajetória do raio o é. Na próxima seção, vamos avaliar ΔQ_{N+1} para um modelo 2.5D.

E.2 Modelos Multi-Camadas 2.5D com Velocidade Constante por Camadas

Nesta seção vamos considerar um modelo 2.5D, ou seja, um modelo para o qual os parâmetros não têm variação na direção fora do plano (na direção perpendicular a nossa linha de observação). Esta simplificação é válida para estruturas geológicas para as quais a inclinação da estrutura nessa direção é quase zero. Para este tipo particular de situação, a divergência geométrica pode ser avaliada em termos de quantidades em um plano de observação (Bleistein, 1986).

As hipóteses são

$$v = v(x_1, x_2), \quad \mathbf{x}(\sigma_0) = \mathbf{E}_0 = (e_1, 0, e_3), \quad (\text{E.10})$$

e nossa linha de observação é ao longo do eixo x_1 . Nosso objetivo é avaliar $|J|$, dado pela equação (4.16), e daí poder calcular a área transversal do tubo de raio no ponto final. Usaremos as equações (4.9) e (4.10), e também os dados iniciais (4.23). De (4.10) e (E.10) temos que

$$\frac{dp_2}{d\sigma} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\frac{1}{v^2} \right] = 0. \quad (\text{E.11})$$

Como p_2 é constante em cada raio da equação (4.23), temos

$$p_2 = \frac{1}{v_{j_1}} \sin \gamma_1 \sin \gamma_2. \quad (\text{E.12})$$

Integrando (4.9) para x_2 , chegamos a

$$x_2 = \frac{\sigma}{v_{j_1}} \sin \gamma_1 \sin \gamma_2. \quad (\text{E.13})$$

Podemos calcular agora a segunda linha da Matriz Jacobiana (4.16). O raio no plano é definido para $\gamma_1 = 0$. Similarmente, as derivadas são avaliadas em $\gamma_1 = 0$. Então, para um valor do parâmetro σ , temos que a equação (4.16) torna-se

$$|J(\sigma)| = v(\sigma) \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \sigma} & \frac{\partial x_1}{\partial \gamma_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \gamma_2} \\ 0 & \frac{\sigma \sin \gamma_2}{v_{j_1}} & 0 \\ \frac{\partial x_3}{\partial \sigma} & \frac{\partial x_3}{\partial \gamma_1} & \frac{\partial x_3}{\partial \gamma_2} \end{vmatrix}. \quad (\text{E.14})$$

Denotando por σ_i o valor do parâmetro no k -ésimo ponto ($1 \leq k \leq N+1$) definido pelo raio, expandindo o determinante pela segunda linha e utilizando $v(\sigma_{N+1}) = v_{j_{N+1}}$, temos

$$|J(\sigma_{N+1})| = \frac{v_{j_{N+1}} \sigma_{N+1} \sin \gamma_2}{v_{j_1}} \left| \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(\sigma, \gamma_2)} \right|_{\sigma=\sigma_{N+1}} \quad (\text{E.15})$$

Agora utilizamos vetores no plano para expressar o determinante 2×2 :

$$\left| \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(\sigma, \gamma_2)} \right| = \left\| \frac{d\mathbf{x}}{d\sigma} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \gamma_2} \right\|, \quad (\text{E.16})$$

onde $\mathbf{x} = (x_1, 0, x_3)$.

Aplicando a regra da cadeia para determinantes, obtemos

$$\left| \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(\sigma, \gamma_2)} \right| = \left| \frac{\partial(x_1, x_3)}{\partial(\tau, \gamma_2)} \frac{\partial(\tau, \gamma_2)}{\partial(\sigma, \gamma_2)} \right| = \left\| \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \gamma_2} \right\| \begin{vmatrix} \frac{\partial \tau}{\partial \sigma} & \frac{\partial \tau}{\partial \gamma_2} \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad (\text{E.17})$$

onde $\frac{d\mathbf{x}}{d\tau}$ é avaliada em uma superfície de τ constante e, portanto, tangente à frente de onda.

Como $\frac{d\mathbf{x}}{d\tau}$ aponta na direção do raio temos, então, que $\frac{d\mathbf{x}}{d\tau}$ e $\frac{d\mathbf{x}}{d\gamma_2}$ são ortogonais, assim

$$\left| \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(\sigma, \gamma_2)} \right| = \left\| \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} \right\| \left\| \frac{d\mathbf{x}}{d\gamma_2} \right\| \left| \frac{\partial \tau}{\partial \sigma} \right| \quad (\text{E.18})$$

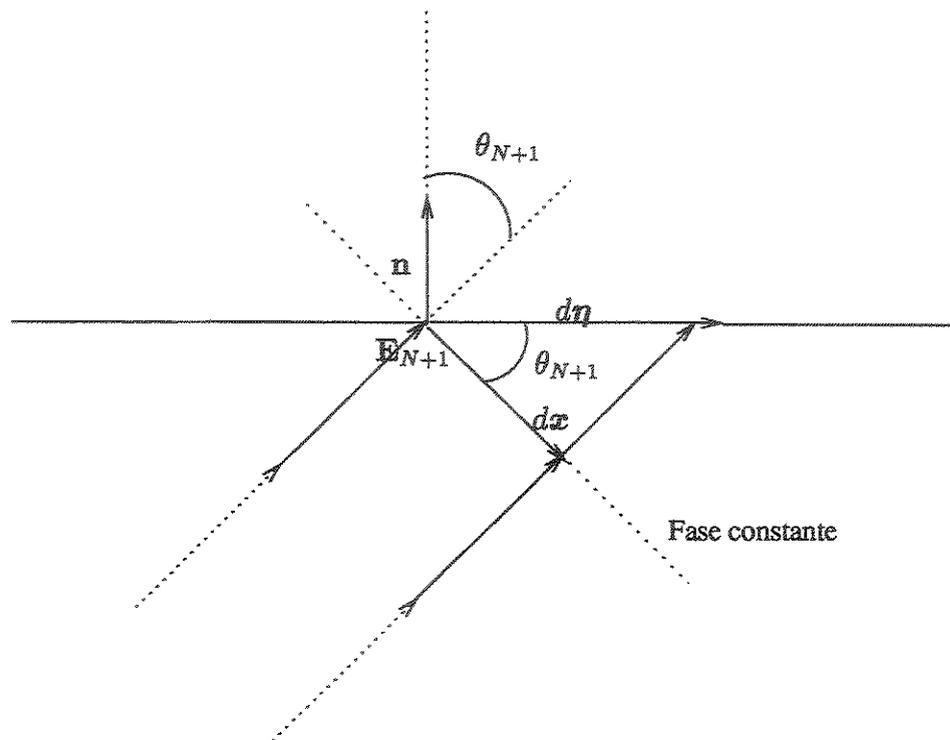


Figura E.2: Superfície de observação.

e usando (4.9) e (4.11) temos que

$$\left\| \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(\sigma, \gamma_2)} \right\| = \left\| \frac{dx}{d\sigma} \right\| \left\| \frac{\partial x}{\partial \gamma_2} \right\| = \frac{1}{c(x)} \left\| \frac{\partial x}{\partial \gamma_2} \right\|. \quad (\text{E.19})$$

Para a fórmula final é conveniente expressar o deslocamento, Δx , ao longo da frente de onda em termos do correspondente deslocamento, $\Delta \eta$, ao longo da superfície de observação. Conforme à Figura (E.2) observa-se que $\Delta \eta = \Delta x \cos \theta_{N+1}$, onde θ_{N+1} é o ângulo entre a normal, na superfície de observação, e o raio. Como consequência, temos

$$\left\| \frac{\partial x}{\partial \gamma_2} \right\| = \left\| \frac{\partial \eta}{\partial \gamma_2} \right\| \cos \theta_{N+1}. \quad (\text{E.20})$$

Usando (E.19) e (E.20) em (E.15), temos

$$\left\| \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(\sigma, \gamma_2)} \right\| = \frac{1}{v_{j_{N+1}}} \left\| \frac{\partial x}{\partial \gamma_2} \right\| = \frac{\cos \theta_{N+1}}{v_{j_{N+1}}} \left\| \frac{\partial \eta}{\partial \gamma_2} \right\|. \quad (\text{E.21})$$

Finalmente, substituindo o anterior resultado na equação (E.14), podemos avaliar o Jacobiano obtendo

$$|J(\sigma_{N+1})| = \left(\frac{\sigma_{N+1} v_{j_{N+1}} \sin \gamma_2}{v_{j_1}} \right) \left(\frac{\cos \theta_{N+1}}{v_{j_{N+1}}} \right) \left\| \frac{\partial \eta}{\partial \gamma_2} \right\| = \frac{\sigma_{N+1} \sin \gamma_2}{v_{j_1}} \left\| \frac{\partial \eta}{\partial \gamma_2} \right\| \cos \theta_{N+1}. \quad (\text{E.22})$$

Podemos agora obter a expressão da amplitude substituindo a equação (E.22) na equação (E.9). Lembrando que

$$\Delta Q_{N+1} \approx |J(\sigma_{N+1})| \Delta \gamma_1 \Delta \gamma_2. \quad (\text{E.23})$$

obtemos

$$\begin{aligned} A_{N+1}^2 &= \frac{\sin \gamma_2 \Delta \gamma_1 \Delta \gamma_2}{(4\pi)^2 |J(\sigma_{N+1})| \Delta \gamma_1 \Delta \gamma_2} \prod_{k=1}^N \mathcal{K}_k^2 \frac{\cos \theta_k^+}{\cos \theta_k^-} \\ &= \frac{\sin \gamma_2 v_{j_1}}{(4\pi)^2 \sigma_{N+1} \sin \gamma_2} \frac{1}{\left\| \frac{d\eta}{d\gamma_2} \right\| \cos \theta_{N+1}} \prod_{k=1}^N \mathcal{K}_k^2 \frac{\cos \theta_k^+}{\cos \theta_k^-}. \end{aligned} \quad (\text{E.24})$$

Após algumas simplificações, obtemos

$$A_{N+1} = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{v_{j_1}}{\sigma_{N+1}} \right]^{1/2} \left[\left\| \frac{d\eta}{d\gamma_2} \right\| \cos \theta_{N+1} \right]^{-1/2} \prod_{k=1}^N \mathcal{K}_k \left[\frac{\cos \theta_k^+}{\cos \theta_k^-} \right]^{1/2}. \quad (\text{E.25})$$

Tendo em vista a condição de que a velocidade em cada camada é constante, podemos integrar a equação (4.9) para obter o valor final do parâmetro $\sigma = \sigma_{N+1}$. Temos, portanto,

$$\sigma_{N+1} = \sum_{k=1}^{N+1} v_{j_k} D_k, \quad (\text{E.26})$$

onde D_k é o comprimento do k -ésimo segmento do raio. Reescrevendo (E.25) e utilizando (E.26), a amplitude no ponto final do raio é

$$A_{N+1} = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{\sum_{k=1}^{N+1} v_{j_k} D_k}{v_{j_1}} \right]^{-1/2} \left[\left\| \frac{d\eta}{d\gamma_2} \right\| \cos \theta_{N+1} \right]^{-1/2} \prod_{k=1}^N \mathcal{K}_k \left[\frac{\cos \theta_k^+}{\cos \theta_k^-} \right]^{1/2}. \quad (\text{E.27})$$

A fórmula (E.27) é aquela obtida em Docherty (1986).

