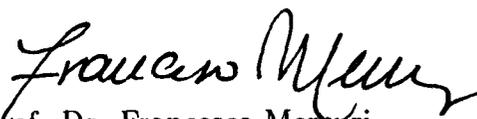


Classificação das Imersões Paralelas em Formas Espaciais

Este exemplar corresponde à redação final da
tese devidamente corrigida e defendida pelo
Sr. **Guillermo Antonio Lobos Villagra** e
aprovada pela Comissão Julgadora.

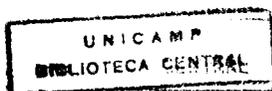
Campinas, 16 de Dezembro de 1994



Prof. Dr. Francesco Mercuri

Orientador

Dissertação apresentada ao Instituto de Ma-
temática, Estatística e Ciência da Com-
putação, UNICAMP, como requisito parcial
para obtenção do Título de MESTRE em
Matemática.



Classificação das Imersões Paralelas em Formas Espaciais

Guillermo Antonio Lobos Villagra

Prof. Dr. Francesco Mercuri
Orientador

IMECC-UNICAMP

1994

À minha família
“Viviana e Tomás”.

Agradecimentos

- À CAPES, pelo apoio financeiro para realizar o mestrado.
- Ao **Prof. Dr. Francesco Mercuri**, pela sua orientação.
- À minha esposa e filho, pela compreensão e carinho prestados durante o período de estudos.
- Aos meus pais e irmãos, pelo apoio.
- A todos os colegas de turma.
- À Roseli, pela paciência no trabalho de digitação.

Introdução

O objetivo principal desta dissertação é classificar as imersões isométricas paralelas em formas espaciais, isto é, caracterizar as imersões isométricas cujas segundas formas fundamentais são covariantemente constantes.

Começaremos esta dissertação enunciando os conceitos e resultados básicos a serem utilizados, destacando os teoremas Fundamental das Subvariedades e de Redução da Codimensão de Erbacher. Daqui, encerraremos o primeiro capítulo com um resultado de Moore sobre fatorização de imersões.

No segundo capítulo definiremos as imersões paralelas, daí daremos uma caracterização geométrica destas imersões devido a Ferus-Strübing. A seguir, definiremos e classificaremos as imersões umbílicas e seus produtos extrínsecos, e logo os mergulhos padrão de R -espaços simétricos, e mostraremos que estas formam duas classes de exemplos de imersões paralelas.

No terceiro capítulo demonstraremos basicamente que as duas classes dadas acima serão os blocos básicos que permitirão construir todas as imersões paralelas. Para isto, iniciaremos o capítulo enunciando um Teorema de Unicidade de Reickzigel, com o qual reduziremos o problema de classificação das imersões paralelas ao estudo de quando as *segundas formas fundamentais* são induzidas por estas imersões. A partir daí trataremos o problema usando Sistemas Triplos de Jordan (S.T.J.). De acordo com isso, obteremos primeiro a classificação das imersões paralelas mínimas em relação dos S.T.J., e a seguir obteremos um teorema classificatório que essencialmente diz:

Toda imersão paralela $f : M^n \rightarrow Q^{n+m}(c)$ de uma variedade Riemanniana n -dimensional M conexa em $Q^{n+m}(c)$ é a composição de um produto de imersões mínimas paralelas com um produto extrínseco de subvariedades umbílicas. Em particular, se M é irredutível então f é umbílica quando $c \leq 0$ ou é um mergulho padrão de um R -espaço simétrico quando $c > 0$.

Com este teorema atingiremos nosso objetivo de classificação das imersões paralelas. Os pré-requisitos à leitura desta dissertação estão essencialmente contidos nos três primeiros capítulos da referência [C].

Índice

Introdução	i
Capítulo I:	
Preliminares	1
1. Notações e Definições Básicas	1
2. Espaços de Curvatura Constante	16
3. Teorema Fundamental das Subvariedades	20
4. Teorema de Redução da Codimensão	29
5. Fatorização de Imersões Isométricas	33
Capítulo II:	
Imersões paralelas	38
1. Caracterização Geométrica das Imersões Paralelas	38
2. Subvariedades Umbílicas e seus Produtos Extrínsecos	48
3. Mergulhos Padrões de R -Espaços Simétricos	66
Capítulo III:	
Classificação das imersões paralelas mediante Sistemas	
Triplos de Jordan Euclidianos	81
1. Sistemas Triplos de Jordan	82
2. Classificação dos S.T.J. Mínimos	96
3. Teorema de Classificação das Imersões Paralelas	105
Referências	114

CAPÍTULO I

Preliminares

O objetivo deste capítulo é fixar a nomenclatura a ser utilizada ao longo desta dissertação. Portanto, na seção 1 deste capítulo começaremos introduzindo os conceitos e noções básicos da teoria das subvariedades, que são necessários para obtermos as fórmulas de Gauss e Weingarten, e baseadas nelas derivaremos as equações fundamentais de uma imersão isométrica, isto é, as equações de Gauss, Codazzi e Ricci. Já que, nesta dissertação estamos interessados em classificar certa classe de imersões isométricas em formas espaciais, daremos na seção 2 uma pequena atenção nos modelos clássicos de formas espaciais, além disso, veremos algumas importantes subvariedades destes modelos.

Finalizaremos este capítulo apresentando nas seções 3, 4 e 5 os teoremas Fundamental das Subvariedades, de Redução da Codimensão e um devido a Moore sobre fatorização de imersões, respectivamente.

1. Notações e Definições Básicas

1.1 Definição. Sejam M^n e \tilde{M}^{n+m} duas variedades diferenciáveis de dimensão n e $n+m$, respectivamente. Seja $f : M^n \rightarrow \tilde{M}^{n+m}$ uma imersão. Suponhamos que \tilde{M} possua uma métrica Riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\tilde{M}}$. Então f induz de maneira natural uma métrica Riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle_M$ sobre M , chamada *métrica induzida* por f e dada como segue: Para cada $p \in M$, definimos um produto interno sobre $T_p M$ dado por

$$(1) \quad \langle x, y \rangle_p := \langle f_*(x), f_*(y) \rangle_{f(p)}, \quad \forall x, y \in T_p M$$

onde f_* é a diferencial de f em p .

Daqui, a imersão f será chamada uma *imersão isométrica*, ou seja, f é uma imersão entre variedades Riemannianas a qual verifica (1) para todo ponto de M .

Denotaremos por $\mathcal{D}(M)$ ao anel de todas as *funções diferenciáveis a valores reais* da variedade Riemanniana M e por $\mathcal{X}(M)$ ao $\mathcal{D}(M)$ -módulo de todos os *campos diferenciáveis*

de vetores tangentes a M .

De agora em diante $f : M^n \rightarrow \tilde{M}^{n+m}$ será uma imersão isométrica.

1.2 Definição. Um campo de vetores X ao longo de f é uma aplicação $X : M \rightarrow T\tilde{M}$, de M no fibrado tangente de \tilde{M} tal que $\tilde{\pi} \circ X = f$, onde $\tilde{\pi} : T\tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$ é a projeção. Assim, X associa a cada $p \in M$ um vetor $X(p)$ tangente a \tilde{M} em $f(p)$, e X é diferenciável se para cada $g \in \mathcal{D}(\tilde{M})$, $X(g) \in \mathcal{D}(M)$, onde $X(g)(p) = X(p)g$.

Denotaremos por $\mathcal{X}(f)$ o conjunto de todos os *campos diferenciáveis de vetores ao longo de f* . Observa-se claramente que para cada $Y \in \mathcal{X}(\tilde{M})$, a restrição $Y|_M := Y \circ f$ está em $\mathcal{X}(f)$.

Por outro lado, como f é uma imersão, segue-se que para cada $p \in M$, existe uma vizinhança U de p tal que $f(U)$ é uma subvariedade mergulhada de \tilde{M} . Daqui, podemos identificar U com $f(U)$ e cada $v \in T_q U = T_q M$, $q \in U$, com $f_*(v) \in T_{f(q)} \tilde{M}$. Assim, $T_p M$ será um subespaço de $T_p \tilde{M}$. Daí, o produto interno em $T_p \tilde{M}$ dado pela métrica de \tilde{M} decompõe $T_p \tilde{M}$ na soma direta

$$T_p \tilde{M} = T_p M \oplus T_p M^\perp, \quad (2)$$

onde $T_p M^\perp$ (também denotado por $\nu_p(f)$) é o complemento ortogonal de $T_p M$ em $T_p \tilde{M}$.

1.3 Definição. Os vetores de $T_p M^\perp$ são chamados *vetores normais a f (ou M) em p* . Claramente, para cada $p \in M$, $\dim T_p M^\perp = m$, onde este número é chamado a *codimensão de f* .

De (2) segue-se que todo vetor $z \in T_p \tilde{M}$, $p \in M$, pode ser expresso de maneira única como segue:

$$z = (z)^T + (z)^\perp,$$

onde $(z)^T \in T_p M$ e $(z)^\perp \in T_p M^\perp$, resultando daí projeções ortogonais

$$(\cdot)^T : T_p \tilde{M} \rightarrow T_p M \quad \text{e} \quad (\cdot)^\perp : T_p \tilde{M} \rightarrow T_p M^\perp,$$

as quais são obviamente \mathbb{R} -lineares.

1.4 Definição. Diremos que um campo de vetores $X \in \mathcal{X}(f)$ é *tangente ao longo de f (ou M)* se para cada $p \in M$, $X(p) \in T_p M$. Além disso, diremos que um campo de vetores $\eta \in \mathcal{X}(f)$ é *normal ao longo de f (ou M)* se para cada $p \in M$, $\eta(p) \in T_p M^\perp$.

Denotaremos por $\mathfrak{X}(f)^T$ o conjunto de todos os *campos diferenciáveis de vetores tangentes ao longo de f* e por $\mathfrak{X}(f)^\perp$ o conjunto de todos os *campos diferenciáveis de vetores normais ao longo de f* . Claramente $\mathfrak{X}(f)^T, \mathfrak{X}(f)^\perp$ e $\mathfrak{X}(f)$ são $\mathcal{D}(M)$ -módulos e $\mathfrak{X}(f)^T, \mathfrak{X}(f)^\perp$ são submódulos de $\mathfrak{X}(f)$.

Agora aplicaremos a cada $X \in \mathfrak{X}(f)$ as projeções ortogonais $(\cdot)^T$ e $(\cdot)^\perp$ em cada ponto de M , assim, obtemos campos de vetores $(X)^T \in \mathfrak{X}(f)^T$ e $(X)^\perp \in \mathfrak{X}(f)^\perp$, (a diferenciabilidade destes campos verifica-se usando sistemas de coordenadas adaptados). Resultam daí as *projeções ortogonais*

$$(\cdot)^T : \mathfrak{X}(f) \rightarrow \mathfrak{X}(f)^T \quad \text{e} \quad (\cdot)^\perp : \mathfrak{X}(f) \rightarrow \mathfrak{X}(f)^\perp$$

as quais são $\mathcal{D}(M)$ -lineares e a identidade $X = (X)^T + (X)^\perp$, é uma consequência dada da soma direita de módulos

$$\mathfrak{X}(f) = \mathfrak{X}(f)^T \oplus \mathfrak{X}(f)^\perp. \quad (3)$$

Observemos que no caso de f ser um mergulho $\mathfrak{X}(M)$ é isomorfo a $\mathfrak{X}(f)^T$. De agora em diante, no caso geral de f ser uma imersão isométrica usaremos $\mathfrak{X}(M)$ em vez de $\mathfrak{X}(f)^T$ e denotaremos $\mathfrak{X}(f)^\perp$ por $\mathfrak{X}(M)^\perp$.

1.5 Definição. Seja M uma variedade diferenciável. Um *k -fibrado vetorial* sobre M é um par (E, π) , onde E é uma variedade diferenciável e π é uma aplicação diferenciável de E sobre M tal que, para cada $p \in M$, estão satisfeitas as seguintes condições:

- (i) $\pi^{-1}(p) = \{x \in E : \pi(x) = p\}$ é um espaço vetorial k -dimensional; e
- (ii) existe uma vizinhança U de p em M e um difeomorfismo $\phi : U \times \mathbb{R}^k \rightarrow \pi^{-1}(U)$ tal que, para cada $q \in U$, a aplicação $v \mapsto \phi(q, v)$ é um isomorfismo linear de \mathbb{R}^k sobre $\pi^{-1}(q)$.

Na literatura usa-se a seguinte terminologia para os objetos envolvidos na definição (1.5): M é a *variedade base*, E é a *variedade total*, π é a *projeção*, $\pi^{-1}(p)$ é a *fibra* sobre p , \mathbb{R}^k é a *fibra padrão*, e ϕ é a *carta fibrada*.

Já que a decomposição em (2) varia diferencialmente com $p \in M$, obtemos um fibrado vetorial $TM^\perp := \bigcup_{p \in M} T_p M^\perp$ sobre M chamado o *fibrado normal* de f . (que às vezes será denotado por $\nu(f)$).

Verifiquemos que (TM^\perp, π) é de maneira natural um m -fibrado vetorial sobre M , onde π é a projeção que leva cada $T_p M^\perp$ em p . Com efeito, para cada $p \in M$, existe um *referencial* de campos normais η_1, \dots, η_m definidos em alguma vizinhança U de p em M , isto é, campos tais que, para cada $q \in U$, $\eta_1(q), \dots, \eta_m(q)$ formam uma base ortonormal de $T_p M^\perp$. A fórmula $\phi(q, a_1, \dots, a_m) = \sum_{i=1}^m a_i E_i(q)$ define uma aplicação $\phi : U \times \mathbb{R}^m \rightarrow \pi^{-1}(U)$ que é claramente injetora. Como consequência disto obtemos uma família de aplicações injetoras ϕ 's. Daqui, tornamos TM^\perp numa variedade diferenciável com sistema de coordenadas locais em (p, v) dado por $(\psi \times id) \circ \phi^{-1} : \pi^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, onde $\psi : U \subseteq M \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um sistema de coordenadas locais de M em p e $id : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ é a aplicação identidade. Segue-se facilmente que as aplicações ϕ 's são as cartas fibradas que tornam TM^\perp num fibrado vetorial sobre M . ■

1.6 Definição. A *soma de Whitney* dos fibrados vetoriais (E^1, π_1) e (E^2, π_2) sobre uma variedade diferenciável M é dada pelo par $(E^1 \oplus_\omega E^2, \pi_1 \oplus_\omega \pi_2)$, onde $E^1 \oplus_\omega E^2 := \{(e_1, e_2) \in E^1 \times E^2 : \pi_1(e_1) = \pi_2(e_2)\}$ e $\pi_1 \oplus_\omega \pi_2 : E^1 \oplus_\omega E^2 \rightarrow M$ é a projeção dada por

$$\pi_1 \oplus_\omega \pi_2(e_1, e_2) = \pi_1(e_1) = \pi_2(e_2).$$

Claramente a soma de Whitney é um fibrado vetorial sobre M .

Já que, para cada imersão isométrica $f : M^n \rightarrow \tilde{M}^{n+m}$, temos os fibrados vetoriais TM e TM^\perp sobre M , pela definição (1.6), podemos considerar a soma de Whitney

$$TM \oplus_\omega TM^\perp. \quad (4)$$

1.7 Observação. Seja $f : M^n \rightarrow \tilde{M}^{n+m}$ uma imersão isométrica. Então o seguinte conjunto

$$\{(p, v) \in M \times T\tilde{M} : f(p) = \tilde{\pi}(v)\}, \quad (5)$$

onde $\tilde{\pi}$ é a projeção de $T\tilde{M}$ sobre \tilde{M} , é um fibrado vetorial sobre M o qual é isomorfo ao fibrado vetorial dado em (4).

Na literatura o fibrado vetorial dado em (5) é chamado o *pull back* de $T\tilde{M}$ pela de f , e é denotado por $f^*(T\tilde{M})$.

1.8 Definição. A menos de isomorfismos o fibrado vetorial em (4) será chamado o *fibrado vetorial induzido* por f .

A seguir fixaremos as notações dos objetos mais importantes obtidos a partir de uma dada imersão isométrica $f : M^n \rightarrow \tilde{M}^{n+m}$, as quais serão utilizadas ao longo desta dissertação.

Denotaremos com $\tilde{\nabla}$ e ∇ as conexões Riemannianas de \tilde{M} e M , respectivamente. Seja $p \in M$ fixo e dado $X \in \mathcal{X}(M)$ e $Y \in \mathcal{X}(f)$, seja $c :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow M$ uma curva tal que $c'(0) = X(p)$. Então definimos

$$(\bar{\nabla}_X Y)(p) := \left\{ \frac{\tilde{D}}{dt} Y \right\}_{t=0}$$

onde $\frac{\tilde{D}}{dt} Y$ é a derivada covariante em \tilde{M} de Y pensada como um campo ao longo da curva $f \circ c$. Se nos restringirmos a uma vizinhança U de p tal que $f|_U$ é um mergulho, identificando U com $f(U) \subseteq \tilde{M}$, Y se estende a um campo em uma vizinhança \tilde{U} de p em \tilde{M} e, módulo as óbvias identificações, temos que

$$(\bar{\nabla}_X Y)(p) = \tilde{\nabla}_{X(p)} Y.$$

Por isso usamos de agora em diante a mesma notação $\bar{\nabla} = \tilde{\nabla}$. Por outro lado, $\tilde{\nabla}$ é chamada a *conexão induzida* por f .

1.9 Observação. Se $X \in \mathcal{X}(M)$ e $Y, Z \in \mathcal{X}(f)$, então

- a) $\tilde{\nabla}_X Y$ é $\mathcal{D}(M)$ -linear em X .
- b) $\tilde{\nabla}_X Y$ é \mathbb{R} -linear em Y .
- c) $\tilde{\nabla}_X(\tilde{g}Y) = X(g)Y + g\tilde{\nabla}_X Y$, $\forall g \in \mathcal{D}(M)$, onde \tilde{g} extensão local de g .
- d) $[X, Y] = \tilde{\nabla}_X Y - \tilde{\nabla}_Y X$.
- e) $X\langle Y, Z \rangle = \langle \tilde{\nabla}_X Y, Z \rangle + \langle Y, \tilde{\nabla}_X Z \rangle$.

Do anterior podemos observar que quando $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, $\tilde{\nabla}_X Y$ não será, necessariamente, um campo de vetores tangentes a M , mas está sempre em $\mathcal{X}(f)$. Portanto, é natural a pergunta: que são $(\tilde{\nabla}_X Y)^T$ e $(\tilde{\nabla}_X Y)^\perp$? A resposta a isso está nas duas

seguintes proposições.

1.10 Proposição. *Seja $f : M^n \rightarrow \tilde{M}^{n+m}$ uma imersão isométrica. Se $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ então*

$$\nabla_X Y = (\tilde{\nabla}_X Y)^T, \quad (6)$$

onde ∇ é a conexão de Levi-Civita de M .

Demonstração: Já que, a conexão de Levi-Civita ∇ de M está completamente caracterizada pela fórmula de Koszul dada por

$$\begin{aligned} 2\langle \nabla_X Y, Z \rangle &= X\langle Y, Z \rangle + Y\langle Z, X \rangle - Z\langle X, Y \rangle \\ &\quad - \langle X, [Y, Z] \rangle + \langle Y, [Z, X] \rangle + \langle Z, [X, Y] \rangle, \end{aligned}$$

onde $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Portanto, para provar (6) é suficiente provar a seguinte igualdade $\langle \nabla_X Y, Z \rangle = \langle (\tilde{\nabla}_X Y)^T, Z \rangle$ para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Com efeito, extendamos localmente os campos $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, a campos $\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z} \in \mathfrak{X}(\tilde{M})$, respectivamente. Então a parte direita da fórmula de Koszul a denotaremos por $F(X, Y, Z)$. Assim, a fórmula de Koszul nas extensões fica: $\langle \tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y}, \tilde{Z} \rangle = F(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z})$. Daqui, a restrição a M de $\langle \tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y}, \tilde{Z} \rangle$ será $\langle \tilde{\nabla}_X Y, Z \rangle$. Logo podemos mostrar que $F(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z})|_M = F(X, Y, Z)$. Assim, $\langle \tilde{\nabla}_X Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle$. Mas $\tilde{\nabla}_X Y = (\tilde{\nabla}_X Y)^T + (\tilde{\nabla}_X Y)^\perp$ e $\langle (\tilde{\nabla}_X Y)^\perp, Z \rangle = 0$. Portanto, $\langle \nabla_X Y, Z \rangle = \langle (\tilde{\nabla}_X Y)^T, Z \rangle$. Daqui, podemos concluir que $(\tilde{\nabla})^T$ define a conexão Riemanniana de M relativa à métrica induzida por f . ■

1.11 Proposição. *A função $\alpha : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)^\perp$ definida por*

$$\alpha(X, Y) := (\tilde{\nabla}_X Y)^\perp, \quad (7)$$

é $\mathcal{D}(M)$ -bilinear simétrica e será chamada o tensor segunda forma fundamental de f (ou simplesmente segunda forma fundamental de f).

Demonstração: Já que, $\tilde{\nabla}_X Y$ é $\mathcal{D}(M)$ -linear em X e \mathbb{R} -linear em Y , portanto α também. Para $g \in \mathcal{D}(M)$,

$$\tilde{\nabla}_X (gY) = X(g)Y + g\tilde{\nabla}_X Y.$$

Como Y é tangente a M , e a projeção normal é $\mathcal{D}(M)$ -linear, temos que

$$\alpha(X, gY) = (\tilde{\nabla}_X(gY))^\perp = g(\tilde{\nabla}_X Y)^\perp = g\alpha(X, Y).$$

Assim, α é $\mathcal{D}(M)$ -bilinear. Finalmente, α é simétrica, pois

$$\alpha(X, Y) - \alpha(Y, X) = (\tilde{\nabla}_X Y - \tilde{\nabla}_Y X)^\perp = ([X, Y])^\perp = 0. \quad \blacksquare$$

A seguir, daremos algumas definições e lemas que nos permitirão visualizar melhor os objetos definidos anteriormente.

1.12 Definição. Um *campo de tensores* A de tipo (r, s) (r, s inteiros não negativos) em uma variedade M é um tensor sobre $\mathfrak{X}(M)$, isto é, uma função $A : \mathfrak{X}^*(M)^r \times \mathfrak{X}(M)^s \rightarrow \mathcal{D}(M)$ que é $\mathcal{D}(M)$ -multilinear, onde $\mathfrak{X}^*(M)$ é o módulo dual de $\mathfrak{X}(M)$ e $\mathfrak{X}^*(M)^r$ (resp. $\mathfrak{X}(M)^s$) denota o produto cartesiano de $\mathfrak{X}^*(M)$ r -vezes (resp. $\mathfrak{X}(M)$ s -vezes).

Denotaremos por $\mathfrak{S}_s^r(M)$ ao conjunto de todos os *campos tensoriais* em M do tipo (r, s) . Claramente $\mathfrak{S}_s^r(M)$ é um $\mathcal{D}(M)$ -módulo. Para $r = s = 0$, $\mathfrak{S}_0^0(M) := \mathcal{D}(M)$.

Veremos agora que um campo tensorial A de tipo (r, s) em M pode ser visto como um campo em M associando um valor A_p em cada ponto $p \in M$. O fato essencial é quando A é avaliada sobre 1-formas θ^i 's, e campos de vetores X_j 's, nós obtemos uma função de M a valores reais

$$A(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s) \in \mathcal{D}(M).$$

O valor desta função num ponto $p \in M$ não depende inteiramente de cada 1-forma e campo de vetores – ou ainda de seus valores sobre uma vizinhança de p – mas somente de seus valores no próprio p . Formalmente, isto é traduzido nos seguintes Lemas:

1.13 Lema. *Se qualquer uma das 1-formas $\theta^1, \dots, \theta^r$ ou qualquer um dos campos de vetores X_1, \dots, X_s é zero em $p \in M$, então $A(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s)(p) = 0$.*

Demonstração. Sem perda de generalidade podemos supor por exemplo que $X_s(p) = 0$. Assim, dado um sistema de coordenadas locais (x^1, \dots, x^n) numa vizinhança U de p em

M , temos que $X_s = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x^i}$ sobre U , onde $a_i = X_s(x^i) \in \mathcal{D}(U)$ para cada i . Portanto, dada uma função $g \in \mathcal{D}(M)$, definida como segue: $0 \leq g(x) \leq 1$ para todo $x \in M$, e $g = 1$ em alguma vizinhança de p com *suporte* $(g) \subseteq U$, temos que para cada i , a função $ga_i \in \mathcal{D}(M)$ e similarmente a função $g \frac{\partial}{\partial x^i} \in \mathfrak{X}(M)$, onde para cada $q \in M$, $(ga_i)(q) = g(q)a_i(q) \in \mathbb{R}$ e $(g \frac{\partial}{\partial x^i})(q) = g(q) \frac{\partial}{\partial x^i}(q) \in T_q M$. Daí:

$$\begin{aligned} g^2 A(\theta^1, \dots, X_s) &= A(\theta^1, \dots, g^2 X_s) \\ &= A(\theta^1, \dots, \sum_{i=1}^n ga_i g \frac{\partial}{\partial x^i}) = \sum_{i=1}^n ga_i A(\theta^1, \dots, g \frac{\partial}{\partial x^i}). \end{aligned}$$

Portanto, avaliando a fórmula acima em p , obtemos que $A(\theta^1, \dots, X_s)(p) = 0$, pois, pela escolha de g , $g(p) = 1$ e cada $a_i(p) = 0$, devido a que $X_s(p) = 0$. ■

1.14 Lema. *Sejam $p \in M$ e $A \in \mathfrak{S}_s^r(M)$. Sejam $\theta^1, \dots, \theta^r$ e $\omega^1, \dots, \omega^r$ em $\mathfrak{X}^*(M)$ tais que $\theta^i(p) = \omega^i(p)$, para cada $i = 1, \dots, r$, e sejam X_1, \dots, X_s e Y_1, \dots, Y_s em $\mathfrak{X}(M)$ tais que $X_j(p) = Y_j(p)$, para cada $j = 1, \dots, s$. Então*

$$A(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s)(p) = A(\omega^1, \dots, \omega^r, Y_1, \dots, Y_s)(p).$$

Demonstração: Por simplicidade suponhamos que $r = 1$ e $s = 2$, e consideremos a seguinte identidade:

$$\begin{aligned} A(\theta^1, X_1, X_2) - A(\omega^1, Y_1, Y_2) &= A(\theta^1 - \omega^1, X_1, X_2) + A(\theta^1, X_1 - Y_1, X_2) \\ &\quad + A(\theta^1, X_1, X_2 - Y_2). \end{aligned}$$

Já que, por hipótese $\theta^1 - \omega^1$, $X_1 - Y_1$, $X_2 - Y_2$ anulam-se no ponto $p \in M$, aplicando o Lema (1.14) podemos concluir que $A(\theta^1, X_1, X_2)(p) = A(\omega^1, Y_1, Y_2)(p)$.

Para obter a prova geral do Lema (1.14) deve-se estender de maneira natural a identidade dada acima para o caso em que r e s são arbitrários. ■

Segue-se imediatamente do Lema (1.14), que um campo tensorial $A \in \mathfrak{S}_s^r(M)$ possui um valor A_p em cada ponto $p \in M$, a saber, a função \mathbb{R} -multilinear $A_p : (T_p M^*)^r \times (T_p M)^s \rightarrow \mathbb{R}$ definida como segue: Se $a^1, \dots, a^r \in T_p M^*$ e $x_1, \dots, x_s \in T_p M$, então:

$$A_p(a^1, \dots, a^r, x_1, \dots, x_s) := A(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s)(p),$$

onde θ^i é 1-forma qualquer em M tal que $\theta^i(p) = a^i, 1 \leq i \leq r$, e X_j é um campo de vetores qualquer em M tal que $X_j(p) = x_j, 1 \leq j \leq s$.

Pela definição a seguir poderemos considerar um campo tensorial $A \in \mathfrak{S}_s^r(M)$ como um campo que associa diferencialmente a cada $p \in M$ um tensor A_p .

1.15 Definição. Para $r \geq 0, s \geq 0$, uma função \mathcal{K} -multilinear $A : (V^*)^r \times V^s \rightarrow \mathcal{K}$ é chamada um *tensor* de tipo (r, s) sobre V, \mathcal{K} -módulo, onde \mathcal{K} é um anel.

Agora generalizaremos a definição (1.12), trocando somente o codomínio $\mathcal{D}(M)$ da função A pelo conjunto $\Gamma^\infty(E)$ das *seções diferenciáveis* do fibrado vetorial (E, π) sobre M , o qual é um $\mathcal{D}(M)$ -módulo. A maioria dos resultados acima se adaptam bem a este caso, em particular o Lema (1.14). Portanto, o tensor segunda forma fundamental da imersão isométrica $f : M^n \rightarrow \tilde{M}^{n+m}, \alpha : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)^\perp$, é um campo de tensores mais geral, uma vez que, $\Gamma^\infty(TM^\perp) = \mathfrak{X}(M)^\perp$ e a fibra de TM^\perp em p é T_pM^\perp . Então o Lema (1.14) generalizado dá como valor de α em p uma função \mathbb{R} -bilinear simétrica $\alpha_p : T_pM \times T_pM \rightarrow T_pM^\perp$ que é chamada o *tensor segunda forma fundamental* de f em p e é dada por $\alpha_p(x, y) := \alpha(X, Y)(p)$, onde X, Y são qualquer par de campos vetoriais tangentes a M tais que $X(p) = x$ e $Y(p) = y$.

No caso de M ser uma *subvariedade isométrica* de \tilde{M} , isto é, a imersão f é um mergulho isométrico de M em \tilde{M} , podemos dizer que a geometria usual de M é chamada de *geometria intrínseca* para dar ênfase que é independente do fato que M se realiza em \tilde{M} . Por outro lado, eurísticamente falando, a *geometria extrínseca* de M é aquela que é vista por observadores em \tilde{M} . Formalmente: Sejam M e N duas subvariedades isométricas de \tilde{M} e \tilde{N} , respectivamente. Então, uma isometria $\phi : \tilde{M} \rightarrow \tilde{N}$ tal que $\phi|_M$ é uma isometria de M sobre N é chamada uma isometria *de pares* (quando $\tilde{M} = \tilde{N}$, ϕ é chamada uma *congruência* de M sobre N). Portanto, as características de M que são preservadas por tais isometrias de pares – e não pertencem a sua geometria intrínseca – constituem a geometria extrínseca de M .

1.16 Exemplo. O tensor segunda forma fundamental de uma subvariedade isométrica M^n de \tilde{M}^{n+m} é um invariante extrínseco. Em particular, para $n = 3$, se considerarmos

um pedaço de folha de papel como subvariedade isométrica de \mathbb{R}^3 , então $\alpha = 0$ quando a folha é plana mas não é nula quando é curva. De acordo com isso, temos a seguinte proposição.

1.17 Proposição. *Uma isometria de pares $\phi : (M, \tilde{M}) \rightarrow (N, \tilde{N})$ preserva o tensor segunda forma fundamental da subvariedade isométrica M de \tilde{M} , isto é,*

$$\phi_*(\alpha_p(x, y)) = \alpha_\phi(p)(\phi_*(x), \phi_*(y)) , \quad \forall x, y \in T_p M \quad e \quad p \in M.$$

Demonstração: Sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Então devido a que a restrição $\phi|_M : M^n \rightarrow N^n$ é um difeomorfismo, temos que $\phi_*(X), \phi_*(Y) \in \mathfrak{X}(N)$. Já que, $\phi : \tilde{M} \rightarrow \tilde{N}$ preserva conexões, segue-se que $\phi_*(\tilde{\nabla}_X Y) = \tilde{\nabla}_{\phi_*(X)}(\phi_*(Y))$. Por outro lado, para cada ponto $p \in M$, a isometria linear $\phi_* : T_p \tilde{M} \rightarrow T_{\phi(p)} \tilde{N}$ leva $T_p M$ em $T_p N$, e daqui, $T_p M^\perp$ em $T_p N^\perp$. Assim, ϕ_* preserva componentes tangentes e normais. Portanto, $\phi_*(\alpha(X, Y)) = \phi_*(\tilde{\nabla}_X Y)^\perp = (\phi_*(\tilde{\nabla}_X Y))^\perp = (\tilde{\nabla}_{\phi_*(X)}(\phi_*(Y)))^\perp = \alpha(\phi_*(X), \phi_*(Y))$. ■

Seguindo agora com o objetivo desta seção, seja $f : M^n \rightarrow \tilde{M}^{n+m}$ uma imersão isométrica. Das proposições (1.10) e (1.11), obtemos a *fórmula de Gauss*

$$\tilde{\nabla}_X Y = \underbrace{\nabla_X Y}_{\text{tangente a } M} + \underbrace{\alpha(X, Y)}_{\text{normal a } M} , \quad (8)$$

onde $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

A seguir, obteremos a fórmula de Weingarten. Para isto, sejam $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $\eta \in \mathfrak{X}(M)^\perp$. Já que, $\tilde{\nabla}_X \eta \in \mathfrak{X}(f)$, segue-se de (3), que

$$\tilde{\nabla}_X \eta = (\tilde{\nabla}_X \eta)^T + (\tilde{\nabla}_X \eta)^\perp. \quad (9)$$

Daqui, denotamos a componente tangencial de (9) por $-A_\eta X$, ou seja,

$$A_\eta(X) := -(\tilde{\nabla}_X \eta)^T. \quad (10)$$

Assim, obtemos uma função $A : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)^\perp \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ dada por (10), a qual é $\mathcal{D}(M)$ -linear na primeira variável e \mathbb{R} -linear na outra. Esta função será chamada o *operador de Weingarten* de f .

A importância deste operador padrão de f está na seguinte proposição.

1.18 Proposição. *O tensor segunda forma fundamental e o operador de Weingarten de f verificam a seguinte equação*

$$\langle \alpha(X, Y), \eta \rangle = \langle A_\eta(X), Y \rangle, \quad (11)$$

onde $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $\eta \in \mathfrak{X}(M)^\perp$.

Demonstração: Sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $\eta \in \mathfrak{X}(M)^\perp$. Já que, $\langle \eta, Y \rangle = 0$, então

$$\langle \tilde{\nabla}_X \eta, Y \rangle + \langle \eta, \tilde{\nabla}_X Y \rangle = 0.$$

Daqui, pela fórmula de Gauss, temos que

$$\langle \tilde{\nabla}_X \eta, Y \rangle + \langle \eta, \nabla_X Y + \alpha(X, Y) \rangle = 0.$$

Assim, usando a bilinearidade e a simetria do tensor métrico, e o fato que $\nabla_X Y \in \mathfrak{X}(M)$, podemos concluir que

$$\langle \tilde{\nabla}_X \eta, Y \rangle + \langle \alpha(X, Y), \eta \rangle = 0. \quad \blacksquare$$

O operador padrão de f , para cada $\eta \in \mathfrak{X}(M)^\perp$ induz um campo de tensores $A_\eta : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$, o qual é auto-adjunto (isto é, $\langle A_\eta(X), Y \rangle = \langle X, A_\eta(Y) \rangle$ para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$), e da generalização do Lema (1.14), segue-se que para cada $p \in M$, $A_{\eta(p)} : T_p M \rightarrow T_p(M)$ é um operador linear dado por $A_{\eta(p)}(x) = -(\tilde{\nabla}_x \eta)^\perp$, para todo $x \in T_p M$.

1.19 Definição. De acordo com o anterior cada campo de tensores A_η será chamada uma *aplicação de Weingarten segundo o campo normal η* .

A seguir denotaremos a parte normal de (9) por $\nabla_X^\perp \eta$, isto é,

$$\nabla_X^\perp \eta := (\tilde{\nabla}_X \eta)^\perp. \quad (12)$$

Assim, obtemos uma função $\nabla^\perp : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)^\perp \rightarrow \mathfrak{X}(M)^\perp$ dada por (12), a qual é uma conexão métrica sobre o fibrado normal TM^\perp , de acordo com a seguinte definição:

1.20 Definição. Uma *métrica Riemanniana* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ num fibrado vetorial (E, π) sobre uma variedade diferenciável M é uma função $\langle \cdot, \cdot \rangle : \Gamma^\infty(E) \times \Gamma^\infty(E) \rightarrow \mathcal{D}(M)$, que é $\mathcal{D}(M)$ -bilinear, simétrica e positiva definida. Um fibrado vetorial (E, π) sobre M com uma métrica Riemanniana fixa é chamado um *fibrado vetorial Riemanniano*.

1.21 Definição. Seja (E, π) um fibrado vetorial riemanniano sobre M . Então uma *conexão métrica* sobre E é uma função $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma^\infty(E) \rightarrow \Gamma^\infty(E)$, que verifica as seguintes propriedades:

- (i) $\nabla_X \eta$ é $\mathcal{D}(M)$ -linear em X e \mathbb{R} -linear em η ,
- (ii) $\nabla_X(f\eta) = f\nabla_X\eta + X(f)\eta$, $f \in \mathcal{D}(M)$,
- (iii) $X\langle \eta, \xi \rangle = \langle \nabla_X\eta, \xi \rangle + \langle \eta, \nabla_X\xi \rangle$, $\forall \eta, \xi \in \Gamma^\infty(E)$.

As propriedades (i) e (ii) nos dizem que ∇ é uma *conexão* sobre E , e a propriedade (iii) nos diz que ∇ é métrica.

As propriedades (i)-(iii) para ∇^\perp seguem facilmente das propriedades da conexão $\tilde{\nabla}$ e da projeção $(\cdot)^\perp$. Chamaremos de *conexão normal* de f à conexão métrica ∇^\perp sobre TM^\perp dada acima, e diremos que $\nabla_X^\perp \eta$ é a *derivada covariante normal* de η com respeito a X .

Agora, juntando as definições do operador padrão e da conexão normal de f na fórmula (9). Assim, obtemos a *fórmula de Weingarten*

$$\tilde{\nabla}_X \eta = \underbrace{-A_\eta(X)}_{\text{tangente a } M} + \underbrace{\nabla_X^\perp \eta}_{\text{normal a } M}, \quad (13)$$

onde $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $\eta \in \mathfrak{X}(M)$.

Para chegar nas equações fundamentais de uma imersão isométrica necessitamos introduzir duas noções de curvatura.

Em primeiro lugar, introduzimos a *curvatura* de uma variedade Riemanniana M^n , $n \geq 2$, como sendo um campo de tensores $R : \mathfrak{X}(M)^3 \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ em M dado por

$$R(X, Y)Z := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z, \quad (14)$$

onde ∇ é a conexão Riemanniana de M e $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Pelo Lema (1.14) generalizado, podemos considerar R como uma função \mathbb{R} -multilinear sobre vetores tangentes individuais. Se $x, y \in T_p M, p \in M$, o operador linear $R(x, y) : T_p M \rightarrow T_p M$ dado por $R(x, y)z := R(X, Y)Z(p)$, onde $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ e $X(p) = x, Y(p) = y$ e $Z(p) = z$, é chamado de *operador curvatura* em p .

Dado um ponto $p \in M$ e um subespaço bi-dimensional σ de $T_p M$, escolhamos $x, y \in \sigma$ linearmente independentes. Então é simples ver que, $K(x, y) = \frac{\langle R(x, y)y, x \rangle}{\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle - \langle x, y \rangle^2}$ não depende de x e y mas somente do plano σ por eles gerado. Portanto, definimos $K(\sigma)$ a *curvatura seccional* do plano σ por

$$K(\sigma) := K(x, y).$$

Podemos então dizer que a *curvatura seccional* K de M é uma função a valores reais do conjunto de todos os planos σ que são tangentes a M .

Introduziremos agora um tensor no fibrado normal de uma imersão isométrica $f : M^n \rightarrow \tilde{M}^{n+m}$ em termos da conexão normal ∇^\perp de f , o qual chamaremos *tensor curvatura normal* de f e será dado pela função $R^\perp : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)^\perp \rightarrow \mathfrak{X}(M)^\perp$ definida por

$$R^\perp(X, Y)\eta := \nabla_X^\perp \nabla_Y^\perp \eta - \nabla_Y^\perp \nabla_X^\perp \eta - \nabla_{[X, Y]}^\perp \eta, \quad (15)$$

onde $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $\eta \in \mathfrak{X}(M)^\perp$. Claramente, R^\perp é uma aplicação $\mathcal{D}(M)$ -multilinear e portanto um campo de tensores.

A geometria local da imersão isométrica $f : M^n \rightarrow \tilde{M}^{n+m}$, se decompõe em duas geometrias, uma do fibrado tangente (intrínseca) e uma outra do fibrado normal (extrínseca). Estas geometrias se relacionam através do tensor segunda forma fundamental de f e pelas três equações que passamos a derivar a partir das fórmulas de Gauss e Weingarten:

Primeiro acharemos a *equação de Gauss* de f . Sejam $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Então

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y Z &= \tilde{\nabla}_X (\nabla_Y Z + \alpha(Y, Z)) = \tilde{\nabla}_X \nabla_Y Z + \tilde{\nabla}_X (\alpha(Y, Z)) \\ &= \nabla_X \nabla_Y Z + \alpha(X, \nabla_Y Z) - A_{\alpha(Y, Z)}(X) + \nabla_X^\perp (\alpha(Y, Z)). \end{aligned}$$

Analogamente

$$\tilde{\nabla}_Y \tilde{\nabla}_X Z = \nabla_Y \nabla_X Z + \alpha(Y, \nabla_X Z) - A_{\alpha(X,Z)}(Y) + \nabla_Y^\perp(\alpha(X, Z)),$$

também

$$\tilde{\nabla}_{[X,Y]} Z = \nabla_{[X,Y]} Z + \alpha([X, Y], Z).$$

Portanto, para o tensor curvatura Riemanniana \tilde{R} de \tilde{M} , temos que

$$\begin{aligned} \tilde{R}(X, Y)Z &= \tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y Z - \tilde{\nabla}_Y \tilde{\nabla}_X Z - \tilde{\nabla}_{[X,Y]} Z \\ &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z + \alpha(X, \nabla_Y Z) \\ &\quad - \alpha(Y, \nabla_X Z) - \alpha([X, Y], Z) - A_{\alpha(Y,Z)}(X) \\ &\quad + A_{\alpha(X,Z)}(Y) + \nabla_X^\perp(\alpha(Y, Z)) - \nabla_Y^\perp(\alpha(X, Z)). \end{aligned}$$

Tomando agora o produto interno de $\tilde{R}(X, Y)Z$, com $W \in \mathfrak{X}(M)$, obtemos que

$$\begin{aligned} \langle \tilde{R}(X, Y)Z, W \rangle &= \langle R(X, Y)Z, W \rangle - \langle A_{\alpha(Y,Z)}(X), W \rangle \\ &\quad + \langle A_{\alpha(X,Z)}(Y), W \rangle \end{aligned}$$

Daí, tiramos a *equação de Gauss* de f

$$\begin{aligned} \langle \tilde{R}(X, Y)Z, W \rangle &= \langle R(X, Y)Z, W \rangle - \langle \alpha(X, W), \alpha(Y, Z) \rangle \\ &\quad + \langle \alpha(X, Z), \alpha(Y, W) \rangle. \quad \square \end{aligned} \tag{16}$$

Em particular as curvaturas seccionais \tilde{K} e K de \tilde{M} e M , respectivamente, estão relacionadas por (16) como segue:

$$\tilde{K}(x, y) = K(x, y) - \langle \alpha(x, x), \alpha(y, y) \rangle + \|\alpha(x, y)\|^2,$$

onde $x, y \in T_p M$ são ortonormais e $p \in M$.

A seguir acharemos a *equação de Codazzi* de f . Para isto, tomamos a componente normal de $\tilde{R}(X, Y)Z$ onde $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$:

$$\begin{aligned} (\tilde{R}(X, Y)Z)^\perp &= \alpha(X, \nabla_Y Z) - \alpha(Y, \nabla_X Z) - \alpha([X, Y], Z) + \nabla_X^\perp(\alpha(Y, Z)) \\ &\quad - \nabla_Y^\perp(\alpha(X, Z)), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} (\tilde{R}(X, Y)Z)^\perp &= \nabla_X^\perp(\alpha(Y, Z)) - \alpha(\nabla_X Y, Z) - \alpha(Y, \nabla_X Z) \\ &\quad - \nabla_Y^\perp(\alpha(X, Z)) + \alpha(\nabla_Y X, Z) + \alpha(X, \nabla_Y Z). \end{aligned} \quad (17)$$

1.22 Definição. Seja M uma variedade Riemanniana. Sejam $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $\beta : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$, uma aplicação $\mathcal{D}(M)$ -bilinear simétrica. A *derivada covariante do tensor* β na direção X é a função $\mathcal{D}(M)$ -bilinear simétrica $\nabla_X \beta : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)^\perp$ dada por

$$(\nabla_X \beta)(Y, Z) := \nabla_X^\perp(\beta(Y, Z)) - \beta(\nabla_X Y, Z) - \beta(Y, \nabla_X Z) \quad (18)$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

De acordo com a definição (1.21) podemos derivar covariantemente o tensor segunda forma fundamental de f . Assim, obtemos de (17) a *equação de Codazzi* de f

$$(\tilde{R}(X, Y)Z)^\perp = (\nabla_X \alpha)(Y, Z) - (\nabla_Y \alpha)(X, Z). \quad \square \quad (19)$$

Acharemos agora a *equação de Ricci* de f . Para isto, consideremos o tensor curvatura \tilde{R} de \tilde{M} , $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $\eta \in \mathfrak{X}(M)^\perp$. Calculemos $\tilde{R}(X, Y)\eta$ como segue:

$$\begin{aligned} \tilde{R}(X, Y)\eta &= -\nabla_X A_\eta(Y) - \alpha(X, A_\eta(Y)) - A_{\nabla_Y^\perp X}(Y) + \nabla_X^\perp \nabla_Y^\perp \eta \\ &\quad + \nabla_Y A_\eta(X) + \alpha(Y, A_\eta(X)) + A_{\nabla_X^\perp Y}(X) - \nabla_Y^\perp \nabla_X^\perp \eta \\ &\quad + A_\eta([X, Y]) - \nabla_{[X, Y]}^\perp \eta. \end{aligned}$$

Tomando agora o produto interno de $\tilde{R}(X, Y)\eta$ com $\xi \in \mathfrak{X}(M)^\perp$, obtemos a *equação de Ricci* de f

$$\langle \tilde{R}(X, Y)\eta, \xi \rangle = \langle R^\perp(X, Y)\eta, \xi \rangle - \langle [A_\eta, A_\xi]X, Y \rangle, \quad (20)$$

onde $[A_\eta, A_\xi]X = A_\eta(A_\xi(X)) - A_\xi(A_\eta(X))$. ■

2. Espaços de curvatura constante

2.1 Definição. Diremos que uma variedade Riemanniana M possui *curvatura constante* c se a curvatura seccional K de M é a função constante c .

Vejamos como ficam as equações de Gauss, Codazzi e Ricci dadas na seção 1 deste capítulo, no caso em que \tilde{M} é uma variedade Riemanniana de curvatura constante c . Já que, o tensor curvatura Riemanniana \tilde{R} de \tilde{M} é dado por

$$\tilde{R}(\tilde{X}, \tilde{Y})\tilde{Z} = c\{\langle \tilde{X}, \tilde{Z} \rangle \tilde{Y} - \langle \tilde{Y}, \tilde{Z} \rangle \tilde{X}\}, \quad (1)$$

para todo, $\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z} \in \mathfrak{X}(\tilde{M})$. Então, para $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$ e $\eta, \xi \in \mathfrak{X}(M)^\perp$, temos que a equação de Gauss fica:

$$\begin{aligned} \langle R(X, Y)Z, W \rangle &= c\{\langle X, Z \rangle \langle Y, W \rangle - \langle X, W \rangle \langle Y, Z \rangle\} \\ &\quad - \langle \alpha(X, Z), \alpha(Y, W) \rangle + \langle \alpha(X, W), \alpha(Y, Z) \rangle, \end{aligned} \quad (2)$$

a equação de Codazzi fica:

$$(\nabla_X \alpha)(Y, Z) = (\nabla_Y \alpha)(X, Z), \quad (3)$$

pois, $(\tilde{R}(X, Y)Z)^\perp = 0$, e por último, a equação de Ricci de f fica:

$$\langle R^\perp(X, Y)\eta, \xi \rangle = \langle [A_\eta, A_\xi]X, Y \rangle, \quad (4)$$

pois, $\tilde{R}(X, Y)\eta = 0$. \square

Nesta dissertação estamos interessados em classificar em detalhes uma classe especial de subvariedades imersas em uma variedade Riemanniana N -dimensional completa simplesmente conexa com curvatura seccional constante c , a qual denotaremos por $Q^N(c)$. Na literatura $Q^N(c)$ é chamada de *forma espacial*.

A seguir, daremos uma pequena atenção á geometria de $Q^N(c)$.

Começaremos dizendo que a geometria de $Q^N(c)$ é Euclideana se $c = 0$ e não-Euclideana se $c \neq 0$. No caso $c > 0$, é chamada *Esférica* e para $c < 0$ é chamada *Hiperbólica*.

É importante destacar que $Q^N(c)$ é determinada unicamente a menos de isometrias (ver [C] pág. 163). De acordo com isso, construiremos os modelos clássicos da geometria

esférica e hiperbólica que usaremos ao longo desta dissertação. Além disso, em cada caso daremos a métrica, suas isometrias e algumas subvariedades completas de curvatura seccional constante.

Caso $c > 0$, $Q^N(c)$ será essencialmente o seguinte modelo:

2.2 Modelo da N -esfera. Este modelo é obtido considerando a esfera N -dimensional de \mathbb{R}^{N+1} com centro na origem e raio $1/\sqrt{c}$, ou seja, $S^N(c) := \{p \in \mathbb{R}^{N+1} : \langle p, p \rangle = 1/c\}$, e a métrica de $S^N(c)$ é induzida pela aplicação inclusão.

As isometrias de $S^N(c)$ são as restrições das transformações lineares ortogonais de \mathbb{R}^{N+1} a $S^N(c)$. As *subvariedades totalmente geodésicas*, isto é, com segunda forma fundamental nula em $S^N(c)$ são as esferas máximas obtidas interseptando $S^N(c)$ com qualquer n -plano de \mathbb{R}^{N+1} que passe pela origem. Elas tem dimensão $n - 1$ e são completas.

Caso $c < 0$, $Q^N(c)$ será essencialmente um dos três modelos clássicos que passamos a descrever.

2.3 Modelo do semi-espço de Poincaré. Este modelo é obtido considerando no semi-espço $\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}_+$ de \mathbb{R}^N , a seguinte métrica

$$g_{ij}(x_1, \dots, x_N) = \frac{\delta_{ij}}{-cx_N^2} \quad , \quad \forall i, j = 1, \dots, N.$$

Com esta métrica g_{ij} que é conforme à métrica usual de \mathbb{R}^N , $H^N(c) := (\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}_+, g_{ij})$ torna-se uma forma espacial, onde c é a curvatura seccional constante e N é a dimensão de $H^N(c)$. (Ver [C] pág. 160).

As isometrias de $H^N(c)$ são as restrições das transformações conformes de \mathbb{R}^N a $H^N(c)$ que levam $H^N(c)$ sobre si mesmo. No caso $N = 2$, estas transformações são as funções holomorfas ou antiholomorfas com derivada não nula, e para $N \geq 3$, o Teorema de Liouville nos diz quais são. (Ver [C] pág. 168). As subvariedades totalmente geodésicas de $H^N(c)$ são as interseções dos n -planos de \mathbb{R}^N ortogonais à fronteira de $H^N(c)$, que denotaremos por $\partial H^N(c)$, com $H^N(c)$, ou são as interseções das n -esferas de \mathbb{R}^N , com centro em ∂H^N , com $H^N(c)$.

2.4 Modelo do espaço hiperbólico da bola. Este modelo é obtido considerando $c = -1$, a bola $B^N := \{(x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^N x_i^2 < 4\}$, e a métrica

$$h_{ij}(x_1, \dots, x_N) = \frac{\delta_{ij}}{\left(1 - \frac{1}{4}(\sum_{k=1}^N x_k^2)\right)^2}, \quad \forall i, j = 1, \dots, N.$$

Este modelo é isométrico a $H^N(-1)$; basta considerar a isometria $f : B^N \rightarrow H^N(-1)$ dada por $f(p) = \frac{4(p - p_0)}{\|p - p_0\|^2} - (0, \dots, 0, 1)$, para todo $p \in B^N$, onde $p_0 = (0, \dots, 0, -2)$. (Ver [C] pág. 177).

2.5 Modelo Lorentziano. Seja $\mathbb{L}^{N+1} := (\mathbb{R}^{N+1}, \langle, \rangle)$, onde \langle, \rangle é a forma bilinear não degenerada dada por

$$\langle x, y \rangle = -x_0 y_0 + x_1 y_1 + \dots + x_N y_N, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^{N+1}.$$

Esta forma é chamada de *métrica Lorentziana*. O modelo lorentziano é dado pela seguinte hipersuperfície de \mathbb{L}^{N+1}

$$H_c^N := \{p = (x_0, \dots, x_N) \in \mathbb{L}^{N+1} : \langle p, p \rangle = 1/c, x_0 > 0\},$$

junto com a métrica Lorentziana restrita a H_c^N , observamos que é positiva definida e portanto define uma métrica Riemanniana sobre H_c^N com a qual torna-se uma forma espacial.

Este modelo no caso H_{-1}^N é isométrico ao disco aberto $D^N = \{(u_0, \dots, u_N) \in \mathbb{R}^{N+1} : u_0 = 0, \sum_{k=1}^N u_k^2 < 1\}$. Já que, basta considerar a seguinte isometria $f : H_{-1}^N \rightarrow D^N$ definida como segue: Cada $p \in H_{-1}^N$ é ligado a $p_0 = (-1, 0, \dots, 0)$ por uma reta τ , então $f(p)$ é a interseção de τ com D^N . (Ver figura (1)).

A função inversa de f induz em D^N uma métrica dada por $t_{ij} = \frac{4\delta_{ij}}{(1 - \sum_{k=1}^N u_k^2)^2}$, com a qual tem curvatura constante -1 . Daqui, podemos concluir que os três modelos são isométricos.

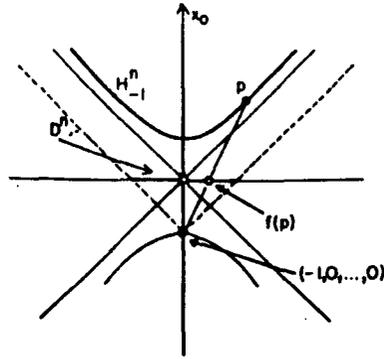


Fig. (1)

Finalizaremos esta seção definindo três importantes hipersuperfícies do espaço hiperbólico $H^N(-1)$ que não são totalmente geodésicas, mas possuem curvatura seccional constante e serão utilizadas no Capítulo II.

2.6 Definição. Uma *esfera geodésica* em $H^N(-1)$ é uma hipersuperfície de $H^N(-1)$ formada pelos pontos a distância fixa de um ponto $p \in H^N(-1)$.

2.7 Observação. Uma esfera geodésica é de fato uma esfera em \mathbb{R}^N contida em $\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}_+$ e centrada em um ponto \bar{p} ($\neq p$). A curvatura seccional de tais esferas com a métrica induzida por $H^N(-1)$ é constante positiva.

2.8 Definição. Seja S uma $(N - 1)$ -esfera de \mathbb{R}^N tangente a $\partial H^N(-1)$ em p tal que $S \setminus \{p\} \subseteq H^N(-1)$ e seja P um hiperplano de \mathbb{R}^N paralelo a $\partial H^N(-1)$ tal que $P \subseteq H^N(-1)$. Então $S \setminus \{p\}$ e P são chamadas *horosferas* de $H^N(-1)$.

A curvatura seccional de qualquer horosfera é identicamente nula.

2.9 Definição. Sejam S e P uma $(N - 1)$ -esfera e um hiperplano respectivamente de \mathbb{R}^N tais que cortam $\partial H^N(-1)$ não ortogonalmente. Então $S \cap H^N(-1)$ e $P \cap H^N(-1)$ são chamadas de *hipersuperfícies equidistantes* de $H^N(-1)$. Elas estão a uma distância fixa de uma hipersuperfície totalmente geodésica de $H^N(-1)$.

Toda hipersuperfície equidistante de $H^N(-1)$ tem curvatura seccional constante negativa.

3. Teorema Fundamental das Subvariedades

Começaremos esta seção dando algumas definições e notações, as quais usaremos para enunciar e provar o Teorema Fundamental das Subvariedades.

3.1 Definição. Sejam $\pi : E \rightarrow M$ e $\tilde{\pi} : \tilde{E} \rightarrow \tilde{M}$ dois fibrados vetoriais, e seja $\phi : M \rightarrow \tilde{M}$ um difeomorfismo entre as variedades M e \tilde{M} . Então diremos que $\tilde{\phi} : E \rightarrow \tilde{E}$ é um *isomorfismo de fibrados vetoriais ao longo de ϕ* se para cada $p \in M$, acontece

- (i) $\tilde{\pi} \circ \tilde{\phi} = \phi \circ \pi$, e $\tilde{\phi}$ leva a fibra $\pi^{-1}(p)$ na fibra $\tilde{\pi}^{-1}(\phi(p))$, e
- (ii) a restrição $\tilde{\phi}|_{\pi^{-1}(p)} : \pi^{-1}(p) \rightarrow \tilde{\pi}^{-1}(\phi(p))$ de $\tilde{\phi}$ a $\pi^{-1}(p)$ é um isomorfismo de espaços vetoriais.

Observamos da definição acima que $\tilde{\phi} : E \rightarrow \tilde{E}$ é um difeomorfismo. Além disso, se $X \in \Gamma^\infty(E)$, então usando os difeomorfismos ϕ e $\tilde{\phi}$, obteremos uma seção de \tilde{E} a qual denotaremos por $\tilde{\phi}(X)$ e definiremos como segue:

$$\tilde{\phi}(X)(q) := \tilde{\phi}(X(\phi^{-1}(q))), \quad \forall q \in \tilde{M}.$$

3.2 Definição. Seja (E, π) um fibrado vetorial sobre a variedade diferenciável M . Então diremos que uma *seção local* sobre um aberto U de M é uma aplicação diferenciável $\xi : U \rightarrow E$ tal que $\pi \circ \xi = id_U$, onde id_U é a aplicação identidade de U .

Na seção 1 vimos que as equações de Gauss, Codazzi e Ricci são satisfeitas por qualquer imersão isométrica $f : M^n \rightarrow \tilde{M}^{n+m}$. O Teorema Fundamental das Subvariedades que apresentaremos a seguir, estabelecerá uma recíproca local para o fato anterior quando $\tilde{M}^{n+m} = Q^{n+m}(c)$. Além disso, se M for simplesmente conexo a recíproca será global. Com respeito ao enunciado do teorema, ele está dividido em duas partes, uma de *existência* e outra de *rigidez*.

3.3 Teorema. (Fundamental das Subvariedades)

Existência: *Sejam M^n uma variedade Riemanniana n -dimensional simplesmente conexa, (E, π) um m -fibrado vetorial Riemanniano sobre M com conexão métrica ∇' e $\alpha : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow E$ uma aplicação $\mathcal{D}(M)$ -bilinear e simétrica. Definimos, para cada seção local η de E , uma aplicação $\mathcal{D}(M)$ -linear $A_\eta : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ dada por*

$$\langle A_\eta(X), Y \rangle = \langle \alpha(X, Y), \eta \rangle, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Se α e ∇' satisfazem as equações de Gauss, Codazzi e Ricci para o caso de curvatura seccional constante igual a c , então existe uma imersão isométrica $f : M^n \rightarrow Q^{n+m}(c)$, e um isomorfismo de fibrados vetoriais $\tilde{f} : E \rightarrow TM^\perp$ ao longo de f , tal que para cada $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e cada seção local ξ, η de E acontece

$$\begin{aligned} \langle \tilde{f}(\xi), \tilde{f}(\eta) \rangle &= \langle \xi, \eta \rangle \\ \tilde{f}(\alpha(X, Y)) &= \alpha^f(X, Y) \\ \tilde{f}(\nabla'_X \xi) &= \nabla_X^\perp(\tilde{f}(\xi)), \end{aligned}$$

onde α^f e ∇^\perp são o tensor segunda forma fundamental e a conexão normal de f , respectivamente.

Rigidez: *Sejam f e g imersões isométricas de uma variedade conexa M^n em $Q^{n+m}(c)$. Denotemos por $\nu(f), \alpha^f$ e ${}^f\nabla^\perp$ o fibrado normal, o tensor segunda forma fundamental e a conexão normal de f , respectivamente, e por $\nu(g), \alpha^g$ e ${}^g\nabla^\perp$ os correspondentes objetos para g . Se existe um isomorfismo de fibrados vetoriais $\tilde{\phi} : \nu(f) \rightarrow \nu(g)$ tal que, para cada $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e cada seção ξ, η em $\nu(f)$ acontece*

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\phi}(\xi), \tilde{\phi}(\eta) \rangle &= \langle \xi, \eta \rangle \\ \tilde{\phi}(\alpha^f(X, Y)) &= \alpha^g(X, Y) \\ \tilde{\phi}({}^f\nabla_X^\perp \eta) &= {}^g\nabla_X^\perp \tilde{\phi}(\eta), \end{aligned}$$

então existe uma isometria $\tau : Q^{n+m}(c) \rightarrow Q^{n+m}(c)$ tal que $g = \tau \circ f$ e $\tau_|_{\nu(f)} = \tilde{\phi}$.*

Demonstração. Daremos a prova deste teorema no caso $c = 0$ somente.

Existência. Primeiro consideraremos a soma de Whitney dos fibrados vetoriais TM e E . Denotemos por \tilde{E} esta soma, isto é,

$$\tilde{E} := TM \oplus_{\omega} E. \quad (1)$$

A seguir, dotaremos o $(n + m)$ -fibrado vetorial \tilde{E} sobre M de uma métrica Riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\tilde{E}}$ e de uma conexão métrica ∇'' . Para fazer isso, vejamos antes que

$$\Gamma^{\infty}(\tilde{E}) = \chi(M) \oplus \Gamma^{\infty}(E), \quad (2)$$

como soma direta de módulos. Com efeito, a igualdade em (2) segue-se usando as projeções naturais $(\cdot)^{TM} : \tilde{E} \rightarrow TM$ e $(\cdot)^E : \tilde{E} \rightarrow E$. Portanto, para cada $V, W \in \Gamma^{\infty}(\tilde{E})$, podemos definir

$$\langle V, W \rangle_{\tilde{E}} := \langle V_1, W_1 \rangle_M + \langle V_2, W_2 \rangle_E \quad (3)$$

onde $V = V_1 + V_2$ e $W = W_1 + W_2$ com $V_1, W_1 \in \chi(M)$ e $V_2, W_2 \in \Gamma^{\infty}(E)$ únicos dados por (2). Além disso, $\langle \cdot, \cdot \rangle_M$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ são as métricas Riemannianas em TM e E , respectivamente. Assim, (3) define uma aplicação $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\tilde{E}} : \Gamma^{\infty}(\tilde{E}) \times \Gamma^{\infty}(\tilde{E}) \rightarrow \mathcal{D}(M)$ a qual é claramente $\mathcal{D}(M)$ -bilinear simétrica e positiva definida, portanto uma métrica Riemanniana em \tilde{E} . Do anterior, para cada $X, Y \in \chi(M)$ e $\eta \in \Gamma^{\infty}(E)$ podemos definir

$$\nabla''_X Y := \nabla_X Y + \alpha(X, Y) \quad (4)$$

e

$$\nabla''_X \eta := -A_{\eta}(X) + \nabla'_X \eta, \quad (5)$$

onde ∇ é a conexão Riemanniana sobre TM . Assim, (4) e (5), definem uma aplicação $\nabla'' : \chi(M) \times \Gamma^{\infty}(\tilde{E}) \rightarrow \Gamma^{\infty}(\tilde{E})$ dada por

$$\nabla''_X V := \nabla''_X V_1 + \nabla''_X V_2, \quad (6)$$

onde $V = V_1 + V_2$ com $V_1 \in \chi(M)$ e $V_2 \in \Gamma^{\infty}(\tilde{E})$. A aplicação ∇'' é uma conexão métrica sobre \tilde{E} , pois, facilmente pode-se verificar o seguinte:

- i) $\nabla''_X V$ é $\mathcal{D}(M)$ -linear em X ,
- ii) $\nabla''_X V$ é \mathbb{R} -linear em V ,
- iii) $\nabla''_X aV = a\nabla''_X V + X(a)V$, e
- iv) $X\langle V, W \rangle_{\tilde{E}} = \langle \nabla''_X V, W \rangle_{\tilde{E}} + \langle V, \nabla''_X W \rangle_{\tilde{E}}$,

para todo $a, b \in \mathcal{D}(M)$ e $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $V, W \in \Gamma^\infty(\tilde{E})$ e $d, e \in \mathbb{R}$.

α e ∇' verificam as equações de Gauss, Codazzi e Ricci no caso de curvatura seccional constante $c = 0$, isto é,

$$\langle R(X, Y)Z, T \rangle = \langle \alpha(X, T), \alpha(Y, Z) \rangle - \langle \alpha(X, Z), \alpha(Y, T) \rangle \quad (7)$$

$$(\nabla_X \alpha)(Y, Z) = (\nabla_Y \alpha)(X, Z) \quad (8)$$

$$R'(X, Y)\eta = \alpha(X, A_\eta(Y)) - \alpha(A_\eta(X), Y), \quad (9)$$

onde $X, Y, Z, T \in \mathfrak{X}(M)$ e $\eta \in \Gamma^\infty(E)$ com R e R' os tensores curvatura Riemanniana sobre TM e E , respectivamente, e $(\nabla_X \alpha)(Y, Z) = \nabla'_X(\alpha(Y, Z)) - \alpha(\nabla_X Y, Z) - \alpha(Y, \nabla_X Z)$. Usaremos (7), (8) e (9) para verificar que o tensor curvatura Riemanniano \tilde{R} sobre \tilde{E} , é identicamente nulo. Com efeito, sabemos que $\tilde{R} : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \Gamma^\infty(\tilde{E}) \rightarrow \Gamma^\infty(\tilde{E})$ é um tensor dado por $\tilde{R}(X, Y)V = \nabla''_X \nabla''_Y V - \nabla''_Y \nabla''_X V - \nabla''_{[X, Y]}V$ onde $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $V = V_1 + V_2 \in \Gamma^\infty(\tilde{E})$ com $V_1 \in \mathfrak{X}(M)$ e $V_2 \in \Gamma^\infty(E)$. Então das seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} \nabla''_X \nabla''_Y V &= \nabla_X \nabla_Y V_1 + \alpha(X, \nabla_Y V_1) - A_{\alpha(Y, V_1)}(X) + \nabla'_X(\alpha(Y, V_1)) \\ &\quad - \nabla_X A_{V_2}(Y) - \alpha(X, A_{V_2}(Y)) - A_{\nabla'_Y V_2}(X) + \nabla'_X \nabla'_Y V_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla''_Y \nabla''_X V &= \nabla_Y \nabla_X V_1 + \alpha(Y, \nabla_X V_1) - A_{\alpha(X, V_1)}(Y) + \nabla'_Y(\alpha(X, V_1)) \\ &\quad - \nabla_Y A_{V_2}(X) - \alpha(Y, A_{V_2}(X)) - A_{\nabla'_X V_2}(Y) + \nabla'_Y \nabla'_X V_2 \end{aligned}$$

$$\nabla''_{[X, Y]}V = \nabla_{[X, Y]}V_1 + \alpha([X, Y], V_1) - A_{V_2}([X, Y]) + \nabla'_{[X, Y]}V_2,$$

e das equações (8) e (9), teremos que

$$\begin{aligned} \tilde{R}(X, Y)V &= R(X, Y)V_1 - A_{\alpha(Y, V_1)}(X) + A_{\alpha(X, V_1)}(Y) - A_{\nabla'_Y V_2}(X) \\ &\quad + A_{\nabla'_X V_2}(Y) - \nabla_X(A_{V_2}(Y)) + \nabla_Y(A_{V_2}(X)) + A_{V_2}([X, Y]). \end{aligned}$$

Daqui, tomamos o produto interno de $\hat{R}(X, Y)V$ com $W = W_1 + W_2 \in \Gamma^\infty(\tilde{E})$, onde $W_1 \in \mathfrak{X}(M)$ e $W_2 \in \Gamma^\infty(E)$, e usamos a equação (7), para obtermos que

$$\begin{aligned} \langle \hat{R}(X, Y)V, W \rangle &= \langle R(X, Y)V_1, W_1 \rangle - \langle \alpha(X, W_1), \alpha(Y, V_1) \rangle + \langle \alpha(Y, W_1), \alpha(X, V_1) \rangle \\ &- \langle \nabla_X(A_{V_2}(Y)) - A_{\nabla'_X V_2}(Y) - A_{V_2}(\nabla_X Y), W_1 \rangle + \langle \nabla_Y(A_{V_2}(X)) \\ &- A_{\nabla'_Y V_2}(X) - A_V(\nabla_Y X), W_1 \rangle \langle (\nabla_Y A_{V_2})(X), W_1 \rangle - \langle (\nabla_X A_{V_2})(Y), W_1 \rangle = 0. \end{aligned}$$

Já que, W em $\Gamma^\infty(\tilde{E})$ pode ser escolhido arbitrário, temos que $\hat{R}(X, Y)V = 0$, para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e toda $V \in \Gamma^\infty(\tilde{E})$. Assim, concluímos que $\hat{R} = 0$.

Escolhemos agora um ponto $p \in M$ e um referencial $E_1(p), \dots, E_{n+m}(p)$ de $\tilde{\pi}^{-1}(p)$, onde $\tilde{\pi} : \tilde{E} \rightarrow M$ é a projeção de \tilde{E} . Como M é simplesmente conexo e o tensor curvatura \tilde{R} sobre \tilde{E} é nulo, existem únicas extensões $E_1, \dots, E_{n+m} \in \Gamma^\infty(\tilde{E})$, todas *paralelas* com respeito a ∇'' (isto é, $\nabla''_X E_k = 0$, $\forall X \in \mathfrak{X}(M)$ e $k = 1, \dots, (n+m)$).

Veremos agora que os campos E_1, \dots, E_{n+m} obtidos acima formam um campo referencial sobre M . Com efeito, seja $X \in \mathfrak{X}(M)$ qualquer. Como ∇'' é compatível com a métrica $\langle, \rangle_{\tilde{E}}$ e os E_k 's são paralelos com respeito a ∇'' , temos que

$$X \langle E_k, E_\ell \rangle = \langle \nabla''_X E_k, E_\ell \rangle + \langle E_k, \nabla''_X E_\ell \rangle = 0, \quad 1 \leq k, \ell \leq n+m.$$

Sendo, $X \in \mathfrak{X}(M)$ arbitrário, segue-se que para cada k e ℓ , $\langle E_k, E_\ell \rangle = \text{constante}$, e como $\langle E_k, E_\ell \rangle(p) = \delta_{k\ell}$, segue-se que para cada $q \in M$, $\langle E_k, E_\ell \rangle(q) = \delta_{k\ell}$. Daqui, podemos concluir que E_1, \dots, E_{n+m} é um campo referencial sobre M .

Assim, escolhemos um sistema de coordenadas locais (x^1, \dots, x^n) definido em uma vizinhança simplesmente conexa U de p em M . Como $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \in \Gamma^\infty(\tilde{E}|_U)$, onde $\tilde{E}|_U = \bigcup_{p \in U} \tilde{\pi}^{-1}(p)$, teremos que existem funções $a_{ik} \in \mathcal{D}(U)$, tais que

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_{k=1}^{n+m} a_{ik} E_k, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (10)$$

Assim, as *expressões da métrica Riemanniana* no sistema de coordenadas locais escolhido acima são dadas por

$$g_{ij} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{n+m} a_{ik} E_k, \sum_{\ell=1}^{n+m} a_{j\ell} E_\ell \right\rangle = \sum_{k, \ell=1}^{n+m} a_{ik} a_{j\ell} \delta_{k\ell},$$

ou seja,

$$g_{ij} = \sum_{k=1}^{n+m} a_{ik}a_{jk} \quad , \quad 1 \leq i, j \leq n. \quad (11)$$

Já que os E_k 's são paralelos, temos que

$$\nabla''_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \nabla''_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left(\sum_{k=1}^{n+m} a_{jk} E_k \right) = \sum_{k=1}^{n+m} \left(a_{jk} \nabla''_{\frac{\partial}{\partial x^i}} E_k + \frac{\partial a_{jk}}{\partial x^i} E_k \right),$$

ou seja,

$$\nabla''_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_{k=1}^{n+m} \frac{\partial a_{jk}}{\partial x^i} E_k \quad , \quad 1 \leq i, j \leq n+m. \quad (12)$$

Agora, usaremos o fato de α ser simétrica, ∇ ser a conexão Riemanniana sobre TM e $[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}] = 0, 1 \leq i, j \leq n$, para mostrar que as 1-formas w_1, \dots, w_{n+m} definidas por

$$w_k := \sum_{i=1}^n a_{ik} dx^i \quad , \quad 1 \leq k \leq n+m,$$

são fechadas sobre U . Com efeito, usando (4) temos facilmente que

$$\nabla''_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} - \nabla''_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} = \left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right],$$

mas $[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}] = 0$, portanto

$$\nabla''_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} - \nabla''_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} = 0. \quad (13)$$

Logo, substituindo (12) em (13), temos que

$$\sum_{k=1}^{n+m} \left(\frac{\partial a_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial a_{ik}}{\partial x^j} \right) E_k = 0,$$

e como E_1, \dots, E_{n+m} é um campo referencial e $U \subseteq M$, obtemos que

$$\frac{\partial a_{jk}}{\partial x^i} = \frac{\partial a_{ik}}{\partial x^j} \quad , \quad 1 \leq i, j \leq n \quad \text{e} \quad 1 \leq k \leq n+m. \quad (14)$$

Assim, temos provado que w_1, \dots, w_{n+m} são 1-formas fechados sobre U .

Já que U é simplesmente conexo e as 1-formas w_k 's são fechadas em U , temos que são exatas e portanto existem funções f_1, \dots, f_{n+m} em $\mathcal{D}(U)$ tais que $df_k = w_k$. Mas, $df_k = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x^i} dx^i$ e $w_k = \sum_{j=1}^n a_{jk} dx^j$, donde $\frac{\partial f_k}{\partial x^i} = a_{ik}$, para $1 \leq i \leq n$

e $1 \leq k \leq n + m$. Logo, estas funções f_k 's definem uma função diferenciável $f : U \subseteq M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ dada por $f(q) := (f_1(q), \dots, f_{n+m}(q))$, $\forall q \in U$.

Veremos agora que f é uma imersão isométrica. Com efeito, para cada $q \in U$, $f_* : T_q M \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ leva $\frac{\partial}{\partial x^i}(q)$ em $\left(\frac{\partial f_1}{\partial x^i}(q), \dots, \frac{\partial f_{n+m}}{\partial x^i}(q)\right)$. Como $\frac{\partial f_k}{\partial x^i} = a_{ik}$, temos que $f_*\left(\frac{\partial}{\partial x^i}(q)\right) = (a_{i1}(q), \dots, a_{i(n+m)}(q))$. Portanto, segue-se que

$$f_*\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = (a_{i1}, \dots, a_{i(n+m)}), \quad 1 \leq i \leq n, \quad (15)$$

daqui, usando (11) e (15), teremos que

$$\left\langle f_*\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right), f_*\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) \right\rangle = \sum_{k=1}^{n+m} a_{ik}a_{jk} = g_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq n,$$

ou equivalentemente

$$\left\langle f_*\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right), f_*\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) \right\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle, \quad 1 \leq i, j \leq n. \quad (16)$$

Portanto, de (16), obteremos que f é uma imersão isométrica e em particular f é uma isometria local.

Agora, consideraremos os fibrados vetoriais $TU \oplus_\omega E|_U$ e $f^*(T\mathbb{R}^{n+m})|_{f(U)} := Tf(U) \oplus_\omega Tf(U)^\perp$ sobre U e $f(U)$, respectivamente, e definiremos entre eles um isomorfismo $\tilde{\phi}$ ao longo de $f|_U$, como segue: Primeiro consideramos o campo referencial E_1, \dots, E_{n+m} de \tilde{E} restrito a U (construído anteriormente), e logo o campo referencial canônico e_1, \dots, e_{n+m} de $T\mathbb{R}^{n+m}$ restrito a $f(U)$, daqui, para cada $k = 1, \dots, n + m$, definiremos $\tilde{\phi}(E_k) = e_k$. Portanto, se $V \in \Gamma^\infty(TU \oplus_\omega E)$ com $V = \sum_{k=1}^{n+m} v_k E_k$, então

$\tilde{\phi}(V) = \sum_{k=1}^{n+m} v_k e_k$. Assim, claramente $\tilde{\phi}$ é um isomorfismo de fibrados ao longo de f .

Por outro lado, para cada $\frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_{k=1}^{n+m} a_{ik} E_k \in \mathfrak{X}(U)$, temos que

$$\tilde{\phi}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \sum_{k=1}^{n+m} a_{ik} e_k = (a_{i1}, \dots, a_{i(n+m)}) = f_*\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right), \quad 1 \leq i \leq n.$$

Daqui, $\tilde{\phi}(TU) = Tf(U)$, é dizer, $\tilde{\phi}$ leva TU isomorficamente sobre $Tf(U)$. Mas, como $\tilde{\phi}$ é um isomorfismo entre as fibras, teremos que $\tilde{\phi}$ leva E isomorficamente sobre $Tf(U)^\perp$.

Além disso, como $\tilde{\phi}$ leva o campo referencial paralelo E_1, \dots, E_{n+m} no campo referencial paralelo e_1, \dots, e_{n+m} , temos que para cada $X, Y \in \mathcal{X}(U)$ e $\eta \in \Gamma^\infty(E)$, $\tilde{\phi}$ satisfaz

$$\tilde{\phi}(\nabla_X'' Y) = \tilde{\nabla}_{f_*(X)} \tilde{\phi}(Y) \quad \text{e} \quad \tilde{\phi}(\nabla_X'' \eta) = \tilde{\nabla}_{f_*(X)} \tilde{\phi}(\eta), \quad (17)$$

onde $\tilde{\nabla}$ é a conexão Riemanniana de \mathbb{R}^{n+m} .

Com efeito, se $Y = \sum_{k=1}^{n+m} y_k E_k$ e $\eta = \sum_{k=1}^{n+m} \eta_k E_k$, então temos que

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(\nabla_X'' Y) &= \tilde{\phi}(\nabla_X'' (\sum_{k=1}^{n+m} y_k E_k)) = \tilde{\phi}(\sum_{k=1}^{n+m} (y_k \nabla_X'' E_k + X(y_k) E_k)) \\ &= \sum_{k=1}^{n+m} \tilde{\phi}(X(y_k) E_k) = \sum_{k=1}^{n+m} \tilde{\phi}(X)(y_k) e_k \\ &= \sum_{k=1}^{n+m} (y_k \tilde{\nabla}_{\tilde{\phi}(X)} e_k + \tilde{\phi}(X)(y_k) e_k) = \tilde{\nabla}_{\tilde{\phi}(X)} (\sum_{k=1}^{n+m} y_k e_k) = \tilde{\nabla}_{f_*(X)} \tilde{\phi}(Y), \end{aligned}$$

e

$$\tilde{\phi}(\nabla_X'' \eta) = \tilde{\phi}(\sum_{k=1}^{n+m} (\eta_k \nabla_X'' E_k + X(\eta_k) E_k)) = \sum_{k=1}^{n+m} \tilde{\phi}(X)(\eta_k) e_k = \tilde{\nabla}_{f_*(X)} \tilde{\phi}(\eta).$$

Agora tomamos as componentes normais de $\tilde{\phi}(\nabla_X'' Y)$ e $\tilde{\phi}(\nabla_X'' \eta)$ como segue:

$$\tilde{\phi}(\nabla_X'' Y) = \underbrace{\tilde{\phi}(\nabla_X Y)}_{\text{tangente}} + \underbrace{\tilde{\phi}(\alpha(X, Y))}_{\text{normal}} \quad \text{e} \quad \tilde{\phi}(\nabla_X'' \eta) = \underbrace{-\tilde{\phi}(A_\eta(X))}_{\text{tangente}} + \underbrace{\tilde{\phi}(\nabla_X' \eta)}_{\text{normal}}.$$

Por outro lado, pelas fórmulas de Gauss e Weingarten, temos que

$$(\tilde{\nabla}_{f_*(X)} \tilde{\phi}(X))^\perp = \alpha^f(f_*(X), f_*(Y)) \quad \text{e} \quad (\tilde{\nabla}_{f_*(X)} \tilde{\phi}(\eta))^\perp = \nabla_{f_*(X)}^\perp \tilde{\phi}(\eta),$$

onde α^f é o tensor segunda forma fundamental e ∇^\perp é a conexão normal de f .

Logo, a parte normal das igualdades em (17) são dadas por

$$\tilde{\phi}(\alpha(X, Y)) = \alpha^f(f_*(X), f_*(Y)) \quad \text{e} \quad \tilde{\phi}(\nabla_X' \eta) = \nabla_{f_*(X)}^\perp \tilde{\phi}(\eta),$$

daqui fazendo as identificações $f_*(X) = X$, $f_*(Y) = Y$ e $\tilde{f} = \tilde{\phi}|_E$, temos que

$$\tilde{f}(\alpha(X, Y)) = \alpha^f(X, Y) \quad \text{e} \quad \tilde{f}(\nabla_X' \eta) = \nabla_{f_*(X)}^\perp \tilde{f}(\eta). \quad (18)$$

Agora, veremos que se $\eta, \xi \in \Gamma^\infty(E)$, então $\langle \tilde{f}(\eta), \tilde{f}(\xi) \rangle = \langle \eta, \xi \rangle$. Com efeito, se $\eta = \sum_{k=1}^{n+m} \eta_k E_k$ e $\xi = \sum_{\ell=1}^{n+m} \xi_\ell E_\ell$, então

$$\langle \tilde{f}(\eta), \tilde{f}(\xi) \rangle = \sum_{k=1}^{n+m} \eta_k \xi_k \underbrace{\langle \tilde{\phi}(E_k), \tilde{\phi}(E_k) \rangle}_{e_k} = \langle \eta, \xi \rangle.$$

Até aqui temos provado a existência local da imersão isométrica f e a existência do isomorfismo \tilde{f} de fibrados vetoriais ao longo de f que verifica as propriedades requeridas do Teorema (3.4).

Por último, se tivéssemos escolhido um sistema de coordenadas locais diferente de (x^1, \dots, x^n) , por exemplo (y^1, \dots, y^n) , ainda teríamos chegado nas equações $\frac{\partial f_k}{\partial y^j} = a_{ik}$. Já que, estas equações determinam f a menos de uma constante, a imersão f é determinada a menos de uma translação. Por outro lado, se tivéssemos escolhido um referencial em $p \in M$ diferente do inicial, a isometria local f teria somente diferido por uma rotação. Portanto, podemos concluir que f é determinada a menos de um movimento rígido. O fato, que M é simplesmente conexo permite-nos colar todas estas isometrias locais. \square

(Rigidez). Sejam $f, g : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ imersões isométricas, consideramos os seguintes fibrados vetoriais, $f^*(T\mathbb{R}^{n+m}) = Tf(M) \oplus_\omega Tf(M)^\perp$ e $g^*(T\mathbb{R}^{n+m}) = Tg(M) \oplus_\omega Tg(M)^\perp$ ambos sobre M , pelas identificações usuais $Tf(M) = TM = Tg(M)$, temos que TM está contido em ambos fibrados. Mas por hipótese, existe isomorfismo $\tilde{\phi} : \nu(f) \rightarrow \nu(g)$, o qual podemos extendê-lo a um isomorfismo $\tilde{\phi} : f^*(T\mathbb{R}^{n+m}) \rightarrow g^*(T\mathbb{R}^{n+m})$ de fibrados, tal que preserve a métrica, a conexão e a restrição $\tilde{\phi}|_{TM}$ seja a identidade. Se consideramos f como na primeira parte do Teorema (3.4), observamos que sobre uma vizinhança adequada, f somente difere por um movimento rígido de \mathbb{R}^{n+m} , e isto prova imediatamente a Rigidez do Teorema (3.4). \blacksquare

4. Teorema de Redução da Codimensão

O objetivo desta seção é dizer quando é possível reduzir a codimensão de uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana conexa em uma forma espacial. Isto é, dada uma imersão isométrica $f : M^n \rightarrow Q^{n+m}(c)$ a questão é quando existe uma subvariedade totalmente geodésica $Q^{n+k}(c)$ de $Q^{n+m}(c)$ tal que $k < m$ e $f(M^n) \subseteq Q^{n+k}(c)$. A resposta desta questão está no seguinte teorema devido a Joseph Erbacher, publicado em 1971.

4.1 Teorema. *Seja $f : M^n \rightarrow Q^{n+m}(c)$ uma imersão isométrica, e suponhamos que existe um k -subfibrado paralelo $N = \bigcup_{p \in M} N_p$ do fibrado normal de f , com $k < m$, satisfazendo a condição de que o primeiro espaço normal de f em p está contido em N_p , $\forall p \in M$. Então a codimensão de f pode ser reduzida a k .*

Antes de dar uma demonstração do Teorema (4.1) enunciaremos as seguintes definições e observações que nos permitiram entender o enunciado deste teorema e facilitar sua prova.

Seja $f : M^n \rightarrow \tilde{M}^{n+m}$ uma imersão isométrica.

4.2 Definição. O primeiro espaço normal de f em $p \in M$ é o subespaço $N_1(p)$ de $T_p M^\perp$ gerado pelo tensor segunda forma fundamental α de f em p . Isto é,

$$N_1(p) = \text{ger}\{\alpha(x, y) : x, y \in T_p M\}. \quad (1)$$

4.3 $N_1(p)$ também pode ser definido por

$$N_1(p) = \{\eta \in T_p M^\perp : A_\eta = 0\}^\perp, \quad (2)$$

onde A_η é o operador padrão de f na direção η .

Veremos que ambas definições de $N_1(p)$ coincidem. Para isto, verificaremos que ambos conjuntos são iguais. Com efeito, seja $\eta \in T_p M^\perp$ não nulo, tal que $A_\eta = 0$. Então, para cada $x, y \in T_p M$, temos que

$$0 = \langle A_\eta(x), y \rangle = \langle \alpha(x, y), \eta \rangle$$

Daí, $\eta^\perp \in \{\alpha(x, y) : x, y \in T_p M\}$. Portanto, $(2)^\perp \subseteq (1)^\perp$ donde $(1) \subseteq (2)$.

Se $\eta \in \text{ger}\{\alpha(x, y) : x, y \in T_p M\}^\perp$, então $A_\eta = 0$. Daí, $\eta \in (2)^\perp$. Então podemos concluir que $(1)^\perp \subseteq (2)^\perp$ e portanto $(2) \subseteq (1)$. ■

4.4 Se para cada $p \in M$, a dimensão de $N_1(p)$ não depende de p e é constante ao longo de M , então $N_1 = \bigcup_{p \in M} N_1(p)$ é um subfibrado de TM^\perp .

4.5 Definição. Diremos que uma imersão isométrica $f : M^n \rightarrow Q^{n+m}(c)$ admite uma redução da codimensão a $k < m$ se existe uma subvariedade totalmente geodésica $Q^{n+k}(c)$ de $Q^{n+m}(c)$ tal que $f(M^n) \subseteq Q^{n+k}(c)$.

4.6 Definição. Sejam M^n variedade diferenciável e E um fibrado vetorial sobre M com conexão linear ∇ . Diremos que um subfibrado vetorial N de E , é *paralelo* se para cada $\eta \in \Gamma^\infty(N)$, temos que $\nabla_X \eta \in \Gamma^\infty(N)$, para todo $X \in \mathcal{X}(M)$.

4.7 Observação. Sejam $g : M \rightarrow M'$ e $f : M' \rightarrow M''$ duas imersões isométricas. Então, para cada $p \in M$ e $x, y \in T_p M$, teremos as igualdades seguintes:

- a) $\nu_p(f \circ g) = f_*(\nu_p(g)) \oplus \nu_p(f)$ e
- b) $\alpha^{f \circ g}(x, y) = f_*(\alpha^g(x, y)) + \alpha^f(g_*(x), g_*(y))$.

Agora estamos em condições de dar a demonstração do Teorema (4.1).

Demonstração. Caso $c = 0$. Dado $p_0 \in M$ fixo e arbitrário, queremos mostrar que

$$f(M) \subseteq T_{p_0} M \oplus N_{p_0} = \mathbb{R}^{n+k}(0).$$

Com efeito, já que, $T_{p_0} M^\perp = N_{p_0} \oplus N_{p_0}^\perp$, onde $N_{p_0}^\perp$ é o complemento ortogonal de N_{p_0} em $T_{p_0} M^\perp$, podemos considerar um vetor $\eta \in N_{p_0}^\perp$ arbitrário e o transporte paralelo $V(t)$ de η ao longo de uma curva qualquer $\gamma : I \rightarrow M$, que começa em p_0 . Visto que N é um subfibrado normal paralelo, temos que $N^\perp = \bigcup_{p \in M} N_p^\perp$ também o é. (Pois para qualquer $X \in \mathcal{X}(M)$, $\xi \in \Gamma^\infty(N)$ e $\theta \in \Gamma^\infty(N^\perp)$, os fatos seguintes: $\langle \xi, \theta \rangle = 0$ e $X \langle \xi, \theta \rangle = \langle \nabla_X^\perp \xi, \theta \rangle + \langle \xi, \nabla_X^\perp \theta \rangle = \langle \xi, \nabla_X^\perp \theta \rangle = 0$ mostram que N^\perp é paralelo).

Assim, $V(t) \in N_{\gamma(t)}^\perp, \forall t \in I$. Logo, pela fórmula de Weingarten, temos que

$$\tilde{\nabla}_{\gamma'(t)} V = -A_{V(t)}(\gamma'(t)) + \nabla_{\gamma'(t)}^\perp V, \quad \forall t \in I.$$

Mas por hipótese, para cada $p \in M, N_1(p) \subseteq N_p$. Daqui, $N_p^\perp \subseteq \{\eta \in T_p M^\perp : A_\eta = 0\}$. Logo, $A_{V(t)} = 0$, e pelo paralelismo de V , temos que $\nabla_{\gamma'(t)}^\perp V = 0$. Portanto, $\tilde{\nabla}_{\gamma'(t)} V = 0, \forall t \in I$. Isto nos diz que $V(t)$ é constante, $\forall t \in I$. Mas como $V(0) = \eta$, segue-se daí que $V(t) = \eta, \forall t \in I$. Por outro lado, temos que

$$\frac{d}{dt} \langle f(\gamma(t)) - f(p_0), \eta \rangle = \underbrace{\langle f_*(\gamma'(t)), \eta \rangle}_{\text{tangente}} + \underbrace{\langle f(\gamma(t)) - f(p_0), \underbrace{\nabla_{\gamma'(t)}^\perp \eta}_0 \rangle}_{\text{normal}} = 0.$$

Logo, $\langle f(\gamma(t)) - f(p_0), \eta \rangle = \text{constante}$, em I . Mas $f(\gamma(0)) - f(p_0) = 0$. Portanto, $\langle f(\gamma(t)) - f(p_0), \eta \rangle = 0, \forall t \in I$.

Já que a curva γ e o vetor η foram escolhidos arbitrariamente, obtemos o resultado desejado, isto é, $f(M) \subseteq T_{p_0} M \oplus N_{p_0}$, que é uma subvariedade totalmente geodésica $(n + k)$ -dimensional de \mathbb{R}^{n+m} . \square

Caso $c > 0$. Consideremos a imersão isométrica $\tilde{f} : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+m+1}$ dada por $\tilde{f} = i \circ f$, onde $i : S^{n+m}(c) \rightarrow \mathbb{R}^{n+m+1}$ é a inclusão canônica da esfera no espaço Euclidiano. (Observe que \tilde{f} é composição de duas imersões isométricas). Denotemos o fibrado normal de \tilde{f} por $\tilde{T}M^\perp = \bigcup_{p \in M} \tilde{T}_p M^\perp$, e o primeiro espaço normal de \tilde{f} em $p \in M$ por $\tilde{N}_1(p) = \text{ger}\{\alpha^{\tilde{f}}(x, y) : x, y \in \tilde{T}_p M\}$, onde $\alpha^{\tilde{f}}$ é o tensor segunda forma fundamental de \tilde{f} em p e $\tilde{T}_p M = T_p M$. Claramente pela observação (4.7) segue-se que, para cada $p \in M$,

$$\tilde{T}_p M^\perp = T_p M^\perp \oplus \text{ger}\{f(p)\}, \quad \text{e} \quad (3)$$

$$\tilde{N}_1(p) \subseteq N_1(p) \oplus \text{ger}\{f(p)\}. \quad (4)$$

Assim, de (3) e (4), obtemos que

$$\tilde{N}_1(p) \subseteq N_p \oplus \text{ger}\{f(p)\}. \quad (5)$$

Denotaremos por $\tilde{N}_p := N_p \oplus \text{ger}\{f(p)\}$ o subespaço $(k + 1)$ -dimensional de $\tilde{T}_p M^\perp, \forall p \in M$. Assim $\tilde{N} = \bigcup_{p \in M} \tilde{N}_p$ é um subfibrado de $\tilde{T}M^\perp$.

Por outro lado, temos que o complemento ortogonal de \tilde{N} em $\tilde{T}M^\perp$ é igual ao complemento ortogonal de N em TM^\perp , o qual é paralelo com respeito à conexão normal $\nabla^\perp = \tilde{f}\nabla^\perp|_{\mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M)^\perp}$ de f , onde $\tilde{f}\nabla^\perp$ é a conexão normal de \tilde{f} . Já que f , considerado como um campo de vetores normais, é paralelo na conexão $\tilde{f}\nabla^\perp$, concluímos que \tilde{N} é paralelo com respeito a $\tilde{f}\nabla^\perp$. Assim, podemos aplicar o caso anterior à imersão isométrica \tilde{f} . Portanto, \tilde{f} admite uma redução da codimensão a $(k+1)$. Isto é, para algum $p_0 \in M$, temos que

$$\tilde{f}(M) \subseteq \tilde{T}_{p_0}M \oplus \tilde{N}_{p_0} = T_{p_0}M \oplus N_{p_0} \oplus \text{ger}\{f(p_0)\}$$

Como $T_{p_0}M \oplus N_{p_0} \oplus \text{ger}\{f(p_0)\} = \mathbb{R}^{n+k+1}(0)$ e $\tilde{f}(M) = f(M) \subseteq S^{n+m}(c)$, segue-se que $f(M) \subseteq S^{n+m}(c) \cap \mathbb{R}^{n+k+1} = S^{n+k}(c)$, o qual prova o caso $c > 0$. \square

Caso $c < 0$. Este caso é análogo ao caso $c > 0$, já que basta considerar a imersão isométrica $\tilde{f} : M^n \rightarrow \mathbb{L}^{n+m+1}$ dada por $\tilde{f} = i \circ f$, onde $i : H^{n+m}(c) \rightarrow \mathbb{L}^{n+m+1}$ é a inclusão canônica do modelo hiperbólico do semi-espaço superior no espaço Lorentziano \mathbb{L}^{n+m+1} , e seguir mais ou menos os mesmos passos do caso $c > 0$. Portanto, temos provado o Teorema (4.1). \blacksquare

4.8 Corolário. *Seja $f : M^n \rightarrow Q^{n+m}(c)$ uma imersão isométrica tal que, para cada ponto $p \in M$, $N_1(p)$ possui dimensão constante $k < m$ ao longo de M . Se o subfibrado N_1 é paralelo, então a codimensão de f reduz-se a k .*

4.9 Observações.

- a) *A condição de paralelismo é essencial na demonstração do Teorema (4.1).*
- b) *No corolário (4.8), a condição de que para cada $p \in M$, $N_1(p)$ possua dimensão constante ao longo de M é necessária como mostra o seguinte exemplo:*

4.10 Exemplo. Seja $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva dada por

$$\gamma(t) = \begin{cases} (t, e^{-1/t^2}, 0) & \text{se } t > 0 \\ (0, 0, 0) & \text{se } t = 0 \\ (t, 0, e^{-1/t^2}) & \text{se } t < 0 \end{cases}$$

O primeiro espaço normal tem dimensão 1 para todo $t \neq 0$ e é paralelo, mas a codimensão 2 não pode ser reduzida. \blacksquare

5. Fatorização de Imersões Isométricas

O objetivo desta seção é provar um teorema sobre fatorização de imersões isométricas publicado em 1971, por J. D. Moore [Mo] que essencialmente diz:

Toda imersão isométrica de um produto Riemanniano no espaço Euclidiano que verifica certa condição é um produto de imersões isométricas.

De agora em diante M^n denotará uma variedade Riemanniana conexa n -dimensional a qual se decompõe como produto Riemanniano das variedades $M_1^{n_1}, \dots, M_m^{n_m}$. Isto é, $M = M_1 \times \dots \times M_m$, onde $n = \sum_{i=1}^m n_i$ e $n_j = \dim M_j$, $1 \leq j \leq m$.

Seja $f : M^n \rightarrow Q^N(c)$ uma imersão isométrica.

5.1 Definição. Diremos que f é um *produto extrínseco*, se para todo X tangente a M_i e Y tangente a M_j com $i \neq j$, acontece que $\alpha(X, Y) = 0$, onde α é o tensor segunda forma fundamental de f .

Segue-se da definição (5.1) que, para cada $p = (p_1, \dots, p_m)$ em M , o tensor segunda forma fundamental de f em p verifica a igualdade seguinte: $\alpha(X, Y) = \sum_{i=1}^m \alpha_i(X_i, Y_i)$, onde

$X = \sum_{i=1}^m X_i$, $Y = \sum_{i=1}^m Y_i \in T_p M = \bigoplus_{i=1}^m T_{p_i} M_i$ e α_i é o tensor segunda forma fundamental de $f|_{M_i}$ em p_i , com $f|_{M_i} := f \circ i$, onde $i : M_i \rightarrow M$ é a inclusão canônica.

5.2 Observações. *Sejam M_1, M_2 variedades Riemannianas.*

- a) *Sejam $X_i \in \mathfrak{X}(M_i)$, $i = 1, 2$. Definimos um campo de vetores X sobre $M_1 \times M_2$ por*

$$X(p_1, p_2) := (X_1(p_1), 0) + (0, X_2(p_2)), \quad \forall (p_1, p_2) \in M_1 \times M_2 \quad (1)$$

Por abuso de linguagem escreveremos $X = X_1 + X_2$. Se Y é outro campo de vetores do tipo $Y_1 + Y_2$, onde $Y_i \in \mathfrak{X}(M_i)$, $i = 1, 2$, então a fórmula de Koszul mostra que

$$\nabla_X Y = \nabla_{X_1}^1 Y_1 + \nabla_{X_2}^2 Y_2, \quad (2)$$

onde ∇, ∇^1 e ∇^2 denotam as conexões Riemannianas de $M_1 \times M_2$, M_1 e M_2 respectivamente.

- b) Para cada $(p_1, p_2) \in M_1 \times M_2$, claramente $\{p_1\} \times M_2$ e $M_1 \times \{p_2\}$ são subvariedades totalmente geodésicas de $M_1 \times M_2$ isométricas a M_2 e M_1 , respectivamente.
- c) Sejam X, Y tangentes a $M_1 \times M_2$ em $(p_1, p_2) = p$, com $X \in T_{p_1}M_1$ e $Y \in T_{p_2}M_2$. Então a curvatura seccional do plano gerado por X e Y em p é nula. Isto é, $K_p(X, Y) = 0$. \square

Agora, estamos em condições de apresentar formalmente o teorema dado no começo desta seção.

5.3 Teorema (Moore). *Suponhamos que M_1, \dots, M_m são variedades Riemannianas conexas e seja $f : M_1 \times \dots \times M_m \rightarrow \mathbb{R}^N$ uma imersão isométrica do produto Riemanniano $M^n = M_1 \times \dots \times M_m$ no espaço euclideo. Se f é um produto extrínseco então existe uma decomposição ortogonal de $\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^{N_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{N_m}$ e imersões isométricas $f_i : M_i^{n_i} \rightarrow \mathbb{R}^{N_i}, 1 \leq i \leq m$, tais que $f = f_1 \times \dots \times f_m$.*

Demonstração. Provaremos o teorema para o caso em que M^n é produto de duas variedades Riemannianas.

Sejam M_1 e M_2 variedades Riemannianas conexas de dimensão n_1 e n_2 , respectivamente. Mostraremos explicitamente a decomposição ortogonal de \mathbb{R}^N e, para isto, utilizaremos o seguinte fato que provaremos enseguida:

- (3) *Dados X vetor tangente a $M_1 \times \{p_2\}$ em $(p_1, p_2) \in M$ e Y vetor tangente a $\{p'_1\} \times M_2$ em $(p'_1, p'_2) \in M$, então X e Y são ortogonais em \mathbb{R}^N .*

Com efeito, seja γ_1 uma geodésica minimizante em $\{p_1\} \times M_2$ ligando (p_1, p_2) a (p_1, p'_2) e seja γ_2 outra geodésica minimizante, agora em $M_1 \times \{p'_2\}$, ligando (p'_1, p'_2) a (p_1, p'_2) . Então é possível construir um campo referencial E_1, \dots, E_N definido em um conjunto aberto U de \mathbb{R}^N , que contenha as imagens de γ_1 e γ_2 , e verifique as seguintes duas condições para cada $q = (q_1, q_2) \in M \cap U$.

- (a) $E_1(q), \dots, E_{n_1}(q)$ são tangentes a $M_1 \times \{q_2\}$ e $E_{n_1+1}(q), \dots, E_n(q)$ são tangentes a $\{q_1\} \times M_2$, (isto é, o referencial é *adaptado*), e
- (b) $\langle \tilde{\nabla}_X E_a, E_b \rangle = 0, \forall X$ tangente a $U \cap (\{q_1\} \times M_2)$ e $\langle \tilde{\nabla}_Y E_s, E_r \rangle = 0, \forall Y$ tangente a $U \cap (M_1 \times \{q_2\})$, onde $\tilde{\nabla}$ é a conexão Riemanniana de \mathbb{R}^N e os índices a, b, r, s

variam da seguinte maneira:

$$1 \leq a, b \leq n_1, \quad n_1 + 1 \leq r, s \leq n, \quad n = n_1 + n_2$$

(isto é, o referencial é *compatível com a estrutura Riemanniana produto de M*).

Segue-se daí que E_1, \dots, E_{n_1} são constantes ao longo de γ_1 e E_{n_1+1}, \dots, E_n são constantes ao longo de γ_2 , pois, pela fórmula de Gauss, temos que

$$\tilde{\nabla}_Z E_a = \nabla_Z E_a + \alpha(Z, E_a), \quad \text{para todo } Z \text{ tangente a } M$$

Assim, considerando z tangente a $U \cap (\{p_1\} \times M_2)$, obtemos que $\tilde{\nabla}_z E_a = 0$ (já que, pela observação (5.2)(a), $\nabla_z E_a = 0$, e por hipótese $\alpha(z, E_a) = 0$). Daí, segue-se em particular que $\tilde{\nabla}_{\gamma_1'(t)} E_a = 0, \forall t$. (Isto é, $\frac{dE_a}{dt} = 0$). Portanto, E_a é constante ao longo de γ_1 para todo $a = 1, \dots, n_1$. Da mesma forma prova-se que E_r é constante ao longo de γ_2 para todo $r = n_1 + 1, \dots, n$. Por outro lado, como $X \in T_{(p_1, p_2)}(M_1 \times \{p_1\})$ e $Y \in T_{(p_1', p_2')}(\{p_1'\} \times M_2)$ existem constantes reais x_1, \dots, x_{n_1} e y_{n_1+1}, \dots, y_n tais que

$$(4) \quad X = \sum_{a=1}^{n_1} x_a E_a(p_1, p_2) \quad \text{e} \quad Y = \sum_{r=n_1+1}^n y_r E_r(p_1', p_2').$$

Usando o fato que os E_a 's e E_r 's são constantes ao longo de γ_1 e γ_2 , respectivamente, temos que $E_a(p_1, p_2) = E_a(p_1, p_2')$ e $E_r(p_1, p_2) = E_r(p_1, p_2')$.

Substituindo em (3), obtemos

$$(5) \quad X = \sum_{a=1}^{n_1} x_a E_a(p_1, p_2) \quad \text{e} \quad Y = \sum_{r=n_1+1}^n y_r E_r(p_1, p_2').$$

Portanto, de (5), segue-se que $\langle X, Y \rangle = 0$. Assim, temos provado a afirmação feita em (3). \square

Agora, consideremos \mathbb{R}^N com a estrutura de espaço vetorial usual e definamos os seguintes subespaços de \mathbb{R}^N

$$\mathbb{E}_1 := \text{ger}\{X \in \mathbb{R}^N : X \text{ é tangente a } M_1 \times \{p_2\}, \forall p_2 \in M_2\}$$

$$\mathbb{E}_2 := \text{ger}\{Y \in \mathbb{R}^N : Y \text{ é tangente a } \{p_1\} \times M_2, \forall p_1 \in M_1\}$$

De (3), segue-se que \mathbb{E}_1 e \mathbb{E}_2 são ortogonais, conseqüentemente podemos escolher um subespaço \mathbb{E}_0 de \mathbb{R}^N tal que $\mathbb{R}^N = \mathbb{E}_0 \oplus \mathbb{E}_1 \oplus \mathbb{E}_2$. Assim, \mathbb{R}^N é decomposto em uma soma direta ortogonal dos espaços \mathbb{E}_i 's. Agora, se consideramos $\mathbb{E}_0, \mathbb{E}_1, \mathbb{E}_2$ como variedades Riemannianas, então \mathbb{R}^N é produto Riemanniano de três variedades, cada uma com dimensão N_i , $i = 0, 1, 2$.

Agora, como segundo passo definiremos explicitamente as imersões isométricas f_i . Com efeito, sejam π_0, π_1 e π_2 as projeções naturais de \mathbb{R}^N sobre $\mathbb{E}_0, \mathbb{E}_1$ e \mathbb{E}_2 , respectivamente. Claramente, para cada $p_2 \in M_2$, a imersão isométrica $f : M_1 \times M_2 \rightarrow \mathbb{R}^N$ define uma imersão isométrica $f_{p_2} : M_1 \rightarrow \mathbb{R}^N$ dada por $f_{p_2}(p_1) = f(p_1, p_2)$ para todo $p_1 \in M_1$. Afirmamos que

(6) *A função $f_1 : M_1 \rightarrow \mathbb{E}_1$ dada por $f_1 = \pi_1 \circ f_{p_2}$ é uma imersão isométrica.*

De fato, f_1 é bem definida, isto é, f_1 independe da escolha de $p_2 \in M_2$. Para verificarmos isto, consideremos os pontos $p_1 \in M_1$, e p_2, p_2' em M_2 todos arbitrários e também consideremos uma curva $\gamma : [0, 1] \rightarrow \{p_1\} \times M_2$ ligando $(p_1, p_2) = \gamma(0)$ a $(p_1, p_2') = \gamma(1)$. Então os vetores tangentes de γ sempre pertencem a \mathbb{E}_2 , pois $\gamma'(t) \in T_{\gamma(t)}(\{p_1\} \times M_2) \subseteq \mathbb{E}_2$. Logo, $\pi_1(\gamma(0)) = \pi_1(\gamma(1)) = 0$. (Observe-se que $\mathbb{E}_2 = \text{ger}(\bigcup_{p_1 \in M_1} \{X \in \mathbb{R}^N : X \text{ tangente a } \{p_1\} \times M_2\})$).

Daí, obtemos que $\gamma(0)$ e $\gamma(1)$, possuem a mesma projeção em \mathbb{E}_1 . Com a identificação de (p_1, p_2) e (p_1, p_2') com $f(p_1, p_2)$ e $f(p_1, p_2')$, respectivamente, temos que

$$(\pi_2 \circ f_{p_2})(p_1) = \pi_1(f(p_1, p_2)) = \pi_1(f(p_1, p_2')) = (\pi_1 \circ f_{p_2'})(p_1).$$

Isto mostra que f_1 é bem definida.

Finalmente, como f_1 é composta de duas imersões isométricas, temos que f_1 é uma imersão isométrica. Isto prova a afirmação feita em (6). \square

De maneira análoga à definição de f_1 , define-se a imersão isométrica $f_2 : M_2 \rightarrow \mathbb{E}_2$. Por outra parte, como a função $\pi_0 \circ f : M \rightarrow \mathbb{E}_0$ é obviamente constante, temos que, para cada $(p_1, p_2) \in M$, $f(p_1, p_2) = (\text{constante}, f_1(p_1), f_2(p_2))$. Portanto, f é produto de imersões isométricas.

Observemos que a prova dada acima segue valendo se consideramos \mathbb{E}_0 como o subespaço nulo. Assim, concluímos que

$$f = f_1 \times f_2 \quad \text{e} \quad N_i = \dim \mathbb{E}_i, \quad i = 1, 2.$$

Portanto, temos provado o Teorema (5.3) no caso em que $m = 2$. Logo, por uma indução direta sobre o número de variedades consideradas M_i , mostra-se em geral. ■

Para terminar esta seção e portanto o Capítulo I, faremos a seguinte observação:

5.5 Observação. *Um resultado análogo ao Teorema (5.4) para o caso $c > 0$ é uma consequência deste mesmo Teorema (5.4). Para o caso $c < 0$ existe um resultado análogo devido a Takenchi [Ta]. □*

CAPÍTULO II

Imersões paralelas

O objetivo deste capítulo é estudar em detalhes as imersões paralelas. Para isto, na seção 1 definiremos e classificaremos geometricamente estas imersões em formas espaciais mediante um teorema devido a Ferus-Strübing. A seguir nas seções 2 e 3 mostraremos a classificação de duas grandes classes de imersões paralelas, a saber, as Subvariedades Umbílicas e seus Produtos Extrínsecos, e os Mergulhos Padrões de R -espaços Simétricos. A importância destas classes reside no fato que elas são os blocos básicos da classificação das imersões paralelas em formas espaciais. Este fato será visto no capítulo seguinte.

1. Caracterização geométrica das imersões paralelas.

Sejam $f : M^n \rightarrow \tilde{M}^{n+m}$ uma imersão isométrica. Usando as notações do capítulo anterior podemos dar a seguinte definição:

1.1 Definição. Diremos que f é uma imersão *paralela* se

$$\nabla_X \alpha = 0 \quad \text{para todo } X \in \mathfrak{X}(M). \quad (1)$$

A definição (1.1) nos diz que o tensor segunda forma fundamental de f verifica a seguinte equação:

$$\nabla_X^\perp (\alpha(Y, Z)) = \alpha(\nabla_X Y, Z) + \alpha(Y, \nabla_X Z) \quad (2)$$

para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, onde ∇ e ∇^\perp denotam a conexão de Levi-Civita de M e a conexão normal de f , respectivamente.

A palavra paralela na definição (1.1) vem do fato que α pode ser vista como uma seção paralela de um certo fibrado vetorial sobre M com respeito a uma conexão métrica deste fibrado.

1.2 Observação. Se $f : M^n \rightarrow \tilde{M}^{n+m}$ é uma imersão paralela, então para cada $p \in M$ o primeiro espaço normal de f em p , $N_1(p)$, tem dimensão constante.

Como nesta dissertação estamos interessados em classificar as imersões paralelas quando \tilde{M}^{n+m} é uma forma espacial. Portanto, nós daremos o seguinte teorema devido a Ferus-Strübing que caracterizam estas imersões mediante uma propriedade geométrica.

1.3 Teorema (Ferus-Strübing). Seja $f : M^n \rightarrow Q^{n+m}(c)$ um mergulho isométrico de uma variedade Riemanniana completa conexa n -dimensional M em uma forma espacial $Q^{n+m}(c)$. Então f é paralela se e somente se, para todo $p \in M$, a única isometria global ϕ do espaço ambiente $Q^{n+m}(c)$ determinada pelas condições seguintes:

$$\phi(f(p)) = f(p) \quad e \quad \phi_*(v) = \begin{cases} -v & \text{se } v \in T_p M \\ v & \text{se } v \in \nu_p(f), \end{cases}$$

leva $f(M)$ sobre $f(M)$.

Para provar que a condição do Teorema (1.3) é necessária, repetiremos o que foi feito por Strübing utilizando a Teoria de Frenet para curvas imersas em variedade Riemanniana e também certas propriedades simétricas de tais curvas. Para a prova da suficiência seguiremos o que foi feito por Ferus utilizando as propriedades dos espaços simétricos. Portanto, antes de provar o Teorema (1.3), começaremos dando uma rápida introdução da Teoria de Frenet para curvas em variedades Riemannianas.

No que resta desta seção \tilde{M} denotará uma variedade Riemanniana $(n + m)$ -dimensional com métrica \langle, \rangle e derivada covariante de Levi-Civita \tilde{D} ; e I denotará um intervalo aberto não vazio da reta real \mathbb{R} , a menos que digamos o contrário.

1.4 Definição. Diremos que $c : I \rightarrow \tilde{M}$ é uma curva de Frenet em \tilde{M} com osculador de posto r ($r \geq 1$) se c é uma curva diferenciável parametrizada com respeito ao comprimento de arco tal que para todo $s \in I$, suas derivadas de ordem superior

$$(i) \quad c'(s), \frac{\tilde{D}c'}{ds}(s), \dots, \frac{\tilde{D}^{(r-1)}c'}{ds}(s)$$

são linearmente independentes e

$$(ii) \quad c'(s), \frac{\tilde{D}c'}{ds}(s), \dots, \frac{\tilde{D}^{(r-1)}c'}{ds}(s), \frac{\tilde{D}^{(r)}c'}{ds}(s)$$

são linearmente dependentes em $T_{c(s)}\tilde{M}$.

1.5 Observação. Na definição (1.4), se $\tilde{M} = \mathbb{R}^{n+m}$, temos simplesmente que $\frac{\tilde{D}^{(i)}c'}{ds} = c^{(i+1)}$, onde $c^{(i+1)}$ é a $(i+1)$ -ésima derivada de c com respeito ao comprimento de arco.

No volume IV da referência [S], é provado que as condições (i) e (ii) da definição (1.4) são equivalentes a dizer que o r -referencial de Frenet $\mathbf{W}_1, \dots, \mathbf{W}_r$ da curva c é definido no intervalo aberto I , e que as funções curvaturas de ordem superior $k_1, \dots, k_r : I \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazem a seguinte condição:

$$k_i(s) > 0, \quad 1 \leq i \leq r-1 \quad \text{e} \quad k_r(s) = 0 \quad (3)$$

para todo $s \in I$. Neste caso, temos para a curva c as conhecidas fórmulas de Frenet:

$$\frac{\tilde{D}\mathbf{W}_i}{ds} = -k_{i-1}\mathbf{W}_{i-1} + k_i\mathbf{W}_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq r. \quad (4)$$

Daqui por diante usaremos a seguinte convenção:

$$k_0(s) := \|c'(s)\| \quad \text{e} \quad \mathbf{W}_0(s) := \mathbf{W}_{r+1}(s) := 0 \in T_{c(s)}\tilde{M}, \quad \forall s \in I. \quad (5)$$

A seguir uma propriedade de simetria das curvas de Frenet:

1.6 Lema. Seja $c : I \rightarrow \tilde{M}$ uma curva de Frenet em \tilde{M} com osculador de posto r . Suponhamos que $s \in I \Leftrightarrow -s \in I$, e além disso que todas as funções curvaturas de c são funções pares. Então para qualquer isometria $\phi : \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$ que cumpra com

$$\phi(c(0)) = c(0) \quad \text{e} \quad \phi_*(\mathbf{W}_i(0)) = (-1)^i \mathbf{W}_i(0), \quad 1 \leq i \leq r, \quad (6)$$

a equação

$$\phi(c(s)) = c(-s) \quad \text{é satisfeita por todo} \quad s \in I.$$

Demonstração. Nós daremos somente o esqueleto da prova. Com efeito, deve-se considerar a curva $\tilde{c} : I \rightarrow \tilde{M}$ dada por $\tilde{c}(s) := \phi(c(-s)), \forall s \in I$, e mostrar que \tilde{c} é uma curva de Frenet em \tilde{M} com osculador de posto r , e que satisfaz o mesmo sistema de equações ordinárias com uma condição inicial que coincide com a de c . Para isto, se usa a equivalência citada em (3). Daí se segue facilmente a equação requerida do Lema (1.5). (Para maiores detalhes ver [St]). ■

1.7 Observação. Para o caso de $\tilde{M} = Q^{n+m}(c)$ no Lema (1.6), existe pelo menos uma isometria $\phi : \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$ satisfazendo (6). □

Daremos agora outro lema que diz a grosso modo que as curvas imagem de geodésicas por imersões paralelas são curvas de Frenet. Formalmente:

1.8 Lema. Seja $f : M^n \rightarrow \tilde{M}^{n+m}$ uma imersão isométrica. Denotamos por $\gamma : I \rightarrow M$ uma geodésica normal de M , e por $c := f \circ \gamma : I \rightarrow \tilde{M}$ sua curva imagem em \tilde{M} . Suponhamos que f é paralela, e por causa da observação (1.2) denotemos por

$$\ell := \text{a dimensão constante de } N_1(\gamma(s)), \forall s \in I. \tag{7}$$

Então existe $r \in \mathbb{N}_+$ com

$$r \leq \min\{2n, 2\ell + 1\} \quad (\leq n + m) \tag{8}$$

e existem campos de vetores diferenciáveis paralelos E_0, \dots, E_r em M ao longo de γ tal que c é uma curva de Frenet em \tilde{M} com osculador de posto r , e cujas funções curvaturas k_0, \dots, k_r e respectivamente o r -referencial de Frenet $\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_r$ de c verificam para todo $i \in \mathbb{N}$, as seguintes condições:

a) se $i \leq r$:

$$(9_i) \quad k_{i-1} : I \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{é constante e positiva;}$$

b) se $2i + 1 \leq r$:

$$(10_i) \quad \mathbb{W}_{2i+1} = f_*(E_{2i+1});$$

c) se $2i \leq r$:

$$(11_i) \quad \mathbb{W}_{2i} = \alpha(\gamma', E_{2i});$$

em particular, \mathbb{W}_{2i} é uma seção paralela em $\nu(f)$ ao longo de γ .

Demonstração. Descobriremos r e provaremos que (9_i) , (10_{2j+1}) , e (11_{2k}) são válidas para todo i , $2j + 1$, $2k \leq \rho$ por indução sobre $\rho = 1, 2, \dots$

Para $\rho := 1$. Temos três casos $i = 1$, $j = 0$, $k = 0$.

Caso $i = 1$: c é parametrizada pelo comprimento de arco, então $\langle c', c' \rangle = 1$, mas $k_0(s) := \|c'(s)\|$, $\forall s \in I$. Portanto, (9_1) é válido.

Caso $j = 0$: $\mathbb{W}_1 = c' = (f \circ \gamma)' = f_*(\gamma')$, se fazemos $E_1 := \gamma'$, então $\mathbb{W}_1 = f_*(E_1)$. Portanto, (10_1) é válido.

Caso $k = 0$: $\mathbb{W}_0 = 0 = \alpha(\gamma', 0)$, se fazemos $E_0 := 0$, então $\mathbb{W}_0 := \alpha(\gamma', E_0)$. Portanto, (11_0) é válido.

Agora, suponhamos que $\rho \in \{1, \dots, n + m\}$ e que (9_i) , (10_{2j+1}) e (11_{2k}) são válidos para i , $2j + 1$, $2k \leq \rho$.

Se $\frac{\tilde{D}\mathbb{W}_\rho}{ds} + k_{\rho-1}\mathbb{W}_{\rho-1} = 0$, então a tese do teorema é válida com $r := \rho$. De outro modo

$$\frac{\tilde{D}\mathbb{W}_\rho}{ds} + k_{\rho-1}\mathbb{W}_{\rho-1} \neq 0. \quad (12)$$

(Isto é, o lado esquerdo de (12) não se anula pelo menos para algum $s \in I$). Daqui, distingüimos dois casos: ρ ímpar ou par.

Caso 1. Fazemos $\rho := 2h + 1$. Então temos que verificar (9_{2h+2}) e (11_{2h+2}) .

Neste caso (10_{2h+1}) fornece-nos:

$$\begin{aligned}\frac{\tilde{D}\mathbf{V}_{2h+1}}{ds} &= \frac{\tilde{D}}{ds}f_*(E_{2h+1}) = \left(\frac{\tilde{D}}{ds}f_*(E_{2h+1})\right)^T + \left(\frac{\tilde{D}}{ds}f_*(E_{2h+1})\right)^\perp \\ &= f_*(\nabla_{\frac{d}{ds}}E_{2h+1}) + \alpha(\gamma', E_{2h+1}),\end{aligned}$$

e portanto, já que, E_{2h+1} é paralelo por suposição, teremos

$$(13) \quad \frac{\tilde{D}\mathbf{V}_{2h+1}}{ds} = \alpha(\gamma', E_{2h+1}).$$

Já que, γ', E_{2h+1} são paralelos ao longo de γ e f é paralela, então de (13), (9_{2h+1}) e (11_{2h}) , obteremos que

$$\frac{\tilde{D}\mathbf{V}_{2h+1}}{ds} + k_{2h}\mathbf{V}_{2h} \text{ é paralelo em } \nu(f) \text{ ao longo de } \gamma.$$

Portanto, $k_{2h+1} = \left\| \frac{\tilde{D}\mathbf{V}_{2h+1}}{ds} + k_{2h}\mathbf{V}_{2h} \right\|$ é constante e positiva. Isto prova (9_{2h+2}) , e além disso,

$$\mathbf{V}_{2h+2} = \frac{1}{k_{2h+1}} \left(\frac{\tilde{D}\mathbf{V}_{2h+1}}{ds} + k_{2h}\mathbf{V}_{2h} \right) = \alpha(\gamma', \frac{1}{k_{2h+1}}(E_{2h+1} + k_{2h}E_{2h})),$$

portanto, \mathbf{V}_{2h+2} satisfaz (11_{2h+2}) com o campo de vetores paralelo

$$E_{2h+2} := \frac{1}{k_{2h+2}}(E_{2h+1} + k_{2h}E_{2h}),$$

ao longo de γ .

Caso 2. Fazemos $\rho := 2h$. Então teremos que verificar (9_{2h+1}) e (10_{2h+1}) .

Com efeito:

$$\frac{\tilde{D}\mathbf{V}_{2h}}{ds} = \left(\frac{\tilde{D}}{ds}\alpha(\gamma', E_{2h})\right)^T + \left(\frac{\tilde{D}}{ds}\alpha(\gamma', E_{2h})\right)^\perp = -f_*(A_{\alpha(\gamma', E_{2h})}(\gamma')) + \nabla_{\frac{d}{ds}}^\perp \alpha(\gamma', E_{2h}),$$

mas, f é paralela, portanto:

$$(14) \quad \frac{\tilde{D}\mathbf{V}_{2h}}{ds} = -f_*(A_{\alpha(\gamma', E_{2h})}(\gamma')).$$

Por outro lado, se Y é qualquer campo de vetores paralelo em M ao longo de γ , temos que

$$\begin{aligned}\langle \nabla_{\frac{d}{ds}} A_{\alpha(\gamma', E_{2h})}(\gamma'), Y \rangle &= \frac{d}{ds} \langle A_{\alpha(\gamma', E_{2h})}(\gamma'), Y \rangle = \frac{d}{ds} \langle \alpha(\gamma', E_{2h}), \alpha(\gamma', Y) \rangle \\ &= \langle \nabla_{\frac{d}{ds}}^\perp \alpha(\gamma', E_{2h}), \alpha(\gamma', Y) \rangle + \langle \alpha(\gamma', E_{2h}), \nabla_{\frac{d}{ds}}^\perp \alpha(\gamma', Y) \rangle,\end{aligned}$$

daqui, $A_{\alpha(\gamma', E_{2h})}(\gamma')$ é paralelo em M ao longo de γ . Portanto, de (10_{2h-1}) e (14), temos que

$$\frac{\tilde{D}\mathbb{W}_{2h}}{ds} + k_{2h-1}\mathbb{W}_{2h-1} = f_*(-A_{\alpha(\gamma', E_{2h})}(\gamma') + k_{2h-1}E_{2h-1})$$

e $-A_{\alpha(\gamma', E_{2h})}(\gamma') + k_{2h-1}E_{2h-1}$ é paralelo em M ao longo de γ . Isto implica que

$$k_{2h} = \left\| \frac{\tilde{D}\mathbb{W}_{2h}}{ds} + k_{2h-1}\mathbb{W}_{2h-1} \right\| \text{ é constante e positiva,}$$

o qual prova (9_{2h+1}), e \mathbb{W}_{2h+1} satisfaz (10_{2h+1}) com o campo vetorial paralelo

$$E_{2h+1} := \frac{1}{k_{2h}}(-A_{\alpha(\gamma', E_{2h})}(\gamma') + k_{2h-1}E_{2h-1})$$

ao longo de γ .

Finalmente a desigualdade (8) é uma conseqüência trivial de (10) e (11). Assim, temos provado completamente o Lema (1.8). ■

O seguinte teorema que apresentaremos implicará finalmente em nossa condição necessária do começo desta seção.

1.9 Teorema. *Seja $f : M^n \rightarrow \tilde{M}^{n+m}$ uma imersão isométrica. Sejam $p \in M$ e $\varepsilon \in]0, +\infty]$. Suponhamos que f é paralela e que $U = \exp_p(B_\varepsilon(0))$ e $\tilde{U} = \exp_{f(p)}(\tilde{B}_\varepsilon(0))$ sejam duas vizinhanças de p em M e $f(p)$ em \tilde{M} , respectivamente, onde $B_\varepsilon(0)$ e $\tilde{B}_\varepsilon(0)$ denotam as bolas abertas de raio ε em T_pM e $T_{f(p)}\tilde{M}$, respectivamente ambas centradas no 0 (origem respectiva). Além disso, seja $\phi : \tilde{U} \rightarrow \tilde{U}$ uma isometria de \tilde{U} tal que*

$$(15) \quad \phi(f(p)) = f(p)$$

$$(16) \quad \phi_*(v) = -v \quad \text{para todo } v \in T_pM,$$

$$(17) \quad \phi_*(v) = v \quad \text{para todo } v \in \nu_p(f).$$

Então:

$$\phi \circ f \circ \exp_p(v) = f \circ \exp_p(-v) \quad \text{para todo } v \in B_\varepsilon(0).$$

Em particular, a isometria ϕ de \tilde{U} leva $f(U)$ sobre si mesmo.

Demonstração. Tomemos um vetor unitário $v_0 \in T_p M$ e $\tau \in [0, \varepsilon[$, e consideremos a geodésica $\gamma :] - \varepsilon, \varepsilon[\rightarrow M$ definida por $\gamma(t) := \exp_p(tv_0)$, $\forall t \in] - \varepsilon, \varepsilon[$. Já que, f é uma imersão isométrica, temos que $f(U) \subseteq \tilde{U}$, portanto a curva imagem de γ por f , $c := f \circ \gamma$, leva $] - \varepsilon, \varepsilon[$ no domínio de ϕ , isto é, $c(] - \varepsilon, \varepsilon[) \subseteq \tilde{U}$. Daqui segue-se que

$$\phi(c(0)) = \phi(f(\gamma(0))) = \phi(f(p)) = f(p) = c(0).$$

De acordo com o Lema (1.8), os vetores de Frenet $\mathbb{W}_1(0), \dots, \mathbb{W}_r(0)$ de c , satisfazem para todo $i = 1, \dots, r$ que:

$$\mathbb{W}_i(0) \in \begin{cases} T_p M, & \text{se } i \text{ é ímpar} \\ \nu_p(f), & \text{se } i \text{ é par.} \end{cases}$$

Portanto, devido a (16) e (17), para todo $i = 1, \dots, n$ temos que

$$\phi_*(\mathbb{W}_i(0)) = \begin{cases} -\mathbb{W}_i(0), & \text{se } i \text{ é ímpar} \\ \mathbb{W}_i(0), & \text{se } i \text{ é par} \end{cases} = (-1)^i \mathbb{W}_i(0).$$

Além disso, o Lema (1.8), implica que as funções curvatura de c são constantes e positivas, logo, são funções pares. Substituindo \tilde{M} por \tilde{U} segue-se do Lema (1.6) que

$$\phi \circ f \circ \exp_p(\tau v) = \phi(c(\tau)) = c(-\tau) = f \circ \exp_p(-\tau v).$$

Isto prova o Teorema (1.9). ■

1.10 Observação. Se $\tilde{M} = Q^{n+m}(c)$ no Teorema (1.9), então sempre existem vizinhanças U de p em M e \tilde{U} de $f(p)$ em $Q^{n+m}(c)$ do tipo mencionadas no teorema e também existe uma isometria $\phi : \tilde{U} \rightarrow \tilde{U}$ que satisfaz (15)-(17).

Agora podemos provar a condição necessária do Teorema (1.3).

Demonstração. (\Rightarrow) A condição necessária do Teorema (1.3) fica um simples corolário do Teorema (1.9), já que, no caso de curvatura constante existe sempre uma isometria que verifica as condições do Teorema (1.9). A qual vem do fato que o grupo de isotropia de um ponto x em $Q^{n+m}(c)$ é transitivo no conjunto das bases ortonormais de $T_x Q^{n+m}(c)$. □

Notemos que na prova da condição necessária do Teorema (1.3), não usamos o fato que f é um mergulho somente, usamos que é uma imersão. Antes de provar o recíproco do Teorema (1.3), necessitaremos definir o conceito de espaço simétrico e algumas propriedades destes espaços.

1.11 Definição. Um *espaço simétrico* é uma variedade Riemanniana M tal que, para cada ponto $p \in M$, existe uma isometria $\tau_p : M \rightarrow M$ que deixa fixo o ponto p e inverte todas as geodésicas que passam por esse ponto. (Isto é, se $\gamma : I \rightarrow M$ é uma geodésica tal que $0 \in I$ e $\gamma(0) = p$, então $\tau_p(\gamma(t)) = \gamma(-t)$, $\forall t$).

1.12 Lema. Seja $\gamma : I \rightarrow M$ uma geodésica em M espaço simétrico e sejam $p = \gamma(0)$ e $q = \gamma(t_0)$, onde $0, t_0 \in I$. Então $\tau_q \tau_p(\gamma(t)) = \gamma(t + 2t_0)$, (aqui estamos assumindo que $\gamma(t)$ e $\gamma(t + 2t_0)$ estão definidos). Além disso, $\tau_q \tau_p$ preserva campos vetoriais paralelos em M ao longo de γ .

Demonstração. Seja $\beta(t) = \gamma(t + t_0)$. Então β é uma geodésica e $\beta(0) = \gamma(t_0) = q$. Portanto, $\tau_q \tau_p(\gamma(t)) = \tau_q(\gamma(-t)) = \tau_q(\gamma(-(t + t_0) + t_0)) = \tau_q(\beta(-(t + t_0))) = \beta(t + t_0) = \gamma(t + 2t_0)$.

Agora, se V é um campo vetorial paralelo ao longo de γ então $(\tau_p)_*V$ é paralelo (já que, τ_p é uma isometria), além disso, $(\tau_p)_*V(0) = -V(0)$. Daqui, $(\tau_p)_*V(t) = -V(-t)$. Portanto, $(\tau_q)_*(\tau_p)_*(V(t)) = V(t + 2t_0)$. ■

1.13 Corolário. *Todo espaço simétrico é completo.*

Demonstração. O Lema (1.10), mostra que todas as geodésicas podem ser estendidas indefinidamente. ■

1.14 Corolário. *Seja M um espaço simétrico. Então, para cada $p \in M$, a isometria τ_p é única.*

Demonstração. Se duas isometrias coincidem em um ponto e também as diferenciais coincidem naquele ponto, então as duas isometrias coincidem. ■

Agora estamos em condições de provar a suficiência do Teorema (1.3).

Demonstração. (\Leftarrow) Daremos somente a prova para o caso $c = 0$. Para isto, primeiro provaremos que M é um espaço simétrico e logo usando as fórmulas de Gauss e Weingarten e a equação de Codazzi para concluir que f é paralela. Com efeito, os fatos de $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ ser um mergulho isométrico de uma variedade Riemanniana completa conexa em \mathbb{R}^{n+m} , e que para cada $p \in M$, existe única isometria $\phi : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ que fixa $f(p)$, e sua diferencial em $f(p)$ fixa $\nu_p(f)$ e reflete $f_*(T_p M)$ em torno de $f(p)$, e tal que $\phi(f(M)) \subseteq f(M)$, nos dizem que existe uma única isometria $\tau_p : M \rightarrow M$ que fixa o ponto p e é definida pela seguinte igualdade $f \circ \tau_p = \phi \circ f$.

Daqui, segue-se claramente que M é um espaço simétrico.

Sejam dados $p \in M$ e $v \in T_p M$ arbitrários, e seja dada uma geodésica γ em M com $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$. Denotando por $\tilde{\gamma} := f \circ \gamma$ a curva imagem de γ por f , temos, pelas identificações usuais e pelas fórmulas de Gauss e Weingarten, que

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma}'(0) &= f_*(v), \quad \tilde{\gamma}''(0) = \dot{\nabla}_{\tilde{\gamma}'} \tilde{\gamma}' = \alpha(v, v) \\ \tilde{\gamma}'''(0) &= -f_*(A_{\alpha(v,v)}(v)) + \nabla_v^\perp \alpha(V, V),\end{aligned}$$

onde V é um campo de vetores de M ao longo de γ tal que $V(0) = v$.

Por outro lado, o fato de γ ser uma geodésica implicam que $\nabla_v^\perp \alpha(V, V) = (\nabla_v \alpha)(V, V)$. Portanto, $\tilde{\gamma}'''(0) = -f_*(A_{\alpha(v,v)}(v)) + (\nabla_v \alpha)(V, V)$. Daí, usando a simetria de M , temos que $(\tilde{\gamma}(-t))^\perp = (\tilde{\gamma}(t))^\perp$, onde $(\cdot)^\perp$ é a projeção normal sobre $\nu_p(f)$, (pois $\tilde{\gamma}(-t) = f(\gamma(-t)) = f(\tau_p(\gamma(t))) = \phi(f(\gamma(t))) = \phi(\tilde{\gamma}(t))$ e ϕ fixa $\nu_p(f)$). Logo $(\tilde{\gamma}'''(0))^\perp = 0$, isto é,

$$(\nabla_v \alpha)(V, V) = 0. \tag{18}$$

Mas como $v \in T_p M$ é arbitrário, segue-se de (18), que para qualquer $x, y \in T_p M$ $(\nabla_{x+y} \alpha)(X + Y, X + Y) = 0$, onde X, Y são campos de vetores em M ao longo de γ tais que $X(0) = x, Y(0) = y$. Então pela equação de Codazzi e a simetria de $\nabla \alpha$, temos que

$$(\nabla_{x+y} \alpha)(X, Y) = 0 \quad \text{e} \quad (\nabla_x \alpha)(X, Y) = -(\nabla_y \alpha)(X, Y). \tag{19}$$

Daí, se Z é outro campo de vetores em M ao longo de γ com $Z(0) = z \in T_p M$, segue-se de (19) que

$$0 = (\nabla_{x+y+z}\alpha)(X + Y + Z, X + Y + Z) = 2(\nabla_x\alpha)(Y, Z).$$

Portanto, $(\nabla_x\alpha)(Y, Z) = 0$. Já que $p \in M$ foi escolhido arbitrariamente, podemos concluir que f é paralela.

Isto termina com a prova do Teorema (1.3). ■

1.15 Observação. *Sejam $M \xrightarrow{g} M' \xrightarrow{f} M''$ imersões isométricas. Se f é paralela e verifica:*

$$\alpha^f(g_*(x), \eta) = 0 \quad \text{para todo } p \in M, x \in T_p M \quad \text{e} \quad \eta \in \nu_p(g), \quad (20)$$

então temos a equivalência:

$$g \text{ é paralela} \Leftrightarrow f \circ g \text{ é paralela.}$$

A prova da observação (1.15) segue diretamente da observação (4.7) do Capítulo I e da definição (1.1) deste capítulo. Mais adiante veremos que a condição (20) é essencial (para isto, daremos um contra exemplo). Portanto, em geral a composição de imersões paralelas não é paralela.

2. Subvariedades umbílicas e seus produtos extrínsecos.

Nesta seção definiremos e classificaremos a primeira classe básica de imersões paralelas em formas espaciais.

2.1 Definição. *Seja \tilde{M}^{n+m} uma variedade Riemanniana. Diremos que uma imersão isométrica $f : M^n \rightarrow \tilde{M}^{n+m}$ é umbílica em $p \in M$ se o tensor segunda forma fundamental de f em p satisfaz*

$$\langle \alpha(X, Y), \eta \rangle(p) = \lambda(p) \langle X, Y \rangle(p), \quad \lambda(p) \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e todo $\eta \in \mathfrak{X}(M)^\perp$; aqui usamos \langle, \rangle para indicar a métrica em \tilde{M} e a métrica induzida por f em M . Diremos que f é uma imersão *umbílica* se é umbílica

em todo ponto de M .

2.2 Definição. Dada $f : M^n \rightarrow \tilde{M}^{n+m}$ imersão isométrica, definimos o *vetor curvatura média* H de f por

$$H := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \alpha(X_i, X_i), \quad (2)$$

onde α é o tensor segunda forma fundamental de f , e $X_1, \dots, X_n \in \mathfrak{X}(M)$ formam um campo referencial local ortonormal. Como α é um tensor, para cada $p \in M$, temos que $H(p)$ é bem definido.

Das definições dadas acima claramente as seguintes afirmações são equivalentes:

$$(2.1.1) \quad f \text{ é umbílica em } p \in M;$$

$$(2.1.2) \quad A_\eta = \langle H(p), \eta \rangle I, \quad \eta \in T_p M^\perp;$$

$$(2.1.3) \quad \alpha(X, Y) = \langle X, Y \rangle H(p), \quad X, Y \in T_p M;$$

aqui H é o vetor curvatura média de f ; A_η é o operador padrão de f com respeito a η ; e I é a aplicação identidade de $T_p M$.

A seguir veremos que para $n \geq 2$, toda imersão umbílica $f : M^n \rightarrow Q^{n+m}(c)$ com M conexo é uma imersão paralela. Para isto, utilizaremos as seguintes observações com respeito a estas imersões umbílicas.

2.3 Observações. a) Para cada $\eta \in \mathfrak{X}(M)^\perp$ unitário, λ definida por (1) torna-se uma aplicação diferenciável de M em \mathbb{R} a qual é constante.

b) O vetor curvatura média H de f é paralelo com respeito à conexão normal de f . Isto é, $\nabla_X^\perp H = 0, \forall X \in \mathfrak{X}(M)$.

c) Uma consequência óbvia de (b) é que $\|H\|$ é constante ao longo de M .

Demonstração. (a) O fato que λ é diferenciável é claro. Portanto, somente falta verificar que λ é constante. Para isto, tomemos um ponto $p_0 \in M$ fixo e uma vizinhança aberta U

de p_0 em M . Já que a restrição de f a U segue sendo umbílica, temos que

$$\langle \alpha(X, Y), \eta \rangle = \lambda \langle X, Y \rangle \quad \text{e} \quad \langle \alpha(Z, Y), \eta \rangle = \lambda \langle Z, Y \rangle, \quad (3)$$

para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(U)$. Mas como $\langle \alpha(X, Y), \eta \rangle = \langle A_\eta X, Y \rangle = -\langle \tilde{\nabla}_X \eta, Y \rangle$, então de (3), segue-se claramente que

$$-\langle \tilde{\nabla}_X \eta, Y \rangle = \lambda \langle X, Y \rangle \quad \text{e} \quad -\langle \tilde{\nabla}_Z \eta, Y \rangle = \lambda \langle Z, Y \rangle \quad (4)$$

para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(U)$. Assim, derivando em (4) a primeira equação em relação a Z , e a segunda em relação a X , obtemos para todo $Y \in \mathfrak{X}(U)$ as seguintes equações:

$$\begin{cases} -\langle \tilde{\nabla}_Z \tilde{\nabla}_X \eta, Y \rangle = \langle Z(\lambda)X, Y \rangle + \lambda \langle \tilde{\nabla}_Z X, Y \rangle \\ -\langle \tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Z \eta, Y \rangle = \langle X(\lambda)Z, Y \rangle + \lambda \langle \tilde{\nabla}_X Z, Y \rangle. \end{cases} \quad (5)$$

Logo, restando ambas equações em (5), e usando o fato que $[X, Z] = \tilde{\nabla}_X Z - \tilde{\nabla}_Z X$, temos que

$$\langle \tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Z \eta - \tilde{\nabla}_Z \tilde{\nabla}_X \eta, Y \rangle = \langle Z(\lambda)X - X(\lambda)Z, Y \rangle - \lambda \langle [X, Z], Y \rangle \quad (6)$$

mas por (4), $-\lambda \langle [X, Z], Y \rangle = \langle \tilde{\nabla}_{[X, Z]} \eta, Y \rangle$, portanto, substituindo esta igualdade em (6), obtemos que

$$\langle \tilde{R}(X, Y)\eta, Y \rangle = \langle Z(\lambda)X - X(\lambda)Z, Y \rangle. \quad (7)$$

Mas, devido à fórmula (1) dada na seção 2 do Capítulo I, temos que $\tilde{R}(X, Y)\eta = 0$. Assim, $Z(\lambda)X - X(\lambda)Z = 0$, $\forall X, Z \in \mathfrak{X}(U)$. Daqui, escolhendo X e Z linearmente independentes, temos que $X(\lambda) = 0$, $\forall X \in \mathfrak{X}(U)$, donde λ constante sobre U .

Até agora, temos provado que $\{p \in M : \lambda(p) = \lambda(p_0)\}$ é aberto. Claramente é também fechado e pela conexão de M coincide com M . \square

(b) Usando (2.1.3), temos que

$$\begin{aligned} (\nabla_X \alpha)(Y, Z) &= \nabla_X^\perp(\alpha(Y, Z)) - \alpha(\nabla_X Y, Z) - \alpha(Y, \nabla_X Z) \\ &= \nabla_X^\perp(\langle X, Z \rangle H) - \langle \nabla_X Y, Z \rangle H - \langle Y, \nabla_X Z \rangle H \\ &= \langle Y, Z \rangle \nabla_X^\perp H, \end{aligned} \quad (8)$$

para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Daqui, pela equação de Codazzi para o caso de curvatura seccional constante, obtemos que

$$\langle Y, Z \rangle \nabla_X^\perp H = \langle X, Z \rangle \nabla_Y^\perp H \quad \text{para todo } X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M).$$

Assim, escolhendo $Y = Z \neq 0$ e ortogonal a X concluímos que H é paralelo. ■

2.4 Proposição. *Para $n \geq 2$. Toda imersão umbílica $f : M^n \rightarrow Q^{n+m}(c)$ com M conexa é uma imersão paralela.*

Demonstração. De (8), temos que $(\nabla_X \alpha)(Y, Z) = \langle Y, Z \rangle \nabla_X^\perp H$, $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Portanto, concluímos pela observação (2.3)(b), que f é paralela. ■

Da proposição (2.4) e da observação (1.14), segue-se claramente que a composição de uma imersão paralela e uma imersão umbílica é ainda uma imersão paralela.

Para visualizar melhor as imersões umbílicas de formas espaciais daremos sua classificação. Para isto, utilizaremos as seguintes observações:

2.5 Observações. a) *Seja M^n uma variedade diferenciável. Sejam \langle, \rangle_1 e \langle, \rangle_2 duas métricas Riemannianas conformes em M . (Isto é, existe uma função diferenciável $\mu : M \rightarrow \mathbb{R}$, positiva, tal que $\langle X, Y \rangle_2 = \mu \langle X, Y \rangle_1, \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$). Sejam ∇^1 e ∇^2 as conexões Riemannianas de (M, \langle, \rangle_1) e (M, \langle, \rangle_2) , respectivamente. Então a conexão ∇^2 é dada por*

$$\nabla_X^2 Y = \nabla_X^1 Y + S(X, Y), \quad (9)$$

onde $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $S(X, Y) := \frac{1}{2\mu} \{X(\mu)Y + Y(\mu)X - \langle X, Y \rangle_1 \text{grad}_1(\mu)\}$, e $\text{grad}_1(\mu)$ é calculado por $X(\mu) := \langle X, \text{grad}_1(\mu) \rangle_1$.

b) *Seja \langle, \rangle_1 uma métrica Riemanniana de \tilde{M}^{n+m} tal que $f : M^n \rightarrow \tilde{M}^{n+m}$ é uma imersão umbílica. Se mudarmos a métrica \langle, \rangle_1 para uma métrica \langle, \rangle_2 conforme com \langle, \rangle_1 , então a imersão $f : M^n \rightarrow (\tilde{M}^{n+m}, \langle, \rangle_2)$ permanece umbílica.*

Demonstração. (a) Como ∇^2 é simétrica obviamente, basta mostrar que ∇^2 dada por (9) é compatível com \langle, \rangle_2 , ou seja, que

$$X \langle Y, Z \rangle_2 = \langle \nabla_X^2 Y, Z \rangle_2 + \langle Y, \nabla_X^2 Z \rangle_2.$$

Com efeito, o primeiro membro da igualdade acima é

$$X\langle Y, Z \rangle_2 = X(\mu)\langle Y, Z \rangle_1 + \mu\langle \nabla_X^1 Y, Z \rangle_1 + \mu\langle Y, \nabla_X^1 Z \rangle_1,$$

e o segundo

$$\begin{aligned} \langle \nabla_X^2 Y, Z \rangle_2 + \langle Y, \nabla_X^2 Z \rangle_2 &= \mu\{\langle S(X, Y), Z \rangle_1 + \langle Y, S(X, Z) \rangle_1\} + \\ &+ \mu\langle \nabla_X^1 Y, Z \rangle_1 + \mu\langle Y, \nabla_X^1 Z \rangle_1. \end{aligned}$$

Portanto, basta mostrar que

$$X(\mu)\langle Y, Z \rangle_1 = \mu\{\langle S(X, Y), Z \rangle_1 + \langle Y, S(X, Z) \rangle_1\},$$

o que decorre de um cálculo direto. \square

(b) Usaremos as notações dadas na observação (2.5)(a), para esta prova. Sabemos que, $f : M^n \rightarrow (\tilde{M}^{n+m}, \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$ é umbílica se $-\langle \nabla_X^1 \eta, Y \rangle = \lambda \langle X, Y \rangle_1$, para todo $\eta \in \mathfrak{X}(M)^\perp$ e todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Então basta provar que

$$-\left\langle \nabla_X^2 \left(\frac{\eta}{\sqrt{\mu}} \right), Y \right\rangle_2 = \tilde{\lambda} \langle X, Y \rangle_2. \quad (10)$$

Com efeito, o primeiro membro de (10) diz

$$-\left\langle \nabla_X^2 \left(\frac{\eta}{\sqrt{\mu}} \right), Y \right\rangle_2 = -\mu \left\langle \nabla_X^1 \left(\frac{\eta}{\sqrt{\mu}} \right), Y \right\rangle_1 - \mu \left\langle S \left(X, \frac{\eta}{\sqrt{\mu}} \right), Y \right\rangle_1. \quad (11)$$

Substituindo em (11), as seguintes igualdades:

$$\nabla_X^1 \left(\frac{\eta}{\sqrt{\mu}} \right) = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \nabla_X^1 \eta + X \left(\frac{1}{\sqrt{\mu}} \right) \eta \quad \text{e} \quad S \left(X, \frac{\eta}{\sqrt{\mu}} \right) = \frac{1}{2\mu} \left\{ X(\mu) \frac{\eta}{\sqrt{\mu}} + \frac{\eta(\mu)}{\sqrt{\mu}} X \right\}$$

obtemos que

$$-\left\langle \nabla_X^2 \left(\frac{\eta}{\sqrt{\mu}} \right), Y \right\rangle_2 = -\frac{\mu}{\sqrt{\mu}} \langle \nabla_X^1 \eta, Y \rangle_1 - \frac{1}{2\sqrt{\mu}} \eta(\mu) \langle X, Y \rangle_1. \quad (12)$$

Portanto, substituindo $\langle \nabla_X^1 \eta, Y \rangle_1 = -\lambda \langle X, Y \rangle_1$ em (12), obteremos (10) com $\tilde{\lambda} = \left(\frac{2\lambda\mu - \eta(\mu)}{2\mu\sqrt{\mu}} \right)$. \blacksquare

2.6 Lema. *Seja $f : M^n \rightarrow Q^{n+m}(c)$ umbílica, $n \geq 2$. Então as seguintes afirmações são válidas:*

- a) M^n possui curvatura seccional constante $k = c + \|H\|^2$.
- b) Se f não é totalmente geodésica, então sua codimensão pode reduzir-se a 1. Claramente neste caso $\|H\| \neq 0$.

Demonstração. (a) Sejam $p \in M$, e $x, y \in T_p M$ ortonormais. Então pela equação de Gauss:

$$K_p(x, y) = c + \langle \alpha(x, x), \alpha(y, y) \rangle - \|\alpha(x, y)\|^2$$

e pela observação (2.3)(c), segue-se que $K_p(x, y) = c + \|H\|^2$ é constante e não depende de x, y e p . \square

(b) A prova segue diretamente do corolário do Teorema de redução da codimensão, pois, para cada $p \in M$, o primeiro espaço normal de f em p , $N_1(p)$, é gerado pelo vetor não nulo $H(p)$. Assim, a $\dim N_1(p) = 1$, $\forall p \in M$, e pela observação (2.3)(b), concluímos que N_1 é paralelo. \blacksquare

2.7 Observação. Sejam $f : M \rightarrow \tilde{M}_k$ e $g : \tilde{M}_k \rightarrow Q^N(c)$ duas imersões umbílicas, onde \tilde{M}_k é uma variedade Riemanniana conexa de curvatura seccional constante k . Então $g \circ f$ é umbílica.

Demonstração. Sejam H^f, H^g e $H^{g \circ f}$ os vetores curvatura média de f, g e $g \circ f$, respectivamente. Então, para cada $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $V, W \in \mathfrak{X}(\tilde{M}_k)$, temos que

$$\alpha^f(X, Y) = \langle X, Y \rangle H^f \quad \text{e} \quad \alpha^g(V, W) = \langle V, W \rangle H^g. \quad (13)$$

Mas pela observação (4.7) do Capítulo I, sabemos que

$$\alpha^{g \circ f}(X, Y) = g_*(\alpha^f(X, Y)) + \alpha^g(f_*(X), f_*(Y)). \quad (14)$$

Assim, de (13) e (14), segue-se que

$$\alpha^{g \circ f}(X, Y) = \langle X, Y \rangle (g_*(H^f) + H^g). \quad (15)$$

Por outro lado, se X_1, \dots, X_n é um campo referencial local sobre M^n , então

$$H^{g \circ f} = \frac{1}{n} \text{Traço} (\alpha^{g \circ f}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \alpha^{g \circ f}(X_i, X_i). \quad (16)$$

Logo, de (15) e (16), segue-se que

$$H^{g \circ f} = g_*(H^f) + H^g.$$

Daqui, concluímos que $g \circ f$ é umbílica. ■

Agora apresentaremos a classificação das subvariedades umbílicas imersas em espaços euclidianos com codimensão arbitrária.

2.8 Teorema. *Para $n \geq 2$. Seja $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ uma imersão umbílica da variedade diferenciável M^n conexa no espaço euclidiano. Então $f(M^n)$ é um subconjunto aberto de um n -plano ou de uma n esfera de algum $(n+1)$ -plano de \mathbb{R}^{n+m} .*

Demonstração. Seja $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ umbílica. Temos dois casos:

Caso 1. Se f é totalmente geodésica então para todo $p \in M$, $N_1(p)$ é nulo. Assim, pelo corolário do Teorema de redução da codimensão existe uma subvariedade totalmente geodésica $\mathbb{R}^n(0)$ de \mathbb{R}^{n+m} tal que $f(M^n) \subseteq \mathbb{R}^n(0)$. O fato que $f(M)$ é aberto segue do Teorema da função inversa.

Caso 2. Se f não é totalmente geodésica, então pelo Lema (2.6)(b), existe uma subvariedade totalmente geodésica $\mathbb{R}^{n+1}(0)$ de \mathbb{R}^{n+m} tal que $f(M^n) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}(0)$. Daqui, pela observação (2.7) $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}(0)$, segue sendo umbílica. Portanto podemos considerar $\lambda := \|H\|^2 \neq 0$, onde H é o vetor curvatura média de f . Assim, escolhemos um ponto $p_0 \in M$ arbitrário e um campo $\eta \in \mathfrak{X}(U)^\perp$ unitário, onde U é alguma vizinhança de p_0 em M . Então, podemos definir uma função diferenciável $h : U \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}(0)$ dada por $h(p) = f(p) + \frac{\eta(p)}{\lambda}$, $\forall p \in U$. Assim, considerando h como um campo de vetores de U , temos que

$$\tilde{\nabla}_X h = \tilde{\nabla}_X f + \tilde{\nabla}_X \left(\frac{\eta}{\lambda} \right) = f_*(X) - \frac{1}{\lambda} A_\eta(X) = X - X = 0$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(U)$; aqui $\tilde{\nabla}$ denota a conexão Riemanniana de $\mathbb{R}^{n+1}(0)$.

Logo, h é constante em U . Isto é, existe $x_0 \in \mathbb{R}^{n+1}(0)$ tal que

$$f(p) + \frac{\eta(p)}{\lambda} = x_0 \quad \text{para todo } p \in U.$$

Daqui, $f(U) \subseteq S^n\left(x_0, \frac{1}{|\lambda|}\right) := \left\{x \in \mathbb{R}^{n+1}(0) : \|x - x_0\|^2 = \frac{1}{|\lambda|^2}\right\}$.

$S^n\left(x_0, \frac{1}{|\lambda|}\right)$ é a n -esfera de $\mathbb{R}^{n+1}(0)$ com centro x_0 e raio $\frac{1}{|\lambda|}$.

Até aqui, temos provado que o conjunto de pontos de M cuja imagem via f pertencem a uma n -esfera é aberto. Mas também é fechado por argumentos de topologia básica. Segue-se, portanto da conexidade de M que $f(M) \subseteq S^n\left(x_0, \frac{1}{|\lambda|}\right)$.

Isto prova o Teorema (2.8). ■

Agora, daremos a classificação das imersões umbílicas no caso $c > 0$.

2.9 Teorema. *Para $n \geq 2$. Seja $f : M^n \rightarrow S^{n+m}(c)$ uma imersão umbílica com M^n conexa. Então $f(M)$ está contida em uma n -esfera de $S^{n+m}(c)$.*

Demonstração. Consideremos a imersão isométrica $\tilde{f} : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+m+1}$ dada por $\tilde{f} = i \circ f$, onde $i : S^{n+m}(c) \rightarrow \mathbb{R}^{n+m+1}$ é a aplicação inclusão, a qual é umbílica pelo Teorema (2.8). Assim, pela observação (2.7), segue-se que \tilde{f} é umbílica. Logo, aplicando o Teorema (2.8) a \tilde{f} , temos que $\tilde{f}(M)(= f(M))$ é um subconjunto aberto de um n -plano P ou de uma n -esfera S de $\mathbb{R}^{n+1}(0)$, onde $\mathbb{R}^{n+1}(0)$ é um $(n+1)$ -plano de \mathbb{R}^{n+m+1} . Portanto, $f(M)$ está contida na n -esfera $\Sigma_1 := P \cap S^{n+1}$ ou na n -esfera $\Sigma_2 := S \cap S^{n+m}(c)$. Isto prova o Teorema (2.9). ■

Em geral uma n -esfera $\Sigma \subseteq S^{n+m}(c)$ é uma subvariedade totalmente geodésica quando o raio de Σ é igual ao raio de $S^{n+m}(c)$ ou é uma n -esfera de alguma subvariedade totalmente geodésica $S^{n+1}(c)$ de $S^{n+m}(c)$. Assim, no Teorema (2.9) temos uma analogia com respeito ao Teorema (2.8).

Por último, daremos a classificação das subvariedades umbílicas no caso $c < 0$.

2.10 Teorema. *Para $n \geq 2$, seja $f : M^n \rightarrow H^{n+m}(c)$ uma imersão umbílica da variedade M^n conexa no modelo do semi-espço superior. Então $f(M)$ está contida na interseção de $H^{n+m}(c)$ com algum n -plano ou n -esfera do espaço euclidiano \mathbb{R}^{n+m} .*

Demonstração. Sabemos que o modelo hiperbólico do semi espaço superior $H^{n+m}(c)$ está composto por $\mathbb{R}^{n+m-1} \times \mathbb{R}_+$ e pela métrica dada por $g_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{-cx_{n+m}^2}$. Esta métrica é conforme com a métrica euclideana. Portanto, como $f : M^n \rightarrow (\mathbb{R}^{n+m-1} \times \mathbb{R}_+, g_{ij})$ é umbílica, temos pela observação (2.5)(b) que $f : M^n \rightarrow (\mathbb{R}^{n+m-1} \times \mathbb{R}_+, \delta_{ij})$ é também umbílica. Assim, podemos aplicar o Teorema (2.8), à imersão umbílica $\tilde{f} : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ dada por $\tilde{f} = i \circ f$, onde $i : (\mathbb{R}^{n+m-1} \times \mathbb{R}_+, \delta_{ij}) \rightarrow (\mathbb{R}^{n+m}, \delta_{ij})$ é a aplicação inclusão a qual é uma imersão umbílica, pelo Teorema (2.8). Portanto, temos que $\tilde{f}(M) \subset P$ ou $\tilde{f}(M) \subseteq S$, onde P e S são algum n -plano e alguma n -esfera, respectivamente, em $\mathbb{R}^{n+1}(0)$. Mas, $\tilde{f}(M) = f(M) \subseteq H^{n+m}(c)$. Isto prova, o Teorema (2.10) completamente. ■

Resumiremos os três teoremas anteriores, como segue: As subvariedades umbílicas completas de uma forma espacial $Q^N(c)$ são as subvariedades totalmente geodésicas, e além delas, se $c \geq 0$ temos as esferas; e se $c < 0$ temos as esferas geodésicas ($k > 0$) ou temos as horosferas ($k = 0$) ou temos as hiperesferas eqüidistantes ($k < 0$). Aqui k é a curvatura seccional da subvariedade umbílica.

2.11 Observação. *No caso particular de $H^N(-1)$, podemos usar a fórmula (13), para calcular a curvatura média de $\Sigma := S \cap H^N(-1)$, onde S é uma $(N-1)$ -esfera euclideana de raio 1 e centro em $H^N(-1)$. Assim, temos que a curvatura média de Σ (na métrica de $H^N(-1)$) é igual a 1 se Σ é uma horosfera, e é igual a $\cos \theta$ se Σ é uma hiperesfera eqüidistante a qual faz um ângulo θ com $\partial H^N(-1)$, e é igual à ‘altura’ do centro euclidiano de S relativa à $\partial H^N(-1)$ se Σ é uma esfera geodésica. □*

A seguir daremos uma proposição que garante a existência e unicidade de uma subvariedade umbílica numa forma espacial dada três condições iniciais.

2.12 Proposição. *Dados um ponto $p \in Q^N(c)$, um subespaço linear n -dimensional \mathbb{E} de $T_p Q^N(c)$, e um vetor H de $T_p Q^N(c)$ ortogonal a \mathbb{E} , então existe uma e somente uma subvariedade umbílica completa S de $Q^N(c)$ tal que $p \in S$, $\mathbb{E} = T_p S$ e H é o vetor curvatura média de S em p .*

Em particular, S é isométrico a $Q^n(k)$ onde $k = c + \langle H, H \rangle$.

Demonstração. Temos três casos a considerar segundo $c = 0$, $c > 0$ e $c < 0$.

Caso $c = 0$ Sejam $p \in \mathbb{R}^N(0)$, \mathbb{E} um subespaço de $T_p \mathbb{R}^N(0)$ n -dimensional, e $H \in T_p \mathbb{R}^N(0)$ tal que $\langle H, \mathbb{E} \rangle = 0$. Então temos duas possibilidades:

- i) Se $H = 0$, então $S := \mathbb{E}$ é claramente a única subvariedade totalmente geodésica (umbílica) que verifica o pedido.
- ii) Se $H \neq 0$, então $S := S^n\left(p + \frac{H}{\|H\|^2}, \frac{1}{\|H\|}\right)$ é a única subvariedade umbílica n -dimensional de $\mathbb{R}^N(0)$ que verifica o pedido. (Ver Teorema (2.8)).

Caso $c > 0$. Sejam $p \in S^N(c)$, \mathbb{E} subespaço de $T_p S^N(c)$ n -dimensional, e $H \in T_p S^N(c)$ tal que $\langle H, \mathbb{E} \rangle = 0$. Então temos duas possibilidades:

- i) Se $H = 0$, então $S := S^n\left(0, \frac{1}{\sqrt{c}}\right)$ que é obtida da intersecção de $S^N(c)$ com um $(n + 1)$ -plano de \mathbb{R}^{N+1} que passa por p e contém \mathbb{E} , verifica o pedido.
- ii) Se $H \neq 0$, então $S := S^n\left(q, \frac{1}{\sqrt{c + \|H\|^2}}\right)$ é a única subvariedade umbílica que verifica o pedido, aqui o centro da n -esfera q depende de H essencialmente para a unicidade.

Caso $c < 0$. Sejam $p \in H^N(c)$, \mathbf{E} subespaço de $T_p H^N(c)$ n -dimensional, e $H \in T_p H^N(c)$ tal que $\langle H, \mathbf{E} \rangle = 0$. Então temos duas possibilidades:

- i) Se $H = 0$, então temos mais duas possibilidades, a saber, quando \mathbf{E} intersepta perpendicularmente $\partial H^N(c)$ ou quando não. Assim, se \mathbf{E} intersepta perpendicularmente $\partial H^N(c)$, então $S := \mathbf{E} \cap H^N(c)$ verifica o pedido. Se \mathbf{E} não intersepta perpendicularmente $\partial H^N(c)$, então $S := \Sigma \cap H^N(c)$ onde Σ é a esfera n -dimensional um centro em $\partial H^N(c)$ e passa por p e é tangente a \mathbf{E} , verifica o pedido.
- ii) Se $H \neq 0$, então teremos três possibilidades para determinar S , a saber, $k > 0$, $k = 0$ ou $k < 0$, onde $k = c + \|H\|^2$.

Para $k > 0$, teremos que S é a esfera geodésica que passa por p , e é tangente a \mathbf{E} , e tem centro Euclideano em $p + \frac{H}{\|H\|^2}$ e raio $\frac{1}{\sqrt{c + \|H\|^2}}$, verifica o pedido.

Para $k = 0$, teremos duas possibilidades segundo \mathbf{E} seja paralelo ou não a $\partial H^N(c)$. Assim, se \mathbf{E} é paralelo a $\partial H^N(c)$, então $S := \mathbf{E}$, e se \mathbf{E} não é paralelo a $\partial H^N(c)$, então S é a horosfera que é obtida da intersecção de $H^N(c)$ com uma esfera n -dimensional C de \mathbb{R}^N que intersepta $\partial H^N(c)$ em um só ponto e é tangente a \mathbf{E} em p . Em ambos casos S é a única subvariedade umbílica que verifica o pedido.

Para $k < 0$, teremos duas possibilidades, segundo \mathbf{E} faz-se um ângulo entre 0 e 45 graus ou entre 45 e 90 graus com $\partial H^N(c)$. Para concluir ver Teorema (2.10) e referência [S] volume IV. ■

A seguir definiremos e classificaremos os produtos extrínsecos das subvariedades umbílicas em formas espaciais e mostraremos que elas serão imersões paralelas.

2.13 Definição. Seja $M = M_1 \times \dots \times M_m$ um produto Riemanniano. Se $f : M \rightarrow Q^N(c)$ é um produto extrínseco em $Q^N(c)$ tal que $f|_{M_i}$ é uma imersão umbílica para cada $i = 1, \dots, m$, então diremos que f e sua imagem $f(M)$ são um *produto extrínseco de subvariedades umbílicas* de $Q^N(c)$.

2.14 Observação. Toda imersão umbílica $f : M^n \rightarrow Q^{n+m}(c)$ pode ser considerada como um produto extrínseco com um só fator.

2.15 Lema. Sejam $M = M_1 \times \dots \times M_m$ e $N = N_1 \times \dots \times N_m$ dois produtos Riemannianos, e seja $g = g_1 \times \dots \times g_m : M \rightarrow N$ a imersão isométrica produto das imersões isométricas $g_i : M_i \rightarrow N_i$. Então para cada $p \in M$ a segunda forma fundamental α^g de g em p está relacionada com a segunda forma fundamental α^{g_i} de g_i em $\pi_i(p)$, pela seguinte equação:

$$\tau_{i*}(\alpha^g(x, y)) = \alpha^{g_i}(\pi_{i*}(x), \pi_{i*}(y)), \quad \forall i = 1, \dots, m \quad \text{e} \quad x, y \in T_p M, \quad (17)$$

onde $\pi_i : M \rightarrow M_i$ e $\tau_i : N \rightarrow N_i$ denotam as i -ésimas projeções canônicas de M e N , respectivamente. Além disso, temos a seguinte implicação:

$$(\forall i : g_i \text{ é paralela}) \Rightarrow g \text{ é paralela} . \quad \square$$

2.16 Proposição. Todo produto extrínseco de subvariedades umbílicas de $Q^N(c)$ é paralelo.

Demonstração. Seja $f : M_1 \times \dots \times M_m \rightarrow Q^N(c)$ um produto extrínseco de subvariedades umbílicas. Então segue-se que f é paralela, usando o Lema (2.15) e o fato que cada $f|_{M_i}$ é uma imersão paralela (pela proposição (2.4)). ■

2.17 Proposição. Seja $f : Q^{N_1}(c_1) \times \dots \times Q^{N_m}(c_m) \rightarrow Q^N(c)$ um produto extrínseco de subvariedades umbílicas em $Q^N(c)$, e seja $f_i : \tilde{M}_i \rightarrow Q^{N_i}(c_i)$ um produto extrínseco da variedade $\tilde{M}_i := \prod_{k=1}^{m_i} M_{ik}$ em $Q^{n_i}(c_i)$ para $i = 1, \dots, m$. Então são válidas as seguintes afirmações:

- $\tilde{f} := f \circ (f_1 \times \dots \times f_m)$ é um produto extrínseco em $Q^N(c)$.
- Se f_1, \dots, f_m são paralelas, então \tilde{f} é paralela.
- Em particular, de (a) e (b), temos que a composição de uma imersão paralela com um produto extrínseco de subvariedades umbílicas é paralela.

Demonstração. (a) Seja $p = (p_1, \dots, p_m)$ em $M := \prod_{i=1}^m Q^{m_i}(c_i)$. Então podemos identificar $T_p M$ com $\bigoplus_{i=1}^m T_{p_i} Q^{n_i}(c_i)$. Assim, para cada $v \in T_p M$, temos que $v = \sum_{i=1}^m v_i$, onde

$v_i \in T_{p_i}Q^{n_i}(c_i)$. Denotaremos por H_i o vetor curvatura média de $f|_{M_i}$ em p , para cada i . Assim, pelo Lema (2.15), temos que

$$\alpha^f(X, Y) = \sum_{i=1}^m \langle X_i, Y_i \rangle H_i, \quad \forall X, Y \in T_p M. \quad (18)$$

Como para cada i , $f_i : \tilde{M}_i := \prod_{k=1}^{m_i} M_{ik} \rightarrow Q^{n_i}(c_i)$ é um produto extrínseco em $Q^{n_i}(c_i)$ dado. Assim, para todo $q = (q_1, \dots, q_m) \in \tilde{M} := \prod_{i=1}^m \tilde{M}_i$ e todo par de vetores $\tilde{X}, \tilde{Y} \in T_q \tilde{M}$, derivaremos para a segunda forma fundamental de \tilde{f} a seguinte fórmula:

$$\alpha^{\tilde{f}}(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \sum_{i=1}^m \langle \tilde{X}_i, \tilde{Y}_i \rangle H_i + f_*(\alpha^{f_1}(\tilde{X}_1, \tilde{Y}_1), \dots, \alpha^{f_m}(\tilde{X}_m, \tilde{Y}_m)) \quad (19)$$

de (18) e da observação (4.7) do Capítulo I sempre e quando $p := (f_1(q_1), \dots, f_m(q_m))$. Portanto, segue-se imediatamente de (19), que \tilde{f} é um produto extrínseco em $Q^N(c)$. \square

(b) Da identificação na prova de (a), $T_p M = \bigoplus_{i=1}^m T_{p_i} Q^{n_i}(c_i)$, segue-se que para cada $q = (q_1, \dots, q_m) \in \prod_{i=1}^m \tilde{M}_i$, temos que:

$$\nu_q(f_1 \times \dots \times f_m) = \prod_{i=1}^m \nu_{q_i}(f_i). \quad (20)$$

Assim, de (1), obtemos que $\alpha^f((f_1 \times \dots \times f_m)_* \tilde{X}, Z) = 0$ para todo $\tilde{X} \in T_q \left(\prod_{i=1}^m \tilde{M}_i \right)$ e $Z \in \nu_q(f_1 \times \dots \times f_m)$. Portanto, pela observação (1.14) e pelo Lema (2.15) segue-se imediatamente que $\tilde{f} = f \circ (f_1 \times \dots \times f_m)$ é paralela. \blacksquare

A seguir apresentaremos um teorema que caracteriza completamente os produtos extrínsecos de subvariedades umbílicas.

2.18 Teorema. *Sejam dados $p \in Q^N(c)$, $\mathbb{E}_1, \dots, \mathbb{E}_m$ subespaços lineares de $T_p Q^N(c)$, ortogonais dois a dois, e $H_1, \dots, H_m \in T_p Q^N(c)$ cada um ortogonal a $\mathbb{E} = \bigoplus_{i=1}^m \mathbb{E}_i$. Suponhamos que $c_i := c + \langle H_i, H_i \rangle$ e que $c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_m$. Além disso, seja $H_i : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}^\perp$*

aplicação bilinear simétrica definida por

$$(21) \quad h(X, Y) = \sum_{i=1}^m \langle X_i, Y_i \rangle H_i,$$

onde X_i e Y_i são as componentes de X e Y em \mathbb{E}_i , respectivamente. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

- a) $\langle H_i, H_j \rangle = -c$ para $i \neq j$.
- b) Os números reais c_2, \dots, c_m são estritamente positivos, e existe um produto extrínseco de subvariedades umbílicas

$$f : Q^{N_1}(c_1) \times S^{N_2}(c_2) \times \dots \times S^{N_m}(c_m) \rightarrow Q^N(c)$$

tal que $p \in f(Q^{N_1}(c_1) \times S^{N_2}(c_2) \times \dots \times S^{N_m}(c_m)) = S$, $\mathbb{E} = T_p S$, $\alpha_p^f = h$; mais exatamente, se $q = (q_1, \dots, q_m) \in f^{-1}(p)$, então $f_*(T_{q_i} Q^{N_i}(c_i)) = \mathbb{E}_i$ e H_i é o vetor curvatura média de $f|_{Q^{N_i}(c_i)}$ em q .

Demonstração. ((b) \Rightarrow (a)). Sejam X tangente a $Q^{N_i}(c_i)$ e Y tangente a $Q^{N_j}(c_j)$, $i \neq j$, tais que $\|X\| = \|Y\| = 1$. Então pela observação (5.2)(c) dada no Capítulo I e da equação de Gauss, teremos que

$$0 = K(X, Y) = c + \langle \alpha(X, X), \alpha(Y, Y) \rangle - \|\alpha(X, Y)\|^2.$$

Mas, f é produto extrínseco, portanto, segue-se que $\langle \alpha(X, X), \alpha(Y, Y) \rangle = -c$. Daqui, tomando traços, concluímos que $\langle H_i, H_j \rangle = -c$. \square

((a) \Rightarrow (b)). O caso $m = 1$ foi tratado na proposição (2.12). Portanto, poderemos supor $m \geq 2$. Então, já que, $H_2 \neq H_1$ e $c_i = c + \|H_i\|^2$, teremos que

$$0 < \langle H_2 - H_1, H_2 - H_1 \rangle = c_1 + c_2 \leq 2c_2,$$

daqui:

$$(22) \quad c_i > 0 \quad \text{para todo } i = 2, \dots, m.$$

A seguir nós trataremos de obter algumas relações entre algum dos objetos dados no enunciado do Teorema (2.18), as quais garantam a existência de produtos extrínsecos de subvariedades umbílicas. Para isto, definimos:

$$(23) \quad D_m(x_0, \dots, x_m) = \det(x_0 + \delta_{ij} x_i)_{i,j=1, \dots, m}$$

para $x_0, x_1, \dots, x_m \in \mathbf{R}$. Daqui, segue-se facilmente por indução que (23) é igual a

$$(24) \quad D_m(x_0, \dots, x_m) = \sum_{i=0}^m \prod_{j \neq i} x_j.$$

Usando a fórmula (24), podemos calcular os seguintes determinantes de Gram:

$$(25) \quad \begin{aligned} G' &:= \det(\langle H_i - H_1, H_j - H_1 \rangle)_{i,j=2,\dots,m} = \det(c_1 + \delta_{ij}c_i)_{i,j=2,\dots,m} \\ &= D_{m-1}(c_1, \dots, c_m) = \sum_{i=1}^m \prod_{j \neq i} c_j \end{aligned}$$

e

$$(26) \quad \begin{aligned} G &:= \det(\langle H_i, H_j \rangle)_{i,j=1,\dots,m} = \det(-c + \delta_{ij}c_i)_{i,j=1,\dots,m} \\ &= D_m(-c_1, \dots, c_m) = \sum_{i=1}^m c_i - cG'. \end{aligned}$$

Como conseqüência dos cálculos acima, obtemos que $G' > 0$. Com efeito, $G' = 0$ significa a dependência linear de $H_2 - H_1, \dots, H_m - H_1$, que por sua vez implica na dependência linear de H_1, \dots, H_m , daqui, $G = 0$; usando (22) e (26), obtemos $c_1 = 0$, daqui, $G' = c_2 \dots c_m > 0$, absurdo. \square

De $G' > 0$, obtemos imediatamente que

$$(27) \quad \dim(\text{ger}\{H_i : i = 1, \dots, m\}) \geq m - 1.$$

Se definimos

$$(28) \quad \tilde{c} := \begin{cases} 0 & \text{se } c_1 = 0 \\ \left(\sum_{i=1}^m (1/c_i)\right)^{-1} & \text{se } c_1 \neq 0, \end{cases}$$

então derivamos de (25) e (26) que

$$(29) \quad \tilde{c} = \prod_{i=1}^m (c_i/G') = c + G/G'.$$

Portanto, (por causa de $G/G' \geq 0$), temos que

$$(30) \quad \tilde{c} \geq c.$$

Além disso, vemos que

$$(31) \quad \tilde{c} = c \Leftrightarrow H_1, \dots, H_m \text{ são linearmente dependentes}$$

e

$$(32) \quad c < 0 \Rightarrow \tilde{c} < 0.$$

Se denotamos por $N_i := \dim E_i$ e $\tilde{N} := m - 1 + \sum_{i=1}^m N_i$, então por uma combinação de (27), (30) e (31), obteremos as seguintes relações:

$$(33) \quad \underbrace{(\tilde{c} = c \text{ e } \tilde{N} \leq N)}_{\text{para } G = 0} \text{ ou } \underbrace{(\tilde{c} > c \text{ e } \tilde{N} + 1 \leq N)}_{\text{para } G > 0}.$$

Agora nós utilizaremos estas relações para provar a existência de um produto extrínseco de subvariedades umbílicas

$$f : Q^{N_1}(c_1) \times S^{N_2}(c_2) \times \dots \times S^{N_m}(c_m) \rightarrow Q^N(c),$$

com as seguintes propriedades:

$$(34) \quad c + \langle \eta_i, \eta_j \rangle = 0 \quad \text{para } i \neq j$$

e

$$(35) \quad c + \langle \eta_i, \eta_i \rangle = c_i \quad \text{para todo } i,$$

onde η_i denota o vetor curvatura média de $f|_{Q^{N_i}(c_i)}$.

Com efeito, de acordo com a proposição (2.12) e (33) existe um mergulho umbílico de $Q^{\tilde{N}}(\tilde{c})$ em $Q^N(c)$ (para $\tilde{c} = c$ o mergulho é totalmente geodésico). Daqui, é suficiente pela proposição (2.17) provar a existência de f para o caso $N = \tilde{N}$ e $c = \tilde{c}$. Portanto, temos três casos a considerar:

Caso $c_1 = 0$. O mergulho canônico $\mathbb{R}^{N_1} \times S^{N_2}(c_2) \times \dots \times S^{N_m}(c_m) \rightarrow \mathbb{R}^N$ possui as propriedades desejadas pelo Teorema de Moore. \square

Caso $c_1 > 0$. O mergulho canônico $S^{N_1}(c_1) \times S^{N_2}(c_2) \times \dots \times S^{N_m}(c_m) \rightarrow \mathbb{R}^{N+1}$ é um produto extrínseco de subvariedades umbílicas de \mathbb{R}^{N+1} cuja imagem está em $S^N(\tilde{c})$. De fato, este mergulho é também um produto extrínseco em $S^N(\tilde{c})$ pela observação (5.5) do Capítulo I. \square

Caso $c_1 < 0$. De acordo com a proposição (2.17) e (31) é suficiente tratar o caso $m = 2$. Portanto, se escolhermos o modelo do semi-espaco para o espaco hiperbólico, entao $f : \mathbf{R}^{N_1-1} \times \mathbf{R}_+ \times S^{N_2}(c_2) \rightarrow \mathbf{R}^{N_1-1} \times \mathbf{R}^{N_2+1} \times \mathbf{R}_+$ dada por

$$f(x, y, z) = (\sqrt{\tilde{c}/c_1} \cdot x, \sqrt{-\tilde{c}} \cdot yz, y)$$

descreve um produto extrínseco $H^{N_1}(c_1) \times S^{N_2}(c_2) \rightarrow H^N(\tilde{c})$ com a propriedade requerida. \square

Vejamos agora que se f é um produto extrínseco de subvariedades umbílicas dos casos acima, entao f verifica (34) e (35).

Com efeito, como o tensor curvatura R de $Q^{N_1}(c_1) \times S^{N_2}(c_2) \times \dots \times S^{N_m}(c_m)$ é dado por

$$R(x, y)z = \sum_{i=1}^m c_i (\langle y_i, z_i \rangle x_i - \langle x_i, z_i \rangle y_i),$$

onde x_i, y_i e z_i são as componentes de x, y e z , com respeito à estrutura produto. Entao segue-se da equação de Gauss e de (18) que f verifica (34). Analogamente é válido para (35) se $N_i \geq 2$. No caso $N_i = 1, c_i > 0$, um cálculo elemental prova (18). Somente o caso $m_i = 1, c_i \leq 0$ pode ser verificado para os exemplos especiais dados acima nos casos $c = 0$ e $c < 0$.

Até agora nós temos provado que c_2, \dots, c_m são estritamente positivos e que existe um produto extrínseco de subvariedades umbílicas

$$f : Q^{N_1}(c_1) \times Q^{N_2}(c_2) \times \dots \times Q^{N_m}(c_m) \rightarrow Q^N(c),$$

tal que verifica (34) e (35). Já que, $p \in Q^N(c)$ é dado por hipótese, nós podemos considerar $q = (q_1, \dots, q_m) \in f^{-1}(p)$. Entao como $Q^{N_i}(c_i)$ é totalmente geodésico em $Q^{N_1}(c_1) \times Q^{N_2}(c_2) \times \dots \times Q^{N_m}(c_m)$, teremos que a curvatura normal média $\eta_i(q)$ de $f|_{Q^{N_i}(c_i)}$ é ortogonal a $f_* \left(T_q \left(\prod_{j=1}^m Q^{N_j}(c_j) \right) \right) = \bigoplus_{j=1}^m f_* (T_{q_j}(Q^{N_j}(c_j)))$, $\forall i$. Além disso, $\langle \eta_i(q), \eta_j(q) \rangle = -c = \langle H_i, H_j \rangle$, $\forall i, j$. Daqui, existe uma isometria linear $\Phi : T_{f(q)}(Q^N(c)) \rightarrow T_p Q^N(c)$ tal que $\Phi \left(f_* \left(T_{q_i} \left(Q^{N_i}(c_i) \right) \right) \right) = \mathbb{E}_i$ e $\Phi(\eta_i(q)) = H_i$, $\forall i$.

Portanto, já que existe uma isometria \mathbf{F} de $Q^N(c)$ tal que $\mathbf{F}(q) = p$ e $\mathbf{F}_* = \Phi$, podemos concluir daqui que $\mathbf{F} \circ f$ é o produto extrínseco de subvariedades umbílicas requerido em (b).

Com isto temos provado completamente o Teorema (2.18). ■

Terminaremos esta seção dando um contra exemplo prometido no final da seção 1 deste capítulo com respeito à composição de imersões paralelas.

2.19 Exemplo. De acordo com o Teorema (2.18) a inclusão canônica $\mathbb{R} \times S^1(1) \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ é um produto extrínseco de subvariedades umbílicas e portanto paralela. Mas não é umbílica pelo Teorema (2.18). Por outro lado, seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times S^1(1)$ uma função dada por $f(t) = (t, \cos t, \sin t)$. Então f é uma imersão totalmente geodésica e portanto paralela. Observemos que a composição $\tilde{f} := i \circ f$ não é paralela pelo Teorema (2.3), apesar da função f ser totalmente geodésica. Isto mostra que, em geral, a composição de imersões paralelas não é paralela. Daí, a condição (20) da seção 1 é essencial. ■

3. Mergulhos padrões de R -espaços simétricos.

Nesta seção primeiro definiremos e logo provaremos que os mergulhos padrões de R -espaços simétricos são imersões paralelas. A seguir, descreveremos explicitamente alguns exemplos clássicos destes mergulhos e finalizaremos esta seção falando a respeito da sua classificação.

Para definir esta classe de mergulhos padrões necessitamos dar alguma nomenclatura relativa aos grupos de Lie e álgebras de Lie. Portanto, ao longo desta seção G denotará um grupo de Lie real com \mathcal{G} sua álgebra de Lie. $\text{Aut}(\mathcal{G})$ denotará o grupo de Lie de todos os automorfismos de \mathcal{G} e $\text{End}(\mathcal{G})$ será sua álgebra de Lie que consiste de todos os endomorfismos de \mathcal{G} .

3.1 Definição. A *representação adjunta* de G é um homomorfismo $Ad : G \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{G})$ de grupos de Lie dado por

$$(1) \quad Ad(g)X = (L_g \circ R_{g^{-1}})_*(X), \quad \forall X \in \mathcal{G}, \quad e \quad g \in G,$$

onde L_g e $R_{g^{-1}}$ denotam as translações à esquerda por g e à direita por g^{-1} inverso de g , respectivamente, e $(L_g \circ R_{g^{-1}})_*$ denota a diferencial da composição de L_g e $R_{g^{-1}}$ no elemento neutro de G .

3.2 Definição. A *representação adjunta* de \mathcal{G} é um homomorfismo $ad : \mathcal{G} \rightarrow \text{End}(\mathcal{G})$ de álgebras de Lie dado por

$$(2) \quad ad(X)Y := [X, Y], \quad \forall X, Y \in \mathcal{G},$$

onde $[,]$ denota o produto de Lie de \mathcal{G} .

3.3 Observação. Com as mesmas notações dadas acima valem as seguintes igualdades:

$$(3) \quad Ad(g)X = \frac{d}{dt} \{g \exp(tX)g^{-1}\}_{t=0}$$

e

$$(4) \quad ad(X)Y = \frac{d}{dt} \{Ad(\exp(tY))X\}_{t=0},$$

para todo $g \in G$ e $X, Y \in \mathcal{G}$. \square

Ao longo desta seção, \mathbb{K} denotará o conjunto de números reais \mathbb{R} , complexos \mathbb{C} ou quartênios \mathbb{H} , a menos que digamos o contrário. De maneira natural, $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C} \subseteq \mathbb{H}$. Assim, para cada x em \mathbb{K} definimos os elementos \bar{x} e \tilde{x} como segue: Se

$$x = x_0 + x_1i + x_2j + x_3k \in \mathbb{H} \quad \text{com} \quad x_0, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$$

então

$$\bar{x} = x_0 - x_1i - x_2j - x_3k, \quad \text{e} \quad \tilde{x} = x_0 + x_1i - x_2j + x_3k.$$

Se $x \in \mathbb{C}$, então \bar{x} coincide com o conjugado complexo comum de x e \tilde{x} coincide com x . Se $x \in \mathbb{R}$, então $\bar{x} = \tilde{x} = x$.

Agora daremos as notações dos espaços de matrizes a serem utilizados ao longo desta dissertação.

3.4 Espaços de Matrizes.

$$M(p, q; \mathbb{K}) = \{\text{Todas as matrizes de ordem } p \times q \text{ sobre } \mathbb{K}\}$$

$$H(n; \mathbb{K}) = \{A \in M(n, n; \mathbb{K}) : A = \overline{A^t}\}$$

$$Sym(n; \mathbb{K}) = \{A \in M(n, n; \mathbb{K}) : A = \tilde{A}^t\}$$

$$Skew(n; \mathbb{K}) = \{A \in M(n, n; \mathbb{K}) : A = -A^t\};$$

aqui A^t indica a matriz transposta de A .

3.5 Observação. Seja $GL(n, \mathbb{K})$ o grupo de Lie das matrizes de ordem $n \times n$ que são inversíveis sobre \mathbb{K} e tem por álgebra de Lie $gl(n; \mathbb{K}) := M(n, n; \mathbb{K})$. Então usando a observação (3.3), obteremos que

$$(5) \quad Ad(g)X = gXg^{-1}$$

para todo $g \in GL(n, \mathbb{K})$ e $X \in gl(n, \mathbb{K})$, onde g^{-1} indica a matriz inversa de g . \square

3.6 Definição. A forma de Killing de uma álgebra de Lie \mathcal{G} sobre \mathbb{R} é a forma bilinear simétrica $B_{\mathcal{G}} : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$(6) \quad B_{\mathcal{G}}(X, Y) := \text{Traço}(ad(X)ad(Y)), \quad \forall X, Y \in \mathcal{G}.$$

3.7 Observação. Se $B_{\mathcal{G}}$ é a forma de Killing de uma álgebra de Lie \mathcal{G} , então

a) $B_{\mathcal{G}}([X, Y], Z) = B_{\mathcal{G}}(X, [Y, Z]), \quad \forall X, Y, Z \in \mathcal{G}.$

b) A restrição de $B_{\mathcal{G}}$ a um ideal \mathcal{H} de \mathcal{G} é a forma de Killing da álgebra de Lie \mathcal{H} .

Demonstração. (a) Sejam $X, Y, Z \in \mathcal{G}$. Então

$$\begin{aligned} \text{Traço}(ad[X, Y]ad(Z)) &= \text{Traço}(ad(X)ad(Y)ad(Z) - ad(Y)ad(X)ad(Z)) \\ &= \text{Traço}(ad(X)ad(Y)ad(Z) - ad(X)ad(Z)ad(Y)) \\ &= \text{Traço}(ad(Z)ad([Y, Z])). \quad \square \end{aligned}$$

(b) Se $ad_{\mathcal{H}}$ denota a representação adjunta de \mathcal{H} , então a forma de Killing de \mathcal{H} será dada por

$$(7) \quad B_{\mathcal{H}}(X, Y) := \text{Traço}(ad_{\mathcal{H}}(X)ad_{\mathcal{H}}(Y)), \quad \forall X, Y \in \mathcal{H}.$$

Daqui, se completamos uma base de \mathcal{H} para uma base de \mathcal{G} , então teremos que

$$ad(X)ad(Y) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & D \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AC & AD \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

onde $X, Y \in \mathcal{H}$. Portanto, podemos concluir que

$$B_{\mathcal{G}}(X, Y) = \text{Traço}(AC) = \text{Traço}(ad_{\mathcal{H}}(X)ad_{\mathcal{H}}(Y)) = B_{\mathcal{H}}(X, Y). \quad \blacksquare$$

3.8 Exemplo. Seja $\mathbb{K} := \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Então a forma de Killing da álgebra de Lie $gl(n, \mathbb{K})$ é dada por

$$(8) \quad B_{gl(n, \mathbb{K})}(X, Y) := 2n\text{Traço}(XY) - 2\text{Traço}(X)\text{Traço}(Y)$$

para todo $X, Y \in gl(n, \mathbb{K})$.

3.9 Definição. Diremos que uma álgebra de Lie \mathcal{G} é *semisimples* se a forma de Killing $B_{\mathcal{G}}$ é não-degenerada. Por outro lado, diremos que um grupo de Lie G é *semisimples* se sua álgebra de Lie o é.

3.10 Exemplos. A seguir I_n denotará a matriz identidade de ordem $n \times n$, e

$$I_{n,n} := \begin{pmatrix} -I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}, \quad J_n := \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix},$$

$$K_{n,n} := \begin{pmatrix} -I_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_n \end{pmatrix}.$$

Então os seguintes conjuntos de matrizes são grupos de Lie semisimples:

$$\begin{aligned} SL(n; \mathbb{R}) &= \{g \in GL(n, \mathbb{R}) : \det(g) = 1\}, \\ SL(n; \mathbb{C}) &= \{g \in GL(n, \mathbb{C}) : \det(g) = 1\}, \\ SU^*(2n) &= \{g \in SL(2n, \mathbb{C}) : \bar{g}J_n = J_n g\}, \\ Sp(n; \mathbb{R}) &= \{g \in GL(2n, \mathbb{R}) : g^t J_n g = J_n\}, \\ Sp(n; \mathbb{C}) &= \{g \in GL(2n, \mathbb{C}) : g^t J_n g = J_n\}, \\ SO(n, n) &= \{g \in SL(2n, \mathbb{R}) : g^t I_{n,n} g = I_{n,n}\}, \\ SO(n; \mathbb{C}) &= \{g \in SL(n, \mathbb{C}) : g^t g = I_n\}, \\ SO^*(2n) &= \{g \in SO(2n, \mathbb{C}) : g^t J_n \bar{g} = J_n\}, \\ SU(n, n) &= \{g \in SL(2n, \mathbb{C}) : g^t I_{n,n} \bar{g} = I_{n,n}\}, \\ Sp(n, n) &= \{g \in Sp(2n, \mathbb{C}) : g^t K_{n,n} \bar{g} = K_{n,n}\}. \end{aligned}$$

Em particular,

$$\begin{aligned} SO(n) &:= SO(n, 0) = SO(0, n), \\ SU(n) &:= SU(n, 0) = SU(0, n), \\ Sp(n) &:= Sp(n, 0) = Sp(0, n). \end{aligned}$$

Demonstração. De acordo com o seguinte isomorfismo φ entre as álgebras de Lie $gl(n; \mathbb{H})$ sobre $gl(2n; \mathbb{C})$ dado por

$$(9) \quad \varphi(Z_1 + Z_2 j) := \begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 \\ -\bar{Z}_2 & \bar{Z}_1 \end{pmatrix}, \quad \forall Z_1, Z_2 \in gl(n; \mathbb{C}),$$

podemos definir as seguintes álgebras de Lie:

$$\begin{aligned} sl(n; \mathbb{R}) &= \{X \in gl(n; \mathbb{R}) : \text{Traço}(X) = 0\}, \\ sl(n; \mathbb{C}) &= \{Z \in gl(n; \mathbb{C}) : \text{Traço}(Z) = 0\}, \\ su^*(2n) &= \{\varphi(Z_1 + Z_2 j) : Z_1, Z_2 \in gl(n; \mathbb{C}) \text{ e } \text{Traço}(Z_1) + \text{Traço}(\bar{Z}_1) = 0\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
sp(n; \mathbb{R}) &= \left\{ \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & -X_1^t \end{pmatrix} : X_1 \in gl(n; \mathbb{R}) \text{ e } X_2, X_3 \in Sym(n; \mathbb{R}) \right\}, \\
sp(n; \mathbb{C}) &= \left\{ \begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 \\ Z_3 & -Z_1^t \end{pmatrix} : Z_1 \in gl(n; \mathbb{R}) \text{ e } Z_2, Z_3 \in Sym(n; \mathbb{C}) \right\}, \\
so(n; n) &= \left\{ \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_2^t & X_3 \end{pmatrix} : X_1, X_2 \in Skew(n; \mathbb{R}) \text{ e } X_3 \in gl(n; \mathbb{R}) \right\}, \\
so(n; \mathbb{C}) &= Skew(n; \mathbb{C}), \\
so^*(2n) &= \{\varphi(Z_1 + Z_2 j) : Z_1 \in su(n) \text{ e } Z_2 \in H(n; \mathbb{C})\}, \\
su(n, n) &= \left\{ \begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 \\ Z_2^t & Z_3 \end{pmatrix} : \begin{array}{l} Z_1, Z_3 \in so(n; \mathbb{C}), \quad Z_2 \in gl(n; \mathbb{C}) \\ \text{e } \text{Traço}(Z_1) + \text{Traço}(Z_3) \end{array} \right\}, \\
sp(n, n) &= \left\{ \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} & Z_{14} \\ Z_{12}^t & Z_{22} & Z_{14}^t & Z_{24} \\ -\overline{Z}_{13} & \overline{Z}_{14} & \overline{Z}_{11} & -\overline{Z}_{12} \\ \overline{Z}_{14}^t & -\overline{Z}_{24} & -\overline{Z}_{12}^t & \overline{Z}_{22} \end{pmatrix} : \begin{array}{l} Z_{11}, Z_{22} \in su(n), \\ Z_{13}, Z_{24} \in su(n; \mathbb{C}) \\ \text{e} \\ Z_{12}, Z_{14} \in gl(n; \mathbb{C}) \end{array} \right\}.
\end{aligned}$$

Em particular,

$$so(n) := so(n, 0) = so(0, n),$$

$$su(n) := su(n, 0) = su(0, n),$$

$$sp(n) := sp(n, 0) = sp(0, n).$$

Estas álgebras de Lie correspondem aos respectivos grupos de Lie dados no exemplo (3.10). Daí, se $\mathbb{K} := \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , então pelo exemplo (3.8), temos claramente que a forma de Killing de $sl(n; \mathbb{K})$ é dado por

$$B_{sl(n; \mathbb{K})}(X, Y) := 2n \text{Traço}(XY), \quad \forall X, Y \in sl(n; \mathbb{K}). \quad (10)$$

Segue-se daí que $B_{sl(n; \mathbb{K})}$ é não-degenerada e portanto $sl(n; \mathbb{K})$ é semisimples. A semisimplicidade das outras álgebras de Lie dadas acima segue-se de maneira análoga. Isto prova portanto, que os grupos de Lie dados no exemplo (3.10) são semisimples. \square

3.11 Observação. *Sejam p, q e n números inteiros positivos. Então os seguintes grupos de Lie semisimples $SL(p+q; \mathbb{R})$, $SL(p+q; \mathbb{C})$, $SU^*(2p+2q)$, $SO(n, n)$, $SU(n, n)$, $Sp(n, n)$, $SO(2n; \mathbb{C})$, $SO^*(4n)$, $Sp(n; \mathbb{R})$, e $Sp(n; \mathbb{C})$, são não-compactos.*

3.12 Definição. Diremos que um automorfismo involutivo θ de uma álgebra de Lie semisimples \mathcal{G} é uma *involução de Cartan* quando, se

$$\mathcal{M} := \{X \in \mathcal{G} : \theta(X) = -X\} \quad \text{e} \quad \mathcal{P} = \{X \in \mathcal{G} : \theta(X) = X\}, \quad (11)$$

então $B_{\mathcal{G}}|_{\mathcal{M} \times \mathcal{M}}$ e $B_{\mathcal{G}}|_{\mathcal{P} \times \mathcal{P}}$ são negativa definida e positiva definida, respectivamente.

Na definição (3.12) a existência de uma involução de Cartan para \mathcal{G} está garantida pela hipótese de semisimplicidade.

3.13 Definição. A decomposição em soma direta de $\mathcal{G} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{P}$ dada na definição (3.11) é chamada uma *decomposição de Cartan* de \mathcal{G} relativa a θ . Além disso, diremos que K é um *subgrupo compacto maximal* associado à decomposição de Cartan de \mathcal{G} se K é um grupo de Lie compacto tal que sua álgebra de Lie é \mathcal{M} . (Se a forma de Killing de uma álgebra de Lie é negativa definida, então o grupo de Lie associado a ela é compacto).

3.14 Exemplo. Seja \mathcal{G} qualquer uma das álgebras de Lie semisimples não-compactas dadas na observação (3.11). Então o automorfismo $\theta : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ dado por

$$\theta(X) = \overline{X^t}, \quad \forall X \in \mathcal{G} \quad (12)$$

é de Cartan e portanto determina uma decomposição de Cartan de \mathcal{G} e um subgrupo compacto maximal associado a esta decomposição. Isto é dado na seguinte tabela, na qual temos feito as identificações adequadas segundo [II] e [K]:

\mathcal{G}	\mathcal{M}	\mathcal{P}	$\dim(\mathcal{P})$	K
$s\ell(p+q; \mathbb{R})$	$so(p+q)$	$H_0(p+q; \mathbb{R})$	$\frac{1}{2}(p+q)(p+q+1) - 1$	$SO(p+q)$
$s\ell(p+q; \mathbb{C})$	$su(p+q)$	$H_0(p+q; \mathbb{C})$	$(p+q)^2 - 1$	$SU(p+q)$
$su^*(2p+2q)$	$sp(p+q)$	$\varphi(H_0(p+q; \mathbb{H}))$	$2(p+q)^2 - (p+q) - 1$	$Sp(p+q)$
$so(n, n)$	$so(n) \times so(n)$	$gl(n; \mathbb{R})$	n^2	$SO(n) \times SO(n)$
$su(n, n)$	$s(u(n) \times u(n))$	$gl(n; \mathbb{C})$	$2n^2$	$S(U(n) \times U(n))$
$sp(n, n)$	$sp(n) \times sp(n)$	$\varphi(gl(n; \mathbb{H}))$	$4n^2$	$Sp(n) \times Sp(n)$
$so(2n; \mathbb{C})$	$so(2n)$	$Skew(2n; \mathbb{R})$	$n(2n-1)$	$SO(2n)$
$so^*(4n)$	$so(4n) \cap sp(2n)$	$Skew(2n; \mathbb{C})$	$2n(2n-1)$	$U(2n)$
$sp(n, \mathbb{R})$	$so(2n) \cap sp(n)$	$Sym(n; \mathbb{C})$	$n(n+1)$	$U(n)$
$sp(n; \mathbb{C})$	$sp(n)$	$\varphi(Sym(n; \mathbb{H}))$	$n(2n+1)$	$Sp(n)$

onde:

$$\begin{aligned}
u(n) &:= \{Z \in \mathfrak{gl}(n; \mathbb{C}) : Z^t + \overline{Z} = 0 \text{ e } \text{Traço}(Z) = 0\}, \\
U(n) &:= \{g \in GL(n; \mathbb{C}) : g\overline{g}^t = I_n\}, \\
\mathfrak{so}(n) \times \mathfrak{so}(n) &:= \left\{ \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}(2n; \mathbb{R}) : A_1, A_2 \in \mathfrak{so}(n) \right\}, \\
\mathfrak{s}(u(n) \times u(n)) &:= \left\{ \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}(2n; \mathbb{C}) : A_1, A_2 \in u(n) \right\}, \\
\mathfrak{sp}(n) \times \mathfrak{sp}(n) &:= \left\{ \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \in \mathfrak{su}^*(2n) : A_1, A_2 \in \mathfrak{sp}(n) \right\}, \\
SO(n) \times SO(n) &:= \left\{ \begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_2 \end{pmatrix} \in SL(2n; \mathbb{R}) : g_1, g_2 \in SO(n) \right\}, \\
S(U(n) \times U(n)) &:= \left\{ \begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_2 \end{pmatrix} \in SL(2n; \mathbb{C}) : g_1, g_2 \in U(n) \right\}, \\
Sp(n) \times Sp(n) &:= \left\{ \begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_2 \end{pmatrix} \in SU^*(2n) : g_1, g_2 \in Sp(n) \right\}, \\
H_0(p+q; \mathbb{R}) &:= \{A \in H(p+q; \mathbb{R}) : \text{Traço}(A) = 0\}, \\
H_0(p+q; \mathbb{C}) &:= \{A \in H(p+q; \mathbb{C}) : \text{Traço}(A) = 0\}, \\
H_0(p+q; \mathbb{H}) &:= \{A \in H(p+q; \mathbb{H}) : \text{Traço}(A) = 0\}.
\end{aligned}$$

Para verificar que o automorfismo involutivo θ definido por (12) é de Cartan para cada uma das álgebras de Lie \mathcal{G} dadas na tabela acima, basta somente mostrar que é de Cartan quando $\mathcal{G} = \mathfrak{sl}(N; \mathbb{K})$, onde N e \mathbb{K} são escolhidos adequadamente. Com efeito, seja $A \in \mathcal{M}$ e $B \in \mathcal{P}$. Então temos que

$$\text{Traço}(A^2) \leq 0 \quad \text{e} \quad \text{Traço}(B^2) \geq 0 \quad (13)$$

e as igualdades em (13) acontecem se e somente se $A = 0$ e $B = 0$, respectivamente. Daqui, e do fato que $(ad(A))^2 \in \mathcal{M}$ e $(ad(B))^2 \in \mathcal{P}$, podemos concluir que $B_{\mathcal{G}}|_{\mathcal{M} \times \mathcal{M}}$ é negativa definida e $B_{\mathcal{G}}|_{\mathcal{P} \times \mathcal{P}}$ é positiva definida. Portanto θ é de Cartan. \square

3.15 Proposição. *Seja G um grupo de Lie não-compacto semisimples com álgebra de Lie \mathcal{G} e seja K o subgrupo maximal compacto associado à decomposição de Cartan $\mathcal{G} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{P}$. Sejam dados $\tilde{\eta} \in \mathcal{P}$ não nulo e $K_0 = \{k \in K : Ad(k)\tilde{\eta} = \tilde{\eta}\}$ o subgrupo de isotropia da representação adjunta de G . Então valem as seguintes afirmações:*

a) A aplicação $f : M := K/K_0 \rightarrow \mathcal{P}$ dada por

$$f([k]) := Ad(k)\tilde{\eta} \in \mathcal{P}, \quad \forall k \in K \quad (14)$$

é um mergulho da variedade quociente M em \mathcal{P} .

b) $f([e]) = \tilde{\eta}$.

c) Já que \mathcal{P} torna-se um espaço euclideo com o produto interno dado pela forma de Killing $B_{\mathcal{G}}$, temos que se

$$(ad(\tilde{\eta}))^3 = ad(\tilde{\eta}), \quad (15)$$

então a métrica induzida por f em M é Riemanniana simétrica, ou seja, M com esta métrica torna-se um espaço simétrico. Daí, as seguintes afirmações são válidas:

d) A métrica induzida por f é dada por

$$\langle X, Y \rangle_{[e]} = -B_{\mathcal{G}}(X, Y), \quad \forall X, Y \in T_{[e]}M. \quad (16)$$

e) O tensor curvatura R do espaço simétrico M é dado por

$$R(X, Y)Z := -[[X, Y], Z], \quad \forall X, Y, Z \in T_{[e]}M. \quad (17)$$

f) f é um mergulho isométrico mínimo numa hiperesfera de \mathcal{P} cujo raio é $\sqrt{2n}$, onde $n = \dim(M)$.

g) Os autovalores da aplicação $ad(\tilde{\eta})$ são $-1, 0$ e 1 somente, e a decomposição em soma direta

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_{-1} \oplus \mathcal{G}_0 \oplus \mathcal{G}_1 \quad (18)$$

nos autoespaços correspondentes induzem às seguintes identificações:

$$T_{[e]}M = \mathcal{G}_0 \cap \mathcal{M}, \quad f_*(T_{[e]}M) := (\mathcal{G}_{-1} \oplus \mathcal{G}_1) \cap \mathcal{P} \quad e \quad \nu_{[e]}(f) = \mathcal{G}_0 \cap \mathcal{P}. \quad (19)$$

Além disso, se \mathcal{M}_0 é a álgebra de Lie gerada por K_0 , então podemos identificar ℓ com $T_{[e]}M$, onde ℓ é o complemento ortogonal de \mathcal{M}_0 em \mathcal{M} com respeito a $B_{\mathcal{G}}$.

A prova desta proposição (3.15) encontra-se na referência [TK]. \square

Com as notações e as hipóteses da proposição (3.15), podemos dar a seguinte definição:

3.16 Definição. Diremos que a variedade quociente $M := K/K_0$ é um *R-espaço simétrico* e que f é um *mergulho padrão* do *R-espaço* M se $\tilde{\eta}$ verifica a condição (15). Se f é seguida de uma aplicação conforme em algum espaço euclidiano, esta composição será também chamada de *mergulho padrão* do *R-espaço simétrico* M .

O conceito de *R-espaço simétrico* quer dizer duas coisas: a primeira é que M é um *R-espaço* (isto é, M é um quociente entre um grupo de Lie G não-compacto semisimples e um *subgrupo parabólico* de G (ver referência [TK] para a definição de subgrupo parabólico)), e a segunda é que M é um espaço simétrico. Os *R-espaços simétricos* são classificados [KN] e [N]. Esta classificação inclui os espaços simétricos Riemannianos clássicos mais alguns dos excepcionais.

Com as mesmas notações dadas acima, temos o seguinte Lema:

3.17 Lema. *Seja $f : M = K/K_0 \rightarrow \mathcal{P}$ um mergulho padrão do R-espaço simétrico M no espaço euclidiano \mathcal{P} , e denotemos por π a aplicação dada por $k \in K \mapsto Ad_{\mathcal{P}e}(k) \in SO(\mathcal{P})$, onde $Ad_{\mathcal{P}}(\cdot)$ indica a restrição da representação adjunta de G a \mathcal{P} , e $SO(\mathcal{P}) := \{ \text{todas as aplicações ortogonais de } \mathcal{P} \text{ em } \mathcal{P} \}$. Então para todo $X, Y, Z \in \ell := T_{[e]}M$ valem as seguintes afirmações:*

- a) $f_*(X) = \pi_*(X)\tilde{\eta}$.
- b) $\alpha(X, Y) = \pi_*(X)\pi_*(Y)\tilde{\eta}$.
- c) $(\nabla_X\alpha)(Y, Z) = (\pi_*(X)\pi_*(Y)\pi_*(Z)\tilde{\eta})^\perp$.
- d) $\pi_*(\ell)(\pi_*(\ell)\tilde{\eta})^\perp \subseteq \pi_*(\ell)\tilde{\eta}$.

Demonstração. (a) Trivial.

(b) Sejam $X, Y \in \ell$. Então segue-se da referência [II] pág. 208, que a aplicação $\tilde{Y} : t \mapsto (\exp_{[e]}(tX))_*Y$ é um campo de vetores paralelo ao longo da geodésica $\gamma : t \mapsto (\exp_{[e]}(tX))$

em M . Com isto, temos que

$$\begin{aligned}
\alpha(X, Y) &= \left\{ \frac{d}{dt} f_* \left(\left(\exp_{[e]}(tX) \right)_* Y \right) \right\}_{t=0}^\perp \\
&= \left\{ \frac{d}{dt} f_* \left(\left(\exp_{[e]}(tX) \right)_* Y \right) \right\}_{t=0} \\
&= \left\{ \frac{d}{dt} \left(\left(f \circ \exp_{[e]}(tX) \right)_* Y \right) \right\}_{t=0} \\
&= \left\{ \frac{d}{dt} \left(\pi_* \left(\exp_{[e]}(tX) \right) \right) \right\}_{t=0} \pi_*(Y) \hat{\eta} \\
&= \pi_*(X) \pi_*(Y) \hat{\eta}. \quad \square
\end{aligned}$$

(c) Sejam $\tilde{Y} : t \mapsto (\exp_{[e]}(tX))_* Y$ e $\tilde{Z} : t \mapsto (\exp_{[e]}(tX))_* Z$ dois campos de vetores paralelos ao longo da geodésica $\gamma : t \mapsto (\exp_{[e]}(tX))$ em M . Então por (b), temos que

$$(\nabla_X \alpha)(Y, Z) = \left\{ \frac{d}{dt} \left(\pi_* \left(Ad(\exp_{[e]}(tX)) Y \right) \pi_* \left(Ad(\exp_{[e]}(tX)) Z \right) \pi \left(\exp_{[e]}(tX) \right) \hat{\eta} \right) \right\}_{t=0}^\perp$$

e

$$\begin{aligned}
f_* \left(\left(\exp_{[e]}(tX) \right)_* Y \right) &= \pi \left(\exp_{[e]}(tX) \right) \pi(Y) \hat{\eta} \\
&= \pi \left(\exp_{[e]}(tX) \right) \pi(Y) \pi \left(\exp_{[e]}(-tX) \right) \pi \left(\exp_{[e]}(tX) \right) \hat{\eta} \\
&= \pi_* \left(Ad \left(\exp_{[e]}(tX) \right) Y \right) \pi \left(\exp_{[e]}(tX) \right) \hat{\eta}.
\end{aligned}$$

Daqui, segue-se que

$$\begin{aligned}
(\nabla_X \alpha)(Y, Z) &= \left\{ \frac{d}{dt} \pi \left(\exp_{[e]}(tX) \right) \pi_*(X) \pi_*(Y) \hat{\eta} \right\}_{t=0}^\perp \\
&= \left\{ \pi_*(X) \pi_*(Y) \pi_*(Z) \hat{\eta} \right\}^\perp. \quad \square
\end{aligned}$$

(d) Seja $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 + \ell$ a decomposição canônica de \mathcal{M} dada na proposição (3.15). Então segundo [TK] a aplicação $(ad_{\mathcal{P}}(\hat{\eta}))^2$ é um endomorfismo simétrico de \mathcal{P} com autovalores 0, 1. Assim, denotamos por \mathcal{P}_0 e \mathcal{P}_1 os correspondentes autoespaços os quais são mutuamente ortogonais com respeito à forma de Killing $B_{\mathcal{G}}$. Daí, segue-se segundo [TK] que:

$$[\hat{\eta}, \ell] = \mathcal{P}_1.$$

Portanto, para provar a afirmação (d) do Lema (3.17) basta somente verificar que

$$[\ell, \mathcal{P}_0] \subseteq \mathcal{P}_1. \tag{20}$$

Com efeito, as hipóteses sobre $ad(\tilde{\eta})$ implicam que $\mathcal{P}_0 \subseteq \text{Núcleo}(ad(\tilde{\eta}))$. Daí, usando a identidade de Jacobi e o fato que \mathcal{M} é uma subálgebra de Lie de \mathcal{G} , temos que

$$[\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_0] \subseteq \text{Núcleo}(ad(\tilde{\eta})) \cap \mathcal{M}. \quad (21)$$

Por outro lado, se $X \in \text{Núcleo}(ad(\tilde{\eta}))$, então para todo $t \in \mathbb{R}$ e $n > 0$, temos que

$$(ad(tX))^n \tilde{\eta} = 0.$$

Daqui:

$$Ad\left(\exp_{[e]}(tX)\right)\tilde{\eta} = \exp_{[e]}\left(ad(tX)\right)\tilde{\eta} = \tilde{\eta}.$$

Assim, segundo [H] pág. 228,

$$\text{Núcleo}(ad(\tilde{\eta})) \cap \mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}_0. \quad (22)$$

Portanto, de (21) e (22) e da proposição (3.15), temos que

$$B_{\mathcal{G}}([\ell, \mathcal{P}_0], \mathcal{P}_0) = B_{\mathcal{G}}(\ell, [\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_0]) \subseteq B_{\mathcal{G}}(\ell, \mathcal{P}_0) = \{0\}. \quad (23)$$

Logo, de (23) segue-se (20). Isto termina a prova do Lema (3.15). \square

3.18 Teorema. *Todo mergulho padrão de um R -espaço simétrico é um mergulho paralelo.*

Demonstração. Com as mesmas notações anteriores seja $f : M := K/K_0 \rightarrow \mathcal{P}$ um mergulho padrão de um R -espaço simétrico M em \mathcal{P} . Então usando o Lema (3.17) diretamente temos que

$$(\nabla_X \alpha)(Y, Z) = ([X, [Y, [Z, \tilde{\eta}]])^\perp = ([X, \alpha(X, Y)])^\perp = 0,$$

para todo $X, Y, Z \in \ell := T_{[e]}M$. \square

A seguir utilizaremos a proposição (3.15) e os grupos de Lie semisimples não-compactos dados na observação (3.11), para descrever explicitamente alguns mergulhos padrões de R -espaços simétricos. Com efeito, primeiro juntaremos os grupos de Lie dados em (3.11) na seguinte tabela:

G_1	$SL(p+q; \mathbb{R})$	$SL(p+q; \mathbb{C})$	$SU^*(2p+2q)$
G_2	$SO(n, n)$	$SU(n, n)$	$Sp(n, n)$
G_3	$SO(2n; \mathbb{C})$	$SO^*(4n)$...
G_4	$Sp(n; \mathbb{R})$	$Sp(n; \mathbb{C})$...

De acordo com a referência [K] existe um elemento $\tilde{\eta}$ não-nulo que verifica a condição (13) dada na proposição (3.15) para cada um destes grupos de Lie semisimples não-compactos, a saber,

$$\tilde{\eta}_1 := \begin{pmatrix} aI_p & 0 \\ 0 & bI_q \end{pmatrix}, \quad \text{onde } a = -\frac{q}{p+q}, \quad b = \frac{p}{p+q}.$$

$$\tilde{\eta}_2 := \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\eta}_3 := \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\eta}_4 := I_n.$$

Logo para cada $i = 1, 2, 3, 4$, podemos dar na seguinte tabela explicitamente o subgrupo de isotropia $K_0^i := \{k \in K^i : Ad(k)\tilde{\eta}_i = \tilde{\eta}_i\}$ da representação adjunta do grupo de Lie semisimples não-compacto G_i , onde K^i denota o subgrupo maximal compacto associado à decomposição de Cartan de cada uma das álgebras de Lie $\mathcal{G}_i := \mathcal{M}_i \oplus \mathcal{P}_i$ relativa a cada G_i

K_0^1	$SO(p) \times SO(q)$	$S(U(p) \times U(q))$	$Sp(p) \times Sp(q)$
K_0^2	$\text{diag}(SO(n) \times SO(n))$	$\text{diag}(S(U(n) \times U(n)))$	$\text{diag}(Sp(n) \times Sp(n))$
K_0^3	$U(n)$	$Sp(n)$	---
K_0^4	$SO(n)$	$U(n)$	---

Nesta tabela, $\text{diag}(\cdot)$ indica a diagonal dos respectivos conjuntos.

De acordo com os dados acima, para cada $i = 1, 2, 3, 4$, obteremos os seguintes R -espaços simétricos $M_i := K^i/K_0^i$, que descreveremos na seguinte tabela juntamente com suas dimensões respectivas

M_1	$SO(p+q)/(SO(p) \times SO(q))$	$SU(p+q)/S(U(p) \times U(q))$	$Sp(p+q)/(Sp(p) \times Sp(q))$
$\dim(M_1)$	pq	$2pq$	$4pq$
M_2	$SO(n)$	$SU(n)$	$Sp(n)$
$\dim(M_2)$	$\frac{1}{2}n(n-1)$	n^2	$n(2n+1)$
M_3	$SO(2n)/U(n)$	$U(2n)/Sp(n)$	---
$\dim(M_3)$	$n(n-1)$	$n(2n+1)$	---
M_4	$U(n)/SO(n)$	$Sp(n)/U(n)$	---
$\dim(M_4)$	$\frac{1}{2}n(n+1)$	$n(n+1)$	---

Finalmente, para cada $i = 1, 2, 3, 4$, podemos descrever explicitamente os seguintes mergulhos padrões $f_i : M_i \rightarrow \mathcal{P}_i$ prometidos inicialmente:

$$f_1\left(\left[\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\right]\right) := bI_{p+q} - \begin{pmatrix} A\bar{A}^t & A\bar{C}^t \\ C\bar{A}^t & C\bar{C}^t \end{pmatrix} \quad \text{para todo} \quad \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in K_1.$$

$$f_2\left(\left[\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix}\right]\right) := \begin{pmatrix} 0 & X\bar{Y}^t \\ Y\bar{X}^t & 0 \end{pmatrix} \quad \text{para todo} \quad \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix} \in K_2.$$

$$f_3([k]) := k\tilde{\eta}_3 k^t \quad \text{para todo} \quad k \in K_3.$$

$$f_4([k]) := k\tilde{k}^t \quad \text{para todo} \quad k \in K_4.$$

Pela proposição (3.15), cada um dos mergulhos padrões f_i é mínimo numa hipersfera de raio $\sqrt{2 \dim(M_i)} = B_{\mathcal{G}_i}(\tilde{\eta}_i, \tilde{\eta}_i)$ contida no espaço euclidiano \mathcal{P}_i respectivo. Além disso, é possível determinar explicitamente os autoespaços $\mathcal{G}_{-1}^i, \mathcal{G}_0^i$ e \mathcal{G}_1^i correspondente aos autovalores $-1, 0$ e 1 da aplicação $ad(\tilde{\eta}_i)$ respectivamente. (Ver referência [KN]).

Pode-se observar da classe de mergulhos padrões definidos por f_1 que as *variedades Grasmannianas* dadas por M_1 estão naturalmente mergulhadas em $M(p+q, p+q; \mathbb{K})$.

Seja

$$d = \dim(\mathbb{K}) = \begin{cases} 1 & \text{se } \mathbb{K} = \mathbb{R} \\ 2 & \text{se } \mathbb{K} = \mathbb{C} \\ 4 & \text{se } \mathbb{K} = \mathbb{H}. \end{cases}$$

Então em particular, se $p = 1$ e $q = n$, teremos que M_1 é o espaço projetivo sobre \mathbb{K} , que é considerado aqui como sendo o espaço quociente da $((n+1)d - 1)$ -esfera unitária, $S^n := \{k \in M(n+1, 1; \mathbb{K}) : \bar{k}^t k = 1\}$, pela relação de equivalência em S^n dada por:

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K} : \lambda \bar{\lambda} = 1 \quad \text{e} \quad x = \lambda y$$

Denotaremos por $\mathbb{K}P^n := S^n / \sim$. Portanto, a menos de translações podemos considerar o mergulho padrão f_1 de $\mathbb{K}P^n$ em $M(n+1, n+1; \mathbb{K})$ e dado por

$$f_1([k]) := k\bar{k}^t = \begin{pmatrix} k_1 \bar{k}_1 & k_1 \bar{k}_2 & \dots & k_1 \bar{k}_{n+1} \\ k_2 k_1 & k_2 \bar{k}_2 & \dots & k_2 \bar{k}_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n+1} \bar{k}_1 & k_{n+1} \bar{k}_2 & \dots & k_{n+1} \bar{k}_{n+1} \end{pmatrix}, \quad \forall k = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_{n+1} \end{pmatrix} \in S^n.$$

Neste caso esta classe de mergulhos padrões são chamados de *mergulhos de Veronese* do espaço projetivo.

Por outro lado, a classe de mergulhos padrões dados por f_2 nos dizem que os grupos clássicos compactos de matrizes são naturalmente mergulhados nos respectivos espaços de matrizes.

Mais exemplos de mergulhos padrões de R -espaços simétricos são dados em [T], [K].

A seguir falaremos a respeito da classificação dos mergulhos padrões de R -espaços simétricos em espaços euclidianos:

No Teorema (3.18) provamos que todos os mergulhos padrões de R -espaços simétricos em espaços euclidianos são paralelos. Historicamente foi Dirk Ferus quem provou em 1974, o Teorema (3.18), daí no mesmo ano, provou também a seguinte recíproca de (3.18):

Toda imersão isométrica $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ de uma variedade Riemanniana conexa n -dimensional M com segunda forma fundamental covariantemente constante tal que leva M minimamente em alguma hipersfera de \mathbb{R}^{n+m} tem que ser uma imersão isométrica de um R -espaço simétrico mergulhado em \mathbb{R}^{n+m} de modo padrão.

Com este resultado provado em [F₃], encerramos o Capítulo II.

CAPÍTULO III

Classificação das imersões paralelas mediante S.T.J.

Historicamente o ponto de partida à classificação das imersões paralelas deve-se a Helmut Rieckziegel, o qual em 1980 publicou o seguinte Teorema de Unicidade com respeito a estas imersões.

Teorema (Rieckziegel). *Sejam $f : M \rightarrow Q^N(c)$ e $g : S \rightarrow Q^N(c)$ duas imersões paralelas. Suponhamos que existem pontos $p_0 \in M$ e $q_0 \in S$ tais que verificam as seguintes condições:*

- a) $f(p_0) = g(q_0)$,
- b) $f_*(T_{p_0}M) = g_*(T_{q_0}S)$, e
- c) $\alpha^f(v, w) = \alpha^g(v', w')$, $\forall v, w \in T_{p_0}M$ e $v', w' \in T_{q_0}S$ com $(f_*(v), f_*(w)) = (g_*(v'), g_*(w'))$.

Então, existem uma vizinhança aberta U de p_0 em M e uma isometria local $\phi : U \rightarrow S$ tal que $\phi(p_0) = q_0$ e $g \circ \phi = f|_U$. \square

Na demonstração deste Teorema, Rieckziegel usou essencialmente uma modificação de uma propriedade de *levantamento de caminhos*, dada por seu orientador Dombrowski para curvas, e também o *processo inverso de Cartan de levantamento de uma curva*. Por razões de espaço, não daremos a prova. Mas, nós aceitaremos este teorema que em palavras basicamente diz:

A condição suficiente para que duas imersões paralelas coincidam (localmente) é que elas coincidam em algum ponto junto com seus espaços tangente e com as segundas formas fundamentais.

Assim, Rieckziegel reduz nosso objetivo de classificação das imersões paralelas ao estudo de quando as *segundas formas fundamentais* são induzidas por estas imersões. Daí, Ferus no mesmo ano dá uma resposta completa para o caso $c > 0$, usando Sistemas Triplos de Jordan. Logo, três anos depois, Backes-Rieckziegel resolvem completamente a classificação para $c \leq 0$, também usando S.T.J.. Baseados neles Mercuri em 1991 dá um resumo da classificação das imersões paralelas em termos das duas classes de imersões paralelas dadas no Capítulo II. Portanto, nós neste capítulo seguiremos essencialmente o feito pelas pessoas mencionadas acima. Para isto, na seção 1 introduziremos os S.T.J., e a seguir veremos como se relacionam estes S.T.J. com as imersões paralelas. Na seção 2 definiremos e classificaremos os S.T.J. mínimos. Por último encerraremos este capítulo com a seção 3, onde apresentaremos o teorema que classifica completamente as imersões paralelas.

1. Sistemas Triplos de Jordan.

Iniciaremos esta seção introduzindo o conceito abstrato de sistema triplo, e a seguir daremos um exemplo que nos permitirá relacionar as imersões isométricas com este conceito.

1.1 Definição. Seja \mathcal{IE} um espaço vetorial real com produto interno. Então um *sistema triplo* para \mathcal{IE} é uma aplicação \mathbb{R} -bilinear $L : \mathcal{IE} \times \mathcal{IE} \rightarrow \text{End}(\mathcal{IE})$ tal que verifica as seguintes equações:

$$L(X, Y)^* = L(Y, X), \quad e \quad (1)$$

$$L(X, Y)Z = L(Z, Y)X \quad (2)$$

para todo $X, Y, Z \in \mathcal{IE}$; aqui $*$ indica a adjunta com respeito ao produto interno.

A motivação da definição (1.1), é dada no seguinte exemplo:

1.2 Exemplo. Seja $f : M^n \rightarrow Q^{n+m}(c)$ uma imersão isométrica. Então, para cada

$p \in M$, definimos uma aplicação $L : T_p M \times T_p M \rightarrow \text{End}(T_p M)$ dada por:

$$(3) \quad L(X, Y) := c\langle X, Y \rangle I + A_{\alpha(X, Y)} + R(X, Y), \quad \forall X, Y \in T_p M,$$

onde I é a aplicação identidade de $T_p M$, α é o tensor segunda forma fundamental de f em p , A é o operador padrão de f , R é o tensor curvatura de M e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é a métrica induzida por f em M . Então L dado por (3), define um sistema triplo para $T_p M$. Com efeito, vemos claramente que L verifica a equação (1) e para ver (2) devemos usar a equação de Gauss dada no Capítulo I.

1.3 Definição. Nas hipóteses do exemplo (1.2), para cada $p \in M$, L será dito o *sistema triplo associado a f em p* .

1.4 Observação. O sistema triplo associado a f em p decompõe-se como soma de duas aplicações \mathbb{R} -bilineares, S e R , onde S é a parte simétrica de L dada por $S(X, Y) := c\langle X, Y \rangle I + A_{\alpha(X, Y)}$, e R é a parte antisimétrica de L dada por $R(X, Y)$. Além disso, S descreve a geometria extrínseca e R depende somente da geometria intrínseca de M . \square

De acordo com o exemplo (1.2), podemos dar a seguinte definição que nos permitirá estudar as imersões isométricas em formas espaciais de maneira mais algébrica.

1.5 Definição. Sejam \mathbf{V} um espaço vetorial real com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, \mathbb{E} um subespaço de \mathbf{V} , $\alpha : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}^\perp$ ($=$ o complemento ortogonal de \mathbb{E} em \mathbf{V}) uma aplicação \mathbb{R} -bilinear simétrica, e $c \in \mathbb{R}$ arbitrário. Então diremos que um *sistema triplo de (\mathbf{V}, c) com dado inicial (\mathbb{E}, α)* é um sistema triplo $L := S + R$ para \mathbb{E} , onde S e R são a parte simétrica e parte antisimétrica de L respectivamente, e são dados pelas seguintes equações:

$$(4) \quad \langle S(X, Y)V, W \rangle = c\langle X, Y \rangle \langle V, W \rangle + \langle \alpha(X, Y), \alpha(V, W) \rangle \quad e$$

$$(5) \quad \langle R(X, Y)V, W \rangle = \langle S(Y, V)X, W \rangle - \langle S(X, V)Y, W \rangle,$$

onde $X, Y, V, W \in \mathbb{E}$.

Vejamus que $L = S + R$ é efetivamente um sistema triplo para \mathcal{E} .

Com efeito, a bilinearidade de L segue-se da bilinearidade de S e R , e a destes últimos, segue-se da bilinearidade do produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e de α . O fato, que L verifica a equação (1), segue-se diretamente da seguinte equivalência:

$$(6) \quad L(X, Y)^* = L(Y, X) \Leftrightarrow S(X, Y)^* = S(X, Y) \quad \text{e} \quad R(X, Y)^* = -R(X, Y),$$

a qual verifica-se, já que, S e R são aplicações simétrica e antisimétrica, respectivamente. A verificação da equação (2) para L segue-se diretamente da definição de L e de (4) e (5). ■

1.6 Observações. a) *Das equações (4) e (5), temos trivialmente a seguinte equação*

$$(7) \quad \langle R(X, Y)V, W \rangle = c\{\langle X, W \rangle \langle Y, V \rangle - \langle X, V \rangle \langle Y, W \rangle\} + \\ + \langle \alpha(X, W), \alpha(Y, V) \rangle - \langle \alpha(X, V), \alpha(Y, W) \rangle,$$

chamada equação algébrica de Gauss.

b) *O sistema triplo associado a uma imersão isométrica $f : M^n \rightarrow Q^{n+m}(c)$ em $p \in M$ é claramente um sistema triplo de $(T_p Q^{n+m}(c), c)$ com dado inicial $(T_p M, \alpha)$. □*

A partir da definição (1.5) podemos definir agora uma classe de sistemas triplos que estão intimamente relacionadas com as imersões paralelas.

1.7 Definição. Um sistema triplo L de (\mathcal{V}, c) com dado inicial (\mathcal{E}, α) é um *sistema triplo Jordan* (S.T.J.), se verifica a seguinte condição:

$$(8) \quad [L(X, Y), L(V, W)] = L(L(X, Y)V, W) - L(V, L(Y, X)W)$$

para todo $X, Y, V, W \in \mathcal{E}$, onde $[,]$ denota o comutador de endomorfismos.

A relação dos S.T.J., com as imersões paralelas será dada mais tarde. No entanto, daremos a seguir alguma nomenclatura para podermos apresentar um teorema que caracteriza os S.T.J., mediante uma simples equação.

Portanto, de agora em diante L será um sistema triplo de (\mathbf{V}, c) com dado inicial (\mathbf{E}, α) a menos que digamos o contrário.

1.8 Definição. Para cada $\eta \in \mathbf{E}^\perp$, definimos uma aplicação linear $A_\eta : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}$ dada por

$$\langle A_\eta X, Y \rangle = \langle \alpha(X, Y), \eta \rangle \quad \text{para todo } X, Y \in \mathbf{E}.$$

1.9 Observações. De acordo com a definição (1.8) temos claramente que:

a) Cada A_η é autoadjunto.

b) Para cada $a, b \in \mathbb{R}$ e $\eta, \xi \in \mathbf{E}^\perp$ as aplicações aA_η , bA_ξ e $A_{a\eta+b\xi}$ verificam a seguinte igualdade:

$$A_{a\eta+b\xi} = aA_\eta + bA_\xi.$$

c) As fórmulas (4) e (5), podem ser reescritas da seguinte maneira:

$$S(X, Y) = c\langle X, Y \rangle I_{\mathbf{E}} + A_{\alpha(X, Y)} \quad e$$

$$R(X, Y)V = c\{\langle Y, V \rangle X - \langle X, V \rangle Y\} + A_{\alpha(Y, V)}X - A_{\alpha(X, V)}Y$$

para todo $X, Y, V \in \mathbf{E}$, onde $I_{\mathbf{E}}$ é a aplicação identidade de \mathbf{E} . \square

1.10 Definição. Diremos que a *curvatura normal* do sistema triplo L , é uma aplicação linear $R^\perp(X, Y) : \mathbf{E}^\perp \rightarrow \mathbf{E}^\perp$ dada por

$$R^\perp(X, Y)\eta := \alpha(X, A_\eta Y) - \alpha(Y, A_\eta X),$$

onde $X, Y \in \mathbf{E}$.

Agora, denotaremos os seguintes subespaços de \mathbf{E}^\perp por

$$\mathbf{E}_1^\perp := \text{ger}\{\alpha(X, Y) \in \mathbf{E}^\perp : X, Y \in \mathbf{E}\}$$

e

$$\mathbf{E}_2^\perp := \{\eta \in \mathbf{E}^\perp : \langle \eta, \xi \rangle = 0, \forall \xi \in \mathbf{E}_1^\perp\},$$

aqui \mathbf{E}_2^\perp é o complemento ortogonal de \mathbf{E}_1^\perp em \mathbf{E}^\perp , ou seja, $\mathbf{E}^\perp = \mathbf{E}_1^\perp \oplus \mathbf{E}_2^\perp$.

1.11 Observações. *Claramente dos subespaços dados acima teremos que*

a) $\mathbf{E}_2^\perp = \{\eta \in \mathbf{E}^\perp : A_\eta = 0\}$

b) $R^\perp(X, Y)|_{\mathbf{E}_2^\perp} = 0$ para todo $X, Y \in \mathbf{E}$.

c) $\mathbf{E}_2^\perp \subseteq \text{Núcleo}(R^\perp(X, Y))$ para todo $X, Y \in \mathbf{E}$. \square

1.12 Definição. Um sistema triplo L de (\mathbf{V}, c) com dado inicial (\mathbf{E}, α) é dito *full* (ou *completo*) se $\mathbf{E}_2^\perp = 0$.

1.13 Exemplo. O sistema triplo associado a f em p , onde $f : M^n \rightarrow Q^{n+1}(c)$ é uma imersão umbílica não totalmente geodésica, é trivialmente um sistema triplo full. \square

1.14 Observações. a) *Para cada $X, Y \in \mathbf{E}$ e $\eta, \xi \in \mathbf{E}^\perp$ teremos a seguinte igualdade com respeito ao produto interno de \mathbf{E}*

$$\langle R^\perp(X, Y)\eta, \xi \rangle = \langle [A_\eta, A_\xi]X, Y \rangle.$$

b) *As seguintes equivalências são válidas:*

$$\begin{aligned} R^\perp(X, Y) = 0, \forall X, Y \in \mathbf{E} &\Leftrightarrow \text{ todos os } A_\eta \text{ comutam} \\ &\Leftrightarrow \text{ os } A_\eta \text{ são simultaneamente diagonalizáveis.} \end{aligned}$$

Demonstração. (a) Sejam $X, Y \in \mathbf{E}$ e $\eta, \xi \in \mathbf{E}^\perp$. Então

$$\begin{aligned} \langle R^\perp(X, Y)\eta, \xi \rangle &= \langle \alpha(X, A_\eta Y), \xi \rangle - \langle \alpha(Y, A_\xi X), \eta \rangle \\ &= \langle A_\xi X, A_\eta Y \rangle - \langle A_\eta Y, A_\xi X \rangle \\ &= \langle A_\eta A_\xi X, Y \rangle - \langle A_\xi A_\eta X, Y \rangle \\ &= \langle [A_\eta, A_\xi]X, Y \rangle. \quad \square \end{aligned}$$

(b) A primeira equivalência segue-se claramente de (a), e a segunda é por um fato bem conhecido de álgebra linear. ■

1.15 Lema. *As fórmulas (1), (2) e (8) que determinam um S.T.J., $L := S + R$, são equivalentes às seguintes:*

$$(9) \quad S(X, Y)^* = S(X, Y) \quad e \quad R(X, Y)^* = -R(X, Y)$$

$$(10) \quad R(X, Y)Z = S(Y, Z)X - S(X, Z)Y$$

$$(11) \quad [S(X, Y), S(V, W)] = R(S(X, Y)V, W) - R(V, S(Y, X)W)$$

$$(12) \quad [S(X, Y), R(V, W)] = S(S(X, Y)V, W) - S(V, S(Y, X)W)$$

$$(13) \quad [R(X, Y), S(V, W)] = S(R(X, Y)V, W) - S(V, R(Y, X)W)$$

$$(14) \quad [R(X, Y), R(V, W)] = R(R(X, Y)V, W) - R(V, R(Y, X)W)$$

para todo $V, W, X, Y, Z \in \mathbb{E}$.

Demonstração. A prova deste Lema (1.15) segue trivialmente dos fatos que, para cada $X, Y \in \mathbb{E}$, acontece

$$S(X, Y) = \frac{L(X, Y) + L(Y, X)}{2} \quad e \quad R(X, Y) = \frac{L(X, Y) - L(Y, X)}{2}. \quad \blacksquare$$

Daremos agora, uma caracterização para os S.T.J., em termos de uma equação que relaciona os objetos definidos anteriormente.

1.16 Teorema (Ferus). *Com as notações e definições anteriores. Um sistema triplo L de (\mathbb{V}, c) com dado inicial (\mathbb{E}, α) é um S.T.J. se e somente se verifica-se a seguinte equação*

$$(15) \quad R^\perp(X, Y)[\alpha(Z, W)] = \alpha(R(X, Y)Z, W) + \alpha(Z, R(X, Y)W)$$

para todo $X, Y, Z, W \in \mathbb{E}$.

Demonstração. (\Rightarrow) Suponhamos que $L = S + R$ é um S.T.J.. Sejam X, Y, Z, W em

\mathbf{E} arbitrários. Então de (1.14)(a), teremos que

$$(16) \quad \langle R^\perp(X, Y)[\alpha(Z, W)], \eta \rangle = -\langle [A_\eta, A_{\alpha(Z, W)}]X, Y \rangle \quad \text{para todo } \eta \in \mathbf{E}.$$

Por outro lado, de (1.9)(c), obteremos que

$$(17) \quad [S(U, V), S(Z, W)] = [A_{\alpha(U, V)}, A_{\alpha(Z, W)}], \quad \text{para todo } U, V \in \mathbf{E},$$

pois, $I_{\mathbf{E}}$ comuta com $A_{\alpha(U, V)}$ e $A_{\alpha(Z, W)}$.

Assim, usando o Lema (1.15) em (17), obteremos que

$$[A_{\alpha(U, V)}, A_{\alpha(Z, W)}] = R(S(U, V)Z, W) - R(Z, S(U, V)W).$$

Mas, de (1.9)(c), segue-se que

$$R(S(U, V)Z, W) - R(Z, S(U, V)W) = R(A_{\alpha(U, V)}Z, W) - R(Z, A_{\alpha(U, V)}W)$$

Daqui:

$$[A_{\alpha(U, V)}, A_{\alpha(Z, W)}] = R(A_{\alpha(U, V)}Z, W) - R(Z, A_{\alpha(U, V)}W).$$

Logo, em (16) se $\eta = \alpha(U, V)$, então usando (7), teremos que

$$(18) \quad \begin{aligned} \langle R^\perp(X, Y)[\alpha(Z, W)], \eta \rangle &= \langle R(A_\eta Z, W)X, Y \rangle - \langle R(Z, A_\eta W)X, Y \rangle \\ &= \langle R(X, Y)Z, A_\eta W \rangle - \langle R(X, Y)W, A_\eta Z \rangle \\ &= \langle \alpha(R(X, Y)Z, W) - \alpha(R(X, Y)W, Z), \eta \rangle. \end{aligned}$$

Agora, se $\eta = \eta_1 + \eta_2$ é qualquer em \mathbf{E}^\perp , onde $\eta_i \in \mathbf{E}_i^\perp$, então $A_\eta = A_{\eta_1}$. Portanto, vale (18) para este η . Daqui, segue-se claramente (15). \square

(\Leftarrow) Seja L um sistema triplo de (\mathbf{W}, c) com dado inicial (\mathbf{E}, α) tal que verifica (15). Para mostrar que L é um S.T.J., só falta verificar (8). Mas, pelo Lema (1.15) isto equivale a verificar (11), (12), (13) e (14). Com efeito, veremos primeiro que verificam-se as seguintes fórmulas:

$$(19) \quad [S(X, Y), S(V, W)] = [A_{\alpha(X, Y)}, A_{\alpha(V, W)}]$$

$$(20) \quad [S(X, Y), R(V, W)] = A_{\alpha(X, Y)}R(V, W) - R(V, W)A_{\alpha(X, Y)}$$

$$(21) \quad [R(X, Y), S(V, W)] = R(X, Y)A_{\alpha(V, W)} - A_{\alpha(V, W)}R(X, Y)$$

$$(22) \quad [R(X, Y), R(V, W)] = R(X, Y)R(V, W) - R(V, W)R(X, Y)$$

$$(23) \quad R(S(X, Y)V, W) - R(V, S(Y, X)W) = R(A_{\alpha(X, Y)}V, W) - R(V, A_{\alpha(X, Y)}W)$$

$$(24) \quad S(S(X, Y)V, W) - S(V, S(Y, X)W) = -A_{R^\perp(V, W)[\alpha(X, Y)]}$$

$$(25) \quad S(R(X, Y)V, W) - S(V, R(Y, X)W) = A_{R^\perp(X, Y)[\alpha(V, W)]}$$

$$(26) \quad R(R(X, Y)V, W) - R(V, R(Y, X)W) = R(R(X, Y)V, W) + R(V, R(X, Y)W)$$

para todo $X, Y, V, W \in \mathbf{E}$.

As fórmulas (19), ..., (23), seguem-se claramente da observação (1.9)(c). Por outro lado, para (24), (25) usam-se a observação (1.9)(c) e a equação (15). Por último, para (26) usa-se a equação de Gauss dada em (7).

Agora veremos (11), ..., (14). Portanto, seja $\eta = \alpha(X, Y)$. Então:

Para (11): Temos que provar (19)=(23). Com efeito

$$\begin{aligned} \langle [A_\eta, A_{\eta(V, W)}]U, Z \rangle &= -\langle R^\perp(U, Z)[\alpha(V, W)], \eta \rangle \\ &= -\langle A_\eta R(U, Z)V, W \rangle - \langle A_\eta V, R(U, Z)W \rangle \\ &= -\langle R(U, Z)V, A_\eta W \rangle - \langle R(W, A_\eta V)U, Z \rangle \\ &= \langle R(A_\eta V, W)U - R(V, A_\eta W)U, Z \rangle. \quad \square \end{aligned}$$

Para (12): Temos que provar (20)=(24). Com efeito

$$\begin{aligned} \langle -A_{R^\perp(V, W)\eta}U, Z \rangle &= \langle -[A_\eta, A_{\alpha(U, Z)}]V, W \rangle \\ &= \langle R(U, A_\eta Z)V - R(A_\eta U, Z)V, W \rangle \\ &= \langle R(V, W)U, A_\eta Z \rangle - \langle R(V, W)A_\eta V, Z \rangle \\ &= \langle [A_\eta, R(V, W)]V, Z \rangle \quad \square \end{aligned}$$

Para (13): Temos que provar (21)=(25). Com efeito

$$A_{R^\perp(X, Y)[\alpha(V, W)]} = -[A_{\alpha(V, W)}, R(X, Y)] = [R(X, Y), A_{\alpha(V, W)}]. \quad \square$$

Para (14): Temos que provar (22)=(26). Mas isto, segue-se claramente usando a observação (1.9), a equação (15), e o fato que (20)=(24). \square

Isto termina completamente com a prova do Teorema (1.16). ■

De acordo com as notações e definições da seção (1) do Capítulo I podemos dar a seguinte definição.

1.17 Definição. Seja $f : M^n \rightarrow Q^{n+m}(c)$ uma imersão isométrica. Então chamaremos *sistema triplo associado a f* ao sistema triplo de $(\mathfrak{X}(f), c)$ com dado inicial $(\mathfrak{X}(M), \alpha)$ definido por

$$(27) \quad L(X, Y)Z := c\langle X, Y \rangle Z + A_{\alpha(X, Y)}Z + R(X, Y)Z,$$

onde $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

1.18 Observação. *O sistema triplo associado a f é um tensor (pois, L é soma de tensores). Além disso, pontualmente, para cada $p \in M$, L induz o sistema triplo associado a f em p . □*

Agora, podemos dar o seguinte corolário do Teorema (1.16) o qual relaciona imersões paralelas com S.T.J..

1.19 Corolário. *O sistema triplo associado a uma imersão paralela é um S.T.J..*

Demonstração. Seja $f : M^n \rightarrow Q^{n+m}(c)$ uma imersão paralela. Pelo Teorema (1.16) só teremos que verificar (15), isto é,

$$R^\perp(X, Y)[\alpha(V, W)] = \alpha(R(X, Y)V, W) + \alpha(V, R(X, Y)W)$$

para todo $X, Y, V, W \in \mathfrak{X}(M)$.

Aqui $R^\perp, R, \nabla^\perp, \nabla$ e α denotam os objetos de f definidos no Capítulo I. Então para $\eta = \alpha(V, W)$ sabemos que

$$(28) \quad R^\perp(X, Y)\eta = \nabla_X^\perp \nabla_Y^\perp \eta - \nabla_Y^\perp \nabla_X^\perp \eta - \nabla_{[X, Y]}^\perp \eta.$$

Como f é paralela, teremos as seguintes igualdades

$$(29) \quad \nabla_X^\perp \nabla_Y^\perp \eta = \alpha(\nabla_X \nabla_Y V, W) + \alpha(\nabla_Y V, \nabla_X W) + \alpha(\nabla_X V, \nabla_Y W) +$$

$$+ \alpha(V, \nabla_X \nabla_Y W)$$

$$\begin{aligned} \nabla_Y^\perp \nabla_X^\perp \eta &= \alpha(\nabla_Y \nabla_X V, W) + \alpha(\nabla_X V, \nabla_Y W) + \alpha(\nabla_Y V, \nabla_X W) + \\ &+ \alpha(V, \nabla_Y \nabla_X W) \end{aligned} \quad (30)$$

$$\nabla_{[X,Y]}^\perp \eta = \alpha(\nabla_{[X,Y]} V, W) + \alpha(V, \nabla_{[X,Y]} W). \quad (31)$$

Portanto, reemplazando (29), (30) e (31) em (28) e, usando a definição do tensor de curvatura de M^n obteremos (15). ■

Agora, definiremos uma forma bilinear em termos de um S.T.J.. Esta forma ajudará a provar um teorema algébrico que, usaremos na classificação dos S.T.J. mínimos que daremos na seguinte seção.

1.20 Definição. Seja $L = S + R$ um S.T.J. de (W, c) com dado inicial (\mathbb{E}, α) . A forma bilinear simétrica $\lambda : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\lambda(X, Y) = \text{Traço}(L(X, Y) + L(Y, X)) = 2 \text{Traço}(S(X, Y)) \quad (32)$$

é chamada a *forma traço* do S.T.J..

Denotaremos por $\mathcal{L} := \text{ger}\{L(X, Y) : X, Y \in \mathbb{E}\}$ o subespaço de $\text{End}(\mathbb{E})$ que por (8) é uma subálgebra de Lie da álgebra $\text{End}(\mathbb{E})$, e a chamaremos a *álgebra de Lie* do S.T.J..

1.21 Propriedades da forma traço λ de L .

a) $\lambda(L(X, Y)V, W) = \lambda(V, L(Y, X)W) = \lambda(L(V, W)X, Y), \quad \forall X, Y, V, W \in \mathbb{E}.$

b) $\lambda(TX, Y) = \lambda(X, T^*Y), \quad \forall X, Y \in \mathbb{E} \text{ e } T \in \mathcal{L}.$

c) *Existe para λ uma extensão bilinear simétrica sobre \mathcal{L} . a saber, $\tilde{\lambda} : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$\tilde{\lambda}(T, L(X, Y)) := \lambda(TX, Y), \quad \forall T \in \mathcal{L} \text{ e } X, Y \in \mathbb{E} \quad (33)$$

d) $\tilde{\lambda}$ e a forma de Killing $B_{\mathcal{L}}$ de \mathcal{L} estão relacionadas pela seguinte fórmula:

$$(34) \quad \tilde{\lambda}(T, T') = B_{\mathcal{L}}(T, T') + 2 \text{Traço}(T \circ T'), \forall T, T' \in \mathcal{L}.$$

Demonstração. (a) Segue diretamente de (2) e (8). \square

(b) Segue da bilinearidade de λ e de (1.21)(a). \square

(c) O fato que $\tilde{\lambda}$ dado por (33) é uma extensão de λ , segue-se da seguinte igualdade:

$$\tilde{\lambda}(I_{\mathbf{E}}, L(X, Y)) = \lambda(X, Y), \quad \forall X, Y \in \mathbf{E}.$$

A bilinearidade $\tilde{\lambda}$ é trivial e a simetria segue-se do seguinte cálculo:

$$\tilde{\lambda}(L(X, Y), L(V, W)) = \lambda(L(X, Y)V, W) = \lambda(L(V, W)X, Y) = \tilde{\lambda}(L(V, W), L(X, Y)). \quad \square$$

Para a prova de (d), necessitamos do seguinte Lema:

1.22 Lema. *Seja \mathcal{G} uma álgebra de Lie. Suponhamos que \mathcal{A} e \mathcal{B} são subespaços vetoriais de \mathcal{G} tais que*

$$\mathcal{G} = \mathcal{A} + \mathcal{B}, \quad [\mathcal{A}, \mathcal{A}] \subseteq \mathcal{A}, \quad [\mathcal{A}, \mathcal{B}] \subseteq \mathcal{B} \quad \text{e} \quad [\mathcal{B}, \mathcal{B}] \subseteq \mathcal{A}$$

Então valem as seguintes condições:

- i) *A soma $\mathcal{G} = \mathcal{A} + \mathcal{B}$ é ortogonal com respeito à forma de Killing $B_{\mathcal{G}}$ de \mathcal{G} , e*
- ii) *Para cada $X \in \mathcal{G}$, temos que*

$$B_{\mathcal{G}}(X, X) = B_{\mathcal{A}}(A, A) + \text{Traço}(ad(A))_{\mathcal{B}}^2 + 2 \text{Traço}(ad(B))_{\mathcal{B}}^2$$

onde $X = A + B$, $A \in \mathcal{A}$ e $B \in \mathcal{B}$, e $(ad(A))_{\mathcal{B}}^2 := (ad_{\mathcal{B}}(A))^2$.

Demonstração. (i) Sejam $A \in \mathcal{A}$ e $B \in \mathcal{B}$. Então

$$ad(A)ad(B)\mathcal{A} = [A, [B, \mathcal{A}]] \subseteq [A, \mathcal{B}] \subseteq \mathcal{B}, \quad \text{e} \quad ad(A)ad(B)\mathcal{B} = [A, [B, \mathcal{B}]] \subseteq [A, \mathcal{A}] \subseteq \mathcal{A}.$$

Daqui, em alguma base adequada de \mathcal{G} , teremos que $\text{Traço}(ad(A)ad(B)) = 0$. \square

(ii) Seja $X \in \mathcal{G}$ arbitrário. Então definimos as seguintes aplicações lineares de \mathcal{G}

$$ad_+(X)Y := \begin{cases} ad(X)Y & \text{se } Y \in \mathcal{A} \\ 0 & \text{se } Y \in \mathcal{B} \end{cases} \quad \text{e} \quad ad_-(X)Y := \begin{cases} 0 & \text{se } Y \in \mathcal{A} \\ ad(X)Y & \text{se } Y \in \mathcal{B} \end{cases}$$

Claramente, estas aplicações verificam

$$(35) \quad ad(X) = ad_+(X) + ad_-(X) \quad \text{e} \quad ad_+(X)\mathcal{B} = ad_-(X)\mathcal{A} = 0.$$

Daqui e pela hipótese do Lema (1.22), para cada $A \in \mathcal{A}$ e $B \in \mathcal{B}$, obteremos que

$$(36) \quad \begin{aligned} (ad(A))^2 &= (ad_+(A))^2 + (ad_-(B))^2 \quad \text{e} \\ (ad(B))^2 &= ad_+(B)ad_-(B) + ad_-(B)ad_+(B) \end{aligned}$$

Assim, de (35) e (36), teremos as seguintes igualdades

$$\begin{aligned} (ad_+(A))_{\mathcal{A}}^2 &= (ad(A))_{\mathcal{A}}^2, & (ad_+(A))_{\mathcal{B}}^2 &= 0, \\ (ad_-(A))_{\mathcal{A}}^2 &= 0, & (ad_-(A))_{\mathcal{B}}^2 &= (ad(A))_{\mathcal{B}}^2, \\ ad_+(B)ad_-(B)_{\mathcal{A}} &= 0 \quad \text{e} & (ad_+(B)ad_-(B))_{\mathcal{B}} &= (ad(B))_{\mathcal{B}}^2. \end{aligned}$$

Daqui, obteremos as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} \text{Traço}(ad_+(A))^2 &= B_{\mathcal{A}}(A, A), & \text{Traço}(ad_-(A))^2 &= \text{Traço}(ad(A))_{\mathcal{B}}^2, \quad \text{e} \\ \text{Traço}(ad_+(B)ad_-(B)) &= \text{Traço}(ad(B))_{\mathcal{B}}^2. \end{aligned}$$

Logo, reemplazando (36) nas três igualdades acima, obteremos que

$$B_{\mathcal{G}}(A, A) = B_{\mathcal{A}}(A, A) + \text{Traço}(ad(A))_{\mathcal{B}}^2 \quad \text{e} \quad B_{\mathcal{G}}(B, B) = 2\text{Traço}(ad(B))_{\mathcal{B}}^2.$$

Portanto, destas últimas igualdades e da condição (i) do Lema (1.22), para cada $X = A + B \in \mathcal{G}$, onde $A \in \mathcal{A}$ e $B \in \mathcal{B}$, teremos que

$$\begin{aligned} B_{\mathcal{G}}(X, X) &= B_{\mathcal{G}}(A, A) + B_{\mathcal{G}}(B, B) \\ &= B_{\mathcal{A}}(A, A) + \text{Traço}(ad(A))_{\mathcal{B}}^2 + 2 \text{Traço}(ad(B))_{\mathcal{B}}^2. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Agora estamos em condições de provar (d).

(d) Em primeiro lugar, consideremos o seguinte espaço vetorial

$$(37) \quad \Lambda := \mathbb{E} \oplus \mathcal{L} \oplus \mathbb{E}$$

o qual é uma álgebra de Lie com o seguinte produto de Lie

$$[(X, T, Y), (\tilde{X}, \tilde{T}, \tilde{Y})] := (T\tilde{X} - \tilde{T}X, [T, \tilde{T}] - \frac{1}{2}\{L(X, \tilde{Y}) - L(\tilde{X}, Y)\}, \tilde{T}^*Y - T^*\tilde{Y}), \quad (38)$$

onde $(X, T, Y), (\tilde{X}, \tilde{T}, \tilde{Y}) \in \Lambda$; aqui $[T, \tilde{T}] := T \circ \tilde{T} - \tilde{T} \circ T$ e $*$ indica a adjunta, respeito do produto interno de \mathbb{E} . (A verificação de que Λ é uma álgebra de Lie com esse produto é direta).

Em segundo lugar, definiremos uma forma bilinear simétrica em Λ como sendo a aplicação $\tilde{\lambda} : \Lambda \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\tilde{\lambda}((X, T, Y), (\tilde{X}, \tilde{T}, \tilde{Y})) := \tilde{\lambda}(T, \tilde{T}) - \frac{1}{2}\{\lambda(X, \tilde{Y}) + \lambda(\tilde{X}, Y)\}, \quad (39)$$

onde $(X, T, Y), (\tilde{X}, \tilde{T}, \tilde{Y}) \in \Lambda$. Observamos claramente que $\tilde{\lambda}$ é uma extensão de λ . Pois $\tilde{\lambda}((0, T, 0), (0, \tilde{T}, 0)) = \tilde{\lambda}(T, \tilde{T})$.

Em terceiro lugar, teremos que verificar as hipóteses do Lema (1.22) para Λ . Com efeito, basta tomar

$$\mathcal{A} = \{0\} \oplus \mathcal{L} \oplus \{0\} \quad \text{e} \quad \mathcal{B} = \mathbb{E} \oplus \{0\} \oplus \mathbb{E} := \mathbb{E} \oplus \mathbb{E}. \quad (40)$$

Portanto, podemos aplicar o Lema (1.22) a Λ . Assim obteremos a seguinte equação:

$$B_\Lambda(Z, Z) = B_{\mathcal{L}}(T, T) + \text{Traço}(ad(0, T, 0))_{\mathbb{E} \oplus \mathbb{E}}^2 + 2\text{Traço}(ad(X, 0, Y))_{\mathbb{E} \oplus \mathbb{E}}^2, \quad (41)$$

para cada $Z = (X, T, Y) \in \Lambda$. Mas, usando a definição dada em (38) de $[\cdot, \cdot]$ sobre Λ , obteremos que

$$\text{Traço}(ad(0, T, 0))_{\mathbb{E} \oplus \mathbb{E}}^2 = 2\text{Traço}(T^2), \quad \text{e} \quad (42)$$

$$\text{Traço}(ad(X, 0, Y))_{\mathbb{E} \oplus \mathbb{E}}^2 = -\frac{1}{2}\lambda(X, Y). \quad (43)$$

Em quarto lugar, substituímos (42) e (43) em (41), assim obteremos que

$$B_\Lambda(Z, Z) = B_{\mathcal{L}}(T, T) + 2\text{Traço}(T^2) - \lambda(X, Y). \quad (44)$$

Em quinto lugar, a forma de Killing B_Λ de Λ é exatamente a forma bilinear simétrica $\tilde{\lambda}$ dada por (39). Pois, não é difícil verificar que a forma bilinear simétrica $B_\Lambda - \tilde{\lambda}$ é nula.

Finalmente, de (39), (44) e do fato que $B_\Lambda = \tilde{\lambda}$, podemos concluir que

$$(45) \quad B_\Lambda(Z, Z) = \tilde{\lambda}(T, T) - \lambda(X, Y). \quad \square$$

Portanto, temos provado todas as propriedades dadas em (1.21) para a forma traço de L . ■

1.23 Observação. *Com as notações anteriores temos que $B_\mathcal{L}$ é não-degenerada se $\tilde{\lambda}$ é não degenerada.* □

Fecharemos a seção com um lema algébrico prometido anteriormente o qual foi dado por Backes em 1983.

1.24 Lema (Backes). *Seja $L := S + R$ um S.T.J., de (\mathbb{W}, c) com dado inicial (\mathbb{E}, α) . Então, para todo $X, Y \in \mathbb{E}$ as seguintes afirmações são verdadeiras:*

$$(46) \quad \text{Traço}(S, (S(X, Y)X, Y)) \geq 0,$$

$$(47) \quad \text{Traço}(S, (R(X, Y)X, Y)) \leq 0,$$

e teremos as igualdades em (46) e (47), se e somente se $S(X, Y) = 0$ e $R(X, Y) = 0$, respectivamente.

Demonstração. Consideremos a álgebra de Lie \mathcal{L} do S.T.J., L , e a decomposição canônica em soma direta de $\mathcal{L} = \mathcal{A} \oplus \mathcal{S}$ dada por $\mathcal{A} := \{T \in \mathcal{L} : T^* = -T\}$ e $\mathcal{S} := \{T \in \mathcal{L} : T^* = T\}$. Como a forma de Killing $B_\mathcal{L}$ é negativa semi-definida sobre $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ e positiva semi-definida sobre $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$, e $R(X, Y) \in \mathcal{A}$ e $S(X, Y) \in \mathcal{S}$, então usando (34), teremos que

$$0 \geq B_\mathcal{L}(R(X, Y), R(X, Y)) = \tilde{\lambda}(R(X, Y), R(X, Y)) - 2 \text{Traço}(R(X, Y))^2, \quad e$$

$$0 \leq B_\mathcal{L}(S(X, Y), S(X, Y)) = \tilde{\lambda}(S(X, Y), S(X, Y)) - 2 \text{Traço}(S(X, Y))^2.$$

Mas, $\text{Traço}(R(X, Y))^2 \leq 0$ e $\text{Traço}(S(X, Y))^2 \geq 0$. Portanto:

$$0 \geq \tilde{\lambda}(R(X, Y), R(X, Y)) = \lambda(R(X, Y)X, Y) = 2 \text{Traço}(S(R(X, Y)X, Y)) \quad e$$

$$0 \leq \tilde{\lambda}(S(X, Y), S(X, Y)) = \lambda(S(X, Y), S(X, Y)) = 2 \text{Traço}(S(S(X, Y)X, Y)).$$

Isto prova (46) e (47), respectivamente. \square

Como $\tilde{\lambda}(T, T) = B_{\mathcal{L}}(T, T) + 2\text{Traço}(T^2)$, $\forall T \in \mathcal{L}$, teremos o seguinte

se $T \in \mathcal{S}$ e $T \neq 0$, então $\text{Traço}(T^2) > 0$ e $B_{\mathcal{L}}(T, T) \geq 0$; e

se $T \in \mathcal{A}$ e $T \neq 0$, então $\text{Traço}(T^2) < 0$ e $B_{\mathcal{L}}(T, T) \leq 0$.

Daqui, concluímos que

$$\text{Traço}(S(S(X, Y)X, Y)) = 0 \Leftrightarrow S(X, Y) = 0; \quad e$$

$$\text{Traço}(S(R(X, Y)X, Y)) = 0 \Leftrightarrow R(X, Y) = 0.$$

Isto prova completamente o Lema (1.24). \blacksquare

2. Classificação dos S.T.J. mínimos.

Seja L um S.T.J. de (\mathbb{V}, c) com dado inicial (\mathbb{E}, α) .

2.1 Definição. Dizemos que L é *mínimo* se $H = 0$, onde $H := \frac{1}{n}\text{Traço}(\alpha)$ e $n = \dim \mathbb{E}$.

2.2 Definição. Dizemos que L é *totalmente geodésico* se $\alpha = 0$.

O Lema (1.24) dado na seção 1, proporciona uma resposta simples à classificação dos S.T.J., mínimos para o caso $c \leq 0$. Isto é dado no seguinte teorema:

2.3 Teorema. *Seja L um S.T.J. de (\mathbb{V}, c) com dado inicial (\mathbb{E}, α) , onde $c \leq 0$. Então*

$$L \text{ é mínimo} \Leftrightarrow L \text{ é totalmente geodésico}$$

Demonstração. (\Rightarrow) Para $n = 1$ é trivial. Agora suponhamos $n \geq 2$. Então como $L = S + R$, para cada $X, Y \in \mathbb{E}$ por observação (1.9)(c), calculamos que

$$(1) \quad \text{Traço}(S(X, Y)) = cn\langle X, Y \rangle + \text{Traço}(A_{\alpha(X, Y)}).$$

Por outro lado, se X_1, \dots, X_n é um referencial ortonormal de \mathbb{E} , então

$$\begin{aligned}
 \text{Traço}(A_{\alpha(X,Y)}) &= \sum_{i=1}^n \langle A_{\alpha(X,Y)} X_i, X_i \rangle \\
 &= \sum_{i=1}^n \langle \alpha(X, Y), \alpha(X_i, X_i) \rangle \\
 &= \langle \alpha(X, Y), \sum_{i=1}^n \alpha(X_i, X_i) \rangle \\
 &= \langle \alpha(X, Y), \underbrace{n \text{Traço}(\alpha)}_{H=0} \rangle = 0.
 \end{aligned}$$

Portanto, de (1), temos que

$$\text{Traço}(S(X, Y)) = cn \langle X, Y \rangle.$$

Daqui, usando a observação (1.9)(c), obtemos que

$$\begin{aligned}
 \text{Traço}(S(S(X, Y)X, Y)) &= nc \langle S(X, Y)X, Y \rangle & (2) \\
 &= nc(c \langle X, Y \rangle^2 + \|\alpha(X, Y)\|^2).
 \end{aligned}$$

Logo, para $c = 0$ em (2), temos que

$$\text{Traço}(S(S(X, Y)X, Y)) = 0.$$

Assim, pelo Lema (1.24), obtemos que $S(X, Y) = 0$. Mas,

$$S(X, Y) = 0 \Rightarrow A_{\alpha(X,Y)} = 0 \Rightarrow \|\alpha(X, Y)\|^2 = 0 \Rightarrow \alpha(X, Y) = 0. \quad (3)$$

Já que, X, Y são arbitrários, concluímos de (3) que $\alpha = 0$.

Finalmente, para $c < 0$ em (2), segue-se do Lema (1.24), que

$$nc(c \langle X, Y \rangle^2 + \|\alpha(X, Y)\|^2) \geq 0.$$

Daqui, obtemos que

$$\|\alpha(X, Y)\|^2 \leq -c \langle X, Y \rangle^2,$$

onde $X, Y \in \mathbb{E}$ qualquer. Assim, para o caso de $\langle X, Y \rangle = 0$ (ortogonais), obtemos que $\alpha(X, Y) = 0$.

Em particular, se $X, Y \in \mathbf{E}$ são ortonormais, então como $\langle X + Y, X - Y \rangle = 0$, teremos que $\alpha(X + Y, X - Y) = 0$. Daqui, $\alpha(X, X) = \alpha(Y, Y)$.

Portanto:

$$(4) \quad \alpha(X, X) = \alpha(Y, Y) \quad \text{para todo } X, Y \in \mathbf{E}, \text{ ortonormais.}$$

Assim, tomando X_1, \dots, X_n um referencial ortonormal de \mathbf{E} e usando a minimalidade e (4), teremos que para todo $j = 1, \dots, n$

$$\alpha(X_j, X_j) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \alpha(X_i, X_i) = \frac{1}{n} \text{Traço}(\alpha) = H = 0.$$

Daqui, concluímos que $\alpha = 0$. Portanto, L é totalmente geodésico se $c \leq 0$.

Isto prova o Teorema (2.3) pois o recíproco é óbvio. ■

2.4 Observação. Pelo Teorema (2.3) um S.T.J. mínimo para $c \leq 0$ é um sistema triplo associado a uma imersão paralela em $Q^N(c)$. □

Agora, veremos que a classificação dos S.T.J. mínimos para $c > 0$ está estreitamente relacionada com os mergulhos padrões de R -espaços simétricos.

Com efeito, consideremos um S.T.J. mínimo e full L de (\mathbf{V}, c) com dado inicial (\mathbf{E}, α) . Daqui:

$$L(X, Y) = c\langle X, Y \rangle I_{\mathbf{E}} + A_{\alpha(X, Y)} + R(X, Y), \quad \forall X, Y \in \mathbf{E}$$

A partir deste S.T.J., definimos um novo S.T.J., \tilde{L} de $(\mathbf{V}, 0)$ com dado inicial $(\mathbf{E}, \tilde{\alpha})$, onde

$$\tilde{\mathbf{V}} := \mathbf{V} \oplus \mathbb{R}, \quad \tilde{\alpha}(X, Y) := \alpha(X, Y) + \langle X, Y \rangle \tilde{H}, \quad \forall X, Y \in \mathbf{E}$$

e

$$\tilde{H} = (0, \sqrt{c}) \in \mathbf{V} \oplus \mathbb{R}.$$

Daqui:

$$(5) \quad \tilde{L}(X, Y) := A_{\tilde{\alpha}(X, Y)} + R(X, Y), \quad \forall X, Y \in \mathbf{E}.$$

Aqui $\tilde{\mathbf{V}}$ possui o produto interno natural dado por

$$\langle (X, a), (Y, b) \rangle_{\tilde{\mathbf{V}}} := \langle X, Y \rangle_{\mathbf{V}} + ab, \quad \forall X, Y \in \mathbf{V} \text{ e } a, b \in \mathbb{R}.$$

Para simplificar a notação daqui em diante denotaremos o produto interno de \tilde{V} por $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Então, em particular, teremos que

$$\langle \tilde{H}, \tilde{H} \rangle = c.$$

Por outro lado, segue-se claramente da definição de \tilde{L} em (5), que \tilde{L} é full mas não é mínimo. Pois, o vetor curvatura média de \tilde{L} é dado por

$$\frac{1}{n} \text{Traço} (\tilde{\alpha}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tilde{\alpha}(X_i, X_i) = \tilde{H};$$

aqui $n = \dim \mathbb{E}$ e X_1, \dots, X_n é uma base ortonormal de \mathbb{E} .

Observa-se claramente que:

$$\langle \tilde{L}(X, Y)Z, W \rangle = \langle L(X, Y)Z, W \rangle, \quad \forall X, Y, Z, W \in \mathbb{E}.$$

As conseqüências mais importantes de ter definido o S.T.J. \tilde{L} estão nos seguintes lemas:

2.5 Lema. *A forma traço $\tilde{\lambda}$ do S.T.J., \tilde{L} , é positiva definida.*

Demonstração. Sejam $X \in \mathbb{E}$ e X_1, \dots, X_n uma base ortonormal de \mathbb{E} . Então o seguinte cálculo mostrará claramente que λ é positiva definida:

$$\begin{aligned} \lambda(X, X) &= \text{Traço}(2\tilde{L}(X, X)) = 2\text{Traço}(A_{\tilde{\alpha}(X, X)}) \\ &= 2 \sum_{i=1}^n \langle A_{\tilde{\alpha}(X, X)} X_i, X_i \rangle = 2 \langle \tilde{\alpha}(X, X), \sum_{i=1}^n \tilde{\alpha}(X_i, X_i) \rangle \\ &= 2 \langle \alpha(X, X) + \langle X, X \rangle \tilde{H}, n\tilde{H} \rangle = 2nc \langle X, X \rangle. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

2.6 Lema. *Seja $\mathcal{L} := \text{ger}\{\tilde{L}(X, Y) : X, Y \in \mathbb{E}\}$. Então a álgebra de Lie $\Lambda = \mathbb{E} \oplus \mathcal{L} \oplus \mathbb{E}$ junto com o produto de Lie dado na seção 1 pela fórmula (40), verifica as seguintes propriedades:*

a) Λ é semisimples, e tem uma decomposição de Cartan $\Lambda = \mathcal{M} \oplus \mathcal{P}$ dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &:= \text{ger}\{(X, R(U, V), X) : X, U, V \in \mathbb{E}\} \quad e \\ \mathcal{P} &:= \text{ger}\{(X, A_{\alpha(U, V)}, -X) : X, U, V \in \mathbb{E}\}. \end{aligned}$$

- b) Existe um elemento $\tilde{\eta} := (0, A_{\tilde{H}/c}, 0) = (0, -I_{\mathbf{E}}, 0) \in \mathcal{P}$ tal que $(ad(\tilde{\eta}))^3 = ad\tilde{\eta}$.
- c) Os autovalores de $ad(\tilde{\eta})$ são $-1, 0, 1$ e os autoespaços associados são

$$\mathcal{G}_{-1} := \mathbf{E} \oplus \{0\} \oplus \{0\}, \quad \mathcal{G}_0 = \{0\} \oplus \mathcal{L} \oplus \{0\} \quad e \quad \mathcal{G}_1 := \{0\} \oplus \{0\} \oplus \mathbf{E},$$

respectivamente.

Demonstração. (a) Vejamos primeiro que Λ é soma direta dos espaços vetoriais \mathcal{M} e \mathcal{P} . Já que, claramente $\mathcal{M} + \mathcal{P} \subseteq \Lambda$ e $\mathcal{M} \cap \mathcal{P} = \{0\}$. Então somente falta ver que $\Lambda \subseteq \mathcal{M} + \mathcal{P}$.

Com efeito, para cada $X, Y, U, V \in \mathbf{E}$

$$(X, L(U, V), Y) = \underbrace{\left(\frac{X+Y}{2}, R(U, V), \frac{X+Y}{2} \right)}_{\in \mathcal{M}} + \underbrace{\left(\frac{X-Y}{2}, A_{\tilde{\alpha}(U, V)}, \frac{Y-X}{2} \right)}_{\in \mathcal{P}}$$

Isto prova que $\Lambda \subseteq \mathcal{M} + \mathcal{P}$. Portanto, podemos concluir que $\Lambda = \mathcal{M} \oplus \mathcal{P}$. \square

Por outro lado, o fato que $B_\Lambda|_{\mathcal{M} \times \mathcal{M}}$ é negativo definido e $B_\Lambda|_{\mathcal{P} \times \mathcal{P}}$ é positivo definido, segue diretamente usando a fórmula (46) da seção 1, e aplicando o Lema (2.5) e o Teorema (1.15). Daqui, segue-se que B_Λ é não-degenerada e portanto Λ será semisimples. Como consequência disto a decomposição em soma direta $\Lambda = \mathcal{M} \oplus \mathcal{P}$ é de Cartan. \square

(b) Seja X_1, \dots, X_n base ortonormal de \mathbf{E} . Então pela minimalidade do S.T.J., L , segue-se que

$$(0, A_{-\tilde{\eta}/c}, 0) = \left(0, -\frac{1}{nc} \sum_{i=1}^n A_{\tilde{\alpha}(X_i, X_i)}, 0 \right) \in \mathcal{P}.$$

Por outro lado, sejam $X, Y \in \mathbf{E}$ arbitrários. Então do seguinte cálculo:

$$\langle A_{-\tilde{H}/c} X, Y \rangle = \langle \tilde{\alpha}(X, Y), -\tilde{H}/c \rangle = \langle \langle X, Y \rangle, \tilde{H}, -\tilde{H}/c \rangle = \langle -X, X \rangle,$$

podemos concluir que $(0, A_{-\tilde{H}/c}, 0) = (0, -I_{\mathbf{E}}, 0)$. \square

Veremos agora que $(ad(\tilde{\eta}))^3 = ad(\tilde{\eta})$. Para isto, basta verificar que a igualdade é válida sobre os elementos do tipo $(X, R(U, V), X) \in \mathcal{M}$ e $(X, A_{\tilde{\alpha}(U, V)}, -X) \in \mathcal{P}$, onde $X, U, V \in \mathbf{E}$.

Com efeito:

$$\begin{aligned} (ad(\tilde{\eta}))^3(X, R(U, V), X) &= (-X, 0, X) = ad(\tilde{\eta})(X, R(U, V), X) \\ (ad(\tilde{\eta}))^3(X, A_{\tilde{\alpha}(U, V)}, -X) &= (-X, 0, -X) = ad(\tilde{\eta})(X, A_{\tilde{\alpha}(U, V)}, -X). \end{aligned}$$

Isto termina com a prova de (b). \square

(c) Trivial. Portanto, o Lema (2.6) está provado. \blacksquare

2.7 Lema. *De acordo com a seção 3 do Capítulo II, $\tilde{\eta}$ dado no Lema (2.6), determina um R -espaço simétrico $M := K/K_0$, onde K é o subgrupo de Lie compacto maximal associado à decomposição de Cartan de $\Lambda = \mathcal{M} \oplus \mathcal{P}$, e $K_0 = \{k \in K : Ad(k)\tilde{\eta} = \tilde{\eta}\}$ é o subgrupo de isotropia da representação adjunta do grupo de Lie real conexo semisimples não compacto G associado a Λ .*

Além disso, teremos um mergulho padrão

$$f : M \rightarrow \mathcal{P} \quad \text{dado por} \quad f([k]) := Ad(k)\tilde{\eta}, \quad \forall [k] \in K,$$

o qual verifica as seguintes propriedades:

- a) $f([e]) = \tilde{\eta}$; aqui $[e]$ é a classe de elementos neutro de K .
- b) $T_{[e]}M = \{(X, 0, X) : X \in \mathbb{E}\}$ e $f_*(T_{[e]}M) = \{(X, 0, -X) : X \in \mathbb{E}\}$.
- c) A segunda forma fundamental de f em $[e]$ é dada por

$$\alpha^f((X, 0, -X), (Y, 0, -Y)) = (0, A_{\alpha(X, Y)}, 0),$$

onde $X, Y \in \mathbb{E}$.

- d) Para cada $(X, A_{\xi}, -X), (Y, A_{\eta}, -Y)$ em Λ a forma de Killing de B_{Λ} de Λ é dada por

$$B_{\Lambda}((X, A_{\xi}, -X), (Y, A_{\eta}, -Y)) = 2nc\{\langle X, Y \rangle + \langle \xi, \eta \rangle\}.$$

- e) f é mínima na esfera de raio $\|\tilde{\eta}\| = \sqrt{2n}$ e centro na origem de \mathcal{P} .
- f) f é paralela.

Demonstração. O fato que $\tilde{\eta}$ determina o mergulho padrão f dado acima segue diretamente da definição (3.16) do Capítulo II. Portanto, verificaremos as propriedades (a)-(f) deste lema. Com efeito:

(a), (e) e (f) seguem da proposição (3.15) do Capítulo II. \square

(b) Segue do fato que

$$T_{[e]}M = (\mathcal{G}_{-1} \oplus \mathcal{G}_1) \cap \mathcal{M} \quad \text{e} \quad f_*(T_{[e]}M) = (\mathcal{G}_{-1} \oplus \mathcal{G}_1) \cap \mathcal{P}. \quad \square$$

(c) Seja $X \in \mathbb{E}$ e consideremos a geodésica $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P}$ dada por $\gamma(t) = Ad(\exp t(X, 0, X))\tilde{\eta}$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Então, claramente $\gamma(0) = \tilde{\eta}$ e $\gamma = f \circ \tilde{\gamma}$ onde $\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow M := K/K_0$ é dada por $\tilde{\gamma}(t) = [\exp t(X, 0, X)]$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Assim, pelo produto de Lie de Λ dado na fórmula (40) da seção 1, teremos que

$$\begin{aligned} \gamma'(0) &= ad(X, 0, X)\tilde{\eta} = [(X, 0, X), (0, -I_{\mathbb{E}}, 0)] = (X, 0, -X) = f_*(X, 0, X) \\ \gamma''(0) &= (ad(X, 0, X))^2\tilde{\eta} = [(X, 0, X), (X, 0, -X)] = (0, A_{\tilde{\alpha}(X, X)}, 0). \end{aligned}$$

Mas por outro lado

$$\gamma''(0) = \alpha^f(f_*(X, 0, X), f_*(X, 0, X)) = \alpha^f((X, 0, -X), (X, 0, -X)).$$

Portanto, temos que

$$\alpha^f((X, 0, -X), (X, 0, -X)) = (0, A_{\alpha(X, X)}, 0).$$

Daqui pela bilinearidade de α^f podemos concluir (c). \square

(d) Vejamos os seguintes cálculos nos quais utilizamos a fórmula (47):

$$\begin{aligned} B_{\Lambda} \left((X, 0, -X), (Y, 0, -Y) \right) &= -\frac{1}{2} \{ \tilde{\lambda}(X, -Y) + \tilde{\lambda}(-X, Y) \} \\ &= \tilde{\lambda}(X, Y) = 2nc\langle X, Y \rangle, \end{aligned}$$

e se $\xi = \tilde{\alpha}(X, Y)$, então usando propriedades da forma de Killing, teremos que

$$\begin{aligned}
B_\Lambda \left((0, A_\xi, 0), (0, A_\xi, 0) \right) &= B_\Lambda \left([(X, 0, -X), (Y, 0, -Y)], (0, A_\xi, 0) \right) \\
&= -B_\Lambda \left((Y, 0, -Y), [(X, 0, -X), (0, A_\xi, 0)] \right) \\
&= -B_\Lambda \left((Y, 0, -Y), (A_\xi X, 0, -A_\xi X) \right) \\
&= 2nc \langle Y, A_\xi X \rangle = 2nc \langle \xi, \xi \rangle.
\end{aligned}$$

Destes dois cálculos, e pela bilinearidade de B_Λ segue-se claramente a prova de (d). ■

Daremos agora um Teorema que classifica os S.T.J. mínimos para $c > 0$.

2.8 Teorema. *Um S.T.J. mínimo para $c > 0$ é um sistema triplo associado a um mergulho padrão de um R -espaço simétrico.*

Reciprocamente o sistema triplo associado a um mergulho padrão de um R -espaço simétrico é um S.T.J. mínimo numa esfera.

Demonstração. Seja L um S.T.J. mínimo de (\mathbf{V}, c) com dado inicial (\mathbf{E}, α) . Então sem perda de generalidade podemos tomar L como sendo full. Daqui, nós usaremos as mesmas notações dadas anteriormente. Assim, considerando o S.T.J., \tilde{L} de $(\tilde{\mathbf{V}}, 0)$ com dado inicial $(\mathbf{E}, \tilde{\alpha})$ definido a partir do S.T.J. dado acima, teremos pelo Lema (2.7) que existe um mergulho padrão $f : M := K/K_0 \rightarrow \mathcal{P}$ de um R -espaço simétrico M no espaço vetorial \mathcal{P} com produto interno dado pela forma de Killing B_Λ (a qual transforma \mathcal{P} num espaço Euclideano). Segundo as propriedades de f dadas no Lema (2.7), sabemos que f é um mergulho mínimo e paralelo na esfera de raio $\|\tilde{\eta}\| = \sqrt{2n}$ cujo centro está na origem de \mathcal{P} .

Daqui, identificamos \mathcal{P} e $\tilde{\mathbf{V}}$ pelo seguinte isomorfismo de espaços vetoriais:

$$\varphi : \mathcal{P} \rightarrow \tilde{\mathbf{V}} \quad \text{dado por} \quad \varphi(X, A_\xi, -X) = (X, \xi).$$

Este isomorfismo verifica as seguintes propriedades que seguem facilmente usando o Lema (2.7):

i) φ é uma homotetia. Isto é,

$$\|\varphi(X, A_\xi, -X)\|^2 = \frac{1}{2nc} B_\Lambda \left((X, A_\xi, -X), (X, A_\xi, -X) \right)$$

$$\text{ii) } \varphi(\tilde{\eta}) = -\tilde{H}/c \text{ e } \|\varphi(\tilde{\eta})\|^2 = \frac{1}{c}$$

$$\text{iii) } \varphi(f_*(T_{[e]}M)) = \mathbb{E}$$

$$\text{iv) } \varphi\left(R^f\left((X, 0, -X), (Y, 0, -Y)\right)\right) = \tilde{\alpha}(X, Y), \quad \forall X, Y \in \mathbb{E}$$

$$\text{v) } \varphi\left(\alpha^f\left((X, 0, -X), (Y, 0, -Y)\right)\right) = (Z, 0, -Z) = R(X, Y)Z, \quad \forall X, Y, Z \in \mathbb{E}$$

aqui α^f e R^f denotam a segunda forma fundamental e o operador curvatura Riemanianna de f em $[e]$, respectivamente.

Destas propriedades podemos concluir que

$$\tilde{f} := \varphi \circ f : M \rightarrow \tilde{V}$$

é um mergulho padrão o qual é mínimo na esfera de raio $\frac{1}{\sqrt{c}}$ e centro na origem de \tilde{V} .

Se $N = \dim \tilde{V}$ então denotaremos por $S^{N-1}(c)$ esta esfera.

Daqui, o sistema triplo associado a \tilde{f} em $[e]$ é o S.T.J., $L^{\tilde{f}}$, de $(\tilde{V}, 0)$ com dado inicial $(\mathbb{E}, \alpha^{\tilde{f}})$. Ou seja, para cada $X, Y \in \mathbb{E}$, teremos que:

$$L^{\tilde{f}}(X, Y) := A_{\alpha^{\tilde{f}}(X, Y)}^{\tilde{f}} + R^{\tilde{f}}(X, Y),$$

onde $A^{\tilde{f}}, \alpha^{\tilde{f}}$ e $R^{\tilde{f}}$ são o tensor padrão, o tensor segunda forma fundamental e o tensor curvatura Riemanniana de f em $[e]$, respectivamente.

Pelo Lema (2.7) e as propriedades (i)-(v) dadas acima, teremos as seguintes igualdades, para cada $X, Y \in \mathbb{E}$:

$$\alpha^{\tilde{f}}(X, Y) = \tilde{\alpha}(X, Y), \quad A_{\alpha^{\tilde{f}}(X, Y)}^{\tilde{f}} = A_{\tilde{\alpha}(X, Y)} \quad \text{e} \quad R^{\tilde{f}}(X, Y) = R(X, Y).$$

Daqui, segue-se que $L^{\tilde{f}}(X, Y) = \tilde{L}(X, Y)$, mas como $\tilde{L}(X, Y) = L(X, Y)$. Então teremos que

$$L^{\tilde{f}}(X, Y) = L(X, Y), \quad \forall X, Y \in \mathbb{E}.$$

Assim, podemos concluir que o S.T.J. mínimo e full L é um sistema triplo associado ao mergulho padrão $\tilde{f} : M \rightarrow S^{N-1}(c)$. Isto prova a primeira parte do Teorema (2.8). \square

A recíproca do Teorema é trivial. \blacksquare

3. Teorema de Classificação das Imersões Paralelas.

Nesta seção provaremos que um S.T.J. se decompõe em *fatores irredutíveis* e cada fator irredutível é a *composição* de um S.T.J. mínimo e um S.T.J. umbílico. Além disso, provaremos o Teorema de Classificação das imersões paralelas dado na introdução, com este resultado concluiremos a dissertação.

3.1 Definição. Um S.T.J. de (\mathbb{W}, c) com dado inicial (\mathbb{E}, α) é dito *umbílico* se $\alpha(X, Y) = \langle X, Y \rangle H$, onde $H = \frac{1}{n}$ Traço (α) e $n = \dim \mathbb{E}$.

3.2 Definição. Sejam L_1 um S.T.J. de $(\tilde{\mathbb{E}}, \tilde{c})$ com dado inicial $(\mathbb{E}, \bar{\alpha})$ e L_2 um S.T.J. de (\mathbb{W}, c) com dado inicial $(\tilde{\mathbb{E}}, \tilde{\alpha})$. A *composição* de L_1 e L_2 é um S.T.J. de (\mathbb{W}, c) com dado inicial (\mathbb{E}, α) onde $\alpha = \tilde{\alpha} + \bar{\alpha}$.

3.3 Observação. A *composição* de S.T.J., é o análogo algébrico da *composição* de imersões isométricas. \square

3.4 Definição. Seja $L = S + R$ um S.T.J. de (\mathbb{W}, c) com dado inicial (\mathbb{E}, α) . O operador linear $T : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ definido por

$$\langle T(X), Y \rangle = \text{Traço}(S(X, Y)) \quad \text{para todo } X, Y \in \mathbb{E},$$

é chamado o *operador traço*.

3.5 Observações. Da definição (3.4) segue-se que:

- a) T é um operador simétrico.
- b) T determina uma decomposição ortogonal de \mathbb{E} em autoespaços \mathbb{E}_i . Isto é, $\mathbb{E} = \bigoplus_{i=1}^s \mathbb{E}_i$; aqui s é o número de autoespaços distintos.
- c) Os \mathbb{E}_i 's são os autoespaços do operador A_{II} , onde II é o vetor curvatura média.

Demonstração. (a) Segue-se da simetria de S . \square

(b) Segue trivialmente de (a). \square

(c) Por (b), seja β_i o autovalor associado ao autoespaço \mathbb{E}_i de T . Então dados $X \in \mathbb{E}_i$ e $Y \in \mathbb{E}$ e dada uma base ortonormal X_1, \dots, X_n de \mathbb{E} , teremos que

$$\begin{aligned}\beta_i \langle X, Y \rangle &= \langle T(X), Y \rangle = \text{Traço}(S(X, Y)) = \text{Traço}(c \langle X, Y \rangle I_{\mathbb{E}} + A_{\alpha(X, Y)}) \\ &= nc \langle X, Y \rangle + \sum_{k=1}^n \langle A_{\alpha(X, Y)} X_k, X_k \rangle = nc \langle X, Y \rangle + \langle \alpha(X, Y), nH \rangle \\ &= nc \langle X, Y \rangle + n \langle A_H X, Y \rangle.\end{aligned}$$

Daqui, segue-se que $A_H X = \lambda_i X$, onde $\lambda_i = \frac{\beta_i - nc}{n}$.

Portanto, \mathbb{E}_i é autoespaço de A_H . \blacksquare

De acordo com as observações em (3.5), temos o seguinte lema:

3.6 Lema. *Seja L um S.T.J. de (\mathbb{W}, c) com dado inicial (\mathbb{E}, α) . Então para cada $i = 1, \dots, s$, teremos que*

$$L(X, Y)(\mathbb{E}_i) \subseteq \mathbb{E}_i \quad \text{para todo } X, Y \in \mathbb{E}.$$

Em particular, L induz um S.T.J. de (\mathbb{W}, c) com dado inicial (\mathbb{E}_i, α_i) , onde $\alpha_i = \alpha|_{\mathbb{E}_i \times \mathbb{E}_i}$.

Demonstração. Vejamos primeiro que T comuta com $L(X, Y)$. Com efeito:

$$\begin{aligned}\langle [T, L(X, Y)]V, W \rangle &= \langle T(L(X, Y)V), W \rangle - \langle L(X, Y)(T(V)), W \rangle \\ &= \text{Traço}(S(L(X, Y)V, W)) - \langle T(V), L(Y, X)W \rangle \\ &= \text{Traço}(S(L(X, Y)V, W) - S(V, L(Y, X)W)) \\ &= \text{Traço}(L(L(X, Y)V, W) - L(V, L(Y, X)W)) \\ &= \text{Traço}([L(X, Y), L(V, W)]) = 0.\end{aligned}$$

Portanto, T comuta com $L(X, Y)$. Assim, pelas observações em (3.5), temos que os autoespaços \mathbb{E}_i 's de T são deixados invariantes por $L(X, Y)$. Daqui, podemos concluir claramente que $L_i : \mathbb{E}_i \times \mathbb{E}_i \rightarrow \text{End}(\mathbb{E}_i)$ dado por $L_i = L|_{\mathbb{E}_i \times \mathbb{E}_i}$ é um S.T.J. de (\mathbb{W}, c) com dado inicial (\mathbb{E}_i, α_i) , onde $\alpha_i = \alpha|_{\mathbb{E}_i \times \mathbb{E}_i}$ para todo $i = 1, \dots, s$. \blacksquare

3.7 Observações. De acordo com as notações dadas em (3.5) e no Lema (3.6), denotaremos

$$n_i := \dim \mathbb{E}_i, \quad H_i := \frac{1}{n_i} \text{Traço}(\alpha_i), \quad c_i := c + \|H_i\|^2 \quad e$$

$$\tilde{\mathbb{E}}_i := \mathbb{E}_i \oplus \text{ger}\{\alpha(X, X) - \|X\|^2 H_i : X \in \mathbb{E}_i\}.$$

Portanto, se $X \in \mathbb{E}_i, Y \in \mathbb{E}_j$ e $i \neq j$, então verificam-se as seguintes propriedades:

- a) $\alpha(X, Y) = 0$,
- b) $nH = \sum_{k=1}^s n_k H_k, \quad \langle \alpha(X, X), \alpha(Y, Y) \rangle = -c\|X\|^2\|H_i\|^2$,
- c) $\langle \alpha(X, X), H_j \rangle = -c\|X\|^2$,
- d) $\langle H_i, H_j \rangle = -c, \quad e$
- e) $\langle H_i, H \rangle = \lambda_i, \quad \langle \alpha(X, X), H_i \rangle = \|X\|^2\|H_i\|^2$.

Demonstração. (a) Sejam $X \in \mathbb{E}_i, Y \in \mathbb{E}_j$ e $i \neq j$. Seja Z em $\mathbb{E} = \bigoplus_{k=1}^s \mathbb{E}_k$ qualquer.

Daqui, $Z = \sum_{k=1}^s Z_k$, onde $Z_k \in \mathbb{E}_k$. Então, pelo Lema (3.6) e como $L(X, Y)Z = L(Z, Y)X$, teremos que

$$\underbrace{L(X, Y)Z_1}_{\in \mathbb{E}_1} + \dots + \underbrace{L(X, Y)Z_s}_{\in \mathbb{E}_s} = \underbrace{L(Z_1, Y)X}_{\in \mathbb{E}_i} + \dots + \underbrace{L(Z_s, Y)X}_{\in \mathbb{E}_i} \in \mathbb{E}_i.$$

Daqui, segue-se que $L(X, Y)Z_k = 0, \forall k \neq i$. Assim, $L(X, Y)|_{\bigoplus_{k \neq i} \mathbb{E}_k} = 0$.

Portanto, podemos concluir que

$$(1) \quad S(X, Y)|_{\bigoplus_{k \neq i} \mathbb{E}_k} = 0.$$

Do mesmo modo, podemos concluir que

$$(2) \quad S(Y, X)|_{\bigoplus_{k \neq j} \mathbb{E}_k} = 0.$$

Como $i \neq j$, de (1) e (2), segue-se que $S(X, Y) = c\langle X, Y \rangle I_{\mathbb{E}} + A_{\alpha(X, Y)} = 0$.

Já que, $\langle X, Y \rangle = 0$, então, teremos que $A_{\alpha(X, Y)} = 0$. Portanto, $\alpha(X, Y) = 0$. \square

(b) A primeira igualdade é trivial. Portanto, vejamos a segunda.

Com efeito. Sejam $X \in \mathbb{E}_i$ e $Z = Z_1 + \dots + Z_s \in \mathbb{E}$ com $Z_k \in \mathbb{E}_k$. Então

$$L(X, X)Z = \underbrace{L(X, X)Z_1}_{\in \mathbb{E}_1} + \dots + \underbrace{L(X, X)Z_s}_{\in \mathbb{E}_1} = \underbrace{L(Z_1, X)X}_{\in \mathbb{E}_i} + \dots + \underbrace{L(Z_s, X)X}_{\in \mathbb{E}_i} \in \mathbb{E}_i.$$

Daqui, segue-se que $L(X, X)Z_k \in \mathbb{E}_k \cap \mathbb{E}_i$, $\forall k$. Logo, $L(X, X)Z_k = 0$, $\forall k \neq i$.

Já que, $L(X, X) = S(X, X) = c\|X\|^2 + A_{\alpha(X, X)}$, então teremos que $S(X, X)|_{\bigoplus_{k \neq i} \mathbb{E}_k} = 0$. Em particular, se $Y \in \mathbb{E}_j$ com $j \neq i$, teremos que $S(X, X)Y = 0$.

Daqui, segue-se que $\langle c\|X\|^2 Y + A_{\alpha(X, X)} Y, Y \rangle = 0$. Portanto, podemos concluir que $\langle \alpha(X, X), \alpha(Y, Y) \rangle = -c\|X\|^2 \|Y\|^2$. \square

(c) Sejam $X \in \mathbb{E}_i$ e X_1, \dots, X_{n_j} uma base ortonormal de \mathbb{E}_j

$$\begin{aligned} \langle \alpha(X, X), H_j \rangle &= \frac{1}{n_j} \sum_{k=1}^{n_j} \langle \alpha(X, X), \alpha(X_k, X_k) \rangle \\ &= -\frac{1}{n_j} c \|X\|^2 \sum_{k=1}^{n_j} \|X_k\|^2 = -\frac{c}{n_j} \|X\|^2 n_j = -c \|X\|^2. \quad \square \end{aligned}$$

(d) Seja X_1, \dots, X_{n_i} uma base ortonormal de \mathbb{E}_i , $i \neq j$. Então

$$\langle H_i, H_j \rangle = \frac{1}{n_i} \langle \text{Traço}(\alpha_i), H_j \rangle = \frac{1}{n_i} \sum_{k=1}^{n_i} \langle \alpha(X_k, X_k), H_j \rangle = -\frac{1}{n_i} \sum_{k=1}^{n_i} c = -c. \quad \square$$

(e) Para a primeira igualdade, seja X_1, \dots, X_{n_i} uma base ortonormal de \mathbb{E}_i . Então

$$\langle H_i, H \rangle = \frac{1}{n_i} \sum_{k=1}^{n_i} \langle \alpha(X_k, X_k), H \rangle = \frac{1}{n_i} \sum_{k=1}^{n_i} \langle A_H X_k, X_k \rangle = \frac{1}{n_i} \sum_{k=1}^{n_i} \lambda_i = \lambda_i.$$

Para a segunda igualdade, seja $X \in \mathbb{E}_i$. Então teremos que

$$\langle \alpha(X, X), H \rangle = \langle A_H X, X \rangle = \lambda_i \|X\|^2 = \|X\|^2 \langle H_i, H \rangle.$$

Assim, usando (b) e (c), teremos as seguintes igualdades:

$$\langle \alpha(X, X), H \rangle = \sum_{k \neq i} n_k (-c \|X\|^2) + n_i \langle \alpha(X, X), H_i \rangle$$

e

$$\|X\|^2 \langle H_i, H \rangle = \sum_{k \neq i} n_k (-c \|X\|^2) + n_i \|X\|^2 \|H_i\|^2.$$

Portanto, do anterior concluímos que $\langle \alpha(X, X), H_i \rangle = \|X\|^2 \|H_i\|^2$. ■

3.8 Observação. Vejamos que em particular das observações (a)-(d) dadas em (3.5), teremos que

- i) os H_i 's são todos distintos,
- ii) os \tilde{E}_i 's são ortogonais entre si, e
- iii) os H_i 's são ortogonais a $\bigoplus_{k=1}^s \tilde{E}_k$.

Demonstração. (i) Suponhamos que $H_i = H_j$, quando $i \neq j$. Então, $\lambda_i = \langle H_i, H \rangle = \langle H_j, H \rangle = \lambda_j$, absurdo. Pois, $\lambda_i \neq \lambda_j$, quando $i \neq j$. Portanto, $H_i \neq H_j$, $\forall i \neq j$. □

(ii) Sejam $X \in \tilde{E}_i$ e $Y \in \tilde{E}_j$, com $i \neq j$. Então pela linealidade de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ basta tomar $X := U + \alpha(V, V) - \|V\|^2 H_i$ e $Y := W + \alpha(Z, Z) - \|Z\|^2 H_j$, onde $U, V \in \mathbb{E}_i$ e $W, Z \in \mathbb{E}_j$, e provar que $\langle X, Y \rangle = 0$.

Com efeito:

$$\begin{aligned} \langle X, Y \rangle &= \langle U, W \rangle + \langle U, \alpha(Z, Z) - \|Z\|^2 H_j \rangle + \langle \alpha(V, V) - \|V\|^2 H_i, W \rangle \\ &\quad + \langle \alpha(V, V), \alpha(Z, Z) \rangle - \|Z\|^2 \langle \alpha(V, V), H_j \rangle \\ &\quad - \|V\|^2 \langle H_i, \alpha(Z, Z) \rangle + \|V\|^2 \|Z\|^2 \langle H_i, H_j \rangle. \end{aligned}$$

Mas, $\langle U, W \rangle = 0$ (pois, \mathbb{E}_i é ortogonal a \mathbb{E}_j). Então

$$\begin{aligned} \langle U, \alpha(Z, Z) - \|Z\|^2 H_j \rangle &= 0 = \langle \alpha(V, V) - \|V\|^2 H_i, W \rangle; \\ \langle \alpha(V, V), \alpha(Z, Z) \rangle &= -c \|V\|^2 \|Z\|^2 \quad \text{por (b);} \\ -\|Z\|^2 \langle \alpha(V, V), H_j \rangle &= c \|Z\|^2 \|V\|^2 \quad \text{por (c);} \\ \|V\|^2 \|Z\|^2 \langle H_i, H_j \rangle &= -c \|V\|^2 \|Z\|^2 \quad \text{por (d).} \end{aligned}$$

Daqui, obtemos que $\langle X, Y \rangle = 0$. Portanto, podemos concluir que \tilde{E}_i é ortogonal a \tilde{E}_j , $\forall i \neq j$. □

(iii) Seja $Z \in \bigoplus_{j=1}^s \tilde{\mathbb{E}}_j$. Então $Z = \sum_{j=1}^s Z_j$, onde $Z_j \in \tilde{\mathbb{E}}_j$, $\forall j$. Portanto, pela linealidade de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ basta tomar $Z_j = Z_{j1} + \alpha(Z_{j2}, Z_{j2}) - \|Z_{j2}\|^2 H_j$, onde $Z_{j1}, Z_{j2} \in \mathbb{E}_j$ e mostrar que $\langle H_i, Z \rangle = 0$, $\forall i \neq j$.

Com efeito:

$$\langle H_i, Z \rangle = \sum_{j=1}^s \{ \langle H_i, Z_{j1} \rangle + \langle H_i, \alpha(Z_{j2}, Z_{j2}) \rangle - \|Z_{j2}\|^2 \langle H_i, H_j \rangle \}.$$

Já que, $\langle H_i, Z_{j1} \rangle = 0$ (pois, $H_i \in \mathbb{E}^\perp$ e $Z_{j1} \in \mathbb{E}_j \subseteq \mathbb{E}$), e

$$\langle H_i, \alpha(Z_{j2}, Z_{j2}) \rangle = \begin{cases} -c\|Z_{j2}\|^2 & \text{se } i \neq j \\ \|Z_{j2}\|^2 \|H_i\|^2 & \text{se } i = j \end{cases} = -\|Z_{j2}\|^2 \langle H_i, H_j \rangle,$$

teremos que $\langle H_i, Z \rangle = 0$. Portanto, podemos concluir que H_i é ortogonal a $\bigoplus_{j=1}^s \tilde{\mathbb{E}}_j$. ■

Agora juntando as observações (3.5) e (3.7), teremos a seguinte observação:

3.9 Observação. Cada $\tilde{\mathbb{E}}_i$ é um espaço vetorial com produto interno dado pelo produto interno de \mathbb{V} restrito a $\tilde{\mathbb{E}}_i$. Então $\tilde{\mathbb{E}}_i$ junto com a aplicação bilinear simétrica $\tilde{\alpha}_i : \mathbb{E}_i \times \mathbb{E}_i \rightarrow \mathbb{E}_i^\perp \cap \tilde{\mathbb{E}}_i$ dada por

$$\tilde{\alpha}_i(X, Y) = \alpha_i(X, Y) - \langle X, Y \rangle H_i, \quad \forall X, Y \in \mathbb{E}_i,$$

onde $\alpha_i = \alpha|_{\mathbb{E}_i \times \mathbb{E}_i}$, determinam um S.T.J. mínimo \tilde{L}_i de $(\tilde{\mathbb{E}}_i, c_i)$ com dado inicial $(\mathbb{E}_i, \tilde{\alpha}_i)$.

Demonstração. Vejamos que \tilde{L}_i é um S.T.J.. Com efeito, $\tilde{L}_i : \mathbb{E}_i \times \mathbb{E}_i \rightarrow \text{End}(\mathbb{E}_i)$ é dado por

$$\begin{aligned} \tilde{L}_i(X, Y) &= c_i \langle X, Y \rangle I_{\mathbb{E}_i} + A_{\tilde{\alpha}_i(X, Y)} + R(X, Y) \\ &= (c + \|H_i\|^2) \langle X, Y \rangle I_{\mathbb{E}_i} + A_{\alpha_i(X, Y)} - \langle X, Y \rangle A_{H_i} + R(X, Y) \\ &= c \langle X, Y \rangle I_{\mathbb{E}_i} + A_{\alpha_i(X, Y)} + R(X, Y) + \langle X, Y \rangle (\|H_i\|^2 I_{\mathbb{E}_i} - A_{H_i}). \end{aligned}$$

Mas por (3.5)(e), $A_{H_i} = \|H_i\|^2 I_{\mathbb{E}_i}$. Assim, teremos que

$$\tilde{L}_i(X, Y) = c \langle X, Y \rangle I_{\mathbb{E}_i} + A_{\alpha_i(X, Y)} + R(X, Y).$$

Portanto, \tilde{L}_i é um S.T.J.. \square

Vejamos agora que \tilde{L}_i é mínimo. Com efeito:

Seja $\tilde{H}_i := \frac{1}{n_i}$ Traço ($\tilde{\alpha}_i$) o vetor curvatura média de \tilde{L}_i e seja X_1, \dots, X_{n_i} uma base ortonormal de $\tilde{\mathbb{E}}_i$. Então

$$\text{Traço } (\tilde{\alpha}_i) = \sum_{k=1}^{n_i} \tilde{\alpha}_i(X_k, X_k) = \sum_{k=1}^{n_i} (\alpha_i(X_k, X_k) - \|X_k\|^2 H_i) = 0.$$

Assim, $\tilde{H}_i = 0$. Portanto, \tilde{L}_i é mínimo. \square

Isto mostra completamente a observação (3.9). \blacksquare

3.10 Observação. De (3.9), claramente temos um S.T.J. umbílico $\tilde{\tilde{L}}_i$ de (\mathbb{W}, c) com dado inicial $(\tilde{\tilde{\mathbb{E}}}_i, \tilde{\tilde{\alpha}}_i)$, onde $\tilde{\tilde{\alpha}}_i(X, Y) := \langle X, Y \rangle H_i$ para todo $X, Y \in \tilde{\tilde{\mathbb{E}}}_i$. Portanto, o S.T.J., L_i de (\mathbb{W}, c) com dado inicial $(\tilde{\mathbb{E}}_i, \alpha_i)$ é a composição de \tilde{L}_i e $\tilde{\tilde{L}}_i$; aqui $\alpha_i(X, Y) = \tilde{\alpha}_i(X, Y) + \langle X, Y \rangle H_i$ para todo $X, Y \in \tilde{\mathbb{E}}_i$. \square

De (3.9) e (3.10), podemos concluir que um S.T.J., L de (\mathbb{W}, c) com dado inicial (\mathbb{E}, α) se decompõe em fatores irreduzíveis \tilde{L}_i 's como queríamos no início desta seção.

Já que toda a álgebra necessária está dada enunciaremos e provaremos o Teorema de classificação das imersões paralelas em formas espaciais.

3.11 Teorema. *Seja $f : M^n \rightarrow Q^N(c)$ uma imersão paralela de uma variedade conexa. Então, existe um produto extrínseco de variedades umbílicas*

$$g : Q^{N_1}(c_1) \times \dots \times Q^{N_s}(c_s) \rightarrow Q^N(c),$$

e existe uma decomposição Riemanniana de

$$M = M_1^{n_1} \times \dots \times M_s^{n_s}$$

e imersões mínimas paralelas

$$f_i : M_i^{n_i} \rightarrow Q^{N_i}(c_i), \quad i = 1, 2, \dots, s$$

tais que

$$f = g \circ (f_1 \times \dots \times f_s).$$

Demonstração. Sejam $q \in M$, $p = f(q) \in Q^N(c)$, $\mathbb{E} = f_*(T_q M) \subseteq \mathbb{W} := T_p Q^N(c)$, e α a segunda forma fundamental de f em q . Então o sistema triplo associado a f em q é pelo corolário (1.19) o S.T.J. de (\mathbb{W}, c) com dado inicial (\mathbb{E}, α) . Mantendo as notações das observações anteriores, temos que \mathbb{E} se decompõe ortogonalmente, isto é, $\mathbb{E} = \bigoplus_{i=1}^s \mathbb{E}_i$.

Ora, suponhamos que os subespaços \mathbb{E}_i 's estão ordenados de modo que $c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_s$. Então já que, os H_i são todos distintos, teremos que

$$\begin{aligned} 0 < \|H_1 - H_i\|^2 &= \|H_1\|^2 - 2\langle H_1, H_i \rangle + \|H_i\|^2 \\ &= c_1 - c - 2(-c) + c_i - c \\ &= c_1 + c_i \leq 2c_i, \end{aligned}$$

quando $i > 1$. Portanto, podemos concluir que $0 < c_i$ se $1 < i \leq s$.

Além disso, os $\tilde{\mathbb{E}}_i$'s são ortogonais entre si e os H_i 's são ortogonais a $\bigoplus_{j=1}^s \tilde{\mathbb{E}}_j$ e verificam-se as fórmulas (a)-(e) em (3.5). Logo, pelo Teorema (2.18) do Capítulo II, teremos que existe um produto extrínseco de imersões umbílicas $g : Q^{N_1}(c_1) \times \dots \times Q^{N_s}(c_s) \rightarrow Q^N(c)$ tal que se $(q_1, \dots, q_s) \in g^{-1}(p) \subseteq Q^{N_1}(c_1) \times \dots \times Q^{N_s}(c_s)$ e $Q^{N_1}(c_1), \dots, Q^{N_s}(c_s)$ denotam as folheações canônicas do produto $Q^{N_1}(c_1) \times \dots \times Q^{N_s}(c_s)$, então $g_{i*}(T_{q_i} Q^{N_i}(c_i)) = \mathbb{E}_i$ e H_i é o vetor curvatura média de $g_i := g|_{Q^{N_i}(c_i)}$ em q_i .

Assim, obtemos um S.T.J. para $(\tilde{\mathbb{E}}_i, c_i)$ com dado inicial $(\mathbb{E}_i, \tilde{\alpha}_i)$ o qual é mínimo. Como $c_i > 0$ para $i > 1$, pelo Teorema (2.8), temos que existe $\tilde{f}_i : M_i \rightarrow Q^{N_i}(c_i)$ imersão paralela, onde M_i é um R -espaço simétrico e \tilde{f}_i é um mergulho padrão. Também, para $c_1 > 0$ ou $c_1 \leq 0$ pelo Teorema (2.8) ou Teorema (2.3), respectivamente, temos que existe $\tilde{f}_1 : M_1 \rightarrow Q^{N_1}(c_1)$ imersão paralela. (Observa-se que os S.T.J. mínimos são os sistemas triplos associados às \tilde{f}_i 's).

Logo a imersão $\tilde{f} = g \circ (\tilde{f}_1 \times \dots \times \tilde{f}_s) : M_1 \times \dots \times M_s \rightarrow Q^N(c)$ é uma imersão paralela cujo sistema triplo associado é o S.T.J. de f . Portanto, pelo Teorema de Unicidade de Rieckziegel, teremos que $f = \tilde{f}$, e pela conexidade teremos que $M = M_1 \times \dots \times M_s$. ■

3.12 Corolário. *Seja $f : M^n \rightarrow Q^N(c)$ imersão paralela. Se M é irredutível (isto é, não é produto Riemanniano de variedades), então*

f ou é umbílica ($c \leq 0$) ou é um mergulho padrão de um R -espaço simétrico. \square

O recíproco do Teorema (3.11) já foi provado. Analogamente a recíproca do corolário (3.12). Assim, fechamos esta dissertação.

Referências

- [B] BACKES, E.: *Geometric applications of Euclidean Jordan triple systems*. Manuscripta Math. 42, (1983), 265-272.
- [BR] BACKES, E., and RECKZIEGEL, H.: *On symmetric submanifolds of spaces of constant curvature*. Math. Ann. 263, (1983), 419-433.
- [C] DO CARMO, M.: *Geometria riemanniana*. Printed in Brazil, Rio de Janeiro, 1988.
- [D] DAJCZER, M.: *Submanifolds and Isometric Immersions*. Publish or Perish, Inc., Houston, Texas, 1990.
- [F1] FERUS, D.: *Immersionen mit paralleler zweiter Fundamentalform: Beispiele und Nicht-Beispiele*. Manuscripta Math. 12, (1974), 153-162.
- [F2] FERUS, D.: *Produkt-Zerlegungen von Immersionen mit paralleler zweiter Fundamentalform*. Math. Ann. 211, (1974), 1-5.
- [F3] FERUS, D.: *Immersionen mit paralleler zweiter Fundamentalform*. Math. Z. 140, (1974), 87-92.
- [F4] FERUS, D.: *Symmetric Submanifolds of Euclidean Space*. Math. Ann. 247, (1980), 81-93.
- [H] HELGASON, S.: *Differential geometry and symmetric space*. New York, London: Academic Press, 1962.
- [K] KOBAYASHI, S.: *Isometric imbedding of compact symmetric spaces*. Tôhoku Math. Journ. 20, (1968), 21-25.
- [KN] KOBAYASHI, S. AND NAGANO, T.: *On filtered Lie algebras and geometric structures*. I.J. Math. Mech. 13, (1964), 875-907.
- [M] MERCURI, F.: *Parallel and semi-parallel immersions into space forms*. Riv. Mat. Univ. Parma (4) 17, (1991), 91-108.

- [Mo] MOORE, J. D.: *Isometric immersions of riemannian products*. J. Diff. Geometry 5, (1971), 159-168.
- [N] NAGANO, T.: *Transformation groups on compact symmetric spaces*. Trans. Amer. Math. Soc. 118, (1965), 428-453.
- [R] RECKZIEGEL, H.: *On the problem whether the image of a given differentiable map into a riemannian manifold is contained in a submanifold with parallel second fundamental form*. J. Reine Angew. Math. 325, (1981), 87-104.
- [S] SPIVAK, M.: *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*. Publish or Perish Inc., Houston, 1979.
- [St] STRÜBING, W.: *Symmetric submanifolds of riemannian manifolds*. Math. Ann. 245, (1979), 37-44.
- [T] TAI, S. S.: *Minimum imbeddings of compact symmetric spaces of rank one*. J. Differential Geometry 2, (1968), 55-66.
- [Ta] TAKEUCHI, M.: *Parallel submanifolds of space forms, Manifolds and Lie Groups*. Papers in honor of Y. Matsushima, 429-447.
- [TK] TAKEUCHI, M. and KOBAYASHI, S.: *Minimal imbedding of R-spaces*. J. Differential Geometry 2, (1968), 203-215.