Universidade Estadual de Campinas

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

Departamento de Matemática

Dissertação de Mestrado

Homotopia de Trajetórias de Sistemas Dinâmicos

por

Marcelo Gonçalves Oliveira Vieira †

Mestrado em Matemática - Campinas - SP

Orientador: Prof. Dr. Paulo Régis Caron Ruffino

Co-orientador: Prof. Dr. Pedro José Catuogno

†Este trabalho contou com apoio financeiro do CNPq.

Homotopia de Trajetórias de Sistemas Dinâmicos

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por **Marcelo Gonçalves Oliveira Vieira** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 02 de Maio de 2005.

Prof. Dr. Paulo Régis C. Ruffino.
Orientador

Prof. Dr. Pedro José Catuogno.
Co-orientador

Banca examinadora:

Prof. Dr. Paulo Régis C. Ruffino.

Prof. Dr. Luiz Antônio B. San Martin.

Prof. Dr. Daniel Smania Brandão.

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

Homotopia de Trajetórias de Sistemas Dinâmicos

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por **Marcelo Gonçalves Oliveira Vieira** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 02 de Maio de 2005.

Prof. Dr. Paulo Régis C. Ruffino.
Orientador

Banca examinadora:

Prof. Dr. Paulo Régis C. Ruffino.

Prof. Dr. Luiz Antônio B. San Martin.

Prof. Dr. Daniel Smania Brandão.

Prof. Dr. Pedro José Catuogno.
Co-orientador

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP
Bibliotecário: Maria Júlia Milani Rodrigues - CRB8a / 2116

Vieira, Marcelo Gonçalves Oliveira

V673h Homotopia de trajetórias de sistemas dinâmicos / Marcelo Gonçalves Oliveira Vieira -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2005.

Orientador : Paulo Régis Caron Ruffino; Pedro José Catuogno

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Teoria da homotopia. 2. Sistemas dinâmicos. 3. Sistemas estocásticos. 4. Movimento browniano. I. Ruffino, Paulo Régis Caron. II. Catuogno, Pedro José. III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. IV. Título.

Título em inglês: Homotopy of trajectories of dynamical systems

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Homotopy theory. 2. Dynamical systems. 3. Stochastic systems. 4. Brownian motion.

Área de concentração: Geometria / Topologia

Titulação: Mestre em Matemática

Banca examinadora: Prof. Dr. Paulo Régis Caron Ruffino (UNICAMP)
Prof. Dr. Luiz Antônio Barrera San Martin (UNICAMP)
Prof. Dr. Daniel Smania (USP)

Data da defesa: 02/05/2005

Dissertação de Mestrado defendida em 02 de maio de 2005 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof. (a). Dr (a). PAULO REGIS CARON RUFFINO

Prof. (a). Dr (a). LUIZ ANTONIO BARRERA SAN MARTIN

Prof. (a). Dr (a). DANIEL SMANIA BRANDÃO

Aos meus pais

Marta e Nicásio

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente à Deus por ter instruído-me, ensinado-me o caminho a seguir e guiado-me com os teus olhos durante esta dissertação, bem como durante toda a minha vida. Depois agradeço à Carolina Martins Rodrigues pela paciência e compreensão sem os quais jamais teria conseguido concluir este trabalho. Também sou grato ao Prof. Paulo Régis Caron Ruffino e ao Prof. Pedro José Catuogno pela credibilidade que depositaram em mim, pelo competente trabalho de orientação e ajuda em diversos momentos. Finalmente, quero agradecer aos professores, funcionários e colegas de curso, tanto do IMECC/UNICAMP quanto da FAMAT/UFU, pelos momentos felizes e pela solidariedade durante os momentos difíceis, e de um modo especial aos companheiros Germano Abud, Vinícius, Ariosvaldo, Weber, Helson, José Antônio, Rinaldo, Fabiano, Simão e tantos outros que permanecerão na minha memória.

ABSTRACT

This work accosts the monotonic homotopy, an appropriate variant of homotopy of trajectories of control systems. It is introduced a concept of regularity for control functions and it is considered the definition of monotonic homotopy of regular trajectories of a given control system Σ on a manifold M. Then it is shown that the set $\Gamma(\Sigma, x)$ of monotonic homotopy classes of regular trajectories of Σ starting at a given fixed point x has a differentiable manifold structure with the same dimension of M. Another important result is the caracterization of monotonic homotopy of trajectories (on acessible points set starting at x) via the lifts of same trajectories on the manifold $\Gamma(\Sigma, x)$.

Finally, we make same considerations about monotonic homotopy and trajectories of an stochastic system.

RESUMO

Este trabalho aborda a homotopia monotônica, uma variante apropriada de homotopia, de trajetórias de sistemas de controle. Primeiro é introduzido um conceito de regularidade para funções de controle e depois é considerada a definição de homotopia monotônica de trajetórias regulares de um sistema de controle Σ evoluindo sobre uma variedade M. Em seguida são mostrados que o conjunto $\Gamma(\Sigma, x)$ de classes de homotopia monotônica das trajetórias regulares do sistema Σ a partir de um estado fixo tem um estrutura de variedade diferenciável. Outro resultado importante é a caracterização para trajetórias monotonicamente homotópicas (contidas no conjunto dos pontos acessíveis a partir de x) via os levantamentos das mesmas à variedade $\Gamma(\Sigma, x)$.

Finalmente, são feitas considerações sobre homotopia monotônica e trajetórias de um sistema estocástico.

CONTEÚDO

Introdução

A noção de homotopia é considerada a idéia mais importante da Topologia Algébrica, e as suas aplicações podem ser encontradas em várias áreas da Matemática, como já foi mencionado em Lima [9] e Vieira [16].

Nesta dissertação é estudado um tipo particular de homotopia, a homotopia monotônica. Tal homotopia é uma variante apropriada da homotopia clássica, na qual os objetos a serem avaliados como homotópicos são trajetórias de um determinado sistema dinâmico, ou mais precisamente, são trajetórias de um sistema de controle. Nesta homotopia, além das condições usuais exigidas para que se tenha uma deformação contínua de uma trajetória em outra, exige-se ainda algumas condições adicionais sobre as curvas intermediárias da deformação contínua, a saber, que as curvas intermediárias sejam também trajetórias do sistema de controle em questão, bem como que sejam trajetórias regulares. O conceito de trajetórias regulares tem sua importância na teoria de controle, mas aqui daremos especial importância ao fato dele ser essencial para construção de uma estrutura de variedade diferenciável para o conjunto quociente $\Gamma(\Sigma, x_0)$ dado pela relação de equivalência proveniente da homotopia monotônica.

Objetivo

Os objetivos centrais desta dissertação são essencialmente dois.

O primeiro constitui-se em estudar os principais resultados geométricos associados ao conceito de homotopia monotônica em sistemas de controle, muitos dos quais foram recentemente apresentados em Kizil [7] e Colonius, Kizil, San Martin [1] e alguns poucos formalizados na presente dissertação, e a partir deste estudo, tem-se por intenção elaborar um texto mais simples pedagogicamente, destinado em especial a alunos dos últimos anos de graduação e inicio de mestrado em Matemática e áreas afins.

O segundo objetivo é apresentar problemas associados, bem como apontar metas para um futuro estudo da noção de homotopia monotônica em outros tipos de sistemas dinâmicos, que são os sistemas estocásticos. Certamente que as motivações que norteiam o estudo de homotopias de trajetórias em sistemas estocásticos são certas similaridades entre estes sistemas e os sistemas de controle, como por exemplo, a semelhança taquigráfica entre as dinâmicas de um sistema de controle afim e as dinâmicas de um sistema estocástico no sentido de Stratonovich.

Estrutura dos Tópicos Apresentados

Agora passaremos a um resumo da dissertação, que é dividida em quatro capítulos.

- No Capítulo 1, é apresentada a definição geral de sistema de controle e alguns resultados associados a esta definição. A definição de sistema de controle exige o conhecimento prévio de alguns objetos matemáticos, a saber, os cones convexos, aos quais se destina a seção 1.1, os controles e as dinâmicas, estes dois últimos estudados na seção 1.2. É importante ressaltar que aqui os cones convexos são considerados de forma mais geral do que a encontrada em Kizil [7].

  Na seção 1.3 são definidos sistema de controle e trajetórias de um sistema de controle. Também é dado um exemplo de sistemas de controle, bem com são introduzidas algumas notações importantes para o decorrer do texto.

  Na seção 1.4 são apresentadas as definições de controle regular e trajetórias regulares. Além dessas definições são citados alguns resultados importantes sobre concatenação de controles regulares e alguns resultados não menos importantes recebem uma formalização na Proposição 1.4.10 e nos Corolários 1.4.11 e 1.4.12, o que decorre da definição de cone convexo adotada.

- O Capítulo 2 trata o conceito de homotopia monotônica de trajetórias de um sistema de controle.

Na seção 2.1 são apresentadas resumidamente a idéia de homotopia clássica, bem como alguns resultados importantes associados.
A seção 2.2 destina-se ao estudo da homotopia monotônica de trajetórias de um sistema de controle e na seção 2.3 é construída uma estrutura de variedade diferenciável para o conjunto quociente $\Gamma(\Sigma, x_0)$ dado pela relação de equivalência proveniente da homotopia monotônica.

- O Capítulo 3 tem como objetivo central, uma vez fixado um ponto x_0 na variedade M onde o sistema de controle evolui, encontrar um caracterização para trajetórias monotonicamente homotópicas (contidas no conjunto dos pontos acessíveis a partir de x_0) via os levantamentos das mesmas à variedade $\Gamma(\Sigma, x_0)$. Em outras palavras, no capítulo 3 é obtida uma maneira de avaliar se duas trajetórias são homotópicas, verificando apenas se os seus respectivos levantamentos à variedade $\Gamma(\Sigma, x_0)$ possuem o mesmo ponto final.
Em particular, na seção 3.1 é feito um resumo dos principais resultados relativos a levantamentos de curvas tomando valores em variedades diferenciáveis.
Na seção 3.2 estuda-se o levantamento de trajetórias de um sistema de controle Σ à variedade $\Gamma(\Sigma, x_0)$.
Na seção 3.3 são apresentadas algumas funções (na verdade caminhos) importantes induzidas por trajetórias e seus respectivos levantamentos.
Já a seção 3.4 destina-se a demonstração da caracterização acima citada e na seção 3.5 estuda-se homotopia entre trajetórias de um sistema de controle evoluindo na peculiar variedade $\Gamma(\Sigma, x_0)$.

- O Capítulo 4 é dedicado ao segundo objetivo central da dissertação, que é o de fazer considerações a respeito de possíveis definições mais restritivas, entretanto mais ricas em propriedades, de homotopias para trajetórias de sistemas estocásticos.
Desta forma as seções 4.1, 4.2, 4.3 e 4.4 tem por objetivo introduzir algumas noções de Cálculo Estocástico, como por exemplo, a definição de movimento browniano e sistemas estocásticos no sentido de Stratonovich.
Na seção 4.5 é proposta uma definição de homotopia monotônica para caminhos do movimento browniano em $\mathbb{R}^n$ e também é mostrado que tal definição na verdade apenas trata-se de uma caracterização da homotopia clássica restrita ao conjunto de caminhos

do movimento browniano.

E por fim, na seção 4.6, são apresentados alguns problemas decorrentes da intenção de se fazer uma extensão natural (entenda-se utilizando a estrutura teórica presente em Kizil [7]) da noção de homotopia monotônica de trajetórias de um sistema de controle para o caso em que as trajetórias são dadas por um sistema estocástico.

CAPÍTULO 1

Sistemas de Controle

Este capítulo tem por objetivo introduzir as noções de sistemas de controle e controle regular. A luz do objetivo principal deste texto, a saber, o estudo das homotopias monotônicas, os sistemas de controle têm a sua importância por fornecerem os caminhos sobre os quais as homotopias monotônicas se darão. Já a importância dos controles regulares reside no fato dos mesmos possibilitarem a construção de uma estrutura de variedade para o conjunto das classes de homotopia monotônica e a obtenção de uma caracterização de homotopia monotônica.

1.1 Cones Convexos

Uma noção importante para obtenção de uma definição geral de sistema de controle é a noção de cone convexo.

Definição 1.1.1. *Seja V um espaço vetorial. Diz-se que um conjunto $\Sigma \subset V$ é um cone convexo com vértice p em V se, e somente se, Σ é um conjunto convexo tal que se $p + x \in \Sigma$, tem-se que $p + rx \in \Sigma$, para todo $r \geq 0$.*

O cone convexo Σ com vértice $p \in V$ gerado por $A \subset V$ é a intersecção de todos os cones convexos com vértice p que contém A.

Dependendo do contexto não se faz necessário mencionar o vértice de um cone convexo.

Neste caso, diz-se apenas que Σ é um cone convexo em um espaço vetorial V, pressupondo-se assim a existência de um ponto (vértice) $p \in V$ tal que se $p+x \in \Sigma$, tem-se que $p+rx \in \Sigma$, para todo $r \geq 0$.

A exigência de $r \geq 0$, na definição de cone convexo, pode ser substituída por $r \in \mathbb{R}$. No presente texto, será considerado que $r \in \mathbb{R}$.

Exemplo 1.1.2. *Uma reta qualquer em $\mathbb{R}^n$ é um cone convexo e qualquer um de seus pontos pode ser considerado como vértice.*

Com efeito, uma reta em $\mathbb{R}^n$ é um subconjunto da forma $A = \{y \in \mathbb{R}^n : y = a + \lambda b,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$.
Evidentemente, A é um conjunto convexo.
Seja $y \in A$. Temos que $y = a + \lambda b$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$. Daí se $y + x \in A$, tem-se que $x + a + \lambda b = a + lb$, para algum $l \in \mathbb{R}$, isto é, $x = (l - \lambda)b$.
Logo $y + rx = a + \lambda b + r(l - \lambda)b = a + (rl + (1 - r)\lambda)b \in A$.
Portanto A é um cone conexo com vértice em y, com $y \in A$ arbitrário.

Proposição 1.1.3. *Seja V um espaço vetorial e A um subconjunto de V. O cone convexo Σ com vértice p gerado por A é o conjunto $\Sigma = \{z = p + r(q - p) : q \in A, r \in \mathbb{R}\}$.*

Demonstração. Seja Σ_1 o cone convexo com vértice em $p \in M$ gerado por A.
Temos que $A \subset \Sigma$, pois $q \in A$ se escreve da forma $q = p + (q - p)$. Além disso, se $p + x \in \Sigma$, segue que $x = s(q - p)$, para algum $q \in A$ e algum $s \in \mathbb{R}$. Logo $p + rx = p + rs(q - p) \in \Sigma$, para todo $r \in \mathbb{R}$. Portanto Σ é um cone convexo com vértice p contendo A, e como Σ_1 é a intersecção de todos o cones convexos com vértice p que contém A, segue que $\Sigma_1 \subset \Sigma$.

Seja $z \in \Sigma$. Temos que $z = p + s(q - p)$, para algum $q \in A$ e algum $s \in \mathbb{R}$. Note que $p + (q - p) = q \in A \subset \Sigma_1$. Daí como Σ_1 é cone convexo com vértice p segue que $p + r(q - p) \in \Sigma_1$, para todo $r \in \mathbb{R}$, em particular $z = p + s(q - p) \in \Sigma_1$, ou seja, $\Sigma \subset \Sigma_1$.
Portanto $\Sigma_1 = \Sigma$. □

De agora e diante, estaremos interessados apenas em cones convexos com vértices na origem do espaço vetorial em questão. Assim, quando for mencionado que Σ é um cone conexo no espaço vetorial V, entenda que seu vértice é $0 \in V$. Um fato interessante decorrente desta convenção é que dados um cone convexo Σ e $x \in \Sigma$, segue que $rx = 0 + rx \in \Sigma$, para todo $r \in \mathbb{R}$.

1.2 Controles e Dinâmicas

Ao longo do texto todas as variedades diferenciáveis consideradas serão de dimensão finita e munidas com uma métrica Riemanniana. Apenas nas situações em que se fizer necessário será dito explicitamente qual a dimensão da variedade diferenciável em questão.

Definição 1.2.1. *Seja M uma variedade diferenciável. Um campo de vetores diferenciável em M é uma aplicação diferenciável $X : M \longmapsto TM$ tal que $X(x) \in T_xM$, para todo $x \in M$.*

Denotaremos por $\mathcal{X}^\infty(M)$ o conjunto dos campos de vetores diferenciáveis de classe C^∞ sobre M.

Dado um cone convexo Σ em $\mathcal{X}^\infty(M)$, considere E como o subespaço vetorial de $\mathcal{X}^\infty(M)$ gerado por Σ e ainda, dado $T > 0$ considere $\mathcal{U}$ como o espaço de Banach das funções mensuráveis e limitadas

$$u : [0, T] \longrightarrow E$$

com a norma do supremo essencial $\|\cdot\|_\infty$.

Definição 1.2.2. *Sejam M uma variedade diferenciável, Σ um cone convexo em $\mathcal{X}^\infty(M)$ e $T > 0$. O cone convexo $\mathcal{U}(\Sigma)$ gerado pelo conjunto $A = \{u \in \mathcal{U} : u(s) \in \Sigma, \forall s \in [0, T]\}$ é chamado o conjunto dos controles definidos no intervalo $[0, T]$ sobre Σ.*

Uma aplicação $u \in \mathcal{U}(\Sigma)$ é chamada de um controle sobre Σ.

Note que sendo $\mathcal{U}(\Sigma)$ o cone convexo gerado pelo conjunto $A = \{u \in \mathcal{U} : u(s) \in \Sigma, \forall s \in [0, T]\}$, decorre da Proposição 1.1.3 que dado $v \in \mathcal{U}(\Sigma)$, então $v = r.u$, para algum $u \in A$ e para algum $r \in \mathbb{R}$. Assim $v(s) = r.u(s)$, $\forall s \in [0, T]$, e como $u(s) \in \Sigma, \forall s \in [0, T]$, segue do fato de Σ ser um cone convexo que $v(s) = r.u(s) \in \Sigma, \forall s \in [0, T]$. Logo $\mathcal{U}(\Sigma) \subset A$ e por definição de cone convexo gerado por A, temos que $A \subset \mathcal{U}(\Sigma)$. Portanto, $\mathcal{U}(\Sigma) = A$.

Em outras palavras, $\mathcal{U}(\Sigma)$ é o conjunto de todas as funções mensuráveis e limitadas de $[0, T]$ tomando valores em Σ.

Observação 1.2.3. *Como convencionado anteriormente, o cone convexo Σ tem como vértice a origem do espaço $\mathcal{X}^\infty(M)$. Tal fato tem a vantagem, como já foi mostrado, de que $\mathcal{U}(\Sigma)$ coincide com conjunto de todas as funções mensuráveis e limitadas de $[0, T]$ tomando valores em $\Sigma \subset E$. Entretanto, o fato de Σ ter como vértice a origem de $\mathcal{X}^\infty(M)$ tem a desvantagem de excluir os controles afins, como poderá ser observado posteriormente no Exemplo 1.3.2.*

Observação 1.2.4. *O espaço $\mathcal{U}$, das funções mensuráveis e limitadas de $[0,T]$ tomando valores no subespaço vetorial E de $\mathcal{X}^\infty(M)$ gerado por Σ, pode ser considerado com a topologia fraca*, que é a topologia mais fraca tal que para todo $y \in L_1([0,T],E)$ a função linear $u \longmapsto \int_0^t \langle y(t), u(t)\rangle \, dt$ é contínua.*

Definição 1.2.5. *Sejam M uma variedade diferenciável e $X \in \mathcal{X}^\infty(M)$. O Problema de Cauchy para X com condição inicial x_0 consiste em encontrar curva $x : [0,T] \longrightarrow M$ que satisfaça equação diferencial da forma*

$$\frac{dx}{dt}|_{t=s} = X(x(s)), \quad \text{com } x(0) = x \in M \, , \, s \in [0,T]$$

Um Problema de Cauchy, como o acima, será denotado simplesmente por

$$\dot{x} = X(x), \quad \text{com } x(0) = x_0$$

Definição 1.2.6. *Sejam M uma variedade diferenciável, Σ um cone convexo em $\mathcal{X}^\infty(M)$ e $\mathcal{U}(\Sigma)$ o conjunto dos controles definidos no intervalo $[0,T]$ sobre Σ. Uma dinâmica definida no intervalo $[0,T]$ sobre M com respeito a Σ é uma equação diferencial da forma*

$$\frac{dx}{dt}|_{t=s} = u(s)(x(s)), \quad \text{com } x(0) = x_0 \in M \, , \, s \in [0,T] \text{ e } u \in \mathcal{U}(\Sigma)$$

onde $x(t)$ representa uma curva definida do intervalo $[0,T]$ sobre M.
Uma dinâmica sobre M definida no intervalo $[0,T]$ com respeito a Σ, como a acima, será denotada simplesmente por

$$\dot{x} = u(t)(x), \quad \text{com } x(0) = x_0$$

Denotaremos por $\mathcal{D}(\Sigma)$ o conjunto das dinâmicas definidas no intervalo $[0,T]$ sobre M com respeito a Σ .

Podemos entender como solução de uma dinâmica, a curva na qual cada ponto também pertence a alguma curva solução de um Problema de Cauchy e os vetores tangentes a ambas as curvas neste ponto coincidem. Em outras palavras, se x é solução da dinâmica $\dot{x} = u(t)(x)$, com $x(0) = x_0$, então para cada $s \in [0,T]$ existe uma curva y tal que $y(s) = x(s)$ e y é solução do Problema de Cauchy $\dot{y} = X(y)$, com $y(0) = y_0$, onde $X = u(s)$.

Via o teorema de existência e unicidade de soluções para equações diferenciáveis, segue que uma dinâmica $\dot{x} = u(t)(x)$ definidas no intervalo $[0,T]$ sobre uma variedade M com respeito a um sistema de controle Σ tem uma única solução.

Dada uma variedade diferenciável M, um cone convexo Σ em $\mathcal{X}^\infty(M)$ e o conjunto $\mathcal{U}(\Sigma)$ dos controles definidos no intervalo $[0,T]$ sobre Σ, em princípio as soluções das dinâmicas em $\mathcal{D}(\Sigma)$ estão definidas no intervalo arbitrário $[0,T]$.

Mas como estamos interessados nas propriedades geométricas das soluções das dinâmicas, isto é, nos seus traços, podemos reparametrizar estas soluções no intervalo $[0,1]$.

As reparametrizações das soluções das dinâmicas em $\mathcal{D}(\Sigma)$, tornam-se soluções de dinâmicas definidas no intervalo $[0,1]$ sobre M com respeito a Σ.

Com efeito, seja x solução da dinâmica $\dot{x} = u(t)(x)$ definida em $[0,T]$. Defina $y(s) = x(sT)$, $\forall\ s \in [0,1]$. Note que y possui o mesmo traço de x em M e que

$$\frac{dy}{dt}|_{t=s} = T \cdot \frac{dx}{dt}|_{t=sT} = T \cdot u(sT)(x(sT)) = T \cdot u(sT)(y(s))$$

Defina $v : [0,1] \longrightarrow E$ por $v(s) = T \cdot u(sT)$, onde E é o espaço vetorial gerado por Σ. Como $u(s) \in \Sigma$, $\forall s \in [0,T]$, então $u(sT) \in \Sigma$, $\forall s \in [0,1]$. Daí, sendo Σ um cone convexo, segue que $v(s) = T.u(sT) \in \Sigma$, $\forall s \in [0,1]$. Portanto v assume valores em Σ.

Afirmamos que o conjunto $B = \{v \in \mathcal{U} : v(s) = T \cdot u(sT),\ \forall\ s \in [0,1],\ u \in \mathcal{U}(\Sigma)\}$ é igual ao cone convexo $\dot{\mathcal{U}}(\Sigma) = \{v \in \mathcal{U} : v(s) \in \Sigma, \forall s \in [0,1]\}$.

Claramente, temos que $B \subset \dot{\mathcal{U}}(\Sigma)$.

Por outro lado, dado $v \in \dot{\mathcal{U}}(\Sigma)$, temos que para todo $s \in [0,T]$, $u(s) = \frac{1}{T} \cdot v\left(s\frac{1}{T}\right) \in \Sigma$, pois Σ é cone convexo, logo $u \in \mathcal{U}(\Sigma) = \{u \in \mathcal{U} : u(s) \in \Sigma, \forall s \in [0,T]\}$ e consequentemente $T \cdot u(sT) = T \cdot \frac{1}{T} \cdot v\left(s\frac{1}{T}T\right) = v(s) \in B$.

Assim, $\dot{\mathcal{U}}(\Sigma) = \{v \in \mathcal{U} : v(s) = T \cdot u(sT),\ \forall\ s \in [0,1],\ u \in \mathcal{U}(\Sigma)\}$

Portanto o conjunto de todas as equações diferenciáveis da forma

$$\frac{dy}{dt}|_{t=s} = T \cdot u(sT)(y(s)), \quad \text{com } x(0) = x \in M\ ,\ s \in [0,1] \text{ e } u \in \mathcal{U}(\Sigma)$$

é igual ao das dinâmicas definidas no intervalo $[0,1]$ sobre M com respeito a Σ.

Reciprocamente, podemos expressar o conjunto dinâmicas definidas em $[0,T]$ sobre M com respeito Σ, como o conjunto de todas as equações diferenciáveis da forma

$$\frac{dy}{dt}|_{t=s} = \frac{1}{T} \cdot u\left(s\frac{1}{T}\right)(y(s)), \quad \text{com } x(0) = x \in M\ ,\ s \in [0,T] \text{ e } u \in \dot{\mathcal{U}}(\Sigma)$$

onde $\dot{\mathcal{U}}(\Sigma) = \{u \in \mathcal{U} : u(s) \in \Sigma, \forall s \in [0,1]\}$.

A prova deste fato é análoga à prova do fato anterior.

Nesse sentido podemos considerar, e será considerado a partir de agora neste texto, que $\mathcal{U}(\Sigma)$ é conjunto dos controles definidos no intervalo $[0,1]$ sobre Σ e diremos apenas que $\mathcal{U}(\Sigma)$ é conjunto dos controles sobre Σ.

Da mesma forma será considerado que $\mathcal{D}(\Sigma)$ é o conjunto das dinâmicas definidas no intervalo $[0,1]$ sobre M com respeito Σ e diremos apenas que $\mathcal{D}(\Sigma)$ é o conjunto das dinâmicas sobre M com respeito Σ.

1.3 Sistemas de Controle

Definição 1.3.1. *Sejam M uma variedade diferenciável e Σ um cone convexo em $\mathcal{X}^\infty(M)$. Um sistema de controle evoluindo sobre M é uma quádrupla da forma*

$$(M, \Sigma, \mathcal{U}(\Sigma), \mathcal{D}(\Sigma)).$$

Um sistema de controle evoluindo sobre M, como o acima, é denotado simplesmente por Σ.

Exemplo 1.3.2. *Sejam M uma variedade diferenciável de dimensão n, X_0, X_1,...,$X_k \in \mathcal{X}^\infty(M)$ e U um cone convexo em $\mathbb{R}^k$. Considere em M conjunto $\mathcal{D}$ das equações diferenciais da forma,*

$$\frac{dx}{dt}|_{t=s} = X_0(x(s)) + \sum_{i=1}^{k} a_i(s) \cdot X_i(x(s)), \;\; com\; x(0) = x_0,\; s \in [0,1],$$

ou simplesmente,

$$\dot{x} = X_0(x) + \sum_{i=1}^{k} a_i X_i(x), \quad com\; x(0) = x_0,\; s \in [0,1],$$

onde $a : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^k$ dada por $a(s) = (a_1(s), ..., a_k(s))$ assume valores em U.

Tal conjunto $\mathcal{D}$ induz um sistema de controle evoluindo sobre a variedade diferenciável M, o qual é chamado sistema de controle afim.

De fato, considere E o subespaço vetorial de $\mathcal{X}^\infty(M)$ gerado pelos campos $X_0, X_1, ..., X_k$. No caso deste exemplo será aberta uma exceção, portanto considere Σ como o cone convexo com vértice X_0 em E gerado por $A = \{X \in \mathcal{X}^\infty(M) : X = X_0 + \sum_{i=1}^k c_i X_i,\ (c_1, ..., c_k) \in U\}$.

Pela Proposição 1.1.3, segue que

$$\begin{aligned}\Sigma &= \{X \in \mathcal{X}^{\infty}(M) : X = X_0 + r \cdot ((X_0 + \sum_{i=1}^{k} c_i X_i) - X_0),\ (c_1, ..., c_k) \in U \ \ e \ r \in \mathbb{R}\} \\ &= \{X \in \mathcal{X}^{\infty}(M) : X = X_0 + \sum_{i=1}^{k} r c_i X_i,\ (c_1, ..., c_k) \in U \ \ e \ r \in \mathbb{R}\}\end{aligned}$$

Como U é cone convexo (seu vértice é 0), segue que $r.(c_1, ..., c_k) \in U$, $\forall r \in \mathbb{R}$ e consequentemente,

$$\Sigma = \{X \in \mathcal{X}^{\infty}(M) : X = X_0 + \sum_{i=1}^{k} c_i X_i, (c_1, ..., c_k) \in U\}$$

Logo

$$\mathcal{U}(\Sigma) = \{u \in \mathcal{U}(\Sigma) : u(s) = X_0 + \sum_{i=1}^{k} c_i(s) \cdot X_i, c_i : [0, 1] \longrightarrow U\}$$

e

$$\mathcal{D}(\Sigma) = \mathcal{D}$$

O sistema de controle $(M, \Sigma, \mathcal{U}(\Sigma), \mathcal{D}(\Sigma))$ é chamado sistema de controle afim.

Observação 1.3.3. *Note que no exemplo anterior, pelo fato do cone Σ possuir um vértice diferente da origem de $\mathcal{X}^{\infty}(M)$, não é possível garantir que reparametrizações das soluções das dinâmicas são ainda soluções de dinâmicas definidas de um intervalo arbitrário $[0, T]$ sobre M com respeito Σ.*

A partir de agora denominaremos as soluções das dinâmicas de um sistema de controle por trajetórias e denotaremos por

$$trj_x(u) : [0, 1] \longrightarrow M$$

a solução da dinâmica $\dot{y} = u(t)(y)$, com $y(0) = x$.

O conjunto das trajetórias de Σ será denotado por $T(\Sigma)$ e o conjunto das trajetórias a partir de x será denotado por $T(\Sigma, x)$.

É interessante munir o conjunto $T(\Sigma, x)$ com uma determinada topologia. Para os objetivos do presente texto, a topologia mais conveniente é a topologia $\mathcal{C}^1$.

A topologia $\mathcal{C}^1$ em $T(\Sigma, x)$ provém da métrica dada por

$$d_1(\alpha, \beta) = \sup_{t\in[0,1]} d(\alpha(t), \beta(t)) + ess \sup_{t\in[0,1]} |\alpha'(t) - \beta'(t)| \tag{1.1}$$

Considere a seguinte aplicação

$$\begin{aligned} trj_x : \mathcal{U}(\Sigma) &\longrightarrow T(\Sigma, x) \\ u &\longmapsto trj_x(u) : [0,1] \longrightarrow M \end{aligned}$$

Proposição 1.3.4. *A aplicação $trj_x : \mathcal{U}(\Sigma) \longrightarrow T(\Sigma, x)$ é contínua em relação à topologia $\mathcal{C}^1$ sobre $T(\Sigma, x)$.*

Demonstração. A aplicação $trj_x : \mathcal{U}(\Sigma) \longrightarrow T(\Sigma, x)$ é contínua como conseqüência dos teoremas sobre dependência contínua das soluções de equações diferenciais em relação a parâmetros (veja Kizil [7] e Sotomayor [14]). □

Temos que a topologia $\mathcal{C}^0$ é mais fraca que a topologia $\mathcal{C}^1$, logo segue da Proposição 1.3.4 que $trj_x : \mathcal{U}(\Sigma) \longrightarrow T(\Sigma, x)$ é contínua em relação à topologia $\mathcal{C}^0$ sobre $T(\Sigma, x)$.

Proposição 1.3.5. *Seja $\mathcal{U}(\Sigma)$ munido com a norma do supremo essencial $\|\cdot\|_\infty$. A aplicação $trj_x : \mathcal{U}(\Sigma) \longrightarrow T(\Sigma, x)$ é aberta em relação à topologia $\mathcal{C}^1$ sobre $T(\Sigma, x)$.*

Demonstração. Seja V aberto em $\mathcal{U}(\Sigma)$.
Seja $\alpha = trj_x(u) \in trj_x(V)$. Temos que $u \in V$ e como V é aberto então existe $\epsilon > 0$ tal $B_\epsilon(u) = \{v \in \mathcal{U}(\Sigma) : \|u - v\|_\infty < \epsilon\} \subset V$. Sabemos que para cada $t \in [0,1]$ tem-se que $u(t) \in \mathcal{X}^\infty(M)$, isto é, $u(t)$ é um campo diferenciável de M e portanto contínuo. Logo, para $\epsilon/4 > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que sempre que a $d(\alpha(t), a) < \delta$ tem-se que $|u(t)(\alpha(t)) - u(t)(a)| < \epsilon/4$.
Tome $B_{\epsilon_1}(\alpha) = \{\beta \in T(\Sigma, x) : d_1(\alpha, \beta) < \epsilon_1\}$, sendo $\epsilon_1 = \min\{\delta, \epsilon/4\}$.
Seja $\beta \in B_{\epsilon_1}(\alpha)$. Como $\beta \in T(\Sigma, x)$, existe um $w \in \mathcal{U}(\Sigma)$ tal que $\beta = trj_x(w)$. Daí, como $d_1(\alpha, \beta) < \epsilon_1$, segue pela expressão 1.1 que

$$ess \sup_{t\in[0,1]} |\alpha'(t) - \beta'(t)| = ess \sup_{t\in[0,1]} |u(t)(\alpha(t)) - w(t)(\beta(t))| < \epsilon_1 < \epsilon/4$$

e em particular para cada $t \in [0,1]$ tem-se

$$|u(t)(\alpha(t)) - w(t)(\beta(t))| < \epsilon/4 \quad \text{(I)}$$

Sendo $d_1(\alpha,\beta) < \epsilon_1$, segue pela também pela expressão 1.1 que $\sup\limits_{t\in[0,1]} d(\alpha(t),\beta(t)) < \epsilon_1 < \delta$ e em particular para cada $t \in [0,1]$ tem-se $d(\alpha(t),\beta(t)) < \delta$, o que implica pela continuidade de $u(t)$ que

$$|u(t)(\alpha(t)) - u(t)(\beta(t))| < \epsilon/4 \quad \text{(II)}$$

Agora, considere $v \in \mathcal{U}(\Sigma)$ dado por

$$v(t)(a) = \begin{cases} u(t)(a), \text{ se } a \in M\backslash\{\beta(t)\} \\ w(t)(a), \text{ se } a \in \{\beta(t)\} \end{cases}$$

Temos que $\beta = trj_x(v)$, pois $\frac{d\beta}{dt}|_{t=s} = w(s)(\beta(s)) = v(s)(\beta(s))$.
Além disso, seque de (I) e (II) que para cada $t \in [0,1]$ tem-se

$$\begin{aligned} |u(t) - v(t)| &= \sup_{a\in M} |u(t)(a) - v(t)(a)| \\ &= |u(t)(\beta(t)) - v(t)(\beta(t))| = |u(t)(\beta(t)) - w(t)(\beta(t))| \\ &\leq |u(t)(\alpha(t)) - u(t)(\beta(t))| + |u(t)(\alpha(t)) - w(t)(\beta(t))| \\ &< \epsilon/4 + \epsilon/4 = \epsilon/2 \end{aligned}$$

Logo $\|u - v\|_\infty = ess \sup\limits_{t\in[0,1]} |u(t) - v(t)| \leq \epsilon/2 < \epsilon$, o que implica que $v \in B_\epsilon(u) \subset V$ e $\beta = trj_x(v) \in trj_x(V)$.
Portanto $B_{\epsilon_1}(\alpha) \subset trj_x(V)$, o que prova que $trj_x(V)$ é aberto em $T(\Sigma,x)$. □

Considere agora a aplicação

$$\begin{aligned} e_x : \mathcal{U}(\Sigma) &\longrightarrow M \\ u &\longmapsto trj_x(u)(1) \end{aligned}$$

Proposição 1.3.6. *A aplicação $e_x : \mathcal{U}(\Sigma) \longrightarrow M$ é diferenciável.*

Demonstração. A aplicação $e_x : \mathcal{U}(\Sigma) \longrightarrow M$ é diferenciável como conseqüência dos teoremas sobre dependência das soluções de equações diferenciais em relação a parâmetros (veja Kizil [7] e Sotomayor [14]) □

A aplicação e_x, bem como sua diferenciabilidade, são de crucial importância para o desenvolvimento da próxima seção.

Definição 1.3.7. *Sejam* Σ *um sistema de controle evoluindo sobre uma variedade diferenciável* M *e* $x \in M$. *O conjunto* $\mathcal{A}_\Sigma(x) = \{y = trj_x(u)(1) : u \in \mathcal{U}(\Sigma)\}$ *é chamado o conjunto dos pontos atingíveis a partir de* x *ou simplesmente conjunto acessível a partir de* x.

1.4 Controles Regulares

Uma importante definição neste texto é a de controles regulares

Definição 1.4.1. *Seja* Σ *um sistema de controle evoluindo sobre uma variedade diferenciável* M. *Um controle* u *é dito regular num ponto* $x \in M$ *se, e somente se,* $u \in int(\mathcal{U}(\Sigma))$ *e a diferencial* $d(e_x)_u$ *da aplicação* e_x *relativa ao ponto* u *é sobrejetora.*

Denotaremos por $\mathcal{R}_\Sigma(x)$ *o conjunto dos controles regulares em* x.

Observe que um controle regular é um ponto regular (veja Guillemin and Pollack [4]) da aplicação diferenciável $(e_x)|_{int(\mathcal{U}(\Sigma))}$. Assim, $\mathcal{R}_\Sigma(x)$ coincide com o conjunto dos pontos regulares da aplicação diferenciável $(e_x)|_{int(\mathcal{U}(\Sigma))}$.

Assumindo a condição de posto de álgebra de Lie, temos que o conjunto $\mathcal{R}_\Sigma(x)$ dos controles regulares em x é não vazio, como pode ser visto em Kizil [7].

Definição 1.4.2. *Seja* Σ *um sistema de controle evoluindo sobre uma variedade diferenciável* M. *Uma trajetória* $trj_x(u) : [0, 1] \longmapsto M$ *é dita regular se, e somente se,* $u \in \mathcal{R}_\Sigma(x)$.

Denotaremos por $R(\Sigma, x)$ *o conjunto das trajetórias regulares a partir de* x *e denota-se por* $R(\Sigma, x, y)$ *o conjunto das trajetórias regulares a partir de* x *cujo o ponto final é* y.

Definição 1.4.3. *Sejam* Σ *um sistema de controle evoluindo sobre uma variedade diferenciável* M *e* $x \in M$. *O conjunto* $\mathcal{A}_R(\Sigma, x) = \{y = trj_x(u)(1) : u \in \mathcal{R}_\Sigma(x)\}$ *é chamado o conjunto acessível a partir de* x *via controles regulares.*

Proposição 1.4.4. *Os conjuntos* $\mathcal{R}_\Sigma(x)$ *e* $\mathcal{A}_R(\Sigma, x)$ *são abertos respectivamente em* $\mathcal{U}(\Sigma)$ *e* M.

Demonstração. Como $\mathcal{R}_\Sigma(x)$ é o conjunto do pontos regulares da aplicação diferenciável $(e_x)|_{int(\mathcal{U}(\Sigma))}$, segue pelo Teorema da Forma Local de Submersões para Variedade (veja Lima [10]) que $\mathcal{R}_\Sigma(x)$ é aberto em $\mathcal{U}(\Sigma)$ e $(e_x)|_{\mathcal{R}_\Sigma(x)}$ é uma aplicação aberta. Logo, $\mathcal{A}_R(\Sigma, x) = (e_x)|_{\mathcal{R}_\Sigma(x)}(\mathcal{R}_\Sigma(x))$ é aberto em M. □

É de nosso interesse, poder fazer concatenação entre as trajetórias de um sistema Σ, e que tal concatenação continue sendo ainda uma trajetória deste sistema. A seguir serão apresentados alguns resultados que nos conduzirão neste sentido.

Definição 1.4.5. *Sejam $u, v : [0,1] \longmapsto \Sigma$ dois controles. A concatenação de u com v, a qual se denota por $v * u$, é o controle*

$$v * u : [0,1] \longmapsto E$$

dado por

$$(v * u)(t) = \begin{cases} u(2t), 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ v(2t-1), \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Proposição 1.4.6. *Sejam Σ um sistema de controle evoluindo sobre uma variedade diferenciável M e u, v dois controles em $int(\mathcal{U}(\Sigma))$. Se u é regular em $x \in M$ então $v * u$ é regular em x. E se v é regular em $trj_x(u)(1)$ então $v * u$ é regular em x.*

Demonstração. Veja [7] □

Dada uma curva $\alpha : [0,1] \longmapsto M$, denotaremos por $\overleftarrow{\alpha}$, a curva dada por

$$\overleftarrow{\alpha}(t) = \alpha(1-t)$$

E, dado um controle u em um sistema de controle Σ, denotaremos por $\overleftarrow{u}$, o controle em Σ dado por

$$\overleftarrow{u}(t) = -u(1-t)$$

Proposição 1.4.7. *Seja Σ um sistema de controle evoluindo sobre uma variedade diferenciável M. Se α for uma trajetória de Σ então $\overleftarrow{\alpha}$ é uma trajetória de Σ.*

Demonstração. Seja $\alpha = trj_x(u)$. Considere a trajetória $\beta = trj_y(\overleftarrow{u})$, onde $y = \alpha(1)$.
Note que

$$\frac{d\beta}{dt}|_{t=s} = \overleftarrow{u}(s)(\beta(s)) = -u(1-s)(\beta(s))$$

e

$$\frac{d\overleftarrow{\alpha}}{dt}|_{t=s} = -1.\frac{d\alpha}{dt}|_{t=1-s} = -u(1-s)(\alpha(1-s)) = \overleftarrow{u}(s)(\overleftarrow{\alpha}(s))$$

Como $\beta(0) = y = \overleftarrow{\alpha}(0)$, segue pela unicidade de soluções das dinâmicas que $\overleftarrow{\alpha} = \beta = trj_y(\overleftarrow{u})$ □

Dada uma trajetória α em um sistema de controle Σ, a trajetória $\overleftarrow{\alpha}$ será chamada trajetória reversa.

Lema 1.4.8. *Seja Σ um sistema de controle evoluindo sobre uma variedade diferenciável M. Então, $u \in \mathcal{R}_\Sigma(x)$ se, e somente se, $\overleftarrow{u} \in \mathcal{R}_\Sigma(e_x(u))$. Equivalentemente, $\alpha \in R(\Sigma, x, y)$, se, e somente se, $\overleftarrow{\alpha} \in R(\Sigma, y, x)$.*

Demonstração. Veja Kizil [7] □

Proposição 1.4.9. *Seja Σ um sistema de controle evoluindo sobre uma variedade diferenciável M. Então, $u \in \mathcal{R}_\Sigma(x)$ se, e somente se, $c.u \in \mathcal{R}_\Sigma(x)$, $\forall c \in \mathbb{R} - \{0\}$.*

Demonstração. Veja Kizil [7] □

Proposição 1.4.10. *Seja Σ um sistema de controle evoluindo sobre uma variedade diferenciável M. Se $\alpha \in R(\Sigma, x)$ e $\beta \in T(\Sigma, \alpha(1))$, então $\beta * \alpha \in R(\Sigma, x)$.*

Demonstração. Como $\alpha \in R(\Sigma, x)$, então $\alpha = trj_x(u)$, para algum $u \in \mathcal{R}_\Sigma(x)$. Como $\beta \in T(\Sigma, \alpha(1))$, implica que $\beta = trj_{\alpha(1)}(v)$, para algum $v \in \mathcal{U}(\Sigma)$.
Temos que

$$(\beta * \alpha)(s) = \begin{cases} \alpha(2s),\ 0 \leq s \leq 1/2 \\ \beta(2s-1),\ 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases}$$

e que também satisfaz,

$$\frac{d(\beta * \alpha)}{dt}|_{t=s} = 2.\frac{d\alpha}{dt}|_{t=2s} = 2.u(2s)(\alpha(2s)) = 2.(v * u)(s)((\beta * \alpha)(s)),$$

para $0 \leq s \leq 1/2$

e

$$\frac{d(\beta * \alpha)}{dt}|_{t=s} = 2.\frac{d\beta}{dt}|_{t=2s-1} = 2.v(2s-1)(\beta(2s-1)) = 2.(v*u)(s)((\beta*\alpha)(s)),$$
$$\text{para } 1/2 \leq s \leq 1$$

Uma vez que $u \in \mathcal{R}_\Sigma(x)$, segue pela Proposição 1.4.6 que $(v * u) \in \mathcal{R}_\Sigma(x)$, e pela Proposição 1.4.9 segue que $2.(v * u) \in \mathcal{R}_\Sigma(x)$.
Logo, $\beta * \alpha$ é tal que

$$\frac{d(\beta * \alpha)}{dt}|_{t=s} = 2.(v*u)(s)((\beta*\alpha)(s)),$$
$$\text{com } (\beta*\alpha)(0) = x,\ s \in [0,1] \text{ e } 2.(v*u) \in \mathcal{U}(\Sigma)$$

Portanto $\beta * \alpha \in R(\Sigma, x)$. □

Corolário 1.4.11. *Seja Σ um sistema de controle evoluindo sobre uma variedade diferenciável M. Se $y \in \mathcal{A}_R(\Sigma, x)$ e $\alpha \in T(\Sigma, y)$, então $\alpha(s) \in \mathcal{A}_R(\Sigma, x)$, para todo $s \in [0,1]$.*

Demonstração. Como $\alpha(0) = y$ então $\alpha(0) \in \mathcal{A}_R(\Sigma, x)$.
Pelo fato de $y \in \mathcal{A}_R(\Sigma, x)$, então existe $\gamma \in R(\Sigma, x)$ tal que $\gamma(1) = y$. Segue então pela Proposição 1.4.10 que $\alpha * \gamma \in R(\Sigma, x)$ e como $(\alpha * \gamma)(1) = \alpha(1)$, tem-se que $\alpha(1) \in \mathcal{A}_R(\Sigma, x)$.
Agora dado $\alpha(T)$, para algum $T \in (0,1)$, defina a curva $\beta(s) = \alpha(sT)$, com $s \in [0,1]$. Temos $\alpha = trj_x(u)$, para algum $u \in \mathcal{U}(\Sigma)$. Logo β satisfaz

$$\frac{d\beta}{dt}|_{t=s} = T.\frac{d\alpha}{dt}|_{t=sT} = T.u(sT)(\alpha(sT)) = T.u(sT)((\beta(s)),$$
$$\text{com } \beta(0) = y,\ s \in [0,1] \text{ e } T.u(sT) \in \mathcal{U}(\Sigma)$$

Assim, $\beta \in T(\Sigma, y)$ e pela primeira parte da demonstração vale que $\alpha(T) = \beta(1) \in \mathcal{A}_R(\Sigma, x)$.
Portanto, $\alpha(s) \in \mathcal{A}_R(\Sigma, x), \forall s \in [0,1]$. □

Corolário 1.4.12. *Seja Σ um sistema de controle evoluindo sobre uma variedade diferenciável M. Se $\alpha \in R(\Sigma, x)$, então $\alpha(s) \in \mathcal{A}_R(\Sigma, x)$, para todo $s \in [0,1]$.*

Demonstração. Como $\alpha \in R(\Sigma, x)$, por definição, $\alpha(1) \in \mathcal{A}_R(\Sigma, x)$. Temos que $\overleftarrow{\alpha} \in R(\Sigma, \alpha(1))$, o que implica pelo Corolário 1.4.11 que $\overleftarrow{\alpha}(s) \in \mathcal{A}_R(\Sigma, x), \forall s \in [0,1]$. Daí, dado $s \in [0,1]$, segue que $\alpha(s) = \overleftarrow{\alpha}(1-s) \in \mathcal{A}_R(\Sigma, x)$.
Portanto $\alpha(s) \in \mathcal{A}_R(\Sigma, x), \forall s \in [0,1]$. □

Observação 1.4.13. *Caso estivéssemos trabalhando com a definição de cone convexo, na qual se considera* $r > 0$*, o Corolário 1.4.12 não seria verdadeiro para* $\alpha \in R(\Sigma, x)$ *em geral, como pode ser visto em Kizil [7], Exemplo 4.2.3.*

CAPÍTULO 2

Homotopia Monotônica em Sistemas de Controle

2.1 Homotopia Geométrica

Definição 2.1.1. *Sejam f e g aplicações contínuas do espaço X no espaço Y. Diz-se que f é homotópica a g se, e somente se, existe uma aplicação contínua $H : X \times [0,1] \to Y$ tal que $H(x,0) = f(x)$ e $H(x,1) = g(x)$, $\forall x \in X$.*

A aplicação H é chamada de homotopia entre f e g e se f é homotópica a g, então utilizaremos a notação $f \simeq g$.

Exemplo 2.1.2. *Seja $Y \subset E$, onde E, é um espaço vetorial normado. Dadas as aplicações contínuas $f, g : X \longrightarrow Y$, se o segmento de reta $[f(x), g(x)]$ está contido em Y para todo $x \in X$ então $f \simeq g$.*

Neste caso, a homotopia entre f e g é $H(x,t) = (1-t).f(x)+t.g(x)$ e tal homotopia chama-se homotopia linear.

Proposição 2.1.3. *Sejam X e Y espaços topológicos. A relação de homotopia $\simeq$ é uma relação de equivalência no conjunto $C(X,Y)$ das aplicações contínuas de X em Y.*

Demonstração. Dado f, tomando

$$F(x,t) = f(x)$$

segue que $f \backsimeq f$.
Dados $f \backsimeq g$ de forma que F seja uma homotopia entre ambos, naturalmente

$$G(x,t) = F(x, 1-t)$$

é uma homotopia entre g e f.
Logo, $g \backsimeq f$.
Suponha que $f \backsimeq g$ e $g \backsimeq h$ sendo F e F' respectivamente homotopias entre f e g, e g e h.
Definindo $G : X \times [0,1] \to Y$ pela equação

$$G(x,t) = \begin{cases} F(x,2t) \text{ se } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ F'(x, 2t-1) \text{ se } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

segue que G esta bem definida pois para $t = \frac{1}{2}$, $F(x,2t) = g(x) = F'(x, 2t-1)$ e além disso G é contínua.
Portanto, $f \backsimeq h$. □

Denotarmos por $[X,Y]$ o conjunto das classes de homotopia de aplicações contínuas de X em Y.

Proposição 2.1.4. *Duas aplicações constantes $f, g : X \longrightarrow Y$ com $f(x) = p$ e $g(x) = q$, são homotópicas se, e somente se, p e q pertencem a mesma componente conexa de Y.*

Demonstração. Se existe um caminho $\alpha : [0,1] \longrightarrow Y$ com $\alpha(0) = p$ e $\alpha(1) = q$, definimos uma homotopia $H : X \times [0,1] \to Y$ entre f e g pondo $H(x,t) = \alpha(t)$, para todo $(x,t) \in X \times [0,1]$.
Reciprocamente, se H é uma homotopia entre as aplicações constantes $f(x) = p$ e $g(x) = q$, fixando arbitrariamente $x_0 \in X$, obteremos um caminho $\alpha : [0,1] \longrightarrow Y$ ligando p a q definindo $\alpha(t) = H(x_0, t)$. □

É importante o papel do contra-domínio Y na homotopias, pois ele é o espaço onde a deformação tem lugar. Aumentando Y podem se permitir novas homotopias. Se $Y \subset Y'$, pode ocorrer que duas aplicações contínuas $f, g : X \longrightarrow Y$ não sejam homotópicas, mas, consideradas como aplicações de X em Y', elas o sejam. Como vimos no Exemplo 2.1.2, duas aplicações $f, g : X \longrightarrow E$, com valores em um espaço vetorial normado E são sempre homotópicas, mas o mesmo não ocorre com $f, g : X \longrightarrow E - \{0\}$. Basta tomar $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} - \{0\}$ constantes com $f(x) = 1$ e $g(x) = -1$ para todo x. Como 1 e -1 pertencem a componentes conexas distintas de $\mathbb{R} - \{0\}$, segue que f e g não são homotópicas.

Exemplo 2.1.5. *Seja $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ a esfera unitária n-dimensional. Dadas duas aplicações contínuas $f, g : X \longrightarrow S^n$, se $f(x) \neq -g(x)$, para todo $x \in X$ então $f \simeq g$.*

De fato, nestas condições vale que $(1-t).f(x) + t.g(x) \neq 0$, para todo $t \in [0,1]$ e para todo $x \in X$. Portanto $H : X \times [0,1] \to S^n$ dada por

$$H(x,t) = \frac{(1-t).f(x) + t.g(x)}{|(1-t).f(x) + t.g(x)|}$$

é uma homotopia entre f e g .

Como casos particulares deste exemplo, obtemos

a) Se $f : S^n \longrightarrow S^n$ é tal que $f(x) \neq x$, $\forall x \in S^n$ (isto é, não possui pontos fixos) então f é homotópica à aplicação antípoda $a : S^n \longrightarrow S^n$ dada por $a(x) = -x$.

b) Se $f : S^n \longrightarrow S^n$ é tal que $f(x) \neq -x$, $\forall x \in S^n$ então f é homotópica à aplicação identidade de S^n.

Se n é impar, então a aplicação antípoda $a : S^n \longrightarrow S^n$ dada por $a(x) = -x$ é homotópica à aplicação identidade de S^n**.** De fato, seja $n = 2k-1$. Então $S^n \subset \mathbb{R}^{2k}$. Podemos considerar cada ponto $z = (x_1, y_1, ..., x_k, y_k)$ de S^n como uma lista $z = (z_1, ..., z_k)$ de números complexos $z_j = x_j + i.y_j$ tais que $|z_1|^2 + ... + |z_k|^2 = 1$. Para cada número complexo $u \in S^1$, de módulo1, e cada vetor $z = (z_1, ..., z_k) \in S^n$ definiremos $u.z \in S^n$ por $u.z = (u.z_1, ..., u.z_k)$. Assim defina $H : S^n \times [0,1] \longrightarrow S^n$ por $H(z,t) = e^{t\pi i}.z$. Logo H assim definida é uma homotopia entre a aplicação antípoda e a identidade em S^n.

A recíproca da afirmação acima é válida também, isto é, se a aplicação antípoda $a : S^n \longrightarrow S^n$ dada por $a(x) = -x$ é homotópica à aplicação identidade de S^n, então n é ímpar. (Veja Lima [9])

Proposição 2.1.6. *Sejam X, Y e Z espaços topológicos, $f, f' : X \to Y$ e $g, g' : Y \to Z$ aplicações contínuas. Se $f \simeq f'$ e $g \simeq g'$ então $g \circ f \simeq g' \circ f'$.*

Demonstração. Sejam $H : X \times [0,1] \to Y$ uma homotopia entre f e $f^{'}$ e $K : Y \times [0,1] \to Z$ uma homotopia entre g e $g^{'}$. Definimos $L : X \times [0,1] \to Z$ uma homotopia entre $g \circ f$ e $g' \circ f^{'}$, pondo $L(x,t) = K(H(x,t),t)$. □

Definição 2.1.7. *Sejam X um espaço topológico e f e g dois caminhos em X ligando os pontos x_0 e x_1 de X com $f(0) = g(0) = x_0$ e $f(1) = g(1) = x_1$. Diz-se que f é geometricamente homotópico a g se, e somente se, existe uma aplicação contínua $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ tal que*

a) $H(s,0) = f(s)$ *e* $H(s,1) = g(s)$, $\forall s \in [0,1]$
b) $H(0,t) = x_0$ *e* $H(1,t) = x_1$, $\forall t \in [0,1]$.

A aplicação H é chamada de homotopia geométrica entre os caminhos f e g, ou ainda, H é chamada de caminho homotópico entre f e g.

Utilizaremos a notação $f \simeq_G g$ para dizer que f geometricamente homotópico a g.

De forma análoga a demonstração da Proposição 2.1.3, prova-se que a relação de homotopia geométrica $\simeq_G$ é uma relação de equivalência no conjunto $C([0,1],X)$ das aplicações contínuas de $[0,1]$ em X. Denotaremos por $[X]$ o conjunto das classes de homotopia geométrica dos caminhos em X.

Através da operação de concatenação entre caminhos, definimos uma operação entre classes de equivalência de caminhos geometricamente homotópicos em X como segue: $[g] * [f] = [g * f]$. Observe que se F é um caminho homotópico entre f e f' e G é um caminho homotópico entre g e g', definindo $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ por

$$H(s,t) = \begin{cases} F(2s,t) \text{ para } s \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ G(2s-1,t) \text{ para } s \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

temos que a aplicação H está bem definida, pois $F(1,t) = x_1 = G(0,t)$, e além disso H é contínua. Logo H é um caminho homotópico entre $g * f$ e $g' * f'$ o que caracteriza a boa definição da operação $*$ entre classes de equivalência. Vale destacar que $[g]*[f]$ não é definida para todo par de classes de equivalência e sim somente para classes $[f]$ e $[g]$ onde $f(1) = g(0)$.

A operação $*$ possui as seguintes propriedades:

a) Se $[h] * ([g] * [f])$ está definida, então o mesmo ocorre com $([h] * [g]) * [f]$ sendo ambos iguais.

b) Se f é um caminho em X ligando x_0 a x_1, então $[id_{x_1}] * [f] = [f]$ e $[f] * [id_{x_0}] = [f]$, onde $id_x : [0,1] \to X$ é a aplicação constante $id_x(t) = x \in X$, $\forall t \in [0,1]$.

c) Sendo f um caminho em X ligando x_0 a x_1, o caminho $g(t) = f(1-t)$ é chamado caminho inverso de f e $[g] * [f] = [id_{x_0}]$ e $[f] * [g] = [id_{x_1}]$.

O conjunto das classes de caminhos geometricamente homotópicos no espaço X não forma um grupo munido da operação $*$, uma vez que este produto não é definido para quaisquer duas classes de caminhos homotópicos em X. Todavia iremos fazer a restrição desta operação a um subconjunto de classes de caminhos geometricamente homotópicos em X e relativamente a este subconjunto e a operação $*$, teremos estrutura de grupo, contudo antes de proceder desta forma vamos explorar o interessante conceito de espaço contrátil.

Definição 2.1.8. *Um espaço X é chamado contrátil se, e somente se, a aplicação $id : X \longrightarrow X$ é homotópica a uma aplicação constante $f_p : X \longrightarrow X$ com $f_p(x) = p$, $\forall x \in X$.*

Observe que se X é um espaço contrátil, existe uma homotopia H entre id e f_p e então para x e y, pontos arbitrários de X, a aplicação $h : [0,1] \to X$, dada $h(t) = H(x,t)$, é um caminho ligando x a p. De forma análoga, $r(t) = H(y,t)$ é um caminho ligando y a p. Logo, X é conexo por caminhos, pois a concatenação destes caminhos h e r determina uma ligação entre x e y.

Definição 2.1.9. *Uma aplicação contínua $f : X \to Y$ é chamada uma equivalência homotópica se, e somente se, existe uma aplicação contínua $g : Y \to X$ tal que $g \circ f \backsimeq id_X$ e $f \circ g \backsimeq id_Y$, onde id_X e id_Y são as aplicações identidades A aplicação g é chamada de inverso homotópico de f.*

Dois espaços X e Y têm o mesmo tipo de homotopia se, e somente se, existe uma equivalência homotópica entre eles. Notação: $X \equiv Y$.

Não é difícil verificar que:
i) $X \equiv X$
ii) se $X \equiv Y$, então $Y \equiv X$
iii) se $X \equiv Y$ e $Y \equiv Z$, então $X \equiv Z$

Proposição 2.1.10. *X é contrátil se, e somente se, tem o mesmo tipo de homotopia que um ponto.*

Note que todo homeomorfismo é uma equivalência homotópica. Desta forma, se X é homeomorfo a Y e X é contrátil, segue que $X \equiv Y$ e $X \equiv \{ponto\}$ e portanto $Y \equiv \{ponto\}$, ou seja, Y também é contrátil.

Proposição 2.1.11. *Se X ou Y é contrátil, então toda aplicação contínua $f : X \to Y$ é homotópica a uma aplicação constante.*

Demonstração. Se X for contrátil e $H : X \times [0,1] \to X$ for uma homotopia entre id_x e uma aplicação constante $f_p : X \to X$, $f_p(x) = p$, $\forall x \in X$, então dada qualquer $f : X \to Y$ contínua, a aplicação $f \circ H$ será uma homotopia entre f e uma aplicação constante de Y em Y. Se Y for contrátil e $K : Y \times [0,1] \to Y$ for uma homotopia entre id_y e uma constante, então $L : X \times [0,1] \to Y$, $L(x,t) = K(f(x),t)$ é uma homotopia entre $f : X \to Y$ e uma aplicação constante. □

Sejam X e Y são dois espaços topológicos. Se Y é contrátil, qualquer que seja X, pela Proposição 2.1.11, segue que quaisquer duas aplicações contínuas $f, g : X \to Y$ são sempre homotópicas, ou em outras palavras, $[X,Y]$ possui um único elemento. De forma similar, se X é contrátil e Y é conexo por caminhos, então $[X,Y]$ possui um único elemento.

Definição 2.1.12. *Sejam X um espaço topológico e $x_0 \in X$. Um caminho em X começando e terminando em x_0 é chamado um ciclo com ponto base x_0. O conjunto das classes de homotopia geométrica de ciclos baseados em $x_0 \in X$ com a operação $*$ é chamado de grupo fundamental de X relativamente ao ponto base x_0.*

Denotaremos por $\pi_1(X, x_0)$ o grupo fundamental de X relativamente ao ponto base x_0 .

Observe que dados dois ciclos f e g baseados em x_0, o produto $f * g$ está bem definido e o mesmo é um ciclo em x_0. As propriedades associativa, existência de elemento neutro $[id_{x_0}]$ e do inverso de uma classe são naturalmente válidas. Quando X é um espaço vetorial normado e x_0 é um ponto base escolhido arbitrariamente, se f é um ciclo em x_0, então a homotopia linear $F(x,t) = (1-t)f(x) + tg(x)$, onde $g(x) = x_0$ é constante, mostra que $\pi_1(X, x_0)$ é o grupo trivial. O mesmo argumento pode ser utilizado para mostrar que se X é um subconjunto convexo de um espaço vetorial normado, então $\pi_1(X, x_0)$ é trivial.

O grupo fundamental de X é um invariante topológico do espaço X. Para demonstrar tal afirmação, inicialmente vejamos um conceito que será auxiliar a esta conclusão pretendida.

Seja $h : X \to Y$ uma aplicação contínua com $h(x_0) = y_0$.

Considere f um ciclo em X com base em x_0, então $h \circ f : [0,1] \to Y$ é um ciclo em Y com base em y_0. Assim, pode-se definir a aplicação

$$\begin{aligned} h_* : \pi_1(X, x_0) &\to \pi_1(Y, y_0) \\ [f] &\longmapsto [h \circ f] \end{aligned}$$

que será denominada homomorfismo induzido por h relativamente ao ponto base x_0.

Observe que se F é um caminho homotópico entre f e g, então $h \circ F$ é um caminho homotópico entre $h \circ f$ e $h \circ g$. Além disso, a igualdade $(h \circ r) * (h \circ f) = h \circ (r * f)$, com $f, r \in \pi_1(X, x_0)$, garante que h_* é homomorfismo. De fato,

$$h_*([r] * [f]) = h_*([r * f]) = [h \circ (r * f)] = [(h \circ r) * (h \circ f)] = [h \circ r] * [h \circ f] = h_*([r]) * h_*([f])$$

Note que se $h : X \to Y$ e $k : Y \to Z$ são aplicações contínuas entre espaços X, Y e Z com $h(x_0) = y_0$, $k(y_0) = z_0$, então $(k \circ h)_* = k_* \circ h_*$, e que a aplicação $id : X \to X$, $id(x_0) = x_0$, induz o homomorfismo identidade $id_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$.

Portanto se $\varphi : X \to Y$, $\varphi(x_0) = y_0$, é uma equivalência homotópica de X em Y, então $\varphi_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ é um isomorfismo.

Com efeito, seja $\phi : X \to Y$, $\phi(y_0) = x_0$, o inverso homotópico de φ. Segue que $\phi_* \circ \varphi_* = (\phi \circ \varphi)_*$ e que $(\phi \circ \varphi)_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ é tal que $(\phi \circ \varphi)_* ([f]) = [\phi \circ \varphi \circ f]$, mas como $\phi \circ \varphi \cong id_X$, temos pela Proposição 2.1.6 que $[\phi \circ \varphi \circ f] = [id_X \circ f] = [f]$ e assim $\phi_* \circ \varphi_* = (\varphi \circ \phi)_* = id_*$. De maneira análoga, $\varphi_* \circ \phi_* = id_*$. Portanto, ϕ_* é a inversa de φ_*.

Em resumo, se $X \equiv Y$ então $\pi_1(X, x_0)$ é isomorfo a $\pi_1(Y, \varphi(x_0))$, onde φ é uma equivalência homotópica entre X e Y. Em particular, se φ é um homeomorfismo entre X e Y, então $\pi_1(X, x_0)$ é isomorfo a $\pi_1(Y, \varphi(x_0))$.

Desta forma, se X é contrátil e $x_0 \in X$, então $\pi_1(X, x_0)$ é trivial. De fato, $X \equiv \{p\}$ pela Proposição 2.1.10, então $\pi_1(X, x_0)$ é isomorfo a $\pi_1(\{p\}, p)$, o qual é trivial.

Definição 2.1.13. *Um espaço topológico X é simplesmente conexo se, e somente se, X é conexo por caminhos e para todo $x_0 \in X$ tem-se que $\pi_1(X, x_0)$ é um grupo trivial.*

Neste caso, denotamos o grupo fundamental de X relativamente ao ponto base x_0 por $\pi_1(X, x_0) = 0$.

Assim se X é simplesmente conexo, todo ciclo $f : [0,1] \to X$ com base em x_0 é homotópico ao caminho constante $id_{x_0} : [0,1] \longrightarrow X$ dado por $id_{x_0}(t) = x_0$.

Como um espaço contrátil X é conexo por caminhos e possui grupo fundamental $\pi_1(X, x_0)$ trivial, seque que todo espaço contrátil é simplesmente conexo.

Proposição 2.1.14. *Em um espaço simplesmente conexo X, quaisquer dois caminhos com os mesmos pontos iniciais e finais são geometricamente homotópicos.*

Demonstração. Sejam f e g caminhos em X ligando x_0 a x_1. Então, $\overleftarrow{g} * f$ é um ciclo em X com base em x_0. Como X é simplesmente conexo, este ciclo é homotópico ao caminho constante id_{x_0}. Logo, $[f] = [id_{x_1}] * [f] = ([g] * [\overleftarrow{g}]) * [f] = [g] * ([\overleftarrow{g}] * [f]) = [g] * [\overleftarrow{g} * f] = [g] * [id_{x_0}] = [g]$.
Portanto, $f \simeq_G g$. □

2.2 Homotopia Monotônica

Definição 2.2.1. *Sejam Σ um sistema de controle evoluindo sobre uma variedade diferenciável M e α e β duas trajetórias em $R(\Sigma, x, y)$. Diz-se que α é monotonicamente (ou causalmente) homotópica a g se, e somente se, existe uma aplicação contínua*
$H : [0,1] \times [0,1] \to M$ tal que

a) $H(s,0) = \alpha(s)$ e $H(s,1) = \beta(s)$, $\forall s \in [0,1]$
b) $H(s,t) := H_t(s) \in R(\Sigma, x, y)$, $\forall t \in [0,1]$.

A aplicação H é chamada de homotopia monotônica (ou causal) entre α e β e utilizaremos a notação $\alpha \simeq_M \beta$ para dizer que α é monotonicamente (ou causalmente) homotópica a β.

Proposição 2.2.2. *Sejam Σ um sistema de controle evoluindo sobre uma variedade diferenciável M e α e β duas trajetórias em $R(\Sigma, x, y)$. Então, $\alpha \simeq_M \beta$ se, e somente se, $\overleftarrow{\alpha} \simeq_M \overleftarrow{\beta}$.*

Demonstração. Se $\alpha \simeq_M \beta$, então existe uma H homotopia monotônica entre α e β.
Considere aplicação $F : [0,1] \times [0,1] \to M$ dada por $F(s,t) = H(1-s,t)$. Claramente, F é contínua e F satisfaz
a) $F(s,0) = \alpha(1-s) = \overleftarrow{\alpha}(s)$ e $H(s,1) = \beta(1-s) = \overleftarrow{\beta}(s)$, $\forall s \in [0,1]$
b) $F(s,t) := H_t(1-s) = \overleftarrow{H}_t \in R(\Sigma, y, x)$, $\forall t \in [0,1]$, pois se $H(s,t) := H_t(s) \in R(\Sigma, x, y)$

segue pelo Lema 1.4.8 que $\overleftarrow{H}_t \in R(\Sigma, y, x)$.
Portanto F é uma homotopia monotônica entre $\overleftarrow{\alpha}$ e $\overleftarrow{\beta}$.
A recíproca decorre do fato de que $\alpha = \overleftarrow{\overleftarrow{\alpha}}$ e $\beta = \overleftarrow{\overleftarrow{\beta}}$. □

É interessante notar que se α e β são duas trajetórias em $R(\Sigma, x, y)$ monotonicamente homotópicas, elas necessariamente são geometricamente homotópicas. Entretanto a recíproca não é verdadeira (veja Kizil [7]), ou seja, se α e β são duas trajetórias em $R(\Sigma, x, y)$ geometricamente homotópicas, elas não necessariamente serão monotonicamente homotópicas.

De forma análoga à demonstração da Proposição 2.1.3, prova-se que fixado x_0 em M, a relação de homotopia monotônica $\backsimeq_M$ é uma relação de equivalência no conjunto $R(\Sigma, x_0)$ das trajetórias regulares em M com respeito a Σ. Logo, duas trajetórias α e β em M pertencem à mesma classe de equivalência se, e somente se, $\alpha \backsimeq_M \beta$. Note ainda, que uma condição necessária para que $\alpha \backsimeq_M \beta$ é que $\alpha, \beta \in R(\Sigma, x, y)$ para algum $y \in M$. As classes de equivalência serão denotadas por $[\gamma]_M$, onde γ é um representante qualquer da classe. Então se fixarmos uma condição inicial $x_0 \in M$ podemos considerar o conjunto $R(\Sigma, x_0)/\backsimeq_M = \{[\alpha]_M : \alpha \in R(\Sigma, x_0, y) \text{ para algum } y \in M\}$. Denotaremos o conjunto $R(\Sigma, x_0)/\backsimeq_M$ por $\Gamma(\Sigma, x_0)$. O conjunto $\Gamma(\Sigma, x_0)$ é chamado o espaço das classes de homotopia monotônica com ponto base x_0 em M.

Considere a aplicação

$$\begin{aligned} \pi : R(\Sigma, x_0) &\longrightarrow \Gamma(\Sigma, x_0) \\ \alpha &\longmapsto [\alpha]_M \end{aligned}$$

Tal aplicação é chamada de projeção canônica de $R(\Sigma, x_0)$ em $\Gamma(\Sigma, x_0)$.

A princípio, muniremos o espaço $\Gamma(\Sigma, x_0)$ das classes de homotopia monotônica com ponto base x_0 em M, com a topologia quociente $\mathcal{T}_\pi$ dada pela aplicação π, isto é, um subconjunto A de $\Gamma(\Sigma, x_0)$ é aberto em $(\Gamma(\Sigma, x_0), \mathcal{T}_\pi)$, se e somente se, $\pi^{-1}(A)$ é aberto em $(R(\Sigma, x_0), \mathcal{C}^0)$.

Proposição 2.2.3. *A aplicação $\pi : R(\Sigma, x_0) \longrightarrow \Gamma(\Sigma, x_0)$ é contínua, com $\Gamma(\Sigma, x_0)$ munido com a topologia quociente $\mathcal{T}_\pi$.*

Demonstração. Decorre da própria definição da topologia quociente $\mathcal{T}_\pi$. □

Proposição 2.2.4. *Sejam Σ um sistema de controle evoluindo sobre uma variedade diferenciável M. Se $\alpha_0, \alpha_1 \in R(\Sigma, x, y)$ e $\beta_0, \beta_1 \in R(\Sigma, y, z)$ são tais que $\alpha_0 \simeq_M \alpha_1$ e $\beta_0 \simeq_M \beta_1$ então $\beta_0 * \alpha_0 \simeq_M \beta_1 * \alpha_1$.*

Demonstração. Por hipótese, existem homotopias monotônicas $F : [0,1] \times [0,1] \to R(\Sigma, x, y)$ tal que $F_0(s) = \alpha_0(s)$ e $F_1(s) = \alpha_1(s)$ e $G : [0,1] \times [0,1] \to R(\Sigma, y, z)$ tal que $G_0(s) = \beta_0(s)$ e $G_1(s) = \beta_1(s)$. Defina $H : [0,1] \times [0,1] \to M$ pondo

$$H(s,t) = \begin{cases} F(2s,t) \text{ para } s \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ G(2s-1,t) \text{ para } s \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

Temos que a aplicação H está bem definida, pois $F(1,t) = y = G(0,t)$, e além disso H é continua e satizfaz

a) $H(s,0) = (\beta_0 * \alpha_0)(s)$ e $H(s,1) = (\beta_1 * \alpha_1)(s)$, $\forall s \in [0,1]$

b) $H(s,t) = H_t(s) = (G_t * F_t)(s) \in R(\Sigma, x)$, $\forall t \in [0,1]$, pois como para cada $t \in [0,1]$, $F_t \in R(\Sigma, x, y)$ e $G_t \in T(\Sigma, y)$, segue pela proposição 1.4.10 que $(G_t * F_t)(s) \in R(\Sigma, x)$.

Portanto H é uma homotopia monotônica ente $\beta_0 * \alpha_0$ e $\beta_1 * \alpha_1$. $\square$

2.3 Estrutura de Variedade em $\Gamma(\Sigma, x_0)$

Proposição 2.3.1. *Seja X um conjunto sem estrutura topológica e $\phi_i : W_i \longrightarrow X$ uma coleção de aplicações com W_i como subconjuntos abertos do $\mathbb{R}^n$. Suponha que*

i) Cada ϕ_i é uma bijeção entre W_i e sua imagem;

ii) $X = \bigcup\limits_i \phi_i(W_i)$;

iii) se i, j são tais que $C_{ij} = \phi_i(W_i) \cap \phi_j(W_j) \neq \emptyset$ então o conjunto $\phi_i^{-1}(C_{ij}) \subset W_i$ é aberto e a aplicação $\phi_j^{-1} \circ \phi_i : \phi_i^{-1}(C_{ij}) \longrightarrow W_j$ é diferenciável.

Então (ϕ_i, W_i) define um atlas para uma única estrutura de variedade diferenciável em X, ou mais precisamente, existe uma única topologia em X relativamente a qual (ϕ_i, W_i) é um atlas em X.

Demonstração. Unicidade - Seja $\mathcal{T}$ uma topologia em X tal que (ϕ_i, W_i) é um atlas sobre $(X, \mathcal{T})$. Então as imagens $\phi_i(W_i)$ dos homeomorfismos $\phi_i : W_i \longrightarrow \phi_i(W_i)$ são elementos de $\mathcal{T}$ e cobrem X.

Se $A \subset X$ é aberto então $A \cap \phi_i(W_i) \in \mathcal{T}$. Logo $\phi_i^{-1}(A \cap \phi_i(W_i))$ é aberto em $\mathbb{R}^n$.
Por outro lado, se $A \subset X$ é tal que $\phi_i^{-1}(A \cap \phi_i(W_i))$ é aberto em $\mathbb{R}^n$ para todo ϕ_i, então $A = \bigcup_i \phi_i\left(\phi_i^{-1}(A \cap \phi_i(W_i))\right)$ é aberto em X.
Logo, $A \in \mathcal{T}$ se, e somente se, $\phi_i^{-1}(A \cap \phi_i(W_i))$ é aberto em $\mathbb{R}^n$ para todo ϕ_i no atlas (ϕ_i, W_i). Isto mostra a unicidade de $\mathcal{T}$.

Existência - Considere $\mathcal{T} = \{\ A \subset X : \phi_i^{-1}(A \cap \phi_i(W_i))$ é aberto em $\mathbb{R}^n$ para todo ϕ_i na coleção $(\phi_i, W_i)\}$. Usando as condições i), ii) e iii) se verifica que $\mathcal{T}$ define uma topologia em X.
Para concluir que (ϕ_i, W_i) é um atlas sobre $(X, \mathcal{T})$ resta mostrar que cada ϕ_i é um homeomorfismo. Note que cada $\phi_i(W_i) \in \mathcal{T}$.
Seja U um aberto em $\phi_i(W_i)$. Logo $U \in \mathcal{T}$ e assim $\phi_i^{-1}(U \cap \phi_i(W_i)) = \phi_i^{-1}(U)$ é aberto em $\mathbb{R}^n$. Portanto ϕ_i é continua.
Seja V aberto em W_i. Segue que V é aberto em $\mathbb{R}^n$ e como $\phi_i^{-1}(\phi_i(V) \cap \phi_i(W_i)) = \phi_i^{-1}(\phi_i(V \cap W_i)) = \phi_i^{-1}(\phi_i(V)) = V$ conclui-se $\phi_i(V) \in \mathcal{T}$. Portanto ϕ_i é aberta.
Como cada ϕ_i é uma bijeção contínua e aberta, segue que cada ϕ_i é um homeomorfismo. $\square$

Definição 2.3.2. *Seja $\varphi : U \longrightarrow V \times W$ um difeomorfismo e $u \in U$ tal que $\varphi(u) = (a, b)$. A seção φ em u é subconjunto $\varphi^{-1}(\{a\} \times W) \subset U$, o qual denota-se por W_u.*

O próximo teorema é o resultado principal desta seção.

Teorema 2.3.3. *Sejam Σ um sistema de controle evoluindo sobre uma variedade diferenciável M de dimensão n. O espaço $\Gamma(\Sigma, x_0)$ das classes de homotopia monotônica com ponto base x_0 em M tem uma estrutura de variedade diferenciável (C^∞) de dimensão n.*

Demonstração. Definiremos um atlas para a estrutura diferenciável sobre $\Gamma(\Sigma, x_0)$ através da aplicação $e_{x_0} : \mathcal{U}(\Sigma) \longmapsto M$ dada por $e_{x_0}(u) = trj_{x_0}(u)(1)$.
Seja $z = e_{x_0}(u)$ o ponto final da trajetória regular definida pelo controle regular u. Pela definição de controle regular sabemos que o posto da aplicação e_{x_0} em u é igual a dimensão de M. Portanto pelo Teorema da Função Implícita existem conjuntos abertos $U \subset \mathcal{U}(\Sigma)$, com $u \in U$, $V \subset \ker d(e_{x_0})_u$ e $W \subset M$ difeomorfo a um aberto de $\mathbb{R}^n$ tal que existe um difeomorfismo $\varphi : U \longrightarrow V \times W$ e $(e_{x_0})|_U = \hat{\pi} \circ \varphi$, onde $\hat{\pi} : V \times W \longrightarrow W$ é a projeção usual (Veja Kizil [7] ou Lang [8]). Podemos contrair U e supor que $U \subset \mathcal{R}_\Sigma(x_0)$, pois pela Proposição 1.4.4 $\mathcal{R}_\Sigma(x_0)$ é aberto em $\mathcal{U}(\Sigma)$.

Dada a seção φ em u, $W_u = \varphi^{-1}(\{a\} \times W)$, a aplicação $(e_{x_0})|_{W_u} : W_u \longrightarrow V \times W$ é um difeomorfismo (entre W_u e W) e a aplicação $trj_{x_0} : W_u \longrightarrow R(\Sigma, x_0)$ que associa a cada controle regular $v \in W_u$ a sua trajetória correspondente é contínua, aberta e injetora.
De fato, ela é contínua pela Proposição 1.3.4, aberta pela Proposição 1.3.5 e injetora pois dados $u_1, u_2 \in W_u$ diferentes, como φ é difeomorfismo, segue que $\varphi(u_1) = (a, b_1) \neq (a, b_2) = \varphi\ (u_2)$, o implica que $e_{x_0}(u_1) = b_1 \neq b_2 = e_{x_0}(u_2)$ e portanto $trj_{x_0}(u_1) \neq trj_{x_0}(u_1)$.
Assim $trj_{x_0} : W_u \longrightarrow trj_{x_0}(W_u)$ é um homeomorfismo.
Temos também que a projeção canônica $\pi : R(\Sigma, x_0) \longrightarrow \Gamma(\Sigma, x_0)$ restrita a $trj_{x_0}(W_u)$ é injetora, pois as trajetórias que representam cada classe tem pontos finais distintos. Afirmamos que $\pi_u = \pi|_{trj_{x_0}(W_u)} : trj_{x_0}(W_u) \longrightarrow \Gamma(\Sigma, x_0)$ é aberta.
De fato, dado A aberto em $trj_{x_0}(W_u)$ (consequentemente A é aberto em $R(\Sigma, x_0)$, pois $trj_{x_0}(W_u)$ também é aberto $R(\Sigma, x_0)$) temos que $\pi_u(A)$ é aberto em $\Gamma(\Sigma, x_0)$, pois sendo π_u injetora, vale que $\pi^{-1}(\pi_u(A)) = A$, o qual é aberto em $R(\Sigma, x_0)$ por hipótese.
Assim $\pi_u : trj_{x_0}(W_u) \longrightarrow \pi_u(trj_{x_0}(W_u)) \subset \Gamma(\Sigma, x_0)$ é um homeomorfismo.
Defina

$$\begin{aligned} \phi_u : W_u &\longrightarrow \Gamma(\Sigma, x_0) \\ v &\longmapsto (\pi_u \circ trj_{x_0})(v) \end{aligned}$$

Temos que $\phi_u : W_u \longrightarrow \phi_u(W_u)$ é homeomorfimo e $\phi_u(W_u)$ é aberto em $\Gamma(\Sigma, x_0)$, pois $\phi_u(W_u) = \pi_u(trj_{x_0}(W_u))$.
Como W_u é difeomorfo a W e este por sua vez é difeomorfo a um aberto de $\mathbb{R}^n$, podemos supor sem perda de generalidade, quando for conveniente, que W_u é um aberto de $\mathbb{R}^n$ e portanto ϕ_u como uma aplicação de $W_u \subset \mathbb{R}^n$ em $\Gamma(\Sigma, x_0)$.
Agora basta provar que (ϕ_u, W_u), com $u \in \mathcal{R}_\Sigma(x_0)$ define um atlas para uma estrutura de variedade diferenciável em $\Gamma(\Sigma, x_0)$. Para isso basta verificar as condições da Proposição 2.3.1.

i) Cada $\phi_u : W_u \longrightarrow \Gamma(\Sigma, x_0)$ é uma bijeção sobre sua imagem uma vez que as mesmas são homeomorfismos.
ii) $\Gamma(\Sigma, x_0) = \bigcup_{u \in \mathcal{R}_\Sigma(x)} \phi_u(W_u)$.
É claro que $\bigcup_{u \in \mathcal{R}_\Sigma(x)} \phi_u(W_u) \subset \Gamma(\Sigma, x_0)$.
Por outro lado dado $[\alpha]_M \in \Gamma(\Sigma, x_0)$, temos que $\alpha = trj_x(v)$, onde v é controle regular, logo

$[\alpha]_M \in \phi_v(W_v)$ e portanto $\Gamma(\Sigma, x_0) \subset \bigcup_{u \in \mathcal{R}_\Sigma(x)} \phi_u(W_u)$.
iii) Sejam (ϕ_1, W_1) e (ϕ_2, W_2) duas cartas locais com $C = \phi_1(W_1) \cap \phi_2(W_2) \neq \emptyset$.
Primeiramente C é aberto em $\Gamma(\Sigma, x_0)$ como intersecção de abertos, consequentemente C é aberto em $\phi_1(W_1)$ e como ϕ_1 é homeomorfismo segue que $\phi_1^{-1}(C)$ é aberto em W_1.
Agora, seja $\omega_1 \in \phi_1^{-1}(C) \subset W_1$. Mostremos $\phi_2^{-1} \circ \phi_1 : \phi_1^{-1}(C) \longrightarrow W_2$ é diferenciável em ω_1. Temos que $\phi_1(w_1) = [\alpha]_M \in C$. Como $C = \phi_1(W_1) \cap \phi_2(W_2)$ segue que existe um único $w_2 \in \phi_2^{-1}(C) \subset W_2$ tal que $\phi_2(w_2) = [\alpha]_M$.
Daí como $\phi_i(w_i) = [\alpha]_M$, $i = 1, 2$, segue que $(\pi \circ trj_{x_0})(w_1) = (\pi \circ trj_{x_0})(w_2)$, o que implica que $trj_{x_0}(w_1) \backsimeq_M trj_{x_0}(w_2)$ e portanto $e_{x_0}(w_1) = e_{x_0}(w_2) = x$.
Denote por e_i a restrição de e_{x_0} a W_i, com $i = 1, 2$. Como $e_i : W_i \longrightarrow e_{x_0}(W_i)$ é difeomorfismo e $N = e_{x_0}(W_1) \cap e_{x_0}(W_2) \neq \emptyset$ é aberto em M, segue que $e_i : e_i^{-1}(N) \longrightarrow N$ são difeomorfismos para $i = 1, 2$, logo $e_2^{-1} \circ e_1 : e_1^{-1}(N) \longrightarrow e_2^{-1}(N) \subset W_2$ é um difeomorfismo (C^∞). Note que $\omega_i \in e_i^{-1}(N)$ e $e_i^{-1}(N)$ é aberto em W_i, para $i = 1, 2$. Como $w_1 \in \phi_1^{-1}(C)$ e $\phi_1^{-1}(C)$ é aberto em W_1 temos que a aplicação $e_2^{-1} \circ e_1 : e_1^{-1}(N) \cap \phi_1^{-1}(C) \longrightarrow W_2$ é diferenciável (C^∞) em w_1.
Mas $\phi_2^{-1} \circ \phi_1$ coincide com $e_2^{-1} \circ e_1$ para todo $v \in (e_1^{-1}(N) \cap \phi_1^{-1}(C))$. De fato, $\phi_2^{-1} \circ \phi_1\,(v_1) = \phi_2^{-1}([trj_{x_0}(v_1)]_M) = v_2$, então $\phi_2(v_2) = [trj_{x_0}(v_1)]_M$ o que implica que $trj_{x_0}(\,v_1) \backsimeq_M trj_{x_0}(v_2)$, assim $e_1(v_1) = e_2(v_2)$ e portanto $e_2^{-1} \circ e_1\,(v_1) = v_2$.
Portanto $\phi_2^{-1} \circ \phi_1 : e_1^{-1}(N) \cap \phi_1^{-1}(C) \longrightarrow W_2$ é diferenciável em w_1, e consequentemente, $\phi_2^{-1} \circ \phi_1 : \phi_1^{-1}(C) \longrightarrow W_2$ é diferenciável em w_1.

Conclui-se que $\Gamma(\Sigma, x_0)$ tem uma estrutura de variedade diferenciável (C^∞) de dimensão n. □

Proposição 2.3.4. *Sejam Σ um sistema de controle evoluindo sobre uma variedade diferenciável M e $\varepsilon : \Gamma(\Sigma, x_0) \longmapsto \mathcal{A}_R(\Sigma, x_0) \subset M$ a aplicação de avaliação que associa a uma classe de homotopia $[\gamma]_m$ o ponto final de seu representante. Então, ε é um difeomorfismo local.*

Demonstração. Pelo Teorema 2.3.3 temos que $\Gamma(\Sigma, x_0)$ tem uma estrutura de variedade diferenciável, onde as aplicações $\phi_u : W_u \longrightarrow \phi_u(W_u) \subset \Gamma(\Sigma, x_0)$ dadas por $\phi_u = \pi_u \circ trj_{x_0}$, com $u \in \mathcal{R}_\Sigma(x)$ definem o atlas (ϕ_u, W_u) para esta estrutura de variedade diferenciável.
Seja $\phi : W \longrightarrow \phi(W)$ uma carta para a estrutura de variedade diferenciável em $\Gamma(\Sigma, x_0)$.
Considere a aplicação $(e_{x_0})|_W \circ \phi^{-1} : \phi(W) \subset \Gamma(\Sigma, x_0) \longrightarrow (e_{x_0})|_W(W)$. Em determinado

trecho da demonstração do Teorema 2.3.3 garante-se que $(e_{x_0})|_W$ é um difeomorfismo. Já ϕ^{-1} é um difeomorfismo, pois é uma carta para a estrutura de variedade diferenciável em $\Gamma(\Sigma, x_0)$. Logo a aplicação $(e_{x_0})|_W \circ \phi^{-1}$ é um difeomorfismo (C^∞).
Como ε coincide com $(e_{x_0})|_{W_u} \circ \phi_u^{-1}$, em $\phi(W_u)$, $\forall u \in \mathcal{R}_\Sigma(x_0)$ e $\Gamma(\Sigma, x_0) = \bigcup_{u \in \mathcal{R}_\Sigma(x)} \phi_u(W_u)$, segue que ε é um difeomorfismo local (C^∞). □

A seguir estabeleceremos propriedades de continuidade para a aplicação $\tau : \mathcal{R}_\Sigma(x_0) \longrightarrow \Gamma(\Sigma, x_0)$, onde $\tau = \pi \circ trj_{x_0}$.

Proposição 2.3.5. *A aplicação $\tau : \mathcal{R}_\Sigma(x_0) \longrightarrow \Gamma(\Sigma, x_0)$ é contínua em relação à topologia fraca* sobre $\mathcal{R}_\Sigma(x_0)$, e consequentemente, τ é continua em relação à topologia forte sobre $\mathcal{R}_\Sigma(x_0)$.*

Demonstração. Pela Proposição 1.3.4 a aplicação $trj_{x_0} : \mathcal{U}(\Sigma) \longrightarrow T(\Sigma, x_0)$ é contínua em relação à topologia $\mathcal{C}^1$ (e consequentemente a topologia $\mathcal{C}^0$) sobre $T(\Sigma, x_0)$. Em particular $trj_{x_0} : \mathcal{U}(\Sigma) \longrightarrow T(\Sigma, x_0)$ é contínua em relação à topologia $\mathcal{C}^0$ sobre $T(\Sigma, x_0)$ e à topologia fraca * sobre $\mathcal{U}(\Sigma)$. Temos também que a aplicação e_{x_0} é diferenciável e portanto contínua em relação à topologia fraca* sobre $\mathcal{R}_\Sigma(x_0) \subset \mathcal{U}(\Sigma)$. Agora, sejam $\varepsilon : \Gamma(\Sigma, x_0) \longmapsto \mathcal{A}_R(\Sigma, x_0)$ a aplicação de avaliação da Proposição 2.3.4. e (ϕ_u, W_u) o atlas construído no Teorema 2.3.3 para a estrutura de variedade diferenciável de $\Gamma(\Sigma, x_0)$. Então temos que $e_{x_0} = \varepsilon \circ \tau$. Já que τ é dada localmente como $\tau = \varepsilon^{-1} \circ e_{x_0}$, segue que τ é contínua em relação à topologia fraca* sobre $\mathcal{R}_\Sigma(x_0)$. Como a topologia fraca* é mais fraca que a topologia forte, segue também que τ é contínua em relação à topologia forte sobre $\mathcal{R}_\Sigma(x_0)$. □

Proposição 2.3.6. *A aplicação $\tau : \mathcal{R}_\Sigma(x_0) \longrightarrow \Gamma(\Sigma, x_0)$ é aberta com relação à topologia forte sobre $\mathcal{R}_\Sigma(x_0)$, e consequentemente, τ é aberta com relação à topologia fraca* sobre $\mathcal{R}_\Sigma(x_0)$.*

Demonstração. A construção das cartas no Teorema 2.3.3 garante que o domínio de τ é localmente um produto devido ao Teorema da Função Implícita, isto é, para cada $v \in \mathcal{R}_\Sigma(x_0)$, existe um aberto U_v em $\mathcal{R}_\Sigma(x_0)$ tal U_v é isomorfo ao produto de abertos $V_v \times W_v$ e a restrição a U_v de e_{x_0} é a projeção $V_v \times W_v \longrightarrow W_v$.
Assim, $\tau(U_v) = \varepsilon^{-1}(e_{x_0}(U_v)) = \varepsilon^{-1}(W_v)$ que é um aberto em $\Gamma(\Sigma, x_0)$, já que é ε é contínua. Logo, dado um aberto A em $\mathcal{R}_\Sigma(x_0)$ ($\mathcal{R}_\Sigma(x_0)$ munido com a topologia forte), para cada

$v \in A$ conseguimos um aberto $U_v \subset A$ tal que $\tau(U_v)$ é um aberto em $\Gamma(\Sigma, x_0)$. Deste modo $\tau(A) = \tau(\bigcup_{v \in A} U_v) = \bigcup_{v \in A} \tau(U_v)$ é aberto em $\Gamma(\Sigma, x_0)$.
Portanto τ é aberta com relação à topologia forte sobre $\mathcal{R}_\Sigma(x_0)$ e como a topologia fraca* é mais fraca que a topologia forte, segue também que τ é aberta em relação à topologia fraca* sobre $\mathcal{R}_\Sigma(x_0)$. □

Proposição 2.3.7. *A aplicação $\pi : R(\Sigma, x_0) \longrightarrow \Gamma(\Sigma, x_0)$ é contínua em relação à topologia $\mathcal{C}^1$ sobre $R(\Sigma, x_0)$.*

Demonstração. Seja A um aberto em $\Gamma(\Sigma, x_0)$. Temos pela Proposição 2.3.5 que $\tau^{-1}(A) = trj_{x_0}^{-1}(\pi^{-1}(A))$ é aberto em $\mathcal{R}_\Sigma(x_0)$ e usando o fato de que a aplicação trj_{x_0} é sobrejetora segue pela Proposição 1.3.5 que $trj_{x_0}(trj_{x_0}^{-1}(\pi^{-1}(A))) = \pi^{-1}(A)$ é aberto $R(\Sigma, x_0)$ munido com a topologia $\mathcal{C}^1$.
Portanto π é contínua em relação à topologia $\mathcal{C}^1$ sobre $R(\Sigma, x_0)$. □

Proposição 2.3.8. *A aplicação $\pi : R(\Sigma, x_0) \longrightarrow \Gamma(\Sigma, x_0)$ é aberta em relação à topologia $\mathcal{C}^1$ sobre $R(\Sigma, x_0)$, e consequentemente, π é aberta com relação à topologia $\mathcal{C}^0$ sobre $R(\Sigma, x_0)$.*

Demonstração. Seja A um aberto em $R(\Sigma, x_0)$ munido com a topologia $\mathcal{C}^1$. Temos pela Proposição 1.3.4 que $trj_{x_0}^{-1}(A)$ é aberto em $\mathcal{R}_\Sigma(x_0)$ e usando o fato de que a aplicação trj_{x_0} é sobrejetora segue pela Proposição 2.3.6 que $\tau(trj_{x_0}^{-1}(A)) = \pi(trj_{x_0}(trj_{x_0}^{-1}(A))) = \pi(A)$ é aberto em $\Gamma(\Sigma, x_0)$.
Portanto π é aberta em relação à topologia $\mathcal{C}^1$ sobre $R(\Sigma, x_0)$, e consequentemente, τ é aberta com relação à topologia $\mathcal{C}^0$ sobre $R(\Sigma, x_0)$. □

Para verificar que $\Gamma(\Sigma, x_0)$ é Hausdorff, uma propriedade que não é evidente a princípio, usaremos o seguinte resultado geral.

Lema 2.3.9. *Sejam L e N duas variedades diferenciáveis e $f : L \longrightarrow N$ uma aplicação diferenciável tal que df_z é um isomorfismo em cada ponto $z \in L$. Se N é Hausdorff então L é Hausdorff.*

Demonstração. Tome $x, y \in L$ com $x \neq y$. Se $f(x) \neq f(y)$, pela hipótese de N ser Hausdorff escolha os conjuntos abertos U_1 contendo $f(x)$ e U_2 contendo $f(y)$ tal que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Então $f^{-1}(U_1)$ e $f^{-1}(U_2)$ separam x de y.

Suponhamos que $f(x) = f(y)$. Basta mostrar que existe um conjunto aberto V de y que não contém x no seu fecho, pois neste caso $L\backslash\overline{V}$ é um aberto que contém x e não intercepta V. Para isto, escolha $V \subset L$, com $y \in V$ de tal modo que V seja homeomorfo a um aberto de $\mathbb{R}^n$ (o que é possível, pois L é variedade) e $f : V \longrightarrow f(V)$ seja um difeomorfismo (o que é garantido por hipótese).

Suponha que $x \in \overline{V}$. Logo deve existir uma seqüência $x_n \in V$ tal que $x_n \longrightarrow x$. Então $f(x_n) \longrightarrow f(x) = f(y)$ em N, e em particular $f(x_n) \longrightarrow f(y)$ em $f(V)$. Como a restrição de f à V é um difeomorfismo, segue que $x_n = f^{-1}(f(x_n)) \longrightarrow f^{-1}(f(y)) = y$ em V. Daí $x_n \longrightarrow x$, $x_n \longrightarrow y$ e $x \neq y$, o que contradiz a hipótese de V sendo homeomorfo a um aberto de $\mathbb{R}^n$ ter todas as suas seqüências convergentes com limite único.

Portanto $x \notin \overline{V}$, concluindo a demonstração do lema. □

Corolário 2.3.10. *A topologia em* $\Gamma(\Sigma, x_0)$ *é de Hausdorff.*

Demonstração. Segue do Lema 2.3.9 e da Proposição 2.3.4 □

Proposição 2.3.11. $\Gamma(\Sigma, x_0)$ *é paracompacto.*

Demonstração. Temos que a aplicação $\tau : R_\Sigma(x_0) \longrightarrow \Gamma(\Sigma, x_0)$ é continua e o espaço de Banach $\mathcal{U}$ é separável (isto é, $\mathcal{U}$ é um espaço métrico completo que tem um subconjunto denso e enumerável).

Segue que $\mathcal{U}$ satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade, pois todo espaço métrico separável satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade (isto é, possui base de abertos enumerável).

Também, o domínio $R_\Sigma(x_0)$ de τ satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade, pois é um subespaço de $\mathcal{U}$, logo $\Gamma(\Sigma, x_0)$ satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade, uma vez que é a imagem contínua-aberta de um espaço que satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade.

Sabe-se que todo espaço localmente compacto, Hausdorff e que satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade é paracompacto.

Portanto $\Gamma(\Sigma, x_0)$ é paracompacto. □

CAPÍTULO 3

Caracterização de Homotopia Monotônica

Nesta seção, estudamos o processo de levantamento. Mais precisamente, dado um sistema de controle $\Sigma = (M, \Sigma, \mathcal{U}(\Sigma), \mathcal{D}(\Sigma))$ evoluindo sobre uma variedade diferenciável M, temos pelo Teorema 2.3.3 que o espaço $\Gamma(\Sigma, x_0)$ é uma variedade diferenciável e que é localmente difeomorfo a $\mathcal{A}_R(\Sigma, x_0)$, portanto através deste difeomorfismo local podemos obter um novo sistema de controle $\widehat{\Sigma} = (\Gamma(\Sigma, x_0), \widehat{\Sigma}, \mathcal{U}(\widehat{\Sigma}), \mathcal{D}(\widehat{\Sigma}))$, onde $\widehat{\Sigma}$ representa o cone convexo dos campos em $\Gamma(\Sigma, x_0)$ levantados a partir dos campos pertencentes a Σ. Em seguida centraremos nossa atenção a este sistema levantado para relacionar suas propriedades com a homotopia monotônica das trajetórias do sistema original.

3.1 Levantamentos

Definição 3.1.1. *Sejam L e N duas variedades diferenciáveis. Uma aplicação $f : L \longrightarrow N$ é um difeomorfismo local se, e somente se, f é diferenciável e a aplicação df_z é uma bijeção para todo $z \in L$.*

Uma classe particular de difeomorfismos locais são os recobrimentos diferenciáveis que tem muitas propriedades não compartilhadas por difeomorfismos locais em geral.

Para nossos objetivos estamos interessados em levantamentos contínuos a L de aplicações tomando valores em N. Mesmo que isso possa ser feito para aplicações de recobrimento não vale em geral para difeomorfismos locais.

Por outro lado, o levantamento contínuo é localmente possível e é único sobre espaços conexos quando existe.

Proposição 3.1.2. *Sejam L e N duas variedades diferenciáveis, N Hausdorff, $f : L \longmapsto N$ um difeomorfismo local sobrejetor e X um espaço topológico. Seja $\alpha : X \longmapsto N$ uma aplicação contínua e tome $t_0 \in X$ e $y \in L$ tal que $f(y) = \alpha(t_0)$. Então existe uma vizinhança U de t_0 e uma aplicação contínua $\tilde{\alpha} : U \longmapsto L$ tal que $f \circ \tilde{\alpha} = \alpha$ e $\tilde{\alpha}(t_0) = y$.*

Mais ainda, se X for conexo e $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2 : X \longmapsto L$ são tais que $f \circ \tilde{\alpha}_i = \alpha$ e $\tilde{\alpha}_i(t_0) = y$, com $i = 1, 2$, então $\tilde{\alpha}_1 = \tilde{\alpha}_2$.

Demonstração. Como $f : L \longmapsto N$ é um difeomorfismo local existem uma vizinhança aberta V de y em L e uma vizinhança aberta W de $f(y) = \alpha(t_0)$ em N tal que a aplicação $f|_V : V \longmapsto W$ seja um difeomorfismo. Como $\alpha : X \longmapsto N$ é uma aplicação contínua, segue que $\alpha^{-1}(W)$ é aberto em X e $t_0 \in \alpha^{-1}(W)$.
Então tome $U = \alpha^{-1}(W)$ como vizinhança aberta de t_0 e defina a aplicação $\tilde{\alpha} : U \longmapsto L$ por

$$\tilde{\alpha} = (f|_V)^{-1} \circ \alpha|_U$$

Evidentemente, $\tilde{\alpha}$ é contínua, $f \circ \tilde{\alpha} = \alpha$ e $\tilde{\alpha}(t_0) = y$.
Agora, sejam $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2 : X \longmapsto L$ tais que $f \circ \tilde{\alpha}_i = \alpha$ e $\tilde{\alpha}_i(t_0) = y$, com $i = 1, 2$ e X conexo.
Considere conjunto $A = \{t \in X : \tilde{\alpha}_1(t) = \tilde{\alpha}_2(t)\}$.
Seja x_n uma seqüencia em A tal que $x_n \longrightarrow x$. Temos por continuidade de $\tilde{\alpha}_1$ e $\tilde{\alpha}_2$ que $\tilde{\alpha}_1(x_n) \longrightarrow \tilde{\alpha}_1(x)$ e $\tilde{\alpha}_2(x_n) \longrightarrow \tilde{\alpha}_2(x)$. Como $\tilde{\alpha}_1(x_n) = \tilde{\alpha}_2(x_n), \forall n$ e L é Hausdorff (o que decorre do Lema 2.3.9 e do fato de N ser Haussdorff) temos a unicidade do limite da seqüencia $\tilde{\alpha}_1(x_n)$, isto é, $\tilde{\alpha}_1(x) = \tilde{\alpha}_2(x)$. Logo $x \in A$.
Portanto A é fechado em X.
Por outro lado, seja $x \in A$. Então, $\tilde{\alpha}_1(x) = \tilde{\alpha}_2(x) = z$. Como f é difeomorfismo local existem uma vizinhança aberta V de z em L e uma vizinhança aberta W de $f(z) = \alpha(x)$ em N tal que a aplicação $f|_V : V \longmapsto W$ seja um difeomorfismo. Tome $U = (\tilde{\alpha}_1)^{-1}(V) \cap (\tilde{\alpha}_2)^{-1}(V)$.
Temos que $x \in U$ e U é aberto como interseção de abertos.
Seja $x_0 \in U$.

Por hipótese $f(\tilde{\alpha}_1(x_0)) = \alpha(x_0) = f(\tilde{\alpha}_2(x_0))$ e como $\tilde{\alpha}_1(x_0), \tilde{\alpha}_2(x_0) \in V$ segue pelo fato de $f|_V$ ser injetora que $\tilde{\alpha}_1(x_0) = \tilde{\alpha}_2(x_0)$. Logo $x \in U \subset A$ e daí $x \in int(A)$.
Portanto A é aberto em X.
Uma vez sendo X conexo segue que $A = X$ ou $A = \emptyset$. Mas, $A \neq \emptyset$, pois $\tilde{\alpha}_i(t_0) = y$, com $i = 1, 2$.
Portanto $A = X$, e assim $\tilde{\alpha}_1 = \tilde{\alpha}_2$ □

Definição 3.1.3. *Diremos que uma aplicação contínua e sobrejetiva $f : L \longrightarrow N$ goza da propriedade de levantamento de caminhos, se e somente se, dado um caminho $a : [0, 1] \longrightarrow N$ e um ponto $x \in L$ com $f(x) = a(0)$, existir um caminho $\tilde{a} : [0, 1] \longrightarrow L$ tal que $\tilde{a}(0) = x$ e $f \circ \tilde{a} = a$.*

Sabemos que nem todo difeomorfismo local $f : L \longrightarrow N$ goza da propriedade de levantamento de caminhos. Entretanto, quando L for Hausdorff, um difeomorfismo local $f : L \longrightarrow N$ goza da propriedade de levantamento de caminhos.

Temos que a aplicação $\varepsilon : \Gamma(\Sigma, x_0) \longrightarrow \mathcal{A}_R(\Sigma, x_0) \subset M$ dada por $\varepsilon([\alpha]_M) = \alpha(1)$ é claramente sobrejetora e pela Proposição 2.3.4 ε é um difeomorfismo local. Mas ainda, pelo Corolário 2.3.10 $\Gamma(\Sigma, x_0)$ é Hausdorff. Portanto $\varepsilon : \Gamma(\Sigma, x_0) \longrightarrow \mathcal{A}_R(\Sigma, x_0)$ goza da propriedade de levantamento de caminhos, o que implica que as trajetórias em $\mathcal{A}_R(\Sigma, x_0)$ podem ser levantadas a caminhos em $\Gamma(\Sigma, x_0)$.

Proposição 3.1.4. *Sejam L e N duas variedades diferenciáveis, N Hausdorff, $f : L \longmapsto N$ um difeomorfismo local sobrejetor, $\alpha, \beta : [0, 1] \to N$ duas curvas contínuas tal que $\alpha(0) = \beta(0)$ e $H : [0, 1] \times [0, 1] \to N$ uma homotopia entre α e β. Tome $y \in L$, com $f(y) = \alpha(0) = \beta(0)$, tal que para todo $s \in [0, 1]$ a curva $h_t(s) = H(s, t)$ se levanta à curva em L, digamos $\tilde{h}_t(s)$, tal que $\tilde{h}_t(0) = y$*
Então $\widetilde{H} : [0, 1] \times [0, 1] \to L$ dada por $\tilde{H}(s, t) = \tilde{h}_t(s)$ é uma homotopia entre $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$, levantamentos de α e β respectivamente.

Além disso, se H é uma homotopia fixando os pontos finais então os levantamentos de α e β a partir de y têm o mesmo ponto final, isto é, $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1)$

Demonstração. Veja Lima [9]. □

Sejam L e N duas variedades diferenciáveis, $f : L \longrightarrow N$ um difeomorfismo local e X um campo de vetores em N. Define-se em L o seguinte campo de vetores

$$\begin{aligned} \widehat{X} : L &\longrightarrow TL \\ x &\longmapsto d(f^{-1})_{f(x)}(X(f(x))) \end{aligned}$$

onde f^{-1} denota a inversa local de f ao redor de x.

Podemos ainda, considerar a aplicação

$$\begin{aligned} \sigma_f : \mathcal{X}^\infty(N) &\longrightarrow \mathcal{X}^\infty(L) \\ X &\longmapsto \widehat{X} \end{aligned}$$

onde $\widetilde{X}(x) = d(f^{-1})_{f(x)}(X(f(x)))$.

Proposição 3.1.5. *Sejam L e N duas variedades diferenciáveis e $f : L \longrightarrow N$ um difeomorfismo local sobrejetor. Então, a aplicação $\sigma_f : \mathcal{X}^\infty(N) \longrightarrow \mathcal{X}^\infty(L)$ é injetora.*

Demonstração. Sejam X e Y campos em N tais que $X \neq Y$.
Então existe algum $y \in N$ tal que $X(y) \neq Y(y)$ e como f é sobrejetora existe $x \in L$ tal que $f(x) = y$. Logo, $X(f(x)) \neq Y(f(x))$.
Como f é difeomorfismo local temos que $d(f^{-1})_{f(x)}$ é injetora, e assim $d(f^{-1})_{f(x)}(X(f(x))) \neq d(f^{-1})_{f(x)}(Y(f(x)))$, ou seja , $\widehat{X} \neq \widehat{Y}$.
Portanto σ_f é injetora. $\square$

3.2 Levantamento do Sistema de Controle Σ à $\Gamma(\Sigma, x_0)$

Seja $\Sigma = (M, \Sigma, \mathcal{U}(\Sigma), \mathcal{D}(\Sigma))$ um sistema de controle evoluindo sobre uma variedade diferenciável M.

Já sabemos que a aplicação $\varepsilon : \Gamma(\Sigma, x_0) \longrightarrow \mathcal{A}_R(\Sigma, x_0) \subset M$ dada por $\varepsilon([\alpha]_M) = \alpha(1)$ é um difeomorfismo local sobrejetor. Considere a restrição Σ a $\mathcal{A}_R(\Sigma, x_0)$, ou seja, os campos de Σ serão considerados como aplicações $\mathcal{A}_R(\Sigma, x_0)$ em TM.

Considere também o conjunto

$$\widehat{\Sigma} = \{\widehat{X} \in \mathcal{X}^\infty(\Gamma(\Sigma, x_0)) : \widehat{X} = \sigma_\varepsilon(X), X \in \Sigma\}$$

Como Σ é um cone convexo, resulta que o conjunto $\widehat{\Sigma}$ é um cone convexo em $\Gamma(\Sigma, x_0)$.

Portanto $\widehat{\Sigma} = (\Gamma(\Sigma, x_0), \widehat{\Sigma}, \mathcal{U}(\widehat{\Sigma}), \mathcal{D}(\widehat{\Sigma}))$ é um sistema de controle evoluindo sobre a variedade diferenciável $\Gamma(\Sigma, x_0)$. O sistema $\widehat{\Sigma}$ será chamado sistema de controle levantado a partir do sistema Σ.

Segue pela Proposição 3.1.5 que existe uma correspondência biunívoca entre Σ e $\widehat{\Sigma}$, portanto consideraremos $\mathcal{U}(\widehat{\Sigma}) = \mathcal{U}(\Sigma)$.

Denotaremos por $\widehat{trj}_z(u)$ a trajetória de $\widehat{\Sigma}$ começada em $z \in \Gamma(\Sigma, x_0)$ e que corresponde ao controle u.

Proposição 3.2.1. *Sejam Σ um sistema de controle evoluindo sobre uma variedade diferenciável M e $\widehat{\Sigma}$ sistema de controle levantado a partir Σ via aplicação $\varepsilon : \Gamma(\Sigma, x_0) \longrightarrow \mathcal{A}_R(\Sigma, x_0)$. Se α é uma trajetória em $\Gamma(\Sigma, x_0)$ dada por $\widehat{\Sigma}$, então $\varepsilon(\alpha)$ é uma trajetória em M dada por Σ.*
Reciprocamente, se α é uma trajetória em $\mathcal{A}_R(\Sigma, x_0)$ dada por Σ e $\hat{\alpha}$ é uma curva diferenciável em $\Gamma(\Sigma, x_0)$ tal que $\varepsilon(\hat{\alpha}) = \alpha$, então $\hat{\alpha}$ é uma trajetória $\Gamma(\Sigma, x_0)$ dada por $\widehat{\Sigma}$.

Demonstração. Seja α uma trajetória em $\Gamma(\Sigma, x_0)$ dada por $\widehat{\Sigma}$. Então para cada $s \in [0, 1]$, existe um campo $\widehat{X}_s$ tal que $\frac{d\alpha}{dt}|_{t=s} = \widehat{X}_s(\alpha(s))$.
Daí para cada $s \in [0, 1]$, temos que

$$\begin{aligned}\frac{d(\varepsilon(\alpha))}{dt}|_{t=s} &= d\varepsilon_{\alpha(s)} \circ \frac{d\alpha}{dt}|_{t=s} = d\varepsilon_{\alpha(s)}(\widehat{X}_s(\alpha(s)))\\ &= d\varepsilon_{\alpha(s)}\left(d(\varepsilon^{-1})_{\varepsilon(\alpha(s))}(X_s(\varepsilon(\alpha(s))))\right)\\ &= X_s(\varepsilon(\alpha(s)))\end{aligned}$$

ou seja, $\varepsilon(\alpha)$ é uma trajetória em M dada por Σ.
Reciprocamente, sejam α uma trajetória em $\mathcal{A}_R(\Sigma, x_0)$ dada por Σ e $\hat{\alpha}$ uma curva em $\Gamma(\Sigma, x_0)$ tal que $\varepsilon(\hat{\alpha}) = \alpha$.
Derivando a igualdade $\varepsilon(\hat{\alpha}) = \alpha$ no ponto s, para cada $s \in [0, 1]$, obtemos $d\varepsilon_{\hat{\alpha}(s)} \circ \frac{d\widehat{\alpha}}{dt}|_{t=s} = \frac{d\alpha}{dt}|_{t=s}$ (I).
Como α uma trajetória em $\mathcal{A}_R(\Sigma, x_0)$ dada por Σ, para cada $s \in [0, 1]$, existe um campo X_s tal que $\frac{d\alpha}{dt}|_{t=s} = X_s(\alpha(s))$ (II).

Segue de (I) e (II) que para cada $s \in [0,1]$,

$$\begin{aligned}\frac{d\widehat{\alpha}}{dt}|_{t=s} &= d(\varepsilon^{-1})_{\varepsilon(\widehat{\alpha}(s))}(X_s(\alpha(s)))\\ &= d(\varepsilon^{-1})_{\varepsilon(\widehat{\alpha}(s))}(X_s(\varepsilon(\widehat{\alpha}(s))))\\ &= \widehat{X}_s(\widehat{\alpha}(s))\end{aligned}$$

Portanto $\hat{\alpha}$ é uma trajetória $\Gamma(\Sigma, x_0)$ dada por $\widehat{\Sigma}$. □

Em outras palavras, a demonstração da Proposição 3.2.1 garante que para cada $u \in \mathcal{U}(\Sigma)$, se $\varepsilon(y) = x$ então $trj_x(u) = \varepsilon \circ \widehat{trj}_y(u)$. Temos como conseqüência desta igualdade que

$$e_{\varepsilon(y)}(u) = (\varepsilon \circ \hat{e}_y)(u), \forall u \in \mathcal{U}(\Sigma).$$

onde $\hat{e}_y$ é aplicação $\hat{e}_y : \mathcal{U}(\Sigma) \longrightarrow \Gamma(\Sigma, x_0)$ que associa a cada $u \in \mathcal{U}(\Sigma)$ o ponto final de $\widehat{trj}_y(u)$.

Corolário 3.2.2. *Um controle u é regular em $y \in \Gamma(\Sigma, x_0)$ (com respeito a $\widehat{\Sigma}$) se, e somente se, u é regular em $\varepsilon(y) \in \mathcal{A}_R(\Sigma, x_0)$ (com respeito a Σ).*

Demonstração. Segue imediatamente da expressão $e_{\varepsilon(y)}(u) = (\varepsilon \circ \hat{e}_y)(u), \forall u \in \mathcal{U}(\Sigma)$, e do fato de ε ser um difeomorfismo local sobrejetor. □

Seja Σ um sistema de controle evoluindo sobre uma variedade M e $x \in M$. Denotaremos por $\Sigma(x) = \{X(x) : X \in \Sigma\}$. Note que $\Sigma(x) \subset T_xM$.

Definição 3.2.3. *Sejam Σ_1 e Σ_2 sistemas de controle evoluindo sobre M_1 e M_2 respectivamente. Dizemos que a aplicação $f : M_1 \longrightarrow M_2$ é uma aplicação de controle entre Σ_1 e Σ_2 se, e somente se, f é difeomorfismo local e $df_x(\Sigma_1(x)) = \Sigma_2(f(x))$, para todo $x \in M_1$*

Diz-se que uma aplicação de controle $f : M_1 \longrightarrow M_2$ é uma aplicação de recobrimento de controle se, e somente se, f é sobrejetora.

Definição 3.2.4. *Sejam Σ_1 e Σ_2 sistemas de controle evoluindo sobre M_1 e M_2 respectivamente. M_1 é um espaço de recobrimento de controle de M_2 se, e somente se, existe uma aplicação de recobrimento de controle $f : M_1 \longrightarrow M_2$.*

Exemplo 3.2.5. *Seja Σ um sistema de controle evoluindo sobre uma variedade M. Pela própria construção do sistema de controle $\widehat{\Sigma}$ evoluindo sobre a variedade $\Gamma(\Sigma, x_0)$ e pelo fato da $\varepsilon : \Gamma(\Sigma, x_0) \longrightarrow \mathcal{A}_R(\Sigma, x_0) \subset M$ ser um difeomorfismo local sobrejetor, segue que ε é um recobrimento de controle e $\Gamma(\Sigma, x_0)$ é um espaço de recobrimento de controle de $\mathcal{A}_R(\Sigma, x_0)$.*

3.3 Caminhos Induzidos por Trajetórias

Nosso propósito agora é estudar $\widehat{\Sigma}$ e relacionar suas propriedades com a homotopia monotônica de trajetórias de Σ.

Seja Σ um sistema de controle evoluindo sobre uma variedade M e $z_0 \in \mathcal{A}_R(\Sigma, x_0)$. Dado uma trajetória $\alpha = trj_{z_0}(u)$ definiremos o caminho $\bar{\alpha}$ no espaço de trajetórias a partir de z_0, como sendo

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} : [0,1] &\longrightarrow T(\Sigma, z_0) \\ s &\longmapsto \bar{\alpha}(s) = \bar{\alpha}_s : [0,1] \longrightarrow M \end{aligned}$$

onde cada trajetória $\bar{\alpha}_s : [0,1] \longrightarrow M$ é dada por $\bar{\alpha}_s(t) = \alpha(st)$.

A aplicação $\bar{\alpha} : [0,1] \longrightarrow T(\Sigma, z_0)$ está bem definida pois para cada $s \in [0,1]$, $\bar{\alpha}_s$ satisfaz

$$\frac{d\bar{\alpha}_s}{dt}|_{t=l} = s\left(\frac{d\alpha}{dt}|_{t=ls}\right) = s.u(ls)(\alpha(ls)) = u_s(l)(\bar{\alpha}_s(l)), \forall l \in [0,1]$$

onde, $u_s(l) = s.u(sl)$ é um controle, uma vez que Σ é um cone convexo.

Denominaremos $\bar{\alpha}$ como o caminho no espaço de trajetórias induzido pela trajetória α.

Proposição 3.3.1. *O caminho $\bar{\alpha} : [0,1] \longrightarrow T(\Sigma, z_0)$ é contínuo, com $T(\Sigma, z_0)$ munido da topologia $\mathcal{C}^0$.*

Demonstração. Dada uma seqüência s_n em $[0,1]$ com $s_n \to s$, basta mostrar que $\bar{\alpha}(s_n) \to \bar{\alpha}(s)$. Observe que se $s_n \to s$ então para cada $t \in [0,1]$ tem-se que $s_n t \to st$. Pela continuidade uniforme de α, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $d(\alpha(s_n t), \alpha(st)) < \epsilon$ sempre que $|s_n t - st| < \delta$.

Note que se $|s_n - s| < \delta$ então $|s_n t - st| = t\,|s_n - s| < t\delta \leq \delta$ para todo $t \in [0,1]$.

Logo, dado $\epsilon > 0$, tomando o valor $\delta > 0$ mencionado acima, seque que sempre que $|s_n - s| < \delta$, tem-se que $|s_n t - st| < \delta$, $\forall t \in [0,1]$ e consequentemente pela continuidade de α, tem-se que

$$\|\bar{\alpha}_{s_n} - \bar{\alpha}_s\|_\infty = \sup_{0 \leq t \leq 1} d(\bar{\alpha}(s_n)(t), \bar{\alpha}(s)(t)) = \sup_{0 \leq t \leq 1} d(\alpha(s_n t), \alpha(st)) < \epsilon$$

Portanto o caminho $\bar{\alpha} : [0,1] \longrightarrow T(\Sigma, z_0)$ é contínuo. □

Continuando a discussão, seja α uma trajetória como acima e $\beta = trj_{x_0}(v)$ tal que $\beta(1) = z_0$. Definiremos o caminho $\bar{\alpha} * \beta$ no espaço de trajetórias a partir de x_0, como sendo

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} * \beta : [0,1] &\longrightarrow T(\Sigma, x_0) \\ s &\longmapsto (\bar{\alpha} * \beta)(s) = \bar{\alpha}_s * \beta : [0,1] \longrightarrow M \end{aligned}$$

Proposição 3.3.2. *O caminho $(\bar{\alpha} * \beta) : [0,1] \longrightarrow T(\Sigma, x_0)$ é contínuo, com $T(\Sigma, x_0)$ munido da topologia $\mathcal{C}^0$.*

Demonstração. Dada uma seqüência s_n em $[0,1]$ com $s_n \to s$, basta mostrar que $\bar{\alpha}(s_n) \to \bar{\alpha}(s)$. Observe que se $s_n \to s$ então para cada $l \in [0,1]$ tem-se que $s_n l \to sl$. Pela continuidade uniforme de α, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $d(\alpha(s_n l), \alpha(sl)) < \epsilon$ sempre que $|s_n l - sl| < \delta$. Note que se $|s_n - s| < \delta$ então $|s_n l - sl| = l\,|s_n - s| < l\delta \leq \delta$ para todo $l \in [0,1]$.
Logo, dado $\epsilon > 0$, tomando valor $\delta > 0$ mencionado acima, seque que, sempre que $|s_n - s| < \delta$, tem-se que $|s_n l - sl| < \delta$, $\forall l \in [0,1]$ e consequentemente pela continuidade de α, tem-se que

$$\begin{aligned} \|(\bar{\alpha} * \beta)(s_n) - (\bar{\alpha} * \beta)(s)\|_\infty &= \sup_{0 \leq t \leq 1} d((\bar{\alpha} * \beta)(s_n)(t), (\bar{\alpha} * \beta)(s)(t)) \\ &= \sup_{0 \leq t \leq 1/2} d(\bar{\alpha}(s_n)(2t-1), \bar{\alpha}(s)(2t-1)) \\ &= \sup_{0 \leq l \leq 1} d(\bar{\alpha}(s_n)(l), \bar{\alpha}(s)(l)) \\ &= \sup_{0 \leq l \leq 1} d(\alpha(s_n l), \alpha(sl)) < \epsilon \end{aligned}$$

Portanto o caminho $\bar{\alpha} * \beta : [0,1] \longrightarrow T(\Sigma, x_0)$ é contínuo. □

É interessante notar que se $\beta \in R(\Sigma, x_0)$, a Proposição 1.4.10 garante que $\alpha * \beta \in R(\Sigma, x_0)$. Em outras palavras, se $\beta \in R(\Sigma, x_0)$, o caminho $(\bar{\alpha} * \beta) : [0,1] \longrightarrow T(\Sigma, x_0)$ assume valores em $R(\Sigma, x_0)$, e então podemos considerar o caminho

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_\beta : [0,1] &\longrightarrow \Gamma(\Sigma, x_0) \\ s &\longmapsto [\bar{\alpha}_s * \beta]_M \end{aligned}$$

Temos que $\hat{\alpha}_\beta$ é contínuo, pois temos que $\hat{\alpha}_\beta = \pi \circ (\bar{\alpha} * \beta)$ e a projeção canônica de $R(\Sigma, x_0)$ em $\Gamma(\Sigma, x_0)$, bem como o caminho $(\bar{\alpha} * \beta)$, são ambos contínuos.

Proposição 3.3.3. *Sejam* Σ *um sistema de controle evoluindo sobre uma variedade* M*,* $\beta \in R(\Sigma, x_0)$ *e* $\alpha = trj_{\beta(1)}(u)$*. Então,* $\alpha = \varepsilon \circ \hat{\alpha}_\beta$*, ou em outras palavras,* $\hat{\alpha}_\beta = \widehat{trj}_{[\beta]_M}(u)$*.*

Demonstração. Como já foi observado anteriormente, se $\beta \in R(\Sigma, x_0)$, então $\hat{\alpha}_\beta$ está bem definido. Notemos que o ponto final de cada curva $\bar{\alpha}_s * \beta : [0,1] \longrightarrow M$ é $\alpha(s)$, ou seja , $(\bar{\alpha}_s * \beta)(1) = \alpha(s)$.
Logo pela definição de ε temos que $\varepsilon\left([\bar{\alpha}_s * \beta]_M\right) = \alpha(s)$ para todo $s \in [0,1]$. Agora como $\bar{\alpha}_0 * \beta \simeq_M \beta$ segue que $\varepsilon([\bar{\alpha}_0 * \beta]_M) = \varepsilon([\beta]_M) = z_0$. Portanto $\alpha = \varepsilon \circ \hat{\alpha}_\beta$.
Como ε é difeomorfismo local sobrejetor entre variedades diferenciáveis, ambas de Hausdorff, $[0,1]$ é conexo, $\varepsilon \circ \widehat{trj}_{[\beta]_M}(u) = \alpha = \varepsilon \circ \hat{\alpha}_\beta$ e $\hat{\alpha}_\beta(0) = [\beta]_M = \widehat{trj}_{[\beta]_M}(u)(0)$, segue pela Proposição 3.1.2 que $\hat{\alpha}_\beta = \widehat{trj}_{[\beta]_M}(u)$. □

3.4 Homotopia Monotônica e Levantamentos à $\Gamma(\Sigma, x_0)$

Um fato conhecido na teoria de espaços de recobrimentos afirma que duas curvas em um espaço M com as mesmas extremidades são homotópicas se, e somente se, seus levantamentos ao recobrimento universal $\widehat{M}$ a partir de um mesmo ponto inicial têm o mesmo ponto final.

O nosso objetivo agora é provar um análogo no contexto da homotopia monotônica.

A demonstração desse resultado requer alguns resultados prévios.

Lema 3.4.1. *Sejam* Σ *um sistema de controle evoluindo sobre uma variedade* M*,* $\beta_1, \beta_2 \in R(\Sigma, x_0)$*, com* $\beta_1(1) = \beta_2(1) = z_0$ *e* $\alpha = trj_{z_0}(u)$*. Então,* $\alpha * \beta_1 \simeq_M \alpha * \beta_2$ *se, e somente se,* $\beta_1 \simeq_M \beta_2$

Demonstração. Se $\alpha * \beta_1 \simeq_M \alpha * \beta_2$, segue que $[\alpha * \beta_1]_M = [\alpha * \beta_2]_M$, isto é, $\hat{\alpha}_{\beta_1}(1) = \hat{\alpha}_{\beta_2}(1)$.
Como ε é difeomorfismo local sobrejetor entre variedades diferenciáveis, ambas de Hausdorff, $[0,1]$ é conexo, $\varepsilon \circ \hat{\alpha}_{\beta_1} = \alpha = \varepsilon \circ \hat{\alpha}_{\beta_2}$ e $\hat{\alpha}_{\beta_1}(1) = \hat{\alpha}_{\beta_2}(1)$, segue pelo Lema 3.1.2 que $\hat{\alpha}_{\beta_1} = \hat{\alpha}_{\beta_2}$ e em particular, $\hat{\alpha}_{\beta_1}(0) = \hat{\alpha}_{\beta_2}(0)$, isto é, $[\beta_1]_M = [\beta_2]_M$.
Portanto, $\beta_1 \simeq_M \beta_2$.
Reciprocamente, se $\beta_1 \simeq_M \beta_2$, segue $[\beta_1]_M = [\beta_2]_M$ e dai, $\widehat{trj}_{[\beta_1]_M}(u) = \widehat{trj}_{[\beta_2]_M}(u)$, onde u é o controle associado a trajetória α.
Segue pela Proposição 3.3.3 que $\hat{\alpha}_{\beta_1} = \widehat{trj}_{[\beta_1]_M}(u) = \widehat{trj}_{[\beta_2]_M}(u) = \hat{\alpha}_{\beta_2}$,e em particular, $[\alpha * \beta_1]_M = \hat{\alpha}_{\beta_1}(1) = \hat{\alpha}_{\beta_2}(1) = [\alpha * \beta_2]_M$. Portanto, $\alpha * \beta_1 \simeq_M \alpha * \beta_2$.
Portanto, $\alpha * \beta_1 \simeq_M \alpha * \beta_2$. □

Observação 3.4.2. *Na Proposição 3.4.1 a demontração de que $\alpha * \beta_1 \simeq_M \alpha * \beta_2$, pode ser feita usando o fato de que $\beta_1 \simeq_M \beta_2$, $\alpha \simeq_M \alpha$ e a Proposição 2.2.4.*

Corolário 3.4.3. *Sejam Σ um sistema de controle evoluindo sobre uma variedade M, $\beta \in R(\Sigma, x_0)$ e $\alpha_1, \alpha_2 \in R(\Sigma, \beta(1))$, com $\alpha_1(1) = \alpha_2(1)$. Então, $\alpha_1 * \beta \simeq_M \alpha_2 * \beta$ se, e somente se, $\alpha_1 \simeq_M \alpha_2$.*

Demonstração. Pelo Lema 3.4.1 segue que $\overleftarrow{\beta} * \overleftarrow{\alpha}_1 \simeq_M \overleftarrow{\beta} * \overleftarrow{\alpha}_2$ se, e somente se, $\overleftarrow{\alpha}_1 \simeq_M \overleftarrow{\alpha}_2$. Note que $\overleftarrow{\beta} * \overleftarrow{\alpha}_1 = \overleftarrow{(\alpha_1 * \beta)}$ e $\overleftarrow{\beta} * \overleftarrow{\alpha}_2 = \overleftarrow{(\alpha_2 * \beta)}$. Logo $\overleftarrow{(\alpha_1 * \beta)} \simeq_M \overleftarrow{(\alpha_2 * \beta)}$ se, e somente se, $\overleftarrow{\alpha}_1 \simeq_M \overleftarrow{\alpha}_2$. E usando a Proposição 2.2.2, temos que $\alpha_1 * \beta \simeq_M \alpha_1 * \beta$ se, e somente se, $\alpha_1 \simeq_M \alpha_2$. □

Seja Σ um sistema de controle evoluindo sobre uma variedade M. Fixe uma trajetória regular $\beta \in R(\Sigma, x_0, y_0)$.

Considere a aplicação

$$\begin{aligned} \psi : R(\Sigma, y_0) &\longrightarrow R(\Sigma, x_0) \\ \alpha &\longmapsto \alpha * \beta \end{aligned}$$

Considere também a aplicação

$$\begin{aligned} I_\beta : \Gamma(\Sigma, y_0) &\longrightarrow \Gamma(\Sigma, x_0) \\ [\alpha]_M &\longmapsto [\alpha * \beta]_M \end{aligned}$$

Temos que aplicação I_β está bem definida.

De fato, dado outro representante da classe $[\alpha]_M$, digamos, α_1, temos que $\alpha \simeq_M \alpha_1$. Daí decorre pelo Corolário 3.4.3 que $\alpha * \beta \simeq_M \alpha_1 * \beta$, ou seja, que $\alpha_1 * \beta$ é um representante da classe $[\alpha * \beta]_M$.

Além disso, temos que aplicação I_β é injetora.

Com efeito, se $[\alpha_1 * \beta]_M = [\alpha_2 * \beta]_M$, segue que $\alpha_1 * \beta \simeq_M \alpha_1 * \beta$, logo pelo Corolário 3.4.3 temos que $\alpha_1 \simeq_M \alpha_2$, isto é, $[\alpha_1]_M = [\alpha_2]_M$.

Note ainda, que

$$I_\beta([\alpha]_M) = [\alpha * \beta]_M = \hat{\alpha}_\beta(1)$$

Proposição 3.4.4. *Sejam Σ um sistema de controle evoluindo sobre uma variedade M e $\beta_1, \beta_2 \in R(\Sigma, x_0, y_0)$. Então, $I_{\beta_1} = I_{\beta_2}$ se, e somente se, $\beta_1 \simeq_M \beta_2$.*

Demonstração. Se $I_{\beta_1} = I_{\beta_2}$, tomando $[\alpha]_M \in \Gamma(\Sigma, y_0)$, segue que $[\alpha * \beta_1]_M = I_{\beta_1}([\alpha]_M) = I_{\beta_2}([\alpha]_M) = [\alpha * \beta_2]_M$, isto é, $\alpha * \beta_1 \simeq_M \alpha * \beta_2$. Logo, pelo Lema 3.4.1, $\beta_1 \simeq_M \beta_2$.
Se $\beta_1 \simeq_M \beta_2$, segue pelo Lema 3.4.1 que $\alpha * \beta_1 \simeq_M \alpha * \beta_2, \forall \alpha \in T(\Sigma, y_0)$. Em particular, $\alpha * \beta_1 \simeq_M \alpha * \beta_2, \forall \alpha \in R(\Sigma, y_0)$, ou seja $I_{\beta_1}([\alpha]_M) = [\alpha * \beta_1]_M = [\alpha * \beta_2]_M = I_{\beta_2}([\alpha]_M), \forall [\alpha]_M \in \Gamma(\Sigma, y_0)$. Portanto $I_{\beta_1} = I_{\beta_2}$. □

A seguir apresentaremos o teorema que caracteriza, via levantamentos à $\Gamma(\Sigma, x_0)$, quando duas trajetórias regulares em $\mathcal{A}_R(\Sigma, x_0)$ são monotonicamente homotópicas

Teorema 3.4.5. *Sejam Σ um sistema de controle evoluindo sobre uma variedade M, $y_0 \in \mathcal{A}_R(\Sigma, x_0)$, $[\beta]_M \in \varepsilon^{-1}(\{y_0\})$ fixado, $\alpha_1, \alpha_2 \in R(\Sigma, y_0, z_0)$ e $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2$ os levantamentos respectivamente de α_1 e α_2 a variedade $\Gamma(\Sigma, x_0)$ a partir de $[\beta]_M$. Então, $\alpha_1 \simeq_m \alpha_2$ se, e somente se, os pontos finais de $\hat{\alpha}_1$ e $\hat{\alpha}_2$ coincidem.*

Demonstração. Como $[\beta]_M \in \varepsilon^{-1}(\{y_0\})$, segue $\beta \in R(\Sigma, x_0, y_0)$.
Logo, se $\alpha_1 \simeq_m \alpha_2$, então $[\alpha_1]_M = [\alpha_2]_M$ e daí, $\hat{\alpha}_1(1) = \widehat{(\alpha_1)}_\beta(1) = I_\beta([\alpha_1]_M) = I_\beta([\alpha_2]_M) = \widehat{(\alpha_2)}_\beta(1) = \hat{\alpha}_2(1)$.
Reciprocamente, se $\hat{\alpha}_1(1) = \hat{\alpha}_2(1)$, então $I_\beta([\alpha_1]_M) = \widehat{(\alpha_1)}_\beta(1) = \widehat{(\alpha_2)}_\beta(1) = I_\beta([\alpha_2]_M)$. Como I_β é injetora, segue $[\alpha_1]_M = [\alpha_2]_M$ e portanto $\alpha_1 \simeq_m \alpha_2$. □

3.5 Trajetórias Monotonicamente Homotópicas em $\Gamma(\Sigma, x_0)$

Agora, provaremos um resultado mais forte que diz que $\Gamma(\Sigma, y_0)$ é uma subvariedade aberta da variedade $\Gamma(\Sigma, x_0)$ quando y_0 for um ponto acessível a partir de x_0 via uma trajetória regular

Proposição 3.5.1. *Sejam Σ um sistema de controle evoluindo sobre uma variedade M e $\beta \in R(\Sigma, x_0, y_0)$. A aplicação I_β é um difeomorfismo sobre a sua imagem e $I_\beta(\Gamma(\Sigma, y_0)) = \mathcal{A}_R(\widehat{\Sigma}, [\beta]_M)$.*

Demonstração. Temos que a aplicação I_β é injetora, portanto I_β é bijetora sobre sua imagem. Sejam $[\alpha]_M \in \Gamma(\Sigma, y_0)$ e $w_0 = \varepsilon_{y_0}([\alpha]_M)$. Como a aplicação ε_{y_0} é um difeomorfismo local, existem um aberto U em $\Gamma(\Sigma, y_0)$ contendo $[\alpha]_M$ e um aberto V_1 em M contendo w_0 tal que $\varepsilon_{y_0}|_U : U \longrightarrow V_1$ é um difeomorfismo. Da mesma forma ε_{x_0} é um difeomorfismo local, existem um aberto W em $\Gamma(\Sigma, x_0)$ contendo $[\alpha * \beta]_M$ e um aberto V_2 em M contendo w_0 tal que $\varepsilon_{x_0}|_W : W \longrightarrow V_2$ é um difeomorfismo. Note que $w_0 \in V = V_1 \cap V_2$. Logo $I_\beta([\alpha]_M) = ((\varepsilon_{x_0}|_W)^{-1} \circ \varepsilon_{y_0}|_U)([\alpha]_M)$. Portanto I_β é diferenciável e sua diferencial é um isomorfismo em cada ponto o que mostra que I_β é de fato um difeomorfismo.
Agora, seja $[\alpha * \beta]_M \in I_\beta(\Gamma(\Sigma, y_0))$. Temos que $\hat{\alpha}_\beta(1) = [\alpha * \beta]_M$ e por sua vez, $\hat{\alpha}_\beta(1) = \widehat{trj}_{[\beta]_M}(u)(1)$, onde $u \in \mathcal{U}(\Sigma)$ é tal que $\alpha = trj_{y_0}(u)$. Como $[\alpha]_M \in \Gamma(\Sigma, y_0)$, segue que $\alpha \in R(\Sigma, y_0)$, implicando que $u \in R_\Sigma(y_0)$ e consequentemente pelo Corolário 3.2.2, $u \in R_{\widehat{\Sigma}}([\beta]_M)$. Assim, $\widehat{trj}_{[\beta]_M}(u) \in R(\widehat{\Sigma}, [\beta]_M)$, implicando que $\widehat{trj}_{[\beta]_M}(u)(1) = [\alpha * \beta]_M \in \mathcal{A}_R(\widehat{\Sigma}, [\beta]_M)$.
Logo, $I_\beta(\Gamma(\Sigma, y_0)) \subset \mathcal{A}_R(\widehat{\Sigma}, [\beta]_M)$.
Seja $[\gamma]_M \in \mathcal{A}_R(\widehat{\Sigma}, [\beta]_M)$. Então existe $u \in R_{\widehat{\Sigma}}([\beta]_M)$ tal que $\widehat{trj}_{[\beta]_M}(u)(1) = [\gamma]_M$. Considere $\alpha = trj_{y_0}(u)$.
Temos como conseqüência da Proposição 3.2.1 que $\alpha = \varepsilon \circ \widehat{trj}_{[\beta]_M}(u)$ e pela Proposição 3.3.3, segue que $\hat{\alpha}_\beta = \widehat{trj}_{[\beta]_M}(u)$.
Assim, $I_\beta([\alpha]_M) = [\alpha * \beta]_M = \hat{\alpha}_\beta(1) = \widehat{trj}_{[\beta]_M}(u)(1) = [\gamma]_M$.
Logo, $\mathcal{A}_R(\widehat{\Sigma}, [\beta]_M) \subset I_\beta(\Gamma(\Sigma, y_0))$.
Portanto, $I_\beta(\Gamma(\Sigma, y_0)) = \mathcal{A}_R(\widehat{\Sigma}, [\beta]_M)$. □

Proposição 3.5.2. *Sejam δ_0 e δ_1 duas trajetórias de $\widehat{\Sigma}$ em $\Gamma(\Sigma, x_0)$ com o mesmo ponto inicial $[\beta]_M \in \Gamma(\Sigma, x_0)$. Então, δ_0 e δ_1 são monotonicamente homotópicas em $\Gamma(\Sigma, x_0)$, se e somente se , têm o mesmo ponto final.*

Demonstração. Por definição, se δ_0 e δ_1 são monotonicamente homotópicas, então δ_0 e δ_1 têm o mesmo ponto final.
Reciprocamete, se δ_0 e δ_1 têm o mesmo ponto final, então as trajetórias $\alpha_i = \varepsilon \circ \delta_i$ em $\mathcal{A}_R(\Sigma, x_0)$, com $i = 0, 1$, têm as mesmas extremidades e pelo Teorema 3.4.5 temos que $\alpha_0 \backsimeq_M \alpha_1$.
Assim existe uma homotopia monotônica H entre α_0 e α_1 e H é tal que $H(s,t) = H_t(s) \in R(\Sigma, \beta(1)), \forall t \in [0,1]$. Para cada t, a trajetória H_t se levanta a uma trajetória $\widehat{H}_t$ de $\Gamma(\Sigma, x_0)$ com respeito $\widehat{\Sigma}$ a partir de $[\beta]_M$. Pelo Lema 3.1.2 segue que $\widehat{H}_0 = \delta_0$ e $\widehat{H}_1 = \delta_1$.
Considere aplicação $\widehat{H} : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \Gamma(\Sigma, x_0)$ dada por $\widehat{H}(s,t) = \widehat{H}_t(s)$. Segue pelo

Lema 3.1.4 $\widehat{H}$ é uma homotopia entre δ_0 e δ_1, levantamentos de α_1 e α_2 à $\Gamma(\Sigma, x_0)$, respectivamente. Além disso, como α_1 e α_2 têm as mesmas extremidades, segue que $\widehat{H}(1,t) = \delta_0(1) = \delta_1(1), \forall t \in [0,1]$.
Por fim, como $H_t(s) \in R(\Sigma, \beta(1)), \forall t \in [0,1]$, pelo Corolário 3.2.2, tem-se que $\widehat{H}_t(s) \in R(\widehat{\Sigma}, [\beta]_M), \forall t \in [0,1]$. Logo $\widehat{H}$ é uma homotopia monotônica entre δ_0 e δ_1.
Portanto δ_0 e δ_1 são monotonicamente homotópicas em $\Gamma(\Sigma, x_0)$. $\square$

Definição 3.5.3. *Sejam Σ um sistema de controle evoluindo sobre uma variedade M. Diremos que M é simplesmente conexo no sentido monotônico se, e somente, quaisquer duas trajetórias em M com as mesmas extremidades são monotonicamente homotópicas.*

Exemplo 3.5.4. *A Proposição 3.5.2 garante que $\Gamma(\Sigma, x_0)$ é simplesmente conexo no sentido monotônico.*

Corolário 3.5.5. *Para qualquer $[\beta]_M \in \Gamma(\Sigma, x_0)$, o espaço $\Gamma(\widehat{\Sigma}, [\beta]_M)$ é difeomorfo a $\mathcal{A}_R(\widehat{\Sigma}, [\beta]_M)$, e consequentemente, difeomorfo a $\Gamma(\Sigma, \beta(1))$.*

Demonstração. Pela Proposição 3.5.2 o difeomorfismo local sobrejetor $\varepsilon_{[\beta]_M} : \Gamma(\widehat{\Sigma}, [\beta]_M) \longrightarrow \mathcal{A}_R(\widehat{\Sigma}, [\beta]_M)$ é injetor, logo $\varepsilon_{[\beta]_M} : \Gamma(\widehat{\Sigma}, [\beta]_M) \longrightarrow \mathcal{A}_R(\widehat{\Sigma}, [\beta]_M)$ é um difeomorfismo.
Portanto, $\Gamma(\widehat{\Sigma}, [\beta]_M)$ é difeomorfo a $\mathcal{A}_R(\widehat{\Sigma}, [\beta]_M)$.
Da Proposição 3.5.1, segue que $\mathcal{A}_R(\widehat{\Sigma}, [\beta]_M)$ é difeomorfo a $\Gamma(\Sigma, \beta(1))$, e portanto, $\Gamma(\widehat{\Sigma}, [\beta]_M)$ é difeomorfo a $\Gamma(\Sigma, \beta(1))$. $\square$

CAPÍTULO 4

Considerações sobre Homotopias e Sistemas Estocásticos

Neste capítulo serão feitas algumas considerações relativas a possibilidade de elaboração de um conceito similar ao conceito de homotopia monotônica em sistemas de controle para o caso de sistemas estocásticos.

4.1 Espaço de Probabilidade

Nesta seção serão apresentados algumas definições e resultados básicos de Probabilidades, os quais serão utilizados em maior ou menor grau nas seções 4.2, 4.3 e 4.4. Tais definições e resultados podem ser vistos com mais detalhes em James [5].

Definição 4.1.1. *Seja Ω um conjunto não-vazio. Uma σ-álgebra $\mathcal{F}$ em Ω é uma família de subconjuntos de Ω que satisfaz as seguintes condições:*

A1) $\Omega \in \mathcal{F}$.
A2) Se $F \in \mathcal{F}$ *então* $F^C \in \mathcal{F}$, *onde* F^C *denota o complementar de* F *em* Ω .
A3) Se $A_1, A_2, ... \in \mathcal{F}$ *então* $A := \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

O par $(\Omega, \mathcal{F})$ *é chamado de um espaço mensurável e os subconjuntos* F *de* Ω *pertencentes a* $\mathcal{F}$ *são chamados* F*-mensuráveis.*

Dada uma σ-álgebra $\mathcal{F}$ de subconjuntos de Ω, provam-se as seguintes propriedades:

A4) $\emptyset \in \mathcal{F}$.
A5) Se $A_1, A_2, ... \in \mathcal{F}$ então $A := \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Definição 4.1.2. *Uma medida de probabilidade P em um espaço mensurável $(\Omega, \mathcal{F})$ é uma função $P : \mathcal{F} \longrightarrow [0, 1]$ tal que*

P1) $P(A) \geq 0, \forall A \in \mathcal{F}$.
P2) $P(\Omega) = 1$.
P3) Se $A_1, A_2, ... \in \mathcal{F}$ e $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ é uma família disjunta então $P\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

A terna $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ é chamado um espaço de probabilidade.

Dada uma medida de probabilidade P em um espaço mensurável $(\Omega, \mathcal{F})$, provam-se as seguintes propriedades:

P4) $P\left(A^C\right) = 1 - P(A), \forall A \in \mathcal{F}$.
P5) $P(\emptyset) = 0$.
P6) $0 \leq P(A) \leq 1, \forall A \in \mathcal{F}$.
P7) Se $A_1 \subset A_2$, então $P(A_1) \leq P(A_2), \forall A_1, A_2 \in \mathcal{F}$.
P8) Se $A_1, A_2, ... \in \mathcal{F}$ então $P\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum\limits_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

Dado um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ é interessante ressaltar as seguintes fatos:

a) Denomina-se Ω por espaço amostral e um subconjunto A de Ω por evento. Em particular, $A = \Omega$, $A = \emptyset$ e $A = \{p\}$ são chamados evento certo, evento impossível e evento elementar, respectivamente.

b) Também se denomina $\mathcal{F}$ por σ-álgebra dos eventos aleatórios e um elemento A de $\mathcal{F}$ por evento aleatório;

c) Denomina-se P por probabilidade e interpreta-se $P(F) =$ (a probabilidade do evento F ocorrer).

Definição 4.1.3. *Sejam $(\Omega, \mathcal{F})$ um espaço mensurável e $\mathcal{U}$ uma família qualquer de subconjuntos de Ω. A σ-álgebra $\mathcal{H}_{\mathcal{U}}$ gerada por $\mathcal{U}$ é a menor σ-álgebra contendo $\mathcal{U}$. Em outras palavras, $\mathcal{H}_{\mathcal{U}} = \bigcap\{\mathcal{H}; \mathcal{H}\ \sigma\text{-álgebra de } \Omega, \mathcal{U} \subset \mathcal{H}\}$.*

Se $\mathcal{U}$ é a coleção de todos os subconjuntos abertos de um espaço topológico Ω, digamos $\mathbb{R}^n$, a σ-álgebra $\mathcal{H}_{\mathcal{U}}$ gerada por $\mathcal{U}$ é chamada σ-álgebra de Borel e denota-se $\mathcal{H}_{\mathcal{U}}$ por $\mathcal{B}$. Os elementos $B \in \mathcal{B}$ são chamados de conjuntos de Borel.

Definição 4.1.4. *Seja $(\Omega, \mathcal{F})$ um espaço mensurável. Uma função $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é chamada $\mathcal{F}$-mensurável ou variável aleatória se, e somente se, $X^{-1}(U) := \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in U\} \in \mathcal{F}$, para todo U conjunto de borel em $\mathbb{R}^n$.*

Definição 4.1.5. *Sejam $(\Omega, \mathcal{F})$ um espaço mensurável e $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma função qualquer. A σ-álgebra $\mathcal{H}_X$ gerada por X é a menor σ-álgebra em Ω contendo todos conjuntos $X^{-1}(U)$, com U aberto em $\mathbb{R}^n$.*

Não é difícil provar que $\mathcal{H}_X = \{X^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}\}$, onde $\mathcal{B}$ é a σ-álgebra de de Borel em $\mathbb{R}^n$. Nota-se claramente que a função X é $\mathcal{H}_X$-mensurável e $\mathcal{H}_X$ é a menor σ-álgebra com esta propriedade.

Definição 4.1.6. *Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um espaço de probabilidade e X uma variável aleatória em Ω. Uma distribuição de X é uma probabilidade μ_X em $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B})$ dada por*

$$\mu_X(B) = P(X^{-1}(B)).$$

Definição 4.1.7. *Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um espaço de probabilidade completo e X uma variável aleatória em Ω. A integral de X sobre Ω com respeito a P, denotada por $\int_\Omega X(\omega)\, dP(\omega)$, é o número dado pela integral*

$$\int_{\mathbb{R}^n} x \; d\mu_X(x) \quad \textit{em } \mathbb{R}^n.$$

Se $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é Borel mensurável,

$$\int_\Omega f(X(\omega)) \; P(\omega) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \; d\mu_X(x).$$

A esperança de X, denotada por $E[X]$, é a integral de X sobre Ω com respeito a P, caso $\int_\Omega |X(\omega)| \; dP(\omega) = \int_{\mathbb{R}^n} |x| \; d\mu_X(x) < \infty$.

Mais geralmente, se $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é Borel mensurável e $\int_\Omega |f(X(\omega))| \; P(\omega) < \infty$, então $E[f(X)] := \int_\Omega f(X(\omega)) \; P(\omega) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \; d\mu_X(x)$.

Definição 4.1.8. *Seja* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *um espaço de probabilidade. Dois conjuntos* $A, B \in \mathcal{F}$ *são chamados independentes se, e somente se,* $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Definição 4.1.9. *Uma coleção* $A = \{\mathcal{H}_i : i \in I\}$ *de famílias* $\mathcal{H}_i$ *de conjuntos mensuráveis é independente se, e somente se,* $P(H_{i_1} \cap ... \cap H_{i_k}) = P(H_{i_1})...P(H_{i_k})$ *para toda escolha de* $H_{i_1} \in \mathcal{H}_{i_1}, ..., H_{i_k} \in \mathcal{H}_{i_k}$, *com índices diferentes* $i_1, ..., i_k$.

Definição 4.1.10. *Sejam* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *um espaço de probabilidade. Uma coleção* $\{X_i : i \in I\}$ *de variáveis aleatórias em* Ω *é independente se, e somente se, a coleção de* σ*-álgebras* $\mathcal{H}_{X_i}$ *é independente.*

Se duas variáveis aleatórias $X, Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ são independentes, $E\left[|X|\right] < \infty$, $E\left[|Y|\right] < \infty$ e $E\left[|XY|\right] < \infty$, prova-se que $E\left[XY\right] = E\left[X\right] \cdot E\left[X\right]$.

4.2 Processos Estocásticos

Nesta seção e nas seções 4.3 e 4.4 serão apresentados alguns dos conceitos clássicos de Cálculo Estocástico, os quais podem ser vistos detalhadamente em Emery [3] e Oksendal [12].

Definição 4.2.1. *Seja* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *um espaço de probabilidade. Um processo estocástico em* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *é uma coleção parametrizada* $\{X_t\}_{t \in T}$ *de variáveis aleatórias* $X_t : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

O espaço de parâmetro T a ser usado neste contexto será o intervalo $[0, \infty)$, mas pode ser assumido o intervalo $[a, b]$, os inteiros não negativos ou subconjuntos do $\mathbb{R}^n$.

Neste sentido, dado $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um espaço de probabilidade completo, pode-se considerar um processo estocástico como uma função $X : [0, \infty) \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ que induz um coleção de variáveis aleatórias $X_t : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dadas por $X_t(\omega) = X(t, \omega)$, para todo $t \in [0, \infty)$.

Dado um processo estocástico $\{X_t\}_{t \in T}$ em $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ e fixando $\omega \in \Omega$, podemos considerar a aplicação

$$\begin{aligned} \omega : [0, \infty) &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\longmapsto X_t(\omega) \end{aligned} \tag{4.1}$$

a qual é chamada caminho do processo estocástico $\{X_t\}_{t \in T}$.

Portanto podemos identificar Ω com o subconjunto
$\tilde{\Omega} = \{\omega : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}^n; \omega(t) = X_t(\omega)\}$ de $(\mathbb{R}^n)^{[0,\infty)} = \{\alpha : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}^n\}$.

A σ-álgebra $\mathcal{F}$ em Ω contém a σ-álgebra $\mathcal{B}$ gerada pelos conjuntos da forma $\{\omega : \omega(t_1) \in F_1, ..., \omega(t_k) \in F_k\}$, com $F_1, ..., F_k$ conjuntos de Borel em $\mathbb{R}^n$.

De fato, $\{\omega : \omega(t_1) \in F_1, ..., \omega(t_k) \in F_k\} = X_{t_1}^{-1}(F_1) \cap ... \cap X_{t_k}^{-1}(F_k)$ e como as variáveis aleatórias X_{t_i} são funções $\mathcal{F}$-mensuráveis seque que pela Definição 4.1.4 que $X_{t_i}^{-1}(F_i) \in \mathcal{F}$, com $i = 1, ..., k$ e pela propriedade A5 tem-se ($X_{t_1}^{-1}(F_1) \cap ... \cap X_{t_k}^{-1}(F_k)) \in \mathcal{F}$. Logo, pela Definição 4.1.3, $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$.

Denota-se $P(\{\omega : \omega(t_1) \in F_1, ..., \omega(t_k) \in F_k\})$ por $P\,[X_{t_1} \in F_1, ..., X_{t_k} \in F_k]$.

Definição 4.2.2. *Seja $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um espaço de probabilidade. As distribuições finitas dimensionais do processo $X = \{X_t\}_{t\in T}$ em $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ são as medidas $\mu_{t_1,...,t_k}$ em $(\mathbb{R}^n)^k$, $k = 1, 2, ...$, dadas por $\mu_{t_1,...,t_k}(F_1 \times ... \times F_k) = P\,[X_{t_1} \in F_1, ..., X_{t_k} \in F_k]$, $t_i \in T$, onde $F_1, ..., F_k$ são conjuntos de Borel em $\mathbb{R}^n$.*

4.3 Movimento Browniano

O próximo teorema será apenas enunciado, visto que o mesmo será utilizado no sentido de garantir formalmente a existência do movimento browniano em $\mathbb{R}^n$.

Teorema 4.3.1. *(Teorema da Extensão de Kolmogorov) Para todo $t_1, ..., t_k \in T$, com $k \in \mathbb{N}$, seja $\nu_{t_1,...,t_k}$ uma medida de probabilidade em $(\mathbb{R}^n)^k$ satisfazendo as seguintes condições:*

(K1) $\nu_{t_{\sigma(1)},...,t_{\sigma(k)}}(F_1 \times ... \times F_k) = \nu_{t_1,...,t_k}(F_{\sigma(1)} \times ... \times F_{\sigma(k)})$ para toda permutação σ em $\{1, 2, ..., k\}$

(K2) $\nu_{t_1,...,t_k}(F_1 \times ... \times F_k) = \nu_{t_1,...,t_k,t_{k+1}...,t_{k+m}}(F_1 \times ... \times F_k \times \mathbb{R}^n \times ... \times \mathbb{R}^n)$, para todo $m \in \mathbb{N}$

Então existe um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ e um processo estocástico $X = \{X_t\}_{t\in T}$ em $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, com $X_t : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

$$\nu_{t_1,...,t_k}(F_1 \times ... \times F_k) = P\,[X_{t_1} \in F_1, ..., X_{t_k} \in F_k]\,,$$

para todo $t_i \in T, k \in \mathbb{N}$ e todo conjunto de Borel F_i em $\mathbb{R}^n$.

Fixemos $x \in \mathbb{R}^n$ e definamos $p(t,x,y) = (2\pi t)^{-n/2}.\exp\left(-\frac{|x-y|^2}{2t}\right)$, para $y \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$.

Considere a seqüência $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq ... \leq t_k$. Definimos a medida de probabilidade $\nu_{t_1,...,t_k}$ em $(\mathbb{R}^n)^k$ por

$$\nu_{t_1,...,t_k}(F) = \int_F p(t_1,x,x_1).p(t_2-t_1,x_1,x_2)...p(t_k-t_{k-1},x_{k-1},x_k)\ dx_1...dx_k \tag{4.2}$$

onde $F = F_1 \times ... \times F_k$, com F_i conjuntos de Borel em $\mathbb{R}^n$. Usamos a notação $dy = dx_1...dx_k$ para a medida de Lebesgue e convencionamos que $p(0,x,y)dy = \delta_x(y)$.

Estenda a Definição 4.2 para todas as seqüências finitas $\{t_i\}_{i=1}^k$, com $t_i \geq 0$ e $k \in \mathbb{N}$ usando a condição (K1) do Teorema 4.3.1. Como $\int_{\mathbb{R}^n} p(t,x,y)\ dy = 1$ para todo $t \geq 0$ temos que a condição (K2) do Teorema 4.3.1 é satisfeita, logo existe um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P^x)$ e um processo $B = \{B_t\}_{t\geq 0}$ em $(\Omega, \mathcal{F}, P^x)$ tal que

$$P^x\left[B_{t_1} \in F_1, ..., B_{t_k} \in F_k\right] = \int_F p(t_1,x,x_1)...p(t_k-t_{k-1},x_{k-1},x_k)\ dx_1...dx_k \tag{4.3}$$

para todo $t_i \geq 0, k \in \mathbb{N}$ e todo conjunto $F = F_1 \times ... \times F_k$, com F_i conjuntos de Borel em $\mathbb{R}^n$.

Tal processo B em Ω é chamado movimento browniano em $\mathbb{R}^n$ iniciado em x.

O movimento Browniano acima definido não é único, isto é, existem várias quádruplas $(B, \Omega, \mathcal{F}, P^x)$ satisfazendo a condição 4.3. Entretanto, do ponto de vista geométrico abordado neste trabalho isto não é importante, logo escolheremos um versão, entenda quádrupla, do movimento browniano em $\mathbb{R}^n$ iniciado em x conveniente para o nosso trabalho. Nesse sentido é possível mostrar que os caminhos do movimento browniano em $\mathbb{R}^n$ iniciado em x (veja 4.1) são contínuos, ou melhor, podem ser escolhidos contínuos.

Podemos identificar $\omega \in \Omega$ com a aplicação contínua $t \longmapsto B_t(\omega)$ de $[0,\infty)$ em $\mathbb{R}^n$, e considerar

i) $\Omega = C([0,\infty), \mathbb{R}^n)$;

ii) a σ-álgebra $\mathcal{F}$ gerada pelos conjuntos da forma $\{\omega : \omega(t_1) \in F_1, ..., \omega(t_k) \in F_k\}$, com $F_1, ..., F_k$ conjuntos de Borel em $\mathbb{R}^n$;

iii) P^x tal que

$$P^x\left[B_{t_1} \in F_1, ..., B_{t_k} \in F_k\right] = \int_F p(t_1,x,x_1)...p(t_k-t_{k-1},x_{k-1},x_k)\ dx_1...dx_k$$

para todo $t_i \geq 0, k \in \mathbb{N}$ e todo conjunto $F = F_1 \times ... \times F_k$, com F_i conjuntos de Borel em $\mathbb{R}^n$.

O movimento browniano considerado sobre o espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P^x)$ obtido em i), ii) e iii) é chamado de movimento browniano standard (ou canônico) em $\mathbb{R}^n$ iniciado em x. Além disso o movimento browniano standard em $\mathbb{R}^n$ iniciado em x como processo estocástico B em $(\Omega, \mathcal{F}, P^x)$ é definido da seguinte forma:

$$\begin{aligned} B : [0, \infty) \times \Omega &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, \omega) &\longmapsto B(t, \omega) = \omega(t) \end{aligned}$$

A partir de agora, entenderemos movimento browniano em $\mathbb{R}^n$ iniciado em x como movimento browniano standard.

Um detalhe importante, é que o movimento browniano em $\mathbb{R}^n$ iniciado em x como um processo $B : [0, \infty) \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$, possui n aplicações coordenadas tomando valores em $\mathbb{R}$, isto é. $B(t, \omega) = (B^1(t, \omega), ..., B^n(t, \omega)) = (\omega^1(t), ..., \omega^n(t))$, onde, $\omega^1, \omega^2, ..., \omega^n$ são as aplicações coordenadas de $\omega \in \Omega = C([0, \infty), \mathbb{R}^n)$. Prova-se que cada um das aplicações coordenadas $B^1, B^2, ..., B^n$ do movimento browniano em $\mathbb{R}^n$ iniciado em $x = (x_1, ..., x_n)$, são movimentos brownianos independentes em $\mathbb{R}$, iniciados respectivamente em $x_1, ..., x_{n-1}$ e x_n.

Note que $\mathbb{R}^n$ e $\{x\}$ são conjuntos de Borel em $\mathbb{R}^n$ e portanto $\mathbb{R}^n - \{x\}$ é um conjunto de Borel em $\mathbb{R}^n$. Então $\{\omega : \omega(0) \in \mathbb{R}^n - \{x\}\} \in \mathcal{F}$ e

$$\begin{aligned} P^x \left[B_0 \in \mathbb{R}^n - \{y\} \right] &= \int\limits_{\mathbb{R}^n - \{x\}} p(0, x, y) \ dy \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^n - \{x\}} \delta_x(y) \ dy = \int\limits_{\mathbb{R}^n - \{x\}} 0 \ dy = 0 \end{aligned}$$

Em outras palavras, por definição o movimento browniano possui todos os caminhos, ou melhor, pode descrever todos os caminhos contínuos de $[0, \infty)$ em $\mathbb{R}^n$, entretanto a probabilidade de ocorrer caminhos do movimento browniano não iniciados em x é nula.

O conjunto dos caminhos do movimento Browniano em $\mathbb{R}^n$ iniciado em x será denotado por $T(B, x)$ e o conjunto dos caminhos do movimento Browniano em $\mathbb{R}^n$ iniciado em x cujo o ponto final pertence a um subconjunto A de M será denotado por $T(B, x, A)$.

Definição 4.3.2. *Sejam* $\{X_t\}_{t\in T}$ *e* $\{Y_t\}_{t\in T}$ *processos estocásticos, não necessariamente definidos sobre os mesmos espaços de probabilidade. A integral de Stratonovich de* Y *com relação a* X *no intervalo* $[0,t]$ *é a variável aleatória*

$$\int_0^t Y\ dX + \frac{1}{2}[X,Y] \quad ,$$

a qual denota-se por $\int_0^t Y \circ dX$.

4.4 Sistemas Estocásticos

Definição 4.4.1. *Sejam* M *uma variedade diferenciável e* $\mathcal{S} = \{F_0, F_1, ..., F_k\}$ *um subconjunto de* $\mathcal{X}^\infty(M)$*. Uma equação estocástica definida no intervalo* $[0,1]$ *sobre* M *com respeito a* $\mathcal{S}$ *no sentido de Stratonovich é uma equação na forma integral*

$$\begin{cases} X(t,\omega) = X(0,\omega) + \int_0^t F_0(X(t,\omega))\ ds + \sum\limits_{i=1}^{k} \int_0^t F_i(X(t,\omega)) \circ dB^i(t,\omega) \\ X(0,\omega) = x \in M\ , \forall\omega \in \Omega \end{cases} \quad , \ (t,\omega) \in [0,1]\times\Omega,$$

onde $(B, \Omega, \mathcal{F}, P)$ *é o movimento browniano em* $\mathbb{R}^k$ *iniciado a e* $X(t,\omega)$ *representa um processo estocástico de* $(\Omega, \mathcal{F}, P^x)$ *sobre* M.

Uma equação estocástica sobre M *com respeito a* $\mathcal{S}$ *no sentido de Stratonovich, como a acima, será denotada na forma diferencial*

$$\begin{cases} dX = F_0(X)\ dt + \sum\limits_{i=1}^{k} F_i(X) \circ dB^i \\ X(0,\omega) = x \in M\ , \forall\omega \in \Omega \end{cases} \quad , \ (t,\omega) \in [0,1] \times \Omega$$

será chamada de dinâmica estocática com respeito a $\mathcal{S}$.

O conjunto das dinâmicas estocáticas sobre M *com respeito a* $\mathcal{S}$ *será denotado por* $\mathcal{D}(\mathcal{S})$.

Definição 4.4.2. *Sejam* M *uma variedade diferenciável. Um sistema estocástico evoluindo sobre* M *é uma terna da forma*

$$(M, \mathcal{S}, \mathcal{D}(\mathcal{S})).$$

Um sistema estocástico evoluindo sobre M*, como o acima, é denotado simplesmente por* $\mathcal{S}$.

Via o teorema de existência e unicidade de soluções para equações estocásticas, segue que uma dinâmica estocástica sobre uma variedade M com respeito a $\mathcal{S}$ e com condição inicial x tem uma única solução. Tal solução é um processo estocástico $X : [0,1] \times \Omega \longrightarrow M$ com $X(0,\omega) = x \in M\,, \forall \omega \in \Omega$.

Similar ao que foi feito em 4.1, dado $X : [0,1] \times \Omega \longrightarrow M$ um processo solução da dinâmica estocástica M com respeito a $\mathcal{S}$ e com condição inicial x, pode-se considerar para cada $\omega \in \Omega$ as aplicações

$$\begin{aligned} trj_x(\omega) : [0,1] &\longrightarrow M, \\ t &\longmapsto trj_x(\omega)(t) = X(t,\omega) \end{aligned}$$

as quais serão chamadas simplesmente de trajetórias do sistema estocástico $\mathcal{S}$ iniciadas em x.

O conjunto das trajetórias de um sistema estocástico $\mathcal{S}$ será denotado por $T(\mathcal{S})$, o conjunto das trajetórias a partir de x será denotado por $T(\mathcal{S}, x)$ e o conjunto trajetórias a partir de x cujo o ponto final pertence um subconjunto A de M será denotado por $T(\mathcal{S}, x, A)$.

A partir de agora um elemento $\omega \in \Omega$ será chamado evento elementar.

Considere a aplicação

$$\begin{aligned} e_x : \Omega &\longmapsto M \\ \omega &\longmapsto trj_x(\omega)(1) \end{aligned}$$

Definição 4.4.3. *Sejam $\mathcal{S}$ um sistema estocástico evoluindo sobre uma variedade diferenciável M e $x \in M$. O conjunto*

$$\mathcal{A}_{\mathcal{S}}(x) = \{y = trj_x(\omega)(1) : \omega \in \Omega\}$$

é chamado o conjunto dos pontos atingíveis apartir de x ou simplesmente conjunto acessível a partir de x.

4.5 Homotopia Monotônica e o Movimento Browniano

O objetivo desta e da próxima seção é propor possíveis definições para a extensão da noção de homotopia monotônica num contexto estocástico. A idéia inicial é que tais definições propostas tragam consigo propriedades similares às encontradas para homotopia monotônica de trajetórias de um sistema de controle.

Neste sentido, atribuiremos uma definição de homotopia monotônica para caminhos do movimento browniano.

Definição 4.5.1. *Sejam* $(B, \Omega, \mathcal{F}, P^x)$ *o movimento browniano em* $\mathbb{R}^n$ *iniciado em* x *e* $\mathcal{A}$ *uma família de abertos convexos próprios de* M*, dois a dois disjuntos, e* α *e* β *caminhos do movimento browniano em* $T(B, x, A)$*, com* $A \in \mathcal{A}$*. Diz-se que* α *é monotonicamente (ou causalmente) homotópica a* β *se, e somente se, existe uma aplicação contínua*
$H : [0,1] \times [0,1] \to M$ *tal que*

a) $H(s, 0) = \alpha(s)$ *e* $H(s, 1) = \beta(s)$*,* $\forall s \in [0,1]$
b) $H(s,t) := h_t(s) \in T(B, x, A)$*,* P^x*-quase todo* $s \in [0,1]$.

A aplicação H *é chamada de homotopia monotônica (ou causal) entre* α *e* β *e utilizaremos a notação* $\alpha \backsimeq_B \beta$ *para* α *monotonicamente (ou causalmente) homotópica a* β.

O leitor pode se perguntar por que no lugar da condição b) citada na definição acima não optou-se pela condição

b') $\quad H(s,t) := h_t(s) \in T(B, x, \{y\})$, P^x-quase todo $s \in [0,1]$, com $y \in \mathbb{R}^n$.

Apesar da condição b') parecer a mais natural para se estender a definição de homotopia monotônica de trajetórias de sistemas de controle para o caso de caminhos do movimento browniano, esta condição não é boa do ponto de vista probabilístico e conseqüentemente não se torna boa do ponto de vista geométrico. De fato, temos que $\{y\}$ é um conjunto de Borel em $\mathbb{R}^n$, daí $\{\omega : \omega(1) \in \{y\}\} \in \mathcal{F}$ e portanto

$$P^x[B_1 \in \{y\}] = \int_{\{y\}} p(1, x, y)\ dy = 0$$

Em outras palavras, dado um caminho α do movimento browniano iniciado em x, cujo o ponto final é y, então a probabilidade de ocorrer outros caminhos do movimento browniano iniciados em x diferentes de α e com ponto final y é nula.

Tal fato não é bom do ponto de vista geométrico, pois trivializa a definição dada acima, uma vez que cada caminho do movimento browniano iniciado em x, seria homotópico monotonicamente somente consigo mesmo.

Segue imediatamente que se dois caminhos do movimento browniano em $\mathbb{R}^n$ iniciado em x são monotonicamente homotópicos então os mesmos são homotópicos no sentido usual (veja Definição 2.1.1).

Reciprocamente, como vimos na seção 2.1, dados dois caminhos do movimento browniano em $\mathbb{R}^n$ iniciado em x e ambos com ponto final pertencente a algum $A \in \mathcal{A}$, digamos α e β, como os mesmo são funções contínuas de $[0,1]$ em $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^n$ é um espaço vetorial normado com o segmento de reta $[\alpha(s), \beta(s)] \subset \mathbb{R}^n$, $\forall s \in [0,1]$, então existe uma homotopia linear $H(s,t) = (1-t).\alpha(s)+t.\beta(s)$ entre α e β. Note que $H_t(s) : [0,1] \longmapsto \mathbb{R}$ são funções contínuas de $[0,1]$ em $\mathbb{R}^n$, ou seja, $H_t \in \Omega$, $\forall t \in [0,1]$, ou ainda, que H_t é um caminho do movimento browniano iniciado em x para todo $t \in [0,1]$. Além disso, para qualquer aberto convexo A de $\mathbb{R}^n$ contendo $\alpha(1)$ e $\beta(1)$, tem-se que $H_t(1) \in A$. Portanto a homotopia linear H entre α e β é uma homotopia monotônica entre α e β.

Os argumentos acima mostram que a homotopia monotônica definida para os caminhos do movimento browniano coincidem com a homotopia usual entre estes mesmos caminhos.

4.6 Homotopia Monotônica e Sistemas Estocáticos

Da mesma forma que se procedeu na seção anterior, tentaremos atribuir uma definição de homotopia monotônica para trajetórias de um sistema estocástico.

Definição 4.6.1. *Sejam $\mathcal{S}$ um sistema estocástico evoluindo sobre uma variedade diferenciável M e α e β duas trajetórias em $T(\mathcal{S}, x)$. Diz-se que α é monotonicamente (ou causalmente) homotópica a β no sentido fraco se, e somente se, existe uma aplicação contínua $H : [0,1] \times [0,1] \to M$ tal que*

a) $H(s,0) = \alpha(s)$ e $H(s,1) = \beta(s)$, $\forall s \in [0,1]$

b) $H(s,t) := h_t(s) \in T(\mathcal{S}, x)$, $\forall t \in [0,1]$.

A aplicação H *é chamada de homotopia monotônica (ou causal) fraca entre* α *e* β *e utilizaremos a notação* $\alpha \simeq_m \beta$ *para* α *monotonicamente (ou causalmente) homotópica a* β.

Proposição 4.6.2. *Sejam* $\mathcal{S}$ *um sistema estocástico evoluindo sobre uma variedade diferenciável* M *e* $trj_x(\omega)$ *e* $trj_x(\psi)$ *duas trajetórias em* $T(\mathcal{S}, x)$. *Se o processo estocástico* $X : [0,1] \times \Omega \longrightarrow M$, *solução da dinâmica estocástica com respeito a* $\mathcal{S}$ *e condição inicial* x, *o qual induz* $trj_x(\omega)$ *e* $trj_x(\psi)$ *é contínuo e se existe uma homotopia geométrica* F *entre* ω *e* ψ, *então* $trj_x(\omega)$ *e* $trj_x(\psi)$ *são monotonicamente homotópicas no sentido fraco.*

Demonstração. Se existe uma homotopia geométrica F entre ω e ψ, então existe um caminho f entre ω e ψ em Ω (Veja [9])
Defina a aplicação $H : [0,1] \times [0,1] \to M$ dada por $H(s,t) = X(s, f(t))$
Segue que H é contínua e além disso,
i) $H(s,0) = X(s, f(0)) = X(s,\omega) = trj_x(\omega)(s)$ e $H(s,1) = X(s, f(1)) = X(s,\psi) = trj_x(\psi)(s)$
ii) $H(t,s) = X(s, f(t)) = trj_x(f(t))(s) \in T(\mathcal{S}, x)$, $\forall t \in [0,1]$.
Portanto H é uma homotopia monotônica fraca entre $trj_x(\omega)$ e $trj_x(\psi)$, ou seja, $trj_x(\omega) \simeq_m trj_x(\psi)$. □

Até este ponto da discussão, não há nenhuma incoerência no que foi definido. Porém gostaríamos de definir algo similar a definição de regularidade para sistemas de controle. Neste sentido, propõe-se a seguinte

Definição 4.6.3. *Seja* $\mathcal{S}$ *um sistema estocástico evoluindo sobre uma variedade diferenciável* M. *Um evento elementar* ω *é dito evento regular num ponto* $x \in M$ *se, e somente se, a diferencial* $d(e_x)_\omega$ *da aplicação* e_x *relativa ao ponto* ω *é sobrejetora.*

Denotaremos por $\mathcal{R}_{\mathcal{S}}(x)$ *o conjunto dos eventos regulares em* x.

Uma vez em posse da definição acima, uma trajetória $trj_x(\omega) : [0,1] \longmapsto M$ será dita regular se, e somente se, $\omega \in \mathcal{R}_{\mathcal{S}}(x)$.

Assim o conjunto $R(\mathcal{S}, x)$ representará o conjunto das trajetórias regulares a partir de x e $R(\mathcal{S}, x, A)$ representará o conjunto das trajetórias regulares a partir de x cujo o ponto final pertence ao conjunto $A \subset M$.

O conjunto

$$\mathcal{A}_R(\mathcal{S}, x) = \{y = trj_x(\omega)(1) : \omega \in \mathcal{R}_{\mathcal{S}}(x)\}$$

será chamado o conjunto acessível a partir de x via evento elementares regulares.

Mesmo tendo uma definição aparentemente coerente de regularidade para eventos elementares, a partir deste momento surgirão problemas, os quais listaremos e faremos alguns breves comentários:

Problema 4.6.4. *garantir a diferenciabilidade da aplicação* $e_x : \Omega \longmapsto M$ *.*

No caso das trajetórias de um sistema de controle, temos uma aplicação similar cuja diferenciabilidade é garantida pela Proposição 1.3.6. Lembre-se que a demonstração de tal proposição decorre como conseqüência dos teoremas sobre dependência contínua das soluções de equações diferenciais em relação a parâmetros.

Problema 4.6.5. *garantir que o conjunto* $R_{\mathcal{S}}(x)$ *é não-vazio.*

Recorde que o conjunto controles regulares não é vazio devido a condição de posto de álgebra de Lie.

Suponhamos que estes dois problemas sejam resolvidos, no sentido de que, $e_x : \Omega \longmapsto M$ seja diferenciável e $R_{\mathcal{S}}(x)$ seja não-vazio. Então poderíamos arriscar a fazer a seguinte

Definição 4.6.6. *Sejam* $\mathcal{S}$ *um sistema estocástico evoluindo sobre uma variedade diferenciável* M*,* $\mathcal{A}$ *uma família de abertos próprios de* M*, dois a dois disjuntos, e* α *e* β *duas trajetórias em* $R(\mathcal{S}, x, A)$*, com* $A \in \mathcal{A}$*. Diz-se que* α *é monotonicamente (ou causalmente) homotópica a* β *se, e somente se, existe uma aplicação contínua* $H : [0,1] \times [0,1] \to M$ *tal que*

a) $H(s, 0) = \alpha(s)$ *e* $H(s, 1) = \beta(s)$*,* $\forall s \in [0, 1]$
b) $H(s,t) := h_t(s) \in R(\mathcal{S}, x, A)$*,* P*-quase todo* $s \in [0, 1]$*.*

A aplicação H *é chamada de homotopia monotônica (ou causal) entre* α *e* β *e utilizaremos a notação* $\alpha \simeq_M \beta$ *para* α *monotonicamente (ou causalmente) homotópica a* β*.*

O fato de ter-se colocado a condição b) como $H(s,t) := h_t(s) \in R(\mathcal{S}, x, A)$, P^x-quase todo $s \in [0, 1]$, com A aberto próprio de M e não como

b') $H(s,t) := h_t(s) \in R(\mathcal{S}, x, y)$, P-quase todo $s \in [0, 1]$

justifica-se pelo fato de que num sistema estocástico a probabilidade de duas trajetórias terem o mesmo ponto final é zero.

É interessante notar que se α e β são duas trajetórias em $R(\mathcal{S}, x, y)$ monotonicamente homotópicas, elas necessariamente são geometricamente homotópicas no sentido fraco.

De forma análoga a demonstração da Proposição 2.1.3 demonstra-se que a relação $\simeq_M$ é uma relação de equivalência.

Assim duas trajetórias α e β em M pertencem à mesma classe de equivalência se, e somente se, $\alpha \simeq_M \beta$. Note ainda, que uma condição necessária para que $\alpha \simeq_M \beta$ é que $\alpha, \beta \in R(\mathcal{S}, x, A)$ para algum $x \in M$ e para algum $A \in \mathcal{A}$. As classes de equivalência serão denotadas por $[\gamma]_M$, onde γ é um representante qualquer da classe. Então se fixarmos uma condição inicial $x_0 \in M$ podemos considerar o conjunto $R(\mathcal{S}, x_0)/\simeq_M = \{[\alpha]_M : \alpha \in R(\mathcal{S}, x, A)$, para algum $A \in \mathcal{A}\}$. Denotaremos o conjunto $R(\mathcal{S}, x_0)/\simeq_M$ por $\Gamma(\mathcal{S}, x_0)$. O conjunto $\Gamma(\mathcal{S}, x_0)$ é chamado o espaço das classes de homotopia monotônica com ponto base x_0 em M.

Um pergunta natural que surge é se $\Gamma(\mathcal{S}, x_0)$ tem estrutura de variedade diferenciável de dimensão igual a de M, como ocorre com o espaço $\Gamma(\Sigma, x_0)$ das classes de homotopia monotônica de trajetórias de um sistema de controle.

Num primeiro momento, trabalhando com a hipótese de ser possível provar que $\Gamma(\mathcal{S}, x_0)$ tem estrutura de variedade diferenciável de dimensão igual a de M, nada mais natural do que tentar seguir o método de demonstração utilizado por Kizil [7] na demonstração do Teorema 2.3.3. Nesse sentido, novos problemas surgirão, entre os quais destacam-se:

Problema 4.6.7. *garantir a continuidade da aplicação* $trj_x : \Omega \longmapsto T(\mathcal{S}, x)$ *dada por* $\omega \longmapsto trj_x(\omega) : [0,1] \longrightarrow M$.

No caso das trajetórias de um sistema de controle, temos uma aplicação similar cuja continuidade é garantida pela Proposição 1.3.4. A demonstração de tal proposição decorre também como conseqüência dos teoremas sobre dependência contínua das soluções de equações diferenciais em relação a parâmetros.

Problema 4.6.8. *garantir que a aplicação* $trj_x : \Omega \longmapsto T(\mathcal{S}, x)$ *é aberta.*

No caso das trajetórias de um sistema de controle, temos que $trj_x : \mathcal{U}(\Sigma) \longmapsto T(\Sigma, x)$ é aberta, e tal fato é demonstrado usando exclusivamente os fatos de $T(\Sigma, x)$ ter topologia $\mathcal{C}^1$, $\mathcal{U}(\Sigma) \subset \mathcal{U}$ ser um espaço de funções e a condição fundamental para que curvas em M sejam dinâmicas de um sistema de controle, que é

$$\frac{dx}{dt}|_{t=s} = u(s)(x(s)), \quad \text{com } x(0) = x \in M \text{ , } s \in [0, T] \text{ e } u \in \mathcal{U}(\Sigma)$$

Já no caso estocástico, podemos até topologizar $T(\mathcal{S}, x)$ com a topologia $\mathcal{C}^1$, e além disso Ω também é um espaço de funções, aliás contínuas, entretanto a condição fundamental para que curvas em M sejam dinâmicas de um sistema estocástico não tem uma estrutura propícia como a condição fundamental para que curvas em M sejam dinâmicas de um sistema de controle.

Uma solução que pode ser tomada para resolver o Problema 4.6.7 é munir $T(\mathcal{S}, x)$ com a topologia quociente $\mathcal{T}_{trj_x}$, dada pela aplicação trj_x, isto é, um subconjunto A de $\Gamma(\Sigma, x_0)$ é aberto em $(T(\mathcal{S}, x), \mathcal{T}_{trj_x})$, se e somente se, $(trj_x)^{-1}(A)$ é aberto em $(\Omega, \mathcal{C}^0)$. Com tal topologia automaticamente $trj_x : \Omega \longmapsto T(S, x)$ torna-se contínua, contudo adotar tal topologia é um tanto drástico uma vez que, a mesma é extremamente artificial, do ponto de vista da proximidade entre duas trajetórias e a proximidade entre seus respectivos eventos elementares.

Uma vez garantida a veracidade de todas as condições impostas nos problemas acima, então se tem cumpridas condições necessárias para se fazer uma demonstração de que $\Gamma(\mathcal{S}, x_0)$ tem estrutura de variedade diferenciável de dimensão igual a de M, análoga a do Teorema 2.3.3.

Entretanto, se alguma das condições impostas falharem, a princípio $\Gamma(\mathcal{S}, x_0)$ pode ter uma estrutura de variedade diferenciável ou não, requerendo-se assim um outro tipo de abordagem do problema.

O objetivo de toda essa discussão final é o de tentar apontar metas ou prioridades para um futuro estudo do conjunto $\Gamma(\mathcal{S}, x_0)$ e suas propriedades, bem como o de encontrar uma boa definição e possíveis caracterizações de homotopia monotônica para sistemas estocásticos.

BIBLIOGRAFIA

[1] Colonius, F., Kizil, E. and San Martin, L. A. B., *Covering space for monotonic homotopy of trajectories of control system.* RP 11/03, IMECC, UNICAMP, 2003.

[2] Dunford, N. and Schwartz, J. T., *Linear Operators - Part I: General Theory.* Wiley Classics Library, Wiley-Interscience, 1988.

[3] Emery, M., *Stochastic Calculus in Manifolds.* Springer-Verlag, 1989.

[4] Guillemin, V. and Pollack, A., *Differential Topology.*Prentice-Hall, 1974.

[5] James, B.R., *Probabilidade: Um Curso em Nível Intermediário.* Projeto Euclides, IMPA, 1981.

[6] Kobayashi, S. and Nomizu, K., *Foundations of Differential Geometry.* Pure and Applied Mathematics, Vol. I. Wiley-Interscience, 1963.

[7] Kizil, E., *Homotopia Causal de Trajetórias de Sistemas de Controle.* Tese de Doutorado - IMECC/Unicamp, 2003.

[8] Lang, S., *Differential Manifolds.* Addision Wesley, 1972.

[9] Lima, E.L., *Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento.* Projeto Euclides, IMPA, 1993.

[10] Lima, E.L., *Variedades Diferenciáveis.* IMPA, 1973.

[11] Martin, D., *Manifolds Theory: An Introduction for Mathematical Physicists.* Ellis Horwood, 1991.

[12] Oksendal, B., *Stochastic Differential Equations - An Introduction with Applications.* Fourth Edition, Springer-Verlag, 1995.

[13] Scárdua, B.C.A., *Tópicos de Equações Diferenciais Ordinárias.* XXII Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, 1999.

[14] Sotomayor, J., *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias.* Projeto Euclides, IMPA, 1979.

[15] Spivak, M., *O Cálculo em Variedades.* Tradução: Carlos A. de Moura, Editora Ciência Moderna Ltda, 2003.

[16] Vieira, M.G.O., *Algumas Noções Topológicas Associadas ao Círculo.* FAMAT em Revista, número 2, pp. 55-77, UFU, 2004.