



Rodrigo Blot

Modelagem e Estudo Analítico da Equação da Onda Elástica em um Meio VTI

CAMPINAS

2012



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA
E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

Rodrigo Bloot

Modelagem e Estudo Analítico da Equação da Onda Elástica em um Meio VTI

Orientador(a): Prof. Dr. Joerg Dietrich Wilhelm Schleicher

Coorientador: Prof. Dr. Lúcio Tunes dos Santos

Tese de doutorado apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Unicamp para obtenção do título de Doutor em Matemática Aplicada.

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA TESE DEFENDIDA PELO ALUNO RODRIGO BLOOT, E ORIENTADA PELO PROF.DR. JOERG DIETRICH WILHELM SCHLEICHER

Assinatura do Orientador

A handwritten signature in blue ink, appearing to read "J. Schleicher", written over a horizontal line.

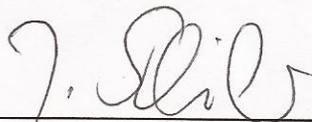
Assinatura do Coorientador

A handwritten signature in blue ink, appearing to read "Lúcio Tunes dos Santos", written over a horizontal line.

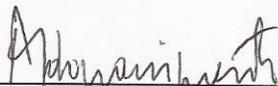
CAMPINAS
2012

Tese de Doutorado defendida em 14 de dezembro de 2012 e aprovada

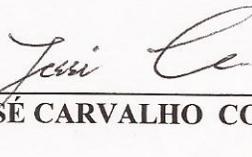
Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



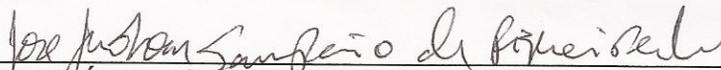
Prof(a). Dr(a). JOERG DIETRICH WILHELM SCHLEICHER



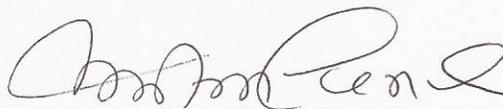
Prof(a). Dr(a). ADERSON FARIAS DO NASCIMENTO



Prof(a). Dr(a). JESSÉ CARVALHO COSTA



Prof(a). Dr(a). JOSÉ JADSOM SAMPAIO DE FIGUEIREDO



Prof(a). Dr(a). MARIA CRISTINA DE CASTRO CUNHA

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA POR
ANA REGINA MACHADO - CRB8/5467
BIBLIOTECA DO INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E
COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA - UNICAMP

Bloot, Rodrigo, 1980-
B623m Modelagem e estudo analítico da equação da onda elástica em um meio VTI / Rodrigo Bloot. – Campinas, SP : [s.n.], 2012.

Orientador: Joerg Dietrich Wilhelm Schleicher.

Coorientador: Lúcio Tunes dos Santos.

Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Equação de onda. 2. Anisotropia. 3. Fluidos - Propriedades acústicas. I. Schleicher, Joerg Dietrich Wilhelm, 1964-. II. Santos, Lúcio Tunes dos, 1962-. III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. IV. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em inglês: Modeling and analytical study of elastic wave equation in a VTI medium

Palavras-chave em inglês:

Wave equation

Anisotropy

Fluids - Acoustic properties

Área de concentração: Matemática Aplicada

Titulação: Doutor em Matemática Aplicada

Banca examinadora:

Joerg Dietrich Wilhelm Schleicher [Orientador]

Aderson Farias do Nascimento

Jessé Carvalho Costa

José Jadsom Sampaio de Figueiredo

Maria Cristina de Castro Cunha

Data de defesa: 14-12-2012

Programa de Pós-Graduação: Matemática Aplicada

Agradecimentos

Aos meus orientadores Joerg Schleicher e Lúcio Tunes dos Santos pela oportunidade e ensinamentos.

Ao Grupo de Geofísica Computacional (GGC) do IMECC/UNICAMP pelo ótimo ambiente de pesquisa.

Ao CEPETRO/GGC pela bolsa provisória que permitiu que eu permanecesse no doutorado.

Ao INCT-GP/GGC pelas passagens e diárias.

A UNICAMP/IMECC pela bolsa PED A.

A minha esposa Ana Paula e minha mãe Floracy pelo amor, carinho e incentivo.

E aos demais que de alguma forma contribuíram para realização deste trabalho.

Resumo

No presente trabalho derivamos a equação geral da onda em um meio VTI com anisotropia fraca por meio da linearização do tensor de rigidez em termos do parâmetro de Thomsen δ . A equação da onda resultante é um sistema de três equações diferenciais acopladas em relação ao vetor de posição. Adaptamos a decomposição de Helmholtz e estudamos a propagação da onda em um meio homogêneo VTI. Além disso, usando a teoria do raio de ordem zero, derivamos as equações iconais e de transporte associadas aos modos de onda q-P, q-SV e q-SH. Por fim, reduzimos o problema ao caso pseudo-acústico no qual a velocidade da onda S é nula no eixo de simetria vertical e, com isto, estabelecemos um entendimento mais satisfatório do significado de artefatos que ocorrem nestes meios.

Palavras-chave: Equação de onda, Anisotropia, Propriedades acústicas.

Abstract

We derive a general elastic wave equation in weakly anisotropic VTI media by linearizing the expression of the stiffness tensor in terms of the Thomsen parameter δ . The resulting wave equation is a system of three coupled differential equations for the three components of the displacement vector. By using the Helmholtz decomposition is possible to study the wave propagation in homogeneous VTI media. In heterogeneous case we use the zero-order ray theory. We derive the associated eikonal and transport equations for q-P, q-SV and q-SH waves. These are finally reduced to the pseudo-acoustic case where the vertical S-wave velocity is zero. This allows for a better understanding of the pseudo-S wave artifact in such media.

Keywords: Wave equation, Anisotropy, Acoustic properties.

Sumário

Lista de Símbolos	xi
1 Introdução	1
2 Preliminares	5
2.1 Conceitos Básicos sobre Deformação	5
2.2 Conceitos Adicionais de Mecânica do Contínuo	9
2.3 Tensor de Tensão	11
2.4 Comentários	15
3 Equação da Onda Elástica em um Meio Heterogêneo VTI	16
3.1 Dedução da Equação Elástica para um Meio VTI	16
3.2 Comentários	23
4 Decomposição de Helmholtz em um Meio Homogêneo VTI	24
4.1 Estudos dos Campos de Onda Gerados em um Meio VTI	24
4.1.1 Equações Desacopladas	24
4.1.2 Cálculo dos Potenciais	28
4.2 Função de Green para um Meio Elíptico	34
4.3 Fonte Pontual Onidirecional	35
4.3.1 Caso Pseudo-Acústico	35
4.4 Equação da Onda Unidirecional	36
4.5 Caso Elíptico	39
4.6 Outros Tipos de Fontes	39
4.7 Separação de Modos de Onda	41
4.7.1 Separação do Modo de Onda q-P	42
4.7.2 Separação do Modo de Onda q-SV	45
4.7.3 Separação do Modo de Onda q-SH	47

4.8	Comentários	48
5	Teoria do Raio	49
5.1	Equações Iconais	49
5.1.1	Autovalores Exatos	51
5.1.2	Anisotropia Fraca	52
5.1.3	Solução das Equações Iconais Linearizadas	53
5.2	Simplificação da Equação de Transporte	54
5.3	Caso Pseudo-Acústico	56
5.3.1	Propagação de Ondas q-P	58
5.3.2	Propagação de Ondas Pseudo-SV	58
5.4	Comentários	59
6	Conclusão	61
	Apêndice A: Solução de Lamé para o Caso Isotrópico Elástico	65
	Apêndice B: Método das Características	67

Lista de Símbolos

\mathbf{J}_c	Determinante do Jacobiano
τ_{ij}	Tensor de tensão
ϵ_{ij}	Tensor de deformação
ω_{ij}	Tendor de rotação
E_{kl}	Descrição Euleriana do movimento
L_{kl}	Descrição Lagrangeana do movimento
$\frac{D}{Dt}$	Derivada Material
c_{ijkl}	Tensor de Rigidez
\mathbf{f}	Força por unidade de volume
\mathbf{u}	Vetor de posicionamento do campo de onda
$u_{i,k}$	Derivada parcial de u_i em relação a k -ésima variável
λ	Parâmetro elástico de Lamé
μ	Módulo de resistência elástica
δ, ϵ, γ	Parâmetros de Thomsen
α	Velocidade da onda P
β	Velocidade da onda S
ρ	Densidade do meio
∇	Operador gradiente
$\nabla \cdot$	Operador divergente
$\nabla \times$	Operador rotacional
Γ	Matriz de Christoffel
\cdot	Produto escalar canônico em \mathbb{R}^3 , $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = x_i x_i$
$\ \cdot\ $	Norma canônica em \mathbb{R}^3 , $\ \mathbf{x}\ = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$
T	Tempo de trânsito
Λ	Autovalor da Matriz de Christoffel
η	Parâmetro de anelipticidade
V_{NMO}	Velocidade NMO (do inglês, “Normal MoveOut”)

Lista de Figuras

1.1	O modelo VTI possui um eixo vertical e camadas isotrópicas horizontais. Este tipo de simetria também é conhecida como a simetria das “camadas horizontais finas” (reproduzido de Tsvankin, 2001).	2
1.2	A figura ilustra a direção do movimento da partícula correspondendo às ondas q-P e q-S, o vetor de movimento da onda q-S é decomposto em outros dois vetores q-SV e q-SH. O plano I é o plano de propagação e contém os vetores q-P e q-SV, o vetor q-SH está no plano horizontal II . O ângulo θ entre q-P e q-S é o ângulo de polarização da onda q-S. Em geral, para meios TI os vetores q-P e q-S não são ortogonais.	3
2.1	A figura ilustra geométricamente o vetor de deslocamento u (reproduzido de Pujol, 2003).	8
2.2	Geometria utilizada para definir o vetor de Tensão (reproduzido de Pujol, 2003).	11
2.3	Tetraedro que utilizamos para introduzir o vetor de Tensão (reproduzido de Pujol, 2003).	14
4.1	Campo de onda 2D com a fonte localizada na origem em um meio pseudo acústico VTI elíptico obtido usando (4.78). A figura (a) é referente aos valores $\epsilon = \delta = 0.2$ e velocidade $\alpha = 1.5$ km/s enquanto que a figura (b) foi obtida para os valores $\epsilon = \delta = -0.39$ e a mesma velocidade α do caso anterior.	40
4.2	A figura da esquerda representa o campo de onda P com a fonte localizada na origem em um meio com $\epsilon = \delta = 0$ e $\alpha = 1.5$ km/s.	40
4.3	Modelo heterogêneo VTI com três camadas, a primeira camada possui $\delta = -0.2704$ e $\epsilon = -0.2187$. A configuração fonte receptor é colocada em branco.	42
4.4	A figura representa os snapshot 2D u_1 dado em (a) e u_3 dado em (b) que se propagam na primeira camada para $t = 1s$	43

4.5	A figura (a) representa o snapshot q-P obtido ao se aplicar o operador (4.85) em u_1 e u_3 que estão representados na Figura 4.4. A figura em (b) representa o campo q-P quando aplicado somente o operador isotrópico $\nabla \cdot$. É possível ver que a influência da onda q-SV foi melhor removida quando usamos (4.85) do que no caso em que usamos o operador isotrópico.	43
4.6	Aqui os snapshots 2D representados pelas componentes u_1 dado em (a) e u_3 dado em (b) para $t = 2s$ que inclui ondas refletidas q-P e q-SV.	44
4.7	Após aplicar (4.85) é possível perceber que mesmo na presença de heterogeneidade existe a supressão das ondas q-SV. A figura em (b) é a do campo de ondas obtido usando o operador isotrópico. A diferença neste caso é mínima mas é possível ver que para as ondas refletidas nossa técnica, que pode ser vista em (a), não deixa nenhum rastro das ondas mais lentas.	44
4.8	Na figura, o campo de onda é referente a um meio elíptico com $\delta = -0.2704$ com velocidade $\alpha = 4000 \text{ m/s}$ no instante de tempo $t = 1.1s$	45
4.9	A figura mostra o resultado da aplicação do operador $\nabla \times$ aos campos u_1 e u_3 na Figura 4.4. É possível perceber que o campo de onda q-P não foi totalmente suprimido.	46
4.10	A figura mostra o resultado da aplicação do operador (4.93) no campo representado pela Figura 4.9. Como resultado ocorreu uma boa supressão da onda q-P.	47
5.1	Tubo do raio usado para derivar aproximações para as amplitudes. As superfícies Σ_0 e Σ_1 são partes de frentes de onda nos instantes t_0 e t_1 (reproduzido de Pujol, 2003).	57
5.2	A frente de onda q-P em um meio pseudo-acústico obtido pelo traçamento de raios (linhas cinzas) usando o sistema (5.31–5.33). Esquerda: $\delta = \epsilon = 0.2$ neste caso a frente de onda possui a forma de uma elipse. Direita: $\delta = 0.01$ e $\epsilon = 0.4$	59
5.3	A frente de onda q-P em um meio pseudo-acústico obtido pelo traçamento de raios (linhas cinzas) usando o sistema (5.31–5.33). $\delta = \epsilon = 0$ que representa o caso isotrópico e podemos perceber que a frente de onda é circular.	60

Capítulo 1

Introdução

O conhecimento da equação da onda é de fundamental importância para um entendimento satisfatório do fenômeno de sua propagação. Uma razão para isso é que a solução da equação da onda elástica simula numericamente o comportamento da onda em um meio anisotrópico dado. A simetria do meio anisotrópico onde a onda se propaga é determinada pela forma do tensor de rigidez. Este tensor estabelece como é a expressão da equação da onda elástica que se propaga neste meio (Tsvankin, 2001).

O meio anisotrópico mais geral em que as ondas elásticas se propagam é um meio que possui 21 elementos independentes e é chamado triclínico. Este meio não possui outra simetria que não a reflexão em torno da origem e, portanto, não possui nenhum plano de simetria. Também existem meios que são caracterizados por 13 parâmetros elásticos independentes e são chamados de monoclínicos e possuem um plano de simetria. Para estes meios o eixo de simetria é invariante por rotação de 180° . Quando o meio onde a onda se propaga é caracterizado por nove parâmetros independentes este é chamado ortorrômbico, o qual possui três eixos duplos e três planos de simetria mutuamente perpendiculares.

O meio que possui o maior grau de simetria é chamado isotrópico, que é um caso bem conhecido, nesta situação os parâmetros elásticos são invariantes por rotações e conseqüentemente qualquer plano é um plano de simetria. Em meios isotrópicos ocorre a propagação de ondas de pressão e de cisalhamento que são ondas polarizadas perpendicularmente (Aki and Richards, 1980) e se propagam com velocidades diferentes, sendo a onda de pressão mais rápida que a onda de cisalhamento.

O meio de nosso interesse é aquele que possui a simetria hexagonal e que também é chamada de simetria transversalmente isotrópica (TI). Esta simetria é caracterizada por um eixo de simetria sêxtuplo, isso implica que uma rotação por um ângulo arbitrário ao redor deste não altera os parâmetros elásticos. Basicamente este meio possui um plano de simetria no qual o tensor tem um comportamento isotrópico. Em especial são de grande interesse os meios isotrópicos transversalmente que possuem

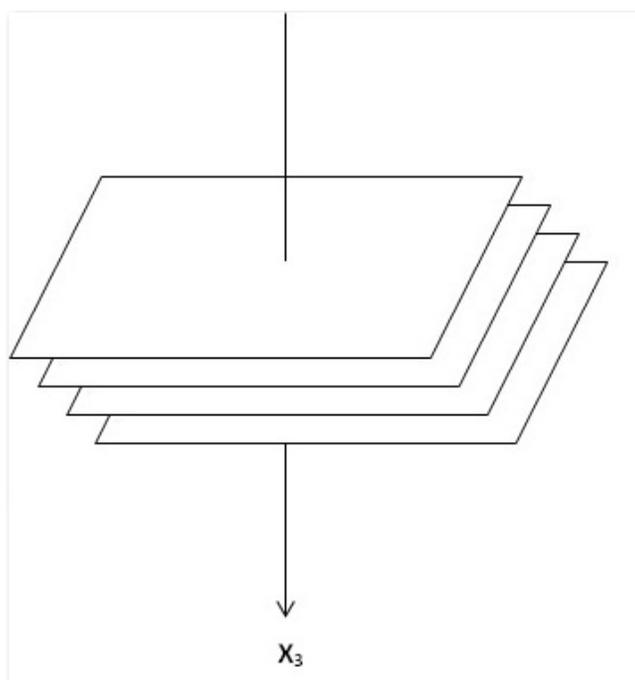


Figura 1.1: O modelo VTI possui um eixo vertical e camadas isotrópicas horizontais. Este tipo de simetria também é conhecida como a simetria das “camadas horizontais finas” (reproduzido de Tsvankin, 2001).

um eixo de simetria vertical. Estes são denominados (Tsvankin, 2001) meios VTI (do Inglês, “Vertical Transversely Isotropic”) e pode ser visualizado na Figura 1.1

Nas últimas décadas vários autores tentaram resolver por meio de aproximações as equações que descrevem a propagação de ondas em meios VTI. Dentre esses autores se destacam Helbig (1983), que contribuiu com uma aproximação elíptica, Thomsen (1986) que contribuiu com aproximações de anisotropia fraca assim como Dellinger and Muir (1988) e Cohen (1996) que também obtiveram resultados em relação a meios elípticos, que possuem os parâmetros de Thomsen ϵ e δ iguais, e aproximações referentes a pequenos ângulos respectivamente.

Alkhalifah (2000) derivou uma equação da onda para meios pseudo-acústicos VTI usando relações de dispersão. Levando em consideração que tais meios não existem na prática, ele buscou obter uma boa aproximação para a equação elástica. A equação obtida por ele é de quarta ordem e possui duas soluções complexas conjugadas, uma destas correspondendo a onda que se propaga nesse meio e a outra representando um artefato. Aplicando teoria de raios a esta equação de quarta ordem ele obteve a equação iconal e do transporte para este meio. As relações de dispersão usadas por ele para dedução desta onda foram obtidas heurísticamente e no processo foi assumido que o módulo de resistência elástica do meio era nulo. Esta imposição do ponto de vista da Física do problema é inadequada

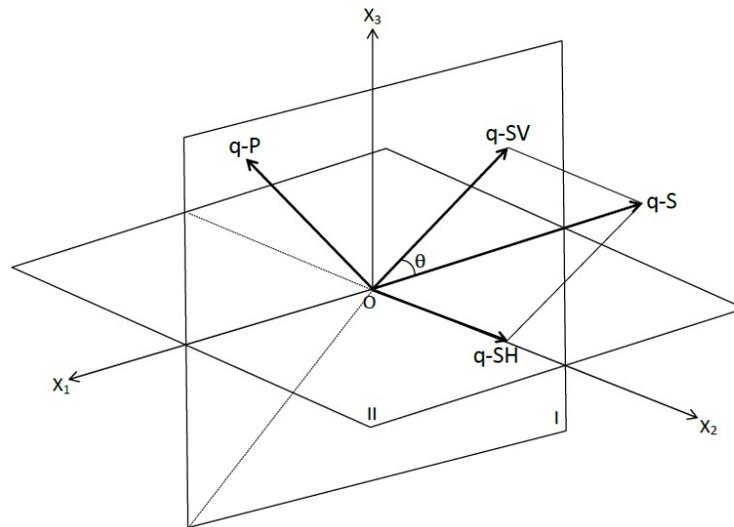


Figura 1.2: A figura ilustra a direção do movimento da partícula correspondendo às ondas q-P e q-S, o vetor de movimento da onda q-S é decomposto em outros dois vetores q-SV e q-SH. O plano I é o plano de propagação e contém os vetores q-P e q-SV, o vetor q-SH está no plano horizontal II. O ângulo θ entre q-P e q-S é o ângulo de polarização da onda q-S. Em geral, para meios TI os vetores q-P e q-S não são ortogonais.

pois assume que o meio VTI é acústico e, como já mencionado, isto não ocorre na prática.

Em uma linha de raciocínio diferente, Duveneck et al. (2008) obtiveram equações para meios pseudo-acústicos VTI diretamente da lei de Hooke e da equação do movimento de Euler. Eles usaram essa equação para realizar migração reversa no tempo em meios com densidade constante. Também Liu and Sen (2010) estudaram esse problema realizando um modelamento acústico a partir de relações de dispersão. Basicamente eles desenvolveram uma malha para resolver o problema em um esquema de diferenças finitas. Mais recentemente, Pestana et al. (2011) derivaram as equações das ondas q-P e q-SV usando relações de dispersão.

No presente trabalho deduzimos a equação da onda elástica em um meio VTI com anisotropia fraca e obtivemos uma equação completa da onda que descreve a respectiva propagação. Para realizar isso, linearizamos diretamente o tensor que descreve as propriedades dos materiais de um meio VTI onde a onda se propaga. Desta forma, obtivemos uma expressão para o tensor que nos permite escrever a equação da onda em um meio elástico VTI de uma forma muito mais elegante, compacta e funcional do que foi apresentado na literatura até então. No entanto, não nos restringimos apenas a obter a equação em si, mas também realizamos um estudo qualitativo visando compreender de maneira mais sólida e formal a solução da equação nestes meios. Uma expressão específica para descrever a equação da onda elástica em um meio VTI nos possibilita estudar qualitativamente a propagação da onda nestes meios e explicar efeitos que são observados na prática.

Usando nossa equação, estudamos formas de separar o campo de onda em três componentes, cada uma representando um modo diferente de propagação que, devido a similaridade de suas polarizações com o caso isotrópico, são chamadas ondas q-P, q-SV e q-SH (ver Figura 1.2). O problema de separar o campo de onda em um meio VTI também foi explorado por outros autores. Podemos citar Dellinger and Etgen (1990) que demonstraram a separação do campo de onda no espaço do número de onda e , mais recentemente, Yan and Sava (2009) que também trabalharam no problema de separação do campo de onda em meios elásticos VTI, usando soluções de ondas planas a partir da matriz de Christoffel. No nosso caso, para realizar a separação do campo de onda, desenvolvemos uma generalização da decomposição de Helmholtz. A partir desta decomposição encontramos uma solução da equação da onda em meios VTI. Essa solução pode ser interpretada como uma generalização da solução de Lamé.

Ainda no sentido de buscar soluções para a equação da onda deduzida, e adicionalmente interessados em entender as características cinemáticas e dinâmicas nestes tipos de meios, usamos a teoria do raio de ordem zero para buscar soluções aproximadas para o problema, sem perder o foco analítico que guia o trabalho. Usando essa teoria em um meio desprovido de fontes verificamos que é possível estudar independentemente as características cinemáticas de cada modo de onda obtendo equações iconais correspondentes a cada um. No processo também obtivemos uma equação de transporte escrita de uma forma compacta e a lei da conservação da energia para meios VTI. Este fato, além de evidenciar a coerência física de nossa abordagem, também implica em um modo prático e iterativo de se obter as amplitudes aproximadas para cada modo de onda similarmente ao caso clássico (isotrópico).

O presente trabalho apresenta a seguinte estrutura: O Capítulo 2 consiste de uma breve revisão dos conceitos básicos de tensores e como estes se relacionam com a mecânica do contínuo e com a equação do movimento de Cauchy, que é a base para nossa dedução da equação da onda em um meio VTI. Não existe nenhum desenvolvimento original neste capítulo e as idéias resumidas neste nele podem ser encontradas de forma completa e detalhada em Aki and Richards (1980) e Pujol (2003). Os resultados originais desta tese serão expostos nos capítulos 3, 4 e 5. O Capítulo 3 contém a dedução da equação da onda elástica para um meio VTI com anisotropia fraca. Esse capítulo serve de base para os Capítulos 4 e 5. No Capítulo 4 deduzimos uma versão mais geral do teorema de decomposição de Helmholtz para estudar a equação da onda elástica obtida no Capítulo 3 em um meio homogêneo VTI. No Capítulo 5 usamos teoria dos raios de ordem zero para estudar a equação obtida no Capítulo 3 em um meio heterogêneo VTI. O Capítulo 6 contém as conclusões e sugestões para trabalhos futuros.

Capítulo 2

Preliminares

Neste capítulo apresentamos os conceitos básicos sobre mecânica do contínuo num resumo substancial do que é importante saber para compreender as ideias que nortearam nossa pesquisa. Todos os conteúdos descritos neste capítulo podem ser encontrados com mais riqueza de detalhes em Aki and Richards (1980) e Pujol (2003).

2.1 Conceitos Básicos sobre Deformação

A mecânica do contínuo estuda a deformação e movimento dos corpos ignorando a natureza discreta da matéria, considerando a estrutura do material em pequena escala. Neste tipo de abordagem, um número básico de conceitos e princípios são usados para derivar relações gerais aplicáveis, pelo menos de certa forma, para todos os tipos de meios. Para garantir que estas relações sejam úteis em problemas específicos, acrescentamos relações adicionais conhecidas como equações constitutivas. Estas são usadas para definir materiais ideais, tais como fluidos perfeitos, fluidos viscosos e corpos perfeitamente elásticos.

Devemos levar em consideração que a mecânica do contínuo não trata da real natureza do material. Para sólidos, por exemplo, a equação constitutiva é dada por,

$$\tau_{ij} = c_{ijkl}\epsilon_{kl}, \quad (2.1)$$

com τ_{ij} e ϵ_{kl} denotando os tensores de tensão e deformação (estiramento), respectivamente, e c_{ijkl} denotando o tensor de rigidez de quarta ordem responsável pelas propriedades do material. A notação de Einstein é usada na equação (2.1). O resultado da combinação com as relações de mecânica resulta na equação da onda. No entanto, para podermos usar estas relações é necessário especificar os coeficientes c_{ijkl} . No caso de meios isotrópicos, dois parâmetros são suficientes mas, em geral, 21

parâmetros são requeridos, os quais dependem do tipo de meio em que o fenômeno ocorre.

Quando um corpo sofre deformação as posições relativas das partículas do corpo mudam. Seja $\mathbf{R}(X_1, X_2, X_3)$ o vetor posição correspondente a partícula do corpo ainda não deformado e $\mathbf{r}(x_1, x_2, x_3)$ o vetor posição de um corpo deformado correspondendo a partícula que estava originalmente na posição \mathbf{R} . O vetor \mathbf{R} apenas indica a partícula do corpo, enquanto o vetor $\mathbf{r}(\mathbf{R}, t)$ descreve o movimento da mesma.

Como \mathbf{R} denota a posição de uma partícula genérica inicialmente dentro de um volume \mathcal{V} , o vetor

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{R}, t), \quad (2.2)$$

representa o vetor de movimento de todas as partículas de \mathcal{V} após o início da deformação. Na forma de componentes, a equação (2.2) pode ser reescrita como,

$$r_i = x_i = x_i(X_1, X_2, X_3, t), \quad (2.3)$$

e, além disso, se

$$\mathbf{J}_c = \left| \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(X_1, X_2, X_3)} \right| \neq 0, \quad (2.4)$$

então podemos escrever $\mathbf{R} = \mathbf{R}(\mathbf{r}, t)$ com componentes

$$R_i = X_i = X_i(x_1, x_2, x_3, t). \quad (2.5)$$

A equação (2.3) corresponde a chamada descrição Lagrangeana (ou material) do movimento, enquanto que a equação (2.5) corresponde a descrição Euleriana (ou espacial). Vamos escolher como referência o tempo t_0 , ou seja,

$$\mathbf{r}(\mathbf{R}, t_0) = \mathbf{R}. \quad (2.6)$$

Na descrição Lagrangeana seguimos o movimento de uma partícula especificada \mathbf{R} , enquanto que na descrição Euleriana estamos interessados na partícula que ocupa um ponto \mathbf{r} no espaço em um dado tempo t . Sejam $d\mathbf{R}$ e $d\mathbf{r}$ vetores representando os dois pontos antes e após a deformação respectivamente. Seus comprimentos são dados por,

$$dS = \|d\mathbf{R}\| = \sqrt{d\mathbf{R} \cdot d\mathbf{R}} = \sqrt{dX_i dX_i}, \quad \text{e} \quad ds = \|d\mathbf{r}\| = \sqrt{d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}} = \sqrt{dx_i dx_i} \quad (2.7)$$

e serão usados para quantificar a deformação. Considere a diferença

$$(ds)^2 - (dS)^2 = dx_i dx_i - dX_k dX_k. \quad (2.8)$$

Usando a descrição Lagrangeana, podemos escrever

$$(ds)^2 - (dS)^2 = (x_{i,k}x_{i,l} - \delta_{kl})dX_k dX_l = 2L_{kl}dX_k dX_l, \quad (2.9)$$

com

$$x_{i,k} = \frac{\partial x_i}{\partial X_k}. \quad (2.10)$$

O operador

$$L_{kl} = \frac{1}{2}(x_{i,k}x_{i,l} - \delta_{kl}), \quad (2.11)$$

é conhecido como tensor finito de Green ou tensor de deformação Lagrangeano. Na descrição Euleriana o resultado equivalente é:

$$(ds)^2 - (dS)^2 = (\delta_{kl} - X_{i,k}X_{i,l})dx_k dx_l = 2E_{kl}dx_k dx_l, \quad (2.12)$$

sendo que

$$E_{kl} = \frac{1}{2}(\delta_{kl} - X_{i,k}X_{i,l}), \quad (2.13)$$

é conhecido como tensor de deformação Euleriano. Introduzimos, agora, o vetor posição \mathbf{u} (ver Figura 2.1) que é referente a deformação sofrida pelo ponto \mathbf{R} dado por:

$$\mathbf{u}(\mathbf{R}, t) = \mathbf{r} - \mathbf{R}. \quad (2.14)$$

Em forma de componentes, a equação (2.14) pode ser reescrita como

$$u_i = x_i - X_i, \quad (2.15)$$

e desta forma, derivando em relação a X_k temos

$$x_{i,k} = u_{i,k} + \delta_{ik}, \quad (2.16)$$

e a expressão do Lagrangeano pode ser escrita como:

$$L_{kl} = \frac{1}{2}((u_{i,k} + \delta_{ik})(u_{i,l} + \delta_{il}) - \delta_{kl}) = \frac{1}{2}(u_{l,k} + u_{k,l} + u_{i,k}u_{i,l}). \quad (2.17)$$

Analogamente, temos que

$$E_{kl} = \frac{1}{2}(u_{l,k} + u_{k,l} - u_{i,k}u_{i,l}), \quad (2.18)$$

corresponde a expressão do Euleriano. Estamos negligenciando os produtos das derivadas em (2.17)

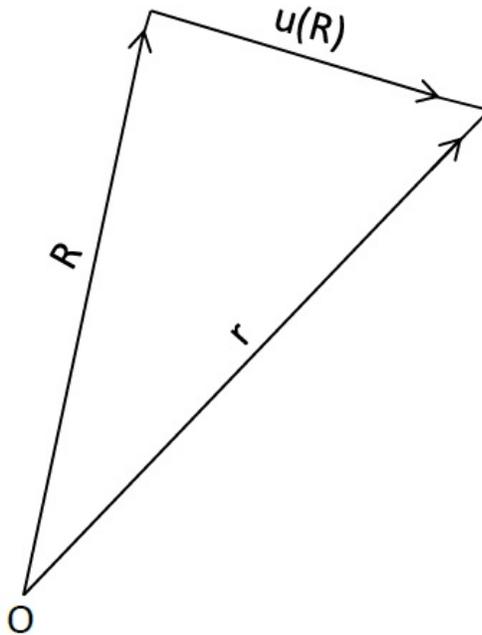


Figura 2.1: A figura ilustra geométricamente o vetor de deslocamento \mathbf{u} (reproduzido de Pujol, 2003).

e (2.18) devido a consideração de pequenas deformações. Neste caso, é possível introduzir o tensor de deformação infinitesimal (ou estiramento infinitesimal) dado por

$$\epsilon_{kl} = \frac{1}{2}(u_{k,l} + u_{l,k}). \quad (2.19)$$

Como estamos assumindo pequenas deformações, distinções entre (2.17) e (2.18) são desnecessárias. A equação (2.19) mostra como calcular o tensor de deformação ϵ_{kl} quando é dado um campo de posição, ou deslocamento \mathbf{u} , e desta forma este tensor vai desempenhar um papel importante na dedução da equação da onda elástica.

Por outro lado, esta equação pode também ser vista como um sistema de seis equações e três incógnitas u_1 , u_2 e u_3 . Levando em conta que o número de equações é maior que o número de incógnitas, em geral tais sistemas não possuem solução para valores arbitrários dos componentes de deformação. Isto nos leva a questionar-nos sobre quais condições sobre ϵ_{kl} garantem que \mathbf{u} é único. A resposta para isso é que, os componentes do tensor de deformação precisam satisfazer as seguintes equações,

$$\epsilon_{ij,kl} + \epsilon_{kl,ij} - \epsilon_{ik,jl} - \epsilon_{jl,ik} = 0. \quad (2.20)$$

O sistema acima possui $3^4 = 81$ equações, mas devido a considerações de simetria se reduz a seis.

O tensor de deformação analisa a mudança linear do comprimento mas não representa o efeito

total da deformação. O vetor \mathbf{u} é uma função dos pontos do corpo considerado e, além disso, a diferença $\mathbf{u}(\mathbf{R} + d\mathbf{R}) - \mathbf{u}(\mathbf{R})$ descreve a deformação na vizinhança de \mathbf{R} . Como estamos assumindo pequenas deformações, podemos expandir esta diferença em série de Taylor,

$$du_i = u_i(\mathbf{R} + d\mathbf{R}) - u_i(\mathbf{R}) = u_{i,j}dX_j. \quad (2.21)$$

Os termos de alta ordem em dX_j podem ser ignorados. Manipulando a expressão acima obtemos

$$du_i = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})dX_j + \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i})dX_j = (\epsilon_{ij} + \omega_{ij})dX_j, \quad (2.22)$$

com

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i}). \quad (2.23)$$

O tensor ω_{ij} é conhecido como tensor de rotação e, portanto, a deformação $d\mathbf{R}$ consiste de dois termos, um envolvendo o tensor de deformação e outro envolvendo o tensor de rotação infinitesimal de $d\mathbf{R}$. É importante deixar claro que esta é uma rotação local associada a um $d\mathbf{R}$ particular e não corresponde a rotação do corpo inteiro. Esta é uma informação relevante, uma vez que no próximo capítulo deduzimos uma equação da onda elástica que irá descrever a propagação da onda em um meio VTI em termos dos parâmetros de anisotropia do meio. Termos contendo rotações infinitesimais irão eventualmente aparecer, e de acordo com as considerações feitas acima não poderão ser negligenciados.

2.2 Conceitos Adicionais de Mecânica do Contínuo

Usamos a descrição Euleriana do movimento e indicamos por $q(\mathbf{r}, t)$ um valor referente a alguma propriedade do meio (temperatura, pressão, velocidade) em um dado ponto no tempo t . Como a variável t varia, diferentes partículas ocupam o mesmo ponto espacial \mathbf{r} . Desenvolvemos os cálculos, inicialmente, sobre uma partícula isolada na posição \mathbf{R} . Usando

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{R}, t), \quad (2.24)$$

podemos definir

$$Q(\mathbf{R}, t) = q(\mathbf{r}(\mathbf{R}, t), t), \quad (2.25)$$

e observamos que, em geral, Q e q irão possuir formas funcionais distintas.

A quantidade Q representa qualquer propriedade do meio, podendo ser escalar, vetorial ou mesmo tensorial. Se Q é expressado em termos de \mathbf{r} sua derivada material, que é uma derivada tomada ao

longo de um caminho movendo-se com uma velocidade \mathbf{v} , temos que

$$\frac{Dq}{Dt} = \left. \frac{\partial q(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right|_{\mathbf{r}} + \left. \frac{\partial q(\mathbf{r}, t)}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial t} \right|_{\mathbf{R}}, \quad (2.26)$$

com \mathbf{r} e \mathbf{R} fixados. Na expressão acima, foram usados a expressão (2.24) e a regra da cadeia para derivadas parciais. A velocidade de uma partícula é definida portanto como

$$\mathbf{v} = \frac{D\mathbf{r}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{R}, t)}{\partial t}, \quad (2.27)$$

ou em forma de componentes

$$v_k = \frac{\partial x_k}{\partial t}. \quad (2.28)$$

A velocidade \mathbf{v} é uma função de uma partícula particular identificada por \mathbf{R} em um tempo t . Usamos esta velocidade para descrever a velocidade de cada partícula do volume $\widehat{\mathcal{V}}$, que corresponde ao volume \mathcal{V} após a deformação, no lugar desta única partícula. Basicamente estaremos avaliando a velocidade nos pontos em que todas as partículas do volume \mathcal{V} que deslocam-se simultaneamente. Esta distinção nem sempre é explicitada. Usando a condição (2.4), convencionamos escrever

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{R}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t), \quad (2.29)$$

com $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ representando o campo de velocidade em uma descrição espacial. Como estamos observando a velocidade em todo o volume $\widehat{\mathcal{V}}$ nesta descrição, \mathbf{v} é conhecido em todos os pontos do meio. Comparando as expressões (2.26) e (2.28) podemos perceber que o segundo termo do lado direito de (2.26) é o produto escalar de ∇q e \mathbf{v} e, portanto, temos

$$\frac{Dq}{Dt} = \frac{\partial q}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) q. \quad (2.30)$$

Expressando \mathbf{r} em termos de \mathbf{u} , segue que

$$\mathbf{v} = \frac{D(\mathbf{u} + \mathbf{R})}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{R}, t)}{\partial t}, \quad (2.31)$$

pois \mathbf{R} independe do tempo. Se \mathbf{u} é dado em uma descrição espacial, então v_k é obtido usando (2.26) e (2.30),

$$v_k = \frac{\partial u_k}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) u_k, \quad (2.32)$$

ou, em forma vetorial

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{u}. \quad (2.33)$$

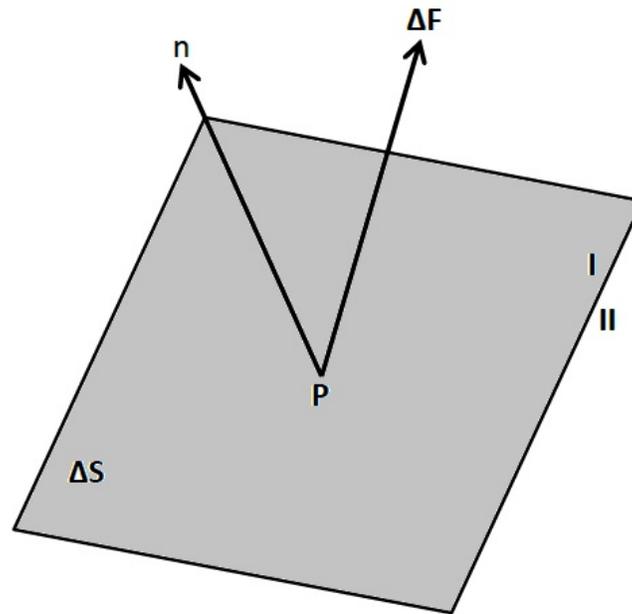


Figura 2.2: Geometria utilizada para definir o vetor de Tensão (reproduzido de Pujol, 2003).

Observe que a velocidade \mathbf{v} é dada de forma implícita. Usando a descrição Euleriana e o fato de que a aceleração de uma partícula é dada pela derivada material da velocidade desta, podemos escrever,

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}. \quad (2.34)$$

Na próxima seção estudamos o tensor de tensão τ_{ij} e, adicionalmente ao que já foi discutido, serão também usados os conceitos de massa total, momento linear e momento angular, bem como as de balanço de momento linear e balanço de momento angular. Estes tópicos são conteúdos de mecânica clássica e suas definições podem ser encontradas em Aki and Richards (1980).

2.3 Tensor de Tensão

Em mecânica do contínuo, dois tipos de força são protagonistas: a força corporal e a força de superfície. A primeira atua a uma distância do corpo ou corpos e a segunda atua na área de contato entre dois corpos. Um exemplo de força corporal é a gravitacional, no entanto, o efeito desta força é em geral desconsiderada no estudo de propagação de ondas localizadas. Um exemplo de força de superfície é a de pressão hidrostática sobre a superfície de um corpo imerso em um fluido.

Para introduzir o conceito de vetor de Tensão, consideramos uma superfície plana Δs que divide

um meio, ou uma porção infinitesimal de um sólido, em duas partes que são representadas por I e II que são as partes acima e abaixo da superfície Δs respectivamente. Tomamos P um ponto sobre esta superfície Δs e vamos considerar \mathbf{n} um vetor normal qualquer a Δs no ponto P . Esta divisão ocasionada por esta superfície pode ser vista na Figura 2.2.

Observe, de acordo com a Figura 2.2, que o meio I contém \mathbf{n} . Assumimos que o meio I exerce uma força sobre o meio II por meio da superfície Δs , e que esta força é equivalente a força $\Delta \mathbf{F}$ agindo no ponto P mais uma força de acoplamento ΔC entre os meios I e II . Adicionalmente, assumamos que a superfície é continuamente contraída ao redor do ponto P , ou seja $\Delta s \rightarrow 0$. Assumindo que $\Delta C/\Delta s$ tende a zero e $\Delta \mathbf{F}/\Delta s$ apresenta limite finito, o vetor de Tensão é definido como:

$$\mathbf{T}(\mathbf{n}) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta s} = \frac{d\mathbf{F}}{ds}, \quad (2.35)$$

sendo que $\mathbf{T}(\mathbf{n})$ é o vetor de Tensão em P associado ao vetor normal \mathbf{n} . Observe que ao mudar \mathbf{n} também muda-se \mathbf{T} e, em geral, $\mathbf{T}(\mathbf{n})$ depende das coordenadas do ponto P e do tempo t , mas para simplificar a notação não os usamos explicitamente. Levando em conta que \mathbf{T} é uma força por unidade de área, sua dimensão é de pressão. A projeção de \mathbf{T} sobre \mathbf{n} é dado por $\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}$.

Se a projeção for positiva corresponde a uma tensão; se for negativa corresponde a uma compressão. Para o caso de pressão hidrostática a força e a normal estão em direções opostas e, para sólidos, elas estão usualmente em diferentes direções. Da expressão (2.35) podemos perceber que \mathbf{T} é uma função da posição. Então a força agindo sobre qualquer superfície infinitesimal $d\Sigma$ é igual a $\mathbf{T}d\Sigma$. É possível usar o princípio do momento linear (veja Pujol (2003)) para mostrar que $\mathbf{T}(-\mathbf{n}) = -\mathbf{T}(\mathbf{n})$.

Agora, encontramos uma relação funcional entre $\mathbf{T}(\mathbf{n})$ e \mathbf{n} que automaticamente introduz o tensor de tensão. Seja Σ a superfície de um corpo de volume \mathcal{V} , e \mathbf{f} a força corporal por unidade de massa. Portanto, $\rho \mathbf{f}$ é a força por unidade de volume. Para aplicar o balanço de momento linear a um corpo qualquer de volume \mathcal{V} e superfície Σ é preciso achar a força total agindo sobre o corpo, que é igual a soma das contribuições das forças corporais e de superfície, representadas pela integral abaixo

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{v} d\mathcal{V} = \int_{\Sigma} \mathbf{T} d\Sigma + \int_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{f} d\mathcal{V} \quad (2.36)$$

e, além disso, temos

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{v} d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} d\mathcal{V}. \quad (2.37)$$

Consideramos, agora, um tetraedro infinitesimal possuindo três faces ao longo dos planos coordenados. O valor $\mathbf{T}(\mathbf{n})$ é o tensor de tensão através do plano ABC e \mathbf{n} a normal, como podemos ver na Figura 2.3. Temos que $d\Sigma_i$ é a superfície normal ao eixo coordenado x_i . Além do mais, a normal a $d\Sigma_i$ é $-e_i$ e a normal a $d\Sigma_{\mathbf{n}}$ que corresponde a face ABC é \mathbf{n} . Aplicamos (2.36) e (2.37) a este

tetraedro.

Usando o fato de que a integral de volume tende a zero mais rapidamente que a integral de superfície, consideramos somente as forças de superfície. Seja Σ a superfície do tetraedro, então $d\Sigma = d\Sigma_{\mathbf{n}} + d\Sigma_1 + d\Sigma_2 + d\Sigma_3$, portanto

$$0 = \int_{\Sigma} \mathbf{T} d\Sigma = \int_{\Sigma_{\mathbf{n}}} \mathbf{T}(\mathbf{n}) d\Sigma_{\mathbf{n}} + \int_{\Sigma_1} \mathbf{T}(-\mathbf{e}_1) d\Sigma_1 + \int_{\Sigma_2} \mathbf{T}(-\mathbf{e}_2) d\Sigma_2 + \int_{\Sigma_3} \mathbf{T}(-\mathbf{e}_3) d\Sigma_3. \quad (2.38)$$

No entanto, estamos assumindo que as faces do tetraedro são infinitesimais, assim

$$0 = \mathbf{T}(\mathbf{n}) d\Sigma_{\mathbf{n}} + \mathbf{T}(-\mathbf{e}_1) d\Sigma_1 + \mathbf{T}(-\mathbf{e}_2) d\Sigma_2 + \mathbf{T}(-\mathbf{e}_3) d\Sigma_3. \quad (2.39)$$

Usando o fato que $\mathbf{T}(-\mathbf{n}) = -\mathbf{T}(\mathbf{n})$ temos que

$$\mathbf{T}(\mathbf{n}) d\Sigma_{\mathbf{n}} = \mathbf{T}(\mathbf{e}_1) d\Sigma_1 + \mathbf{T}(\mathbf{e}_2) d\Sigma_2 + \mathbf{T}(\mathbf{e}_3) d\Sigma_3, \quad (2.40)$$

podemos relacionar estas expressões diretamente com $d\Sigma_{\mathbf{n}}$, levando em conta que

$$d\Sigma_i = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_i) d\Sigma_{\mathbf{n}}. \quad (2.41)$$

Portanto

$$\mathbf{T}(\mathbf{n}) = n_1 \mathbf{T}(\mathbf{e}_1) + n_2 \mathbf{T}(\mathbf{e}_2) + n_3 \mathbf{T}(\mathbf{e}_3). \quad (2.42)$$

Usando a convenção de soma temos $\mathbf{T}\mathbf{e}_i = \tau_{ij} \mathbf{e}_j$, sendo que τ_{ij} é a componente x_j do vetor de tensão correspondente ao plano em que \mathbf{e}_i é a normal. Os valores τ_{ij} constituem as componentes do tensor tensão, assim sendo, podemos concluir que

$$T_j(\mathbf{n}) = n_i \tau_{ij}. \quad (2.43)$$

Ressaltamos que as componentes de τ_{ij} dependem do sistema de coordenadas usado. Também é importante ter em mente que o tensor de tensão pode ser calculado usando (2.43). Usando as equações (2.36) e (2.37), temos que

$$\int_S n_j \tau_{ji} d\Sigma + \int_{\mathcal{V}} \rho f_i d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \rho \frac{Dv_i}{Dt} d\mathcal{V}. \quad (2.44)$$

Usando teorema de Gauss para tensores escrevemos

$$\int_{\mathcal{V}} \left(\tau_{ji,j} + \rho f_i - \rho \frac{Dv_i}{Dt} \right) d\mathcal{V} = 0, \quad (2.45)$$

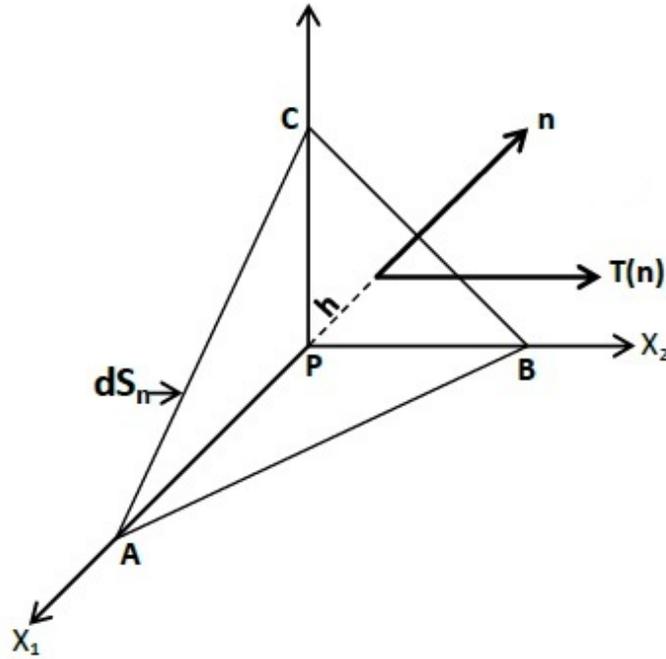


Figura 2.3: Tetraedro que utilizamos para introduzir o vetor de Tensão (reproduzido de Pujol, 2003).

sendo que $\tau_{j^i,j}$ é o divergente, de acordo com a notação de Einstein, de τ_{ji} . Assumindo a continuidade do integrando e conexidade do domínio de integração, concluímos que

$$\tau_{j^i,j} + \rho f_i = \rho \frac{Dv_i}{Dt}. \quad (2.46)$$

A equação (2.46) é conhecida como a equação de Euler do movimento. Usando a definição de momento angular é possível provar que τ_{ij} é simétrico. Assim,

$$\tau_{ij,j} + \rho f_i = \rho \frac{Dv_i}{Dt}. \quad (2.47)$$

Introduzindo a aproximação de pequenas deformações, isto é, negligenciando as derivadas espaciais de \mathbf{u} , temos

$$v_i \approx \frac{\partial u_i}{\partial t}; \quad a_i \approx \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}. \quad (2.48)$$

Assim, temos a equação

$$\tau_{ij,j} + \rho f_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}. \quad (2.49)$$

A equação (2.49) é a equação do movimento de Cauchy, que é a base para obtenção da equação da onda elástica para um meio anisotrópico qualquer. Nesta equação, o vetor $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ denota o

deslocamento da partícula e $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$ é a fonte referente à força por unidade de massa. Para um meio com densidade conhecida e uma certa distribuição espacial aplicada por uma força $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ a equação (2.49) possui duas incógnitas: o campo de posição \mathbf{u} e o tensor τ_{ij} . No regime elástico linear o tensor τ_{ij} é dado pela equação (2.1), que como já foi mencionado é a equação constitutiva. O tensor de deformação ϵ_{kl} é dado pela equação (2.19).

2.4 Comentários

Neste capítulo foi feita uma breve exposição, seguindo de perto Pujol (2003), Červený (2001) e Aki and Richards (1980), cujo objetivo foi ilustrar de forma resumida como se obter a equação geral da onda elástica anisotrópica ou isotrópica em termos do tensor c_{ijkl} . Fazendo uso de tal equação é possível simular numericamente a propagação da onda para tais meios. No entanto, em aplicações em Geofísica em que se busca em realidade um entendimento mais qualitativo do fenômeno de onda, é possível perceber que a fórmula em sua forma genérica impossibilita tal estudo.

Levando isto em consideração, no próximo capítulo obtivemos uma dedução para a equação da onda elástica para meios anisotrópicos VTI em termos de outros parâmetros que descrevam a anisotropia do meio. Por isso escrevemos o problema em termos de uma fórmula mais apropriada para técnicas de inversão que possibilita investigar fenômenos que ocorrem nestes tipos de meios e que não podem ser plenamente explicados usando a equação geral da onda elástica. Usamos os parâmetros de Thomsen (1986) em nossa busca por uma descrição mais simplificada da equação da onda.

Capítulo 3

Equação da Onda Elástica em um Meio Heterogêneo VTI

O objetivo deste capítulo é fazer uma investigação da equação da onda em um meio fracamente anisotrópico VTI. Derivamos a equação que descreve a propagação da onda em um meio elástico anisotrópico em termos dos parâmetros de anisotropia de Thomsen (1986).

3.1 Dedução da Equação Elástica para um Meio VTI

De acordo com Tsvankin (2001) é possível escrever a equação da onda para um meio elástico anisotrópico qualquer usando a equação constitutiva (2.1), que relaciona o tensor responsável pelas propriedades dos materiais com o tensor de deformação dado por (2.19). Usando o fato de que o tensor de rigidez é simétrico, a equação da onda elástica para um meio anisotrópico qualquer pode ser escrita como,

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(c_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \right) = f_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.1)$$

A variável t representa o tempo e usaremos $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$ para representar as coordenadas no espaço 3D. Ressaltamos que sempre que for conveniente alternaremos entre x_1 e x , x_2 e y e x_3 e z . A notação de Einstein é utilizada visando uma melhor compactação das expressões e sempre que for necessário usaremos este recurso.

Um tensor qualquer de quarta ordem possui $3^4 = 81$ componentes. Entretanto, o tensor c_{ijkl} possui diversas simetrias que reduzem o número de elementos independentes. Primeiramente, devido a simetria dos tensores de deformação e tensão, é possível escrever

$$c_{ijkl} = c_{jikl} \quad \text{e} \quad c_{ijkl} = c_{ijlk}. \quad (3.2)$$

Mais ainda, devido às considerações termodinâmicas (ver Pujol (2003)) temos

$$c_{ijkl} = c_{klij}. \quad (3.3)$$

Usando tais simetrias, podemos utilizar a notação compacta introduzida por Voigt, que escreve $ij \rightarrow a$ e $kl \rightarrow b$ através das regras: $11 \rightarrow 1$; $22 \rightarrow 2$; $33 \rightarrow 3$; $32 \rightarrow 23 \rightarrow 4$; $31 \rightarrow 13 \rightarrow 5$ e $12 \rightarrow 21 \rightarrow 6$. Assim, podemos representar c_{ijkl} por uma matriz quadrada de ordem 6, C_{ab} .

Cada simetria anisotrópica é caracterizada por uma estrutura específica da matriz que representa o tensor C_{ab} , de fato este tensor possui relação direta com o tipo de meio material onde a onda se propaga. Um meio anisotrópico que é simples porém realista e que pode ser encontrado na prática é o transversalmente isotrópico. Este meio possui apenas um eixo de simetria, os outros dois eixos são diferentes mas equivalentes um ao outro, isto é, o plano formado por estes eixos definem um meio isotrópico. Esta simetria é denominada simetria azimutal ou simetria das finas multi-camadas isotrópicas. Usualmente, o eixo de simetria é vertical e o meio que possui esta simetria é chamado de transversalmente isotrópico na vertical (VTI). A velocidade de fase e polarização do campo de onda que se propaga em um meio transversalmente isotrópico podem ser obtidos da equação de Cristoffel com o tensor c_{ijkl} especificado na forma

$$C^{VTI} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{11} - 2C_{66} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{11} - 2C_{66} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

Desenvolver notações adequadas para descrever as fórmulas não é apenas importante do ponto de vista estético, de fato é de fundamental importância em situações que possuem uma quantidade muito grande de parâmetros. Equações da onda sempre foram escritas utilizando-se os coeficientes elásticos, portanto, tais coeficientes são importantes na elaboração de algoritmos que nos possibilitam estudar certos modelos. Uma importante notação é a criada por Thomsen, a qual será introduzida logo a seguir e é útil para a facilitação dos cálculos.

A ideia desta notação consiste em separar a influência da anisotropia das quantidades “isotrópicas”, estas são representadas pelas velocidades das ondas P e S ao longo do eixo de simetria. Desta forma, cinco coeficientes elásticos do meio VTI podem ser repassados pelas velocidades α e β das ondas P e S, respectivamente, e por três parâmetros anisotrópicos dados por ϵ , δ e γ . Esta notação combinada com a notação de Lamé permitirá que obtenhamos uma equação elástica que descreverá a

propagação da onda em meios VTI.

Quando estamos tratando de meios isotrópicos a equação (3.4) é reduzida a

$$C^{ISO} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}, \quad (3.5)$$

sendo que λ e μ são os parâmetros de Lamé. O tensor acima possibilita, usando (3.1), obter a equação da onda elástica para um meio isotrópico heterogêneo que é dada por (Pujol, 2003)

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{u} = \mathbf{f} + \nabla \cdot [\mu \nabla \mathbf{u}] + \nabla [(\lambda + \mu) \nabla \cdot \mathbf{u}] + \nabla \mu \times (\nabla \times \mathbf{u}) + 2(\nabla \mu \cdot \nabla) \mathbf{u}. \quad (3.6)$$

Nosso objetivo neste capítulo é descrever uma equação da onda que é basicamente a equação acima com termos de correção de anisotropia em um meio VTI.

É útil representar a matriz (3.4) em termos dos parâmetros de Thomsen (1986) ε , δ e γ , que são dados por:

$$\varepsilon = \frac{C_{11} - C_{33}}{2C_{33}}, \quad (3.7)$$

$$\delta = \frac{(C_{13} + C_{55})^2 - (C_{33} - C_{55})^2}{2C_{33}(C_{33} - C_{55})}, \quad (3.8)$$

$$\gamma = \frac{C_{66} - C_{55}}{2C_{55}}. \quad (3.9)$$

Os parâmetros de Thomsen permitem descrever a anisotropia em termos de somente três variáveis e desta forma possibilita visualizar de maneira clara a isotropia como um caso degenerado da anisotropia em meios TI. Os valores de ε , δ e γ são unicamente determinados pelos coeficientes que descrevem as propriedades do material, denotados por c_{ijkl} . No entanto, a inversão dos parâmetros de Thomsen para o material só será única (Thomsen, 1986) para os parâmetros ε e γ . Já δ pode ser invertido de maneira única somente no caso de anisotropia fraca. Isto é uma motivação muito importante, o que faremos é a dedução de uma equação que é válida para valores pequenos de δ . Desta forma, obtemos uma equação que representa uma generalização natural do caso isotrópico e que descreve de forma muito apropriada o fenômeno de propagação da onda elástica nestes meios.

De acordo com Tsvankin (2001) temos a informação que dados reais obtidos em laboratório indicam que em alguns casos ε e γ são predominantemente positivos (Thomsen, 1986) e que seus

valores variam de 0.3 a 0.5 em rochas com anisotropias fracas. Em meios transversalmente isotrópicos temos ϵ maior que δ e nestes modelos γ é positivo. Além disso, comparações entre as velocidades vertical e de afastamento em formações de xisto indicam valores de δ variando de 0.1 a 0.2 e em casos de camadas isotrópicas finas podem ocorrer valores negativos para δ (Tsvankin, 2001). Para meios VTI, δ é limitado superior e inferiormente,

$$\delta_{min} = -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\beta^2}{\alpha^2} \right) < \delta < 2 \left(\frac{\alpha^2}{\beta^2} - 1 \right)^{-1} = \delta_{max}. \quad (3.10)$$

Devemos observar que α e β correspondem as velocidades das ondas P e S na direção eixo de simetria e são dadas por

$$\alpha = \sqrt{\frac{C_{33}}{\rho}} = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad \text{e} \quad \beta = \sqrt{\frac{C_{55}}{\rho}} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \quad (3.11)$$

respectivamente. Portanto, em nossa dedução da equação elástica que é obtida em termos destes parâmetros, respeitaremos estas restrições a fim de obter uma equação que descreva realisticamente o fenômeno.

Vamos agora escrever os elementos da matriz de Cristoffel em função dos parâmetros de Thomson e Lamé. Primeiramente, temos que

$$C_{33} = \lambda + 2\mu \quad \text{e} \quad C_{55} = \mu. \quad (3.12)$$

Assim, usando (3.12) e (3.7)–(3.9), obtemos

$$C_{11} = (2\epsilon + 1)C_{33} = (2\epsilon + 1)(\lambda + 2\mu), \quad (3.13)$$

$$C_{66} = (2\gamma + 1)C_{55} = (2\gamma + 1)\mu. \quad (3.14)$$

e

$$C_{13} = -C_{55} \pm (C_{33} - C_{55}) \sqrt{1 + \frac{2C_{33}\delta}{C_{33} - C_{55}}} = -\mu \pm (\lambda + \mu) \sqrt{1 + \frac{2(\lambda + 2\mu)\delta}{\lambda + \mu}}. \quad (3.15)$$

Devemos ter em mente que os dois possíveis sinais na equação (3.15), refletem o fato que C_{13} pode ser unicamente determinado por δ se o sinal de $C_{13} + C_{55}$ for conhecido.

Para $|\delta| \ll 1$ temos a seguinte aproximação,

$$C_{13} = -\mu \pm (\lambda + \mu) \left[1 + \frac{(\lambda + 2\mu)\delta}{\lambda + \mu} \right]. \quad (3.16)$$

Devido a considerações físicas devemos ter $\alpha > \beta$ e, assim, $C_{33} - C_{55} = \lambda + \mu > 0$. Além disso, sabemos que δ é limitado inferiormente. Portanto, usando a equação (3.10), a condição $\delta > \delta_{min}$ é equivalente a

$$1 + \frac{(\lambda + 2\mu)\delta}{\lambda + \mu} = 1 + \frac{2\alpha^2\delta}{\alpha^2 - \beta^2} > 0, \quad (3.17)$$

e a expressão na raiz quadrada da equação (3.15) é positiva. Levando em conta que no caso isotrópico ($\delta = 0$), $C_{13} = \lambda$, podemos concluir que na equação (3.16) devemos escolher o sinal + e, assim,

$$C_{13} = \lambda + \delta(\lambda + 2\mu). \quad (3.18)$$

Esta expressão descreve um meio VTI com anisotropia fraca e, desta forma, vemos que a condição $|\delta| \ll 1$ é suficiente para a linearização de (3.15) e nenhuma condição foi assumida sobre ϵ e γ .

Substituindo as expressões acima para C_{ij} na matriz de rigidez (3.4), encontramos a aproximação de anisotropia fraca para a matriz de rigidez de um meio VTI dada por

$$C_{fraca}^{VTI} = \begin{bmatrix} (\lambda + 2\mu)(1 + 2\epsilon) & \lambda(1 + 2\epsilon) + 4\mu(\epsilon - \gamma) & \lambda + \delta(\lambda + 2\mu) & 0 & 0 & 0 \\ \lambda(1 + 2\epsilon) + 4\mu(\epsilon - \gamma) & (\lambda + 2\mu)(1 + 2\epsilon) & \lambda + \delta(\lambda + 2\mu) & 0 & 0 & 0 \\ \lambda + \delta(\lambda + 2\mu) & \lambda + \delta(\lambda + 2\mu) & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu(1 + 2\gamma) \end{bmatrix}. \quad (3.19)$$

Devido ao fato de que o tensor é uma transformação linear contínua, podemos observar que a matriz de rigidez pode ser decomposta na seguinte forma

$$C_{fraca}^{VTI} = C^{ISO} + C^\epsilon + C^\delta + C^\gamma, \quad (3.20)$$

com C^{ISO} sendo dada pela equação (3.5) e

$$C^\epsilon = \begin{bmatrix} 2(\lambda + 2\mu)\epsilon & 2(\lambda + 2\mu)\epsilon & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2(\lambda + 2\mu)\epsilon & 2(\lambda + 2\mu)\epsilon & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.21)$$

$$C^\delta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \delta(\lambda + 2\mu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta(\lambda + 2\mu) & 0 & 0 & 0 \\ \delta(\lambda + 2\mu) & \delta(\lambda + 2\mu) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.22)$$

e

$$C^\gamma = \begin{bmatrix} 0 & -4\mu\gamma & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4\mu\gamma & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu\gamma \end{bmatrix}. \quad (3.23)$$

Agora, usando a linearidade da derivada podemos reescrever (3.1) como

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = f_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(c_{ijkl}^{ISO} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(c_{ijkl}^\delta \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(c_{ijkl}^\epsilon \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(c_{ijkl}^\gamma \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \right) \quad (3.24)$$

Para C^ϵ , os únicos componentes não nulos são

$$C_{11}^\epsilon = C_{22}^\epsilon = C_{12}^\epsilon = C_{21}^\epsilon = c_{1111}^\epsilon = c_{2222}^\epsilon = c_{1122}^\epsilon = c_{2211}^\epsilon = 2\epsilon(\lambda + 2\mu), \quad (3.25)$$

o que nos indica que

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(c_{ijkl}^\epsilon \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \right) \right]_{i=1,2,3} &= \begin{pmatrix} 2\epsilon(\lambda + 2\mu) \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right] + \frac{\partial 2\epsilon(\lambda + 2\mu)}{\partial x_1} \left[\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right] \\ 2\epsilon(\lambda + 2\mu) \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right] + \frac{\partial 2\epsilon(\lambda + 2\mu)}{\partial x_2} \left[\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right] \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \widehat{\nabla} \left(2\epsilon(\lambda + 2\mu) \widehat{\nabla} \cdot \mathbf{u} \right), \end{aligned} \quad (3.26)$$

aqui introduzimos o operador $\widehat{\nabla}$,

$$\widehat{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, 0 \right)^T. \quad (3.27)$$

Correspondentemente, os únicos elementos não nulos nas demais matrizes são

$$C_{13}^\delta = C_{31}^\delta = C_{23}^\delta = C_{32}^\delta = c_{1133}^\delta = c_{3311}^\delta = c_{2233}^\delta = c_{3322}^\delta = \delta(\lambda + 2\mu), \quad (3.28)$$

$$C_{12}^\gamma = C_{21}^\gamma = c_{1122}^\gamma = c_{2211}^\gamma = -4\mu\gamma \quad \text{e} \quad C_{66}^\gamma = c_{1212}^\gamma = c_{2121}^\gamma = c_{1221}^\gamma = c_{2112}^\gamma = 2\mu\gamma. \quad (3.29)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(c_{ijkl}^\delta \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \right) \right]_{i=1,2,3} &= \begin{pmatrix} \delta(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3 \partial x_1} + \frac{\partial \delta(\lambda + 2\mu)}{\partial x_1} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \\ \delta(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3 \partial x_2} + \frac{\partial \delta(\lambda + 2\mu)}{\partial x_2} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \\ \delta(\lambda + 2\mu) \frac{\partial}{\partial x_3} \left[\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right] + \frac{\partial \delta(\lambda + 2\mu)}{\partial x_3} \left[\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right] \end{pmatrix} \\ &= \widehat{\nabla} (\delta(\lambda + 2\mu) \nabla \cdot \mathbf{u}) + \nabla (\delta(\lambda + 2\mu) \widehat{\nabla} \cdot \mathbf{u}) - 2\widehat{\nabla} (\delta(\lambda + 2\mu) \widehat{\nabla} \cdot \mathbf{u}) \end{aligned} \quad (3.30)$$

e

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(c_{ijkl}^\gamma \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \right) \right]_{i=1,2,3} &= \begin{pmatrix} 2 \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\mu\gamma \left[\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right] \right) + 4 \left[\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\partial \mu\gamma}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \frac{\partial \mu\gamma}{\partial x_1} \right] \\ -2 \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\mu\gamma \left[\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right] \right) + 4 \left[\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \frac{\partial \mu\gamma}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial \mu\gamma}{\partial x_2} \right] \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{J} \widehat{\nabla} (2\mu\gamma \mathbf{J} \widehat{\nabla} \cdot \mathbf{u}) + 4\mathbf{J} [\mathbf{J} \widehat{\nabla} (\mu\gamma) \cdot \widehat{\nabla}] \mathbf{u}, \end{aligned} \quad (3.31)$$

sendo que \mathbf{J} é a matriz

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & +1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.32)$$

e o operador $\mathbf{J} \widehat{\nabla}$ é, portanto,

$$\mathbf{J} \widehat{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x_2}, -\frac{\partial}{\partial x_1}, 0 \right)^T = \widehat{\nabla}^\perp \quad (3.33)$$

Coletando os resultados (3.26), (3.30) e (3.31) e substituindo-os na equação (3.24) obtemos

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{u} = \mathbf{f} &+ \nabla \cdot [\mu \nabla \mathbf{u}] + \nabla [(\lambda + \mu) \nabla \cdot \mathbf{u}] + \nabla \mu \times (\nabla \times \mathbf{u}) + 2(\nabla \mu \cdot \nabla) \mathbf{u} \\ &+ \widehat{\nabla} [\delta(\lambda + 2\mu) \nabla \cdot \mathbf{u}] + \nabla [\delta(\lambda + 2\mu) \widehat{\nabla} \cdot \mathbf{u}] - 2\widehat{\nabla} [\delta(\lambda + 2\mu) \widehat{\nabla} \cdot \mathbf{u}] \\ &+ 2\widehat{\nabla}^\perp [\mu\gamma \widehat{\nabla}^\perp \cdot \mathbf{u}] + 4\mathbf{J} \nabla \mathbf{u} \widehat{\nabla}^\perp [\mu\gamma] + 2\widehat{\nabla} [\epsilon(\lambda + 2\mu) \widehat{\nabla} \cdot \mathbf{u}]. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Observamos que a equação (3.34) descreve um sistema de três equações diferenciais acopladas. Não apresenta dificuldade ver que para $\delta = \gamma = \epsilon = 0$ ela se reduz ao caso isotrópico. A equação (3.34) descreve um modelo em que podem existir fortes heterogeneidades bem como anisotropias

que variam espacialmente. Isto fica evidente nos termos que apresentam os gradientes dos parâmetros elásticos. Lembramos que a dedução da equação (3.34) usou a hipótese que $|\delta| \ll 1$, mas não introduziu hipóteses sobre os outros parâmetros, λ , μ , ϵ ou γ .

3.2 Comentários

Neste capítulo obtivemos uma equação completa da onda elástica para um meio VTI com o parâmetro δ enfraquecido. A discussão feita no capítulo nos possibilita entender que esta condição é adequada aos modelos estudados na prática e desta forma, os ganhos do ponto de vista teórico que esta dedução oferece são significativos. Uma vez de posse desta equação dedicamos os próximos capítulos ao estudo de como obter uma solução para este problema. Além disso, a forma explícita da equação da onda possibilita o estudo qualitativo de muitos efeitos que são observados e que não podem ser satisfatoriamente explicados usando a equação genérica (3.1) para meios VTI.

Uma vez deduzida a equação da onda é possível fazer um estudo analítico do fenomeno de propagação de ondas nestes meios de uma forma mais completa. Por isso procedemos de forma análoga ao que é feito no caso isotrópico e estudamos o caso homogêneo anisotrópico para meios VTI buscando inclusive obter soluções analíticas para o caso especial $\epsilon = \delta$. Além disso estudamos o caso heterogêneo usando técnicas de aproximação em altas frequências.

Capítulo 4

Decomposição de Helmholtz em um Meio Homogêneo VTI

No presente capítulo estudamos a equação (3.34) no caso homogêneo. Avaliamos como a decomposição de Helmholtz que apresenta utilidade na solução do caso isotrópico pode ser adaptada para resolver o caso homogêneo VTI.

4.1 Estudos dos Campos de Onda Gerados em um Meio VTI

Com o objetivo de melhor entender o fenômeno de propagação, consideramos um meio homogêneo, neste caso os termos da equação (3.34) relacionados com os gradientes dos parâmetros elásticos irão desaparecer.

4.1.1 Equações Desacopladas

A equação elástica VTI dada por (3.34) no caso homogêneo anisotrópico assume a forma abaixo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{u} = & \frac{1}{\rho} \mathbf{f} + \alpha^2 \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) - \beta^2 \nabla \times \nabla \times \mathbf{u} + 2\alpha^2 (\epsilon - \delta) \widehat{\nabla} (\widehat{\nabla} \cdot \mathbf{u}) \\ & + \delta \alpha^2 \widehat{\nabla} (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \delta \alpha^2 \nabla (\widehat{\nabla} \cdot \mathbf{u}) + 2\beta^2 \gamma \widehat{\nabla}^\perp (\widehat{\nabla}^\perp \cdot \mathbf{u}), \end{aligned} \quad (4.1)$$

com α e β dados por (3.11). No caso isotrópico ($\epsilon = \delta = \gamma = 0$) a equação acima se reduz a forma (Aki and Richards, 1980)

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{u} = \frac{1}{\rho} \mathbf{f} + \alpha^2 \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) - \beta^2 \nabla \times \nabla \times \mathbf{u}. \quad (4.2)$$

e, utilizando os operadores do divergente e rotacional, é possível separar este campo de ondas em dois, um representando a onda P e o outro a onda S. Usando as propriedades

$$\nabla \cdot (\nabla (\nabla \cdot \mathbf{u})) = \Delta (\nabla \cdot \mathbf{u}) \quad \text{e} \quad \nabla \times (\nabla \times \nabla \times \mathbf{u}) = \Delta (\nabla \times \mathbf{u}), \quad (4.3)$$

é possível decompor a equação (4.2) em duas outras equações diferenciais parciais dadas por

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla \cdot \mathbf{u} = \alpha^2 \Delta (\nabla \cdot \mathbf{u}), \quad (4.4)$$

conhecida como equação da onda acústica e que possui grande aplicabilidade em problemas de geofísica, e pelo sistema de equações acústicas que conjuntamente representam a onda S dado por

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla \times \mathbf{u} = \beta^2 \Delta (\nabla \times \mathbf{u}). \quad (4.5)$$

Resolvendo as equações (4.4) e (4.5), obtemos a solução do problema homogêneo. Para mais detalhes veja Pujol (2003). Esta solução é conhecida como solução de Lamé e se baseia na decomposição de Helmholtz que garante que para um campo vetorial qualquer $\Omega(\mathbf{x}, t)$ existem funções w e Υ , conhecidos como potenciais escalar e vetorial do campo Ω , de modo que existe uma decomposição única

$$\Omega = \nabla w + \nabla \times \Upsilon \quad \text{com} \quad \nabla \cdot \Upsilon = 0. \quad (4.6)$$

Para mais detalhes de sua demonstração veja as referências Pujol (2003) e Aki and Richards (1980). Usando esta decomposição é possível separar o campo de onda isotrópico homogêneo em dois campos de onda independentes, um destes representando a onda de pressão P e o outro a onda cizalhante S.

Um procedimento análogo pode ser feito em relação a equação (4.1). A ideia principal é encontrar uma decomposição para um campo vetorial arbitrário de modo que a expressão (4.1) possa ser escrita em termos desta decomposição e impor condições para que possamos encontrar os potenciais que representam cada tipo de onda.

Considere agora um campo de onda $\hat{\Omega} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, com $\hat{\Omega} = (\Omega_1, \Omega_2, 0)^T$. Vamos mostrar que existem funções escalares $\phi, \Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$\hat{\Omega} = \hat{\nabla} \phi + \hat{\nabla}^\perp \Phi. \quad (4.7)$$

Para verificar esta identidade, observe que a expressão abaixo é válida se $\hat{\Omega}$ pode ser escrito como $\hat{\Omega} = \partial_{xx} \mathbf{W} + \partial_{yy} \mathbf{W}$ com $\mathbf{W} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ com $\mathbf{W} = (W_1, W_2, 0)^T$, pois

$$\hat{\Omega} = \partial_{xx} \mathbf{W} + \partial_{yy} \mathbf{W} = \hat{\nabla} (\hat{\nabla} \cdot \mathbf{W}) + \hat{\nabla}^\perp (\hat{\nabla}^\perp \cdot \mathbf{W}). \quad (4.8)$$

Assim, indicando

$$\phi = \widehat{\nabla} \cdot \mathbf{W} \quad \text{e} \quad \Phi = \widehat{\nabla}^\perp \cdot \mathbf{W}, \quad (4.9)$$

conseguimos obter (4.7).

Para comprovar que tal decomposição realmente existe, basta mostrar que o problema $\widehat{\Omega} = \partial_{xx} \mathbf{W} + \partial_{yy} \mathbf{W}$ possui solução, o que é verdade pois trata-se de um problema bidimensional de Poisson. Esta decomposição é uma versão da decomposição de Helmholtz para campos horizontais. A derivação desta decomposição é válida para volumes finitos, no caso de um espaço infinito, $\|\widehat{\Omega}\|$ precisa tender a zero “mais rapidamente” que h/s sendo h uma constante qualquer e s a distância até a origem. Além disso \mathbf{W} precisa satisfazer condições de continuidade e diferenciabilidade adequadas ao problema bidimensional de Poisson.

Agora mostramos que dado um campo vetorial qualquer é possível encontrar três funções escalares e uma função vetorial de modo que possamos escrever tal campo em termos destas funções. Para isso considere um campo vetorial qualquer $\mathbf{L} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Podemos escreve-lo como a soma de dois campos vetoriais: Ω que possui todas as componentes e $\widehat{\Omega}$ que possui somente componentes horizontais,

$$\mathbf{L} = \Omega + \widehat{\Omega}. \quad (4.10)$$

Como um exemplo, podemos escrever esta expressão com $\Omega = \mathbf{L}$ e $\widehat{\Omega} = \mathbf{0}$ ou $\Omega = (0, 0, L_3)^T$ e $\widehat{\Omega} = (L_1, L_2, 0)^T$.

Usando as expressões (4.6) e (4.7) é possível verificar que existem potenciais escalares $\psi, \phi, \Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ e um potencial vetorial $\Psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tais que o campo vetorial possa ser escrito em termos destes potenciais da seguinte forma,

$$\mathbf{L} = \nabla\psi + \nabla \times \Psi + \widehat{\nabla}\phi + \widehat{\nabla}^\perp\Phi \quad \text{com} \quad \nabla \cdot \Psi = 0. \quad (4.11)$$

Obtivemos basicamente uma generalização da decomposição de Helmholtz. A decomposição de Helmholtz é única e (4.7) também o é. Porém, (4.10) não é única, o que implica que para cada forma distinta de se escrever (4.10) é possível encontrar potenciais de modo que (4.11) é única. A imposição de condições adicionais ao campo \mathbf{L} pode não apresentar problemas do ponto de vista puramente matemático. No entanto, uma vez imposta alguma condição sobre este campo vetorial é interessante avaliar qual o significado que ela pode possuir do ponto de vista da física do problema. Na prática, para um meio anisotrópico VTI as ondas q-P e q-SV não variam radialmente devido ao plano de simetria. Este fato é comentado em Tsvankin (2001) e estas conclusões podem ser obtidas observando o trabalho experimental realizado por de Figueiredo et al. (2012). Desta forma, para garantirmos que

a decomposição (4.11) é única para um meio VTI vamos impor adicionalmente a condição

$$\widehat{\nabla} \cdot (\nabla \times \Psi) = 0, \quad (4.12)$$

que é equivalente a

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial x} - \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} \right) = 0. \quad (4.13)$$

Essa decomposição sugere um modo de resolução para equação (4.1). Mostraremos, agora, que o campo vetorial \mathbf{u} que satisfaz a equação (4.1) pode ser escrito na forma da decomposição modificada de Helmholtz. Observe que a fonte \mathbf{f} pode ser decomposta em termos de potenciais, isto é, existem potenciais ψ_f , Ψ_f , ϕ_f e Φ_f tais que

$$\mathbf{f} = \nabla \psi_f + \nabla \times \Psi_f + \widehat{\nabla} \phi_f + \widehat{\nabla}^\perp \Phi_f \quad \text{com} \quad \nabla \cdot \Psi_f = 0, \quad (4.14)$$

esta decomposição é única sob a condição

$$\widehat{\nabla} \cdot (\nabla \times \Psi_f) = 0. \quad (4.15)$$

De acordo com nossa dedução, (4.15) está diretamente relacionada com o modo como \mathbf{f} é escrita da forma (4.10). Substituindo a expressão acima na equação (4.1) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{u} = & \frac{1}{\rho} \nabla \psi_f + \frac{1}{\rho} \nabla \times \Psi_f + \frac{1}{\rho} \widehat{\nabla} \phi_f + \frac{1}{\rho} \widehat{\nabla}^\perp \Phi_f + \alpha^2 \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u} + \delta \widehat{\nabla} \cdot \mathbf{u}) \\ & - \beta^2 \nabla \times \nabla \times \mathbf{u} + \alpha^2 \widehat{\nabla} (\delta \nabla \cdot \mathbf{u} + 2(\epsilon - \delta) \widehat{\nabla} \cdot \mathbf{u}) + \beta^2 \widehat{\nabla}^\perp (2\gamma \widehat{\nabla}^\perp \cdot \mathbf{u}). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Integrando a expressão acima duas vezes em relação a t ,

$$\psi = \alpha^2 \int_0^t \int_0^\tau \left[(\nabla \cdot \mathbf{u} + \delta \widehat{\nabla} \cdot \mathbf{u}) + \frac{1}{\rho \alpha^2} \psi_f \right] d\tau' d\tau, \quad (4.17)$$

$$\Psi = -\beta^2 \int_0^t \int_0^\tau \left[\nabla \times \mathbf{u} - \frac{1}{\rho \beta^2} \Psi_f \right] d\tau' d\tau, \quad (4.18)$$

$$\phi = \alpha^2 \int_0^t \int_0^\tau \left[(\delta \nabla \cdot \mathbf{u} + 2(\epsilon - \delta) \widehat{\nabla} \cdot \mathbf{u}) + \frac{1}{\rho \alpha^2} \phi_f \right] d\tau' d\tau, \quad (4.19)$$

e

$$\Phi = \beta^2 \int_0^t \int_0^\tau \left[(2\gamma \widehat{\nabla}^\perp \cdot \mathbf{u}) + \frac{1}{\rho \beta^2} \Phi_f \right] d\tau' d\tau, \quad (4.20)$$

temos que \mathbf{u} pode ser escrito na forma (4.11),

$$\mathbf{u} = \nabla\psi + \nabla \times \mathbf{\Psi} + \widehat{\nabla}\phi + \widehat{\nabla}^\perp\Phi \quad \text{com} \quad \nabla \cdot \mathbf{\Psi} = 0. \quad (4.21)$$

Podemos perceber que os potenciais ϕ e Φ são dependentes dos parâmetros de anisotropia ϵ , δ e γ e quando estes parâmetros se anulam estes potenciais desaparecerão a menos dos termos de fonte, e consequentemente estes termos restantes serão considerados fontes do problema (4.16).

4.1.2 Cálculo dos Potenciais

Estamos prioritariamente interessados em encontrar uma solução para a equação (4.1) e podemos observar que a expressão (4.21) sugere que podem existir funções ψ , ϕ , Φ e $\mathbf{\Psi}$ que formam o campo vetorial \mathbf{u} . Matematicamente, não existem limitações para que possamos impor condições sobre o campo vetorial \mathbf{u} . Como estamos procurando uma solução para a equação poderíamos buscar soluções para o problema que possuam características adicionais ou mesmo propriedades específicas além de, é claro, satisfazer (4.1). Este argumento não é uma novidade quando se trata de busca de soluções para equações diferenciais parciais. Devemos lembrar que a teoria de espaços de Sobolev foi justamente construída a partir de situações em que era necessário desfigurar as características (enfraquecer a solução) da função que pudesse satisfazer a equação. Em muitas situações nem sequer uma função é procurada para ser a solução do problema. Basta observar que em alguns casos utilizam-se distribuições e não funções para obtenção de soluções fundamentais. Para mais detalhes recomendamos Adams (1975), Dancer and Sweers (1989) e de Figueiredo et al. (2004). Nestas referências existe uma frutífera discussão a respeito de soluções fracas e distribuições.

Intuitivamente, podemos observar que ao fazermos $\beta \rightarrow 0$ o campo vetorial \mathbf{u} será escrito somente em termos de ψ e ϕ ou seja, quando eliminamos a influência de β nosso campo vetorial pode ser escrito em termos de dois potenciais escalares. No caso isotrópico uma situação semelhante nos mostra que ao fazermos $\beta = 0$ o campo vetorial poderá ser escrito somente em termos de um potencial escalar. No caso isotrópico isso corresponde à propagação da onda em um meio acústico, no caso VTI seria a propagação da onda q-P em um meio pseudo-acústico. Em todo o caso, isso nos indica que se $\beta = 0$ é possível obter a equação da onda P (caso isotrópico) e onda q-P (meio VTI). Alkhalifah (2000) usou a hipótese de que $\beta \rightarrow 0$ para deduzir uma equação da onda para um meio pseudo-acústico.

No caso isotrópico é possível usar a decomposição de Helmholtz para estudar os campos de onda independentemente, uma vez que a simetria destes meios permite esta separação, isto dispensa a necessidade de assumir que $\beta = 0$. Queremos realizar o mesmo procedimento para um meio VTI usando nossa modificação da decomposição de Helmholtz.

Basicamente em nossa abordagem procuramos separar os campos de onda sem a necessidade de impor condições sobre a velocidade β . Assim, procuramos campos vetoriais \mathbf{u} que satisfaçam (4.1) e que satisfazem a condição abaixo,

$$\frac{\partial^3 u_3}{\partial x^2 \partial z} + \frac{\partial^3 u_3}{\partial y^2 \partial z} = \frac{\partial^3 u_1}{\partial z^2 \partial x} + \frac{\partial^3 u_2}{\partial z^2 \partial y}. \quad (4.22)$$

Matematicamente, podemos impor esta condição. Além disso, de acordo com nossa teoria isso corresponde a maneira como são escritos Ω e $\hat{\Omega}$ em (4.10). Portanto, a condição (4.22) garante que podemos encontrar potenciais cuja expressão de \mathbf{u} pode ser escrita de acordo com (4.21) de maneira única. Além disso, a definição (4.18) permite verificar que (4.22) é equivalente às condições (4.12) e (4.13).

Nossa generalização no limite da anisotropia fraca (isotropia) não contradiz a solução de Lamé para o caso isotrópico. Para verificar isso, basta observar que para $\epsilon, \delta, \gamma \rightarrow 0$ as expressões (4.17)–(4.20) ficam reduzidas a

$$\mathbf{u} = \nabla \psi + \nabla \times \Psi \quad \text{com} \quad \nabla \cdot \Psi = 0, \quad (4.23)$$

quando não levamos em consideração os termos de fonte. No entanto, no caso isotrópico é suficiente considerarmos $\phi_f = \Phi_f = 0$. Isto garante que nossa técnica resolve o problema isotrópico quando escolhemos $\epsilon = \delta = \gamma = 0$.

Ainda existe o problema do acoplamento, uma consequência deste fato aparece ao buscarmos as soluções da equação da onda por teoria de raios (Červený, 1972). Este método apresenta resultados incoerentes com respeito as polarizações das ondas q-S (Coates and Chapman, 1990). Neste trabalho tratamos do problema do acoplamento, de fato é possível usar termos de fonte apropriados para buscar suprimir a influência das ondas q-P e q-SH da onda q-SV (ver Figura 1.2).

Abaixo enunciamos e provamos um teorema no qual propomos que \mathbf{u} seja escrita como uma soma de potenciais de acordo com a fórmula (4.21). Mostramos que estas funções satisfazem outras equações diferenciais que possuem uma forma mais simples e possível de se resolver.

Introduzimos agora a notação auxiliar

$$\Delta = \Delta_r + \Delta_z, \quad (4.24)$$

com

$$\Delta_r = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad \text{e} \quad \Delta_z = \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (4.25)$$

Tal notação indica que estamos separando o operador Laplaciano em uma parte radial (ou horizontal) e outra parte vertical.

Teorema 4.1.1 *Seja $\mathbf{u} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ um campo vetorial contínuo diferenciável até a quarta ordem, que satisfaz a condição (4.22) e as condições iniciais*

$$\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{0} \quad e \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{0}. \quad (4.26)$$

Então

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \nabla\psi(\mathbf{x}, t) + \nabla \times \Psi(\mathbf{x}, t) + \widehat{\nabla}\phi(\mathbf{x}, t) + \widehat{\nabla}^\perp\Phi(\mathbf{x}, t) \quad (4.27)$$

é solução da equação (4.1) desde que ψ , ϕ , Φ e Ψ resolvam as seguintes equações

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi &= (1 + \delta)\Delta_r(\psi + \phi) + \Delta_z\psi + F_1, \\ \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi &= (2\epsilon - \delta)\Delta_r(\psi + \phi) + \delta\Delta_z\psi + F_2; \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$\frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi = (1 + 2\gamma)\Delta_r\Phi + \Delta_z\Phi + F_3; \quad (4.29)$$

$$\frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi = \Delta\Psi + \nabla \times \left(\widehat{\nabla}\phi + \widehat{\nabla}^\perp\Phi \right) + \mathbf{F}_4; \quad (4.30)$$

$$\nabla \cdot \Psi = 0; \quad (4.31)$$

$$\widehat{\nabla} \cdot (\nabla \times \Psi) = 0. \quad (4.32)$$

Os termos F_i representam a fonte e dependem somente da fonte original f . Para $i = 1, 2, 3$ temos que F_i são escalares e \mathbf{F}_4 é vetorial. Demonstramos este teorema e para tanto procedemos de forma análoga ao que é feito no caso isotrópico.

A demonstração do caso isotrópico encontra-se descrita no Apêndice A. Abaixo segue a prova do teorema. Já mostramos que o campo vetorial \mathbf{u} que satisfaz a equação (4.1) pode ser escrito em termos de quatro potenciais. A forma destes potenciais estão definidas nas equações (4.17)–(4.20). Agora mostramos que estes potenciais satisfazem as EDP's (4.28)–(4.31). Aplicando o operador divergente na equação (4.1) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla \cdot \mathbf{u} &= \alpha^2 \Delta (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \alpha^2 \Delta_r \left(2(\epsilon - \delta) \widehat{\nabla} \cdot \mathbf{u} \right) + \alpha^2 \Delta \left(\delta \widehat{\nabla} \cdot \mathbf{u} \right) \\ &\quad + \alpha^2 \Delta_r \left(\delta \widehat{\nabla} \cdot \mathbf{u} \right) + \Delta \left(\frac{\psi_f}{\rho} \right) + \Delta_r \left(\frac{\phi_f}{\rho} \right), \end{aligned} \quad (4.33)$$

que pode ser escrito como

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla \cdot \mathbf{u} = \Delta \left(\alpha^2 \left[\nabla \cdot \mathbf{u} + \delta \widehat{\nabla} \cdot \mathbf{u} + \frac{\psi_f}{\rho \alpha^2} \right] \right) + \Delta_r \left(\alpha^2 \left[\delta \nabla \cdot \mathbf{u} + 2(\epsilon - \delta) \widehat{\nabla} \cdot \mathbf{u} + \frac{\phi_f}{\rho \alpha^2} \right] \right). \quad (4.34)$$

Integrando a equação acima duas vezes em relação a t obtemos

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{u} &= \Delta \left(\int_0^t \int_0^\tau \alpha^2 \left[\nabla \cdot \mathbf{u} + \delta \widehat{\nabla} \cdot \mathbf{u} + \frac{\psi_f}{\rho \alpha^2} \right] d\tau' d\tau \right) \\ &+ \Delta_r \left(\int_0^t \int_0^\tau \alpha^2 \left[\delta \nabla \cdot \mathbf{u} + 2(\epsilon - \delta) \widehat{\nabla} \cdot \mathbf{u} + \frac{\phi_f}{\rho \alpha^2} \right] d\tau' d\tau \right) \end{aligned} \quad (4.35)$$

e, usando (4.17) e (4.19), segue que

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \Delta_r (\psi + \phi) + \Delta_z \psi. \quad (4.36)$$

De maneira análoga aplicamos o operador $\widehat{\nabla} \cdot$ na equação (4.1) e usando (4.22) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \widehat{\nabla} \cdot \mathbf{u} &= \alpha^2 \Delta_r (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \alpha^2 \Delta_r (2(\epsilon - \delta) \delta \widehat{\nabla} \cdot \mathbf{u}) + \alpha^2 \Delta_r (\delta \widehat{\nabla} \cdot \mathbf{u}) \\ &+ \Delta_r (\delta \nabla \cdot \mathbf{u}) + \Delta_r \left(\frac{\psi_f + \phi_f}{\rho} \right) + \frac{\widehat{\nabla} \cdot (\nabla \times \Psi_f)}{\rho}. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Novamente, integrando duas vezes em relação ao tempo temos

$$\widehat{\nabla} \cdot \mathbf{u} = \alpha^2 \Delta_r (\psi + \phi) + \frac{1}{\rho} \int_0^t \int_0^\tau \widehat{\nabla} \cdot (\nabla \times \Psi_f) d\tau' d\tau. \quad (4.38)$$

Estas duas expressões (4.36) e (4.38) nos permitem mostrar que ψ e ϕ satisfazem as equações (4.28) e (4.29). Derivando (4.17) duas vezes em relação ao tempo e sob a substituição de (4.36) e (4.38) temos

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi = \alpha^2 [(1 + \delta) \Delta_r (\psi + \phi) + \Delta_z \psi] + \frac{\psi_f}{\rho} + \frac{\alpha^2 \delta}{\rho} \int_0^t \int_0^\tau \widehat{\nabla} \cdot (\nabla \times \Psi_f) d\tau' d\tau. \quad (4.39)$$

Analogamente é possível mostrar que

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi = \alpha^2 [(2\epsilon - \delta) \Delta_r (\psi + \phi) + \delta \Delta_z \psi] + \frac{\phi_f}{\rho} + \frac{2(\epsilon - \delta) \alpha^2}{\rho} \int_0^t \int_0^\tau \widehat{\nabla} \cdot (\nabla \times \Psi_f) d\tau' d\tau \quad (4.40)$$

e, usando a condição (4.15), podemos tomar

$$F_1 = \frac{\psi_f}{\rho} \quad \text{e} \quad F_2 = \frac{\phi_f}{\rho}. \quad (4.41)$$

Desta forma, é possível concluir que ψ e ϕ satisfazem (4.28).

Agora, aplicando o operador $\widehat{\nabla}^\perp \cdot$ na equação (4.1) obtemos

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \widehat{\nabla}^\perp \cdot \mathbf{u} = \beta^2 \Delta \left(\widehat{\nabla}^\perp \cdot \mathbf{u} \right) + 2\gamma\beta^2 \Delta_r \left(\widehat{\nabla}^\perp \cdot \mathbf{u} \right) + \Delta_r \left(\frac{\Phi_f}{\rho} \right). \quad (4.42)$$

Multiplicando esta equação por 2γ e integrando duas vezes em relação ao tempo segue que

$$\begin{aligned} 2\gamma \widehat{\nabla}^\perp \cdot \mathbf{u} &= \beta^2 \Delta \left(\beta^2 \int_0^t \int_0^\tau \left[\left(2\gamma \widehat{\nabla}^\perp \cdot \mathbf{u} \right) + \frac{1}{\rho\beta^2} \Phi_f \right] d\tau' d\tau \right) \\ &+ 2\gamma\beta^2 \Delta_r \left(\beta^2 \int_0^t \int_0^\tau \left[\left(2\gamma \widehat{\nabla}^\perp \cdot \mathbf{u} \right) + \frac{1}{\rho\beta^2} \Phi_f \right] d\tau' d\tau \right) - \Delta \left(\frac{\Phi_f}{\rho\beta^2} \right), \end{aligned} \quad (4.43)$$

que nos possibilita concluir que

$$\frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi = (1 + 2\gamma) \Delta_r \Phi + \Delta_z \Phi + \frac{1}{\rho\beta^2} \Phi_f - \Delta \left(\frac{\Phi_f}{\rho\beta^2} \right), \quad (4.44)$$

que é a equação (4.29) com a escolha

$$F_3 = \frac{1}{\rho\beta^2} \Phi_f - \Delta \left(\frac{\Phi_f}{\rho\beta^2} \right). \quad (4.45)$$

Para demonstrar (4.30) basta aplicar o operador rotacional na equação (4.1) e integrar duas vezes em relação ao tempo e veremos que (4.18) satisfaz (4.29), e (4.32) segue imediatamente da condição (4.22). Desta forma fica estabelecido o teorema.

Comentários sobre a unicidade dos potenciais

Considere a condição de radiação de Sommerfeld dada por

$$\lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow +\infty} \|\mathbf{x}\| \left(\frac{\partial}{\partial \|\mathbf{x}\|} - i\mathbf{k} \right) \tilde{\mathbf{u}} = 0, \quad (4.46)$$

que é uniforme em todas as direções. Na expressão acima \mathbf{k} representa o número de onda e $\tilde{\mathbf{u}}$ representa uma função escalar que pode ser eventualmente interpretada em termos dos potenciais ϕ , ψ , Φ e Ψ_i . A condição (4.46) é usada para se obter uma solução única para a equação de Helmholtz no caso

isotrópico (Aki and Richards, 1980). Podemos usar as condições de radiação de Sommerfeld para estipular condições de fronteira para a nossa generalização da decomposição de Helmholtz e (4.46) pode ser usada no nosso caso para garantir a unicidade da solução desde que a fonte seja uma função de suporte compacto (Adams, 1975).

Um aspecto interessante deste resultado é que os potenciais ψ e ϕ são dependentes e para obtê-los é necessário resolver um sistema de equações. Adiante neste capítulo mostramos que este sistema pode ser modificado e escrito de uma forma semelhante ao sistema obtido por Duveneck et al. (2008). O teorema também evidencia que a onda q-S representada pelo potencial vetorial Ψ é acoplada a onda q-SH que é representada pelo potencial escalar Φ que é solução de (4.29) e à onda horizontal representada pelo potencial escalar ϕ , uma vez que estas aparecem como termo de fonte na equação da onda que usamos para calcular Ψ . Mesmo na presença de uma fonte pontual onidirecional irá existir propagação de ondas q-S, fato que não ocorre em meios isotrópicos. Portanto, em meios VTI, este tipo de fonte não simula um meio acústico. Fontes desta natureza são o objeto de estudo em uma seção adiante.

Assim é suficiente estudar o problema de encontrar a solução do sistema (4.28), da equação escalar (4.29) e das três equações desacopladas dadas por (4.30). Um fato que ocorre em um meio isotrópico é que ao escolhermos uma fonte $\mathbf{f} = \nabla \times \Psi_f$ é possível estudar separadamente a propagação de uma onda transversal livre da propagação da onda de pressão. Nosso resultado mostra que em um meio VTI para tais tipos de fonte ocorrerá a propagação de ondas de pressão. Ao impor a fonte $\mathbf{f} = \nabla \times \Psi_f$ com a condição

$$\hat{\nabla} \cdot (\nabla \times \Psi_f) = 0, \quad (4.47)$$

irá somente ocorrer a propagação da onda S pura e livre da influência dos parâmetros de anisotropia ϵ , δ e γ . Tal fato é usado no estudo da separação dos campos de ondas em seção adiante.

Para obter a solução de (4.29) e (4.30) é suficiente encontrar uma função $\chi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ que resolva o problema

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \chi = \nu^2 \Delta_r \chi + \Delta_z \chi + F, \quad (4.48)$$

com F sendo o termo de fonte da equação, $\nu = \sqrt{1 + 2\gamma}$ para (4.29) e $\nu = 1$ para (4.30), denotamos c é a velocidade da onda. Denotando por G a função de Green causal para o problema acima, isto é, a solução de (4.48) com $F(\mathbf{x}, t) = \delta(\mathbf{x})\delta(t)$ e impondo $G(\mathbf{x}, t) = 0$ para $t < 0$, temos que

$$\chi(\mathbf{x}, t) = G(\mathbf{x}, t) * F(\mathbf{x}, t), \quad (4.49)$$

com $*$ denotando a convolução nas variáveis \mathbf{x} e t .

Na próxima seção mostraremos que

$$G(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\|\mathbf{d}\|\nu^2} \delta\left(t - \frac{\|\mathbf{d}\|}{c}\right) \quad \text{com} \quad \mathbf{d} = \left(\frac{x_1}{\nu}, \frac{x_2}{\nu}, x_3\right)^T. \quad (4.50)$$

As equações (4.49)–(4.50) serão usadas para o cálculo da solução analítica da onda P para um meio elíptico $\epsilon = \delta$. Basicamente, este resultado é uma generalização da função de Green para o caso isotrópico.

4.2 Função de Green para um Meio Elíptico

Nesta seção encontramos a expressão analítica para a função de Green causal, solução do problema abaixo,

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} G(\mathbf{x}, t) - \nu^2 \Delta_r G(\mathbf{x}, t) - \Delta_z G(\mathbf{x}, t) = \delta(\mathbf{x})\delta(t) \quad \text{com} \quad G(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad t < 0. \quad (4.51)$$

Este problema descreve a propagação da onda em um determinado meio. Se $\nu = 1$ o meio em questão será homogêneo isotrópico.

Considere a transformação de coordenadas, $\mathbf{d} = (x_1/\nu, x_2/\nu, x_3)$ e defina $\mathcal{G}(\mathbf{d}, t) = G(\mathbf{x}, t)$. Logo,

$$\nu^2 \Delta_r G(\mathbf{x}, t) + \Delta_z G(\mathbf{x}, t) = \Delta_d \mathcal{G}(\mathbf{d}, t), \quad (4.52)$$

com Δ_d denotando o Laplaciano nas coordenadas \mathbf{d} . Usando as coordenadas \mathbf{d} em (4.51), obtemos

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} [\nu^2 \mathcal{G}(\mathbf{d}, t)] - \Delta_d [\nu^2 \mathcal{G}(\mathbf{d}, t)] = \delta(\mathbf{d})\delta(t) \quad \text{com} \quad \mathcal{G}(\mathbf{d}, 0) = 0, \quad t < 0. \quad (4.53)$$

Portanto, $\nu^2 \mathcal{G}$ é igual a função de Green causal em um meio homogêneo isotrópico. Assim (Pujol, 2003),

$$G(\mathbf{x}, t) = \mathcal{G}(\mathbf{d}, t) = \frac{1}{4\pi\|\mathbf{d}\|\nu^2} \delta\left(t - \frac{\|\mathbf{d}\|}{c}\right). \quad (4.54)$$

Esta expressão é a generalização da solução fundamental ou função de Green para um meio VTI elíptico. Evidentemente para cada equação dada em (4.29)–(4.30) as constantes ν e c assumem diferentes valores. As condições requeridas para que (4.54) seja solução para estas equações são determinadas principalmente pelos parâmetros de anisotropia ϵ , δ e γ . Como já estamos assumindo $|\delta| \ll 1$, para que (4.54) seja solução de (4.29) basta que $\gamma > -\frac{1}{2}$ uma vez que $\nu = \sqrt{1 + 2\gamma}$ deve ser real não nulo. Podemos perceber que no caso da equação (4.30) a função de Green é a mesma do caso isotrópico e nesta equação a influência dos parâmetros de anisotropia se notarão através dos termos

de fonte. Na seção sobre meios elípticos ($\epsilon = \delta$), mostramos que (4.54) é solução do problema (4.28) para os valores $-\frac{1}{2} < \epsilon = \delta < 1$. Finalmente, para obter a solução do problema basta convoluir (4.51) com o termo de fonte.

4.3 Fonte Pontual Onidirecional

O aspecto da fonte irá determinar o comportamento do campo de onda, se o campo de ondas é gerado por uma fonte pontual compressional que emite a mesma energia em todas as direções, existirá somente a onda P para o caso isotrópico (ver Aki and Richards (1980)). Como já foi comentado, em um meio VTI isto não ocorrerá. Considerando uma fonte $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = F(t)\nabla\delta(\mathbf{x})$, é possível simplificar bastante as equações descritas no Teorema 4.1.1. Para esta fonte, temos $\Psi_f = \mathbf{0}$, $\phi_f = \Phi_f = 0$ e usando (4.50) podemos ver que não ocorre a propagação da onda Φ . Assim, ocorre a propagação de ondas que são descritas pelas equações abaixo,

$$\frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi = (1 + \delta)\Delta_r(\psi + \phi) + \Delta_z\psi + \frac{1}{\rho\alpha^2}\delta(\mathbf{x})F(t), \quad (4.55)$$

$$\frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi = (2\epsilon - \delta)\Delta_r(\psi + \phi) + \delta\Delta_z\psi \quad (4.56)$$

e

$$\frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi_p = \Delta(\Psi_p) + \nabla \times (\widehat{\nabla}\phi). \quad (4.57)$$

A equação (4.57) confirma que na presença de uma fonte pontual onidirecional irá existir a propagação de uma onda S aqui denotada por Ψ_p , que estará acoplada ao campo q-P. No entanto podemos obter, ao resolver as equações (4.55)–(4.57), a expressão para cada modo de onda. Repare que se impusermos a condição $\beta = 0$ não existirá Ψ_p restando somente o sistema de equações (4.55)–(4.56).

4.3.1 Caso Pseudo-Acústico

Alkhalifah (2000) e Duveneck et al. (2008) realizaram contribuições para o caso pseudo-acústico. A equação da onda para este meio assumindo $\mu = \beta = 0$. Uma vez que usamos a condição (4.22), nossa dedução para descrição do campo q-P não exige a condição $\mu = 0$. Na realidade, em nossa dedução no caso pseudo-acústico, com $\beta = 0$, a onda descrita pela equação (4.57) deixa de existir como já observado na seção anterior. Portanto, a equação que descreve a propagação da onda q-P não se altera com tal imposição.

Somando as equações (4.55) e (4.56) e denotando por $\varphi = \psi + \phi$, é possível obter um sistema

equivalente dado por

$$\frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi = (1 + 2\epsilon) \Delta_r \varphi + (1 + \delta) \Delta_z \psi + \frac{1}{\rho \alpha^2} \delta(\mathbf{x}) F(t) \quad (4.58)$$

e

$$\frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi = (1 + \delta) \Delta_r \varphi + \Delta_z \psi + \frac{1}{\rho \alpha^2} \delta(\mathbf{x}) F(t) \quad (4.59)$$

O sistema acima é similar ao sistema deduzido por Duveneck et al. (2008). No entanto, nossa versão é linearizada em δ . Além do mais, nossas equações são dadas em termos dos potenciais ψ e ϕ . Os sistemas de equações (4.55)–(4.56) e (4.58)–(4.59) são equivalentes e tanto faz usar um ou o outro. Optamos por usar (4.58)–(4.59) pois oferece uma maneira (no que se refere aos cálculos) mais cômoda de se deduzir a equação da onda unidirecional para um meio VTI. A mesma conclusão pode ser obtida usando (4.55)–(4.56).

4.4 Equação da Onda Unidirecional

O estudo de estruturas geológicas possui grande importância na busca por reservas de petróleo. Os métodos de migração por equação da onda apresentam grande utilidade em meios com significativa variação lateral de velocidade. Tais métodos em sua grande maioria consistem em resolver a equação da onda acústica, no caso isotrópico evidentemente, em uma única direção. Nesta parte do trabalho adaptamos as ideias conhecidas do caso isotrópico de maneira a estabelecer uma generalização dos métodos que possibilitem fazer migração unidirecional, visando sua aplicação em um meio pseudo-acústico VTI. Para isso consideramos um modelo em que $y = x_2 = 0$.

Considere um experimento hipotético onde fonte e receptor estão localizados na mesma posição, isso é conhecido como afastamento nulo. A seção de afastamento nulo é registrada com o tempo de trânsito duplo, vamos descrever o modelo de refletor explosivo e desta forma consideramos a velocidade de propagação valendo a metade da velocidade verdadeira. Neste tipo de modelo uma migração consiste no reposicionamento da onda sísmica registrada para $t = 0$.

Considerando o modelo 2D e desconsiderando o termo de fonte, o sistema de equações (4.58)–(4.59) se torna,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi - (1 + 2\epsilon) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} &= (1 + \delta) \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \\ \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} &= (1 + \delta) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (4.60)$$

Aplicando a transformada de Fourier dupla no tempo e na variável x nas equações acima, obtemos

$$\widehat{\varphi} = \left[\frac{-(1 + \delta)}{\frac{\omega^2}{\alpha^2} - (1 + 2\epsilon)k_x^2} \right] \frac{\partial^2 \widehat{\psi}}{\partial z^2} \quad (4.61)$$

e

$$\frac{\omega^2}{\alpha^2} \widehat{\psi} + \frac{\partial^2 \widehat{\psi}}{\partial z^2} = (1 + \delta)k_x^2 \widehat{\varphi}. \quad (4.62)$$

Substituindo (4.61) em (4.62) obtemos a equação

$$\frac{\omega^2}{\alpha^2} \widehat{\psi} + \frac{\partial^2 \widehat{\psi}}{\partial z^2} = \left[\frac{-(1 + \delta)^2 k_x^2}{\frac{\omega^2}{\alpha^2} - (1 + 2\epsilon)k_x^2} \right] \frac{\partial^2 \widehat{\psi}}{\partial z^2}. \quad (4.63)$$

Observe que desde o início estamos assumindo o parâmetro $|\delta| \ll 1$, por isso estamos negligenciando os termos quadrados de δ e, conseqüentemente, vale a aproximação abaixo

$$(1 + \delta)^2 = 1 + 2\delta + \delta^2 \approx 1 + 2\delta. \quad (4.64)$$

Assim, a equação (4.63) se reduz a

$$\frac{\omega^2}{\alpha^2} \widehat{\psi} + \left[1 + \frac{(1 + 2\delta)k_x^2}{\frac{\omega^2}{\alpha^2} - (1 + 2\epsilon)k_x^2} \right] \frac{\partial^2 \widehat{\psi}}{\partial z^2} = 0. \quad (4.65)$$

Após manipulações de caráter algébrico temos

$$\frac{\partial^2 \widehat{\psi}}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{\alpha^2} \left[\frac{\frac{\omega^2}{\alpha^2} - (1 + 2\epsilon)k_x^2}{\frac{\omega^2}{\alpha^2} - 2(\epsilon - \delta)k_x^2} \right] \widehat{\psi} = 0. \quad (4.66)$$

Definindo o parâmetro de anelipticidade η (Alkhalifah, 2000)

$$\eta = \frac{\epsilon - \delta}{1 + 2\delta}, \quad (4.67)$$

podemos reescrever (4.66) na forma

$$\frac{\partial^2 \widehat{\psi}}{\partial z^2} + k_z^2 \widehat{\psi} = 0, \quad (4.68)$$

com

$$k_z^2 = \frac{\omega^2}{\alpha^2} \left[\frac{\frac{\omega^2}{\alpha^2} - (1 + 2\delta)(1 + 2\eta)k_x^2}{\frac{\omega^2}{\alpha^2} - 2(1 + 2\delta)\eta k_x^2} \right]. \quad (4.69)$$

Usando agora a definição a velocidade NMO (Tsvankin, 2001),

$$V_{NMO} = \alpha\sqrt{1 + 2\delta}, \quad (4.70)$$

obtemos

$$k_z = \pm \frac{\omega}{\alpha} \sqrt{1 - \frac{\frac{V_{NMO}^2 k_x^2}{\omega^2}}{1 - 2\eta \frac{V_{NMO}^2 k_x^2}{\omega^2}}}. \quad (4.71)$$

Seguindo a notação de Fei and Liner (2008) definimos

$$m^2 = \frac{V_{NMO}^2 k_x^2}{\omega^2}, \quad (4.72)$$

o que implica em

$$k_z = \pm \frac{\omega}{\alpha} \sqrt{1 - \frac{m^2}{1 - 2\eta m^2}}. \quad (4.73)$$

A expressão (4.73) é denominada relação de dispersão e coincide com a expressão heurística que Alkhalifah (2000) usou para deduzir sua equação acústica para um meio VTI. Esta relação é usada por Amazonas et al. (2010) para desenvolver uma migração em meios VTI por diferenças finitas utilizando a aproximação complexa de Padé. A equação (4.73) é válida somente em meios homogêneos; em meios heterogêneos k_z irá denotar o símbolo de um operador pseudo-diferencial. Nosso método se apresenta como uma generalização do caso isotrópico. Note que se tivermos $\epsilon = \delta = 0$ a relação de dispersão k_z se reduz a sua forma isotrópica e ψ representa a onda P. Levando em conta que nossa abordagem possui uma forma que generaliza o caso conhecido, podemos escrever a onda que se propaga em uma direção por

$$\frac{\partial}{\partial z} \psi(k_x, z, \omega) = -ik_z \psi(k_x, z, \omega), \quad (4.74)$$

a expressão acima é relacionada com ondas que se propagam para cima.

A equação (4.74) possui solução analítica dada por

$$\psi(k_x, z, \omega) = \psi(k_x, 0, \omega) e^{-ik_z z}, \quad (4.75)$$

a solução analítica acima é válida somente quando a velocidade do meio é constante. A conclusão neste caso é que o campo de onda em qualquer ponto do modelo dado pode ser determinado somente com o campo de onda medido na superfície ($z = 0$).

Portanto, nesta seção deduzimos a forma geralmente usada para migração em uma direção para meios VTI a partir de uma base teórica sólida e consistente de uma equação da onda para tais meios.

4.5 Caso Elíptico

Vamos investigar o caso em que $\epsilon = \delta$ conhecido como caso elíptico (Helbig, 1983). Através das expressões (4.17) e (4.19) podemos observar que

$$\delta \cdot \psi = \phi + \mathcal{O}(\delta^2). \quad (4.76)$$

Como estamos negligenciando termos de ordem maior ou igual a 2 em δ , podemos considerar $\phi = \delta \cdot \psi$ e, uma vez que definimos $\varphi = \psi + \phi$ podemos escrever $\varphi = (1 + \delta) \cdot \psi$. Substituindo tal relação em (4.59) e, novamente aproximando $(1 + \delta)^2 \approx 1 + 2\delta$, obtemos

$$\frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi = (1 + 2\delta) \Delta_r \psi + \Delta_z \psi + \frac{1}{\rho \alpha^2} \delta(\mathbf{x}) F(t). \quad (4.77)$$

A solução para este problema pode ser encontrada diretamente de (4.49)–(4.50) usando $\nu = \sqrt{1 + 2\delta}$ e $c = \alpha$. Assim,

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi \|d\| (1 + 2\delta)} \frac{1}{\rho \alpha^2} F\left(t - \frac{\|d\|}{\alpha}\right), \quad (4.78)$$

sendo

$$\|d\| = \sqrt{\frac{x_1^2}{1 + 2\delta} + \frac{x_2^2}{1 + 2\delta} + x_3^2}. \quad (4.79)$$

Utilizamos agora uma função de fonte específica para apresentar um exemplo de propagação de onda em um meio pseudo-acústico elíptico. Usamos para este fim a wavelet de Ricker (Aki and Richards, 1980),

$$F(t) = [1 - 2(\pi f_p t)^2] e^{-(\pi f_p t)^2}, \quad (4.80)$$

com f_p representando a frequência de pico. Nas Figuras 4.1 e 4.2 podemos ver os campos de onda no meio pseudo-acústico usando a expressão (4.78) e a wavelet de Ricker, para alguns valores de anisotropia.

4.6 Outros Tipos de Fontes

O único elemento na equação (4.1) que de fato temos algum controle é o termo de fonte. Por isso é natural de acordo com nossa teoria escolher outras fontes além da pontual onidirecional. Por exemplo, ao escolhermos uma fonte do tipo $\mathbf{f} = \hat{\nabla}^\perp \Phi_f$ não existirá a propagação de ψ e ϕ , assim

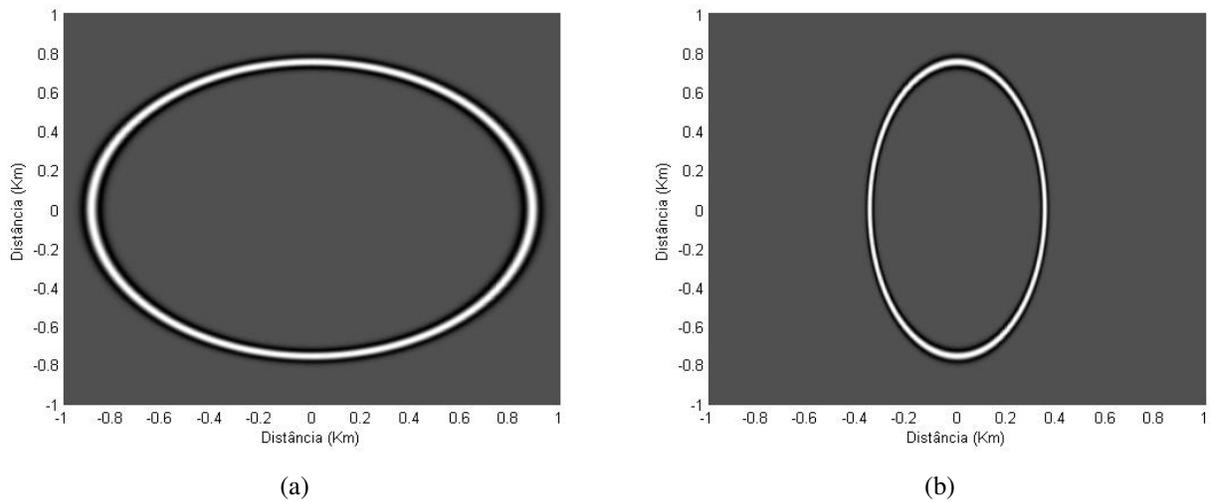


Figura 4.1: Campo de onda 2D com a fonte localizada na origem em um meio pseudo acústico VTI elíptico obtido usando (4.78). A figura (a) é referente aos valores $\epsilon = \delta = 0.2$ e velocidade $\alpha = 1.5$ km/s enquanto que a figura (b) foi obtida para os valores $\epsilon = \delta = -0.39$ e a mesma velocidade α do caso anterior.

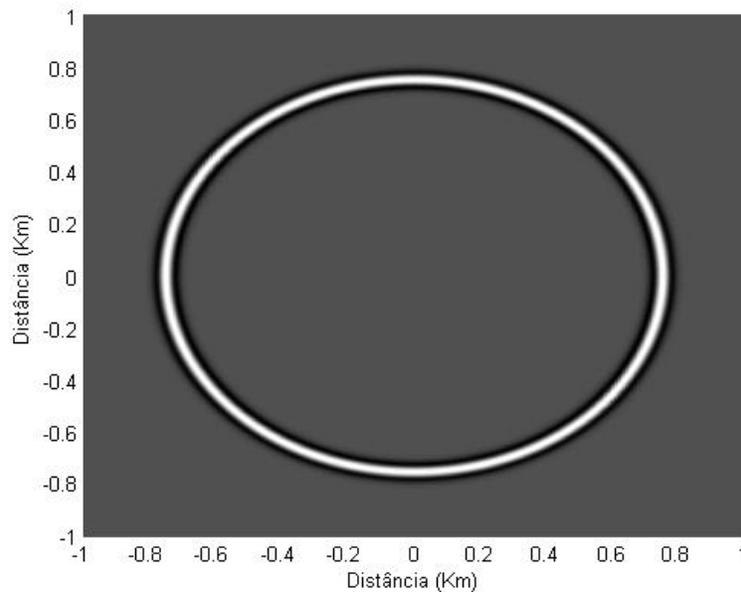


Figura 4.2: A figura da esquerda representa o campo de onda P com a fonte localizada na origem em um meio com $\epsilon = \delta = 0$ e $\alpha = 1.5$ km/s.

podemos estudar somente as equações

$$\frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi = (1 + 2\gamma) \Delta_r \Phi + \Delta_z \Phi + F_3 \quad (4.81)$$

e

$$\frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi_s = \Delta \Psi_s + \nabla \times (\widehat{\nabla}^\perp \Phi), \quad (4.82)$$

com Ψ_s correspondendo a uma onda q-S e Φ corresponde a uma onda q-SH. As equações acima deixam muito claro o problema do acoplamento e a influência que o parâmetro γ possui na expressão de Ψ_s no caso 3D.

No entanto, existe uma possibilidade de se estudar o potencial Ψ livre das influências dos parâmetros de anisotropia γ , ϵ e δ . Para isso basta escolher uma fonte, $\mathbf{f} = \nabla \times \Psi_f$, de maneira que $\widehat{\nabla} \cdot \mathbf{f} = 0$. Observe que este tipo de fonte foi usada em nossa decomposição do campo \mathbf{u} em termos de quatro funções potenciais. Com esta escolha para fonte podemos estudar o potencial Ψ , que para estes tipos de fonte, denotaremos por Ψ_{ISO} . Para esta escolha de fonte estuda-se a equação

$$\frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi_{ISO} = \Delta \Psi_{ISO} + \mathbf{F}_4, \quad (4.83)$$

com o termo de fonte.

$$\mathbf{F}_4 = \frac{\Psi_f}{\rho \beta^2}. \quad (4.84)$$

Sob a escolha de tal fonte apenas a onda S se propaga e é livre da influência dos parâmetros de anisotropia δ , ϵ e γ . Usamos fontes que tornam possível simplificar matematicamente as expressões.

4.7 Separação de Modos de Onda

Nesta seção mostramos como nossa teoria possibilita a separação dos campos de onda em um meio VTI. Isto é importante pois podemos separar os modos de onda que viajam com diferentes velocidades. Por isso essa separação tem aplicações em migração da equação da onda, pois se usarmos a equação geral da onda elástica não será possível tratar corretamente cada um.

No caso isotrópico a decomposição de Helmholtz possui grande utilidade e é usada para separar os campos de onda de pressão P dos campos transversais ou de cisalhamento S. Na prática (4.6) não é usado diretamente, o que se faz é aplicar os operadores de divergência e rotacional ao campo de onda extrapolado. Em meios VTI o uso dos operadores de divergência e rotacional não apresentam resultados satisfatórios quando usados para separar os modos de onda, por isso em sua forma isotrópica a decomposição de Helmholtz não pode ser usada para fazer a separação para tais meios (Yan

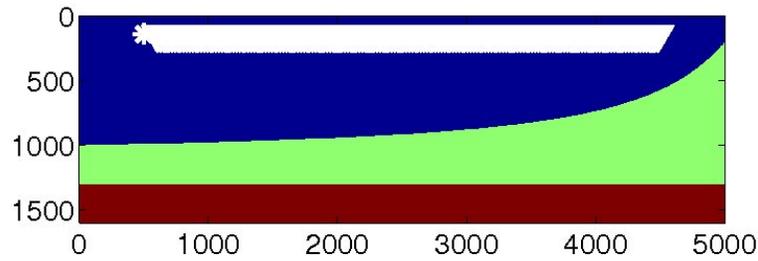


Figura 4.3: Modelo heterogêneo VTI com três camadas, a primeira camada possui $\delta = -0.2704$ e $\epsilon = -0.2187$. A configuração fonte receptor é colocada em branco.

and Sava, 2009).

Dellinger and Etgen (1990) fizeram a separação dos campos de ondas em um meio anisotrópico homogêneo pela projeção do campo de onda nas direções onde as ondas q-P e q-S estão polarizadas. Para meios heterogêneos Yan and Sava (2009) usaram pseudo-operadores para separar o campo de onda. Sua técnica se baseia em resolver a equação de Christoffel no domínio do número de onda e apresenta significativas desvantagens do ponto de vista computacional. Mostramos aqui que é possível utilizar nossa teoria para fazer a separação do campo de onda em um meio VTI.

4.7.1 Separação do Modo de Onda q-P

A expressão para o potencial q-P é, de acordo com a equação (4.18), dada por

$$\phi_{qP} = \nabla \cdot \mathbf{u} + \delta \widehat{\nabla} \cdot \mathbf{u}. \quad (4.85)$$

A expressão (4.85) indica que para um meio anisotrópico homogêneo VTI é possível separar o campo q-P do campo q-SV. A Figura 4.3 é um modelo VTI 2D de três camadas com parâmetros de anisotropia distintos, trata-se de um exemplo sintético e usaremos ele para ilustrar nossa técnica. Se olharmos a Figura 4.4 podemos perceber os componentes horizontais e verticais de um campo de onda na primeira camada que possui $\delta = -0.2704$ e $\epsilon = -0.2187$. Aplicando o operador (4.85) a estes campos obtemos somente o potencial q-P representado pela figura à esquerda na Figura 4.5. A Figura da direita é o campo q-P obtido ao aplicarmos o operador isotrópico. Evidentemente que estes campos estão relacionados à primeira camada que não possui heterogeneidade e o resultado demonstra que a equação funciona corretamente, como previsto pela equação (4.85). Observe que para este meio $|\epsilon - \delta|$ é muito pequeno, considerando um meio elíptico com $\epsilon = \delta = -0.2704$ e mesmas velocidade e densidade da primeira camada deste exemplo sintético, é possível ver na Figura 4.8 que o campo de onda obtido com nossa solução analítica para meios elípticos é coerente. Portanto, para

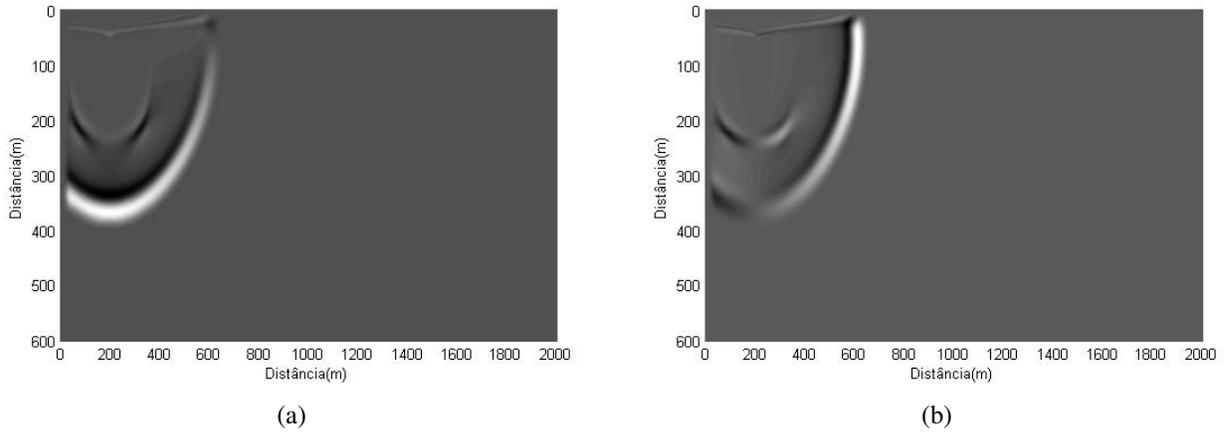


Figura 4.4: A figura representa os snapshot 2D u_1 dado em (a) e u_3 dado em (b) que se propagam na primeira camada para $t = 1s$.

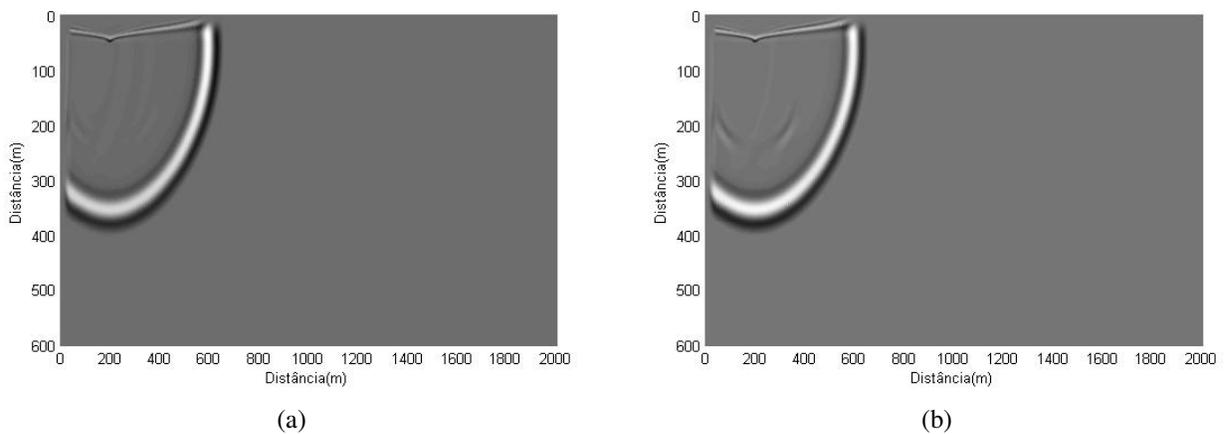


Figura 4.5: A figura (a) representa o snapshot q-P obtido ao se aplicar o operador (4.85) em u_1 e u_3 que estão representados na Figura 4.4. A figura em (b) representa o campo q-P quando aplicado somente o operador isotrópico $\nabla \cdot$. É possível ver que a influência da onda q-SV foi melhor removida quando usamos (4.85) do que no caso em que usamos o operador isotrópico.

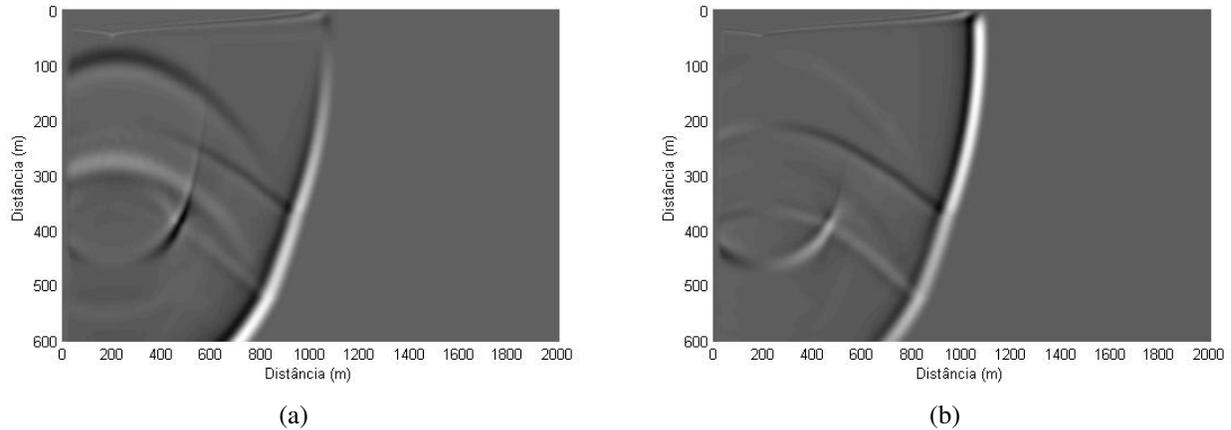


Figura 4.6: Aqui os snapshots 2D representados pelas componentes u_1 dado em (a) e u_3 dado em (b) para $t = 2s$ que inclui ondas refletidas q-P e q-SV.

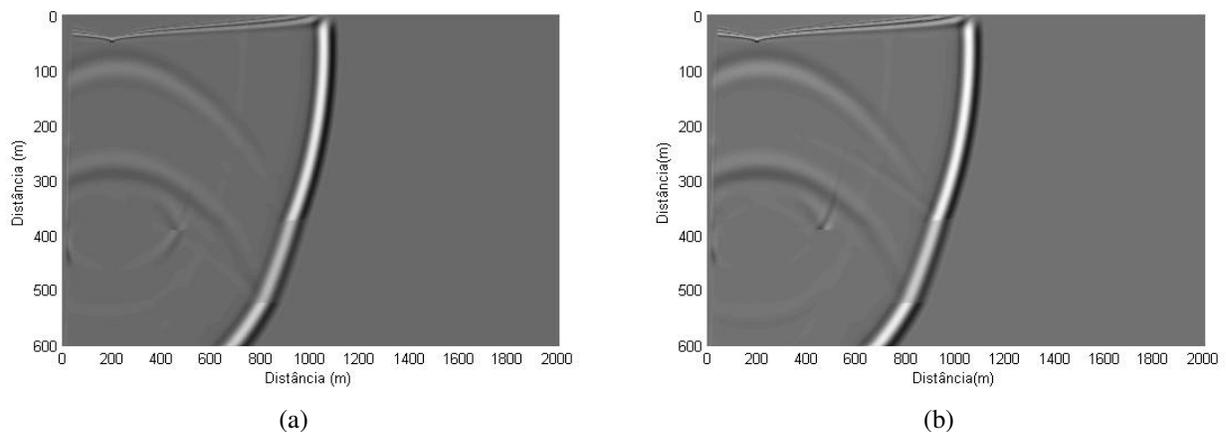


Figura 4.7: Após aplicar (4.85) é possível perceber que mesmo na presença de heterogeneidade existe a supressão das ondas q-SV. A figura em (b) é a do campo de ondas obtido usando o operador isotrópico. A diferença neste caso é mínima mas é possível ver que para as ondas refletidas nossa técnica, que pode ser vista em (a), não deixa nenhum rastro das ondas mais lentas.

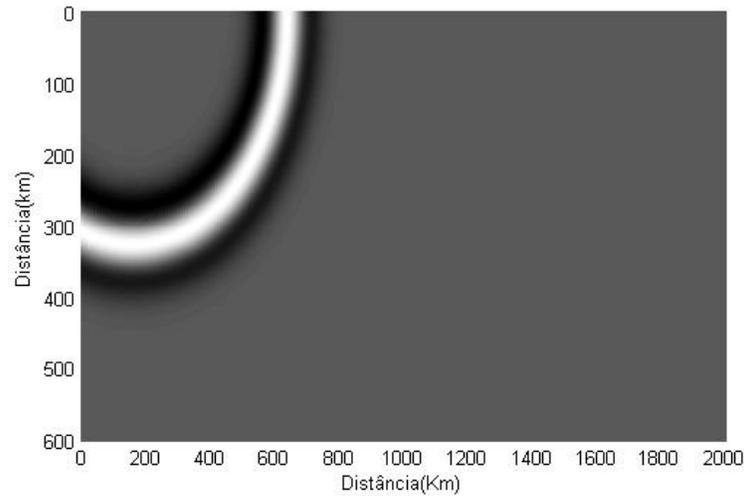


Figura 4.8: Na figura, o campo de onda é referente a um meio elíptico com $\delta = -0.2704$ com velocidade $\alpha = 4000 \text{ m/s}$ no instante de tempo $t = 1.1 \text{ s}$.

meios com tais característica ($\epsilon \approx \delta$) a equação (4.78) pode ser usada para descrever o campo q-P. Outro fato que deve ser ressaltado é que para obter o campo q-P foi necessário o conhecimento do valor do parâmetro δ , o valor de ϵ não foi necessário conhecer.

Este exemplo nos permite estudar como o operador (4.85) funciona em meios heterogêneos. Por exemplo, a Figura 4.6 corresponde a dois snapshots em que ocorrem reflexões, o acoplamento entre as ondas q-P e q-SV se faz notar neste caso. Quando aplicamos (4.85) nestes campos de ondas obtemos o potencial à esquerda da Figura 4.7 que possibilita observar a supressão de ondas mais lentas. Nosso método foi deduzido para meios homogêneos, mas é interessante avaliar os resultados que nosso método obtem na presença de heterogeneidades.

4.7.2 Separação do Modo de Onda q-SV

Nossa técnica permitiu separar com sucesso a onda q-P atenuando a influência da onda q-S usando o operador (4.85). A presente seção nos permite concluir que ao aplicarmos o operador rotacional, assim como é feito no caso isotrópico, a este exemplo não será possível separar completamente o campo de onda q-S. Quando aplicamos o rotacional aos campos u_1 e u_3 representados na Figura 4.4 podemos ver, de acordo com a Figura 4.9, que o campo de onda q-SV é acoplado ao campo q-P, ou seja, possui uma natureza mista incluindo a onda q-S e em menor escala a onda q-P.

Em nosso exemplo sintético 2D não consideramos a influência de γ que na modelagem foi consi-

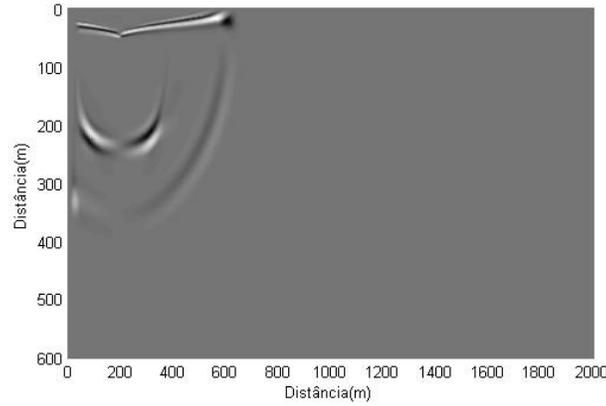


Figura 4.9: A figura mostra o resultado da aplicação do operador $\nabla \times$ aos campos u_1 e u_3 na Figura 4.4. É possível perceber que o campo de onda q-P não foi totalmente suprimido.

derado nulo. Portanto, nossa expressão para o campo de onda \mathbf{u} é dada por

$$\mathbf{u} = \nabla\psi + \widehat{\nabla}\phi + \nabla \times \Psi, \quad (4.86)$$

com

$$\nabla \cdot \Psi = 0. \quad (4.87)$$

Observe que ao aplicarmos o rotacional ao campo \mathbf{u} obtemos

$$\nabla \times \mathbf{u} = \nabla \times \widehat{\nabla}\phi - \Delta\Psi, \quad (4.88)$$

uma vez que

$$\nabla \times \nabla \times \Psi = -\Delta\Psi. \quad (4.89)$$

É evidente, observando a expressão (4.88), que ao aplicarmos o operador rotacional a influência do campo ϕ não irá desaparecer. Isto explica por que o operador rotacional não consegue separar o campo de ondas completamente em um meio VTI. Tal fato também foi observado através de exemplos no trabalho de Yan and Sava (2009). Nossa abordagem permite constatar este fato simplesmente pela inspeção da equação (4.88). Uma vez que temos o conhecimento da forma genérica do campo \mathbf{u} , torna-se muito mais natural a busca por operadores que eliminem a presença do potencial ϕ .

Aplicando o operador $\widehat{\nabla} \cdot$ à equação (4.88) é possível remover completamente o potencial ϕ , tal operação resulta que

$$\widehat{\nabla} \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) = -\widehat{\nabla} \cdot \Delta\Psi, \quad (4.90)$$

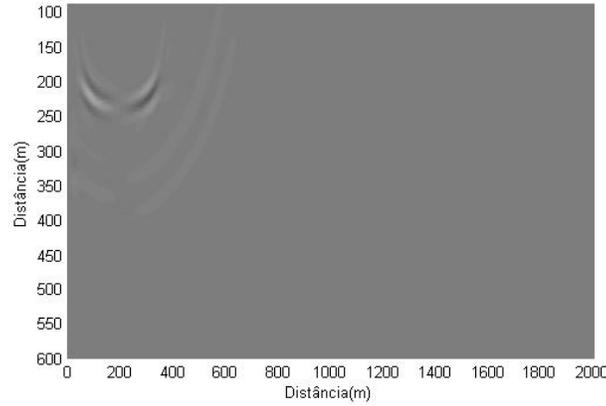


Figura 4.10: A figura mostra o resultado da aplicação do operador (4.93) no campo representado pela Figura 4.9. Como resultado ocorreu uma boa supressão da onda q-P.

pois $\widehat{\nabla} \cdot (\nabla \times \widehat{\nabla} \phi) = 0$.

Como o tempo t não é levado em consideração nestas operações, usamos a definição (4.18) e escrevemos

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi = -\beta^2 \nabla \times \mathbf{u}. \quad (4.91)$$

Segue que

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (\widehat{\nabla} \cdot \Psi) = \beta^2 \Delta (\widehat{\nabla} \cdot \Psi). \quad (4.92)$$

A equação (4.92) tem a forma igual à equação (4.30), portanto a função escalar $\widehat{\nabla} \cdot \Psi$ é solução desta equação e vamos usá-la para representar o campo q-SV definindo o operador

$$\psi_{qSV} = \widehat{\nabla} \cdot (\nabla \times \mathbf{u}). \quad (4.93)$$

Voltando ao exemplo sintético da seção anterior, aplicamos o operador (4.93) no campo de onda da Figura 4.9, o resultado pode ser visto na Figura 4.10 e é possível perceber que o campo q-P foi removido de acordo com o que nossa teoria previu.

4.7.3 Separação do Modo de Onda q-SH

Nosso exemplo sintético impossibilita estudar o caso 3D, mas nossa abordagem indica que podemos definir um operador adicional que pode ser usado para separação do modo de onda q-SH no caso de um meio 3D. Tal operador de acordo com (4.20) pode ser definido como

$$\Phi_{SH} = 2\gamma \widehat{\nabla}^\perp \cdot \mathbf{u}. \quad (4.94)$$

4.8 Comentários

A decomposição de Helmholtz se apresenta como uma alternativa para o estudo da equação (4.1). Após obtermos uma forma mais geral desta decomposição dada por (4.11) foi possível escrever a equação (4.1) em termos de funções potenciais de uma maneira análoga ao caso isotrópico. A técnica apresentada foi derivada para meios VTI homogêneos.

Um outro fato interessante que pode ser concluído em nossa abordagem é que é possível deduzir de uma maneira consistente as relações de dispersão de Alkhalifah (2000). Mostramos que esta relação aparece naturalmente em nossa equação da onda pseudo-acústica unidirecional. Além disso deduzimos de maneira elegante um método conhecido de migração em uma direção. Ao estudar o caso elíptico $\epsilon = \delta$ obtivemos uma solução analítica para este problema por meio da dedução de uma função de Green para meios VTI elípticos.

Finalmente, constatamos que nossa abordagem via decomposição de Helmholtz possibilita a separação dos campos de onda. Conseguimos visualizar por que o operador divergente e rotacional não separam completamente os modos de onda em um meio VTI com anisotropia fraca e como é importante a influência dos parâmetros de anisotropia na separação. Por isso desenvolvemos dois operadores dados por (4.85) e (4.93), estes operadores foram obtidos determinísticamente de acordo com nossa teoria e são válidos para meios homogêneos VTI.

Capítulo 5

Teoria do Raio

Neste capítulo encontramos soluções aproximadas para a equação (3.34) usando uma aproximação assintótica de alta frequência e desta forma obtemos informações sobre a cinemática e a dinâmica do problema. Usando a teoria do raio de ordem zero, podemos observar que a equação (3.19) é suficiente para obter este tipo de solução em meios VTI. Mais detalhes podem ser encontrados em Aki and Richards (1980), Červený (2001) e Pujol (2003).

Uma solução aproximada de ordem zero da equação apresenta vantagens, entre elas a possibilidade de obtenção de informações sobre a cinemática da onda no meio utilizando as equações iconais que representarão as ondas q-P, q-SV e q-SH.

5.1 Equações Iconais

Iniciamos a partir da equação (3.1) desconsiderando o termo de fonte, isto é,

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(c_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \right). \quad (5.1)$$

Vamos considerar uma aproximação para a solução da forma,

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{U}(\mathbf{x})g(t - T(\mathbf{x})), \quad (5.2)$$

ou, no domínio de frequência,

$$\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, \omega) = \mathbf{U}(\mathbf{x})\hat{g}(\omega)e^{-i\omega T(\mathbf{x})}, \quad (5.3)$$

com \mathbf{U} e T sendo funções a serem determinadas de maneira que satisfaçam (5.1). A função $T(x, y, z)$ representa o tempo de trânsito da onda ao longo do raio e a frente de onda é representada por $T(x, y, z) = \text{constante}$. Introduzimos, agora, a condição de que g é maior que $\|\mathbf{U}\|$ e que $\ddot{g} \gg \dot{g} \gg g$

(Pujol, 2003), que corresponde a aproximação de altas frequências. De acordo com Červený (2001) e Aki and Richards (1980) o método de solução para a equação da onda elástica usando aproximações em altas frequências, ou teoria do raio de ordem zero, é confiável quando o comprimento de onda é muito maior que outras quantidades e características do meio relacionadas a unidades de comprimento. Sintetizando de maneira mais simples, a aproximação em altas-frequências, ou teoria do raio de ordem zero, exige que os parâmetros não variem de maneira significativa com a distância e por este motivo esta técnica é funcional somente para meios que não possuem heterogeneidades muito fortes. O método também irá falhar na vizinhança de superfícies que possuem caústicas.

Substituindo a expressão (5.2) na equação (5.1) obtemos o problema de autovalores

$$\mathbf{\Gamma}\mathbf{U} = \mathbf{U}, \quad (5.4)$$

e a matriz de Christoffel $\mathbf{\Gamma}$ possui elementos

$$\Gamma_{ik} = \frac{1}{\rho} c_{ijkl} \frac{\partial T}{\partial x_j} \frac{\partial T}{\partial x_l}. \quad (5.5)$$

Devemos observar que a cinemática do problema depende somente do tensor c_{ijkl} e não de suas derivadas.

Agora, substituímos a expressão (3.19) em (5.5) de modo a obter a matriz de Christoffel para um meio VTI. Inicialmente introduzimos o vetor de vagarosidade \mathbf{p} e o vetor de vagarosidade horizontal $\hat{\mathbf{p}}$, definidos por

$$\mathbf{p} = \nabla T \quad \text{e} \quad \hat{\mathbf{p}} = \hat{\nabla} T. \quad (5.6)$$

Podemos agora, de posse desta notação, escrever os elementos da matriz de Christoffel como

$$\begin{aligned} \Gamma_{11} &= (\alpha^2 - \beta^2)p_1^2 + \beta^2\|\mathbf{p}\|^2 + 2\epsilon\alpha^2p_1^2 + 2\gamma\beta^2p_2^2, \\ \Gamma_{22} &= (\alpha^2 - \beta^2)p_2^2 + \beta^2\|\mathbf{p}\|^2 + 2\epsilon\alpha^2p_2^2 + 2\gamma\beta^2p_1^2, \\ \Gamma_{33} &= (\alpha^2 - \beta^2)p_3^2 + \beta^2\|\mathbf{p}\|^2, \\ \Gamma_{21} &= \Gamma_{12} = (\alpha^2 - \beta^2)p_1p_2 + 2(\epsilon\alpha^2 - \gamma\beta^2)p_1p_2, \\ \Gamma_{31} &= \Gamma_{13} = (\alpha^2 - \beta^2)p_1p_3 + \delta\alpha^2p_1p_3, \\ \Gamma_{32} &= \Gamma_{23} = (\alpha^2 - \beta^2)p_2p_3 + \delta\alpha^2p_2p_3. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Aqui foram usadas as equações (3.11). Além disso, é conveniente notar que a matriz $\mathbf{\Gamma}$ se reduz ao caso isotrópico quando $\epsilon = \delta = \gamma = 0$.

5.1.1 Autovalores Exatos

Em nossa dedução, havíamos linearizado o tensor para um meio VTI apenas em δ e, portanto, ϵ e γ ainda permanecem arbitrários. Desta forma, é interessante calcularmos os autovalores exatos da matriz de Christoffel, que são dados por

$$\Lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left((\alpha^2 + \beta^2) \|\mathbf{p}\|^2 + 2\epsilon\alpha^2 \|\widehat{\mathbf{p}}\|^2 \pm \sqrt{(\alpha^2 - \beta^2)^2 \|\mathbf{p}\|^4 + 4\Pi} \right) \quad (5.8)$$

e

$$\Lambda_3 = \beta^2 \|\mathbf{p}\|^2 + 2\gamma\beta^2 \|\widehat{\mathbf{p}}\|^2, \quad (5.9)$$

com

$$\Pi = \alpha^2 [(\alpha^2 - \beta^2) (\epsilon \|\mathbf{p}\|^2 + 2(\delta - \epsilon)p_3^2) + \alpha^2 (\epsilon^2 \|\widehat{\mathbf{p}}\|^2 + \delta^2 p_3^2)] \|\widehat{\mathbf{p}}\|^2. \quad (5.10)$$

A equação (5.4) condiciona que os autovalores devem ser todos iguais a um. Desta forma, obtemos três diferentes equações iconais, dadas por

$$\alpha^2 \|\mathbf{p}\|^2 + \epsilon\alpha^2 \|\widehat{\mathbf{p}}\|^2 + \Theta = 1, \quad (5.11)$$

$$\beta^2 \|\mathbf{p}\|^2 + \epsilon\alpha^2 \|\widehat{\mathbf{p}}\|^2 - \Theta = 1 \quad (5.12)$$

e

$$\beta^2 \|\mathbf{p}\|^2 + 2\gamma\beta^2 \|\widehat{\mathbf{p}}\|^2 = 1, \quad (5.13)$$

com

$$\Theta = \frac{1}{2} (\alpha^2 - \beta^2) \|\mathbf{p}\|^2 \left[\sqrt{1 + \frac{4\Pi}{(\alpha^2 - \beta^2)^2 \|\mathbf{p}\|^4}} - 1 \right]. \quad (5.14)$$

As equações (5.11)–(5.13) definem o tempo de trânsito das ondas q-P, q-SV e q-SH em um meio heterogêneo VTI. Pode-se perceber que as equações (5.11) e (5.12) não dependem de γ , fato que já havia sido constatado por Tsvankin (1996). As substituições $\|\mathbf{p}\|^2 = 1/V^2$, $p_3^2 = \cos^2 \theta/V^2$, $\|\widehat{\mathbf{p}}\|^2 = \sin^2 \theta/V^2$, com θ e V sendo o ângulo e a velocidade de fase, respectivamente, correspondem as relações de dispersão para a velocidade de fase conhecidas da literatura (Tsvankin (1996)). Observe que as equações acima são válidas para pequenos valores de δ , e para valores arbitrários de ϵ e γ . No caso isotrópico ($\epsilon = \delta = \gamma = 0$) temos $\Pi = 0$ e $\Theta = 0$. Neste caso as equações (5.12) e (5.13) coincidem, descrevendo a junção das ondas q-SV e q-SH.

A partir da equação (5.13) imediatamente reconhecemos o já bem conhecido fato de que a superfície de vagarozidade de ondas q-SH possui a forma de um elipsóide (Tsvankin (2001)), pois elas podem ser escritas como

$$v_h^2 \|\widehat{\mathbf{p}}\|^2 + v_v^2 p_3^2 = 1, \quad (5.15)$$

sendo que $v_v = \beta$ é a velocidade vertical e $v_h = \beta\sqrt{1+2\gamma}$ é a velocidade horizontal. Levando em conta que Θ depende das derivadas do tempo de trânsito, as equações (5.11) e (5.12) são mais difíceis de interpretar. Inicialmente, devemos observar que todas as três equações (5.11), (5.12) e (5.13) podem ser escritas com uma notação comum

$$v^2\|\mathbf{p}\|^2 = 1 - \kappa, \quad (5.16)$$

estabelecendo que v representa a velocidade de fase de cada modo de onda ao longo do eixo de simetria e κ é a correção de anisotropia, dada por

$$\mathbf{q}\text{-P:} \quad \kappa = \epsilon\alpha^2\|\widehat{\mathbf{p}}\|^2 + \Theta, \quad (5.17)$$

$$\mathbf{q}\text{-SV:} \quad \kappa = \epsilon\alpha^2\|\widehat{\mathbf{p}}\|^2 - \Theta \quad \text{e} \quad (5.18)$$

$$\mathbf{q}\text{-SH:} \quad \kappa = 2\gamma\beta^2\|\widehat{\mathbf{p}}\|^2. \quad (5.19)$$

Em outras palavras, as equações iconais em um meio VTI podem ser interpretadas como as equações iconais para o caso isotrópico modificado por um termo de correção de anisotropia κ . Note novamente que para a derivação das equações (5.16) foi requerida somente a condição $|\delta| \ll 1$ (como desde o início assumido). No entanto, estas fórmulas são válidas para valores arbitrários ϵ e γ .

5.1.2 Anisotropia Fraca

Agora aproximamos as equações (5.16) para um meio VTI com anisotropia fraca. Vamos impor, além de $|\delta| \ll 1$, que também $|\epsilon| \ll 1$ e $|\gamma| \ll 1$. A linearização da equação (5.14) em ϵ e δ fornece

$$\Theta \approx \left(\epsilon + 2(\delta - \epsilon)\frac{p_3^2}{\|\mathbf{p}\|^2} \right) \alpha^2\|\widehat{\mathbf{p}}\|^2. \quad (5.20)$$

As derivadas do tempo de trânsito na equação (5.20) dependem somente dos parâmetros de Thomsen de acordo com as equações (5.16). A inspeção das equações (5.17) e (5.18) juntamente com (5.20) revela que em ambos os casos κ não possui termos de ordem-zero nos parâmetros de Thomsen. Além disso, de acordo com as equações (5.16), no termo que multiplica $(\delta - \epsilon)$, podemos usar uma aproximação de ordem zero $\|\mathbf{p}\| \approx 1/v$. Desta forma, obtemos as seguintes aproximações lineares para κ nas equações (5.17) e (5.18):

$$\mathbf{q}\text{-P:} \quad \kappa \approx 2 \left(\epsilon - (\epsilon - \delta)\alpha^2 p_3^2 \right) \alpha^2\|\widehat{\mathbf{p}}\|^2, \quad (5.21)$$

$$\mathbf{q}\text{-SV:} \quad \kappa \approx 2(\epsilon - \delta)\alpha^4 p_3^2\|\widehat{\mathbf{p}}\|^2. \quad (5.22)$$

Na realidade, p_3 também depende de ϵ e δ e, como é múltiplo de $(\delta - \epsilon)$, pode ser aproximado por $p_3^2 \approx 1/v^2 - \|\widehat{\mathbf{p}}\|^2$. Assim, as equações (5.21) e (5.22) são reduzidas a

$$\mathbf{q-P:} \quad \kappa \approx 2 (\delta + (\epsilon - \delta)\alpha^2 \|\widehat{\mathbf{p}}\|^2) \alpha^2 \|\widehat{\mathbf{p}}\|^2, \quad (5.23)$$

$$\mathbf{q-SV:} \quad \kappa \approx 2 \left[(\epsilon - \delta) \frac{\alpha^2}{\beta^2} - (\epsilon - \delta)\alpha^2 \|\widehat{\mathbf{p}}\|^2 \right] \alpha^2 \|\widehat{\mathbf{p}}\|^2. \quad (5.24)$$

Estas aproximações para correção de anisotropia da equação iconal em meios VTI confirmam o bem conhecido fato de que as superfícies de vagarosidade para onda q-P são elipsóides somente em meios elípticamente anisotrópicos ($\epsilon = \delta$). Neste caso, a equação iconal da onda q-P é dada por (5.15) com $v_h = \alpha\sqrt{1 + 2\delta}$ e $v_v = \alpha$.

Para ondas q-SV, no caso elíptico obtemos $\kappa \approx 0$ e, portanto, a equação iconal se reduz ao caso isotrópico, $\|\mathbf{p}\|^2 = 1/\beta^2$. Para um meio geral VTI com $\epsilon \neq \delta$, as superfícies de vagarosidade para ondas q-P e q-SV são quárticas nas coordenadas x e y . As velocidades verticais permanecerão inalteradas.

Para cada equação iconal é possível associar uma equação do transporte correspondente, e desta forma obter a informação sobre a amplitude de cada modo de onda. Desta forma, é possível encontrarmos uma solução aproximada para a equação da onda em um meio heterogêneo VTI. Estudamos as amplitudes mais adiante. Primeiramente, investigamos a solução das equações iconais.

5.1.3 Solução das Equações Iconais Linearizadas

Podemos escrever as equações iconais (5.16) com κ dado por (5.19), (5.21) e (5.22) em uma notação comum

$$v^2 \left(\|\mathbf{p}\|^2 + 2\xi \|\widehat{\mathbf{p}}\|^2 + 2\zeta \alpha^2 p_3^2 \|\widehat{\mathbf{p}}\|^2 \right) = 1, \quad (5.25)$$

sendo que v representa a velocidade vertical das ondas q-P ou q-SV e os parâmetros adimensionais ξ e ζ descrevem a anisotropia. Temos então,

$$\mathbf{q-P:} \quad v = \alpha, \quad \xi = \epsilon, \quad \zeta = \delta - \epsilon, \quad (5.26)$$

$$\mathbf{q-SV:} \quad v = \beta, \quad \xi = 0, \quad \zeta = \epsilon - \delta, \quad (5.27)$$

$$\mathbf{q-SH:} \quad v = \beta, \quad \xi = \gamma, \quad \zeta = 0. \quad (5.28)$$

Agora que possuímos uma forma compacta de representar as equações iconais para as ondas q-P, q-SV e q-SH, vamos resolver a equação (5.25). Para isso, usaremos o método das características (ver

Apêndice B). Primeiramente, reescrevemos a equação (5.25) na forma

$$H(\mathbf{x}, T, \mathbf{p}) = 0, \quad (5.29)$$

com o Hamiltoniano H dado por

$$H(\mathbf{x}, T, \mathbf{p}) = \frac{v^2}{2} \left[\|\mathbf{p}\|^2 + 2\xi \|\widehat{\mathbf{p}}\|^2 + 2\zeta \alpha^2 p_3^2 \|\widehat{\mathbf{p}}\|^2 \right] - \frac{1}{2}. \quad (5.30)$$

O método das características estabelece as seguintes equações diferenciais,

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} = v^2 \left[\mathbf{p} + 2\xi \widehat{\mathbf{p}} + 2\zeta \alpha^2 p_3 \begin{pmatrix} p_1 p_3 \\ p_2 p_3 \\ \|\widehat{\mathbf{p}}\|^2 \end{pmatrix} \right], \quad (5.31)$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} = -v \nabla v \|\mathbf{p}\|^2 - \nabla(\xi v^2) \|\widehat{\mathbf{p}}\|^2 - \nabla(\zeta v^2 \alpha^2) p_3^2 \|\widehat{\mathbf{p}}\|^2, \quad (5.32)$$

e

$$\frac{dT}{d\tau} = p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} = v^2 \left[\|\mathbf{p}\|^2 + 2\xi \|\widehat{\mathbf{p}}\|^2 + 4\zeta \alpha^2 p_3^2 \|\widehat{\mathbf{p}}\|^2 \right] = 1. \quad (5.33)$$

Estas equações permitem encontrar a solução da equação (5.25) ao longo de suas características, denominadas raios. A equação (5.31) estabelece a posição \mathbf{x} em um certo raio, em função do tempo de trânsito $\tau = T(\mathbf{x})$ e a equação (5.32) determina o respectivo vetor vagarosidade, $\mathbf{p}(\mathbf{x})$. O sistema formado por estas equações pode ser resolvido usando condições iniciais apropriadas.

5.2 Simplificação da Equação de Transporte

A equação de transporte para as ondas q-P, q-SH e q-SV em um meio elástico arbitrário é dada por (Pujol (2003))

$$\frac{\partial c_{ijkl}}{\partial x_j} U_k \frac{\partial T}{\partial x_l} + c_{ijkl} \frac{\partial c_{ijkl}}{\partial x_j} \frac{\partial T}{\partial x_l} + c_{ijkl} U_k \frac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_k} + c_{ijkl} \frac{\partial U_k}{\partial x_l} \frac{\partial T}{\partial x_j} = 0, \quad (5.34)$$

que pode ser escrita de uma forma mais compacta como

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(c_{ijkl} U_k U_i \frac{\partial T}{\partial x_l} \right) = 0. \quad (5.35)$$

A utilização da aproximação (3.19) na equação (5.35) possibilitará a obtenção da equação geral do transporte para um meio VTI com anisotropia fraca. Esta dedução segue o procedimento para um

meio isotrópico como detalhado em Pujol (2003).

Iniciando pelas equações (5.4) e (5.5), temos

$$c_{ijkl}p_j p_l U_k = \rho \Lambda U_i, \quad (5.36)$$

com Λ representando os autovalores da matriz de Christoffel. Para um meio heterogêneo VTI elástico, os autovalores Λ são dados pela equação eikonal aproximada (5.25) e $p_m = \partial T / \partial x_m$. Neste caso, pegando as derivadas da equação (5.36) em relação a p_m obtemos

$$c_{ijkl}(\delta_{lm}p_j + \delta_{jm}p_l)U_k + c_{ijkl}p_j p_l \frac{\partial U_k}{\partial p_m} = \rho \frac{\partial \Lambda}{\partial p_m} U_i + \rho \Lambda \frac{\partial U_i}{\partial p_m}, \quad (5.37)$$

com δ_{ij} representando símbolo de Kronecker que não deve ser confundido com o parâmetro de anisotropia δ . Multiplicando o segundo termo do lado esquerdo da equação (5.37) com U_i e somando sobre i obtemos

$$c_{ijkl}p_j p_l \frac{\partial U_k}{\partial p_m} U_i = c_{klij}p_j p_l \frac{\partial U_i}{\partial p_m} U_k = \rho \Lambda \frac{\partial U_i}{\partial p_m} U_i, \quad (5.38)$$

aqui utilizamos a mudança de índices $i \leftrightarrow k$, $j \rightarrow l$, e a simetria $c_{klim} = c_{imkl}$. Multiplicando o primeiro termo do lado esquerdo da equação (5.37) por U_i e somando sobre i temos, por meio da mudança de índices $i \leftrightarrow k$ e $j \leftrightarrow l$, obtemos

$$\begin{aligned} c_{ijkl}(\delta_{lm}p_j + \delta_{jm}p_l)U_i U_k &= (c_{ijkm}p_j + c_{imkl}p_l)U_i U_k \\ &= (c_{klim}p_l + c_{imkl}p_l)U_i U_k = 2c_{imkl}p_l U_i U_k. \end{aligned} \quad (5.39)$$

Juntando os resultados (5.38) e (5.39), a multiplicação da equação (5.37) por U_i e a sua subsequente soma em i garante que

$$c_{ijkl}U_i U_k p_l = \frac{\rho}{2} \|\mathbf{U}\|^2 \frac{\partial \Lambda}{\partial p_j}. \quad (5.40)$$

Portanto,

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(c_{ijkl}U_i U_k p_l \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\rho}{2} \|\mathbf{U}\|^2 \frac{\partial \Lambda}{\partial p_j} \right) = \nabla \cdot \left(\frac{\rho}{2} \|\mathbf{U}\|^2 \nabla_{\mathbf{p}} \Lambda \right), \quad (5.41)$$

o que implica que a equação de transporte (5.35) em um meio elástico VTI qualquer pode ser escrita como

$$\nabla \cdot \left(\frac{\rho}{2} \|\mathbf{U}\|^2 \nabla_{\mathbf{p}} \Lambda \right) = 0. \quad (5.42)$$

Para um meio VTI com anisotropia fraca, as derivadas dos autovalores podem ser calculadas da

mesma forma para os três tipos de onda usando a equação (5.25). Elas são dadas por

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial p_m} = 2v^2 p_m + 4\xi v^2 (\delta_{1m} p_1 + \delta_{2m} p_2) + 4\zeta \alpha^2 v^2 p_m [\delta_{m3} \|\hat{\mathbf{p}}\| + (\delta_{m1} + \delta_{m2}) p_3^2], \quad (5.43)$$

ou, em uma forma vetorial [veja a equação(5.31)],

$$\nabla_{\mathbf{p}} \Lambda = 2v^2 \left[\mathbf{p} + 2\xi \hat{\mathbf{p}} + 2\zeta \alpha^2 p_3 \begin{pmatrix} p_1 p_3 \\ p_2 p_3 \\ \|\hat{\mathbf{p}}\|^2 \end{pmatrix} \right]. \quad (5.44)$$

Substituindo a equação acima em (5.42) temos

$$\nabla \cdot (\rho v^2 \|\mathbf{U}\|^2 [\mathbf{I} + 2\boldsymbol{\Xi}] \mathbf{p}) = 0, \quad (5.45)$$

sendo que \mathbf{I} é a matriz identidade de ordem 3 e $\boldsymbol{\Xi}$ é a matriz de correção de anisotropia dada por

$$\boldsymbol{\Xi} = \begin{pmatrix} \xi + \zeta \alpha^2 p_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & \xi + \zeta \alpha^2 p_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta \alpha^2 \|\hat{\mathbf{p}}\|^2 \end{pmatrix}. \quad (5.46)$$

Esta é a equação geral do transporte e podemos usar a teoria do raio Jacobiano como no caso isotrópico. Seja Σ uma superfície fechada suave como mostrada na figura (5.1) e \mathbf{n} um vetor normal a ela. Usando o Teorema de Gauss e a equação (5.45) temos,

$$\iint_{\Sigma} \rho v^2 \|\mathbf{U}\|^2 [\mathbf{I} + 2\boldsymbol{\Xi}] \mathbf{p} \cdot \mathbf{n} \, d\Sigma = 0. \quad (5.47)$$

Podemos desta forma concluir que se a amplitude $\|\mathbf{U}\|$ é conhecida em um dado ponto, então podemos determinar a amplitude em qualquer outro ponto após o cálculo em uma determinada seção de área de uma forma análoga ao que é feito no caso isotrópico.

5.3 Caso Pseudo-Acústico

Em um meio isotrópico ($\epsilon = \delta = \gamma = 0$) no caso acústico ($\mu = 0$ and $\beta = 0$), não existe propagação de onda S, pelo fato de que os autovalores correspondentes $\Lambda_{2,3}$ nas equações (5.8) e (5.9) são nulos. Para muitos propósitos, é vantajoso estudar um meio VTI análogo ao caso acústico denominado pseudo-acústico. Neste caso, semelhantemente ao caso isotrópico o parâmetro de cisalhamento

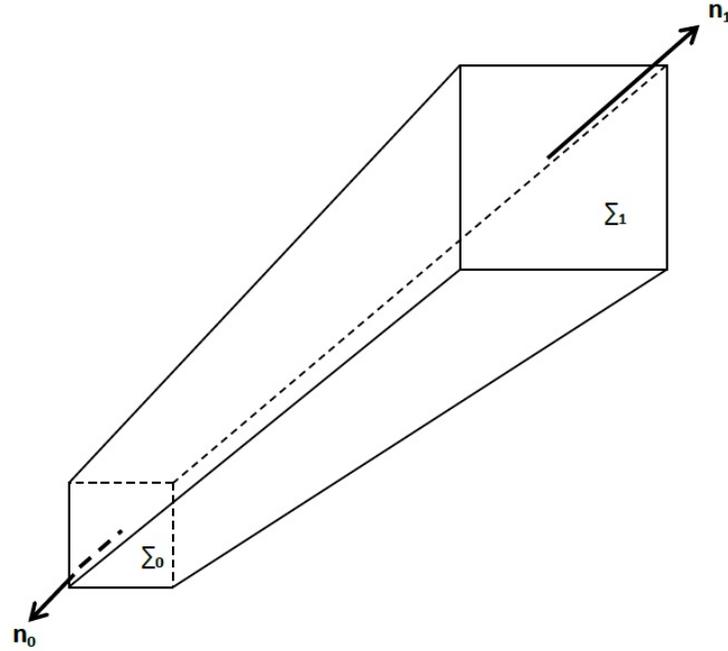


Figura 5.1: Tubo do raio usado para derivar aproximações para as amplitudes. As superfícies Σ_0 e Σ_1 são partes de frentes de onda nos instantes t_0 e t_1 (reproduzido de Pujol, 2003).

μ será nulo. No entanto, esta condição em nada afeta os valores dos parâmetros de Thomsen.

Alkhalifah (2000) derivou a equação iconal e da onda para um meio pseudo-acústico VTI a partir de relações de dispersão da propagação de ondas q-P. Duveneck et al. (2008) substituiu a condição pseudo-acústica $c_{55} = 0$ diretamente na equação (3.4) e derivou um sistema acoplado de equações a partir disto. Em nosso trabalho iniciamos por meio da linearização da equação (3.4) com uma condição de anisotropia fraca no parâmetro δ . Não é difícil verificar que a matriz linearizada (3.19) com $\mu = 0$ corresponde a linearização da matriz (3.4) no caso pseudo-acústico descrito por Duveneck et al. (2008).

Vamos iniciar a partir das representações exatas (5.8) e (5.9) dos autovalores da matriz de Christoffel (5.7) para a matriz de stiffness linearizada (3.19). Para $\beta = 0$ e após a linearização em δ , escrevemos

$$\Lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(a \pm \sqrt{a^2 + b}), \quad \text{and} \quad \Lambda_3 = 0, \quad (5.48)$$

com

$$a = \alpha^2 \|\mathbf{p}\|^2 + 2\epsilon\alpha^2 \|\widehat{\mathbf{p}}\|^2, \quad \text{e} \quad b = 8\alpha^4(\delta - \epsilon)p_3^2 \|\widehat{\mathbf{p}}\|^2. \quad (5.49)$$

Observe que as equações (5.48) e (5.49) não dependem de γ , portanto os valores de γ em nada influenciam o caso pseudo-acústico. Como já mencionado anteriormente os autovalores de (5.48)

precisam ser iguais a um para descrever a propagação das ondas q-P, q-SV e q-SH em um meio pseudo-acústico VTI. A seguir analisaremos estas ondas com mais detalhes.

5.3.1 Propagação de Ondas q-P

Começaremos com a descrição de ondas q-P em meios pseudo-acústicos VTI. A condição $\Lambda_1 = 1$ somente pode ser satisfeita para reais a e b se e somente se $a \leq 2$ e

$$a + \frac{b}{4} = 1. \quad (5.50)$$

Tomando a e b das equações (5.49) conseguimos obter a equação iconal para onda q-P em um meio pseudo-acústico VTI,

$$(1 + 2\epsilon)\alpha^2\|\hat{\mathbf{p}}\|^2 + \left(1 - 2\alpha^2(\epsilon - \delta)\alpha^2\|\hat{\mathbf{p}}\|^2\right)\alpha^2 p_3^2 = 1. \quad (5.51)$$

Observe que a equação (5.51) é linearizada somente em δ e é válida para valores arbitrários de ϵ . A mesma equação é obtida quando substituímos a expressão linearizada (5.21) com $\beta = 0$ na equação (5.16).

Em termos de velocidade NMO para um refletor horizontal dada pela equação (4.70) e do coeficiente anisotrópico (4.67), podemos escrever (5.51) da seguinte forma

$$(1 + 2\eta)V_{NMO}^2\|\hat{\mathbf{p}}\|^2 + \left(1 - 2\eta V_{NMO}^2\|\hat{\mathbf{p}}\|^2\right)\alpha^2 p_3^2 = 1. \quad (5.52)$$

Esta é exatamente a equação deduzida por Alkhalifah (2000) usando relações de dispersão para ondas q-P.

5.3.2 Propagação de Ondas Pseudo-SV

Agora nos concentraremos em estudar a possibilidade da existência de ondas S em um meio pseudo-acústico VTI. Podemos observar com bastante clareza da equação (5.48), que $\Lambda_3 = 1$ não pode ser satisfeito, ou seja, que a propagação de ondas SH não é possível. No entanto, a situação é menos clara para o caso Λ_2 . Podemos ver da equação (5.49) que para um meio elíptico anisotrópico com $\epsilon = \delta$, temos $b = 0$, que implica $\Lambda_2 = 0$ e desta forma, não existe onda SV para estes tipos de meio. Para $\delta > \epsilon$ temos $b > 0$, que torna a raiz quadrada na equação (5.49) maior que a e desta forma $\Lambda_2 < 0$, novamente, não existirá propagação de onda SV para este caso. No entanto, para $0 > b \geq -a^2$, a condição $\Lambda_2 = 1$ pode ser satisfeita. De acordo com Alkhalifah (2000) e também por Grechka et al. (2004), nos referimos a esta onda que se propaga como onda pseudo-S.

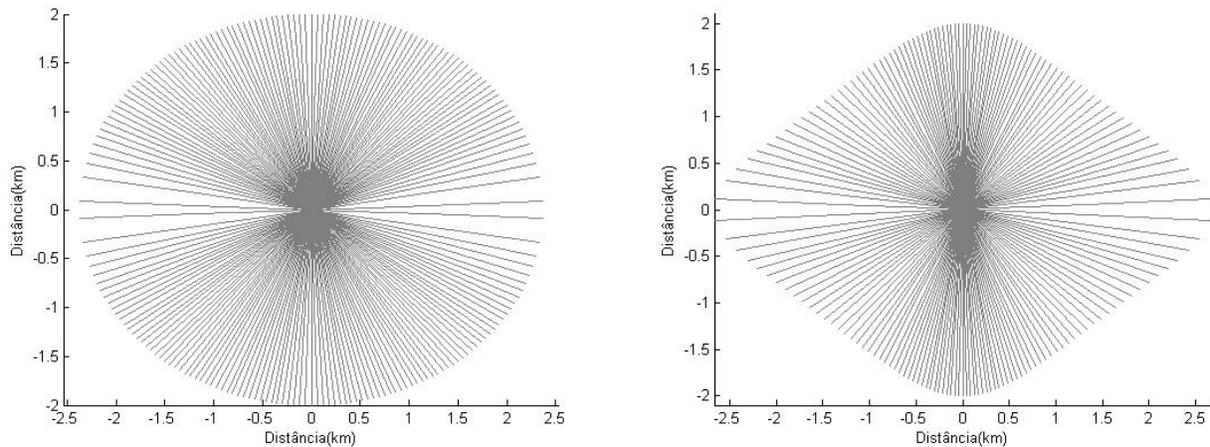


Figura 5.2: A frente de onda q-P em um meio pseudo-acústico obtido pelo traçamento de raios (linhas cinzas) usando o sistema (5.31–5.33). Esquerda: $\delta = \epsilon = 0.2$ neste caso a frente de onda possui a forma de uma elipse. Direita: $\delta = 0.01$ e $\epsilon = 0.4$.

Para analisar a propagação desta onda pseudo-S, devemos notar que a condição $\Lambda_2 = 1$ somente pode ser satisfeita para valores reais a e b se $a \geq 2$. Isto implica uma velocidade de propagação muito baixa da onda pseudo-S. Se a condição $a \geq 2$ é satisfeita, a onda pseudo-S precisa satisfazer a mesma equação iconal (5.51), ou então (5.52), que a onda q-P. Esta conclusão coincide com a observação feita por Amazonas et al. (2010), a qual diz que a existência da onda pseudo-S ocorre devido ao fato de que as relações de dispersão da equação (5.51) tornam-se reais para propagações com ângulos muito grandes ou velocidades de propagação muito baixas.

Como um exemplo, as figuras 5.2 e 5.3 mostram raios e frentes de onda q-P em um meio pseudo-acústico homogêneo obtido usando o traçamento do raio (linhas cinzas) usando o sistema (5.31–5.33) para dois casos de meios VTI com anisotropia fraca e outro onde os parâmetros de anisotropia são nulos (meio isotrópico).

5.4 Comentários

Neste ponto, as vantagens de nossa abordagem ficam evidentes se comparadas aos métodos que derivam a equação da onda e as equações eikonais a partir de relações de dispersão. Além disso, provamos que a onda q-P e a onda pseudo-S são descritas pela mesma equação eiconal (5.51) e que a última existe somente se $\eta > 0$. Em nossa abordagem fica muito claro que a equação eiconal (5.51), ou sua versão alternativa (5.52) devida a Alkhalifah (2000), é válida para pequenos valores de δ e para valores arbitrários de ϵ e γ . Adicionalmente a este processo, derivamos o sistema de traçamento do raio (5.31–5.33) que nos permite traçar raios em um meio fracamente anisotrópico VTI.

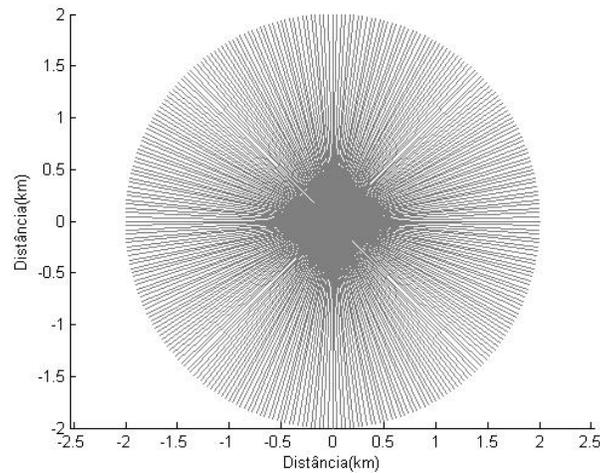


Figura 5.3: A frente de onda q-P em um meio pseudo-acústico obtido pelo traçamento de raios (linhas cinzas) usando o sistema (5.31–5.33). $\delta = \epsilon = 0$ que representa o caso isotrópico e podemos perceber que a frente de onda é circular.

Por fim, como temos em mãos a equação geral do transporte, podemos determinar aproximadamente o valor da amplitude não somente de ondas q-P, mas também das ondas pseudo-S utilizando a equação (5.45) com $\beta = 0$.

Pestana et al. (2011) derivou equações independentes para as ondas q-P e q-SV usando as relações de dispersão de Tsvankin (1996). Eles chegaram a mesma conclusão de Fei and Liner (2008), que em um meio VTI com $\epsilon \approx \delta$ podemos usar a onda acústica quasi-P livre da influência da onda q-SV. Em nosso trabalho estas conclusões surgem naturalmente e podem ser concluídas diretamente dos autovalores da matriz de Christoffel. Nossa derivação mostrou que não existe onda q-SV em um meio elíptico com $\epsilon = \delta$ ou em um meio VTI com $\eta \leq 0$.

Capítulo 6

Conclusão

Diante de uma efetiva carência na literatura de um estudo consistente, do ponto de vista analítico, da equação que descreve a propagação de uma onda em um meio fracamente anisotrópico VTI, deduzimos neste trabalho uma equação da onda para tal meio. Em nossa abordagem usamos o tensor responsável pelas propriedades do material c_{ijkl} substituindo suas componentes por uma combinação dos parâmetros de anisotropia de Thomsen com os parâmetros elásticos de Lamé. Para isso fizemos a aproximação de anisotropia fraca em relação ao parâmetro δ diretamente na expressão do tensor e utilizando esta forma foi possível deduzir um sistema de equações diferenciais parciais cuja solução é o vetor de posição da onda \mathbf{u} , excitada por uma fonte \mathbf{f} , que se propaga neste meio. O resultado é que obtivemos uma equação que descreve a propagação da onda que está escrita em termos somente dos parâmetros de Thomsen e Lamé. Esta equação tem uma forma mais elegante que quando a escrevemos em termos somente dos parâmetros elásticos.

Uma importante conclusão é que as equações deduzidas para o meio pseudo-acústico não assumem a hipótese $\beta = 0$. A validade destas equações é garantida pelas relações de dispersão que são equivalentes as obtidas quando assumimos o meio com $\beta = 0$. Isso possibilita estudar a propagação da onda quasi-P em um meio elástico anisotrópico fracamente VTI sem assumir a hipótese de que o meio possui o módulo de cisalhamento nulo ($\mu = 0$). Ou seja, deduzimos a equação da onda pseudo-acústica sem a imposição de que o meio é um fluido e do ponto de vista da Física do problema isto é importante uma vez que não existem meios anisotrópicos acústicos e isto inclui os meios VTI.

O uso da decomposição de Helmholtz para resolver a equação elástica VTI que deduzimos mostrou-se bastante funcional, nossa modificação desta decomposição possibilita visualizar de uma maneira analítica o por que não podemos usar os operadores de divergência e rotacional para obter a separação dos campos de onda q-P e q-SV em um meio VTI. Também foi possível, usando esta decomposição, estabelecer de uma forma determinística operadores que podem ser usados para a separação dos modos de onda em tais meios.

Nossa abordagem sugere um modo confiável de se realizar migração em uma direção para meios VTI elásticos. Nossas fórmulas são generalizações do caso isotrópico e possuem um aspecto didático relevante uma vez que podemos agora começar o estudo pelo caso mais geral VTI e considerar o caso isotrópico particularmente.

Por fim, as ideias expostas no presente trabalho possibilitam investigações futuras, nos podemos usar a teoria do Capítulo 4 em Migração Reversa no Tempo, uma vez que podemos estudar a propagações das ondas quasi-P e quasi-SV independentemente com o uso de termos de fontes apropriados. A equação geral do transporte derivada no Capítulo 5 pode ser usada como ponto de partida para estudos referentes a espalhamento geométrico em meios VTI e polarização de ondas em um meio fracamente VTI. Além disso, as técnicas desenvolvidas nesta tese, que são derivações de formas explícitas e funcionais para descrever a equação da onda em meios que possuem anisotropias, podem ser expandidas para meios HTI e TTI.

Referências Bibliográficas

- Adams, R. A. (1975). *Sobolev Spaces*. Academic Press., New York.
- Aki, K. and Richards, P. G. (1980). *Quantitative Seismology – Vol. 1: Theory and Methods*. W. H. Freeman, New York. (Second Edition: 2002).
- Alkhalifah, T. (2000). An acoustic wave equation for anisotropic media. *Geophysics*, 65(4):1239–1250.
- Amazonas, D., Aleixo, R., Schleicher, J., and Costa, J. C. (2010). Anisotropic complex Padé hybrid finite-difference depth migration. *Geophysics*, 75(2):S51–S59.
- Bleistein, N. (1984). *Mathematical Methods for Wave Phenomena*. Academic Press, INC., Orlando, Florida.
- Červený, V. (1972). Seismic rays and ray intensities in inhomogeneous anisotropic media. *Geophys. J. R. astr. Soc.*, 29:1–13.
- Červený, V. (2001). *Seismic Ray Theory*. Cambridge University Press.
- Coates, R. T. and Chapman, C. H. (1990). Quasi-shear wave coupling in weakly anisotropic 3D media. *Geophysics*, 103:301–320.
- Cohen, J. (1996). Analytic study of the effective parameters for determination of the NMO velocity function in transversely isotropic media. Technical Report CWP, Colorado School of Mines, **CWP-191**.
- Dancer, E. N. and Sweers, G. (1989). On the existence of maximal weak solution for a semilinear elliptic equation. *Differential and Integral Equations*, 2:533–540.
- de Figueiredo, D. G., Girardi, M., and Matzeu, M. (2004). Semilinear elliptic equations with dependence on the gradient via mountain-pass techniques. *Differential and Integral Equations*, 17:119–126.
- de Figueiredo, J. J. S., Schleicher, J., Stewart, R. R., and Dyaur, N. (2012). Estimating fracture orientation from elastic-wave propagation: An ultrasonic experimental approach. *Journal of Geophysical Research*, 117:B08304.
- Dellinger, J. and Etgen, J. (1990). Wave-field separation in two-dimensional anisotropic media(short note). *Geophysics*, 55:914–919.

- Dellinger, J. and Muir, F. (1988). Imaging reflections in elliptically anisotropic media (short note). *Geophysics*, 53(12):1616–1618.
- Duveneck, E., Milcik, P., Bakker, P. M., and Perkins, C. (2008). Acoustic VTI wave equations and their application for anisotropic reverse-time migration. In *78th Ann. Internat. Meeting, SEG, Expanded Abstracts*, pages 2186–2190.
- Fei, T. W. and Liner, C. L. (2008). Hybrid Fourier finite-difference 3D depth migration for anisotropic media. *Geophysics*, 73(2):S27–S34.
- Grechka, V., Zhang, L., and Rector III, J. W. (2004). Shear waves in acoustic anisotropic media. *Geophysics*, 69(2):576–582.
- Helbig, K. (1983). Elliptical anisotropy—its significance and meaning. *Geophysics*, 48:825–832.
- Liu, Y. and Sen, M. K. (2010). Acoustic VTI modeling with a time-space domain dispersion-relation-based finite-difference scheme. *Geophysics*, 75(3):A11–A17.
- Pestana, R. C., Ursin, B., and Stoffa, P. L. (2011). Separate P- and SV-wave equations for VTI media. In *81st Ann. Internat. Meeting, SEG, Expanded Abstracts*, pages 163–167.
- Pujol, J. (2003). *Elastic wave propagation and generation in seismology*. Cambridge University Press.
- Thomsen, L. (1986). Weak elastic anisotropy. *Geophysics*, 51:1954–1966.
- Tsvankin, I. (1996). P-wave signatures and notation for transversely isotropic media: An overview. *Geophysics*, 61:467–483.
- Tsvankin, I. (2001). *Seismic signatures and analysis of reflection data in anisotropic media*. Pergamon Press.
- Yan, J. and Sava, P. (2009). Elastic wave-mode separation for VTI media. *Geophysics*, 74:WB19–WB32.

Apêndice A: Solução de Lamé para o Caso Isotrópico Elástico

Apresentamos a demonstração da solução de Lamé para a equação da onda elástica 3D em um meio isotrópico homogêneo,

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{u} = \frac{1}{\rho} \mathbf{f} + \alpha^2 \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) - \beta^2 \nabla \times \nabla \times \mathbf{u}, \quad (1)$$

coma as condições iniciais

$$\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{0} \quad \text{e} \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{0}. \quad (2)$$

Esta demonstração pode ser encontrada em Pujol (2003) e Aki and Richards (1980). Já foi mencionado no Capítulo 3 que as quantidades α e β representam as velocidades das ondas P e S respectivamente. Além disso, o teorema de Helmholtz garante que existe um potencial escalar ϕ_f e um potencial vetorial Ψ_f tais que o termo de fonte \mathbf{f} pode ser escrito como

$$\mathbf{f} = \nabla \phi_f + \nabla \Psi_f \quad \text{com} \quad \nabla \cdot \Psi_f = 0. \quad (3)$$

Vamos verificar então que \mathbf{u} é dado por

$$\mathbf{u} = \nabla \phi + \nabla \times \Psi, \quad (4)$$

sendo que ϕ e Ψ são tais que

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi = \alpha^2 \Delta \phi + \frac{1}{\rho} \phi_f, \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi = \beta^2 \Delta \Psi + \frac{1}{\rho} \Psi_f \quad (6)$$

e

$$\nabla \cdot \Psi = 0. \quad (7)$$

Integrando (1) duas vezes em relação ao tempo t , obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \alpha^2 \nabla \int_0^t d\tau \int_0^\tau \nabla \cdot \mathbf{u} d\tau' - \beta^2 \nabla \times \int_0^t d\tau \int_0^\tau \nabla \times \mathbf{u} d\tau' \\ &+ \nabla \int_0^t d\tau \int_0^\tau \frac{\phi_f}{\rho} d\tau' + \nabla \times \int_0^t d\tau \int_0^\tau \frac{\Psi_f}{\rho} d\tau'. \end{aligned} \quad (8)$$

Definindo os potenciais ϕ e Ψ da forma abaixo

$$\phi = \alpha^2 \int_0^t \int_0^\tau \left[\nabla \cdot \mathbf{u} + \frac{\phi_f}{\rho\alpha^2} \right] d\tau' d\tau \quad (9)$$

$$\Psi = -\beta^2 \int_0^t \int_0^\tau \left[\nabla \times \mathbf{u} - \frac{\Psi_f}{\rho\beta^2} \right] d\tau' d\tau, \quad (10)$$

conseguimos garantir que \mathbf{u} pode ser escrito na forma (4) e, usando (10) e (3), temos que a função Ψ satisfaz (7). Derivando (9) e (10) duas vezes em relação ao tempo obtemos

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi = \alpha^2 \nabla \cdot \mathbf{u} + \frac{\phi_f}{\rho} \quad (11)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi = -\beta^2 \nabla \times \mathbf{u} + \frac{\Psi_f}{\rho} \quad (12)$$

Aplicamos o operador divergente na equação elástica e assim obtemos a equação

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla \cdot \mathbf{u} = \alpha^2 \Delta (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \Delta \left(\frac{\phi_f}{\rho} \right), \quad (13)$$

e integrando duas vezes em relação a t segue que

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \Delta \left(\alpha^2 \int_0^t \int_0^\tau \left[\nabla \cdot \mathbf{u} + \frac{\phi_f}{\rho\alpha^2} \right] d\tau' d\tau \right). \quad (14)$$

Usando a definição (9) vemos que

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \Delta \phi \quad (15)$$

e, portanto, (11) se reduz a (5). Agora, aplicando o operador rotacional em (1) obtemos

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla \times \mathbf{u} = \beta^2 \Delta (\nabla \times \mathbf{u}) - \Delta \left(\frac{\Psi_f}{\rho} \right), \quad (16)$$

integrando, também, duas vezes em relação a t obtemos

$$\nabla \times \mathbf{u} = -\Delta \left(-\beta^2 \int_0^t \int_0^\tau \left[\nabla \times \mathbf{u} - \frac{\Psi_f}{\rho\beta^2} \right] d\tau' d\tau \right) \quad (17)$$

e desta forma

$$\nabla \times \mathbf{u} = -\Delta \Psi, \quad (18)$$

garantindo que (12) se reduz a (6). Este teorema modifica um problema complicado em dois outros problemas mais simples. Do ponto de vista do fenômeno de onda significa que podemos estudar cada modo de onda independentemente.

Apêndice B: Método das Características

Neste Apêndice fazemos uma descrição bastante resumida do método das características visando auxiliar o leitor ainda não familiarizado com este método. Optamos, seguindo Bleistein (1984), pela demonstração para uma equação diferencial parcial em duas variáveis principalmente pelo seu apelo geométrico e didático. O presente Apêndice pode ser generalizado para três variáveis e sua versão em 3D pode ser encontrada em Pujol (2003) e Červený (2001). A demonstração feita neste Apêndice foi baseada em Bleistein (1984) e pode ser encontrada neste livro, nesta referência existe uma demonstração do método das características no caso n .

Considere uma função de duas variáveis $u = u(x, y)$ e nosso objetivo é representar a solução de uma equação diferencial parcial de primeira ordem como uma superfície no espaço 3D, ou equivalentemente por curvas de nível em um plano. As duas representações possibilitam o estabelecimento de métodos para obtenção de soluções para EDP's de primeira ordem lineares ou não.

Vamos, inicialmente, considerar a equação

$$a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y = c(x, y, u). \quad (19)$$

Quando as funções a e b são independentes de u e a função c é linear em u dizemos que (19) é uma equação linear de primeira ordem em u . Caso contrário dizemos que a equação é quasi-linear. Para incrementos ao longo da superfície solução temos

$$u_x dx + u_y dy = du, \quad (20)$$

e esta equação possibilita visualizar que o vetor normal $(u_x, u_y, -1)$ é perpendicular em cada ponto a qualquer vetor tangente (dx, dy, du) à superfície solução. A comparação de (19) e (20) sugere que podemos expressar a solução como uma família de curvas nas quais a direção da tangente a cada uma destas curvas é dada por (a, b, c) . Estas curvas são denominadas curvas características e desta forma, a solução de curvas características é dada por

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{du}{c}. \quad (21)$$

Quando pensamos na superfície solução u como uma família de curvas de nível no plano, estas curvas são na realidade projeções no plano das curvas características que compõem u . Tais curvas de nível são denominadas base de curvas características, e algumas vezes são chamadas até mesmo de curvas características podendo, no entanto esta convenção causar confusão. Na realidade podemos

separar a equação (21) em outras duas e escrevê-las como

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a}, \quad \frac{du}{dx} = \frac{c}{a}. \quad (22)$$

Se atribuirmos dois valores iniciais a y e u , podemos encontrar uma curva solução com y e u escritos em função de x e outros dois valores iniciais. Tais valores serão denominados de parâmetros e ao fazermos variar estes parâmetros podemos obter outras curvas soluções para o par de equações dadas em (22). A superfície solução consiste de um subconjunto de um único parâmetro desta família de curvas que possuem dois parâmetros. Vamos supor de forma mais geral que procuramos uma superfície solução que passa pelas curvas

$$x = x_o(\tau), \quad y = y_o(\tau), \quad u = u_o(\tau) \quad (23)$$

e desta forma a superfície solução irá depender de um único parâmetro.

Afim de facilitar a solução de (21), introduzimos um novo parâmetro σ ao longo da curva característica. Levando em consideração as afirmações a respeito de (a, b, c) e (x, y, u) fica claro que existe um parâmetro λ tal que

$$(d_x, d_y, d_u) = \lambda(a, b, c), \quad (24)$$

e levando em consideração o novo parâmetro σ que foi introduzido temos

$$\frac{d_x}{d_\sigma} = \lambda a, \quad \frac{d_y}{d_\sigma} = \lambda b, \quad \frac{d_u}{d_\sigma} = \lambda c, \quad (25)$$

sujeito às condições iniciais (23) quando $\sigma = 0$. A escolha de λ é arbitrária, por exemplo se indicarmos

$$\lambda = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2}, \quad (26)$$

então σ é o comprimento do arco ao longo das curvas características. Caso indiquemos

$$\lambda = \frac{1}{a^2 + b^2}, \quad (27)$$

então σ é o comprimento do arco ao longo da base de curvas características. Em geral é conveniente indicar

$$\lambda = 1, \quad \frac{d_x}{d_\sigma} = \lambda a, \quad \frac{d_y}{d_\sigma} = \lambda b, \quad \frac{d_u}{d_\sigma} = \lambda c. \quad (28)$$

Uma superfície solução consiste de uma família de pontos como dois parâmetros

$$x = x(\sigma, \tau), \quad y = y(\sigma, \tau), \quad u = u(\sigma, \tau). \quad (29)$$

Cada escolha de τ constrói uma curva característica, enquanto σ varia ao longo desta curva. Evidentemente a existência e unicidade de soluções para as EDO's serão garantidas sob certas condições. O método que foi descrito é conhecido como método das características. Devemos ter em mente que esta técnica não produz uma superfície solução $u(x, y)$, para obter isto, é necessário inverter as duas primeiras equações em (29) com respeito a τ e σ e escrevê-las como funções de x e y , depois basta

inserir estas expressões na terceira equação de (29).

Considerando a equação diferencial não linear

$$\mathbf{F}(x, y, u, p, q) = 0, \quad p = u_x, \quad q = u_y. \quad (30)$$

Para garantir que a expressão acima se trata realmente de uma equação diferencial parcial é necessário que as seguintes condições sejam válidas:

$$\mathbf{F}_p \neq 0, \quad \mathbf{F}_q \neq 0. \quad (31)$$

Vamos resolver a equação (30), para tanto modificamos este problema transformando-o em dois problemas quasi-lineares e usamos o método das características para resolvê-lo. Para pequenos incrementos d_x e d_y temos

$$\Delta \mathbf{F} = 0, \quad (32)$$

portanto, temos que

$$[\mathbf{F}_x + p\mathbf{F}_u + \mathbf{F}_p p_x + \mathbf{F}_p p_y] \Delta x + [\mathbf{F}_y + q\mathbf{F}_u + \mathbf{F}_q q_x + \mathbf{F}_q q_y] \Delta y = 0. \quad (33)$$

Vamos assumir que a solução deste problema é suficientemente suave, desta forma

$$p_y = q_x. \quad (34)$$

Como os incrementos em x e y são independentes, seus coeficientes precisam ser zero cada. Portanto

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_p p_x + \mathbf{F}_p p_y &= -\mathbf{F}_x - p\mathbf{F}_u \\ \mathbf{F}_q q_x + \mathbf{F}_q q_y &= -\mathbf{F}_y - q\mathbf{F}_u. \end{aligned} \quad (35)$$

Obtivemos um sistema simultâneo de equações diferenciais parciais para p e q . A base de curvas característica para estas equações são as mesmas e as equações descrevem simultaneamente a propagação de p e q ao longo destas características. Portanto, podemos escrever

$$\frac{dx}{\mathbf{F}_p} = \frac{dy}{\mathbf{F}_q} = -\frac{dp}{\mathbf{F}_x + p\mathbf{F}_u} = -\frac{dq}{\mathbf{F}_x + q\mathbf{F}_u}. \quad (36)$$

Calcula-se a mudança em u ao longo desta base característica da seguinte forma:

$$du = p dx + q dy = [p\mathbf{F}_p + q\mathbf{F}_q] \left(\frac{dx}{\mathbf{F}_p} \right), \quad (37)$$

resulta que

$$\frac{dx}{\mathbf{F}_p} = \frac{dy}{\mathbf{F}_q} = -\frac{dp}{\mathbf{F}_x + p\mathbf{F}_u} = -\frac{dq}{\mathbf{F}_x + q\mathbf{F}_u} = \frac{du}{p\mathbf{F}_p + q\mathbf{F}_q}. \quad (38)$$

De maneira análoga ao caso quasi-linear, é de grande ajuda para nós introduzir parâmetros σ e λ ao

longo das características. Assim, a equação anterior pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\sigma} &= \lambda \mathbf{F}_p, & \frac{dy}{d\sigma} &= \lambda \mathbf{F}_q, & \frac{du}{d\sigma} &= \lambda [p \mathbf{F}_p + q \mathbf{F}_q] \\ \frac{dp}{d\sigma} &= -\lambda [\mathbf{F}_x + p \mathbf{F}_u], & \frac{dq}{d\sigma} &= -\lambda [\mathbf{F}_y + q \mathbf{F}_u]. \end{aligned} \quad (39)$$

O valor de λ é arbitrário e podemos escolher $\lambda = 1$, além disso não entramos no mérito se o sistema possui ou não solução. A teoria de EDO's garante que (39) possui uma única solução sob certas condições, as quais serão detalhadas logo adiante.

Suponha que procuramos soluções passando por

$$x = x_o(\tau), \quad y = y_o(\tau), \quad u = u_o(\tau), \quad (40)$$

e esta família nos fornece o dado inicial para $\sigma = 0$. Agora os dados p_o e q_o também são necessários. Estes dados iniciais devem satisfazer

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(x_o(\tau), y_o(\tau), u_o(\tau), p_o(\tau), q_o(\tau)) &= 0 \\ u'_o(\tau) &= p_o(\tau)x'_o + q_o(\tau)y'_o(\tau). \end{aligned} \quad (41)$$

Usamos (41) para obter os valores de p_o e q_o , que juntos com (23) formam os dados iniciais da equação (39). Uma condição suficiente para que possamos resolver o sistema em uma vizinhança de um ponto τ_o onde conhecemos a solução é

$$\mathbf{J}_c = \left| \frac{\partial(\mathbf{F}, u'_o)}{\partial(p, q)} \right| \neq 0. \quad (42)$$

Se esta condição vale para qualquer curva inicial então resolvemos a equação ao longo da curva.