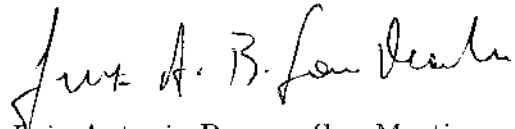


# Conjuntos controláveis e conjuntos controláveis por cadeias para ações de semigrupos

Este exemplar corresponde a redação final da tese devidamente corrigida e defendida pelo Sr. Carlos José Braga Barros e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 24 de abril de 1995

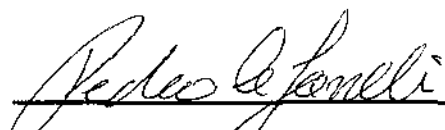


Prof. Dr. Luiz Antonio Barrera San Martin  
Orientador

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de DOUTOR em Ciências.

Tese defendida e aprovada em, 15 de março de 199

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof(a). Dr(a). PEDRO ADALAR TONELLI



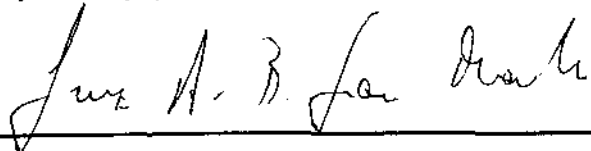
Prof(a). Dr(a). MARCIO ANTONIO DE FARIA ROSA



Prof(a). Dr(a). WASHINGTON LUIZ MARAR



Prof(a). Dr(a). CARLOS ARTEAGA MENA



Prof(a). Dr(a). LUIZ ANTONIO BARRERA SAN MARTIN

Conjuntos Controláveis e Conjuntos  
Controláveis por Cadeias para Ações de  
Semigrupos

Carlos José Braga Barros

Orientador: Prof. Dr. Luiz A. B. San Martin

**Ao Prof. Dr. Gil Vicente Reis de Figueiredo**

## AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Prof. Dr. Luiz Antônio Barrera San Martín pela orientação deste trabalho, sem a qual todos os esforços empreendidos na realização do mesmo teriam sido em vão.

Agradeço também a todos os colegas da Universidade Estadual de Campinas e da Universidade Estadual de Maringá que, de uma forma ou de outra, colaboraram na realização deste trabalho.

Agradeço ainda a minha esposa Dulce e a meus filhos Emílio, Adélio, Aluísio e Stéfani que souberam me entender no decorrer dessa etapa de nossas vidas.

Finalmente, agradeço à CAPES e à UEM pelo suporte financeiro.

## Abstract

This work deals with control sets and chain control sets for semigroup actions. It is divided in seven Chapters. Chapter 1, revises the results on control sets which will be needed in the development of this work. It also gives a table showing the maximum number of control sets on the flag manifolds of the real simple non compact Lie groups. Chapter 2, studies the behavior of the control sets in fiber bundles. In Chapter 3 we determine the maximum number of control sets on the projective spaces. Chapter 4, analyses controllability of control systems where the system semigroup is a subsemigroup of the symplectic group. In the Chapters 5,6 and 7 we define and study the  $\mathcal{F}$ -chain control sets.

## RESUMO

Este trabalho trata dos conjuntos controláveis e dos conjuntos controláveis por cadeias para ações de subsemigrupos de grupos de Lie. Ele é dividido em sete capítulos. No Capítulo 1, apresentamos uma revisão dos resultados sobre conjuntos controláveis que serão necessários ao desenvolvimento deste trabalho. Exibimos também uma tabela com o número máximo de conjuntos controláveis nas variedades flag dos grupos de Lie simples reais e não compactos. No Capítulo 2, estudamos como se comportam os conjuntos controláveis em fibrados. No Capítulo 3, determinamos o número máximo de conjuntos controláveis nos espaços projetivos. No Capítulo 4, analisamos a controlabilidade de sistemas de controle onde o semigrupo do sistema é um subsemigrupo do grupo simplético. Nos Capítulos 5,6 e 7 definimos e estudamos os conjuntos controláveis por  $\mathcal{F}$ -cadeias.

# Índice

0.1	Introdução . . . . .	5
<b>1</b>	<b>Conjuntos Controláveis</b>	<b>11</b>
1.1	Preliminares sobre conjuntos controláveis. . . . .	11
1.2	Conjuntos controláveis em variedades flag . . . . .	16
1.3	Os grupos de Lie simples não compactos. . . . .	24
<b>2</b>	<b>Conjuntos Controláveis em Fibrados</b>	<b>27</b>
2.1	Fibrados principais e seus fibrados associados . . . . .	27
<b>3</b>	<b>O Número Máximo de Conjuntos Controláveis nos Espaços Projetivos</b>	<b>40</b>
3.1	O grupo $Sl(n/2, C)$ . . . . .	42
3.2	O grupo $Sl(n/4, H)$ . . . . .	46
3.3	O grupo $Sl(n/4, H).SU(2)$ . . . . .	49
3.4	O grupo $Sp(n/4, C)$ . . . . .	50
<b>4</b>	<b>O Grupo Simplético e Controlabilidade de Sistemas de Controle</b>	<b>56</b>
4.1	O grupo simplético . . . . .	56
4.1.1	Decomposição de Cartan . . . . .	57
4.1.2	O grupo de Weyl . . . . .	59
4.1.3	O subgrupo parabólico minimal . . . . .	62
4.1.4	Os flags minimais . . . . .	64
4.1.5	A grassmannniana dos subespaços isotrópicos orientados . . . . .	67
4.1.6	O número de conjuntos controláveis . . . . .	68
4.1.7	A variedade aberta e densa . . . . .	69



4.2	Controlabilidade de um sistema de controle bilinear . . . . .	72
4.3	Controlabilidade global de sistemas de controle a tempo discreto . . . . .	77
<b>5</b>	<b>Conjuntos Controláveis por Cadeias.</b>	<b>85</b>
5.1	Definição de conjuntos controláveis por cadeias. . . . .	85
5.2	Alguns resultados sobre conjuntos controláveis por cadeias . . . . .	90
<b>6</b>	<b>Conjuntos Controláveis por Cadeias em Espaços Homogêneos</b>	<b>95</b>
6.1	Conjuntos controláveis por cadeias como intersecções de conjuntos controláveis . . . . .	95
6.2	Conjuntos controláveis por cadeias em fibrados . . . . .	105
6.3	Pontos fixos e comportamento no limite . . . . .	108
6.4	Transitividade por cadeias . . . . .	111
<b>7</b>	<b>Conjuntos Controláveis por Cadeias em Variedades Flag</b>	<b>113</b>
7.1	Determinação do número de conjuntos controláveis por cadeias . . . . .	113
7.2	Transitividade por cadeias. . . . .	118

## 0.1 Introdução

Um conceito fundamental nas teorias de controle é o de semigrupo de transformações definido pelo fluxo de um sistema de controle. Este semigrupo é conhecido como semigrupo do sistema. Muitas questões relacionadas ao sistema de controle, inclusive a de sua controlabilidade, dependem somente da ação do semigrupo do sistema. Assim, essas questões podem ser abstraídas para um contexto mais geral onde se consideram ações arbitrárias de semigrupos. Esse procedimento nos proporciona uma interrelação frutífera entre as teorias de semigrupos de Lie e a de sistemas de controle (como fonte de referência veja [17, 18] ).

Recentemente, o estudo do comportamento assintótico das trajetórias de controle, que são dadas através da ação do semigrupo de controle, tem sido importante no entendimento dos aspectos dinâmicos dos sistemas de controle. Este estudo foi feito por F.Colonius e W.Kliemann em [8, 9, 10, 11, 12]. Ali, muitos dos conceitos usuais em sistemas dinâmicos tais como conjuntos limite, conjuntos de recorrência, recorrência por cadeias, transitividade topológica e decomposição de Morse são analisados para um sistema dinâmico obtido a partir do sistema de controle. Um dos principais conceitos utilizados no entendimento dos aspectos dinâmicos dos sistemas de controle são os de conjuntos controláveis e conjuntos controláveis por cadeias. Um conjunto controlável é um subconjunto do espaço de fase onde o sistema é controlável, ou semelhantemente, um subconjunto onde o semigrupo de controle age transitivamente (veja Definição 1). Um conjunto controlável por cadeias é um subconjunto tal que dois quaisquer de seus pontos podem ser ligados por cadeias construídas a partir da ação do semigrupo de controle (veja Definição 6). As noções de conjuntos controláveis e conjuntos controláveis por cadeias podem ser abstraídas para semigrupos arbitrários, e em particular para ações de

subsemigrupos de grupos de Lie em seus espaços homogêneos.

Neste trabalho tratamos, principalmente, das ações de subsemigrupos de grupos de Lie semisimples em seus espaços homogêneos. Estamos particularmente interessados nos conjuntos controláveis e nos conjuntos controláveis por cadeias para estas ações.

San Martin L.A.B. e Tonelli P.A. estudaram em [29] (veja também [25, 31]) os conjuntos controláveis para ações de semigrupos de grupos de Lie semi-simples, nas variedades flag destes grupos ( Fronteiras de Furstenberg ). A análise destes conjuntos controláveis mostrou-se uma ferramenta útil ao entendimento de algumas propriedades dos semigrupos nos grupos de Lie semisimples. Por exemplo, em [29] um subgrupo  $W(S)$  do grupo de Weyl  $W$  do grupo de Lie  $G$  foi construído a partir de um semigrupo  $S \subset G$  com interior não vazio em  $G$ . O subgrupo  $W(S)$  determina o número de conjuntos controláveis nas variedades flag de  $G$  e o número de tais conjuntos é dado através de um espaço quociente duplo envolvendo  $W(S)$ . Além disso,  $W(S)$  descreve exatamente o tipo dos elementos diagonalizáveis que podem ser encontrados no interior do semigrupo. Nosso trabalho é baseado no contexto adotado em [25, 29, 31].

Aqui, apresentamos resultados adicionais sobre conjuntos controláveis e definimos conjuntos controláveis por cadeias para ações de semigrupos em geral. Buscamos também obter resultados como os de San Martin L.A.B. e Tonelli P.A. [29] para os conjuntos controláveis por cadeias.

Existe, entretanto, uma questão básica envolvendo a definição formal de um conjunto controlável por cadeias. Definimos um conjunto controlável por cadeias como um subconjunto tal que seus pontos podem ser ligados por cadeias no semigrupo (veja Definição 6 abaixo). Entretanto, não é realístico tomar cadeias arbitrárias no semigrupo. Isto, por um lado trivializaria este conceito, e por outro lado não cobriria o conceito de conjuntos controláveis por cadeias para sistemas de controle. No caso de conjuntos controláveis para sistemas de controle necessitamos que as cadeias envolvam trajetórias do sistema em tempo suficientemente grande. Assim, definimos a noção de conjuntos controláveis por  $\mathcal{F}$ -cadeias onde  $\mathcal{F}$  é uma família de subconjuntos do semigrupo. Ao contrário dos conjun-

tos controláveis, os conjuntos controláveis por cadeias não são definidos intrinsecamente, mas dependem da família  $\mathcal{F}$ .

Analisamos os conjuntos controláveis por  $\mathcal{F}$ -cadeias para ações de semigrupos em espaços homogêneos e em especial no caso das variedades flag. Nossa técnica principal é baseada no fato de que é possível obter os conjuntos controláveis por  $\mathcal{F}$ -cadeias como intersecções de conjuntos controláveis para semigrupos gerados por subconjuntos do semigrupo original. Aplicamos, então, os resultados de [29] de modo a definir um subgrupo  $W_{\mathcal{F}}(S)$  do grupo de Weyl que nos fornece o número de conjuntos controláveis por  $\mathcal{F}$ -cadeias nas variedades flag.

Quanto aos conjuntos controláveis, eles foram estudados, nos espaços projetivos por F. Colonius e W. Kliemann em [10]. Um dos resultados desse artigo é o de que se o semigrupo  $S$  é um semigrupo de controle então existem no máximo  $n$  conjuntos controláveis para  $S$  em  $RP^{n-1}$  (veja [10] Teorema 3.10). Com as hipóteses assumidas em [10] (acessibilidade local), o semigrupo de controle tem interior não vazio no grupo do sistema e o grupo do sistema age transitivamente no espaço projetivo. O resultado mencionado acima é obtido em [10] pela análise das decomposições espectrais dos elementos de  $S$ . No Capítulo 3 deste trabalho, melhoramos a estimativa do número máximo de conjuntos controláveis dada em [10]. Utilizamos, entretanto, outra técnica na determinação do número máximo de conjuntos controláveis. Essa técnica é baseada nos resultados de [29] sobre o número de conjuntos controláveis em variedades flag para subsemigrupos de grupos de Lie semi-simples. Consideramos subsemigrupos de grupos de Lie lineares,  $G$ , transitivos nos espaços projetivos. Um grupo de Lie  $G$  linear e transitivo no espaço projetivo é redutível e, portanto, quase semisimples. Uma lista desses grupos nos é fornecida em [6, 7]. Com ajuda desta lista fazemos uma análise, caso a caso, dos grupos transitivos e determinamos o número máximo de conjuntos controláveis. Em cada caso existe uma fibração do espaço projetivo, que é um espaço homogêneo de  $G$ , numa variedade flag de  $G$ . Esta fibração define um fibrado principal com grupo estrutural compacto. Assim, o número de conjuntos controláveis no espaço projetivo coincide com o número

de conjuntos controláveis numa variedade flag. Dessa maneira, utilizando os resultados de [29] obtemos o número máximo de conjuntos controláveis no espaço projetivo para subsemigrupos de interior não vazio em  $G$ . Segue-se então que a estimativa é  $n$ , como em [10], em alguns casos, porém em outros ela cai para  $n/2$  ou  $n/4$ .

Em [27] San Martin L. estudou a controlabilidade global de sistemas de controle à tempo discreto da forma

$$x_{m+1} = e^{A+uB} x_m, \quad m \geq 0$$

onde  $x_m \in \mathbb{R}^n$ ,  $A$  e  $B$  são matrizes em  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ , a álgebra de Lie das matrizes de traço zero, e  $u$  assume qualquer valor real. Por controlabilidade global queremos dizer a atingibilidade a partir de qualquer estado inicial  $x_0 \neq 0$  de qualquer estado final  $x \neq 0$  através de iterações do sistema. Mostrar controlabilidade global é equivalente a mostrar que o semigrupo do sistema que é

$$S = \{e^{A+u_1 B} \dots e^{A+u_m B} : u_i \in \mathbb{R}, m \geq 1\}$$

é todo o  $Sl(n, \mathbb{R})$ . Isto é equivalente a mostrar que  $S$  não é de um determinado tipo (veja [27] Teorema 2.2). Em [27] são dadas condições sobre as matrizes  $A$  e  $B$  de modo que o sistema se torne globalmente controlável. Neste trabalho mostramos resultados semelhantes aos de [27] para o caso em que  $A$  e  $B$  são matrizes na álgebra de Lie do grupo simplético. Neste caso o semigrupo do sistema é um subsemigrupo do grupo simplético. Para fazer isto precisamos determinar os flags minimais do grupo simplético que são as grassmannianas dos subespaços isotrópicos. Apresentamos também condições sobre controlabilidade de sistemas de controle bilineares do tipo

$$\dot{x} = (A + uB)x$$

No caso em que  $A$  e  $B$  são matrizes em  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$  Gauthier, J.P. e G. Bornard em [15] deram condições sobre estas matrizes para que o sistema bilinear seja controlável. Utilizando a mesma técnica de demonstração que San Martin L.A.B. em [27] e admitindo

que  $A$  e  $B$  são matrizes na álgebra de Lie do grupo simplético, determinamos condições sobre as matrizes  $A$  e  $B$  para que o sistema bilinear seja controlável.

De maneira detalhada, o conteúdo dos capítulos é o seguinte:

No Capítulo 1, definimos conjuntos controláveis para ações de semigrupos e apresentamos alguns resultados necessários ao desenvolvimento deste trabalho. Apresentamos também uma revisão dos principais resultados sobre conjuntos controláveis para ações de subsemigrupos de grupos de Lie semisimples nas suas variedades flag (Fronteiras de Furstenberg). Finalmente, os diagramas de Satake nos possibilitam apresentar uma tabela onde é dado o número máximo de conjuntos controláveis nas variedades flag dos grupos de Lie simples reais e não compactos.

No Capítulo 2, estudamos como se comportam os conjuntos controláveis, para a ação de um semigrupo, em fibrados principais e seus fibrados associados. Demonstramos que a intersecção do conjunto de transitividade, do conjunto controlável no espaço total do fibrado associado a um fibrado principal, com uma fibra é o conjunto de transitividade de algum conjunto controlável na fibra. Mostramos também que no fibrado associado a um fibrado principal, com fibra típica um flag maximal, o número de conjuntos controláveis nas fibras é sempre o mesmo.

No Capítulo 3, determinamos o número máximo de conjuntos controláveis nos espaços projetivos para a ação de subsemigrupos de um grupo de Lie linear que é transitivo no espaço projetivo.

No Capítulo 4, analisamos a controlabilidade de sistemas bilineares e controlabilidade global de sistemas de controle à tempo discreto. Em ambos os casos o semigrupo do sistema é um subsemigrupo de grupo simplético. Mostramos que os flag minimais do grupo simplético são as grassmannianas dos subespaços isotrópicos e determinamos a variedade aberta e densa que aparece na decomposição de Bruhat dessas variedades.

No Capítulo 5, discutimos o conceito de Conjuntos Controláveis por Cadeias para ações de subsemigrupos de Grupos de Lie em Espaços Homogêneos. Estendemos esta noção para semigrupos que não provém necessariamente de um Sistema de Controle.

Além disso, apresentamos alguns resultados sobre conjuntos controláveis por cadeias.

No Capítulo 6, caracterizamos os conjuntos controláveis por cadeias como intersecções de conjuntos controláveis para semigrupos gerados por vizinhanças de  $S$ . Apresentamos também alguns resultados sobre conjuntos controláveis por cadeias em fibrados. Mostramos ainda, que se  $x$  é um ponto fixo para um elemento no fecho de um semigrupo então  $x$  pertence a um conjunto controlável por  $\mathcal{F}_\infty$ -cadeias. Além disso, apresentamos um resultado que nos diz onde reside o  $\omega$ -limite de um ponto num espaço homogêneo compacto em relação a ação de um elemento no fecho de um semigrupo.

No capítulo 7, utilizamos a caracterização dos conjuntos controláveis por cadeias como intersecção de conjuntos controláveis para determinar o número de conjuntos controláveis por cadeias , efetivos, numa variedade flag. Obtemos, também, informações sobre a geometria do conjunto controlável por cadeia que contém o conjunto controlável invariante. Além disso, apresentamos alguns resultados que nos dizem quando um semigrupo é transitivo por cadeias numa variedade flag.

# Capítulo 1

## Conjuntos Controláveis

Neste trabalho estamos interessados nos conjuntos controláveis para ações de semigrupos em espaços homogêneos. Portanto, neste capítulo, fazemos uma revisão dos principais resultados sobre conjuntos controláveis em espaços homogêneos.

Definiremos conjuntos controláveis e apresentaremos alguns resultados necessários ao desenvolvimento do trabalho.

Posteriormente, apresentaremos uma revisão dos principais resultados sobre conjuntos controláveis para ações de subsemigrupos de grupos de Lie semi-simples, nas suas variedades flag (Fronteras de Furstenberg).

Em [29] são dados exemplos dos grupos  $SI(n, R)$  e  $Sp(n, R)$ , onde se determinam o número máximo de conjuntos controláveis nas variedades flags destes grupos para a ação de um subsemigrupo qualquer de interior não vazio. Na última seção deste capítulo, exibimos uma tabela que nos dá o número máximo de conjuntos controláveis numa variedade flag de um grupo de Lie simples real e não compacto para a ação de um semigrupo de interior não vazio contido neste grupo.

### 1.1 Preliminares sobre conjuntos controláveis.

Nesta seção definiremos conjuntos controláveis para ações de semigrupos e apre-



sentaremos alguns resultados que serão utilizados posteriormente neste trabalho. Veja [8, 9, 10, 11, 12] para resultados sobre conjuntos controláveis para sistemas de controle e [29, 31, 33] para conjuntos controláveis para ações de semigrupos.

Para isso, sejam  $S$  um semigrupo e  $M$  uma variedade. Suponhamos que  $S$  age em  $M$  como um semigrupo de difeomorfismos.

**Definição 1** *Um conjunto controlável para  $S$  em  $M$  é um subconjunto  $D \subset M$  que satisfaz*

1.  $\text{int}D \neq \emptyset$ ,
2.  $\forall x \in D, D \subset fe(Sx)$  e
3.  $D$  é maximal satisfazendo estas propriedades.

Segue-se imediatamente da condição 3 que dois conjuntos controláveis ou são disjuntos ou coincidem.

Admitiremos inicialmente que  $S$  é acessível, ou seja,  $\text{int}(Sx) \neq \emptyset$  para todo  $x \in M$ . Suporemos também que  $\text{int}(S^{-1}x) \neq \emptyset$ . Pela condição 2 os conjuntos controláveis são subconjuntos onde o semigrupo é aproximadamente transitivo. Esta transitividade aproximada pode ser melhorada para transitividade exata dentro de um subconjunto denso de  $D$  como segue: Seja

$$D_0 = \{x \in D : x \in \text{int}(Sx) \cap \text{int}(S^{-1}x)\}.$$

**Proposição 1** *Suponha  $D_0 \neq \emptyset$ . Então são verdadeiras:*

1.  $D \subset \text{int}(S^{-1}x)$  para todo  $x \in D_0$ .
2.  $D_0 = \text{int}(S^{-1}x) \cap \text{int}(Sx)$  para todo  $x \in D_0$
3. Para quaisquer  $x, y \in D_0$  existe  $g \in S$  com  $gx = y$ .
4.  $D_0$  é denso em  $D$

5.  $D_0$  é  $S$ -invariante em  $D$ , no seguinte sentido: Se  $h \in S, x \in D_0$  e  $hx \in D$  então  $hx \in D_0$

**Demonstração:** 1. Tomemos  $y \in D$  e  $x \in D_0$ . Como  $x \in D$  e  $x \in \text{int}(S^{-1}x)$  temos que  $\text{int}(S^{-1}x) \cap D \neq \emptyset$ . Desde que  $y \in D$  e  $\text{int}(S^{-1}x)$  é uma vizinhança de  $x$  temos por 2. na definição de conjunto controlável que existe  $g \in S$  tal que  $gy \in \text{int}(S^{-1}x)$ . Daí  $y \in g^{-1}\text{int}(S^{-1}x) \subset \text{int}(S^{-1}x)$ .

2. Seja  $x \in D_0$  e  $y \in \text{int}(Sx) \cap \text{int}(S^{-1}x)$ . Então  $x \in Sy$  e  $x \in S^{-1}y$ . Daí  $Sx \subset Sy$  e  $S^{-1}x \subset S^{-1}y$  o que implica em  $\text{int}(Sx) \subset \text{int}(Sy)$  e  $\text{int}(S^{-1}x) \subset \text{int}(S^{-1}y)$ . Portanto,  $y \in \text{int}(Sx) \cap \text{int}(S^{-1}x) \subset \text{int}(Sy) \cap \text{int}(S^{-1}y)$  e  $y \in D_0$ . Reciprocamente, se  $x, y \in D_0$  então por 1.,  $y \in \text{int}(S^{-1}x)$  e  $x \in \text{int}(S^{-1}y)$ . Logo existe  $g \in S$  tal que  $gx = y$ . Como  $x \in \text{int}(Sx)$  temos que  $y = gx \in g\text{int}(Sx) \subset \text{int}(Sx)$ . Portanto  $y \in \text{int}(Sx) \cap \text{int}(S^{-1}x)$  e  $D_0 \subset \text{int}(Sx) \cap \text{int}(S^{-1}x)$ .

3. Segue imediatamente de  $D_0 \subset \text{int}(Sx) \cap \text{int}(S^{-1}x)$ .

4. Tomemos  $x \in D_0$ . Como  $D_0 = \text{int}(Sx) \cap \text{int}(S^{-1}x)$  e  $\text{int}(Sx)$  e  $\text{int}(S^{-1}x)$  são abertos temos que  $feD_0 = fe(\text{int}(Sx) \cap \text{int}(S^{-1}x))$ . Mas, por 1. temos que  $D \subset \text{int}(S^{-1}x)$ . Por outro lado  $D \subset fe(Sx) \subset fe(\text{int}(Sx)) \subset fe(\text{int}(Sx))$ . Portanto  $D \subset feD_0$  e  $D_0$  é denso em  $D$ .

5. Seja  $h \in S, x \in D_0$  e suponha que  $hx \in D$ . Como  $x \in \text{int}(Sx)$  temos que  $hx \in \text{int}(Sx)$ . Temos também por 1. que  $hx \in \text{int}(S^{-1}x)$ , e portanto  $hx \in \text{int}(Sx) \cap \text{int}(S^{-1}x) = D_0$ .  $\square$

**Definição 2** Definimos  $D_0$  como o conjunto de transitividade em  $D$ .  $D$  será dito um conjunto controlável efetivo se  $D_0 \neq \emptyset$ .

Convém observar que se a variedade  $M$  é homogênea e se  $S$  é um subsemigrupo de um grupo de Lie  $G$  e se  $S$  tem interior não vazio então  $\{x \in D : x \in (\text{int}S)x\} = \{x \in D : x \in \text{int}(Sx) \cap \text{int}(S^{-1}x)\}$ . De fato, se  $x \in (\text{int}S)x$  então  $x \in (\text{int}S)x \cap (\text{int}S)^{-1}x$  que é um aberto contido em  $\text{int}(Sx) \cap \text{int}(S^{-1}x)$ . Reciprocamente, seja  $x \in \text{int}(Sx) \cap \text{int}(S^{-1}x)$  e  $x \in D$ . Então, como  $\{x \in D : x \in (\text{int}S)x\}$  é denso em  $D$  existe  $y \in \{x \in D :$

$x \in (intS)x$  tal que  $y \in int(S^{-1}x)$  e daí existe  $g \in S$  tal que  $gy = x$ . Por outro lado, existe  $h \in intS$  tal que  $hx = y$ . Assim  $hgx = x$  com  $hg \in intS$  e  $x \in (intS)x$ . Assim, podemos definir  $D_0 = \{x \in D : x \in (intS)x\}$  como foi feito em [29] Proposição 2.2. Neste caso temos também que uma propriedade adicional satisfeita por  $D_0$  é a de que  $D_0 = (intS)D \cap D$ .

Observemos que para sistemas de controle invariantes à direita, que satisfazem a propriedade de acessibilidade local, todo conjunto controlável é efetivo. De fato, neste caso o semigrupo de controle tem interior não vazio e sabe-se que a identidade  $1 \in fe(intS)$ . Portanto, se  $x \in intD$  temos que  $(intS)x \cap D \neq \emptyset$  e daí  $D_0 = (intS)D \cap D \neq \emptyset$ .

Incluiremos, aqui, informações sobre os conjuntos controláveis invariantes. Para uma discussão detalhada do assunto indicamos [25].

**Definição 3** *Um conjunto controlável invariante para  $S$  em  $M$  é um conjunto controlável  $C$  em  $M$ ,  $C \neq \emptyset$  que é invariante pela ação de  $S$ , ou seja, se  $x \in C$  e  $g \in S$  então  $gx \in C$ .*

Sabemos de [25] que se  $S$  é um semigrupo de interior não vazio agindo num espaço homogêneo compacto  $G/H$ , então, todo conjunto controlável invariante é efetivo e  $C_0 = (intS)C$ . Neste caso, existe um número finito de conjuntos controláveis invariantes e eles são fechados.

Observemos que os conjuntos controláveis podem não existir para ações de semigrupos em espaços homogêneos quaisquer. Tomemos, como exemplo, o semigrupo das translações  $\{g : g(x) = x + t : t \geq 0\}$  agindo na reta real.

Temos, então, a seguinte proposição sobre a existência de conjuntos controláveis invariantes e que está demonstrada em [1].

**Proposição 2** *Suponha que*

$$C = \bigcap_{x \in M} fe(Sx) \neq \emptyset.$$

*Então  $C$  é o único conjunto controlável invariante para  $S$  em  $M$ .  $\square$*

Relacionado ainda à existência de conjuntos controláveis, temos o seguinte resultado

**Proposição 3** *Suponhamos que  $g \in S$  e seja  $\Omega$  um conjunto minimal para a ação de  $g$  em  $M$ . Então existe um conjunto controlável  $D$  para  $S$  em  $M$  tal que  $\Omega \subset D$ . Além disso, se  $M$  é homogênea e  $g \in \text{int}S$  então  $\Omega \subset \text{int}D$ . Em particular, pontos fixos por  $g \in \text{int}S$  estão no interior de conjuntos controláveis. ([33] Proposição 1.3).  $\square$*

**Exemplo 1** *Sejam  $G = Sl(n, R)$  e  $S \subset G$  o semigrupo das matrizes de entradas não negativas. Temos que  $S$  é um subsemigrupo de interior não vazio em  $Sl(n, R)$ . Consideremos a ação de  $Sl(n, R)$  em  $RP^{n-1}$  dada por  $g[v] = [gv], v \in R^n - \{0\}, g \in Sl(n, R)$ , aqui  $[v]$  é o subespaço gerado por  $v$ . O conjunto*

$$C = \{[(x_1, \dots, x_n)] \in RP^{n-1} \mid x_i \geq 0\}$$

*correspondente ao primeiro octante no espaço euclidiano  $n$  dimensional é um conjunto controlável invariante para  $S$ . Para ver isto, tomemos  $x = (x_1, \dots, x_n)$  e  $y = (y_1, \dots, y_n)$  com  $x_i, y_i > 0$ . Defina  $g = \alpha \text{diag}(y_1/x_1, \dots, y_n/x_n)$  onde  $\alpha = x_1 \dots x_n / y_1 \dots y_n$ , temos que  $g \in S$  e  $g[x] = [y]$ . Segue-se então que para  $[x] \in \text{int}C$ ,  $feS[x] = C$ . Como para todo  $[x] \in C$ , existe  $g \in S$  tal que  $g[x] \in \text{int}C$  temos que  $feS[x] = C$ , e como  $C$  é fechado ele é um conjunto controlável invariante para  $S$  em  $RP^{n-1}$ . Pela Proposição 2,  $C$  é o único conjunto controlável invariante. Seu complementar,  $C^-$ , em  $RP^{n-1}$  é um conjunto controlável para  $S$ .*

Uma generalização do exemplo acima é dada no Exemplo 9.

Terminamos esta seção com um resultado demonstrado em [27] Proposição 3.2 que nos diz quando um conjunto controlável invariante é conexo.

**Proposição 4** *Seja  $G$  um grupo de Lie,  $G/H$  um espaço homogêneo de  $G$  e  $S \subset G$  um subsemigrupo de interior não vazio. Suponhamos que  $S$  é gerado por um subconjunto conexo  $\Gamma \subset G$ . Seja  $C$  um conjunto controlável invariante para  $S$  em  $G/H$  e suponhamos que existam  $h \in \Gamma$  e  $x \in C$  com  $hx = x$ . Então  $C$  é conexo.  $\square$*

## 1.2 Conjuntos controláveis em variedades flag

Apresentamos a seguir uma revisão dos principais resultados sobre conjuntos controláveis para ações de subsemigrupos de grupos de Lie semi-simples, nas suas variedades flag.

Assim, consideraremos, nesta seção,  $G$  um grupo de Lie semi-simples e  $S \subset G$  um semigrupo de interior não vazio em  $G$ . Consideraremos, também, o espaço homogêneo  $G/H$  como uma variedade flag de  $G$ , ou seja,  $H$  é um subgrupo parabólico de  $G$ .

Como referência ao leitor temos [34, 36] para a teoria detalhada dos subgrupos parabólicos e das variedades flag. Indicamos também [25, 29, 31], caso seja necessário à leitura deste trabalho.

Em [29] estudou-se os conjuntos controláveis em variedades flag. Ali, os conjuntos de transitividade dos conjuntos controláveis foram caracterizados como conjuntos de pontos fixos de certos elementos em  $int.S$ . Aquela caracterização nos fornece uma ferramenta para contar e distinguir os conjuntos controláveis.

A seguir, recordaremos aqueles resultados.

Seja  $\mathfrak{g}$  a álgebra de Lie de  $G$  e selecionemos uma decomposição de Cartan  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{s}$  de  $\mathfrak{g}$ , com involução de Cartan  $\theta$ , onde  $\mathfrak{k}$  é uma subálgebra compacta imersa e  $\mathfrak{s}$  seu complemento ortogonal em relação à forma de Cartan-Killing.

Seja  $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{s}$  uma subálgebra abeliana maximal, que será chamada subálgebra euclidiana. Temos que  $\mathfrak{a}$  se decompõe em câmaras de Weyl. Um elemento  $h \in \mathfrak{a}$  é dito euclidiano e se  $h$  pertence a alguma câmara de Weyl ele é dito euclidiano regular. Escolhamos uma câmara de Weyl, digamos  $\mathfrak{a}^+$ . Associada a esta câmara existe um sistema de raízes positivas, denotado por  $\Delta^+$ . O sistema simples de raízes gerando  $\Delta^+$  é denotado por  $\Pi$ .

O conjunto de todas as raízes é denotado por  $\Delta$ , e é dado por  $\Delta = \Delta^+ \cup (-\Delta^+)$ .

Para uma raiz  $\alpha \in \Delta$ , seja  $\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g} : ad(H)X = \alpha(H)X\}$  seu espaço de raiz.

A subálgebra  $\mathfrak{n}^+ = \sum_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}_\alpha$  é nilpotente. Ela fornece a decomposição de Iwasawa

de  $\mathfrak{g}$

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{a} + \mathfrak{n}^+$$

correspondendo à decomposição global  $G = KAN^+$ , onde  $K = \exp \mathfrak{k}$ ,  $A = \exp \mathfrak{a}$  e  $N^+ = \exp \mathfrak{n}^+$ . O subgrupo  $A$  é um subgrupo euclidiano de  $G$ . Usaremos a notação  $A^+ = \exp \mathfrak{a}^+$  e nos referiremos a este subconjunto como uma câmara de Weyl em  $G$ . Análogamente temos a definição de elemento euclidiano regular em  $G$ .

Para um subconjunto  $\Theta \subset \Pi$  denotaremos por  $P_\Theta$  o subgrupo parabólico definido por  $\Theta$ . Sua álgebra de Lie é a subálgebra  $\mathfrak{p}_\Theta$  gerada por  $\mathfrak{n}_\Theta = \sum_{\alpha \in \pm\Theta} \mathfrak{g}_\alpha$ , e  $P_\Theta$  é o normalizador de  $\mathfrak{p}_\Theta$ . A variedade flag associada é  $B_\Theta = G/P_\Theta$ . Quando  $\Theta$  é vazio o subscrito é omitido, assim  $P$  é um subgrupo parabólico minimal e  $B = G/P$  é a variedade flag maximal de  $G$ . Denotaremos por  $b_0$  a origem em  $G/P$ .

Seja  $M$  o centralizador de  $A$  em  $K$ , ou seja,

$$M = \{u \in K : uhu^{-1} = h \text{ para todo } h \in A\}$$

$$= \{u \in K : Ad(u)H = H \text{ para todo } H \in A\},$$

e

$$M^* = \{u \in K : uAu^{-1} = A\},$$

$$= \{u \in K : Ad(u)\mathfrak{a} = \mathfrak{a}\},$$

o normalizador de  $A$  em  $K$ . O grupo finito  $W = M^*/M$  é o grupo de Weyl.

Denotaremos por  $\mathfrak{m}$  a álgebra de Lie de  $M$ . O subespaço  $\mathfrak{p} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^+$  é a subálgebra parabólica minimal e é a álgebra de Lie do subgrupo parabólico minimal  $P = MAN^+$ . Seja  $\mathfrak{n}_\Theta^- = \sum_{\alpha \in \langle \Theta \rangle^+} \mathfrak{g}_{-\alpha}$ , onde  $\langle \Theta \rangle^+$  é o menor subconjunto fechado de  $\Delta^+$  contendo  $\Theta$ . Temos que  $\mathfrak{n}_\Theta^-$  é a subálgebra de  $\mathfrak{n}^- = \sum_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}_{-\alpha}$  gerada pelos espaços de raízes de  $-\Theta$ . A subálgebra parabólica  $\mathfrak{p}_\Theta$  é dada por

$$\mathfrak{p}_\Theta = \mathfrak{n}_\Theta^- \oplus \mathfrak{p}$$

Estamos interessados na ação dos elementos de  $A^+$  em  $B$ . Temos que  $h \in A^+$ , tem um número finito de pontos fixos em  $B$ . São eles  $\{wb_0 : w \in W\}$  onde  $W$  é o grupo de Weyl. Estes pontos fixos são hiperbólicos com variedades instáveis e estáveis dadas por  $N^+wb_0$  e  $N^-wb_0$  respectivamente, onde  $N^- = \theta(N^+)$  é o grupo nilpotente oposto a  $N^+$ . A órbita  $N^-b_0$  é aberta e densa e assim  $b_0$  é o único atrator para  $h$ . As outras variedades estáveis são de dimensão mais baixa. Nos referiremos a  $wb_0$  como um ponto fixo do tipo  $w$  para os elementos de  $A^+$ .

As escolhas desses objetos não são únicas. De fato, dado  $g \in G$ , uma conjugação por  $g$  leva-nos a outra escolha. Em particular, os  $G$ -conjugados de  $A$ ,  $gAg^{-1}$  são os subgrupos euclidianos de  $G$ . Da mesma maneira, os subconjuntos  $gA^+g^{-1}$  são as câmaras de Weyl em  $G$ . Como os elementos de  $A^+$ , os elementos de  $gA^+g^{-1}$  também tem um número finito de pontos fixos quando agem em  $B$ . Eles são dados por  $gwb_0 = (gwg^{-1})gb_0, w \in W$  que são transladados pelo grupo de Weyl  $gWg^{-1}$ , conjugado de  $W$  do atrator  $gb_0$ . Escolhamos, agora, uma câmara básica  $A^+$  no subgrupo euclidiano  $A$  e denotaremos um ponto fixo  $gwb_0, w \in W$  de um elemento de  $gA^+g^{-1}$  como um ponto fixo do tipo  $w$ . Estes pontos fixos desempenham um papel central na descrição dos conjuntos controláveis para ações de semigrupos em  $B$ .

Passemos a recordar os resultados de [29] (veja também [31]) sobre conjuntos controláveis em  $B$ . Como anteriormente,  $S$  será um semigrupo com interior não vazio em  $G$ .

**Proposição 5** *Para todo  $w \in W$  existe um conjunto controlável efetivo  $D_w$  para  $S$  em  $B$ . Seu conjunto de transitividade  $(D_w)_0$  consiste dos pontos fixos do tipo  $w$  para os elementos das câmaras de Weyl em  $G$  interceptando  $\text{int}S$ . Existe um único conjunto controlável invariante  $D_1$  cujo conjunto de transitividade é o conjunto de atratores para os elementos euclidianos em  $\text{int}S$ . Além disso, qualquer conjunto controlável em  $B$  é  $D_w$  para algum  $w \in W$ . (veja [29] Teoremas 3.2,3.5).  $\square$*

**Proposição 6** *O subconjunto*

$$W(S) = \{w \in W : D_w = D_1\}$$

é um subgrupo de  $W$  e  $W(S)w_1 = W(S)w_2$  se e só se  $D_{w_1} = D_{w_2}$  assim  $w \in W \rightarrow D_w$  fibra-se por  $W(S) \setminus W$  definindo uma bijeção entre os conjuntos controláveis e  $W(S) \setminus W$ . ([29] seção 4)  $\square$

**Proposição 7** *Suponhamos que a câmara básica  $A^+$  é escolhida de tal maneira que  $A^+ \cap \text{int}S \neq \emptyset$ . Então existe um subconjunto  $\Theta$  do sistema simples de raízes  $\Pi$  tal que  $W(S) = W_\Theta$ . Neste caso o conjunto controlável invariante é dado por  $D_1 = \pi^{-1}(C_\Theta)$  onde  $C_\Theta$  é o único conjunto controlável invariante em  $B_\Theta$ . Temos também que existe  $h$  no fecho de  $A^+$  e  $n \in N^+$  tal que  $h$  é fixo por  $W_\Theta$  e  $hn \in \text{int}S$ . Além disso, se  $\xi_0$  é a origem de  $B_\Theta$  então  $C_\Theta \subset N^-\xi_0$  ([29] Corolário 4.4 e Proposição 4.8).  $\square$*

A seguir, relacionaremos os conjuntos controláveis na fronteira maximal com os conjuntos controláveis nas outras fronteiras.

**Proposição 8** *Seja  $\pi : B \rightarrow B_\Theta$  a fibração canônica sobre a fronteira  $B_\Theta$ . Então  $\pi((D_w)_0)$  é o conjunto de transitividade de um conjunto controlável em  $B_\Theta$ . Reciprocamente, um conjunto controlável efetivo  $E$  em  $B_\Theta$  satisfaz  $\pi((D_w)_0) = E_0$  para qualquer  $w \in W$  tal que  $(D_w)_0 \cap \pi^{-1}(E_0) \neq \emptyset$ , e o conjunto de tais conjuntos controláveis em  $B$  é não vazio. Temos também que em  $B_\Theta$  existe somente um conjunto controlável invariante. ([29] Proposição 5.1)  $\square$*

De agora em diante, denotaremos por  $D_w^\Theta$  o conjunto controlável em  $B_\Theta$  cujo conjunto de transitividade é a projeção do conjunto de transitividade do conjunto controlável  $D_w$  em  $B$ . Como complementação do último resultado temos o seguinte fato que foi demonstrado apenas parcialmente em [29].



**Proposição 9** *Seja  $B_\Theta$  uma fronteira e denotemos por  $\pi : B \rightarrow B_\Theta$  a projeção canônica. Então  $D_{w_1}^\ominus = D_{w_2}^\ominus$  se e só se  $W(S)w_1W_\Theta = W(S)w_2W_\Theta$ . Assim o número de conjuntos controláveis em  $B_\Theta$  é igual à ordem de  $W(S)\backslash W/W_\Theta$ .*

**Demonstração:** Suponhamos que  $D_{w_1}^\ominus = D_{w_2}^\ominus$ . Então  $(D_{w_1})_0$  e  $(D_{w_2})_0$  se projetam sobre o conjunto de transitividade do mesmo conjunto controlável. Portanto, existe, na mesma fibra que  $w_1b_0$ , um ponto fixo que pertence a  $D_{w_2}$ . Como  $w_1$  transforma fibra em fibras e pontos fixos em pontos fixos, aquele ponto fixo é da forma  $w_1w'b_0$  com  $w'b_0$  na mesma fibra que  $b_0$  e assim  $w' \in W_\Theta$ . Mas  $D_{w_2} = D_{w_1w'}$ , e  $W(S)w_2 = W(S)w_1w'$  mostrando que a condição é necessária.

Reciprocamente, suponha que  $w_2 = w''w_1w'$  com  $w'' \in W(S)$ ,  $w' \in W_\Theta$ . Então  $D_{w_2} = D_{w_1w'}$ , e como  $D_{w_1}^\ominus = D_{w_1w'}^\ominus$  temos que  $D_{w_1}^\ominus = D_{w_2}^\ominus$ .  $\square$

Apresentamos, a seguir, como guia, o exemplo em que  $G = SI(n, R)$  que foi desenvolvido em [29].

**Exemplo 2** *Seja  $G = SI(n, R)$  o grupo de Lie das matrizes reais com determinante igual a 1.*

*A álgebra de Lie de  $G$  é a álgebra de Lie das matrizes reais de traço zero e é denotado por  $sl(n, R)$ .*

*Uma decomposição de Cartan de  $sl(n, R)$  é dada por*

$$sl(n, R) = so(n, R) + s(n, R),$$

*onde  $so(n, R)$  é a subálgebra das matrizes anti-simétricas e  $s(n, R)$  é o subespaço das matrizes simétricas em  $sl(n, R)$ .*

*As subálgebras abelianas maximais de  $sl(n, R)$  são as subálgebras de Cartan pois  $sl(n, R)$  é a forma real normal da álgebra de Lie simples complexa  $sl(n, C)$ . Uma dessas subálgebras é a subálgebra  $\mathfrak{a} \subset s(n, R)$  dada pelas matrizes diagonais com traço zero.*

*Seja  $\mathfrak{a}^+ = \{\text{diag}\{a_1, \dots, a_n\} : a_1 > a_2 > \dots > a_n > 0\}$  uma câmara de Weyl em  $\mathfrak{a}$ . Se  $H = \text{diag}\{a_1, \dots, a_n\}$  definamos  $\alpha_{i,j} = \lambda_i - \lambda_j$ , onde  $\lambda_i(H) = a_i$ . Associado a  $\mathfrak{a}^+$  existe*

um sistema de raízes positivas que será  $\Delta^+ = \{\alpha_{i,j} : i < j\}$ . Um sistema simples de raízes gerando  $\Delta^+$  é dado por  $\Pi = \{\alpha_{i,i+1} \mid i = 1, \dots, n-1\}$ .

Os subespaços de raízes associados a  $\alpha_{i,j}$  são as matrizes de  $sl(n, R)$  cujas entradas não nulas são  $i, j$ .

A subálgebra  $\mathfrak{n}^+ = \sum_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}_\alpha$  é nilpotente e consiste das matrizes em  $sl(n, R)$  que são triangulares superiores com zeros na diagonal.

Temos a decomposição de Iwasawa de  $sl(n, R)$

$$sl(n, R) = so(n, R) + \mathfrak{a} + \mathfrak{n}^+$$

O subgrupo euclidiano é dado por  $A = \{\text{diag}\{a_1, \dots, a_n\} : a_1 \cdot a_2 \dots a_n = 1\}$  e portanto

$$Sl(n, R) = SO(n, R) \cdot A \cdot N^+,$$

onde  $N^+$  é o subgrupo das matrizes triangulares superiores com  $a_1, \dots, a_n$  na diagonal e  $a_1 \cdot a_2 \dots a_n = 1$ .

O subgrupo parabólico minimal é dado por  $P = MAN^+$ .  $M$  é um grupo discreto pois o centralizador de  $\mathfrak{a}$  em  $\mathfrak{k}$  é nulo. Temos também que  $M$  é o grupo de matrizes diagonais em  $Sl(n, R)$  cujos elementos nas diagonais são  $\pm 1$ .

O grupo de Weyl age em  $\mathfrak{a}$  como o grupo de permutações

$$\text{diag}\{a_1, \dots, a_n\} \longrightarrow \text{diag}\{a_{i_1}, \dots, a_{i_n}\}$$

Um intervalo em  $\Pi$  é um subconjunto do tipo  $\Pi(i, j) = \{\alpha_{r,r+1} \mid i \leq r \leq j\}$ . Qualquer  $\Theta \subset \Pi$  é a união disjunta  $\Theta = \Pi(i_1, j_1) \cup \dots \cup \Pi(i_k, j_k)$  com  $j_l + 1 < i_{l+1}$  para todo  $l = 1, \dots, k-1$ . Dado  $\Theta$  desta maneira,  $W_\Theta$  será então o produto direto dos grupos de permutação dos subconjuntos  $\{i_l, \dots, j_l + 1\}, l = 1, \dots, k$ .

Temos também que  $B_\Theta$  pode ser visto como  $F^n(1, \dots, i_1 - 1, j_1 + 1, \dots, i_k - 1, j_k + 1, j_k + 2, \dots, n)$ , onde  $F^n(r_1, \dots, r_s)$  é a variedade de flags  $V_1 \subset \dots \subset V_s$  com  $V_i$  subespaço

euclidiano de dimensão  $r_i$ .

Sabemos que a ordem de  $W_\Theta$  é dada por  $|W_\Theta| = (j_1 - i_1 + 2)! \dots (j_k - i_k + 2)!$ . A Proposição 9 nos diz que o número de conjuntos controláveis efetivos em  $B_\Theta$  é no máximo a ordem de  $W/W_\Theta$ , que é  $n! / (j_1 - i_1 + 2)! \dots (j_k - i_k + 2)!$ .

Caso  $B_\Theta$  seja o espaço projetivo  $RP^{n-1}$ , temos que  $\Theta = \Pi(2, n-1)$  e portanto existem no máximo  $n = n! / (n-1)!$  conjuntos controláveis efetivos em  $RP^{n-1}$ , para a ação de qualquer semigrupo  $S \subset Sl(n, R)$  com  $\text{int}S \neq \emptyset$ . Este limite superior ocorre quando  $W(S)$  se reduz a identidade. Temos pela Proposição 7 que  $W(S) = W_\Theta$  para algum  $\Theta \subset \Pi$ . Por exemplo, se  $W(S) = W_\Theta$  com  $\Theta = \Pi(2, n-1)$  então existem somente dois conjuntos controláveis. De fato,  $W_\Theta$  é o subgrupo de permutações de  $\{1, \dots, n\}$  que fixa 1. Portanto é transitivo em  $\{2, \dots, n\}$  e daí tem exatamente duas órbitas em  $W/W_\Theta = \{1, \dots, n\}$ .

Se  $B_\Theta = Gr_k(n)$  é a grassmanniana dos subespaços de dimensão  $k$  em  $R^n$  temos que  $\Theta = \Pi(1, k-1) \cup \Pi(k+1, n-1)$  é maximal e portanto existem no máximo  $n! / k!(n-k)! = \binom{n}{k}$  conjuntos controláveis efetivos nos flags minimais  $Gr_k(n)$ , para a ação de qualquer semigrupo de  $Sl(n, R)$  de interior não vazio.

Mais especificamente tomemos  $G = Sl(5, R)$ . Seja  $\Theta = \{\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_3 - \lambda_4, \lambda_4 - \lambda_5\}$ . Temos que  $\Theta = \Pi(1, 1) \cup \Pi(3, 4)$  e  $W_\Theta$  é o produto direto do grupo de permutações dos conjuntos  $\{1, 2\}, \{3, 4, 5\}$ . Temos também que  $B_\Theta = Gr_2(5)$  é a grassmanniana dos subespaços de dimensão 2 em  $R^5$ . Portanto existem no máximo  $|W/W_\Theta| = 5! / 2!3! = 10$  conjuntos controláveis efetivos em  $Gr_2(5)$ .

No caso em que  $G = Sl(3, R)$  as possibilidades para  $\Theta$  nos fornecem o flag maximal  $F^3(1, 2)$ , o espaço projetivo  $RP^2$  e a Grassmanniana  $Gr_2(3)$ . Para  $\Theta_1 = \Pi(1, 1)$  e  $\Theta_2 = \Pi(2, 2)$  temos que  $B_{\Theta_1} = Gr_2(3)$  e  $B_{\Theta_2} = RP^2$ . Assim  $W_{\Theta_1} = \{1, (1, 2)\}$  e  $W_{\Theta_2} = \{1, (2, 3)\}$ . Existem três possibilidades para  $W(S)$  que são  $W_{\Theta_1}, W_{\Theta_2}, \{1\}$ . No flag maximal temos que  $W_\Theta = \{1\}$  e  $W = W/W_\Theta$  tem 6 elementos. Logo, assumindo que  $W(S) = W_{\Theta_2}$  existem  $|W(S) \setminus W| = 3$  conjuntos controláveis efetivos no flag maximal. Pela proposição 6 temos que  $D_{(1,2)} = D_{(1,3,2)}, D_{(1,3)} = D_{(1,2,3)}$  e  $D_1 = D_{(2,3)}$  já que  $W(S) = \{1, (2, 3)\}$ . Estes são os conjuntos controláveis efetivos no flag maximal.

Sejam  $\pi : F^3(1,2) \rightarrow RP^2$  a projeção  $\pi(V_1 \subset V_2) = V_1$  e  $b_0$  o flag canônico dado por  $b_0 = (V_1 \subset V_2)$  onde  $V_1 = \text{ger}\{e_1\}$ ,  $V_2 = \text{ger}\{e_1, e_2\}$  e  $\{e_1, e_2, e_3\}$  é a base canônica. Segue-se que  $\pi((1,2)b_0) = \pi((1,2,3)b_0)$ . Portanto  $\pi((D_{(1,2)})_0) = \pi((D_{(1,2,3)})_0)$  é o conjunto de transitividade do conjunto controlável em  $RP^2$  complementar do conjunto controlável invariante  $\pi(D_{(2,3)}) = \pi(D_1)$ .

Em 4.1 discutimos, como fizemos no exemplo acima, o grupo simplético.

Necessitaremos de um resultado sobre transitividade de semigrupos em espaços homogêneos de Grupos de Lie Simples. A demonstração desse fato é dada em [29] Teorema 6.4.

**Proposição 10** *Sejam  $G$  um grupo de Lie simples, conexo, com centro finito e  $G/L$  um espaço homogêneo de  $G$  tal que  $0 < \dim L < \dim G$ . Seja  $S \subset G$  um semigrupo de interior não vazio e suponha que  $S$  é transitivo em  $G/L$ . Então  $S = G$ .  $\square$*

Como conseqüência temos

**Corolário 1** *Seja  $G$  um grupo de Lie simples, conexo, com centro finito e transitivo em  $R^n - \{0\}$ . Suponha também que o espaço projetivo  $RP^{n-1}$  é um espaço homogêneo de  $G$ . Seja  $S$  um subsemigrupo de  $G$  de interior não vazio. Então  $S$  é transitivo em  $R^n - \{0\}$  se e só se  $S = G$ .*

**Demonstração:** Por [25] Proposição 4.3 temos que  $S$  é transitivo em  $R^n - \{0\}$  se e só se  $S$  é transitivo no espaço projetivo  $RP^{n-1}$ . Como estamos assumindo que o espaço projetivo é um espaço homogêneo de  $G$  o resultado segue da proposição anterior.  $\square$

A seguir, apresentamos um resultado que nos diz como são os subsemigrupos maximais de um grupo de Lie semi-simples. Lembremos que um subsemigrupo  $S$  de um grupo de Lie  $G$  é dito subsemigrupo maximal se  $S$  não é grupo e os únicos subsemigrupos contendo  $S$  são  $S$  e  $G$ . Temos então o seguinte resultado demonstrado em [29] Proposição 6.8 e Corolário 6.9.

**Proposição 11** *Seja  $S$  um subsemigrupo maximal de um grupo de Lie  $G$  semi-simples e com  $\text{int}(S) \neq \emptyset$ . Então existe uma fronteira minimal  $B_\Theta$  e um subconjunto  $C_\Theta$  de  $B_\Theta$  tal que*

$$S = S_{C_\Theta} = \{g \in G : gC_\Theta \subset C_\Theta\}$$

*Além disso,  $C_\Theta$  é fechado,  $f_\Theta(\text{int}C_\Theta) = C_\Theta$ ,  $C_\Theta$  é o conjunto controlável invariante para  $S$  em  $B_\Theta$  e  $W(S) = W_\Theta$ .  $\square$*

### 1.3 Os grupos de Lie simples não compactos.

Nesta seção, nosso objetivo será o de apresentar uma tabela que conste o número máximo de conjuntos controláveis numa variedade flag de um grupo de Lie simples não compacto e real para a ação de um semigrupo de interior não vazio contido neste grupo. Para isto, nos utilizaremos do diagrama de Satake que é apresentado em [24] Tabela 9 na seção de tabelas.

Para descrever os grupos reais clássicos que aparecem a seguir, adotaremos a seguinte notação. Seja

$$U(p, q) = \{g \in Gl(p + q, C) : g^t I_{p,q} \bar{g} = I_{p,q}\}$$

onde  $I_{p,q}$  é a matriz

$$\begin{pmatrix} -I_p & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix}$$

e  $I_n$  é a matriz identidade  $n \times n$ . Temos então que  $SU(p, q) = U(p, q) \cap Sl(p + q, C)$ .

Definamos também

$$SO(p, q) = \{g \in Sl(p + q, R) : g^t I_{p,q} g = I_{p,q}\}$$

e

$$Sp(p, q) = \{g \in Sp(p + q, C) : g^t K_{p,q} \bar{g} = K_{p,q}\}$$

onde

$$K_{p,q} = \begin{pmatrix} -I_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_q \end{pmatrix}$$

As álgebras de Lie correspondentes são

$$\mathfrak{su}(p, q) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ \bar{B}^t & C \end{pmatrix} : \begin{array}{l} A \text{ e } C \text{ são anti-hermitianas, de ordens } p \text{ e } q \\ \text{Tr}(A) + \text{Tr}(C) = 0, B \text{ arbitrária} \end{array} \right\}$$

$$\mathfrak{so}(p, q) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ B^t & C \end{pmatrix} : \begin{array}{l} A \text{ e } C \text{ são anti-simétricas, de ordens } p \text{ e } q \\ A, B \text{ e } C \text{ reais, } B \text{ arbitrária} \end{array} \right\}$$

$$\mathfrak{sp}(p, q) = \left\{ \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} & Z_{14} \\ \bar{Z}_{12}^t & Z_{22} & Z_{14}^t & Z_{24} \\ -\bar{Z}_{13} & \bar{Z}_{14} & \bar{Z}_{11} & -\bar{Z}_{12} \\ \bar{Z}_{14}^t & -\bar{Z}_{24} & -Z_{12}^t & \bar{Z}_{22} \end{pmatrix} : \begin{array}{l} Z_{i,j} \text{ matrizes complexas, } Z_{11} \text{ e } Z_{13} \\ \text{de ordem } p, Z_{12} \text{ e } Z_{14} \text{ matrizes } p \times q \\ Z_{11} \text{ e } Z_{22} \text{ anti-hermitianas,} \\ Z_{13} \text{ e } Z_{24} \text{ são simétricas} \end{array} \right\}$$

Temos também a álgebra de Lie

$$\mathfrak{u}^*(n, H) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ -\bar{B} & \bar{A} \end{pmatrix} : A \text{ e } B \text{ } n \times n \text{ quaternionicas, } A^t = -A, B^t = \bar{B} \right\}$$

Na tabela abaixo “ $G$ ” denotará o grupo de Lie simples não compacto e “ $\mathfrak{g}$ ” sua álgebra de Lie. Estas álgebras de Lie não admitem estrutura complexa, ou seja, são formas reais das álgebras de Lie simples complexas. A coluna “ $\Pi$ ” contém o tipo do sistema  $\Pi$  de raízes reais. Denotaremos por  $\Pi_k = \Pi(i_1, j_1) \cup \dots \cup \Pi(i_k, j_k)$  onde  $\Pi(i, j) = \{\lambda_r - \lambda_{r+1} : i \leq r \leq j\}$ . O número máximo de conjuntos controláveis no flag  $B_\Theta$  pela ação de um semigrupo de interior não vazio em  $G$  será dado pela ordem de  $W/W_\Theta$  que será denotada por  $|W/W_\Theta|$ . Usaremos também a notação  $n_p^k = p! / (j_1 - i_1 + 2)! \dots (j_k - i_k + 2)!$ . Lembremos que as ordens dos grupos de Weyl  $W$  para os sistemas de raízes que correspondem a

$A_l, B_l, C_l$  e  $D_l$  são  $(l+1)!, 2^l l!, 2^l l!$  e  $2^{l-1} l!$  respectivamente. Para os diagramas de Dynkin de  $A_l, B_l, C_l$  e  $D_l$  damos como referência a tabela 1 de [24] (seção de tabelas). A ordem de  $W/W_\Theta$  foi obtida como em 4.1.6.

$G$	$\mathfrak{g}$	$\Pi$	$\Theta$	$j_k$	$ W/W_\Theta $
$Sp(p, p)$ ( $\ell = 2p$ )	$\mathfrak{sp}(p, p)$	$C_p$	$\Pi_k \cup \{2\lambda_p\}$	$p-1$	$(2^{i_k}/(p-i_k)!)n_p^{k-1}$
				$< p-1$	$2^{p-1}n_p^k$
			$\Pi_k$		$2^p n_p^k$
$SO(p, 2\ell-p)$ ( $1 \leq p \leq \ell-2$ )	$\mathfrak{so}(p, 2\ell-p)$	$B_p$	$\Pi_k \cup \{\lambda_p\}$	$p-1$	$(2^{i_k}/(p-i_k)!)n_p^{k-1}$
				$< p-1$	$2^{p-1}n_p^k$
			$\Pi_k$		$2^p n_p^k$
$SO(\ell-1, \ell+1)$	$\mathfrak{so}(\ell-1, \ell+1)$	$B_{\ell-1}$	$\Pi_k \cup \{\lambda_{\ell-1}\}$	$\ell-2$	$(2^{i_k}/(\ell-1-i_k)!)n_{\ell-1}^{k-1}$
				$< \ell-2$	$2^{\ell-2}n_{\ell-1}^k$
			$\Pi_k$		$2^{\ell-1}n_{\ell-1}^k$
$SO(\ell, \ell)$	$\mathfrak{so}(\ell, \ell)$	$D_\ell$	$\Pi_k \cup \{\lambda_{\ell-1} + \lambda_\ell\}$	$\ell-1$	$(2^{i_k}/(\ell-i_k)!)n_\ell^{k-1}$
				$< \ell-1$	$2^{\ell-1}n_\ell^k$
			$\Pi_k$		$2^{\ell-1}n_\ell^k$
$U^*(2p, \mathbb{H})$	$\mathfrak{u}^*(2p, \mathbb{H})$	$C_p$	$\Pi_k \cup \{2\lambda_p\}$	$p-1$	$(2^{i_k}/(p-i_k)!)n_p^{k-1}$
				$< p-1$	$2^{p-1}n_p^k$
			$\Pi_k$		$2^p n_p^k$
$U^*(2p+1, \mathbb{H})$	$\mathfrak{u}^*(2p+1, \mathbb{H})$	$C_p$	$\Pi_k \cup \{2\lambda_p\}$	$p-1$	$(2^{i_k}/(p-i_k)!)n_p^{k-1}$
				$< p-1$	$2^{p-1}n_p^k$
			$\Pi_k$		$2^p n_p^k$
$Sl(\ell+1, \mathbb{R})$	$\mathfrak{sl}(\ell+1, \mathbb{R})$	$A_\ell$	$\Pi_k$		$n_{\ell+1}^k$
$Sl(p+1, \mathbb{H})$ ( $\ell = 2p+1, p \geq 1$ )	$\mathfrak{sl}(p+1, \mathbb{H})$	$A_p$	$\Pi_k$		$n_{p+1}^k$



$G$	$\mathfrak{g}$	$\Pi$	$\Theta$	$j_k$	$ W/W_\Theta $
$SU(p, \ell + 1 - p)$ $1 \leq p \leq \ell/2$	$\mathfrak{su}(p, \ell + 1 - p)$	$C_p$	$\Pi_k \cup \{2\lambda_p\}$	$p - 1$	$(2^{i_k}/(p - i_k)!)n_p^{k-1}$
				$< p - 1$	$2^{p-1}n_p^k$
			$\Pi_k$		$2^p n_p^k$
$SU(p, p)$ $(\ell = 2p - 1, p \geq 2)$	$\mathfrak{su}(p, p)$	$C_p$	$\Pi_k \cup \{2\lambda_p\}$	$p - 1$	$(2^{i_k}/(p - i_k)!)n_p^{k-1}$
				$< p - 1$	$2^{p-1}n_p^k$
			$\Pi_k$		$2^p n_p^k$
$SO(p, 2\ell + 1 - p)$ $(1 \leq p \leq \ell)$	$\mathfrak{so}(p, 2\ell + 1 - p)$	$B_p$	$\Pi_k \cup \{\lambda_p\}$	$p - 1$	$(2^{i_k}/(p - i_k)!)n_p^{k-1}$
				$< p - 1$	$2^{p-1}n_p^k$
			$\Pi_k$		$2^p n_p^k$
$Sp(2\ell, \mathbb{R})$	$\mathfrak{sp}(2\ell, \mathbb{R})$	$C_\ell$	$\Pi_k \cup \{2\lambda_\ell\}$	$\ell - 1$	$(2^{i_k}/(\ell - i_k)!)n_\ell^{k-1}$
				$< \ell - 1$	$2^{\ell-1}n_\ell^k$
			$\Pi_k$		$2^\ell n_\ell^k$
$Sp(p, \ell - p)$ $\therefore (1 \leq p \leq \frac{1}{2}(\ell - 1))$	$\mathfrak{sp}(p, \ell - p)$	$C_p$	$\Pi_k \cup \{2\lambda_p\}$	$p - 1$	$(2^{i_k}/(p - i_k)!)n_p^{k-1}$
				$< p - 1$	$2^{p-1}n_p^k$
			$\Pi_k$		$2^p n_p^k$

# Capítulo 2

## Conjuntos Controláveis em Fibrados

Neste capítulo, estudamos conjuntos controláveis, para a ação de um semigrupo, em fibrados principais e seus fibrados associados. Em [30] San Martin L.A.B. mostrou que a intersecção de um conjunto controlável invariante no espaço total do fibrado associado a um fibrado principal com uma fibra é um conjunto controlável invariante na fibra. Demonstrou, também, que o número de conjuntos controláveis invariantes nas fibras é sempre o mesmo. Neste capítulo, demonstramos que a intersecção do conjunto de transitividade do conjunto controlável no espaço total do fibrado associado com uma fibra é o conjunto de transitividade de algum conjunto controlável na fibra. Mostramos também que no fibrado associado a um fibrado principal, com fibra típica um flag maximal, o número de conjuntos controláveis nas fibras é sempre o mesmo.

### 2.1 Fibrados principais e seus fibrados associados

Nesta seção, estudamos conjuntos controláveis, para a ação de um semigrupo, em fibrados principais e seus fibrados associados.

Para a teoria dos fibrados principais e fibrados associados damos como referência [22]

Seja  $Q(M, G)$  um fibrado principal com espaço total  $Q$ , espaço base  $M$  e grupo estrutural  $G$ . Denotaremos por  $\pi_Q : Q \rightarrow M$  a projeção do espaço total no espaço base.

Seja  $S_Q$  um semigrupo de difeomorfismos locais de  $Q$  que comutam com a ação à direita, ou seja, se  $Q\phi \in S_Q$  então  $Q\phi(q.a) = Q\phi(q).a$ ,  $a \in G$ . Supomos ainda que os elementos de  $S_Q$  estejam definidos em subconjuntos abertos do tipo  $\pi^{-1}(U)$ , com  $U$  aberto de  $M$ . Temos que  $S_Q$  induz um semigrupo  $S_M$  de difeomorfismos locais de  $M$ . Temos portanto que se  $Q\phi \in S_Q$  então

$$\pi_Q(Q\phi(x)) = M\phi(\pi_Q(x)),$$

onde  $M\phi \in S_M$ .

Mostraremos a seguir como se comportam os conjuntos controláveis num fibrado principal.

**Proposição 12** *Sejam  $Q(M, G)$  um fibrado principal com projeção  $\pi_Q : Q \rightarrow M$  e  $S_Q$  e  $S_M$  como acima. Tem-se*

1. *Se  $D \subset Q$  é um conjunto controlável para  $S_Q$  então existe um conjunto controlável  $E \subset M$ , para  $S_M$  tal que  $\pi_Q(D) \subset E$ .*
2. *Suponhamos que  $Q$  é compacto e seja  $E$  conjunto controlável efetivo para  $S_M$  em  $M$ . Então existe  $D \subset Q$  conjunto controlável para  $S_Q$  tal que  $\pi_Q(D) \subset E$ .*

**Demonstração:** 1. Sejam  $x, y \in \pi_Q(D)$ . Basta mostrar que  $y \in fe(S_M x)$ . Para isso, tomemos  $u, v \in D$  tais que  $\pi_Q(u) = x$  e  $\pi_Q(v) = y$ . Assim existe uma seqüência  $Q\phi_n \in S_Q$  e tal que  $Q\phi_n(u) \rightarrow v$ . Portanto  $\pi_Q(Q\phi_n(u)) = M\phi_n(\pi_Q(u)) = M\phi_n(x) \rightarrow \pi_Q(v) = y$ .

2. Tomemos  $x \in E_0$ . Então  $x \in \text{int}(S_M x) \cap \text{int}(S_M^{-1} x)$  e  $x = M\phi(x)$ . A fibra sobre  $x$ ,  $\pi_Q^{-1}(x)$  é compacta. Para  $y \in \pi_Q^{-1}(x)$  temos que  $x = M\phi(x) = M\phi(\pi_Q(y)) = \pi_Q(Q\phi(y))$  e portanto  $Q\phi(y) \in \pi_Q^{-1}(x)$ . Como a fibra é compacta e invariante por  $Q\phi$  existe um conjunto minimal para  $Q\phi$  nesta fibra. Como pela Proposição 3 todo conjunto minimal

está contido num conjunto controlável, existe  $D \subset Q$  conjunto controlável para  $S_Q$  que contém este conjunto minimal. Pela parte 1. temos que  $\pi_Q(D) \subset E$ .  $\square$

Mostraremos a seguir que num fibrado principal o conjunto de transitividade de um conjunto controlável no espaço total se projeta dentro do conjunto de transitividade de um conjunto controlável na base.

**Proposição 13** *Sejam  $Q(M, G)$  um fibrado principal com projeção  $\pi_Q : Q \rightarrow M$  e  $S_Q$  e  $S_M$  como acima. Assumiremos que  $S_Q$  e  $S_Q^{-1}$  são acessíveis. Suponha que  $D \subset Q$  é um conjunto controlável efetivo para  $S_Q$ . Então existe um conjunto controlável efetivo,  $E \subset M$ , para  $S_M$  tal que  $\pi_Q(D_0) \subset E_0$ .*

**Demonstração:** Seja  $x \in D_0$ . Então, pela definição de  $D_0$ , temos que  $x \in \text{int}(S_Q x) \cap \text{int}(S_Q^{-1} x)$ . Assim

$$\begin{aligned} \pi_Q(x) &\in \pi_Q(\text{int}(S_Q x) \cap \text{int}(S_Q^{-1} x)) \subset \pi_Q(\text{int}(S_Q x)) \cap \pi_Q(\text{int}(S_Q^{-1} x)) \\ &= \text{int}\pi_Q(S_Q x) \cap \text{int}\pi_Q(S_Q^{-1} x) = \text{int}(S_M \pi_Q(x)) \cap \text{int}(S_M^{-1} \pi_Q(x)) \end{aligned}$$

Como  $\text{int}(S_M \pi_Q(x)) \cap \text{int}(S_M^{-1} \pi_Q(x))$  satisfaz 1. e 2. na definição de conjunto controlável para  $S_M$  temos que  $\pi_Q(x) \in E$ , onde  $E$  é um conjunto controlável para  $S_M$ . Tomemos  $y \in D_0$ . Então  $y \in \text{int}(S_Q y) \cap \text{int}(S_Q^{-1} y)$  e existem  $Q\varphi_1$  e  $Q\varphi_2$  em  $S_Q$  tais que  $Q\varphi_1(y) = x$  e  $Q\varphi_2(x) = y$ , ou seja,  $M\varphi_1(\pi_Q(y)) = \pi_Q(x)$  e  $M\varphi_2(\pi_Q(x)) = \pi_Q(y)$  onde  $M\varphi_1, M\varphi_2 \in S_M$ . Logo  $\pi_Q(y) \in E$ , pois caso contrário  $E$  não satisfaria a propriedade de maximalidade na definição de conjunto controlável. Na verdade temos que  $\pi_Q(y) \in E_0$  pois  $\pi_Q(y) \in E$  e  $\pi_Q(y) \in \pi_Q(\text{int}(S_Q y) \cap \text{int}(S_Q^{-1} y)) \subset \text{int}(S_M \pi_Q(y)) \cap \text{int}(S_M^{-1} \pi_Q(y))$ . Assim temos que  $\pi_Q(D_0) \subset E_0$ .  $\square$

Mostraremos a seguir que num fibrado principal com grupo estrutural compacto a imagem inversa pela projeção do conjunto de transitividade de um conjunto controlável na base é o conjunto de transitividade de algum conjunto controlável no espaço total. Este resultado será útil na determinação do número máximo de conjuntos controláveis nos espaços projetivos que será estudado posteriormente.

**Proposição 14** *Sejam  $Q(M, G)$  um fibrado principal com projeção  $\pi_Q : Q \rightarrow M$  e  $S_Q$  e  $S_M$  como acima. Assumiremos que  $S_Q$  e  $S_Q^{-1}$  são acessíveis. Suponhamos que  $G$  é compacto e conexo. Seja  $B \subset M$  um conjunto controlável efetivo para  $S_M$ . Então existe um conjunto controlável efetivo,  $D \subset Q$ , para  $S_Q$  tal que  $\pi_Q^{-1}(B) = D_0$ . Assim o número de conjuntos controláveis efetivos em  $Q$  e em  $M$  é o mesmo.*

**Demonstração:** Mostremos inicialmente que  $\pi_Q^{-1}(B_0)$  satisfaz as condições 1. e 2. na definição de conjunto controlável e portanto estará contido em um conjunto controlável. Claramente  $\pi_Q^{-1}(B_0)$  tem interior não vazio. Tomemos  $q_1, q_2 \in \pi_Q^{-1}(B_0)$  e mostremos que  $q_1 \in fe(S_Q q_2)$ . Como  $\pi_Q(q_1)$  e  $\pi_Q(q_2)$  pertencem a  $B_0$  temos pela Proposição 1 que  $\pi_Q(q_1) = M\phi(\pi_Q(q_2))$  onde  $M\phi \in S_M$ . Mas  $M\phi(\pi_Q(q_2)) = \pi_Q(Q\phi(q_2))$  para algum  $Q\phi \in S_Q$ . Assim  $q_1$  e  $Q\phi(q_2)$  estão na mesma fibra no fibrado principal e portanto existe  $a \in G$  tal que  $q_1 = Q\phi(q_2).a$ . Para  $q \in Q$  definamos  $S_q = \pi_Q^{-1}(x) \cap S_Q(q)$  onde  $x = \pi_Q(q)$ . Identificando  $G$  com a fibra sobre  $x$  através da aplicação  $a \in G \rightarrow q.a \in \pi_Q^{-1}(x)$  temos que  $S_q = \{a \in G : S_Q(q).a \subset S_Q(q)\}$  e portanto  $S_q$  é um subsemigrupo de  $G$ . Mostremos que se  $q \in \pi_Q^{-1}(B_0)$  então  $int(S_q) \neq \emptyset$ . De fato, como  $\pi_Q(q) \in B_0$  temos que  $\pi_Q(q) \in int(S_M(\pi_Q(q))) = int(\pi_Q(S_Q(q))) = \pi_Q(int(S_Q(q)))$  e portanto  $int(S_Q(q))$  intercepta a fibra sobre  $x = \pi_Q(q)$  e isto mostra que  $int(S_q) \neq \emptyset$ . Como  $q_1 \in \pi_Q^{-1}(B_0)$  temos que  $S_{q_1}$  é um semigrupo de interior não vazio em  $G$  que é compacto e conexo. Logo  $S_{q_1} = G$  e  $a \in S_{q_1}$ . Desde que  $a \in S_{q_1}$  temos que existe  $Q\psi \in S_Q$  tal que  $Q\psi(q_1) = q_1.a$  e portanto  $Q\psi(Q\phi(q_2)) = q_1.a^{-1} = (Q\psi)^{-1}(q_1)$ . Assim  $Q\psi(Q\phi(q_2)) = q_1$  e  $q_1 \in S_Q(q_2)$ . Concluimos então que existe um conjunto controlável  $D$  tal que  $\pi_Q^{-1}(B_0) \subset D$ . Mostremos, agora que  $D$  é efetivo e que  $\pi_Q^{-1}(B_0) \subset D_0$ . Para isso, tome  $q \in \pi_Q^{-1}(B_0)$ . Então

$$\pi_Q(q) \in int(S_M(\pi_Q(q))) \cap int(S_M^{-1}(\pi_Q(q))) =$$

$$int(\pi_Q(S_Q(q))) \cap int(\pi_Q(S_Q^{-1}(q))) =$$

$$\pi_Q(int(S_Q(q))) \cap \pi_Q(int(S_Q^{-1}(q))).$$

Assim existe  $a \in G$  tal que  $q = Q\phi(q).a$  onde  $Q\phi(q) \in int(S_Q(q))$ . Mas  $S_q = G$  e daí

existe  $Q\sigma \in S_Q$  tal que  $q = Q\sigma(Q\varphi(q))$ . Desde que  $Q\sigma(Q\varphi(q)) \in \text{int}(S_Q(q))$  temos que  $q \in \text{int}(S_Q(q))$ . Análogamente temos que  $q \in \text{int}(S_Q^{-1}(q))$  e portanto  $q \in D_0$ .

Como  $\pi_Q^{-1}(B_0) \subset D_0$  segue que  $B_0 \subset \pi_Q(D_0)$ . Pela Proposição 13 existe  $C$  conjunto controlável efetivo para  $S_M$  em  $M$  tal que  $\pi_Q(D_0) \subset C_0$  de onde concluímos que  $B = C$  e  $D_0 \subset \pi_Q^{-1}(B_0)$  o que conclui a demonstração.  $\square$

Para conjuntos controláveis invariantes temos o resultado a seguir que está demonstrado em [30].

**Proposição 15** *Seja  $Q(M, G)$  um fibrado principal com projeção  $\pi_Q : Q \rightarrow M$  e  $Q$  compacto. Suponhamos que  $S_Q$  e  $S_M$  são como acima e que  $S_Q$  e  $S_Q^{-1}$  são acessíveis. Temos então:*

1. *Se  $C_1 \subset Q$  é um conjunto controlável invariante para  $S_Q$  então  $C_2 = \pi_Q(C_1)$  é um conjunto controlável invariante para  $S_M$  em  $M$ .*
2. *Se  $C_2 \subset M$  é um conjunto controlável invariante para  $S_M$  em  $M$  então existe um conjunto controlável invariante  $C_1 \subset Q$ , para  $S_Q$  com  $\pi_Q(C_1) = C_2$ .*
3. *Se  $C_2 \subset M$  é um conjunto controlável invariante para  $S_M$  em  $M$  e  $G$  é compacto então  $\pi_Q^{-1}(C_2) = C_1$  é um conjunto controlável invariante para  $S_Q$  em  $Q$ .  $\square$*

Temos o seguinte exemplo.

**Exemplo 3** *Fibrações equivariantes. Sejam  $H_1 \subset H_2$  subgrupos fechados de um grupo de Lie  $G$ , com  $H_1$  normal em  $H_2$ , determinando espaços homogêneos  $G/H_1$  e  $G/H_2$ . Seja  $\pi : G/H_1 \rightarrow G/H_2$  a fibração dada por  $\pi(gH_1) = gH_2$ . Como  $H_1 \subset H_2$  temos que a ação de  $G$  é equivariante em relação a esta fibração, ou seja,  $\pi \circ g = g \circ \pi \forall g \in G$ . A aplicação  $\pi : G/H_1 \rightarrow G/H_2$  define um fibrado principal com grupo estrutural  $H_2/H_1$  (veja [32], 7.5). A ação de  $H_2/H_1$  em  $G/H_1$  é definida por  $(gH_1)h_2H_1 = gh_2H_1$ ,  $g \in G$ ,  $h_2 \in H$  e comuta com a ação de  $G$  em  $G/H_1$ . Se  $S$  é um semigrupo em  $G$  de interior não vazio então  $S$  induz um semigrupo  $S_Q$  de difeomorfismos de  $G/H_1$  que é acessível. De fato, para  $s \in S$  seja  $Q\phi_s : G/H_1 \rightarrow G/H_1$  definida por  $Q\phi_s(x) = sx$  então  $S_Q = \{Q\phi_s : s \in S\}$ .*

Neste caso o semigrupo  $S_M$  é o semigrupo das aplicações de  $G/H_2$  induzidos por  $S$  pela ação de  $G$  em  $G/H_2$ . Com efeito,

$$M\phi_s(gH_2) = M\phi_s(\pi_Q(gH_1)) = \pi_Q(Q\phi_s(gH_1)) =$$

$$\pi_Q(sgH_1) = sgH_2$$

Observemos então que as Proposições 2.6 e 2.7 de [29] são casos particulares das duas últimas proposições.

Em [30] demonstrou-se que a intersecção de um conjunto controlável invariante no espaço total do fibrado associado com uma fibra é um conjunto controlável invariante na fibra. Nosso objetivo é mostrar este resultado para os conjuntos de transitividade de conjuntos controláveis.

Para isto, seja  $Q(M, G)$  um fibrado principal com espaço total  $Q$ , espaço base  $M$  e grupo estrutural  $G$ . Suponha que  $G$  age transitivamente numa variedade  $F$  e que a ação é à esquerda. Consideremos então o fibrado associado a  $Q(M, G)$  com fibra típica  $F$  e que será denotado por  $E(M, F, G, Q)$ , aqui  $E$  é o espaço total,  $M$  é o espaço base,  $F$  é a fibra típica e  $G$  é o grupo estrutural.

Lembremos que os elementos de  $E$  são classes de equivalência pela relação em  $Q \times F$  dada por  $(q, v) \sim (qa, a^{-1}v)$   $a \in G$ . Usaremos a notação  $q.v$ ,  $q \in Q, v \in F$  para um elemento de  $E$ .

Se  $\pi_Q : Q \rightarrow M$  é a projeção canônica no fibrado principal  $Q(M, G)$  então a projeção  $\pi_E : E \rightarrow M$  no fibrado associado é dada por  $\pi_E(q.v) = \pi_Q(q)$ .

Lembremos que fixando  $q \in Q$  e tomando  $x = \pi_Q(q)$  temos uma bijeção entre a fibra sobre  $x$ ,  $E_x = \pi_E^{-1}(x)$  e a fibra típica  $F$  que é dada por  $v \in F \rightarrow q.v \in E_x$ . Tomando  $v \in F$  fixo temos uma aplicação  $v : Q \rightarrow E$  definida por  $v(q) = q.v$ . Como a ação de  $G$  em  $F$  é transitiva esta aplicação é uma submersão sobrejetora.

**Exemplo 4** Seja  $G$  um grupo de Lie e  $H_1 \subset H_2$  subgrupos fechados de  $G$  determinando os espaços homogêneos  $G/H_1$  e  $G/H_2$ . A aplicação  $\pi_E : G/H_1 \rightarrow G/H_2$  definida por

$\pi_E(gH_1) = gH_2, g \in G$  define um fibrado associado a qualquer fibrado principal definido por  $\pi_Q : G/L_1 \rightarrow G/H_2$  com  $L_1 \subset H_1$  fechado e tal que  $G/L_1$  seja um espaço homogêneo (veja [32] 7.5). A fibra típica deste fibrado associado é  $H_2/H_1$  e a ação à esquerda de  $H_2/L_1$  em  $H_2/H_1$  é dada por  $(h'_2L_1)(h_2H_1) = h'_2h_2H_1, h'_2, h_2 \in H_2$ . Temos também que  $\pi_E$  é equivariante pelas ações de  $G$  em  $G/H_1$  e  $G/H_2$ , ou seja,  $g \circ \pi_E = \pi_E \circ g$ . Se  $S$  é um semigrupo em  $G$  de interior não vazio então  $S$  induz semi-grupos  $S_Q$  em  $G/L_1, S_E$  em  $G/H_1$  e  $S_M$  em  $G/H_2$ .

Definamos para  $q \in Q$  o conjunto

$$S_q = S_Q(q) \cap \pi_Q^{-1}(x)$$

onde  $x = \pi_Q(q)$ .

Usando a identificação de  $\pi_Q^{-1}(x)$  com  $G$  dada por  $a \in G \longleftrightarrow qa \in \pi_Q^{-1}(x)$ ,  $S_q$  pode ser visto como um subconjunto de  $G$ .

Como  $S_q = \{a \in G : S_Q(q).a \subset S_Q(q)\}$  temos que  $S_q$  é um subsemigrupo de  $G$ . Note que os semigrupos  $S_q$ 's agem nas fibras do fibrado associado.

Seja  $Q\phi$  um automorfismo de  $Q$  que comuta com a ação a direita de  $G$ , ou seja,  $Q\phi(q.a) = Q\phi(q).a$ . Então  $Q\phi$  induz um automorfismo de  $E$  dado por  $E\phi(q.v) = Q\phi(q).v$ . Definamos então  $S_E = \{E\phi : E\phi(q.v) = Q\phi(q).v \text{ com } Q\phi \in S_Q\}$ . Teremos portanto que

$$S_E(q.v) = S_Q(q).v$$

Se  $S_Q$  é acessível então  $S_E$  é acessível, ou seja,  $\text{int}S_E(q.v) \neq \emptyset$  para todo  $q.v \in E$ . De fato, como a aplicação  $v : Q \rightarrow E$  definida por  $v(q) = q.v$  é aberta e contínua temos

$$\text{int}(S_E(q.v)) = \text{int}(S_Q(q).v) = \text{int}(S_Q(q)).v$$

O resultado a seguir é análogo à Proposição 12 para fibrados principais.

**Proposição 16** *Sejam  $E(M, F, G, Q)$  um fibrado associado ao fibrado principal  $Q(M, G)$*



com projeção  $\pi_E : E \longrightarrow M$  e  $S_E, S_Q$  e  $S_M$  como acima. Suponhamos que

1. Se  $D \subset E$  é um conjunto controlável para  $S_E$  então existe um conjunto controlável  $B \subset M$ , para  $S_M$  tal que  $\pi_E(D) \subset B$ .
2. Suponhamos que  $E$  é compacto e que existe  $B$  conjunto controlável efetivo para  $S_M$  em  $M$ . Então existe  $D \subset E$  conjunto controlável para  $S_E$  tal que  $\pi_E(D) \subset B$ .

**Demonstração:** 1. Sejam  $x, y \in \pi_E(D)$ . Basta mostrar que  $y \in fe(S_M x)$ . Para isto, tomemos  $u, v \in D$  tais que  $\pi_E(u) = x$  e  $\pi_E(v) = y$ . Assim existe uma seqüência  $E\phi_n \in S_E$  e tal que  $E\phi_n(u) \rightarrow v$ . Portanto  $\pi_E(E\phi_n(u)) = M\phi_n(\pi_E(u)) = M\phi_n(x) \rightarrow \pi_E(v) = y$ .

2. Tomemos  $x \in B_0$ . Então  $x \in \text{int}(S_M x) \cap \text{int}(S_M^{-1}x)$  e  $x = M\phi(x)$ . A fibra sobre  $x$ ,  $\pi_E^{-1}(x)$  é compacta. Para  $y \in \pi_E^{-1}(x)$  temos que  $x = M\phi(x) = M\phi(\pi_E(y)) = \pi_E(E\phi(y))$  e portanto  $E\phi(y) \in \pi_E^{-1}(x)$ . Como a fibra é compacta e invariante por  $E\phi$  existe um conjunto minimal para  $E\phi$  nesta fibra. Como pela Proposição 3 todo conjunto minimal está contido num conjunto controlável, existe  $D \subset E$  conjunto controlável para  $S_E$  que contém este conjunto minimal. Pela parte 1. temos que  $\pi_E(D) \subset B$ .  $\square$

Mostraremos a seguir que num fibrado associado a um fibrado principal o conjunto de transitividade de um conjunto controlável no espaço total se projeta dentro do conjunto de transitividade de um conjunto controlável na base.

**Proposição 17** *Sejam  $E(M, F, G, Q)$  um fibrado associado ao fibrado principal  $Q(M, G)$  e com projeção  $\pi_E : E \longrightarrow M$  e  $S_E, S_Q$  e  $S_M$  como acima. Assumiremos que  $S_Q$  e  $S_Q^{-1}$  são acessíveis. Suponha que  $D \subset E$  é um conjunto controlável efetivo para  $S_E$ . Então existe um conjunto controlável efetivo,  $C \subset M$ , para  $S_M$  tal que  $\pi_E(D_0) \subset C_0$ .*

**Demonstração:** Seja  $q.v \in D_0$ . Então, pela definição de  $D_0$ , temos que  $q.v \in \text{int}(S_E(q.v)) \cap \text{int}(S_E^{-1}(q.v))$ . Como  $S_E^{-1}(q.v) = S_Q^{-1}(q).v$  temos que  $\text{int}(S_E^{-1}(q.v)) = \text{int}(S_Q^{-1}(q)).v$ . Assim

$$\pi_E(q.v) \in \pi_E(\text{int}(S_E(q.v)) \cap \text{int}(S_E^{-1}(q.v))) \subset$$

$$\begin{aligned}
& \pi_E(\text{int}(S_E(q.v))) \cap \pi_E(\text{int}(S_E^{-1}(q.v))) \subset \\
& \pi_E(\text{int}(S_Q(q)).v) \cap \pi_E(\text{int}(S_Q^{-1}(q)).v) = \\
& \pi_Q(\text{int}(S_Q(q))) \cap \pi_Q(\text{int}(S_Q^{-1}(q))) = \\
& \text{int}\pi_Q(S_Q(q)) \cap \text{int}\pi_Q(S_Q^{-1}(q)) = \\
& \text{int}(S_M\pi_E(q.v)) \cap \text{int}(S_M^{-1}\pi_E(q.v))
\end{aligned}$$

Como  $\text{int}(S_M\pi_E(q.v)) \cap \text{int}(S_M^{-1}\pi_E(q.v))$  satisfaz 1. e 2. na definição de conjunto controlável para  $S_M$  temos que  $\pi_E(q.v) \in C$ , onde  $C$  é um conjunto controlável para  $S_M$ . Tomemos  $q_1.v_1 \in D_0$ . Então  $q_1.v_1 \in \text{int}(S_E(q_1.v_1)) \cap \text{int}(S_E^{-1}(q_1.v_1))$  e existem  $E\varphi_1$  e  $E\varphi_2$  em  $S_E$  tais que  $E\varphi_1(q_1.v_1) = q.v$  e  $E\varphi_2(q.v) = q_1.v_1$ , ou seja,  $Q\varphi_1(q_1).v_1 = q.v$  e  $Q\varphi_2(q).v = q_1.v_1$  e portanto  $M\varphi_1(\pi_E(q_1.v_1)) = \pi_E(q.v)$  e  $M\varphi_2(\pi_E(q.v)) = \pi_E(q_1.v_1)$  onde  $M\varphi_1, M\varphi_2 \in S_M$ . Logo  $\pi_E(q_1.v_1) \in C$ , pois caso contrário  $C$  não satisfaria a propriedade de maximalidade na definição de conjunto controlável. Na verdade temos que  $\pi_E(q_1.v_1) \in C_0$  pois  $\pi_E(q_1.v_1) \in E$  e  $\pi_E(q_1.v_1) \in \pi_E(\text{int}(S_E(q_1.v_1)) \cap \text{int}(S_E^{-1}(q_1.v_1))) \subset \text{int}(S_M\pi_E(q_1.v_1)) \cap \text{int}(S_M^{-1}\pi_E(q_1.v_1))$ . Assim temos que  $\pi_E(D_0) \subset C_0$ .  $\square$

Para conjuntos controláveis invariantes temos o seguinte resultado demonstrado em [30]

**Proposição 18** *Seja  $E(M, F, G, Q)$  um fibrado associado a um fibrado principal  $Q(M, G)$  com  $E$  compacto e projeção  $\pi_E : E \rightarrow M$ . Suponhamos que  $S_E$  e  $S_M$  são como acima e que  $S_E$  e  $S_E^{-1}$  são acessíveis. Temos então:*

1. *Se  $C_1 \subset E$  é um conjunto controlável invariante para  $S_E$  então  $C_2 = \pi_E(C_1)$  é um conjunto controlável invariante para  $S_M$  em  $M$ .*
2. *Se  $C_2 \subset M$  é um conjunto controlável invariante para  $S_M$  em  $M$  então existe um conjunto controlável invariante  $C_1 \subset E$ , para  $S_E$  com  $\pi_E(C_1) = C_2$ .  $\square$*

Mostraremos a seguir que a intersecção do conjunto de transitividade do conjunto controlável no espaço total do fibrado associado com uma fibra é o conjunto de transitividade

de algum conjunto controlável na fibra.

**Proposição 19** *Seja  $E(M, F, G, Q)$  o fibrado associado ao fibrado principal  $Q(M, G)$ . Suponha que  $S_Q$  e  $S_Q^{-1}$  são acessíveis. Suponha que  $D$  é um conjunto controlável efetivo para  $S_E$  em  $E$  e seja  $D_0$  seu conjunto de transitividade. Se  $D_0 \cap E_x \neq \emptyset$  então existe um conjunto controlável efetivo  $A$  para  $S_q$  em  $F$  tal que*

$$D_0 \cap E_x = q.A_0,$$

onde  $E_x = \pi_E^{-1}(x)$  e  $x = \pi_Q(q)$ .

**Demonstração:** Tomemos  $u, w \in D_0 \cap E_x$ . Então  $D_0 \cap E_x = q.B$  com  $B \subset F$ , e portanto  $u = q.v_1$  e  $w = q.v_2$  com  $v_1, v_2 \in B$ . Como  $u, w \in D_0$  temos da Proposição 1 que existe  $E\phi \in S_E$  tal que  $E\phi(q.v_1) = q.v_2$ . Mas  $E\phi(q.v_1) = Q\phi(q).v_1 = q.v_2$  e portanto  $Q\phi(q) = q.a$  e  $v_1 = a^{-1}v_2$ . Logo  $a \in S_q$  e  $a.v_1 = v_2$ . Assim  $B \subset fe(S_q.x) \forall x \in B$ . Logo, existe um conjunto controlável para  $S_q$  que denotaremos por  $A$  e tal que  $D_0 \cap E_x = q.B \subset q.A$ . Mostremos que  $A$  é efetivo e que  $D_0 \cap E_x \subset q.A_0$ . Para isto, tomemos  $q.v \in D_0 \cap E_x$ . Como  $q.v \in D_0$ , pela definição de  $D_0$  temos que  $q.v \in intS_E(q.v)$ . Desde que  $int(S_E(q.v)) = int(S_Q(q)).v$  temos que se  $q.v \in int(S_E(q.v))$  então existe  $Q\phi(q) \in int(S_Q(q))$  tal que  $q.v = Q\phi(q).v$ . Concluimos, então, que  $Q\phi(q) = q.a$  e  $av = v$ . Como  $q.v \in D_0$  temos pela Proposição 17 que  $\pi_E(q.v) \in int(S_M(\pi_E(q.v))) = int(S_M(\pi_Q(q))) = \pi_Q(int(S_Q(q)))$  e desde que  $S_q = S_Q(q) \cap \pi_Q^{-1}(x)$  concluimos que  $intS_q \neq \emptyset$  e  $q.a \in int(S_Q(q))$  se e só se  $a \in intS_q$ . Assim, existe  $a \in intS_q$  tal que  $av = v$  e  $v \in A_0$ . Isto mostra que  $D_0 \cap E_x \subset q.A_0$ .

Mostremos agora que não existe  $z \in q.A_0 \setminus (D_0 \cap E_x)$ , com  $z \notin D$ . Mostremos que  $DU\{z\} \subset fe(S_E u)$  para todo  $u \in DU\{z\}$  o que nos dá uma contradição com a propriedade de maximalidade do conjunto controlável  $D$ . Como  $D$  é um conjunto controlável para  $S_E$  temos, pela definição de conjunto controlável, que  $D \subset fe(S_E u)$  para todo  $u \in D$ . Verifiquemos que  $z \in fe(S_E u)$  para todo  $u \in D$ . Para isto, seja  $u \in D$  e tome  $w \in D_0 \cap E_x \subset D_0$ . Então pela Proposição 1 existe  $E\phi \in S_E$  tal que  $E\phi(u) = w$ . Como

$w \in q.A_0$  e  $z \in q.A_0$  podemos tomar  $w = q.v_2, z = q.v_3$  com  $q \in Q, v_2, v_3 \in A_0$ . Então pela Proposição 1 existe  $a \in \text{int}S_q$  tal que  $av_2 = v_3$  e como  $a \in S_q$  existe  $Q\psi \in S_Q$  tal que  $Q\psi(q) = q.a$ . Logo, temos que  $E\psi(q.v_2) = Q\psi(q).v_2 = q.v_3$  e  $E\psi(w) = z$ . Assim,  $E\psi(E\phi(u)) = z$  e  $z \in \text{fe}(S_E u)$ . Resta mostrar que  $D \cup \{z\} \subset \text{fe}(S_E z)$ . Como  $z \in q.A_0$  existe  $v_3 \in A_0$  tal que  $z = q.v_3$ . Portanto, existe  $a \in \text{int}S_q$  tal que  $av_3 = v_3$  o que mostra a existência de  $E\phi \in S_E$  tal que  $z = E\phi(z)$ . Logo  $z \in \text{fe}(S_E z)$ . Tomemos, agora,  $w \in D$  e mostremos que  $w \in \text{fe}(S_E z)$ . Sejam  $V$  uma vizinhança qualquer de  $w$  e  $u \in D_0 \cap E_x$ . Pela definição de conjunto controlável, existe  $E\phi \in S_E$  tal que  $E\phi(u) \in V$ . Como  $u \in q.A_0$  e  $z \in q.A_0$  temos que  $u = q.v_1$  e  $z = q.v_2$  com  $v_1 \in A_0$  e  $v_2 \in A_0$ . Logo, existe  $a \in \text{int}S_q$  tal que  $av_2 = v_1$ , ou seja,  $v_2 = a^{-1}v_1$ . E, portanto, existe  $E\psi \in S_E$  tal que  $E\psi(z) = u$ . Assim  $E\phi(E\psi(z)) \in V$  e  $u \in \text{fe}(S_E z)$ . Temos então que  $z \in q.A_0 \setminus (D_0 \cap E_x)$  com  $z \notin D$  é impossível.

Mostraremos, a seguir, que  $z \in q.A_0 \setminus (D_0 \cap E_x)$  com  $z \in D$  também é impossível. Para isto, suponha por absurdo que  $z \in q.A_0, z \notin D_0 \cap E_x$  e  $z \in D$ . Temos que  $z = q.v$  com  $v \in A_0$ . Assim, existe  $a \in \text{int}S_q$  tal que  $av = v = a^{-1}v$  e  $a^{-1} \in \text{int}S_q^{-1}$ . Daí existe  $Q\phi \in S_Q$  tal que  $Q\phi(q) = q.a \in \text{int}(S_Q(q))$  e  $Q\phi^{-1}(q) = qa^{-1} \in \text{int}(S_Q^{-1}(q))$  e assim  $E\phi(q.v) = q.v \in \text{int}(S_E(q.v)) \cap \text{int}(S_E^{-1}(q.v))$ , ou seja,  $z = q.v \in D_0 \cap E_x$ , o que é um absurdo. Temos, portanto que  $q.A_0 = D_0 \cap E_x$ .  $\square$

Como consequência da proposição acima temos

**Corolário 2** *Seja  $E(M, F, G, Q)$  o fibrado associado ao fibrado principal  $Q(M, G)$ . Suponhamos que  $q.B$  seja um conjunto controlável efetivo para  $S_q$  em  $\pi_E^{-1}(x) = E_x$  onde  $x = \pi_Q(q)$ . Assumamos ainda que  $\text{int}(S_q) \neq \emptyset$ . Então existe um conjunto controlável efetivo  $D$  para  $S_E$  em  $E$  tal que  $q.B_0 = D_0 \cap E_x$ .*

**Demonstração:** Seja  $u = q.v \in q.B_0$ . Então existe  $a \in \text{int}S_q$  tal que  $av = a^{-1}v = v$ . Assim  $u = q.av = q.a^{-1}v = q.v \in \text{int}(S_E(q.v)) \cap \text{int}(S_E^{-1}(q.v))$  (veja o final da demonstração da proposição anterior). Portanto existe um conjunto controlável efetivo  $D$  para  $S_E$  em  $E$  tal que  $u \in D$ . Aplicando a proposição anterior temos que  $D_0 \cap E_x = q.B_0$ .  $\square$

Suponha, agora, que existe um número finito de conjuntos controláveis para  $S_q$  em  $F$ . Denotaremos este número por  $c(S_q, F)$  e os conjuntos controláveis por  $D_q^j$ ,  $j = 1, \dots, c(S_q, F)$ . Observe que os conjuntos  $qD_q^j \subset E_x$ , onde  $E_x$  é a fibra sobre  $x = \pi_Q(q)$ . Mostraremos a seguir que os conjuntos  $qD_q^j$  são independentes do específico  $q \in \pi_Q^{-1}(x)$ . De fato, tome  $q'$  na mesma fibra que  $q$ . Então por [30] pg 2.9 temos que  $S_{q'} = a^{-1}S_q a$ ,  $a \in G$ . Verifiquemos que se  $D_q^j$  é um conjunto controlável para  $S_q$  em  $F$  então  $a^{-1}D_q^j \subset F$  é um conjunto controlável para  $S_{q'}$ . Para isto, tomemos  $x, y \in a^{-1}D_q^j$ . Como  $ax$  e  $ay \in D_q^j$  e  $D_q^j$  é um conjunto controlável para  $S_q$  existem  $a_n \in S_q$  tais que  $a_n ax \rightarrow ay$  e daí  $a^{-1}a_n ax \rightarrow y$ , o que mostra que  $y \in cl(S_{q'}x)$ . Temos portanto que  $a^{-1}D_q^j \subset D$  onde  $D$  é um conjunto controlável para  $S_{q'}$ . Analogamente temos que  $aD \subset cl(S_{q'}x)$  para todo  $x \in aD$ . Como  $D_q^j \subset aD$  temos pela maximalidade de  $D_q^j$  que  $D_q^j = aD$  e  $D = a^{-1}D_q^j$ . Concluimos, então, que os conjuntos controláveis para  $S_{q'}$  são os conjuntos  $a^{-1}D_q^j \subset F$ ,  $j = 1, \dots, c(S_q, F)$ . Mas  $q'.a^{-1}D_q^j = q'a^{-1}.D_q^j = q.D_q^j$ . Assim, os conjuntos  $qD_q^j \subset E_x$  não dependem de  $q$  mas somente de  $x$ .

Sejam  $G$  um grupo de Lie semi-simples,  $F = B$  o flag maximal de  $G$  e  $E(M, B, G, Q)$  o fibrado associado ao fibrado principal  $Q(M, G)$  e com fibra típica  $B$ . Lembremos que se  $F = B$  é o flag maximal então  $c(S_q, F)$  é igual ao número de elementos em  $W(S_q) \setminus W$ , ou seja, o número de  $W(S_q)$ -órbitas em  $W$ . Queremos mostrar que no fibrado associado o número de conjuntos controláveis nas fibras é sempre constante.

Para isto, sejam  $x, y \in M$  e tomemos  $q_x$  com  $\pi_Q(q_x) = x$ . Seja  $A^+$  uma câmara de Weyl interceptando  $intS_{q_x}$ . Tomemos  $q'_y \in Q$  com  $\pi_Q(q'_y) = y$  e tal que  $intS_{q'_y}$  intercepta uma câmara de Weyl, digamos  $B$ . Temos que  $A^+ = a^{-1}Ba$ ,  $a \in G$ , já que as câmaras de Weyl são conjugadas entre si. Seja  $q_y = q'_y a$ . Teremos então que  $\pi_Q(q_y) = y$ , e como  $S_{q_y} = a^{-1}S_{q'_y}a$  temos que  $intS_{q_y}$  intercepta  $A^+$ .

**Proposição 20** *Se  $q_x, q_y$  e  $A^+$  são como acima então  $W(S_{q_x}, A^+) = W(S_{q_y}, A^+)$ . Assim o número de conjuntos controláveis em cada fibra do fibrado associado  $E(M, B, G, Q)$  é sempre o mesmo.*

**Demonstração:** Pela proposição 7 temos que existe um subconjunto  $\Theta$  do sistema

simples de raízes tal que  $W(S_{q_x}, A^+) = W_\Theta$  e temos também que se  $\pi_\Theta : B \rightarrow B_\Theta$  é a projeção canônica então  $\pi_\Theta^{-1}(C_\Theta) = C_{q_x}$ , onde  $C_\Theta$  é o conjunto controlável invariante para  $S_{q_x}$  em  $B_\Theta$  e  $C_{q_x}$  é o conjunto controlável invariante para  $S_{q_x}$  em  $B$ . Consideremos o fibrado associado  $E_\Theta = E_\Theta(M, B_\Theta, G, Q)$ . Seja  $\pi' : E \rightarrow E_\Theta$  definida por  $\pi'(q.v) = q.\pi_\Theta(v)$ . Temos então que  $\pi_{E_\Theta} \circ \pi' = \pi_E$ . Seja  $v_x \in C_\Theta$  tal que  $\pi_{E_\Theta}(q_x.v_x) = x$ . Como  $\pi_\Theta^{-1}(C_\Theta) = C_{q_x}$  temos que  $(\pi')^{-1}(q_x.v_x) \subset q_x.C_{q_x}$ . Portanto por [28] Proposição 3 aplicada a  $\pi' : E \rightarrow E_\Theta$  temos que  $(\pi')^{-1}(q_y.v_y) \subset q_y.C_{q_y}$  para todo  $y$  no conjunto controlável invariante da base. Por outro lado por [29] Proposição 4.1 temos que  $W_\Theta = W(S_{q_x}) \subset W(S_{q_y})$ . Como  $x$  e  $y$  são arbitrários temos que  $W(S_{q_x}) = W(S_{q_y})$ .  $\square$

## Capítulo 3

# O Número Máximo de Conjuntos Controláveis nos Espaços Projetivos

Neste capítulo assumiremos que  $S$  é um subsemigrupo de interior não vazio de um grupo de Lie linear  $G$  conexo e transitivo no espaço projetivo  $RP^{n-1}$ . Lembremos que um grupo linear é um subgrupo do grupo das matrizes reais  $n \times n$  que são inversíveis.

Estamos interessados em determinar o número máximo de conjuntos controláveis efetivos para  $S$  nos espaços projetivos.

Para  $S$  semigrupo de controle, Colonius e Kliemann mostraram em [10] que o número de conjuntos controláveis efetivos para  $S$  no espaço projetivo  $RP^{n-1}$  é no máximo  $n$ . Observemos que com as hipóteses assumidas em [10] (acessibilidade local) o semigrupo de controle tem interior não vazio no grupo do sistema e o grupo do sistema age transitivamente no espaço Projetivo.

Como estamos interessados somente nos conjuntos controláveis efetivos, quando nos referirmos a conjuntos controláveis queremos dizer conjuntos controláveis efetivos.

Obteremos uma estimativa melhor para o número máximo de conjuntos controláveis para  $S$  no espaço projetivo que a de [10]. Estas estimativas são dadas através da análise, caso a caso, dos grupos transitivos no  $RP^{n-1}$ .

Os grupos de Lie lineares transitivos em  $RP^{n-1}$  foram classificados em [6]

Seja  $\mathfrak{g}$  a álgebra de Lie de  $G$ . Temos que  $\mathfrak{g}$  é reductível e se decompõe como

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{z}$$

com  $\mathfrak{g}_0$  semi-simples e  $\mathfrak{z}$  o centro de  $\mathfrak{g}$ . Denotaremos por  $G_0$  o grupo de Lie conexo associado a  $\mathfrak{g}_0$ . Então,  $G = G_0Z$  onde  $Z$  é o grupo de Lie associado a  $\mathfrak{z}$ . Além disso,  $G_0$  também é transitivo no espaço projetivo ( veja [7] pg 216). Suponhamos que  $G_0$  seja compacto. Então existe um único conjunto controlável para  $S$  no espaço projetivo  $RP^{n-1}$  que é o próprio  $RP^{n-1}$ . De fato, o grupo  $Z$  é o produto direto  $Z = Z_1Z_2$  com  $Z_1$  compacto e  $Z_2$  constituído de múltiplos da identidade de  $R^d$  (veja [6, 7] para detalhes). Como  $Z_2$  age como a identidade no espaço projetivo podemos assumir sem perda de generalidade que  $Z$  é compacto. Portanto podemos assumir que  $G$  é compacto já que estamos assumindo  $G_0$  compacto. Como  $S$  é um semigrupo com pontos interiores no grupo compacto  $G$  segue que  $S = G$  e portanto  $S$  é transitivo em  $RP^{n-1}$ . Assim, existe um único conjunto controlável para  $S$  que é o próprio  $RP^{n-1}$ . Logo, é suficiente considerar os casos onde  $\mathfrak{g}_0$  é uma álgebra de Lie semi-simples não compacta. Mostraremos a seguir que não há perda de generalidade em nos restringirmos aos grupos  $G$  semi-simples. Para isto seja  $H$  a isotropia da ação de  $G$  em  $RP^{n-1}$ . A Proposição 14 nos garante que o número de conjuntos controláveis para  $S$  em  $RP^{n-1} = G/H$  e em  $G/HZ$  é o mesmo. O espaço homogêneo  $G/HZ$  é isomorfo a  $(G_0/G_0 \cap Z)/(H \cap G_0/G_0 \cap Z)$  onde  $G_0/G_0 \cap Z$  é um grupo de Lie semi-simples isomorfo a  $G/Z$  e  $H \cap G_0/G_0 \cap Z$  é subgrupo fechado do mesmo. Assim, o número de conjunto controláveis para  $S$  no espaço projetivo  $RP^{n-1}$  é igual ao número de conjuntos controláveis para  $S/Z \subset G_0/G_0 \cap Z$  em  $(G_0/G_0 \cap Z)/(H \cap G_0/G_0 \cap Z)$ . Entretanto,  $(G_0/G_0 \cap Z)/(H \cap G_0/G_0 \cap Z)$  é isomorfo a  $G_0/(H \cap G_0)(G_0 \cap Z)$  e considerando a fibração  $\pi : G_0/(H \cap G_0) \longrightarrow G_0/(H \cap G_0)(G_0 \cap Z)$  temos, também, pela Proposição 14 que o número de conjuntos controláveis para  $S$  em  $RP^{n-1}$  coincide com o número de conjuntos controláveis para  $\pi_1^{-1}(S/Z)$  em  $G_0/G_0 \cap H$ . Onde  $\pi_1$  é o homomorfismo canônico  $\pi_1 : G_0 \longrightarrow G_0/G_0 \cap Z$ . Mas, o espaço homogêneo  $G_0/(G_0 \cap H)$  é  $RP^{n-1}$  já que  $G_0$  também é transitivo. Assim, não há perda de generalidade se nos restringirmos



aos grupos semi-simples.

Apresentamos a seguir a tabela extraída de [7] que nos dá as álgebras de Lie semi-simples não compactas cujos grupos de Lie agem transitivamente em  $RP^{n-1}$ .

$\mathfrak{sl}(n, R)$	$R$	$n$
$\mathfrak{sl}(n/2, C)$	$C$	$n/2$
$\mathfrak{sl}(n/4, H)$	$H$	$n/4$
$\mathfrak{sl}(n/4, H) \oplus \mathfrak{su}(2)$	$R$	$n/4$
$\mathfrak{sp}(n/2, R)$	$R$	$n$
$\mathfrak{sp}(n/4, C)$	$C$	$n/2$

O centralizador  $\mathfrak{z}_0$  de  $\mathfrak{g}_0$  aparece na segunda coluna. Assim, o centro  $\mathfrak{z}$  de  $\mathfrak{g}$  é uma subálgebra abeliana de  $\mathfrak{z}_0$ . Na última coluna apresentamos a estimativa para o número máximo de conjuntos controláveis que será obtida ao longo deste capítulo.

Como vimos no Exemplo 2 o número máximo de conjuntos controláveis em  $RP^{n-1}$  para a ação de qualquer semigrupo de interior não vazio em  $G = Sl(n, R)$  é  $n$ . O grupo  $G = Sp(n/2, R)$  é estudado em 4.1. Neste caso o número máximo de conjuntos controláveis em  $RP^{n-1} = L_1(n/2)$  para a ação de qualquer semigrupo de interior não vazio é  $n$ . O restante dos grupos semi-simples transitivos em  $RP^{n-1}$  serão estudados caso a caso. Convém observar que no caso dos grupos  $Sl(n, R)$  e  $Sp(n/2, R)$  o espaço projetivo é uma variedade flag. Nos outros casos, entretanto, existe uma fibração do espaço projetivo numa variedade flag dos grupos. Como podemos contar o número máximo de conjuntos controláveis nas variedades flag dos grupos a proposição 14 nos permite contar o número máximo de conjuntos controláveis nos espaços projetivos.

### 3.1 O grupo $Sl(n/2, C)$

Seja  $n$  um número natural par. O grupo  $Sl(n/2, C)$  é o grupo das matrizes  $n/2 \times n/2$

complexas de determinante igual a 1. Sua álgebra de Lie  $\mathfrak{sl}(n/2, C)$  é a álgebra das matrizes complexas  $n/2 \times n/2$  de traço zero. Considerando o isomorfismo

$$A + iB \longrightarrow \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$$

podemos considerar  $\mathfrak{sl}(n/2, C)$  como a álgebra de Lie de matrizes reais da forma

$$\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \text{ com } A \text{ e } B \text{ matrizes reais de traço zero}$$

Observe que  $(A + iB)(u + iv) = (Au - Bv) + i(Bu + Av)$  e  $\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Au - Bv \\ Bu + Av \end{pmatrix}$ .

Uma decomposição de Cartan para  $\mathfrak{sl}(n/2, C)$  é dada por  $\mathfrak{sl}(n/2, C) = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$  onde

$$\mathfrak{k} = \left\{ \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} : A \text{ é anti-simétrica e } B \text{ é simétrica } tr(B) = 0 \right\}$$

e

$$\mathfrak{s} = \left\{ \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} : A \text{ é simétrica e } B \text{ é anti-simétrica } tr(A) = 0 \right\}$$

Observe que através do isomorfismo definido acima  $\mathfrak{k} = \mathfrak{su}(n) = \{X \in \mathfrak{sl}(n, C) : X + X^* = 0\}$  e  $\mathfrak{s} = \{X \in \mathfrak{sl}(n, C) : X - X^* = 0\}$ .

Escolhamos como subálgebra euclidiana a álgebra das matrizes

$$\mathfrak{a} = \left\{ \begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & \Lambda \end{pmatrix} : \Lambda = \text{diag}\{a_1, \dots, a_{n/2}\}, tr(\Lambda) = 0 \right\}$$

Se  $\lambda_i(\begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & \Lambda \end{pmatrix}) = a_i$  temos que  $\lambda_i - \lambda_j$  com  $1 \leq i, j \leq n/2$  são raízes. Um sistema simples de raízes é dado por  $\Pi = \{\lambda_1 - \lambda_2, \dots, \lambda_{n/2-1} - \lambda_{n/2}\}$ . Para  $\Theta = \Pi - \{\lambda_1 - \lambda_2\}$  queremos determinar o grupo de isotropia  $P_\Theta$ . O subespaço peso correspondente a  $\lambda_i - \lambda_j$  é dado por  $g_{\lambda_i - \lambda_j} = R(E_{i,j} + E_{i,j+n} + E_{i+n,j} + E_{i+n,j+n})$  onde  $E_{i,j}$  é a matriz cujo único elemento não nulo é 1 na linha  $i$  e coluna  $j$ . Logo teremos que

$$\mathfrak{n}^+ = \left\{ \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} : A \text{ e } B \text{ são triangulares superiores com diagonal nula} \right\}$$

O centralizador de  $\mathfrak{a}$  em  $\mathfrak{k}$  é

$$\mathfrak{m} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -\Lambda \\ \Lambda & 0 \end{pmatrix} : \Lambda = \text{diag}\{a_1, \dots, a_{n/2}\}, \text{tr}(\Lambda) = 0 \right\}$$

Assim, a subálgebra parabólica minimal será  $\mathfrak{p} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^+$  e em blocos  $n/2 \times n/2$

$$\mathfrak{p} = \left\{ \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} : A \text{ e } B \text{ são triangulares superiores com diagonal não nula} \right\}$$

A seguir escolhemos a subálgebra parabólica  $\mathfrak{p}_\Theta = \mathfrak{n}_\Theta^- + \mathfrak{p}$  dada em blocos  $n/2 \times n/2$  por

$$\left\{ \left( \begin{array}{cc|cc} \alpha & * & -\mu & * \\ 0 & * & 0 & * \\ \hline \mu & * & \alpha & * \\ 0 & * & 0 & * \end{array} \right) : \alpha \text{ e } \mu \text{ são reais} \right\}$$

Em termos de matrizes complexas em  $\mathfrak{sl}(n/2, \mathbb{C})$  temos que  $\mathfrak{p}_\Theta = \left\{ \begin{pmatrix} \eta & * \\ 0 & * \end{pmatrix} : \eta \in \mathbb{C} \right\}$

cujo subgrupo parabólico é

$$P_{\Theta} = \left\{ \begin{pmatrix} a & * \\ 0 & * \end{pmatrix} : a \in C \right\}$$

que corresponde a variedade flag  $B_{\Theta} = CP^{n/2-1}$ . Temos que  $RP^{n-1}$  é um espaço homogêneo de  $Sl(n/2, C)$  com isotropia dada em blocos  $n/2 \times n/2$  por

$$H = \left\{ \left( \begin{array}{cc|cc} a & * & 0 & * \\ 0 & * & 0 & * \\ \hline 0 & * & a & * \\ 0 & * & 0 & * \end{array} \right) : a \text{ é real não nulo} \right\}$$

que em termos de matrizes complexas é dado por

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & * \\ 0 & * \end{pmatrix} : a \text{ é real não nulo} \right\}$$

Consideremos agora a fibração canônica  $\pi : RP^{n-1} = Sl(n/2, C)/H \longrightarrow CP^{n/2-1} = Sl(n/2, C)/P_{\Theta}$ . Como  $H$  é normal em  $P_{\Theta}$  temos que  $P_{\Theta}/H$  é um subgrupo e portanto  $\pi$  define um fibrado principal com grupo estrutural  $P_{\Theta}/H$ . Mas,  $P_{\Theta}/H$  é compacto e conexo (é isomorfo a  $S^1$ ), e, portanto, pela Proposição 14, temos que o número de conjuntos controláveis em  $Sl(n/2, C)/P_{\Theta}$  e em  $Sl(n/2, C)/H$  é o mesmo. O grupo de Weyl é o grupo de permutações de  $\{1, \dots, n/2\}$  e  $W_{\Theta}$  é o grupo de permutações de  $\{2, \dots, n/2\}$ . Assim, existem no máximo  $(n/2)!/(n/2 - 1)! = n/2$  conjuntos controláveis em  $Sl(n/2, C)/P_{\Theta}$ . Logo, existem no máximo  $n/2$  conjuntos controláveis em  $RP^{n-1}$  para a ação de qualquer semigrupo de interior não vazio contido em  $Sl(n/2, C)$ .

### 3.2 O grupo $Sl(n/4, H)$

Seja  $n$  um número natural múltiplo de 4. O grupo  $Sl(n/4, H)$  é o grupo das matrizes  $n/4 \times n/4$  com entradas nos quatérnios  $H$  e de determinante igual a 1. Sua álgebra de Lie  $\mathfrak{sl}(n/4, H)$  é a álgebra das matrizes  $n/4 \times n/4$  com entradas nos quatérnios e de traço zero. Considerando o isomorfismo

$$A + iB + jC + kD \longrightarrow \begin{pmatrix} A & -B & -C & -D \\ B & A & -D & C \\ C & D & A & -B \\ D & -C & B & A \end{pmatrix}$$

podemos considerar  $\mathfrak{sl}(n/4, H)$  como a álgebra de Lie de matrizes reais da forma

$$\begin{pmatrix} A & -B & -C & -D \\ B & A & -D & C \\ C & D & A & -B \\ D & -C & B & A \end{pmatrix} \text{ com } A, B, C \text{ e } D \text{ matrizes reais de traço zero}$$

Uma decomposição de Cartan para  $\mathfrak{sl}(n/4, H)$  é dada por  $\mathfrak{sl}(n/4, H) = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$  onde

$$\mathfrak{k} = \left\{ \begin{pmatrix} A & -B & -C & -D \\ B & A & -D & C \\ C & D & A & -B \\ D & -C & B & A \end{pmatrix} : \begin{array}{l} A \text{ é anti-simétrica e } B, C, D \text{ são simétricas} \\ \text{tr}(B) = \text{tr}(C) = \text{tr}(D) = 0 \end{array} \right\}$$

e

$$\mathfrak{s} = \left\{ \begin{pmatrix} A & -B & -C & -D \\ B & A & -D & C \\ C & D & A & -B \\ D & -C & B & A \end{pmatrix} : A \text{ é simétrica e } B, C, D \text{ são anti-simétricas } tr(A) = 0 \right\}$$

Escolhamos como subálgebra euclidiana a álgebra das matrizes

$$\mathfrak{a} = \left\{ \begin{pmatrix} \Lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda \end{pmatrix} : \Lambda = diag\{a_1, \dots, a_{n/4}\}, tr(\Lambda) = 0 \right\}$$

Se  $\lambda_i \left( \begin{pmatrix} \Lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda \end{pmatrix} \right) = a_i$  temos que  $\lambda_i - \lambda_j$  com  $1 \leq i, j \leq n/4$  são raízes.

Um sistema simples de raízes é dado por  $\Pi = \{\lambda_1 - \lambda_2, \dots, \lambda_{n/4-1} - \lambda_{n/4}\}$ . Para  $\Theta = \Pi - \{\lambda_1 - \lambda_2\}$  queremos determinar o grupo de isotropia  $P_\Theta$ . Como no caso de  $Sl(n, C)$  temos que

$$\mathfrak{n}^+ = \left\{ \begin{pmatrix} A & -B & -C & -D \\ B & A & -D & C \\ C & D & A & -B \\ D & -C & B & A \end{pmatrix} : A, B, C \text{ e } D \text{ são triangulares superiores com diagonal nula} \right\}$$

O centralizador de  $\mathfrak{a}$  em  $\mathfrak{k}$  é

$$\mathfrak{m} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -\Lambda_1 & -\Lambda_2 & -\Lambda_3 \\ \Lambda_1 & 0 & -\Lambda_3 & \Lambda_2 \\ \Lambda_2 & \Lambda_3 & 0 & -\Lambda_1 \\ \Lambda_3 & -\Lambda_2 & \Lambda_1 & 0 \end{pmatrix} : \Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3 \text{ são diagonais, } \text{tr}(\Lambda_i) = 0 \right\}$$

Assim a subálgebra parabólica minimal será  $\mathfrak{p} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^+$  e em blocos  $n/4 \times n/4$

$$\mathfrak{p} = \left\{ \begin{pmatrix} A & -B & -C & -D \\ B & A & -D & C \\ C & D & A & -B \\ D & -C & B & A \end{pmatrix} : A, B, C, D \text{ são triangulares superiores com diagonal não nula} \right\}$$

A seguir escolhemos a subálgebra parabólica  $\mathfrak{p}_\Theta = \mathfrak{n}_\Theta^- + \mathfrak{p}$  dada em blocos  $n/4 \times n/4$

por

$$\left\{ \begin{pmatrix} \alpha & * & -\beta & * & -\gamma & * & -\delta & * \\ 0 & * & 0 & * & 0 & * & 0 & * \\ \hline \beta & * & \alpha & * & -\delta & * & \gamma & * \\ 0 & * & 0 & * & 0 & * & 0 & * \\ \hline \gamma & * & \delta & * & \alpha & * & -\beta & * \\ 0 & * & 0 & * & 0 & * & 0 & * \\ \hline \delta & * & -\gamma & * & \beta & * & \alpha & * \\ 0 & * & 0 & * & 0 & * & 0 & * \end{pmatrix} : \alpha, \beta, \gamma \text{ e } \delta \text{ são reais} \right\}$$

Em termos de matrizes complexas em  $\mathfrak{sl}(n/4, \mathbb{C})$  temos que  $\mathfrak{p}_\Theta = \left\{ \begin{pmatrix} \eta & * \\ 0 & * \end{pmatrix} : \eta \in H \right\}$

cujo subgrupo parabólico é

$$P_\Theta = \left\{ \begin{pmatrix} a & * \\ 0 & * \end{pmatrix} : a \in H \right\}$$

corresponde a uma variedade flag  $B_\Theta$ . Temos que  $RP^{n-1}$  é um espaço homogêneo de  $Sl(n/4, H)$  com isotropia dada em blocos  $n/4 \times n/4$  dada por

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} a & * & 0 & * & 0 & * & 0 & * \\ 0 & * & 0 & * & 0 & * & 0 & * \\ \hline 0 & * & a & * & 0 & * & 0 & * \\ 0 & * & 0 & * & 0 & * & 0 & * \\ \hline 0 & * & 0 & * & a & * & 0 & * \\ 0 & * & 0 & * & 0 & * & 0 & * \\ \hline 0 & * & 0 & * & 0 & * & a & * \\ 0 & * & 0 & * & 0 & * & 0 & * \end{pmatrix} : a \text{ é real não nulo} \right\}$$

que em termos de matrizes complexas é dado por

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} a & * \\ 0 & * \end{pmatrix} : a \text{ é real não nulo} \right\}$$

Consideremos agora a fibração canônica  $\pi : RP^{n-1} = Sl(n/4, H)/F \longrightarrow B_\Theta = Sl(n/4, H)/P_\Theta$ . Como  $F$  é normal em  $P_\Theta$  temos que  $P_\Theta/F$  é um subgrupo e, portanto,  $\pi$  define um fibrado principal com grupo estrutural  $P_\Theta/F$ . Mas,  $P_\Theta/F$  é compacto e conexo (é isomorfo aos quatérnios puros de norma 1), e, portanto, pela Proposição 14, temos que o número de conjuntos controláveis em  $Sl(n/4, H)/P_\Theta$  e em  $Sl(n/4, H)/F$  é o mesmo. O grupo de Weyl é o grupo de permutações de  $\{1, \dots, n/4\}$  e o subgrupo  $W_\Theta$  é o grupo de permutações de  $\{2, \dots, n/4\}$ . Assim, existem no máximo  $(n/4)!/(n/4 - 1)! = n/4$  conjuntos controláveis em  $Sl(n/4, H)/P_\Theta$ . Logo, existem no máximo  $n/4$  conjuntos controláveis em  $RP^{n-1}$  para a ação de qualquer semigrupo de interior não vazio contido em  $Sl(n/4, H)$ .

### 3.3 O grupo $Sl(n/4, H).SU(2)$



Neste caso, a análise é feita de maneira análoga ao caso anterior. De fato, seja

$$\mathfrak{sl}(n/4, H) = \mathfrak{k}_1 \oplus \mathfrak{s}_1$$

uma decomposição de Cartan para  $\mathfrak{sl}(n/4, H)$  pensada como álgebra de Lie real como no exemplo anterior. Temos que  $\mathfrak{su}(2)$  pode ser vista como uma álgebra de Lie real compacta. Na verdade  $\mathfrak{su}(2)$  é isomorfa ao conjunto dos quatérnios puros e, por sua vez, através do isomorfismo dado acima, é isomorfa ao conjunto das matrizes reais dadas em blocos  $n/4 \times n/4$  por

$$\mathfrak{b} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -\Lambda_1 & -\Lambda_2 & -\Lambda_3 \\ \Lambda_1 & 0 & -\Lambda_3 & \Lambda_2 \\ \Lambda_2 & \Lambda_3 & 0 & -\Lambda_1 \\ \Lambda_3 & -\Lambda_2 & \Lambda_1 & 0 \end{pmatrix} : \Lambda_i = \lambda_i I \text{ e } \lambda_i \in \mathbb{R} \right\}$$

Assim, uma decomposição de Cartan para  $\mathfrak{sl}(n/4, H) \oplus \mathfrak{su}(2)$  pensada como álgebra de Lie real é dada por

$$\mathfrak{sl}(n/4, H) \oplus \mathfrak{su}(2) = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$$

onde  $\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_1 \oplus \mathfrak{b}$  e  $\mathfrak{s} = \mathfrak{s}_1$ . Logo podemos escolher a mesma subálgebra euclidiana  $\mathfrak{a}$  tanto para  $\mathfrak{sl}(n/4, H) \oplus \mathfrak{su}(2)$  quanto para  $\mathfrak{sl}(n/4, H)$ . Como as matrizes em  $\mathfrak{b}$  são anti-simétricas temos que o centralizador de  $\mathfrak{a}$  em  $\mathfrak{k}$  é o centralizador de  $\mathfrak{a}$  em  $\mathfrak{k}_1$ . Portanto, o restante da análise é idêntica a análise feita para o grupo  $\mathfrak{sl}(n/4, H)$ .

Assim, existem no máximo  $n/4$  conjuntos controláveis em  $RP^{n-1}$  para a ação de qualquer semigrupo de interior não vazio contido em  $Sl(n/4, H).SU(2)$ .

### 3.4 O grupo $Sp(n/4, C)$

Seja  $n$  um número natural múltiplo de 4. O grupo  $Sp(n/4, C)$  é o grupo das matrizes

complexas  $n/4 \times n/4$  definido por  $Sp(n/4, C) = \{g \in GL(n/2, C) : g^t J g = J\}$  onde  $J$  é a matriz em blocos  $n/4 \times n/4$  dada por

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sua álgebra de Lie  $\mathfrak{sp}(n/4, C)$  é a álgebra das matrizes complexas dada em blocos  $n/2 \times n/2$  por

$$\left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^t \end{pmatrix} : A, B \text{ e } C \text{ complexas com } B \text{ e } C \text{ simétricas} \right\}$$

Como anteriormente, podemos considerar  $\mathfrak{sp}(n/4, C)$  como a álgebra de Lie de matrizes reais dada em blocos  $n/4 \times n/4$  por

$$\begin{pmatrix} \alpha & \gamma & \beta & \delta \\ \zeta & -\alpha^t & \xi & -\beta^t \\ -\beta & -\delta & \alpha & \gamma \\ -\xi & \beta^t & \zeta & -\alpha^t \end{pmatrix} \text{ com } \gamma, \zeta, \xi, \delta \text{ simétricas}$$

Uma decomposição de Cartan para  $\mathfrak{sp}(n/4, C)$  é dada por  $\mathfrak{sp}(n/4, C) = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$  onde

$$\mathfrak{s} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \gamma & \beta & \delta \\ \gamma & -\alpha & -\delta & \beta \\ -\beta & -\delta & \alpha & \gamma \\ \delta & -\beta & \gamma & -\alpha \end{pmatrix} : \beta \text{ anti-simétrica } \alpha, \gamma, \delta \text{ são matrizes simétricas} \right\}$$

e

$$\mathfrak{k} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \gamma & \beta & \delta \\ -\gamma & \alpha & \delta & -\beta \\ -\beta & -\delta & \alpha & \gamma \\ -\delta & \beta & -\gamma & \alpha \end{pmatrix} : \alpha \text{ anti-simétrica e } \beta, \gamma, \delta \text{ simétricas} \right\}$$

Escolhamos como subálgebra euclidiana a álgebra das matrizes

$$\mathfrak{a} = \left\{ \begin{pmatrix} \Lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\Lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\Lambda \end{pmatrix} : \Lambda = \text{diag}\{a_1, \dots, a_{n/4}\} \right\}$$

Se  $\lambda_i \left( \begin{pmatrix} \Lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\Lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\Lambda \end{pmatrix} \right) = a_i$  temos que  $\lambda_i - \lambda_j$  e  $\lambda_i + \lambda_j$  com  $1 \leq i, j \leq n/4$  são

raízes. Um sistema simples de raízes é dado por  $\Pi = \{\lambda_1 - \lambda_2, \dots, \lambda_{n/4-1} - \lambda_{n/4}, 2\lambda_{n/4}\}$ .

Para  $\Theta = \Pi - \{\lambda_1 - \lambda_2\}$  queremos determinar o grupo de isotropia  $P_\Theta$ .

Os subespaços de raízes são:

- Associados a  $\lambda_i - \lambda_j$  as matrizes em  $\mathfrak{sp}(n, C)$  dadas por  $R(E_{i,j} + E_{j+n/4, i+n/4} + E_{i+n/2, j+n/2} + E_{j+3n/4, i+3n/4} + E_{i, j+n/2} + E_{j+n/4, i+3n/4} + E_{i+n/2, j} + E_{j+3n/4, i+n/4})$ .

- Associados a  $\lambda_i + \lambda_j$  as matrizes em  $\mathfrak{sp}(n, C)$  dadas por

$R(E_{i, j+n/4} + E_{j, i+n/4} + E_{i, j+3n/4} + E_{j, i+3n/4} + E_{i+n/2, j+n/4} + E_{j+n/2, i+n/4} + E_{j+n/2, i+3n/4} + E_{i+n/2, j+3n/4})$ .

Assim,

$$\mathfrak{n}^+ = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \gamma & \beta & \delta \\ 0 & -\alpha^t & 0 & -\beta^t \\ -\beta & -\delta & \alpha & \gamma \\ 0 & \beta^t & 0 & -\alpha^t \end{pmatrix} : \begin{array}{l} \alpha \text{ e } \beta \text{ são triangulares superiores com diagonal nula} \\ \gamma \text{ e } \delta \text{ simétricas} \end{array} \right\}$$

O centralizador de  $\mathfrak{a}$  em  $\mathfrak{k}$  é

$$\mathfrak{m} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \Lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\Lambda \\ -\Lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda & 0 & 0 \end{pmatrix} : \Lambda \text{ matriz diagonal} \right\}$$

Assim, a subálgebra parabólica minimal será  $\mathfrak{p} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^+$  e em blocos  $n/4 \times n/4$

$$\mathfrak{p} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \gamma & \beta & \delta \\ 0 & -\alpha^t & 0 & -\beta^t \\ -\beta & -\delta & \alpha & \gamma \\ 0 & \beta^t & 0 & -\alpha^t \end{pmatrix} : \begin{array}{l} \alpha \text{ e } \beta \text{ são triangulares superiores com diagonal não nula} \\ \gamma, \delta \text{ simétricas} \end{array} \right\}$$

A seguir escolhamos a subálgebra parabólica  $\mathfrak{p}_{\Theta} = \mathfrak{n}_{\Theta}^- + \mathfrak{p}$  dada em blocos  $n/4 \times n/4$  pelas matrizes do tipo

$$\begin{pmatrix} \alpha & \gamma & \beta & \delta \\ \zeta & -\alpha^t & \xi & -\beta^t \\ -\beta & -\delta & \alpha & \gamma \\ -\xi & \beta^t & \zeta & -\alpha^t \end{pmatrix}$$

com  $\gamma, \delta$  matrizes simétricas quaisquer e

$$\alpha = \begin{pmatrix} \nu & * \\ 0 & \\ \vdots & * \\ 0 & \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} \sigma & * \\ 0 & \\ \vdots & * \\ 0 & \end{pmatrix}, \zeta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \\ \vdots & * \\ 0 & \end{pmatrix}, \xi = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \\ \vdots & * \\ 0 & \end{pmatrix}$$

com  $\nu, \sigma, \zeta$  e  $\tau$  reais.

Em termos de matrizes complexas em  $\mathfrak{sp}(n/4, C)$  podemos escolher  $\mathfrak{p}_\theta$  como o conjunto das matrizes dado por

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^t \end{pmatrix}$$

com  $B$  simétrica e

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & \\ \vdots & * \\ 0 & \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \\ \vdots & * \\ 0 & \end{pmatrix}$$

com  $\lambda \in C$ .

Temos que  $RP^{n-1}$  é um espaço homogêneo de  $Sp(n/4, C)$  com isotropia  $H$  dada em blocos  $n/4 \times n/4$  por

$$\begin{pmatrix} \alpha & \gamma & 0 & \delta \\ \zeta & -\alpha^t & \xi & 0 \\ 0 & -\delta & \alpha & \gamma \\ -\xi & 0 & \zeta & -\alpha^t \end{pmatrix}$$

com  $\gamma$  e  $\delta$  simétricas e

$$\zeta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & * & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \alpha = \begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & \\ \vdots & * \\ 0 & \end{pmatrix}, \xi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & * & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

com  $\lambda$  real não nulo. Em termos de matrizes complexas  $H$  é dado por

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^t \end{pmatrix}$$

com  $B$  simétrica e

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & \\ \vdots & * \\ 0 & \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & * & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

onde  $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ . Consideremos agora a fibração canônica  $\pi : RP^{n-1} = Sp(n/4, C)/H \rightarrow Sp(n/4, C)/P_\Theta$ . Como  $H$  é normal em  $P_\Theta$  temos que  $P_\Theta/H$  é um subgrupo e, portanto,  $\pi$  define um fibrado principal com grupo estrutural  $P_\Theta/H$ . Mas,  $P_\Theta/H$  é compacto e conexo, e, portanto, pela Proposição 14, temos que o número de conjuntos controláveis em  $Sp(n/4, C)/P_\Theta$  e em  $Sp(n/4, C)/H$  é o mesmo. O grupo de Weyl possui  $2^{n/4}(n/4)!$  elementos. O subgrupo  $W_\Theta$  possui  $2^{n/4-1}(n/4-1)!$  elementos. Logo, existem no máximo  $n/2$  conjuntos controláveis em  $Sp(n/4, C)/P_\Theta$ . Portanto, existem no máximo  $n/2$  conjuntos controláveis em  $RP^{n-1}$  para a ação de qualquer semigrupo de interior não vazio contido em  $Sp(n/4, C)$ .

# Capítulo 4

## O Grupo Simplético e Controlabilidade de Sistemas de Controle

Neste capítulo estudamos controlabilidade de sistemas de controle onde o semigrupo do sistema é um subsemigrupo do grupo simplético.

Mostramos primeiramente que os flags minimais no grupo simplético são as grassmannianas dos subespaços isotrópicos.

Analisamos posteriormente controlabilidade de sistemas bilineares e controlabilidade global para sistemas de controle a tempo discreto.

### 4.1 O grupo simplético

Definamos o grupo simplético como  $Sp(n, R) = \{g \in GL(2n, R) : g^t J g = J\}$  onde  $J$  é a matriz  $2n \times 2n$  escrita em blocos  $n \times n$  como

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Seja  $R^{2n}$  um espaço euclidiano de dimensão par. Lembremos que uma forma bilinear

anti-simétrica e não degenerada  $w(u, v)$  em  $R^{2n}$  é dita forma simplética. Observemos que, dada uma forma simplética qualquer, existe uma base tal que a matriz da forma é a matriz  $J$  dada acima. Em blocos  $n \times n$  os elementos de  $Sp(n, R)$  se escrevem como

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

com  $ba^t = ab^t$ ,  $dc^t = cd^t$  e  $da^t - cb^t = 1$ . De fato, basta resolver a equação

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sua álgebra de Lie é  $\mathfrak{sp}(n, R) = \{X : XJ + JX^t = 0\}$  e pode ser vista em blocos  $n \times n$  como a subálgebra das matrizes  $2n \times 2n$  da forma

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^t \end{pmatrix}$$

com  $A, B, C$  matrizes reais  $n \times n$ , e  $B$  e  $C$  simétricas.

### 4.1.1 Decomposição de Cartan

Uma decomposição de Cartan de  $\mathfrak{sp}(n, R)$  é dada por

$$\mathfrak{sp}(n, R) = \mathfrak{k} + \mathfrak{s}$$

onde  $\mathfrak{k}$  é a álgebra das matrizes anti-simétricas em  $\mathfrak{sp}(n, R)$ , ou seja,

$$\mathfrak{k} = \left\{ \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} : A \text{ anti-simétrica e } B \text{ simétrica} \right\}$$



e  $\mathfrak{s}$  é o subespaço das matrizes simétricas em  $\mathfrak{sp}(n, R)$ , ou seja

$$\mathfrak{s} = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ B & -A \end{pmatrix} : A, B \text{ são matrizes simétricas} \right\}$$

A involução de Cartan é definida por  $\theta(X) = JXJ^{-1}$ . A álgebra  $\mathfrak{k}$  é isomorfa a  $\mathfrak{u}(n)$ , que é a álgebra das matrizes complexas  $n \times n$  que são anti-hermitianas (isto é,  $X^* = \bar{X}^t = -X$ ). O isomorfismo é dado da seguinte maneira. Se  $X$  é uma matriz complexa  $n \times n$ , podemos escrever  $X = A + iB$  com  $A$  e  $B$  matrizes reais e  $X = A + iB$  é anti-hermitiana se e só se  $A$  é anti-simétrica e  $B$  é simétrica. Assim o isomorfismo é dado por

$$A + iB \longleftrightarrow \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$$

Seja  $K$  o grupo conexo cuja álgebra de Lie é  $\mathfrak{k}$ . A decomposição de Cartan de  $Sp(n, R)$  é  $Sp(n, R) = KS$  onde  $S$  é o conjunto das matrizes simétricas positivas definidas em  $Sp(n, R)$ . Como  $\mathfrak{k} = \mathfrak{so}(2n, R) \cap \mathfrak{sp}(n, R)$  temos que  $K = SO(2n, R) \cap Sp(n, R)$ . Mas  $SO(2n, R) \cap Sp(n, R)$  é isomorfo a  $U(n)$ , o grupo das matrizes complexas  $g$  que são  $n \times n$  e que satisfazem  $g^*g = 1$  onde  $g^* = \bar{g}^t$ . O isomorfismo é dado da mesma forma por

$$g = a + ib \longleftrightarrow \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

De fato, se  $g \in SO(2n, R) \cap Sp(n, R)$  então  $gg^t = 1$  e  $g^t J g = J$  e portanto

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in K \text{ se e só se } b = -c, a = d, aa^t + bb^t = 1 \text{ e } ab^t = ba^t$$

Por outro lado, uma matriz complexa  $g = a + bi$  é unitária se e só se

$$gg^* = (a + bi)(a^t - ib^t) = 1$$

Logo  $g$  é unitária se e só se

$$aa^t + bb^t = 1 \text{ e } ab^t = ba^t$$

e estas são também as condições para que uma matriz

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

pertença a  $K$ .

### 4.1.2 O grupo de Weyl

As subálgebras abelianas maximais de  $\mathfrak{s}$  são subálgebras de Cartan pois  $\mathfrak{sp}(n, R)$  é uma forma real normal da álgebra complexa simples  $\mathfrak{sp}(n, C)$ . Uma dessas subálgebras é a subálgebra  $\mathfrak{a}$  das matrizes diagonais em  $\mathfrak{sp}(n, R)$ ,  $\text{diag}\{H, -H\}$  com  $H$  uma matriz diagonal  $n \times n$ .

Seja  $\mathfrak{a}^+ = \{\text{diag}(a_1, \dots, a_n, -a_1, \dots, -a_n) : a_1 > \dots > a_n > 0\}$  uma câmara de Weyl em  $\mathfrak{a}$ .

Se  $A = \text{diag}(a_1, \dots, a_n, -a_1, \dots, -a_n)$  definamos o funcional linear  $\lambda_i$  por  $\lambda_i(A) = a_i$ . Um sistema de raízes positivas será  $\Delta^+ = \{\lambda_i - \lambda_j : 1 \leq i < j \leq n\} \cup \{\lambda_i + \lambda_j : 1 \leq i, j \leq n\}$ . Um sistema simples de raízes gerando  $\Delta^+$  é dado por  $\Pi = \{\lambda_1 - \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1} - \lambda_n, 2\lambda_n\}$ .

Sejam  $\Xi$  o grupo de permutações de  $\{1, \dots, n\}$  e  $\Gamma$  o grupo multiplicativo das  $n$ -uplas  $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$  onde os  $\epsilon_i$ 's são  $\pm 1$  e a multiplicação é feita componente a componente.

Temos que  $\Xi$  age em  $\mathfrak{a}$  como o grupo de permutações

$$\text{diag}(a_1, \dots, a_n, -a_1, \dots, -a_n) \longrightarrow \text{diag}(a_{i_1}, \dots, a_{i_n}, -a_{i_1}, \dots, -a_{i_n})$$

Temos também que  $\Gamma$  age em  $\mathfrak{a}$  como o grupo

$$\text{diag}(a_1, \dots, a_n, -a_1, \dots, -a_n) \longrightarrow \text{diag}(\epsilon_1 a_1, \dots, \epsilon_n a_n, -\epsilon_1 a_1, \dots, -\epsilon_n a_n)$$

O grupo de Weyl é o grupo correspondente a ação de  $\Xi\Gamma = \Gamma\Xi$  em  $\mathfrak{a}$  e tem  $2^n n!$  elementos.

### Subálgebras parabólicas

Seja  $\Delta^+ = \{\lambda_i - \lambda_j : 1 \leq i < j \leq n\} \cup \{\lambda_i + \lambda_j : 1 \leq i, j \leq n\}$  um sistema de raízes positivas e  $\Pi = \{\lambda_1 - \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1} - \lambda_n, 2\lambda_n\}$  um sistema simples de raízes gerando  $\Delta^+$ .

Os subespaços de raízes são:

- Associados a  $\lambda_i - \lambda_j$  as matrizes em  $\mathfrak{sp}(n, R)$  cujas únicas entradas não nulas são  $i, j$  e  $j + n, i + n$  que aparecem nos blocos diagonais (em  $A$  e  $-A^t$ ).
- Associados a  $\lambda_i + \lambda_j$  as matrizes em  $\mathfrak{sp}(n, R)$  cujas únicas entradas não nulas são  $i, j + n$  e  $j, i + n$  que aparecem no bloco superior direito (em  $B$ ).

Se  $\mathfrak{n}^+ = \sum_{\alpha \in \Delta^+} g_\alpha$  então

$$\mathfrak{n}^+ = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & -A^t \end{pmatrix} : A \text{ é triangular superior com diagonal nula e } B \text{ simétrica} \right\}$$

A subálgebra parabólica minimal é  $\mathfrak{p} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^+$ . Como  $\mathfrak{a}$  é uma subálgebra de Cartan temos que o centralizador  $\mathfrak{m}$  de  $\mathfrak{a}$  em  $\mathfrak{k}$  é nulo.

Se  $\mathfrak{n}^- = \sum_{-\alpha \in \Delta^+} g_\alpha$  então

$$\mathfrak{n}^- = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & -A^t \end{pmatrix} : A \text{ é triangular inferior com diagonal nula e } B \text{ simétrica} \right\}$$

Dado um subconjunto  $\Theta \subset \Pi$  se tem a subálgebra parabólica  $\mathfrak{p}_\Theta = \mathfrak{n}_\Theta^- + \mathfrak{p}$  onde  $\mathfrak{n}_\Theta^-$  é a subálgebra de  $\mathfrak{n}^-$  gerada pelos espaços de raízes de  $-\Theta$ . Determinemos as subálgebras parabólicas maximais que são aquelas em que  $\Theta$  é maximal, ou seja, em que  $\Theta$  é o complementar de um subconjunto unitário de  $\Pi$ . Observemos que as subálgebras parabólicas maximais estão associadas aos flags minimais. De maneira explícita temos

- $\mathfrak{p}_{\Pi - 2\lambda_n}$  é a subálgebra de matrizes da forma  $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & -A^t \end{pmatrix}$  com  $A$  qualquer e  $B$

simétrica. Isto ocorre já que os espaços de raízes associados a  $\lambda_i - \lambda_j$  estão contidos nos blocos diagonais. Como  $\Pi - 2\lambda_n$  contém todas as raízes simples dessa forma, temos que  $\mathfrak{n}_{\Pi-2\lambda_n}$  são as matrizes em que  $A$  é triangular inferior com diagonal nula.

•  $\mathfrak{p}_{\Pi-\{\lambda_i-\lambda_{i+1}\}}$ ,  $i \leq n-1$  é a álgebra das matrizes da forma

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^t \end{pmatrix}$$

com  $B$  simétrica

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} : \alpha \text{ é uma matriz } i \times i \text{ arbitrária} \right\}$$

e

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} : d \text{ é } n-i \times n-i \text{ e simétrica} \right\}$$

Assim  $\mathfrak{p}_{\Pi-\{\lambda_i-\lambda_{i+1}\}}$  é a subálgebra de matrizes simpléticas da forma

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \delta \end{pmatrix}$$

com  $\alpha$  matriz  $i \times i$ . Para se obter a subálgebra parabólica  $\mathfrak{p}_{\Pi-\{\lambda_i-\lambda_{i+1}\}}$  deve-se olhar todas as raízes que podem ser obtidas por combinações (somadas) de  $\lambda_{j+1} - \lambda_j = -(\lambda_j - \lambda_{j+1})$ ,  $j \neq i$ ,  $j \leq n-1$  e  $-2\lambda_n$  e, a partir daí, se olhar os espaços de raízes correspondentes. Fazendo apenas combinações de  $\lambda_{j+1} - \lambda_j$  obtemos espaços de pesos apenas nos blocos diagonais e, como  $j \neq i$ , as entradas de  $A$  que são cobertas são apenas as indicadas.

Para determinar  $C$ , suponhamos inicialmente que  $i = n-1$ . Então, nenhuma combinação de  $\lambda_{j+1} - \lambda_j$ ,  $j < n-1$  com  $-2\lambda_n$  nos fornece raiz. Dessa forma, a única raiz que não é da forma  $\lambda_r - \lambda_s$  (cujo espaço de raízes está fora dos blocos diagonais) que aparece é  $-2\lambda_n$ . O espaço dessa raiz é o que tem entrada em  $2n \times n$  e isso nos fornece  $C$  como foi indicado e com  $d$  matriz  $1 \times 1$ .

Para  $i \neq n - 1$  as raízes fora dos blocos diagonais que são obtidas por combinações são obtidas reiteradamente como

$$\begin{aligned} (\lambda_n - \lambda_{n-1}) - 2\lambda_n &= -\lambda_{n-1} - \lambda_n \\ &\vdots \\ (\lambda_{j+1} - \lambda_j) - (\lambda_{j+1} + \lambda_n) &= -\lambda_j - \lambda_n \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} -(\lambda_{n-2} + \lambda_n) + (\lambda_n - \lambda_{n-1}) &= -\lambda_{n-2} - \lambda_{n-1} \\ &\vdots \\ -(\lambda_j + \lambda_{j+2}) + (\lambda_{j+2} - \lambda_{j+1}) &= -\lambda_j - \lambda_{j+1} \end{aligned}$$

e, dessa forma, as raízes que são obtidas por combinações são  $-(\lambda_r + \lambda_s)$  com  $r, s > i$  e os espaços de raízes preenchem  $C$  como indicado, com  $d$  uma matriz  $n - i \times n - i$ .

Como exemplo específico da determinação de  $A$  e  $C$ , analisemos o grupo simplético  $Sp(6, R)$ . Temos então que  $\Pi = \{\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_2 - \lambda_3, \lambda_3 - \lambda_4, \lambda_4 - \lambda_5, \lambda_5 - \lambda_6, 2\lambda_6\}$ . Se  $\Theta = \Pi - \{\lambda_3 - \lambda_4\}$  temos que  $-\Theta = \{\lambda_2 - \lambda_1, \lambda_3 - \lambda_2, \lambda_5 - \lambda_4, \lambda_6 - \lambda_5, -2\lambda_6\}$ . Neste caso  $i = 3$  e daí  $\alpha$  é  $3 \times 3$  e  $d$  é  $3 \times 3$  e simétrica. A parte triangular inferior de  $\alpha$  é facilmente obtida pois  $\lambda_2 - \lambda_1, \lambda_3 - \lambda_2 \in -\Theta$  e  $\lambda_3 - \lambda_1 = (\lambda_3 - \lambda_2) + (\lambda_2 - \lambda_1)$ . Como  $\lambda_5 - \lambda_4, \lambda_6 - \lambda_5 \in -\Theta$  e  $\lambda_6 - \lambda_4 = (\lambda_5 - \lambda_4) + (\lambda_6 - \lambda_5)$  obtemos a parte inferior de  $\gamma$ . Observemos que as partes triangulares superiores e as diagonais de  $\alpha$  e  $\gamma$  e a matriz  $\beta$  já aparecem na subálgebra parabólica minimal. A matriz  $d$  é obtida através do espaço das raízes  $-2\lambda_6$ ,  $-(\lambda_5 + \lambda_6) = (\lambda_6 - \lambda_5) - 2\lambda_6$ ,  $-(\lambda_4 + \lambda_6) = (\lambda_5 - \lambda_4) - (\lambda_5 + \lambda_6)$  e  $-(\lambda_4 + \lambda_5) = -(\lambda_4 + \lambda_6) + (\lambda_6 - \lambda_5)$ .

### 4.1.3 O subgrupo parabólico minimal

O subgrupo parabólico minimal é dado por  $P = MAN^+$  onde  $A$  e  $N^+$  são os grupos

exponenciais de  $\mathfrak{a}$  e  $\mathfrak{n}^+$ . Assim

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & h^{-1} \end{pmatrix} : h \text{ é uma matriz } n \times n \text{ e diagonal} \right\}$$

e

$$N^+ = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ 0 & (a^{-1})^t \end{pmatrix} : \begin{array}{l} a \text{ triangular superior com 1's na diagonal} \\ b \text{ com } ba^t = ab^t \end{array} \right\}$$

Resta determinar  $M$ . Esse grupo é discreto pois o centralizador de  $\mathfrak{a}$  em  $\mathfrak{k}$  é nulo. Lembremos que uma matriz

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in K \text{ se e só se } aa^t + bb^t = 1 \text{ e } ba^t = ab^t.$$

Como as matrizes em  $K$  são anti-simétricas temos que suas inversas coincidem com suas transpostas. Portanto, para determinar  $M = \{u \in K : Ad(u)H = H \text{ para todo } H \in \mathfrak{a}\}$  basta determinar as matrizes em  $K$  que satisfazem

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & -\Lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^t & b^t \\ -b^t & a^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & -\Lambda \end{pmatrix}$$

para toda matriz diagonal  $\Lambda$ . Em particular tomando  $\Lambda = 1$  temos

$$\begin{pmatrix} aa^t - bb^t & ab^t + ba^t \\ ba^t + ab^t & bb^t - aa^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e temos que  $aa^t - bb^t = 1$  e  $ba^t = -ab^t$ . Destas fórmulas e da caracterização dos elementos de  $K$  teremos que  $aa^t = 1$  e  $ab^t = 0$ , ou seja,  $a$  é ortogonal e  $b = 0$ . Como  $a$  é uma matriz ortogonal que comuta com todas as matrizes diagonais temos que  $a$  é diagonal e suas entradas são  $\pm 1$ . Observemos que o grupo  $M$  determina as componentes conexas de  $P$ . O grupo  $AN^+$  é conexo e se  $M$  é discreto o número de componentes conexas de  $P$  é exatamente a ordem de  $M$ . É possível mostrar que cada componente conexa de um

subgrupo parabólico qualquer contém um elemento de  $M$ . (veja [36] seção 1.2 e o lema do apêndice)

#### 4.1.4 Os flags minimais

Seja  $\omega$  uma forma simplética num espaço euclidiano  $R^{2n}$ . Um subespaço  $V$  de  $R^{2n}$  é dito isotrópico em relação a  $\omega$ , ou simplesmente isotrópico, se  $\omega(u, v) = 0$  para todo  $u, v \in V$ . Pode-se mostrar que a dimensão de um subespaço isotrópico de  $R^{2n}$  é no máximo  $n$  ( veja [2] pg 223). Existem subespaços isotrópicos de dimensão exatamente  $n$ . Como exemplo, se a matriz da forma simplética numa determinada base é  $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  então, o subespaço gerado pelos  $n$  primeiros vetores da base é um subespaço isotrópico.

Usaremos a notação  $L_k(n)$  para denotar a Grassmanniana dos subespaços isotrópicos de dimensão  $k$  em  $R^{2n}$  para  $k \leq n$ .

Mostraremos que os flags minimais de  $Sp(n, R)$  associados aos conjuntos  $\Pi - \{\lambda_k - \lambda_{k+1}\}$  se  $k \leq n - 1$  e a  $\Pi - \{2\lambda_n\}$  se  $k = n$  são  $L_k(n)$ .

Antes disso, apresentamos uma descrição algébrica das grassmannianas dos subespaços isotrópicos. Uma maneira de representar algébricamente um subespaço de dimensão  $k$  é dado através de uma de suas bases. Tomando uma base  $\beta$  do  $R^{2n}$ , um conjunto de  $k$  vetores linearmente independentes pode ser representado por uma matriz  $2n \times k$  cujas colunas são as coordenadas dos vetores em relação a  $\beta$ . Desta maneira, um subespaço  $k$  dimensional é descrito por uma matriz  $2n \times k$  de posto  $k$ . Denotaremos por  $B_k(n)$  o conjunto das matrizes  $2n \times k$  de posto  $k$ . Dois elementos  $p$  e  $q \in B_k(n)$  definem o mesmo subespaço  $k$  dimensional se e só se as colunas de  $p$  são combinações lineares das colunas de  $q$  o que, por outro lado, é equivalente a existência de uma matriz  $a$   $k \times k$  inversível tal que  $p = qa$ . Observe que se  $\omega$  é uma forma simplética então existe uma base  $\beta$  de  $R^{2n}$  tal que a matriz da forma simplética  $\omega$  na base  $\beta$  é a matriz  $J$ . Assim, dois elementos  $p, q \in B_k(n)$  definem o mesmo subespaço isotrópico se e só se  $p = qa$  com

a matriz  $k \times k$  inversível e  $p^t J p = 0$ . Definamos uma relação de equivalência  $\sim$  em  $B_k(n)$  por  $p \sim q$  se e só se existe uma matriz  $a$ ,  $k \times k$  e inversível com  $p = qa$  e  $p^t J p = 0$ . O conjunto das classes de equivalência  $B_k(n)/\sim$  está em correspondência bijetiva com  $L_k(n)$ . Esta correspondência nos fornece uma descrição algébrica da Grassmanniana dos subespaços isotrópicos.

Mostremos que  $L_k(n)$  é um espaço homogêneo de  $Sp(n, R)$ . Se  $V$  é um subespaço isotrópico então  $gV$  também é um subespaço isotrópico para todo  $g \in Sp(n, R)$ . Isto se deve ao fato de que  $\omega(gu, gv) = \omega(u, v)$  para todos  $u, v \in V$  e  $g \in Sp(n, R)$ . Portanto  $L_k(n)$  é invariante pela ação de  $Sp(n, R)$ . Observemos que em termos da descrição dos subespaços isotrópicos  $k$  dimensionais como classes de equivalência em  $B_k(n)$  temos que esta ação é dada através da multiplicação de uma matriz  $2n \times 2n$  em  $Sp(n, R)$  por uma matriz  $2n \times k$ . Resta mostrar que  $Sp(n, R)$  é transitivo em  $L_k(n)$ . Analisaremos em primeiro lugar o caso em que  $k = n$ . Para isto, seja  $V$  um subespaço isotrópico de dimensão  $n$  e tomemos uma base ortonormal de  $V$ . Escrevendo as coordenadas dos elementos dessa base em colunas obtemos uma matriz  $p$  que é  $2n \times n$ . Como a base é ortonormal, temos que  $p^t p = 1$ . Desde que  $V$  é um subespaço isotrópico, temos que para dois elementos quaisquer  $u, v$  da base  $\omega(u, v) = 0$ , e isso significa que  $p^t J p = 0$ . Como  $p$  é uma matriz  $2n \times n$ , podemos escreve-la como

$$p = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

com  $a$  e  $b$  matrizes  $n \times n$ . As condições  $p^t p = 1$  e  $p^t J p = 0$  se traduzem, em termos de  $a$  e  $b$  como

$$a^t a + b^t b = 1 \quad a^t b = b^t a$$

e portanto

$$g = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in K .$$



Agora, seja  $V_0$  o subespaço gerado pelos primeiros  $n$  vetores da base canônica. É claro que  $V_0$  é isotrópico. Além disso, a forma da matriz  $g$  acima nos mostra que  $V = gV_0$ . Como  $V$  é arbitrário, concluímos que  $K$  é transitivo em  $L_n(n)$  e portanto  $Sp(n, R)$  também o é.

Analisemos agora o caso em que  $k < n$ . Seja  $V$  um subespaço isotrópico de dimensão  $k$ . Como acima, podemos construir uma matriz  $p$  de tamanho  $2n \times k$  cujas colunas são as coordenadas de uma base ortonormal de  $V$ . Seja  $V_0$  é o subespaço gerado pelos primeiros  $k$  vetores da base canônica.  $V_0$  é isotrópico e para mostrar que  $Sp(n, R)$  é transitivo, é suficiente encontrar  $g \in Sp(n, R)$  tal que  $gV_0 = V$ . Isso acontece se for possível estender a matriz  $p$  a uma matriz  $g$  de  $Sp(n, R)$ . Para conseguirmos isto, estendemos  $p$  a uma matriz  $\bar{p}$  que é  $2n \times n$  e está associada a uma subespaço isotrópico de dimensão  $n$ . Para isto, necessitamos da seguinte proposição.

**Proposição 21** *Seja  $V$  um subespaço isotrópico. Então existe um subespaço isotrópico  $\bar{V}$  de dimensão  $n$  tal que  $V \subset \bar{V}$ .*

**Demonstração:** Suponhamos que  $\dim V = k < n$ . Seja  $V^\perp = \{u \in R^{2n} : \omega(u, v) = 0 \text{ para todo } v \in V\}$ . Temos que um subespaço  $V$  é isotrópico se e só se  $V \subset V^\perp$ . Como  $\dim V^\perp = 2n - k > 2n - n = n$  temos que  $V$  está contido propriamente em  $V^\perp$ . Existe portanto  $v \notin V$  tal que  $\omega(u, v) = 0$  para todo  $u \in V$ . O subespaço gerado por  $V$  e  $v$  é isotrópico e tem dimensão maior que  $V$ . Continuando este processo obtemos um subespaço isotrópico de dimensão  $n$ .  $\square$

Da proposição acima temos que uma base ortonormal de  $V$  pode ser estendida a uma base ortonormal de  $\bar{V}$ . Isto nos diz que podemos estender  $p$  a uma matriz  $\bar{p}$  cujas colunas são as coordenadas de uma base de um subespaço isotrópico de dimensão  $n$ . Como mostramos acima, a matriz  $\bar{p}$  pode ser estendida a uma matriz de  $K$  e portanto o mesmo ocorre com  $p$  mostrando que  $K$  é transitivo em  $L_k(n)$  e daí que  $Sp(n, R)$  também é transitivo.

Seja  $V_0$  o subespaço gerado pelos primeiros  $k$  vetores da base canônica. A interseção de  $\mathfrak{sp}(n, R)$  com a subálgebra de  $\mathfrak{sl}(n, R)$  isotropia em  $V_0$  é exatamente  $\mathfrak{p}_{\Pi - \{\lambda_k - \lambda_{k+1}\}}$

se  $k \leq n - 1$  e  $\mathfrak{p}_{\Pi - \{2\lambda_n\}}$  se  $k = n$ . Assim a componente conexa da identidade de  $P_\Theta$ ,  $\Theta = \Sigma - \{\lambda_k - \lambda_{k+1}\}$  se  $k \leq n - 1$  e  $\Theta = \Sigma - \{2\lambda_n\}$  se  $k = n$ , coincide com a componente conexa da isotropia em  $V_0$ . Portanto, para mostrar que o subgrupo parabólico  $P_\Theta$  é essa isotropia basta mostrar que ele está contido no subgrupo de isotropia de  $V_0$ . Para mostrar que  $P_\Theta$  está contido na isotropia, é suficiente mostrar que cada componente conexa contém um elemento da isotropia. Sabemos que cada componente conexa de  $P_\Theta$  contém um elemento de  $M$ . Como os elementos de  $M$  são matrizes diagonais, tem-se que  $M$  está contido na isotropia de  $V_0$ . Portanto  $L_k(n)$  é o flag minimal de  $Sp(n, R)$  associado à  $\Theta = \Sigma - \{\lambda_k - \lambda_{k+1}\}$  se  $k \leq n - 1$  e à  $\Theta = \Sigma - \{2\lambda_n\}$  se  $k = n$ .

#### 4.1.5 A grassmanniana dos subespaços isotrópicos orientados

Consideraremos, também, o conjunto dos subespaços isotrópicos orientados de dimensão  $k \leq n$  em  $R^{2n}$  e que será denotado por  $L_k^+(n)$ . Sejam  $g \in Sp(n, R)$  e  $\xi \in L_k^+(n)$ . Obtemos um subespaço isotrópico orientado  $g\xi$ , definindo uma base orientada de  $g\xi$  como a imagem através de  $g$  de uma base positivamente orientada de  $\xi$ . Desta maneira temos que  $Sp(n, R)$  age transitivamente em  $L_k^+(n)$ . Temos também que os subespaços isotrópicos orientados podem ser representados por matrizes  $2n \times k$  de posto  $k$ . Neste caso, duas matrizes  $p, q \in B_k(n)$  definem o mesmo subespaço isotrópico orientado se e só se  $p = qa$  para alguma matriz  $a$  com  $\det(a) > 0$  e  $p^t J p = 0$ . Através desta representação, a ação de  $Sp(n, R)$  também é dada através de multiplicação de matrizes. Como variedade,  $L_k^+(n)$  é um recobrimento duplo de  $L_k(n)$  com aplicação de recobrimento  $\pi : L_k^+(n) \rightarrow L_k(n)$  dada pela eliminação das orientações nos subespaços isotrópicos. Claramente, este recobrimento é equivariante em relação a ação de  $Sp(n, R)$ , i.e.,  $\pi \circ g = g \circ \pi$  para todo  $g \in Sp(n, R)$ . Nosso interesse em  $L_k^+(n)$  é que ele pode ser imerso no produto exterior  $\Lambda^k(R^{2n})$  como um subconjunto da esfera neste espaço. Lembremos que  $\Lambda^k(R^{2n})$  é gerado pelos elementos da forma  $u_1 \wedge \dots \wedge u_k$ ,  $u_i \in R^{2n}$ . Uma base para  $\Lambda^k(R^{2n})$  é dada por  $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}$  para  $i_1 < \dots < i_k$ , onde  $\beta = \{e_1, \dots, e_k\}$  é uma

base de  $R^{2n}$ . Um produto interno em  $R^{2n}$  induz um produto interno em  $\Lambda^k(R^{2n})$  como

$$\langle u_1 \wedge \dots \wedge u_k, v_1 \wedge \dots \wedge v_k \rangle = \det(\langle u_i, v_j \rangle)_{i,j}$$

Portanto se  $\beta$  é ortonormal em  $R^{2n}$  temos que a base  $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}$  também será ortonormal. Observemos também que a matriz  $(\langle u_i, v_j \rangle)_{i,j}$  é dada por  $p^t q$  onde  $p$  e  $q$  são as matrizes  $2n \times k$  cujas colunas são as coordenadas, em relação a alguma base ortonormal de  $R^{2n}$ , dos  $u_i$ 's e  $v_j$ 's respectivamente.

Definamos um elemento decomponível como um elemento  $\xi \in \Lambda^k(R^{2n})$  que pode ser escrito como  $\xi = u_1 \wedge \dots \wedge u_k$  com  $u_i \in R^{2n}$ . Consideremos a aplicação de  $L_k^+(n)$  em  $\Lambda^k(R^{2n})$  que leva uma base ortonormal positivamente orientada  $p = \{u_1, \dots, u_k\}$  de um subespaço  $k$ -dimensional no elemento decomponível  $u_1 \wedge \dots \wedge u_k$ . Temos que  $L_k^+(n)$  está em correspondência bijetiva com os elementos decomponíveis de norma um em  $\Lambda^k(R^{2n})$  e que satisfazem  $\langle u_1 \wedge \dots \wedge u_k, v_1 \wedge \dots \wedge v_k \rangle = 0$  onde,  $u_1 \wedge \dots \wedge u_k$  é a imagem pela aplicação acima de  $p = \{u_1, \dots, u_k\}$  e  $v_1 \wedge \dots \wedge v_k$  é a imagem de  $\{v_1, \dots, v_k\}$  que está na classe de equivalência da matriz  $Jp$  em  $B_k(n)/\sim$ . Observemos que  $|u_1 \wedge \dots \wedge u_k| = 1$  segue da ortonormalidade de  $p$ .

Da mesma maneira,  $L_k(n)$  é vista como um subconjunto do espaço projetivo de  $\Lambda^k(R^{2n})$ , e através destas realizações, a aplicação de recobrimento  $\pi$  torna-se a identificação usual de antípodas na esfera. Temos que  $L_k^+(n)$  é um subconjunto próprio da esfera.

#### 4.1.6 O número de conjuntos controláveis

Como vimos anteriormente, o grupo de Weyl  $W$  possui  $2^n n!$  elementos.

Para  $\Theta = \Sigma - \{\lambda_k - \lambda_{k+1}\}$  com  $k \leq n - 1$  temos que a ordem de  $W_\Theta$  é  $k! \cdot 2^{n-k} (n - k)!$  Portanto a Proposição 9 nos diz que existem no máximo  $2^n n! / k! \cdot 2^{n-k} (n - k)! =$

$2^k \cdot n! / k!(n-k)! = 2^k \binom{n}{k}$  conjuntos controláveis efetivos em  $L_k(n)$  para a ação de qualquer semigrupo  $S \subset Sp(n, R)$  com pontos interiores.

Para  $\Theta = \Sigma - \{2\lambda_n\}$  temos que  $W_\Theta$  é o grupo de permutações em  $n$  elementos. Portanto a Proposição 9 nos diz que existem no máximo  $2^n$  conjuntos controláveis efetivos em  $L_n(n)$  para a ação de qualquer semigrupo  $S \subset Sp(n, R)$  com pontos interiores.

Passemos a analisar o número máximo de conjuntos controláveis efetivos em qualquer flag  $B_\Theta$ . Para isto, seja  $\Pi(i, j) = \{\lambda_r - \lambda_{r+1} : i \leq r \leq j \text{ e } j < n\}$ . Temos que qualquer  $\Theta \subset \Pi$  é uma das uniões disjuntas  $\Theta = \Pi(i_1, j_1) \cup \dots \cup \Pi(i_k, j_k) \cup \{2\lambda_n\}$  ou  $\Theta = \Pi(i_1, j_1) \cup \dots \cup \Pi(i_k, j_k)$  com  $j_l + 1 < i_{l+1}$  para todo  $l = 1, \dots, k-1$  e  $k \leq n-1$ . Se  $\Theta = \Pi(i_1, j_1) \cup \dots \cup \Pi(i_k, j_k)$  temos que  $W_\Theta$  é o produto direto dos grupos de permutações dos conjuntos  $\{i_l, \dots, j_l + 1\}$  e portanto  $|W_\Theta| = (j_1 - i_1 + 2)! \dots (j_k - i_k + 2)!$ . Assim o número de conjuntos controláveis efetivos em  $B_\Theta$  é no máximo a ordem de  $W/W_\Theta$  que é  $2^n n! / (j_1 - i_1 + 2)! \dots (j_k - i_k + 2)!$ . Se  $\Theta = \Pi(i_1, j_1) \cup \dots \cup \Pi(i_k, j_k) \cup \{2\lambda_n\}$  temos duas possibilidades a considerar:  $j_k = n-1$  ou  $j_k < n-1$ . Se  $j_k = n-1$  temos que  $|W_\Theta| = (j_1 - i_1 + 2)! \dots (j_{k-1} - i_{k-1} + 2)!(n - i_k)! 2^{n-i_k}$ . Logo existem no máximo  $2^{i_k} n! / (j_1 - i_1 + 2)! \dots (j_{k-1} - i_{k-1} + 2)!(n - i_k)!$  conjuntos controláveis efetivos em  $B_\Theta$ . Se  $j_k < n-1$  a ordem de  $W_\Theta$  será  $(j_1 - i_1 + 2)! \dots (j_k - i_k + 2)! \cdot 2$  e existem no máximo  $2^{n-1} n! / (j_1 - i_1 + 2)! \dots (j_k - i_k + 2)!$  conjuntos controláveis efetivos em  $B_\Theta$ .

#### 4.1.7 A variedade aberta e densa

Estaremos interessados na variedade aberta e densa que aparece na decomposição de Bruhat das grassmannianas de subespaços isotrópicos  $L_k(n)$ . A decomposição de Bruhat é relevante na análise da ação das matrizes diagonais nas Grassmannianas dos subespaços isotrópicos. No Capítulo 1, definimos elemento euclidiano regular. Um elemento  $h \in$

$Sp(n, R)$  é euclidiano regular se existe  $a \in Sp(n, R)$  satisfazendo

$$h = a(\text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}\})a^{-1}$$

e  $\lambda_1 > \dots > \lambda_n > 0$ . Seja  $N^-$  o grupo das matrizes da forma

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & (a^{-1})^t \end{pmatrix}$$

onde  $a$  é uma matriz  $n \times n$  triangular inferior com uns na diagonal e  $c$  é  $n \times n$  com  $a^{-1}c^t = c(a^{-1})^t$ . As variedades estáveis para  $h = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}\}$  com  $\lambda_1 > \dots > \lambda_n > 0$  são as  $N^-$ -órbitas. O número de órbitas é finito e existe somente uma órbita aberta e densa que é  $N^-\xi_0$  onde  $\xi_0$  é o subespaço isotrópico representado em  $B_k(n)/\sim$  por  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  onde  $1$  é a matriz identidade  $k \times k$ . Observe que se  $\beta = \{e_1, \dots, e_{2n}\}$  é a base canônica de  $R^{2n}$  então  $\xi_0$  é o subespaço gerado por  $e_1, \dots, e_k$ . Verificaremos a seguir que  $N^-\xi_0$  é de fato uma variedade estável para  $h = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}\}$  com  $\lambda_1 > \dots > \lambda_n > 0$ . Obviamente  $\xi_0$  é um ponto fixo para  $h$ . Temos também que se  $n \in N^-$  então  $h^m n \xi_0 = h^m n h^{-m} \xi_0 \rightarrow \xi_0$  quando  $m \rightarrow \infty$  pois  $(\lambda_j/\lambda_i)^m \rightarrow 0$  se  $i < j \leq n$ . Assim  $\xi_0$  é um atrator para  $h$ . Análogamente, o subespaço gerado por  $e_{n+1}, \dots, e_{n+k}$  e que denotaremos por  $\xi_0^-$  é um repeleute para  $h$ .

Em termos da representação dos subespaços isotrópicos como matrizes  $2n \times k$  temos que a órbita aberta  $N^-\xi_0$  corresponde às matrizes da forma

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$$

onde  $1$  é a matriz identidade  $k \times k$ ,  $x$  é arbitrária  $(2n - k) \times k$ . De fato, em blocos

$$a = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \delta & \rho \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} \gamma & \zeta \\ \nu & \tau \end{pmatrix}$$

com  $\alpha$  inversível  $k \times k$  e  $\gamma$  matriz  $k \times k$ . Assim  $N^-\xi_0$  é dada por

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & (a^{-1})^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \delta \\ \gamma \\ \nu \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ \delta\alpha^{-1} \\ \gamma\alpha^{-1} \\ \nu\alpha^{-1} \end{pmatrix}$$

Observemos que  $N^-\xi_0$  é difeomorfa a um espaço euclidiano.

Em termos da representação de  $L_k^+(n)$  em  $\bigwedge^k(\mathbb{R}^{2n})$  temos a seguinte interpretação da órbita aberta.

**Proposição 22** *Existe  $\eta \in L_k^+(n)$  tal que a  $N^-$ -órbita aberta em  $L_k(n)$  é dada por*

$$\{\xi \in \bigwedge^k(\mathbb{R}^{2n}) : \langle \eta, \xi \rangle > 0\}$$

Em  $L_k^+(n)$  existem duas  $N^-$ -órbitas abertas que são os semi-espaços dados por  $\langle \eta, \xi \rangle > 0$  e  $\langle \eta, \xi \rangle < 0$ .

**Demonstração:** Como vimos acima um elemento da órbita aberta é representado pela matriz  $2n \times k$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$$

Tomando o produto exterior de suas colunas, obtemos um vetor decomponível que denotaremos por  $\xi$ . Seja  $\eta = e_1 \wedge \dots \wedge e_k \in L_k^+(n)$ . Temos então que  $\langle \eta, \xi \rangle = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} =$

1. Assim a órbita aberta está contida em

$$\{\xi \in \bigwedge^k(\mathbb{R}^{2n}) : \langle \eta, \xi \rangle > 0\}$$

Reciprocamente, dado um elemento decomponível  $\xi = u_1 \wedge \dots \wedge u_k \in L_k(n)$  satisfazendo

$\langle \eta, \xi \rangle > 0$ , a matriz  $p$  cujas colunas são as coordenadas dos  $u_i$ 's pode ser escrita como

$$p = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

com  $a$   $k \times k$  e  $p^t J p = 0$ . A condição  $\langle \eta, \xi \rangle > 0$  implica que  $\det(a) > 0$ . Portanto

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ ba^{-1} \end{pmatrix}$$

e  $\xi$  pertence a órbita aberta.

Como  $\pi : L_k^+(n) \rightarrow L_k(n)$  é dada através da identificação de antípodas temos que em  $L_k^+(n)$  existem duas  $N^-$ -órbitas abertas que são os semi-espacos dados por  $\langle \eta, \xi \rangle > 0$  e  $\langle \eta, \xi \rangle < 0$ .  $\square$

## 4.2 Controlabilidade de um sistema de controle bilinear

Estudaremos a controlabilidade de sistemas de controle bilineares da forma

$$\dot{x} = (A + uB)x$$

onde  $x \in \mathbb{R}^{2n}$ ,  $A$  e  $B$  são matrizes  $2n \times 2n$  na álgebra de Lie  $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$  do grupo simplético  $Sp(n, \mathbb{R})$  e  $u$  assume qualquer valor real. Por controlabilidade queremos dizer a atingibilidade, a partir de um estado inicial  $x_0 \neq 0$ , de qualquer estado final  $x \neq 0$  através de órbitas (soluções) do sistema. Em [3, Teorema 2] R. El Assoudi e J.P. Gauthier deram condições sobre as matrizes  $A$  e  $B$  para que o sistema seja controlável. No nosso caso estas condições se traduzem em

**C-1**  $B = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n, -\lambda_1, \dots, -\lambda_n\}$  com  $\lambda_1 > \dots > \lambda_n > 0$ .

**C-2** Se  $A$  se escreve como  $A = (a_{i,j})$ , então  $a_{1,n+1} \cdot a_{n+1,1} < 0$

**C-3** A álgebra de Lie gerada por  $A$  e  $B$  é  $\mathfrak{sp}(n, R)$ .

Nosso interesse aqui é o de dar uma demonstração tecnicamente mais simples do resultado apresentado em [3]. Esta demonstração se utiliza da mesma técnica da demonstração dada em [27, 31] que trata do caso em que  $A, B \in \mathfrak{sl}(n, R)$ .

Seja  $S$  o semigrupo de  $Sp(n, R)$  gerado pelo sistema de controle, i. e.,

$$S = \{e^{t_1(A+u_1B)} \dots e^{t_m(A+u_mB)} : u_i \in R, t_i > 0, m \geq 1\}$$

Naturalmente, o sistema é controlável em  $R^{2n} - \{0\}$  se e só se  $S$  é transitivo em  $R^{2n} - \{0\}$ .

A condição **C-3** implica que  $S$  tem interior não vazio em  $Sp(n, R)$ .

Já que o grupo simplético é transitivo no espaço projetivo o Corolário 1 nos mostra que  $S$  é transitivo em  $R^{2n} - \{0\}$  se e só se  $S = Sp(n, R)$ . Logo para provar a controlabilidade do sistema é necessário mostrar que  $S$  é o grupo todo.

Suponhamos que  $S$  seja um subsemigrupo maximal de  $Sp(n, R)$  e seja  $C^k$  o único conjunto controlável invariante para  $S$  em  $L_k(n)$ . As Proposições 7 e 11 nos garantem que existem  $h$  euclidiano regular,  $h \in \text{int}(S)$  e  $k = \{1, \dots, n-1\}$  tal que  $C^k$  está contido na variedade estável de  $h$  que corresponde à órbita aberta e densa da decomposição de Bruhat de  $L_k(n)$ .

**Definição 4** Diremos que um semigrupo maximal  $S$  é do tipo  $k$  se  $S$  e  $k$  são como acima. Um semigrupo próprio de  $Sp(n, R)$  é dito do tipo  $k$  se estiver contido num semigrupo maximal do tipo  $k$ .

Assim todo semigrupo próprio de  $Sp(n, R)$  é do tipo  $k$  e para mostrar que  $S = Sp(n, R)$  basta mostrar que  $S$  não é do tipo  $k$  para nenhum  $k = \{1, \dots, n-1\}$ .

Analisaremos agora, os conjuntos controláveis invariantes em  $L_k^+(n)$ . Estes conjuntos existem pois  $L_k^+(n)$  é compacta. Como a projeção  $\pi : L_k^+(n) \rightarrow L_k(n)$  é equivariante temos pela Proposição 15 que estes conjuntos controláveis invariantes estão contidos em



$\pi^{-1}(C^k)$  e se projetam em  $C^k$ . Como  $\pi$  é uma aplicação de recobrimento duplo existem um ou dois conjuntos controláveis invariantes em  $L_k^+(n)$ .

Escolhamos  $k$  tal que  $S$  é do tipo  $k$ . Então  $C^k$  está contido em alguma variedade estável aberta de  $L_k^+(n)$ . Assumiremos na discussão abaixo que os conjuntos controláveis para  $S$  em  $L_k(n)$  e em  $L_k^+(n)$  são conexos. Defina  $C = \pi^{-1}(C^k)$ . Pela Proposição 22 existe  $\eta \in \Lambda^k(R^{2n})$  tal que  $\langle \eta, \xi \rangle \neq 0$  para todo  $\xi \in C$ . Como  $C$  é compacto ele se quebra em duas componentes conexas que denotaremos por  $C^+$  e  $C^- = -C^+$  onde  $C^+ = \{\xi \in C : \langle \eta, \xi \rangle > 0\}$  e  $C^- = \{\xi \in C : \langle \eta, \xi \rangle < 0\}$ . Existem duas possibilidades. Ou  $C^+$  é um conjunto controlável invariante, o mesmo ocorrendo com  $C^-$  ou o próprio  $C$  é um conjunto controlável invariante. Como estamos admitindo que os conjuntos controláveis para  $S$  em  $L_k^+(n)$  são conexos temos que somente a primeira possibilidade ocorre. Observe que as expressões acima para  $C^\pm$  implicam que  $\xi$  e  $-\xi$  não podem estar simultaneamente no mesmo conjunto controlável invariante para  $S$  em  $L_k^+(n)$ .

Temos então a proposição que nos dá condições sobre a controlabilidade dos sistemas bilineares

**Proposição 23** *Suponha que C-1, C-2 e C-3 são satisfeitas. Então  $S = Sp(n, R)$  e o sistema bilinear é controlável.*

**Demonstração:** Consideremos o cone subtangente

$$L(S) = \{X \in \mathfrak{sp}(n, R) : \exp(tX) \in fe(S), \text{ para todo } t \geq 0\}$$

Temos que  $L(S)$  é um cone convexo que contém  $A, \pm B$ . Mostremos que

$$\begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix} \in L(S)$$

onde  $0$  é a matriz nula  $n \times n$  e  $E$  é a matriz  $n \times n$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

De fato, se  $B = \text{diag}\{\mu_1, \dots, \mu_{2n}\}$  onde  $\mu_i = \lambda_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  e  $\mu_j = -\lambda_{j-n}$ ,  $j = n+1, \dots, 2n$  temos que  $e^{tB} A e^{-tB} = (e^{t(\mu_i - \mu_j)} a_{i,j})_{i,j} \in L(S)$  pois  $e^{tB} e^{sA} e^{-tB} = \exp(s \Lambda d(e^{tB}) \Lambda)$ . Daí

$$\alpha(t) = e^{-(\mu_1 - \mu_{n+1})t} e^{tB} A e^{-tB} = (e^{t(-(\mu_1 - \mu_{n+1}) + (\mu_i - \mu_j))} a_{i,j})_{i,j}$$

e

$$\beta(t) = e^{(\mu_1 - \mu_{n+1})t} e^{tB} A e^{-tB} = (e^{t((\mu_1 - \mu_{n+1}) + (\mu_i - \mu_j))} a_{i,j})_{i,j}$$

são curvas em  $L(S)$  pois o mesmo é um cone convexo. Mas  $\mu_1 - \mu_{n+1} = 2\lambda_1 > \mu_i - \mu_j$  exceto quando  $i = 1, j = n+1$ . Assim

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(t) = \begin{pmatrix} 0 & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in L(S)$$

onde  $0$  é a matriz nula  $n \times n$  e  $A$  é a matriz  $n \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,n+1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Análogamente

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \beta(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix} \in L(S)$$

onde  $0$  é a matriz nula  $n \times n$  e  $B$  é a matriz  $n \times n$

$$B = \begin{pmatrix} a_{n+1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Supondo que  $a_{t,n+1} > 0$  tem-se que  $a_{n+1,t} < 0$ . Logo

$$\begin{pmatrix} 0 & E \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in L(S) \text{ e } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -E & 0 \end{pmatrix} \in L(S)$$

e como  $L(S)$  é um cone concluímos que

$$D = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix} \in L(S)$$

Mas

$$\exp(tD) = \begin{pmatrix} \cos(t) & 0 & \cdots & \text{sen}(t) & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ -\text{sen}(t) & & & \cos(t) & & \\ 0 & & & & 1 & \\ \vdots & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

e portanto  $\exp(\pi D) = \text{diag}\{-1, 1, 1, \dots, -1, 1, 1, \dots\} \in fe(S)$ , aqui o último  $-1$  está na posição  $n+1$ . Como vimos anteriormente  $e_1 \wedge \dots \wedge e_k$  é um atrator de  $\exp(\pi D)$  e portanto pela Proposição 5 pertence a um conjunto controlável invariante em  $L_k^+(n)$ . Mas

$$\exp(\pi D)e_1 \wedge \dots \wedge e_k = -e_1 \wedge \dots \wedge e_k$$

e concluímos que  $-e_1 \wedge \dots \wedge e_k$  também pertence a este conjunto controlável invariante.

Como  $S$  é conexo os conjuntos controláveis invariantes para  $S$  em  $L_k(n)$  e em  $L_k^+(n)$  são conexos. Logo, como vimos acima,  $S$  não é do tipo  $k$  para nenhum  $k$ , o que implica na controlabilidade do sistema bilinear.  $\square$

### 4.3 Controlabilidade global de sistemas de controle a tempo discreto

Estudamos a seguir, controlabilidade global de sistemas de controle a tempo discreto da forma

$$x_{m+1} = e^{A+uB} x_m \quad m \geq 0$$

onde  $x_m \in R^{2n}$ ,  $A$  e  $B$  são matrizes na álgebra de Lie do grupo simplético  $Sp(n, R)$  e  $u$  assume qualquer valor real. Estes sistemas são obtidos discretizando-se sistemas de controle bilineares à tempo contínuo.

Para o estudo dos sistemas de controle à tempo discreto damos como referência o artigo [19] de B. Jakubczyk e E. D. Sontag.

Por controlabilidade global queremos dizer a atingibilidade, a partir de um estado inicial  $x_0 \neq 0$ , de qualquer estado final  $x \neq 0$  através de iterações do sistema. Estaremos interessados em dar condições sobre as matrizes  $A$  e  $B$  de maneira que o sistema se torne globalmente controlável.

Seja  $S$  o semigrupo de  $Sp(n, R)$  gerado pelo sistema de controle, i. e.,

$$S = \{e^{A+u_1 B} \dots e^{A+u_m B} : u_i \in R, m \geq 1\}$$

Naturalmente, o sistema é controlável em  $R^{2n} - \{0\}$  se e só se  $S$  é transitivo em  $R^{2n} - \{0\}$ .

Suponhamos que  $S$  tenha interior não vazio em  $Sp(n, R)$ .

Pelo Corolário 1 temos que  $S$  é transitivo em  $R^{2n} - \{0\}$  se e só se  $S = Sp(n, R)$ .

Logo, para provar a controlabilidade do sistema é necessário mostrar que  $S$  é o grupo todo. Vimos na seção anterior que  $S = Sp(n, R)$  caso  $S$  não seja do tipo  $k$  para nenhum  $k = 1, \dots, n - 1$ . Suponhamos que os conjuntos controláveis invariantes para  $S$  em  $L_k(n)$  e em  $L_k^+(n)$  são conexos. Então, como na seção anterior, temos que  $S$  não é do tipo  $k$  para nenhum  $k = 1, \dots, n - 1$  caso exista  $\xi \in L_k^+(n)$  tal que  $\pm\xi$  estejam no mesmo conjunto controlável invariante. Veremos que os conjuntos controláveis invariantes para semigrupos gerados por um sistema de controle à tempo discreto em  $L_k(n)$  e  $L_k^+(n)$  são conexos.

Observemos que  $H \in \mathfrak{sp}(n, R)$  é euclidiano regular se existe  $a \in Sp(n, R)$  satisfazendo

$$H = a(\text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n, -\lambda_1, \dots, -\lambda_n\})a^{-1}$$

com  $\lambda_1 > \dots > \lambda_n > 0$ .

Agora, queremos dar condições sobre as matrizes  $A$  e  $B$  para que o sistema de controle a tempo discreto seja controlável. Estamos procurando condições semelhantes às condições C da Proposição 23. Para isto, seja  $B = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n, -\lambda_1, \dots, -\lambda_n\}$  com  $\lambda_1 > \dots > \lambda_n > 0$ . Sabemos que o conjunto dos elementos euclidianos regulares é aberto em  $\mathfrak{sp}(n, R)$  e portanto  $(1/u)A + B$  também é euclidiano regular se  $u$  é suficientemente grande. Como  $\exp(A + uB) = \exp u(1/uA + B)$  temos bastante elementos euclidianos regulares em  $S$  cujos atratores estão nos conjuntos controláveis invariantes nas Grassmanninas dos subespaços isotrópicos.

A seguir apresentaremos uma parametrização “boa” dos elementos euclidianos regulares  $1/uA + B$ . Seja  $\mathfrak{a}$  o conjunto das matrizes diagonais em  $\mathfrak{sp}(n, R)$ , e definamos a aplicação  $\phi : Sp(n, R) \times \mathfrak{a} \longrightarrow \mathfrak{sp}(n, R)$  por

$$\phi(g, H) = gHg^{-1}$$

Temos que  $\phi(1, B) = B$  e a diferencial de  $\phi$  em  $(1, B)$  calculada em  $(X, Y)$  é dada por

$$(d\phi)_{(1, B)} = \frac{d}{dt} e^{tX} (B + tY) e^{-tX} \Big|_{t=0} = [X, B] + Y$$

Como  $B = \text{diag}\{\mu_1, \dots, \mu_{2n}\}$  onde  $\mu_i = \lambda_i, i = 1, \dots, n$  e  $\mu_j = -\lambda_{j-n}, j = n + 1, \dots, 2n$  temos que sua adjunta é dada por  $[X, B] = ((\mu_j - \mu_i)x_{i,j})$  onde  $X = (x_{i,j})$ . Temos então que  $\text{ad}(B)$  é uma aplicação sobrejetiva no subespaço das matrizes  $2n \times 2n$  com zeros na diagonal principal. Desde que  $Y$  é arbitrária segue-se que  $(d\phi)_{(1, B)}$  é sobrejetora. Portanto, pelo teorema da função implícita, qualquer curva diferenciável partindo de  $B$  é localmente a imagem através de  $\phi$  de uma curva diferenciável. Em particular, existe, para  $\epsilon$  suficientemente pequeno, uma curva diferenciável  $\epsilon \rightarrow (g_\epsilon, H_\epsilon)$  tal que

$$\epsilon A + B = g_\epsilon H_\epsilon g_\epsilon^{-1}$$

Por continuidade  $H_\epsilon = \text{diag}\{\lambda_{1\epsilon}, \dots, \lambda_{n\epsilon}, \lambda_{1\epsilon}^{-1}, \dots, \lambda_{n\epsilon}^{-1}\}$  com  $\lambda_{1\epsilon} > \dots > \lambda_{n\epsilon} > 0$ . A curva  $(g_\epsilon, H_\epsilon)$  não é única já que  $\phi$  não é injetora. Entretanto, sua derivada em zero  $(\dot{g}_0, \dot{H}_0)$  satisfaz

$$[\dot{g}_0, B] + \dot{H}_0 = A$$

e como  $\dot{H}_0$  é diagonal e  $B = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n, -\lambda_1, \dots, -\lambda_n\}$ , temos, para  $i \neq j$

$$(\dot{g}_0)_{i,j} = \frac{a_{i,j}}{\mu_j - \mu_i}$$

onde  $A = (a_{i,j})$ . Assim estas entradas de  $\dot{g}_0$  são determinadas a partir de  $A$  e  $B$ . Denotaremos por  $A^B$  a matriz que é zero na diagonal principal e cujas entradas  $i, j$ ,  $i \neq j$  são dadas por  $a_{i,j}/(\mu_j - \mu_i)$ . A condição sobre controlabilidade do sistema de controle à tempo discreto será dada em termos da matriz  $A^B$ .

Tomemos, agora, uma matriz arbitrária  $X = (x_{i,j})$  que é  $2n \times 2n$  e consideremos o

menor  $k \times k$  dado por

$$\det \begin{pmatrix} x_{1,n+1} & \cdots & x_{1,n+k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{k,n+1} & \cdots & x_{k,n+k} \end{pmatrix}$$

Sabemos que este menor é dado no formalismo dos produtos exteriores por

$$\langle X e_{n+1} \wedge \dots \wedge X e_{n+k}, e_1 \wedge \dots \wedge e_k \rangle$$

Denotaremos este menor por  $a_k^+(X)$ . Temos também o menor  $k \times k$

$$a_k^-(X) = \langle X e_1 \wedge \dots \wedge X e_k, e_{n+1} \wedge \dots \wedge e_{n+k} \rangle$$

Teremos então o seguinte conjunto de condições

$$(-1)^{k+1} a_k^+(A^B) a_k^-(A^B) > 0$$

Estas condições serão chamadas condições  $C_k$ .

Observemos que  $C_1$  é a condição **C-2** da Proposição 23 .

Vimos anteriormente que se  $u$  é suficientemente grande então  $1/uA + B$  é euclidiano regular na álgebra e assim  $\exp(u(1/uA + B)) = \exp(A + uB)$  é euclidiano regular no grupo. Seja  $(g_\epsilon, H_\epsilon)$  tal que  $g_\epsilon H_\epsilon g_\epsilon^{-1} = \epsilon A + B$ . Da construção desta curva feita acima através do teorema da função implícita podemos assumir que  $g_0 = 1, H_0 = B, \dot{g}_0 = A^B$  e  $\dot{H}_0$  é a parte diagonal de  $A$ . Com estas escolhas, definamos  $\gamma_u = g_{1/u}$  se  $|u|$  é suficientemente grande. Temos então o seguinte lema.

**Lema 1** *Sejam  $\xi^+ = e_1 \wedge \dots \wedge e_k$  e  $\xi^- = e_{n+1} \wedge \dots \wedge e_{n+k}$  em  $L_k^+(n)$  e suponha que as condições  $C_k$  são satisfeitas. Então existem  $u_0 > 0$  e  $u_1 < 0$  suficientemente grandes e tais que  $\langle \gamma_{u_0} \xi^+, \xi^- \rangle > 0$  e  $\langle \gamma_{u_1} \xi^-, \xi^+ \rangle < 0$ .*

**Demonstração:** Suponhamos que  $a_k^-(A^B) > 0$  e assim  $(-1)^{k+1} a_k^+(A^B) > 0$ . Seja  $g_\epsilon$

como acima e tomemos a expansão de Taylor de seu Logaritimo

$$g_\epsilon = \exp(\epsilon Y_1 + \frac{\epsilon^2}{2} Y_2 + \dots)$$

Desde que  $\dot{g}_0 = A^B$  e a diferencial da aplicação exponencial na identidade é a identidade, temos que  $Y_1 = A^B$ . Por outro lado, temos para qualquer matriz  $Z$  que  $\langle Z^j \xi^+, \xi^- \rangle = 0$  se  $j < k$ . De fato, os subconjuntos  $\{1, \dots, k\}$  e  $\{d+1, \dots, d+k\}$  são disjuntos e

$$Z(e_1 \wedge \dots \wedge e_k) = Ze_1 \wedge \dots \wedge e_k + \dots + e_1 \wedge \dots \wedge Ze_k$$

assim

$$\begin{aligned} Z^2(e_1 \wedge \dots \wedge e_k) &= (Z^2 e_1 \wedge \dots \wedge e_k + Ze_1 \wedge Ze_2 \wedge \dots \wedge e_k + \dots \\ &\dots + Ze_1 \wedge \dots \wedge Ze_k) + \dots + (Ze_1 \wedge \dots \wedge Ze_k + \dots + e_1 \wedge \dots \wedge Z^2 e_k) \end{aligned}$$

e iterando sucessivamente obtemos

$$\begin{aligned} Z^k(e_1 \wedge \dots \wedge e_k) &= (Z^k e_1 \wedge \dots \wedge e_k + \dots + Z^{k-1} e_1 \wedge \dots \wedge Ze_k) + \dots \\ &\dots + (Ze_1 \wedge \dots \wedge Z^{k-1} e_k + \dots + e_1 \wedge \dots \wedge Z^k e_k) \end{aligned}$$

Temos então que

$$Z^k(e_1 \wedge \dots \wedge e_k) = k!(Ze_1 \wedge Ze_2 \wedge \dots \wedge Ze_k) + (\text{termos que envolvem algum } e_i \text{ com } i \leq k)$$

Para  $j < k$  toda componente de  $Z^j(e_1 \wedge \dots \wedge e_k)$  envolve algum  $e_i$  com  $i \leq k$  e portanto o produto interno desta componente por  $\xi^-$  é o determinante de uma matriz que possui a linha  $i$  identicamente nula mostrando que  $\langle Z^j \xi^+, \xi^- \rangle = 0$  se  $j < k$  e  $\langle Z^k \xi^+, \xi^- \rangle = k! \langle Ze_1 \wedge Ze_2 \wedge \dots \wedge Ze_k, \xi^- \rangle$ .

Expandindo a exponencial que aparece na expressão acima para  $g_\epsilon$  obtemos que

$$g_\epsilon = (\text{termos de ordem } < k \text{ em } Y_1 \text{ e } Y_2) + \frac{\epsilon^k}{k!} Y_1^k + (\text{termos de ordem } > k \text{ em } \epsilon)$$



assim as primeiras  $k - 1$  derivadas em zero de

$$\epsilon \longrightarrow \langle g_\epsilon \xi^+, \xi^- \rangle$$

são nulas e a  $k$ -ésima derivada em relação a  $\epsilon$  da aplicação acima é dada por

$$\langle Y_1^k \xi^+, \xi^- \rangle = k! \langle Y_1 e_1 \wedge \dots \wedge Y_1 e_k, \xi^- \rangle$$

que é exatamente  $k! a_k^-(A^B)$  já que  $Y_1 = A^B$ . Como  $a_k^-(A^B) > 0$  existe  $\epsilon > 0$  com  $\langle g_\epsilon \xi^+, \xi^- \rangle > 0$  e obtemos o  $u_0 > 0$  desejado. Da mesma maneira, calculando as derivadas de  $\langle g_\epsilon \xi^-, \xi^+ \rangle$  obtemos que a primeira não nula é

$$k! \langle Y_1 e_{d+1} \wedge \dots \wedge Y_1 e_{d+k}, \xi^+ \rangle = k! a_k^+(A^B)$$

Portanto a condição  $C_k$  nos garante a existência de  $u_1 < 0$  suficientemente grande tal que  $\langle \gamma_{u_1} \xi^-, \xi^+ \rangle < 0$  se  $a_k^+(A^B) > 0$  para  $k$  ímpar e  $a_k^+(A^B) < 0$  para  $k$  par.  $\square$

Podemos então enunciar o resultado sobre controlabilidade global para sistemas de controle à tempo discreto.

**Proposição 24** *Consideremos o sistema de controle à tempo discreto e suponhamos que o semigrupo  $S$  gerado pelo mesmo tenha interior não vazio em  $Sp(n, R)$ . Suponhamos que  $B = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n, -\lambda_1, \dots, -\lambda_n\}$  com  $\lambda_1 > \dots > \lambda_n > 0$  e que as condições  $C_k$  são satisfeitas para  $1 \leq k \leq n - 1$ . Então  $S = Sp(n, R)$  e o sistema é globalmente controlável.*

**Demonstração:** Mostraremos que  $S$  não é do tipo  $k$  para  $k = 1, \dots, n - 1$ . Vimos anteriormente que se  $u > 0$  é suficientemente grande então  $h = \exp(A + uB)$  é euclidiano regular no grupo. Como  $h$  é euclidiano regular seu atrator, que denotaremos por  $\xi_u$ , pertence a  $C^k$  o conjunto controlável invariante em  $L_k(n)$ . Aplicando a proposição 4 temos que  $C^k$  é conexo. Levantemos  $C^k$  a  $L_k^+(n)$ . Como  $h = a(\text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}\})a^{-1}$  o atrator  $\xi_u$  se levanta em autovetores de  $h$ . Estes autovetores são pontos fixos para a ação de  $h$  em  $L_k^+(n)$  pois na ação de  $h$  em  $L_k^+(n)$  só interessam os autovalores positivos

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Aplicando novamente a Proposição 4 temos que os conjuntos controláveis invariantes para  $S$  em  $L_k^+(n)$  também são conexos.

Seja  $\xi_0$  o subespaço gerado pelos  $k$  primeiros vetores básicos  $\{e_1, \dots, e_k\}$ . Afirmamos que  $\xi_0 \in C^k$ . Desde que

$$\exp(\Lambda + uB) = \gamma_u \exp uH_{1/u} \gamma_u^{-1}$$

temos que  $\xi_u = \gamma_u \xi_0$  já que  $\xi_0$  é o atrator de  $\exp H_{1/u}$ . Como  $C^k$  é fechado e  $\gamma_u \rightarrow 1$  quando  $u \rightarrow +\infty$  temos o desejado. Como consequência temos que  $\xi^+ = e_1 \wedge \dots \wedge e_k$  pertence a algum conjunto controlável invariante em  $L_k^+(n)$ . Denotemos por  $C$  este conjunto controlável invariante. Mostraremos que  $-\xi^+$  também pertence a  $C$  de onde concluímos que  $S$  não é do tipo  $k$ . As condições  $C_k$  são necessárias nessa parte da demonstração. Mostraremos inicialmente que  $\xi^- = e_{n+1} \wedge \dots \wedge e_{n+k}$  também pertence a  $C$ . Temos que o raio definido por  $\gamma_{u_0} \xi^+$  é um atrator para  $\exp(\Lambda + u_0 B)$  em  $L_k^+(n)$  e portanto pertence a um conjunto controlável invariante que por continuidade é  $C$ . Observemos que se tomarmos  $u < 0$  suficientemente grande então os atratores de  $\exp(\Lambda + uB)$  em  $L_k^+(n)$  são as imagens através de  $\gamma_u$  dos repelentes de  $\exp(B)$ . Isto é verdade pois  $\exp(\Lambda + uB) = \gamma_u \exp(-u(-H_{1/u})) \gamma_u^{-1}$  e os atratores de  $\exp(-H_{1/u})$  coincidem com os repelentes de  $\exp B$ . Assim, como  $\xi^-$  é um repelente de  $\exp B$  temos que  $\gamma_u \xi^-$  é um atrator para  $\exp(\Lambda + uB)$  se  $u < 0$  é suficientemente grande. Como as condições  $C_k$  são satisfeitas o Lema I nos garante a existência de  $u_0 > 0$  suficientemente grande com  $\langle \gamma_{u_0} \xi^+, \xi^- \rangle > 0$ . Por outro lado, desde que  $\gamma_u \rightarrow 1$  quando  $u \rightarrow -\infty$  a desigualdade  $\langle \gamma_{u_0} \xi^+, \xi^- \rangle > 0$  implica que  $\langle \gamma_{u_0} \xi^+, \gamma_u \xi^- \rangle > 0$  para  $u < 0$  suficientemente grande e daí  $\gamma_{u_0} \xi^+$  está na variedade estável aberta e densa de  $\exp(\Lambda + uB)$ . Isto implica que  $\exp(\Lambda + uB)^m \gamma_{u_0} \xi^+$  converge a  $\gamma_u \xi^-$  quando  $m \rightarrow \infty$  e portanto  $\gamma_u \xi^- \in C$ . Fazendo  $u \rightarrow -\infty$  temos que  $\xi^-$  também pertence a  $C$ .

Podemos usar o mesmo procedimento para mostrar que  $-\xi^+ \in C$ . Pelo Lema I existe  $u_1 < 0$  suficientemente grande tal que  $\langle \gamma_{u_1} \xi^-, \xi^+ \rangle < 0$ . Como  $\xi^-$  é um repelente de  $\exp B$  temos que  $\gamma_{u_1} \xi^-$  é o atrator de  $\exp(\Lambda + u_1 B)$  pois  $u_1 < 0$  é suficientemente grande. Por-

tanto  $\gamma_u \xi^- \in C$ . Tomando iterações de  $\exp(A + uB)$  para  $u > 0$  suficientemente grande obtemos que  $\exp m(A + uB)\gamma_u \xi^- \rightarrow -\xi^+$ . Assim  $-\xi^+ \in C$  concluindo a demonstração do teorema.  $\square$

# Capítulo 5

## Conjuntos Controláveis por Cadeias.

Neste Capítulo discutiremos o conceito de Conjuntos Controláveis por Cadeias para ações de subsemigrupos de Grupos de Lie em Espaços Homogêneos.

A noção de conjuntos controláveis por cadeias para semigrupos de controle foi amplamente estudada por F.Colonius e W. Kliemann (veja [8, 9, 10, 11, 12]).

Pretendemos aqui estender esta noção para semigrupos que não provém necessariamente de um Sistema de Controle.

Além disso, apresentamos alguns resultados preliminares sobre esses conjuntos.

### 5.1 Definição de conjuntos controláveis por cadeias.

Inicialmente definiremos conjuntos controláveis por cadeias.

Para isto, seja  $G$  um Grupo de Lie e  $S \subset G$  um subsemigrupo com  $\text{int}S \neq \emptyset$ . Apesar desta condição não ser sempre necessária, os principais resultados deste trabalho necessitam de que  $S$  tenha pontos interiores em  $G$ . Seja  $H$  um subgrupo fechado de  $G$  de tal forma que  $G/H$  seja um espaço homogêneo. Então  $S$  age em  $G/H$  como um semigrupo de difeomorfismos. Fixemos uma distância  $d$  em  $G/H$ . Podemos definir cadeias em  $G/H$

em relação a uma família  $\mathcal{F}$  de subconjuntos de  $S$ .

**Definição 5** *Seja  $\mathcal{F}$  uma família de subconjuntos de  $S$ . Tomemos  $x, y \in G/H$ ,  $\epsilon > 0$  e  $A \in \mathcal{F}$ . Uma  $(S, \epsilon, A)$ -cadeia de  $x$  para  $y$  consiste de  $x_0 = x, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = y$  em  $G/H$  e  $g_0, \dots, g_{n-1}$  em  $A$  tal que  $d(g_j x_j, x_{j+1}) < \epsilon$  para  $j = 0, \dots, n-1$ .*

Um conjunto controlável por  $\mathcal{F}$ -cadeias é um subconjunto cujos pontos podem ser unidos por  $(S, \epsilon, A)$ -cadeias. Precisamente temos,

**Definição 6** *Um conjunto controlável por  $\mathcal{F}$ -cadeias para  $S$  em  $G/H$  é um subconjunto  $E \subset G/H$  que satisfaz*

1.  $\text{int}E \neq \emptyset$ ,
2.  $\forall x, y \in E$ , existe uma  $(S, \epsilon, A)$ -cadeia de  $x$  para  $y$ , para todo  $\epsilon > 0$  e  $A \in \mathcal{F}$
3.  $E$  é maximal satisfazendo estas propriedades.

O semigrupo  $S$  é dito transitivo por  $\mathcal{F}$ -cadeias se  $G/H$  é um conjunto controlável por  $\mathcal{F}$ -cadeias, isto é, se qualquer dois pontos de  $G/H$  podem ser unidos por  $(S, \epsilon, A)$ -cadeias para quaisquer  $\epsilon > 0$  e  $A \in \mathcal{F}$ .

Apesar da definição acima mencionar explicitamente uma distância em  $G/H$ , a noção de conjunto controlável por  $\mathcal{F}$ -cadeias não se altera se consideramos uma distância equivalente a aquela inicialmente considerada. De fato, temos

**Proposição 25** *Sejam  $d$  e  $d'$  duas métricas equivalentes em  $G/H$ . Então  $E$  é um conjunto controlável por  $\mathcal{F}$ -cadeias através da métrica  $d$  se e só se  $E$  é um conjunto controlável por  $\mathcal{F}$ -cadeias através da métrica  $d'$ .*

**Demonstração:** Tomemos  $x$  e  $y \in E$ . Sejam  $x_0 = x, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = y$  em  $G/H$  e  $g_0, \dots, g_{n-1} \in A$  determinando uma  $(S, \epsilon, A)$ -cadeia de  $x$  para  $y$  através da métrica  $d$ .

Teremos então que  $d(g_j x_j, x_{j+1}) < \epsilon$  para  $j = 0, \dots, n-1$ . Como  $d$  e  $d'$  são equivalentes, existem constantes  $c, k > 0$  tais que

$$kd'(x, y) \leq d(x, y) \leq cd'(x, y) \quad \forall x, y \in G/H$$

Daí  $d'(g_j x_j, x_{j+1}) < \epsilon/k$   $j = 0, \dots, n-1$ . Assim  $x_0 = x, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = y$  em  $G/H$  e  $g_0, \dots, g_{n-1} \in A$  determinam uma  $(S, \epsilon/k, A)$ -cadeia de  $x$  para  $y$  através da métrica  $d'$ . Análogamente, se  $x'_0 = x, x'_1, \dots, x'_{n-1}, x'_n = y$  em  $G/H$  e  $g'_0, \dots, g'_{n-1} \in A$  determinam uma  $(S, \epsilon, A)$ -cadeia de  $x$  para  $y$  através da métrica  $d'$  então  $x'_0 = x, x'_1, \dots, x'_{n-1}, x'_n = y$  em  $G/H$  e  $g'_0, \dots, g'_{n-1} \in A$  determinam uma  $(S, c\epsilon, A)$ -cadeia de  $x$  para  $y$  através da métrica  $d$ . Portanto temos que a condição 2. na definição de conjunto controlável por cadeias é independente da métrica, o que conclui a demonstração.  $\square$

Veremos a seguir, através de uma aplicação do lema de Zorn, que qualquer subconjunto satisfazendo as duas primeiras condições na definição de conjunto controlável por  $\mathcal{F}$ -cadeias está contido num conjunto controlável por  $\mathcal{F}$ -cadeias.

**Proposição 26** *Seja  $E$  um subconjunto de  $G/H$  satisfazendo as condições 1. e 2. da Definição 6. Então  $E$  está contido num conjunto controlável por  $\mathcal{F}$ -cadeias.*

**Demonstração:** Seja  $\mathcal{A} = \{F \subset G/H : F \text{ satisfaz 1. e 2. da Definição 6}\}$ . Desde que  $E \in \mathcal{A}$  temos que  $\mathcal{A} \neq \emptyset$ . Consideraremos a inclusão como relação de ordem em  $\mathcal{A}$ . Mostremos que todo conjunto totalmente ordenado de  $\mathcal{A}$  tem limite superior. Com efeito, seja  $\{F_\alpha\}_{\alpha \in I}$ , onde  $I$  é um conjunto de índices, um conjunto totalmente ordenado de elementos de  $\mathcal{A}$ . Então

$$F = \bigcup_{\alpha \in I} F_\alpha$$

, que é um elemento de  $\mathcal{A}$ , é um limite superior para  $\{F_\alpha\}_{\alpha \in I}$ . De fato, se  $x, y \in F$  então  $x \in F_{\alpha_0}$  e  $y \in F_{\alpha_1}$ . Mas  $F_{\alpha_0} \subset F_{\alpha_1}$  ou  $F_{\alpha_1} \subset F_{\alpha_0}$  e portanto existe uma  $(S, \epsilon, A)$ -cadeia de  $x$  para  $y$  para todo  $\epsilon > 0$  e  $A \in \mathcal{F}$ . Aplicando o lema de Zorn temos que  $\mathcal{A}$  tem um elemento maximal e  $E$  está contido num conjunto controlável por  $\mathcal{F}$ -cadeias.  $\square$

Observemos que nem sempre existem conjuntos controláveis por  $\mathcal{F}$ -cadeias. Como exemplo, tomemos como  $S$  o semigrupo de translações na reta real dado por  $\{g : g(x) = x + a \text{ com } a \geq 0\}$ . Seja  $\mathcal{F}$  uma família qualquer de subconjuntos de  $S$ . Então não existe conjunto controlável por  $\mathcal{F}$ -cadeias na reta real. De fato, tomemos  $x$  e  $y$  reais e suponhamos que  $x < y$ . Então para  $\epsilon < \frac{d(x,y)}{2}$ , e para qualquer  $A \in \mathcal{F}$  não existe  $(S, \epsilon, A)$ -cadeia de  $y$  para  $x$ . Isto é verdade pois  $gy \geq y \forall g \in S$ .

No decorrer deste trabalho, veremos exemplos de conjuntos controláveis por  $\mathcal{F}$ -cadeias.

Segue-se também da condição 3 que dois conjuntos controláveis por  $\mathcal{F}$ -cadeias ou são disjuntos ou coincidentes. Na verdade temos:

**Proposição 27** *Sejam  $E$  e  $F$  dois conjuntos controláveis por  $\mathcal{F}$ -cadeias para  $S$  em  $G/H$ . Então  $E = F$  ou  $E \cap F = \emptyset$ .*

**Demonstração:** Suponhamos  $E \cap F \neq \emptyset$  e tomemos  $x \in E \cap F$ . Mostraremos que  $E \cup F$  é transitivo por cadeias e portanto temos que  $E \cup F = E = F$ . Tomemos  $\epsilon > 0, A \in \mathcal{F}$  e  $a, b \in E \cup F$ . Mostraremos que existe uma  $(S, \epsilon, A)$  cadeia de  $a$  para  $b$ . Suponhamos sem perda de generalidade que  $a \in E$  e  $b \in F$ . Como  $a \in E$  e  $x \in F$  existem  $x_0 = a, \dots, x_n = x$  em  $G/H$ ,  $g_0, \dots, g_{n-1} \in A$  tal que  $d(g_i x_i, x_{i+1}) < \epsilon$  para todo  $i = 1, \dots, n-1$ . Desde que  $x \in F$  e  $b \in F$  existem  $y_0 = x, \dots, y_m = b$  em  $G/H$ ,  $h_0, \dots, h_{m-1} \in A$  tal que  $d(h_j y_j, y_{j+1}) < \epsilon$  para todo  $j = 1, \dots, m-1$ . Portanto  $x_0 = a, \dots, x_n, y_0, \dots, y_m = b$  e  $g_0, \dots, g_{n-1}, h_0, \dots, h_{m-1} \in A$  determinam uma  $(S, \epsilon, A)$  cadeia de  $a$  para  $b$ .  $\square$

Consideraremos os seguintes de subconjuntos de  $S$ .

1. (*Semigrupos de Controle*) Sejam  $X_0, X_1, \dots, X_m$  campos vetoriais invariantes a direita em  $G$ , e consideremos o sistema de controle

$$\dot{x}(t) = X_0(x(t)) + \sum_{i=1}^m u_i(t) X_i(x(t)) \quad (5.1)$$

onde  $u = (u_1, \dots, u_m) \in \mathcal{U}$  para alguma classe de controles admissíveis  $\mathcal{U}$ . Denotamos por  $\pi(g, u, t)$  a solução do sistema no tempo  $t$  dada pelo controle  $u$  e iniciando

em  $g \in G$ . Esta solução é dada por  $\pi(g, u, t) = \pi(1, u, t)g$  onde 1 é a identidade de  $G$ . O conjunto de atingibilidade a partir da identidade no tempo  $t$ ,  $A(t)$  é dado por  $A(t) = \{\pi(1, u, t) : u \in \mathcal{U}\}$ . A união

$$S = \bigcup_{t \geq 0} A(t)$$

é um subsemigrupo de  $G$  que é dito semigrupo do sistema.

Seja  $\mathcal{F}_{\text{control}}$  uma família de subconjuntos de  $S$  definida por

$$\mathcal{F}_{\text{control}} = \left\{ \bigcup_{t > T} A(t) : T \geq 0 \right\}.$$

Então os conjuntos controláveis por  $\mathcal{F}_{\text{control}}$ -cadeias em  $G/H$  estão relacionados com os conjuntos controláveis por cadeias para sistemas de controle definidos por F.Colonius e W.Kliemann em [8]. De fato, o sistema de controle invariante a direita em  $G$  definido acima induz em  $G/H$  um sistema de controle cujas trajetórias são dadas por  $\pi(1, u, t)x, x \in G/H$ , e o conjunto de atingibilidade a partir de  $x$  é dado pela sua  $S$ -órbita. Em [8] F.Colonius e W. Kliemann definiram conjunto controlável por cadeias para o sistema induzido como um subconjunto  $E \subset G/H$  que satisfaz

- i. Para todo  $x, y \in E$  e todo  $\epsilon, T > 0$  existem  $x_0, \dots, x_n \in G/H$  com  $x_0 = x, \dots, x_n = y, t_0, \dots, t_{n-1} > T$  e  $u_0, \dots, u_{n-1} \in \mathcal{U}$  tal que

$$d(\pi(1, u_i, t_i)x_i, x_{i+1}) < \epsilon$$

para todo  $i = 0, \dots, n-1$ .

- ii. Para todo  $x \in E$  existe  $u \in \mathcal{U}$  com  $\pi(1, u, t)x \in E$  para todo tempo  $t \geq 0$ .
- iii.  $E$  é maximal satisfazendo estas duas propriedades.

Desde que para  $t_i > T, \pi(1, u, t_i) \in \bigcup_{t > T} A(t)$ , vemos facilmente que um conjunto controlável por cadeias para o sistema induzido é um conjunto controlável por



$\mathcal{F}_{\text{control}}$ -cadeias, se este tem interior não vazio, e tal propriedade é válida se assumirmos a hipótese natural de que  $S$  tem pontos interiores em  $G$  (veja [8] )

Reciprocamente, um conjunto controlável por  $\mathcal{F}_{\text{control}}$ -cadeias é um conjunto controlável por cadeias para o sistema de controle como na definição acima. Para verificar isto, precisamos mostrar que um conjunto controlável por  $\mathcal{F}_{\text{control}}$ -cadeias satisfaz a segunda condição, a qual será verificada abaixo para conjuntos controláveis por cadeias contendo conjuntos controláveis.

2. Seja  $\mathcal{F}_\infty$  as intersecções com  $S$  de vizinhanças do  $\infty$  na topologia da compactificação por um ponto de  $G$ , ou seja,

$$\mathcal{F}_\infty = \{S - K : K \text{ é um compacto de } G\}.$$

3. Sejam  $\mathcal{F}_{\infty,S}$  vizinhanças do  $\infty$  na compactificação por um ponto de  $S$ , ou seja

$$\mathcal{F}_{\infty,S} = \{S - K : K \text{ é um compacto de } S\}$$

Observemos que os conjuntos controláveis por  $\mathcal{F}_{\text{control}}$ -cadeias existem somente para semigrupos de controle enquanto os conjuntos controláveis por  $\mathcal{F}_\infty$  e  $\mathcal{F}_{\infty,S}$ -cadeias podem ser definidos para semigrupos em geral.

Observe que  $\mathcal{F}_{\infty,S} \subset \mathcal{F}_\infty$ , e que coincidem se  $S$  é fechado em  $G$ .

## 5.2 Alguns resultados sobre conjuntos controláveis por cadeias

Iniciamos, relacionando diferentes conjuntos controláveis por cadeias.

**Proposição 28** *Sejam  $\mathcal{F}_1$  e  $\mathcal{F}_2$  duas famílias de subconjuntos de  $S$  e suponha que para*

todo  $B \in \mathcal{F}_2$  existe  $A \in \mathcal{F}_1$  tal que  $A \subset B$ . Então todo conjunto controlável por  $\mathcal{F}_1$ -cadeias está contido num conjunto controlável por  $\mathcal{F}_2$ -cadeias. Em particular isto é válido se  $\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_1$ .

**Demonstração:** Seja  $E$  um conjunto controlável por  $\mathcal{F}_1$ -cadeias e tome  $B \in \mathcal{F}_2$ ,  $\epsilon > 0$  e  $x, y \in E$ . Pela hipótese, existe  $A \in \mathcal{F}_1$  com  $A \subset B$ . Como  $E$  é um conjunto controlável por  $\mathcal{F}_1$ -cadeias, existe uma  $(S, \epsilon, A)$ -cadeia de  $x$  para  $y$ . Como  $A \subset B$ , existe também uma  $(S, \epsilon, B)$ -cadeia de  $x$  para  $y$ . Desde que  $B$  e  $\epsilon$  são arbitrários mostramos que  $E$  satisfaz 2 com  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_2$  e portanto está contido num conjunto controlável por  $\mathcal{F}_2$ -cadeias.  $\square$

**Corolário 3** *Os conjuntos controláveis por  $\mathcal{F}_\infty$ -cadeias estão contidos nos conjuntos controláveis por  $\mathcal{F}_{\infty, S}$ -cadeias. Se  $S$  é um semigrupo de controle o mesmo é válido para conjuntos controláveis por  $\mathcal{F}_{\text{control}}$ -cadeias no lugar de conjuntos controláveis por  $\mathcal{F}_{\infty, S}$ -cadeias.*

**Demonstração:** Para provar a primeira parte do enunciado basta aplicar a proposição anterior observando que  $\mathcal{F}_{\infty, S} \subset \mathcal{F}_\infty$ . Para a segunda parte do enunciado, suponhamos primeiramente que o sistema de controle (5.1) tenha controles restritos, ou seja, as funções de controle  $u$  assumem valores num subconjunto compacto de  $\mathbb{R}^m$ . Neste caso, o conjunto  $\bigcup_{0 \leq t \leq T} A(t)$  dos pontos atingíveis até o tempo  $T$  é relativamente compacto em  $G$  (veja e.g. [21] lema 4.4). Portanto, qualquer  $B \in \mathcal{F}_{\text{control}}$  contém o complemento em  $S$  de um subconjunto compacto de  $G$ , ou seja, um subconjunto  $A \in \mathcal{F}_\infty$ . O caso geral, segue-se, restringindo os controles e observando que os conjuntos de atingibilidade para (5.1) com os controles restritos a um subconjunto compacto estão contidos nos conjuntos de atingibilidade com controles irrestritos.  $\square$

Estaremos, prioritariamente, interessados nos conjuntos controláveis por cadeias que contém os conjuntos controláveis.

Observe que, no grau de generalidade que estivemos trabalhando até agora, não é claro que os conjuntos controláveis estão contidos nos conjuntos controláveis por cadeias.

Isto deve-se ao fato de que os elementos de  $S$  nas cadeias unindo pontos de um conjunto controlável por  $\mathcal{F}$ -cadeias tem a propriedade restritiva de pertencer a subconjuntos  $A \in \mathcal{F}$ . Portanto, apesar de dois pontos quaisquer de um conjunto controlável poderem ser unidos, aproximadamente, pela ação de  $S$ , é possível que isto não possa ser realizado por  $\mathcal{F}$ -cadeias se os subconjuntos  $A \in \mathcal{F}$  não são suficientemente grandes. Devido a isto consideraremos as seguintes condições sobre  $\mathcal{F}$ .

**Definição 7** Dizemos que a família  $\mathcal{F}$  satisfaz a propriedade  $P_l$  (respectivamente  $P_r$ ) se para todo  $g \in \text{int}S, h \in S$  e  $A \in \mathcal{F}$ , existe um inteiro positivo  $n$  tal que  $g^n h \in A$  (respectivamente  $hg^n \in A$ )

Observe que tomando  $h = g$ ,  $P_l$  ou  $P_r$  implicam que  $g^n \in A$  para algum  $n \geq 0$ .

Estas propriedades são satisfeitas pelas famílias mencionadas acima. No caso de  $\mathcal{F}_\infty$ , elas são satisfeitas, exceto no caso trivial em que  $S = G$ . De fato, suponhamos que existam  $g \in \text{int}S, h \in S$  tal que para todo natural  $n$ ,  $g^n h$  ou  $hg^n$  não pertencem a algum  $A \in \mathcal{F}_\infty$ . Então  $g^n h$  ou  $hg^n$  estão contidos num compacto de  $G$  e  $\text{cl}\{g^n : n \geq 0\}$  será compacto. Como  $g \in \text{cl}\{g^n : n \geq 0\}$  temos que  $\text{int}S$  intercepta um subgrupo compacto de  $G$ , o que implica em  $S = G$ . Portanto se  $S \neq G$  as propriedades são satisfeitas. No caso da família  $\mathcal{F}_{\text{control}}$  de um semigrupo de controle,  $P_l$  e  $P_r$  também são satisfeitas. De fato, tomemos  $A \in \mathcal{F}_{\text{control}}$ ,  $g \in \text{int}S$  e  $h \in S$ . Então temos que  $g = \pi(1, u, t_1)$  e  $h = \pi(1, v, t_2)$  com  $u, v \in U$  e  $t_1, t_2 > 0$ . Assim  $g^n = \pi(1, u^n, nt_1)$  onde o controle  $u^n$  é  $n$ -vezes a concatenação de  $u$  por ele mesmo ( veja [21] Lema 4.5). Teremos então que  $g^n h = \pi(1, w, nt_1 + t_2)$  com  $w \in U$ . Logo  $g^n h \in A$  para algum inteiro positivo  $n$ . Análogamente temos  $hg^n \in A$  para algum inteiro positivo  $n$ .

Para famílias satisfazendo as  $P$ -propriedades, é possível comparar seus conjuntos controláveis por cadeias com os conjuntos controláveis para  $S$ . Para ver isto, denotaremos, para um subconjunto  $A \subset S$ , por  $S_A$  o subsemigrupo de  $S$  gerado por  $A$ . Se  $A$  pertence a uma família satisfazendo as  $P$  propriedades, os conjuntos controláveis efetivos para  $S$  também são conjuntos controláveis para  $S_A$ .

**Proposição 29** *Suponha que a família  $\mathcal{F}$  satisfaz  $P_l$  e  $P_r$ . Tome  $A \in \mathcal{F}$  e seja  $S_A$  o subsemigrupo gerado por  $A$ . Seja  $D$  um conjunto controlável efetivo para  $S$ . Então  $D \subset cl(S_A x)$  para qualquer  $x \in D$ .*

**Demonstração:** Tomemos  $x, y \in D$  e mostremos que  $y \in cl(S_A x)$ . Supomos, primeiramente que  $y \in D_0$ . Então existe  $h \in S$  tal que  $y = hx$ , já que  $D \subset (intS)^{-1}D_0$  ocorre pela proposição 1. Temos também que existe  $g \in intS$  tal que  $gy = y$ . Como  $g^n h \in A$  por  $P_l$ , e  $g^n hx = y$ , obtemos que  $y \in S_A x$ . Agora, para  $y$  arbitrário tomemos  $z \in D_0$ . Então pela primeira parte da demonstração  $z \in S_A x$ , e portanto é suficiente mostrar que  $y \in cl(S_A z)$ . Para isto, tomemos  $g \in intS$  tal que  $gz = z$  e uma seqüência  $h_m \in S$  tal que  $h_m z \rightarrow y$ . Então por  $P_r$  temos que  $h_m g^n \in S_A$  para  $n$  suficientemente grande. Desde que  $h_m g^n z = h_m z$ , temos que existe uma seqüência  $g_k \in S_A$  com  $g_k z \rightarrow y$ , concluindo a demonstração da proposição.  $\square$

Uma conseqüência deste resultado é a de que se  $\mathcal{F}$  satisfaz  $P_l$  e  $P_r$  então os conjuntos controláveis efetivos para  $S$  estão contidos nos conjuntos controláveis por  $\mathcal{F}$ -cadeias. De fato, a proposição acima mostra imediatamente que um conjunto controlável efetivo satisfaz 2 da definição de conjunto controlável por cadeias, para todo  $A \in \mathcal{F}$ . Como um conjunto controlável efetivo tem interior não vazio, ele está contido num conjunto controlável por  $\mathcal{F}$ -cadeias.

**Definição 8** *Um conjunto controlável por  $\mathcal{F}$ -cadeias é dito efetivo se ele contém um conjunto controlável efetivo.*

Caso  $\mathcal{F}$  satisfaça as propriedades  $P_l$  e  $P_r$ , um conjunto controlável por  $\mathcal{F}$ -cadeias é efetivo se e somente se o subconjunto  $E_0 = \{x \in E : x \in (intS)x\}$  é não vazio. De fato, se  $E$  contém um conjunto controlável efetivo então  $E_0 \neq \emptyset$  pela sua própria definição. Reciprocamente, qualquer  $x \in E_0$  é fixo por algum  $g \in intS$  e portanto  $x$  pertence a algum conjunto controlável, digamos  $D$ , e que é efetivo (veja Proposição 3). Se  $\mathcal{F}$  satisfaz  $P_l$  e  $P_r$  então, pela proposição acima,  $D$  está contido num conjunto controlável por  $\mathcal{F}$ -cadeias. Como este conjunto controlável por cadeias intercepta  $E$ , temos que  $D \subset E$ .

Observemos que se o sistema de controle satisfaz a propriedade de acessibilidade local então os conjuntos controláveis por  $\mathcal{F}_{\text{control}}$ -cadeias que contém os conjuntos controláveis são efetivos. Isto é verdade, pois neste caso os conjuntos controláveis são efetivos. Este comentário mostra que os conjuntos controláveis por  $\mathcal{F}_{\text{control}}$ -cadeias que contém os conjuntos controláveis são conjuntos controláveis por cadeias para (5.1) no sentido de [8].

# Capítulo 6

## Conjuntos Controláveis por Cadeias em Espaços Homogêneos

Neste capítulo, caracterizaremos os conjuntos controláveis por cadeias como intersecções de conjuntos controláveis para semigrupos gerados por vizinhanças de  $S$ . Tal caracterização dos conjuntos controláveis por cadeias nos permite aplicar os resultados sobre conjuntos controláveis no estudo dos conjuntos controláveis por cadeias.

Apresentaremos também alguns resultados sobre conjuntos controláveis por cadeias em fibrados.

Mostraremos também, que se  $x$  é um ponto fixo para um elemento no fecho de um semigrupo então  $x$  pertence a um conjunto controlável por  $\mathcal{F}_\infty$ -cadeias.

Além disso, apresentaremos um resultado que nos diz onde reside o  $w$ -limite a partir de um ponto num espaço homogêneo compacto em relação a ação de um elemento no fecho de um semigrupo.

### 6.1 Conjuntos controláveis por cadeias como intersecções de conjuntos controláveis

Uma cadeia num semigrupo  $S$  é dada pelo intercalar da ação de elementos de  $S$

com pequenos saltos de elementos do espaço homogêneo  $G/H$ . Devido a isto, espera-se que os conjuntos controláveis por cadeias para a ação de  $S$  possam ser obtidos através dos conjuntos controláveis para semigrupos gerados por vizinhanças de  $S$ . Isto é o que acontece como veremos a seguir.

De agora em diante supomos que o espaço homogêneo  $G/H$ , onde  $S$  age, seja compacto. Supomos também que a ação de  $G$  em  $G/H$  seja efetiva, ou seja,  $H$  não contém subgrupos normais. Fixemos, como anteriormente uma métrica  $d$  em  $G/H$ . Os elementos de  $G$  são vistos como homeomorfismos de  $G/H$  e portanto é possível considerar em  $G$  a métrica da convergência uniforme em  $G/H$ . Ela é dada por

$$d'(g, h) = \sup_{x \in G/H} d(gx, hx),$$

e é uma métrica invariante a direita em  $G$ . Usamos a notação  $B(A, \epsilon)$  para a  $\epsilon$ -vizinhança em relação a  $d'$  do subconjunto  $A$ :

$$B(A, \epsilon) = \{g \in G : \exists h \in A, d'(h, g) < \epsilon\}.$$

Dado um subconjunto  $A \subset S$ , denotamos por  $S_{\epsilon, A}$  o subsemigrupo de  $G$  gerado pela  $\epsilon$ -vizinhança de  $A$  em  $G$ :

$$S_{\epsilon, A} = \langle B(A, \epsilon) \rangle.$$

Temos,

**Proposição 30** *Sejam  $x, y \in G/H, A \subset S$ . Então*

1. *Se  $y \in S_{\epsilon, A}x$ , então existe uma  $(S, \epsilon, A)$ -cadeia de  $x$  para  $y$*
2. *Se  $y \in cl(S_{\epsilon, A}x)$  então existe uma  $(S, \epsilon', A)$ -cadeia de  $x$  para  $y$  para todo  $\epsilon' > \epsilon$*

**Demonstração:**

1. Como  $y \in S_{\epsilon, A}x$ , existe  $g \in S_{\epsilon, A}$  tal que  $y = gx$ . Segue-se da definição de  $S_{\epsilon, A}$  que  $g = g_{k-1} \dots g_0$  com  $g_i \in B(A, \epsilon), i = 0, \dots, k-1$ . Escolha  $h_0, \dots, h_{k-1} \in A$  tal que

$d'(h_i, g_i) < \epsilon, i = 0, \dots, k - 1$ . Então as seqüências  $x_0 = x, x_1 = g_0x_0, \dots, x_k = g_{k-1}x_{k-1} = y$  e  $h_0, \dots, h_{k-1} \in A$  determinam uma  $(S, \epsilon, A)$ -cadeia de  $x$  para  $y$ . De fato,

$$\begin{aligned} d(h_{i-1}x_{i-1}, x_i) &= d(h_{i-1}x_{i-1}, g_{i-1}x_{i-1}) \\ &\leq d'(h_{i-1}, g_{i-1}) \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

Para todo  $i = 1, \dots, k$ , o que mostra a existência de uma  $(S, \epsilon, A)$ -cadeia de  $x$  para  $y$ .

2. Suponhamos agora que  $y \in cl(S_{\epsilon, A}x)$ . Então existe uma seqüência  $g_n \in S_{\epsilon, A}$  tal que  $g_nx$  converge para  $y$ . Tomemos  $\epsilon' > \epsilon$ , e seja  $n_0$  tal que  $d(g_{n_0}x, y) < \epsilon' - \epsilon$ . Como na demonstração de 1, existe uma  $(S, \epsilon, A)$ -cadeia de  $x$  para  $g_{n_0}x$ . Tomemos  $y_0 = x, \dots, y_n = g_{n_0}x \in G/H, h_0, \dots, h_{n-1} \in A$  como a  $(S, \epsilon, A)$  cadeia de  $x$  para  $g_{n_0}x$ . Então  $d(h_i y_i, y_{i+1}) < \epsilon$  para  $i = 0, \dots, n - 1$ . Logo, a cadeia  $z_0 = x, z_1 = y_1, \dots, z_{n-1} = y_{n-1}, z_n = y$  e  $h_0, \dots, h_{n-1} \in A$  é uma  $(S, \epsilon', A)$ -cadeia de  $x$  para  $y$ . De fato,

$$\begin{aligned} d(h_{n-1}y_{n-1}, y) &\leq d(h_{n-1}y_{n-1}, g_{n_0}x) + d(g_{n_0}x, y) \\ &< \epsilon + (\epsilon' - \epsilon) = \epsilon' \end{aligned}$$

e  $d(h_{i-1}y_{i-1}, y_i) < \epsilon < \epsilon'$  para  $i = 1, \dots, n - 1$ .  $\square$

O resultado acima mostra que pontos atingíveis pela ação do semigrupo gerado pela perturbação de  $A$  também são atingíveis por  $(S, \epsilon, A)$ -cadeias. Obteremos a recíproca deste resultado mostrando que os pontos atingíveis por cadeias podem ser atingidos pela ação do semigrupo perturbado. Para fazer isto precisaremos da seguinte hipótese sobre a ação de  $G$  em  $G/H$ .

**Hipótese H** : Existem constantes  $c > 0$  e  $\eta > 0$  tal que a ação de  $G$  em  $G/H$  satisfaz

$$\forall x \in G/H, \forall y \in B_\eta(x) \text{ existe } k \in G \text{ com } kx = y \text{ e } d(kx, x) \geq cd'(k, 1).$$

Para ações satisfazendo **H**, é possível interligar pontos suficientemente próximos em  $G/H$  por elementos de  $G$  cuja distância a identidade não seja muito maior do que a



distância entre os pontos. Observemos que como  $d'(k, 1) = \sup_{y \in G/H} d(ky, y)$  e  $d(kx, x) \geq cd'(k, 1)$ , temos que  $c \leq 1$ , e dado  $x$  é possível tomarmos  $c = 1$  se e só se  $x$  é um ponto para o qual o sup em  $d'(k, 1)$  é atingido.

**Proposição 31** *Assumamos **H** e seja  $\epsilon$  tal que  $0 < \epsilon < \eta$ . Suponha também que  $x_0, \dots, x_n \in G/H$  e  $h_0, \dots, h_{n-1} \in G$  são seqüências determinando uma  $(S, \epsilon, A)$ -cadeia de  $x_0$  para  $x_n$ . Então existe  $g \in S_{\epsilon', A}$  com  $gx_0 = x_n$  onde  $\epsilon' = \epsilon/c$ .*

**Demonstração:** Como  $d(h_i x_i, x_{i+1}) < \epsilon < \eta$ , temos, por **H**, que existe  $k_i \in G$  tal que

$$d(x_{i+1}, h_i x_i) = d(k_i h_i x_i, h_i x_i) \geq cd'(k_i, 1)$$

$i = 0, \dots, n-1$ , e portanto  $d'(k_i, 1) < \epsilon/c = \epsilon'$ . Defina  $g_i = k_i h_i$ . Então

$$d'(g_i, h_i) = d'(k_i h_i, h_i) = d'(k_i, 1) < \epsilon'$$

pela invariância a direita de  $d'$ . Conseqüentemente,  $g_i \in B(A, \epsilon')$ . Entretanto,  $g_i x_i = k_i h_i x_i = x_{i+1}$ , e  $x_n = g_{n-1} \dots g_0 x_0$  o que mostra o resultado desejado.  $\square$

Este resultado juntamente com a Proposição 30 mostram que os conjuntos controláveis por cadeia em espaços homogêneos satisfazendo **H** podem ser estudados através dos conjuntos controláveis dos semigrupos  $S_{\epsilon, A}$ . Antes de discutirmos esta relação, nos asseguraremos que a hipótese **H** seja válida para uma ampla classe de espaços homogêneos. A saber, aqueles para os quais existe um subgrupo compacto  $K \subset G$  que age transitivamente em  $G/H$ . Nesta classe de espaços homogêneos estão incluídas as variedades flag, que serão consideradas posteriormente.

Seja  $K$  um grupo compacto e  $K/L$  um espaço homogêneo de  $K$ . Sabemos que em  $K/L$  existe uma métrica Riemanniana  $K$ -invariante  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Passamos a construir esta métrica. Seja  $\mathfrak{k}$  a álgebra de Lie de  $K$  e escolhamos um produto interno  $Ad(K)$ -invariante, ou seja,  $\langle Ad(k)X, Ad(k)Y \rangle = \langle X, Y \rangle$  para todos  $X, Y \in \mathfrak{k}$  e  $k \in K$ . Fixando  $x \in K/L$  seja  $\mathfrak{k}_x$  a álgebra de isotropia em  $x$ , e denotaremos por  $P_x : \mathfrak{k} \rightarrow \mathfrak{k}_x^\perp$  a projeção ortogonal sobre

$\mathfrak{k}_x^\perp$  em relação a  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , aqui  $\mathfrak{k}_x^\perp$  é o complemento ortogonal de  $\mathfrak{k}_x$ . A métrica Riemanniana desejada é definida por

$$\langle \tilde{X}(x), \tilde{Y}(x) \rangle = \langle P_x X, P_x Y \rangle$$

onde  $\tilde{X}(x) = d/dt(\exp(tX)x)_{t=0}$  é o campo vetorial induzido por  $X \in \mathfrak{k}$  em  $K/L$ . Mostremos que esta expressão define um produto interno em  $T_x(K/L)$ . De fato, todo  $v \in T_x(K/L)$  é dado por  $v = \tilde{X}(x)$  para algum  $X \in \mathfrak{k}$ . Além disso, tomemos  $u, v$  e  $w \in T_x(K/L)$  e  $\alpha$  número real. Teremos que

$$\begin{aligned} \langle u + \alpha v, w \rangle &= \langle \tilde{X}(x) + \alpha \tilde{Y}(x), \tilde{Z}(x) \rangle = \langle (\tilde{X} + \alpha \tilde{Y})(x), \tilde{Z}(x) \rangle = \\ &= \langle P_x(X + \alpha Y), P_x Z \rangle = \langle P_x X, P_x Z \rangle + \alpha \langle P_x Y, P_x Z \rangle = \\ &= \langle u, w \rangle + \alpha \langle v, w \rangle \end{aligned}$$

Além disso esta métrica Riemanniana é  $K$ -invariante, ou seja,  $\langle k_* u, k_* v \rangle = \langle u, v \rangle$  para todo  $k \in K$  e  $u, v \in T_x(K/L)$ , onde  $k_*$  denota a diferencial da aplicação  $k : K/L \rightarrow K/L$ . Com efeito, se tomarmos  $k \in K$  teremos

$$\begin{aligned} \langle k_*(\tilde{X}(x)), k_*(\tilde{Y}(x)) \rangle &= \langle (\tilde{Ad}(k)X)(kx), (\tilde{Ad}(k)Y)(kx) \rangle = \\ &= \langle P_{kx}(Ad(k)X), P_{kx}(Ad(k)Y) \rangle \end{aligned}$$

É imediato que se  $K_x$  é o grupo de isotropia em  $x$  então  $K_{kx} = kK_x k^{-1}$ , ou seja, os grupos de isotropia são todos conjugados. Daí  $Ad(k)k_x = k_{kx}$  temos que

$$\langle k_{kx}, Ad(k)k_x^\perp \rangle = \langle Ad(k)k_x, Ad(k)k_x^\perp \rangle = \langle k_x, k_x^\perp \rangle = 0$$

e portanto  $k_{kx}^\perp = Ad(k)k_x^\perp$ . Logo  $P_{kx}(Ad(k)X) = Ad(k)P_x(X)$  e portanto

$$\langle P_{kx}(Ad(k)X), P_{kx}(Ad(k)Y) \rangle = \langle Ad(k)P_x(X), Ad(k)P_x(Y) \rangle =$$

$$\langle P_x(X), P_x(Y) \rangle = \langle \tilde{X}(x), \tilde{Y}(x) \rangle$$

já que o produto interno é  $Ad(k)$ -invariante.

Tomemos em  $K/L$  a distância  $d$  dada pela métrica Riemanniana. Como para  $X \in \mathfrak{k}$ ,  $|\tilde{X}(x)| = \langle P_x X, P_x X \rangle^{1/2} \leq |X|$ , temos que  $|\tilde{X}(x)| \leq |X|$ . Esta desigualdade implica que o comprimento da curva  $t \rightarrow \exp(tX)x, t \in [0, 1]$ , que é dado por  $\int_0^1 |\tilde{X}(\exp(tX)x)| dt$  é limitado superiormente por  $|X|$ . Como a distância entre dois pontos é dada pelo ínfimo dos comprimentos das curvas que unem estes pontos, obteremos que  $d(\exp(X)x, x) \leq |X|$ .

Precisaremos da seguinte proposição.

**Proposição 32** *Seja  $U$  um aberto em torno da origem em  $R^n$  e  $M$  uma variedade Riemanniana. Suponha que  $f : U \rightarrow M$  é diferenciável. Então temos*

$$\lim_{\|v\| \rightarrow 0} \inf \frac{d(f(v), f(0))}{\|v\|} = \inf_{\|w\|=1} \|(df)_0(w)\|$$

**Demonstração:** Suponhamos, inicialmente, que  $M = R^n$ . Temos então que

$$\begin{aligned} \inf_{\|w\|=1} \|(df)_0(w)\| &= \inf_{\|w\|=1} \left\| \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tw) - f(0)}{t} \right\| = \\ \inf_{\|w\|=1} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|f(tw) - f(0)\|}{\|tw\|} &= \lim_{\|v\| \rightarrow 0} \inf \frac{\|f(v) - f(0)\|}{\|v\|} = \\ \lim_{\|v\| \rightarrow 0} \inf \frac{d(f(v), f(0))}{\|v\|} \end{aligned}$$

Para  $M$  variedade Riemanniana qualquer, seja  $(V, \varphi = \exp_{f(0)}^{-1})$  uma carta normal ao redor de  $f(0)$ . Pela definição de  $\varphi$  temos que  $(d\varphi)_{f(0)}$  é a identidade. Para  $v$  próximo de 0 temos de [16] Proposição 9.4 que  $\|\varphi(f(v)) - \varphi(f(0))\| = d(f(v), f(0))$ . Portanto, utilizando a primeira parte da demonstração, temos

$$\lim_{\|v\| \rightarrow 0} \inf \frac{d(f(v), f(0))}{\|v\|} = \lim_{\|v\| \rightarrow 0} \inf \frac{\|\varphi(f(v)) - \varphi(f(0))\|}{\|v\|} =$$

$$\begin{aligned} \inf_{\|w\|=1} \|d(\varphi \circ f)_0(w)\| &= \inf_{\|w\|=1} \|d(\varphi)_{J(0)}((df)_0(w))\| \\ &= \inf_{\|w\|=1} \|(df)_0(w)\| \end{aligned}$$

□

A desigualdade necessária em **H** é um tipo de equivalência local entre  $d$  e a norma em  $\mathfrak{k}$ . Enunciemos

**Proposição 33** *O espaço homogêneo  $K/L$  com  $K$  compacto e a distância  $d$  dada pela métrica Riemanniana satisfaz **H**.*

**Demonstração:** Fixemos  $x_0 \in K/L$ . Verifiquemos inicialmente que é suficiente mostrar que **H** é válida em  $x_0$ . Suponhamos então que existem  $c > 0$  e  $\eta > 0$  tal que para todo  $z \in B_\eta(x_0)$  existe  $k \in K$  com  $kx_0 = z$  e  $d(kx_0, x_0) \geq cd'(k, 1)$ . Tomemos  $x \in K/L$  e  $u \in K$  tal que  $x = ux_0$ , e definamos  $k' = uk u^{-1}$ . Temos que  $k'x = y$  e como a métrica Riemanniana é  $K$ -invariante o mesmo é válido para a distância  $d$ , ou seja,  $d'$  é tanto invariante a esquerda quanto invariante a direita em  $K$ . Portanto,

$$d(k'x, x) = d(kx_0, x_0) \geq cd'(k, 1) = cd'(k', 1)$$

e **H** vale também em  $x$  com as mesmas constantes  $c$  e  $\eta$ .

Consideremos, então,  $f : \mathfrak{k} \rightarrow K/L$  definida por  $f(X) = \exp(X)x_0$ . Sua diferencial na origem é  $(df)_0(X) = \tilde{X}(x_0)$ , da qual se mostra que  $\ker(df)_0 = \mathfrak{k}_{x_0}$ . De fato,  $|\tilde{X}(x_0)| = \langle P_{x_0}(X), P_{x_0}(X) \rangle$ . Portanto,  $df_0$  é injetora em  $\mathfrak{k}_{x_0}^\perp$ , ou seja,  $f$  é um difeomorfismo de uma vizinhança da origem de  $\mathfrak{k}_{x_0}^\perp$  sobre uma bola aberta  $B_{\eta'}(x_0)$  para algum  $\eta' > 0$ . Pela Proposição 32 temos que

$$\liminf_{|X| \rightarrow 0} \frac{d(\exp X x_0, x_0)}{|X|} = \inf_{|X|=1} |(df)_0(X)| = \inf_{|X|=1} |\tilde{X}(x_0)| > 0$$

para  $X \in \mathfrak{k}_{x_0}^\perp$ . Além disso  $d((\exp X)x_0, x_0)/|X|$  é limitado inferiormente numa região do tipo  $a \leq |X| \leq b$ , por continuidade, compacidade e pelo fato de que  $d((\exp X)x_0, x_0)/|X|$

é estritamente positivo nesta região. Segue-se então que  $d((\exp X)x_0, x_0)/|X|$  é limitado inferiormente em alguma vizinhança  $U$  da origem em  $\mathfrak{k}_{x_0}^\perp$ . Assim existe uma constante  $c > 0$  tal que  $d((\exp X)x_0, x_0) \geq c|X|$  para todo  $X \in U$ . Entretanto,  $d'(\exp X, 1) \leq |X|$ , assim  $d((\exp X)x_0, x_0) \geq cd'(\exp X, 1)$ , e como  $f$  assume valores numa vizinhança de  $x_0$ , isto mostra que  $K/L$  satisfaz **H** em  $x_0$  e temos a proposição.  $\square$

Se  $G$  possui um subgrupo compacto que age transitivamente em  $G/H$  esta proposição implica imediatamente que o espaço homogêneo  $G/H$  satisfaz **H**.

**Corolário 4** *Seja  $G/H$  um espaço homogêneo e suponha que existe um subgrupo compacto  $K \subset G$  tal que  $K$  age transitivamente em  $G/H$ . Então  $G/H$  satisfaz **H** com a distância  $d$  dada por uma métrica Riemanniana invariante por  $K$ .*

**Demonstração:** De fato,  $G/H$  é isomorfo a  $K/K \cap H$  que satisfaz a hipótese **H**.

Relembrando as Proposições 30 e 31 obtemos as seguintes relações entre as  $(S, \epsilon, A)$ -cadeias e a ação de  $S_{\epsilon, A}$ .

**Proposição 34** *Seja  $G$  um grupo de Lie e  $G/H$  um espaço homogêneo que satisfaz as condições do corolário acima. Seja  $S \subset G$  um subsemigrupo e tomemos  $A \subset S$ . Sejam  $x, y \in G/H$ . Se  $y \in S_{\epsilon, A}x$  então existe uma  $(S, \epsilon, A)$  cadeia de  $x$  para  $y$ . Reciprocamente se existe uma  $(S, \epsilon, A)$  cadeia de  $x$  para  $y$  com  $0 < \epsilon < \eta$  então  $y \in S_{\epsilon/c, A}x$ .*

Este resultado que relaciona atingibilidade por cadeias com a ação de um semigrupo, permite caracterizar os conjuntos controláveis por  $\mathcal{F}$ -cadeias como intersecções de conjuntos controláveis para os semigrupos  $S_{\epsilon, A}$ . Para esta caracterização, precisaremos que a família  $\mathcal{F}$  satisfaça as propriedades  $P_l$  e  $P_r$ . Quando estas propriedades são válidas temos em mãos a Proposição 29. Assim o fato de que  $S_A \subset S_{\epsilon, A}$  para todo  $\epsilon > 0$ , implica que os conjuntos controláveis efetivos para  $S$  estão contidos nos conjuntos controláveis para  $S_{\epsilon, A}$ . Devido a isto o conjunto controlável para  $S_{\epsilon, A}$  contendo o conjunto controlável efetivo para  $S$  também é efetivo. Com efeito, se  $g \in \text{int}S$  fixa um ponto  $y$  então o mesmo vale para  $g^n, n \geq 0$ , e claramente,  $g^n \in \text{int}S_{\epsilon, A}$ . Para o semigrupo perturbado  $S_{\epsilon, A}$  a Proposição 29 se torna mais precisa. De fato, temos

**Proposição 35** *Suponha que  $\mathcal{F}$  satisfaz  $P_l$  e  $P_r$ , suponha, além disso, que o espaço homogêneo em consideração satisfaz **H**. Então  $D \subset S_{\epsilon, A}x$  para qualquer  $x \in D$ ,  $A \in \mathcal{F}$  e  $\epsilon$  suficientemente pequeno.*

**Demonstração:** Sejam  $x, y \in D$ . Mostremos que  $y \in S_{\epsilon, A}x$ . Pela Proposição 29, existe  $g \in S_A$  tal que  $gx$  está próximo de  $y$ . Como  $S_A$  é gerado por  $A$ ,  $g$  é da forma  $g = g_1 \dots g_n$  com  $g_i \in A$ . Usando **H**, existe  $k \in G$  com  $d''(k, 1) < \epsilon$  e  $kgx = y$  assim  $kg \in S_{\epsilon, A}$  e  $y \in S_{\epsilon, A}x$ .  $\square$

Enunciaremos agora o resultado principal deste capítulo que caracteriza os conjuntos controláveis por  $\mathcal{F}$ -cadeias como intersecções de conjuntos controláveis para os semigrupos  $S_{\epsilon, A}$ .

**Teorema 1** *Suponha que  $G/H$  satisfaz **H** e seja  $\mathcal{F}$  uma família de subconjuntos de  $S$  satisfazendo  $P_l$  e  $P_r$ . Seja  $D$  um conjunto controlável efetivo para  $S$  em  $G/H$  e, para  $\epsilon > 0$  e  $A \in \mathcal{F}$ , denotemos por  $D_{\epsilon, A}$  o conjunto controlável para  $S_{\epsilon, A}$  contendo  $D$ . Então*

$$E = \bigcap_{\epsilon, A} D_{\epsilon, A}$$

*é o único conjunto controlável por  $\mathcal{F}$ -cadeias contendo  $D$ .*

**Demonstração:** Claramente,  $\text{int}E \neq \emptyset$  pois  $D \subset E$ . Temos também que para quaisquer  $x, y \in E$ ,  $y \in \text{cl}(S_{\epsilon', A}x)$  para todo  $\epsilon' > 0$  e  $A \in \mathcal{F}$ . Portanto, pela Proposição 30, existe uma  $(S, \epsilon, A)$ -cadeia de  $x$  para  $y$  para todo  $\epsilon > 0$  e  $A \in \mathcal{F}$ , o que mostra que  $E$  é transitivo por cadeias. Resta verificar a maximalidade de  $E$ . Para isto, tome  $x \notin E$  e  $y \in E$  e suponha que para todo  $\epsilon > 0$  e  $A \in \mathcal{F}$  existem  $(S, \epsilon, A)$ -cadeias de  $x$  para  $y$  e de  $y$  para  $x$ . Como  $G/H$  satisfaz **H**, a Proposição 34 mostra que  $x \in S_{\epsilon, A}y$  e  $y \in S_{\epsilon, A}x$  para todo  $\epsilon > 0$  e  $A \in \mathcal{F}$ . Entretanto,  $y \in D_{\epsilon, A}$ , assim  $x \in D_{\epsilon, A}$  para todo  $\epsilon, A$  contradizendo a hipótese de que  $x \notin E$ . Portanto, mostramos que  $E \cup \{x\}$  não está contido em nenhum conjunto controlável por cadeias e assim temos a maximalidade de  $E$ .  $\square$

A seguir, enunciaremos um corolário do resultado acima que será usado posteriormente.

**Corolário 5** *Suponha que  $G/H$  satisfaz  $\mathbf{H}$  e seja  $\mathcal{F}$  uma família de subconjuntos de  $S$ , se*

$$E = \bigcap_{\epsilon, A} D_{\epsilon, A}$$

*, onde  $D_{\epsilon, A}$  são conjuntos controláveis para  $S_{\epsilon, A}$ , e  $E$  tem pontos interiores, então  $E$  é um conjunto controlável por  $\mathcal{F}$ -cadeias.*

**Demonstração:** Segue diretamente da demonstração do teorema anterior.  $\square$

Para os conjuntos controláveis por  $\mathcal{F}$ -cadeias contendo os conjuntos controláveis invariantes, temos o resultado a seguir que melhora o teorema acima quando existe somente um conjunto controlável invariante.

**Proposição 36** *Suponha as mesmas hipóteses do teorema anterior e além disso suponha que existe um único conjunto controlável invariante para  $S$  em  $G/H$ . Consideremos as notações acima e denotemos o conjunto controlável invariante por  $D$ . Então  $D_{\epsilon, A}$  é o único conjunto controlável invariante para  $S_{\epsilon, A}$ . Temos que  $D_{\epsilon, A}$  e  $E$  são subconjuntos fechados e além disso,*

$$E = \bigcap_{\epsilon, A} (D_{\epsilon, A})_0.$$

**Demonstração:** Sabemos da Proposição 2 do Capítulo 1 que existe um único conjunto controlável invariante para  $S$  se e só se

$$\bigcap_{x \in G/H} cl(Sx) \neq \emptyset.$$

Neste caso, o conjunto controlável invariante é dado por esta intersecção. Naturalmente, um resultado semelhante é válido também para  $S_{\epsilon, A}$ , assim para mostrar a proposição é suficiente mostrar que

$$D_{\epsilon, A} \cap \bigcap_{x \in G/H} cl(S_{\epsilon, A}x) \neq \emptyset.$$

Feito isto, tomemos  $x \in G/H$  e escolhamos  $g \in intS$  tal que  $gx \in D_0$  isto é possível pois  $D \subset (intS)^{-1}x$  para todo  $x \in D_0$  (veja Proposição 1 do Capítulo 1). Como  $\mathcal{F}$  satisfaz

$P_1, g^n \in A$  para algum inteiro  $n$ . Temos que  $g^n x \in D$  já que  $D$  é invariante. Como  $D \subset D_{\epsilon, A}$ , e  $D_{\epsilon, A}$  é um conjunto controlável para  $S_{\epsilon, A}$  segue-se que  $D_{\epsilon, A} \subset cl(S_{\epsilon, A}x)$  mostrando que  $D_{\epsilon, A}$  é um conjunto controlável invariante. Para a última parte da demonstração, tome  $y \in E$  e  $x \in D_0$ . Então  $x \in (D_{\epsilon, A})_0$  para todos  $\epsilon, A$  e pela proposição 34,  $y \in S_{\epsilon, A}x$  para todos  $\epsilon, A$ . Como  $(D_{\epsilon, A})_0$  é  $S_{\epsilon, A}$ -invariante em  $D_{\epsilon, A}$  (veja Proposição 1 do Capítulo 1) temos que  $y \in (D_{\epsilon, A})_0$  para arbitrários  $\epsilon, A$ .  $\square$

## 6.2 Conjuntos controláveis por cadeias em fibrados

Iniciamos esta seção mostrando que através de fibrações equivariantes, conjuntos controláveis por cadeias são projetados em conjuntos controláveis por cadeias. Este fato será usado posteriormente na análise dos conjuntos controláveis por cadeias em variedades do tipo flag.

**Proposição 37** *Sejam  $L_1 \subset L_2$  subgrupos fechados de  $G$  e denotemos por  $\pi : G/L_1 \rightarrow G/L_2$  a fibração canônica equivariante  $\pi(gL_1) = gL_2$ . Suponha que  $G/L_1$  é compacto, e seja  $E$  um conjunto controlável por  $\mathcal{F}$ -cadeias para  $S$  em  $G/L_1$ . Então  $\pi(E)$  está contido num conjunto controlável por  $\mathcal{F}$ -cadeias para  $S$  em  $G/L_2$ .*

**Demonstração:** Como  $int E \neq \emptyset$  e  $\pi$  é uma aplicação aberta, temos que  $\pi(E)$  tem interior não vazio. Sejam  $\epsilon > 0$ ,  $A \in \mathcal{F}$  e  $x', y' \in \pi(E)$ . Mostraremos que existe uma  $(S, \epsilon, A)$ -cadeia de  $x'$  para  $y'$ . Tomemos  $x, y \in E$  tal que  $\pi(x) = x'$  e  $\pi(y) = y'$ . Como  $G/L_1$  é compacto,  $\pi$  é uniformemente contínua, ou seja, existe  $\delta > 0$  tal que se  $d(z, z') < \delta$ ,  $z, z' \in G/L_1$  então  $d(\pi(z), \pi(z')) < \epsilon$ . Sejam  $x_0 = x, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = y$  em  $G/L_1$  e  $g_0, \dots, g_{n-1}$  em  $A$  determinando uma  $(S, \delta, A)$ -cadeia de  $x$  para  $y$ . Como  $d(g_i x_i, x_{i+1}) < \delta$ , temos que  $d(\pi(g_i x_i), \pi(x_{i+1})) = d(g_i \pi(x_i), \pi(x_{i+1})) < \epsilon$ , donde concluímos que  $\pi(x_i), g_i$  determinam uma  $(S, \epsilon, A)$ -cadeia de  $x'$  para  $y'$ .

Desde que  $\pi(E)$  é transitivo por  $\mathcal{F}$ -cadeias ele está contido num conjunto controlável por  $\mathcal{F}$ -cadeias.  $\square$



Como recíproca deste resultado temos

**Proposição 38** *Seja  $\mathcal{F}$  uma família satisfazendo as propriedades  $P_l$  e  $P_r$  e  $\pi : G/L_1 \rightarrow G/L_2$  como acima e com  $G/L_1$  compacto. Suponhamos que  $F$  é um conjunto controlável por  $\mathcal{F}$ -cadeias, efetivo, para  $S$  em  $G/L_2$ . Então existe um conjunto controlável por  $\mathcal{F}$ -cadeias, efetivo, para  $S$  em  $G/L_1$  tal que  $\pi(E) \subset F$ .*

**Demonstração:** Tome  $x \in E_0$ . Então existe  $g \in \text{int}S$  tal que  $gx = x$ . A fibra sobre  $x$  é compacta e também é  $g$ -invariante. De fato, se  $y \in \pi^{-1}(x)$  então  $g\pi(y) = \pi(gy) = x$  e portanto  $gy \in \pi^{-1}(x)$ . Assim, existe um conjunto minimal para  $g$ , digamos  $M$ , nesta fibra. Como, pela Proposição 3 todo conjunto minimal está contido no interior de um conjunto controlável, existe um conjunto controlável  $D$  em  $G/L_1$  que contém  $M$ . Seja  $y$  um ponto em  $M \subset \text{int}D$ . Então  $gy \in M$ , pois  $M$  é  $g$ -invariante. Como  $gy \in (\text{int}S)D \cap D = D_0$ , temos que  $D$  é efetivo. Portanto,  $D$  está contido num conjunto controlável por  $\mathcal{F}$ -cadeias que denotaremos por  $E$ . Pela proposição anterior temos que  $\pi(E) \subset F$ .  $\square$

Como conseqüência da Proposição 36 temos que um conjunto controlável por  $\mathcal{F}$ -cadeias que contém um conjunto controlável invariante se projeta num conjunto controlável por  $\mathcal{F}$ -cadeias que contém um conjunto controlável invariante através da fibração canônica.

Mas, para mostrar isto, necessitamos de hipóteses adicionais sobre a família  $\mathcal{F}$  de subconjuntos de  $S$ .

**Definição 9** *Seja  $\mathcal{F}$  uma família de subconjuntos de  $S$ . Dizemos que  $\mathcal{F}$  satisfaz a hipótese **HP** se*

1. *Existe uma seqüência  $A_n \in \mathcal{F}$  tal que  $A_{n+1} \subset A_n$  para todo inteiro positivo  $n$*
2. *Para todo  $A \in \mathcal{F}$  existe  $n_0$ , inteiro positivo tal que  $A \subset A_{n_0}$ .*

Notemos que se  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\infty$  então  $\mathcal{F}$  satisfaz **HP**. De fato, basta tomar uma seqüência de compactos  $K_n$  em  $G$  com  $K_n \subset K_{n+1}$  para todo inteiro positivo  $n$  e tal que  $G = \bigcup_n K_n$ . Temos então que  $A_n = S \setminus K_n$  satisfaz a hipótese **HP**.

Se  $S$  é um semigrupo de controle então  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\text{control}}$  também satisfaz **HP**. De fato, seja  $T_n$  uma seqüência de números reais positivos, estritamente crescente e convergiundo para infinito. Então  $A_n = \bigcup_{t > T_n} A(t)$  satisfaz as hipóteses **HP**.

Temos então o seguinte resultado:

**Proposição 39** *Sejam  $G/H_1$  e  $G/H_2$  espaços homogêneos satisfazendo **H** com  $G/H_1$  compacto. Seja  $\mathcal{F}$  uma família de subconjuntos de  $S$  satisfazendo  $P_1, P_7$  e a hipótese **HP**. Além disso, suponha que  $G/H_1$  e  $G/H_2$  possuem um único conjunto controlável invariante. Seja  $\pi : G/H_1 \rightarrow G/H_2$  a fibração canônica. Se  $E$  e  $F$  são os conjuntos controláveis por  $\mathcal{F}$ -cadeias contendo os conjuntos controláveis invariantes então  $\pi(E) = F$ .*

**Demonstração:** Sejam  $C$  e  $D$  os conjuntos controláveis invariantes em  $G/H_1$  e  $G/H_2$ , respectivamente. Para  $\epsilon > 0$  e  $A \in \mathcal{F}$  sejam  $C_{\epsilon,A}$  e  $D_{\epsilon,A}$  os conjuntos controláveis invariantes para  $S_{\epsilon,A}$  em  $G/H_1$  e  $G/H_2$  e que contém  $C$  e  $D$ , respectivamente. Pela proposição anterior temos que  $E = \bigcap_{\epsilon,A} C_{\epsilon,A}$  e  $F = \bigcap_{\epsilon,A} D_{\epsilon,A}$ . Temos, também, pela Proposição 15 que  $\pi(C_{\epsilon,A}) = D_{\epsilon,A}$ . Como  $\pi(E) \subset F$  basta mostrar que  $F \subset \pi(E)$ . Para isto, tomemos  $z \in F$ . Então existem  $w_{\epsilon,A} \in C_{\epsilon,A}$  satisfazendo  $\pi(w_{\epsilon,A}) = z$ . Seja  $\epsilon_n$  uma seqüência, estritamente decrescente, de números reais positivos, convergiundo para zero. Desde que,  $\mathcal{F}$  satisfaz **HP** temos que existe uma seqüência  $A_n \in \mathcal{F}$  satisfazendo 1. e 2. da definição 9. Como a fibra sobre  $z$ ,  $\pi^{-1}(z)$ , é compacta temos que a seqüência  $w_{\epsilon_n, A_n}$  admite uma subsequência  $w_{\epsilon_{n_i}, A_{n_i}}$  convergente a  $w \in \pi^{-1}(z)$ . Podemos supor sem perda de generalidade que se  $i > j$  então  $n_i \geq n_j$ . Se  $m \geq n$  temos que  $\epsilon_m < \epsilon_n$  e  $A_m \subset A_n$ , já que a seqüência  $\epsilon_n$  é estritamente decrescente e  $A_n$  satisfaz **HP**. Portanto  $S_{\epsilon_m, A_m} \subset S_{\epsilon_n, A_n}$ . Concluimos então que se  $m \geq n$  então  $C_{\epsilon_m, A_m} \subset C_{\epsilon_n, A_n}$ . Desde que  $w_{\epsilon,A} \in C_{\epsilon,A}$  segue-se que  $w \in C_{\epsilon_{n_{i_0}}, A_{n_{i_0}}}$  para todo  $i_0$  e portanto  $w \in \bigcap_i C_{\epsilon_{n_i}, A_{n_i}}$ . Mostremos, agora, que  $\bigcap_{\epsilon,A} C_{\epsilon,A} = \bigcap_i C_{\epsilon_{n_i}, A_{n_i}}$ . Para isto, dado  $\epsilon > 0$  e  $A \in \mathcal{F}$  existe  $i_0$ , natural, tal que  $\epsilon_{n_{i_0}} < \epsilon$  e  $A \subset A_{n_{i_0}}$ , pois  $\mathcal{F}$  satisfaz **HP**. Conseqüentemente temos que  $C_{\epsilon_{n_{i_0}}, A_{n_{i_0}}} \subset C_{\epsilon,A}$ , o que mostra o desejado. Assim  $w \in E$  e portanto  $z \in \pi(E)$ .  $\square$

A seguir, apresentaremos para fibrações equivariantes, uma relação entre conjuntos controláveis por  $\mathcal{F}_\infty$ -cadeias na fibra e no espaço total.

Seja  $S$  um subsemigrupo de um grupo de Lie  $G$  com  $\text{int}(S) \neq \emptyset$ . Consideraremos  $H_1 \subset H_2$  como subgrupos fechados de  $G$  determinando os espaços homogêneos  $G/H_1$  e  $G/H_2$ . Suponhamos que  $S$  age em  $G/H_1$  e  $G/H_2$ . Seja  $\pi : G/H_1 \rightarrow G/H_2$  uma fibração equivariante. Usaremos a notação  $\mathcal{F}_\infty(S) = \{S - K : K \text{ é um compacto de } G\}$ . Tomemos  $y \in G/H_2$  e definamos  $S_y = G_y \cap S$ , onde  $G_y = \{g \in G : gy = y\}$  é o subgrupo de isotropia em  $y$ . Observemos que este semigrupo é o semigrupo  $S_q$  do Capítulo 1 quando  $\pi_Q : Q \rightarrow M$  é  $\pi_Q : G \rightarrow G/H_2$  e  $q$  é a identidade em  $G$  e a fibração equivariante definida inicialmente determina o fibrado associado. Temos que  $S_y$  é um semigrupo pois  $S$  é um semigrupo e  $G_y$  é um subgrupo de  $G$ . Temos também que  $\pi^{-1}(y)$  é invariante em relação a ação de  $g \in S_y$ . Com efeito, se  $x \in \pi^{-1}(y)$  e  $g \in S_y$  então  $\pi(gx) = g\pi(x) = gy = y$  e daí  $gx \in \pi^{-1}(y)$ . Podemos então considerar conjuntos controláveis para  $\mathcal{F}_\infty(S_y)$ -cadeias em  $\pi^{-1}(y)$ .

**Proposição 40** *Seja  $E$  um conjunto controlável por  $\mathcal{F}_\infty(S_y)$ -cadeias em  $\pi^{-1}(y)$ . Então  $E$  está contido num conjunto controlável por  $\mathcal{F}_\infty(S)$ -cadeias em  $G/H_1$ .*

**Demonstração:** De fato, se  $x, y \in E$  e existe uma  $(S, \epsilon, A)$ -cadeia de  $x$  para  $y$  com  $A \in \mathcal{F}_\infty(S_y)$  então existe uma  $(S, \epsilon, A)$ -cadeia de  $x$  para  $y$  com  $A \in \mathcal{F}_\infty(S)$  já que  $\mathcal{F}_\infty(S_y) \subset \mathcal{F}_\infty(S)$  pois  $S_y \subset S$ .

### 6.3 Pontos fixos e comportamento no limite

Nesta seção mostramos que se  $x$  é um ponto fixo num espaço homogêneo satisfazendo  $H$ , para um elemento no fecho de um semigrupo então  $x$  pertence a um conjunto controlável por  $\mathcal{F}_\infty$ -cadeias para este semigrupo. Apresentamos, também, um resultado que nos diz onde reside o  $w$ -limite a partir de um ponto num espaço homogêneo compacto em relação a ação de um elemento no fecho de um semigrupo.

Para isto, seja  $S$  um subsemigrupo de um grupo de Lie  $G$  com pontos interiores. Aqui, estamos interessados somente em conjuntos controláveis por  $\mathcal{F}_\infty$ -cadeias.

Necessitamos do seguinte Lema

**Lema 2** *Seja  $g$  um elemento em  $fe(S)$ . Então são equivalentes:*

1.  $fe\{g^n \mid n \text{ é natural}\}$  não é um subgrupo compacto de  $fe(S)$ .
2.  $\exists n$ , natural, tal que  $g^n$  está fora de qualquer compacto de  $G$ .

**Demonstração:** Mostremos, inicialmente que 1. implica 2. Suponhamos, por absurdo que para todo  $n$ , natural,  $g^n \in K$ , para algum compacto  $K$  de  $G$ . Então  $fe\{g^n \mid n \text{ é natural}\} \subset K$  e  $fe\{g^n \mid n \text{ é natural}\}$  é um semigrupo compacto de  $fe(S)$  e portanto um subgrupo compacto, o que é uma contradição.

Para mostrar que 2. implica 1. basta observar que  $g^n \in fe\{g^n \mid n \text{ é natural}\}$  e  $fe\{g^n \mid n \text{ é natural}\}$  não pode ser compacto.  $\square$

Observe que se  $fe\{g^n \mid n \text{ é natural}\}$  é um subgrupo compacto de  $fe(S)$  então este subgrupo está contido no bordo de  $fe(S)$ , ou seja em  $fe(S) \cap fe(S)^{-1}$ . Portanto, para  $g \in fe(S)$  a hipótese de que existe  $n$ , natural, tal que  $g^n$  está fora de qualquer compacto de  $G$  está dentro do nosso contexto. Portanto, daqui por diante, suporemos que se  $g \in fe(S)$  então existe  $n$ , natural tal que  $g^n$  está fora de qualquer compacto de  $G$ . Teremos então:

**Proposição 41** *Se  $x$  é um ponto fixo para  $g \in fe(S)$  num espaço homogêneo  $G/H$  satisfazendo **H** então  $x$  pertence a um conjunto controlável por  $\mathcal{F}_\infty$ -cadeias.*

**Demonstração:** Como, por hipótese  $g \in fe(S)$ , existe  $n$  natural, tal que  $g^n$  está fora de qualquer compacto de  $G$  e portanto temos que  $g^n \in intS_{\epsilon,A}$  para todo  $\epsilon > 0, A \in \mathcal{F}_\infty$ . Assim  $g^n x = x$  e portanto  $x \in (D_{\epsilon,A})_0$ , para todo  $\epsilon > 0, A \in \mathcal{F}_\infty$ . Aqui,  $D_{\epsilon,A}$  é um conjunto controlável para  $S_{\epsilon,A}$  em  $G/H$ . Logo teremos que  $x \in \bigcap_{\epsilon,A} (D_{\epsilon,A})_0 \subset \bigcap_{\epsilon,A} D_{\epsilon,A}$  e pelo Corolário 5 temos que  $\bigcap_{\epsilon,A} D_{\epsilon,A}$  é um conjunto controlável por  $\mathcal{F}_\infty$ -cadeias.  $\square$

Suponhamos, agora, que  $S$  é um semigrupo difeomorfismos de um espaço homogêneo compacto  $G/H$  e que  $S$  é subsemigrupo de um grupo de Lie  $G$ , com interior não vazio

em  $G$ . Se  $g$  é um elemento no grupo de Lie  $G$  e  $x$  é um ponto arbitrário em  $G/H$ , então denotaremos por  $w(x, g)$  o  $w$ -limite em relação a ação de  $g$ , ou seja

$$y \in w(x, g) \Leftrightarrow \text{existe uma subsequência } g^{n_i} \text{ com } g^{n_i} x \rightarrow y$$

Sabemos que

$$w(x, g) = \bigcap_n fe\{g^r(x) \mid r \geq n\}$$

Precisaremos do seguinte lema

**Lema 3** *Suponha que  $x$  pertence a um espaço homogêneo compacto  $G/H$  e  $g \in \text{int}S$ . Então existe  $n_0$ , natural positivo e um conjunto controlável efetivo  $D$ , tal que  $g^n x \in D_0$  para todo  $n \geq n_0$ .*

**Demonstração:** Sabemos de [33] Proposição 2.13 que existe  $n_1$ , natural, tal que  $g^n x \in \text{int}D$  para todo  $n \geq n_1$ . Tome  $n \geq n_1$ . Como  $g \in \text{int}S$  temos que  $gg^n x = g^{n+1} x \in (\text{int}S)D \cap D = D_0$ . Seja então  $n_0 = n_1 + 1$ . Por indução temos  $g^n x \in D_0 \forall n \geq n_0$ .  $\square$

Como corolário do lema acima temos

**Corolário 6**  $w(x, g) \subset fe(D)$ , onde  $D$  é um conjunto controlável para  $S$  em  $G/H$ .

**Demonstração:**  $D_0$  é denso em  $D$ .  $\square$

Como consequência temos o seguinte resultado

**Proposição 42** *Sejam  $x \in G/H$  e  $g \in fe(S)$ . Então existem conjuntos controláveis para  $S_{\epsilon, A}$ ,  $\epsilon > 0$ ,  $A \in \mathcal{F}_\infty$  em  $G/H$  que serão denotados por  $D_{\epsilon, A}$  e tal que*

$$w(x, g) \subset \bigcap_{\epsilon, A} fe(D_{\epsilon, A}).$$

**Demonstração:** Como  $g \in fe(S)$  existe  $n_0$ , natural, tal que  $g^{n_0} \in \text{int}S_{\epsilon, A}$ ,  $\epsilon > 0$ ,  $A \in \mathcal{F}_\infty$ . Portanto existem conjuntos de controle para  $S_{\epsilon, A}$ , denotados por  $D_{\epsilon, A}$ , tal que  $w(x, g^{n_0}) \subset fe(D_{\epsilon, A})$ ,  $\forall \epsilon > 0, \forall A \in \mathcal{F}_\infty$ . Logo teremos que

$$w(x, g) \subset w(x, g^{n_0}) \subset \bigcap_{\epsilon, A} fe(D_{\epsilon, A})$$

□.

## 6.4 Transitividade por cadeias

Apresentamos, nesta seção, um resultado, que achamos ser útil, sobre transitividade por cadeias em espaços homogêneos. Para isto, achamos conveniente, embora não seja necessário, definir recorrência por cadeias.

Seja  $\mathcal{F}$  uma família qualquer de subconjuntos de  $S$ . Se  $x \in G/H$  definimos  $\Omega(x) = \{y \in G/H \mid \forall \epsilon > 0, \forall A \in \mathcal{F} \text{ existe uma } (S, \epsilon, A)\text{-cadeia de } x \text{ para } y\}$ . Dizemos que  $G/H$  é recorrente por  $\mathcal{F}$ -cadeias se  $x \in \Omega(x), \forall x \in G/H$ .

**Proposição 43** *Se  $G/H$  é recorrente por  $\mathcal{F}$ -cadeias então  $G/H$  é transitivo por  $\mathcal{F}$ -cadeias.*

**Demonstração:** Sejam  $\epsilon > 0, A \in \mathcal{F}$ , e  $x, y \in G/H$ . Como estamos admitindo que  $G/H$  é conexo, existe um caminho  $\alpha : [0, 1] \rightarrow G/H$  com  $\alpha(0) = x$  e  $\alpha(1) = y$ . Seja  $l$  o comprimento de  $\alpha$ . Se  $l < \frac{\epsilon}{2}$  então  $d(x, y) < \frac{\epsilon}{2}$ , e como existe uma  $(S, \frac{\epsilon}{2}, A)$ -cadeia de  $x$  para  $x$  temos que também existe uma  $(S, \epsilon, A)$ -cadeia de  $x$  para  $y$ . Suponhamos que  $l > \frac{\epsilon}{2}$  e escolhamos  $t_0 = 0, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n = 1$  tal que  $d(\alpha(t_j), \alpha(t_{j+1})) < \frac{\epsilon}{2}, j = 0, \dots, n$ . Definamos  $y_j = \alpha(t_j)$ . Como  $G/H$  é recorrente por  $\mathcal{F}$ -cadeias existe uma  $(S, \frac{\epsilon}{2}, A)$ -cadeia de  $y_j$  para  $y_{j+1}$  e portanto uma  $(S, \epsilon, A)$ -cadeia de  $x$  para  $y$ . □

Teremos então o seguinte resultado sobre transitividade por  $\mathcal{F}_{\text{control}}$ -cadeias.

**Proposição 44** *Seja  $S$  um semigrupo de controle. Suponha que  $1$  é  $w$ -limite de alguma trajetória do sistema de controle começando na identidade. Então  $G/H$  é transitivo por  $\mathcal{F}_{\text{control}}$ -cadeias.*

**Demonstração:** Pela Proposição anterior basta mostrar que  $G/H$  é recorrente por cadeias. Para isto, tomemos  $x \in G/H, \epsilon > 0$ , e  $A \in \mathcal{F}_{\text{control}}$ . Como  $1$  é  $w$ -limite de alguma trajetória iniciando na identidade, existe  $u \in U$  e uma seqüência  $t_n \rightarrow \infty$  com

$\pi(1, u, t_n) \rightarrow 1$ . Portanto  $\pi(1, u, t_n)x \rightarrow x$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Como  $A = \bigcup_{t \in T} A(t)$  e  $t_n \rightarrow \infty$ , existe  $n_0$ , natural, tal que  $\pi(1, u, t_{n_0}) \in A$  e  $d(\pi(1, u, t_{n_0})x, x) < \epsilon$ . Portanto  $x_0 = x$ ,  $x_1 = x$  e  $g_0 = \pi(1, u, t_{n_0})$  determinam uma  $(S, \epsilon, A)$ -cadeia de  $x$  para  $x$ .  $\square$

# Capítulo 7

## Conjuntos Controláveis por Cadeias em Variedades Flag

A caracterização dos conjuntos controláveis por cadeias como intersecção de conjuntos controláveis permite-nos contar o número de conjuntos controláveis por cadeias, efetivos, numa variedade flag. Faremos isto, neste capítulo, utilizando as técnicas sobre conjuntos controláveis desenvolvidas em [29].

Obteremos, também, informação sobre a geometria do conjunto controlável por cadeia que contém o conjunto controlável invariante.

Além disso, apresentamos alguns resultados que nos dizem quando um semigrupo é transitivo por cadeias numa variedade flag.

### 7.1 Determinação do número de conjuntos controláveis por cadeias

Para  $\epsilon > 0$  e um subconjunto  $A \in \mathcal{F}$ , seja  $W_{\epsilon, A}$  o subgrupo  $W(S_{\epsilon, A})$  associado ao



semigrupo  $S_{\epsilon,A}$ . Consideramos também o subgrupo

$$W_{\mathcal{F}}(S) = \bigcap_{\epsilon,A} W_{\epsilon,A}.$$

Daqui por diante supomos que a família  $\mathcal{F}$  satisfaz tanto  $P_l$  quanto  $P_r$ . Como as variedades flag satisfazem  $\mathbf{H}$ , estamos na situação exigida pelo Teorema 1.

Para os conjuntos controláveis por  $\mathcal{F}$ -cadeias, o subgrupo  $W_{\mathcal{F}}(S)$  desempenha o mesmo papel que  $W(S)$  para os conjuntos controláveis. De fato, para cada  $w \in W$ , seja  $E_w$  o único conjunto controlável por  $\mathcal{F}$ -cadeias efetivo em  $B$  e que contém  $D_w$ , e para um subconjunto  $\Theta$  do sistema simples de raízes, seja  $E_w^\Theta$  o conjunto controlável por  $\mathcal{F}$ -cadeias que contém  $D_w^\Theta$ . Com as notações acima, os resultados para conjuntos controláveis de [29] estendem-se para conjuntos controláveis por cadeias como veremos a seguir.

**Proposição 45** *Com as notações acima, temos*

1.  $W_{\mathcal{F}}(S) = \{w \in W : E_w = E_1\}$ .
2.  $W_{\mathcal{F}}(S)w_1 = W_{\mathcal{F}}(S)w_2$  se e só se  $E_{w_1} = E_{w_2}$ .

**Demonstração:**

1. Para  $\epsilon > 0$ ,  $A \in \mathcal{F}$ , e  $w \in W$ , seja  $D_w^{\epsilon,A}$  o conjunto controlável correspondente a  $S_{\epsilon,A}$  em  $B$ . Por definição,  $w \in W_{\mathcal{F}}(S)$  se e só se  $w \in W_{\epsilon,A}$  para todos  $\epsilon, A$ , e isto é válido se e só se  $D_w^{\epsilon,A} = D_1^{\epsilon,A}$ . Portanto,  $w \in W_{\mathcal{F}}(S)$  se e somente se

$$\bigcap_{\epsilon,A} D_w^{\epsilon,A} = \bigcap_{\epsilon,A} D_1^{\epsilon,A}.$$

O que mostra o primeiro enunciado, já que pelo Teorema 1 o lado esquerdo da desigualdade é  $E_w$  enquanto o lado direito é  $E_1$ .

2.  $W_{\mathcal{F}}(S)w_1 = W_{\mathcal{F}}(S)w_2$  se e só se  $w_2w_1^{-1} \in W_{\mathcal{F}}(S) = \bigcap_{\epsilon,A} W_{\epsilon,A}$  para todo  $\epsilon, A$ , o que vale se e só se  $W_{\epsilon,A}w_1 = W_{\epsilon,A}w_2$ , que, por outro lado pela Proposição 6 do

Capítulo 1 é equivalente a  $D_{w_1}^{\epsilon, A} = D_{w_2}^{\epsilon, A}$  para todos  $\epsilon, A$ . O Teorema 1 mostra então que  $E_{w_1} = E_{w_2}$ .  $\square$

**Proposição 46** *Mantendo-se as notações acima, temos que  $E_{w_1}^\Theta = E_{w_2}^\Theta$  se e só se  $W_{\mathcal{F}}(S)w_1W_\Theta = W_{\mathcal{F}}(S)w_2W_\Theta$ .*

**Demonstração:** É análoga a da proposição acima utilizando a Proposição 9 do Capítulo 1.  $\square$

Estes resultados trazem como consequência que o número de conjuntos controláveis por  $\mathcal{F}$ -cadeias, efetivos, é determinado por  $W_{\mathcal{F}}(S)$ .

**Corolário 7** *Na fronteira maximal  $B$  o número de conjuntos controláveis por  $\mathcal{F}$ -cadeias, efetivos, é igual ao número de elementos no espaço quociente  $W_{\mathcal{F}}(S)\backslash W$  enquanto o número de conjuntos controláveis por  $\mathcal{F}$ -cadeias, efetivos, na fronteira  $B_\Theta$  é igual a ordem do espaço quociente duplo  $W_{\mathcal{F}}(S)\backslash W/W_\Theta$ .  $\square$*

Além da informação fornecida sobre o número de conjuntos controláveis por cadeias, o subgrupo  $W_{\mathcal{F}}(S)$  também nos dá informação sobre a geometria do conjunto controlável por cadeia que contém o conjunto controlável invariante. Temos, da Proposição 7 do Capítulo 1 que  $W(S)$  é o subgrupo gerado por um subconjunto  $\Theta$  do sistema simples de raízes, isto se a câmara básica  $A^+$  é escolhida interceptando  $\text{int}S$ . Fixando-se esta câmara, o fato de que  $\mathcal{F}$  satisfaz  $P_l$  ou  $P_r$  implica que ela também intercepta  $\text{int}S_{\epsilon, A}$  para todos  $\epsilon, A$ . Portanto,  $W_{\epsilon, A}$  também é gerado pelas reflexões de um subconjunto, digamos  $\Theta_{\epsilon, A}$ , do sistema simples de raízes associado a  $A^+$ , assim,  $W_{\epsilon, A} = W_{\Theta_{\epsilon, A}}$ . Temos o seguinte lema técnico sobre as intersecções dos subgrupos  $W_\Theta$

**Lema 4** *Dada qualquer família  $\{\Theta_i\}_{i \in I}$  de subconjuntos de um sistema simples de raízes, temos*

$$\cap_i W_{\Theta_i} = W_{\cap_i \Theta_i}.$$

**Demonstração:** De fato,  $w$  pertence ao subgrupo  $W_\Theta$  se e só se  $wH = H$  para todo  $H$  no subespaço  $\Theta^\perp$  de  $\mathfrak{a}$  anulado por  $\Theta$  (veja [36] Teorema 1.1.2.8). Como os  $\Theta_i$ 's são

subconjuntos de um sistema simples de raízes, temos que  $(\cap_i \Theta_i)^\perp = \sum_i \Theta_i^\perp$ . Portanto, se  $w$  pertence a  $\cap_i W_{\Theta_i}$ , ele fixa os elementos em  $(\cap_i \Theta_i)^\perp$ . Isto mostra que  $\cap_i W_{\Theta_i} \subset W_{\cap_i \Theta_i}$ . Como a outra inclusão é imediata, temos a igualdade.  $\square$

Aplicando este lema aos subgrupos  $W_{\epsilon, A}$ , obtemos que  $W_{\mathcal{F}}(S)$  é gerado pelas reflexões definidas por algum subconjunto do sistema simples de raízes.

**Proposição 47** *Suponha que  $\mathcal{F}$  satisfaz  $P_l$  e  $P_r$  e tomemos uma câmara básica  $A^+$  tal que  $A^+ \cap \text{int}S \neq \emptyset$ . Seja  $\Theta_{\epsilon, A}$  o subconjunto do sistema simples de raízes associado a  $A^+$  tal que  $W_{\epsilon, A} = W_{\Theta_{\epsilon, A}}$  e defina  $\Theta_{\mathcal{F}} = \cap_{\epsilon, A} \Theta_{\epsilon, A}$ . Então*

$$W_{\mathcal{F}}(S) = W_{\Theta_{\mathcal{F}}}.$$

Além disso, seja  $B_{\Theta_{\mathcal{F}}}$  a variedade flag correspondente a  $\Theta_{\mathcal{F}}$ , e denotemos por  $E_{\Theta_{\mathcal{F}}}$  o conjunto controlável por  $\mathcal{F}$ -cadeias em  $B_{\Theta_{\mathcal{F}}}$  que contém o conjunto controlável invariante. Então

$$E = \pi^{-1}(E_{\Theta_{\mathcal{F}}})$$

onde  $E$  é o conjunto controlável por  $\mathcal{F}$ -cadeias em  $B$  contendo o conjunto controlável invariante e  $\pi : B \rightarrow B_{\Theta_{\mathcal{F}}}$  é a fibração canônica.

**Demonstração:** A demonstração de que  $W_{\mathcal{F}}(S) = W_{\Theta_{\mathcal{F}}}$  é imediata a partir do lema anterior. Temos da Proposição 7 que  $D_{\epsilon, A} = \pi^{-1}(D_{\epsilon, A}^{\Theta_{\epsilon, A}})$  onde  $D_{\epsilon, A}$  é o conjunto controlável invariante para  $S_{\epsilon, A}$  em  $B$  e  $D_{\epsilon, A}^{\Theta_{\epsilon, A}}$  é o conjunto controlável invariante para  $S_{\epsilon, A}$  na fronteira  $B_{\Theta_{\epsilon, A}}$  correspondente a  $\Theta_{\epsilon, A}$ . Como  $\Theta_{\mathcal{F}} \subset \Theta_{\epsilon, A}$ , segue-se que  $B_{\Theta_{\mathcal{F}}}$  fibra-se sobre  $B_{\Theta_{\epsilon, A}}$  assim  $D_{\epsilon, A}$  também é a imagem inversa do conjunto controlável invariante para  $S_{\epsilon, A}$  em  $B_{\Theta_{\mathcal{F}}}$  o qual é denotado por  $D_{\epsilon, A}^{\Theta_{\mathcal{F}}}$ . Mas,  $D_{\epsilon, A}$  e  $D_{\epsilon, A}^{\Theta_{\mathcal{F}}}$  contém os conjuntos controláveis invariantes para  $S$  em  $B$  e em  $B_{\Theta_{\mathcal{F}}}$  respectivamente. Logo  $E = \cap_{\epsilon, A} D_{\epsilon, A} = \pi^{-1}(\cap_{\epsilon, A} D_{\epsilon, A}^{\Theta_{\mathcal{F}}}) = \pi^{-1}(E_{\Theta_{\mathcal{F}}})$ .  $\square$

Como exemplos dos resultados acima teremos

**Exemplo 5** *Seja  $G = Sl(n, \mathbb{R})$  (veja o Exemplo 2). Temos que  $B_{\Theta}$  pode ser visto como*

$F^n(1, \dots, i_1 - 1, j_1 + 1, \dots, i_k - 1, j_k + 1, j_k + 2, \dots, n)$ , onde  $F^n(r_1, \dots, r_s)$  é a variedade de flags  $V_1 \subset \dots \subset V_s$  com  $V_i$  subespaço euclidiano de dimensão  $r_i$ .

Sabemos que a ordem de  $W_\Theta$  é dada por  $|W_\Theta| = (j_1 - i_1 + 2)! \dots (j_k - i_k + 2)!$ . O Corolário 7 nos diz que o número de conjuntos controláveis por  $\mathcal{F}$ -cadeias efetivos em  $B_\Theta$  é no máximo a ordem de  $W/W_\Theta$ , que é  $n! / (j_1 - i_1 + 2)! \dots (j_k - i_k + 2)!$ . Caso  $B_\Theta$  seja o espaço projetivo  $RP^{n-1}$ , temos que  $\Theta = \Pi(2, n-1)$  e portanto existem no máximo  $n$  conjuntos controláveis por  $\mathcal{F}$ -cadeias, efetivos, em  $RP^{n-1}$ . Se  $B_\Theta = Gr_k(n)$  é a grassmanniana dos subespaços de dimensão  $k$  em  $R^n$  temos que  $\Theta = \Pi(1, k-1) \cup \Pi(k+1, n-1)$  e portanto existem no máximo  $n! / k!(n-k)! = \binom{n}{k}$  conjuntos controláveis por  $\mathcal{F}$ -cadeias efetivos nos flags minimais  $Gr_k(n)$ . Mais especificamente tomemos  $G = Sl(3, R)$ . Neste caso, existem três fronteiras, a maximal  $F^3(1, 2)$ , e duas minimais que são o espaço projetivo  $RP^2$  e a Grassmanniana  $Gr_2(3)$ . Para  $\Theta_1 = \Pi(1, 1)$  e  $\Theta_2 = \Pi(2, 2)$  temos que  $B_{\Theta_1} = Gr_2(3)$  e  $B_{\Theta_2} = RP^2$ . Assim  $W_{\Theta_1} = \{1, (1, 2)\}$  e  $W_{\Theta_2} = \{1, (2, 3)\}$ . Como  $W_{\mathcal{F}}(S)$  é um subgrupo de  $W$ , pela proposição 47 existem quatro possibilidades para  $W_{\mathcal{F}}(S)$  que são  $W_{\Theta_1}, W_{\Theta_2}, \{1\}$  ou  $W$ . No flag maximal temos que  $W_\Theta = \{1\}$  e  $W = W/W_\Theta$  tem 6 elementos. Logo, assumindo que  $W_{\mathcal{F}}(S) = W_{\Theta_2}$  existem  $|W_{\mathcal{F}}(S)/W| = 3$  conjuntos controláveis por  $\mathcal{F}$ -cadeias efetivos no flag maximal. Se  $E$  é o conjunto controlável por  $\mathcal{F}$ -cadeias que contém o conjunto controlável invariante então  $E = E_{(2,3)}$ . Temos também que  $E_{(1,2)} = E_{(1,3,2)}, E_{(1,3)} = E_{(1,2,3)}$  e  $E = E_{(2,3)}$  são os conjuntos controláveis por  $\mathcal{F}$ -cadeias efetivos no flag maximal.

**Exemplo 6** Seja  $G = Sp(n, R)$  o grupo real simplético (veja 4.1). Denotamos por  $L_k(n)$  o conjunto dos subespaços isotrópicos de dimensão  $k$  em  $R^{2n}$ . Sabemos que  $L_k(n)$  são variedades flag com álgebras de isotropia  $\mathfrak{p}_\Theta$  descritas em 4.1. Para  $\Theta = \Sigma - \{\lambda_k - \lambda_{k+1}\}$  com  $k \leq n-1$  temos que a ordem de  $W_\Theta$  é  $(k)! \cdot 2^{n-k} (n-k)!$ . Portanto o Corolário 7 nos diz que existem no máximo  $2^n n! / k! \cdot 2^{n-k} (n-k)! = 2^k \cdot n! / k!(n-k)! = 2^k \binom{n}{k}$  conjuntos controláveis por  $\mathcal{F}$ -cadeias efetivos em  $L_k(n)$ .

Para  $\Theta = \Sigma - \{2\lambda_n\}$  temos que  $W_\Theta$  é o grupo de permutações em  $n$  elementos.

Portanto o Corolário 7 nos diz que existem no máximo  $2^n$  conjuntos controláveis por  $\mathcal{F}$ -cadeias efetivos em  $L_n(n)$ .

Determinemos o número máximo de conjuntos controláveis por  $\mathcal{F}$ -cadeias efetivos em qualquer flag  $B_\Theta$ . Para isto, seja  $\Pi(i, j) = \{\lambda_r - \lambda_{r+1} : i \leq r \leq j \text{ e } j < n\}$ . Temos que qualquer  $\Theta \subset \Pi$  é uma das uniões disjuntas  $\Theta = \Pi(i_1, j_1) \cup \dots \cup \Pi(i_k, j_k) \cup \{2\lambda_n\}$  ou  $\Theta = \Pi(i_1, j_1) \cup \dots \cup \Pi(i_k, j_k)$  com  $j_l + 1 < i_{l+1}$  para todo  $l = 1, \dots, k - 1$  e  $k \leq n - 1$ . Se  $\Theta = \Pi(i_1, j_1) \cup \dots \cup \Pi(i_k, j_k)$  temos que  $W_\Theta$  é o produto direto dos grupos de permutações dos conjuntos  $\{i_l, \dots, j_l + 1\}$  e portanto  $|W_\Theta| = (j_1 - i_1 + 2)! \dots (j_k - i_k + 2)!$ . Assim o número de conjuntos controláveis por  $\mathcal{F}$ -cadeias efetivos em  $B_\Theta$  é no máximo a ordem de  $W/W_\Theta$  que é  $2^n n! / (j_1 - i_1 + 2)! \dots (j_k - i_k + 2)!$ . Se  $\Theta = \Pi(i_1, j_1) \cup \dots \cup \Pi(i_k, j_k) \cup \{2\lambda_n\}$  temos duas possibilidades a considerar:  $j_k = n - 1$  ou  $j_k < n - 1$ . Se  $j_k = n - 1$  temos que  $|W_\Theta| = (j_1 - i_1 + 2)! \dots (j_{k-1} - i_{k-1} + 2)!(n - i_k)! 2^{n-i_k}$ . Logo existem no máximo  $2^k n! / (j_1 - i_1 + 2)! \dots (j_{k-1} - i_{k-1} + 2)!(n - i_k)!$  conjuntos controláveis efetivos por  $\mathcal{F}$ -cadeias em  $B_\Theta$ . Se  $j_k < n - 1$  a ordem de  $W_\Theta$  será  $(j_1 - i_1 + 2)! \dots (j_k - i_k + 2)! 2$  e existem no máximo  $2^{n-1} n! / (j_1 - i_1 + 2)! \dots (j_k - i_k + 2)!$  conjuntos controláveis por  $\mathcal{F}$ -cadeias efetivos em  $B_\Theta$ .

**Exemplo 7** Os grupos de Lie simples não compactos. Seja  $\mathcal{F}$  uma família de subconjuntos contida num semigrupo de interior não vazio contido num grupo de Lie simples não compacto e real. O número máximo de conjuntos controláveis por  $\mathcal{F}$ -cadeias numa variedade flag do grupo pode ser determinado através da tabela 1 que determina a ordem de  $W/W_\Theta$ .

## 7.2 Transitividade por cadeias.

Iniciamos esta seção com alguns comentários sobre transitividade por cadeias em variedades flag.

Mostrou-se em [25] Teorema 4.2 que o único semigrupo com interior não vazio de

$G$  que satisfaz  $W(S) = W$  é o próprio  $G$  caso  $G$  tenha centro finito. Como a ação do centro de  $G$  é trivial, temos que se  $W(S) = W$  então  $S$  é transitivo em qualquer fronteira. Como  $W_{\mathcal{F}}(S) = \bigcap W_{\epsilon, A}$ , segue-se que se  $W_{\mathcal{F}}(S) = W$  então os semigrupos  $S_{\epsilon, A}$  são transitivos nas variedades flag. Assim a igualdade  $W_{\mathcal{F}}(S) = W$  implica que  $S$  é transitivo por  $\mathcal{F}$ -cadeias em qualquer variedade flag já que os conjuntos controláveis por cadeias são intersecções de conjuntos controláveis para  $S_{\epsilon, A}$ . Reciprocamente, suponha que  $S$  é transitivo por  $\mathcal{F}$ -cadeias em alguma fronteira. Então  $S_{\epsilon, A}$  é transitivo nesta fronteira para quaisquer  $\epsilon > 0$  e  $A \in \mathcal{F}$ . Pela Proposição 10 temos que se  $G$  é simples e tem centro finito então o único semigrupo que é transitivo em alguma fronteira é o próprio  $G$ . Novamente, o fato de que o centro de  $G$  é finito não é relevante já que a ação do centro nas variedades flag é trivial. Portanto, como  $G$  é simples,  $S_{\epsilon, A} = G$ ,  $S_{\epsilon, A}$  é transitivo em qualquer fronteira para todos  $\epsilon, A$ , e se  $S$  é transitivo por cadeias em alguma variedade flag então  $W_{\mathcal{F}}(S) = W$ . Resumindo, temos

**Proposição 48** *Supondo as condições acima sobre  $\mathcal{F}$ , então  $W_{\mathcal{F}}(S) = W$  implica que  $S$  é transitivo por  $\mathcal{F}$ -cadeias em qualquer variedade flag. Reciprocamente, se  $S$  é transitivo por  $\mathcal{F}$ -cadeias em alguma variedade flag e  $G$  é simples então  $W_{\mathcal{F}}(S) = W$ .  $\square$*

É interessante ter condições assegurando que um semigrupo seja transitivo por cadeias nas fronteiras. Foi mostrado em [25] Lema 4.1 que um semigrupo é transitivo nas variedades flag (e é na verdade o grupo todo se este tem centro finito) caso ele continha em seu interior um elemento nilpotente. Como os conjuntos controláveis por cadeias são intersecções de conjuntos controláveis de um semigrupo gerado por vizinhanças de subconjuntos, é natural que um semigrupo seja transitivo por cadeias se ele contém, não necessariamente no seu interior, elementos nilpotentes.

**Proposição 49** *Seja  $\mathcal{F}$  uma família de subconjuntos de  $S$  e suponha que para todo  $A \in \mathcal{F}$ , existe  $n \in A$  tal que  $n = \exp X$  e  $ad(X)$  é nilpotente em  $\mathfrak{g}$ . Então  $S$  é transitivo por  $\mathcal{F}$ -cadeias em qualquer variedade flag.*

**Demonstração:** Os semigrupos  $S_{\epsilon, A}$  são gerados por uma vizinhança de  $A$ . Assim  $n \in \text{int}S_{\epsilon, A}$  admitindo-se que  $n$  é como no enunciado. Segue-se então de [25] Lema 4.1 que  $S_{\epsilon, A}$  é transitivo nas fronteiras. Pela Proposição 30 temos que  $S$  é transitivo por cadeias.  $\square$

Um caso coberto por esta proposição é o caso em que  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\infty$  e o semigrupo contém um elemento  $n$  tal que  $n = \exp X$  e  $\text{ad}(X)$  é nilpotente em  $\mathfrak{g}$ . Como o subconjunto  $\{n^k : k \geq 1\}$  não é compacto, e  $n^k$  também é a exponencial de um elemento nilpotente, a hipótese da proposição anterior é verdadeira para todo  $A \in \mathcal{F}_\infty$ .

Como um exemplo de um semigrupo satisfazendo as condições acima temos:

**Exemplo 8** *Seja  $Sl^+(n, \mathbb{R})$  o semigrupo das matrizes em  $Sl(n, \mathbb{R})$  que tem entradas positivas. Este semigrupo tem interior não vazio e contém as matrizes triangulares superiores cujos elementos na diagonal são iguais a 1. Como tal matriz é a exponencial de uma matriz  $X$  com  $\text{ad}(X)$  nilpotente, segue-se que  $Sl^+(n, \mathbb{R})$  é transitivo por  $\mathcal{F}_\infty$ -cadeias em qualquer variedade flag. Observe que isto é verdadeiro apesar da não transitividade de  $Sl^+(n, \mathbb{R})$ .*

De modo a apresentar outra técnica para determinar transitividade por cadeias, consideraremos os seguintes exemplos de semigrupos de  $Sl(n, \mathbb{R})$ .

**Exemplo 9** *Seja  $W$  um cone pontual de interior não vazio em  $\mathbb{R}^n$ . Isto significa que  $W$  é um cone convexo que não contém subespaços de dimensão positiva. Defina*

$$S_W = \{g \in Sl(n, \mathbb{R}) : gW \subset W\}.$$

*Tome  $v \in W, v \neq 0$  e complemente-o a uma base  $\beta = \{v, e_2, \dots, e_n\}$  tal que o subespaço gerado por  $\{e_2, \dots, e_n\}$  tenha intersecção nula com  $W$ . Seja  $H_v$  a aplicação linear que na base  $\beta$  é  $\text{diag}\{n-1, -1, \dots, -1\}$ . Afirmamos que  $\exp(tH_v) \in W$  para todos  $t \geq 0$ . De fato, tome  $w \in W$  e escreva  $w = a_1v + \dots + a_n e_n$ . A escolha de  $\beta$  implica que  $a_1 > 0$ . Mas*

$$e^{tH_v}w = e^{-t}(e^{nt} - 1)a_1v + e^{-t}w$$

isto mostra que  $\exp(tH_v)w \in W$ . No caso em que  $v \in \text{int}W$  esta igualdade mostra além disso que  $\exp(tH_v)w \in \text{int}W$ . Este fato juntamente com um argumento simples envolvendo a continuidade da ação de  $Sl(n, \mathbb{R})$  assegura que se  $v \in \text{int}W$  então  $\exp(tH_v) \in S_W$ , e portanto  $S_W$  tem interior não vazio. Mas,  $\exp(tH_v)$  pertence a um subgrupo euclidiano de  $Sl(n, \mathbb{R})$  e seu atrator no espaço projetivo é a reta gerada por  $v$ . Disto segue-se que  $S_W$  tem somente dois conjuntos controláveis quando age no espaço projetivo. O conjunto controlável invariante  $C$  é o conjunto das retas contidas em  $W \cup -W$ , enquanto o outro conjunto controlável é o complemento de  $C$  em  $\mathbb{R}P^{n-1}$  (veja [29] Teorema 6.11 para detalhes).

Mostraremos que  $S_W$  é transitivo por  $\mathcal{F}_\infty$ -cadeias em  $\mathbb{R}P^{n-1}$  e portanto, pela proposição 48, em qualquer variedade flag. De fato, para qualquer  $A \in \mathcal{F}_\infty$  e  $\epsilon > 0$  os conjuntos controláveis para  $S_W$  estão contidos nos conjuntos controláveis para  $(S_W)_{\epsilon, A}$ . Agora, tomemos  $v$  na fronteira de  $W$ . Então para  $t > 0$  suficientemente grande  $\exp(tH_v) \in A$  já que  $\exp(tH_v)$  não está contido em nenhum subconjunto compacto. Portanto,  $\exp(tH_v) \in \text{int}(S_W)_{\epsilon, A}$  e como seu atrator em  $\mathbb{R}P^{n-1}$  é reta gerada por  $v$ , segue-se que esta reta está no interior do conjunto controlável invariante para  $(S_W)_{\epsilon, A}$ , que portanto intercepta o complemento de  $C$ . Isto mostra que  $(S_W)_{\epsilon, A}$  tem um único conjunto controlável invariante e portanto é transitivo no espaço projetivo. Como  $\epsilon, A$  foram tomados arbitrariamente, segue-se que  $S_W$  é transitivo por  $\mathcal{F}_\infty$ -cadeias em  $\mathbb{R}P^{n-1}$  e portanto em qualquer variedade flag.



# Bibliografia

- [1] Arnold, L. W., Kliemann, E. e Oeljeklaus, E.: *Lyapunov exponents of linear stochastic systems*. Em *Lyapunov Exponents* (Arnold, L. and Wihstutz, V. eds.). Lecture Notes in Mathematics 1186 Springer-Verlag (1986)
- [2] Arnold, V.I.: *Mathematical methods of classical mechanics*. Graduate Texts in Mathematics 60 Springer-Verlag (1978)
- [3] Assouadi, R. El e J.P. Gauthier: *Controllability of right invariant systems on real simple Lie groups of Type  $F_4, G_2, C_n$ , e  $B_n$* . Mathematics of Control Signals Systems (1988) 1: 293-301.
- [4] Barros, C.J.B. e San Martin, L.A.B.: *Chain control sets for semigroup actions on homogeneous spaces*. Relatório Técnico UNICAMP 31 (1994).
- [5] Barros, C.J.B. e San Martin, L.A.B.: *On the number of control sets on projective spaces*. Relatório Técnico UNICAMP 67 (1994). Submetido.
- [6] Boothby, W.M.: *A transitivity problem from control theory*. Journal of Differential Equations vol 17 (1975), 296-307.
- [7] Boothby, W.M. e Wilson, E. N.: *Determination of the transitivity of bilinear systems*. SIAM Journal of Control and Optimization vol 17 (1979), 212-221
- [8] Colonius, F. e W. Kliemann: *Limit behavior and genericity of nonlinear control systems*. Relatório Técnico. Universidade de Augsburg.
- [9] Colonius, F. e W. Kliemann: *Some aspects of control systems as dynamical systems*. Journal of Dynamics and Differential Equations, vol. 5, 3 (1993), 469-494.

- [10] Colonius, F. e W. Kliemann: *Linear control semigroups acting on projective spaces*. Journal of Dynamics and Differential Equations vol. 5, 3 (1993),495-528.
- [11] Colonius,F. e W. Kliemann: *Remarks on ergodic theory of stochastic flows and control flows*. Em Proceedings of the Conference on Stochastic Flows (Wihstutz,V. ed.) Birkhäuser (1990).
- [12] Colonius,F. e W. Kliemann: *Lyapunov exponents of control flows*. Em Lyapunov Exponents (Arnold,L;Eckemann,C.;Crauel,H.,eds.) Lecture Notes in Mathematics 1486, Springer-Verlag (1991).
- [13] Crouch,P.E. e F. Silva Leite: *Controllability on Classical Lie Groups*. Mathematics of Control Signals Systems (1988) 1: 31-42.
- [14] Fulton,W. e J. Harris: *Representation theory*. Graduate Texts in Mathematics 129, Springer-Verlag (1991).
- [15] Gauthier,J.P. e G. Bornard: *Controlabilité des systèmes bilinéaires*. SIAM Journal on Control and Optimization, 20 (1982), 377-384.
- [16] Helgason,S.: *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*. Academic Press (1978).
- [17] Hilgert,J., K.H.Hofmann e J.Lawson: *Lie groups, convex cones and semigroups*. Oxford University Press, Oxford(1989).
- [18] Hilgert,J. e K.H. Neeb, *Lie semigroups and their applications*. Lecture Notes in Mathematics 1552 Springer-Verlag (1993).
- [19] Jakubczyk,B. e E.D. Sontag: *Controllability of nonlinear discrete-time systems: a Lie-algebraic approach*. SIAM Journal on Control and Optimization 28 (1990), 1-33.
- [20] Jurdjevic,V. e I. Kupka: *Control systems on semisimple Lie groups and their homogeneous spaces*. Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 31 (1981), 151-179.

- [21] Jurdjevic, V. e H.J.Sussmann: *Control systems on Lie groups*. Journal of Differential Equations 12 (1972), 313-329.
- [22] Kobayashi, S e Nomizu, K: *Foundations of differential geometry*. John Willey & Sons (1963).
- [23] Montgomery, D. e Zippin, L. : *Transformation groups*. Interscience (1955)
- [24] Onishchik, A. L. e Vinberg E. B.: *Lie groups and algebraic groups*. Springer-Verlag 1990.
- [25] San Martin, L.: *Invariant control sets on flag manifolds*. Mathematics of Control, Signals and Systems vol.6 (1993), 41-61.
- [26] San Martin, L.A.B. : *Linear semigroups acting on Stiefel manifolds*. Relatório Técnico UNICAMP 32 (1994).
- [27] San Martin, L.A.B.: *On global controllability of discrete-time control systems*. Relatório Técnico UNICAMP 35 (1994).
- [28] San Martin, L.A.B. : *Two results on maximal subsemigroups of Lie groups*. Relatório Técnico UNICAMP (1992).
- [29] San Martin, L.A.B, e P.A. Tonelli: *Semigroup actions on homogeneous spaces*. A aparecer em Semigroup Forum.
- [30] San Martin, L.: *Invariant control sets on fibre bundle*. Tese. Universidade de Warwick, (1986).
- [31] San Martin, L.A.B.: *Control sets and semigroups in semi-simple Lie groups*. Em Semigroups in algebra, geometry and analysis. Gruyter Verlag (1994)
- [32] Steenrod, N.: *The Topology of fibre bundles*. Princeton University Press, Princeton (1951).

- [33] Tonelli, P.A.: *Control sets on homogeneous spaces*. Tese. Universidade de Bremen (1991).
- [34] Varadarajan, V.S. : *Harmonic analysis on real reductive groups*. LNM-Springer, 576 (1977).
- [35] Varadarajan, V.S. : *Lie Groups, Lie Algebras, and their Representations*. Prentice-Hall, Inc. (1960)
- [36] Warner, G. : *Harmonic analysis on semi-simple Lie groups*. Springer-Verlag (1972).