UNICAMP

Julio César Conegundes da Silva

G_2 e as Álgebras Normadas

CAMPINAS
2012

UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

Julio César Conegundes da Silva

G2 e as Álgebras Normadas

Orientador(a): Prof. Dr. Luiz Antonio Barrera San Martin

Dissertação de mestrado apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Unicamp para obtenção do título de Mestre em Matemática.

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO
DEFENDIDA PELO ALUNO JULIO CÉSAR CONEGUNDES DA SILVA
E ORIENTADA PELO PROF.DR LUIZ ANTONIO BARRERA SAN MARTIN.

Assinatura do Orientador

Luiz A. B. San Martin

CAMPINAS
2012

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA POR
ANA REGINA MACHADO - CRB8/5467
BIBLIOTECA DO INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E
COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA - UNICAMP

Silva, Julio César Conegundes da, 1986-
Si38g G2 e as álgebras normadas / Julio César Conegundes da Silva. – Campinas, SP : [s.n.], 2012.

Orientador: Luiz Antonio Barrera San Martin.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Lie, Álgebra de. 2. Quatérnios. 3. Cayley, Números de (Álgebra). I. San Martin, Luiz Antonio Barrera,1955-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em inglês: G2 and the normed algebras
Palavras-chave em inglês:
Lie algebras
Quaternions
Cayley numbers (Algebra)
Área de concentração: Matemática
Titulação: Mestre em Matemática
Banca examinadora:
Luiz Antonio Barrera San Martin [Orientador]
Adriano Adrega de Moura
Daniel Levcovitz
Data de defesa: 18-10-2012
Programa de Pós-Graduação: Matemática

Dissertação de Mestrado defendida em 18 de outubro de 2012 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

____
Prof.(a). Dr(a). LUIZ ANTONIO BARRERA SAN MARTIN

____
Prof.(a). Dr(a). DANIEL LEVCOVITZ

____
Prof.(a). Dr(a). ADRIANO ADREGA DE MOURA

Resumo

A menos de isomorfismo, existe exatamente uma álgebra normada complexa de dimensao 8: $\mathbb{O}_{\mathbb{C}}$, a complexificação da álgebra dos octônios. Já no caso real, existem, a menos de isomorfismo, exatamente duas álgebras normadas de dimensão 8: $\mathbb{O}$, a álgebra dos octônios; $\mathbb{O}_{\text{deg}}$, a álgebra degenerada dos octônios. A álgebra de Lie complexa $\mathfrak{der}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$, formada por todas as derivações na álgebra $\mathbb{O}_{\mathbb{C}}$, é uma álgebra de Lie simples do tipo G_2. A álgebra $\mathbb{O}$ dos octônios e a álgebra $\mathbb{O}_{\text{deg}}$ dos octônios degenerados podem ser realizadas como subálgebras reais de $\mathbb{O}_{\mathbb{C}}$. Segue daí que as álgebras $\mathfrak{der}(\mathbb{O})$ e $\mathfrak{der}(\mathbb{O}_{\text{deg}})$, de todas as derivações nas álgebras dos octônios e octônios degenerados, respectivamente, são formas reais de $\mathfrak{der}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$. Mostraremos que $\mathfrak{der}(\mathbb{O})$ e $\mathfrak{der}(\mathbb{O}_{\text{deg}})$ são, respectivamente, as formas reais compacta e normal da álgebra de Lie do tipo G_2. Utilizando-se as propriedades da álgebra $\mathbb{O}_{\mathbb{C}}$ mostraremos que toda forma real de $\mathfrak{der}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$ é igual a $\mathfrak{der}(\mathcal{O})$, para alguma subálgebra real (octoniônica) de $\mathbb{O}_{\mathbb{C}}$ isomorfa a $\mathbb{O}$ ou a $\mathbb{O}_{\text{deg}}$. Além disso, mostraremos uma construção da álgebra de Lie complexa do tipo G_2 obtida a partir da álgebra de Lie $\text{Im}(\mathbb{H})$ (dos números quaterniônicos imaginários com o comutador como colchete).

Abstract

There is exactly, up to isomorphism, one complex normed algebra os dimension 8: $\mathbb{O}_{\mathbb{C}}$, the complexification of the octonions algebra. In the real case, there are, up to isomorphism, exactly two normed algebras of dimension 8: $\mathbb{O}$, the octonions algebra; $\mathbb{O}_{\text{deg}}$, the degenerated octonions algebra. The complex Lie algebra $\mathfrak{Der}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$, formed by all derivations on the algebra $\mathbb{O}_{\mathbb{C}}$, is a simple Lie Algebra of type G_2. The algebras $\mathbb{O}$ and $\mathbb{O}_{\text{deg}}$ can be realized as real subalgebras of $\mathbb{O}_{\mathbb{C}}$. It follows that the algebras $\mathfrak{Der}(\mathbb{O})$ and $\mathfrak{Der}(\mathbb{O}_{\text{deg}})$, of all derivations on $\mathbb{O}$ and $\mathbb{O}_{\text{deg}}$, respectively, are real forms of $\mathfrak{Der}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$. We show that $\mathfrak{Der}(\mathbb{O})$ and $\mathfrak{Der}(\mathbb{O}_{\text{deg}})$ are, respectively, the compact and the normal real forms of the simple Lie algebra of the type G_2. Using the algebraic properties of te algebra $\mathbb{O}_{\mathbb{C}}$ we also show that every real form of $\mathfrak{Der}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$ is equal to a algebra $\mathfrak{Der}(\mathcal{O})$, for some real (octonionic) subalgebra of $\mathbb{O}_{\mathbb{C}}$ isomorph to either $\mathbb{O}$ or $\mathbb{O}_{\text{deg}}$. Moreover, we describe a construction of the complex Lie algebra of type G_2 obtained from the Lie algebra $\mathrm{Im}(\mathbb{H})$ (of the imaginary quaternions).

Sumário

Prefácio

"There are axactly four normed division algebras: the real numbers ($\mathbb{R}$), complex numbers ($\mathbb{C}$), quaternions ($\mathbb{H}$), octonions ($\mathbb{O}$). The real numbers are de dependable breadwinner of the family, the complete ordered field we all rely on. The complex numbers are slightly flashier but still respectable younger brother: not ordered but algebraically complete. The quaternions, being noncommutative, are the eccentric cousin who is shunned at important family gatherings. But the octonions are the crazy old uncle nobody lets out of the attic: they are nonassociative."
John C. Baez, The Octonions.

Podemos interpretar as álgebras normadas de divisão reais como sendo álgebras com uma multiplicação "geométrica": a multiplicação é dada por um conjunto de isometrias de uma forma bilinear da álgebra. A existência e as propriedades algébricas (leia-se associatividade e comutatividade) destas álgebras estão ligadas à existência e à topologia de alguns grupos de Lie. Por exemplo, a esfera $\mathbb{S}^n$ admite uma estrutura de grupo de Lie se e somente se[1] existe uma álgebra de divisão normada real de dimensão $n+1$.

Nesta dissertação trataremos de algumas relações entre álgebras de Lie reais e complexas[2] do tipo G_2 e as álgebras normadas.

A menos de isomorfismo, existe exatamente uma álgebra normada complexa de dimensao 8: $\mathbb{O}_{\mathbb{C}}$ - a complexificação da álgebra dos octônios. Já no caso real, existem, a menos de isomorfismo, exatamente duas álgebras normadas de dimensão 8: $\mathbb{O}$ (a álgebra dos octônios) e $\mathbb{O}_{\text{deg}}$ (a álgebra degenerada dos octônios). A álgebra de Lie complexa $\mathfrak{der}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$, formada por todas as derivações na álgebra $\mathbb{O}_{\mathbb{C}}$, é uma álgebra de Lie simples do tipo G_2. A álgebra $\mathbb{O}$ dos octônios e a álgebra $\mathbb{O}_{\text{deg}}$ dos octônios degenerados podem ser realizadas como subálgebras reais de $\mathbb{O}_{\mathbb{C}}$. Segue daí que as álgebras de Lie $\mathfrak{der}(\mathbb{O})$ e $\mathfrak{der}(\mathbb{O}_{\text{deg}})$, de todas as derivações nas álgebras dos octônios e octônios degenerados, respectivamente, são formas reais de $\mathfrak{der}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$. Mostraremos que $\mathfrak{der}(\mathbb{O})$ e $\mathfrak{der}(\mathbb{O}_{\text{deg}})$ são, respectivamente, as formas reais compacta e normal do tipo G_2. Utilizando-nos das propriedades da álgebra $\mathbb{O}_{\mathbb{C}}$ mostraremos que toda forma real de $\mathfrak{der}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$ é

[1] Em outras palavras uma álgebra em $\mathbb{R}^{n+1}$ é normada e de divisão se e somente se o seu produto pode ser restrito a $\mathbb{S}^n$, tornando este um grupo de Lie.

[2] Apesar disso, a maioria dos resultados se aplicam à quaisquer corpos de característica diferente de 2.

exatamente $\mathfrak{der}(\mathcal{O})$ para alguma subálgebra (octoniônica) real $\mathcal{O}$ de $\mathbb{O}_{\mathbb{C}}$ isomorfa a $\mathbb{O}$ ou $\mathbb{O}_{\text{deg}}$, e estabelecendo, assim, uma classificação das álgebras de Lie reais simples do tipo G_2.

No capítulo 1, enunciaremos os resultados gerais sobre álgebras e grupos de Lie que serão usados. Todas as demonstrações foram omitidas, mas para cada resultado uma referência bibliográfica foi oferecida.

No capítulo 2, introduziremos a teoria das álgebras normadas. Em especial, discutimos o processo de Cayley-Dickson e a classificação das álgebras normadas sobre $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$. As definições e demonstração deste capítulo seguem de forma similar a feita no primeiro capítulo de [10].

No capítulo 3, construimos um modelo da álgebra de Lie complexa do tipo G_2 utilizando a álgebra de Lie $\mathrm{Im}(\mathbb{H})$ (álgebra de Lie dos quatérnios imaginários tendo o comutador como colchete de Lie). Tal construção é uma imitação da construção feita no capítulo 8 de [8] com a diferença que ao invés de aplicar diretamente os resultados de álgebra multilinear serão utilizadas propriedades da álgebra dos quatérnios.

No capítulo 4, introduzimos os conceitos de duplas e triplas básicas em álgebras normadas, subálgebras octoniônicas e a estrutura de grupo de Lie dos grupos de automorfismos de uma álgebra normada. Com eles demonstramos algumas propriedades dos automorfismo de álgebras normadas e estabelecemos alguns resultados sobre a topologia do grupo dos automorfismos dos octônios. O conceito de duplas e triplas básicas surgem naturalmente das construções feitas pelo processo de Cayley-Dickson. O autor se baseou em citações esparsas como em [1] para desenvover formalmente o conceito de triplas e duplas básicas e aplica-los ao estudo do grupo $\mathrm{Aut}(\mathbb{O})$ (grupo dos automorfismos da álgebra dos octônios).

No capítulo 5, mostramos que a álgebra das derivações em $\mathbb{O}_{\mathbb{C}}$ é uma álgebra de Lie complexa do tipo G_2. Introduzimos o conceito de família de derivações parametrizadas por uma tripla básica e o utilizamos para produzirmos alguns resultados sobres as álgebras de Lie de derivações em álgebras normadas. A descrição matricial das derivações em $\mathbb{O}$ é é uma generalização da descrição feita em [4] com o intuito não só de discutir o fato de $\mathfrak{der}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$ é uma álgebra de Lie simples do tipo G_2 mas também para servir de ferramenta para os resultados do próximo capítulo.

No capítulo 6, mostramos que as álgebras de Lie das derivações nas subálgebras octoniônicas são formas reais da álgebra de Lie $\mathfrak{der}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$. Classificamos tais formas reais e depois mostramos que todas as formas reais das álgebras de Lie do tipo G_2 são desta forma. O fato de que $\mathfrak{der}(O_{\mathbb{C}})$ é uma álgebra de Lie simples do tipo G_2 e a classificação das álgebras de Lie reais do tipo G_2 são conhecida a muito tempo (veja [8], por exemplo). Por outro lado, segundo o conhecimento bibliográfico do autor, este texto é o primeiro a descrever a decomposição de Cartan das formas reais de G_2 como álgebras de derivações e a apresentar uma demonstração do fato que o conjunto de todas as formas reais de $\mathfrak{der}(O_{\mathbb{C}})$ é igual ao conjunto das subálgebras reais $\mathfrak{der}(O_{\mathbb{C}})$ quem represantam a álgebra das derivações de alguma subálgebra octoniônica de $\mathbb{O}_C$ (teorema 6.3.3).

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais pela paciência e apoio, à querida Adriana pelo apoio e compreensão, ao orientador Luiz San Martin pela inspiração, ao CNPq pelo apoio financeiro e à parcela honesta da população que com seus impostos financiam tanto o CNPq quanto a UNICAMP.

Capítulo 1

Conceitos Preliminares Sobre Álgebras e Grupos de Lie

Neste capítulo, serão enunciados os resultados básicos sobre Grupos e Álgebras de Lie necessários no restante desta dissertação. Para demonstrações e mais detalhes veja [3], [8] e [9].

1.1 Grupos de Lie

Definição 1.1.1 (Grupo de Lie)**.** *Seja G uma varidade real suave (i.e. com estrutura diferenciável C^∞) com uma estrutura de grupo dada por uma operação suave $G \times G \to G$. Dizemos, nestas circunstâncias, que G é um grupo de Lie.*

A seguir, o exemplo de grupo de Lie mais geral[1] possível.

Exemplo 1.1.2 ($\mathrm{Gl}(V)$ - O Grupo Geral Linear sobre V)**.** *Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita e $M(V)$ o espaço vetorial das transformações lineares de V em V. O conjunto*

$$\mathrm{Gl}(V) = \{\varphi \in M(V); \varphi \textit{ é um isomorfismo}\}$$

é aberto em $M(V)$ e, por isso, é uma variedade suave com a estrutura diferencial herdada de $M(V)$. Além disso, a composição de transformações é suave e faz de $\mathrm{Gl}(V)$ um grupo de Lie.

Definição 1.1.3 (Homorfismo de Grupos de Lie)**.** *Sejam G e H grupos de Lie. Dizemos que $\varphi : G \to H$ é um homomorfismo de grupos de Lie se é um homomorfismo de grupos suave (C^∞).*

[1] Veja o corolário 1.2.14 adiante.

Daqui até o fim desta seção, G denotará um grupo de Lie. Discutiremos, brevemente, a relação entre a estrutura de grupo e a estrutura diferenciável de G. Para mais detalhes veja [3] e [9].

Uma derivação em um ponto $g \in G$ é uma aplicação linear X definida no espaço vetorial $C^\infty(G)$ das funções suaves em G à valores em $\mathbb{R}$ que satisfaz a regra de Leibniz:

$$X(fh) = f(g)X(h) + X(f)h(g),$$

para todos f e $h \in C^\infty(G)$. Segue que podemos associar, a cada ponto $g \in G$, o espaço vetorial T_gG composto por todas as derivações no ponto g.

A suavidade da multiplicação em G, fornece difeomorfismos:

$$\begin{array}{rccc} E_g: & G & \to & G \\ & g' & \to & gg', \end{array}$$

para cada $g \in G$. E, consequentemente, temos a família de derivadas, para g e $g' \in G$,

$$(E_g)_* : T_{g'}G \to T_{gg'}G$$

dadas por

$$\begin{array}{rccc} (E_g)_*X_{g'}: & C^\infty(G) & \to & \mathbb{R} \\ & f & \to & X_{g'}(f \circ E_g), \end{array}$$

para todo $X_{g'} \in T_{g'}G$. De fato, estas transformações carregam toda informação contida na estrutura de G.

A estrutura de variedade suave de G fornece o fibrado tangente (com estrutura diferanciável dada em função da estrutura diferenciável de G, veja o capítulo 5 de [3])

$$\begin{array}{rcl} TG := \sqcup_{g \in G} T_gG & \to & G \\ X_g \in T_gG & \to & g \in G. \end{array}$$

Por outro lado, a estrutura de grupo de G fornece secções suaves (campos)

$$X : TG \leftarrow G,$$

em G. Por clareza de notação, denotamos por X_g a imagem de $g \in G$ por um campo X.

Dados um campo X em G e uma função suave $f \in C^\infty(G)$, temos uma função suave

$$\begin{array}{rccc} Xf: & G & \to & \mathbb{R} \\ & g & \to & X_gf. \end{array}$$

Assim, dados campos X e Y em G e $g \in G$, temos que

$$\begin{array}{rccc} (XY)_g: & \mathrm{C}^\infty(G) & \to & \mathbb{R} \\ & f & \to & X_g(Yf) \end{array}$$

é um funcional linear (que não necessariamente satisfaz a regra de Leibniz para $g \in G$).

Lema 1.1.4. *Sejam X e Y campos em G. Então, definindo*

$$([X,Y])_g := (XY)_g - (YX)_g \in T_gG,$$

para todo $g \in G$, temos que $[X,Y] : G \to TG$ é um campo.

Demonstração:
Veja, em [3], o lema 4.12 na página 90.

$\square$

Definição 1.1.5 (Colchete de Lie)**.** *Sejam X e Y campos em G. O campo*

$$\begin{array}{rccl} [X,Y]: & G & \to & TG \\ & g & \to & (XY)_g - (YX)_g. \end{array}$$

é denominado de colchete de Lie entre X e Y.

Dado um elemento X_e no espaço tangente T_eG do elemento neutro e de G, temos (veja a proposição 4.10 em [3]) um campo $(X_e)^G$ dado por

$$\begin{array}{rccl} (X_e)^G: & G & \to & TG \\ & g & \to & (E_g)_* X_e \in T_gG. \end{array}$$

Definição 1.1.6 (Campos Invariantes à Esquerda)**.** *Seja X um campo de G. Dizemos que X é um campo invariante à esquerda se, para cada g e $g' \in G$, tem-se*

$$(E_g)_* X_{g'} = X_{gg'},$$

onde $X_h \in T_hG$ denota a imagem do elemento $h \in G$ pelo campo X em G.

É imediato que se X é um campo invariante à esquerda de G, então $X = (X_e)^G$. E, reciprocamente, todo campo da forma $(X_e)^G$, como acima, é invariante à esquerda.

Proposição 1.1.7. *Sejam X, Y e Z campos invariantes à esquerda de G e $\lambda \in \mathbb{R}$. Então, temos que:*

(i) $[X,Y]$ *é um campo invariante à esquerda;*

(ii) $[X,Y] = -[Y,X]$*;*

(iii) $[X, Y + \lambda Z] = [X,Y] + \lambda[X,Z]$*;*

(iv) $[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0.$

Demonstração:
Veja, em [3], os lemas 4.15 (na página 91) e 4.18 (na página 4.18).

$\square$

Pela proposição acima, o colchete de Lie fornece ao espaço vetorial dos campos invariantes à esquerda uma estrutura de álgebra.

Definição 1.1.8 (Álgebra de Lie de um Grupo de Lie)**.** *Seja G um grupo de Lie. Denotamos por* $\mathrm{Lie}(G)$ *a álgebra dos campos invariantes à esquerda em G com o colchete de Lie* $[,]$ *como produto. Dizemos que* $\mathrm{Lie}(G)$ *é a álgebra de Lie de G.*

Observemos que há uma preferência arbitrária, nas considerações acima, pela multiplicação à esquerda em relação à multiplicação à direita. De fato, poderíamos fazer considerações análogas com relação a multiplicação à direita. Mas, isso nos levaria a estruturas eventualmente diferentes, porém isomorfas.

Para um espaço vetorial real V de dimensão finita, temos que $T_I GL(V)$ pode ser identificado com $M(V)$, onde cada elemento $X \in M(V)$ é identificado com a derivada na direção X no ponto $I \in GL(V)$. Esta identificação fornece uma caracterização importante do colchete de Lie em $Lie(GL(V))$.

Proposição 1.1.9. *Sejam V o espaço vetorial real de dimensão finita e $\mathfrak{gl}(V)$ o espaço das transformações lineares $V \to V$ com a aplição bilinear*

$$[\cdot, \cdot] : \mathfrak{gl}(V) \times \mathfrak{gl}(V) \to \mathfrak{gl}(V)$$

dada por

$$[A, B] = A \circ B - B \circ A,$$

para todo A e $B \in \mathfrak{gl}(V)$. Considerando a identificação dos elementos de $\mathfrak{gl}(V) = M(V) \subset T_I GL(V)$ com as derivadas direcionais em $GL(V)$ no operador identidade I, temos que

$$([A, B])^{GL(V)} = [(A)^{GL(V)}, (B)^{GL(V)}] \in \mathrm{Lie}(G),$$

para todos A e $B \in \mathfrak{gl}(V)$.

Demonstação:

Veja a proposição 4.23 em [3].

□

Em vista da proposição acima, identificaremos, sem perda de generalidade, $Lie(GL(V))$ com $\mathfrak{gl}(V)$.

Seja X um campo em G. Como X é um campo (suave por definição) em uma variedade suave, temos que existe uma única curva $\gamma_X : I_X \to G$, com $0 \in I_X \subset \mathbb{R}$, que satisfaz

$$\gamma_X(0) = e,$$

onde e é o elemento neutro de G, e

$$\gamma'_X(t) = X_{\gamma_X(t)},$$

para todo $t \in I_X$ (onde $I_X \subset \mathbb{R}$ é um intervalo maximal no qual uma curva com estas propriedades pode ser definida).

No próximo lema, consideraremos a estrutura de grupo de Lie em $\mathbb{R}$ que consiste na estrutura suave usual e a soma como operação de grupo.

Lema 1.1.10. *Seja $X \in \mathrm{Lie}(G)$. Temos que γ_X está definida em todo $\mathbb{R}$ e*

$$\gamma_X : (\mathbb{R}, +) \to G$$

é um homomorfismo de grupos de Lie.

Demonstração:
Veja, o lema 20.1 (página 519) em [3].

$\square$

Com isso fica bem definida a seguinte aplicação:

Definição 1.1.11 (Aplicação Exponencial)**.** *Definimos a aplicação* $\exp : \mathrm{Lie}(G) \to G$ *por*

$$\exp(X) = \gamma_X(1),$$

para todo $X \in \mathrm{Lie}(G)$. Tal aplicação é conhecida como aplicação exponencial.

Exemplo 1.1.12. *Seja V um espaço vetorial real. Temos que*

$$\begin{array}{rccc} \exp : & \mathfrak{gl}(V) & \to & GL(V) \\ & X & \to & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!}. \end{array}$$

De fato, é verifica-se que $\gamma_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tX)^n}{n!}$.

Definição 1.1.13. *Sejam G e H grupos de Lie. Dizemos que uma transformação linear*

$$T : \mathrm{Lie}(G) \to \mathrm{Lie}(H)$$

é um homomorfismo entre as álgebras de Lie de G e H se

$$T[X, Y] = [TX, TY],$$

para todos X e $Y \in \mathrm{Lie}(G)$.

Proposição 1.1.14. *Sejam G e H grupos de Lie. Temos que:*

(i) A aplicação $\exp : Lie(G) \to G$ é suave;

(ii) Se $F : G \to H$ é um homomorfismo de grupos de Lie, então o diagrama

$$\begin{tikzcd} Lie(G) \arrow[r, "F_*"] \arrow[d, "\exp"'] & Lie(H) \arrow[d, "\exp"] \\ G \arrow[r, "F"'] & H \end{tikzcd}$$

é comutativo e a derivada F_* é um homomorfismo entre as álgebras de Lie de G e H.

(iii) Se G for compacto e conexo então $\exp : Lie(G) \to G$ é sobrejetiva;

Demonstração:

Veja as proposições 4.25 e 20.8 em [3].

$\square$

Definição 1.1.15 (Subgrupo de Lie)**.** *Seja G um grupo de Lie. Dizemos que um subgrupo H de G é um subgrupo de Lie de G se H é uma subvariedade mergulhada de G e o produto em H é suave.*

Teorema 1.1.16 (do Subgrupo Fechado)**.** *Seja G um grupo de Lie e H um subgrupo fechado. Então, H é um subgrupo de Lie de G e*

$$\mathrm{Lie}(H) = \{X \in \mathrm{Lie}(G); \exp(tX) \in H,\ t \in \mathbb{R}\}.$$

Demonstração:

Veja o teorema 20.10 em [3] ou a proposição 3.35 em [9].

$\square$

Pela proposição acima, obtemos exemplos de subgrupos de Lie (fechados) de $GL(V)$ (como no exemplo 1.1.2) e suas respectivas álgebras de Lie como subespaços de $\mathfrak{gl}(V)$:

Exemplo 1.1.17. *Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita e* $\det : M(V) \to \mathbb{R}$ *a função determinante em V tal que* $\det(I) = 1$*. Definimos*

$$SL(V) = \{T \in GL(V); \det(T) = 1\}.$$

Temos que $SL(V)$ é um subgrupo de Lie (fechado) de $GL(V)$ com álgebra de Lie dada por

$$\mathfrak{sl}(V) := Lie(SL(V)) = \{X \in \mathfrak{gl}(V); \mathrm{tr}(X) = 0\}.$$

Exemplo 1.1.18. *Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita e com um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Definimos*

$$O(V) := \{T \in GL(V); TT^* = T^*T = I\},$$

onde $T^* \in GL(V)$ é a transformação dual à T, dada pela igualdade

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle,$$

para todo x e $y \in V$. Temos que $O(V)$ é um subgrupo de Lie (fechado) de $GL(V)$ com álgebra de Lie dada por

$$Lie(O(V)) = \{X \in \mathfrak{gl}(V); X^* = -X\}.$$

A componente conexa da identidade I em $O(V)$ é o subgrupo

$$SO(V) := \{T \in GL(V); TT^* = T^*T = I \ e\ \det(T) = 1\}$$

com a álgebra de Lie

$$\mathfrak{so}(V) := Lie(SO(V)) = Lie(O(V)).$$

Exemplo 1.1.19. *Seja V um espaço vetorial complexo de dimensão finita e com um produto interno hermitiano $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Definimos*

$$U(V) := \{T \in GL(V); TT^* = T^*T = I\},$$

onde $T^* \in GL(V)$ é a transformação dual à T, dada pela igualdade

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle,$$

para todo x e $y \in V$. Temos que $U(V)$ é um subgrupo de Lie (fechado) de $GL(V)$ com álgebra de Lie dada por

$$\mathfrak{u}(V) := Lie(U(V)) = \{X \in \mathfrak{gl}(V); X^* = -X\}.$$

Da mesma forma, tomando uma função determinante $\det : M(V) \to \mathbb{C}$ *tal que* $\det(I) = 1$, *temos que*

$$SU(V) := \{T \in GL(V); TT^* = T^*T = I \text{ e } \det(T) = 1\}$$

é um subgrupo de Lie de $GL(V)$ com álgebra de Lie dada por

$$\mathfrak{su}(V) := Lie(SU(V)) = \{X \in \mathfrak{gl}(V); X^* = -X \text{ e } \operatorname{tr}(X) = 0\}.$$

As próximas duas proposições são fundamentais para a classificação dos grupos de Lie.

Proposição 1.1.20. *Seja G um grupo de Lie. Existe um grupo de Lie simplesmente conexo $\tilde{G}$ e um homomorfismo de grupos de Lie $\pi : \tilde{G} \to G$ que é um recobrimento suave.*

Demonstração:
Veja a proposição 2.13 em [3].

□

Proposição 1.1.21. *Sejam G e H grupos de Lie e $T : \mathrm{Lie}(G) \to \mathrm{Lie}(H)$ um homomorfismo de álgebras de Lie. Se G for simplesmente conexo, existe um único homomorfismo de grupos de Lie $\varphi : G \to H$ tal que $\varphi_* = T$.*

Demonstração:
Veja o teorema 20.15 em [3].

□

Para terminar esta seção, vejamos alguns resultados sobre quocientes e ações de grupos de Lie.

Seja G um grupo de Lie e H um subgrupo de Lie fechado de G. A aplicação quociente $\pi : G \to G/H$ fornece a G/H uma estrutura diferenciável.

Proposição 1.1.22. *Seja G um grupo de Lie e H um subgrupo de Lie de G. Temos que:*

(i) Se G/H e H são conexos então G é conexo;

(ii) Se G/H e H são compactos então G é compacto.

Demonstração:
Veja a proposição 9.34 em [3].

□

Definição 1.1.23. *Seja G um grupo de Lie e X uma variedade diferenciável. Dizemos que a aplicação $a : G \times X \to X$ é uma ação se*

- *$a(1, \cdot) = I_X$;*
- *$a(gh, \cdot) = a(g, a(h, \cdot))$, para todo g e h em G.*

Se a é suave, dizemos que G age suavemente em X. Além disso, dizemos que a é transitiva se para todos x e $y \in X$ existe $g \in G$ tal que $a(g, x) = y$.

Teorema 1.1.24. *Seja G um grupo de Lie que age trasitivamente e suavemente em uma variedade X. Então:*

(i) Para cada $x \in X$ o conjunto

$$H_x := \{g \in G; gx = x\}$$

é um subgrupo de Lie de G;

(ii) G/H_x é difeomorfo à X, para todo $x \in X$.

Demonstração:
Veja o teorema 9.24 em [3].

□

1.2 Álgebras de Lie

Definição 1.2.1 (Álgebra de Lie)**.** *Seja $\mathfrak{g}$ um $\mathbb{K}$-espaço vetorial munido de uma aplicação $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ tal que*

(i) *$[\cdot, \cdot]$ é bilinear e alternada;*

(ii) *Para cada X, Y e $Z \in \mathfrak{g}$ vale a identidade de Jacobi:*

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$$

para todo X, Y e $Z \in \mathfrak{g}$.

Nas discussões que seguem, estaremos sempre admitindo que $\dim \mathfrak{g} < \infty$.

Exemplo 1.2.2. *Como vimos na proposicao 1.1.7, se G é um grupo de Lie, então $Lie(G)$ é uma álgebra de Lie.*

Exemplo 1.2.3 (Álgebra de Lie Abeliana)**.** *Seja V um espaço vetorial munido da forma bilinear $[\cdot,\cdot] = 0$. Temos que V é uma álgebra de Lie. Neste caso dizemos que V é uma álgebra de Lie abeliana.*

Podemos especializar o exemplo acima, usando a identificação da proposição 1.1.9.

Exemplo 1.2.4. *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra associativa. Temos que o comutador, definido por*

$$[a, b] = ab - ba$$

para todo a e $b \in \mathcal{A}$, fornece à $\mathcal{A}$ uma estrutura de álgebra de Lie.

Exemplo 1.2.5. *Seja V um espaço vetorial e $\mathfrak{gl}(V)$ o espaço vetorial de todas as transformações lineares de V em V. Temos que o comutador*

$$[X, Y] = XY - YX,$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{gl}(V)$, fornece uma estrutura de álgebra de Lie para $\mathfrak{gl}(V)$.

Naturalmente, temos uma noção de categoria para a estrutura definida acima:

Definição 1.2.6 (homomorfismo de álgebras de Lie)**.** *Sejam $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ álgebras de Lie sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ uma transformação linear que satisfaz*

$$\varphi[X, Y] = [\varphi X, \varphi Y],$$

para todos X e $Y \in \mathfrak{g}$. Dizemos que φ é um homomorfismo de álgebras de Lie. Se, além disso, φ for bijetiva dizemos que φ é um isomorfismo de álgebras de Lie.

Exemplo 1.2.7. *Como vimos na proposição 1.1.14, se $F : G \to H$ é um homomorfismo de grupos, então a derivada $F_* : Lie(G) \to Lie(H)$ é um homomorfismo de álgebras de Lie. Se F é um difeomorfismo, então F_* é um isomorfismo de álgebras de Lie.*

Notação 1.2.8. *Sejam $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$ subconjuntos de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Denotamos por $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$ o subespaço vetorial de $\mathfrak{g}$ gerado pelos elementos da forma $[X, Y]$ onde $X \in \mathfrak{a}$ e $Y \in \mathfrak{b}$.*

Definição 1.2.9 (Subálgebras e Ideais)**.** *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie e $\mathfrak{s}$ e $\mathfrak{i}$ subespaços vetoriais de $\mathfrak{g}$. Dizemos que:*

(i) $\mathfrak{s}$ *é uma subálgebra de* $\mathfrak{g}$ *se* $[\mathfrak{s}, \mathfrak{s}] \subset \mathfrak{s}$*;*

(ii) $\mathfrak{i}$ *é um ideal de* $\mathfrak{g}$ *se* $[\mathfrak{g}, \mathfrak{i}] \subset \mathfrak{i}$.

Exemplo 1.2.10. *Seja $\mathbb{K}$ um corpo com característica diferente de 2 e $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ a álgebra de Lie das matrizes $n \times n$ com entradas em $\mathbb{K}$ com o comutador de matrizes (veja o exemplo 1.2.4) como colchete de Lie. Definiremos, abaixo, algumas subálgebras de Lie de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$:*

- *Tipo A_n, $n \geqslant 1$*

$$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K}) := \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}) \mid trX = 0\};$$

- *Tipo B_n, $n \geqslant 2$*

$$\mathfrak{so}(2n+1, \mathbb{K}) := \{X \in \mathfrak{gl}(2n+1, \mathbb{K}) \mid X + X^T = 0\};$$

- *Tipo C_n, $n \geqslant 3$*

$$\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{K}) := \{X \in \mathfrak{gl}(2n, \mathbb{K}) \mid XJ + JX^T = 0\}$$

  onde

$$J := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{gl}(2n, \mathbb{K});$$

- *Tipo D_n, $n \geqslant 4$*

$$\mathfrak{so}(2n, \mathbb{K}) := \{X \in \mathfrak{gl}(2n, \mathbb{K}) \mid X + X^T = 0\}.$$

Definição 1.2.11 (representação de álgebra de Lie)**.** *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie, V um espaço vetorial e $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ um homomorfismo de álgebras de Lie. Dizemos que ρ é uma representação de $\mathfrak{g}$.*

Exemplo 1.2.12 (representação adjunta)**.** *Seja* $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ *a transformação linear dada por*

$$\mathrm{ad}(X)Y = [X, Y],$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$. A identidade de Jacobi garante que ad *é uma representação de $\mathfrak{g}$.*

De fato, as álgebras de Lie matriciais são tão importantes quanto gerais, pois sabemos que:

Teorema 1.2.13 (de Ado)**.** *Toda álgebra de Lie de dimensão finita sobre um corpo algébricamente fechado é isomorfa à uma álgebra de Lie matricial. Isto é, para toda álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, com $\dim \mathfrak{g} < \infty$, existe uma representação $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ fiel (i.e. injetiva).*

Demonstração:
Veja o teorema 10.9 em [8].

□

Corolário 1.2.14. *Todo grupo de Lie é isomorfo a um quociente de um grupo de Lie matricial por um subgrupo discreto. Isto é, para todo grupo de Lie G, existe um espaço vetorial real V e um homomorfismo de grupos injetivo $G \to \mathrm{Gl}(V)$.*

Demonstração:
Segue do teorema acima e das proposições 1.1.20 e 1.1.21.

□

Definição 1.2.15 (Álgebra de Lie Solúvel)**.** *Seja* $\mathfrak{g}$ *uma álgebra de Lie. Dizemos que* $\mathfrak{g}$ *é solúvel se a sequência de ideais definida por*

$$\mathfrak{g}^{(0)} = \mathfrak{g}$$

e

$$\mathfrak{g}^{(i)} = [\mathfrak{g}^{(i-1)}, \mathfrak{g}^{(i-1)}],$$

para todo $i \in \mathbb{Z}_+$, *é tal que* $\mathfrak{g}^{(k)} = 0$ *para algum* $k \in \mathbb{Z}_+$.

Exemplo 1.2.16. *Seja* $\mathfrak{t}$ *o subálgebra de* $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ *das matrizes triangulares superiores. Verifica-se que* $\mathfrak{g}^{(n)} = 0$*. Donde conclui-se que* $\mathfrak{t}$ *é solúvel.*

Em vista do Teorema de Ado (1.2.13), temos uma classificação das álgebras de Lie Solúveis pelo teorema de Lie:

Teorema 1.2.17 (de Lie)**.** *Seja* $\mathfrak{g}$ *uma álgebra de Lie solúvel sobre um corpo algébricamente fechado e* $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ *uma representação de* $\mathfrak{g}$*. Então, existe uma base ordenada de* V *na qual os elementos de* $\rho(\mathfrak{g})$ *são todos representados por matrizes triangulares superiores.*

Demonstração:
Veja o teorema 2.12 em [8].

□

Como visto acima, as álgebras de Lie solúveis são "meramente" subálgebras da álgebra de matrizes triangulares superiores. Na próxima seção, discutiremos uma classe de álgebras de Lie "mais rica em estrutura". Para tanto, precisamos de uma noção de "o quão solúvel é" uma álgebra de Lie dada.

Proposição 1.2.18. *Em qualquer álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ *de dimensão finita, existe um ideal solúvel,* $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$*, que contém todos os ideais solúveis de* $\mathfrak{g}$*.*

Demonstração:
Veja a proposição 1.28 em [8].

□

Definição 1.2.19 (radical solúvel)**.** *O ideal* $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$*, da proposição anterior, é denominado de radical solúvel.*

Será útil considerarmos a seguinte subclasse de álgebras de Lie solúveis:

Definição 1.2.20 (álgebra de Lie nilpotente)**.** *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. Dizemos que $\mathfrak{g}$ é nilpotente se a sequência de ideais definida por*

$$\mathfrak{g}^1 = \mathfrak{g}$$

e

$$\mathfrak{g}^i = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{i-1}],$$

para todo $i \in \mathbb{Z}_+$, é tal que $\mathfrak{g}^k = 0$ para algum $k \in \mathbb{Z}_+$.

Definição 1.2.21 (pesos e subespaços de peso de uma representação)**.** *Seja $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ uma representação de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ e $\lambda \in \mathfrak{g}^*$. Dizemos que λ é um peso de ρ se*

$$V_\lambda := \{v \in V;\ \textit{para todo } X \in \mathfrak{g} \textit{ existe } n \in \mathbb{Z}_+ \textit{tal que } v \in ker(\rho(X) - \lambda(X)I)^n\}$$

é diferente de 0. E, neste caso, V_λ é chamado de espaço de peso.

Teorema 1.2.22. *Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie nilpotente sobre um corpo algebricamente fechado e $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ uma representação de $\mathfrak{g}$ em um espaço vetorial V de dimensão finita. Então,*

$$V = V_{\lambda_1} \oplus ... \oplus V_{\lambda_k}$$

para espaços de peso V_{λ_i} de peso λ_i para $i = 1, ..., k$. Além disso, cada V_{λ_i} é invariante por $\rho(X)$ (i.e. $\rho(X)V_{\lambda_i} \subset V_{\lambda_i}$), para cada $i = 1, ..., k$ e $X \in \mathfrak{g}$.

Demonstração:
Veja o teorema 2.9 em [8].

$\square$

1.3 Álgebras de Lie Semissimples e a Forma de Cartan-Killing

Definição 1.3.1 (álgebra de Lie simples)**.** *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. Dizemos que $\mathfrak{g}$ é simples se*

(i) $\mathfrak{g}$ não possui ideais próprios (diferentes de 0 e $\mathfrak{g}$);

(ii) $\mathfrak{g}$ não é abeliano (o colchete $[\cdot, \cdot]$ não é nulo).

Definição 1.3.2 (álgebras de Lie semissimples)**.** *Dizemos que uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é semissimples se $\mathfrak{r}(\mathfrak{g}) = 0$.*

Teorema 1.3.3. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie semissimples. Então, $\mathfrak{g}$ se decompõe de forma única (à menos de permutação de índices) como*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \oplus ... \oplus \mathfrak{g}_n,$$

onde cada $\mathfrak{g}_i$ é um ideal simples de $\mathfrak{g}$.

Demonstração:

Veja o teorema 3.10 em [8].

□

Agora, enunciaremos o resultado que dá à classe das álgebras de Lie semissimples a devida importância com relação à classificação das álgebras de Lie.

Teorema 1.3.4 (de Levi)**.** *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie de dimensão finita. Existe uma subálgebra semissimples $\mathfrak{s}$ de $\mathfrak{g}$ tal que*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{r}(\mathfrak{g}).$$

Demonstração:

Veja o teorema 5.8 em [8]

□

Assim, temos que uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é "feita" de um ideal solúvel $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$ e uma subálgebra semissimples isomorfa à $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$ (com colchete de Lie definido de forma que a projeção canônica seja um homomorfismo) e uma representação (por derivações) de $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$ em $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$. Por isso, a tarefa de entendermos todas as álgebras de Lie se reduz a de entendermos (classificarmos) todas as álgebras de Lie simples e suas representações.

Definiremos, agora, a forma de Cartan-Killing de uma álgebra de Lie. Esta será a ferramenta mais importante na classificação de todas as álgebras de Lie semissimples sobre corpos algebricamente fechados e de característica 0.

Definição 1.3.5 (forma de Cartan-Killing)**.** *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. Chamamos de forma de Cartan-Killing a forma bilinear simétrica $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{K}$ definida por*

$$\langle X, Y \rangle = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}(X)\mathrm{ad}(Y)),$$

para todo X e $Y \in \mathfrak{g}$.

A forma de Cartan-Killing nos permite dar um tratamento geométrico à classificação das álgebras de Lie semissimples. Em especial, o próximo teorema nos diz que a forma de Cartan-Killing em uma álgebra de Lie semissimples não é degenerada.

Teorema 1.3.6 (Critério de Cartan)**.** *A forma de Cartan-Killing de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ não é degenerada se e somente se $\mathfrak{g}$ é semissimples.*

Demonstração:

Veja o teorema 3.8 em [8].

□

Nesta dissertação estudaremos álgebras de Lie reais $\mathfrak{g}$ através de sua complexificação $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. Ou seja, considerando o espaço vetorial $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ obtido da complexificação de $\mathfrak{g}$ munido do colchete de $\mathfrak{g}$ extendido $\mathbb{C}$-bilinearmente.

Corolário 1.3.7. *Seja* $\mathfrak{g}$ *uma álgebra de Lie sobre um corpo* $\mathbb{K}$ *e* $\overline{\mathbb{K}}$ *uma extensão de* $\mathbb{K}$*. Então,* $\mathfrak{g}$ *é semissimples se e somente se* $\mathfrak{g}_{\overline{\mathbb{K}}}$ *é semissimples.*

Demonstração:
Veja a proposição 3.9 em [8].

□

O próximo lema nos diz que a forma de Cartan-Killing de uma álgebra de Lie é preservada por isomorfismos de álgebras de Lie. De fato, adiante mostraremos que uma álgebra de Lie semissimples pode ser descrita completamente pela sua forma de Cartan-Killing.

Lema 1.3.8. *Sejam* $\mathfrak{g}_1$ *e* $\mathfrak{g}_2$ *álgebras de Lie e* $\phi : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ *um ismorfismo de álgebras de Lie. Então,*

$$\langle \phi X, \phi Y \rangle_{\mathfrak{g}_2} = \langle X, Y \rangle_{\mathfrak{g}_1},$$

para todos X *e* $Y \in \mathfrak{g}_1$*, onde* $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{g}_1}$ *e* $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{g}_2}$ *são as formas de Cartan-Killing em* $\mathfrak{g}_1$ *e* $\mathfrak{g}_2$*, respectivamente.*

Demonstração.
Veja a proposição 3.5 em [8].

□

1.4 Sistemas de Raízes

Nesta seção definiremos os mecanismos e enunciaremos os resultados que nos levarão a uma classificação de todas as álgebras de Lie simples sobre corpos algebricamente fechados de característica 0.

Até o fim desta seção, todas as álgebras de Lie estão sobre um corpo $\mathbb{K}$ algebricamente fechado e de característica 0.

Definição 1.4.1 (derivação em uma álgebra de Lie)**.** *Seja* $\mathfrak{g}$ *uma álgebra de Lie e* $D \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ *tal que*

$$D[X, Y] = [DX, Y] + [X, DY],$$

para todos X *e* $Y \in \mathfrak{g}$*. Neste caso dizemos que* D *é uma derivação de* $\mathfrak{g}$*.*

Exemplo 1.4.2. *Seja* $\mathfrak{g}$ *uma álgebra de Lie. Segue da identidade de Jacobi que, para cada* $X \in \mathfrak{g}$*,* $\operatorname{ad}(X)$ *(veja o exemplo 1.2.12) é uma derivação em* $\mathfrak{g}$*.*

O próximo lema é usado na demonstração do Critério de Cartan (teorema 1.3.6) e, também, nos próximos capítulos.

Lema 1.4.3. *Seja* $D : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ *uma derivação em uma álgebra de Lie de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado e* $\mathfrak{g}_\alpha$*,* $\mathfrak{g}_\beta$*, os autoespaços generalizados de* $\mathfrak{g}$ *em relação aos autovalores* α *e* β *de* D*. Então,*

$$[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta},$$

onde $\mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ *é o autoespaço generalizado (possivelmente nulo) de* $\mathfrak{g}$ *em relação ao autovalor* $\alpha + \beta$ *de* D*.*

Demonstração:
Veja a proposição 3.1 em [8].

□

A seguir, introduziremos o conceito de subálgebras de Cartan. A motivação para tal definição vem das álgebras de Lie matriciais nas quais subespaços de matrizes diagonalizáveis fazem o papel dessas álgebras.

Definição 1.4.4 (subálgebra de Cartan)**.** *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie e $\mathfrak{h}$ uma subálgebra de $\mathfrak{g}$. Dizemos que $\mathfrak{h}$ é uma subálgebra de Cartan se*

(i) $\mathfrak{h}$ é nilpotente;

(ii) $\mathfrak{h}$ é normal em $\mathfrak{g}$ (i.e. $X \in \mathfrak{g}$ e $[X, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h} \Rightarrow X \in \mathfrak{h}$).

Proposição 1.4.5. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. Então, $\mathfrak{g}$ possui uma subálgebra de Cartan.*

Demonstração:
Veja o corolário 4.4 em [8].

□

Seja $\mathfrak{h}$ uma subálgebra de Cartan de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Temos, pelo teorema 1.2.22, que a representação adjunta $\mathrm{ad} : \mathfrak{h} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ dá origem a uma decomposição

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1} \oplus ... \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_k},$$

na qual $\mathfrak{h}$ é o subespaço do peso nulo e $\mathfrak{g}_{\alpha_i}$ o subespaço do peso α_i.

Definição 1.4.6 (Sistema de Raízes de uma Álgebra de Lie Semissimples)**.** *Seja $\mathfrak{h}$ uma subálgebra de Cartan da álgebra de Lie semissimples $\mathfrak{g}$. Com relação a decomposição*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1} \oplus ... \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_k},$$

de $\mathfrak{g}$ em espaços de peso da representação $\mathrm{ad} : \mathfrak{h} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$, denominamos:

- *os pesos α_i, $i = 1, \ldots, k$, de raízes de $\mathfrak{g}$ em relação a $\mathfrak{h}$;*
- *os espaços de peso $\mathfrak{g}_{\alpha_i}$, $i = 1, \ldots, k$, de espaços de raízes;*
- *o conjunto $\Pi := \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ de sistema de raízes de $\mathfrak{g}$ em relação à $\mathfrak{h}$.*

Proposição 1.4.7. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie semissimples, $\mathfrak{h}$ uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$ e*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1} \oplus ... \oplus g_{\alpha_k}$$

a decomposição de $\mathfrak{g}$ em espaços de raíz em relação a $\mathfrak{h}$. Então:

a) *$\mathfrak{h}$ é abeliana;*

b) $\dim \mathfrak{g}_{\alpha_i} = 1$, *para $i = 1, \ldots, k$.*

Demonstração:

Veja a proposição 6.6 e o lema 6.8 em [8].

□

A proposição anterior nos dá uma noção combinatória do colchete de Lie em $\mathfrak{h}$ em função da decomposição de $\mathfrak{g}$ em espaços de raíz. Discutiremos adiante o modo como o sistema de raízes determina o colchete de Lie de $\mathfrak{g}$.

Proposição 1.4.8. *Seja $\mathfrak{h}$ uma subálgebra de Cartan em uma álgebra de Lie semissimples $\mathfrak{g}$. A restrição da forma de Cartan-Killing de $\mathfrak{g}$ a $\mathfrak{h}$ não é degenerada.*

Demonstração:

Veja a proposiçao 6.14 em [8].

□

Com o resultado acima, podemos fazer a seguinte definição:

Definição 1.4.9. *Seja $\mathfrak{h}$ uma subálgebra de Cartan de uma álgebra de Lie semissimples $\mathfrak{g}$. Definimos $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathfrak{h}^* \times \mathfrak{h}^* \to \mathbb{K}$ como sendo a forma induzida da forma de Cartan-Killing de $\mathfrak{h}$ pelo isomorfismo*

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{h} & \to & \mathfrak{h}^* \\ X & \to & \langle X, \cdot \rangle. \end{array}$$

Ou seja, para todos α e $\beta \in \mathfrak{h}^*$, definimos

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \langle H_\alpha, H_\beta \rangle,$$

onde H_α e $H_\beta \in \mathfrak{h}$ são definidos (graças a proposição anterior) pelas igualdades

$$\alpha = \langle H_\alpha, \cdot \rangle \text{ e } \beta = \langle H_\beta, \cdot \rangle.$$

Dizemos que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é a forma de Cartan-Killing em $\mathfrak{h}^*$.

Se $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie semissimples e $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ uma subálgebra de Cartan então a forma de Cartan-Killing em $\mathfrak{h}^*$ não é degenerada. De fato, esta é induzida de uma forma que não é degenereada (veja a proposição 1.4.8) em $\mathfrak{h}$. Além disso, temos o seguinte lema:

Lema 1.4.10. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie semissimples, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ uma subálgebra de Cartan e $\Pi \subset \mathfrak{h}^*$ o seu sistema de raízes. O subespaço $\mathbb{Q}$-vetorial $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{Q}}$ gerado pelos elementos de Π em $\mathfrak{h}^*$ é tal que a forma de Cartan-Killing $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de $\mathfrak{h}^*$ assume somente valores racionais e $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathfrak{h}^*_{\mathbb{Q}} \times \mathfrak{h}^*_{\mathbb{Q}} \to \mathbb{Q}$ é um produto interno.*

Sejam $\mathfrak{g}_1$ e $\mathfrak{g}_2$ álgebras de Lie semissimples e $\phi : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ um isomorfismo de álgebras de Lie. Então, se $\mathfrak{h}_1$ é uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}_1$, segue que $\mathfrak{h}_2 = \phi(\mathfrak{h}_1)$ é uma subálgebra de Cartan em $\mathfrak{g}_2$.

Sejam Π_1 e Π_2 os sistema de raízes de $\mathfrak{g}_1$ em relação $\mathfrak{h}_1$ e $\mathfrak{g}_2$ em relação $\mathfrak{h}_2$, respectivamente.

Para $\alpha \in \Pi_2$, $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ e $H \in \mathfrak{h}_1$, temos que

$$\phi^{-1} \circ \mathrm{ad}(\phi(H)) = \mathrm{ad}(H) \circ \phi^{-1}$$

e, consequentemente,

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{ad}(H)\big(\phi^{-1}(X_\alpha)\big) & = & \phi^{-1} \circ \mathrm{ad}(\phi(H))(X_\alpha) \\ & = & \phi^{-1}(\alpha \circ \phi(H) X_\alpha) \\ & = & \alpha \circ \phi(H) \phi^{-1}(X_\alpha). \end{array}$$

Assim, concluímos que $\alpha \circ \phi \in \Pi_1$.

Analogamente, se $\beta \in \Pi_1$, temos que $\beta \circ \phi^{-1} \in \Pi_2$.

Portanto, a aplicação linear

$$\begin{array}{rccl} \phi^* : & \mathfrak{h}_2^* & \to & \mathfrak{h}_1^* \\ & \alpha & \to & \alpha \circ \phi \end{array}$$

é tal que $\phi^*(\Pi_2) = \Pi_1$.

Consideremos as formas de Cartan-Killing $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ em $\mathfrak{h}_1^*$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ em $\mathfrak{h}_2^*$. A aplicação

$$\phi^* : (\mathfrak{h}_1^*, \langle \cdot, \cdot \rangle_1) \to (\mathfrak{h}_2^*, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$$

preserva as formas de Cartan-Killing. De fato[2], pelo lema 1.3.8, temos que

$$\langle X, \phi(Y) \rangle_2 = \langle \phi^{-1}(X), Y \rangle_1,$$

para todo $X \in \mathfrak{g}_2$ e $Y \in \mathfrak{g}_1$. E, assim, se $\alpha \in \mathfrak{h}_2^*$,

$$\alpha = \langle H_\alpha, \cdot \rangle_2$$

implica que

$$\phi^*(\alpha) = \alpha \circ \phi = \langle H_\alpha, \phi(\cdot) \rangle_2 = \langle \phi^{-1}(H_\alpha), \cdot \rangle_1.$$

Logo,

$$\begin{array}{rcl} \langle \phi^*(\alpha), \phi^*(\beta) \rangle_1 & = & \langle \alpha \circ \phi, \beta \circ \phi \rangle_1 \\ & = & \langle H_\alpha, H_\beta \rangle_2 \\ & = & \langle \alpha, \beta \rangle_2, \end{array}$$

para todos α e $\beta \in \mathfrak{h}_2^*$.

Em resumo, se $\phi : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ é um isomorfismo entre álgebras de Lie semissimples, $\mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{g}_1$ e $\mathfrak{h}_2 = \phi(\mathfrak{h}_1)$ subálgebras de Cartan e Π_1 e Π_2 seus respectivos sistemas de raízes, então $\phi^* : \mathfrak{h}_2 \to \mathfrak{h}_1$ é uma isometria tal que $\phi^*(\Pi_2) = \Pi_1$.

Veremos, no próximo teorema, uma recíproca da conclusão acima. Ela é a motivação do estudo dos sistemas de raízes em álgebras de Lie.

Teorema 1.4.11. *Sejam $\mathfrak{g}_1$ e $\mathfrak{g}_2$ álgebras de Lie semissimples, $\mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{g}_1$ e $\mathfrak{h}_2 \subset \mathfrak{g}_2$ subálgebras de Cartan e $\Pi_1 \subset \mathfrak{h}_1^*$ e $\Pi_1 \subset \mathfrak{h}_2^*$ os respectivos sistemas de raízes. Se $\phi : \mathfrak{h}_1 \to \mathfrak{h}_2$ é uma transformação linear tal que $\phi^* : \mathfrak{h}_2^* \to \mathfrak{h}_1^*$ preserva as formas de Cartan-Killing e $\phi^*(\Pi_2) = \Pi_1$, então ϕ pode ser estendido a um isomorfismo de álgebras de Lie $\phi : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$.*

[2]aqui manteremos as notações da definição 1.4.9

Demonstração.
Veja o teorema 8.8 em [8].

□

Em especial, a próxima proposição nos diz que, fixada uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, todos os sistemas de raízes em $\mathfrak{g}$ são "isométricos". Ou seja, os sistemas de raízes "independem" da escolha da subálgebra de Cartan.

Proposição 1.4.12. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie sobre um corpo algebricamente fechado de característica nula, $\mathfrak{h}_1$ e $\mathfrak{h}_2$ subálgebras de Cartan de $\mathfrak{g}$. Então, existe um automorfismo $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ tal que $\varphi(\mathfrak{h}_1) = \mathfrak{h}_2$.*

Demonstração:
Veja o Teorema 4.13 em [8].

□

Concluímos, desta seção, que dadas álgebras de Lie semissimples $\mathfrak{g}_1$ e $\mathfrak{g}_2$, com subálgebras de Cartan $\mathfrak{h}_1$ e $\mathfrak{h}_2$ e sistemas de raízes Π_1 e Π_2, respectivamente, temos que $\mathfrak{g}_1$ é isomorfo a $\mathfrak{g}_2$ se e somente se existe uma transformação linear $\phi^* : \mathfrak{h}_2^* \to \mathfrak{h}_1^*$ que preserva as formas de Cartan-Killing em $\mathfrak{h}_1$ e $\mathfrak{h}_2$ tal que $\phi(\Pi_2) = \Pi_1$.

Portanto, a classificação das álgebras de Lie semissimples sobre corpos algébricamente fechados de característica 0 se reduz à classificação dos seus possíveis sistemas de raízes.

1.5 Sistemas Simples de Raízes

Nesta seção, discutiremos a classificação dos sistemas de raízes em álgebras de Lie semissimples. Como vimos na seção anterior, obteremos daí a classificação das álgebras de Lie semissimples.

Até o fim da seção, $\mathfrak{g}$ denotará uma álgebra de Lie semissimples sobre um corpo algebricamente fechado e de característica nula, $\mathfrak{h}$ uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$ e Π o seu respectivo sistema de raízes.

Definição 1.5.1 (α-sequência iniciada em β)**.** *Seja V um espaço vetorial e α e $\beta \in V$. Chamamos de α-sequência iniciada em β a sequência de elementos*

$$\ldots \quad , \quad \beta - p\alpha, \quad \ldots \quad , \quad \beta - \alpha, \quad \beta, \quad \beta + \alpha, \quad \ldots \quad , \quad \beta + q\alpha, \quad \ldots$$

para p e $q \in \mathbb{Z}_+$, em V.

Proposição 1.5.2 (Fórmula de Killing)**.** *Dadas raízes α e $\beta \in \Pi$, existem p e $q \in \mathbb{Z}_+$ tais que as únicas raízes na α-sequência iniciada em β são exatamente*

$$\beta - p\alpha, \quad \ldots \quad , \quad \beta - \alpha, \quad \beta, \quad \beta + \alpha, \quad \ldots \quad , \quad \beta + q\alpha.$$

Além disso, p e q são dados pela Fórmula de Killing

$$p - q = \frac{2\langle \beta, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}.$$

Demonstração:

Veja o teorema 6.10 em [8].

□

A proposição acima motiva o estudo de subconjuntos mais específicos do que o conjunto de todas as raízes.

Lema 1.5.3. *Temos que* $\mathfrak{h}^*$ *é gerado (como espaço vetorial) por* Π.

Demonstração:

Veja a proposição 6.7 em [8].

□

Definição 1.5.4 (sistema simples de raízes)**.** *Seja* $\mathfrak{h}$ *uma subálgebra de Cartan em uma álgebra de Lie semissimples* $\mathfrak{g}$ *e* Π *o seu respectivo sistema de raízes. Um conjunto* $\Sigma \subset \Pi$ *é dito um sistema simples de raízes se*

(i) Σ *é um subconjunto LI de* $\mathfrak{h}^*$*;*

(ii) Todo elemento $\beta \in \Pi$ *pode ser escrito como*

$$\beta = n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2 + \cdots + n_l\alpha_l,$$

onde $\alpha_i \in \Sigma$ *e os coeficientes* n_i *são todos inteiros positivos ou todos inteiros negativos.*

Neste caso, dizemos também que os elementos do conjunto

$$\Pi^+ := \{n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2 + \cdots + n_l\alpha_l \in \Pi; \quad n_i \geqslant 0 \textit{ para todo } i = 1, \ldots, l\}$$

são as raízes positivas de Π *com relação a* Σ.

Proposição 1.5.5. *Existem sistemas de raízes simples em qualquer sistema de raíz de* $\mathfrak{g}$.

Demonstração. Pelo lema 1.5.3, podemos escolher uma base de $\mathfrak{h}^*$ em Π. Ordenando esta base, podemos introduzir uma ordem lexicográfia em Π. A ordem lexicográfica em Π define o conjunto

$$\Sigma := \{\alpha \in \Pi; \alpha > 0 \text{ e para } \beta, \gamma > 0 \text{ em } \Pi \text{ temos que } \alpha \neq \beta + \gamma\}.$$

Então, pelo corolário 6.4 e peloa lema 6.20 em [8], temos que Σ é um sistema simples de raízes em Π.

□

Veremos, na próxima proposição, porque os sistemas simples de raízes são inerentes à estrutura de álgebra de Lie de $\mathfrak{g}$.

Definição 1.5.6 (grupo de Weyl)**.** *Seja* Π *um sistema de raízes de uma álgebra semissimples* $\mathfrak{g}$. *O grupo gerado pelas reflexões (segundo a forma de Cartan-Killing), com relação aos elementos de* Π, *em* $\mathfrak{h}^*$ *é chamado de Grupo de Weyl de* $\mathfrak{g}$.

Segue, da fórmula de Killing, que a imagem de um sistema simples por elemento do grupo de Weyl é também um sistema simples. Na verdade, vale o resultado.

Proposição 1.5.7. *Seja* Π *um sistema de raízes de uma álgebra de Lie semissimples e* W *o grupo de Weyl associado. Então,* W *age transitivamente nos sistemas simples de raízes de* Π*. Isto é, para cada dois sistemas simples de raízes simples* Σ_1 *e* Σ_2 *em* Π *existe* $\tau \in W$ *tal que* $\tau(\Sigma_1) = \Sigma_2$*.*

Demonstração:
Veja a proposição 9.13 em [8].

□

Sejam $\mathfrak{g}_1$ e $\mathfrak{g}_2$ álgebras de Lie semissimples com subálgebras de Cartan $\mathfrak{h}_1$ e $\mathfrak{h}_2$ e sistemas simples de raízes Σ_1 e Σ_2, respectivamente. Concluímos, da proposição acima e do teorema 1.4.11, que $\mathfrak{g}_1$ e $\mathfrak{g}_2$ são isomorfas se existe uma aplicação linear $\phi^* : \mathfrak{h}_2^* \to \mathfrak{h}_1^*$ que preserva as formas de Cartan-Killing em $\mathfrak{h}_1$ e $\mathfrak{h}_2$ e $\phi^*(\Sigma_2) = \Sigma_1$. Em outros termos, pelo lema 1.4.10, denotando por $\mathfrak{h}_{1\mathbb{Q}}^*$ e $\mathfrak{h}_{2\mathbb{Q}}^*$ os $\mathbb{Q}$-espaços lineares de $\mathfrak{h}_1$ e $\mathfrak{h}_2$ gerados por Σ_1 e Σ_2, temos que existe uma transformação linear ϕ^* como acima se e somente se existe uma isometria $\phi^* : \mathfrak{h}_{2\mathbb{Q}}^* \to \mathfrak{h}_{1\mathbb{Q}}^*$ tal que $\phi^*(\Sigma_2) = \Sigma_1$.

Portanto, para compararmos duas álgebras de Lie semissimples, basta compararmos os "ângulos" entre os elementos de um sistema simples de raízes de uma e de outra álgebra. Isso motiva a próxima definição.

Definição 1.5.8 (matriz de Cartan)**.** *Seja* $\Sigma = \{\alpha_1, ..., \alpha_k\}$*. Definimos*

$$c_{ij} = \frac{2\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle},$$

para $1 \leqslant i, j \leqslant k$*, e a matriz*

$$C = (c_{ij}),$$

que é denominada a matriz de Cartan da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ *em relação ao sistema simples de raízes* Σ*.*

Pela discussão acima, temos que duas álgebras de Lie são isomorfas se e somente se possuem matrizes de Cartan idênticas (a menos de reindexação dos elementos nos sistema de raízes simples).

Proposição 1.5.9. *Seja* $C = (c_{ij})$ *a matriz de Cartan de* $\mathfrak{g}$*. Então:*

(i) $c_{ii} = 2$ *para todo* i*;*

(ii) $c_{ij} \in \{0, -1, -2, -3\}$ *se* $i \neq j$*;*

(iii) $c_{ji} \in \{-2, -3\} \Rightarrow c_{ij} = -1$*;*

(iv) $c_{ji} = 0 \Leftrightarrow c_{ij} = 0$*.*

Demonstração:
Veja a proposição 6.4 em [8].

□

Nosso próximo passo na classificação dos sistemas de raízes é transformar as informações da matriz de Cartan em "informação topológica" no intuito de limitar os possiveis sistemas de raízes.

Definição 1.5.10 (diagrama de Dynkin)**.** *Dizemos que o diagrama de Dynkin de $\mathfrak{g}$ é o grafo definido à partir da matriz de Cartan $C = (c_{ij})$ da seguinte forma:*

- $\Sigma = \{\alpha_1, ..., \alpha_k\}$ *é o conjunto dos vértices;*
- *Para $i \neq j$, se $|c_{ij}| = |c_{ji}| = 1$ então α_i e α_j são ligados por uma aresta não orientada;*
- *Para $i \neq j$, se $L = |c_{ij}| = 2$ ou 3 então α_i e α_j são ligados por L arestas orientadas no sentido α_j para α_i.*

Exemplo 1.5.11. *Nos próximos capítulos construiremos uma álgebra de Lie cuja matriz de Cartan é*

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

e, consequentemente,

$$\circ\!\Rrightarrow\!\circ$$

é o seu diagrama de Dynkin.

A classificação dos diagramas de Dynkin, como no capítulo 7 de [8], transcorre por meio de propriedades como: se o diagrama com n vértices possui, no máximo, $n-1$ pares conectados; o diagrama não possui ciclos; a quatidade de arestas ligadas a um vértice é no máximo 3. A propriedade que mais nos importa é a da seguinte proposição:

Proposição 1.5.12. *Se*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus ... \oplus \mathfrak{g}_s$$

é a decomposição de $\mathfrak{g}$ em componentes simples, então as componentes conexas do diagrama de Dynkin de $\mathfrak{g}$ são os diagramas de $\mathfrak{g}_1$,..., $\mathfrak{g}_k$.

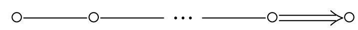
Demonstração.
Veja as proposições 8.1 e 8.3 em [8].

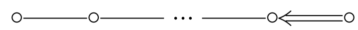
□

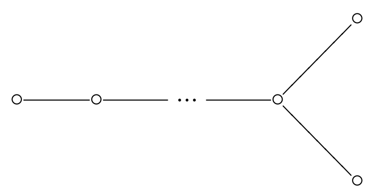
Por fim, a classificação dos possíveis diagramas de Dynkin segue do seguinte teorema:

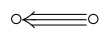
Teorema 1.5.13. *Os diagramas de Dynkin conexos são*

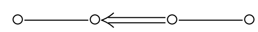
A_n : $n \geqslant 1$

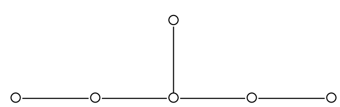
B_n :  $n \geqslant 2$

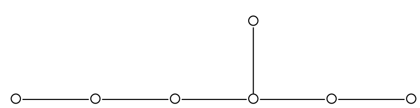
C_n :  $n \geqslant 3$

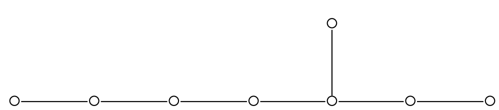
D_n :  $n \geqslant 4$

G_2 : 

F_4 : 

E_6 : 

E_7 : 

E_8 : 

Demonstração:
Veja o teorema 7.9 em [8].

□

1.6 Representações de Álgebras de Lie Semissimples

Nesta seção estabeleceremos algumas ferramentas sobre teoria de representações de álgebras de Lie semissimples.

Definição 1.6.1 (Sub-representações e Representações Irredutíveis)**.** *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebras de Lie e $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ uma representação:*

(i) Se W é um subespaço vetorial de V e $X \in \mathfrak{g}$ são tais que $\rho(X)w \in W$ para todo $w \in W$ então dizemos que W é invariante por $\rho(X)$;

(ii) *Se W é um subespaço vetorial de V tal que W é invariante por todo $X \in \mathfrak{g}$ dizemos que W é uma sub-representação de V pela representação ρ;*

(iii) *Se $W \neq 0$ é uma sub-representação de V pela representação ρ tais que as únicas subrepresentações de V contidas em W são 0 e W então dizemos que W é uma sub-representação irredutívelde V. No caso em que $W = V$, dizemos que ρ é irredutível.*

Lema 1.6.2. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. Se existir uma representação fiel (injetiva) $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{sl}(V)$ e irredutível com $\dim V < \infty$. Então, $\mathfrak{g}$ é semissimples.*

Demonstração:
Veja o teorema 5.11 em [8] e o comentário que o sucede.

□

Teorema 1.6.3 (de Weyl)**.** *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie semissimples e $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ uma representação com $\dim V < \infty$. Então,*

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_n,$$

com V_i sendo uma sub-representação irredutível de V pela representação ρ para cada $i = 1, \ldots, n$.

Demonstração:
Veja o teoremka 5.6 em [8].

□

A seguir, enunciaremos uma versão (suficientemente geral para o uso nesta dissertação) do lema de Schur.

Lema 1.6.4 (de Schur)**.** *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie sobre um corpo algebricamente fechado $\mathbb{K}$ e $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ uma representação irredutível com $\dim V < \infty$. Se $T \in \mathfrak{gl}(V)$ é tal que*

$$0 = [T, \rho(X)] = T \circ \rho(X) - \rho(X) \circ T,$$

para todo $X \in \mathfrak{g}$, então

$$T = \lambda I_V,$$

para algum $\lambda \in \mathbb{K}$.

Demonstração:
Veja a proposição 1.8 em [8].

□

Estabeleceremos agora alguns resultados sobre a classificação das representações irredutíveis de álgebras de Lie sobre corpos algebricamente fechados.

Definição 1.6.5 (Isomorfismo de Representações)**.** *Sejam* $\rho_1 : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V_1)$ *e* $\rho_2 : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V_2)$ *representações de uma álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$*. Dizemos que* ρ_1 *e* ρ_2 *são isomorfas se existir uma transformação linear* $T : V_1 \to V_2$ *tal que o diagrama*

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "\rho_1(X)"] \arrow[d, "T"'] & V_1 \arrow[d, "T"] \\ V_2 \arrow[r, "\rho_2(X)"'] & V_2 \end{tikzcd}$$

é comutativo para todo $X \in \mathfrak{g}$*. Denotamos essa relação por* $\rho_1 \simeq \rho_2$*.*

Até o fim desta seção, $\mathfrak{g}$ denotará uma álgebra de Lie semissimples sobre um corpo algebricamente fechado de caracterísctica nula $\mathbb{K}$, $\mathfrak{h}$ uma subálgebra de Cartan, Π um sistema de raízes com relação a $\mathfrak{h}$ e $\Sigma = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots , \alpha_n\} \subset \Pi$ um sistema simples e Π^+ o conjunto da raízes positivas de Π em relação à Σ.

Seja $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ uma representação. Pelo teorema 1.2.22, temos que a restrição $\rho|_{\mathfrak{h}} : \mathfrak{h} \to \mathfrak{gl}(V)$ decompõe V como soma direta de espaços de peso.

Definição 1.6.6 (Peso Máximo de uma Representação de Álgebra de Lie Semissimples)**.** *Seja* $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ *uma representação e* $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ *um peso de* $\rho|_{\mathfrak{h}}$*. Dizemos que* λ *é um peso máximo de* ρ *se* $\lambda + \alpha$ *não é um peso de* $\rho|_{\mathfrak{h}}$ *para todo* $\alpha \in \Sigma$*.*

Teorema 1.6.7. *Seja* $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ *uma representação irredutível com* $\dim V < \infty$*. Então, temos que:*

(i) *ρ possui um único peso máximo $\lambda \in \mathfrak{h}^*$;*

(ii) *Se $\tilde{\rho} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ é uma representação de peso máximo $\tilde{\lambda} \in \mathfrak{h}^*$, temos que temos que $\rho \simeq \tilde{\rho}$ se e somente se $\lambda = \tilde{\lambda}$;*

(iii) *Para toda raíz simples $\alpha \in \Sigma$ temos que*

$$\frac{2\langle \lambda, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}.$$

Demonstração:

Veja os teoremas 11.2 e 11.5 em [8].

□

Para cada $\alpha_i \in \Sigma = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots , \alpha_n\}$, seja $H_{\alpha_i} \in \mathfrak{h}$ tal que $\alpha_i = \langle H_{\alpha_i}, \cdot \rangle$. Como Σ é uma base de $\mathfrak{h}^*$, segue que os elementos

$$H_i := \frac{2H_{\alpha_i}}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle},$$

$i = 1, ..., n$ formam uma base de $\mathfrak{h}$. Esta base, por sua vez, induz uma base Φ de $\mathfrak{h}^*$ formada pelos elementos $\lambda_i \in \mathfrak{h}^*$ dados por

$$\lambda_i(H_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j; \\ 0 & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Definição 1.6.8 (Representações e Pesos Fundamentais)**.** *Dizemos que os elementos da base Φ de $\mathfrak{h}^*$ (veja os comentários acima), dual à base $\{H_1, \ldots, H_n\}$, são pesos fundamentais de $\mathfrak{g}$ em relação a Σ. Se $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ é uma representação cujo peso máximo pertencente a Φ, então dizemos que ρ é uma representação fundamental.*

Pelas definições acima, segue que o peso fundamental $\lambda_i \in \Phi$, é descrito na base Σ de $\mathfrak{h}^*$ por

$$\lambda_i = a_{1i}\alpha_1 + a_{2i}\alpha_2 + ...a_{ni}\alpha_n,$$

onde (a_{ji}) é a matriz inversa à matriz de Cartan de $\mathfrak{g}$ em relação a Σ.

Exemplo 1.6.9. *Se $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie do tipo G_2, temos que*

$$\lambda_1 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2$$

e

$$\lambda_2 = \alpha_1 + 2\alpha_2.$$

Assim, segue do teorema 1.6.7 o seguinte corolário:

Corolário 1.6.10. *Se $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ é uma representação de peso máximo λ em relação a Σ, então*

$$\lambda = k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 + ... + k_n\lambda_n$$

para $k_i \in \mathbb{Z}_+$.

A partir de representações irredutíveis $\rho_\lambda : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ e $\rho_\mu : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(W)$ de pesos máximos λ e μ, respectivamente, obtem-se uma representação $\rho_{\lambda+\mu} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V \otimes W)$ pelo processo conhecido como composição de Cartan (veja a seção 11.2 de [8]). Assim, temos que as representações fundamentais descrevem todas as representações irredutíveis de $\mathfrak{g}$.

1.7 Formas Reais

Os resultados das seções anteriores classificam as álgebras de Lie simples complexas. Por sua vez, as álgebras de Lie reais simples se classificam à partir da classificação das álgebras de Lie complexas simples como veremos adiante.

Dada uma álgebra de Lie real $\mathfrak{g}$, podemos definir um colchete de Lie no espaço vetorial $\mathfrak{g}_\mathbb{C} = \mathbb{C} \otimes_\mathbb{R} \mathfrak{g}$ estendendo $\mathbb{C}$-bilinearmente o colchete de Lie de $\mathfrak{g}$. Prova-se (veja a proposição 12.4 em [8]) que a forma de Cartan de $\mathfrak{g}$ é degenerada se e somente se a forma de Cartan de $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ (veja o corolário 1.3.7). Assim, pelo Critério de Cartan (teorema 1.3.6), segue que $\mathfrak{g}$ é semissimples se e somente $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ é semissimples. Além disso, temos que se $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ é simples, então $\mathfrak{g}$ também é simples já que uma decomposição de $\mathfrak{g}$ como soma direta de ideais simples induz uma decomposição de $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ como soma de ideais. Com isso, concluimos que toda álgebra de Lie real simples está contida em uma álgebra de Lie simples complexa como subespaço real fechado pelo colchete de Lie (desta álgebra complexa). Portanto, para classificarmos as álgebras de Lie reais simples $\mathfrak{g}$ basta estudarmos as formas de reobter $\mathfrak{g}$ a partir de $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$.

Definição 1.7.1 (Conjugação)**.** *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie sobre $\mathbb{C}$. Dizemos que uma aplicação $\sigma : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ é uma conjugação de $\mathfrak{g}$ se satisfaz:*

(i) $\sigma(zX + Y) = \overline{z}\sigma(X) + \sigma(Y)$, *para todos $z \in \mathbb{C}$ e X e $Y \in \mathfrak{g}$;*

(ii) $\sigma^2 = I_{\mathfrak{g}}$*;*

(iii) $[\sigma X, \sigma Y] = \sigma[X, Y]$.

Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie real. Definimos um transformação $\mathbb{R}$-linear $\sigma : \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \to \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ por

$$\sigma(X) = X \quad \text{e} \quad \sigma(iX) = -iX,$$

para todo $X \in G$. É fácil verificar que σ é uma conjugação em $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ e que $\mathfrak{g}$ é o subespaço de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ dos pontos fixos por σ.

Consideremos, agora, uma conjugação σ em uma álgebra de Lie complexa $\mathfrak{g}$. Por (i) e (ii) na definição acima, temos que σ decompõe $\mathfrak{g}$ como uma soma de espaço vetoriais reais $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_{-1}$, onde $\mathfrak{g}_1$ é o autoespaço relativo autovalor 1 de σ e $\mathfrak{g}_{-1}$ é o auto-espaço generalizado relativo ao auto-valor -1 de σ. Por (i), temos que $\mathfrak{g}_{-1} = i\mathfrak{g}_1$. Assim, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus i\mathfrak{g}_1$. Ou seja, a complexificação de $\mathfrak{g}_1$ é todo espaço $\mathfrak{g}$. Por fim, (iii) implica que $\mathfrak{g}_1$ é uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$.

Com isso, concluímos que as álgebras de Lie reais simples cuja complexificação é a álgebra de Lie $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ (para uma álgebra de Lie complexa $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ fixada) estão em correspondência biunívoca com as conjugações de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$.

Definição 1.7.2 (Forma Real)**.** *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie complexa. Dizemos que um subespaço real $\mathfrak{g}_1$ de $\mathfrak{g}$ é uma forma real de $\mathfrak{g}$ se $\mathfrak{g}_1$ é o conjunto dos pontos fixos de uma conjugação σ em $\mathfrak{g}$. Neste caso, dizemos que σ é a conjugação de $\mathfrak{g}_1$ em $\mathfrak{g}$.*

A utilização de conjugações para o estudo de álgebras de Lie reais se deve em grande parte ao próximo resultado que permite relacionar duas formas reais.

Proposição 1.7.3. *Sejam $\mathfrak{g}_1$ e $\mathfrak{g}_2$ formas reais de uma álgebra de Lie complexa $\mathfrak{g}$ com conjugações σ_1 e σ_2, respectivamente, tais que $\sigma_1\sigma_2 = \sigma_2\sigma_1$. Então,*

$$\mathfrak{g}_1 = (\mathfrak{g}_1 \cap \mathfrak{g}_2) \oplus (\mathfrak{g}_1 \cap i\mathfrak{g}_2).$$

Demonstração:

Veja a proposição 12.15 em [8].

□

Como veremos adiante, existe uma classe de formas reais que realiza, de certa forma, as condições para a utilização da proposição anterior.

Definição 1.7.4 (forma real compacta)**.** *Seja $\mathfrak{g}_0$ uma forma real da álgebra de Lie complexa $\mathfrak{g}$. Dizemos que $\mathfrak{g}_0$ é uma forma real compacta de $\mathfrak{g}$ se a forma de Cartan-Killing em $\mathfrak{g}_0$ é negativa definida.*

A nomenclatura acima se justifica pelo seguinte resultado:

Teorema 1.7.5. *Seja G um grupo de Lie. Então, a forma de Cartan-Killing de* $\mathrm{Lie}(G)$ *é negativa definida se e somente se G é compacto.*

Demonstração:
Veja a proposição 10.5 em [9].

□

Teorema 1.7.6. *Toda álgebra de Lie complexa semissimples admite uma forma real compacta. Esta por sua vez é única, a menos de automorfismos de $\mathfrak{g}$.*

Demonstração:
Veja o teorema 12.13 em [8].

□

Proposição 1.7.7. *Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie complexa semissimples e $\mathfrak{g}_0$ uma forma real de $\mathfrak{g}$. Então existe uma forma real compacta $\mathfrak{u}$ em $\mathfrak{g}$ tal que*

$$\mathfrak{g}_0 = (\mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{u}) \oplus (\mathfrak{g}_0 \cap i\mathfrak{u}).$$

Demonstração:
Veja os teoremas 12.13 e 12.18 em [8].

□

Em vista da proposição anterior, temos a seguinte definição:

Definição 1.7.8 (decomposição de Cartan)**.** *Seja $\mathfrak{g}_0$ uma forma real de uma álgebra de Lie complexa $\mathfrak{g}$ com conjugação σ. Dada uma forma real compacta $\mathfrak{u}$ de $\mathfrak{g}$ com conjugação τ tal que $\sigma\tau = \tau\sigma$, chamamos a decomposição*

$$\mathfrak{g}_0 = (\mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{u}) \oplus (\mathfrak{g}_0 \cap i\mathfrak{u})$$

de decomposição de Cartan. Além disso, chamamos a subálgebra $\mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{u}$ de componente compacta de $\mathfrak{g}_0$ pela decomposição por $\mathfrak{u}$.

A decomposição de Cartan é o ponto de partida para se estudar as formas reais de uma álgebra de Lie semissimples, por meio de automorfismos da mesma, culminando com classificação das álgebras de Lie reais. Para mais detalhes, veja [8].

Por fim, destacamos mais uma classe de formas reais que existem em qualquer álgebra de Lie simples complexa.

Definição 1.7.9 (forma real normal)**.** *Seja $\mathfrak{g}_0$ uma forma real da álgebra de Lie complexa semissimples $\mathfrak{g}$. Dizemos que $\mathfrak{g}_0$ é uma forma real normal se, para alguma forma real compacta $\mathfrak{u}$ de $\mathfrak{g}$, temos que $\mathfrak{g}_0 \cap i\mathfrak{u}$ contém uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}_0$.*

Proposição 1.7.10. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie semissimples complexa. Existe em $\mathfrak{g}$ uma forma real normal.*

Demonstração:
Veja a proposição 12.29 em [8].

□

Capítulo 2

Álgebras Normadas

Neste capítulo, introduziremos as álgebras normadas e desenvolveremos alguns resultados utilizados nos próximos capítulos. Em especial, classificaremos as álgebras normadas reais.

A maioria das definições e demonstrações a seguir são baseadas em [1], [7] e [10].

Neste capítulo, $\mathbb{K}$ denota um corpo de característica diferente de 2.

2.1 Introdução às Álgebras Normadas

Definição 2.1.1 (Forma Quadrática)**.** *Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Dizemos que $N : V \to \mathbb{K}$ é uma forma quadrática em V quando*

(i) Para todo $t \in \mathbb{K}$ e $x \in V$, temos que $N(tx) = t^2 N(x)$;

(ii) A aplicação $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$, definida por

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{2}(N(x+y) - N(x) - N(y)), \tag{2.1}$$

para todos x e $y \in V$, é bilinear.

Neste caso, dizemos também que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é a forma bilinear associada a N. Além disso, se N é uma forma quadrática, dizemos que N é degenerada se existe $v \in V$ tal que $\langle v, w \rangle = 0$, para todo $w \in V$.

Fica claro na definição acima que (2.1) define uma forma bilinear simétrica. Além disso, de (i) e (ii), segue que

$$\langle x, x \rangle = \frac{1}{2}(N(2x) - 2N(x)) = \frac{1}{2}(4N(x) - 2N(x)) = N(x),$$

para todo $x \in V$.

Notação 2.1.2. *Seja V um espaço vetorial com uma forma bilinear $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Para todo subconjunto C de V denotamos*

$$C^{\perp} := \{x \in \mathcal{V}; \quad \langle x, y \rangle = 0 \text{ para todo } y \in C\}.$$

Além disso, denotamos a relação $C' \subset C^{\perp}$ por $C' \perp C$.

Definição 2.1.3 (Álgebra)**.** *Dizemos que o espaço vetorial $\mathcal{A}$ sobre $\mathbb{K}$ munida de uma multiplicação $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ é uma álgebra se:*

(i) A multiplicação em $\mathcal{A}$ é multilinear: $x(y + \lambda z) = xy + \lambda xz$ e $(x + \lambda y)z = xz + \lambda yz$, para todos x, y e $z \in \mathcal{A}$ e $\lambda \in \mathbb{K}$;

(ii) Existe um elemento neutro multiplicativo $1 \in \mathcal{A}$: $1x = x1 = x$ para todo $x \in \mathcal{A}$.

Além disso, dizemos que:

- *$\mathcal{A}$ é comutativa se $xy = yx$ para todos x e $y \in \mathcal{A}$;*
- *$\mathcal{A}$ é associativa se $(xy)z = x(yz)$ para todos x, y e $z \in \mathcal{A}$.*

Definição 2.1.4 (Álgebra Normada)**.** *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra munida de uma forma quadrática $N : \mathcal{A} \to \mathbb{K}$. Dizemos que $\mathcal{A}$ é uma álgebra normada se:*

- *N não é degenerada;*
- *$N(xy) = N(x)N(y)$ para todos $x, y \in \mathcal{A}$.*

Neste caso, dizemos também que (2.1) é a forma bilinear associada à álgebra normada $\mathcal{A}$.

De agora em diante, quando mencionarmos que $\mathcal{A}$ é uma álgebra normada, a menos que se adote explicitamente outra notação, denotaremos por N sua forma quadrática.

Exemplo 2.1.5. *Tomando $\mathbb{K}$ como sendo um espaço vetorial sobre si mesmo e o produto em $\mathbb{K}$ como sendo a própria multiplicação de $\mathbb{K}$ como corpo, temos que a forma quadrática $N : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, dada por $N(x) = x^2$, faz de $\mathbb{K}$ uma álgebra normada.*

Nas próximas seções, veremos que uma álgebra possui no máximo uma forma quadrática que preserva a sua multiplicação. E que, quando existe, a forma quadrática N (como acima) é definida unicamente pela multiplicação de $\mathcal{A}$. Ou seja, podemos nos referir sem ambiguidade somente ao produto ou a forma quadrática de $\mathcal{A}$.

Vamos, agora, estudar alguns resultados que relacionam o produto e a forma bilinear em uma álgebra normada.

Lema 2.1.6. *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra normada. Temos que* *(i) Para todos x_1, x_2, y_1 e $y_2 \in \mathcal{A}$,*

$$\langle x_1y_1, x_2y_2\rangle + \langle x_1y_2, x_2y_1\rangle = 2\langle x_1, x_2\rangle\langle y_1, y_2\rangle; \tag{2.2}$$

(ii) Para todos x e $y \in \mathcal{A}$,

$$xy + yx - 2\langle x, 1\rangle y - 2\langle y, 1\rangle x + 2\langle x, y\rangle 1 = 0; \tag{2.3}$$

(iii) $N(1) = 1$.

Demonstração:

Provaremos as três igualdades em 5 passos:

(I) $\langle x_1y, x_2y\rangle = 2\langle x_1, x_2\rangle\langle y, y\rangle$, para todos x_1, x_2 e $y \in \mathcal{A}$:

Temos que

$$\begin{aligned} N(x_1y + x_2y) &= N(x_1y) + N(x_2y) + 2\langle x_1y, x_2y\rangle \\ &= N(x_1)N(y) + N(x_2)N(y) + 2\langle x_1y, x_2y\rangle \end{aligned}$$

e, por outro lado,

$$\begin{aligned} N(x_1y + x_2y) &= N(x_1 + x_2)N(y) \\ &= (N(x_1) + N(x_2) + 2\langle x_1, x_2\rangle)N(y) \\ &= N(x_1)N(y) + N(x_2)N(y) + 2\langle x_1, x_2\rangle N(y). \end{aligned}$$

Donde conclui-se que

$$\langle x_1y, x_2y\rangle = \langle x_1, x_2\rangle N(y) = \langle x_1, x_2\rangle\langle y, y\rangle.$$

(II) $\langle x_1y_1, x_2y_2\rangle + \langle x_1y_2, x_2y_1\rangle = 2\langle x_1, x_2\rangle\langle y_1, y_2\rangle$, para todos x_1, x_2, y_1 e $y_2 \in \mathcal{A}$:

Pela distributividade em $\mathcal{A}$ e a bilinearidade de $\langle\cdot,\cdot\rangle$, temos que

$$\begin{aligned} \langle x_1(y_1 + y_2), x_2(y_1 + y_2)\rangle &= \langle x_1y_1, x_2y_1\rangle + \langle x_1y_1, x_2y_2\rangle \\ &\quad + \langle x_1y_2, x_2y_1\rangle + \langle x_1y_2, x_2y_2\rangle. \end{aligned}$$

Por outro lado, pelo passo (I),

$$\begin{aligned} \langle x_1(y_1 + y_2), x_2(y_1 + y_2)\rangle &= \langle x_1, x_2\rangle\langle y_1 + y_2, y_1 + y_2\rangle \\ &= \langle x_1, x_2\rangle(\langle y_1, y_1\rangle + 2\langle y_1, y_2\rangle + \langle y_2, y_2\rangle) \\ &= \langle x_1, x_2\rangle\langle y_1, y_1\rangle + \langle x_1, x_2\rangle\langle y_2, y_2\rangle \\ &\quad + 2\langle x_1, x_2\rangle\langle y_1, y_2\rangle \\ &= \langle x_1y_1, x_2y_1\rangle + \langle x_1y_2, x_2y_2\rangle + 2\langle x_1, x_2\rangle\langle y_1, y_2\rangle. \end{aligned}$$

Assim, pelas duas últimas igualdades, temos que

$$\langle x_1y_1, x_2y_2\rangle + \langle x_1y_2, x_2y_1\rangle = 2\langle x_1, x_2\rangle\langle y_1, y_2\rangle.$$

(III) $x^2 - 2\langle x, 1\rangle x + \langle x, x\rangle 1 = 0$, para todos $x \in \mathcal{A}$:

Na igualdade (II) temos:
- para $x_1 = x_2 = x$, $y_1 = 1$ e $y_2 = y$:

$$\langle x, xy\rangle + \langle xy, x\rangle = 2\langle x, x\rangle\langle 1, y\rangle$$

e, consequentemente,

$$\langle xy, x\rangle = \langle x, x\rangle\langle 1, y\rangle.$$

- para $x_1 = y_1 = x$, $x_2 = 1$ e $y_2 = y$:

$$\langle x^2, y\rangle + \langle xy, x\rangle = 2\langle x, 1\rangle\langle x, y\rangle.$$

Assim, para $y \in \mathcal{A}$ arbitrário, temos que

$$\begin{aligned}\langle x^2 - 2\langle x, 1\rangle x + \langle x, x\rangle 1, y\rangle &= \langle x^2, y\rangle - 2\langle x, 1\rangle\langle x, y\rangle + \langle x, x\rangle\langle 1, y\rangle \\ &= \langle x^2, y\rangle - 2\langle x, 1\rangle\langle x, y\rangle + \langle xy, x\rangle \\ &= 0\end{aligned}$$

E, como $\langle\cdot,\cdot\rangle$ é não degenerada, devemos ter que

$$x^2 - 2\langle x, 1\rangle x + \langle x, x\rangle 1 = 0.$$

(IV) $xy + yx - 2\langle x, 1\rangle y - 2\langle y, 1\rangle x + 2\langle x, y\rangle 1 = 0$, para todos x e $y \in \mathcal{A}$:

Pelo passo (III) temos que

$$\begin{aligned}0 &= (x+y)^2 - 2\langle x+y, 1\rangle(x+y) + \langle x+y, x+y\rangle 1 \\ &= x^2 - 2\langle x, 1\rangle x + \langle x, x\rangle 1 \\ &\quad + y^2 - 2\langle y, 1\rangle y + \langle y, y\rangle 1 \\ &\quad + xy + yx - 2\langle x, 1\rangle y - 2\langle y, 1\rangle x + 2\langle x, y\rangle 1 \\ &= xy + yx - 2\langle x, 1\rangle y - 2\langle y, 1\rangle x + 2\langle x, y\rangle 1.\end{aligned}$$

(V) $N(1) = 1$

Por (IV) temos que $1 = N(1)1$ em $\mathcal{A}$. Logo, $N(1) = 1$ em $\mathbb{K}$.

□

Definição 2.1.7. *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra normada. Denotamos por* $\mathrm{Im}(\mathcal{A})$ *o subespaço $1^\perp$ dos elementos ortogonais a 1 em $\mathcal{A}$. Os elementos de* $\mathrm{Im}(\mathcal{A})$ *são chamados de puramente imaginários.*

Segue da igualdade (2.3) do lema anterior que:

Corolário 2.1.8. *Sejam x e $y \in Im(\mathcal{A})$. Se $x \perp y$ então $xy = -yx$.*

Definição 2.1.9 (Conjugação de uma Álgebra Normada)**.** *Definimos uma conjugação $- : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ por*

$$\overline{x} = 2\langle x, 1\rangle 1 - x.$$

Ou seja, $-\overline{x}$ é a reflexão ortogonal de x em relação ao hiperplano $\mathrm{Im}(\mathcal{A})$*.*

Veremos adiante alguns resultados que relacionam o produto e a conjugação de uma álgebra normada.

Lema 2.1.10. *Para todos x, y e $z \in \mathcal{A}$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ temos que:*

(i) $\overline{xy} = \overline{y}\,\overline{x}$;

(ii) $\overline{x + \lambda y} = \overline{x} + \lambda\overline{y}$;

(iii) $\overline{\overline{x}} = x$;

(iv) $\langle x, y\rangle = \langle \overline{x}, \overline{y}\rangle$;

(v) $\langle xy, z\rangle = \langle y, \overline{x}z\rangle = \langle x, z\overline{y}\rangle$;

(vi) $(x\overline{y})y = N(y)x$;

(vii) $x(\overline{x}y) = N(x)y$.

Demonstração:

(i) $\overline{xy} = \overline{y}\,\overline{x}$:

Usando as equações (2.2) e (2.3) temos que

$$\begin{array}{rcll} \overline{y}\,\overline{x} & = & (2\langle y,1\rangle 1 - y)(2\langle x,1\rangle 1 - x) & \\ & = & 4\langle x,1\rangle\langle y,1\rangle 1 - 2\langle x,1\rangle y - 2\langle y,1\rangle x + yx & \\ & = & 4\langle x,1\rangle\langle y,1\rangle 1 - xy - 2\langle x,y\rangle 1 & \text{(por (2.3))} \\ & = & 2\langle xy,1\rangle 1 + 2\langle x,y\rangle 1 - xy - 2\langle x,y\rangle 1 & \text{(por (2.2))} \\ & = & 2\langle xy,1\rangle 1 - xy & \\ & = & \overline{xy}. & \end{array}$$

(ii) $\overline{x + y} = \overline{x} + \overline{y}$; (iii) $\overline{\overline{x}} = x$; (iv) $\langle x, y\rangle = \langle \overline{x}, \overline{y}\rangle$:

Os itens (ii), (iii) e (iv) verificam-se diretamente utilizando-se a definição da conjugação $-$.

(v) $\langle xy, z\rangle = \langle y, \overline{x}z\rangle = \langle x, z\overline{y}\rangle$:

Temos que

$$\begin{array}{rcll} \langle y, \overline{x}z\rangle & = & \langle y, (2\langle x,1\rangle 1 - x)z\rangle & \\ & = & 2\langle x,1\rangle\langle y,z\rangle - \langle y, xz\rangle & \\ & = & \langle xy, z\rangle + \langle xz, y\rangle - \langle y, xz\rangle & \text{(por (2.2))} \\ & = & \langle xy, z\rangle. & \end{array}$$

Assim, obtivemos a primeira igualdade.

A segunda pode ser obtida através da primeira por

$$\begin{array}{rcll} \langle y, \overline{x}z\rangle & = & \langle \overline{y}, \overline{z}x\rangle & \text{(por (i) e (iv))} \\ & = & \langle z\overline{y}, x\rangle & \text{(pela primeira igualdade)} \\ & = & \langle x, z\overline{y}\rangle. & \end{array}$$

(vi) $(x\overline{y})y = N(y)x$.

Seja $w \in \mathcal{A}$ arbitrário. Temos que

$$\begin{array}{rcll} \langle (x\overline{y})y, w\rangle & = & \langle x\overline{y}, w\overline{y}\rangle & \text{(por (v))} \\ & = & \langle x, w\rangle\langle \overline{y}, \overline{y}\rangle & \text{(por (2.2))} \\ & = & N(\overline{y})\langle x, w\rangle & \\ & = & \langle N(y)x, w\rangle. & \text{(por (iv))} \end{array}$$

Assim, como $\langle\cdot,\cdot\rangle$ não é degenerada, temos o resultado.

(vii) $x(\overline{x}y) = N(x)y$

Temos que

$$\begin{array}{rcll} N(x)y & = & N(\overline{x})\overline{\overline{y}} = \overline{N(\overline{x})\overline{y}} & \text{(por (ii), (iii) e (iv))} \\ & = & \overline{(\overline{y}\ \overline{\overline{x}})\overline{x}} = \overline{(\overline{y}x)\overline{x}} & \text{(por (vi) e (ii))} \\ & = & \overline{\overline{x}}\ \overline{(\overline{y}x)} = x(\overline{x}y). & \text{(por (i) e (ii))} \end{array}$$

□

Criaremos, com a próxima definição, uma noção categórica para as álgebras normadas.

Definição 2.1.11. *Sejam $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ álgebras normadas cujas formas quadráticas são N_1 e N_2, formas bilineares $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ e $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$, respectivamente, e $\varphi : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ uma aplicação linear. Dizemos que:*

- *φ é uma transformação ortogonal se $N_2 \circ \varphi = N_1$ (ou, equivalentemente, $\langle\varphi(x), \varphi(y)\rangle_2 = \langle x, y\rangle_1$ para todo x e $y \in \mathcal{A}_1$);*
- *φ é um homomorfismo de álgebras normadas se φ é uma transformação ortogonal que preserva o produto de $\mathcal{A}_1$ (isto é, $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$, para todos x e $y \in \mathcal{A}_1$);*
- *φ é um isomorfismo de álgebras normadas se φ é um homomorfismo de álgebras normadas bijetivo;*
- *φ é um automorfismo de álgebras normadas se φ é um isomorfismo de álgebras normadas e $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$.*

Denotamos por $\mathcal{A}_1 \simeq \mathcal{A}_2$ a existência de um isomorfismo de álgebras normadas $\mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$.

Lema 2.1.12. *Sejam $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ álgebras normadas com formas bilineares $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ e $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$ e $\varphi : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ um homomorfismo de álgebras normadas. Então:*

(i) $\varphi(1) = 1$;

(ii) $\langle\varphi(x), \varphi(y)\rangle_2 = \langle x, y\rangle_1$ *para todos* x *e* $y \in \mathcal{A}_1$;

(iii) $\varphi(\overline{x}) = \overline{\varphi(x)}$ *para todo* $x \in \mathcal{A}_1$.

Demonstração:

Denotemos por N_1 e N_2 as formas quadráticas em $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$, respectivamente.

(i)

Temos que

$$\begin{array}{rcll} 1 & = & N_1(1)1 & \text{(pelo item (iii) do lema 2.1.6)} \\ & = & N_2(\varphi(1))1 & \\ & = & \varphi(1)(\overline{\varphi(1)}1) & \text{(pelo item (vii) do lema 2.1.10)} \\ & = & \varphi(1 \cdot 1)\overline{\varphi(1)} & \\ & = & (\varphi(1)\varphi(1))\overline{\varphi(1)} & \\ & = & \big(\varphi(1)\overline{\overline{\varphi(1)}}\big)\overline{\varphi(1)} & \text{(pelo item (iii) do lema 2.1.10)} \\ & = & N_2(\overline{\varphi(1)})\varphi(1) & \text{(pelo item (vi) do lema 2.1.10)} \\ & = & N_2(\varphi(1))\varphi(1) & \text{(pelo item (iv) do lema 2.1.10)} \\ & = & N_1(1)\varphi(1) & \\ & = & \varphi(1). & \text{(pelo item (iii) do lema 2.1.6)} \end{array}$$

(ii)

Sejam x e $y \in \mathcal{A}_1$. Temos que

$$\begin{array}{rcl} \langle x,x\rangle_1 + 2\langle x,y\rangle_1 + \langle y,y\rangle_1 & = & \langle x+y, x+y\rangle_1 \\ & = & N_1(x+y) \\ & = & N_2 \circ \varphi(x+y) \\ & = & \langle \varphi(x)+\varphi(y), \varphi(x)+\varphi(y)\rangle_2 \\ & = & \langle \varphi(x), \varphi(x)\rangle_2 + 2\langle \varphi(x), \varphi(y)\rangle_2 + \langle \varphi(y), \varphi(y)\rangle_2 \end{array}$$

e, analogamente,

$$\begin{array}{rcl} \langle x,x\rangle_1 - 2\langle x,y\rangle_1 + \langle y,y\rangle_1 & = & \langle x-y, x-y\rangle_1 \\ & = & N_1(x-y) \\ & = & N_2 \circ \varphi(x-y) \\ & = & \langle \varphi(x)-\varphi(y), \varphi(x)-\varphi(y)\rangle_2 \\ & = & \langle \varphi(x), \varphi(x)\rangle_2 - 2\langle \varphi(x), \varphi(y)\rangle_2 + \langle \varphi(y), \varphi(y)\rangle_2. \end{array}$$

Assim, subtraindo a segunda da primeira igualdade, concluímos que

$$\langle x,y\rangle_1 = \langle \varphi(x), \varphi(y)\rangle_2.$$

(iii)

Seja $x \in \mathcal{A}_1$. Temos, pelos itens (i) e (ii), que

$$\begin{aligned}
\varphi(\overline{x}) &= \varphi(2\langle 1, x\rangle_1 1 - x) \\
&= 2\langle 1, x\rangle_1 \varphi(1) - \varphi(x) \\
&= 2\langle 1, \varphi(x)\rangle_2 1 - \varphi(x) \\
&= \overline{\varphi(x)}.
\end{aligned}$$

□

Proposição 2.1.13. *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra normada de dimensão 1. Então, $\mathcal{A}$ é isomorfa, como álgebra normada, a $\mathbb{K}$.*

Demonstração:

Pelo lema 2.1.6, temos que $N(1) = 1$. E, como $\dim\mathcal{A} = 1$, temos que $\mathcal{A} = \mathbb{K}1$ e, consequentemente, N é dada por

$$N(t1) = \langle t1, t1\rangle = t^2\langle 1, 1\rangle = t^2 N(1) = t^2,$$

para todo $t\mathbb{K}$. Assim, o isomorfismo linear

$$t1 \in \mathcal{A} = \mathbb{K}1 \to t \in \mathbb{K}$$

preserva o produto e a forma quadrática de $\mathcal{A}$. Portanto, $\mathcal{A}$ é isomorfo a $\mathbb{K}$.

□

2.2 Alternatividade das Álgebras Normadas e a Unicidade de Suas Estruturas

Como veremos adiante, nem todas as álgebras normadas são associativas. Porém, temos que estas satisfazem uma outra condição que substitui a associatividade em algumas situações.

Definição 2.2.1. *Uma álgebra $\mathcal{A}$ é dita alternativa se, para cada x e $y \in \mathcal{A}$, valem as igualdades:*

$$(xy)x = x(yx),$$

$$x(xy) = x^2 y$$

e

$$(xy)y = xy^2.$$

Teorema 2.2.2. *Toda álgebra normada é alternativa.*

Demonstração:

- $(xy)x = x(yx)$:

Seja $z \in \mathcal{A}$. Temos que

$$\begin{array}{rcll} \langle (xy)x, z\rangle & = & \langle x, (\overline{y}\ \overline{x})z\rangle & \text{(por 2.1.10(i) e (v))} \\ & = & 2\langle 1, \overline{y}\ \overline{x}\rangle\langle x, z\rangle - \langle z, (\overline{y}\ \overline{x})x\rangle & \text{(pelo lema 2.1.6(i))} \\ & = & 2\langle y, \overline{x}\rangle\langle x, z\rangle - N(x)\langle z, \overline{y}\rangle. & \text{(por 2.1.10(v) e (vi))} \end{array}$$

E, por outro lado,

$$\begin{array}{rcll} \langle x(yx), z\rangle & = & \langle yx, \overline{x}z\rangle & \text{(por 2.1.10(v))} \\ & = & 2\langle y, \overline{x}\rangle\langle x, z\rangle - \langle yz, \overline{x}x\rangle & \text{(pelo lema 2.1.6(i))} \\ & = & 2\langle y, \overline{x}\rangle\langle x, z\rangle - N(x)\langle yz, 1\rangle & \text{(por 2.1.10(vii))} \\ & = & 2\langle y, \overline{x}\rangle\langle x, z\rangle - N(x)\langle z, \overline{y}\rangle. & \text{(por 2.1.10(v))} \end{array}$$

Assim,

$$\langle (xy)x, z\rangle = \langle x(yx), z\rangle.$$

Como $\langle \cdot, \cdot\rangle$ não é degenerada e $z \in \mathcal{A}$ é arbitrário, temos que $(xy)x = x(yx)$.

- $x(xy) = x^2y$:

Temos que

$$\begin{array}{rcl} x(\overline{x}y) & = & x((2\langle x, 1\rangle 1 - x)y) \\ & = & x(2\langle x, 1\rangle y - xy) \\ & = & 2\langle x, 1\rangle xy - x(xy). \end{array}$$

E, por outro lado, pelo item (vii) do lema 2.1.10, temos que

$$\begin{array}{rcl} x(\overline{x}y) & = & N(x)y \\ & = & (N(x)1)y \\ & = & (x\overline{x})y \\ & = & (x(2\langle x, 1\rangle 1 - x))y \\ & = & (2\langle x, 1\rangle x - x^2)y \\ & = & 2\langle x, 1\rangle xy - x^2y. \end{array}$$

Assim, das igualdades acima, concluímos que

$$x(xy) = 2\langle x, 1\rangle xy - x(\overline{x}y) = x^2y.$$

- $(xy)y = xy^2$:

Prova-se de modo análogo à anterior usando-se a igualdade

$$(x\overline{y})y = N(y)x = x(\overline{y}y)$$

dada por 2.1.10(vii).

□

A alternatividade em álgebras normadas nos fornece o próximo teorema. Nos próximos capítulos, a alternatividade das álgebras normadas de dimensão 8 será utilizada para estudarmos os automorfismos destas.

Consideremos as aplicações de multiplicação à esquerda em $\mathcal{A}$ definidas por

$$\begin{array}{rccc} E_x: & \mathcal{A} & \to & \mathcal{A} \\ & y & \to & xy, \end{array}$$

para cada $x \in \mathcal{A}$. Segue da distributividade da multiplicação em $\mathcal{A}$ que cada E_x é uma transformação linear. O próximo teorema nos diz que para cada $x \in \mathcal{A}$, $N(x)$ é determinado unicamente por E_x.

Lema 2.2.3. *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra normada com forma quadrática N e $x \in \mathcal{A}\backslash\mathbb{K}1$. Então, o polinômio minimal m_x de E_x é dado por*

$$m_x(t) = t^2 - 2\langle x, 1\rangle t + N(x).$$

Demonstração:

Primeiramente, temos que m_x possui grau maior que 1. De fato, se m_x é de grau 1, então $E_x = \lambda I_{\mathcal{A}}$, para algum $\lambda \in \mathbb{K}$. Assim,

$$\lambda 1 = E_x 1 = x1 = x.$$

Contradizendo o fato de $x \in \mathcal{A}\backslash\mathbb{K}1$.

Pelo item (ii) do lema 2.1.6, temos que

$$x^2 - 2\langle x, 1\rangle x + N(x)1 = 0.$$

Assim, para todo $y \in \mathcal{A}$, temos que

$$\begin{array}{rcl} (E_x^2 - 2\langle x, 1\rangle E_x + N(x)I_{\mathcal{A}})y & = & E_x^2 y - 2\langle x, 1\rangle E_x y + N(x)y \\ & = & x(xy) - 2\langle x, 1\rangle xy + N(x)y \\ & = & x^2 y - 2\langle x, 1\rangle xy + N(x)y \\ & = & (x^2 - 2\langle x, 1\rangle x + N(x))y \\ & = & 0. \end{array}$$

Logo,

$$E_x^2 - 2\langle x, 1\rangle E_x + N(x)I_{\mathcal{A}} = 0.$$

Daí, como m_x tem grau maior que 1, devemos ter que

$$m_x(t) = t^2 - 2\langle x, 1\rangle t + N(x).$$

$\square$

Teorema 2.2.4. *Sejam $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ álgebras normadas e $\varphi : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ um isomorfismo linear que preserva o produto de $\mathcal{A}$ (i.e. $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$, para todos x e $y \in \mathcal{A}_1$). Então, φ é um isomorfismo de álgebras normadas (i.e. φ também preserva a norma de $\mathcal{A}$).*

Demonstração:

Sejam N_1 e N_2 as formas quadráticas de $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$, respectivamente. Devemos mostrar que $N_1 = N_2 \circ \varphi$.

Primeiramente, temos que $\varphi(1) = 1$. De fato, para todo $y = \varphi(x) \in \mathcal{A}_2$, temos que

$$\varphi(1)y = \varphi(1)\varphi(x) = \varphi(x) = y$$

e

$$y\varphi(1) = \varphi(x)\varphi(1) = \varphi(x) = y.$$

Logo, pela unicidade do elemento neutro, devemos ter que $\varphi(1) = 1$.

Como φ é linear, segue que

$$\varphi(\lambda 1) = \lambda 1,$$

para todo λ. Logo, como $N_1(1) = N_2(1) = 1$ (veja o lema 2.1.6), temos que

$$N_2 \circ \varphi(\lambda 1) = N_2(\lambda 1) = \lambda^2 = N_1(\lambda 1).$$

Portanto, nos resta provar que $N_1(x) = N_2 \circ \varphi(x)$ para todo $x \in \mathcal{A}_1 \backslash \mathbb{K}1$.

Para todo $x \in \mathcal{A}_1$, temos que

$$E_{\varphi(x)} = \varphi \circ E_x \circ \varphi^{-1}.$$

De fato, dado $z = \varphi(y) \in \mathcal{A}_2$, temos que

$$\begin{array}{rclcl} E_{\varphi(x)}(z) & = & \varphi(x)\varphi(y) & = & \varphi(xy) \\ & = & \varphi \circ E_x(y) & = & \varphi \circ E_x \circ \varphi^{-1}(z). \end{array}$$

Seja $x \in \mathcal{A}_1 \backslash \mathbb{K}1$. Temos que $\varphi(x) \in \mathcal{A}_2 \backslash \mathbb{K}1$ pois, como vimos acima, $\varphi^{-1}(\mathbb{K}1) = \mathbb{K}1$. Assim, pelo lema 2.2.3, temos que o polinômio minimal m_x de E_x é dado por

$$m_x(t) = t^2 - 2\langle x, 1\rangle t + N_1(x)$$

e o polinomio minimal $m_{\varphi(x)}$ de $E_{\varphi(x)}$ por

$$m_{\varphi(x)}(t) = t^2 - 2\langle \varphi(x), 1\rangle t + N_2(\varphi(x)).$$

Como $E_{\varphi(x)} = \varphi \circ E_x \circ \varphi^{-1}$, segue que $m_x = m_{\varphi(x)}$ e, consequentemente,

$$N_1(x) = N_2 \circ \varphi(x).$$

Como queríamos demonstrar.

$\square$

Corolário 2.2.5. *A forma quadrática de uma álgebra normada é definida unicamente por sua multiplicação. Isto é, se $\mathcal{A}$ é uma álgebra e N_1 e N_2 são formas quadráticas não degeneradas que preservam o produto de $\mathcal{A}$, então $N_1 = N_2$.*

Demonstração:

Como a aplicação identidade é um isomorfismo linear que preserva o produto, segue que esta é um isomorfismo de álgebras normadas. Logo $N_1 = N_2 \circ I_{\mathcal{A}} = N_2$.

$\square$

2.3 O Processo de Cayley-Dickson

Provaremos nesta seção que todas as álgebras normadas tem dimensão 1, 2, 4 ou 8. Mais interessante (e instrutivo) que isso, é o fato de que todas as álgebras normadas podem ser obtidas a partir da álgebra normada 1-dimensional $\mathbb{K}$ por um processo que descreveremos agora.

Introduziremos, agora, o processo de Cayley-Dickson, no qual, à partir de uma álgebra normada associativa $\mathcal{A}$, definiremos uma estrutura de álgebra normada em $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$.

Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra normada sobre $\mathbb{K}$, N sua forma quadrática e $\lambda \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$.

Denotemos os elementos da forma $(x, 0) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}$ por x, os elementos da forma $(0, y) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}$ por yi e consideraremos a soma direta

$$\mathcal{A} \times \mathcal{A} = \mathcal{A} \oplus \mathcal{A}i,$$

onde $\mathcal{A}$ denota o subespaço $\mathcal{A} \times 0$ e $\mathcal{A}i$ denota o subespaço $0 \times \mathcal{A}$.

Com estas identificações, mostraremos que podemos estender o produto em $\mathcal{A}$ a um produto $\star : (\mathcal{A} \oplus \mathcal{A}i) \times (\mathcal{A} \oplus \mathcal{A}i) \to \mathcal{A} \oplus \mathcal{A}i$ definido pelas igualdades

$$x \star yi = yxi = yi \star \overline{x}$$

e

$$xi \star yi = \lambda \overline{y} x,$$

para todos x e $y \in \mathcal{A}$. Ou seja, para $x + yi$ e $z + wi \in \mathcal{A} \oplus \mathcal{A}i$,

$$(x + yi) \star (z + wi) := (xz + \lambda \overline{w} y) + (wx + y\overline{z})i. \tag{2.4}$$

Temos, para $x + yi$, $z_1 + w_1 i$ e $z_2 + w_2 i \in \mathcal{A} \oplus \mathcal{A}i$, que

$$\begin{aligned}
(x + yi) \star \big((z_1 + w_1 i) + (z_2 + w_2 i)\big) &= (x + yi) \star ((z_1 + z_2) + (w_1 + w_2)i) \\
&= \big(x(z_1 + z_2) + \lambda(\overline{w_1} + \overline{w_2})y\big) + \\
&\quad + \big((w_1 + w_2)x + y(\overline{z_1} + \overline{z_2})\big)i \\
&= (xz_1 + \lambda \overline{w_1} y) + (w_1 x + y\overline{z_1})i + \\
&\quad + (xz_2 + \lambda \overline{w_2} y) + (w_2 x + y\overline{z_2})i \\
&= (x + yi) \star (z_1 + w_1 i) + \\
&\quad + (x + yi) \star (z_2 + w_2 i).
\end{aligned}$$

E, de maneira análoga, mostra-se que

$$\begin{aligned}
\big((x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i)\big) \star (z + wi) &= (x_1 + y_1 i) \star (z + wi) + \\
&\quad + (x_2 + y_2 i) \star (z + wi),
\end{aligned}$$

para todos $x_1 + y_1 i$, $x_2 + y_2 i$ e $z + wi \in \mathcal{A} \oplus \mathcal{A}i$. Portanto, $\star$ é uma operação distributiva.

Para $x + yi \in \mathcal{A} \oplus \mathcal{A}i$, temos que

$$1 \star (x + yi) = 1x + yi = x + yi$$

e

$$(x+yi)\star 1 = x1 + yi = x + yi.$$

Portanto, 1 é o elemento neutro da operação $\star$.

Com isso, concluímos que $\star$ fornece uma estrutura de álgebra a $\mathcal{A}\oplus\mathcal{A}i$.

Agora, definiremos uma forma quadrática $\widehat{N}:\mathcal{A}\oplus\mathcal{A}i\to\mathcal{A}\oplus\mathcal{A}i$ por

$$\widehat{N}(x+yi) := N(x) - \lambda N(y), \tag{2.5}$$

para todo $x+yi\in\mathcal{A}\oplus\mathcal{A}i$. Para tanto, mostraremos que a função $\langle\cdot,\cdot\rangle_\lambda : (\mathcal{A}\oplus\mathcal{A}i)\times(\mathcal{A}\oplus\mathcal{A}i)\to\mathbb{K}$ definida por

$$\langle x+yi, z+wi\rangle_\lambda := \frac{1}{2}\big(\widehat{N}(x+yi+z+wi) - \widehat{N}(x+yi) - \widehat{N}(z+wi)\big),$$

para todos $x+yi$ e $z+wi\in\mathcal{A}\oplus\mathcal{A}i$, é bilinear. Para x_1+y_1i, x_2+y_2i e $z+wi\in\mathcal{A}\oplus\mathcal{A}i$ e $t\in\mathbb{K}$, temos que

$$\begin{aligned}
&\langle x_1+y_1i+t(x_2+y_2i), z+wi\rangle_\lambda = \\
&= \tfrac{1}{2}\big(\widehat{N}(x_1+y_1i+t(x_2+y_2i)+z+wi) \\
&\qquad - \widehat{N}(x_1+y_1i+t(x_2+y_2i)) - \widehat{N}(z+wi)\big) \\
&= \tfrac{1}{2}\big(N(x_1+tx_2+z) - \lambda N(y_1+ty_2+w) \\
&\qquad - N(x_1+tx_2) + \lambda N(y_1+ty_2)) - N(z) + \lambda N(w)\big) \\
&= \tfrac{1}{2}\big(N(x_1+tx_2+z) - N(x_1+tx_2) - N(z)\big) \\
&\qquad - \lambda\tfrac{1}{2}\big(N(y_1+ty_2+w) - N(y_1+ty_2) - N(w)\big) \\
&= \langle x_1+tx_2, z\rangle - \lambda\langle y_1+ty_2, w\rangle \\
&= \langle x_1, z\rangle + t\langle x_2, z\rangle - \lambda\langle y_1, w\rangle - t\lambda\langle y_2, w\rangle \\
&= \tfrac{1}{2}\big(N(x_1+z) - N(x_1) - N(z)\big) - \tfrac{\lambda}{2}\big(N(y_1+w) - N(y_1) - N(w)\big) \\
&\quad + \tfrac{t}{2}\big(N(x_2+z) - N(x_2) - N(z)\big) - \tfrac{t\lambda}{2}\big(N(y_2+w) - N(y_2) - N(w)\big) \\
&= \tfrac{1}{2}\big(\widehat{N}(x_1+y_1i+z+wi) - \widehat{N}(x_1+y_1i) - \widehat{N}(z+wi)\big) \\
&\qquad + \tfrac{t}{2}\big(\widehat{N}(x_2+y_2i+z+wi) - \widehat{N}(x_2+y_2i) - \widehat{N}(z+wi)\big) \\
&= \langle x_1+y_1i, z+wi\rangle_\lambda + t\langle x_2+y_2i, z+wi\rangle_\lambda.
\end{aligned}$$

Portanto, $\langle\cdot,\cdot\rangle_\lambda$ é linear na primeira entrada. Como a função $\langle\cdot,\cdot\rangle_\lambda$ é claramente simétrica, segue que esta é bilinear. Logo, $\widehat{N}$ é uma forma quadrática.

Mostremos, agora, que $\widehat{N}$ não é degenerada.

Para $x+yi$ e $z+wi\in\mathcal{A}\oplus\mathcal{A}i$, temos que

$$\begin{aligned}
\langle x+yi, z+wi\rangle_\lambda &= \tfrac{1}{2}\big(\widehat{N}(x+yi+z+wi) - \widehat{N}(x+yi) - \widehat{N}(z+wi)\big) \\
&= \tfrac{1}{2}\big(N(x+z) - \lambda N(y+w) - N(x) + \lambda N(y) \\
&\qquad\qquad - N(z) + \lambda N(w)\big) \\
&= \tfrac{1}{2}\big(N(x+z) - N(x) - N(z)\big) \\
&\qquad\qquad - \lambda\tfrac{1}{2}\big(N(y+w) - N(y) - N(w)\big) \\
&= \langle x, z\rangle - \lambda\langle y, w\rangle.
\end{aligned}$$

Suponhamos que $x+yi\in(\mathcal{A}\oplus\mathcal{A}i)\backslash\{0\}$. Se $x\neq 0$ temos, pelo fato de $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ser não degenerada, que existem z e $w\in\mathcal{A}$ tais que $\langle x,z\rangle\neq 0$, $\langle y,w\rangle = 0$ e, consequentemente,

$$\langle x, z\rangle \neq 0 = \lambda\langle y, w\rangle.$$

Se $y \neq 0$ temos, pelo fato de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ser não degenerada, que existem z e $w \in \mathcal{A}$ tais que $\langle x, z \rangle = 0$, $\langle y, w \rangle \neq 0$ e, consequentemente,

$$\langle x, z \rangle = 0 \neq \lambda \langle y, w \rangle.$$

Portanto, em todo caso, existe $z + wi \in \mathcal{A} \oplus \mathcal{A}i$ tal que

$$\langle x + yi, z + wi \rangle_\lambda = \langle x, z \rangle - \lambda \langle y, w \rangle \neq 0.$$

Ou seja, $\widehat{N}$ não é degenerada.

Definição 2.3.1 (Processo de Cayley-Dickson)**.** *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra normada sobre $\mathbb{K}$ com forma quadrática N e $\lambda \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$. Denotaremos por $\widehat{\mathcal{A}}_\lambda$ a álgebra definida em $\mathcal{A} \times \mathcal{A} = \mathcal{A} \oplus \mathcal{A}i$ munida do produto $\star$ definido (como em (2.4)) por*

$$(x + yi) \star (z + wi) := (xz + \lambda \overline{w} y) + (wx + y\overline{z})i$$

e da forma quadrática $\widehat{N}$ definida (como em (2.5)) por

$$\widehat{N}(x + yi) := N(x) - \lambda N(y).$$

Dizemos que $\widehat{\mathcal{A}}_\lambda$ é a álgebra obtida a partir de $\mathcal{A}$ pelo processo de Cayley-Dickson com constante λ.

Pelo que mostramos acima, temos o resultado.

Lema 2.3.2. *Se $\mathcal{A}$ é uma álgebra normada e $\lambda \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$, então $\widehat{\mathcal{A}}_\lambda$ é uma álgebra e sua forma quadrática $\widehat{N}$ não é degenerada.*

Para não sobrecarregarmos a notação, de agora em diante, denotaremos o produto $(x+yi)\star(z+wi)$ simplesmente por $(x+yi)(z+wi)$. Isto não acarretará em ambiguidade com o produto em $\mathcal{A}$ pois o produto $\star$ restrito a $\mathcal{A}$ é o próprio produto em $\mathcal{A}$. Denotaremos, também, $1i$ por i.

	z	wi
x	xz	$(wx)i$
yi	$(y\overline{z})i$	$\lambda \overline{w} y$

Tabela 2.1: A tabela de multiplicação de $\widehat{\mathcal{A}_\lambda}$ em função da multiplicação entre elementos x, y, z e $w \in \mathcal{A}$.

A próxima proposição nos diz que a forma quadrática da álgebra $\widehat{\mathcal{A}}_\lambda$, obtida a partir de uma álgebra normada $\mathcal{A}$ pelo processo de Cayley-Dickson, preserva o produto em $\widehat{\mathcal{A}}_\lambda$ se e somente se o produto em $\mathcal{A}$ é associativo.

Proposição 2.3.3. *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra normada sobre $\mathbb{K}$ e $\lambda \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$. Temos que:*

(i) $\widehat{\mathcal{A}}_\lambda$ é normada se e somente se $\mathcal{A}$ é associativa;

(ii) $\widehat{\mathcal{A}}_\lambda$ *é normada e associativa se e somente se* $\mathcal{A}$ *é comutativa e associativa;*

(iii) Se $\mathcal{A}_1$ *e* $\mathcal{A}_2$ *são álgebras normadas associativas isomorfas, então as álgebras normadas* $(\widehat{\mathcal{A}_1})_\lambda$ *e* $(\widehat{\mathcal{A}_2})_\lambda$ *são isomorfas.*

Demonstração:

(i) $(\Rightarrow)$

Suponhamos que $\widehat{\mathcal{A}}_\lambda$ seja uma álgebra normada.

Sejam x, y, z e $w \in \mathcal{A}$ arbitrários. Usando o fato de $\mathcal{A}$ ser uma álgebra normada e a definição de $\widehat{\mathcal{A}}_\lambda$

$$\begin{aligned}
\widehat{N}\big((x+\overline{z}i)(y+\overline{w}i)\big) &= \widehat{N}\big((xy+\lambda w\overline{z})+(\overline{w}x+\overline{z}\,\overline{y})i\big)\\
&= N(xy+\lambda w\overline{z})-\lambda N(\overline{w}x+\overline{z}\,\overline{y})\\
&= 2\langle xz,\lambda w\overline{z}\rangle+N(xy)+N(\lambda w\overline{z})\\
&\qquad -2\lambda\langle\overline{w}x,\overline{z}\,\overline{y}\rangle-\lambda N(\overline{w}x)-\lambda N(\overline{z}\,\overline{y})\\
&= 2\lambda\langle xy,w\overline{z}\rangle-2\lambda\langle\overline{w}x,\overline{z}\,\overline{y}\rangle\\
&\qquad +N(x)N(y)+\lambda^2N(\overline{w})N(\overline{z})\\
&\qquad -\lambda N(\overline{w})N(x)-\lambda N(z)N(\overline{y})\\
&= 2\lambda(\langle xy,w\overline{z}\rangle-\langle\overline{w}x,\overline{z}\,\overline{y}\rangle)\\
&\quad +\big(N(x)-\lambda N(\overline{z})\big)\big(N(y)-\lambda N(\overline{w})\big)\\
&= 2\lambda(\langle xy,w\overline{z}\rangle-\langle\overline{w}x,\overline{z}\,\overline{y}\rangle)\\
&\quad +\widehat{N}(x+\overline{z}i)\widehat{N}(y+\overline{w}i).
\end{aligned}$$

Assim, como $\widehat{\mathcal{A}}_\lambda$ é uma álgebra normada, concluímos, da igualdade acima, que

$$\langle xy,w\overline{z}\rangle=\langle\overline{w}x,\overline{z}\,\overline{y}\rangle.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\langle(xy)z,w\rangle &= \langle xy,w\overline{z}\rangle && \text{(pelo item (v) do lema 2.1.10)}\\
&= \langle\overline{w}x,\overline{z}\,\overline{y}\rangle\\
&= \langle\overline{w},(\overline{z}\,\overline{y})\overline{x}\rangle && \text{(pelo item (v) do lema 2.1.10)}\\
&= \langle x(yz),w\rangle. && \text{(pelo item (v) do lema 2.1.10)}
\end{aligned}$$

Como $w\in\mathcal{A}$ é arbitrário, concluímos que

$$(xy)z=x(yz),$$

para todos $x,y,z\in\mathcal{A}$.

(i) $(\Leftarrow)$

Suponhamos que $\mathcal{A}$ seja uma álgebra normada associativa.

Como acima, temos, para todos x, y, z e $w\in\mathcal{A}$, que

$$\begin{aligned}
\widehat{N}\big((x+yi)(z+wi)\big) &= 2\lambda(\langle xz,\overline{w}y\rangle-\langle wx,y\overline{z}\rangle)+\\
&\qquad +\widehat{N}(x+yi)\widehat{N}(z+wi).
\end{aligned}$$

E, como

$$\begin{aligned}\langle xz, \overline{w}y\rangle &= \langle (xz)\overline{y}, \overline{w}\rangle \quad \text{(pelo item (v) do lema 2.1.10)}\\ &= \langle x(z\overline{y}), \overline{w}\rangle\\ &= \langle z\overline{y}, \overline{x}\ \overline{w}\rangle \quad \text{(pelo item (v) do lema 2.1.10)}\\ &= \langle wx, y\overline{z}\rangle, \quad \text{(pelo item (i) do lema 2.1.10)}\end{aligned}$$

temos que

$$\widehat{N}\big((x+yi)(z+wi)\big) = \widehat{N}(x+yi)\widehat{N}(z+wi),$$

para todos x, y, z e $w \in \mathcal{A}$. Portanto, $\widehat{N}$ preserva o produto de $\widehat{\mathcal{A}}_\lambda$.

Assim, pelo lema 2.3.2, temos que $\widehat{\mathcal{A}}_\lambda$ é uma álgebra normada.

(ii) $(\Rightarrow)$

Suponhamos que $\widehat{\mathcal{A}}_\lambda$ é normada e associativa.

Pelo item (i) temos que $\mathcal{A}$ é associativa.

Adiante, dados x e $y \in \mathcal{A}$, usando a associatividade e a definição do produto em $\widehat{\mathcal{A}}_\lambda$ (veja a tabela 2.1), temos que

$$(xy)i = x(yi) = (yx)i.$$

Logo,

$$xy = yx$$

para quaisquer x e $y \in \mathcal{A}$. Portanto, $\mathcal{A}$ é comutativa.

(ii) $(\Leftarrow)$

Pelo item (i) temos que $\widehat{\mathcal{A}}_\lambda$ é uma álgebra normada.

Mostraremos agora que temos associatividade na multiplicação de $\widehat{\mathcal{A}}_\lambda$. Dados $x_1 + y_1 i$, $x_2 + y_2 i$ e $x_3 + y_3 i \in \widehat{\mathcal{A}}_\lambda$, temos que

$$\begin{aligned}&(x_1+y_1i)\big((x_2+y_2i)(x_3+y_3i)\big) =\\ &\quad = (x_1+y_1i)(x_2x_3 + y_3x_2i + y_2\overline{x_3}i + \lambda\overline{y_3}y_2)\\ &\quad = x_1x_2x_3 + y_3x_2x_1i + y_2\overline{x_3}x_1i + \lambda x_1\overline{y_3}y_2\\ &\qquad + y_1\overline{x_3}\ \overline{x_2}i + \lambda\overline{x_2}\ \overline{y_3}y_1i + \lambda x_3\overline{y_2}y_1 + \lambda y_1\overline{y_2}y_3i\\ &\quad = x_1x_2x_3 + y_3x_1x_2i + y_2x_1\overline{x_3}i + \lambda\overline{y_3}y_2x_1\\ &\qquad + y_1\overline{x_2}\ \overline{x_3}i + \lambda\overline{x_2}\ \overline{y_3}y_1i + \lambda\overline{y_2}y_1x_3 + \lambda y_3\overline{y_2}y_1i\\ &\quad = (x_1x_2 + y_2x_1i + y_1\overline{x_2}i + \lambda\overline{y_2}y_1)(x_3+y_3i)\\ &\quad = \big((x_1+y_1i)(x_2+y_2i)\big)(x_3+y_3i).\end{aligned}$$

Portanto, $\widehat{\mathcal{A}}_\lambda$ é associativa.

(iii)

Sejam N_1 e N_2 as formas quadráticas de $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$, respectivamente, e $\varphi : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ um isomorfismo de álgebras normadas.

Definimos a transformação linear $\widehat{\varphi} : \widehat{(\mathcal{A}_1)}_\lambda = \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_1 i \to \widehat{(\mathcal{A}_2)}_\lambda = \mathcal{A}_2 \oplus \mathcal{A}_2 j$ por

$$\widehat{\varphi}(x + yi) = \varphi(x) + \varphi(y)j,$$

para todo $x + yi \in \widehat{(\mathcal{A}_1)}_\lambda = \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_1 i$, com x e $y \in \mathcal{A}_1$. Como φ é um isomorfismo linear, segue que $\widehat{\varphi}$ é um isomorfismo linear. Além disso, dados $x + yi$ e $z + wi \in \widehat{(\mathcal{A}_1)}_\lambda = \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_1 i$, com x, y, z e $w \in \mathcal{A}_1$, temos que

$$\begin{aligned}
\widehat{\varphi}\big((x + yi)(z + wi)\big) &= \widehat{\varphi}\big((xz + \lambda\overline{w}y) + (wx + y\overline{z})i\big) \\
&= \varphi(xz + \lambda\overline{w}y) + \varphi(wx + y\overline{z})j \\
&= (\varphi(x)\varphi(z) + \lambda\varphi(\overline{w})\varphi(y)) + \\
&\qquad + \big(\varphi(w)\varphi(x) + \varphi(y)\varphi(\overline{z})\big)j \\
&= (\varphi(x)\varphi(z) + \lambda\overline{\varphi(w)}\varphi(y)) + \qquad \text{(pelo lema 2.1.12)} \\
&\qquad + \big(\varphi(w)\varphi(x) + \varphi(y)\overline{\varphi(z)}\big)j \\
&= (\varphi(x) + \varphi(y)j)(\varphi(z) + \varphi(w)j) \\
&= \widehat{\varphi}(x + yi)\widehat{\varphi}(z + wi).
\end{aligned}$$

Assim, temos que $\widehat{\varphi}$ preserva a multiplicação em $\widehat{(\mathcal{A}_1)}_\lambda$. Logo, pelo teorema 2.2.4, $\widehat{\varphi}$ é um isomorfismo de álgebras normadas.

□

Exemplo 2.3.4 (A Álgebra dos Reais - $\mathbb{R}$)**.** *O corpo dos reais, $\mathbb{R}$, com sua multiplicação usual e a forma quadrática $N : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $N(x) = x^2$, para $x \in \mathbb{R}$, constitui uma álgebra normada. Como $\mathbb{R}$ é um corpo, $\mathbb{R}$ constitui-se em uma álgebra normada associativa e comutativa.*

Exemplo 2.3.5 (A Álgebra dos Números Complexos - $\mathbb{C}$)**.** *O corpo dos números complexos, $\mathbb{C}$, com a multiplicação usual e estrutura de $\mathbb{R}$-espaço vetorial é a álgebra normada dada por*

$$\mathbb{C} := \widehat{\mathbb{R}}_{-1} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}i.$$

Como álgebra normada, $\mathbb{C}$ possui a forma quadrática $N : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ dada por

$$N(x + yi) = x^2 + y^2,$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Sua multiplicação, em função da base $\{1, i\}$ é dada pela tabela 2.2. Temos que $\mathbb{C}$ é associativa e comutativa como álgebra normada.

	1	i
1	1	i
i	i	-1

Tabela 2.2: A tabela de multiplicação de $\mathbb{C}$.

Exemplo 2.3.6 (A Álgebra Degenerada dos Complexos - $\mathbb{C}_{\text{deg}}$)**.** *Definimos, sobre $\mathbb{R}$, a álgebra degenerada dos números complexos por*

$$\mathbb{C}_{\text{deg}} := \widehat{\mathbb{R}}_1 = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}i.$$

Temos que $\mathbb{C}_{\text{deg}}$ possui a forma quadrática $N : \mathbb{C}_{\text{deg}} \to \mathbb{R}$ dada por

$$N(x + yi) = x^2 - y^2,$$

para x e $y \in \mathbb{R}$. Sua multiplicação em função da base ortogonal $\{1, i\}$ é dada pela tabela 2.3. Como $\mathbb{R}$ é comutativo, temos, pela proposição 2.3.3, que $\mathbb{C}_{\text{deg}}$ é associativa. E, pela tabela 2.3, temos também que $\mathbb{C}_{\text{deg}}$ é comutativa.

	1	i
1	1	i
i	i	1

Tabela 2.3: A tabela de multiplicação de $\mathbb{C}_{\text{deg}}$.

Exemplo 2.3.7 (A Álgebra dos Números Quaterniônicos - $\mathbb{H}$)**.** *Definimos, sobre $\mathbb{R}$, a álgebra dos números quaterniônicos (ou álgebra dos quatérnios) por*

$$\mathbb{H} := \widehat{\mathbb{C}}_{-1} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}j.$$

Temos que o conjunto $\{1, i, j, k\}$, onde $k = ij$, é uma base ortogonal de $\mathbb{H}$. De fato, pela definição da forma quadrática de $\mathbb{C}$, temos que a forma quadrática N de $\mathbb{H}$ é dada por

$$\begin{aligned} N(x_0 1 + x_1 i + x_2 j + x_3 k) &= N((x_0 1 + x_1 i) + (x_2 1 + x_3 i)j) \\ &= N(x_0 1 + x_1 i) + N(x_2 1 + x_3 i) \\ &= x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \end{aligned}$$

para todo x_0, x_1, x_2 e $x_3 \in \mathbb{R}$. Adiante, pelas tabelas 2.1 e 2.2, temos que a multiplicação em $\mathbb{H}$ é dada pela tabela 2.4. Como $\mathbb{C}$ é comutativa, segue que $\mathbb{H}$ é associativa. Segue da tabela 2.4, que $\mathbb{H}$ não é comutativa.

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

Tabela 2.4: A tabela de multiplicação de $\mathbb{H}$.

Exemplo 2.3.8 (A Álgebra Degenerada dos Números Quaterniônicos)**.** *Definimos, sobre $\mathbb{R}$, a álgebra degenerada dos números quaterniônicos por*

$$\mathbb{H}_{\text{deg}} := \widehat{\mathbb{C}}_1 = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}j.$$

Temos que o conjunto $\{1, i, j, k\}$, onde $k = ij$, é uma base ortogonal de $\mathbb{H}_{\text{deg}}$. De fato, pela definição da forma quadrática de $\mathbb{C}$, temos que a forma quadrática N de $\mathbb{H}_{\text{deg}}$ é dada por

$$\begin{aligned} N(x_0 1 + x_1 i + x_2 j + x_3 k) &= N((x_0 1 + x_1 i) + (x_2 1 + x_3 i)j) \\ &= N(x_0 1 + x_1 i) - N(x_2 1 + x_3 i) \\ &= x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2, \end{aligned}$$

para todo x_0, x_1, x_2 e $x_3 \in \mathbb{R}$. Adiante, pelas tabelas 2.1 e 2.2, temos que a multiplicação em $\mathbb{H}_{\text{deg}}$ é dada pela tabela 2.5. Como $\mathbb{C}$ é comutativa, segue que $\mathbb{H}_{\text{deg}}$ é associativa. Segue da tabela 2.5, que $\mathbb{H}_{\text{deg}}$ não é comutativa.

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	1	$-i$
k	k	j	i	1

Tabela 2.5: A tabela de multiplicação de $\mathbb{H}_{\text{deg}}$.

Exemplo 2.3.9 (A Álgebra dos Números Octoniônicos - $\mathbb{O}$)**.** *Definimos, sobre $\mathbb{R}$, a álgebra dos números octoniônicos (ou álgebra dos octônios) por*

$$\mathbb{O} := \widehat{\mathbb{H}}_{-1} = \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}\alpha.$$

Temos que o conjunto $\{1, e_1, e_2, ..., e_7\}$, onde $e_1 = i$, $e_2 = j$, $e_3 = -i\alpha$, $e_4 = k$, $e_5 = -k\alpha$, $e_6 = -j\alpha$ e $e_7 = \alpha$, é uma base ortogonal de $\mathbb{O}$. De fato, pela definição da forma quadrática de $\mathbb{H}$, temos que

$$\begin{aligned} N(x_0 1 + \textstyle\sum_{i=1}^{7} x_i e_i) &= N\big((x_0 1 + x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_4 e_4) + \\ &\qquad + (x_7 e_7 + x_3 e_3 + x_6 e_6 + x_5 e_5)\big) \\ &= N\big((x_0 1 + x_1 i + x_2 j + x_4 k) + \\ &\qquad + (x_7 1 - x_3 i - x_6 j - x_5 k)\alpha\big) \\ &= N(x_0 1 + x_1 i + x_2 j + x_4 k) + \\ &\qquad + N(x_7 1 - x_3 i - x_6 j - x_5 k) \\ &= x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2, \end{aligned}$$

para todo x_0,...,$x_7 \in \mathbb{R}$. Pelas tabelas 2.1 e 2.4, temos que a multiplicação em $\mathbb{O}$ é dada pela tabela 2.6. Como $\mathbb{H}$ não é comutativa, temos que $\mathbb{O}$ não é associativa. Segue da tabela 2.6 que $\mathbb{O}$ não é comutativa.

	1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
1	1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	e_1	-1	e_4	e_7	$-e_2$	e_6	$-e_5$	$-e_3$
e_2	e_2	$-e_4$	-1	e_5	e_1	$-e_3$	e_7	$-e_6$
e_3	e_3	$-e_7$	$-e_5$	-1	e_6	e_2	$-e_4$	e_1
e_4	e_4	e_2	$-e_1$	$-e_6$	-1	e_7	e_3	$-e_5$
e_5	e_5	$-e_6$	e_3	$-e_2$	$-e_7$	-1	e_1	e_4
e_6	e_6	e_5	$-e_7$	e_4	$-e_3$	$-e_1$	-1	e_2
e_7	e_7	e_3	e_6	$-e_1$	e_5	$-e_4$	$-e_2$	-1

Tabela 2.6: A tabela de multiplicação de $\mathbb{O}$.

Exemplo 2.3.10 (A Álgebra Degenerada dos Números Octoniônicos)**.** *Definimos, sobre $\mathbb{R}$, a álgebra degenerada dos números octoniônicos por*

$$\mathbb{O}_{\text{deg}} := \widehat{\mathbb{H}}_1 = \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}\alpha.$$

Temos que o conjunto $\{1, e_1, e_2, ..., e_7\}$, onde $e_1 = i$, $e_2 = j$, $e_3 = -i\alpha$, $e_4 = k$, $e_5 = -k\alpha$, $e_6 = -j\alpha$ e $e_7 = \alpha$, é uma base ortogonal de $\mathbb{O}$. De fato, pela definição da forma quadrática de $\mathbb{H}$, temos que

$$\begin{aligned}
N(x_0 1 + \textstyle\sum_{i=1}^{7} x_i e_i) &= N\big((x_0 1 + x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_4 e_4) + \\
&\qquad + (x_7 e_7 + x_3 e_3 + x_6 e_6 + x_5 e_5)\big) \\
&= N\big((x_0 1 + x_1 i + x_2 j + x_4 k) + \\
&\qquad + (x_7 1 - x_3 i - x_6 j - x_5 k)\alpha\big) \\
&= N(x_0 1 + x_1 i + x_2 j + x_4 k) + \\
&\qquad - N(x_7 1 - x_3 i - x_6 j - x_5 k) \\
&= x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + x_4^2 - x_5^2 - x_6^2 - x_7^2,
\end{aligned}$$

para todo x_0,...,$x_7 \in \mathbb{R}$. Pelas tabelas 2.1 e 2.4, temos que a multiplicação em $\mathbb{O}_{\text{deg}}$ é dada pela tabela 2.7. Como $\mathbb{H}$ não é comutativa, temos que $\mathbb{O}_{\text{deg}}$ não é associativa. Segue da tabela 2.7 que $\mathbb{O}_{\text{deg}}$ não é comutativa.

	1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
1	1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	e_1	-1	e_4	e_7	$-e_2$	e_6	$-e_5$	$-e_3$
e_2	e_2	$-e_4$	-1	e_5	e_1	$-e_3$	e_7	$-e_6$
e_3	e_3	$-e_7$	$-e_5$	1	e_6	$-e_2$	e_4	$-e_1$
e_4	e_4	e_2	$-e_1$	$-e_6$	-1	e_7	e_3	$-e_5$
e_5	e_5	$-e_6$	e_3	e_2	$-e_7$	1	$-e_1$	$-e_4$
e_6	e_6	e_5	$-e_7$	$-e_4$	$-e_3$	e_1	1	$-e_2$
e_7	e_7	e_3	e_6	e_1	e_5	e_4	e_2	1

Tabela 2.7: A tabela de multiplicação de $\mathbb{O}_{\text{deg}}$.

Definição 2.3.11 (Subálgebra Normada)**.** *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra normada munida de uma forma quadrática N. Dizemos que o subespaço vetorial $\mathcal{S}$ de $\mathcal{A}$ é uma subálgebra normada de $\mathcal{A}$ se*

(i) $1 \in \mathcal{S}$*;*

(ii) Para todos x e $y \in \mathcal{S}$, $xy \in \mathcal{S}$;

(iii) A restrição de N a S é não degenerada (i.e. para todo $x \in \mathcal{S}$ existe $y \in \mathcal{S}$ tal que $\langle x, y\rangle \neq 0$).

Observemos que segue de (i) que se $x \in \mathcal{S}$ então $\overline{x} = 2\langle x, 1\rangle 1 - x \in \mathcal{S}$.

Exemplo 2.3.12. *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra normada. Então, o subespaço vetorial gerado por 1 em $\mathcal{A}$ é uma subálgebra normada de $\mathcal{A}$. De fato, como $N(1) = 1$ (veja o lema 2.1.6), temos que a restrição de N à $\mathbb{K}1$ é dada por*

$$N(t1) = t^2 N(1) = t^2,$$

para todo $\lambda \in \mathbb{K}$. Com isso, temos que a restrição de N a $\mathbb{K}1$ não é degenerada. Como $\mathbb{K}1 \subset \mathcal{A}$ é claramente uma subálgebra, conclui-se que $\mathbb{K}1$ é uma subálgebra normada de $\mathcal{A}$.

Exemplo 2.3.13. *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra normada associativa e $\lambda \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$. Temos que $\mathcal{A}$ é uma subálgebra normada de $\widehat{\mathcal{A}}_\lambda = \mathcal{A} \oplus \mathcal{A}i$ pois a restrição do produto e da forma quadrática de $\widehat{\mathcal{A}}_\lambda$ em $\mathcal{A}$ é justamente o produto e a forma quadrática de $\mathcal{A}$.*

Em retrospectiva, o processo de Cayley-Dickson consiste em tomar uma álgebra normada $\mathcal{A}$ associativa e construir uma nova álgebra $\widehat{\mathcal{A}}_\lambda$ que contém $\mathcal{A}$ como subálgebra normada e é gerada por $\mathcal{A}$ e um elemento $i \in \mathcal{A}^\perp$ tal que $N(i) = -\lambda$.

A idéia do processo de Cayley-Dickson também se aplica no estudo das subálgebras normadas de uma álgebra normada. Em especial, dada uma subálgebra $\mathcal{A}$ mostraremos que existe uma subálgebra normada $\mathcal{S}$ de $\mathcal{A}$ tal que $\mathcal{A} \simeq \widehat{\mathcal{S}}_\lambda$ par algum $\lambda \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$.

Proposição 2.3.14. *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra normada. Seja $\mathcal{S}$ uma subálgebra normada própria de $\mathcal{A}$. Então:*

(i) Existe $i \in \mathcal{S}^\perp$, com $\lambda = -N(i) \neq 0$;

(ii) Se $i \in \mathcal{S}^\perp$, com $\lambda = -N(i) \neq 0$, então $\mathcal{S} \oplus \mathcal{S}i$ é uma subálgebra normada de $\mathcal{A}$ de dimensão $2 \dim \mathcal{S}$ e com produto dado por

$$(x + yi)(z + wi) = (xz + \lambda \overline{w} y) + (wx + y\overline{z})i,$$

para todos $x + yi$ e $z + wi \in \mathcal{S} \oplus \mathcal{S}i$. Logo, $\mathcal{S} \oplus \mathcal{S}i$ é uma álgebra normada isomorfa a $\widehat{\mathcal{S}}_\lambda$;

(iii) $\mathcal{S}$ é associativa.

Demonstração:

(i)

Sendo S um subespaço próprio, temos que $\mathcal{S}^{\perp} \neq 0$.

Como N não é degenerada em $\mathcal{A}$ e em $\mathcal{S}$, sua forma bilinear $\langle \cdot, \cdot \rangle$ também não é degenerada em $\mathcal{A}$ e em $\mathcal{S}$. Segue daí que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ não é degenerada em $\mathcal{S}^{\perp}$. Assim, como $\mathcal{S}^{\perp} \neq 0$, existe $i \in \mathcal{S}^{\perp}$ tal que $N(i) = \langle i, i \rangle \neq 0$.

(ii)

Primeiramente, observemos que a soma $\mathcal{S} + \mathcal{S}i$ é direta. De fato, dados $xi \in \mathcal{S}i$ e $y \in \mathcal{S}$ temos, pelo item (v) do lema 2.1.10, que

$$\langle xi, y \rangle = \langle i, \overline{x}y \rangle = 0.$$

Logo, $\mathcal{S}i \subset \mathcal{S}^{\perp}$. Como $\langle \cdot, \cdot \rangle$ não é degenerada em $\mathcal{S}$, temos que $\mathcal{S} \cap \mathcal{S}^{\perp} = \{0\}$. Assim, $\mathcal{S}i \cap \mathcal{S} = \{0\}$.

Adiante, temos que $\dim \mathcal{S}i = \dim \mathcal{S}$. De fato, como $N(i) \neq 0$, temos que a aplicação linear

$$x \in \mathcal{S} \to xi \in \mathcal{S}i$$

é injetiva, pois, se $xi = yi$, temos, pelo item (vi) do lema 2.1.10, que

$$x = (xi)(N(i)^{-1}\overline{i}) = (yi)(N(i)^{-1}\overline{i}) = y.$$

Logo, $\dim \mathcal{S} \oplus \mathcal{S}i = 2 \dim \mathcal{S}$.

Mostraremos que $S \oplus Si$ é uma subálgebra normada de $\mathcal{A}$ e que a a aplicação

$$\begin{array}{rrcl} \varphi: & \mathcal{S} \oplus \mathcal{S}i & \to & \widehat{\mathcal{S}}_{\lambda} = \mathcal{S} \oplus \mathcal{S}j \\ & x + yi & \to & x + yj \end{array}$$

é um isomorfismo de álgebras normadas.

Para provarmos que $\mathcal{S} \oplus \mathcal{S}i$ é uma subálgebra e que φ preserva sua multiplicação (veja a tabela 2.1) basta verificarmos que:

- $x(wi) = (wx)i$, para todos x e $w \in \mathcal{S}$:

  Temos, para $a \in \mathcal{A}$ arbitrário, que

$$\begin{array}{rcll} \langle x(wi), a \rangle & = & \langle wi, \overline{x}a \rangle & \text{(pelo item (v) do lema 2.1.10)} \\ & = & \langle wi, \overline{\overline{a}x} \rangle & \text{(pelo item (i) do lema 2.1.10)} \\ & = & \langle wi, 2\langle \overline{a}x, 1 \rangle 1 - \overline{a}x \rangle & \\ & = & 2\langle \overline{a}x, 1 \rangle \langle wi, 1 \rangle - \langle wi, \overline{a}x \rangle & \\ & = & -\langle wi, \overline{a}x \rangle & \text{(pois } 1 \in \mathcal{S} \text{ e } wi \in \mathcal{S}i \subset \mathcal{S}^{\perp}) \\ & = & \langle wx, \overline{a}i \rangle - 2\langle w, \overline{z} \rangle \langle x, i \rangle & \text{(pelo item (i) do lema 2.1.6)} \\ & = & \langle wx, \overline{a}i \rangle & \text{(pois } \langle x, i \rangle = 0) \\ & = & \langle wx, (2\langle a, 1 \rangle 1 - a)i \rangle & \\ & = & 2\langle a, 1 \rangle \langle wx, i \rangle - \langle wx, ai \rangle & \\ & = & -\langle wx, ai \rangle & \text{(pois } \langle wx, i \rangle = 0) \\ & = & -\langle (wx)\overline{i}, a \rangle & \text{(pelo item (v) do lema 2.1.10)} \\ & = & \langle (wx)i, a \rangle. & \text{(pois } \overline{i} = -i) \end{array}$$

De onde concluimos que $x(wi) = (wx)i$.

- $(yi)z = (y\overline{z})i$, para todos y e $z \in \mathcal{S}$:

  Temos, para $a \in \mathcal{A}$ arbitrário, que

$$\begin{array}{rcll} \langle (yi)z, a\rangle &=& \langle yi, a\overline{z}\rangle & \text{(pelo item (v) do lema 2.1.10)} \\ &=& -\langle y\overline{z}, ai\rangle + \langle y, a\rangle\langle \overline{z}, i\rangle & \text{(pelo item (i) do lema 2.1.6)} \\ &=& -\langle y\overline{z}, ai\rangle & \text{(pois } \langle \overline{z}, i\rangle = 0) \\ &=& -\langle (y\overline{z})\overline{i}, a\rangle & \text{(pelo item (v) do lema 2.1.10)} \\ &=& \langle (y\overline{z})i, a\rangle & \text{(pois } \overline{i} = -i) \end{array}$$

  De onde conluímos que $(yi)z = (y\overline{z})i$.

- $(yi)(wi) = \lambda\overline{w}y$, para todos y e $w \in \mathcal{S}$:

  Pelas igualdades acima, temos, para todo $s \in \mathcal{S}$, que

$$si = \overline{\overline{s}}i = i\overline{s}. \tag{2.6}$$

  Temos, para $a \in \mathcal{A}$ arbitrário, que

$$\begin{array}{rcll} \langle (yi)(wi), a\rangle &=& \langle (i\overline{y})(wi), a\rangle & \text{(por 2.6)} \\ &=& \langle wi, (y\overline{i})a\rangle & \text{(pelo lema 2.1.10(v))} \\ &=& 2\langle w, y\overline{i}\rangle\langle i, a\rangle - \langle wa, (y\overline{i})i\rangle & \text{(pelo lema 2.1.6(i))} \\ &=& 2\langle w, y\overline{i}\rangle\langle i, a\rangle - N(i)\langle wa, y\rangle & \text{(pelo lema 2.1.10(vi))} \\ &=& 2\langle \overline{y}w, \overline{i}\rangle\langle i, a\rangle - N(i)\langle wa, y\rangle & \text{(pelo lema 2.1.10(v))} \\ &=& 2\langle \overline{y}w, \overline{i}\rangle\langle i, a\rangle - N(i)\langle \overline{y}w, \overline{a}\rangle & \text{(pelo lema 2.1.10(v))} \\ &=& 2\langle \overline{y}w, \overline{i}\rangle\langle i, a\rangle - N(i)\langle (\overline{y}w)a, 1\rangle & \text{(pelo lema 2.1.10(v))} \\ &=& 2\langle \overline{y}w, \overline{i}\rangle\langle a, i\rangle - \langle (\overline{y}w)a, \overline{i}i\rangle & \text{(pelo lema 2.1.10(vi))} \\ &=& \langle (\overline{y}w)i, \overline{i}a\rangle & \text{(pelo lema 2.1.6(i))} \\ &=& \langle i(\overline{w}y), \overline{i}a\rangle & \text{(por 2.6 e 2.1.6(i))} \\ &=& \langle i(i(\overline{w}y)), a\rangle & \text{(pelo lema 2.1.10(v))} \\ &=& \langle -\overline{i}(i(\overline{w}y)), a\rangle & \text{(pois } \overline{i} = -i) \\ &=& \langle -N(i)\overline{w}y, a\rangle & \text{(pelo lema 2.1.10(vii))} \\ &=& \langle \lambda\overline{w}y, a\rangle & \end{array}$$

  De onde conluímos que $(yi)(wi) = \lambda\overline{w}y$.

Dado $x + yi \in \mathcal{S} \oplus \mathcal{S}i$, temos que

$$\begin{array}{rcl} N(x+yi) &=& N(x) + 2\langle x, yi\rangle + N(yi) \\ &=& N(x) + 0 + N(y)N(i) \\ &=& N(x) - \lambda N(y) \\ &=& \widehat{N}(x+yj) \\ &=& \widehat{N} \circ \varphi(x+yi). \end{array}$$

Com isso, concluímos que φ é um isomorfismo linear que preserva as formas quadráticas em $\mathcal{S} \oplus \mathcal{S}i$ e $\widehat{\mathcal{S}}_\lambda$. Pelo lema 2.3.2, temos que N não é degenerada em $\mathcal{S}$.

Portanto, $\mathcal{S} \oplus \mathcal{S}i$ é uma subálgebra normada de $\mathcal{A}$ isomorfa à $\widehat{\mathcal{S}}_\lambda$.

(iii)

Pelos itens (i) e (ii), temos que $\widehat{\mathcal{S}}_\lambda$ é uma álgebra normada para algum $\lambda \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$. O que implica, pela proposição 2.3.3, que $\mathcal{S}$ é associativa.

$\square$

Como $\mathbb{K}$ possui naturalmente uma estrutura de álgebra normada (veja o exemplo 2.1.5), podemos obter, aplicando o processo de Cayley-Dickson três vezes e usando os resultados da proposição 2.3.3, obter álgebras normadas de dimensão 2, 4 e 8. No próximo teorema, veremos, em especial, que todas as álgebras normadas são possíveis de se obter à partir do processo de Cayley-Dickson. Além disso, veremos que as propriedades de associatividade e comutatividade em álgebras normadas dependem exclusivamente de suas dimensões.

Teorema 2.3.15.

(i) Dada uma álgebra normada $\mathcal{A}$, com $\dim \mathcal{A} \geqslant 2$, temos que existe uma subálgebra normada $\mathcal{S}$ de $\mathcal{A}$ tal que

$$\mathcal{A} = \mathcal{S} \oplus \mathcal{S}i \simeq \widehat{\mathcal{S}}_\lambda,$$

para algum elemento $i \in \mathcal{S}^\perp$ com $\lambda = -N(i) \neq 0$;

(ii) Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra normada de dimensão[1] n. Então, $n = 1$, 2, 4 ou 8. Além disso, temos que

- *Se $n = 1$ ou 2 então $\mathcal{A}$ é comutativa e associativa;*
- *Se $n = 4$ então $\mathcal{A}$ é associativa e não é comutativa;*
- *Se $n = 8$ então $\mathcal{A}$ não é comutativa e nem associativa.*

Demonstração:

Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra normada. Provaremos que $\mathcal{A}$ verifica as afirmações dos dois itens do enunciado dividindo o problema em todos os cardinais possíveis para $\dim \mathcal{A}$.

(I) Se $\dim \mathcal{A} = 1$ então $\mathcal{A}$ é comutativa e associativa.

Pela proposição 2.1.13, temos que $\mathcal{A}$ é isomorfa à $\mathbb{K}$ como álgebra normada. Assim, $\mathcal{A}$ é comutativa e associativa.

(II) Se $1 < \dim \mathcal{A} < 4$ então:

- Existe uma subálgebra normada $\mathcal{S}$ em $\mathcal{A}$ que satisfaz as condições do item (i);

[1] Perceba que aqui estamos admitindo que $\dim \mathcal{A}$ pode ser qualquer cardinal

- $\dim \mathcal{A} = 2$;
- $\mathcal{A}$ é comutativa e associativa.

Seja $\mathcal{S} = \mathbb{K}1$. Como no exemplo 2.3.12, $\mathcal{S}$ é uma subálgebra normada associativa e própria de $\mathcal{A}$. Assim, pela proposição 2.3.14, temos que existe $i \in \mathcal{S}^{\perp} \subset \mathcal{A}$, com $N(i) = -\lambda \neq 0$, tal que

$$S' := \mathcal{S} \oplus \mathcal{S}i \simeq \widehat{\mathcal{S}}_{\lambda}$$

e

$$\dim \mathcal{A} \geqslant \dim \mathcal{S}' = 2.$$

Devemos ter que $\dim \mathcal{A} = 2$ e, portanto, $\mathcal{A} = \mathcal{S}'$. De fato, caso contrário, teríamos que $\mathcal{S}'$ seria uma subálgebra normada própria e associativa de $\mathcal{A}$. E, novamente pela proposição 2.3.14, teríamos que existe $j \in \mathcal{S}'^{\perp} \subset \mathcal{A}$, com $N(j) = -\lambda' \neq 0$, tal que

$$\mathcal{S}'' := \mathcal{S}' \oplus \mathcal{S}'j \simeq \widehat{\mathcal{S}'}_{\lambda'}$$

e

$$\dim \mathcal{A} \geqslant \dim \mathcal{S}'' = 4.$$

Contradizendo a hipótese de que $\dim \mathcal{A} < 4$.

Como $\dim \mathcal{S} = 1$, temos que $\mathcal{S}$ é comutativa e associativa. Assim, pela proposição 2.3.3, temos que $\mathcal{A} \simeq \widehat{(\mathcal{S})}_{\lambda}$ é associativa. Adiante, para $x + yi$ e $z + wi$ em $\mathcal{A}$, com x, y, z e $w \in \mathcal{S}$, temos, pela descrição da multiplicação em $\widehat{\mathcal{S}}_{\lambda}$ dada na proposição 2.3.14, que

$$\begin{aligned}
(x + yi)(z + wi) &= (xz + \lambda\overline{w}y) + (wx + y\overline{z})i \\
&= (xz + \lambda wy) + (wx + yz)i \\
&= (zx + \lambda yw) + (xw + zy)i \\
&= (zx + \lambda\overline{y}w) + (xw + z\overline{x})i \\
&= (z + wi)(x + yi).
\end{aligned}$$

Logo, $\mathcal{A}$ é comutativa.

(III) Se $4 \leqslant \dim \mathcal{A} < 8$ então:

- Existe uma subálgebra normada $\mathcal{S}$ em $\mathcal{A}$ que satisfaz as condições do item (i);
- $\dim \mathcal{A} = 4$;
- $\mathcal{A}$ é associativa e não é comutativa.

Seja $\mathcal{A}_1 = \mathbb{K}1$. Como no exemplo 2.3.12, $\mathcal{A}_1$ é uma subálgebra normada associativa e própria de $\mathcal{A}$. Assim, pela proposição 2.3.14, temos que existe $j \in \mathcal{A}_1^{\perp} \subset \mathcal{A}$, com $N(j) = -\lambda' \neq 0$, tal que

$$\mathcal{S} := \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_1 j \simeq \widehat{(\mathcal{A}_1)}_{\lambda'}$$

e

$$\dim \mathcal{S} = 2.$$

Além disso, $\mathcal{S}$ é uma álgebra normada de dimensão 2, temos, pelo item (II), que $\mathcal{S}$ é associativa e comutativa.

Adiante, como $\mathcal{S}$ é uma subálgebra normada própria e associativa, temos, pela proposição 2.3.14, que existe $i \in \mathcal{S}^{\perp} \subset \mathcal{A}$, com $N(i) = -\lambda \neq 0$, tal que

$$S' := \mathcal{S} \oplus \mathcal{S} i \simeq \widehat{S}_{\lambda}$$

e

$$\dim \mathcal{S}' = 4.$$

Como $\mathcal{S}$ é associativa e comutativa, segue, pela proposição 2.3.3, que $\mathcal{S}' \simeq \widehat{\mathcal{S}}_{\lambda}$ é associativa.

Devemos ter que $\dim \mathcal{A} = 4$ e, portanto, $\mathcal{A} = \mathcal{S}'$. De fato, caso contrário, teríamos que $\mathcal{S}'$ seria uma subálgebra normada própria e associativa de $\mathcal{A}$. E, novamente pela proposição 2.3.14, teríamos que existe $k \in \mathcal{S}'^{\perp} \subset \mathcal{A}$, com $N(k) = -\lambda'' \neq 0$, tal que

$$\mathcal{S}'' := \mathcal{S}' \oplus \mathcal{S}' k \simeq \widehat{\mathcal{S}'}_{\lambda''}$$

e

$$\dim \mathcal{A} \geqslant \dim \mathcal{S}'' = 8.$$

Contradizendo a hipótese de que $\dim \mathcal{A} < 8$.

Como vimos acima, $\mathcal{A} = \mathcal{S}'$ é associativa. Além disso, como $\mathcal{S}$ tem dimensão 2, existe $x \in \mathrm{Im}(\mathcal{S}) \backslash \{0\}$. Assim, pela descrição da multiplicação em $\mathcal{S} \oplus \mathcal{S} i = \mathcal{A}$ dada na proposição 2.3.14, temos que

$$xi = i\overline{x} = -ix \neq ix.$$

Portanto, $\mathcal{A}$ é associativa e não é comutativa.

(IV) Se $\dim \mathcal{A} \geqslant 8$ então:

- Existe uma subálgebra normada $\mathcal{S}$ em $\mathcal{A}$ que satisfaz as condições do item (i);
- $\dim \mathcal{A} = 8$;
- $\mathcal{A}$ não é associativa e não é comutativa.

Analogamente aos casos anteriores, podemos, à partir da subálgera normada $\mathbb{K}1 \subset \mathcal{A}$, construir, utilizando os resultados da proposição 2.3.14, uma subálgebra normada $\mathcal{S}$ de $\mathcal{A}$ de dimensão 4.

Pelo item (III) temos que $\mathcal{S}$ é associativa e não é comutativa. Além disso, como $\dim \mathcal{A} \geqslant 8$, $\mathcal{S}$ é uma subálgebra normada própria. Assim, novamente pela proposição 2.3.14, temos que existe $i \in \mathcal{S}^{\perp} \subset \mathcal{A}$, com $N(i) = -\lambda \neq 0$, tal que

$$\mathcal{S}' := \mathcal{S} \oplus \mathcal{S}i \simeq \widehat{\mathcal{S}}_{\lambda}$$

e

$$\dim \mathcal{S}' = 8.$$

Além disso, como $\mathcal{S}$ não é comutativa, segue, da proposição 2.3.14, que $\mathcal{S}' \simeq \widehat{\mathcal{S}}_{\lambda}$ não é associativa. E, como $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}'$, $\mathcal{S}'$ também não é associativa.

Como $\mathcal{S}'$ é uma subálgebra normada de $\mathcal{A}$ que não é associativa, temos, pela proposição 2.3.14, que $\mathcal{S}'$ não é uma subálgebra normada própria de $\mathcal{A}$. Logo, $\mathcal{A} = \mathcal{S}'$.

Portanto, $\mathcal{A} = \mathcal{S} \oplus \mathcal{S}i \simeq \widehat{\mathcal{S}}_{\lambda}$ tem dimensão 8, não é comutativa e nem associativa.

□

2.4 Álgebras Normadas Reais

Nesta seção classificaremos as álgebras normadas reais. Provaremos que, a menos de isomorfismo, elas são: $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}_{\text{deg}}$, $\mathbb{H}$, $\mathbb{H}_{\text{deg}}$, $\mathbb{O}$ e $\mathbb{O}_{\text{deg}}$.

Começaremos nossa tarefa dividindo as álgebras normadas em duas subclasses:

Definição 2.4.1 (Álgebras Normadas de Divisão e Álgebras Normadas Degeneradas)**.** *Uma álgebra normada $\mathcal{A}$ é de divisão se para todo $x \in \mathcal{A}\backslash\{0\}$, $N(x) \neq 0$. Caso contrário, dizemos que $\mathcal{A}$ é degenerada.*

A nomenclatura da definição acima se justifica pelo fato de as álgebras normadas de divisão possuirem a propriedade do inverso multiplicativo. De fato, segue do item (vi) do lema 2.1.10, que se $\mathcal{A}$ é uma álgebra normada de divisão, temos que

$$x\left(\frac{\overline{x}}{N(x)}\right) = \left(\frac{\overline{x}}{N(x)}\right)x = 1,$$

para qualquer $x \in A\backslash\{0\}$. Ou seja, para todo $x \in A\backslash\{0\}$,

$$x^{-1} = \frac{\overline{x}}{N(x)}.$$

Lema 2.4.2 (Lei da Inércia de Sylvester)**.** *Sejam V um espaço vetorial real de dimensão finita e N uma forma quadrática não degenerada em V. Então, V se decompõe como soma direta de subespaços $V^{+} \oplus V^{-}$, onde*

$$V^{+} = \{x \in V; x = 0 \text{ ou } N(x) > 0\},$$

$$V^- = \{x \in V; x = 0 \text{ ou } N(x) < 0\}$$

e $V^+ \perp V^-$ *em relação à forma bilinear induzida por* N*.*

Demonstração:

O resultado acima se encontra em vários livros de álgebra linear. Em particular, na seção IX.2 de "Linear Algebra" de Werner Greub, quarta edição pela editora Springer.

□

Sabemos do teorema 2.3.15 que todas as álgebras normadas tem dimensão finita. Isto nos permite usar a Lei da Inércia de Sylvester para estudarmos álgebras normadas reais.

Proposição 2.4.3. *Sejam* $\mathcal{A}$ *uma álgebra normada real,* N *sua forma quadrática,*

$$\mathcal{A}^+ = \{x \in \mathcal{A}; x = 0 \text{ ou } N(x) > 0\}$$

e

$$\mathcal{A}^- = \{x \in \mathcal{A}; x = 0 \text{ ou } N(x) < 0\}.$$

Temos que:

(i) $\mathcal{A}$ *é de divisão se e somente se* $\mathcal{A} = \mathcal{A}^+$*;*

(ii) $\mathcal{A}$ *é degenerada se e somente se* $\mathcal{A} = \mathcal{A}^+ \oplus \mathcal{A}^-$ *e* $\dim \mathcal{A}^+ = \dim \mathcal{A}^-$*.*

Demonstração:

(i)

Se $N(x) > 0$ para todo $x \in \mathcal{A}\backslash\{0\}$, temos, imediatamente, que $N(x) \neq 0$ para todo $\mathcal{A}\backslash\{0\}$. Ou seja, $\mathcal{A}$ é de divisão.

Suponhamos que $\mathcal{A}$ seja divisão. Pela Lei da Inércia de Sylvester, temos que $\mathcal{A} = \mathcal{A}^+ \oplus \mathcal{A}^-$. Portanto, para concluirmos que $\mathcal{A} = \mathcal{A}^+$, basta provarmos que $\mathcal{A}^- = 0$.

Por absurdo, suponhamos que exista $x \in \mathcal{A}^-\backslash\{0\}$. Como $N(x) < 0$, temos que $1 + tx \neq 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$. De fato, se $1 = -tx$, teríamos (veja o lema 2.1.6) que

$$1 = N(1) = N(-tx) = t^2 N(x) \leqslant 0.$$

Adiante, temos, para todo $t \in \mathbb{R}$, que

$$N(1 + tx) = \langle 1 + tx, 1 + tx \rangle = 1 + 2t\langle 1, x \rangle + t^2 N(x).$$

Como $N(1) = 1$ e $N(x) < 0$, temos que o polinômio $N(1 + tx)$ possui uma raiz $t_0 \in \mathbb{R}$. Isto é $N(1 + t_0 x) = 0$. Contradizendo o fato de $\mathcal{A}$ ser de divisão.

(ii)

Se $\mathcal{A} = \mathcal{A}^+ \oplus \mathcal{A}^-$ e $\dim \mathcal{A}^+ = \dim \mathcal{A}^-$ temos que $\mathcal{A} \neq \mathcal{A}^+$ e, pelo item anterior, $\mathcal{A}$ deve ser degenerada.

Suponhamos que $\mathcal{A}$ seja degenerada.

Pela Lei da Inércia de Sylvester, temos que $\mathcal{A} = \mathcal{A}^+ \oplus \mathcal{A}^-$. Mostraremos que existe um isomorfismo de espaços vetoriais entre $\mathcal{A}^-$ e $\mathcal{A}^+$.

Pelo item anterior, devemos ter que $\mathcal{A}^- \neq 0$. Seja $x \in \mathcal{A}^- \backslash \{0\}$.

Provaremos que a aplicação linear $T : \mathcal{A}^+ \to \mathcal{A}^-$ dada por

$$T(y) = xy,$$

para todo $y \in \mathcal{A}^+$, é bem definida e tem como inversa a aplicação $S : \mathcal{A}^- \to \mathcal{A}^+$ dada por

$$S(z) = \frac{\overline{x}z}{N(x)},$$

para todo $z \in \mathcal{A}^-$.

Para todo $y \in \mathcal{A}^+$, temos que $xy \in \mathcal{A}^-$. De fato, se $y \neq 0$, temos que

$$N(xy) = N(x)N(y) < 0.$$

Segue daí e da distributividade em $\mathcal{A}$, que a aplicação $T : \mathcal{A}^+ \to \mathcal{A}^-$ dada por

$$T(y) = xy,$$

para todo $y \in \mathcal{A}^+$, é bem definida e linear.

Como $N(x) < 0$, temos que $N(x)^{-1}\overline{x}$ também pertence a $\mathcal{A}^-$. De fato, pelo lema 2.1.10, temos que

$$N\left(\frac{\overline{x}}{N(x)}\right) = \frac{N(\overline{x})}{N(x)^2} = \frac{1}{N(x)} < 0.$$

Assim, para todo $z \in \mathcal{A}^-$, temos que

$$N\left(\left(\frac{\overline{x}}{N(x)}\right)z\right) = \frac{N(\overline{x})N(z)}{N(x)^2} = \frac{N(z)}{N(x)} > 0.$$

Assim, está bem definida a aplicação linear $S : \mathcal{A}^- \to \mathcal{A}^+$ dada por

$$S(z) = \frac{\overline{x}z}{N(x)},$$

para todo $z \in \mathcal{A}^-$.

Por fim, mostraremos que $S = T^{-1}$. De fato, pelo item (vii) do lema 2.1.10, temos, para todo $y \in \mathcal{A}^+$, que

$$S \circ T(y) = \frac{\overline{x}(xy)}{N(x)} = y,$$

para todo $y \in \mathcal{A}^+$. Logo, $S \circ T = I_{\mathcal{A}^+}$. Analogamente, é verifica-se que $T \circ S = I_{\mathcal{A}^-}$.

Portanto, T é um isomorfismo linear e, consequentemente, $\dim \mathcal{A}^+ = \dim \mathcal{A}^-$.

$\square$

Lema 2.4.4. *Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra normada real associativa e λ_1 e $\lambda_2 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Então, $\widehat{\mathcal{A}}_{\lambda_1}$ e $\widehat{\mathcal{A}}_{\lambda_2}$ são isomorfas se $\lambda_1\lambda_2 > 0$.*

Demonstração:

Pela transitividade da relação de isomorfismo, basta provarmos que se $\lambda > 0$ então $\widehat{\mathcal{A}}_\lambda$ é isomorfa à $\widehat{\mathcal{A}}_1$ e se $\lambda < 0$ então $\widehat{\mathcal{A}}_\lambda$ é isomorfa à $\widehat{\mathcal{A}}_{-1}$.

Suponhamos que $\lambda > 0$. Neste caso, podemos definir $\varphi : \widehat{\mathcal{A}}_\lambda \to \widehat{\mathcal{A}}_1$ por

$$\varphi(x + yi) = x + \lambda^{\frac{1}{2}} yj \in \mathcal{A} \oplus \mathcal{A}j = \widehat{\mathcal{A}}_1,$$

para todo $x+yi \in \mathcal{A}\oplus\mathcal{A}i = \widehat{\mathcal{A}}_\lambda$, com x e $y \in \mathcal{A}$. Temos que φ é um isomorfismo linear. Adiante, dados $x + yi$ e $z + wi \in \widehat{\mathcal{A}}_\lambda = \mathcal{A} \oplus \mathcal{A}i$, temos que

$$\begin{aligned}
\varphi((x + yi)(z + wi)) &= \varphi((xz + \lambda\overline{w}y) + (wx + y\overline{z})i) \\
&= (xz + \lambda\overline{w}y) + \lambda^{\frac{1}{2}}(wx + y\overline{z})j \\
&= (xz + \overline{(\lambda^{\frac{1}{2}} w)}(\lambda^{\frac{1}{2}} y)) + \\
&\quad\quad + ((\lambda^{\frac{1}{2}} w)x + (\lambda^{\frac{1}{2}} y)\overline{z})j \\
&= (x + \lambda^{\frac{1}{2}} yj)(z + \lambda^{\frac{1}{2}} wj) \\
&= \varphi(x + yi)\varphi(z + wi).
\end{aligned}$$

Portanto, pelo teorema 2.2.4, φ é um isomorfismo de álgebras normadas.

Analogamente, se $\lambda < 0$, a aplicação $\varphi : \widehat{\mathcal{A}}_\lambda \to \widehat{\mathcal{A}}_{-1}$ definida por

$$\varphi(x + yi) = x + (-\lambda)^{\frac{1}{2}} yj \in \mathcal{A} \oplus \mathcal{A}j = \widehat{\mathcal{A}}_{-1},$$

para todo $x + yi \in \mathcal{A} \oplus \mathcal{A}i = \widehat{\mathcal{A}}_\lambda$, com x e $y \in \mathcal{A}$, é um isomorfismo de álgebras normadas.

□

Observemos que a recíproca do lema acima não é válida. Por exemplo, temos que $\widehat{(\mathbb{C}_{\text{deg}})}_1$ e $\widehat{(\mathbb{C}_{\text{deg}})}_{-1}$ são álgebras normadas reais degeneradas de dimensão 4. Como veremos no teorema 2.4.6, ambas são isomorfas a $\mathbb{H}_{\text{deg}}$.

Teorema 2.4.5. *A menos de isomorfismo de álgebras normadas, as únicas álgebras normadas reais de divisão são $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ e $\mathbb{O}$.*

Demonstração:

Como foi visto da descrição da forma quadrática de $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ e $\mathbb{O}$ nos exemplos 2.3.4, 2.3.5, 2.3.7 e 2.3.9, temos que estas são álgebras normadas reais de divisão.

Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra normada e N sua forma quadrática.

Suponhamos que $\dim \mathcal{A} \geqslant 2$. Pelo teorema 2.3.15, temos que $\mathcal{A} = \mathbb{S} \oplus \mathbb{S}i \simeq \widehat{\mathbb{S}}_\lambda$, para uma subálgebra normada $\mathbb{S}$ de $\mathcal{A}$ tal que $\dim \mathcal{A} = 2 \dim \mathbb{S}$ e um elemento $i \in \mathbb{S}^\perp$ com $\lambda = -N(i) \neq 0$.

Temos que $\mathbb{S}$ é uma álgebra normada de divisão. De fato, pela proposição 2.4.3, temos que N é positiva em $\mathbb{S}\backslash\{0\} \subset \mathcal{A}\backslash\{0\}$. Assim, novamente pela proposição 2.4.3, temos que $\mathbb{S}$ é uma álgebra normada de divisão.

Além disso, pela proposição 2.4.3, $\lambda = -N(i)$ é negativo.

Assim, pelos lema 2.4.4, temos que

$$\mathcal{A} \simeq \widehat{\mathbb{S}}_\lambda \simeq \widehat{\mathbb{S}}_{-1}.$$

Pelo teorema 2.3.15 temos que as álgebras normadas de divisão só são possíveis nas dimensões 1, 2, 4 e 8.

Se $\dim \mathcal{A} = 1$ temos, pela proposição 2.1.13, que $\mathcal{A}$ é isomorfa a $\mathbb{R}$.

Se $\dim \mathcal{A} = 2$, temos que $\dim \mathbb{S} = 1$. Pelo que vimos acima, segue que $\mathbb{S} \simeq \mathbb{R}$. Assim, pelo item (iii) da proposição 2.3.3, temos que

$$\mathcal{A} \simeq \widehat{\mathbb{S}}_{-1} \simeq \widehat{\mathbb{R}}_{-1} = \mathbb{C}.$$

Ou seja, toda álgebra normada real de divisão de dimensão 2 é isomorfa a $\mathbb{C}$.

Se $\dim \mathcal{A} = 4$, temos que $\dim \mathbb{S} = 2$. Pelo que vimos acima, segue que $\mathbb{S} \simeq \mathbb{C}$. Assim, pelo item (iii) da proposição 2.3.3, temos que

$$\mathcal{A} \simeq \widehat{\mathbb{S}}_{-1} \simeq \widehat{\mathbb{C}}_{-1} = \mathbb{H}.$$

Ou seja, toda álgebra normada real de divisão de dimensão 4 é isomorfa a $\mathbb{H}$.

Se $\dim \mathcal{A} = 8$, temos que $\dim \mathbb{S} = 4$. Pelo que vimos acima, segue que $\mathbb{S} \simeq \mathbb{H}$. Assim, pelo item (iii) da proposição 2.3.3, temos que

$$\mathcal{A} \simeq \widehat{\mathbb{S}}_{-1} \simeq \widehat{\mathbb{H}}_{-1} = \mathbb{O}.$$

Ou seja, toda álgebra normada real de divisão de dimensão 8 é isomorfa a $\mathbb{O}$.

$\square$

Teorema 2.4.6. *A menos de isomorfismo de álgebras normadas, as únicas álgebras normadas reais degeneradas são* $\mathbb{C}_{\text{deg}}$, $\mathbb{H}_{\text{deg}}$ *e* $\mathbb{O}_{\text{deg}}$.

Demonstração:

Como foi visto na descrição das formas quadráticas de $\mathbb{C}_{\text{deg}}$, $\mathbb{H}_{\text{deg}}$ e $\mathbb{O}_{\text{deg}}$ nos exemplos 2.3.6, 2.3.8 e 2.3.10, temos que estas são álgebras normadas reais degeneradas.

Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra normada real degenerada.

Pela proposição 2.4.3, temos que $\mathcal{A} = \mathbb{S} \oplus \mathbb{S}^-$, onde

$$\mathbb{S} := \{x \in \mathcal{A}; x = 0 \text{ ou } N(x) > 0\},$$

$$\mathbb{S}^- := \{x \in \mathcal{A}; x = 0 \text{ ou } N(x) < 0\}$$

e $\dim \mathbb{S} = \dim \mathbb{S}^-$.

Temos que $\mathbb{S}$ é uma subálgebra normada de $\mathcal{A}$. De fato, pela Lei da Inércia de Sylvester, $\mathbb{S}$ é um subespaço vetorial. Dados x e $y \in \mathbb{S}$, temos que

$$N(xy) = N(x)N(y) > 0$$

e, consequentemente, $xy \in \mathbb{S}$. Assim, $\mathbb{S}$ é uma subálgebra de $\mathcal{A}$. Como N não é degenerada em $\mathbb{S}$, temos que $\mathbb{S}$ é uma subálgebra normada.

Segue também da definição de $\mathbb{S}$ e da proposição 2.4.3 que $\mathbb{S}$ é uma álgebra normada real de divisão.

Seja $i \in \mathbb{S}^{-}\backslash\{0\}$. Temos que $\lambda = -N(i) > 0$ e, pela Lei de Inércia de Sylvester, temos que $i \in \mathbb{S}^{\perp}$. Assim, segue da proposição 2.3.14 que

$$\mathcal{A} = \mathbb{S} \oplus \mathbb{S}i \simeq \widehat{\mathbb{S}}_{\lambda}.$$

Logo, pelo lema 2.4.4,

$$\mathcal{A} \simeq \widehat{\mathbb{S}}_{\lambda} \simeq \widehat{\mathbb{S}}_{1}.$$

Pelo teorema 2.3.15 e pela proposição 2.1.13, temos que as álgebras normadas degeneradas só são possíveis nas dimensões 2, 4 e 8.

Se $\dim \mathcal{A} = 2$, temos que $\dim \mathbb{S} = 1$. Temos, pela proposição 2.1.13, que $\mathbb{S} \simeq \mathbb{R}$. Assim, pelo item (iii) da proposição 2.3.3, temos que

$$\mathcal{A} \simeq \widehat{\mathbb{S}}_{1} \simeq \widehat{\mathbb{R}}_{1} = \mathbb{C}_{\text{deg}}.$$

Ou seja, toda álgebra normada real degenerada de dimensão 2 é isomorfa a $\mathbb{C}_{\text{deg}}$.

Se $\dim \mathcal{A} = 4$, temos que $\dim \mathbb{S} = 2$. Pelo teorema 2.4.5, segue que $\mathbb{S} \simeq \mathbb{C}$. Assim, pelo item (iii) da proposição 2.3.3, temos que

$$\mathcal{A} \simeq \widehat{\mathbb{S}}_{1} \simeq \widehat{\mathbb{C}}_{1} = \mathbb{H}_{\text{deg}}.$$

Ou seja, toda álgebra normada real degenerada de dimensão 4 é isomorfa a $\mathbb{H}_{\text{deg}}$.

Se $\dim \mathcal{A} = 8$, temos que $\dim \mathbb{S} = 4$. Pelo teorema 2.4.5, segue que $\mathbb{S} \simeq \mathbb{H}$. Assim, pelo item (iii) da proposição 2.3.3, temos que

$$\mathcal{A} \simeq \widehat{\mathbb{S}}_{1} \simeq \widehat{\mathbb{H}}_{1} = \mathbb{O}_{\text{deg}}.$$

Ou seja, toda álgebra normada real degenerada de dimensão 8 é isomorfa a $\mathbb{O}_{\text{deg}}$.

$\square$

2.5 Álgebras Normadas Complexas

Nesta seção prosseguiremos com a classificação das álgebras normadas complexas. Comecemos com alguns exemplos obtidos por meio do processo de Cayley-Dickson.

Exemplo 2.5.1. *O corpo dos complexos, $\mathbb{C}$, com sua multiplicação usual e a forma quadrática $N : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por*

$$N(x) = x^2,$$

para todo $x \in \mathbb{C}$, constitui uma álgebra normada complexa. Como $\mathbb{C}$ é um corpo, $\mathbb{C}$ é uma álgebra associativa e comutativa.

Exemplo 2.5.2. *Definimos a álgebra normada complexa*

$$\mathbb{C}_{\mathbb{C}} := \widehat{\mathbb{C}}_{-1} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}\hat{\imath}.$$

Segue que $\mathbb{C}_{\mathbb{C}}$ *possui a forma quadrática* $N : \mathbb{C}_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ *dada por*

$$N(x + y\hat{\imath}) = x^2 + y^2,$$

para todo $x + y\hat{\imath} \in \mathbb{C}_{\mathbb{C}}$*, com* x *e* $y \in \mathbb{C}$*. Sua multiplicação, em função da base* $\{1, \hat{\imath}\}$ *é dada pela tabela 2.8. Como* $\dim \mathbb{C}_C = 2$*, temos, pelo teorema 2.3.15, que* $\mathbb{C}_{\mathbb{C}}$ *é associativa e comutativa.*

	1	$\hat{\imath}$
1	1	$\hat{\imath}$
$\hat{\imath}$	$\hat{\imath}$	-1

Tabela 2.8: A tabela de multiplicação de $\mathbb{C}_{\mathbb{C}}$.

Exemplo 2.5.3 (A Complexificação da Álgebra dos Números Quaterniônicos - $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$)**.** *Definimos a álgebra normada complexa*

$$\mathbb{H}_{\mathbb{C}} := \widehat{(\mathbb{C}_{\mathbb{C}})}_{-1} = \mathbb{C}_{\mathbb{C}} \oplus \mathbb{C}_{\mathbb{C}}\hat{\jmath}.$$

Temos que o conjunto $\{1, \hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}\}$*, onde* $\hat{k} = \hat{\imath}\hat{\jmath}$*, é uma base ortogonal de* $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$*. De fato, pela definição da forma quadrática de* $\mathbb{C}_{\mathbb{C}}$*, temos que a forma quadrática* N *de* $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ *é dada por*

$$\begin{aligned} N(x_0 1 + x_1\hat{\imath} + x_2\hat{\jmath} + x_3\hat{k}) &= N((x_0 1 + x_1\hat{\imath}) + (x_2 1 + x_3\hat{\imath})\hat{\jmath}) \\ &= N(x_0 1 + x_1\hat{\imath}) + N(x_2 1 + x_3\hat{\imath}) \\ &= x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \end{aligned}$$

para todo $x_0 1 + x_1\hat{\imath} + x_2\hat{\jmath} + x_3\hat{k} \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}$*, com* x_0*,* x_1*,* x_2 *e* $x_3 \in \mathbb{C}$*. Adiante, pelas tabelas 2.1 e 2.8, temos que a multiplicação em* $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ *é dada pela tabela 2.9. Como* $\dim \mathbb{H}_{\mathbb{C}} = 4$*, temos, pelo teorema 2.3.15, que* $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ *é associativa e não comutativa.*

	1	$\hat{\imath}$	$\hat{\jmath}$	$\hat{k}$
1	1	$\hat{\imath}$	$\hat{\jmath}$	$\hat{k}$
$\hat{\imath}$	$\hat{\imath}$	-1	$\hat{k}$	$-\hat{\jmath}$
$\hat{\jmath}$	$\hat{\jmath}$	$-\hat{k}$	-1	$\hat{\imath}$
$\hat{k}$	$\hat{k}$	$\hat{\jmath}$	$-\hat{\imath}$	-1

Tabela 2.9: A tabela de multiplicação de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$.

Exemplo 2.5.4 (A Complexificação Álgebra dos Números Octoniônicos - $\mathbb{O}_{\mathbb{C}}$). *Definimos a álgebra normada complexa dos Números Octoniônicos*

$$\mathbb{O}_{\mathbb{C}} := \widehat{(\mathbb{H}_{\mathbb{C}})}_{-1} = \mathbb{H}_{\mathbb{C}} \oplus \mathbb{H}_{\mathbb{C}}\alpha.$$

Temos que o conjunto $\{1, e_1, e_2, ..., e_7\}$, *onde* $e_1 = \hat{\imath}$, $e_2 = \hat{\jmath}$, $e_3 = -\hat{\imath}\alpha$, $e_4 = \hat{k}$, $e_5 = -\hat{k}\alpha$, $e_6 = -\hat{\jmath}\alpha$ *e* $e_7 = \alpha$, *é uma base ortogonal de* $\mathbb{O}_{\mathbb{C}}$. *De fato, pela descrição da forma quadrática de* $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$, *temos que*

$$\begin{aligned} N(x_0 1 + \textstyle\sum_{i=1}^7 x_i e_i) &= N\big((x_0 1 + x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_4 e_4) + \\ &\qquad + (x_7 e_7 + x_3 e_3 + x_6 e_6 + x_5 e_5)\big) \\ &= N\big((x_0 1 + x_1 \hat{\imath} + x_2 \hat{\jmath} + x_4 \hat{k}) + \\ &\qquad + (x_7 1 - x_3 \hat{\imath} - x_6 \hat{\jmath} - x_5 \hat{k})\alpha\big) \\ &= N(x_0 1 + x_1 \hat{\imath} + x_2 \hat{\jmath} + x_4 \hat{k}) + \\ &\qquad + N(x_7 1 - x_3 \hat{\imath} - x_6 \hat{\jmath} - x_5 \hat{k}) \\ &= x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2, \end{aligned}$$

para todo $x_0 1 + \sum_{i=1}^7 x_i e_i \in \mathbb{O}_{\mathbb{C}}$, *com* x_0, ..., $x_7 \in \mathbb{C}$. *Pelas tabelas 2.1 e 2.9, temos que a multiplicação em* $\mathbb{O}_{\mathbb{C}}$ *é dada pela tabela 2.10. Como* $\dim\mathbb{O}_{\mathbb{C}} = 8$, *temos, pelo teorema 2.3.15, que* $\mathbb{O}_{\mathbb{C}}$ *não é comutativa e não é associativa.*

	1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
1	1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	e_1	-1	e_4	e_7	$-e_2$	e_6	$-e_5$	$-e_3$
e_2	e_2	$-e_4$	-1	e_5	e_1	$-e_3$	e_7	$-e_6$
e_3	e_3	$-e_7$	$-e_5$	-1	e_6	e_2	$-e_4$	e_1
e_4	e_4	e_2	$-e_1$	$-e_6$	-1	e_7	e_3	$-e_5$
e_5	e_5	$-e_6$	e_3	$-e_2$	$-e_7$	-1	e_1	e_4
e_6	e_6	e_5	$-e_7$	e_4	$-e_3$	$-e_1$	-1	e_2
e_7	e_7	e_3	e_6	$-e_1$	e_5	$-e_4$	$-e_2$	-1

Tabela 2.10: A tabela de multiplicação de $\mathbb{O}_{\mathbb{C}}$.

Teorema 2.5.5. *A menos de isomorfismo de álgebras normadas, as únicas álgebras normadas complexas são* $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}_{\mathbb{C}}$, $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ *e* $\mathbb{O}_{\mathbb{C}}$.

Demonstração:

Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra normada complexa.

Se $\dim \mathcal{A} = 1$ temos, pela proposição 2.1.13, que $\mathcal{A}$ é isomorfa a $\mathbb{C}$.

Suponhamos que $\dim \mathcal{A} \geqslant 2$. Pelo teorema 2.3.15, temos que

$$\mathcal{A} = \mathbb{S} \oplus \mathbb{S}i \simeq \widehat{\mathbb{S}}_\lambda,$$

para uma subálgebra normada $\mathbb{S}$ de $\mathcal{A}$, tal que

$$\dim \mathcal{A} = 2 \dim \mathbb{S},$$

e um elemento $i \in \mathbb{S}^{\perp}$ com $\lambda = -N(i) \neq 0$.

Seja $j := N(i)^{-\frac{1}{2}} i \in \mathcal{A}$. Temos que

$$N(j) = N\left(\frac{i}{N(i)^{\frac{1}{2}}}\right) = \frac{N(i)}{N(i)} = 1$$

e, como j é múltipl escalar de $i \in \mathbb{S}^{\perp}$, também temos que $j \in \mathbb{S}^{\perp}$. Assim, pela proposição 2.3.14, temos que

$$\mathcal{A} = \mathbb{S} \oplus \mathbb{S}j \simeq \widehat{\mathbb{S}}_{-1}.$$

Pelo teorema 2.3.15, temos que $\dim \mathcal{A} = 2$, 4 ou 8.

Se $\dim \mathcal{A} = 2$, temos que $\dim \mathbb{S} = 1$. Pelo que vimos acima, segue que $\mathbb{S} \simeq \mathbb{C}$. Assim, pelo item (iii) da proposição 2.3.3, temos que

$$\mathcal{A} \simeq \widehat{\mathbb{S}}_{-1} \simeq \widehat{\mathbb{C}}_{-1} = \mathbb{C}_{\mathbb{C}}.$$

Ou seja, toda álgebra normada complexa de dimensão 2 é isomorfa a $\mathbb{C}_{\mathbb{C}}$.

Se $\dim \mathcal{A} = 4$, temos que $\dim \mathbb{S} = 2$. Pelo que vimos acima, segue que $\mathbb{S} \simeq \mathbb{C}_{\mathbb{C}}$. Assim, pelo item (iii) da proposição 2.3.3, temos que

$$\mathcal{A} \simeq \widehat{\mathbb{S}}_{-1} \simeq \widehat{(\mathbb{C}_{\mathbb{C}})}_{-1} = \mathbb{H}_{\mathbb{C}}.$$

Ou seja, toda álgebra normada real de dimensão 4 é isomorfa a $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$.

Se $\dim \mathcal{A} = 8$, temos que $\dim \mathbb{S} = 4$. Pelo que vimos acima, segue que $\mathbb{S} \simeq \mathbb{H}_{\mathbb{C}}$. Assim, pelo item (iii) da proposição 2.3.3, temos que

$$\mathcal{A} \simeq \widehat{\mathbb{S}}_{-1} \simeq \widehat{(\mathbb{H}_{\mathbb{C}})}_{-1} = \mathbb{O}_{\mathbb{C}}.$$

Ou seja, toda álgebra normada complexa de dimensão 8 é isomorfa a $\mathbb{O}_{\mathbb{C}}$.

□

Capítulo 3

G_2 e os Quatérnios

Neste capítulo contruiremos os nossos primeiros modelos de álgebras de Lie do tipo G_2. Faremos isso sobre os conjuntos

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{sl}(\mathrm{Im}(\mathbb{H})) \times \mathrm{Im}(\mathbb{H}) \times \mathrm{Im}(\mathbb{H})$$

e

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{sl}(\mathrm{Im}(\mathbb{H}_{\mathbb{C}})) \times \mathrm{Im}(\mathbb{H}_{\mathbb{C}}) \times \mathrm{Im}(\mathbb{H}_{\mathbb{C}}).$$

A construção aprensentada aqui é análoga à apresentada no capítulo 8 de [8].

Neste capítulo, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ e $\mathbb{H}_{\mathbb{K}} = \mathbb{H}$ ou $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$.

3.1 A Álgebra de Lie $\mathrm{Im}(\mathbb{H})$

Nesta seção estabeleceremos alguns resultados preliminares sobre o $\mathbb{K}$-espaço vetorial $\mathrm{Im}(\mathbb{H}_{\mathbb{K}})$. Começaremos munindo-o de uma estrutura de álgebra de Lie.

Proposição 3.1.1. *O comutador* $[\cdot,\cdot] : \mathrm{Im}(\mathbb{H}_{\mathbb{K}}) \times \mathrm{Im}(\mathbb{H}_{\mathbb{K}}) \to \mathrm{Im}(\mathbb{H}_{\mathbb{K}})$*, dado por*

$$[x, y] = xy - yx, \textit{ para todos } x, y \in \mathrm{Im}(\mathbb{H}_{\mathbb{K}}),$$

faz de $\mathrm{Im}(\mathbb{H}_{\mathbb{K}})$ *uma álgebra de Lie. No caso em que* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$*, temos que* $\mathrm{Im}(\mathbb{H}_{\mathbb{R}})$ *é isomorfa a*[1] $\mathfrak{su}(2)$.

Demonstração:

Pelo item (v) do lema 2.1.10, temos, para todos x e $y \in \mathrm{Im}(\mathbb{H})$, que

$$\begin{array}{rcccl} \langle [x,y], 1\rangle & = & \langle xy, 1\rangle - \langle yx, 1\rangle & = & \langle x, 1\overline{y}\rangle - \langle x, \overline{y}1\rangle \\ & = & \langle x, \overline{y}\rangle - \langle x, \overline{y}\rangle & = & 0. \end{array}$$

Isto é, $[x, y] \in \mathrm{Im}(\mathbb{H}_{\mathbb{K}})$, para todo x e $y \in \mathrm{Im}(\mathbb{H}_{\mathbb{K}})$. Assim, concluímos que a aplicação $[\cdot,\cdot]$ está bem definida.

[1]onde $\mathfrak{su}(2)$ denota $\mathfrak{su}(\mathbb{C}^2)$

Além disso, como $\mathbb{H}_{\mathbb{K}}$ (veja o teorema 2.3.15) é uma álgebra associativa, temos que o seu comutador é bilinear, antissimétrico e satisfaz a identidade de Jacobi.

Portanto, $\mathrm{Im}(\mathbb{H}_{\mathbb{K}})$ é uma álgebra de Lie com colchete $[\cdot,\cdot]$ dado pelo comutador.

Temos que

$$\mathfrak{su}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} ia & b+ic \\ -b+ic & -ia \end{pmatrix}; a,\ b \text{ e } c \in \mathbb{R} \right\}$$

tem como base os elementos

$$A := \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},\ B := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } C := \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

E o colchete de Lie em $\mathfrak{su}(2)$ é dado por

$$[A,B] = 2C,\ [A,C] = -2B \text{ e } [B,C] = 2A.$$

Consideremos, agora a base de $\mathrm{Im}(\mathbb{H})$ formada por i, j, k como no exemplo 2.3.7. Temos que

$$[i,j] = 2k,\ [i,k] = -2j \text{ e } [j,k] = 2i.$$

Pelas descrições acima, temos que a transformação linear $\varphi : \mathrm{Im}(\mathbb{H}) \to \mathfrak{su}(2)$, definida por

$$\varphi(i) = A,\ \varphi(j) = B \text{ e } \varphi(k) = C,$$

é um isomorfismo de álgebras de Lie.

□

Deste ponto em diante, quando nos referirmos a $\mathrm{Im}(\mathbb{H}_{\mathbb{K}})$ estaremos também nos referindo a sua estrutura de álgebra de Lie da proposição anterior.

Lema 3.1.2. *A aplicação*

$$\begin{array}{rccc} \langle[\cdot,\cdot],\cdot\rangle : & \mathrm{Im}(\mathbb{H}_{\mathbb{K}})^3 & \to & \mathbb{K} \\ & (x,y,z) & \to & \langle[x,y],z\rangle \end{array}$$

é multilinear e alternada.

Demonstração:

Claramente, a bilinearidade de $\langle\cdot,\cdot\rangle$ e $[\cdot,\cdot]$ implica que $\langle[\cdot,\cdot],\cdot\rangle$ é multilinear.

Vejamos agora que $\langle[\cdot,\cdot],\cdot\rangle$ é alternada. De fato, para x, y e $z \in \mathrm{Im}(\mathbb{H})$

$$\langle[x,y],z\rangle = \langle-[y,x],z\rangle = -\langle[y,x],z\rangle,$$

$$\begin{array}{rcll} \langle[x,y],z\rangle & = & \langle xy,z\rangle - \langle yx,z\rangle & \\ & = & \langle x,z\overline{y}\rangle - \langle x,\overline{y}z\rangle & \text{(pelo lema2.1.10(v))} \\ & = & -(\langle x,zy\rangle - \langle x,yz\rangle) & \text{(pois } \overline{y} = -y \text{ e } \overline{z} = -z\text{)} \\ & = & -\langle x,[z,y]\rangle & \\ & = & -\langle[z,y],x\rangle & \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcll}\langle [x,y],z\rangle & = & \langle xy,z\rangle - \langle yx,z\rangle & \\ & = & \langle y,\overline{x}z\rangle - \langle y,z\overline{x}\rangle & \text{(pelo lema2.1.10(v))} \\ & = & -(\langle y,xz\rangle - \langle y,zx\rangle) & \text{(pois } \overline{y}=-y \text{ e } \overline{z}=-z\text{)} \\ & = & -\langle y,[x,z]\rangle & \\ & = & -\langle [x,z],y\rangle. & \end{array}$$

Portanto, $\langle [\cdot,\cdot],\cdot\rangle$ é uma forma bilinear alternada.

□

Como a forma bilinear $\langle \cdot,\cdot\rangle$ de $\mathbb{H}_{\mathbb{K}}$ não é degenerada em $\mathrm{Im}(\mathbb{H}_{\mathbb{K}})$ (veja a descrição de N nos exemplos 2.3.7 e 2.5.3), temos que para toda transformação linear $T : \mathrm{Im}(\mathbb{H}_{\mathbb{K}}) \to \mathrm{Im}(\mathbb{H}_{\mathbb{K}})$ existe uma única transformação linear $T^* : \mathrm{Im}(\mathbb{H}_{\mathbb{K}}) \to \mathrm{Im}(\mathbb{H}_{\mathbb{K}})$, denominada a adjunta de T^*, tal que

$$\langle Tx,y\rangle = \langle x,T^*y\rangle,$$

para todo x e $y \in \mathrm{Im}(\mathbb{H}_{\mathbb{K}})$.

Lembremos que $\mathfrak{sl}(\mathrm{Im}(\mathbb{H}_{\mathbb{K}}))$ é a álgebra de Lie das transformações lineares $T : \mathrm{Im}(\mathbb{H}_{\mathbb{K}}) \to \mathrm{Im}(\mathbb{H}_{\mathbb{K}})$ com traço 0.

Lema 3.1.3. *Sejam $T \in \mathfrak{sl}(\mathrm{Im}(\mathbb{H}_{\mathbb{K}}))$ e x, y e $z \in \mathrm{Im}(\mathbb{H}_{\mathbb{K}})$. Então, temos que:*

(i) $\langle [Tx,y],z\rangle + \langle [x,Ty],z\rangle + \langle [x,y],Tz\rangle = 0$*;*

(ii) $T^*[y,x] = [Tx,y] + [x,Ty]$.

Demonstração:

(i)

Como $\langle [\cdot,\cdot],\cdot\rangle$ é multilinear e alternada (lema 3.1.2), temos que

$$\langle [Tx,y],z\rangle + \langle [x,Ty],z\rangle + \langle [x,y],Tz\rangle = \mathrm{tr}(T)\langle [x,y],z\rangle = 0,$$

já que $\mathrm{tr}(T) = 0$.

(ii)

Pelo item (i), temos, para todo $z \in \mathrm{Im}(\mathbb{H}_{\mathbb{K}})$, que

$$\begin{array}{rcl}\langle [Tx,y]+[x,Ty],z\rangle & = & \langle [Tx,y],z\rangle + \langle [x,Ty],z\rangle \\ & = & -\langle [x,y],Tz\rangle \\ & = & \langle T^*[y,x],z\rangle\end{array}$$

Assim, como $\langle \cdot,\cdot\rangle$ não é degenerada em $\mathrm{Im}(\mathbb{H}_{\mathbb{K}})$, segue que

$$T^*[y,x] = [Tx,y] + [x,Ty].$$

□

Definição 3.1.4. *Para todo x e $y \in \mathrm{Im}(\mathbb{H}_{\mathbb{K}})$, definimos a aplicação tensorial*

$$\begin{array}{rccc} T_{x,y}: & \mathrm{Im}(\mathbb{H}_{\mathbb{K}}) & \to & \mathrm{Im}(\mathbb{H}_{\mathbb{K}}) \\ & z & \to & \langle z, y\rangle x - \frac{\langle x,y\rangle}{3} z. \end{array}$$

Lema 3.1.5. *Para todos x, y e $z \in \mathrm{Im}(\mathbb{H}_{\mathbb{K}})$ e $T \in \mathfrak{gl}(\mathbb{H}_{\mathbb{K}})$, temos que:*

(i) $T_{x,y} \in \mathfrak{sl}(\mathrm{Im}(\mathbb{H}_{\mathbb{K}}))$;

(ii) $(T_{x,y})^* = T_{y,x}$;

(iii) $[[x, y], z] = 3(T_{x,z}(y) - T_{y,z}(x))$;

(iv) $[T, T_{x,y}] = T_{Tx,y} + T_{x,-T^*y}$;

(v) $\mathrm{tr}(T_{x,[y,z]} \circ T) = \langle Tx, [y, z]\rangle$.

Demonstração:

(i)

Como

$$T_{x,y} = \langle \cdot, y\rangle x - \frac{1}{3}\langle x, y\rangle I_{\mathrm{Im}(\mathbb{H}_{\mathbb{K}})},$$

temos que

$$\mathrm{tr}(T_{x,y}) = \mathrm{tr}(\langle \cdot, y\rangle x) - \frac{1}{3}\langle x, y\rangle \mathrm{tr}(I_{\mathrm{Im}(\mathbb{H}_{\mathbb{K}})}) = \langle x, y\rangle - \langle x, y\rangle = 0.$$

(ii)

Para todos z e $w \in \mathrm{Im}(\mathbb{H}_{\mathbb{K}})$, temos que

$$\begin{array}{rcl} \langle T_{x,y}z, w\rangle & = & \langle \langle z, y\rangle x - \frac{1}{3}\langle x, y\rangle z, w\rangle \\ & = & \langle z, y\rangle\langle x, w\rangle - \frac{1}{3}\langle x, y\rangle\langle z, w\rangle \\ & = & \langle z, \langle w, x\rangle y - \frac{1}{3}\langle y, x\rangle w\rangle \\ & = & \langle z, T_{y,x}w\rangle. \end{array}$$

Daí segue que $T^*_{x,y} = T_{y,x}$.

(iii)

Do item (ii) do lema 2.1.6, temos que

$$2\langle z, x\rangle 1 = -zx - xz$$

e

$$2\langle z, y\rangle 1 = -zy - yz.$$

Assim, temos que

$$2\langle z, x\rangle y = -zxy - xzy,$$

$$2\langle z,x\rangle y = -yzx - yxz,$$

$$-2\langle z,y\rangle x = zyx + yzx$$

e

$$-2\langle z,y\rangle x = xzy + xyz.$$

E, somando as quatro equações acima, temos que

$$4(\langle z,x\rangle y - \langle z,y\rangle x) = z(yx - xy) + (xy - yx)z = [z,[x,y]].$$

Logo,

$$\begin{array}{rcl} [z,[x,y]] & = & 4\langle z,x\rangle y - 4\langle z,y\rangle x \\ & = & 3\langle z,x\rangle y - \langle z,y\rangle x - 3\langle z,y\rangle x + \langle z,x\rangle y \\ & = & 3(T_{y,z}(x) - T_{x,z}(y)). \end{array}$$

(iv)

Dado $z \in \mathrm{Im}(\mathbb{H}_{\mathbb{K}})$, temos que

$$\begin{array}{rcl} (T_{Tx,y} + T_{x,-T^*y})z & = & \langle z,y\rangle Tx - \frac{1}{3}\langle Tx,y\rangle z + \langle z,-T^*y\rangle x - \frac{1}{3}\langle x,-T^*y\rangle z \\ & = & \langle z,y\rangle Tx - \frac{1}{3}\langle Tx,y\rangle z - \langle Tz,y\rangle x + \frac{1}{3}\langle Tx,y\rangle z \\ & = & \langle z,y\rangle Tx - \langle Tz,y\rangle x \\ & = & \langle z,y\rangle Tx - \frac{1}{3}\langle x,y\rangle Tz - \langle Tz,y\rangle x + \frac{1}{3}\langle x,y\rangle Tz \\ & = & T\left(\langle z,y\rangle x - \frac{1}{3}\langle x,y\rangle z\right) - \left(\langle Tz,y\rangle x - \frac{1}{3}\langle x,y\rangle Tz\right) \\ & = & T\circ T_{x,y}z - T_{x,y}\circ Tz \\ & = & [T,T_{x,y}]z. \end{array}$$

Logo, $(T_{Tx,y} + T_{x,-T^*y}) = [T,T_{x,y}]$.

(v)

Como

$$T_{x,[y,z]}\circ T = \langle T\cdot,[y,z]\rangle x - \frac{1}{3}\langle x,[y,z]T\rangle,$$

temos que

$$\mathrm{tr}(T_{x,[y,z]}\circ T) = \mathrm{tr}(\langle T\cdot,[y,z]\rangle x) - \frac{1}{3}\langle x,[y,z]\rangle \mathrm{tr}(T) = \langle Tx,[y,z]\rangle x.$$

□

3.2 Definindo Estruturas de Álgebras de Lie

Nesta seção, definiremos uma estrutura de álgebra de Lie no espaço vetorial

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{K}} = \mathfrak{sl}(\mathrm{Im}(\mathbb{H}_{\mathbb{K}})) \times \mathrm{Im}(\mathbb{H}_{\mathbb{K}}) \times \mathrm{Im}(\mathbb{H}_{\mathbb{K}}).$$

Definimos uma aplicação bilinear

$$[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g}_{\mathbb{K}} \times \mathfrak{g}_{\mathbb{K}} \to \mathfrak{g}_{\mathbb{K}}$$

pela tabela

	$(T_2,0,0)$	$(0,x_2,0)$	$(0,0,y_2)$
$(T_1,0,0)$	$([T_1,T_2],0,0)$	$(0,0,T_1x_2)$	$(0,0,-T_1^*y_2)$
$(0,x_1,0)$	$(0,-T_2x_1,0)$	$(0,0,[x_1,x_2])$	$(3T_{x_1,y_2},0,0)$
$(0,0,y_1)$	$(0,0,T_2^*y_1)$	$(-3T_{x_2,y_1},0,0)$	$(0,[y_1,y_2],0)$

onde T_1 e $T_2 \in \mathfrak{sl}(\mathrm{Im}(\mathbb{H}_\mathbb{K}))$ e x_1, x_2, y_1 e $y_2 \in \mathrm{Im}(\mathbb{H}_\mathbb{K})$. Segue, diretamente da definição que $[\cdot,\cdot]$ é bilinear e antisimétrica. Assim, para concluírmos que $\mathfrak{g}_\mathbb{K}$ é uma álgebra de Lie com o colchete $[\cdot,\cdot]$, nos resta mostrar que $[\cdot,\cdot]$ satifaz a identidade de Jacobi. Para tanto, basta mostarmos que:

Sejam T, T_1 e $T_2 \in \mathfrak{sl}(\mathrm{Im}(\mathbb{H}_\mathbb{K}))$ e x, x_i, y, $y_i \in \mathrm{Im}(\mathbb{H}_\mathbb{K})$, $i = 1,2,3$. Para facilitar a notação, denotemos

$$T = (T,0,0) \in \mathfrak{sl}(\mathrm{Im}(\mathbb{H}_\mathbb{K})) \times 0 \times 0,$$

$$T_i = (T_i,0,0) \in \mathfrak{sl}(\mathrm{Im}(\mathbb{H}_\mathbb{K})) \times 0 \times 0,$$

$$x = (0,x,0) \in 0 \times \mathrm{Im}(\mathbb{H}_\mathbb{K}) \times 0$$

$$x_i = (0,x_i,0) \in 0 \times \mathrm{Im}(\mathbb{H}_\mathbb{K}) \times 0$$

$$y = (0,0,y) \in 0 \times 0 \times \mathrm{Im}(\mathbb{H}_\mathbb{K}),$$

e

$$y_i = (0,0,y_i) \in 0 \times 0 \times \mathrm{Im}(\mathbb{H}_\mathbb{K}),$$

para $i = 1,2,3$. Concluiremos que $[\cdot,\cdot]$ satisfaz a identidade de Jacobi mostrando que:

(I) $[T_1,[T_2,x]] = [[T_1,T_2],x] + [T_2,[T_1,x]]$;

(II) $[T_1,[T_2,y]] = [[T_1,T_2],y] + [T_2,[T_1,y]]$;

(III) $[T,[x_1,x_2]] = [[T_1,x_1],x_2] + [x_1,[T_1,x_2]]$;

(IV) $[T,[x,y]] = [[T,x],y] + [x,[T,y]]$;

(V) $[T,[y_1,y_2]] = [[T,y_1],y_2] + [y_1,[T,y_2]]$;

(VI) $[x_1,[x_2,x_3]] = [[x_1,x_2],x_3] + [x_2,[x_1,x_3]]$;

(VII) $[x_1,[x_2,y]] = [[x_1,x_2],y] + [x_2,[x_1,y]]$;

(VIII) $[y_1,[y_2,y_3]] = [[y_1,y_2],y_3] + [y_2,[y_1,y_3]]$;

(IX) $[y_1,[y_2,x]] = [[y_1,y_2],x] + [y_2,[y_1,x]]$.

Iniciemos as verificações:

(I) $[T_1,[T_2,x]] = [[T_1,T_2],x] + [T_2,[T_1,x]]$:

$$
\begin{aligned}
[[T_1,T_2],x]+[T_2,[T_1,x]] &= (0,[T_1,T_2]x,0)+(0,T_2T_1x,0)\\
&= (0,T_1T_2x,0)\\
&= [T_1,[T_2,x]]
\end{aligned}
$$

(II) $[T_1,[T_2,y]]=[[T_1,T_2],y]+[T_2,[T_1,y]]$:

$$
\begin{aligned}
[[T_1,T_2],y]+[T_2,[T_1,y]] &= (0,0,-[T_1,T_2]^*y)+(0,0,T_2^*T_1^*x)\\
&= (0,0,-[T_2^*,T_1^*]y)+(0,0,T_2^*T_1^*x)\\
&= (0,0,T_1^*T_2^*x)\\
&= [T_1,[T_2,x]]
\end{aligned}
$$

(III) $[T,[x_1,x_2]]=[[T_1,x_1],x_2]+[x_1,[T_1,x_2]]$:

$$
\begin{aligned}
[T,[x_1,x_2]] &= [T,(0,0,[x_1,x_2])]\\
&= (0,0,-T^*[x_1,x_2])\\
&= (0,0,[Tx_1,x_2]+[x_1,Tx_2]) \qquad \text{(pelo lema 3.1.3)}\\
&= [(0,Tx_1,0),(0,x_2,0)]\\
&\qquad +[(0,x_1,0),(0,Tx_2,0)]\\
&= [[T,x_1],x_2]+[x_1,[T,x_2]]
\end{aligned}
$$

(IV) $[T,[x,y]]=[[T,x],y]+[x,[T,y]]$:

$$
\begin{aligned}
[[T,x],y]+[x,[T,y]] &= [(0,Tx,0),(0,0,y)]\\
&\qquad +[(0,x,0),(0,0,-T^*y)]\\
&= (3T_{Tx,y}+3T_{x,-T^*y},0,0)\\
&= ([T,3T_{x,y}],0,0) \qquad \text{(pelo lema 3.1.5)}\\
&= [T,[x,y]]
\end{aligned}
$$

(V) $[T,[y_1,y_2]]=[[T,y_1],y_2]+[y_1,[T,y_2]]$:

$$
\begin{aligned}
[T,[y_1,y_2]] &= [T,(0,[y_1,y_2],0)]\\
&= (0,T[y_1,y_2],0)\\
&= (0,[T^*y_2,y_1]+[y_2,T^*y_1],0) \qquad \text{(pelo lema 3.1.3)}\\
&= [(0,0,T^*y_2),(0,0,y_1)]\\
&\qquad +[(0,0,y_2),(0,0,T^*y_1)]\\
&= [y_1,[T,y_2]]+[[T,y_1],y_2]
\end{aligned}
$$

(VI) $[x_1,[x_2,x_3]]=[[x_1,x_2],x_3]+[x_2,[x_1,x_3]]$:

Para todo $S\in\mathfrak{sl}(\mathrm{Im}(\mathbb{H}_{\mathbb{K}}))$, temos que

$$
\begin{aligned}
\langle[x_1,[x_2,x_3]],S\rangle &= 3\mathrm{tr}(T_{x_1,[x_2,x_3]}\circ S)\\
&= 3\langle[x_2,x_3],Sx_1\rangle && \text{(pelo lema 3.1.5)}\\
&= 3\langle[Sx_1,x_2],x_3\rangle && \text{(pelo lema 3.1.2)}\\
&= -3\langle[x_1,Sx_2],x_3\rangle-3\langle[x_1,x_2],Sx_3\rangle && \text{(pelo lema 3.1.3)}\\
&= -3\langle[x_1,x_2],Sx_3\rangle+3\langle[x_1,x_3],Sx_2\rangle && \text{(pelo lema 3.1.2)}\\
&= -3\mathrm{tr}(T_{x_3,[x_1,x_2]}\circ S)+3\mathrm{tr}(T_{x_2,[x_1,x_3]}\circ S) && \text{(pelo lema 3.1.5)}\\
&= -\langle[x_3,[x_1,x_2]],S\rangle+\langle[x_2,[x_1,x_3]],S\rangle\\
&= \langle[[x_1,x_2],x_3]+[x_2,[x_1,x_3]],S\rangle
\end{aligned}
$$

onde $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathfrak{sl}(\mathrm{Im}(\mathbb{H}_{\mathbb{K}}))^2 \to \mathbb{K}$ é a forma de Cartan-Killing. Como $\mathfrak{sl}(\mathrm{Im}(\mathbb{H}_{\mathbb{K}}))$ é uma álgebra de Lie simples, sua forma de Cartan-Killing não é degenerada (veja o teorema 1.3.6). Por isso, a igualdade (VI) é válida.

(VII) $[x_1,[x_2,y]] = [[x_1,x_2],y] + [x_2,[x_1,y]]$:

$$\begin{aligned}
[x_1,[x_2,y]] - [x_2,[x_1,y]] &= (0,-3T_{x_2,y}(x_1),0) - (0,-3T_{x_1,y}(x_2),0) \\
&= (0,3(T_{x_1,y}(x_2) - T_{x_2,y}(x_1)),0) \\
&= (0,[[x_1,x_2],y],0) && \text{(pelo lema 3.1.3)} \\
&= [(0,0,[x_1,x_2]),(0,0,y)] \\
&= [[x_1,x_2],y]
\end{aligned}$$

(VIII) $[y_1,[y_2,y_3]] = [[y_1,y_2],y_3] + [y_2,[y_1,y_3]]$:

Para todo $S \in \mathfrak{sl}(\mathrm{Im}(\mathbb{H}_{\mathbb{K}}))$, temos que

$$\begin{aligned}
\langle [y_1,[y_2,y_3]],S\rangle &= -3\mathrm{tr}(T_{y_1,[y_2,y_3]} \circ S) \\
&= -3\langle [y_2,y_3], Sy_1\rangle && \text{(pelo lema 3.1.5)} \\
&= -3\langle [Sy_1,y_2], y_3\rangle && \text{(pelo lema 3.1.2)} \\
&= 3\langle [y_1,Sy_2], y_3\rangle + 3\langle [y_1,y_2], Sy_3\rangle && \text{(pelo lema 3.1.3)} \\
&= 3\langle [y_1,y_2], Sy_3\rangle - 3\langle [x_1,x_3], Sx_2\rangle && \text{(pelo lema 3.1.2)} \\
&= 3\mathrm{tr}(T_{y_3,[y_1,y_2]} \circ S) - 3\mathrm{tr}(T_{y_2,[y_1,y_3]} \circ S) && \text{(pelo lema 3.1.5)} \\
&= -\langle [y_3,[y_1,y_2]],S\rangle + \langle [y_2,[y_1,y_3]],S\rangle \\
&= \langle [[y_1,y_2],y_3] + [y_2,[y_1,y_3]],S\rangle.
\end{aligned}$$

Por isso, a igualdade acima é válida.

(IX) $[y_1,[y_2,x]] = [[y_1,y_2],x] + [y_2,[y_1,x]]$:

$$\begin{aligned}
[y_1,[y_2,x]] - [y_2,[y_1,x]] &= [y_1,(-3T_{x,y_2},0,0)] \\
&\qquad - [y_2,(-3T_{x,y_1},0,0)] \\
&= (0,0,-3T^*_{x,y_2}(y_1)) \\
&\qquad - (0,0,-3T^*_{x,y_1}(y_2)) \\
&= (0,0,3(T^*_{x,y_1}(y_2) - T^*_{x,y_2}(y_1))) \\
&= (0,0,3(T_{y_1,x}(y_2) - T_{y_2,x}(y_1))) && \text{(pelo lema 3.1.3)} \\
&= (0,0,[[y_1,y_2],x]) && \text{(pelo lema 3.1.3)} \\
&= [(0,[y_1,y_2],0),(0,x,0)] \\
&= [[y_1,y_2],x]
\end{aligned}$$

Portanto, $\mathfrak{g}_{\mathbb{K}}$ é uma álgebra de Lie sobre $\mathbb{K}$ com o colchete definido acima.

3.3 A Simplicidade e Classificação de $\mathfrak{g}_{\mathbb{K}}$

Nesta seção, verificaremos que $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ é uma álgebra de Lie simples do tipo G_2 e que $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ é a sua forma real normal.

Lema 3.3.1. $\mathfrak{g}_{\mathbb{K}}$ *é simples.*

Demonstração:

Seja $\mathfrak{i} \neq 0$ um ideal de $\mathfrak{g}_{\mathbb{K}}$. Provaremos que $\mathfrak{i} = \mathfrak{g}_{\mathbb{K}}$ e daí concluiremos que $\mathfrak{g}_{\mathbb{K}}$ é simples.

Primeiramente, mostraremos que $(\mathfrak{sl}(\mathrm{Im}(\mathbb{H}_{\mathbb{K}})) \times 0 \times 0) \cap \mathfrak{i} \neq 0$.

Seja $X = (T, x, y) \in \mathfrak{i} \backslash \{0\}$. Consideremos os casos:

- Tx e $T^*y \neq 0$:

  Neste caso, temos que

  $$(0, Tx, -T^*y) = [(T, 0, 0), X] \in \mathfrak{i}$$

  e, consequentemente,

  $$(3T_{Tx,-T^*y}, 0, 0) = [(0, Tx, 0), (0, Tx, -T^*y)] \in \mathfrak{i}\backslash\{0\},$$

  com $T_{Tx,-T^*y} \neq 0$ já que Tx e $T^*y \neq 0$. Logo, $(\mathfrak{sl}(\mathrm{Im}(\mathbb{H}_{\mathbb{K}})) \times 0 \times 0) \cap \mathfrak{i} \neq 0$.

- $Tx \neq 0$ e $T^*y = 0$:

  Neste caso, temos que

  $$(0, Tx, 0) = [(T, 0, 0), X] \in \mathfrak{i}$$

  e, consequentemente,

  $$(-3T_{Tx,Tx}, 0, 0) = [(0, 0, Tx), (0, Tx, 0)] \in \mathfrak{i}\backslash\{0\},$$

  com $T_{Tx,Tx} \neq 0$ já que $Tx \neq 0$. Logo, $(\mathfrak{sl}(\mathrm{Im}(\mathbb{H}_{\mathbb{K}})) \times 0 \times 0) \cap \mathfrak{i} \neq 0$.

- $Tx = 0$ e $T^*y \neq 0$:

  Neste caso, temos que

  $$(0, 0, -T^*y) = [(T, 0, 0), X] \in \mathfrak{i}$$

  e, consequentemente,

  $$(3T_{-T^*y,-T^*y}, 0, 0) = [(0, -T^*y, 0), (0, 0, -T^*y)] \in \mathfrak{i}\backslash\{0\},$$

  com $T_{-T^*y,-T^*y} \neq 0$ já que $T^*y \neq 0$. Logo, $(\mathfrak{sl}(\mathrm{Im}(\mathbb{H}_{\mathbb{K}})) \times 0 \times 0) \cap \mathfrak{i} \neq 0$.

- $Tx = T^*y = 0$, $x \neq 0$ e $y \neq 0$:

  Neste caso, temos que

  $$(T_{x,y}, 0, 0) = (T_{x,y}, -Tx, [x, x]) = [(0, x, 0), X] \in \mathfrak{i}\backslash\{0\},$$

  com $T_{x,y} \neq 0$ já que $x \neq 0$ e $y \neq 0$. Logo, $(\mathfrak{sl}(\mathrm{Im}(\mathbb{H}_{\mathbb{K}})) \times 0 \times 0) \cap \mathfrak{i} \neq 0$.

- $Tx = T^*y = 0$, $x = 0$ e $y \neq 0$:

  Neste caso, temos que existe $z \in \ker T\backslash\{0\}$. Assim,

  $$(T_{z,y}, 0, 0) = (T_{z,y}, -Tz, 0) = [(0, z, 0), X] \in \mathfrak{i}\backslash\{0\},$$

  com $T_{z,y} \neq 0$ já que $z \neq 0$ e $y \neq 0$. Logo, $(\mathfrak{sl}(\mathrm{Im}(\mathbb{H}_{\mathbb{K}})) \times 0 \times 0) \cap \mathfrak{i} \neq 0$.

- $Tx = T^*y = 0$, $x \neq 0$ e $y = 0$:

  Neste caso, temos que existe $z \in \ker T^* \backslash \{0\}$. Assim,

$$(T_{x,z}, 0, 0) = (T_{x,z}, 0, -T^*z) = [(0,0,z), X] \in \mathfrak{i} \backslash \{0\},$$

  com $T_{x,z} \neq 0$ já que $x \neq 0$ e $z \neq 0$. Logo, $(\mathfrak{sl}(\mathrm{Im}(\mathbb{H}_{\mathbb{K}})) \times 0 \times 0) \cap \mathfrak{i} \neq 0$.

- $x = y = 0$:

  Neste caso, $X \in (\mathfrak{sl}(\mathrm{Im}(\mathbb{H}_{\mathbb{K}})) \times 0 \times 0) \cap \mathfrak{i}$.

Portanto, $(\mathfrak{sl}(\mathrm{Im}(\mathbb{H}_{\mathbb{K}})) \times 0 \times 0) \cap \mathfrak{i} \neq 0$. Assim, como $(\mathfrak{sl}(\mathrm{Im}(\mathbb{H}_{\mathbb{K}})) \times 0 \times 0) \cap \mathfrak{i}$ é um ideal na álgebra de lie simples $\mathfrak{sl}(\mathrm{Im}(\mathbb{H}_{\mathbb{K}})) \times 0 \times 0$, temos que

$$(\mathfrak{sl}(\mathrm{Im}(\mathbb{H}_{\mathbb{K}})) \times 0 \times 0) \cap \mathfrak{i} \neq 0 = \mathfrak{sl}(\mathrm{Im}(\mathbb{H}_{\mathbb{K}})) \times 0 \times 0.$$

Isto é, $\mathfrak{i} \supset \mathfrak{sl}(\mathrm{Im}(\mathbb{H}_{\mathbb{K}})) \times 0 \times 0$.

Assim, os elementos de $\mathfrak{g}_{\mathbb{K}}$ da forma

$$(0, Tx, 0) = [(T, 0, 0), (0, x, 0)]$$

e

$$(0, 0, Tx) = [(-T^*, 0, 0), (0, 0, x)],$$

para $x \in \mathrm{Im}(\mathbb{H}_{\mathbb{K}})$ e $T \in \mathfrak{sl}(\mathrm{Im}(\mathbb{H}_{\mathbb{K}}))$, pertencem a $\mathfrak{i}$. Logo,

$$\mathfrak{i} \supset 0 \times \mathrm{Im}(\mathbb{H}_{\mathbb{K}}) \times 0$$

e

$$\mathfrak{i} \supset 0 \times 0 \times \mathrm{Im}(\mathbb{H}_{\mathbb{K}}).$$

Portanto, $\mathfrak{i} = \mathfrak{g}_{\mathbb{K}}$.

□

Teorema 3.3.2. *$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ é uma álgebra de Lie simples do tipo G_2.*

Demonstração:

Seja $\tilde{\mathfrak{h}}$ a subálgebra de Cartan de $\mathfrak{sl}(\mathrm{Im}(\mathbb{H}_{\mathbb{K}}))$ formada por todos as transformações lineares em $\mathfrak{sl}(\mathrm{Im}(\mathbb{H}_{\mathbb{K}}))$ com matrizes diagonais em uma base de $\mathrm{Im}(\mathbb{H}_{\mathbb{C}})$ fixada. Mostraremos que $\mathfrak{h} := \tilde{\mathfrak{h}} \times 0 \times 0$ é uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$.

Dados $X = (\tilde{X}, 0, 0)$ e $Y = (\tilde{Y}, 0, 0)$ em $\mathfrak{h}$, temos que

$$[X, Y] = [(\tilde{X}, 0, 0), (\tilde{Y}, 0, 0)] = ([\tilde{X}, \tilde{Y}], 0, 0) = 0$$

pois $\tilde{\mathfrak{h}}$ é abeliana (veja a proposicao 1.4.7). Logo, $\mathfrak{h}$ é uma subálgebra abeliana.

Mostraremos agora que $\mathfrak{h}$ é uma subálgebra normal. Seja $X = (T, x, y) \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ tal que $[\mathfrak{h}, X] \subset \mathfrak{h}$. Então, para todo $S \in \tilde{\mathfrak{h}}$, temos que

$$([S, T], Sx, -S^*y) = [(S, 0, 0), X] \in \mathfrak{h} = \tilde{\mathfrak{h}} \times 0 \times 0.$$

Logo, devemos ter que $T \in \tilde{\mathfrak{h}}$ (pois $\tilde{\mathfrak{h}}$ é normal em $\mathfrak{sl}(\mathrm{Im}(\mathbb{H}_{\mathbb{K}}))$) e $x = y = 0$ (pois $\mathfrak{h}$ é o conjunto de todas transformações lineares em $\mathfrak{sl}(\mathrm{Im}(\mathbb{H}_{\mathbb{K}}))$ com matrizes diagonais em uma base de $\mathrm{Im}(\mathbb{H}_{\mathbb{C}})$ fixada). Portanto, $\mathfrak{h}$ é normal em $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$.

Além disso, pelo lema 3.3.1, temos que $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ é uma álgebra de Lie simples de posto $\dim \mathfrak{h} = \dim \tilde{\mathfrak{h}} = 2$.

Como as únicas classes de álgebras de Lie simples de posto 2 (veja o exemplo 1.2.10 e o teorema 1.5.13) são A_2, de dimensão 8, e B_2, de dimensão 10, e G_2. Como $\dim \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = 14$, temos que $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ é do tipo G_2.

□

Corolário 3.3.3. *$\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ é uma forma real normal de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$.*

Demonstração:

Pela proposição 4.1.3, temos que, identificando a base formada por 1, i, j e k de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}$ (veja o exemplo 2.3.7) com a base formada por 1, $\tilde{i}$, $\tilde{j}$ e $\tilde{k}$ de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ (veja o exemplo 2.5.3), $\mathbb{H}$ é uma subálgebra real de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ e, consequentemente, $\mathrm{Im}(\mathbb{H})$ e $\mathfrak{sl}(\mathrm{Im}(\mathbb{H}))$ subálgebras de Lie reais (veja a proposição 3.1.1) de $\mathrm{Im}(\mathbb{H}_{\mathbb{C}})$ e $\mathfrak{sl}(\mathrm{Im}(\mathbb{H}_{\mathbb{C}}))$. Assim, segue que $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ é uma forma real de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$.

Seja $T \in \mathfrak{sl}(\mathbb{H})$ dado por $T(i) = i$, $T(j) = -j$ e $T(k) = 0$. Temos, pela definição do colchete de Lie em $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$, que o elemento $H = (T, 0, 0)$ de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ é tal que

$$[H, (S, x, y)] = ([T, H], Tx, -T^* y),$$

para todo $(S, x, y) \in \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$. Assim,

$$\mathrm{ad}(H) = \mathrm{ad}(T) \oplus T \oplus (-T^*) = \mathrm{ad}(T) \oplus T \oplus T.$$

Logo,

$$\langle H, H \rangle = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}(T)^2 \oplus T^2 \oplus T^2) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}(T)^2) + \mathrm{tr}(T^2) + \mathrm{tr}(T^2) > 0.$$

Segue daí que a forma de Cartan-Killing $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ não é negativa definida. Portanto, $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ não é uma forma real compacta de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$.

Como só existem, a menos de isomorfismo, as formas reais compacta e normal de G_2 (veja o teorema 6.3.3), temos que $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ é uma forma real normal de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$.

□

Capítulo 4

Automorfismos de Álgebras Normadas

No capítulo 2 vimos que todas as álgebras normadas são resultado de uma sucessão de processos de Cayle-Dickson. Introduziremos, neste capítulo, os conceitos de duplas e triplas básicas. Estes conceitos estão ligados à intuição de que a cada processo de Cayley-Dickson acrescentamos a uma álgebra normada $\mathcal{A}$ original um novo elemento i (com a relação $i^2 = -N(i) \in \mathbb{K}$ e ortogonal à $\mathcal{A}$) e seus múltiplos $\mathcal{A}i$ para formarmos a álgebra $\widehat{\mathcal{A}}_{-N(i)}$. As duplas e triplas básicas nos permitem descrever a multiplicação em uma álgebra normada em função da multiplicação entre dois (no caso de duplas básicas em álgebras normadas de dimensão 4) ou três (no caso de triplas básicas em álgebras normadas de dimensão 8). Assim, estas estruturas nos fornecerão um modo de "parametrizar" os grupos de automorfismos e as álgebras das derivações em álgebras normadas.

Prosseguiremos com mais alguns resultados preliminares sobre automorfismos de álgebras normadas. Além disso, exploraremos algumas propriedades topológicas do grupo de Lie $\mathrm{Aut}(\mathbb{O})$.

4.1 Duplas Básicas e Subálgebras Quaterniônicas

Nesta seção estabelecemos o conceito de duplas básicas. A motivação para tais definições está no estudo sobre homomorfismos de álgebras normadas.

Definição 4.1.1. *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra normada e x_1 e $x_2 \in \mathcal{A}$. Dizemos que (x_1, x_2) é uma dupla básica se $\{1,\, x_1,\, x_2\}$ é um conjunto ortonormal (de cardinalidade 3) em $\mathcal{A}$.*

Como veremos na próxima proposição, o conceito de dupla básica nos permite fazer analogias entre a dupla básica (x_1, x_2) e a dupla básica (i, j) proveniente da construção de $\mathbb{H}$ e $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ via processo de Cayley-Dickson (veja os exemplos 2.3.7 e 2.5.3).

Exemplo 4.1.2. *Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra normada de dimensão maior que 2 e $x_1 \in \mathrm{Im}(\mathcal{A})$ com $N(x_1) = 1$. Como N não é degenerada existe $x_2 \in \{1, x_1\}^{\perp}$ tal que $N(x_2) = 1$. Logo, (x_1, x_2) é uma dupla básica em $\mathcal{A}$.*

Proposição 4.1.3. *Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra normada e (x_1, x_2) uma dupla básica em $\mathcal{A}$. Então, definindo $x_4 := x_1 x_2$, temos que*

$$\{1,\, x_1,\, x_2,\, x_4\}$$

é um conjunto ortogonormal (de cardinalidade 4) em $\mathcal{A}$ e a multiplicação entre seus elementos é dada por

	1	x_1	x_2	x_4
1	1	x_1	x_2	x_4
x_1	x_1	-1	x_4	$-x_2$
x_2	x_2	$-x_4$	-1	x_1
x_4	x_4	x_2	$-x_1$	-1

.

Demonstração:

Seja N a forma quadrática de $\mathcal{A}$.

Primeiramente, mostraremos que $\{1, x_1, x_2, x_4\}$ é um conjunto ortogonal em $\mathcal{A}$. De fato, por hipótese, temos que

$$N(1) = N(x_1) = N(x_2) = 1$$

e

$$\langle 1, x_1 \rangle = \langle 1, x_2 \rangle = \langle x_1, x_2 \rangle = 0.$$

Como N preserva a multiplicação de $\mathcal{A}$, temos que

$$N(x_4) = N(x_1 x_2) = N(x_1)N(x_2) = 1.$$

E, pelo lema 2.1.10, temos que

$$\langle 1, x_4 \rangle = \langle 1, x_1 x_2 \rangle = \langle \overline{x}_1 1, x_2 \rangle = -\langle x_1, x_2 \rangle = 0,$$

$$\langle x_1, x_4 \rangle = \langle x_1, x_1 x_2 \rangle = \langle \overline{x_1} x_1, x_2 \rangle = \langle N(x_1)1, x_2 \rangle = 0$$

e, analogamente,

$$\langle x_2, x_4 \rangle = 0.$$

Portanto, $\{1,\, x_1,\, x_2,\, x_4\}$ é um subconjunto ortonormal de $\mathcal{A}$.

Adiante, como $\{x_1,\, x_2,\, x_4\} \subset \mathrm{Im}\mathcal{A}$ é um conjunto ortogonal, temos, pelo corolário 2.1.8, que

$$x_1 x_4 = -x_4 x_1$$

e

$$x_2 x_4 = -x_4 x_2.$$

Pela alternatividade de $\mathcal{A}$ e pelo fato de que $N(x_1) = N(x_2) = 1$, temos que

$$x_1 x_4 = x_1(x_1 x_2) = (x_1 x_1)x_2 = -x_2$$

e

$$x_2x_4 = -x_4x_2 = -(x_1x_2)x_2 = -x_1(x_2x_2) = x_1.$$

Assim, temos a tabela de multiplicação como no enunciado.

$\square$

Corolário 4.1.4. *Seja $\mathcal{A}$ e (x_1, x_2) uma dupla básica. Então, o subespaço vetorial de $\mathcal{A}$ gerado por 1, x_1, x_2 e x_1x_2 é uma subálgebra normada 4-dimensional de $\mathcal{A}$.*

Demonstração:

Seja $\mathcal{S}$ o subespaço vetorial de $\mathcal{A}$ gerado por 1, x_1, x_2 e x_1x_2.

Pela proposição 4.1.3, temos que $\mathcal{S}$ é fechado segundo a multiplicação herdada de $\mathcal{A}$. Assim, $\mathcal{S}$ é uma subálgebra.

E, como $\{1,\ x_1,\ x_2,\ x_1x_2\}$ é um conjunto ortogonal em $\mathcal{A}$, temos que a restrição de N a $\mathcal{A}$ é dada por

$$N(\lambda_0 1 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_4 x_1x_2) = \lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_4^2.$$

Logo, $N|_{\mathcal{S}}$ não é degenerada. Portanto, $\mathcal{S}$ é uma subálgebra normada.

$\square$

Proposição 4.1.5. *Sejam $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ álgebras normadas 4-dimensionais reais ou complexas e (x_1, x_2) e (y_1, y_2) duplas básicas em $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$, respectivamente. Seja $T : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ uma transformação ortogonal tal que $T(1) = 1$, $T(x_1) = y_1$ e $T(x_2) = y_2$. Temos que:*

(i) $T(x_1x_2) = \pm y_1y_2$*;*

(ii) $T(x_1x_2) = y_1y_2$ *se e somente se T é um isomorfismo de álgebras normadas.*

Demonstração:

(i)

Como (x_1, x_2) e (y_1, y_2) são duplas básicas, temos, pela proposição 4.1.3, que $\{1,\ x_1,\ x_2,\ x_4 := x_1x_2\}$ e $\{1,\ y_1,\ y_2,\ y_4 := y_1y_2\}$ são bases ortonormais de $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$, respectivamente.

Adiante, como T é ortogonal com $T(1) = 1$, $T(x_1) = y_1$ e $T(x_2) = y_2$, devemos ter que $T(x_4) = \lambda y_4 = \lambda y_1y_2$, para algum $\lambda \in \mathbb{K}$. Além disso,

$$1 = N(x_4) = N(T(x_4)) = N(\lambda y_4) = \lambda^2.$$

Assim, $\lambda = \pm 1$ e, consequentemente, $T(x_4) = \pm y_4$.

(ii)

Se T é um automorfismo de álgebras normadas, temos, imediatamente, que

$$T(x_1x_2) = T(x_1)T(x_2) = y_1y_2.$$

Suponhamos que $T(x_4) = y_4$, onde $x_4 := x_1x_2$ e $y_4 := y_1y_2$. Então, pela tabela da proposição 4.1.3, temos que

$$T(x_ix_j) = T(x_i)T(x_j),$$

para todos $i, j = 1, 2, 4$. Assim, como $\{1,\ x_1,\ x_2,\ x_4 := x_1x_2\}$ e $\{1,\ y_1,\ y_2,\ y_4 := y_1y_2\}$ é uma base de $\mathcal{H}_1$ temos que T preserva o produto de $\mathcal{H}_1$. Logo, como T é ortogonal, T é um isomorfismo.

$\square$

Uma álgebra complexa possui naturalmente uma estrutura de álgebra real (basta restringirmos a ação dos escalares para os reais). Com igual razão, podemos considerar subálgebras reais contidas em álgebras complexas.

Definição 4.1.6. *Seja $\mathcal{H}$ uma subálgebra real de $\mathbb{O}_{\mathbb{C}}$ com $1 \in \mathcal{H}$. Dizemos que $\mathcal{H}$ é uma subálgebra quaterniônica se $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{H} = 4$ e $N(x) \in \mathbb{R}$ para todo $x \in \mathcal{H}$, e $N|_{\mathcal{H}}$ não é degenerada.*

Se $\mathcal{H}$ é uma subálgebra quaterniônica segue, da definição acima, que $\mathcal{H}$ munida da forma quadrática N de $\mathbb{O}_{\mathbb{C}}$ é uma álgebra normada real.

Proposição 4.1.7. *Seja (x_1, x_2) uma dupla básica em $\mathbb{O}_{\mathbb{C}}$. Então, o $\mathbb{R}$-subespaço vetorial de $\mathbb{O}_{\mathbb{C}}$ gerado pelo conjunto $\{1,\ x_1,\ x_2,\ x_4 := x_1x_2\}$ é uma subálgebra quaterniônica.*

Demonstração:
Seja $\mathcal{H}$ o subespaço $\mathbb{R}$-vetorial gerado por 1, x_1, x_2 e $x_4 := x_1x_2$ em $\mathbb{O}_{\mathbb{C}}$. Pela tabela de multiplicação da proposição 4.1.3, temos que $\mathcal{H}$ é uma subálgebra real de $\mathbb{O}_{\mathbb{C}}$.

Adiante, novamente pela proposição 4.1.3, temos que $\mathcal{O}$ tem dimensão real 4 e o conjunto $\{1,\ x_1,\ x_2,\ x_4\}$ é ortonormal. Assim,

$$N(\lambda_0 1 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_4 x_4) = \lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_4^2 \in \mathbb{R},$$

para todos $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, 2, 4$. Segue daí que $\mathcal{H}$ é uma subálgebra quaterniônica.

$\square$

4.2 Triplas Básicas e Subálgebras Octoniônicas

Assim como o conceito de duplas básicas, as triplas básicas servem como cópias de certos conjuntos geradores. Um pouco mais especificamente, o conceito de tripla básica nos permite fazer analogias entre a tripla básica (x_1, x_2, x_7) e a tripla básica (e_1, e_2, e_7) proveniente da construção de $\mathbb{O}$ e $\mathbb{O}_{\mathbb{C}}$ via processo de Cayley-Dickson (veja os exemplos 2.3.9 e 2.5.4).

Definição 4.2.1. *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra normada e x_1, x_2 e $x_7 \in \mathcal{A}$. Dizemos que (x_1, x_2, x_7) é uma tripla básica se $\{1,\ x_1,\ x_2,\ x_1x_2,\ x_7\}$ é um conjunto ortonormal (de cardinalidade 5) em $\mathcal{A}$.*

Exemplo 4.2.2. *Seja $x_1 \in \mathrm{Im}(\mathbb{O})$ com $N(x_1) = 1$. Temos que existe uma tripla básica (x_1, x_2, x_7) em $\mathbb{O}$. De fato, existem $y_2 \in \mathrm{Im}(\mathbb{O})\backslash\{0\}$, tal que $\langle y_2, x_1\rangle = 0$, e $y_7 \in \mathrm{Im}(\mathbb{O})\backslash\{0\}$, tal que $\langle y_7, x_1\rangle = \langle y_7, y_2\rangle = \langle y_7, x_1y_2\rangle = 0$. Assim, como N é positiva em $\mathrm{Im}(\mathbb{O})\backslash\{0\}$, temos que $N(y_2) > 0$ e $N(y_7) > 0$ e, consequentemente, podemos definir $x_2 := N(y_2)^{-\frac{1}{2}}y_2$ e $x_7 := N(y_7)^{-\frac{1}{2}}y_7$. Segue destas definições que (x_1, x_2, x_7) é uma tripla básica.*

Proposição 4.2.3. *Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra normada e (x_1, x_2, x_7) uma tripla básica. Definindo $x_3 := -x_1x_7$, $x_4 := x_1x_2$, $x_5 := -x_4x_7$ e $x_6 = -x_2x_7$, temos que o conjunto*

$$\{1,\, x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4,\, x_5,\, x_6,\, x_7\}$$

é ortonormal (de cardinalidade 8) em $\mathcal{A}$ e a multiplicação entre seus elementos é dada pela tabela

	1	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
1	1	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_1	x_1	-1	x_4	x_7	$-x_2$	x_6	$-x_5$	$-x_3$
x_2	x_2	$-x_4$	-1	x_5	x_1	$-x_3$	x_7	$-x_6$
x_3	x_3	$-x_7$	$-x_5$	-1	x_6	x_2	$-x_4$	x_1
x_4	x_4	x_2	$-x_1$	$-x_6$	-1	x_7	x_3	$-x_5$
x_5	x_5	$-x_6$	x_3	$-x_2$	$-x_7$	-1	x_1	x_4
x_6	x_6	x_5	$-x_7$	x_4	$-x_3$	$-x_1$	-1	x_2
x_7	x_7	x_3	x_6	$-x_1$	x_5	$-x_4$	$-x_2$	-1

Demonstração:

Seja N a forma quadrática de $\mathcal{A}$.

Primeiramente, mostraremos que $\{1, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$ é ortonormal. Por hipótese, temos que

$$N(1) = N(x_1) = N(x_2) = N(x_4) = N(x_7) = 1,$$

$$\langle 1, x_i\rangle = 0, \text{ para } i = 1, 2, 4, 7,$$

e

$$\langle x_i, x_j\rangle = 0, \text{ para } i, j = 1, 2, 4, 7 \text{ e } i \neq j.$$

Como N preserva o produto de $\mathcal{A}$, temos que

$$N(x_3) = N(-x_1x7) = N(x_1)N(x_7) = 1$$

e, analogamente,

$$N(x_5) = N(x_6) = 1.$$

Pelo lema 2.1.10, temos que

$$\langle 1, x_3\rangle = \langle 1, -x_1x_7\rangle = -\langle \overline{x_1}, x_7\rangle = \langle x_1, x_7\rangle = 0$$

e, analogamente,

$$\langle 1, x_5\rangle = \langle 1, x_6\rangle = 0.$$

Adiante,

$$\langle x_1, x_3\rangle = \langle x_1, -x_1x_7\rangle = -\langle \overline{x_1}x_1, x_7\rangle = -\langle 1, x_7\rangle = 0$$

e, analogamente,

$$\langle x_2, x_6\rangle = \langle x_4, x_5\rangle = \langle x_7, x_3\rangle = \langle x_7, x_5\rangle = \langle x_7, x_6\rangle = 0.$$

Por fim, utilizando a alternatividade de $\mathcal{A}$ e o corolário 2.1.8,

$$\langle x_1, x_5\rangle = \langle x_1, -x_4x_7\rangle = -\langle \overline{x_4}x_1, x_7\rangle = -\langle x_1(x_1x_2), x_7\rangle = \langle x_2, x_7\rangle = 0$$

e, analogamente,

$$\langle x_1, x_6\rangle = \langle x_2, x_3\rangle = \langle x_2, x_5\rangle = \langle x_4, x_3\rangle = \langle x_4, x_6\rangle = 0.$$

Portanto, $\{1, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$ é um conjunto ortonormal.

Como (x_1, x_2, x_7) é uma tripla básica, temos, diretamente das definições, que (x_1, x_2) é uma dupla básica. Seja $\mathcal{S}$ o espaço vetorial gerado por 1, x_1, x_2 e x_4. Pelo corolario 4.1.4, temos que $\mathcal{S}$ é uma subálgebra normada. E, como $x_7 \in \mathcal{S}^\perp$, temos que $\mathcal{S}$ é uma subálgebra normada própria de $\mathcal{A}$.

Pela proposição 2.3.14, temos que a multiplicação em $\mathcal{S} \oplus \mathcal{S}x_7$ é dada pela fórmula

$$(x + yx_7)(z + wx_7) = (xz + \lambda\overline{w}y) + (wx + y\overline{z})x_7, \qquad (4.1)$$

para todos x, y, z e $w \in \mathcal{S}$.

Assim, utilizando a fórmula 4.1, podemos obter todas as entradas da tabela do enunciado. Por exemplo, segue da fórmula que

$$x_1x_5 = x_1(-x_4x_7) = (-x_4x_1)x_7 = x_2x_7 = -x_6.$$

□

Definição 4.2.4. *Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra normada e (x_1, x_2, x_7) uma tripla básica em $\mathcal{A}$. Dizemos que a base de $\mathcal{A}$ formada por 1, x_1, x_2, $x_3 := -x_1x_7$, $x_4 := x_1x_2$, $x_5 := -x_4x_7$, $x_6 := -x_2x_7$ e x_7 (como na proposição anterior) é a base induzida pela tripla básica (x_1, x_2, x_7).*

Definição 4.2.5. *Seja $\mathcal{O}$ uma subálgebra real de $\mathbb{O}_\mathbb{C}$ com $1 \in \mathcal{O}$. Dizemos que $\mathcal{O}$ é uma subálgebra octoniônica se $\dim_\mathbb{R} \mathcal{O} = 8$ e $N(x) \in \mathbb{R}$ para todo $x \in \mathcal{O}$.*

Seja $\mathcal{O}$ uma subálgebra octoniônica. Como $\mathcal{O}$ tem dimensão real 8, segue que $\mathbb{O}_\mathbb{C} = \mathcal{O} \oplus i\mathcal{O}$. Assim, segue que N é uma forma quadrática (real) em $\mathcal{O}$ não degenerada. Portanto, pela definição acima, uma subálgebra octoniônica $\mathcal{O}$, munida da forma quadrática N de $\mathbb{O}_\mathbb{C}$, é uma álgebra normada real.

Exemplo 4.2.6. *Pela tabela de multiplicação dada no exemplo 2.5.4, temos que o $\mathbb{R}$-subespaço vetorial de $\mathbb{O}_\mathbb{C}$ gerado por 1, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6 e e_7 é* *uma subálgebra real de dimensão* 8*. Denotemos por* $\mathbb{O}$ *tal subálgebra. Como o conjunto* $\{1,\, e_1,\, e_2,\, e_3,\, e_4,\, e_5,\, e_6,\, e_7\}$ *é ortonormal, temos que*

$$N\Big(\lambda_0 1 + \sum_{i=1}^{7} \lambda_i e_i\Big) = \sum_{i=0}^{7} \lambda_i^2 \in \mathbb{R},$$

para quaisquer $\lambda_i \in \mathbb{R}$*,* $i = 0, ..., 7$*. Assim, o* $\mathbb{O}$ *é uma subálgebra octoniônica. Segue da descrição acima, da restrição da forma quadrática* N*, que* $\mathbb{O}$ *é isomorfa a álgebra normada real de divisão* $\mathbb{O}$ *definida no exemplo 2.3.9 (veja o teorema 2.4.5).*

Exemplo 4.2.7. *Denotemos por* $\mathbb{O}_{\text{deg}}$ *o* $\mathbb{R}$*-subespaço vetorial de* $\mathbb{O}_{\mathbb{C}}$ *gerado por* $1,\, e_1,\, e_2,\, ie_3,\, e_4,\, ie_5,\, ie_6$ *e* ie_7*. Segue da tabela de multiplicação dada no exemplo 2.5.4 que* $\mathbb{O}_{\text{deg}}$ *é uma subálgebra real de* $\mathbb{O}_{\mathbb{C}}$ *de dimensão* 8*. Além disso, como* $\{1,\, e_1,\, e_2,\, e_3,\, e_4,\, e_5,\, e_6,\, e_7\}$ *é ortonormal, temos que*

$$N\Big(\lambda_0 1 + \sum_{i=1,2,4} \lambda_i e_i \sum_{i=3,5,6,7} \lambda_i i e_i\Big) = \sum_{i=0,1,2,4} \lambda_i^2 - \sum_{i=3,5,6,7} \lambda_i^2 \in \mathbb{R},$$

para quaisquer $\lambda_i \in \mathbb{R}$*,* $i = 0, ..., 7$*. Da descrição acima, da restrição da forma quadrática* N *a* $\mathbb{O}_{\text{deg}}$*, conclui-se que* $\mathbb{O}_{\text{deg}}$ *é uma subálgebra octoniônica isomorfa à álgebra normada real degenerada* $\mathbb{O}_{\text{deg}}$ *definida em 2.3.10 (veja o teorema 2.4.5).*

Proposição 4.2.8. *Seja* (x_1, x_2, x_7) *uma tripla básica em* $\mathbb{O}_{\mathbb{C}}$*. Então, o* $\mathbb{R}$*-subespaço vetorial de* $\mathbb{O}_{\mathbb{C}}$ *gerado pela base induzida por* (x_1, x_2, x_7) *é uma subálgebra octoniônica isomorfa a* $\mathbb{O}$*.*

Demonstração:

Sejam 1, x_1, x_2, $x_3 := -x_1x_7$, $x_4 := x_1x_2$, $x_5 := -x_4x_7$, $x_6 := -x_2x_7$ e x_7 os elementos da base induzida por (x_1, x_2, x_7) e $\mathcal{O}$ o $\mathbb{R}$-subespaço vetorial gerado por estes elementos. Segue da tabela de multiplicação dada na proposição 4.2.3, que $\mathcal{O}$ é uma subálgebra real de $\mathbb{O}_{\mathbb{C}}$.

Adiante, novamente pela proposição 4.2.3, temos que $\mathcal{O}$ tem dimensão real 8 e o conjunto $\{1,\, x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4,\, x_5,\, x_6,\, x_7\}$ é ortonormal. Assim,

$$N\Big(\lambda_0 1 + \sum_{i=1}^{7} \lambda_i x_i\Big) = \sum_{i=0}^{7} \lambda_i^2 \in \mathbb{R},$$

para todos $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, ..., 7$. Segue daí que $\mathcal{O}$ é uma subálgebra octoniônica.

Portanto, $\mathcal{O}$ é uma álgebra normada real de divisão de dimensão 8. Assim, pelo teorema 2.4.5, temos que $\mathcal{O}$ é isomorfo à $\mathbb{O}$.

□

4.3 Grupos de Automorfismos de Álgebras Normadas

Nesta seção faremos as primeiras discussões sobre a estrutura de grupo de Lie do grupo dos automorfismos $\text{Aut}(\mathcal{A})$ de uma álgebra normada real $\mathcal{A}$.

Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra normada. Pelo teorema 2.2.4, temos que um isomorfismo linear $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ é um isomorfismo de álgebras normadas se e só se φ preserva o produto em $\mathcal{A}$. Isto é,

$$\mathrm{Aut}(\mathcal{A}) = \{\varphi \in \mathrm{GL}(\mathcal{A}); \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) \text{ para todo } x \text{ e } y \in \mathcal{A}\}.$$

Definição 4.3.1 (Derivação)**.** *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra e $D : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ uma transformação linear. Dizemos que D é uma derivação em $\mathcal{A}$ se D satisfaz a regra de Leibniz:*

$$D(xy) = D(x)y + xD(y),$$

para todos $x, y \in \mathcal{A}$. O conjunto das derivações em uma álgebra $\mathcal{A}$ é usualmente denotado por $\mathfrak{der}(\mathcal{A})$.

Segue da definição, que $\mathrm{Aut}(\mathcal{A})$ é um subgrupo de $GL(\mathcal{A})$. E, como veremos na próxima proposição, $\mathfrak{der}(\mathcal{A})$ é uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(\mathcal{A})$.

Proposição 4.3.2. *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra normada real. Então:*

(i) $\mathrm{Aut}(\mathcal{A})$ *é um subgrupo de Lie de* $\mathrm{GL}(\mathcal{A})$*;*

(ii) $\mathrm{Lie}(\mathrm{Aut}(\mathcal{A})) = \mathfrak{der}(\mathcal{A})$*.*

Demonstração:

(i)

Como vimos no comentário acima, as aplicações $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathcal{A})$ são exatamente as aplicações de $\mathrm{GL}(\mathcal{A})$ que satisfazem

$$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y), \tag{4.2}$$

para cada x e $y \in \mathcal{A}$.

É imediato verificar que a identidade $I_{\mathcal{A}} \in \mathrm{GL}(\mathcal{A})$ satisfaz 4.2. Assim como, é imediato verificar que se $\varphi \in \mathrm{GL}(\mathcal{A})$ satisfaz 4.2 então $\varphi^{-1} \in \mathrm{GL}(\mathcal{A})$ também satisfaz a mesma condição. Portanto, $\mathrm{Aut}(\mathcal{A})$ é um subgrupo de $\mathrm{GL}(\mathcal{A})$.

Pela continuidade[1] da multiplicação de $\mathcal{A}$, temos que o subconjunto de $\mathrm{GL}(\mathcal{A})$ que satisfaz a condição acima, é fechado em $\mathrm{GL}(\mathcal{A})$. Isto é, $\mathrm{Aut}(\mathcal{A})$ é um subgrupo fechado de $\mathrm{GL}(\mathcal{A})$.

Portanto, temos, pelo Teorema do Subgrupo Fechado (o teorema 1.1.16), que $\mathrm{Aut}(\mathcal{A})$ é um subgrupo de Lie de $\mathrm{GL}(\mathcal{A})$.

(ii)

Como vimos na demonstração do item anterior, $\mathrm{Aut}(\mathcal{A})$ é um subgrupo fechado de $\mathrm{GL}(\mathcal{A})$. Assim, novamente pelo Teorema do Subgrupo Fechado 1.1.16, temos que

$$\mathrm{Lie}(\mathrm{Aut}(\mathcal{A})) = \{X \in \mathfrak{gl}(\mathcal{A}); \exp(tX) \in \mathrm{Aut}(\mathcal{A}),\ t \in \mathbb{R}\}.$$

[1] a multiplicação é continua com relação à topologia de espaço vetorial normado

Seja $D \in \mathrm{Lie}(\mathrm{Aut}(\mathcal{A}))$. Pela descrição acima de $\mathrm{Lie}(\mathrm{Aut}(\mathcal{A}))$, temos que

$$\exp(tD)(xy) = (\exp(tD)(x))(\exp(tD)(y)),$$

para todos x e $y \in \mathcal{A}$ e $t \in \mathbb{R}$. Como

$$\exp(tD) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tD)^n}{n!},$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que

$$\frac{\mathrm{d}(\exp(tD)(xy))}{\mathrm{d}t}(t_0) = D \circ \exp(t_0 D)(xy),$$

para todos $t_0 \in \mathbb{R}$ e x e $y \in \mathcal{A}$. Por outro lado, como a multiplicação em $\mathcal{A}$ é bilinear, temos que

$$\begin{array}{rcl} \frac{\mathrm{d}\left((\exp(tD)(x))(\exp(tD)(y))\right)}{\mathrm{d}t}(t_0) & = & \left(\frac{\mathrm{d}(\exp(tD)(x))}{\mathrm{d}t}(t_0)\right)(\exp(tD)(y)) \\ & & \quad + (\exp(tD)(x))\left(\frac{\mathrm{d}(\exp(tD)(y))}{\mathrm{d}t}(t_0)\right) \\ & = & (D \circ \exp(t_0 D)(x))(\exp(t_0 D)(y)) \\ & & \quad + (\exp(t_0 D)(x))(D \circ \exp(t_0 D)(y)), \end{array}$$

para todo $t_0 \in \mathbb{R}$ e x e $y \in \mathcal{A}$. Assim, tomando-se $t_0 = 1$ nas igualdades acima, temos que

$$\begin{array}{rcl} D(\exp(D)(x)\exp(D)(y)) & = & D \circ \exp(D)(xy) \\ & = & \frac{\mathrm{d}(\exp(tD)(xy))}{\mathrm{d}t}(1) \\ & = & \frac{\mathrm{d}\left((\exp(tD)(x))(\exp(tD)(y))\right)}{\mathrm{d}t}(1) \\ & = & (D \circ \exp(D)(x))(\exp(D)(y)) \\ & & \quad + (\exp(D)(x))(D \circ \exp(D)(y)), \end{array}$$

para todos x e $y \in \mathcal{A}$. Assim, como $\exp(D) \in \mathrm{Aut}(\mathcal{A}) \subset \mathrm{GL}(\mathcal{A})$, segue que

$$D(xy) = D(x)y + xD(y)$$

para todos x e $y \in \mathcal{A}$. Portanto, $D \in \mathfrak{der}(\mathcal{A})$.

Seja $D \in \mathfrak{der}(\mathcal{A})$. Concluiremos que $D \in \mathrm{Lie}(\mathrm{Aut}(\mathcal{A}))$ mostrando que, dados x e $y \in \mathcal{A}$, as curvas α e $\beta : \mathbb{R} \to \mathcal{A}$ dadas por

$$\alpha(t) = \exp(tD)(xy)$$

e

$$\beta(t) = (\exp(tD)(x))(\exp(tD)(y)),$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, são iguais. Para todo $t_0 \in \mathbb{R}$, temos que

$$\begin{array}{rcl} \alpha'(t_0) & = & \frac{\mathrm{d}(\exp(tD)(xy))}{\mathrm{d}t}(t_0) \\ & = & D \circ \exp(t_0 D)(xy) \\ & = & D \circ \alpha(t_0) \end{array}$$

e

$$
\begin{aligned}
\beta'(t_0) &= \frac{\mathrm{d}\Big((\exp(tD)(x))(\exp(tD)(y))\Big)}{\mathrm{d}t}(t_0) \\
&= (D \circ \exp(t_0 D)(x))(\exp(t_0 D)(y)) \\
&\quad + (\exp(t_0 D)(x))(D \circ \exp(t_0 D)(y)) \\
&= D \circ \big((\exp(t_0 D)(x))(\exp(t_0 D)(y))\big) \\
&= D \circ \beta(t_0).
\end{aligned}
$$

E também, temos que

$$\alpha(0) = \exp(0)(xy) = xy = (\exp(0)(x))(\exp(0)(y)) = \beta(0).$$

Portanto, α e β são solução do mesmo problema de Cauchy linear. Consequentemente, $\alpha = \beta$. E, assim, temos que $D \in \mathrm{Lie}(\mathrm{Aut}(\mathcal{A}))$.

Portanto, $\mathrm{Lie}(\mathrm{Aut}(\mathcal{A})) = \mathfrak{der}(\mathcal{A})$.

□

Agora, prossiguiremos com algumas caracterizações de $\mathrm{Aut}(\mathcal{A})$, de dimensão 8, por meio de triplas básicas em $\mathcal{A}$.

Lema 4.3.3. *Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra normada, T_1 e $T_2 \in \mathrm{Aut}(\mathcal{A})$ e (x_1, x_2, x_3) uma tripla básica em $\mathcal{A}$. Se $T_1(x_i) = T_2(x_i)$, $i = 1, 2, 7$, então $T_1 = T_2$.*

Demonstração:

Seja $\{1,\, x_1,\, x_2,\, x_3 := -x_1x_7,\, x_4 := x_1x_2,\, x_5 := -x_4x_7,\, x_6 := -x_2x_7,\, x_7\}$ a base de $\mathcal{A}$ induzida por (x_1, x_2, x_7).

Pelo lema 2.1.12, temos que $T_1(1) = 1 = T_2(1)$.

Como T_1 e T_2 preservam o produto de $\mathcal{A}$, temos que

$$T_1(x_4) = T_1(x_1x_2) = T_1(x_1)T_1(x_2) = T_2(x_1)T_2(x_2) = T_2(x_1x_2) = T_2(x_4).$$

E, analogamente,

$$T_1(x_i) = T_2(x_i)$$

para $i = 1, 2, ..., 7$.

Assim, T_1 e T_2 coincidem na base induzida por (x_1, x_2, x_7) e, portanto, $T_1 = T_2$.

□

Proposição 4.3.4. *Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra normada, (x_1, x_2, x_3) e (y_1, y_2, y_7) triplas básicas em $\mathcal{A}$. Então existe exatamente um automorfismo $T \in \mathrm{Aut}(\mathcal{A})$ tal que $T(x_i) = y_i$ para $i = 1, 2, 7$.*

Demonstração:

Sejam $\{1,\, x_1,\, x_2,\, x_3 := -x_1x_7,\, x_4 := x_1x_2,\, x_5 := -x_4x_7,\, x_6 := -x_2x_7,\, x_7\}$ e $\{1,\, y_1,\, y_2,\, y_3 := -y_1y_7,\, y_4 := y_1y_2,\, y_5 := -y_4y_7,\, y_6 := -y_2y_7,\, y_7\}$ as bases induzidas pelas triplas básicas (x_1, x_2, x_7) e (y_1, y_2, y_7), respectivamente.

Consideremos a transformação linear $T : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ dada por

$$T(1) = 1$$

e

$$T(x_i) = y_i,$$

para cada $i = 1, 2, ..., 7$. Segue da tabela dada na proposição 4.2.3, que

$$T(x_i x_j) = T(x_i)T(x_j),$$

para todos $i, j = 1, 2, ..., 7$. Por exemplo,

$$T(x_1 x_7) = T(-x_3) = -y_3 = y_1 y_7 = T(x_1)T(x_7).$$

Assim, T preserva o produto dos elementos da base induzida por (x_1, x_2, x_7). E, consequentemente, T preserva o produto de $\mathcal{A}$.

Portanto, pelo teorema 2.2.4, temos que $T \in \mathrm{Aut}(\mathcal{A})$.

A unicidade de T com a propriedade do enunciado segue diretamente do lema 4.3.3.

□

4.4 O Grupo $\mathrm{Aut}(\mathbb{O})$

Nesta seção discutiremos sobre o grupo de Lie $\mathrm{Aut}(\mathbb{O})$. Em especial sobre a sua compacidade e conexidade.

Seja $\{1, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$ a base de $\mathbb{O}$, como descrita no exemplo 2.3.9, resultante do processo de Cayley-Dickson. Temos, pela descrição de $N : \mathbb{O} \to \mathbb{R}$ dada no exemplo 2.3.9, que (e_1, e_2, e_7) formam uma tripla básica em $\mathbb{O}$.

Seja

$$S^6 := \left\{ x = \sum_{i=1}^{7} \lambda_i e_i \in \mathbb{O}; N(x) = 1 \right\}.$$

Como os elementos de $\mathrm{Aut}(\mathbb{O})$ preservam N, temos que $\mathrm{Aut}(\mathbb{O})$ age suavemente na variedade suave S^6. Assim, pelo teorema 1.1.24, temos que

$$H_{e_1} := \{T \in \mathrm{Aut}(\mathbb{O}); T(e_1) = e_1\}$$

é um subgrupo de Lie fechado de $\mathrm{Aut}(\mathbb{O})$.

Analogamente, temos que H_{e_1} age diferencialmente em

$$S^5 := \left\{ x = \sum_{i=2}^{7} \lambda_i e_i \in \mathbb{O}; N(x) = 1 \right\}$$

e

$$H_{e_1,e_2} := \{T \in \mathrm{Aut}(\mathbb{O}); T(e_1) = e_1 \text{ e } T(e_2) = e_2\}$$

é um subgrupo de Lie (mergulhado) fechado de H_{e_1}.

Proposição 4.4.1.

(i) $\mathrm{Aut}(\mathbb{O})/H_{e_1}$ *é homeomorfo a* S^6*;*

(ii) $H_{e_1}/H_{e_1,e_2}$ *é homeomorfo a* S^5*;*

(iii) H_{e_1,e_2} *é homeomorfo a* S^3*.*

Demonstração:

(i)

Pelo teorema 1.1.24, basta verificarmos que $\mathrm{Aut}(\mathbb{O})$ age transitivamente em S^6. Em especial, basta verificarmos que, para todo

$$x \in S^6 := \left\{ x = \sum_{i=1}^{7} \lambda_i e_i \in \mathbb{O}; N(x) = 1 \right\},$$

existe $T \in \mathrm{Aut}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$ tal que $T(x) = e_1$.

Seja $x \in S^6$. Como $x \in \mathrm{Im}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$ e $N(x) = 1$, temos que existem x_2 e $x_7 \in \mathrm{Im}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$ tais que (x, x_2, x_7) é uma tripla básica. Assim, pela proposição 4.3.4, existe um automorfismo $T : \mathbb{O}_{\mathbb{C}} \to \mathbb{O}_{\mathbb{C}}$ definido por

$$T(x) = e_1,\ T(x_2) = e_2 \text{ e } T(x_7) = e_7.$$

(ii)

Novamente pelo teorema 1.1.24, basta verificarmos que H_{e_1} age transitivamente em S^5. Em especial, basta verificarmos que para todo

$$x \in S^5 := \left\{ x = \sum_{i=2}^{7} \lambda_i e_i \in \mathbb{O}; N(x) = 1 \right\}$$

existe $T \in H_{e_1}$ tal que $T(x) = e_2$.

Seja $x \in S^5$. Como $x \in \mathrm{Im}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$, $N(x) = 1$ e $x \perp e_1$, temos que existe $x_7 \in \mathrm{Im}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$ tal que (e_1, x, x_7) é uma tripla básica. Assim, pela proposição 4.3.4, existe um automorfismo $T : \mathbb{O}_{\mathbb{C}} \to \mathbb{O}_{\mathbb{C}}$ definido por

$$T(e_1) = e_1,\ T(x) = e_2 \text{ e } T(x_7) = e_7.$$

(iii)

Seja

$$S^3 := \{x = \lambda_3 e_3 + \lambda_5 e_5 + \lambda_6 e_6 + \lambda_7 e_7; N(x) = 1\}.$$

Dado $T \in H_{e_1,e_2}$, temos que $T(e_7) \in S_3$. De fato, como

$$T(1) = 1,\ T(e_1) = e_1,\ T(e_2) = e_2 \text{ e } T(e_4) = e_4,$$

temos que $e_7 \perp 1$, e_1, e_2 e e_4 implica que $T(e_7) \perp 1$, e_1, e_2 e e_4. Assim,

$$T(e_7) = \lambda_3 e_3 + \lambda_5 e_5 + \lambda_6 e_6 + \lambda_7 e_7,$$

para alguns λ_3, λ_5, λ_6 e $\lambda_7 \in \mathbb{R}$, e

$$N(T(e_7)) = N(e_7) = 1.$$

Para cada $x = \lambda_3 e_3 + \lambda_5 e_5 + \lambda_6 e_6 + \lambda_7 e_7 \in S^3$, temos que existe um único $T \in H_{e_1,e_2}$ tal que $T(e_7) = x$. De fato, (e_1, e_2, x) é uma tripla básica. Assim, pela proposição 4.3.4, temos que esxiste um automorfismo $T \in \mathrm{Aut}(\mathbb{O})$ tal que

$$T(e_1) = e_1,\ T(e_2) = e_2 \text{ e } T(e_7) = x.$$

Segue que $T \in H_{e_1,e_2}$ e $T(e_7) = x$ como queríamos. Por outro lado, se $T' \in H_{e_1,e_2}$ e $T'(e_7) = x_7$, teríamos que T e T' coincidem na tripla básica (e_1, e_2, e_7). Assim, pelo lema 4.3.3, $T = T'$.

Portanto, a aplicação

$$\begin{array}{rcl} H_{e_1,e_2} & \to & S^3 \\ T & \to & T(e_7) \end{array}$$

é um homeomorfismo.

□

Corolário 4.4.2. *Temos que* $\mathrm{Aut}(\mathbb{O})$ *é compacto e conexo.*

Demonstração:

Pelo proposição anterior, temos que $\mathrm{Aut}(\mathbb{O})/H_{e_1}$, $H_{e_1}/H_{e_1,e_2}$ e H_{e_1,e_2} são espaços compactos e conexos.

Como $H_{e_1}/H_{e_1,e_2}$ e H_{e_1,e_2} são espaços compactos e conexos, segue, da proposição 1.1.22, que H_{e_1} é compacto e conexo.

Além disso, como $\mathrm{Aut}(\mathbb{O})/H_{e_1}$ e H_{e_1} são compactos e conexos, temos, novamente pela proposição 1.1.22, que $\mathrm{Aut}(\mathbb{O})$ é compacto e conexo.

□

Capítulo 5

G_2 e os Octônios

Neste capítulo, introduziremos as álgebras das derivações das álgebras normadas e provaremos que a álgebra das derivações em $\mathbb{O}_{\mathbb{C}}$ é uma álgebra de Lie simples do tipo G_2. No fim do capítulo, mostraremos que as representações fundamentais de G_2 são exatamente a das derivações em $\mathbb{O}_{\mathbb{C}}$ e a adjunta.

Neste capítulo, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ e $\mathbb{O}_{\mathbb{K}} = \mathbb{O}$ ou $\mathbb{O}_{\mathbb{C}}$.

5.1 A Álgebra das Derivações em $\mathbb{O}_{\mathbb{K}}$

Na proposição 4.3.2, vimos que a álgebras das derivações $\mathfrak{der}(\mathcal{A})$ em uma álgebra normada $\mathcal{A}$ real é a álgebra de Lie do grupo de Lie $\mathrm{Aut}(\mathcal{A})$ formado pelos automorfismos de $\mathcal{A}$.

Nesta seção, introduziremos uma estrutura de álgebra de Lie complexa em $\mathfrak{der}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$. E desenvolveremos algumas das propriedades desta álgebra e, também, da álgebra $\mathfrak{der}(\mathbb{O})$.

Proposição 5.1.1. *Para qualquer álgebra $\mathcal{A}$, $\mathfrak{der}(\mathcal{A})$ é uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(\mathcal{A})$.*

Demonstração:

Sejam $x, y \in \mathcal{A}$, $\lambda \in \mathbb{K}$ e $D_1, D_2 \in \mathfrak{der}(\mathcal{A})$. Temos que

$$\begin{aligned}(D_1 + \lambda D_2)(xy) &= D_1(xy) + \lambda D_2(xy)\\ &= D_1(x)y + xD_1(y) + \lambda(D_2(x)y + xD_2(y))\\ &= (D_1 + \lambda D_2)(x)y + x(D_1 + \lambda D_2)(y)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}[D_1, D_2](xy) &= D_1D_2(xy) - D_2D_1(xy)\\ &= D_1(D_2(x)y) + D_1(xD_2(y)) - D_2(D_1(x)y) - D_2(xD_1(y))\\ &= D_1D_2(x)y + D_2(x)D_1(y) + D_1(x)D_2(y) + xD_1D_2(y)\\ &\quad -D_2D_1(x)y - D_1(x)D_2(y) - D_2(x)D_1(y) - xD_2D_1(y)\\ &= [D_1, D_2](x)y + x[D_1, D_2](y).\end{aligned}$$

Daí, concluímos que $\mathfrak{der}(\mathcal{A})$ é um subespaço de $\mathfrak{gl}(\mathcal{A})$ fechado pelo colchete de Lie de $\mathfrak{gl}(\mathcal{A})$.

□

No próximo lema, veremos como as derivações em $\mathbb{O}_{\mathbb{K}}$ se relacionam com a forma $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em $\mathbb{O}_{\mathbb{K}}$.

Lema 5.1.2. *Seja $D \in \mathfrak{der}(\mathbb{O}_{\mathbb{K}})$. Então:*

(i) $D(1) = 0$*;*

(ii) Para todo $x \in \mathrm{Im}(\mathbb{O}_{\mathbb{K}})$ com $N(x) \neq 0$, temos que $D(x) \in \mathrm{Im}(\mathbb{O}_{\mathbb{K}}) \cap x^{\perp}$;

(iii) $D(\mathrm{Im}(\mathbb{O}_{\mathbb{K}})) \subset \mathrm{Im}(\mathbb{O}_{\mathbb{K}})$*;*

(iv) $\overline{D(x)} = D(\overline{x})$, para todo $x \in \mathbb{O}_{\mathbb{K}}$.

Demonstração:

(i)

Temos que

$$D(1) = D(1 \cdot 1) = D(1)1 + 1D(1) = 2D(1).$$

Logo, $D(1) = 0$.

(ii)

Seja $x \in \mathrm{Im}(\mathbb{O}_{\mathbb{K}})$ com $N(x) \neq 0$. Temos que

$$D(x) = \lambda 1 + \mu x + y,$$

para certos λ e $\mu \in \mathbb{K}$ e $y \in \mathrm{Im}(\mathbb{O}_{\mathbb{K}}) \cap x^{\perp}$.

Temos que

$$\begin{array}{rcll}
0 & = & D(-N(x)1) & \text{(pelo item (i))} \\
 & = & D(x^2) & \text{(pelo lema 2.1.10)} \\
 & = & D(x)x + xD(x) & \\
 & = & (\lambda 1 + \mu x + y)x + x(\lambda 1 + \mu x + y) & \\
 & = & 2\lambda x + 2\mu x^2 + yx + xy & \\
 & = & 2\lambda x - 2\mu N(x)1 + yx + xy & \text{(pelo lema 2.1.10)} \\
 & = & 2\lambda x - 2\mu N(x)1 & \text{(pelo lema 2.1.6)}
\end{array}$$

Assim, $\lambda = \mu = 0$.

Portanto, $D(x) = y \in \mathrm{Im}(\mathbb{O}_{\mathbb{K}}) \cap x^{\perp}$.

(iii)

Como a forma quadrática N de $\mathbb{O}_{\mathbb{K}}$ não é degenerada, temos que exite uma base de $\mathrm{Im}(\mathbb{O}_{\mathbb{K}})$ formada por elementos x_1,..., x_7 tais que $N(x_i) \neq 0$, para $i = 1$,...,7. Assim, o resultado segue do item anterior.

(iv)

Seja $x = \lambda 1 + y \in \mathbb{O}_{\mathbb{K}}$, com $y \in \mathrm{Im}(\mathbb{O}_{\mathbb{K}})$. Então,

$$\begin{array}{rcll} \overline{D(x)} & = & \overline{D(y)} & \text{(pelo item (i))} \\ & = & -D(y) & \text{(pelo item (iii))} \\ & = & D(1-y) & \text{(pelo item (i))} \\ & = & D(\overline{x}). & \end{array}$$

□

Assim como usamos triplas básicas para descrever o produto em $\mathbb{O}_{\mathbb{K}}$, usaremos triplas básicas para descrever os elementos de $\mathfrak{Der}(\mathbb{O}_{\mathbb{K}})$ e seus colchetes de Lie.

Lema 5.1.3. *Seja (x_1, x_2, x_7) uma tripla básica em $\mathbb{O}_{\mathbb{K}}$. Temos que:*

(i) Se D_1 e $D_2 \in \mathfrak{Der}(\mathbb{O}_{\mathbb{K}})$ são tais que

$$D_1(x_i) = D_2(x_i)$$

para $i = 1$, 2 e 7, então $D_1 = D_2$;

(ii) Existe $D_{(x_1,x_2,x_7)} \in \mathfrak{Der}(\mathbb{O}_{\mathbb{K}})$ tal que

$$D_{(x_1,x_2,x_7)}(x_1) = x_2,\ D_{(x_1,x_2,x_7)}(x_2) = -x_1 \ \text{e}\ D_{(x_1,x_2,x_7)}(x_7) = 0.$$

Demonstração:

(i)

Sejam 1, x_1, x_2, $x_3 := -x_1x_7$, $x_4 := x_1x_2$, $x_5 := -x_4x_7$, $x_6 = -x_2x_7$ e x_7 os elementos da base induzida pela tripla básica (x_1, x_2, x_7). Temos que

$$\begin{array}{rcl} D_1(x_3) & = & D_1(x_7x_1) \\ & = & D_1(x_7)x_1 + x_7D_1(x_1) \\ & = & D_2(x_7)x_1 + x_7D_2(x_1) \\ & = & D_2(x_7x_1) \\ & = & D_2(x_3). \end{array}$$

Analogamente, prova-se que $D_1(x_4) = D_2(x_4)$, $D_1(x_5) = D_2(x_5)$, $D_1(x_6) = D_2(x_6)$.

Pelo lema 5.1.2, temos que $D_1(1) = D_2(1) = 0$.

Assim, D_1 e D_2 coincidem na base $\{1, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$. Portanto, $D_1 = D_2$.

(ii)

Sejam 1, x_1, x_2, $x_3 := -x_1x_7$, $x_4 := x_1x_2$, $x_5 := -x_4x_7$, $x_6 = -x_2x_7$ e x_7 os elementos da base induzida pela tripla básica (x_1, x_2, x_7).

Seja $\mathcal{H}$ a subálgebra normada de $\mathbb{O}_\mathbb{K}$ gerada pela dupla básica (x_1, x_2) (veja o corolário 4.1.4). Pelo proposição 2.3.14, temos que $\mathbb{O}_\mathbb{K} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}x_7$ e

$$(x + yx_7)(z + wx_7) = (xz - \overline{w}y) + (wx + y\overline{z})x_7,$$

para todos x, y, z e $w \in \mathcal{H}$.

Definimos a aplicação linear $D := D_{(x_1,x_2,x_7)} : \mathbb{O}_\mathbb{K} \to \mathbb{O}_\mathbb{K}$ por

$$D(\alpha_0 1 + \alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \alpha_4x_4) = -\alpha_2x_1 + \alpha_1x_2,$$

para todos α_0, α_1, α_2 e $\alpha_4 \in \mathbb{K}$, e

$$D(yx_7) = D(y)x_7,$$

para todo $y \in \mathcal{H}$.

Para $x = \alpha_0 1 + \alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \alpha_4x_4$ e $y = \beta_0 1 + \beta_1x_1 + \beta_2x_2 + \beta_4x_4 \in \mathcal{H}$, com α_i e $\beta_i \in \mathbb{K}$, temos que

$$\begin{array}{rcl}
D(xy) & = & D\big((\alpha_0 1 + \alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \alpha_4x_4)(\beta_0 1 + \beta_1x_1 + \beta_2x_2 + \beta_4x_4)\big) \\
& = & D\big((\alpha_0\beta_0 - \alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2 - \alpha_4\alpha_4)1+ \\
& & \qquad + (\alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0 + \alpha_2\beta_4 - \alpha_4\beta_2)x_1 \\
& & \qquad + (\alpha_0\beta_2 - \alpha_1\beta_4 + \alpha_2\beta_0 + \alpha_4\beta_1)x_2 \\
& & \qquad + (\alpha_0\beta_4 + \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 + \alpha_4\beta_0)x_4\big) \\
& = & (\alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0 + \alpha_2\beta_4 - \alpha_4\beta_2)x_2 - \\
& & \qquad - (\alpha_0\beta_2 - \alpha_1\beta_4 + \alpha_2\beta_0 + \alpha_4\beta_1)x_1 \\
& = & (-\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_2 beta_2 - \alpha_2\beta_1)1+ \\
& & \qquad + (-\alpha_0\beta_2 + \alpha_1\beta_4 - \alpha_2\beta_0 - \alpha_4\beta_1)x_1 \\
& & \qquad + (\alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0 + \alpha_2\beta_4 - \alpha_4\beta_2)x_2 \\
& & \qquad + (-\alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2 + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2)x_4 \\
& = & (\alpha_1x_1 - \alpha_2x_2)(\beta_0 1 + \beta_1x_1 + \beta_2x_2 + \beta_4x_4)+ \\
& & \qquad + (\alpha_0 1 + \alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \alpha_4x_4)(\beta_1x_2 - \beta_1x_1) \\
& = & D(\alpha_0 1 + \alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \alpha_4x_4)y + xD(\beta_0 1 + \beta_1x_1 + \beta_2x_2 + \beta_4x_4) \\
& = & D(x)y + xD(y).
\end{array}$$

Portanto, $D|_\mathcal{H}$ é uma derivação em $\mathcal{H}$.

Adiante, para todo $x = \alpha_0 1 + \alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \alpha_4x_4 \in \mathcal{H}$, com $\alpha_i \in \mathbb{K}$, temos que

$$\begin{array}{rcl}
D(\overline{x}) & = & D(\alpha_0 1 - \alpha_1x_1 - \alpha_2x_2 - \alpha_4x_4) \\
& = & \alpha_2x_1 - \alpha_1x_2 \\
& = & \overline{-\alpha_2x_1 + \alpha_1x_2} \\
& = & \overline{D(\alpha_0 1 + \alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \alpha_4x_4)} \\
& = & \overline{D(x)}.
\end{array}$$

Por fim, para quaisquer $x+yx_7$ e $z+wx_7 \in \mathbb{O}_{\mathbb{K}}$, com x, y, z e $w \in \mathcal{H}$, temos que

$$\begin{aligned}
D\big((x+yx_7)(z+wx_7)\big) &= D\big((xz-\overline{w}y)+(wx+y\overline{z})x_7\big)\\
&= D(xz-\overline{w}y)+D(wx+y\overline{z})x_7\\
&= D(xz)-D(\overline{w}y)+(D(wx)+D(y\overline{z}))x_7\\
&= D(x)z+xD(z)-D(\overline{w})y-\overline{w}D(y)+\\
&\qquad +(D(w)x+wD(x)+D(y)\overline{z}+yD(\overline{z}))x_7\\
&= D(x)z+xD(z)-\overline{D(w)}y-\overline{w}D(y)+\\
&\qquad +(D(w)x+wD(x)+D(y)\overline{z}+y\overline{D(z)})x_7\\
&= (D(x)z-\overline{w}D(y))+(wD(x)+D(y)\overline{z})x_7\\
&\qquad +(xD(z)-\overline{D(w)}y)+(D(w)x+y\overline{D(z)})x_7\\
&= (D(x)+D(y)x_7)(z+wx_7)+\\
&\qquad +(x+yx_7)(D(z)+D(w)x_7)\\
&= D(x+yx_7)(z+wx_7)+(x+yx_7)D(z+wx_7).
\end{aligned}$$

Portanto, D é uma derivação em $\mathbb{O}_{\mathbb{K}}$.

$\square$

Agora, utilizaremos o item (ii) do lema anterior para construirmos o que será uma base de $\mathfrak{Der}(\mathbb{O}_{\mathbb{K}})$.

Lema 5.1.4. *Seja (x_1, x_2, x_7) uma tripla báscida em $\mathbb{O}_{\mathbb{K}}$ e $\{1,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ x_7\}$ a base induzida de $\mathbb{O}_{\mathbb{K}}$ por esta tripla. Existem $D_{1,2}$, $D_{1,3}$, $D_{1,4}$, $D_{1,5}$, $D_{1,6}$, $D_{1,7}$, $D_{2,3}$, $D_{2,4}$, $D_{2,5}$, $D_{2,6}$, $D_{2,7}$, $D_{7,3}$, $D_{7,5}$ e $D_{7,6} \in \mathfrak{Der}(\mathbb{O}_{\mathbb{K}})$ definidas em $\{x_1,\ x_2,\ x_7\}$ por*

	$D_{1,2}$	$D_{1,3}$	$D_{1,4}$	$D_{1,5}$	$D_{1,6}$	$D_{1,7}$
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_2	$-x_1$	0	0	0	0	0
x_7	0	0	0	0	x_4	$-x_1$

	$D_{2,3}$	$D_{2,4}$	$D_{2,5}$	$D_{2,6}$	$D_{2,7}$	$D_{7,3}$	$D_{7,5}$	$D_{7,6}$
x_1	0	0	0	0	0	0	0	0
x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	0	0	0
x_7	$-x_4$	0	0	0	$-x_2$	x_3	x_5	x_6

Demonstração:

Pela proposição 4.2.3, temos que o conjunto

$$\{1,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ x_7\}$$

é ortonormal. Assim, temos que

$$\begin{gathered}
(x_1,x_2,x_7),\ (x_1,x_3,x_2),\ (x_1,x_4,x_7),\ (x_1,x_5,x_7),\ (x_1,x_6,x_2)\\
(x_1,x_7,x_2),\ (x_2,x_3,x_1),\ (x_2,x_4,x_7),\ (x_2,x_5,x_1),\ (x_2,x_6,x_1)\\
(x_2,x_7,x_1),\ (x_7,x_3,x_2),\ (x_7,x_5,x_1) \text{ e } (x_7,x_6,x_1)
\end{gathered}$$

são triplas básicas. Por exemplo, pela tabela de multiplicação dada na proposição 4.2.3, temos que

$$\{1,\, x_1,\, x_2,\, x_1x_2 = x_4,\, x_7\},$$

$$\{1,\, x_1,\, x_3,\, x_1x_3 = x_7,\, x_2\}$$

e

$$\{1,\, x_2,\, x_3,\, x_2x_3 = x_5,\, x_1\}$$

são conjuntos ortonormais.

Pelo item (ii) do lema 5.1.3 cada tripla básica (y_1, y_2, y_7) define uma derivação $D_{(y_1,y_2,y_7)}$. Assim, podemos definir as derivações

$$\begin{array}{lll} D_{1,2} := D_{(x_1,x_2,x_7)}, & D_{1,3} := D_{(x_1,x_3,x_2)}, & D_{1,4} := D_{(x_1,x_4,x_7)}, \\ D_{1,5} := D_{(x_1,x_5,x_7)}, & D_{1,6} := D_{(x_1,x_6,x_2)}, & D_{1,7} := D_{(x_1,x_7,x_2)}, \\ D_{2,3} := D_{(x_2,x_3,x_1)}, & D_{2,4} := D_{(x_2,x_4,x_7)}, & D_{2,5} := D_{(x_2,x_5,x_1)}, \\ D_{2,6} := D_{(x_2,x_6,x_1)}, & D_{2,7} := D_{(x_2,x_7,x_1)}, & D_{7,3} := D_{(x_7,x_3,x_2)}, \end{array}$$
$$D_{7,5} := D_{(x_7,x_5,x_1)} \text{ e } D_{7,6} := D_{(x_7,x_6,x_1)}.$$

E, novamente pela tabela em 4.2.3, temos que as derivações definidas acima são como no enunciado. Por exemplo,

$$D_{1,6}(x_1) = D_{(x_1,x_6,x_2)}(x_1) = x_6,$$

$$D_{1,6}(x_2) = D_{(x_1,x_6,x_2)}(x_2) = 0$$

e

$$\begin{aligned} D_{1,6}(x_7) &= D_{(x_1,x_6,x_2)}(x_2x_6) \\ &= D_{(x_1,x_6,x_2)}(x_2)x_6 + x_2D_{(x_1,x_6,x_2)}(x_6) \\ &= 0 \cdot x_6 - x_2x_1 \\ &= x_4. \end{aligned}$$

□

Definição 5.1.5. *Seja (x_1, x_2, x_7) uma tripla básica em $\mathbb{O}_{\mathbb{K}}$. As derivações $D_{1,2}$, $D_{1,3}$, $D_{1,4}$, $D_{1,5}$, $D_{1,6}$, $D_{1,7}$, $D_{2,3}$, $D_{2,4}$, $D_{2,5}$, $D_{2,6}$, $D_{2,7}$, $D_{7,3}$, $D_{7,5}$ e $D_{7,6} \in \mathfrak{der}(\mathbb{O}_{\mathbb{K}})$, como no lema 5.1.4, serão referidas como as derivações parametrizadas pela tripla básica (x_1, x_2, x_7) e sua família denotada por $(D_{i,j})$.*

Teorema 5.1.6. *Seja (x_1, x_2, x_7) uma tripla básica em $\mathbb{O}_{\mathbb{K}}$. Então, temos que:*

(i) A família $(D_{i,j})$ das derivações parametrizadas por (x_1, x_2, x_7) formam uma base de $\mathfrak{der}(\mathbb{O}_{\mathbb{K}})$;

(ii) A matriz da derivação

$$D = \sum_{i=2}^{7} \lambda_i D_{1,i} + \sum_{i=3}^{7} \mu_i D_{2,i} + \sum_{i=3,5,6} \nu_i D_{7,i} \in \mathfrak{der}(\mathbb{O}_{\mathbb{K}}),$$

para $\lambda_2, ..., \lambda_7, \mu_3, ..., \mu_7, \nu_3, \nu_5, \nu_6 \in \mathbb{K}$, *na base ordenada* $1, x_1, x_2, ..., x_7$, *é*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_2 & -\lambda_3 & -\lambda_4 & -\lambda_5 & -\lambda_6 & -\lambda_7 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & -\mu_3 & -\mu_4 & -\mu_5 & -\mu_6 & -\mu_7 \\ 0 & \lambda_3 & \mu_3 & 0 & \lambda_5-\mu_7 & -\lambda_4-\nu_6 & -\lambda_2+\nu_5 & \nu_3 \\ 0 & \lambda_4 & \mu_4 & -\lambda_5+\mu_7 & 0 & \lambda_3+\mu_6 & -\lambda_7-\mu_5 & \lambda_6-\mu_3 \\ 0 & \lambda_5 & \mu_5 & \lambda_4+\nu_6 & -\lambda_3-\mu_6 & 0 & \mu_4-\nu_3 & \nu_5 \\ 0 & \lambda_6 & \mu_6 & \lambda_2-\nu_5 & \lambda_7+\mu_5 & -\mu_4+\nu_3 & 0 & \nu_6 \\ 0 & \lambda_7 & \mu_7 & -\nu_3 & -\lambda_6+\mu_3 & -\nu_5 & -\nu_6 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.1}$$

Demonstração:
(i)

Suponhamos que

$$\sum_{i=2}^{7} \lambda_i D_{1,i} + \sum_{i=3}^{7} \mu_i D_{2,i} + \sum_{i=3,5,6} \nu_i D_{7,i} = 0,$$

para $\lambda_2, ..., \lambda_7, \mu_3, ..., \mu_7, \nu_3, \nu_5, \nu_6 \in \mathbb{K}$. Pelo lema 5.1.4, temos que

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{i=2}^7 \lambda_i x_i &= \textstyle\sum_{i=2}^7 \lambda_i D_{1,i}(x_1) + \sum_{i=3}^7 \mu_i D_{2,i}(x_1) + \sum_{i=3,5,6} \nu_i D_{7,i}(x_1) \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -\lambda_2 x_1 + \textstyle\sum_{i=3}^7 \mu_i x_i = \\ & \quad = \textstyle\sum_{i=2}^7 \lambda_i D_{1,i}(x_2) + \sum_{i=3}^7 \mu_i D_{2,i}(x_2) + \sum_{i=3,5,6} \nu_i D_{7,i}(x_2) \\ & \quad = 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} & -\lambda_7 x_1 - \mu_7 x_2 + (\lambda_6 - \mu_3) x_4 + \textstyle\sum_{i=3,5,6} \nu_i x_i = \\ & \quad = \textstyle\sum_{i=2}^7 \lambda_i D_{1,i}(x_7) + \sum_{i=3}^7 \mu_i D_{2,i}(x_7) + \sum_{i=3,5,6} \nu_i D_{7,i}(x_7) \\ & \quad = 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$\lambda_2 = ... = \lambda_7 = \mu_3 = ... = \mu_7 = \nu_3 = \nu_5 = \nu_6 = 0.$$

Portanto, as derivações parametrizadas por (x_1, x_2, x_7) formam um conjunto linearmente independente.

Seja $D \in \mathfrak{der}(\mathbb{O})$.

Pelos itens (i) e (ii) do lema 5.1.2, temos que existem λ_2, λ_3, ..., λ_7, μ_1, μ_3,..., μ_7, ν_1, ν_2, ..., $\nu_6 \in \mathbb{K}$, tais que

$$D(x_1) = \sum_{i=2}^{7} \lambda_i x_i,$$

$$D(x_2) = \sum_{i=1, i\neq 2}^{7} \mu_i x_i$$

e

$$D(x_7) = \sum_{i=1}^{6} \nu_i x_i.$$

Desta forma, temos que

$$\begin{aligned} D(x_3) &= D(x_7 x_1) \\ &= D(x_7)x_1 + x_7 D(x_1) \\ &= (-\lambda_7 - \nu_1)1 + (-\lambda_3)x_1 + (-\lambda_6 + \nu_4)x_2 \\ &\quad + (-\lambda_5 - \nu_2)x_4 + (\lambda_4 + \nu_6)x_5 \\ &\quad + (\lambda_2 - \nu_5)x_6 + (-\nu_3)x_7, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(x_4) &= D(x_1 x_2) \\ &= D(x_1)x_2 + x_1 D(x_2) \\ &= (-\lambda_2 - \mu_1)1 + (-\lambda_4)x_1 + (-\mu_4)x_2 \\ &\quad + (\lambda_5 - \mu_7)x_3 + (-\lambda_3 - \mu_6)x_5 \\ &\quad + (\lambda_7 + \mu_5)x_6 + (-\lambda_6 + \mu_3)x_7, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(x_5) &= D(x_7 x_4) \\ &= D(x_7)x_4 + x_7 D(x_4) \\ &= (\lambda_6 - \mu_3 - \nu_4)1 + (\mu_7 - \lambda_5 + \nu_2)x_1 \\ &\quad + (-\lambda_7 - \mu_5 - \nu_1)x_2 + (-\lambda_4 - \nu_6)x_3 \\ &\quad + (\lambda_3 + \mu_6)x_4 + (-\mu_4 + \nu_3)x_6 + (-\nu_5)x_7 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} D(x_6) &= D(x_7 x_2) \\ &= D(x_7)x_2 + x_7 D(x_2) \\ &= (-\mu_7 - \nu_2)1 + (-\mu_3 - \nu_4)x_1 + (-\mu_6)x_2 \\ &\quad + (\mu_1 + \nu_5)x_3 + (-\mu_5 + \nu_1)x_4 \\ &\quad + (\mu_4 - \nu_3)x_5 + (-\nu_6)x_7. \end{aligned}$$

Assim, novamente pelo item (ii) do lema 5.1.2, temos que

$$\nu_1 = -\lambda_7,$$

$$\mu_1 = -\lambda_2,$$

$$\mu_4 = \lambda_6 - \mu_3$$

e

$$\nu_2 = -\mu_7.$$

Portanto, temos que

$$\begin{aligned} &(\textstyle\sum_{i=2}^{7} \lambda_i D_{1,i} + \sum_{i=3}^{7} \mu_i D_{2,i} + \sum_{i=3,5,6} \nu_i D_{7,i})(x_1) = \\ &= \textstyle\sum_{i=2}^{7} \lambda_i x_i \\ &= D(x_1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(\textstyle\sum_{i=2}^{7}\lambda_i D_{1,i}+\sum_{i=3}^{7}\mu_i D_{2,i}+\sum_{i=3,5,6}\nu_i D_{7,i})(x_1)=\\ &\qquad=-\lambda_1 x_1+\textstyle\sum_{i=3}^{7}\mu_i x_i\\ &\qquad=D(x_2)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}&(\textstyle\sum_{i=2}^{7}\lambda_i D_{1,i}+\sum_{i=3}^{7}\mu_i D_{2,i}+\sum_{i=3,5,6}\nu_i D_{7,i})(x_1)=\\ &\qquad=-\lambda_7 x_1-\mu_7 x_2+(\lambda_6-\mu_3)x_4+\textstyle\sum_{i=3,5,6}\nu_i x_i\\ &\qquad=D(x_7).\end{aligned}$$

Assim, pelo item (i) do lema 5.1.3, temos que

$$D=\sum_{i=2}^{7}\lambda_i D_{1,i}+\sum_{i=3}^{7}\mu_i D_{2,i}+\sum_{i=3,5,6}\nu_i D_{7,i}.$$

(ii)

Seja

$$D=\sum_{i=2}^{7}\lambda_i D_{1,i}+\sum_{i=3}^{7}\mu_i D_{2,i}+\sum_{i=3,5,6}\nu_i D_{7,i}\in\mathfrak{Der}(\mathbb{O}_{\mathbb{K}}).$$

Pelo item (i) do lema 5.1.2, temos que $D(1)=0$.
E, pelo lema 5.1.4, temos que

$$\begin{aligned}D(x_1)&=(\textstyle\sum_{i=2}^{7}\lambda_i D_{1,i}+\sum_{i=3}^{7}\mu_i D_{2,i}+\sum_{i=3,5,6}\nu_i D_{7,i})(x_1)\\ &=\textstyle\sum_{i=2}^{7}\lambda_i x_i,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D(x_2)&=(\textstyle\sum_{i=2}^{7}\lambda_i D_{1,i}+\sum_{i=3}^{7}\mu_i D_{2,i}+\sum_{i=3,5,6}\nu_i D_{7,i})(x_2)\\ &=-\lambda_2 x_1+\textstyle\sum_{i=3}^{7}\mu_i x_i\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}D(x_7)&=(\textstyle\sum_{i=2}^{7}\lambda_i D_{1,i}+\sum_{i=3}^{7}\mu_i D_{2,i}+\sum_{i=3,5,6}\nu_i D_{7,i})(x_7)\\ &=-\lambda_7 x_1-\mu_7 x_2+(\lambda_6-\mu_3)x_4+\textstyle\sum_{i=3,5,6}\nu_i x_i.\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}D(x_3)&=D(x_7x_1)\\ &=D(x_7)x_1+x_7D(x_1)\\ &=(-\lambda_7x_1-\mu_7x_2+(\lambda_6-\mu_3)x_4+\textstyle\sum_{i=3,5,6}\nu_i x_i)x_1+\\ &\qquad+x_7(\textstyle\sum_{i=2}^{7}\lambda_i x_i)\\ &=(-\lambda_3)x_1+(-\mu_3)x_2+(-\lambda_5+\mu_7)x_4\\ &\qquad+(\lambda_4+\nu_6)x_5+(\lambda_2-\nu_5)x_6+(-\nu_3)x_7,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D(x_4)&=D(x_1x_2)\\ &=D(x_1)x_2+x_1D(x_2)\\ &=(\textstyle\sum_{i=2}^{7}\lambda_i x_i)x_2+x_1(-\lambda_2x_1+\sum_{i=3}^{7}\mu_i x_i)\\ &=(-\lambda_4)x_1+(-\mu_4)x_2+(\lambda_5-\mu_7)x_3\\ &\qquad+(-\lambda_3-\mu_6)x_5+(\lambda_7+\mu_5)x_6+(-\lambda_6+\mu_3)x_7,\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
D(x_5) &= D(x_7x_4)\\
&= D(x_7)x_4 + x_7D(x_4)\\
&= (-\lambda_7x_1 - \mu_7x_2 + (\lambda_6-\mu_3)x_4 + \textstyle\sum_{i=3,5,6}\nu_ix_i)x_4\\
&\quad +x_7\big((-\lambda_4)x_1 + (-\mu_4)x_2 + (\lambda_5-\mu_7)x_3\\
&\qquad + (-\lambda_3-\mu_6)x_5 + (\lambda_7+\mu_5)x_6 + (-\lambda_6+\mu_3)x_7\big)\\
&= (-\lambda_5)x_1 + (-\mu_5)x_2 + (-\lambda_4-\nu_6)x_3\\
&\quad + (\lambda_3+\mu_6)x_4 + (-\mu_4+\nu_3)x_6 + (-\nu_5)x_7
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
D(x_6) &= D(x_7x_2)\\
&= D(x_7)x_2 + x_7D(x_2)\\
&= (-\lambda_7x_1 - \mu_7x_2 + (\lambda_6-\mu_3)x_4 + \textstyle\sum_{i=3,5,6}\nu_ix_i)x_2\\
&\quad + x_7(-\lambda_2x_1 + \textstyle\sum_{i=3}^{7}\mu_ix_i)\\
&= (-\lambda_6)x_1 + (-\mu_6)x_2 + (\mu_1+\nu_5)x_3\\
&\quad + (-\lambda_7-\mu_5)x_4 + (\mu_4-\nu_3)x_5 + (-\nu_6)x_7.
\end{aligned}
$$

Como queríamos demonstrar.

□

Como vimos no teorema anterior, $\mathfrak{der}(\mathbb{O}_\mathbb{K})(\mathrm{Im}(\mathbb{O}_\mathbb{K})) \subset \mathrm{Im}(\mathbb{O}_\mathbb{K})$. Isto é, temos que a representação canônica de $\mathfrak{der}(\mathbb{O}_\mathbb{K})$ em $\mathbb{O}_\mathbb{K}$ possui $\mathrm{Im}(\mathbb{O}_\mathbb{K})$ como subrepresentação.

Proposição 5.1.7. *A representação canônica de* $\mathfrak{der}(\mathbb{O}_\mathbb{K})$ *em* $\mathrm{Im}(\mathbb{O}_\mathbb{K})$ *é irredutível.*

Demonstração:
Seja $W \subset \mathrm{Im}(\mathbb{O}_\mathbb{K})$ um subespaço tal que $\mathfrak{der}(\mathbb{O}_\mathbb{K})W \subset W$ e $W \neq 0$. Primeiramente, provaremos que existe $x \in W$ tal que $N(x) = 1$. E, usando este fato, mostraremos que $W = \mathrm{Im}(\mathbb{O}_\mathbb{K})$.

Seja (x_1, x_2, x_7) uma tripla básica em $\mathbb{O}_\mathbb{K}$ e

$$y = \alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \alpha_3x_3 + \alpha_4x_4 + \alpha_5x_5 + \alpha_6x_6 + \alpha_7x_7 \in W\backslash\{0\},$$

onde $\{1,\ x_1,...,x_7\}$ é a base induzida pela tripla (x_1, x_2, x_7). Podemos supor, sem perda de generalidade, que $\alpha_1 \neq 0$ (pois se $\alpha_1 = 0$ bastaria substituirmos a tripla básica (x_1, x_2, x_7) por uma tripla básica (x_i, x_j, x_k) tal que $\alpha_i \neq 0$). Consideremos também a família de derivações $(D_{i,j})$ parametrizadas por (x_1, x_2, x_7). Como $\mathfrak{der}(\mathbb{O}_\mathbb{K})W \subset W$, temos que

$$D_{1,2}(y) = -\alpha_2x_1 + \alpha_1x_2 - \alpha_6x_3 + \alpha_3x_6,$$

$$D_{2,3}D_{1,2}(y) = \alpha_6x_2 + \alpha_1x_3$$

e

$$D_{1,3}D_{2,3}D_{1,2}(y) = -\alpha_1x_1$$

pertencem a W. Assim, $x := x_1 \in W$ é tal que $N(x) = 1$.

Pelo parágrafo anterior, podemos concluir que existe uma tripla básica (x_1, x_2, x_7) em $\mathbb{O}_\mathbb{K}$ tal que $x_1 \in W$. Assim, com $(D_{i,j})$ denotando a família de derivações parametrizadas por (x_1, x_2, x_7) e sendo $\{1, x_1,...,x_7\}$ a base induzida pela tripla (x_1, x_2, x_7), temos que

$$x_j = D_{1,j}(x_1) \in W,$$

para todo $j = 2, 3, 4, 5, 6, 7$. Portanto, W contém a base $\{x_i\}_{i=1}^7$ de $\mathrm{Im}(\mathbb{O}_{\mathbb{K}})$ e, consequentemente, $W = \mathrm{Im}(\mathbb{O}_{\mathbb{K}})$.

$\square$

Corolário 5.1.8. *A álgebra de Lie* $\mathfrak{Der}(\mathbb{O}_{\mathbb{K}})$ *é semissimples.*

Demonstração:

Pelo item (ii) do teorema 5.1.6, temos que a imagem da representação canônica de $\mathfrak{Der}(\mathbb{O}_{\mathbb{K}})$ em $\mathrm{Im}(\mathbb{O}_{\mathbb{K}})$ fica contida em $\mathfrak{sl}(\mathrm{Im}(\mathbb{O}_{\mathbb{K}}))$. Assim, como $\mathfrak{Der}(\mathbb{O}_{\mathbb{K}})$ se representa irredutívelmente em $\mathrm{Im}(\mathbb{O}_{\mathbb{K}})$, temos, pelo lema 1.6.2, que $\mathfrak{Der}(\mathbb{O}_{\mathbb{K}})$ é semissimples.

$\square$

5.2 Um Sistema de Raízes

Obtivemos como corolário da irredutibilidade da representação de $\mathfrak{Der}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$ em $\mathrm{Im}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$ que $\mathfrak{Der}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$ é semissimples. Nesta seção, encontraremos um sistema de raízes em $\mathfrak{Der}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$, e provaremos que esta álgebra de Lie complexa é simples e do tipo G_2.

Fixaremos, até o fim desta seção, uma tripla básica (x_1, x_2, x_7) em $\mathbb{O}_{\mathbb{C}}$ e sua respectiva família de derivações induzidas $(D_{i,j})$. Usaremos diversas vezes a caracterização das derivações de $(D_{i,j})$ dada pelo lema 5.1.4 e pelo teorema 5.1.6.

Seja $\mathfrak{h}$ o subespaço de $\mathfrak{Der}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$ gerado pelos elementos $X := D_{1,3}$ e $Y := D_{2,6}$. Provaremos que $\mathfrak{h}$ é uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{Der}(\mathbb{O}_{\mathbb{K}})$ 2-dimensional.

Verifiquemos que $\mathfrak{h}$ é uma subálgebra abeliana de $\mathfrak{Der}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$. De fato, temos que

$$\begin{array}{rcccl} [X,Y](x_1) & = & XY(x_1) - YX(x_1) & = & D_{1,3}D_{2,6}(x_1) - D_{2,6}D_{1,3}(x_1) \\ & = & D_{1,3}(0) - D_{2,6}(x_3) & = & 0, \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccl} [X,Y](x_2) & = & XY(x_2) - YX(x_2) & = & D_{1,3}D_{2,6}(x_2) - D_{2,6}D_{1,3}(x_2) \\ & = & D_{1,3}(x_6) - D_{2,6}(0) & = & 0 \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcccl} [X,Y](x_7) & = & XY(x_7) - YX(x_7) & = & D_{1,3}D_{2,6}(x_7) - D_{2,6}D_{1,3}(x_7) \\ & = & D_{1,3}(0) - D_{2,6}(0) & = & 0. \end{array}$$

Assim, pelo lema 5.1.3, temos que $[X,Y] = 0$. E, consequentemente, $\mathfrak{h}$ é uma subálgebra abeliana de $\mathfrak{Der}(\mathbb{O}_{\mathbb{K}})$.

Seja

$$D = \sum_{i=2}^{7} \lambda_i D_{1,i} + \sum_{i=3}^{7} \mu_i D_{2,i} + \sum_{i=3,5,6} \nu_i D_{7,i} \in \mathfrak{Der}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}}).$$

Temos, pelo teorema 5.1.6, que

$$\begin{aligned}
[D,X](x_1) &= DX(x_1) - XD(x_1)\\
&= DD_{1,3}(x_1) - D_{1,3}(\textstyle\sum_{i=2}^{7}\lambda_i x_i)\\
&= D(x_3) - (-\lambda_3 x_1 + \lambda_5 x_4 - \lambda_4 x_5)\\
&= \big(-\lambda_3 x_1 - \mu_3 x_2 + (-\lambda_5+\mu_7)x_4 + (\lambda_4+\nu_6)x_5\\
&\qquad + (\lambda_2 - \nu_5)x_6 - \nu_3 x_7\big) + (\lambda_3 x_1 - \lambda_5 x_4 + \lambda_4 x_5)\\
&= -\mu_3 x_2 + (-2\lambda_5 + \mu_7)x_4 + (2\lambda_4+\nu_6)x_5\\
&\qquad + (\lambda_2 - \mu_5)x_6 - \nu_3 x_7,
\end{aligned} \tag{5.2}$$

$$\begin{aligned}
[D,Y](x_1) &= DY(x_1) - YD(x_1)\\
&= DD_{2,6}(x_1) - D_{2,6}(\textstyle\sum_{i=2}^{7}\lambda_i x_i)\\
&= D(0) - (-\lambda_6 x_2 + \lambda_5 x_4 - \lambda_4 x_5 + \lambda_2 x_6)\\
&= \lambda_6 x_2 - \lambda_5 x_4 + \lambda_4 x_5 - \lambda_2 x_6,
\end{aligned} \tag{5.3}$$

$$\begin{aligned}
[D,X](x_2) &= DX(x_2) - XD(x_2)\\
&= DD_{1,3}(x_2) - D_{1,3}(-\lambda_2 x_1 + \textstyle\sum_{i=3}^{7}\mu_i x_i)\\
&= D(0) - (-\mu_3 x_1 - \lambda_2 x_3 + \mu_5 x_4 - \mu_4 x_5)\\
&= \mu_3 x_1 + \lambda_2 x_3 - \mu_5 x_4 + \mu_4 x_5,
\end{aligned} \tag{5.4}$$

$$\begin{aligned}
[D,Y](x_2) &= DY(x_2) - YD(x_2)\\
&= DD_{2,6}(x_2) - D_{2,6}(-\lambda_2 x_1 + \textstyle\sum_{i=3}^{7}\mu_i x_i)\\
&= D(x_6) - (-\mu_6 x_2 + \mu_5 x_4 - \mu_4 x_5)\\
&= \big(-\lambda_6 x_1 - \mu_6 x_2 + (-\lambda_2+\nu_5)x_3 + (-\lambda_7 - \mu_5)x_4\\
&\qquad + (\mu_4 - \nu_3)x_5 - \nu_6 x_7\big) + (\mu_6 x_2 - \mu_5 x_4 + \mu_4 x_5)\\
&= -\lambda_6 x_1 + (-\lambda_2 + \nu_5)x_3 + (-\lambda_7 - 2\mu_5)x_4\\
&\qquad + (2\mu_4 - \nu_3)x_5 - \nu_6 x_7,
\end{aligned} \tag{5.5}$$

$$\begin{aligned}
[D,X](x_7) &= DX(x_7) - XD(x_7)\\
&= DD_{1,3}(x_7) - D_{1,3}D(x_7)\\
&= D(0)\\
&\qquad - D_{1,3}(-\lambda_7 x_1 - \mu_7 x_2 + \mu_3 x_3 + (\lambda_6 - \mu_3)x_4 + \nu_5 x_5 + \nu_6 x_6)\\
&= -(-\mu_3 x_1 - \lambda_7 x_3 + \nu_5 x_4 - (\lambda_6 - \mu_3)x_5)\\
&= \mu_3 x_1 + \lambda_7 x_3 - \nu_5 x_4 + (\lambda_6 - \mu_3)x_5
\end{aligned} \tag{5.6}$$

e

$$\begin{aligned}
[D,Y](x_7) &= DY(x_7) - YD(x_7)\\
&= DD_{2,6}(x_7) - D_{2,6}D(x_7)\\
&= D(0)\\
&\qquad - D_{2,6}(-\lambda_7 x_1 - \mu_7 x_2 + \mu_3 x_3 + (\lambda_6 - \mu_3)x_4 + \nu_5 x_5 + \nu_6 x_6)\\
&= -(-\nu_6 x_2 + \nu_5 x_4 - (\lambda_6 - \mu_3)x_5 - \mu_7 x_6)\\
&= \nu_6 x_2 - \nu_5 x_4 + (\lambda_6 - \mu_3)x_5 + \mu_7 x_6.
\end{aligned} \tag{5.7}$$

Agora, mostraremos que $\mathfrak{h}$ é uma subálgebra normal de $\mathfrak{der}(\mathbb{O}_\mathbb{C})$ (i.e. provaremos que se $D \in \mathfrak{der}(\mathbb{O}_\mathbb{C})$ é tal que $[D,\mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$ então $D \in \mathfrak{h}$). Seja

$$D = \sum_{i=2}^{7}\lambda_i D_{1,i} + \sum_{i=3}^{7}\mu_i D_{2,i} + \sum_{i=3,5,6}\nu_i D_{7,i} \in \mathfrak{der}(\mathbb{O}_\mathbb{C})$$

tal que

$$[D, X] = \alpha_1 X + \alpha_2 Y$$

e

$$[D, Y] = \beta_1 X + \beta_2 Y,$$

para α_1, α_2, β_1 e $\beta_2 \in \mathbb{C}$. Temos que

$$[D, X](x_1) = \alpha_1 X(x_1) + \alpha_2 Y(x_1) = \alpha_1 D_{1,3}(x_1) + \alpha_2 D_{2,6}(x_1) = \alpha_1 x_3,$$

$$[D, Y](x_1) = \beta_1 X(x_1) + \beta_2 Y(x_1) = \beta_1 D_{1,3}(x_1) + \beta_2 D_{2,6}(x_1) = \beta_1 x_3,$$

$$[D, X](x_2) = \alpha_1 X(x_2) + \alpha_2 Y(x_2) = \alpha_1 D_{1,3}(x_2) + \alpha_2 D_{2,6}(x_2) = \alpha_2 x_6,$$

$$[D, Y](x_2) = \beta_1 X(x_2) + \beta_2 Y(x_2) = \beta_1 D_{1,3}(x_2) + \beta_2 D_{2,6}(x_2) = \beta_2 x_6,$$

$$[D, X](x_7) = \alpha_1 X(x_7) + \alpha_2 Y(x_7) = \alpha_1 D_{1,3}(x_7) + \alpha_2 D_{2,6}(x_7) = 0$$

e

$$[D, Y](x_7) = \beta_1 X(x_7) + \beta_2 Y(x_7) = \beta_1 D_{1,3}(x_7) + \beta_2 D_{2,6}(x_7) = 0.$$

Assim, pelas equações 5.2, 5.3, 5.4, 5.5, 5.6 e 5.7, temos que

$$\lambda_2 = \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = \lambda_7 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5 = \mu_7 = \nu_3 = \nu_5 = \nu_6 = 0$$

e, consequentemente,

$$D = \lambda_3 D_{1,3} + \mu_6 D_{2,6} = \lambda_3 X + \mu_6 Y \in \mathfrak{h}.$$

Assim, concluimos o seguinte resultado:

Lema 5.2.1. *Seja (x_1, x_2, x_7) uma tripla básica em $\mathbb{O}_{\mathbb{K}}$ e $(D_{i,j})$ a família das derivações em $\mathbb{O}_{\mathbb{C}}$ parametrizadas por (x_1, x_2, x_7). Temos que o subespaço $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{Der}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$ gerado pelos elementos $X := D_{1,3}$ e $Y := D_{2,6}$ é uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{Der}(\mathbb{O}_{\mathbb{K}})$ de dimensão 2.*

Seja $\mathfrak{h}$ é uma subálgebra de Cartan descrita no lema 5.2.1. Analizaremos a representação adjunta de $\mathfrak{h}$ em $\mathfrak{Der}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$ com o intuito de encontrarmos um sistema de raízes para $\mathfrak{Der}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$ em relação a $\mathfrak{h}$.

Começaremos procurando por raízes $\alpha, \beta \in \mathfrak{h}^* \backslash 0$ tais que $\alpha(Y) = \beta(X) = 0$. Isto é, tal que α e β sejam múltiplos dos elementos da base de $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{C}}$ dual à base de $\mathfrak{h}$ formada por X e Y.

Seja

$$D = \sum_{i=2}^{7} \lambda_i D_{1,i} + \sum_{i=3}^{7} \mu_i D_{2,i} + \sum_{i=3,5,6} \nu_i D_{7,i} \in \mathfrak{g}_\alpha,$$

para algum $\alpha \in \mathfrak{h}^* \backslash 0$ tal que $\alpha(X) \neq 0$ e $\alpha(Y) = 0$. Como $D_{1,3}$ e $D_{2,6} \in \mathfrak{h}$, temos que $\lambda_3 = \mu_6 = 0$. Além disso, como $[Y, D] = \alpha(Y) D = 0 \in \mathfrak{h}$, temos, novamente pelas equações 5.3, 5.5 e 5.7, que

$$\lambda_2 = \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = \mu_3 = \mu_7 = \nu_5 = \nu_6 = 0,$$

$$\lambda_7 = -2\mu_5$$

e

$$\nu_3 = 2\mu_4.$$

Portanto,

$$D = \lambda_7 D_{1,7} + \mu_4 D_{2,4} + \mu_5 D_{1,5} + \nu_3 D_{7,3}.$$

Como $[X, D] = \alpha(X)D$, temos, como em 5.2, 5.4 e 5.6, que

$$\begin{aligned}
-2\alpha(X)\mu_5 e_7 &= \alpha(X)(\lambda_7 D_{1,7} + \mu_4 D_{2,4} + \mu_5 D_{1,5} + \nu_3 D_{7,3})(x_1) \\
&= \alpha(X)D(x_1) \\
&= [X, D](x_1) \\
&= 2\mu_4 x_7,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha(X)\mu_4 x_4 + \alpha(X)\mu_5 x_5 &= \alpha(X)(\lambda_7 D_{1,7} + \mu_4 D_{2,4} + \mu_5 D_{1,5} + \nu_3 D_{7,3})(x_2) \\
&= \alpha(X)D_\alpha(x_2) \\
&= [X, D_\alpha](x_2) \\
&= \mu_5 x_4 - \mu_4 x_5.
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
2\alpha(X)\mu_5 x_1 + 2\alpha(X)\mu_4 x_3 &= \alpha(X)(\lambda_7 D_{1,7} + \mu_4 D_{2,4} + \mu_5 D_{1,5} + \nu_3 D_{7,3})(x_2) \\
&= \alpha(X)D(x_7) \\
&= [X, D](x_7) \\
&= -2\mu_4 x_1 + 2\mu_5 x_3.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\lambda_7 = -2\alpha(X)\mu_4,$$

$$\mu_4 = -\alpha(X)^2\mu_4,$$

$$\mu_5 = \alpha(X)\mu_4,$$

$$\nu_3 = 2\mu_4.$$

Portanto, se $D \neq 0$ (ou equivalentemente $\mu_4 \neq 0$), devemos ter que D é múltiplo de

$$-2\alpha(X)D_{1,7} + D_{2,4} + \alpha(X)D_{1,5} + 2D_{7,3}$$

e

$$\alpha(X) = \pm i.$$

Seja

$$D_\alpha := -2iD_{1,7} + D_{2,4} + iD_{2,5} + 2D_{7,3} \in \mathfrak{der}(\mathbb{O}_\mathbb{C}).$$

Verifica-se (utilizando-se o lema 5.1.3) que

$$[X, D_\alpha] = iD_\alpha$$

e

$$[Y, D_\alpha] = 0.$$

Assim, o funcional $\alpha \in \mathfrak{h}^*$, definido por

$$\begin{array}{rccc} \alpha: & \mathfrak{h}^* & \to & \mathbb{C} \\ & X & \to & i \\ & Y & \to & 0, \end{array} \tag{5.8}$$

é uma raíz da representação adjunta de $\mathfrak{h}$ em $\mathfrak{der}(\mathbb{O}_\mathbb{C})$ com espaço de raíz gerado por D_α (veja a proposição 1.4.7).

Ainda tendo em vista a discussão acima, verifica-se que o elemento

$$D_{-\alpha} := 2iD_{1,7} + D_{1,4} - iD_{2,5} + 2D_{7,3} \in \mathfrak{der}(\mathbb{O}_\mathbb{C})$$

é tal que

$$[X, D_{-\alpha}] = -iD_{-\alpha}$$

e

$$[Y, D_{-\alpha}] = 0.$$

Segue que $D_{-\alpha}$ é um gerador do espaço de raíz da raíz $-\alpha$ (para α como em 5.8).

Procedendo de maneira análoga, encontramos as condições para que um elemento esteja nos espaços de raíz das raízes β e $-\beta \in \mathfrak{h}^*$, para β definida por

$$\begin{array}{rccc} \beta: & \mathfrak{h}^* & \to & \mathbb{C} \\ & X & \to & 0 \\ & Y & \to & i. \end{array} \tag{5.9}$$

De fato, chegamos, por exemplo, a um elemento

$$D_\beta := -iD_{1,4} + D_{1,5} + 2D_{2,7} + 2iD_{7,6} \in \mathfrak{der}(\mathbb{O}_\mathbb{C})$$

e verificamos que

$$[X, D_\beta] = 0$$

e

$$[Y, D_\beta] = iD_\beta.$$

E também a um elemento

$$D_{-\beta} := iD_{1,4} + D_{1,5} + 2D_{2,7} - 2iD_{7,6} \in \mathfrak{der}(\mathbb{O}_\mathbb{C})$$

tal que

$$[X, D_\beta] = 0$$

e

$$[Y, D_\beta] = iD_\beta.$$

Logo, D_β e $D_{-\beta}$ são geradores dos espaços de raíz das raízes β e $-\beta$, respectivamente.

Pelo lema lema (1.4.3), temos que os elementos

$$\begin{array}{llll} D_{\alpha-\beta} & := & [D_\alpha, D_{-\beta}] & = & -6iD_{1,2}+6D_{1,6}+6D_{2,3}, \\ D_{\beta-\alpha} & := & [D_{-\alpha}, D_{\beta}] & = & 6iD_{1,2}+6D_{1,6}+6D_{2,3}, \\ D_{-\alpha-\beta} & := & [D_{-\alpha}, D_{-\beta}] & = & 4iD_{1,2}-4D_{1,6}+4D_{2,3}+8iD_{7,5}, \\ D_{-2\alpha-\beta} & := & [D_{-\alpha}, D_{-\alpha-\beta}] & = & 24iD_{1,4}+24D_{1,5}, \\ D_{-\alpha-2\beta} & := & [D_{-\beta}, D_{-\alpha-\beta}] & = & 24D_{2,4}-24iD_{2,5}, \\ D_{\alpha+\beta} & := & [D_{\alpha}, D_{\beta}] & = & -4iD_{1,2}-4D_{1,6}+4D_{2,3}-8iD_{7,5}, \\ D_{2\alpha+\beta} & := & [D_{\alpha}, D_{\alpha+\beta}] & = & -24iD_{1,4}+24D_{1,5}, \\ D_{\alpha+2\beta} & := & [D_{\beta}, D_{\alpha+\beta}] & = & 24D_{2,4}+24iD_{2,5}. \end{array}$$

são geradores dos espaços de raíz das raízes $\alpha-\beta$, $\beta-\alpha$, $-\alpha-\beta$, $-2\alpha-\beta$, $-\alpha-2\beta$, $\alpha+\beta$, $\alpha+\beta$, $2\alpha+\beta$ e $\alpha+2\beta$, respectivamente. E, como $\dim \mathfrak{der}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}}) = 14$ (pelo teorema 5.1.6) e $\dim \mathfrak{h} = 2$, concluímos que o conjunto formado pelas raízes acima é o conjunto de todas as raízes de $\mathfrak{der}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$ em relação à subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$.

Sejam

$$\alpha_1 := \beta - \alpha \tag{5.10}$$

e

$$\alpha_2 := \alpha. \tag{5.11}$$

Então α_1 e α_2 formam um sistema simples de raízes para $\mathfrak{der}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$ em relação à subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$. De fato, segue da definição de α_1 e α_2 e a listagem das raízes feita acima que

$$\pm(\alpha_1),\ \pm(\alpha_2),\ \pm(\alpha_1+\alpha_2),\ \pm(\alpha_1+2\alpha_2), \pm(\alpha_1+3\alpha_2) \text{ e } \pm(2\alpha_1+3\alpha_2)$$

são todos os elementos do sistema de raízes para $\mathfrak{der}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$ em relação à subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$.

Assim, temos que a α_2-sequência iniciada em α_1 é dada por

$$\alpha_1,\ \alpha_1+\alpha_2,\ \alpha_1+2\alpha_2 \text{ e } \alpha_1+3\alpha_2.$$

Logo, pela fórmula de Cartan-Killing (proposição 1.5.2), temos que

$$\frac{2\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle}{\langle \alpha_2, \alpha_2 \rangle} = -3.$$

E, como a α_1-sequência iniciada em α_2 é dada por

$$\alpha_2 \text{ e } \alpha_1+\alpha_2$$

temos, novamente pela fórmula de Killing, que

$$\frac{2\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle}{\langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle} = -1.$$

Com isso, concluímos que a matriz de Cartan de $\mathfrak{der}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$ é

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

e, consequentemente, seu respectivo diagrama de Dynkin é

$$\circ\!\Rrightarrow\!\circ$$

Portanto, pelo teorema 1.5.13, $\mathfrak{Der}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$ é uma álgebra de Lie simples do tipo G_2.

5.3 Representações de Álgebras de Lie Simples do Tipo G_2

Nesta seção, mostraremos que a representação adjunta e a representação de $\mathfrak{Der}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$ em $\mathrm{Im}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$ são as representações fundamentais da álgebra de Lie $\mathfrak{Der}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$.

Sejam (x_1, x_2, x_7) uma tripla básica em $\mathbb{O}_{\mathbb{C}}$, $(D_{i,j})$ a família das derivações parametrizadas por (x_1, x_2, x_7) e $\mathfrak{h}$ a subálgebra de Cartan de $\mathfrak{Der}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$ gerada por $X := D_{1,3}$ e $Y := D_{2,6}$, como na seção anterior. Além disso, consideremos o sistema de raízes simples composto por α_1 e α_2 como em 5.10 e 5.11.

Como vimos no exemplo 1.6.9, temos que as representações fundamentais de álgebras de Lie do tipo G_2 tem peso máximo

$$\lambda_1 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2$$

e

$$\lambda_2 = \alpha_1 + 2\alpha_2.$$

Sendo $\mathfrak{Der}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$ uma álgebra de Lie simples, temos que sua representação adjunta é irredutível. Mais do que isso, a representação adjunta de $\mathfrak{Der}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$ é uma representação fundamental.

Proposição 5.3.1. *A representação adjunta de $\mathfrak{Der}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$ é uma representação fundamental de peso máximo $\lambda_1 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2$.*

Demonstração:

Como vimos na seção anterior, temos que o sistema de raízes de $\mathfrak{Der}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$ em relação a $\mathfrak{h}$ é formado por

$$\pm(\alpha_1),\ \pm(\alpha_2),\ \pm(\alpha_1+\alpha_2),\ \pm(\alpha_1+2\alpha_2), \pm(\alpha_1+3\alpha_2) \text{ e } \pm(2\alpha_1+3\alpha_2).$$

Assim, temos que a raíz $\lambda_1 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2$ é um peso máximo da representação adjunta em relação ao sistema de raízes formado por α_1 e α_2.

$\square$

Como vimos na proposição 5.1.7, a representação canônica de $\mathfrak{Der}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$ em $\mathrm{Im}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$ é irredutível. Mostraremos, a seguir, que esta é uma representação fundamental.

Proposição 5.3.2. *A representação canônica de $\mathfrak{Der}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$ em $\mathrm{Im}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$ é uma representação fundamental de peso máximo $\lambda_2 = \alpha_1 + 2\alpha_2$.*

Demonstração:

Sejam $\{1,\, x_1,\, x_2,\, x_3 := -x_1x_7,\, x_4 := x_1x_2,\, x_5 := -x_4x_7,\, x_6 = -x_2x_7,\, x_7\}$ a base induzida por (x_1, x_2, x_7), $X := D_{1,3}$ e $Y := D_{2,6} \in \mathfrak{h}$ (como na seção anterior) e α e $\beta \in \mathfrak{h}^*$ como em 5.8 e 5.9.

Como em 5.10 e 5.11, temos que

$$\alpha_1 = \beta - \alpha$$

e

$$\alpha_2 = \alpha.$$

Assim,

$$\lambda_2 = \alpha_1 + 2\alpha_2 = \alpha + \beta.$$

Utilizando a descrição de $D_{1,3} =: X$ e $D_{2,6} =: Y$ dada no teorema 5.1.6, verifica-se que o vetor

$$v_{\alpha+\beta} := ix_4 - x_5$$

é tal que

$$X(v_{\alpha+\beta}) = D_{1,3}(ix_4 - x_5) = i(ix_4 - x_5) = (\alpha+\beta)(X)v_{\alpha+\beta}$$

e

$$Y(v_{\alpha+\beta}) = D_{2,6}(ix_4 - x_5) = i(ix_4 - x_5) = (\alpha+\beta)(Y)v_{\alpha+\beta}.$$

Assim, como $\mathfrak{h}$ é gerado por X e Y, temos, para todo $Z \in \mathfrak{h}$, que

$$Z(v_{\alpha+\beta}) = (\alpha+\beta)(Z)v_{\alpha+\beta}.$$

Isto é, $v_{\alpha+\beta}$ pertence ao espaço de peso $V_{\alpha+\beta}$ do peso $\alpha+\beta$. Analogamente,

$$v_{-\alpha-\beta} := ix_4 + x_5,$$

$$v_\alpha := x_1 + ix_3,$$

$$v_{-\alpha} := x_1 - ix_3,$$

$$v_\beta := x_2 + ix_6,$$

$$v_{-\beta} := x_2 - ix_6$$

e

$$v_0 := x_7$$

pertencem aos espaços de peso $V_{-\alpha-\beta}$, V_α, $V_{-\alpha}$, V_β, $V_{-\beta}$ e V_0.

Portanto, os pesos da representação canônica de $\mathfrak{der}(\mathbb{O}_\mathbb{C})$ em $\mathrm{Im}(\mathbb{O}_\mathbb{C})$ são exatamente

$$0,\ \pm\alpha,\ \pm\beta \text{ e } \pm(\alpha+\beta)$$

Segue daí que $\lambda_2 = \alpha+\beta$ é o peso máximo desta representação, já que

$$\lambda_2 + \alpha_1 = 2\beta$$

e

$$\lambda_2 + \alpha_1 = 2\alpha + \beta$$

não são pesos da representação em questão.

Portanto, a representação canônica de $\mathfrak{Der}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$ em $\mathrm{Im}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$ é a representação fundamental de peso máximo $\lambda_2 = \alpha_1 + 2\alpha_2$.

□

Concluímos que as duas representações irredutíveis fundamentais da álgebra de Lie semissimples $\mathfrak{Der}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$ tem dimensões 14 e 7. Assim, podemos concluir o resultado do corolário:

Corolário 5.3.3. *Existe, a menos de isomorfismo de representações, somente uma representação irredutível de* $\mathfrak{Der}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$ *de dimensão* 7.

Capítulo 6

$\mathbb{O}_{\mathbb{C}}$ e as Formas Reais de G_2

Neste capítulo, mostraremos que para toda subálgebra octoniônica $\mathcal{O}$ a álgebra $\mathfrak{Der}(\mathcal{O})$ é uma forma real de $\mathfrak{Der}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$. Em especial, mostraremos que $\mathfrak{Der}(\mathcal{O})$ é uma forma real compacta quando $\mathcal{O} \simeq \mathbb{O}$ ou uma forma real normal quando $\mathcal{O} \simeq \mathbb{O}_{\text{deg}}$. Por fim, mostraremos que toda forma real de $\mathfrak{Der}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$ é a álgebra das derivações em uma subálgebra octoniônica. Assim, teremos uma classificação das formas reais das álgebras de Lie do tipo G_2.

6.1 Conjugações em $\mathbb{O}_{\mathbb{C}}$

Nesta seção introduziremos o conceito conjugação em $\mathbb{O}_{\mathbb{C}}$ e relacionaremos conjugações e subálgebras octoniônicas em $\mathbb{O}_{\mathbb{C}}$.

Seja $\mathcal{O}$ uma subálgebra octoniônica. Como a dimensão real de $\mathcal{O}$ em $\mathbb{O}_{\mathbb{C}}$ é 8, temos que

$$\mathbb{O}_{\mathbb{C}} = \mathcal{O} \oplus i\mathcal{O}.$$

Isto é, $\mathbb{O}_{\mathbb{C}}$ é a álgebra obtida da complexificação da álgebra $\mathcal{O}$. Para trabalharmos com as subálgebras octoniônicas sobre este ponto de vista, utilizamos as conjugações em $\mathbb{O}_{\mathbb{C}}$.

Definição 6.1.1. *Seja $\tau : \mathbb{O}_{\mathbb{C}} \to \mathbb{O}_{\mathbb{C}}$ uma aplicação que satisfaz:*

(i) $\tau(\lambda x + y) = \overline{\lambda}\tau(x) + \tau(y)$, *para todos* $\lambda \in \mathbb{C}$ *e* x *e* $y \in \mathbb{O}_{\mathbb{C}}$*;*

(ii) $\tau^2 = I_{\mathbb{O}_{\mathbb{C}}}$*;*

(iii) $\tau(xy) = \tau(x)\tau(y)$, *para todos* x *e* $y \in \mathbb{O}_{\mathbb{C}}$*;*

(iv) $\tau(\overline{x}) = \overline{\tau(x)}$, *para todo* $x \in \mathbb{O}_{\mathbb{C}}$.

Neste caso, dizemos que τ é uma conjugação em $\mathbb{O}_{\mathbb{C}}$.

Proposição 6.1.2.

(i) Seja $\mathcal{O}$ uma subálgebra octoniônica de $\mathbb{O}_{\mathbb{C}}$. Definamos $\tau : \mathbb{O}_{\mathbb{C}} \to \mathbb{O}_{\mathbb{C}}$ por

$$\tau(x+iy) = x - iy,$$

para todos x e $y \in \mathcal{O}$. Então, τ é uma conjugação em $\mathbb{O}$.

(ii) Seja $\tau : \mathbb{O}_{\mathbb{C}} \to \mathbb{O}_{\mathbb{C}}$ uma conjugação em $\mathbb{O}_{\mathbb{C}}$. O conjunto dos pontos fixos de τ é uma subálgebra normada.

Demonstração:

(i)

Seja τ como no enunciado.

(I) $\tau(\lambda x + y) = \overline{\lambda}\tau(x) + \tau(y)$, para todos $\lambda \in \mathbb{C}$ e x e $y \in \mathbb{O}_{\mathbb{C}}$:

Para $x_1 + iy_1$ e $x_2 + iy_2 \in \mathbb{O}_{\mathbb{C}}$, com x_1, x_2, y_1 e $y_2 \in \mathcal{O}$, e $a + ib \in \mathbb{C}$, com a e $b \in \mathbb{R}$, temos que

$$\begin{aligned} \tau((a+ib)(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)) &= \tau((ax_1 - by_1 + x_2) + i(bx_1 + ay_1 + y_2)) \\ &= (ax_1 - by_1 + x_2) - i(bx_1 + ay_1 + y_2) \\ &= (a-ib)(x_1 - iy_1) + (x_2 - iy_2) \\ &= \overline{(a+ib)}\tau(x_1+iy_1) + \tau(x_2+iy_2). \end{aligned}$$

(II) $\tau^2 = I_{\mathbb{O}_{\mathbb{C}}}$:

Para $x + iy \in \mathbb{O}_{\mathbb{C}}$, com x e $y \in \mathcal{O}$, temos que

$$\tau^2(x+iy) = \tau(x-iy) = x + iy.$$

Assim, $\tau^2 = I_{\mathbb{O}_{\mathbb{C}}}$.

(III) $\tau(xy) = \tau(x)\tau(y)$, para todos x e $y \in \mathbb{O}_{\mathbb{C}}$:

Para $x_1 + iy_1$ e $x_2 + iy_2 \in \mathbb{O}_{\mathbb{C}}$, com x_1, x_2, y_1 e $y_2 \in \mathcal{O}$, temos que

$$\begin{aligned} \tau\big((x_1+iy_1)(x_2+iy_2)\big) &= \tau\big((x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2)\big) \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) - i(x_1y_2 + y_1x_2) \\ &= (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2) \\ &= \tau(x_1+iy_1)\tau(x_2+iy_2). \end{aligned}$$

(IV) $\tau(\overline{x}) = \overline{\tau(x)}$, para todo $x \in \mathbb{O}_{\mathbb{C}}$:

Para $x + iy \in \mathbb{O}_{\mathbb{C}}$, com x e $y \in \mathcal{O}$, temos que

$$\begin{aligned} \tau(\overline{x+iy}) &= \tau(\overline{x} + i\overline{y}) \\ &= \overline{x} - i\overline{y} \\ &= \overline{x - iy} \\ &= \overline{\tau(x+iy)}. \end{aligned}$$

(ii)

Seja $\mathcal{O}$ o conjunto dos vetores fixos por τ. Como τ é sesquilinear e $\tau^2 = I_{\mathbb{O}_{\mathbb{C}}}$, temos que $\mathcal{O}$ é um $\mathbb{R}$-subespaço linear de $\mathbb{O}_{\mathbb{C}}$ tal que

$$\mathbb{O}_{\mathbb{C}} = \mathcal{O} \oplus i\mathcal{O}.$$

Assim, a dimensão real de $\mathcal{O}$ é 8.

O elemento neutro 1 pertence à $\mathcal{O}$. De fato, como τ preserva o produto de $\mathbb{O}_{\mathbb{C}}$, temos que $\tau(1)$ é o elemento neutro multiplicativo de $\mathbb{O}_{\mathbb{C}}$, i.e., $\tau(1) = 1$.

Como T preserva o produto de $\mathbb{O}_{\mathbb{C}}$, $\mathcal{O}$ é uma subálgebra real. De fato, dados x e $y \in \mathcal{O}$, temos que

$$\tau(xy) = \tau(x)\tau(y) = xy$$

e, consequentemente, $xy \in \mathcal{O}$.

Por fim, provaremos que $N(x) \in \mathbb{R}$ para todo $x \in \mathcal{O}$. De fato, pelo lema 2.1.10,

$$N(x)1 = x\overline{x} = \tau(x)\overline{\tau(x)} = \tau(x\overline{x}) = \tau(N(x)1) = \overline{N(x)}1.$$

Assim, $N(x) = \overline{N(x)}$ e, consequentemente, $N(x) \in \mathbb{R}$.

□

Exemplo 6.1.3. *Seja $\mathbb{O}$ a subálgebra normada definida no exemplo 4.2.6. Então, a aplicação $\tau : \mathbb{O}_{\mathbb{C}} \to \mathbb{O}_{\mathbb{C}}$, definida por*

$$\tau\left(\lambda_0 1 + \sum_{i=1}^{7} \lambda_i e_i\right) = \overline{\lambda_0}1 + \sum_{i=1}^{7} \overline{\lambda_i} e_i,$$

para todo $\lambda_0 1 + \sum_{i=1}^{7} \lambda_i e_i \in \mathbb{O}_{\mathbb{C}}$, é a conjugação em $\mathbb{O}_{\mathbb{C}}$ que fixa os elementos de $\mathbb{O}$. De fato, como $\mathbb{O}$ é gerada pelos elementos 1, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6 e e_7, temos que τ é como na descrição do item (i) da proposição 6.1.2 para $\mathcal{O} = \mathbb{O}$.

Exemplo 6.1.4. *Seja $\mathbb{O}_{\text{deg}}$ a subálgebra normada definida no exemplo 4.2.7. Então, a aplicação $\tau : \mathbb{O}_{\mathbb{C}} \to \mathbb{O}_{\mathbb{C}}$, definida por*

$$\tau\left(\lambda_0 1 + \sum_{i=1}^{7} \lambda_i e_i\right) = \overline{\lambda_0}1 + \sum_{i=1,2,4} \overline{\lambda_i} e_i - \sum_{i=3,5,6,7} \overline{\lambda_i} e_i,$$

para todo $\lambda_0 1 + \sum_{i=1}^{7} \lambda_i e_i \in \mathbb{O}_{\mathbb{C}}$, é a conjugação em $\mathbb{O}_{\mathbb{C}}$ que fixa os elementos de $\mathbb{O}_{\text{deg}}$. De fato, como $\mathbb{O}_{\text{deg}}$ é gerada pelos elementos 1, e_1, e_2, ie_3, e_4, ie_5, ie_6 e ie_7, temos que τ é como na descrição do item (i) da proposição 6.1.2 para $\mathcal{O} = \mathbb{O}_{\text{deg}}$.

6.2 Subálgebras Octoniônicas e as Formas Reais de G_2

No capítulo 5, vimos que $\mathfrak{der}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$ é uma álgebra de Lie simples do tipo G_2. Nesta seção, mostraremos que as subálgebras octoniônicas induzem formas reais em $\mathfrak{der}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$.

Seja $\mathcal{O}$ uma subálgebra octoniônica. Como $\mathbb{O}_{\mathbb{C}} = \mathcal{O} \oplus i\mathcal{O}$, podemos considerar $\mathfrak{der}(\mathcal{O})$ como subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$ definindo

$$D(ix) = iD(x)$$

para todo $D \in \mathfrak{der}(\mathcal{O})$ e $x \in \mathcal{O}$. Mais do que isso, $\mathfrak{der}(\mathcal{O}) \subset \mathfrak{der}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$. De fato, dado $D \in \mathfrak{der}(\mathcal{O})$, temos, para todos $x_1 + iy_1$ e $x_2 + iy_2 \in \mathbb{O}_{\mathbb{C}}$, com x_1, x_2, y_1, $y_2 \in \mathcal{O}$, que

$$\begin{array}{rcl} D\big((x_1+iy_1)(x_2+iy_2)\big) & = & D\big((x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2)\big) \\ & = & D(x_1x_2 - y_1y_2) + iD(x_1y_2 + y_1x_2) \\ & = & D(x_1)x_2 + x_1D(x_2) - D(y_1)y_2 - y_1D(y_2) \\ & & \quad + iD(x_1)y_2 + ix_1D(y_2) + iD(y_1)x_2 + iy_1D(x_2) \\ & = & D(x_1)(x_2+iy_2) + x_1D(x_2+iy_2) \\ & & \quad + D(iy_1)(x_2+iy_2) + iy_1D(x_2+iy_2) \\ & = & D(x_1+iy_1)(x_2+iy_2) + (x_1+iy_1)D(x_2+iy_2). \end{array}$$

Logo, todo $D \in \mathfrak{der}(\mathcal{O})$ é uma derivação em $\mathbb{O}_{\mathbb{C}}$.

Com isso temos a proposição:

Proposição 6.2.1. *Seja $\mathcal{O} \subset \mathbb{O}_{\mathbb{C}}$ uma subálgebra octoniônica. O conjunto*

$$\{D \in \mathfrak{der}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}}); \quad D(x) \in \mathcal{O} \text{ para todo } x \in \mathcal{O}\}.$$

coincide com o conjunto

$$\{D \in \mathfrak{der}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}}); \quad D|_{\mathcal{O}} \in \mathfrak{der}(\mathcal{O})\}.$$

Este, por sua vez, é uma forma real de $\mathfrak{der}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$.

Notação 6.2.2. *Denotaremos por $\mathfrak{der}(\mathcal{O})$ tanto a álgebra de Lie das derivações em $\mathcal{O}$ quanto a forma real de $\mathfrak{der}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$ das derivações em $\mathbb{O}_{\mathbb{C}}$ que tem $\mathcal{O}$ como subespaço invariante.*

Teorema 6.2.3. *Seja $\mathcal{O}$ uma subálgebra octoniônica e τ a conjugação de $\mathbb{O}_{\mathbb{C}}$ que fixa os elementos de $\mathcal{O}$. Então, $\mathfrak{der}(\mathcal{O})$ é uma forma real de $\mathfrak{der}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$ e*

$$\mathfrak{der}(\mathcal{O}) = \{D \in \mathfrak{der}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}}); D \circ \tau = \tau \circ D\}.$$

Demonstração:

Para todo $D \in \mathfrak{der}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$, $\tau \circ D \circ \tau \in \mathfrak{der}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$. De fato, para todos x e $y \in \mathbb{O}_{\mathbb{C}}$, temos que

$$\begin{array}{rcl} \tau \circ D \circ \tau(xy) & = & \tau \circ D(\tau(x)\tau(y)) \\ & = & \tau\big(D \circ \tau(x)\tau(y) + \tau(x)D \circ \tau(y)\big) \\ & = & \tau \circ D \circ \tau(x)\tau^2(y) + \tau^2(x)\tau \circ D \circ \tau(y) \\ & = & \tau \circ D \circ \tau(x)y + x\tau \circ D \circ \tau(y). \end{array}$$

Seja $\sigma : \mathfrak{Der}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}}) \to \mathfrak{Der}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$ a aplicação definida por

$$\sigma(D) = \tau \circ D \circ \tau,$$

para todo $D \in \mathfrak{Der}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$. Segue que

$$\sigma(\lambda D_1 + D_2) = \overline{\lambda}\sigma(D_1) + \sigma(D_2),$$

para todos $\lambda \in \mathbb{C}$ e D_1 e $D_2 \in \mathfrak{Der}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$. De fato, temos que

$$\begin{array}{rcl} \sigma(\lambda D_1 + D_2) & = & \tau \circ (aD_1 + D_2) \circ \tau \\ & = & \tau \circ (\lambda D_1) \circ \tau + \tau \circ D_2 \circ \tau \\ & = & \overline{\lambda}\tau \circ D_1 \circ \tau + \tau \circ D_2 \circ \tau \\ & = & \overline{\lambda}\sigma(D_1) + \sigma(D_2). \end{array}$$

Além disso, σ é idempotente. De fato, dado $D \in \mathfrak{Der}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$, temos que

$$\sigma^2(D) = \sigma(\tau \circ D \circ \tau) = \tau^2 \circ D \circ \tau^2 = D.$$

Por fim, temos, para D_1 e $D_2 \in \mathfrak{Der}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$, que

$$\begin{array}{rcl} [\sigma(D_1), \sigma(D_2)] & = & [\tau \circ D_1 \circ \tau, \tau \circ D_2 \circ \tau] \\ & = & \tau \circ D_1 \circ \tau \circ \tau \circ D_2 \circ \tau - \tau \circ D_2 \circ \tau \circ \tau \circ D_2 \circ \tau \\ & = & \tau \circ D_1 \circ D_2 \circ \tau - \tau \circ D_2 \circ D_2 \circ \tau \\ & = & \tau \circ (D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1) \circ \tau \\ & = & \sigma([D_1, D_2]). \end{array}$$

Portanto, σ é uma conjugação em $\mathfrak{Der}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$. E, consequentemente, o conjunto

$$\mathfrak{g} = \{D \in \mathfrak{Der}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}}); D \circ \tau = \tau \circ D\}$$

dos elementos fixos por σ é uma forma real de $\mathfrak{Der}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$.

Seja $D \in \mathfrak{Der}(\mathcal{O})$. Segue daí que $D(x) \in \mathcal{O}$ para todo $x \in \mathcal{O}$. Assim, para todo $x + iy \in \mathbb{O}_{\mathbb{C}}$, com x e $y \in \mathcal{O}$, temos que

$$\begin{array}{rcccl} \tau \circ D(x + iy) & = & \tau(D(x) + iD(y)) & = & \tau(D(x)) - i\tau(D(y)) \\ & = & D(x) - iD(y) & = & D(x - iy) \\ & = & D \circ \tau(x + iy). & & \end{array}$$

Logo, $D \circ \tau = \tau \circ D$ e, consequentemente, $D \in \mathfrak{g}$.

Dado $D \in \mathfrak{g}$, temos, para todo $x \in \mathcal{O}$, que

$$\tau(D(x)) = D(\tau(x)) = D(x).$$

Logo, $D(x) \in \mathcal{O}$ para todo $x \in \mathcal{O}$. E, consequentemente, $D \in \mathfrak{Der}(\mathcal{O})$.

Portanto, $\mathfrak{g} = \mathfrak{Der}(\mathcal{O})$.

□

Como discutido anteriormente[1], uma subálgebra octoniônica $\mathcal{O}$ munida da forma quadrática N de $\mathbb{O}_{\mathbb{C}}$ é uma álgebra normada real. Além disso, sabemos também (veja os teoremas 2.4.5 e 2.4.5) que a menos de isomorfismo de álgebras normadas só exitem duas álgebras normadas reais.

Deste ponto até o fim desta seção, discutiremos algumas propriedades das formas reais $\mathfrak{der}(\mathcal{O})$ segundo a classe de isomorfismo da subálgebra octoniônica $\mathcal{O}$.

Lema 6.2.4. *Sejam $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ álgebras normadas isomorfas. Então:*

(i) $\mathfrak{der}(\mathcal{A}_1) \simeq \mathfrak{der}(\mathcal{A}_2)$*;*

(ii) Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ então $\mathrm{Aut}(\mathcal{A}_1) \simeq \mathrm{Aut}(\mathcal{A}_2)$ *(como grupos de Lie).*

Demonstração:

(i)

Seja $T : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ um isomorfismo de álgebras normadas.

Dado $D \in \mathfrak{der}(\mathcal{A}_1)$, temos que $T \circ D \circ T^{-1} \in \mathfrak{der}(\mathcal{A}_2)$. De fato, dados x e $y \in \mathcal{A}_2$, temos que

$$\begin{aligned} T \circ D \circ T^{-1}(xy) &= T \circ D(T^{-1}(x)T^{-1}(y)) \\ &= T\big(D \circ T^{-1}(x)T^{-1}(y) + T^{-1}(x)D \circ T^{-1}(y)\big) \\ &= T \circ D \circ T^{-1}(x)y + xT \circ D \circ T^{-1}(y). \end{aligned}$$

Logo, $T \circ D \circ T^{-1} \in \mathfrak{der}(\mathcal{A}_2)$.

De modo análogo, temos que, se $D \in \mathfrak{der}(\mathcal{A}_2)$, então $T^{-1} \circ D \circ T \in \mathfrak{der}(\mathcal{A}_1)$.

Seja $\varphi : \mathfrak{der}(\mathcal{A}_1) \to \mathfrak{der}(\mathcal{A}_2)$ a aplicação definida por

$$\varphi(D) = T \circ D \circ T^{-1},$$

para todo $D \in \mathfrak{der}(\mathcal{A}_1)$. Temos claramente que φ é linear e que a aplicação $\varphi^{-1} : \mathfrak{der}(\mathcal{A}_2) \to \mathfrak{der}(\mathcal{A}_1)$ dada por

$$\varphi^{-1}(D) = T^{-1} \circ D \circ T,$$

para todo $D \in \mathfrak{der}(\mathcal{A}_2)$, é uma inversa para φ. Além disso, temos que φ é um ismorfismo de álgebras de Lie já que

$$\begin{aligned} [\varphi(D_1), \varphi(D_2)] &= \varphi(D_1) \circ \varphi(D_2) - \varphi(D_2) \circ \varphi(D_1) \\ &= T \circ D_1 \circ D_2 \circ T^{-1} - T \circ D_2 \circ D_1 \circ T^{-1} \\ &= T \circ (D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1) \circ T^{-1} \\ &= \varphi([D_1, D_2]), \end{aligned}$$

para todos D_1 e $D_2 \in \mathfrak{der}(\mathcal{A}_1)$.

Portanto, $\mathfrak{der}(\mathcal{A}_1) \simeq \mathfrak{der}(\mathcal{A}_2)$.

[1] no comentário após a definição de subálgebra octoniônica

(ii)

Dado $T_1 \in \mathrm{Aut}(\mathcal{A}_1)$, temos que a aplicação $T \circ T_1 \circ T^{-1}$ é um automorfismo de $\mathcal{A}_2$ já que esta é uma composição de isomorfismo com domínio e contradomíno iguais à $\mathcal{A}_2$. Analogamente, se $T_2 \in \mathrm{Aut}(\mathcal{A}_2)$ então $T^{-2} \circ T_2 \circ T \in \mathrm{Aut}(\mathcal{A}_1)$.

Seja $\varphi : \mathrm{Aut}(\mathcal{A}_1) \to \mathrm{Aut}(\mathcal{A}_1)$ a aplicação definida por

$$\varphi(T_1) = T \circ T_1 \circ T^{-1},$$

para todo $T_1 \in \mathrm{Aut}(\mathcal{A}_1)$. Segue que φ é um homomorfismo de grupos de Lie com inversa φ^{-1} dada por

$$\varphi^{-1}(T_2) = T^{-1} \circ T_2 \circ T,$$

para todo $T_2 \in \mathrm{Aut}(\mathcal{A}_2)$.

Portanto, $\mathrm{Aut}(\mathcal{A}_1) \simeq \mathrm{Aut}(\mathcal{A}_2)$.

□

Proposição 6.2.5. *Se $\mathcal{O}$ é uma subálgebra octoniônica isomorfa (como álgebra normada real) a $\mathbb{O}$ então $\mathfrak{der}(\mathcal{O})$ é uma forma real compacta de $\mathfrak{der}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$. Em especial, a aplicação $\exp : \mathfrak{der}(\mathcal{O}) \to \mathrm{Aut}(\mathcal{O})$ é sobrejetiva.*

Demonstração:

Comecemos pelo caso em que $\mathcal{O} = \mathbb{O}$. Pelo corolário 4.4.2, temos que $\mathrm{Aut}(\mathbb{O})$ é compacto. Assim, pelo do teorema 1.7.5, temos que $\mathfrak{der}(\mathbb{O})$ é uma forma real compacta de $\mathfrak{der}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$.

Suponhamos que $\mathcal{O} \simeq \mathbb{O}$. Pela relação de isomorfismo dada no lema 6.2.4, temos que $\mathfrak{der}(\mathcal{O})$ é uma forma real compacta de $\mathfrak{der}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$ se e somente se $\mathfrak{der}(\mathbb{O})$ for uma forma real compacta de $\mathfrak{der}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$. Logo, devemos ter que $\mathfrak{der}(\mathcal{O})$ é uma forma real compacta de $\mathfrak{der}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$.

Novamente pelo corolário 4.4.2, temos que $\mathrm{Aut}(\mathbb{O})$ é compacto e conexo. Assim, pelo lema 6.2.4, temos que $\mathrm{Aut}(\mathcal{O}) \simeq \mathrm{Aut}(\mathbb{O})$ também é compacto e conexo. Assim, segue da proposição 1.1.14, que $\exp : \mathfrak{der}(\mathcal{O}) \to \mathrm{Aut}(\mathcal{O})$ é sobrejetiva.

□

Proposição 6.2.6. *Se $\mathcal{O}$ é uma subálgebra octoniônica isomorfa (como álgebra normada real) a $\mathbb{O}_{\mathrm{deg}}$ então $\mathfrak{der}(\mathcal{O})$ é uma forma real normal de $\mathfrak{der}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$. Em particular, temos a decomposição de Cartan*

$$\mathfrak{der}(\mathbb{O}_{\mathrm{deg}}) = \big(\mathfrak{der}(\mathbb{O}_{\mathrm{deg}}) \cap \mathfrak{der}(\mathbb{O})\big) \oplus \big(\mathfrak{der}(\mathbb{O}_{\mathrm{deg}}) \cap i\mathfrak{der}(\mathbb{O})\big)$$

com

$$\mathfrak{der}(\mathbb{O}_{\mathrm{deg}}) \cap i\mathfrak{der}(\mathbb{O}) \simeq \mathrm{Im}(\mathbb{H}) \times \mathrm{Im}(\mathbb{H}) \simeq \mathfrak{su}(2) \times \mathfrak{su}(2).$$

Demonstração:

Como $\mathfrak{der}(\mathcal{O})$ é isomorfa a $\mathfrak{der}(\mathbb{O})$ se $\mathcal{O} \simeq \mathbb{O}$ (pelo lema 6.2.4) basta verificarmos que $\mathfrak{der}(\mathbb{O})$ é uma forma real normal de $\mathfrak{der}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$. Para tanto, mostraremos que

$$\mathfrak{der}(\mathbb{O}_{\mathrm{deg}}) = \big(\mathfrak{der}(\mathbb{O}_{\mathrm{deg}}) \cap \mathfrak{der}(\mathbb{O})\big) \oplus \big(\mathfrak{der}(\mathbb{O}_{\mathrm{deg}}) \cap i\mathfrak{der}(\mathbb{O})\big)$$

é uma decomposição de Cartan de $\mathfrak{Der}(\mathbb{O}_{\text{deg}})$ e que existe uma subálgebra de Cartan em $\mathfrak{Der}(\mathbb{O}_{\text{deg}}) \cap \mathfrak{Der}(\mathbb{O})$.

Seja $(D_{i,j})$ a família de derivações em $\mathbb{O}_{\mathbb{C}}$ parametrizadas pela tripla básica (e_1, e_2, e_7).

Pela descrição do teorema 5.1.6, temos que o conjunto $\{1,\ e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_4,\ e_5,\ e_6,\ e_7\}$ é invariante pela família de derivações $(D_{i,j})$. Assim, como $\mathbb{O}$ é o $\mathbb{R}$-subespeço vetorial gerado por este conjunto, temos que $\mathbb{O}$ é invariante pela família $(D_{i,j})$ e, portanto, esta deve estar contida em $\mathfrak{Der}(\mathbb{O})$. Novamente pelo teorema 5.1.6, temos que $(D_{i,j})$ é uma base de $\mathfrak{Der}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$. Assim, devemos ter que $(D_{i,j})$ é uma base do subespaço real $\mathfrak{Der}(\mathbb{O})$ de $\mathfrak{Der}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$.

Novamente pela descrição da família $(D_{i,j})$ no teorema 5.1.6, temos que o conjunto $\{1,\ e_1,\ e_2,\ ie_3,\ e_4,\ ie_5,\ ie_6,\ ie_7\}$ é invariante pelas derivações

$$
\begin{gathered}
D_{1,2},\ D_{1,4},\ D_{2,4},\ D_{7,3},\ D_{7,5},\ D_{7,6}, \\
iD_{1,3},\ iD_{1,5},\ iD_{1,6},\ iD_{1,7},\ iD_{2,3},\ iD_{2,5},\ iD_{2,6} \text{ e } iD_{2,7}.
\end{gathered}
$$

Assim, como $\mathbb{O}_{\text{deg}}$ é o $\mathbb{R}$-subespaço vetorial gerado por $\{1,\ e_1,\ e_2,\ ie_3,\ e_4,\ ie_5,\ ie_6,\ ie_7\}$ em $\mathbb{O}_{\mathbb{C}}$ (veja o exemplo 4.2.7), temos que as derivações acima estão contidas em $\mathfrak{Der}(\mathbb{O}_{\text{deg}})$.

Assim, temos que $\mathfrak{t} := \mathfrak{Der}(\mathbb{O}_{\text{deg}}) \cap \mathfrak{Der}(\mathbb{O})$ é o $\mathbb{R}$ subespaço vetorial de $\mathfrak{Der}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$ gerado pelos elementos

$$
D_{1,2},\ D_{1,4},\ D_{2,4},\ D_{7,3},\ D_{7,5} \text{ e } D_{7,6}
$$

e $\mathfrak{s} := \mathfrak{Der}(\mathbb{O}_{\text{deg}}) \cap i\mathfrak{Der}(\mathbb{O})$ é o $\mathbb{R}$ subespaço vetorial de $\mathfrak{Der}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$ gerado pelos elemntos

$$
iD_{1,3},\ iD_{1,5},\ iD_{1,6},\ iD_{1,7},\ iD_{2,3},\ iD_{2,5},\ iD_{2,6} \text{ e } iD_{2,7}.
$$

E, consequentemente,

$$
\mathfrak{Der}(\mathbb{O}_{\text{deg}}) = \big(\mathfrak{Der}(\mathbb{O}_{\text{deg}}) \cap \mathfrak{Der}(\mathbb{O})\big) \oplus \big(\mathfrak{Der}(\mathbb{O}_{\text{deg}}) \cap i\mathfrak{Der}(\mathbb{O})\big)
$$

é uma decomposição de Cartan já que $\mathfrak{Der}(\mathbb{O})$ é uma forma real compacta (pela proposição 6.2.5).

Pelo lema 5.2.1, temos que o $\mathbb{C}$-subespaço vetorial gerado por $iD_{1,3}$ e $iD_{2,6}$ é uma subágebra de Cartan de $\mathfrak{Der}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$. Como $iD_{1,3}$ e $iD_{2,6} \in \mathfrak{Der}(\mathbb{O}_{\text{deg}})$ e $\mathfrak{Der}(\mathbb{O}_{\text{deg}})$ é uma forma real de $\mathfrak{Der}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$, temos que o $\mathbb{R}$-subespaço vetorial gerado por $iD_{1,3}$ e $iD_{2,6}$ em $\mathfrak{Der}(\mathbb{O}_{\text{deg}})$ é uma subálgebra de Cartan. Por fim, como visto acima, tal subespaço está contido em $\mathfrak{Der}(\mathbb{O}_{\text{deg}}) \cap i\mathfrak{Der}(\mathbb{O})$. Consequentemente, temos, pela decomposição de Cartan acima, que $\mathfrak{Der}(\mathbb{O}_{\text{deg}})$ é uma forma normal.

Consideremos a base i, j, e k de $\text{Im}(\mathbb{H})$. Temos que

$$
[i, j] = 2k,\ [i, k] = -2j \text{ e } [j, k] = 2i.
$$

Por outro lado, usando a descrição da família $(D_{i,j})$ dada no teorema 5.1.6, temos que

$$
[D_{1,2}, D_{1,4}] = D_{2,4},\ [D_{1,2}, D_{2,4}] = -D_{1,4},\ [D_{1,4}, D_{2,4}] = D_{1,2},
$$

$$[D_{7,3}, D_{7,5}] = 2D_{7,6},\ [D_{7,3}, D_{7,6}] = -2D_{7,5},\ [D_{7,5}, D_{7,6}] = 2D_{7,3}$$

e

$$[D_{i,j}, D_{s,t}] = D_{1,4}, D_{2,4}\rangle, \langle D_{7,3}, D_{7,5}, D_{7,6}\rangle] = 0,$$

para $(i,j) = (1,2),\ (1,4),\ (2,4)$ e $(s,t) = (7,3),\ (7,5),\ (7,6)$. Portanto, a transformação linear

$$\varphi : \mathfrak{t} \to \mathrm{Im}(\mathbb{H}) \times \mathrm{Im}(\mathbb{H})$$

definida por

$$\varphi(D_{1,2}) = (2i, 0),\ \varphi(D_{1,4}) = (2j, 0),\ \varphi(D_{2,4}) = (2k, 0),$$
$$\varphi(D_{7,3}) = (0, i),\ \varphi(D_{7,5}) = (0, j) \text{ e } \varphi(D_{7,6}) = (0, k)$$

é um isomorfismo de álgebras de Lie.

Assim, como $\mathrm{Im}(\mathbb{H}) \simeq \mathfrak{su}(2)$ (veja o lema 3.1.1), temos que

$$\mathfrak{der}(\mathbb{O}_{\mathrm{deg}}) \cap \mathfrak{der}(\mathbb{O}) =: \mathfrak{t} \simeq \mathrm{Im}(\mathbb{H}) \times \mathrm{Im}(\mathbb{H}) \simeq \mathfrak{su}(2) \times \mathfrak{su}(2).$$

□

6.3 Classificação das Formas Reais de $\mathfrak{der}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$

Na seção anterior, mostramos que dada uma subálgebra octoniônica $\mathcal{O}$, a álgebra de Lie real $\mathfrak{der}(\mathcal{O})$ é uma forma real da álgebra de Lie $\mathfrak{der}(\mathbb{O})$. Encerraremos este capítulo mostrando que toda forma real de $\mathfrak{der}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$ é igual a $\mathfrak{der}(\mathcal{O})$, para alguma subálgebra octoniônica $\mathcal{O}$. Assim, obteremos a classificação das formas reais de $\mathfrak{der}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$ a partir da classificação das álgebras normadas reais.

Seja $T \in \mathrm{Aut}(\mathcal{O})$. Temos, como na demonstração do lema 6.2.4, que a aplicação

$$D \in \mathfrak{der}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}}) \to TDT^{-1} \in \mathfrak{der}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$$

é um automorfimo de $\mathfrak{der}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$. Reciprocamente, como veremos na proxima proposição, todo automorfismo de $\mathfrak{der}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$ é descrito por uma conjugação por um automorfismo de $\mathbb{O}_{\mathbb{C}}$.

Proposição 6.3.1. *Seja ϕ um automorfismo de $\mathfrak{der}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$. Então, existe um único automorfismo T de $\mathbb{O}_{\mathbb{C}}$ tal que o diagrama*

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{O}_{\mathbb{C}} \arrow[r, "D"] \arrow[d, "T"'] & \mathbb{O}_{\mathbb{C}} \arrow[d, "T"] \\
\mathbb{O}_{\mathbb{C}} \arrow[r, "\phi(D)"] & \mathbb{O}_{\mathbb{C}}
\end{tikzcd}$$

é comutativo, para todo $D \in \mathfrak{der}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$. Isto é, todo automorfismo ϕ de $\mathfrak{der}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$ é dado, para um único $T \in \mathrm{Aut}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$, por

$$\phi(D) = TDT^{-1},$$

para todo $D \in \mathfrak{der}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$.

Demonstração:

Primeiramente, vamos demonstrar a unicidade de $T \in \mathrm{Aut}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$ com a propriedade acima.

Suponhamos que existam T_1 e $T_2 \in \mathrm{Aut}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$ tais que

$$T_1 D T_1^{-1} = \phi(D) = T_2 D T_2^{-1},$$

para todo $D \in \mathfrak{der}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$. Assim,

$$(T_1 T_2^{-1}) D (T_1 T_2^{-1})^{-1} = D,$$

para todo $D \in\in \mathfrak{der}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$. Como representação canônica de $\mathfrak{der}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$ em $\mathrm{Im}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$ é irredutível (veja a proposição 5.1.7), temos, pelo lema de Schur (lema 1.6.4), que

$$T_1 T_2^{-1}|_{\mathrm{Im}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})} = \lambda I_{\mathrm{Im}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})},$$

para algum $\lambda \in \mathbb{C}$.

Como T_1 e $T_2 \in \mathrm{Aut}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$, temos que $T_1|_{\mathrm{Im}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})}$ e $T_2|_{\mathrm{Im}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})}$ são transformações lineares invertíveis (já que $T_1(1) = T_2(1) = 1$ e T_1 e T_2 são transformações ortogonais). Assim, temos que $T_1|_{\mathrm{Im}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})} = \lambda T_2|_{\mathrm{Im}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})}$. E, como $T_1|_{\mathrm{Im}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})}$ e $T_2|_{\mathrm{Im}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})}$ são invertíveis, devemos ter que $\lambda \neq 0$.

Seja (x, y) uma dupla básica em $\mathbb{O}_{\mathbb{C}}$. Como $xy \in \mathrm{Im}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}}) \backslash \{0\}$ (veja a proposição 4.1.3) e

$$\lambda T_2(xy) = T_1(xy) = T_1(x) T_1(y) = \lambda^2 T_2(x) T_2(y) = \lambda^2 T_2(xy),$$

temos que $\lambda = \lambda^2$.

Portanto, $\lambda = 1$ e, consequentemente, $T_1 = T_2$.

Agora, provaremos que existe $T \in \mathrm{Aut}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$ tal que $\phi(D) = TDT^{-1}$, para todo $D \in \mathfrak{der}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$.

Como a representação canônica de $\mathfrak{der}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$ em $\mathrm{Im}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$ é irredutível (veja a proposição 5.1.7) e ϕ é um isomorfismo, temos que a representação

$$D \in \mathfrak{der}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}}) \to \phi(D)|_{\mathrm{Im}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})} \in \mathfrak{gl}(\mathrm{Im}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}}))$$

é, também, irredutível.

Como existe, a menos de isomorfismo de representações, somente uma representação 7-dimensional de $\mathfrak{der}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$ (veja o corolário 5.3.3) existe um isomorfismo linear $T' : \mathrm{Im}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}}) \to \mathrm{Im}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Im}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}}) \arrow[r, "D"] \arrow[d, "T'"'] & \mathrm{Im}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}}) \arrow[d, "T'"] \\
\mathrm{Im}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}}) \arrow[r, "\phi(D)"] & \mathrm{Im}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})
\end{tikzcd}$$

é comutativo, para todo $D \in \mathfrak{der}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$.

Procederemos, agora, com a demonstração de que T é um automorfismo como no enunciado. Dividiremos o restante da demonstração em cinco passos:

(I) Existe $e \in \mathrm{Im}(\mathbb{O})$ tal que $N(e) = 1$ e $N(T'(e)) \neq 0$:

Como T' é um isomorfismo linear, temos que $T'(\mathrm{Im}(\mathbb{O}))$ é um $\mathbb{R}$-subespaço linear 7-dimensional de $\mathrm{Im}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$. Como N não é degenerado em $\mathrm{Im}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}}) = T'(\mathrm{Im}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})) \oplus iT'(\mathrm{Im}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}}))$, temos que existe $x \in \mathrm{Im}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})\backslash\{0\}$ tal que $N(T'(x)) \neq 0$. Além disso, como $\mathbb{O}_{\mathbb{C}}$ é uma álgebra normada de divisão, temos que $N(x) \neq 0$.

Assim, tomando-se $e = N(x)^{-\frac{1}{2}}x$ temos que $e \in \mathrm{Im}(\mathbb{O})\backslash\{0\}$,

$$N(e) = N(N(x)^{-\frac{1}{2}}x) = N(x)^{-1}N(x) = 1$$

e

$$N(T'(e)) = N(T'(N(x)^{-\frac{1}{2}}x)) = N^{-1}(x)N(T(x)) \neq 0.$$

(II) Para todo $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ a aplicação linear $T'' : \mathbb{O}_{\mathbb{C}} \to \mathbb{O}_{\mathbb{C}}$, dada por $T''(1) = 1$ e $T''|_{\mathrm{Im}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})} = \lambda T'$, é tal que

$$\phi(D) = T''DT''^{-1},$$

para todo $D \in \mathfrak{der}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$.

Seja $D \in \mathfrak{der}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$.

Temos que

$$T'' \circ D(1) = T''(0) = 0 = \phi(D)(1) = \phi(D) \circ T''(1).$$

E, para todo $x \in \mathrm{Im}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$,

$$\begin{aligned} T'' \circ D(x) &= \lambda T' \circ D(x) \qquad (\text{pois } D(x) \in \mathrm{Im}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})) \\ &= \lambda\phi(D) \circ T'(x) \\ &= \phi(D) \circ T''(x). \end{aligned}$$

Assim, segue pela linearidade de $T'' \circ D$ e $\phi(D) \circ T''$ que

$$\phi(D) = T''DT''^{-1}.$$

(III) Existe $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ tal que a aplicação linear $T'' : \mathbb{O}_{\mathbb{C}} \to \mathbb{O}_{\mathbb{C}}$, dada por $T''(1) = 1$ e $T''|_{\mathrm{Im}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})} = \lambda T'$, é ortogonal:

Seja $e \in \mathrm{Im}(\mathbb{O})$ tal que $N(e) = 1$ e $N(T'(e)) \neq 0$, como no item (I). Tomemos $\lambda := N(T'(e))^{-\frac{1}{2}}$.

Temos que

$$N(T''(e)) = N(\lambda T'(e)) = N\big(N(T'(e))^{-\frac{1}{2}}T'(e)\big) = N(T'(e))^{-1}N(T'(e)) = 1.$$

Mostraremos, agora, que

$$N(T''(x)) = N(x)$$

para todo $x \in \mathrm{Im}(\mathbb{O})$ com $N(x) = 1$.

Seja $x \in \mathrm{Im}(\mathbb{O})$ com $N(x) = 1$. Existe $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{O})$ tal que $\varphi(x) = e$. De fato, existem x_2, x_7, y_2 e $y_7 \in \mathbb{O}$ tais que (x, x_2, x_7) e (e, y_2, y_7) são triplas básicas. Assim, pela proposição 4.3.4, existe um automorfismo $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{O})$ definido por

$$\varphi(x) = e,\ \varphi(x_2) = y_2 \text{ e } \varphi(x_7) = y_7.$$

Como $\exp : \mathfrak{Der}(\mathbb{O}) \to \mathrm{Aut}(\mathbb{O})$ é sobrejetivo (veja o corolário 4.4.2), existe $D \in \mathfrak{Der}(\mathbb{O})$ tal que $\exp(D) = \varphi$. Assim, pelo item (II), temos que

$$\phi(D) = T''DT''^{-1}$$

e, consequentemente,

$$\exp(\phi(D)) = \exp(T''DT''^{-1}) = T''\exp(D)T''^{-1} = T''\varphi T''^{-1}.$$

Logo,

$$\begin{array}{rclcl} N\big(T''(x)\big) & = & N\big(\exp(\phi(D)) \circ T''(x)\big) & = & N\big(T'' \circ \varphi(x)\big) \\ & = & N\big(T''(e)\big) & = & 1 \\ & = & N(x). & & \end{array}$$

Adiante, para todo $x \in \mathrm{Im}(\mathbb{O})$, temos que

$$\begin{array}{rclcl} N(T''(x)) & = & N(N(x)^{\frac{1}{2}}T''(N(x)^{-\frac{1}{2}}x)) & = & N(x)N(T''(N(x)^{-\frac{1}{2}}x)) \\ & = & N(x)N(N(x)^{-\frac{1}{2}}x) & = & N(x) \end{array}$$

Em particular, segue que

$$\langle T''(x), T''(y)\rangle = \langle x, y\rangle,$$

para todos x e $y \in \mathrm{Im}(\mathbb{O})$.

Assim, dado $z = x + iy \in \mathrm{Im}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$, com x e $y \in \mathrm{Im}(\mathbb{O})$, temos que

$$\begin{array}{rcl} N(T''(z)) & = & N(T''(x) + iT''(y)) \\ & = & N(T''(x)) + i\langle T''(x), T''(y)\rangle + N(T''(y)) \\ & = & N(x) + i\langle x, y\rangle + N(y) \\ & = & N(x + iy) \\ & = & N(z). \end{array}$$

Portanto, temos que

$$N(T''(1)) = N(1)$$

e

$$N(T''(x)) = N(x),$$

para todo $x \in \mathrm{Im}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$. Logo, $N \circ T'' = N$.

(IV) Dados x e $y \in \mathbb{O}_{\mathbb{C}}$ com $N(x) = N(y) = 1$ e $\langle x, y\rangle = 0$, temos que $T''(xy) = \pm T''(x)T''(y)$.

Como T'' é ortogonal e $T''(\mathrm{Im}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})) = \mathrm{Im}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$, temos que $(T''(x), T''(y))$ é uma dupla básica em $\mathbb{O}_{\mathbb{C}}$.

Sejam $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ as subálgebras quaterniônicas geradas por (x, y) e $(T''(x),T''(y))$, respectivamente. Assim, pelo corolário 4.1.4, temos que $\mathcal{H}_1' = \mathcal{H}_1 \oplus i\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2' = \mathcal{H}_2 \oplus i\mathcal{H}_2$ são as subálgebras (complexas) 4-dimensionais de $\mathbb{O}_{\mathbb{C}}$ geradas por (x, y) e $(T''(x),T''(y))$, respectivamente. Adiante mostraremos que $T''(\mathcal{H}_1') = \mathcal{H}_2'$ e obteremos o resultado deste item usando a proposição 4.1.5.

Sejam $z \in \mathrm{Im}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$ tal que $(T(x), T(y), z)$ é uma tripla básica e $\mathcal{O}$ a subálgebra octoniônica gerada pela tripla básica $(T(x), T(y), z)$. Temos, pela proposição 4.2.8, que $\mathcal{O} \simeq \mathbb{O}$. E, pela proposição 4.3.4, existe um automorfismo $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathcal{O})$ definido por

$$\varphi(T''(x)) = T''(y),\ \varphi(T''(y)) = T''(y) \text{ e } \varphi(z) = -z.$$

Como $\mathcal{H}_2$ é o $\mathbb{R}$-subespaço vetorial gerado por 1, $T(x)$, $T(y)$ e $T(x)T(y)$, temos que $\varphi(w) = w$ para todo $w \in \mathcal{H}_2$. Consequentemente, $\varphi(w) = -w$ para todo $y \in \mathcal{H}_2 z$.

Como $\mathcal{O} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_1 z$ (veja a proposição 4.2.3), temos que se $w \in \mathcal{O}$ então $w \in \mathcal{H}_1$ se e somente se $\varphi(w) = w$. Assim, se $w \in \mathbb{O}_{\mathbb{C}} = \mathcal{O} \oplus i\mathcal{O}$ então $w \in \mathcal{H}_2' = \mathcal{H}_2 \oplus i\mathcal{H}_2$ se e somente se $\varphi(w) = w$.

Pelo corolário 4.4.2, $\mathrm{Aut}(\mathcal{O}) \simeq \mathrm{Aut}(\mathbb{O})$ é compacto e conexo. Assim, temos que a aplicação $\exp : \mathfrak{der}(\mathcal{O}) \to \mathrm{Aut}(\mathcal{O})$ é sobrejetiva. Logo, existe $D \in \mathfrak{der}(\mathcal{O})$ tal que $\exp(D) = \varphi$. Assim, pelo item (II), temos que

$$\phi^{-1}(D) = T''^{-1} D T'',$$

e, consequentemente,

$$T''^{-1}\varphi T'' = T''^{-1}\exp(D)T'' = \exp(T''^{-1}DT'') = \exp(\phi^{-1}(D)) \in \mathrm{Aut}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}}).$$

Logo, temos que

$$\begin{array}{rcl} T''^{-1}\big(\varphi \circ T''(xy)\big) & = & T''^{-1} \circ \varphi \circ T''(xy) \\ & = & T''^{-1} \circ \varphi \circ T''(x) T''^{-1} \circ \varphi \circ T''(y) \\ & = & T''^{-1}\big(T''(x)\big)T''^{-1}\big(T''(y)\big) \\ & = & xy \end{array}$$

e, consequentemente,

$$\varphi(T''(xy)) = T''(xy).$$

Portanto, $T''(xy) \in \mathcal{H}_2'$.

Com isso, temos que $T''(\mathcal{H}_1') = \mathcal{H}_2'$ pois $\mathcal{H}_1'$ é o subespaço vetorial gerado por 1, x, y e xy e $T''(1) = 1$, $T''(x)$, $T''(y)$ e $T''(xy) \in \mathcal{H}_2'$.

Logo, temos que $T'' : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ é uma transformação ortogonal tal que $T''(1) = 1$. Assim, pela proposição 4.1.5, temos que $T''(xy) = \pm T''(x)T''(y)$.

(V) Existe $\mu \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ tal que a aplicação linear $T : \mathbb{O}_{\mathbb{C}} \to \mathbb{O}_{\mathbb{C}}$, dada por $T(1) = 1$ e $T|_{\mathrm{Im}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})} = \mu T'$, é um automorfismo:

Seja (x_1, x_2, x_7) uma tripla básica em $\mathbb{O}_\mathbb{C}$.

Pelo item (IV), temos que $T''(x_1x_2) = cT''(x_1)T''(x_2)$, onde $c = \pm 1$. Seja $T : \mathbb{O}_\mathbb{C} \to \mathbb{O}_\mathbb{C}$ a aplicação linear dada por

$$T(1) = 1$$

e

$$T|_{\mathrm{Im}(\mathbb{O}_\mathbb{C})} = cT''|_{\mathrm{Im}(\mathbb{O}_\mathbb{C})} = c\lambda T'.$$

Assim, temos que

$$T(x_1x_2) = cT''(x_1x_2) = (cT''(x_1))(cT''(x_2)) = T(x_1)T(x_2).$$

Temos que $(T(x_1), T(x_2), T(x_7))$ também é uma tripla básica em $\mathbb{O}_\mathbb{C}$. De fato, como T'' é uma transformação ortogonal, a ortonormalidade do conjunto

$$\{1, x_1, x_2, x_1x_2, x_7\}$$

implica na ortonormalidade do conjunto

$$\{T(1) = 1, T(x_1), T(x_2), T(x_1x_2), T(x_7)\}.$$

Sejam 1, x_1, x_2, $x_3 := -x_1x_7$, $x_4 := x_1x_2$, $x_5 := -(x_2x_2)x_7$, $x_6 := -x_2x_7$ e x_7 os elementos da base de $\mathbb{O}_\mathbb{C}$ induzida pela tripla básica (x_1, x_2, x_7) e 1, $y_1 := T(x_1)$, $y_2 := T(x_2)$, $y_3 := -y_1y_7$, $y_4 := y_1y_2$, $y_5 := -(y_2y_2)y_7$, $y_6 := -y_2y_7$, $y_7 := T(x_7)$ os elementos da base induzida pela tripla básica $(T(x_1), T(x_2), T(x_7))$. Segue da proposição 4.2.3 que T é um automorfismo se $T(x_i) = y_i$ para $i = 1, ..., 7$.

Pelo item (IV), temos, para constantes α, β e $\gamma \in \{-1, 1\}$, que

$$\begin{aligned} T(x_3) &= T(-x_1x_7) &&= cT''(-x_1x_7) \\ &= \alpha(-T''(x_1))T''(x_7) &&= \alpha(-T(x_1))T(x_7) \\ &= \alpha y_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(x_5) &= T(-x_4x_7) &&= cT''(-x_4x_7) \\ &= \beta(-T''(x_4))T''(x_7) &&= \beta(-T(x_4))T(x_7) \\ &= \beta y_5 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} T(x_6) &= T(-x_2x_7) &&= cT''(-x_2x_7) \\ &= \gamma(-T''(x_2))T''(x_7) &&= \gamma(-T(x_2))T(x_7) \\ &= \gamma y_6. \end{aligned}$$

Portanto, devemos mostrar que $\alpha = \beta = \gamma = 1$.

Denotemos por $D_{i,j}$ e $D'_{i,j}$ as derivações em $\mathbb{O}_\mathbb{C}$ parametrizadas pelas triplas básicas (x_1, x_2, x_7) e (y_1, y_2, y_7), respectivamente.

Temos que

$$\begin{aligned} \phi(D_{1,3})(y_1) &= TD_{1,3}T^{-1}(y_1) &&= TD_{1,3}(x_1) \\ &= T(x_3) &&= \alpha y_3 \\ &= \alpha D'_{1,3}(y_1), \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcccl}
\phi(D_{1,3})(y_2) & = & TD_{1,3}T^{-1}(y_2) & = & TD_{1,3}(x_2) \\
& = & T(0) & = & 0 \\
& = & \alpha D'_{1,3}(y_2) & &
\end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcccl}
\phi(D_{1,3})(y_7) & = & TD_{1,3}T^{-1}(y_7) & = & TD_{1,3}(x_7) \\
& = & T(0) & = & 0 \\
& = & \alpha D'_{1,3}(y_7). & &
\end{array}$$

Assim, segue do lema 5.1.3 que

$$\phi(D_{1,3}) = \alpha D'_{1,3}.$$

Analogamente, temos que

$$\begin{array}{ccc}
\phi(D_{7,3}) = \alpha D'_{7,3}, & \phi(D_{7,5}) = \beta D'_{7,5}, & \phi(D_{7,6}) = \gamma D'_{7,6} \\
\phi(D_{1,5}) = \beta D'_{1,5}, & \phi(D_{1,4}) = D'_{1,4}, & \phi(D_{2,6}) = \gamma D'_{2,6} \\
\phi(D_{2,5}) = \beta D'_{2,5} \text{ e} & \phi(D_{2,4}) = D'_{2,4}. &
\end{array}$$

Assim, como ϕ é um isomorfismo de álgebras de Lie, temos que

$$\begin{array}{rcl}
2\gamma D'_{7,6} & = & \phi(2D_{7,6}) \\
& = & \phi([D_{7,3}, D_{7,5}]) \\
& = & [\phi(D_{7,3}), \phi(D_{7,5})] \\
& = & [\alpha D'_{7,3}, \beta D'_{7,5}] \\
& = & 2\alpha\beta D'_{7,6},
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
2D'_{1,4} & = & \phi(2D_{1,4}) \\
& = & \phi([D_{1,3}, D_{1,5}]) \\
& = & [\phi(D_{1,3}), \phi(D_{1,5})] \\
& = & [\alpha D'_{1,3}, \beta D'_{1,5}] \\
& = & 2\alpha\beta D'_{1,6}
\end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcl}
2D'_{2,4} & = & \phi(2D_{2,4}) \\
& = & \phi([D_{2,6}, D_{2,5}]) \\
& = & [\phi(D_{2,6}), \phi(D_{2,5})] \\
& = & [\gamma D'_{2,6}, \beta D'_{2,5}] \\
& = & 2\gamma\beta D'_{2,4}.
\end{array}$$

Logo,

$$\gamma = \alpha\beta = \gamma\beta = 1.$$

Portanto,

$$\alpha = \beta = \gamma = 1.$$

E, assim, temos que $T(x_i) = y_i$. Como queríamos demonstrar.

Portanto, pelos item (II) e (IV), temos o resultado.

$\square$

Sejam $\mathcal{O}_1$ e $\mathcal{O}_2$ subálgebras octoniônicas e $T : \mathcal{O}_1 \to \mathcal{O}_1$ um isomorfismo entre elas. Sabemos que $\mathfrak{der}(\mathcal{O}_1)$ e $\mathfrak{der}(\mathcal{O}_2)$ são formas reais de $\mathfrak{der}(\mathbb{O}_\mathbb{C})$. Também sabemos que o automorfismo

$$D \in \mathfrak{der}(\mathbb{O}_\mathbb{C}) \to TDT^{-1} \in \mathfrak{der}(\mathbb{O}_\mathbb{C})$$

é uma conjugação entre $\mathfrak{der}(\mathcal{O}_1)$ e $\mathfrak{der}(\mathcal{O}_2)$ (i.e. um automorfismo de $\mathfrak{der}(\mathbb{O}_\mathbb{C})$ que envia a forma real $\mathfrak{der}(\mathcal{O}_1)$ na forma real $\mathfrak{der}(\mathcal{O}_2)$).

Reciprocamente, veremos, no próximo teorema, que toda forma real de $\mathfrak{der}(\mathbb{O}_\mathbb{C})$ é da forma $\mathfrak{der}(\mathcal{O})$ para alguma subálgebra octoniônica $\mathcal{O}$ e que as formas reais $\mathfrak{der}(\mathcal{O}_1)$ são conjugadas $\mathfrak{der}(\mathcal{O}_2)$ se e somente se $\mathcal{O}_1 \simeq \mathcal{O}_2$.

Lema 6.3.2. *Sejam $\mathcal{O}$ uma subálgebra octoniônica e $\mathfrak{g}$ uma forma real de $\mathfrak{der}(\mathbb{O}_\mathbb{C})$ isomorfa a $\mathfrak{der}(\mathcal{O})$. Então, $\mathfrak{g} = \mathfrak{der}(\mathcal{O}')$, onde $\mathcal{O}'$ é uma subálgebra octoniônica isomorfa a $\mathcal{O}$.*

Demonstração:
Seja $\phi : \mathfrak{der}(\mathcal{O}) \to \mathfrak{g}$ um isomorfismo. Como

$$\mathfrak{der}(\mathbb{O}_\mathbb{C}) = \mathfrak{der}(\mathcal{O}) \oplus i\mathfrak{der}(\mathcal{O}) = \mathfrak{g} \oplus i\mathfrak{g}$$

podemos estender ϕ para um automorfismo $\phi : \mathfrak{der}(\mathbb{O}_\mathbb{C}) \to \mathfrak{der}(\mathbb{O}_\mathbb{C})$ tal que

$$\phi(iD) = i\phi(D),$$

para todo $D \in \mathfrak{der}(\mathcal{O})$.

Pela proposição 6.3.1, temos que existe $T \in \mathrm{Aut}(\mathbb{O}_\mathbb{C})$ tal que

$$\phi(D) = TDT^{-1},$$

para todo $D \in \mathfrak{der}(\mathbb{O}_\mathbb{C})$.

Seja $\mathcal{O}' := T(\mathcal{O})$. Como $T \in \mathrm{Aut}(\mathbb{O}_\mathbb{C})$, temos que $\mathcal{O}'$ é uma subálgebra octoniônica de $\mathbb{O}_\mathbb{C}$.

Dado $D \in \mathfrak{der}(\mathcal{O})$, temos que $\phi(D) \in \mathfrak{der}(\mathcal{O}')$. De fato, para todo $T(x) \in \mathcal{O}'$, com $x \in \mathcal{O}$, temos que

$$\phi(D)(T(x)) = T(D(x)) \in T(\mathcal{O}) = \mathcal{O}'.$$

Assim, $\phi(D) \in \mathfrak{der}(\mathcal{O}')$.

Por fim, como $\dim\mathfrak{der}(\mathcal{O}') = \dim\mathfrak{der}(\mathcal{O})$ e ϕ é injetivo, segue que

$$\mathfrak{g} = \phi(\mathfrak{der}(\mathcal{O})) = \mathfrak{der}(\mathcal{O}').$$

□

Teorema 6.3.3. *Toda forma real de $\mathfrak{der}(\mathbb{O}_\mathbb{C})$ é a álgebra das derivações de alguma subálgebra octoniônica de $\mathbb{O}_\mathbb{C}$. Em especial, só existem, a menos de isomorfismo, duas álgebras de Lie reais do tipo G_2.*

Demonstração:

Seja $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{der}(\mathbb{O}_\mathbb{C})$ uma forma real. Então, existe, pelo proposição 1.7.7, uma forma real compacta $\mathfrak{u}$ de $\mathfrak{der}(\mathbb{O}_\mathbb{C})$ tal que

$$\mathfrak{g} = (\mathfrak{u} \cap \mathfrak{g}) \oplus (i\mathfrak{u} \cap \mathfrak{g}).$$

Sendo $\mathfrak{u}$ uma forma real compacta, temos, pelo teorema 1.7.6, que $\mathfrak{u} \simeq \mathfrak{der}(\mathbb{O})$. Pelo lema 6.3.2, segue que

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{der}(\mathcal{O})$$

para alguma subálgebra octoniônica

$$\mathcal{O} \simeq \mathbb{O}.$$

Assim, temos que

$$\mathfrak{g} = (\mathfrak{der}(\mathcal{O}) \cap \mathfrak{g}) \oplus (i\mathfrak{der}(\mathcal{O}) \cap \mathfrak{g})$$

e

$$\mathfrak{der}(\mathcal{O}) = (\mathfrak{der}(\mathcal{O}) \cap \mathfrak{g}) \oplus (\mathfrak{der}(\mathcal{O}) \cap i\mathfrak{g}).$$

Se $\mathfrak{g} = \mathfrak{der}(\mathcal{O})$, temos o resultado.

De agora em diante, estaremos tratando o caso no qual

$$i\mathfrak{der}(\mathcal{O}) \cap \mathfrak{g} \neq 0.$$

Seja $\sigma : \mathfrak{der}(\mathbb{O}_\mathbb{C}) \to \mathfrak{der}(\mathbb{O}_\mathbb{C})$ a conjugação que fixa os elementos de $\mathfrak{g}$. Como $\mathfrak{der}(\mathcal{O}) = (\mathfrak{der}(\mathcal{O}) \cap \mathfrak{g}) \oplus (\mathfrak{der}(\mathcal{O}) \cap i\mathfrak{g})$, temos que

$$\sigma(\mathfrak{der}(\mathcal{O})) = \mathfrak{der}(\mathcal{O}).$$

Assim, como $\mathfrak{der}(\mathbb{O}_\mathbb{C}) = \mathfrak{der}(\mathcal{O}) \oplus i\mathfrak{der}(\mathcal{O})$ e $\sigma : \mathfrak{der}(\mathcal{O}) \to \mathfrak{der}(\mathcal{O})$ é um automorfismo, temos um automorfismo $\phi : \mathfrak{der}(\mathbb{O}_\mathbb{C}) \to \mathfrak{der}(\mathbb{O}_\mathbb{C})$ dado por

$$\phi(D) = \sigma(D)$$

e

$$\phi(iD) = i\sigma(D),$$

para todo $D \in \mathfrak{der}(\mathcal{O})$. Logo, pela proposição 6.3.1, existe $T \in \mathrm{Aut}(\mathbb{O}_\mathbb{C})$ tal que

$$\phi(D) = TDT^{-1},$$

para todo $D \in \mathfrak{der}(\mathbb{O}_\mathbb{C})$.

Segue que, para todo $D_1 + iD_2 \in \mathfrak{der}(\mathbb{O})$, com D_1 e $D_2 \in \mathfrak{der}(\mathcal{O})$, temos

$$\begin{array}{rclcl} D_1 + iD_2 & = & \sigma^2(D_1) + i\sigma^(D_2) & = & \phi(\sigma(D_1) + i\sigma(D_2)) \\ & = & \phi^2(D_1 + iD_2) & = & T^2(D_1 + iD_2)T^{-2}. \end{array}$$

Como a representação canônica de $\mathfrak{der}(\mathbb{O}_\mathbb{C})$ em $\mathrm{Im}(\mathbb{O}_\mathbb{C})$ é irredutível (veja a proposição 5.1.7), segue do lema da Schur (lema 1.6.4) que

$$T^2|_{\mathrm{Im}(\mathbb{O}_\mathbb{C})} = \lambda I|_{\mathrm{Im}(\mathbb{O}_\mathbb{C})},$$

para algum $\lambda \in \mathbb{C}$. Assim, como $T^2 = \in \mathrm{Aut}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$, temos que $\lambda \neq 0$,

$$\lambda e_4 = T(e_4) = T(e_1)T(e_2) = \lambda^2 e_4$$

e, consequentemente, $\lambda = 1$. Portanto,

$$T^2 = I_{\mathbb{O}_{\mathbb{C}}}.$$

Provaremos, agora, que $T \in \mathrm{Aut}(\mathcal{O})$.

A representação canônica de $\mathfrak{der}(\mathcal{O})$ decompõe $\mathrm{Im}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$ como soma de subespaços irredutíveis da forma

$$\mathrm{Im}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}}) = \mathrm{Im}(\mathcal{O}) \oplus i\mathrm{Im}(\mathcal{O})$$

(veja a proposição 5.1.7). Assim, a representação

$$D \in \mathfrak{der}(\mathcal{O}) \to \sigma(D) = TDT^{-1} \in \mathfrak{der}(\mathcal{O})$$

em $\mathrm{Im}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$ tem como decomposição de $\mathrm{Im}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$ em espaços irredutíveis

$$\mathrm{Im}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}}) = T(\mathrm{Im}(\mathcal{O})) \oplus iT(\mathrm{Im}(\mathcal{O})).$$

Como $\sigma : \mathfrak{der}(\mathcal{O}) \to \mathfrak{der}(\mathcal{O})$ é um automorfismo, as decomposições acima coincidem. Logo,

$$T(\mathrm{Im}(\mathcal{O})) = \mathrm{Im}(\mathcal{O}) \text{ ou } i\mathrm{Im}(\mathcal{O}).$$

Adiante, como $\mathcal{O} \simeq \mathbb{O}$ e $T \in \mathrm{Aut}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$, temos que N é positiva em $\mathrm{Im}(\mathcal{O})\backslash\{0\}$ e $T(\mathrm{Im}(\mathcal{O}))\backslash\{0\}$ e negativa em $i\mathrm{Im}(\mathcal{O})\backslash\{0\}$. Assim, devemos ter que

$$T(\mathrm{Im}(\mathcal{O})) = \mathrm{Im}(\mathcal{O}).$$

Logo, $T \in \mathrm{Aut}(\mathcal{O})$.

Sendo $T \in \mathrm{Aut}(\mathcal{O})$ uma aplicação ortogonal e $T^2 = I_{\mathcal{O}}$, temos que

$$\mathcal{O} = \mathcal{O}_- \oplus \mathcal{O}_+,$$

onde

$$\mathcal{O}_- = \{x \in \mathcal{O}; T'(x) = -x\},$$
$$\mathcal{O}_+ = \{x \in \mathcal{O}; T'(x) = x\}$$

e

$$\mathcal{O}_- \perp \mathcal{O}_+.$$

A seguir, mostraremos que $\mathcal{O}' = \mathcal{O}_+ \oplus i \oplus \mathcal{O}_-$ é uma subálgebra octoniônica e que $\mathfrak{g} = \mathfrak{der}(\mathcal{O}')$.

Temos que $\mathcal{O}_- \neq 0$. De fato, Se $\mathcal{O}_- = 0$ teríamos que $\mathcal{O}_+ = \mathcal{O}$. Logo, $T = I_{\mathcal{O}}$. Assim,

$$\sigma(D) = TDT^{-1} = D,$$

para todo $D \in \mathcal{O}$. O que implicaria que $\mathfrak{g} = \mathfrak{der}(\mathcal{O})$. Contradizendo o fato de que $\mathfrak{g} \cap i\mathfrak{der}(\mathcal{O}) \neq 0$.

Como $T \in \mathrm{Aut}(\mathcal{O})$, temos que $T(1) = 1$ e, portanto, $1 \in \mathcal{O}_+$. Logo,

$$\mathcal{O}_- \subset \mathrm{Im}(\mathcal{O}).$$

Adiante, provaremos que $\dim \mathcal{O}_+ \geqslant 3$. Suponhamos que $\dim \mathcal{O}_+ < 3$. Então, como $\dim \mathcal{O}_- = \dim \mathcal{O} - \dim \mathcal{O}_+ > 5$, existem vetores ortonormais x_1, x_2 e $x_3 \in \mathcal{O}_- \subset \mathrm{Im}(\mathcal{O})$. Assim, temos que

$$\{1, x_1x_2, x_1x_3\}$$

é um conjunto ortonormal contido em $\mathcal{O}_+$. De fato, temos que

$$\langle 1, x_1x_2\rangle = \langle \overline{x_1}, x_2\rangle = -\langle x_1, x_2\rangle = 0,$$

$$\langle 1, x_1x_3\rangle = \langle \overline{x_1}, x_3\rangle = -\langle x_1, x_3\rangle = 0$$

e

$$\langle x_1x_2, x_1x_3\rangle = \langle \overline{x_1}(x_1x_2), x_3\rangle = \langle x_2, x_3\rangle = 0.$$

Além disso, temos que

$$T(x_1x_2) = T(x_1)T(x_2) = (-x_1)(-x_2) = x_1x_2$$

e, analogamente,

$$T(x_1x_3) = x_1x_3.$$

Assim, $\dim \mathcal{O}_+ \geqslant 3$.

Pelos parágrafos anteriores, temos que existem uma tripla básica (x_1, x_2, x_7) em $\mathcal{O}$ tal que x_1 e $x_2 \in \mathcal{O}_+$ e $x_7 \in \mathcal{O}_-$. Assim, a base induzida pela tripla básica (x_1, x_2, x_7) é formada por

$$1,\ x_1,\ x_2,\ x_4 := x_1x_2 \in \mathcal{O}_+$$

e

$$x_3 := -x_1x_7,\ x_5 := -(x_1x_2)x_7,\ x_6 := -x_2x_7,\ x_7 \in \mathcal{O}_-.$$

Seja $\mathcal{O}'$ o $\mathbb{R}$-subespaço linear de $\mathbb{O}_{\mathbb{C}}$ gerado pelos elementos

$$1,\ x_1,\ x_2,\ ix_3,\ x_4,\ ix_5,\ ix_6 \text{ e } ix_7.$$

Segue da proposição 4.2.3 que $\mathcal{O}'$ é uma subálgebra real de $\mathbb{O}_{\mathbb{C}}$. Além disso, como os elementos 1, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 e x_7 são ortonormais, temos que

$$N\left(\lambda_0 1 + \sum_{j=1,2,4} \lambda_j x_j + \sum_{j=3,5,6,7} \lambda_j i x_j\right) = \sum_{j=0,1,2,4} \lambda_j^2 - \sum_{j=3,5,6,7} \lambda_j^2 \in \mathbb{R},$$

para todo $\lambda_0 1 + \sum_{j=1,2,4} \lambda_j x_j + \sum_{j=3,5,6,7} \lambda_j i x_j \in \mathcal{O}'$, com $\lambda_j \in \mathbb{R}$, $j = 0, 1, ..., 7$. Logo, $\mathcal{O}'$ é uma subálgebra octoniônica.

Sejam $D_{i,j}$ as derivações em $\mathfrak{Der}(\mathcal{O})$ parametrizadas pela tripla básica (x_1, x_2, x_7). Temos que

$$\sigma(D_{i,j}) = \begin{cases} D_{i,j} & \text{se } (i,j) = \begin{array}{l}(1,2),\ (1,4),\ (2,4)\\ (7,3),\ (7,5) \text{ ou } (7,6)\end{array} \\ -D_{i,j} & \text{se } (i,j) = \begin{array}{l}(1,3),\ (1,5),\ (1,6)\\ (1,7),\ (2,3),\ (2,5)\\ (2,6),\ \text{ou } (2,7).\end{array} \end{cases}$$

De fato, temos que

$$\begin{array}{rcccl} \sigma(D_{1,6})(x_1) & = & TD_{1,6}T^{-1}(x_1) & = & TD_{1,6}(x_1) \\ & = & T(x_6) & = & -x_6 \\ & = & -D_{1,6}(x_1) & & \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccl} \sigma(D_{1,6})(x_2) & = & TD_{1,6}T^{-1}(x_2) & = & TD_{1,6}(x_2) \\ & = & T(0) & = & 0 \\ & = & -D_{1,6}(x_2) & & \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcccl} \sigma(D_{1,6})(x_7) & = & TD_{1,6}T^{-1}(x_7) & = & TD_{1,6}(x_7) \\ & = & T(0) & = & 0 \\ & = & -D_{1,6}(x_7). & & \end{array}$$

Logo, pelo lema 5.1.3, devemos ter que $\sigma(D_{1,6}) = -D_{1,6}$. As outras igualdades seguem de forma análoga.

Assim, como a família de derivações $(D_{i,j})$ é linearmente independente, temos que $\mathfrak{g}$ (i.e. os pontos fixos da conjugação σ) é o subespaço $\mathbb{R}$-linear de $\mathfrak{Der}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$ gerado por

$$\begin{array}{cccccccc} D_{1,2}, & D_{1,4}, & D_{2,4}, & D_{7,3}, & D_{7,5}, & D_{7,6}, & & iD_{1,3}, \\ iD_{1,5}, & iD_{1,6}, & iD_{1,7}, & iD_{2,3}, & iD_{2,5}, & iD_{2,6} & \text{e} & iD_{2,7}. \end{array}$$

Por fim, utilizando-se a caracterização da família $(D_{i,j})$ dada no teorema 5.1.6, temos que as derivações da base acima pertencem à $\mathfrak{Der}(\mathcal{O}')$ (i.e. estabilizam a subálgebra octoniônica $\mathcal{O}'$). Portanto, $\mathfrak{g} = \mathfrak{Der}(\mathcal{O}')$.

$\square$

Referências Bibliográficas

[1] Baez, John: *The Octonions*, Bull. Amer. Math. Soc. 39 (02): 145 205, 2002;

[2] Humphreys, J.E.: *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, Springer Verlag, 1997;

[3] Lee, John M.: *Introduction to Smooth Manifolds*, Springer Verlag, 2002;

[4] McLewin, Kelly E.: *Octonions and the Exceptional Algebra* $\mathfrak{g}_2$, Tese de Mestrado, Virginia Polytechnic Institute, 2004;

[5] Jacobson, N.: *Cayley numbers and simple lie algebras of type G*, Duke Math. J., 5(1939),775-783;

[6] Jacobson, N.: *Lie Algebras*, Wiley and Sons, 1962;

[7] Schafer, Richard D.: *An Introduction to Nonassociative Algebras*, Elsevier, 1966;

[8] San Martin, Luiz A. B.: *Álgebras de Lie*, Editora Unicamp, 2009;

[9] San Martin, Luiz A. B.: *Grupos de Lie*, notas de aula, 2011;

[10] Springer, Tonny A. e Veldcamp, Ferdinand D.: *Octonions, Jordan Algebras ans Exceptional Groups*, Springer Verlag, 2000.

Lista de Símbolos

$(D_{i,j})$ Família de derivações em $\mathbb{O}_{\mathbb{K}}$ parametrizadas por uma tripla básica, página 96

$\mathbb{C}_{\mathrm{deg}}$ Álgebra Degenerada dos Números Complexos, página 45

$\mathbb{H}$ Álgebra dos Números Quatérniônicos, página 46

$\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ A Complexificação da Álgebra dos Números Quatérniônicos, página 61

$\mathbb{H}_{\mathrm{deg}}$ A Álgebra Degenerada dos Números Quaterniônicos, página 46

$\mathbb{O}$ Álgebra dos Números Octoniônicos, página 47

$\mathbb{O}_{\mathbb{C}}$ A Complexificação da Álgebra dos Números Octoniônicos, página 62

$\mathbb{O}_{\mathrm{deg}}$ Álgebra Degenerada dos Números Octoniônicos, página 47

$\mathfrak{der}(\mathcal{A})$ A Álgebra das Derivações em $\mathcal{A}$, página 84

$\mathfrak{gl}(V)$ Álgebra de Lie das transformações lineares $V \to V$, página 9

$\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$ Radical solúvel da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, página 11

$\mathfrak{sl}(V)$ Subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(V)$ das aplicações X com $\mathrm{tr}(X) = 0$, página 6

$\mathfrak{so}(V)$ Subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(V)$ das aplicações X tais que $X^* = -X$, página 6

$\mathfrak{su}(V)$ Subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(V)$ das aplicações X tais que $X^* = -X$ e $\mathrm{tr}(X) = 0$, página 7

$\mathfrak{u}(V)$ Subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(V)$ das aplicações X tais que $X^* = -X$, página 7

$\mathrm{GL}(V)$ Grupo das transformações lineares invertíveis de V em V, página 1

$\mathrm{Im}(\mathcal{A})$ Subespaço dos elementos ortogonais à 1 em $\mathcal{A}$, página 32

$\mathrm{Lie}(G)$ Álgebra de Lie dos campos invarientes à esquerda de um grupo de Lie G, página 3

$M(V)$ Espaço vetorial das transformações lineares de V em V, página 1

$O(V)$ Subgrupo de Lie de $GL(V)$ das aplicações T com $TT^* = I$, página 6

$SL(V)$ Subgrupo de Lie de $GL(V)$ das aplicações T com $\det(T) = 1$, página 6

$SO(V)$ Subgrupo de Lie de $GL(V)$ das aplicações T com $TT^* = I$ e $\det(T) = 1$, página 6

$SU(V)$ Subgrupo de Lie de $GL(V)$ das aplicações T com $TT^* = I$ e $\det(T) = 1$, página 7

$U(V)$ Subgrupo de Lie de $GL(V)$ das aplicações T com $TT^* = I$, página 7

exp Aplicação Exponencial $Lie(G) \to G$, página 5

Índice Remissivo