SOBRE AS SOLUÇÕES DE

$\Delta^m F = f$ PARA f EM H^p

JULIO ROMAN JIMENEZ DAMAS

ORIENTADOR

PROF. DR. CARLOS SEGOVIA FERNANDEZ

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação da Universidade Estadual de Campinas, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Matemática.

DEZEMBRO DE 1979.

Quero expressar de maneira especial meu agradecimento ao Professor Carlos Segovia Fernández, pela dedicação e orientação inestimáveis que levaram à realização deste trabalho.

Agradeço também ao pessoal do IMECC por seu apoio e manifestações de amizade, particularmente ao Professor Roberto Macías por sua colaboração constante.

Registro, ainda, meu reconhecimento pelo estímulo recebido dos colegas e amigos da Universidad Central de Venezuela, e meu agradecimento a essa institução pelo suporte financeiro.

INTRODUÇÃO

Neste trabalho apresenta-se uma teoria maximal para espaços de Hardy definidos sobre certos espaços de classes de funções em R^n, a partir de uma função maximal introduzida por A. P. Calderón em ([1]). Seguindo o método utilizado por A. Macías e C. Segovia em ([5]), definem-se os conceitos de funcão maximal e p-átomo no espaço de classes de funções e obtem-se um teorema de decomposição do tipo de Calderón-Zygmund que permite estabelecer uma caracterização dos elementos do espaço de Hardy, isto é, das classes de funções com função maximal em L^p, para certos valores de p entre 0 e 1, em termos de somas de p-átomos. Além disso, são estudados os potenciais dos p-átomos em R^n (Ver ([2]) e ([4])) e obtem-se uma relação de isomorfismo entre os espaços de Hardy considerados e os espaços $H^p(R^n)$, através de operador iterado de Laplace.

DEFINIÇÕES E NOTAÇÃO

Seja R^n o espaço euclidiano n-dimensional e m um inteiro positivo fixo. Uma função a(x) definida em R^n é um p-átomo, $0 < p \leq 1$, se tiver suporte contido em uma bola e se satisfizer as seguintes condições:

(i) $\|a\|_\infty \leq |B|^{-1/p}$, onde $|B|$ é a medida de Lebesgue de B.

(ii) $\int a(x)x^\alpha dx = 0$, para todo $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ em N^n com $0 \leq |\alpha| \leq 2m-1$.

Diremos que uma distribuição temperada ϕ pertençe ao espaço $H^p(R^n)$, $0 < p \leq 1$, se existir uma sequência $\{\lambda_i\}_{i=1}^\infty$ de números reais que verifica $\Sigma_i|\lambda_i|^p < \infty$, e uma sequência $\{a_i(x)\}_{i=1}^\infty$ de p-átomos em R^n, tais que:

$\phi = \Sigma_i\lambda_i a_i$ no sentido das distribuições temperadas;

e denotaremos

$$\|\phi\|^p_{H^p} = \inf\{\Sigma_i|\lambda_i|^p : \Sigma_i\lambda_i a_i = \phi\} .$$

Seja $L^q(loc)$, $1 \leq q < \infty$, o espaço das funções reais f(x) definidas em R^n e que estão localmente em L^q, com a topologia gerada pelas seminormas

$$|f|_{q,B} = (|B|^{-1} \int_B |f|^q dx)^{1/q} \ , \ B \text{ uma bola em } R^n.$$

Para cada f em $L^q(\mathrm{loc})$ definimos a função maximal $n(f;x)$ de f como sendo

$$n(f;x) = \sup_{\rho>0} \rho^{-2m} |f|_{q,B(x,\rho)} \quad .$$

Seja P_{2m-1} o subespaço em $L^q(\mathrm{loc})$ dos polinômios de grau menor ou igual a 2m-1. Denotaremos por E^q_{2m-1} o espaço quociente $E^q_{2m-1} = L^q(\mathrm{loc})/P_{2m-1}$, com a topologia determinada pelas seminormas

$$||F||_{q,B} = \inf \{|f|_{q,B} : f \in F\} \ , \ F \in E^q_{2m-1}, \ B \text{ uma bola em } R^n.$$

Para cada F em E^q_{2m-1} definimos a função maximal de F como

$$N(F;x) = \inf \{n(f;x) : f \in F\} \quad .$$

Definimos o espaço H^p, $0 < p \leqq 1$, como sendo o conjunto das classes em E^q_{2m-1} cuja função maximal $N(F;x)$ está em L^p; e, para cada F em H^p, definimos sua "norma" como sendo

$$||F||_{H^p} = ||N(F;x)||_{L^p} \quad ,$$

a qual determina em H^p uma estrutura de espaço vetorial métrico.

Diremos que uma classe A em E^q_{2m-1} é um p-átomo em E^q_{2m-1}, $0 < p \leqq 1$, se existir um representante $a(x)$ de A cujo suporte está contido numa bola B e se

$$N(A;x) \leqq |B|^{-1/p} \quad .$$

Se f_1 e f_2 são dois representantes de uma mesma classe F em E^q_{2m-1}, f_1-f_2 é um polinômio de grau menor ou igual a 2m-1 e portanto $\Delta^m f_1 = \Delta^m f_2$. Definimos então, para cada F em E^q_{2m-1}:

$$\Delta^m F = \Delta^m f \text{ , onde f é um representante qualquer da classe F.}$$

ENUNCIADO DOS RESULTADOS

O propósito deste trabalho é estudar a relação entre os espaços $\mathcal{H}^p$ anteriormente definidos e os espaços $H^p(R^n)$ de Hardy. Primeiramente obter-se-á um teorema de decomposição em E^q_{2m-1} do tipo de Calderón-Zygmund, que será usado para estabelecer uma caracterização dos elementos de $\mathcal{H}^p$ em termos de p-átomos em E^q_{2m-1}. Finalmente demonstrar-se-á que o operador iterado de Laplace Δ^m é um isomorfismo entre $\mathcal{H}^p$ e $H^p(R^n)$.

Estes resultados se formalizam nos seguintes teoremas:

TEOREMA 1. Um elemento F de E^q_{2m-1} está em $\mathcal{H}^p$, $n(2m+(n/q))^{-1} < p \leq 1$, se e somente se existe uma sequência $\{\mu_i\}_{i=1}^{\infty}$ de números, com $\Sigma_i|\mu_i|^p < \infty$, e uma sequência $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ de p-átomos em E^q_{2m-1}, tais que $F = \Sigma_i \mu_i A_i$ em E^q_{2m-1}. Além disso, existem constantes positivas c_1 e c_2 tais que

$$c_1||F||^p_{\mathcal{H}^p} \leqq \Sigma_i|\mu_i|^p \leqq c_2||F||^p_{\mathcal{H}^p} \quad .$$

TEOREMA 2. O operador iterado de Laplace Δ^m define uma bijeção de $\mathcal{H}^p$ em $H^p(R^n)$, $n(2m+(n/q))^{-1} < p \leqq 1$. Além disso, se $\Delta^m F = \phi$ para uma F em $\mathcal{H}^p$, existem então constantes positivas c e c' tais que

$$c||F||_{\mathcal{H}^p} \leqq ||\phi||_{H^p} \leqq c'||F||_{\mathcal{H}^p} \quad .$$

D E M O N S T R A Ç Õ E S

Os seguintes lemas serão usados na demonstração dos resultados.

(01) LEMA. A função $n(f;x)$ é semicontinua inferiormente.

Demonstração: Ver ([1]). Lemma 6.

(02) LEMA. Sejam x_1, x_2 pontos de R^n; f_1, f_2 dois representantes de uma mesma classe em E^q_{2m-1} tais que $n(f_1;x) \leqq \infty$ e $n(f_2;x) < \infty$. Então, $P = f_1 - f_2$ é um polinômio de grau menor ou igual a 2m-1 que satisfaz:

$$|(\partial^\alpha P)(y)| \leqq C_\alpha (n(f_1;x_1) + n(f_2;x_2)).(|x_1-y| + |x_2-y|)^{2m-|\alpha|} .$$

Em particular, se $x_1=x_2$ então $f_1=f_2$.

Demonstração: Ver ([1]). Lemmas 3 e 4.

(03) LEMA. Se F em E^q_{2m-1} tem sua função maximal $N(F;x_o)$ finita em um ponto x_o, então

(i) Existe uma única f em F com a propriedade $n(f;x_o) < \infty$ e tem-se portanto $n(f;x_o) = N(F;x_o)$.

(ii) Dada uma bola B qualquer, existe uma constante C finita que depende somente de x_o e de B, tal que $|f|_{q,B} \leqq C\, N(F;x_o)$, e em consequência é válido também

(04) $||F||_{q,B} \leqq C\, N(F;x_o)$.

Além disso, a constante C pode ser determinada de maneira que a condição (04) seja válida uniformemente para x_o variando em um conjunto limitado.

Demonstração: A parte (i) é consequência imediata do Lema (02). Para demonstrar (ii), dada uma bola B qualquer definimos ρ_o como o menor número positivo ρ tal que $B \subset B(x_o,\rho)$. Então:

$$|f|_{q,B} = \rho_o^{2m}|B|^{-1/q}|B(x_o,\rho_o)|^{1/q}\rho_o^{-2m}|f|_{q,B(x_o,\rho_o)} \leq$$

$$\leq C_{x_o,B}\, n(f;x_o) = N(F;x_o) \quad .$$

Ademais, para x_o qualquer em uma bola $B(z,s)$, consideremos s suficientemente grande tal que $B \subset B(z,r)$. Então $B \subset B(x_o,r+s)$ e portanto $r+s = R \geq \rho_o = \inf\{\rho: B \subset B(x_o,\rho)\}$. Pelo cálculo anterior podemos escrever

$$||F||_{q,B} \leq |f|_{q,B} \leq \rho_o^{2m+(n/q)}|B|^{-1/q}N(F;x_o) \leq$$

$$\leq R^{2m+(n/q)}|B|^{-1/q} N(F;x_o) = C_B\, N(F;x_o) \quad .$$

(05) COROLARIO. Se $\{F_k\}_{k=1}^{\infty}$ é uma sequência em E^q_{2m-1} que converge para F em $\mathcal{H}^p$, $0 < p \leq 1$, então $\{F_k\}$ converge para F em E^q_{2m-1}.

Demonstração: Dada uma bola B qualquer, a partir de (04) podemos escrever

$$||F_k-F||^p_{q,B} \leq |B|^{-1} C^p_B \int_B N(F_k-F;x_o)^p dx_o \leq C'_B\, ||F_k-F||_{\mathcal{H}^p} \quad .$$

(06) LEMA. Seja $\{F_k\}_{k=1}^{\infty}$ uma sequência em E^q_{2m-1} tal que para um certo ponto x_o a série $\Sigma_k N(F_k;x_o)$ converge. Então

(i) A série $\Sigma_k F_k$ converge para uma classe F em E^q_{2m-1} e tem-se $N(F;x_o) \leq \Sigma_k N(F_k;x_o)$.

(ii) Se f_k é o representante de F_k que satisfaz $n(f_k;x_o) = N(F_k;x_o)$ segundo o Lema (03), então $\Sigma_k f_k = f$ converge em $L^q(\text{loc})$, e f é o representante da classe F definida em (i) que satisfaz $n(f;x_o) = N(F;x_o)$.

Demonstração: Se $\Sigma_k N(F_k;x_o)$ converge, tem-se $N(F_k;x_o) < \infty$ para $k = 1,2,\ldots$. Seja f_k o representante de F_k que satisfaz $n(f_k;x_o) = N(F_k;x_o)$ segundo o Lema (03). Dada uma bola B qualquer, aplicando o mesmo lema temos

$$\left\|\sum_{k=1}^{K} F_k - \sum_{k=1}^{J} F_k\right\|_{q,B} \leqq \sum_{k=J+1}^{K} \|F_k\|_{q,B} \leqq \sum_{k=J+1}^{K} |f_k|_{q,B} \leqq$$

$$\leqq C \sum_{k=J+1}^{K} N(F_k;x_o) \quad .$$

Deduz-se então que a série $\Sigma_k F_k = F$ converge em E^q_{2m-1} e que a série $\Sigma_k f_k = f$ converge em $L^q(\text{loc})$. Além disso de $f_k \in F_k$, $k = 1,2,\ldots$, obtem-se que F é a classe de f em E^q_{2m-1}, e podemos escrever

$$N(F;x_o) \leqq n(f;x_o) = \sup_{\rho>0} \rho^{-2m} |\Sigma_k f_k|_{q,B(x_o,\rho)} \leqq$$

$$\leqq \Sigma_k \sup_{\rho>0} \rho^{-2m} |f_k|_{q,B(x_o,\rho)} = \Sigma_k\, n(f_k;x_o) = \Sigma_k\, N(F_k;x_o) \quad ,$$

com o que fica demonstrado o lema.

(07) COROLARIO. $\mathcal{H}^p$ é completo, $0 < p \leqq 1$.

Demonstração: Seja $\{F_k\}_{k=1}^{\infty}$ uma sequência em H^p tal que $||F_k - F_j||_{H^p} < \varepsilon$, se $k,j \geqq N_\varepsilon$. A subsequência $\{F_{k_m}\}$ que se obtem tomando $k_m = N_{2^{-m/p}}$, $m = 1,2,\ldots$; $F_{k_o} = 0$, satisfaz as seguintes condições:

$$(08) \qquad \begin{aligned} &||F_{k_m} - F_{k_{m+1}}||_{H^p} \leqq 2^{-m/p} \quad , \quad m = 1,2,\ldots \quad . \\ &F_{k_M} = \sum_{m=1}^{M} (F_{k_m} - F_{k_{m-1}}) \quad , \quad M = 1,2,\ldots \quad . \end{aligned}$$

Pela condição $0 < p \leqq 1$ e usando (08) tem-se portanto

$$(09) \qquad \int (\Sigma_m N(F_{k_m} - F_{k_{m-1}};x))^p dx \leqq \Sigma_m \int N(F_{k_m} - F_{k_{m-1}};x)^p dx =$$

$$= \Sigma_m ||F_{k_m} - F_{k_{m-1}}||^p_{H^p} \leqq \Sigma_m \; 2^{-(m/p)p} = 1 \quad ,$$

o que prova que a série $\Sigma_m N(F_{k_m} - F_{k_{m-1}};x)$ converge, para quase todo x.

Aplicando o lema anterior deduz-se então que a série $\Sigma_m(F_{k_m} - F_{k_{m-1}})$ converge a uma classe F em E^q_{2m-1}.

A partir de (08) temos então

$$F = \lim_{M\to\infty} \sum_{m=1}^{M} (F_{k_m} - F_{k_{m-1}}) = \lim_{M\to\infty} F_{k_M} \quad \text{em } E^q_{2m-1} \quad .$$

Além disto, dado $\delta > 0$ e para valores de k e k_M suficientemente grandes, a partir de (09) obtemos.

$$||F_k - F||^p_{H^p} \leq ||F_k - F_{k_M}||^p_{H^p} + ||F_{k_M} - F||^p_{H^p} <$$

$$\varepsilon + ||\sum_{m=M+1}^{\infty} (F_{k_m} - F_{k_{m+1}})||^p_{H^p} < \varepsilon + \sum_{m=M+1}^{\infty} ||F_{k_m} - F_{k_{m+1}}||^p_{H^p} < 2\varepsilon \quad ,$$

o que prova que F_k converge para F em H^p.

Finalmente, da desigualdade $||F||_{H^p} \leq ||F - F_k||_{H^p} + ||F_k||_{H^p}$ deduz-se que F está em H^p, e em consequência o corolario fica provado.

(10) LEMA. Seja A um p-átomo em E^q_{2m-1}, com $n(2m+(n/q))^{-1} < p \leq 1$. Então, A está em H^p e existe uma constante C independente de A tal que

$$\int N(A;x)^p dx \leq C \quad .$$

Demonstração: Seja $a(x)$ o elemento de A cujo suporte está contido numa bola $B(x_o,r)$ e queremos estimar a expressão $n(a;x) = \sup_{\rho>0} \rho^{-2m} |a|_{q,B(x,\rho)}$. Basta então considerar a integração sobre o conjunto $B(x,\rho) \cap B(x_o,r)$.

Supondo $x \notin B(x_o,2r)$ temos $r < \rho$ e $|x-x_o| < 2\rho$. Tem-se então $n(a;x) \leq r^{-2m} |a|_{q,B(x_o,r)} < \infty$, e considerando o Lema (03) deduz-se $N(A;x) = n(a;x)$.

Se x_1 é um ponto tal que $2r < |x_o-x_1| < 3r$, vale igualmente $N(A;x_1) = n(a;x_1)$. Então, observando que a bola $B(x_o,r)$ está contida em $B(x_1,4r)$, deduz-se

$$N(A;x) = n(a;x) = \sup_{\rho>0} \rho^{-2m} |a|_{q,B(x,\rho)} \leq$$

$$\leq C \sup_{\rho>0} (r/\rho)^{2m+(n/q)} (4r)^{-2m} |a|_{q,B(x_1,4r)} \leq$$

$$\leq C' (r/|x-x_0|)^{2m+(n/q)} N(A;x_1) \quad ,$$

e considerando a definição de p-átomo obtemos

$$N(A;x) \leq C (r/|x-x_0|)^{2m+(n/q)} |B|^{-1/p} \quad , \quad \text{se } x \notin B(x_0,2r).$$

Levando em conta a desigualdade anterior e a mudança de variável $y = r^{-1}(x-x_0)$, tem-se, pela condição $(2m+(n/q))p > n$:

$$\int N(A;x)^p dx = \int_{|x-x_0|<2r} N(A;x)^p dx + \int_{|x-x_0|\geq 2r} N(A;x)^p dx \leq$$

$$\leq C |B|^{-1}|B| + C' |B|^{-1} r^n \int_{|y|\geq 2} (1/|y|)^{(2m+(n/q))p} dy \leq C'' \quad .$$

(11) LEMA. Seja $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ uma familia de elementos em E^q_{2m-1} tal que $\int N(A_i;x)^p dx \leq C$, $0 < p \leq 1$, C independente de i; e seja $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$ uma sequência de números que satisfaz $\Sigma_i |\lambda_i|^p < \infty$. Então, a série $\Sigma_i \lambda_i A_i = F$ converge incondicionalmente em H^p, e ademais

$$\int N(F;x)^p dx \leq C \, \Sigma_i |\lambda_i|^p \quad .$$

Demonstração: Dado $\varepsilon > 0$, se m e k são inteiros positivos tais que $m \geq k \geq N$, tem-se

$$\left|\left| \sum_{i=k}^{m} \lambda_i A_i \right|\right|^p_{H^p} \leq \sum_{i=k}^{m} ||\lambda_i A_i||^p_{H^p} = \sum_{i=k}^{m} |\lambda_i|^p \int N(A_i;x)^p dx \leq \varepsilon . C \quad ,$$

o que prova que a série converge incondicionalmente em H^p. Do mesmo cálculo deduz-se a desigualdade enunciada.

(12) LEMA. Seja F em E^q_{2m-1} tal que $N(F;x_o) < \infty$, e f o representante de F que satisfaz $n(f;x_o) = N(F;x_o)$ de acordo com o Lema (03). Se S representa o espaço das funções de decrescimento rápido no infinito, com a topologia usual dada pelas seminormas $p_{k,s}(\phi) = \sup\limits_x \max\limits_{|\alpha|\leq s} (1+|x|)^k \, |(\partial^\alpha \phi)(x)|$, então, para toda ϕ em S, tem-se

$$\left| \int f(x)\phi(x)dx \right| \leq C\, N(F;x_o)\, (1+|x_o|)^j\, p_{j,0}(\phi) \quad , \quad j>n+2m.$$

Além disso, se $\Delta^i f = 0$ para algum $i \geq 1$, então f é um polinômio de grau menor ou igual a 2m-1.

Demonstração: Dada ϕ em S, e fazendo $B_j = B(x_o, 2^j)$; $j = 0, k, k+1$, e $A_k = B_{k+1} \sim B_k$, tem-se

$$\left| \int f(x)\phi(x)dx \right| \leq \int_{B_o} |f(x)\phi(x)|dx + \Sigma_k \int_{A_k} |f(x)\phi(x)|dx \quad .$$

Aplicando a desigualdade de Hölder no primeiro termo do membro da direita, temos

$$\int_{B_o} |f(x)\phi(x)|dx = \int_{B_o} |f(x)|\,(1+|x|)^{-j}(1+|x|)^j |\phi(x)|dx \leq$$

$$\leq C\, |B_o|^{-1/q} \left(\int_{B_o} |f(x)|^q dx \right)^{1/q} p_{j,0}(\phi) \leq C\, n(f;x_o)\, p_{j,0}(\phi) \quad .$$

Para estimar a soma no segundo termo observamos que

$$(1+|x-x_o|)^j|\phi(x)| \leq C\ ((1+|x|)^j+(1+|x_o|)^j)\,|\phi(x)| \leq$$

$$\leq C\ (1+|x_o|)^j\ p_{j,0}(\phi) \quad .$$

Então, aplicando de novo a desigualdade de Hölder, temos

$$\int_{A_k} |f(x)\phi(x)|dx = \int_{A_k} |f(x)|\,(1+|x-x_o|)^{-j}(1+|x-x_o|)^j|\phi(x)|dx \leq$$

$$\leq C\ \left(\int_{A_k} |f(x)|(1+|x-x_o|)^{-j}dx\right)\ (1+|x_o|)^j\ p_{j,0}(\phi) \leq$$

$$\leq C\ 2^{-kj}|B_{k+1}|\cdot|B_{k+1}|^{-1/q}\ \left(\int_{B_{k+1}} |f(x)|^q dx\right)^{1/q}(1+|x_o|)^j\ p_{j,0}(\phi) \leq$$

$$\leq C\ 2^{-kj+(k+1)n+(k+1)2m}\ 2^{-(k+1)2m}\ |f|_{q,B_{k+1}}(1+|x_o|)^j\ p_{j,0}(\phi) \leq$$

$$\leq C\ 2^{k(-j+n+2m)}n(f;x_o)\ \ (1+|x_o|)^j\ p_{j,0}(\phi) \quad .$$

Se $j > n+2m$ obtem-se portanto

$$\left|\int f(x)\phi(x)dx\right| \leq \{C+C'(1+|x_o|)^j\ \Sigma_k\ 2^{k(-j+n+2m)}\}\ n(f;x_o)\ p_{j,0}(\phi) \leq$$

$$\leq\ C\ N(F;x_o)\ \ (1+|x_o|)^j\ p_{j,0}(\phi) \quad ,$$

o que demonstra a primeira parte do lema.

Para provar a segunda parte ver ([1]), Lemma 9.

(13) LEMA. (Partição da unidade). Dado Ω um aberto de R^n, $\Omega \neq R^n$, existe uma sequência $\{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$ de funções em $C_o^{\infty}(R^n)$ que satisfaz as seguintes condições:

(14) $\quad 0 \leqq \phi_k \leqq 1 \quad ; \quad \Sigma_k \phi_k(x) = \chi_\Omega(x) \quad .$

(15) Para cada k, existe uma bola $B_k = B(x_k, r_k)$ contida em Ω tal que o suporte de ϕ_k está contido em B_k, e se z é um ponto em B_k então

$$r_k \leqq d(z,\Omega^C) \leqq 6\, r_k \quad , \quad (d = \text{distância em } R^n).$$

(16) Para cada k, a bola $B(x_k, 2r_k)$ está contida em Ω. Além disso, existe uma constante M tal que o número de bolas $B(x_s, 2r_s)$, cujas intersecções com $B(x_k, 2r_k)$ sejam não vazias, não excede M.

(17) $\quad |(\partial^\alpha \phi_k)(x)| \leqq C\, r_k^{-|\alpha|}$, C independente de k.

Para a demonstração do Lema (13), ver ([6]).

(18) LEMA. (Do tipo de Calderón-Zygmund). Seja F um elemento de E^q_{2m-1} cuja função maximal está em L^p, $n(2m+(n/q))^{-1} < p \leq 1$. Dado $t > 0$ fixo, seja $\Omega = \Omega_t =$ $\{x: N(F;x) > t\}$. Pelo Lema (01), o conjunto Ω é aberto; seja $\{\phi_k\}_{k=1}^\infty$ a partição da unidade de Ω de acordo com o Lema (13). Para cada k, seja y_k um ponto em Ω^C tal que $d(B(x_k, 2r_k), \Omega^C) =$ $= d(B(x_k, 2r_k), y_k)$, e dado f um representante de F, consideremos o polinômio $P(y_k, y)$ em P_{2m-1} que satisfaz

$n(f(y)-P(y_k,y);y_k) = N(F;y_k)$, segundo o Lema (03). Define-se:

(19) $\quad w_k(y) = \phi_k(y)\ (f(y)-P(y_k,y))\ ; \quad k = 1,2,\ldots \quad .$

Estas funções estão em $L^q(\mathrm{loc})$. Seja W_k a classe de $w_k(y)$ em E^q_{2m-1}, $k=1,2,\ldots$. Então, as seguintes condições são satisfeitas:

(20) $\quad N(W_k;x) \leqq C\ N(F;x) \quad , \quad$ se $x \in B(x_k,2r_k)$.

(21) $\quad N(W_k;x) \leqq Ct\ (r_k/(|x-x_k|+r_k))^{2m+(n/q)}$, se $x \notin B(x_k,2r_k)$.

(22) A série $\Sigma_k N(W_k;x)$ converge pontualmente, para quase todo x. Além disso

$$\int (\Sigma_k N(W_k;x))^p dx \leqq \int \Sigma_k N(W_k;x)^p dx \leqq C \int_\Omega N(F;x)^p dx \quad .$$

(23) A série $\Sigma_k W_k = W$ converge em E^q_{2m-1} e tem-se

$N(W;x) \leqq \Sigma_k N(W_k;x)$, para quase todo x.

(24) $\quad \int N(W;x)^p dx \leqq C \int_\Omega N(F;x)^p dx \quad .$

(25) $G = F - W$ tem um representante que possui derivadas continuas até a ordem 2m-1, e as derivadas de ordem 2m-1 satisfazem uma condição de Lipschitz com constante Ct. Além disto,

$N(G;x) \leqq Ct \quad .$

As constantes C que aparecem neste enunciado são finitas e não dependem de F nem de t.

Demonstração: Provaremos primeiramente (20). Seja x em $B(x_k,2r_k)$. Se $N(F;x) = \infty$ a relação é satisfeita trivialmente. Suponhamos que $N(F;x) < \infty$ e consideremos a função $f(y)-P(x,y)$, $P(x,y)$ em $\mathcal{P}_{2m-1}$, que satisfaz $n(f(y)-P(x,y);x) = N(F;x)$ de acordo com o Lema (03). Além disto, seja $y \in B(x,\rho)$, $\rho>0$.

Para estimar $N(W_k;x)$ consideremos o polinômio na variável y:

$$(26) \qquad Q_k(x,y) =$$

$$= \sum_{|\alpha|\leqq 2m-1} \partial_y^\alpha(\phi_k(y)(P(x,y)-P(y_k,y)))|_{y=x} \cdot (y-x)^\alpha/\alpha! =$$

$$= \sum_{|\alpha|\leqq 2m-1} \{\partial_y^\alpha(P(x,y)-P(y_k,y))|_{y=x} \cdot (y-x)^\alpha/\alpha!\} \cdot$$

$$\cdot \{\sum_{|\gamma|\leqq 2m-1-|\alpha|} (1/\gamma!)\ \partial_y^\alpha(\phi_k(y))|_{y=x}\ (y-x)^\gamma\} \quad ;$$

e estimemos a expressão $\rho^{-2m}|w_k(y)-Q_k(x,y)|_{q,B(x,\rho)}$.

Vejamos em primeiro lugar que vale a seguinte desigualdade:

$$(27) \qquad |\partial_y^\alpha(P(x,y)-P(y_k,y))| \leqq C_\alpha\ N(F;x)\ (\rho+r_k)^{2m-|\alpha|} \quad .$$

De fato, usando (15) temos

$|x_k-y_k| \leqq d(B(x_k,2r_k),y_k) + 2r_k \leqq 8\ r_k$; e, por conseguinte

$|y-x|+|y-y_k| \leqq \rho+|y-x|+|x-x_k|+|x_k-y_k| \leqq 2\rho+2r_k+8r_k < 10(\rho+r_k)$.

Aplicando o Lema (02) e levando em consideração a condição

$$n(f(y)-P(y_k,y);y_k) = N(F;y_k) \leqq t < N(F;x) = n(f(y)-P(x,y);x) \quad ,$$

deduzimos (27).

Separemos agora os casos $\rho \geqq 2r_k$ e $\rho < 2r_k$.

No caso $\rho \geqq 2r_k$, somando e subtraindo $\phi_k(y).P(x,y)$, tem-se

$$(28) \qquad |w_k(y)-Q_k(x,y)| \leqq$$

$$|\phi_k(y)(f(y)-P(x,y))| + |\phi_k(y)(P(x,y)-P(y_k,y))| + |Q_k(x,y)| \; .$$

Tomando $|\alpha| = 0$ em (27) e considerando (14) temos

$$(29) \qquad |\phi_k(y)(P(x,y)-P(y_k,y))| \leqq C\, N(F;x)\ \rho^{2m} \quad .$$

Para estimar $|Q_k(x,y)|$ observamos que pelo Lema (02) e pelas condições $|x-y_k| \leqq 10\ r_k$, $\rho \geqq 2\ r_k$, vale

$$|\partial_y^\alpha(P(x,y)-P(y_k,y))_{y=x}| \leqq C\ N(F;x)|x-y_k|^{2m-|\alpha|} \leqq C\ N(F;x)r_k^{2m-|\alpha|} \; .$$

Então, a partir de (26) e usando (17), tem-se

$$(30) \qquad |Q_k(x,y)| \leqq$$

$$\leqq \sum_{|\alpha|\leqq 2m-1} C\ N(F;x)\ r_k^{2m-|\alpha|}\ \rho^{|\alpha|}\ \Big(\sum_{|\gamma|\leqq 2m-1-|\alpha|} C\ r_k^{-|\gamma|}\ \rho^{|\gamma|}\Big) \leqq$$

$$\leqq \sum_{|\alpha|\leqq 2m-1} C\ N(F;x)\ r_k^{2m-|\alpha|-2m+1+|\alpha|}\ \rho^{|\alpha|+2m-1-|\alpha|} \leqq$$

$$\leqq C\ N(F;x)\ \rho^{2m} \quad .$$

Combinando (28), (29) e (30), e integrando sobre $B(x,\rho)$ obtem-se, sob a condição $\rho \geqq 2r_k$:

$$(31) \qquad \rho^{-2m} \; |w_k(y)-Q_k(x,y)|_{q,B(x,\rho)} \leqq$$

$$\rho^{-2m} \; |f(y)-P(x,y)|_{q,B(x,\rho)} + c\, N(F;x) \quad .$$

Seja agora o caso $\rho < 2r_k$. Considerando o polinômio em (26) na forma

$$Q_k(x,y) = \sum_{|\beta|\leqq 2m-1} \partial_y^\beta(\phi_k(y))|_{y=x} \cdot (y-x)^\beta/\beta! \quad .$$

$$\cdot \{ \sum_{|\gamma|\leqq 2m-1-|\beta|} (1/\gamma!) \; \partial_y^\gamma(P(x,y)-P(y_k,y))|_{y=x} \cdot (y-x)^\gamma \} \quad ,$$

e somando e subtraindo a expressão

$$\phi_k(y)P(x,y) + \sum_{|\beta|\leqq 2m-1} \partial_y^\beta(\phi_k(y))|_{y=x}((x-y)^\beta/\beta!)(P(x,y)-P(y_k,y)) \quad ,$$

temos:

$$(32) \qquad |w_k(y)-Q_k(x,y)| \leqq |\phi_k(y)(f(y)-P(x,y))| +$$

$$+ |\{\phi_k(y)- \sum_{|\beta|\leqq 2m-1} (\partial_y^\beta(\phi_k(y)))_{y=x} \cdot (x-y)^\beta/\beta!\} \quad (P(x,y)-P(y_k,y))| +$$

$$+ | \sum_{|\beta|\leqq 2m-1} (\partial_y^\beta(\phi_k(y)))_{y=x} \; ((x-y)^\beta/\beta!) \; .$$

$$.\{(P(x,y)-P(y_k,y))- \sum_{|\gamma|\leqq 2m-1-|\beta|} (\partial_y^\gamma(P(x,y)-P(y_k,y)))_{y=x} \cdot (y-x)^\gamma/\gamma!\}| =$$

$$= |f(y)-P(x,y)| + A_1 + A_2 \quad .$$

Aplicando a fórmula de Taylor e considerando (17) e (27), obtemos sucessivamente as seguintes estimativas para A_1 e A_2:

(33) $\quad A_1 =$

$$= \Big| \sum_{|\beta|=2m} (\partial_y^\beta(\phi_k(y)))_{y=y_o} ((x-y)^\beta/\beta!) \Big| \;.\; |P(x,y)-P(y_k,y)| \leq$$

$$\leq C\, r_k^{-2m}\, \rho^{2m}\, N(F;x)\, r_k^{2m} = C\; N(F;x)\, \rho^{2m} \quad .$$

(34) $\quad A_2 = \Big| \sum_{|\beta|\leq 2m-1} (\partial_y^\beta(\phi_k(y)))_{y=x} ((y-x)^\beta/\beta!)\;.$

$$.\; \{ \sum_{|\gamma|=2m-|\beta|} (\partial_y^\gamma(P(x,y)-P(y_k,y)))_{y=y_o} ((y-x)^\gamma/\gamma!) \} \Big| \leq$$

$$\leq C \sum_{|\beta|\leq 2m-1} r_k^{-|\beta|}\, \rho^{|\beta|}\, N(F;x)\, (\rho+r_k)^{|\beta|}\, \rho^{2m-|\beta|} \leq C'\, N(F;x)\, \rho^{2m} \quad .$$

De (32), (33) e (34) deduz-se que a desigualdade em (31) também vale sob a condição $\rho < 2r_k$. Tomando supremos em $\rho>0$ obtem-se

$$n(w_k(y)-Q_k(x,y);x) \leq n(f-P(x,y);x) + C\, N(F;x) = (1+C)\, N(F;x) < \infty \quad ,$$

e, consequentemente, (20) vale.

Demonstração de (21): Basta considerar o caso em que $B(x_k,r_k)$ e $B(x,\rho)$ têm intersecção não vazia. Seja $x \notin B(x_k,2r_k)$. De $2r_k \leq |x-x_k| < \rho+r_k$ deduz-se que $r_k<\rho$ e $|x-x_k| < 2\rho$, portanto:

(35) $\quad |x-x_k| + r_k < 3\rho \quad .$

Além disso, (15) implica que a bola $B(x_k,r_k)$ está contida em $B(y_k,7r_k)$, e da definição de w_k segue que

$$(36)\qquad \int_{B(x,\rho)} |w_k(y)|^q dy \leqq \int_{B(x_k,r_k)} |w_k(y)|^q dy \leqq$$
$$\leqq \int_{B(y_k,7r_k)} |f(y)-P(y_k,y)|^q dy \quad .$$

A partir de (35) e (36), e considerando ainda a condição $n(f(y)-P(y_k,y);y_k) = N(F;y_k) < t$, temos

$$(37)\qquad \rho^{-2m}|w_k|_{q,B(x,\rho)} \leqq$$
$$\leqq \rho^{-2m}|B(x,\rho)|^{-1/q}|B(y_k,7r_k)|^{1/q}|f(y)-P(y_k,y)|_{q,B(y_k,7r_k)} \leqq$$
$$\leqq C\ n(f(y)-P(y_k,y);y_k)\ (r_k/\rho)^{2m+(n/q)} \leqq$$
$$\leqq C'\ t\ (r_k/(|x-x_k|+r_k))^{2m+(n/q)} \quad ;$$

e, consequentemente, temos (21).

Seja agora x um ponto qualquer e consideremos a série $\Sigma_k N(W_k;x)$. Usando as estimativas feitas em (20) e (21), e a condição $0 < p \leqq 1$, com a mudança de variável $y = r_k^{-1}(x-x_k)$, e fazendo $S_k = B(x_k,2r_k)$, temos:

$$(38)\qquad \int(\Sigma_k N(W_k;x))^p dx \leqq \Sigma_k\{\int_{S_k} N(W_k;x)^p dx + \int_{CS_k} N(W_k;x)^p dx\} \leqq$$
$$\leqq \Sigma_k\int_{S_k} C\ N(F;x)^p dx + \Sigma_k\int C' t^p (r_k/(|x-x_k|+r_k))^{(2m+(n/q))p} dx =$$
$$= C \int N(F;x)^p \Sigma_k\ \chi_{S_k}(x)\,dx \quad +$$
$$+ C'\ t^p\ \Sigma_k r_k^n \int (1+/(|y|+1))^{(2m+(n/q))p} dy = I_1 + I_2 \quad .$$

A partir de (14), (15) e (16), temos

$$I_1 \leq CM \int_\Omega N(F;x)^p dx < \infty \quad .$$

Para estimar I_2, usando (16) temos

$$\Sigma_k r_k{}^n = C \int \Sigma_k \chi_{B_k}(x)dx \leq CM\,|\Omega| \quad ;$$

então, usando a condição $n(2m+(n/q))^{-1} < p \leq 1$ e a definição de $\Omega = \Omega_t$, obtemos

$$I_2 \leq C\, t^p\, |\Omega_t| \leq C \int_\Omega N(F;x)^p dx < \infty \quad .$$

A partir de (38) e das estimativas para I_1 e I_2 deduz-se (22).

A condição (23) obtem-se como consequência imediata de (22) e do Lema (06); e (24) deduz-se a partir de (22) e (23) usando a condição $0 < p \leq 1$.

Para demonstrar (25) e de acordo com (22), consideremos um ponto x_o que não está em $\Omega = \Omega_t$ e tal que $\Sigma_k N(W_k;x_o) < \infty$. Então $x_o \notin B(x_k,2r_k)$ para todo k, e a partir de (37) deduz-se que $w_k(x)$ é o representante de W_k que satisfaz $n(w_k;x_o) = N(W_k;x_o)$, $k=1,2,\ldots$. Pelo Lema (06) tem-se então que $w = \Sigma_k w_k(x)$ converge em $L^q(\text{loc})$ e é o representante de $W = \Sigma_k W_k$ que satisfaz $n(w;x_o) = N(W;x_o)$.

Então a função $g(x) = f(x) - w(x)$ é um representante de $G = F - W$ e verifica a condição $n(g;x) \leq Ct$. Ademais, $g(x)$

coincide em quase todo ponto com uma função $\tilde{g}(x)$ que é derivável até ordem $2m-1$, e cujas derivadas de ordem $2m-1$ satisfazem uma condição de Lipschitz com constante Ct (Ver ([1]). Theorem 5, (vi)). A função $\tilde{g}(x)$ também é um representante da classe G, e (25) fica portanto provado.

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 1. Demonstraremos antes o seguinte

(39) LEMA. Seja H um elemento de E^q_{2m-1} que satisfaz as condições $N(H;x) \leq 1$ e $\int N(H;x)^r dx < \infty$, para algum r tal que $n(2m+(n/q))^{-1} < r < p \leq 1$. Então, existe uma sequência $\{A_j\}_{j=1}^\infty$ de p-átomos em E^q_{2m-1} e uma sequência de números $\{\lambda_j\}_{j=1}^\infty$ tais que $H = \Sigma_j \lambda_j A_j$ em H^p. Ademais, $\Sigma_j |\lambda_j|^p \leq C \int N(H;x)^r dx$.

Demonstração: Seja s um número a ser determinado tal que $0<s<1$, e definamos indutivamente a seguinte sequência $\{H_k\}_{k=1}^\infty$ em E^q_{2m-1} :

$$H_o(x) = H(x)$$

(40)

$$H_k(x) + W_k(x) = H_{k-1}(x) \quad , k=1,2,... \quad ,$$

onde H_k é a classe G que corresponde à constante $t = s^k$ na decomposição de H_{k-1} segundo o Lema (18) que é aplicável reiteradamente pois, por (24), tem-se $N(H_{k-1};x) \in L^r$, $k=1,2,...$. Seja $O_k = \{x: N(H_{k-1};x) > s^k\}$ e $\{B_{k,h}\}_{h=1}^\infty = \{B(x_{k,h},r_{k,h})\}_{h=1}^\infty$ a família de bolas segundo (15) na partição da unidade de O_k, e $W_k = \Sigma_h W_{k,h}$ a expressão de W_k segundo (23). Vejamos agora que vale

(41) $\quad N(W_{k,h};x) \leq C\ s^{k-1} \quad ; \quad k=1,2,\ldots \ ; \quad h=1,2,\ldots \ ;$

e que a constante s pode ser determinada de forma a satisfazer

(42) $\quad \Sigma_k\ s^{(k-1)p}\ |O_k| \leq C \int N(H;x)^r dx \quad .$

Ademais,

(43) $\quad H = \Sigma_{k,h} W_{k,h}$ em H^p incondicionalmente.

Demonstração de (41): Como consequência imediata de (25) do Lema (18) temos

(44) $\quad N(H_k;x) \leq C\ s^k \quad , \quad k=1,2,\ldots \quad .$

A partir das estimativas em (20), (21) e (44) tem-se então

$$N(W_{k,h};x) \leq C\ N(H_{k-1};x) \leq C\ s^{k-1} \quad , \text{ se } x \in B(x_{k,h}, 2r_{k,h}) \ ;$$

e

$$N(W_{k,h};x) \leq C\ s^k\ (r_{k,h}/(|x-x_{k,h}|+r_{k,h}))^{2m+(n/q)} < C\ s^{k-1} \quad , \quad \text{se } x \notin B(x_{k,h}, 2r_{k,h}) \ ;$$

o que demonstra (41).

Demonstremos agora (42): Se $x \notin O_k$, então $x \notin B(x_{k,h}, 2r_{k,h})$, para todo h. Portanto, usando (23) e (21) deduz-se

(45) $\quad N(H_k;x) \leqq$

$$\leqq N(H_{k-1};x) + N(W_k;x) \leqq N(H_{k-1};x) + \Sigma_h N(W_{k,h};x) \leqq$$

$$\leqq N(H_{k-1};x) + C\, s^k\, \Sigma_h (r_{k,h}/(|x-x_{k,h}|+r_{k,h}))^{2m+(n/q)} \quad .$$

Se $x \in O_k$, existe h tal que $|x-x_{k,h}| < r_{k,h}$, em consequência, $(r_{k,h}/(|x-x_{k,h}|+r_{k,h}))^{2m+(n/q)} > 1/2$, e tem-se, usando (44):

(46) $\quad N(H_k;x) \leqq Cs^k \leqq Cs^k\, (r_{k,h}/(|x-x_{k,h}|+r_{k,h}))^{2m+(n/q)} \quad .$

De (45) e (46) deduz-se que para todo x é válida a relação

$$N(H_k;x) \leqq N(H_{k-1};x) + Cs^k\, \Sigma_h\, (r_{k,h}/(|x-x_{k,h}|+r_{k,h}))^{2m+(n/q)} \quad .$$

Aplicando k vezes esta desigualdade obtem-se

(47) $\quad N(H_k;x) \leqq$

$$\leqq N(H;x) + C \sum_{i=1}^{k} s^i\, \Sigma_j (r_{i,j}/(|x-x_{i,j}|+r_{i,j}))^{2m+(n/q)} \quad .$$

A partir da definição de O_k e usando ademais (47), a mudança de variável $y = r_{i,j}^{-1}(x-x_{i,j})$ e a relação $\Sigma_j r_{i,j}^{\,n} \leqq CM\,|O_i|$, temos

$$s^{kr}\,|O_k| \leqq \int N(H_{k-1};x)^r dx \leqq$$

$$\leqq \int N(H;x)^r dx + C^r \sum_{i=1}^{k-1} s^{ir}\, \Sigma_j \int (r_{i,j}/(|x-x_{i,j}|+r_{i,j}))^{(2m+(n/q))r} dx \leqq$$

$$\leqq \int N(H;x)^r dx + C \sum_{i=1}^{k-1} s^{ir}\, \Sigma_j r_{i,j}^{\,n} \leqq \int N(H;x)^r dx + C \sum_{i=1}^{k-1} s^{ir}\, |O_i| \quad .$$

Fazendo $\beta_o = \int N(H;x)^r dx$, $\beta_i = s^{ir} |O_i|$, $i=1,2,\ldots$, a desigualdade anterior escreve-se

$$\beta_k \leqq C \sum_{i=0}^{k-1} \beta_i \quad .$$

Com a escolha $\alpha \geqq C+1$, é facil demonstrar por indução que $\beta_i \leqq \beta_o \alpha^i$, para todo i. Em consequência,

$|O_i| \leqq s^{-ir} \alpha^i \int N(H;x)^r dx$, para $\alpha \geqq C+1$ que não depende de s.

Então (42) pode ser escrito como

$$\Sigma_k s^{(k-1)p} |O_k| \leqq \Sigma_k s^{(k-1)p-kr} \alpha^k \int N(H;x)^r dx =$$

$$= s^{-p} \left(\int N(H;x)^r dx\right) \Sigma_k (s^{p-r}\alpha)^k \quad .$$

A série $\Sigma_k (s^{p-r}\alpha)^k$ converge se se escolhe s que satisfaça $s^{p-r}\alpha < 1$, o que é possível por ser $p-r > 0$. Fica então provado (42).

Demonstração de (43): Levando em conta a expressão de cada W_j segundo (23), a sequência definida em (40) pode ser escrita em E^q_{2m-1} como

$$H = H_o = H_k + \sum_{j=1}^{k} W_j = H_k + \sum_{j=1}^{k} \Sigma_h W_{j,h} \quad .$$

Além disso, por (03) e (44) temos

$$||H_k||_{q,B} \leqq C\, N(H_k;x) \leqq C'\, s^k$$

que converge para 0 quando $k\to\infty$, o que prova que H_k converge para a classe nula em E^q_{2m-1} quando $k\to\infty$.

Portanto

(48) $\quad H = \Sigma_j \; (\Sigma_h \; W_{j,h}) \quad$ em E^q_{2m-1} .

Por outro lado, considerando sucessivamente (22), (44) e (42), tem-se

$$(\sum_{j,h} ||W_{j,h}||_{H^p})^p \leq \sum_{j,h} ||W_{j,h}||^p_{H^p} = \sum_{j,h} \int N(W_{j,h};x)^p dx \leq$$

$$\leq C \; \Sigma_k \int_{O_k} N(H_{k-1};x)^p dx \leq C \; \Sigma_k \; C's^{(k-1)p} |O_k| \leq C \int N(H;x)^r dx \; ,$$

o que demonstra que $\sum_{j,h} W_{j,h}$ converge incondicionalmente em H^p. Conforme o Corolario (07), seja F o elemento de H^p que satisfaz $F = \sum_{j,h} W_{j,h}$ em H^p. Por (48) e o Corolario (05) deduz-se então que $H = F$ em E^q_{2m-1}, o que prova (43).

Definamos agora:

$$\lambda_{i,j} = C \; s^{i-1} |B_{i,j}|^{-1/p} \; ; \; i,j=1,2,.. \; ; \; C \text{ a constante em (41);}$$

$$A_{i,j} = \lambda_{i,j}^{-1} \; W_{i,j} \quad ; \; i,j=1,2,... \quad .$$

Seja para cada i,j a função $w_{i,j}(x)$ definida segundo (19), e definamos $a_{i,j}(x) = \lambda_{i,j}^{-1} \; w_{i,j}(x)$. Então $a_{i,j}(x)$ é um representante da classe $A_{i,j}$ e seu suporte está contido na bola $B_{i,j}$. Ademais, por (41) tem-se

$$N(A_{i,j};x) = \lambda_{i,j}^{-1} \; N(W_{i,j};x) \leq$$

$$\leq (Cs^{i-1})^{-1} \; |B_{i,j}|^{-1/p} \; Cs^{i-1} = |B_{i,j}|^{-1/p} \quad ,$$

o que demonstra que $A_{i,j}$ é um p-átomo em E^q_{2m-1} .

Também, por (43) temos

$$H = \sum_{i,j} W_{i,j} = \sum_{i,j} \lambda_{i,j} A_{i,j} \quad .$$

Finalmente, a partir de (16) e (42) obtem-se

$$\sum_{i,j} |\lambda_{i,j}|^p = C^p \; \Sigma_i \Sigma_j \; s^{(i-1)p} \; |B_{i,j}| \leqq$$

$$\leqq C' \; \Sigma_i \; s^{(i-1)p} \; |O_i| \leqq C'' \int N(H;x)^r dx \qquad ,$$

e fica demonstrado o Lema (39).

Continuemos agora com a demonstração do Teorema 1.

Primeira parte: Suponhamos $n(2m+(n/q))^{-1} < p \leqq 1$. Seja $\{\mu_i\}_{i=1}^{\infty}$ uma sequência de números que satisfaz $\Sigma_i |\mu_i|^p < \infty$ e $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ uma sequência de p-átomos em E^q_{2m-1}. Pelo Lema (10), a sequência $\{A_i\}$ verifica $\int N(A_i;x)^p dx \leqq C$, com a constante C independente de i. Então, pelo Lema (11), a série $\Sigma_i \mu_i A_i = F$ converge em H^p e vale $\int N(F;x)^p dx \leqq C \; \Sigma_i |\mu_i|^p$.

Segunda parte: Suponhamos agora um elemento de E^q_{2m-1} cuja função maximal $N(F;x)$ está em L^p, $n(2m+(n/q))^{-1} < p \leqq 1$, e provemos que F pode expresarse em E^q_{2m-1} como uma série $\Sigma_i \mu_i A_i$, com $\Sigma_i |\mu_i|^p < \infty$ e os A_i p-átomos em E^q_{2m-1} , $i=1,2,\ldots$.

Para cada k inteiro, seja

$$F = G_k + W_k$$

a decomposição de F correspondente a $t = 2^k$ segundo o Lema (18), e chamemos $\Omega_k = \{x : N(F;x) > 2^k\}$. Definamos agora:

(49) $$F_k = G_{k+1} - G_k = W_k - W_{k+1} \quad , \; k=0,\pm 1,\ldots \quad .$$

Em primeiro lugar vejamos que a série $\Sigma_k F_k$ converge para F em H^p. Aplicando a parte (25) do lema de decomposição tem-se

$$N(G_k;x) \leqq C\, 2^k \quad ; \quad N(G_{k+1};x) \leqq C\, 2^{k+1} = C'\, 2^k \quad .$$

Deduz-se então

(50) $$N(F_k;x) \leqq N(G_{k+1};x) + N(G_k;x) \leqq C\, 2^k \quad ;$$

em particular se x é um ponto de Ω_k.

Seja $W_k = \Sigma_h W_{k,h}$ a expressão de W_k segundo (23) do Lema (18). Aplicando as desigualdades em (21) e (23) e observando que Ω_{k+1} está contido em Ω_k, temos que, se $x \notin \Omega_k$, então

(51) $$\begin{aligned} N(F_k;x) &\leqq N(W_k;x) + N(W_{k+1};x) \leqq \\ &\leqq \Sigma_h N(W_{k,h};x) + \Sigma_h N(W_{k+1,h};x) \leqq \\ &\leqq C\, 2^k\, \{\Sigma_h (r_{k,h}/(|x-x_{k,h}|+r_{k,h}))^{2m+(n/q)} + \\ &+ \Sigma_h\, (r_{k+1,h}/(|x-x_{k+1,h}|+r_{k+1,h}))^{2m+(n/q)}\} \quad . \end{aligned}$$

Para r que satisfaz $n(2m+(n/q))^{-1} < r \leqq 1$, as desigualdades em (50) e (51) permitem escrever

(52) $$\int N(F_k;x)^r dx = \int_{\Omega_k} N(F_k;x)^r dx + \int_{C\Omega_k} N(F_k;x)^r dx \leqq$$

$$\leq C\ 2^{kr}\ |\Omega_k| + C\ 2^{kr}\ (I_k + I_{k+1}) \quad ,$$

onde

$$I_j = \int_{C\Omega_k} \Sigma_h (r_{j,h}/(|x-x_{j,h}|+r_{j,h}))^{(2m+(n/q))r} dx \quad .$$

Usando a mudança de variável $y = r_{j,h}^{-1}(x-x_{j,h})$, a condição $(2m+(n/q))r > n$ e a relação $\Sigma_h\ r_{j,h}^{\ n} \leq C\ |\Omega_j|$, obtem-se

$$I_j \leq (\Sigma_h\ r_{j,h}^{\ n}) \int (1/(|y|+1))^{(2m+(n/q))r} dy \leq C\ |\Omega_j| \quad .$$

Então, levando em conta que $|\Omega_{k+1}| \leq |\Omega_k|$, a condição (52) pode ser escrita como

(53) $$\int N(F_k;x)^r dx \leq C\ 2^{kr}|\Omega_k| \quad ; \quad n(2m+(n/q))^{-1} < r \leq 1 \ .$$

Além disso, pela definição de Ω_k, temos

(54) $$\int_{2^{k-1}}^{2^k} \lambda^{p-1}|\{x:\ N(F;x)>\lambda\}|d\lambda \geq$$

$$\geq p^{-1}\ |\Omega_k|\ \ (2^{kp}(1-2^{-p})) \geq C\ p^{-1}\ 2^{kp}|\Omega_k| \quad .$$

Fazendo $r=p$ em (53) e levando em consideração (54) deduz-se

(55) $$\Sigma_k ||F_k||^p_{H^p} = \Sigma_k \int N(F_k;x)^p dx \leq$$

$$\leq C\ \Sigma_k\ 2^{kp}|\Omega_k| \leq Cp\ \Sigma_k \int_{2^{k-1}}^{2^k} \lambda^{p-1}|\{x:\ N(F;x)>\lambda\}|d\lambda =$$

$$= Cp \int_0^\infty \lambda^{p-1}|\{x:\ N(F;x)>\lambda\}|d\lambda = C \int N(F;x)^p dx < \infty \quad ,$$

o que prova a convergencia da série $\Sigma_k\ F_k$ em H^p .

Por outro lado, da definição de F_k em (49) deduz-se

(56) $$\Sigma_k F_k = \lim_{K\to\infty} \sum_{k=-K}^{K} (G_{k+1} - G_k) = \lim_{K\to\infty} (G_{K+1} - G_{-K}) =$$

$$= \lim_{K\to\infty} F - W_{K+1} - G_{-K} \qquad \text{em } E^q_{2m-1} \quad .$$

Vejamos agora que

(57) $$\lim_{K\to\infty} W_K = \lim_{K\to\infty} G_{-K} = 0 \qquad \text{em } E^q_{2m-1} \quad .$$

Dada uma bola B qualquer e para x variando na bola B(0,1), pelo Lema (03) e por (23) temos

$$||W_K||^p_{q,B} \leqq C\ N(W_K;x)^p \leqq C\ \Sigma_h N(W_{K,h};x)^p \qquad ;$$

e em consequência, usando (22) tem-se

$$||W_K||^p_{q,B} \leqq C\ |B(0,1)|^{-1} \int_{B(0,1)} \Sigma_h N(W_{K,h};x)^p dx \leqq$$

$$\leqq C' \int_{\Omega_K} N(F;x)^p dx \qquad ,$$

que tende a zero quando $K \to \infty$.

Também, pelo Lema (03) e por (25), vale

$$||G_{-K}||_{q,B} \leqq C\ N(G_{-K};x) \leqq C'\ 2^{-K}$$

que converge para zero $(K \to \infty)$.

Combinando (56) e (57) obtem-se que $F = \Sigma_k F_k$ em E^q_{2m-1} , e a partir do Corolario (05) deduz-se então que

(58) $$\Sigma_k F_k = F \qquad \text{em } H^p \quad .$$

Seja agora um número r tal que $n(2m+(n/q))^{-1} < r < p \leqq 1$, e consideremos em E^q_{2m-1} o elemento $F_k/C_o 2^k$, onde C_o é a constante que aparece em (50). Levando em consideração (50) e (53) verifica-se que $F_k/C_o 2^k$ satisfaz as condições do Lema (39).

De fato:

$$N(F_k/C_o 2^k) \leqq 1 \quad ; \quad e$$

$$\int N(F_k/C_o 2^k ; x)^r dx \leqq C_o^{-r}\ 2^{-kr}\ C\ 2^{kr}|\Omega_k| = C'|\Omega_k| < \infty .$$

Existe então, para cada k, uma sequência $\{A_{k,h}\}_{h=1}^{\infty}$ de p-átomos em E^q_{2m-1} e uma sequência $\{\lambda_{k,h}\}_{h=1}^{\infty}$ de números, tais que

$$(59) \quad \begin{aligned} & F_k/C_o 2^k = \Sigma_h\ \lambda_{k,h} A_{k,h} \quad \text{em } H^p . \\ & \Sigma_h |\lambda_{k,h}|^p \leqq C \int N(F_k/C_o 2^k ; x)^r dx \leqq C'|\Omega_k| . \end{aligned}$$

Definimos agora

$$\mu_{k,h} = C_o 2^k \lambda_{k,h} \quad ,$$

e a partir de (58) e (59) obtemos então

$$(60) \quad F = \Sigma_k\ F_k = \Sigma_k\ (\Sigma_h\ \mu_{k,h} A_{k,h}) \quad \text{em } H^p .$$

Além disso, por (59) e (55), a sequência $\{\mu_{k,h}\}$ satisfaz

$$(61) \quad \begin{aligned} & \Sigma_{k,h} |\mu_{k,h}|^p = C_o\ \Sigma_k\ 2^{kp} (\Sigma_h |\lambda_{k,h}|^p) \leqq \\ & \leqq C\ \Sigma_k\ 2^{kp}\ |\Omega_k| \leqq C \int N(F;x)^p dx < \infty , \end{aligned}$$

o que permite aplicar o Lema (11) e obter que a série

$\sum_{k,h} \mu_{k,h} A_{k,h}$ converge incondicionalmente em H^p. Levando em consideração (60) deduz-se então que

$$F = \sum_{k,h} \mu_{k,h} A_{k,h} \quad .$$

A partir também do Lema (11) tem-se

$$\int N(F;x)^p dx \leqq C \sum_{k,h} |\mu_{k,h}|^p \quad .$$

Esta desigualdade, junto com (61), permite concluir a demonstração do Teorema 1.

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 2. Demonstremos primeiramente os seguintes lemas:

(62) LEMA. O operador Δ^m é continuo de H^p no espaço S' das distribuições temperadas.

Demonstração: Seja F em H^p, x_o um ponto no qual $N(F;x_o) < \infty$, e f_o o representante de F que satisfaz $n(f_o;x_o) = N(F;x_o)$. O Lema (12) monstra que f_o define uma distribuição temperada, e o mesmo ocorre com qualquer f representante de F. Então $\Delta^m F = \Delta^m f$ é uma distribuição temperada independentemente do representante f.

Dada ϕ em S, pelo mesmo Lema (12), tem-se ademais

$$|\langle\Delta^m F,\phi\rangle| = \left|\int \Delta^m f_o(x)\phi(x)dx\right| = \left|\int f_o(x)\Delta^m\phi(x)dx\right| \leqq$$

$$\leqq C\ N(F;x_o)\ (1+|x_o|)^j\ p_{j,2m}(\phi) \quad , \quad j > n+2m.$$

Elevando à potência p na desigualdade anterior e integrando sobre $\{|x_o| \leqq 1\}$ obtemos

$$|\langle \Delta^m F;\phi\rangle| \leqq C'\ p_{j,2m}(\phi)\ ||F||_{H^p} \quad ,$$

o que demonstra a continuidade de Δ^m.

(63) LEMA. Se A é um p-átomo em E^q_{2m-1}, $n(2m+(n/q))^{-1} < p \leqq 1$, existe então uma constante c que depende somente de m, tal que $\Delta^m(cA)$ é um p-átomo em R^n.

Demonstração: Seja A um p-átomo em E^q_{2m-1} e consideremos o representante a(x) de A com suporte contido na bola B. Se aplicamos o Lema (18) de decomposição com a constante $t = 2\ |B|^{-1/p}$ têm-se

$$\Omega_t = \{x: N(A;x) > 2\ |B|^{-1/p}\} = \emptyset \quad ;$$

portanto, a partir de (25) deduz-se que $A = G + O$ em E^q_{2m-1} e que a(x) é uma função derivável em quase todo ponto até ordem 2m-1, e, além disso, suas derivadas de ordem 2m-1 satisfazem uma condição de Lipschitz com constante $Ct = 2C|B|^{-1/p}$, e são portanto funções deriváveis em quase todo ponto. Isto é, para todo $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ com $|\alpha| = 2m$, as funções $(\partial^\alpha a)(x)$ estão definidas, para quase todo x, e é satisfeita a condição

$$|(\partial^\alpha a)(x)| \leqq 2C\ |B|^{-1/p} \quad .$$

Então, para certo conjunto J finito vale

$$|(\Delta^m a)(x)| = |\sum_{\substack{|\alpha|=2m \\ \alpha\varepsilon J}} (\partial^\alpha a)(x)| \leq |\sum_{\substack{|\alpha|=2m \\ \alpha\varepsilon J}} 2C|B|^{-1/p} \leq C_m |B|^{-1/p} \quad .$$

Se consideramos $c = C_m^{-1}$, temos obviamente que o suporte de $(\Delta^m ca)(x)$ está contido na bola B. Ademais é válido

$$||\Delta^m cA||_\infty = \sup_x |(\Delta^m ca)(x)| \leq |B|^{-1/p} \qquad , \text{ e}$$

$$\int (\Delta^m ca)(x) x^\alpha dx = \int ca(x) \Delta^m (x^\alpha) dx = 0 \qquad , \text{ se } |\alpha| \leq 2m-1 \quad ;$$

com o que fica provado que $\Delta^m(cA)$ é um p-átomo em R^n .

(64) LEMA. Seja $a(x)$ um p-átomo em $R^n, n(2m+(n/q))^{-1} < p \leq 1$, e consideremos a função

$$h(|x|) = \begin{cases} |x|^{2m-n} \, \lg|x| & , \text{ se n par e } 2m-n \geq 0 \quad , \\ |x|^{2m-n} & , \text{ em todos os outros casos.} \end{cases}$$

que resulta localmente integrável e é uma solução fundamental da equação $\Delta^m u = f$. Então a função

$$h_a(x) = (h*a)(x) = \int h(|x-y|) a(y) dy \qquad ,$$

que é uma solução da equação $\Delta^m u = a$, resulta localmente limitada e portanto é um elemento de $L^q(loc)$. Além disto:

(65) Se A é a classe de $h_a(x)$ em E^q_{2m-1}, existe uma constante C positiva que não depende de A, tal que $\int N(A;x)^p dx \leq C$.

Para demonstrar que $h_a(x)$ é localmente limitada consideremos primeiramente o caso n par e $2m-n \geq 0$. Suponhamos o suporte de

$a(x)$ contido na bola $B = B(0,d_o)$, x um ponto em uma bola qualquer $B(x_o,r)$ e seja R suficientemente grande tal que a bola $B(x_o,r)$ esteja contida em $B(0,R)$. Se fizermos $z = x-y$ ter-se-á então $|z| = |x-y| \leq |x|+|y| \leq R+|y|$, e em consequência

$$|h_a(x)| = |\int_B h(|x-y|)a(y)dy| \leq |B|^{-1/p} \int_{|y|\leq d_o} |h(|x-y|)|dy \leq$$

$$\leq |B|^{-1/p} \int_{|z|\leq R+d_o} h(|z|)dz = |B|^{-1/p}|\Sigma_1| \int_0^{R+d_o} \rho^{2m-1} \lg|\rho|d\rho \leq$$

$$\leq (C/\alpha)\left(\int_0^1 \rho^{2m-1-\alpha}d\rho + \int_1^{R+d_o} \rho^{2m-1+\alpha}d\rho\right) \quad ; \quad 0<\alpha<1.$$

Obtem-se então

$$|h_a(x)| \leq (C/\alpha)\{(1/(2m-\alpha))+((R+d_o)^{2m+\alpha}-1)(1/(2m+\alpha))\} \leq C' \quad ,$$

se n par e $2m-n \geq 0$.

O caso restante é tratado similarmente.

Demonstremos agora (65). As funções $(\partial^\alpha h)(y)$ são localmente integráveis se $|\alpha| \leq 2m-1$. Dado um ponto x_o fixo consideremos o polinômio

$$P(x_o,z) = \sum_{|\alpha|\leq 2m-1} \left(\int (\partial^\alpha h)(x_o-y)a(y)dy\right) (z^\alpha/\alpha!) \quad ,$$

e a função

(66) $$f_a(x_o,z) = h_a(x_o+z) - P(x_o,z) \quad ,$$

que é um representante da mesma classe A de $h_a(x)$ em E^q_{2m-1}.

Fazendo $z = \rho\theta$, com $\rho>0$, $|\theta|=1$, a função $f_a(x_o,z)$ pode ser escrita sob a forma

(67) $$f_a(x_o,z) = f_a(x_o,\rho,\theta) = \int h(|x_o+\rho\theta-y|)a(y)dy -$$

$$- \sum_{k=0}^{2m-1} \int \{ \sum_{|\alpha|=k} (1/\alpha!)((\partial^\alpha h)(x_o-y)\theta^\alpha)\} \rho^k a(y)dy \quad .$$

Também, usando a igualdade

$$\sum_{|\alpha|\leq 2m-1} (\partial^\alpha h)(x_o-y)(z^\alpha/\alpha!) = \sum_{k=0}^{2m-1} (d^k/d\rho^k)\ h(x_o+\rho\theta-y)\ |_{\rho=0}(\rho^k/k!) \quad ,$$

$f_a(x_o,z)$ pode-se escrever como

(68) $$f_a(x_o,z) = f_a(x_o,\rho,\theta) =$$

$$= \int \{h(|x_o+\rho\theta-y|) - \sum_{k=0}^{2m-1} (d^k/d\rho^k)\ h(x_o+\rho\theta-y)\ |_{\rho=0}(\rho^k/k!)\}a(y)dy \quad .$$

Com o propósito de estimar $n(f_a;x_o)$ obteremos estimativas para $f_a(x_o,\rho,\theta)$. Suponhamos como primeiro caso que o ponto x_o verifica $|x_o| > 8d_o$, e vejamos que valem as seguintes condições:

(69) Se $\rho < 10^{-1}|x_o|$ ou $\rho \geq 10\ x_o$, então:

$$|f_a(x_o,\rho,\theta)| \leq C\ \rho^{2m}|B|^{-1/p}\ (d_o/|x_o|)^{2m+n} \quad .$$

(70) Se $10^{-1}|x_o| < \rho < 10|x_o|$ e $|x_o+\rho\theta| < 2d_o$, então:

$$|f_a(x_o,\rho,\theta)| \leq C|B|^{-1/p}(|x_o|^\mu d_o^{\,2m-\mu}+\rho^{2m}(d_o/|x_o|)^{2m+n}) \quad , \ 0<\mu<1 \ .$$

(71) Se $10^{-1}|x_o| < \rho < 10|x_o|$ e $|x_o+\rho\theta| \geqq 2d_o$, então

$$|f_a(x_o,\rho,\theta)| \leqq C\ |B|^{-1/p}(|x_o+\rho\theta|^{-n}d_o^{\,2m+n} + \rho^{2m}(d_o/|x_o|)^{2m+n}) .$$

(72) $n(f_a;x_o) \leqq C\ |B|^{-1/p}(d_o/|x_o|)^{2m+(n/q)-\mu}$; $0<\mu<1$,

C independente do p-átomo a(x). $(|x_o|>8d_o)$.

Para demonstrar (69) suponhamos primeiro $\rho \leqq 10^{-1}|x_o|$. Aplicando a fórmula de Taylor com resto integral com respeito a ρ, na expressão

(73) $$U(x_o,\rho,\theta,y) = h(|x_o+\rho\theta-y|) - $$
$$- \sum_{k=0}^{2m-1} (d^k/d\rho^k)\ h(x_o+\rho\theta-y)\ \Big|_{\rho=0}(\rho^k/k!) ,$$

e chamando

$$\psi(y) = \sum_{|\alpha|=2m} (1/\alpha!)(\partial^\alpha h)(x_o+t\rho\theta-y)\theta^\alpha , \text{ tem-se}$$

$$U(x_o,\rho,\theta,y) = 2m\ \rho^{2m}\int_0^1 \psi(y)(1-t)^{2m-1}dt .$$

Na última expressão, somando e subtraindo de $\psi(y)$ o polinômio $\sum_{|\gamma|\leqq 2m-1} (1/\gamma!)(\partial^\gamma\psi)(0)y^\gamma$, e aplicando a fórmula de Taylor com relação a y, (68) pode-se escrever como

$$f_a(x_o,\rho,\theta) = \int U(x_o,\rho,\theta,y)a(y)dy =$$

$$= \int_{|y|\leqq d_o} (2m\rho^{2m}\int_0^1 \{2m\int_0^1 \sum_{|\gamma|=2m} (y^\gamma/\gamma!)(\partial^\gamma\psi)(sy)(1-s)^{2m-1}ds\} .$$
$$. (1-t)^{2m-1}dt)\ a(y)dy\ +$$

$$+ \int_{|y|\leq d_o} \{2m\rho^{2m}\int_0^1 (\sum_{|\gamma|\leq 2m-1} (1/\gamma!)(\partial^\gamma\psi)(0)y^\gamma)(1-t)^{2m-1}dt\}\ a(y)dy \quad .$$

Mudando a ordem de integração na segunda integral e usando que $a(y)$ tem os seus primeiros $2m-1$ momentos nulos, deduz-se que tal integral é nula. Mudando ainda a ordem de integração na primeira integral e observando que as derivadas de $h(|x|)$ de ordem $2m-n-u$, $u\geq 1$, são funções homogêneas de grau $-u$, obtem-se

$$|f_a(x_o,\rho,\theta)| \leq \{C\rho^{2m}|B|^{-1/p}d_o^{\,2m}\} \ .$$

$$. \{\int_0^1 \int_0^1 \int_{|y|\leq d_o} \sum_{\substack{|\alpha|=2m \\ |\gamma|=2m}} |(\partial^{\alpha+\gamma}h)(x_o+t\rho\theta-sy)|dy\ ds\ dt\} =$$

$$= C'\rho^{2m}|B|^{-1/p}\ d_o^{\,2m} \int_0^1 \int_0^1 \int_{|y|\leq d_o} |x_o+t\rho\theta-sy|^{-(2m+n)}dy\ ds\ dt \quad .$$

Além disso,

$$|x_o+t\rho\theta-sy| \geq |x_o|-|t\rho\theta|-|sy| \geq |x_o|-(\rho+d_o) \geq |x_o|/2 > 0 \quad .$$

Tem-se portanto

$$|f_a(x_o,\rho,\theta)| \leq C\ \rho^{2m}|B|^{-1/p}\ d_o^{\,2m+n}\ |x_o|^{-(2m+n)} \quad ,$$

o que demonstra (69) no caso $\rho \leq 10^{-1}|x_o|$.

Suponhamos agora $\rho > 10|x_o|$, e apliquemos a fórmula de Taylor no integrando de cada termo de (67), considerando em cada caso o polinômio de grau $2m-1$ que convenha. No primeiro termo temos

$$J = \int \{h(|x_o+\rho\theta-y|) - \sum_{k=0}^{2m-1} (\sum_{|\alpha|=k} (y^\alpha/\alpha!)(\partial^\alpha h)(x_o+\rho\theta)\} \; a(y)\; dy \; +$$

$$+ \int \{ \sum_{k=0}^{2m-1} (\sum_{|\alpha|=k} (y^\alpha/\alpha!)(\partial^\alpha h)(x_o+\rho\theta)\} \; a(y)\,dy \; = J_1 + J_2 \quad .$$

Como antes, a segunda integral resulta nula, e para a primeira tem-se

(74) $$|J_1| =$$

$$= \left| \int \{2m \sum_{|\alpha|=2m} (y^\alpha/\alpha!) \int_0^1 (\partial^\alpha h)(x_o+\rho\theta-ty) \; (1-t)^{2m-1} dt\} \; a(y)\,dy \right| \leqq$$

$$\leqq C \; 2m \int_0^1 \int_{|y|\leqq d_o} |y|^{2m} \; |x_o+\rho\theta-ty|^{-n} \; |a(y)|\,dy \; dt \quad .$$

Ademais, usando as condições $|x_o| > 8d_o$, $\rho \geqq 10|x_o|$, temos $|x_o+\rho\theta-ty| > \rho/2$, e por conseguinte:

(75) $$|J| = |J_1| \leqq C \; |B|^{-1/p} \; d_o^{\,2m+n} \; \rho^{-n} \leqq$$

$$\leqq C' \; \rho^{2m} |B|^{-1/p} \; (d_o/|x_o|)^{2m+n} \quad .$$

Nos termos restantes em (67), chamando

$\psi_k(y) = (\sum_{|\alpha|=k} (1/\alpha!)(\partial^\alpha h)(x_o-y)\,\theta^\alpha)\,\rho^k$; $k=0,1,\ldots,2m-1$, temos:

$$I_k = \int (\psi_k(y) - \sum_{j=0}^{2m-1} \{ \sum_{|\gamma|=j} (y^\gamma/\gamma!)(\partial^\gamma \psi_k)(0)\}) \; a(y)\,dy \; +$$

$$+ \int (\sum_{j=0}^{2m-1} \{ \sum_{|\gamma|=j} (y^\gamma/\gamma!)(\partial^\gamma \psi_k)(0)\}) \; a(y)\,dy = I_{k,1} + I_{k,2} \quad ,$$

com $I_{k,2} = 0$ e $I_{k,1}$ que satisfaz

$$|I_{k,1}| = \left|\int \{2m \sum_{|\gamma|=2m} (y^\gamma/\gamma!) \int_0^1 (\partial^\gamma \psi_k)(sy)(1-s)^{2m-1} ds\}\ a(y)dy\right| =$$

$$= \left|\int_0^1 \int \{2m\rho^k \sum_{\substack{|\gamma|=2m \\ |\alpha|=k}} (y^\gamma \theta^\alpha/\gamma!\alpha!)(\partial^{\gamma+\alpha} h)(x_o-sy)(1-s)^{2m-1} a(y)\}dy\ ds\right| \leq$$

$$\leq C_k \rho^k \int_0^1 \int_{|y|\leq d_o} |y|^{2m} |x_o-sy|^{-(n+k)} |a(y)| dy\ ds \quad ,$$

e, portanto, notando que $|x_o-sy| > |x_o|/2 > 0$, tem-se

$$(76) \qquad |I_k| = |I_{k,1}| \leq C_k \rho^k |B|^{-1/p}\ d_o^{2m+n} |x_o|^{-(n+k)} \quad ; \quad k=0,\ldots,2m-1 .$$

Observe-se que esta estimativa depende só da hipótese $|x_o|>8d_o$.

Obtem-se então a partir de (67), (75) e (76):

$$|f_a(x_o,\rho,\theta)| \leq$$

$$\leq C'\rho^{2m}|B|^{-1/p}(d_o/|x_o|)^{2m+n} + C''|B|^{-1/p}\ d_o^{2m+n}|x_o|^{-n} \sum_{k=0}^{2m-1} (\rho/|x_o|)^k \leq$$

$$\leq C\ \rho^{2m}\ |B|^{-1/p}(d_o/|x_o|)^{2m+n} \quad ,$$

o que demonstra (69) no caso $\rho > 10|x_o|$.

Demonstração de (70): Seja $10^{-1}|x_o| < \rho < 10|x_o|$; $|x_o+\rho\theta| < 2d_o$, e de novo consideremos separadamente cada um dos termos em (67). Se n é par e $2m-n \geq 0$, o primeiro termo J expressa-se como

$$J = \int h(|x_o+\rho\theta-y|)a(y)dy = \int |x_o+\rho\theta-y|^{2m-n}\ \lg|x_o+\rho\theta-y|a(y)dy \quad .$$

Neste caso $|x_o+\rho\theta-y|^{2m-n}$ é um polinômio em y de grau 2m-n, e, por ter a(y) os seus primeiros 2m-1 momentos nulos, podemos escrever

$$J = \int |x_o+\rho\theta-y|^{2m-n}(\lg|x_o+\rho\theta-y| - \lg|x_o|)\ a(y)dy \quad .$$

Além disto, $|x_o+\rho\theta-y|/|x_o| \leqq 3d_o/8d_o < 1$, e então

$$|J| \leqq |B|^{-1/p}\int_{|y|\leqq d_o} |x_o+\rho\theta-y|^{2m-n}\ \lg(|x_o|/|x_o+\rho\theta-y|)dy \leqq$$

$$\leqq \mu^{-1}|B|^{-1/p}\int_{|x_o+\rho\theta-y|\leqq 3d_o} |x_o+\rho\theta-y|^{2m-n-\mu}|x_o|^{\mu}dy \leqq$$

$$\leqq C\ |B|^{-1/p}\ d_o^{2m}(|x_o|/d_o)^{\mu} \quad ;\ 0<\mu<1 \ .$$

Se n é ímpar ou $2m-n < 0$, obtemos

$$|J| = |\int |x_o+\rho\theta-y|^{2m-n}\ a(y)dy| \leqq C\ |B|^{-1/p}\ d_o^{2m} \quad ,$$

e por ser $|x_o|/d_o > 1$, então em ambos os casos é válido:

(77) $$|J| \leqq C\ |B|^{-1/p}\ d_o^{2m}(|x_o|/d_o)^{\mu};\ \mu \text{ qualquer com } 0<\mu<1 \ .$$

Para os outros termos em (67) é válido o cálculo da estimativa para I_k obtida em (76). Obtem-se então a partir de (67), (76) e (77):

$$|f_a(x_o,\rho,\theta)| \leqq$$

$$\leqq C|B|^{-1/p}|x_o|^{\mu}\ d_o^{2m-\mu} + C'|B|^{-1/p}\ d_o^{2m+n}|x_o|^{-n} \sum_{k=0}^{2m-1} (\rho/|x_o|)^k \leqq$$

$$\leqq C|B|^{-1/p}(|x_o|^{\mu}\ d_o^{2m-\mu} + \rho^{2m}(d_o/|x_o|)^{2m+n}) \quad ; \quad 0<\mu<1 \ ,$$

o que prova (70).

Demonstração de (71): Similarmente à demonstração de (69), caso $\rho \geq 10|x_o|$, para o primeiro termo de (67) temos

$$J = \int h(|x_o+\rho\theta-y|)\ a(y)dy \ = J_1 + J_2 \qquad ,$$

com $J_2 = 0$ e J_1 que satisfaz (74). Além disso, como $|x_o+\rho\theta-ty| \geq |x_o+\rho\theta|/2$, a partir de (74) tem-se

$$|J| = |J_1| \leq C\ |B|^{-1/p}\ d_o^{2m+n}|x_o+\rho\theta|^{-n} \qquad .$$

Nos termos restantes vale (76); então temos

$$|f_a(x_o,\rho,\theta)| \leq C\ |B|^{-1/p}\ d_o^{2m+n}|x_o+\rho\theta|^{-n} \ +$$

$$+\ C'|B|^{-1/p}\ d_o^{2m+n}|x_o|^{-n} \sum_{k=0}^{2m-1} (\rho/|x_o|)^k \ \leq$$

$$\leq C\ |B|^{-1/p}(|x_o+\rho\theta|^{-n}\ d_o^{2m+n} + \rho^{2m}(d_o/|x_o|)^{2m+n}) \quad ,$$

o que demonstra (71).

Demonstremos agora (72): Dado $R>0$ qualquer, consideremos

$D_1 = \{z=\rho\theta \in B(0,R):\ |z| = \rho \leq 10^{-1}|x_o| \ \text{ ou } \rho \geq 10|x_o|\}$.

$D_2 = \{z=\rho\theta \in B(0,R):\ 10^{-1} < \rho < 10|x_o|; |x_o+z| < 2d_o\}$.

$D_3 = \{z=\rho\theta \in B(0,R):\ 10^{-1} < \rho < 10|x_o|; |x_o+z| \geq 2d_o\}$.

Como $q \geq 1$, pode-se escrever:

$$\text{(78)} \qquad I(R) = R^{-2m}(R^{-n}\int_{|z|\leq R}|f_a(x_o,\rho,\theta)|^q dz)^{1/q} \ \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{3} R^{-2m}\ (R^{-n}\int_{D_i}|f_a(x_o,\rho,\theta)|^q dz)^{1/q} = \sum_{i=1}^{3} I_i(R) \quad .$$

A partir de (69), levando-se em conta as condições

$d_o/|x_o| < 1/8$ e $2m+(n/q)-\mu < 2m+n$, tem-se

$$I_1(R) \leqq C\ |B|^{-1/p}(d_o/|x_o|)^{2m+n} \leqq C\ |B|^{-1/p}(d_o/|x_o|)^{2m+(n/q)-\mu} \quad .$$

A partir de (70), observando que em D_2 temos a condição

$|x_o| < 10\rho \leqq 10R$, obtem-se

$$I_2(R) \leqq C\ R^{-2m}|B|^{-1/p}|x_o|^{\mu}\ d_o^{\,2m-\mu}(R^{-n}\int_{|x_o+z|<2d_o} dz)^{1/q} \; +$$

$$+ \; C\ R^{-2m}|B|^{-1/p}\ R^{2m}(d_o/|x_o|)^{2m+n}\ (R^{-n}\int_{|z|\leqq R} dz)^{1/q} \; \leqq$$

$$\leqq C|B|^{-1/p}|x_o|^{-2m-(n/q)+\mu}\ d_o^{\,2m+(n/q)-\mu} + C|B|^{-1/p}(d_o/|x_o|)^{2m+n} \leqq$$

$$\leqq C|B|^{-1/p}(d_o/|x_o|)^{2m+(n/q)-\mu} \quad .$$

Para estimar I_3, usando (71) e chamando

$D = \{2d_o \leqq |x_o+z| \leqq 11|x_o|\}$, temos

$$I_3(R) \leqq C|B|^{-1/p}R^{-2m}\ d_o^{\,2m+n}(R^{-n}\int_D |x_o+z|^{-nq}dz)^{1/q} \; +$$

$$+ \; C|B|^{-1/p}(d_o/|x_o|)^{2m+n} \quad .$$

Se $q = 1$, temos:

$$I_3(R) \leqq C|B|^{-1/p}(d_o/R)^{2m+n}\ \lg(11|x_o|/2d_o) \; +$$

$$+ \; C|B|^{-1/p}(d_o/|x_o|)^{2m+n} \; \leqq$$

$$\leq C|B|^{-1/p}(d_o/|x_o|)^{2m+n-\mu} + C|B|^{-1/p}(d_o/|x_o|)^{2m+n} \leq$$

$$\leq C|B|^{-1/p}(d_o/|x_o|)^{2m+n-\mu} \quad .$$

Se $q > 1$, considerando que $n(1-q) < 0$, temos

$\int_D |x_o+z|^{-nq} dz \leq C\, d_o^{\,n(1-q)}$, e portanto

$$I_3(R) \leq C|B|^{-1/p}\, R^{-2m-(n/q)}\, d_o^{\,2m+(n/q)} + C|B|^{-1/p}(d_o/|x_o|)^{2m+n} \leq$$

$$\leq C|B|^{-1/p}(d_o/|x_o|)^{2m+(n/q)-\mu} \quad ; \quad 0<\mu<1 \; .$$

Então, fazendo $x = x_o+z$ na definição de $f_a(x_o,z)$ em (66) e levando em conta (78) e as estimativas obtidas para $I_i(R)$, $i=1,2,3$, obtemos, sob a condição $|x_o| > 8d_o$, que:

$$n(f_a;x_o) = \sup_{R>0} R^{-2m}|f_a|_{q,B(x_o,R)} = C \sup_{R>0} I(R) \leq$$

$$\leq C|B|^{-1/p}(d_o/|x_o|)^{2m+(n/q)-\mu} \quad , \; 0<\mu<1.$$

Observando além disto que a constante C obtida em cada uma das estimativas enteriores é independente do p-átomo $a(x)$ em R^n, fica provado (72).

Continuando a demonstração de (65) consideremos agora o caso $|x_o| \leq 8d_o$, e provemos que em tal caso se satisfazem as seguintes condições:

(79) Dado $\alpha \in N^n$ tal que $|\alpha| = 2m$, a função

$$K_\alpha(z) = ((2m)!/\alpha!)\ (\partial^\alpha h)(z)$$

é um núcleo integral singular.

(80) $$|f_a(x_o,\rho,\theta)| \leq C\ \rho^{2m}(|B|^{-1/p} + \sum_{|\alpha|=2m} K_\alpha^*(a)(x_o)) \quad ; \quad (|x_o| \leq 8d_o) \quad ;$$

onde K_α^* é o operador maximal do núcleo K_α considerado em (79).

(81) $$n(f_a;x_o) \leq C(|B|^{-1/p} + \sum_{|\alpha|=2m} K_\alpha^*(a)(x_o)) \quad ; \quad (|x_o| \leq 8d_o) \quad ,$$

com a constante C independente do p-átomo a(x).

Para provar (79) observamos que $K_\alpha(z)$ é homogênea de grau $-n$, e de classe C^∞ sobre a esfera unitaria. Vejamos agora que

$$A_\alpha = \int_{|z|=1} K_\alpha(z)dz = 0 \quad , \quad |\alpha| = 2m.$$

Dados θ em R^n, ρ em R, tais que $|\theta|=1$, $0 \leq \rho < 1$, seja

$$F(\rho\theta) = |\Sigma_1|^{-1} \int_{|z|=1} h(|z+\rho\theta|)dz \quad .$$

Se Γ é uma rotação em R^n tal que $\Gamma(e_1) = \theta$, tem-se

$$F(\rho\theta) = |\Sigma_1|^{-1} \int_{|z|=1} h(|z+\rho\Gamma(e_1)|)dz =$$
$$= |\Sigma_1|^{-1} \int_{|y|=1} h(|y+\rho e_1|)dy = F(\rho e_1) \quad ,$$

e portanto $F(\rho\theta)$ é uma função radial $f(\rho)$. Então, aplicando a fórmula de Pizetti e considerando que $h(|z|)$ é uma solução de

$\Delta^m g = 0$ para $z \neq 0$, temos:

$$f(\rho) = |\Sigma_1|^{-1} \int_{|\theta|=1} (|\Sigma_1|^{-1} \int_{|z|=1} h(|z+\rho\theta|)dz)\, d\theta =$$

$$= |\Sigma_1|^{-1} \int_{|z|=1} \sum_{k=0}^{m-1} C_k\, \rho^{2k}\, \Delta^k h(z)dz \quad ,$$

o que demonstra que $f(\rho)$ é um polinômio de grau menor ou igual a $2m-2$, e que portanto $(d^{2m}/d\rho^{2m})f = 0$. Então,

$$|\Sigma_1|^{-1} \int_{|z|=1} (d^{2m}/d\rho^{2m})(h(z+\rho\theta))dz = 0 \quad , \text{ para todo } \rho,$$

e em particular para $\rho = 0$. Isto é,

$$\sum_{|\alpha|=2m} A_\alpha \theta^\alpha = 0 \quad , \text{ para todo } \theta \text{ com } |\theta| = 1 \, ,$$

de onde resulta $A_\alpha = 0$ para todo α com $|\alpha|=2m$, o que prova (79).

Demonstremos (80): Considerando a expressão em (73) temos

$$f_a(x_o,\rho,\theta) = \int_{|x_0-y|<2\rho} U(x_o,\rho,\theta,y)a(y)dy \; +$$
$$+ \int_{|x_o-y|\geq 2\rho} U(x_o,\rho,\theta,y)a(y)dy = I_1 + I_2 \; .$$

Aplicando a fórmula de Taylor nos primeiros $2m-1$ termos de (73), com respeito a ρ, resulta

(82) $$I_1 = \int_{|x_o-y|<2\rho} \{ (\rho^{2m-1}/(2m-2)!) \; .$$

$$\cdot \int_0^1 (d^{2m-1}/ds^{2m-1})h(x_o+s\theta-y)\big|_{s=t\rho}(1-t)^{2m-2}dt\} \; a(y)dy \; -$$

$$- \int_{|x_o-y|<2\rho} (\rho^{2m-1}/(2m-1)!)(d^{2m-1}/d\rho^{2m-1})h(x_o+\rho\theta-y)|_{\rho=0}\ a(y)dy \quad .$$

Por ser $|x_o+t\rho\theta-y| < 3\rho$, e pela homogeneidade das derivadas de h de ordem maior que 2m-n, temos

$$|I_1| \leq C\ \rho^{2m-1} \int_0^1 \int_{|x_o+t\rho\theta-y|<3\rho} |x_o+t\rho\theta-y|^{-n+1}\ |a(y)|dy\ \ dt\ +$$

$$+ C\ \rho^{2m-1} \int_{|x_o-y|<2\rho} |x_o-y|^{-n+1}\ |a(y)|dy \leq$$

$$\leq C\ \rho^{2m-1}\ |B|^{-1/p} \int_{|y|<3\rho} |y|^{-n+1}\ dy \quad .$$

Isto é:

(83) $$|I_1| \leq C\ \rho^{2m}\ |B|^{-1/p} \quad .$$

Para estimar I_2, somando-se e subtraindo-se do integrando a expressão

$$(d^{2m}/d\rho^{2m})h(x_o+\rho\theta-y)|_{\rho=0}\ (\rho^{2m}/(2m)!)\ a(y) \quad ,$$

resulta

$$I_2 = \int_{|x_o-y|\geq 2\rho} \{U(x_o,\rho,\theta,y) - (d^{2m}/d\rho^{2m})h(x_o+\rho\theta-y)|_{\rho=0} \cdot$$

$$\cdot\ (\rho^{2m}/(2m)!)\}a(y)\ dy \quad +$$

$$+ \int_{|x_o-y|\geq 2\rho} (d^{2m}/d\rho^{2m})h(x_o+\rho\theta-y)|_{\rho=0}\ (\rho^{2m}/(2m)!)a(y)\ dy \quad =$$

$$= \int_0^1 \int_{|x_o-y|\geq 2\rho} \{((2m+1)/(2m+1)!)\rho^{2m+1} \, .$$

$$. \ (d^{2m+1}/ds^{2m+1})h(x_o+s\theta-y)|_{s=t\rho}(1-t)^{2m-1}\} \ a(y) \ dy \ +$$

$$+ \rho^{2m} \int_{|x_o-y|\geq 2\rho} (\sum_{|\alpha|=2m} (\alpha!)^{-1}(\partial^\alpha h)(x_o-y)\theta^\alpha) \ a(y)dy = I_2' + I_2'' \quad .$$

Em I_2', por ser $|x_o+t\rho\theta-y| \geq \rho$, tem-se

$$(84) \qquad |I_2'| \leq C \ \rho^{2m+1}|B|^{-1/p} \int_{|y|\geq\rho} |y|^{-(n+1)}dy \ \leq$$

$$\leq C \ \rho^{2m}|B|^{-1/p} \qquad .$$

Ademais, pela condição (79) resulta

$$(85) \qquad |I_2''| \leq (\rho^{2m}/(2m)!) \sum_{|\alpha|=2m} \left|\int_{|x_o-y|\geq 2\rho} K_\alpha(x_o-y)a(y)dy\right| \ \leq$$

$$\leq (\rho^{2m}/(2m)!) \sum_{|\alpha|=2m} K_\alpha^*(a)(x_o) \qquad .$$

Então, a partir de (82), (83), (84) e (85), obtemos (80).

A condição (81) é consequência imediata de (80), e da independência com relação a $a(x)$ das constantes C obtidas nas estimativas anteriores.

Completemos agora a demonstração de (65). A partir de (72) e (81) e levando em consideração que cada uma das funções $f_{a,x_o}(z) = f_a(x_o,z)$ definidas em (66) é um representante da classe A, deduz-se que

$$N(A;x_o) \leqq C|B|^{-1/p}(d_o/|x_o|)^{2m+(n/q)-\mu} \; ; \; 0<\mu<1, \text{ se } |x_o|>8d_o; \text{ e}$$

$$N(A;x_o) \leqq C\,(|B|^{-1/p} + \sum_{|\alpha|=2m} K_\alpha^*(a)(x_o)) \quad , \text{ se } |x_o|\leqq 8d_o \; .$$

Elevando à potencia p e integrando, temos

$$\int N(A;x_o)^p dx \leqq C|B|^{-1/p} \int_{|x|>8d_o} (d_o/|x|)^{(2m+(n/q)-\mu)p} dx \; +$$

$$+ \; C|B|^{-1} d_o^{\,n} + C \sum_{|\alpha|=2m} \int_{|x|\leqq 8d_o} (K_\alpha^*(a)(x))^p dx \; =$$

$$= I_1 + C\,|B|^{-1} d_o^{\,n} + I_2 \; .$$

Na primeira integral, observando que para μ suficientemente pequeno vale $p > n(2m+(n/q)-\mu)^{-1} > n(2m+(n/q))^{-1}$, e lembrando que $B = B(0,d_o)$, tem-se

$$I_1 \leqq C|B|^{-1} d_o^{\,n} \int_{|z|>8} |z|^{-(2m+(n/q)-\mu)p} dz \leqq C \quad ,$$

com C independente de A .

Em I_2, usando a desigualdade de Hölder com $2/p$ e $2/(2-p)$; e por ser K_α^* um operador integral singular, temos

$$I_2 \leqq \sum_{|\alpha|=2m} \left(\int_{|x|\leqq 8d_o} (K_\alpha^*(a)(x))^2 dx\right)^{p/2} \left(\int_{|x|\leqq 8d_o} dx\right)^{(2-p)/2} \leqq$$

$$\leqq \sum_{|\alpha|=2m} C|B|^{-1+(p/2)+(2-p)/2} = C', \; C' \text{ independente de A.}$$

Obtem-se então $\int N(A;x)^p dx \quad C$, com C independente de A, com o qual fica provado (65) e também o Lema (64).

Para concluir a demonstração do Teorema 2, seja agora F uma classe em $\mathcal{H}^p$, e vejamos primeiramente que $\Delta^m F$ está em $H^p(R^n)$. Pelo Teorema 1, F pode ser escrito em $\mathcal{H}^p$ como

$$F = \Sigma_i\ \mu_i A_i \ ; \quad \Sigma_i |\mu_i|^p < \infty \ ; \quad A_i \text{ p-átomo em } E^q_{2m-1};\ i=1,2,\ldots;$$

além disso, existem constantes positivas c_1 e c_2 tais que

$$(86) \qquad c_1 ||F||^p_{\mathcal{H}^p} \leq \Sigma_i |\mu_i|^p \leq c_2 ||F||^p_{\mathcal{H}^p} \quad .$$

Pelo Lema (63), existe uma constante positiva c tal que $\Delta^m(cA_i) = b_i$, $i=1,2,\ldots$, é um p-átomo em R^n..Ademais, pelo Lema (62), o operador Δ^m é continuo em $\mathcal{H}^p$, e podemos escrever

$$\Delta^m F = \Delta^m(\Sigma_i \mu_i A_i) = \Sigma_i \mu_i \Delta^m A_i = \Sigma_i (c^{-1}\mu_i) b_i \quad .$$

A partir da definição de $H^p(R^n)$ obtem-se então que $\Delta^m F = \phi$ é um elemento de $H^p(R^n)$, e que existem constantes positivas c_3 e c_4 tais que

$$(87) \qquad c_3 ||\phi||^p_{\mathcal{H}^p} \leq \Sigma_i |c^{-1}\mu_i|^p \leq c_4 ||\phi||^p_{\mathcal{H}^p} \quad .$$

Seja agora F em $\mathcal{H}^p$ com $\Delta^m F = 0$. Se f é um representante de F que satisfaz $n(f;x_o) = N(F;x_o)$ para um certo ponto x_o, pelo Lema (12) deduz-se que f é um polinômio de grau menor ou igual a 2m-1. Portanto, F é a classe nula em E^q_{2m-1} e o operador Δ^m é injetivo.

Para demonstrar a sobrejetividade consideremos ϕ em $H^p(R^n)$. ϕ é da forma

$$\phi = \Sigma_i \lambda_i a_i \quad ; \quad \Sigma_i |\lambda_i|^p < \infty \quad , \ a_i(x) \text{ p-átomo em } R^n, \ i=1,2,\ldots$$

Seja, ainda, $h_{a_i}(x) = h_i(x) = (h*a_i)(x)$ a solução da equação $\Delta^m u = a_i$, considerada no Lema (64), e seja A_i a classe de $h_i(x)$ em E^q_{2m-1}, $i=1,2,\ldots$.

Pela condição (65) tem-se

$$\int N(A_i;x)^p dx \leq C \quad , \text{ com C independente de i.}$$

Além disto, a partir da condição $\Sigma|\lambda_i|^p < \infty$ e do Lema (11) obtemos que a série $\Sigma_i \lambda_i A_i = F$ converge em $\mathcal{H}^p$, e usando a continuidade de Δ^m segundo o Lema (62), deduzimos então que

$$\Delta^m F = \Delta^m(\Sigma_i \lambda_i A_i) = \Sigma_i \lambda_i \Delta^m h_i = \Sigma_i \lambda_i a_i = \phi \quad ,$$

o que prova que Δ^m é sobrejetivo.

A partir de (86) e (87) obtem-se constantes positivas c', c" tais que

$$c'||F||_{\mathcal{H}^p} \leq ||\phi||_{H^p} \leq c''||F||_{\mathcal{H}^p} \quad ,$$

com o que conclui-se a demonstração do Teorema 2.

R E F E R Ê N C I A S

(1) A.P. Calderón, Estimates for singular integral operators in terms of maximal functions, Studia Math. 44 (1972), 563-582.

(2) R. R. Coifman, A real variable characterization of H^p, Studia Math., 51 (1974), 267-272.

(3) I.M. Guelfand et G.E. Chilov, Les distributions, Tome I, Dunod, Paris, 1972.

(4) R. H. Latter, A characterization of $H^p(R^n)$ in terms of atoms, Studia Math. 42 (1978), 93-101.

(5) R. A. Macías and C. Segovia, A decomposition into atoms of distributions on spaces of homogeneous type, Advances in Math. (to appear).

(6) E. M. Stein, Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions, Princeton University Press, Princeton, 1970.