

A INTEGRAL ESTOCÁSTICA DE McSHANE
E SUA RELAÇÃO COM A DE YOUNG.

EDUARDO FERRANDIS BALLESTER

ORIENTADOR

DR. ROBERTO LEONARDO OSCAR CIGNOLI

Tese apresentada no Instituto de
Matemática, Estatística e Ciência
da Computação como requisito parcial
al para obtenção do título de Doutor
em Matemática.

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

DEDICATÓRIA

O mar azul mediterrâneo ancorou seus barcos e - um dia... A água descobriu que a montanha ia crescendo, que as - suas próprias asas já desciam pelos muros sobre a crina transpa-
rente das cachoeiras... Como uma lenta, morna, incansável...
Eterna onda marinha...

E durante esse tempo estranho...

Duas árvores...

Como velhos navios piratas ainda procurando os tesou-
ros ocultos do mar...

Duas árvores carregadas de sementes...

Gigantes e amigas, antigas e verdes ao mesmo tempo...
Duas árvores que surgiram por acaso, do silêncio, penetrando na
floresta com os ramos estendidos...

As minhas árvores se chamam...

Roberto Oscar Cignoli e Laurence C. Young...

Aos meus queridos, profundos, simples...
Inesquecíveis mestres.

INDICE

	PAGINA
0. INTRODUÇÃO	1
1. TEOREMAS DE APROXIMAÇÃO	21
Condições de mensurabilidade	23
Teoremas de aproximação	25
2. APROXIMAÇÃO DE PROCESSOS MEDIANTE PARTIÇÕES	49
Funções semicontínuas e funções integráveis	49
Partições Itô-retardadas	56
Aproximação da integral com partições Itô-retardadas	60
Aproximação de processos com partições	63
3. UM TEOREMA DE EXTENSÃO	79
O teorema e as propriedades da extensão	80
A metrificação da extensão	97
4. APLICAÇÕES DO TEOREMA DE EXTENSÃO I:	
A INTEGRAL SIMPLES DE McSHANE	108
Existência e propriedades	109
Aproximações da integral	120
Versões estritas e equivalentes	127
5. APLICAÇÕES DO TEOREMA DE EXTENSÃO II:	
INTEGRAIS INDEFINIDAS E ITERADAS	132
Integrais indefinidas	133
Variação quadrática de um processo	138
Variação conjunta de processos	140
Integrais iteradas	142
Aproximação das integrais iteradas mediante partições	145
6. ADAPTAÇÃO DA FORMULA DE ITÔ	153
7. COMPARAÇÃO DAS INTEGRAIS DE McSHANE E DE YOUNG	183
Funções estimadoras generalizadas	183
A função Ψ e as suas propriedades	187
Quase-martingalas	201
Definição e existência da integral	205
Definição alternativa	209
REFERENCIA BIBLIOGRAFICA	217

INTRODUÇÃO

A PAISAGEM

Porque as vezes as arvores não deixam ver o bosque, começaremos por descrever a paisagem...

O *Cálculo Estocástico* é uma área matemática em formação . Estuda a solução de equações diferenciais e equações integrais estocásticas, ou seja , equações em que os coeficientes e as variáveis consideradas não são constantes ou funções determinísticas senão variáveis aleatórias e processos estocásticos...

A teoria está motivada pela necessidade de uma formulação matemática mais rigorosa dos fenômenos físicos, pois, em realidade , na equação que pretende explicar um fenômeno, os distintos elementos são fruto de experiências que, em geral, proporcionam resultados a-

leatórios com uma certa lei de probabilidade...

Os alimentos deste ramo emergente da matemática são: a teoria dos processos estocásticos, a teoria da probabilidade e da medida e a análise funcional...

A solução de uma equação estocástica é, por sua vez, um processo estocástico...

Desta forma, o *Cálculo Estocástico*, além de proporcionar soluções a problemas físicos e propor novos problemas à análise funcional, veio enriquecer a própria teoria dos processos estocásticos e de outras áreas estatísticas direta ou indiretamente relacionadas com os processos: a teoria dos jogos, o controle estocástico ...

Ainda mais, como disse Laurence C. Young, poderia muito bem acontecer que as idéias subjacentes às técnicas desenvolvidas pelos probabilistas encontrassem finalmente, suas aplicações mais profundas na solução de famosos problemas da análise matemática clássica ... E de fato, como se destaca na literatura incipiente - McKean(17), McShane(21), Friedman (8)... - o *Cálculo Estocástico* já abriu a possibilidade de estudar probabilisticamente equações determinísticas em derivadas parciais...

É presumível que o *Cálculo Estocástico* seja, talvez em um futuro próximo, o cálculo usual da mesma forma que a álgebra abstrata (ou moderna) e a lógica matemática são, hoje em dia, a única álgebra e a única lógica que conhecemos...

A ferramenta básica, celular, do cálculo estocástico é a integral estocástica:

$$(I.1) \quad \int_D df dz$$

onde D é um intervalo real, f e Z processos estocásticos. A diferencial se define a partir da integral por inversão e uma adaptação da regra da cadeia possibilita o ulterior desenvolvimento... Esta adaptação levará sempre o nome de seu genial autor, K. Itô(13), a quem corresponde, junto a Norbert Wiener(30), o mérito de haver iniciado a teoria...

A TRILHA

Uma versão histórica exhaustiva da integral estocástica pode ser vista por exemplo na tese de Fernandez Vivas (7)...

Nos deteremos em dois dos núcleos dessa história.

Nos trabalhos de Wiener (30) e Itô (12), o processo integrador Z é o Movimento Browniano...

Este processo, formalizado por Einstein (6) e Wiener (32) apresenta três propriedades estocásticas fundamentais: é uma martingala, seus incrementos $Z_{t+s} - Z_t$ para $s > 0$ têm a distribuição de Gauss $N(0, \sigma^2 = s)$ e esses incrementos quando os intervalos não se interceptam são variáveis aleatórias independentes...

Tratando-se de um processo estocástico destinado a explicar, em seu conjunto, o ir e vir aleatório de certos fenômenos naturais, o comportamento absurdo, individual de cada trajetória do processo - a não diferenciabilidade - é o que menos interessa... Inclusive porque estes impossíveis microscópicos estão provocados pelas propriedades macroscópicas mencionadas... Porém, a variação ilimitada e a não diferenciabilidade das trajetórias do Movimento Browniano descartam a possibilidade de definir uma integral no sentido ordinário de Reimann - Stieltjes tomando cada trajetória como função integrador...

Wiener considerava integrandos determinísticos e define a integral para:

$$f \in C_R^1[0,1] \quad , \quad \text{como;}$$

$$\left[\int_0^1 f \, dz \right] (w) = f(1) Z(1,w) - f(0) Z(0,w) - \int_0^1 f'(t) z(t,w) dt$$

obtendo-se assim uma variável aleatória. E a aplicação:

$$\mathcal{L}^2[0,1] \supset C_R^1[0,1] \rightarrow \mathcal{L}^2(\Omega)$$

é uma isometria que, pela densidade de $C_R^1[0,1]$, permite estender a definição a $\mathcal{L}^2[0,1] \dots$

A teoria de Itô desenvolve a integração de processos esto-

cásticos com relação ao Movimento Browniano...

Dado um intervalo real D e um espaço probabilístico Ω com uma σ -álgebra de sucessos $\mathcal{Q}$ e uma probabilidade P , definir um processo como uma função:

$$f : D \times \Omega \rightarrow R$$

tal que: para todo $t \in D$ a função f_t definida por:

$$f_t(w) = f(t, w)$$

é uma variável aleatória, é equivalente a dizer que o processo, considerado como função que assume valores no produto cartesiano infinito R^D ,

$$f : \Omega \rightarrow R^D,$$

com a definição:

$$f(w)(t) = f_w(t) = f(t, w),$$

é mensurável com respeito a $\mathcal{Q}$ e a σ -álgebra de borelianos B^D de R^D (*).

Se considerarmos o intervalo D dotado de uma medida m_g de Lebesgue - Stieltjes gerada por uma função de distribuição g , poderemos considerar processos $f \in f^p(m_g \otimes P)$, ou seja de potência p -integrável (com $1 \leq p < \infty$) com relação a medida produto $m_g \otimes P$ sobre o espaço $D \times \Omega$

Considerando g como a identidade 1 , e $m_g = m_1$ a medida de Lebesgue sobre D , a integral de Itô tenta estender a isometria de Winer ao espaço $f^2(m_1 \otimes P)$...

Para prolongar essa isometria é suficiente a independência estocástica entre as variáveis aleatórias f_t e $(Z_v - Z_u)$, quando: $t, u, v \in D, t \leq u \leq v$...

Pelo caráter ortogonal dos incrementos do Movimento Browniano, esta independência está garantida quando f_t é mensurável com respeito a σ -álgebra $\mathcal{F}_t$ gerada pelo Movimento Browniano Z até,

(*) B^D defini-se como $B^D = \sigma\{P_{\{t_1, \dots, t_n\}}^{-1}(B^n)\}$, onde $n, B^n; t_1,$

..., t_n são variáveis, n é natural, $n \geq 1$, B^n é um boreliano

de R^n , $t_1, \dots, t_n \in D, t_1 < t_2 < \dots < t_n$ e $P_{\{t_1, \dots, t_n\}}$ a

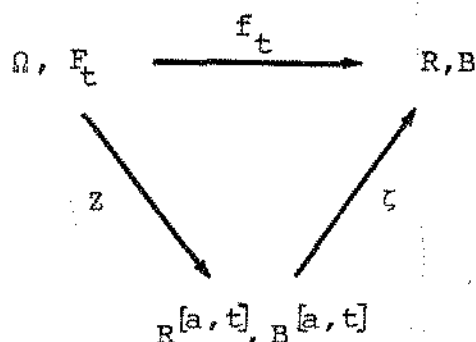
projeção de R^D em R^n definida por:

$$\forall \zeta \in R^D, P_{\{t_1, \dots, t_n\}}(\zeta) = (\zeta(t_1), \dots, \zeta(t_n))$$

e inclusive o instante $t(*)$...

Esta característica pode ser formalizada dizendo-se que f é um processo adaptado, ou que se adapta, à família crescente $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in D}$ de σ -subálgebras de $\mathcal{Q}$.

Esta adaptação é equivalente (ver Yeh(33), capítulo I) à existência de uma função mensurável $\zeta : R^{[a,t]} \rightarrow R$ tal que o diagrama:



é comutativo...

Ou seja:

$$f_t(w) = f(t, w) = \zeta(Z_w \downarrow [a, t])$$

(*) A σ -álgebra gerada por um processo define-se como a mínima σ -álgebra de $\mathcal{Q}$ com respeito a qual as variáveis do processo são mensuráveis.

sendo $Z_w \downarrow [a, t]$ a restrição da trajetória Z_w do Movimento Browniano até o instante t ...

Em outras palavras, a trajetória f_w do processo integrando f no instante t , deve ser função do passado da correspondente trajetória do Movimento Browniano... Ou, como denomina Laurence C. Young, devemos considerar processos *indexados pelo passado* ...

De uma forma abstrata podemos formalizar esta dependência admitindo que os processos f e Z adaptem-se a uma família não decrescente $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in D}$ de σ -subálgebras de $\mathcal{Q}$...

Para possibilitar a pertinência a $L^P(m_1 \otimes P)$ necessitamos além disso uma mensurabilidade global com relação a $M_1[a, b] \otimes \mathcal{Q}$, sendo $M_1[a, t]$ os Lebesgue - mensuráveis no intervalo $[a, t]$...

A adaptação e a mensurabilidade global estão implícitas quando supomos que a restrição de f ao intervalo $[a, t]$ seja mensurável com respeito a σ -álgebra produto $M_1[a, t] \otimes \mathcal{F}_t$.

Esta última condição de mensurabilidade, considerada entre outros por Yeh (33) e Meyer - Dellacherie (4), é menos geral que as anteriores... Mas, como veremos no capítulo I, desde o ponto de vista da construção da integral estocástica, este *menos* significa exatamente *quase nada* ou *nada mais, quase em toda parte* ...

Resumindo: Chamando M a esta condição de mensurabilidade (ou bem a adaptação e mensurabilidade global), a integral de Itô estabelece uma isometria entre:

$$(I.2) \quad \int : L^2(m_1 \otimes P)_M \rightarrow L^2(P)$$

sendo $\mathcal{L}^2(m_1 \otimes P)_M = \{f \in \mathcal{L}^2(m_1 \otimes P) \mid f \text{ verifica } M\}$.

Itô define a integral para processos em escada e estende a definição a $f \in \mathcal{L}^2(m_1 \otimes P)_M$ como limite, em $\mathcal{L}^2(P)$, de uma sucessão de integrais de processos em escada f_n que convergem até f em $\mathcal{L}^2(m_1 \otimes P)_M \dots$

A isometria (I.2) generaliza a integral estocástica de Wiener que resulta ao particularizá-la para integrandos determinísticos, ou seja, processos do tipo $f(t, \omega) = \alpha(t) \dots$ Por outro lado pode estender-se, como limite em probabilidade, ao espaço de processos cujas trajetórias, quase em toda parte, são de quadrado integrável. Concretamente para os processos f que, além da condição M , verificam que:

$$(I.3) \quad P \left[\int_D f^2(s, \omega) ds < \infty \right] = 1$$

A partir da integral de Itô, os esforços de generalização se polarizam em duas direções:

- Considerando processos integrandos f , assumindo valores em espaços de Hilbert ou de Banach... Nesta linha estão os trabalhos de Cabaña (1), Kunita e Watanabe (13,14), Metivier (24), Fernandez Vivas (7)...

- Incorporando processos integradores Z mais gerais que o Movimento Browniano...

Vamos nos deter nesta última vertente que é o segundo núcleo de nossa história e onde aparece o objeto de nossa tese.

Dizíamos que o Movimento Browniano apresenta três características estocásticas fundamentais: é uma martingala, com incrementos normalmente distribuídos e independentes... Dentre estas três propriedades a mais decisiva é a ortogonalidade dos incrementos... Que seja uma martingala deduz-se a partir de que os incrementos são centrados e independentes. E essa independência determina o tipo de distribuição; de fato, o importante teorema de Baxter (ver Yeh(33), capítulo III) coloca em evidência toda essa potência - e essa fragilidade - dos processos brownianos: qualquer processo com incrementos ortogonais e com trajetórias contínuas é um Movimento Browniano Generalizado cujos incrementos se distribuem normalmente...

Assim pois, a generalização trata de alterar a independência dos incrementos de Z : substituir essa ortogonalidade por uma *quase-ortogonalidade* cada vez mais flexível...

Edward J. McShane [(19) e (21)] considera condições para a distribuição condicionada dos incrementos de Z , que são verificadas pelo Movimento Browniano e os processos de Poisson... Concretamente:

$$(I.4) \quad \left. \begin{aligned} |E[(Z_t - Z_s)/\mathcal{F}_s]| &\leq g(t) - g(s) \\ E[(Z_t - Z_s)^2/\mathcal{F}_s] &\leq g(t) - g(s) \end{aligned} \right\} \quad \forall s, t \in D, s < t$$

sendo g monótona não decrescente.

Se consideram integrandos $f \in \mathcal{L}^2(m_g \otimes P)_M$ que como funções:

$$f : D \rightarrow \mathcal{L}^2(P) ,$$

são contínuas e limitadas quase em toda parte com relação a m_g .

A integral se define como limite em $\mathcal{L}^2(P)$ de certas somas de Reimann *retardadas*... McShane flexibiliza ainda mais o conceito de *soma de Reimann* considerando partições de D cujo diâmetro variável está dominado não por um valor fixo senão por uma função positiva quase em toda parte ... Além disso os intervalos da partição não precisam cobrir totalmente o intervalo D podendo deixar a descoberto porções de medida pequena... Finalmente os pontos de valoração do integrando devem estar à esquerda, no máximo na origem, de cada subintervalo da partição... McShane chama a estas partições, às somas e aos limites (ou integrais) correspondentes de *Itô - retardadas* ... E demonstra que, quando g é linear, esta definição prolonga efetivamente a integral de Itô, permite considerar integrais *iteradas* e estabelecer uma generalização da fórmula de Itô e as suas aplicações (19-23)

Incorporando idéias de Kunita - Watanabe (15), a escola de Estrasburgo - Meyer, Dellacherie e outros - desenvolveu o conceito de semi-martingala local contornando certas condições de integralidade na definição de martingala... Meyer (26) estabeleceu a integração esto-

cástica com respeito a estas semi-martingalas locais e, recentemente, Protter (31), em trabalho ainda não publicado, estudou a relação de inclusão entre a integral de McShane, com g linear, e a integral de Meyer...

Independentemente, a partir de 1970, Laurence C. Young, continuando trabalhos por ele iniciados em 1936 (34-37) desenvolve a integral estocástica com respeito a processos que ele demonina quase-martingalas [(38) e (39)] ...

Essencialmente uma quase martingala é um processo adaptado que verifica as condições:

$$(I.5) \quad \left. \begin{aligned} |E[(z_t - z_s) / \mathcal{F}_s]| &\leq \alpha(g(t) - g(s)) \\ E[(z_t - z_s)^2 / \mathcal{F}_s] &\leq \beta(g(t) - g(s)) \end{aligned} \right\} \quad \forall s, t \in D, \quad s < t$$

onde, em principio, α, β são funções reais borelianas não negativas e g monótona não decrescente...

A integral se define com limite em $L^2(P)$ das integrais de certas médias em escada retardadas ...

As condições de quase-martingala do processo integrador não permitem mais, em geral, estabelecer a integral como uma função linear

contínua

$$\int : \mathbb{L}^2(m_g \otimes P)_M \rightarrow \mathbb{L}^2(P)$$

mas como uma função definida sobre determinados subconjuntos de $\mathbb{L}^2(m_g \otimes P)_M$. A integral existe quando as condições de quase-martingala e a variabilidade em $\mathbb{L}^2(P)$ dos incrementos do processo integrador se relacionam com certos pares (ζ, Ψ) de funções *estimadoras*.

Young proporciona outras definições equivalentes... Dentre elas, a mais criativa, obtém a integral como a derivada na origem da convolução

$$f * Z(t) = \int_D f_s Z_{t+s} ds$$

ou seja:

$$(I.6) \quad \int_D f dZ = (f * Z)'_{(0)}$$

Obviamente os processos integradores (I.4) considerados por McShane são quase-martingadas...

Mas estava por estudar a relação entre a integral de Mc Shane e a de Young, definidas, em princípio, por métodos diferentes...

A VEREDA

Que é, na realidade, a nossa veredazinha...

Tratamos de aprofundar a estrutura da integral estocástica ...

Concretamente no triângulo estabelecido pelas teorias de Itô, McShane e Young...

Supunhamos que o esquema linear da construção de Itô deveria preservar sua validade nas condições de McShane e de Young, proporcionando conclusões acerca da coerência entre ambas as integrais... Mais precisamente da inclusão da integral de McShane como caso particular da de Young...

Para isso nos vimos diante da necessidade de revisar criticamente os três métodos de definição começando pelos necessários teoremas de aproximação...

Proporcionaremos conteúdo a esta *carta de intenções* descrevendo o conjunto dos problemas parciais abordados...

- No capítulo I se estabelece um novo teorema de aproximação para processos estocásticos usando as *medias retardadas* definidas por Young como processos contínuos *aproximadores* ... Isto permite

prescindir da complexa formulação de Doob para as condições de mensurabilidade: adaptação e mensurabilidade global simultâneas com relação a $M_1 \otimes \mathbb{Q}$ e $M_g \otimes \mathbb{Q}$ (ver Doob (5), pág. 294 e 437).

Estas três condições de mensurabilidade se substituem pela única condição antes comentada, ou seja $f|_{[a,t]}$ mensurável com respeito a $M_g[a,t] \otimes \mathbb{F}_t$ que generaliza, para uma medida de Lebesgue - Stieltjes, o conceito de processo progressivo de Meyer...

- No capítulo II se interpretam as partições Itô - retardadas de McShane como formas de aproximação de um processo por processos em escada que verifiquem a condição de mensurabilidade...

- O capítulo III estabelece a metrificação da extensão da integral ao espaço de processos definido por (I.3) - para o caso de uma g monótona não decrescente...

- Caracteriza-se as propriedades de g que permitem a construção de integrais simples, integrais iteradas - que são apresentadas como caso particular de integrais simples - e a adaptação da formula de Itô, obtendo-se resultados mais sensíveis e gerais que os apresentados por McShane (capítulos IV, V e VI respectivamente).

- No capítulo VII estende-se a integral de Young assumindo condições mais gerais para as *funções estimadoras*... Com essa extensão identificam-se subespaços vetoriais de processos integráveis e demonstra-se a inclusão da integral de McShane como caso particular da de Young em condições muito gerais: com g contínua.

O estudo dessa relação discorre entrelaçando as novas funções estimadoras, uma desigualdade de McShane e o nosso teorema de

aproximação desenvolvido no primeiro capítulo com as condições que definem as quase-martingadas... Finalmente se estabelece uma nova demonstração da validade de (I.6) usando propriedades da integral de Bochner em lugar dos algoritmos de Young...

Este trabalho é o resultado de um seminário que, além do autor, contou com a participação decisiva dos Doutores Roberto Cignoli e Laurence C. Young: um espanhol, um argentino e um britânico fazendo matemática sob o céu brasileiro e com o suporte generoso da Universidade Estadual de Campinas...

Esperamos que o resultado seja útil para outros futuros usuários do Cálculo Estocástico...

SUMMARY

In this work we discuss more carefully the structure of stochastic integrals.

Concretely on the triangle established by the theories of Itô, McShane and Young...

We suppose that the linear scheme of the construction of Itô should still be valid under the conditions of McShane and of Young, providing conclusions concerning the coherence between the latter two of the integrals ...

For this we face the necessity of examining critically those three methods of definition beginning with the necessary theorems of approximation...

We will provide content to these wishes describing the set of broached partial problems...

- In chapter I a new approximation theorem for stochastic

processes is established using the retarded means defined by Young as continuous approximating processes... This permits us to forego the complex formulation of Doob for the conditions of measurability: adaptation and simultaneous measurability with respect to $M_1 \otimes \mathcal{Q}$, and $M_g \otimes \mathcal{Q}$ (see Doob, p.p. 294, 437).

These three measurability conditions will be substituted by the unique condition: $f|_{[a,t]}$ measurable with respect to $M_g[a,t] \otimes F_t$ which generalizes, for a Lebesgue - Stieltjes measure, the Meyers' concept of progressive processes.

- In Chapter II the McShanes' $It\hat{o}$ -related partitions are interpreted as forms of approximating a given process by step processes that verify the measurability condition...

- In chapter III it is established the metrification of the expansion of the integral to the space of processes defined by

$$P \left[\int_D f(s,w) dg(s) < \infty \right] = 1$$

for the case of a monotone nondecreasing g ...

- It is characterized the properties of g which permits the construction of simple integrals, iterated integrals (which are introduced as a particular case of simple integrals) and the adaptation of the formula of $It\hat{o}$, which leads to more simple and general results than those introduced by McShane (chapters IV, V and VI respectively).

- In chapter VII the integral of Young is extended by assuming more general conditions for his estimate functions... With this extension vectorial subspaces of integrable processes are identified and also being demonstrated the inclusion of the McShanes' integral as a special case of Youngs' under very general conditions : with a continuous g .

The study of this relation considers entwining the new estimate functions, one inequality of McShane and our approximation theorem developed in the first chapter with the conditions that define the Youngs' high-martingales...

Finally, when g is the identity function, using properties of the Bochner integral instead of the algorithms of Young, it is established a new proof for the expression of the integral as the convolution derivative

$$\int_D d f Z = (f * Z)'_{(0)}$$

being

$$f * Z(t) = \int_D f_s Z_{t+s} d s$$

This work is the result of a seminar which, beside the author, relied on the decisive participation of Dr. Roberto Cignoli and Dr. Laurence C. Young: a Spanish, an Argentinian and a British working

in Mathematics under the brazilian sky and with the generous support
of the State University of Campinas...

We hope that the results would be useful to other future
workers of stochastic calculus...

CAPITULO I

TEOREMAS DE APROXIMAÇÃO

Definições

Seja $D = [a, b]$:

$g : D \rightarrow \mathbb{R}$ monotona não decrescente e contínua em b .

Designaremos com M_g a σ -álgebra de conjuntos de D mensuráveis com relação a medida sobre D gerada pela função de distribuição g . Quando $g(x) = x$, ou seja $g = 1$, temos a medida de Lebesgue sobre D . Se g é absolutamente contínua, $M_1 \subset M_g$ posto que ambas σ -álgebras são a completção dos borelianos com as respectivas medidas e absoluta continuidade de g garante a inclusão.

Consideremos um espaço de probabilidade fixo Ω dotado de uma σ -álgebra de eventos $\mathcal{Q}$ e uma probabilidade P . E suporemos dada uma família de σ -subálgebras completas de $\mathcal{Q}$

$\{\mathcal{F}_t\}_{t \in D}$ crescente, ou seja, $\mathcal{F}_{t_1} \subset \mathcal{F}_{t_2}$ $t_1 \leq t_2$

Como usualmente nos referimos a $L^p(g)$, $L^p(g \otimes P)$, com $p \geq 1$, como aos espaços vetoriais seminormados cujos elementos são funções reais mensuráveis sobre D , $D \times \Omega$ respectivamente, de potencia p integrável. $L^p(g)$, $L^p(g \otimes P)$ serão os espaços de Banach associados, formados por classes de funções que coincidem quase em toda parte. Escreveremos q.t.p. X, μ para expressar *quase em toda parte com relação a medida μ no espaço mensurável X* . Chamaremos *versão* de um elemento de L^p a um representante qualquer da classe, pertencente a L^p ; e para não complicar as notações representaremos com um mesmo símbolo um elemento de L^p e sua classe em L^p . Lembraremos que um processo estocástico real sobre D é uma função

$$f : D \times \Omega \rightarrow R$$

onde $\forall t \in D$, a função

$$f_t : \Omega \rightarrow R \text{ dada por } f_t(\omega) = f(t, \omega)$$

é $\mathbb{Q}$ -mensurável. Se f_t é $\mathcal{F}_t$ -mensurável, diremos que o processo se adapta a $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in D}$. Analogamente consideraremos as funções

$$f_\omega : D \rightarrow R \text{ dadas por } f_\omega(t) = f(t, \omega)$$

que chamaremos *trajetórias* ou *funções amostrais* do processo f .

Como usualmente é feito definiremos um processo em escada como aquele cujas trajetórias são funções em escada com relação a uma mesma partição de D ou seja,

$$\delta(t, \omega) = \sum_{i=1}^m u_i(\omega) X_{J_i}(t)$$

sendo

$$\left\{ \begin{array}{l} a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b \\ J_i = [t_{i-1}, t_i] \text{ para } i < m, J_m = [t_{m-1}, t_m] \\ X_{J_i} \text{ a função indicadora do intervalo } J_i \end{array} \right.$$

Diremos que um processo é contínuo quando suas trajetórias são funções contínuas, ou seja $\delta_w \in C_R(D) \quad \forall w \in \Omega$.

E consideraremos sempre funções conjuntamente mensuráveis, isto é,

$$f : D \times \Omega \rightarrow R$$

mensuráveis com relação a $M_g \otimes \mathcal{Q}$ que serão, portanto, processos estocásticos com trajetórias M_g -mensuráveis.

CONDIÇÕES DE MENSURABILIDADE PARA OS PROCESSOS INTERGRÁVEIS

Neste trabalho tratamos de esquematizar a integração de processos estocásticos. E primeiramente aprofundaremos a *teoria da aproximação*.

Generalizando a condição de mensurabilidade de Yeh(33) e Meyer (4) vamos exigir dos processos integráveis que:

(M) - Para todo $t \in D$, a restrição do processo f a $[a, t] \times \Omega$ deva ser mensurável com relação a $M_g [a, t] \otimes \mathcal{F}_t$, sendo $M_g [a, t]$ a σ -álgebra de conjuntos mensuráveis com relação a g no intervalo $[a, t]$.

Esta condição de mensurabilidade resulta *natural* a partir da desejada existência de processos *simples* e adaptados que se *aproximam* de um dado processo adaptado e também para poder considerar os processos *integrais indefinidas*.

Concretamente, sejam os espaços:

$$\begin{aligned} E_w^p(g)_M &= \{f: D \times \Omega \rightarrow R \mid f \text{ verifica } M; f_w \in E^p(g) \text{ q.t.p. } \Omega, P\} \\ E^p(g \otimes P)_M &= \{f: D \times \Omega \rightarrow R \mid f \text{ verifica } M; f \in E^p(g \otimes P)\} \\ \cup & \\ C_{e,M} & \quad E_{e,M} \end{aligned}$$

sendo

$$\begin{aligned} C_{e,M} &= \{f: D \times \Omega \rightarrow R \mid f \text{ verifica } M; f \text{ é contínuo e limitado}\} \\ E_{e,M} &= \{f: D \times \Omega \rightarrow R \mid f \text{ verifica } M; f \text{ é limitado e em escada}\} \end{aligned}$$

[a primeira inclusão é parte da demonstração do teorema de Fubini].

Os processos contínuos e adaptados (ver Yeh(33), cap. I, ou Meyer - Dellacherie(4), cap. IV) e os processos escalonados e adaptados verificam que sua restrição a $[a, t]$ é mensurável com relação a $B[a, t] \otimes \mathcal{F}_t$, sendo $B[a, t]$ os borelianos de $[a, t]$. Meyer - Dellacherie, com uma linguagem francamente avançada, chamam *progressivos* aos processos que verificam esta última condição de mensurabilidade que, por sua vez implica M. Demonstram mais: que todo processo com trajetórias contínuas à direita é um processo progressivo (cap. IV, pág. 142).

Portanto, qualquer processo de $f^P(g \otimes P)$ que se obtenha como limite de processos adaptados, contínuos ou escalonados, verificará M quase em toda parte com relação a $M_g[a,b] \otimes Q$.

Neste sentido é que a condição M aparece como *natural*.

Para facilitar a construção de processos em escala contínuos à direita precisaremos a continuidade de g em b ou bem considerar $D = [a,b)$.

TEOREMAS DE APROXIMAÇÃO

Teorema 1.1 - seja $f \in f^P(g \otimes P)_M$. Existem sucessões de processos $\{f_n\}$, $f_n \in \mathcal{E}_{1,M}$, tais que:

$$\|f - f_n\|_{f^P(g \otimes P)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

No caso de g ser contínua, existem sucessões de processos $\{f_n\}$ de $C_{\ell,M}$ com a mesma propriedade.

Teorema 1.2 - seja $f \in f^P_w(g)_M$. Existem sucessões de processos $\{f_n\}$, $f_n \in \mathcal{E}_{1,M}$ tais que a sucessão de variáveis aleatórias.

$$\alpha_n(w) = \int_D |\delta(s,w) - \delta_n(s,w)|^p d'g(s)$$

verifica $\alpha_n \rightarrow 0$ q.t.p. Ω, P .

$$n \rightarrow \infty$$

e em consequência $\alpha_n \xrightarrow{P} 0$ [convergência em probabilidade] pois,
 $n \rightarrow \infty$

por ser a probabilidade medida finita, a convergência q.t.p. implica a convergência em medida.

No caso de g ser contínua, os f_n podem ser também processos contínuos.

Provaremos primeiramente um lema válido para medidas de Lebesgue - Stieltjes com função de distribuição contínua.

Seja g contínua e monotona não decrescente sobre $[a, b]$ e seja $h > 0$, $h \leq g(b) - g(a)$.

Consideremos uma prolongação contínua de g a $\mathbb{R}$, por exemplo

$$g(t) = g(b) + t - b \quad \text{se } t > b$$

$$g(t) = g(a) + t - a \quad \text{se } t < a$$

para $s \leq h$, as funções

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} \alpha_s(t) = \sup. \{ u < t \mid g(t) - g(u) = s \} \\ \beta_s(t) = \inf. \{ u > t \mid g(u) - g(t) = s \} \end{cases}$$

Lema 1.3 - seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{L}^1(g)$; se verifica que:

$$\int_R f(t) dg(t) = \int_R d g(t) \frac{1}{\delta} \int_{\alpha_\delta(t)}^t f(u) d g(u) =$$

$$\int_R d g(t) \frac{1}{\delta} \int_t^{B_\delta(t)} f(u) d g(u)$$

Demonstração : Pela sua definição

$$u \in (\alpha_\delta(t), t) \iff g(t) - g(u) < \delta \iff t \in (u, B_\delta(u))$$

$$\int_R d g(t) \int_{(\alpha_\delta(t), t)} f(u) d g(u) = \int_R d g(t) \int_R f(u) \chi_{(\alpha_\delta(t), t)}(u) d g(u) =$$

$$\int_R d g(u) f(u) \int_R \chi_{(\alpha_\delta(t), t)}(u) d g(t) =$$

$$\int_R f(u) d g(u) \int_R \chi_{(u, B_\delta(u))}(t) d g(t) = \int_R f(u) d g(u) =$$

$$\int_R f(u) d g(u) \int_R \chi_{(\alpha_\delta(u), u)}(t) d g(t) =$$

$$\int_R d g(t) \int_R \chi_{(t, B_\delta(t))}(u) f(u) d g(u) =$$

$$\int_R d g(t) \int_{(t, B_\delta(t))} f(u) d g(u)$$

Seja um processo $f : D \times \Omega \rightarrow R$, $f \in \mathcal{L}^P(g \otimes P)_M \subset \mathcal{L}^P_W(g)_M$ com g contínua, monótona não decrescente e consideremos a prolongação

$$\delta : R \times \Omega \rightarrow R$$

$$\text{com } \delta(t, w) = 0 \text{ se } t \notin D.$$

Definimos as médias a esquerda de amplitude δ por:

$$(1.1) \quad \tilde{\delta}_\delta(t, w) = \frac{1}{\delta} \int_{\alpha_\delta(t)}^t \delta(u, w) d g(u)$$

$= 0$ se $\delta(t, w)$ pertence ao conjunto de trajetórias onde $\delta_w \notin \mathcal{L}^P(g)$.

Assim definido $\tilde{\delta}_\delta$ é um processo contínuo; com efeito:

$$\tilde{\delta}_\delta(t, w) = \frac{1}{\delta} \int_{-\infty}^t \delta(u, w) d g(u) - \frac{1}{\delta} \int_{-\infty}^{\alpha_\delta(t)} \delta(u, w) d g(u)$$

ambas integrais são funções contínuas de t uma vez que se $t < t'$

$$g(\alpha_\delta(t')) - g(\alpha_\delta(t)) = g(t') - g(t) \rightarrow 0$$

$$\text{se } t' - t \rightarrow 0$$

pela continuidade de g .

Além disso, fixado t , por ser $f(u, w)$ mensurável com relação a $M_g[a, t] \otimes \mathcal{F}_t$ no intervalo $[a, t]$, $(\tilde{f}_s)_t$ será mensurável com relação a $\mathcal{F}_t$.

Portanto $\tilde{f}_s$ é um processo contínuo e adaptado que, como já

foi comentado, verificará M.

Teorema 1.4 - se g é contínua, monotona não decrescente e

$$f \in \mathcal{E}^p (g \otimes P)_M$$

$$\|f - \hat{f}_\Delta\|_{\mathcal{E}^p (g \otimes P)} \longrightarrow 0$$

quando $\Delta \rightarrow 0$

Demonstração:

$$\begin{aligned}
 (1.2) \quad & \|f - \hat{f}_\Delta\|_{\mathcal{E}^p (g \otimes P)}^p = \int_{R \times \Omega} |f(t, w) - \hat{f}_\Delta(t, w)|^p d(g \otimes P) \leq \\
 & \leq \int_{R \times \Omega} \frac{1}{\Delta^p} \left| \int_{\alpha_\Delta(t)}^t f(t, w) - f(u, w) d g(u) \right|^p d(g \otimes P)(t, w) \leq \\
 & \leq \int_{R \times \Omega} \frac{1}{\Delta^p} \left[\int_{\alpha_\Delta(t)}^t |f(t, w) - f(u, w)| d g(u) \right]^p d(g \otimes P)(t, w) \leq \\
 & \leq \int_{R \times \Omega} \frac{1}{\Delta} \left[\int_{\alpha_\Delta(t)}^t |f(t, w) - f(u, w)|^p d g(u) \right] d(g \otimes P)(t, w) \\
 & = \int_R d g(t) \frac{1}{\Delta} \int_{\alpha_\Delta(t)}^t \|f(t, w) - f(u, w)\|_{\mathcal{E}^p(P)}^p d g(u) \leq \\
 & \leq \int_R d g(t) \frac{1}{\Delta} \int_{\alpha_\Delta(t)}^{\beta_\Delta(t)} \|f(t, w) - f(u, w)\|_{\mathcal{E}^p(P)}^p d g(u) .
 \end{aligned}$$

e o teorema 1.4 resultará como consequência do

Teorema 1.5 - Nas condições do teorema 1.4, a função

$$(1.3) \quad \int_R dg(t) \frac{1}{\delta} \int_{\alpha_\delta(t)}^{\beta_\delta(t)} \| \delta_t - \delta_u \|_{\mathcal{E}^p(P)}^p dg(u) \rightarrow 0$$

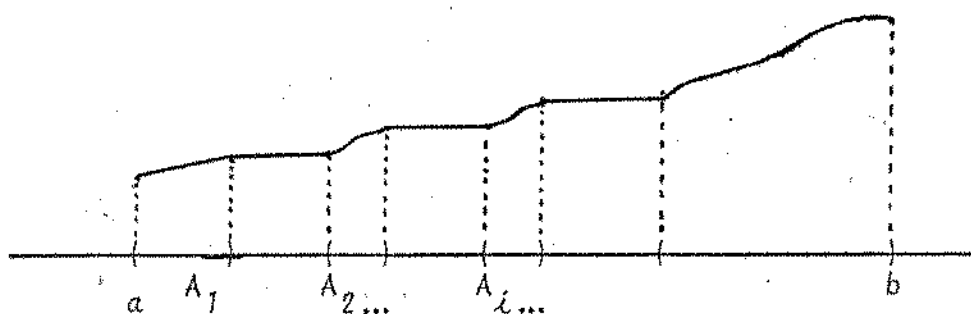
quando $\delta \rightarrow 0$

Demonstração: - Vamos supor primeiramente que f é limitada e majorada por uma certa constante K_0 , ou seja

$$\forall (t, w) \in D \times \Omega, \quad |\delta(t, w)| \leq K_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\hat{\delta}_\delta(t, w)| \leq K_0.$$

Seja $A = \bigcup A_i \subset D$ a reunião numerável dos intervalos abertos onde g é estritamente crescente.



a função

$$\delta(x, y) = |g(x) - g(y)|$$

proporciona uma métrica sobre A .

Se $g : A \rightarrow g(A)$ é biunívoca e bicontínua, é mais: uma isome-

tria; portanto a topologia gerada por δ é equivalente à topologia usual sobre A , de tal forma que A é localmente compacto com relação a essa topologia e a medida m_g é uma medida regular (*) com relação ao espaço localmente compacto A, δ .

Além disso, por ser $f \in L^p(g \otimes P)$, a função

$$A \ni t \rightarrow \delta_t \in L^p(P)$$

é M_g - mensurável.

Nestas condições, o teorema de Lusin garante que dado $\epsilon_1 > 0$, existe um compacto $K' \subset A$, com $m_g(A - K') < \frac{\epsilon_1}{2}$ e uma função

$$\gamma : A \rightarrow L^p(P)$$

com suporte compacto contido em A , g -contínua, ou seja, contínua com relação a δ , tal que:

$$\gamma(t) = \delta_t \quad \forall t \in K'$$

$$e \sup_{t \in A} \|\gamma(t)\|_{L^p(P)} \leq \sup_{t \in A} \|\delta_t\|_{L^p(P)}$$

$$E \text{ naturalmente } m_g(A - K') = m_g(D - K') < \frac{\epsilon_1}{2}$$

Sejam $b' > b$, $b' < \beta_s(b)$, $a' < a$, $a' > d_s(a)$ tais que

(*) Regular no sentido de que os conjuntos mensuráveis podem ser aproximados, em medida, inferiormente por compactos e superiormente por abertos.

$g(b') - g(b) < \varepsilon_1/4$, $g(a) - g(a') < \varepsilon_1/4$; e considerarmos

a prolongação contínua de γ sobre $[a', b']$ definida por $\gamma(t) = 0$ se $t \notin A$;

$$K = K' \cup [b', \beta_\delta(b)] \cup [\alpha_\delta(a), a'].$$

Deduz-se que $m_g\{[\alpha_\delta(a), \beta_\delta(b)] - K\} < \varepsilon_1$ e $f_t = \gamma(t)$, $\forall t \in K$.

$$\begin{aligned} (1.4) \quad & \int_R \frac{1}{\delta} dg(t) \int_{\alpha_\delta(t)}^{\beta_\delta(t)} \|\delta_t - \delta_u\|_{\mathcal{E}^p(P)}^p dg(u) = \int_{\alpha_\delta(a)}^{\beta_\delta(b)} \frac{1}{\delta} dg(t) \int_{\alpha_\delta(t)}^{\beta_\delta(t)} \|\delta_t - \delta_u\|_{\mathcal{E}^p(P)}^p dg(u) \\ &= \int_K dg(t) \frac{1}{\delta} \int_{[\alpha_\delta(t), \beta_\delta(t)] \cap K} \|\delta_t - \delta_u\|_{\mathcal{E}^p(P)}^p dg(u) + \\ &+ \int_K dg(t) \frac{1}{\delta} \int_{[\alpha_\delta(t), \beta_\delta(t)] \cap K^c} \|\delta_t - \delta_u\|_{\mathcal{E}^p(P)}^p dg(u) + \\ &+ \int_{[\alpha_\delta(a), \beta_\delta(b)] \cap K^c} dg(t) \frac{1}{\delta} \int_{[\alpha_\delta(t), \beta_\delta(t)]} \|\delta_t - \delta_u\|_{\mathcal{E}^p(P)}^p dg(u). \end{aligned}$$

Seja $t \in K$ $f_t = \gamma(t)$, e $u \in [\alpha_\delta(t), \beta_\delta(t)] \cap K$

$\delta(u, t) = |g(u) - g(t)| \leq \delta$ e pela continuidade uniforme de γ sobre o compacto K , dado $\varepsilon_2 > 0$ $\exists \delta > 0$ $|s| < \delta \Rightarrow \forall u \in [\alpha_\delta(t), \beta_\delta(t)] \cap K$,
 $\|f_t - f_u\|_{\mathcal{E}^p(P)}^p = \|\gamma(t) - \gamma(u)\|_{\mathcal{E}^p(P)}^p < \varepsilon_2$.

Portanto

$$(1.5) \quad \int_K d g(t) \frac{1}{\delta} \int_{[\alpha_\delta(t), \beta_\delta(t)] \cap K} \|\delta_t - \delta_u\|_{\Sigma^p(P)}^p d g(u) \leq \\ \leq 2 \varepsilon_2 (g(\beta_\delta(b)) - g(\beta_\delta(a))) = 2 \varepsilon_2 (2\delta + g(b) - g(a))$$

$$(1.6) \quad \int_{K^c \cap [\alpha_\delta(a), \beta_\delta(b)]} \frac{1}{\delta} d g(t) \int_{[\alpha_\delta(t), \beta_\delta(t)]} \|\delta_t - \delta_u\|_{\Sigma^p(P)}^p d g(u) \leq \\ \leq 2^{p+1} K_0^p \varepsilon_1$$

$$(1.7) \quad \int_K d g(t) \frac{1}{\delta} \int_{[\alpha_\delta(t), \beta_\delta(t)] \cap K^c} \|\delta_t - \delta_u\|_{\Sigma^p(P)}^p d g(u) \leq \\ \leq 2^{p-1} \int_K \frac{1}{\delta} d g(t) \int_{K^c \cap [\alpha_\delta(t), \beta_\delta(t)]} \|\delta_t - \gamma(u)\|_{\Sigma^p(P)}^p d g(u) \leq \\ + 2^{p-1} \int_K d g(t) \frac{1}{\delta} \int_{K^c \cap [\alpha_\delta(t), \beta_\delta(t)]} \|\gamma(u) - \delta_u\|_{\Sigma^p(P)}^p d g(u) \leq \\ \leq 2^p \varepsilon_2 (2\delta + g(b) - g(a)) + 2^{p-1} \int_K \frac{1}{\delta} d g(t) \int_{K^c \cap [\alpha_\delta(t), \beta_\delta(t)]} \|\delta_u - \gamma(u)\|_{\Sigma^p(P)}^p d g(u)$$

Finalmente, aplicando o lema 1.3:

$$\int_K \frac{1}{\delta} d g(t) \int_{[\alpha_\delta(t), \beta_\delta(t)] \cap K^c} \|\gamma(u) - \delta_u\|_{\Sigma^p(P)}^p d g(u) \leq$$

$$\begin{aligned}
& \leq \int_R \frac{1}{\delta} d g(t) \int_{[\alpha_\delta(t), \beta_\delta(t)]} \|\gamma(u) - \delta_u\|_{\mathcal{E}^p(P)}^p d g(u) = \\
& = 2 \int_R \|\gamma(t) - \delta_t\|_{\mathcal{E}^p(P)}^p d g(t) = 2 \int_{[\alpha_\delta(a), \beta_\delta(b)] \cap K^c} \|\gamma(t) - \delta_t\|_{\mathcal{E}^p(P)}^p d g(t) \leq \\
& \leq 2^{p+1} K_0^p \varepsilon_1
\end{aligned}$$

somando as desigualdades (1.5), (1.6), (1.7) obtemos:

$$\begin{aligned}
\delta < \delta \Rightarrow \int_R \frac{1}{\delta} d g(t) \int_{\alpha_\delta(t)}^{\beta_\delta(t)} \|\delta_t - \delta_u\|_{\mathcal{E}^p(P)}^p d g(u) \leq \\
\leq 2^{p+1} [\varepsilon_2 (2\delta + g(b) - g(a)) + 2 K_0^p \varepsilon_1]
\end{aligned}$$

o que demonstra o teorema 1.5 quando f é limitado.

Continuando, vamos negligenciar a limitação de f seja

$$f \in \mathcal{E}^p(g \otimes P)_M$$

e para N natural

$$\zeta_N(t) = \begin{cases} t & \text{se } |t| \leq N \\ \frac{Nt}{|t|} & \text{se } |t| > N \end{cases}$$

Definimos

$$(1.8) \quad \delta_N(t, \omega) = \zeta_N(\delta(t, \omega))$$

f_N é um processo limitado que verificará a condição M pois, por ser ζ_N contínua, conservará a mensurabilidade.

$$\begin{bmatrix} \delta_N^{-1} & = & \delta^{-1} & 0 & \zeta_N^{-1} \end{bmatrix}$$

Por outro lado, $\forall (t, \omega) \in D \times \Omega$, $f_N(t, \omega) \rightarrow f(t, \omega)$
 $N \rightarrow \infty$

$$e \quad |f_N(t, \omega)| \leq |f(t, \omega)|$$

O teorema da convergência dominada garante que

$$\|\delta - \delta_N\|_{L^p(g \otimes P)}^p \rightarrow 0$$

$$N \rightarrow \infty$$

$$\begin{aligned} & \int_R \frac{1}{\delta} dg(t) \int_{\alpha_\delta(t)}^{\beta_\delta(t)} \|\delta_t - \delta_u\|_{L^p(P)}^p dg(u) = \\ & = \int_R \frac{1}{\delta} dg(t) \int_{\alpha_\delta(t)}^{\beta_\delta(t)} \|\delta_t - (\delta_N)_t + (\delta_N)_t - (\delta_N)_u + (\delta_N)_u - \delta_u\|_{L^p(P)}^p dg(u) \\ & \leq 2^{2p} \|\delta - \delta_N\|_{L^p(g \otimes P)}^p + \int_R \frac{1}{\delta} dg(t) \int_{\alpha_\delta(t)}^{\beta_\delta(t)} \|(\delta_N)_t - (\delta_N)_u\|_{L^p(P)}^p dg(u) \end{aligned}$$

Podemos fixar um N tal que o primeiro somando seja arbitrariamente pequeno e seguidamente um $\delta > 0$ tal que para $s \leq \delta$ o segundo seja inferior a um valor prefixado arbitrariamente pequeno.

Com isto estão demonstrados os teoremas 1.4 e 1.5 e estamos em condições de abordar a...

Demonstração do teorema 1.1

Suporemos inicialmente que o processo f é limitado e g contínua monotona não decrescente.

Nestas condições os processos $\hat{f}_s$ definidos em (1.1) são contínuos e limitados verificando M e pelo teorema 1.4

$$\| \hat{f} - \hat{f}_\Delta \|_{L^p(g \otimes P)} \xrightarrow{\Delta \rightarrow 0} 0$$

A construção dos processos escalonados pode ser feita a partir dos processos contínuos como segue: Dado um processo f contínuo e limitado, com $|f(t, w)| \leq K_0$, verificando M , construímos

$$(1.9) \quad \hat{f}_\ell(t, w) = f(\tau_\ell(t), w), \text{ com } \ell \text{ natural}$$

$$\tau_\ell(t) = a + \frac{(K-1)(b-a)}{\ell} \quad \forall t \in J_{\ell, K} \text{ com } 1 \leq K \leq \ell$$

$$J_{\ell, K} = \left[a + \frac{(K-1)(b-a)}{\ell}, a + \frac{K(b-a)}{\ell} \right] \text{ para } 1 \leq K \leq \ell-1$$

$$J_{\ell, \ell} = \left[a + \frac{(\ell-1)(b-a)}{\ell}, b \right]$$

Da definição deduzimos que:

f_ℓ é um processo escalonado

$f_\ell(t, w) \rightarrow f(t, w)$ pela continuidade das trajetórias de f
 $\ell \rightarrow \infty$

$$|f_\ell(t, w)| = |f(\zeta_\ell(t), w)| < K_0$$

O teorema da convergência dominada implica que:

$$f_\ell \xrightarrow[\ell \rightarrow \infty]{\mathcal{E}^P(g \otimes P)} f$$

Por ser $\zeta_\ell(t) \leq t$ e f adaptado, f_ℓ também será adaptado e portanto verificará M.

E dado um processo $f \in \mathcal{E}^P(g \otimes P)$, limitado, o aproximaremos com processos de $\mathcal{E}_{\ell, M}$ através de processos de $C_{\ell, M}$.

Seja $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ monotona não decrescente com $0 < g(b) - g(a) < \infty$.

A função $m(a, b] = g(b^+) - g(a^+)$ define uma medida sobre a álgebra das reuniões finitas de semi-abertos que se prolonga univocamente aos borelianos e, por completção, a uma σ -álgebra de mensuráveis. Naturalmente essa medida é equivalente a gerada pela função de distribuição $g^+(x) = g(x^+)$ que é contínua a direita.

Vamos pois supor que g é contínua à direita e seja

$$\pi = \{ \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n, \dots \}$$

o conjunto enumerável das descontinuidades de g .

Podemos decompor g na forma

$$(1.10) \quad g = g_1 + g_2$$

sendo ambas monotonas não decrescentes g_2 contínua e g_1 concentrada no conjunto π das descontinuidades de g .

$M_g[a,b] = M_{g_2}[a,b]$ pois qualquer conjunto é mensurável com relação a M_{g_1} .

Dado $f \in L^p(g \otimes P)_M$, limitado, o decomposemos na forma:

$$(1.11) \quad f = f_1 + f_2$$

com $f_1(t, \omega) = f(t, \omega) \cdot \chi_\pi(t)$.

Dado $\varepsilon_1 > 0$, $\exists n_0$ tal que

$$\sum_{i > n_0} m_g(\tau_i) = \sum_{i > n_0} m_{g_1}(\tau_i) < \varepsilon_1$$

Sejam:

$$(1.12) \quad \alpha_m(t, \omega) = \sum_{i=1}^{n_0} f(\tau_i, \omega) \cdot \chi_{[\tau_i, \tau_i + \frac{1}{m}]}(t); \text{ com } m \text{ sufi-}$$

cientemente grande para que os intervalos $[\tau_i, \tau_i + \frac{1}{m}]$, $i < n_0$, sejam disjuntos

$$\|f_1 - \alpha_m\|_{L^p(g \otimes P)}^p \leq K_0^p \left[\sum_{i=1}^{n_0} (g(\tau_i + \frac{1}{m}) - g(\tau_i)) + \varepsilon_1 \right]$$

e quando m cresce o segundo membro pode ser menor que $2K_0^p \varepsilon_1$.

Dado $\varepsilon_2 > 0 \exists \beta \in \mathcal{E}_{t,M} \mid \|f_2 - \beta\|_{\mathcal{E}^p(g_2 \otimes P)}^p < \varepsilon_2$
 definimos:

$$(1.13) \quad B_m^*(t, w) = 0 \text{ se } t \in \bigcup_1^{n_0} [\tau_i, \tau_i + \frac{1}{m}]$$

$$B_m^*(t, w) = \beta(t, w) \text{ se } t \notin \bigcup_1^{n_0} [\tau_i, \tau_i + \frac{1}{m}]$$

$$\|f_2 - B_m^*\|_{\mathcal{E}^p(g \otimes P)}^p = \int_D \|f_2 - B_m^*\|_{\mathcal{E}^p(P)}^p d g_1 +$$

$$+ \int_D \|f_2 - B_m^*\|_{\mathcal{E}^p(P)}^p d g_2 \leq$$

$$\leq K_0^p \varepsilon_1 + 2^{p-1} \left[\|f_2 - \beta\|_{\mathcal{E}^p(g_2 \otimes P)}^p + \|\beta - B_m^*\|_{\mathcal{E}^p(g_2 \otimes P)}^p \right]$$

$$\leq K_0^p \varepsilon_1 + 2^{p-1} \left[\varepsilon_2 + K_0^p \sum_{i=1}^{n_0} (g_2(\tau_i + \frac{1}{m}) - g_2(\tau_i)) \right]$$

As duas ultimas desigualdades e a arbitrariedade de $m, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ demonstram que $f \in \mathcal{E}^p(g \otimes P)_M$, limitado, pode ser aproximado em $\mathcal{E}^p(g \otimes P)$ por processos escalonados (da forma $\alpha_n + B_m^*$) e limitados que, por ser adaptados, verificam M.

Para prescindir da limitação de f , procedemos do mesmo modo que no teorema 1.5

Como em (1.8) definimos, a partir de $f \in \mathcal{E}^p(g \otimes P)_M$,

$$\delta_N = \zeta_N(f)$$

processos limitados que verificam M e

$$\|f - \delta_N\|_{\mathcal{E}^p(g \otimes P)} \rightarrow 0$$

Dado $\varepsilon > 0$ escolhemos N tal que $\|f - f_N\|_{\mathcal{E}^p(g \otimes P)} < \frac{\varepsilon}{2}$
 e fixado f existirá, pelo que já foi demonstrado, um certo $\alpha \in \mathcal{E}_{\ell, M}$ [e
 também um $\alpha \in C_{\ell, m}$ se g fosse continua] tal que

$$\|\delta_N - \alpha\|_{\mathcal{E}^p(g \otimes P)} < \frac{\varepsilon}{2}$$

e portanto $\|\delta - \alpha\|_{\mathcal{E}^p(g \otimes P)} < \varepsilon$

Donde concluímos a demonstração do teorema 1.1.

No caso $g \neq i$, o teorema 1.1 admite uma versão muito mais
 ágil usando convoluções. Concretamente:

Teorema 1.6 - Seja uma família de funções

$$\{\alpha_h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+\} \quad h > 0$$

verificando que: a) $\alpha_h \in \mathcal{E}_{\ell}^{\infty}(\mathbb{R})$

$$b) \text{ sop. } (\alpha_h) \subset [0, h]$$

$$c) \int_{\mathbb{R}} \alpha_h(t) dt = 1$$

e seja $\delta \in \mathcal{E}^p(i \otimes P)$.

Nestas condições se deduz que:

$$a) T_h(\delta) = \delta * \alpha_h, \text{ ou seja } T_h(\delta)(t, w) = \int_{\mathbb{R}} \delta(t-s, w) \alpha_h(s) ds$$

define um operador sobre $\mathcal{E}^p(i \otimes P)$

$$b) T_h(\delta) \in \mathcal{E}^p(i \otimes P) \quad \delta$$

$$h \rightarrow 0$$

c) se f verifica M $T_h(f)$ verifica M .

Demonstração: supomos, como sempre, $D = [a, b]$ e f obviamente prolongada, ou seja, $f(t, w) = 0$ se $t \notin [a, b]$; seja $1 \leq p < \infty$ e q o seu conjugado $\left| \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \right|$

$$(1.14) \quad |T_h(f)(t, w) - T_h(f)(t_0, w)| = \left| \int_{[0, h]} \alpha_h(s) [f(t-s, w) - f(t_0-s, w)] ds \right|$$

$$\leq \|\alpha_h\|_\infty \int_R |f(t-s, w) - f(t_0-s, w)| ds$$

e, por serem as translações contínuas em $E^p(i)$, $T_h(f)$ será um processo contínuo.

Além disso $\beta(s, w) = f(t-s, w) \cdot \alpha_h(s)$ será mensurável com relação a $M_1[a, t] \otimes \mathcal{F}_t$, se f verifica M . Por tanto a integral será mensurável com relação a $\mathcal{F}_t$ e $T_h(f)$ será um processo adaptado.

Por ser $T_h(f)$ contínuo e adaptado, verificará $M \rightarrow c)$

$\forall f, \ell \in E^p(i \otimes P)$, $K \in R$ se verifica que:

$$T_h(f + \ell) = T_h(f) + T_h(\ell)$$

$$T_h(Kf) = K T_h(f)$$

$$(1.15) \quad \|T_h(f)\|_{E^p(i \otimes P)}^p = \int_{D \times \Omega} \left| \int_{[0, h]} f(t-s, w) \alpha_h(s) ds \right|^p d(i \otimes P) \leq$$

$$\leq \int_{D \times \Omega} \left[\int_{[0, h]} \underbrace{|f(t-s, w)|}_{E^p(i)} \underbrace{\alpha_h(s)^{\frac{1}{p}}}_{E^q(i)} ds \right]^p d(i \otimes P)$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_{D \times \Omega} \left[\int_{[0, h]} |\delta(t-s, w)|^p \alpha_h(s) ds \right] \left[\int_{[0, h]} ds \alpha_h(s) \right]^{\frac{p}{q}} d(\lambda \otimes P) \\
&= \int_{\Omega} dP \int_{[0, h]} \alpha_h(s) ds \int_D |\delta(t-s, w)|^p dt = \\
&= \int_{[0, h]} \alpha_h(s) ds \int_{\Omega} dP \int_{a-s}^{b-s} |\delta(u, w)|^p du \leq \\
&\leq \int_{[0, h]} \alpha_h(s) ds \int_{\Omega} dP \int_a^b |\delta(u, w)|^p du = \|\delta\|_{\Sigma^p(\lambda \otimes P)}^p \Rightarrow \\
&\Rightarrow (a)
\end{aligned}$$

Para provar (b) consideremos $\varepsilon > 0$ e uma função simples da forma

$$\zeta(t, w) = \sum \lambda_i \chi_{J_i}(t) \cdot \chi_{B_i}(w).$$

com J_i intervalos e $B_i \in \mathcal{Q}$ tal que $\|f - \zeta\|_{\Sigma^p(\lambda \otimes P)} \leq \varepsilon/3$

$$\begin{aligned}
(1.16) \quad \|\delta - T_h(\delta)\|_{\Sigma^p(\lambda \otimes P)} &\leq \|\delta - \zeta\|_{\Sigma^p(\lambda \otimes P)} + \|\zeta - T_h(\zeta)\|_{\Sigma^p(\lambda \otimes P)} \\
&\quad + \|T_h(\delta - \zeta)\|_{\Sigma^p(\lambda \otimes P)} \leq \\
&\leq 2 \|\delta - \zeta\|_{\Sigma^p(\lambda \otimes P)} + \|\zeta - T_h(\zeta)\|_{\Sigma^p(\lambda \otimes P)}
\end{aligned}$$

$$(1.17) \quad \| \zeta - \tau_h(\zeta) \|_{E^p(I \otimes P)}^p = \int_{D \times \Omega} \left| \int_{[0, h]} (\zeta(t, w) - \zeta(t-s, w)) \alpha_h(s) ds \right|^p d(I \otimes P)$$

$$\leq \int_{D \times \Omega} \left| \int_{[0, h]} \underbrace{\alpha_h(s)^{1/p} |\zeta(t, w) - \zeta(t-s, w)|}_{E^p(I)} \underbrace{\alpha_h(s)^{1/q} ds}_{E^q(I)} \right|^p d(I \otimes P)$$

$$\leq \int_{D \times \Omega} d(I \otimes P) \int_{[0, h]} \alpha_h(s) |\zeta(t, w) - \zeta(t-s, w)|^p ds =$$

$$= \int_{[0, h]} \alpha_h(s) ds \int_{D \times \Omega} |\zeta(t, w) - \zeta(t-s, w)|^p d(I \otimes P)(t, w) =$$

$$= \int_{[0, h]} \alpha_h(s) \left[\sum |\lambda_i|^p m_i (J_i \Delta J_{i+s}) \cdot P_h(B_i) \right] ds$$

$$= \left[\sum |\lambda_i|^p P_h(B_i) \right] \int_{[0, h]} 2s \alpha_h(s) ds$$

sendo Δ a diferença simétrica.

$$\text{Se tomarmos } h < \frac{\epsilon^p}{2 \cdot 3^p [\sum |\lambda_i|^p P_h(B_i)]} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \| \zeta - \tau_h(\zeta) \|_{E^p(I \otimes P)} < \epsilon/3 \Rightarrow \| \delta - \tau_h(\delta) \|_{E^p(I \otimes P)} < \epsilon \Rightarrow (b)$$

e prova o teorema.

Corolários

a) Quando $\alpha_h = \frac{1}{h} \times [0, h]$

$$\begin{aligned} T_h(f)(t, w) &= \frac{1}{h} \int_{[0, h]} f(t-s, w) \, ds = \\ &= \frac{1}{h} \int_{t-h}^t f(u, w) \, du \end{aligned}$$

e resultam as médias de ordem esquerda $\hat{f}_h$ já estudadas na demonstração do teorema 1.1

b) Se tomamos $\alpha_h \in C^\infty_R(\mathbb{R})$, as trajetórias dos processos $T_h(f)$ serão também de classe ∞ .

Demonstração do teorema 1.2

seja $f \in \mathcal{L}^p_W(g)_M$ e N natural.

Definimos

$$(1.18) \quad \delta_N(t, w) = \chi_{[a, \ell(w))}(t) \cdot f(t, w)$$

$$(1.19) \quad \begin{cases} \ell(w) = \sup \{s \in \mathcal{D} \mid \int_a^s |f(u, w)|^p \, dg(u) < N\} \\ \ell(w) = b_0 > b \quad \text{se} \int_a^b |f(u, w)|^p \, dg(u) < N \end{cases}$$

(como a integral esta definida q.t.p. Ω , P , anularíamos f_N sobre

um conjunto desprezível de trajetórias).

Pela definição: $\int_D |f - f_N|^p d g \rightarrow 0$ q.t.p. Ω , P .

E de fato, em quase todas as trajetórias, a partir de um certo $N(w)$, que depende da trajetória,

$$\delta_N(t, w) = \delta(t, w) \quad \forall N > N(w), t \in D.$$

Vamos provar que $f_N \in \mathcal{E}^P(g \otimes P)$

com efeito:

$$\int_{D \times \Omega} |\delta_N|^p d(g \otimes P) = \int_{\Omega} dP \int_{[a, \ell(w)]} |\delta(t, w)|^p d g$$

$$\text{mas} \quad \forall s < \ell(w) \Rightarrow \int_{[a, s]} |\delta(u, w)|^p d g(u) < N \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{[a, \ell(w)]} |\delta(u, w)|^p d g(u) \leq N$$

$$(1.20) \quad \|\delta_N\|_{\mathcal{E}^P(g \otimes P)}^p \leq N$$

Provamos agora que f_N verifica a condição M.

$$\text{Seja} \quad \chi_{[a, \ell(w)]}(u) = \chi_{[0, n]} \left(\int_a^u |\delta(s, w)|^p d g(s) \right)$$

considerada como função de (u, w) .

Para cada $u < t$, a função de w

$$\int_a^u |\delta(s, w)|^p d g(s)$$

é mensurável com relação a F_t pois f verifica M .

O processo

$$f^*(u, w) = \int_{[a, u]} |\delta(s, w)|^p d g(s)$$

será adaptado e as suas trajetórias contínuas a direita. Com efeito:

$$\text{se } u' > u, \quad f^*(u', w) - f^*(u, w) = \int_{(u, u']} |\delta(s, w)|^p d g(s)$$

$$e \quad m_g^-(u, u') = g(u'^+) - g(u^+) = 0$$

$$\text{se } u' \rightarrow u$$

Em conseqüência, f^* é um processo progressivo e verifica M

$$\Rightarrow X_{[a, \ell(w))}(u) = X_{[0, N)} f^*(u, w) \quad \text{verifica } M$$

$$\Rightarrow \delta_N(u, w) = X_{[a, \ell(w))}(u) \cdot \delta(u, w) \quad \text{verifica } M.$$

A partir de que $\int_D |\delta - \delta_N|^p d g \rightarrow 0 \quad \text{q.t.p. } \Omega, p$

deduziremos que $\int_D |\delta - \delta_N|^p d g \xrightarrow{p.h.} 0$

e portanto $\forall \epsilon, \epsilon^* > 0, \exists N \mid p.h. \left[\int_D |\delta - \delta_N|^p d g > \frac{\epsilon}{2^p} \right] < \frac{\epsilon^*}{2}$

Fixado esse N , $\delta_N \in \mathcal{E}^p(g \otimes P)_M \Rightarrow \exists \{\delta_{N_m}\} \subset \mathcal{E}_{e,M}$ [e também de $C_{\ell,M}$ se g é contínua] tais que

$$\left\| \delta_N - \delta_{N_m} \right\|_{\mathcal{E}^p(g \otimes P)} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$$

$$m \rightarrow \infty$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} d p \int_D |\delta_N - \delta_{N_m}|^p d g \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$$

$$\Rightarrow \int_D |\delta_N - \delta_{N_m}|^p d g \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0 \quad \text{em } \mathcal{E}^1(P)$$

$$\Rightarrow \int_D |\delta_N - \delta_{N_m}|^p d g \xrightarrow{p.h.} 0$$

$$\Rightarrow \exists m \mid p.h. \left[\int_D |\delta_N - \delta_{N_m}|^p d g > \frac{\epsilon}{2^p} \right] < \frac{\epsilon^*}{2}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow P_h \left[\int_D |\delta - \delta_{N_m}|^p d g \geq \varepsilon \right] \leq \\
&\leq P_h \left[\int_D |\delta - \delta_N|^p d g \geq \frac{\varepsilon}{2^p} \right] + P_h \left[\int_D |\delta_N - \delta_{N_m}|^p d g \geq \frac{\varepsilon}{2^p} \right] \leq \\
&\leq \varepsilon^*
\end{aligned}$$

Concluimos que existirão sucessores de processos $\{\alpha_n\}$ de $\mathcal{E}_{\ell, M}$ (e, no caso de g ser contínua, também de $C_{\ell, M}$) que verificam

$$\int_D |\delta - \alpha_n|^p d g \xrightarrow{P_h} 0$$

E portanto certas subsucessões vão convergir para 0 q.t.p. Ω , P como queríamos demonstrar.

CAPITULO II

APROXIMAÇÃO DE PROCESSOS MEDIANTE PARTIÇÕES

Primeiramente, sumarizamos alguns resultados conhecidos sobre...

Funções semicontínuas e funções integráveis

Noções básicas sobre funções semicontínuas

Seja X um espaço topológico, $E \subset X$, E' o conjunto dos pontos de acumulação de E , $x_0 \in E \cap E'$, $f: E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$.

Define-se que a função f é semicontínua superiormente (respectivamente inferiormente) em x_0 se

$$\lim_{E \ni x \rightarrow x_0} \sup f(x) \leq f(x_0) \quad (\lim_{E \ni x \rightarrow x_0} \inf f(x) \geq f(x_0))$$

Explicitando a definição, f é semicontínua superiormente (inferiormente) em x_0 se $\forall \varepsilon > 0$ existe uma vizinhança de x_0 , $N(x_0)$, tal que $\forall x \in E \cap N(x_0)$ $f(x) < f(x_0) + \varepsilon$ ($f(x) > f(x_0) - \varepsilon$).

Dizemos ser f semicontínua superiormente (inferiormente) quando o é $\forall x \in E \cap E'$.

Resultados fundamentais que se deduzem da definição e que aparecem demonstrados em McShane (18), capítulo I, são:

(2.1) f é semicontínua sup.(inf.) sobre E e $0 \leq c < \infty \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} cf & \text{é semicontínua sup.(inf.)} \\ -cf & \text{é semicontínua inf.(sup.)} \end{cases}$$

(2.2) f, h semicontínuas sup.(inf.) sobre E e $f(x_0), h(x_0) \neq \infty (\neq -\infty)$
 $\Rightarrow f + h$ é semicontínua sup.(inf.) em x_0 .

(2.3) Se $\{f_i\}_{i \in I}$ é uma coleção qualquer de funções semicontínuas sup.(inf.) e $f(x) = \inf \{f_i(x) \mid i \in I\}$ ($f(x) = \sup \{f_i(x) \mid i \in I\}$), f é semicontínua sup.(inf.).

(2.4) Se $f_1, \dots, f_n$ são semicontínuas sup.(inf.) $\Rightarrow$
 $\Rightarrow \sup (f_1, \dots, f_n)$ e $\inf (f_1, \dots, f_n)$ são semicontínuas sup.(inf.)

(2.5) As funções características de abertos (fechados) são semicon—

tínuas inf.(sup.) [consequência imediata da definição] .

Aproximações de uma função integrável por funções semicontínuas

Uma medida μ , sobre um espaço X localmente compacto e definida sobre uma σ -álgebra de mensuráveis M contendo os borelianos B de X , se diz σ -regular, ou de Radon, se:

$$(2.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} - \forall A \in M, \quad \mu(A) = \inf \{ \mu(V) \mid V = V^0 \supset A \} \\ - \forall K \text{ compacto}, \quad \mu(K) < \infty \\ - \forall A \in M, \quad \sigma\text{-finito ou aberto}, \\ \quad \mu(A) = \sup \{ \mu(K) \mid K \text{ é compacto}, K \subset A \} . \end{array} \right.$$

O teorema de Riesz estabelece uma correspondência biunívoca entre estas medidas e os funcionais positivos sobre o espaço $C_c(X)$ das funções reais, contínuas e com suporte compacto.

Seja f uma função real, $f \in L^1(\mu)$ e $\forall x \in X, f(x) \geq 0$.

É um resultado clássico e elementar que f pode expressar-se como limite em $L^1(\mu)$ e limite pontual q.t.p X , μ de uma certa sucessão crescente $\{f_n\}$ de funções em escada e positivas. Ou seja:

$$(2.7) \quad f_n \xrightarrow[L^1(\mu)]{q.t.p.} f \quad \text{com} \quad f_n = \sum_{i=1}^{m_n} c_{in} \chi_{A_{in}} \\ c_{in} > 0, A_{in} \in M, \mu(A_{in}) < \infty$$

Dado $\xi > 0$, pelas condições (2,6), existirão abertos V_{in} e compactos K_{in} tais que

$$K_{in} \subset A_{in} \subset V_{in} \text{ e } u(V_{in} \cap K_{in}^c) < \frac{\xi}{m_n C_{in} 2^n}$$

sejam ainda $f_{in} = \sum_{i=1}^{m_n} C_{in} \chi_{V_{in}}$; $f_{2n} = \sum_{i=1}^{m_n} C_{in} \chi_{K_{in}}$

Por (2.5), (2.1), (2.2) f_{1n} são semicontínuas inferiormente e f_{2n} semicontínuas superiormente e além disso:

$$\begin{aligned} (2.8) \quad \|f_{1n} - f_{2n}\|_{\mathcal{L}^1(u)} &= \int_X (f_{1n} - f_{2n}) \, d u = \\ &= \sum_{i=1}^{m_n} C_{in} u(V_{in} \cap K_{in}^c) \leq \frac{\xi}{2^n} \end{aligned}$$

$$(2.9) \text{ e posto que } f_{2n} \leq f_n \leq f_{1n} \Rightarrow \|f_n - f_{in}\|_{\mathcal{L}^1(u)} \leq \frac{\xi}{2^n} \text{ para } i=1,2$$

Por (2.7) $\exists m$ tal que $\|f - f_m\|_{\mathcal{L}^1(u)} < \frac{\xi}{2}$

e por (2.9):

$$(2.10) \quad \|f - f_{2m}\|_{\mathcal{E}^1(u)} \leq \|f - f_m\|_{\mathcal{E}^1(u)} + \|f_m - f_{2m}\|_{\mathcal{E}^1(u)} \leq \xi$$

sendo f_{2m} semicontínua superiormente com $f_{2m} \leq f_m \leq f$ q.t.p. x, u
 sejam agora $h_n = \sup \{f_{1i}, i=1, \dots, n\} \geq f_{1n} \geq f_n \Rightarrow h_n \leq h_{n+1}$.
 Por (2.4) h_n será semicontínua inferiormente e

$$h_n - f_n = \sup_{i \leq n} \{f_{1i} - f_n\} \leq \sup_{i \leq n} \{f_{1i} - f_i\} \leq \sum_{i=1}^n (f_{1i} - f_i)$$

e por (2.8):

$$(2.11) \quad \|h_n - f_n\|_{\mathcal{E}^1(u)} \leq \sum_{i=1}^n \|f_{1i} - f_i\|_{\mathcal{E}^1(u)} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi}{2^i} = \xi$$

$$(2.12) \quad \|h_n\|_{\mathcal{E}^1(u)} \leq \|f_n\|_{\mathcal{E}^1(u)} + \xi \leq \|f\|_{\mathcal{E}^1(u)} + \frac{3\xi}{2} < \infty$$

O teorema da convergência monótona garante que h_n é convergente em $\mathcal{E}^1(u)$ e q.t.p. x, u para um elemento de $\mathcal{E}^1(u)$.

Seja $h(x) = \sup_n \{h_n(x)\}$; pelo citado teorema:

$$h = \lim_{\mathcal{E}^1(u)} h_n; h(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(x), \forall x \in X; h(x) < \infty \text{ q.t.p. } X, u$$

$$h(x) = \sup_n \{ h_n(x) \} = \sup_n \{ f_{ln}(x) \}$$

Mas por (2.7) e (2.9) $f_{ln} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{E}^1(u)} f$ e existirá uma subsucessão f_{ln_K} tal que:

$$(2.13) \quad f_{ln_K} \xrightarrow{K \rightarrow \infty} f \quad \text{q.t.p. } X, u$$

$$f(x) = \lim_{K \rightarrow \infty} f_{ln_K}(x) \leq \sup_n \{ f_{ln}(x) \} = h(x) \quad \text{q.t.p. } X, u$$

$$\|f-h\|_{\mathcal{E}^1(u)} \leq \|f - f_n\|_{\mathcal{E}^1(u)} + \|f_n - h_n\|_{\mathcal{E}^1(u)} + \|h_n - h\|_{\mathcal{E}^1(u)}$$

e fazendo $n \rightarrow \infty$ concluímos que:

$$(2.14) \quad \|f-h\|_{\mathcal{E}^1(u)} \leq \xi \quad \text{e por (2.3) e a sua própria definição } h \text{ é semicontínua inferiormente.}$$

Chamando $f_1 = f_{2m}$, $f_2 = h$, por (2.10), (2.13), (2.14) teremos:

$$(2.15) \quad \left\{ \begin{array}{l} f_1 \leq f \leq f_2 \quad \text{q.t.p. } X, u \\ f_1 \text{ é semicontínua superiormente e } f_2 \text{ semicontínua inferiormente} \\ \|f - f_i\|_{\mathcal{E}^1(u)} \leq \xi \quad \text{para } i = 1, 2 \end{array} \right.$$

Seja agora $f \in \mathcal{L}^1(u)$; $f = f^+ - f^-$ sendo $f^+ = \sup\{f, 0\}$, $f^- = -\inf\{f, 0\}$.

$$f^+, f^- > 0 \quad | f_1^+, f_2^+; f_1^-, f_2^- \quad \text{com as propriedades (2.15)}$$

$$\text{Portanto} \quad f_1^+ - f_2^- \leq f \leq f_2^+ - f_1^- \quad \text{q.t.p. } X, u$$

$$\begin{array}{ll} \text{Por (2.1) e (2.2) temos:} & f_2^+ - f_1^- \quad \text{semicontínua inferiormente} \\ & f_1^+ - f_2^- \quad \text{semicontínua superiormente} \end{array}$$

$$e \quad \|(f_2^+ - f_1^-) - (f_1^+ - f_2^-)\|_{\mathcal{L}^1(u)} \leq \|f_2^+ - f_1^+\|_{\mathcal{L}^1(u)} + \|f_2^- - f_1^-\|_{\mathcal{L}^1(u)}$$

Podemos pois enunciar o seguinte:

Lema 2.1 - Se u é uma medida de Radon sobre um espaço localmente compacto e $f \in \mathcal{L}^1(u)$, $\forall \xi > 0, \exists f_1, f_2 \in \mathcal{L}^1(u)$ tais que:

f_1 é semicontínua superiormente

f_2 é semicontínua inferiormente

$$f_1 < f < f_2 \quad \text{q.t.p. } X, u$$

$$\|f_2 - f_1\|_{\mathcal{L}^1(u)} \leq \xi.$$

Sejam $D = [a, b]$, intervalo compacto da reta;

$g : D \rightarrow R$ monótona, não decrescente e contínua em b ;
 m_g a medida sobre D gerada pela função de distribuição g ;
 $\delta^* > 0$ e $\delta : D \longrightarrow R^+ = [0, \infty)$ com $\delta(t)$ o q.t.p. D, m_g

A seguir definimos e provamos a existência, estabelecida por McShane, de ...

Partições relativas a (δ, δ^*, g)

Definição: - Seja $\pi = \{ (\tau_1, J_1), \dots, (\tau_K, J_K) \}$ onde:

$$\tau_i \in [a, b], \quad J_i = [\tau_i, \tau_{i+1}) \subset [a, b], \quad i \leq K$$

$$J_i \subset (\tau_i - \delta(\tau_i), \tau_i + \delta(\tau_i)), \quad J_\ell \cap J_m = \emptyset \text{ se } \ell \neq m$$

$$e \quad m_g \left[D \setminus \left(\bigcup_{i=1}^K J_i \right) \right] < \delta^*$$

Diremos que π é uma partição de $[a, b]$ relativa a (δ, δ^*, g) , que se adapta ou adaptada a (δ, δ^*, g) .

Com a condição suplementar de que $J_i \subset [\tau_i, \tau_i + \delta(\tau_i))$, a partição chama-se Itô-retardada.

Existência - Consideremos os intervalos J_α em que g é constante, fechados em aqueles extremos onde g for contínua.

$$\text{Sejam : } E_0 = \bigcup J_\alpha \Rightarrow m_g(E_0) = 0$$

$$x, \beta \in [a, b] \setminus E_0, \quad x < \beta$$

se $g(\beta^-) - g(x^-) = 0 \Rightarrow g$ seria constante em $[x, \beta)$ e contí-

nua em $x \Rightarrow [x, \beta) \subset E_0 \Rightarrow x \in E_0$ - contradição-.

Portanto $x, \beta \in [a, b) \setminus E_0$, $x < \beta \rightarrow g(\beta^-) - g(x^-) > 0$

seja $E = \{[a, b) \cap \{x \mid \delta(x) > 0\}\} \setminus E_0 \rightarrow m_g(E) = g(b) - g(a) \rightarrow$
 $\rightarrow \quad] \quad K \quad \text{compacto}, K \subset E \mid m_g[E \setminus K] = m_g[[a, b] \setminus K] \delta^*/2$

Definimos $\delta'(x) = \inf \left\{ \delta(x), \frac{\delta^*}{2(g(b) - g(a))} \right\} \leq \delta(x)$

$\forall x \in K$, $x \neq a$ é ponto interior de um intervalo $A_x = (\alpha, \beta)$
 tal que: $\beta - x < \delta'(x)$

$$g(x^-) - g(\alpha^-) < \delta'(x) (g(\beta^-) - g(\alpha^-))$$

e se $x = a$, $A_a = [a, \beta)$

A família de intervalos $\{A_x\}_{x \in K}$ é uma cobertura aberta do compacto K

$$\Rightarrow \exists A_i = A_{x_i} = (\alpha_i, \beta_i), i = 1, \dots, n \text{ recobrindo } K$$

Podemos considerar os A_i ordenados de forma que

$$a < \beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_n < b$$

e $\alpha_i > \alpha_{i-1}$ para que nenhum subconjunto dos $\{A_i\}_{i=1, \dots, n}$ recobra K .

Considerando:

$$A^*_1 = [x_1, \beta_1)$$

$$A^*_i = [\sup \{x_1, \beta_{i-1}\}, \beta_i)$$

$$\pi = \{(x_1, A^*_1), \dots, (x_n, A^*_n)\}$$

teremos: $A^*_i \subset [x_i, \beta_i)$, $\beta_i - x_i < \delta'(x_i) \leq \delta(x_i)$

$$A^*_i \cap A^*_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$$

$$e \quad m_g \left\{ K - \bigcup_1^n A^*_i \right\} \leq \sum m_g [\alpha_i, x_i)$$

e somatória estendida a índices ℓ, K tais que

$$[x_\ell, \beta_\ell) \cap [x_K, \beta_K) = \emptyset$$

$$\text{Portanto: } m_g \left\{ K - \bigcup_1^n A^*_i \right\} \leq \sum \delta'(x_\ell) (g(\beta_\ell^-) - g(x_\ell^-)) \leq$$

$$\leq \frac{\delta^*}{2(g(b) - g(a))} (g(b) - g(a)) = \frac{\delta^*}{2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow m_g \left\{ E - \bigcup_1^n A^*_i \right\} < \delta^*$ o que prova a existência de uma partição Itô-retardada relativa a (δ, δ^*, g) .

Se g fosse absolutamente contínua, o teorema da existência pode ser demonstrado de uma forma mais eficaz e elegante:

$$\text{Sejam: } E = \{t \in [a, b) \mid \delta(t) > 0\} \Rightarrow m_g(E) = g(b) - g(a)$$

$$e \quad K = \{[t, \beta) \mid t \in E, \beta \in [a, b), \beta - t < \delta(t)\}$$

K , pela sua definição é um recobrimento de Vitali de E e o teorema de Vitali garante a existência de uma sucessão

$$\{J_n\} \subset K, \quad J_n \text{ disjuntos tais que } m_1 \left(E \setminus \bigcup_1^\infty J_n \right) = 0$$

$$\Rightarrow (\text{por ser } g \text{ absolutamente contínua}) \quad m_g \left(E \setminus \bigcup_1^\infty J_n \right) = 0$$

$$\Rightarrow \exists m \in \mathbb{N} \mid m_g \left\{ E \setminus \bigcup_{l=1}^m J_n \right\} < \delta^*$$

e se $J_n = [t_n, t_{n+1})$

$\Rightarrow \pi = \{(t_1, J_1), \dots, (t_m, J_m)\}$ é uma partição Itô-retardada relativa a (δ, δ^*, g) .

Unicidade dos limites com respeito a partições

Seja X um espaço semimétrico com uma semidistância ρ .

Diremos que uma sucessão de partições π_n relativas a $(\delta_n, \delta_n^*, g)$ converge para 0 e denotaremos:

$$\pi_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{ou bem} \quad (\delta_n, \delta_n^*) \rightarrow (0, 0)$$

se $\delta_n^* \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ e $\forall t \in D, \delta_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Definição: Seja $S(\pi)$ uma função definida sobre o conjunto das partições e com valores em X . Diremos que $J \in X$ é o limite

$$J = \lim_{\pi \rightarrow 0} S(\pi)$$

se $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta: D \rightarrow \mathbb{R}^+$ com $\delta(t) > 0$ q.t.p. D , m_g e $\delta^* > 0$

tais que $\forall \pi$ relativa a $(\delta, \delta^*, g) \Rightarrow \rho(J, S(\pi)) < \varepsilon$

Como consequência da definição resulta a unicidade do limite, ou seja:

$$\text{se } J_1, J_2 \in X \text{ e } J_i = \lim_{\pi \rightarrow 0} S(\pi) \Rightarrow \rho(J_1, J_2) = 0$$

Com efeito: Se $\xi > 0$ e (δ_i, δ_i^*) , $i = 1, 2$ são tais que $\forall \pi$ relativa a $(\delta_i, \delta_i^*, g)$, $\rho(S(\pi), J_i) < \xi/2$ tomando $\delta(t) = \min(\delta_1(t), \delta_2(t))$, $\delta^* = \min(\delta_1^*, \delta_2^*) \Rightarrow \forall \pi$ relativa a (δ, δ^*, g) , $\rho(S(\pi), J_i) < \xi/2$, com $i = 1, 2$.

$$\Rightarrow \rho(J_1, J_2) < \rho(J_1, S(\pi)) + \rho(S(\pi), J_2) < \xi \Rightarrow \rho(J_1, J_2) = 0$$

Finalmente, se o espaço X é metríco, o limite é único.

Aproximação da integral com somas relativas a partições Itô-retardadas.

Definição - sejam $f, z : D \rightarrow R$;

$\delta^* > 0$, $\delta : D \rightarrow R^+$, $\delta(t) > 0$ q.t.p.D, mg

$\pi = \{(\tau_i, J_i), i=1, \dots, K, J_i = [t_i, t_{i+1})\}$ uma

partição relativa a (δ, δ^*, g) .

A soma de Riemann relativa a π, f, Z se define por

$$S(\pi, f, z) = \sum_{i=1}^K f(\tau_i) (Z(t_{i+1}) - Z(t_i)).$$

Consideremos agora g contínua a esquerda, $f \in \mathcal{L}^1(g)$ e $\xi > 0$.

Pelo Lema 2.1, existirão $f_1, f_2 \in \mathcal{L}^1(g)$, semicontínuas superior e inferiormente tais que $f_1 \leq f \leq f_2$ q.t.p. D, m_g

$$\|f - f_i\|_{\mathcal{L}^1(g)} < \xi/4 \quad \text{para } i = 1, 2$$

Definimos f_1^*, f_2^* como :

$$f_1^*(t) = f_1(t) - \frac{\xi}{4(g(b)-g(a))} \quad \text{semicontínua superiormente}$$

$$f_2^*(t) = f_2(t) + \frac{\xi}{4(g(b)-g(a))} \quad \text{semicontínua inferiormente}$$

$$\Rightarrow f_1^* < f < f_2^* \quad \text{q.t.p. } D, m_g \text{ e}$$

$$(2.16) \quad \|f - f_1^*\|_{\mathcal{L}^1(g)} < \xi/2.$$

$$\text{Seja } E = \{t \in D \mid f_1^*(t) < f(t) < f_2^*(t)\} \Rightarrow m_g(E) = g(b) - g(a)$$

e $t_0 \in E$. Pela definição de semicontinuidade, existirá uma vizinhança de t_0 de raio $\delta(t_0)$ tal que

$$(2.17) \quad t_0 - \delta(t_0) < t < t_0 + \delta(t_0) \Rightarrow f_1^*(t) < f(t_0) < f_2^*(t)$$

e fazemos $\delta(t) = 0$ em $D \setminus E$.

Por outro lado $f_1^* \in \mathcal{L}^1(g) \Rightarrow \exists \delta^* > 0$ tal que

$$(2.18) \quad \forall A \in M_g, m_g(A) < \delta^* \Rightarrow \left| \int_A f_1^* d g \right| < \xi/2$$

Seja π uma partição relativa a (δ, δ^*, g) ; $\pi = \{(\tau_i, J_i), i = 1, \dots, K\}$ como $J_i \subset (\tau_i - \delta(\tau_i), \tau_i + \delta(\tau_i))$, por (2.17) teremos que

$$(2.19) \quad \forall t \in J_i, f_1^*(t) < f(\tau_i) < f_2^*(t)$$

Por (2.16), (2.18), (2.19):

$$\begin{aligned} -\frac{\xi}{2} + \int_D f d g &\leq \int_D f_1^* d g \leq \frac{\xi}{2} + \int_{\bigcup_{i=1}^K J_i} f_1^* d g = \frac{\xi}{2} + \sum_{i=1}^K \int_{J_i} f_1^* d g \leq \\ &\leq \frac{\xi}{2} + \sum_{i=1}^K f(\tau_i) (g(t_{i+1}) - g(t_i)) = \frac{\xi}{2} + S(\pi, f, g) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$(2.20) \quad S(\pi, f, g) \geq \int_D f d g - \xi$$

$$\begin{aligned} (2.21) \quad S(\pi, f, g) &= \sum_{i=1}^K f(\tau_i) (g(t_{i+1}) - g(t_i)) < \sum_{i=1}^K \int_{J_i} f_2^* d g = \\ &= \int_{\bigcup_{i=1}^K J_i} f_2^* d g \leq \int_D f_2^* d g + \frac{\xi}{2} \leq \int_D f d g + \xi \end{aligned}$$

Podemos resumir (2.20) e (2.21) no seguinte...

Teorema 2.2 - Seja g monótona não decrescente e contínua esquerda e $f \in L^1(g)$.

$\forall \epsilon > 0 \exists \delta^* > 0, \delta : D \rightarrow \mathbb{R}^+$ com $\delta > 0$ q.t.p.D, m_g tais que
 $\forall \pi$ relativa a $(\delta, \delta^*, g) \mid S(\pi, f, g) - \int_D f d g \mid < \xi$

ou também $\int_D f d g = \lim_{(\delta, \delta^*) \rightarrow (0,0)} S(\pi, f, g) = \lim_{\pi \rightarrow 0} S(\pi, f, g)$

Aproximações de processos mediante partições.-

Continuando com uma g monótona não decrescente e contínua a esquerda, retornemos aos espaços $\mathcal{E}_{\ell, M} \subset \mathcal{L}^P(g \otimes P)_M \subset \mathcal{L}_W^P(g)_M$ estudados no capítulo I.

Fixado $f \in \mathcal{L}^P(g \otimes P)_M$, $\exists H \subset D$, $H \in \mathcal{M}_g$ com $m_g(H) = 0$ tal que $\forall t \in D - H$, $f_t \in \mathcal{L}^P(P)$

seja $\delta : D \rightarrow \mathbb{R}^+$ tal que $\delta(t) = 0 \quad \forall t \in H$; $\delta^* > 0$ e $\pi = \{(\tau_1, J_1), \dots, (\tau_K, J_K)\}$ uma partição Itô-retardada relativa a $(\delta, \delta^*, g) \Rightarrow \tau_i \notin H \Rightarrow f_{\tau_i} \in \mathcal{L}^P(P)$.

A cada π Itô-retardada, com a condição $\delta(t) = 0 \quad \forall t \in H$, le associamos o processo em escada

$$S(\pi, f)(t, \omega) = \sum_{i=1}^K f(\tau_i, \omega) \chi_{J_i}(t)$$

Como $f_{\tau_i} \in \mathcal{L}^P(P)$, $S(\pi, f) \in \mathcal{L}^P(g \otimes P)$ e

$$(2.22) \quad \left\| S(\pi, f) \right\|_{\mathcal{L}^P(g \otimes P)} = \left\{ \sum_{i=1}^K \left\| f_{\tau_i} \right\|_{\mathcal{L}^P(P)}^p (g(t_i + 1) - g(t_i)) \right\}^{1/p}$$

Por ser f adaptada a $\{F_t\}_{t \in D}$ e a partição retardada, $S(\pi, f)$ será um processo adaptado que, portanto, verificará M.

Ou seja: anulando convenientemente a função δ , que define π , sobre

um conjunto de m_g -medida nula, $S(\pi, f) \in \mathcal{L}^p(g \otimes P)_M$. Vamos provar o seguinte...

Teorema 2.3 - Dados $f \in \mathcal{L}^p(g \otimes P)_M$, $\xi > 0$

$\exists \delta^* > 0$; $\delta : D \rightarrow \mathbb{R}^+$, $\delta > 0$ q.t.p. D , m_g

tais que $\forall \pi$ Itô-retardada, relativa a (δ, δ^*, g)

$$\|f - S(\pi, f)\|_{\mathcal{L}^p(g \otimes P)} < \xi$$

ou também: $\|f - S(\pi, f)\|_{\mathcal{L}^p(g \otimes P)} \rightarrow 0$

$$(\delta, \delta^*) \rightarrow (0, 0)$$

ou $f = \lim S(\pi, f)$

$$\mathcal{L}^p(g \otimes P)$$

$$\pi \rightarrow 0$$

Demonstração: seja $h \in \mathcal{E}_{\ell, m}$

$$(2.23) \quad \|f - S(\pi, f)\|_{\mathcal{L}^p(g \otimes P)} \leq \|f - h\|_{\mathcal{L}^p(g \otimes P)} + \|h - S(\pi, h)\|_{\mathcal{L}^p(g \otimes P)} +$$

$$+ \|S(\pi, h - f)\|_{\mathcal{L}^p(g \otimes P)}$$

Pelo teorema 1.1 $\exists h \in \xi_{\ell, m}$ tal que $\|f - h\|_{\mathcal{L}^P(g \otimes P)} < \xi/4$

$$\begin{aligned} \text{Por (2.22), para esse } h \quad \|S(\pi, h-f)\|_{\mathcal{L}^P(g \otimes P)}^p &= \sum_{i=1}^K \|(h-f)_{\tau_i}\|_{\mathcal{L}^P(P)}^p (g(t_{i+1}) - g(t_i)) \\ &= S(\pi, \|(h-f)_t\|_{\mathcal{L}^P(P)}^p, g) \end{aligned}$$

$$\text{Mas} \quad \|f - h\|_{\mathcal{L}^P(g \otimes P)}^p = \int_D \|(h-f)_t\|_{\mathcal{L}^P(P)}^p dg(t)$$

Pelo Teorema 2.2 $\exists \delta_1 : D \rightarrow \mathbb{R}^+$, $\delta_1(t) > 0$ q.t.p. D , m_g e $\delta_1^* > 0$ tais que $\forall \pi$ Itô-retardada relativa a $(\delta_1, \delta_1^*, g)$

$$|S(\pi, \|(h-f)_t\|_{\mathcal{L}^P(P)}^p, g) - \|h-f\|_{\mathcal{L}^P(g \otimes P)}^p| < (\xi/4)^p \Rightarrow$$

$$\|S(\pi, h-f)\|_{\mathcal{L}^P(g \otimes P)}^p \leq \|h-f\|_{\mathcal{L}^P(g \otimes P)}^p + (\xi/4)^p < 2(\xi/4)^p \leq (\xi/2)^p$$

$$\Rightarrow \|S(\pi, (h-f))\|_{\mathcal{L}^P(g \otimes P)} \leq \xi/2$$

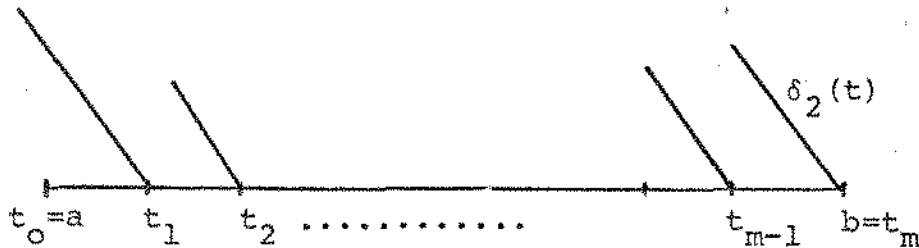
Passamos a majorar o segundo somando de (2.23)

Seja $h(t, w) = \sum_{i=1}^m u_i(w) \chi_{J_i}(t)$ com $J_i = [t_{i-1}, t_i)$, $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$

$$\text{e } J_m = [t_{m-1}, b] ;$$

$$\delta_2^* > 0$$

e a função $\delta_2(t) = \sum_{i=1}^m (t_i - t) \chi_{J_i}(t)$



Qualquer partição Itô-retardada relativa a $(\delta_2, \delta_2^*, g)$ é a reunião de m partições π_i dos intervalos J_i , relativas a $(\delta_2|_{J_i}, \delta_2^*, g)$. Ou seja $\pi = \bigcup_{i=1}^m \pi_i$

$$e \quad \|h - S(\pi, h)\|_{\mathcal{L}^p(g \otimes P)} \leq \sum_{i=1}^m \|u_i \chi_{J_i} - S(\pi_i, u_i \chi_{J_i})\|_{\mathcal{L}^p(g \otimes P)}$$

mas $u_i \chi_{J_i} - S(\pi_i, u_i \chi_{J_i})$ é distinta de zero no máximo em um conjunto de m_g -medida menor que δ_2^* , portanto

$$\|h - S(\pi, h)\|_{\mathcal{L}^p(g \otimes P)} \leq \sum_{i=1}^m \{\|u_i\|_{\mathcal{L}^p(P)}^p \delta_2^*\}^{1/p} \leq \sum_{i=1}^m \|u_i\|_{\mathcal{L}^p(P)} (\delta_2^*)^{1/p}$$

$$\text{tomando } \delta_2^* \leq \left[\frac{\xi}{4 m \sup_{i \leq m} \|u_i\|_{\mathcal{L}^p(P)}^p} \right]^p \quad \text{teremos: } \|h - S(\pi, h)\|_{\mathcal{L}^p(g \otimes P)} \leq \frac{\xi}{4}$$

Definindo agora $\delta(t) = \min \{\delta_1(t), \delta_2(t)\}$, $\delta^* = \min \{\delta_1^*, \delta_2^*\}$

$\forall \pi$ Itô-retardada relativa a (δ, δ^*, g) as três majorações serão

validas simultaneamente e (2.23) implica que:

$$\|f - S(\pi, f)\|_{\mathcal{L}^p(g \otimes P)} < \xi$$

como queríamos demonstrar.

Teorema 2.4 - seja $f \in \mathcal{L}^p(\mathcal{G})_M, \xi > 0$

$\exists \delta^* > 0$ e $\delta : D \rightarrow \mathbb{R}^+, \delta(t) > 0$ q.t.p. D, m_g tais que

$\forall \pi$ Itô-retardada relativa a (δ, δ^*, g)

$$\Pr \left[\int_D |f - S(\pi, f)|^p d g > \xi \right] < \xi$$

Demonstração: sejam f_N os processos truncados definidos em (1.18) e (1.19) que verificam $f_N \in \mathcal{L}^p(g \otimes P)_M, \|f_N\|_{\mathcal{L}^p(g \otimes P)}^p \leq N$

$$|f - S(\pi, f)|^p \leq [|f - f_N| + |f_N - S(\pi, f_N)| + |S(\pi, f - f_N)|]^p$$

e levando em conta que $\forall a, b, c \geq 0, p \geq 1: (a+b+c)^p \leq 4^{p-1} [a^p + b^p + c^p]$

teremos:

$$(2.24) \quad \Pr \left[\int_D |f - S(\pi, f)|^p d g > \xi \right] \leq \Pr \left[\int_D |f - f_N|^p d g > \frac{\xi}{3 \cdot 4^{p-1}} \right] +$$

$$+ \Pr \left[\int_D |f_N - S(\pi, f_N)|^p d g > \frac{\xi}{3.4^{p-1}} \right] +$$

$$+ \Pr \left[\int_D |S(\pi, (f_N - f))|^p d g > \frac{\xi}{3.4^{p-1}} \right]$$

Mas $\int_D |f|^p d g < \infty$ q.t.p. Ω , p pela definição de $\mathcal{E}_w^p(g)_M \Rightarrow$

$$\Rightarrow \exists N \mid \Pr \left[\int_D |f|^p d g \geq N \right] < \frac{\xi}{3} \Rightarrow \Pr \left[(f - f_N)_w \neq 0 \right] < \frac{\xi}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Pr \left[\int_D |f - f_N|^p d g > \frac{\xi}{3.4^{p-1}} \right] < \frac{\xi}{3} \\ \Pr \left[\int_D |S(\pi, f - f_N)|^p d g > \frac{\xi}{3.4^{p-1}} \right] < \frac{\xi}{3} \end{cases}$$

$f_N \in \mathcal{E}^p(g \otimes P)_M$ e pelo teorema (2.3)

$$\int_{\Omega} dP \int_D |f_N - S(\pi, f_N)|^p d g \rightarrow 0$$

$\pi \rightarrow 0$

e a desigualdade $\Pr[|y| \geq r] \leq \frac{1+r}{r} \|y\|_{\mathcal{E}^1(P)}$ válida $\forall y \in \mathcal{E}^1(P)$

e $\forall r > 0$, aplicada a $y = \int_D |f_N - S(\pi, f_N)|^p d g$ garante a existência de δ, δ^* tais que $\forall \pi$ relativa a (δ, δ^*, g) o segundo somando de (2.24) será inferior a $\frac{\epsilon}{3}$... Como queríamos demonstrar.

No capítulo III veremos que, em $L^p_w(g)_M$, a relação

$$\int_D |f - f_N|^p d g \xrightarrow{\text{Pr}} 0$$

pode metrificar-se através de uma semidistância adequada $\tilde{\rho}$.

Tomando isso em conta, o teorema 2.4 pode assim ser formalizado:

$$f = \lim_{\tilde{\rho}} S(\pi, f) \\ (\delta, \delta^*) \rightarrow (0, 0)$$

Chamaremos *partições de Reimann* as usualmente empregadas na integral de Reimann-Stieltjes, ou seja

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b \quad \text{com} \quad \tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$$

e denotaremos tamanho, diâmetro ou medida da partição

$$|\pi| = \max \{t_i - t_{i-1}, i = 1, \dots, n\}$$

Chamaremos *partições de Cauchy*, aquelas em que $\tau_i = t_{i-1}$. E a seguir veremos condições que permitem expressar a integral como limite de somas correspondentes a partições de Cauchy.

Seja E um espaço de Banach.

$f : [a, b] \rightarrow E$, limitada

$g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, monotona não decrescente, m_g a medida sobre $[a, b]$ gerada por g .

Definição - Diremos que $J \in E$ é a integral de f com relação a g no sentido de Riemann-Stieltjes se $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ tal que $\forall \pi$ de Reimann com $|\pi| < \delta \Rightarrow \|S(\pi, f, g) - J\| < \epsilon$.

Chamando $M_i = \sup_{s, z \in [t_{i-1}, t_i]} \|f(z) - f(s)\|$

temos as seguintes condições necessárias e suficientes para que exista a integral

a) $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \mid \forall \pi_1, \pi_2$ de Reimann com $|\pi_i| < \delta, i = 1, 2$

$$\|S(\pi_1, f, g) - S(\pi_2, f, g)\| < \epsilon$$

b) $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \mid \pi$ de Reimann, $|\pi| < \delta \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^m M_i (g(t_i) - g(t_{i-1})) < \epsilon$$

A prova da suficiência destas condições é a usual para funções de variáveis reais.

A seguir estabelecemos um lema cuja demonstração requer apenas os argumentos de Lebesgue para a existência da integral de Reimann tal e como aparecem reproduzidas em Hobson (11) e Hildebrandt (10).

Lema 2.5 - A condição necessária e suficiente para que f seja integrável no sentido de Reimann-Stieltjes é que seja contínua g.t.p. D , m_g e nesse caso a integral de Reimann-Stieltjes coincide com a integral de Bochner.

Demonstração: Provaremos que a condição é suficiente.

Sejam $\xi > 0$, $M = \sup_{s,t \in [a,b]} \|f(s) - f(t)\|$

$G = G^0$ aberto, contendo o conjunto de descontinuidades de f e tal que $M_g(G) < \frac{\xi}{8M}$

$F = [a,b] \setminus G$ é um compacto e pela continuidade uniforme de f sobre F existirá $\delta > 0$ tal que

$$z \in F, \quad |x-z| < \delta \implies \|f(x) - f(z)\| < \xi/4 (g(b) - g(a))$$

sejam duas partições de Reimann, π_1 e π_2 com $|\pi_i| < \delta$, $i = 1, 2$ sendo $\pi_i = \{\tau_j^i, [t_{j-1}^i, t_j^i]\}$; $a = t_0^i < t_1^i < \dots < t_{m_i}^i = b$ seja π a reunião das duas partições

$$\pi = \{z_\ell, [X_{\ell-1}, X_\ell]; \ell = 1, \dots, n\}$$

e com pontos $z_\ell \in [X_{\ell-1}, X_\ell]$ onde a função f assume valores, tais que $z_\ell \in F$ se $[X_{\ell-1}, X_\ell] \not\subset G$ sejam S_1, S_2, S as somas de Reimann correspondente a π_1, π_2, π . Decompondo os intervalos de π_i , podemos considerar que as três partições tem os mesmos intervalos.

$$\|S - S_1\| \leq \sum_{j=1}^n \|f(z_j) - f(\tau_j^1)\| (g(X_j) - g(X_{j-1}))$$

Seja π' o conjunto dos intervalos de π tais que $[X_{j-1}, X_j] \subset G$

$$\begin{aligned} \sum_{\pi'} \|f(z_j) - f(\tau_j^1)\| (g(X_j) - g(X_{j-1})) &\leq M \sum_{\pi'} (g(X_j^+) - f(X_{j-1}^+)) + \\ &+ M \sum_{\pi'} (g(X_{j-1}^+) - g(X_{j-1}^-)) = M \sum_{\pi'} m_g(X_{j-1}, X_j) + M \sum_{\pi'} m_g(X_{j-1}) \leq \\ &\leq 2 M m_g(G) \leq \frac{\xi}{4} \end{aligned}$$

$$e \sum_{\pi - \pi'} \|f(z_j) - f(\tau_j^1)\| (g(X_j) - g(X_{j-1})) \leq (g(b) - g(a)) \frac{\xi}{4(g(b) - g(a))} = \frac{\xi}{4}$$

$$\text{Portanto } \|S - S_1\| \leq \frac{\xi}{2} \Rightarrow \|S_1 - S_2\| \leq \xi$$

Passamos a provar a necessidade da condição, supondo f integrável com relação a g no sentido de Reimann-Stieltjes. Não podem existir pontos de descontinuidade comum pois entraríamos em contradição com a condição (b).

$$\text{Seja } E_K = \left\{ x \mid \frac{1}{K} < \lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{\substack{|y-x| < \delta \\ |z-x| < \delta}} \|f(y) - f(z)\| \right\} \subset E_{K+1}$$

se E_0 é o conjunto das descontinuidades de f , $E_0 = \bigcup_{K=1}^{\infty} E_K$

Seja m_g^+ a medida exterior associada a m_g e suponhamos que

$$m_g^+(E_0) > 0 \Rightarrow \exists K \mid m_g^+(E_K) = c > 0$$

Consideremos $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, uma partição qualquer de $[a, b]$

$$\text{seja } H = \{x_0, \dots, x_n\} \text{ e } H' = H \cap E_0$$

$$E_K \subset H' \cup \left(\bigcup_{i=1}^n (x_{i-1}, x_i) \right) \Rightarrow m_g^+(E_K) < m_g(H') + \sum_{i=1}^n m_g(x_{i-1}, x_i)$$

Mas, por não existir pontos comuns de descontinuidade, os pontos de H' são de continuidade de $g \Rightarrow m_g(H') = 0$

$$0 < c = m_g^+(E_K) < \sum_{i=1}^n m_g(x_{i-1}, x_i) \Rightarrow \text{para alguns } x_i$$

$$(x_{i-1}, x_i) \cap E_K \neq \emptyset$$

Nesses intervalos $[x_{i-1}, x_i]$ que contem pontos de E_K

$$M_1 = \sup_{s, t \in [x_{i-1}, x_i]} \|f(s) - f(t)\| > \frac{1}{K}$$

$$\begin{aligned} \text{E portanto } \sum_{i=1}^n M_i (g(x_i) - g(x_{i-1})) &\geq \sum_{i=1}^n M_i (g(x_i^-) - g(x_{i-1}^+)) = \\ &= \sum_{i=1}^n M_i m_g(x_{i-1}, x_i) \geq \frac{c}{K} \end{aligned}$$

e a função não seria integrável no sentido de Reimann-Stieltjes contra o suposto.

Se f é limitada e contínua q.t.p. $\Rightarrow$ mensurável e integrável no sentido de Bochner.

Para provar a igualdade com o integral de Bochner considere-ramos uma partição π de $[a, b]$ de diametro $\delta > 0$ com

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

onde os pontos intermediários $x_1, \dots, x_{n-1}$ sejam pontos de continuidade de g . Isto é sempre possível pois as descontinuidades de g são no máximo, um conjunto numerável. Nestas condições a integral de Bochner:

$$\int_{[a, b]} f \, d g = \sum_{i=1}^n \int_{[x_{i-1}, x_i]} f \, d g$$

$$e \quad \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) (g(x_i) - g(x_{i-1})) = \sum_{i=1}^n \int_{[x_{i-1}, x_i]} f(x_{i-1}) d g$$

$$\begin{aligned} \text{Portanto} \quad & \left\| \int_{[a,b]} f d g - \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) (g(x_i) - g(x_{i-1})) \right\| = \\ & = \left\| \sum_{i=1}^n \int_{[x_{i-1}, x_i]} (f(u) - f(x_{i-1})) d g \right\| \leq \sum_{i=1}^n \left\| \int_{[x_{i-1}, x_i]} (f(u) - f(x_{i-1})) d g \right\| \leq \\ & \leq \sum_{i=1}^n \int_{[x_{i-1}, x_i]} \|f(u) - f(x_{i-1})\| d g \leq \sum_{i=1}^n M_i (g(x_i) - g(x_{i-1})) \rightarrow 0 \\ & \delta \rightarrow 0 \end{aligned}$$

onde concluímos a demonstração do lema 2.5

Teorema 2.6 - Seja $f \in \mathcal{L}^p(g \otimes P)_M$ um processo L^p -limitado e L^p -contínuo q.t.p. D, m_g com g monótona não decrescente ; ou seja que a função

$$D \ni t \longrightarrow f_t \in \mathcal{L}^p(P)$$

é limitada e contínua q.t.p. D, m_g . Nestas condições se $\{\pi\}$ são partições de Cauchy de D determinadas pelos pontos

$$\pi = \{ a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b \}$$

$$S(\pi, f) = \sum_{i=1}^{n-1} f_{t_{i-1}} \chi_{[t_{i-1}, t_i)} + f_{t_{n-1}} \chi_{[t_{n-1}, b]} \xrightarrow[\|\pi\| \rightarrow 0]{L^p(g \otimes P)} f$$

Demonstração: seja $\|f_t\|_{L^p(P)} < M$ e $M_1 = \sup_{x, z \in [t_{i-1}, t_i]} \|f_x - f_z\|_{L^p(P)}$

$$\begin{aligned} \|f - S(\pi, f)\|_{L^p(g \otimes P)}^p &= \int_D dg \int_{\Omega} |f - S(\pi, f)|^p dP = \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \int_{[t_{i-1}, t_i]} \|f_t - f_{t_{i-1}}\|_{L^p(P)}^p dg + \int_{[t_{n-1}, b]} \|f_t - f_{t_{n-1}}\|_{L^p(P)}^p dg \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \int_{[t_{i-1}, t_i]} \|f_t - f_{t_{i-1}}\|_{L^p(P)}^p dg + \int_{[t_{n-1}, b]} \|f_t - f_{t_{n-1}}\|_{L^p(P)}^p dg \leq \\ &\leq (2M)^{p-1} \sum_{i=1}^n M_1 (g(t_i) - g(t_{i-1})) \end{aligned}$$

e o teorema resulta uma consequência do lema 2.5 e a condição de integrabilidade (b).

Teorema 2.7 - Seja $R[g]$ o conjunto de funções integráveis com relação a g no sentido de Reimann-Stieltjes, $\{\pi\}$ partições de Cauchy e $f \in L^p_w(g)_M$ tal que $f_w \in R[g]$ q.t.p. Ω, P .

Se verifica que:

$$\int_D |f_w - S(\pi, f)_w|^p dg \xrightarrow[\|\pi\| \rightarrow 0]{Pr} 0$$

Demonstração: seja π definida por $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$

$M(w)$ majorante de $\{|f(t, w)|, t \in D\}$

$M_i(w), m_i(w)$ sup. e inf. de $f(t, w)$ no intervalo $[t_{i-1}, t_i]$

Quase em toda parte teremos:

$$\begin{aligned} |f_w - S(\pi, f)_w|^p &= \sum_{i=1}^{n-1} |f(t, w) - f(t_{i-1}, w)|^p \chi_{[t_{i-1}, t_i]}(t) + \\ &+ |f(t, w) - f(t_{n-1}, w)|^p \chi_{[t_{n-1}, b]}(t) \end{aligned}$$

e pelos mesmos argumentos empregados no teorema 2.6

$$\int_D |f_w - S(\pi, f)_w|^p dg \leq (2 M(w))^{p-1} \sum_{i=1}^n (M_i(w) - m_i(w)) (g(t_i) - g(t_{i-1}))$$

e pela condição de integrabilidade assumida.

$$\int_D |f_w - S(\pi, f)_w|^p dg \xrightarrow[\|\pi\| \rightarrow 0]{} 0 \text{ q.t.p. } \Omega, p \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_D |f_w - S(\pi, f)_w|^p dg \xrightarrow[|\pi| \rightarrow 0]{Pr} 0.$$

como queriamos demonstrar.

CAPITULO III

UM TEOREMA DE EXTENSÃO

Desigualdades Elementares -

Empregaremos sistematicamente as seguintes desigualdades conhecidas, em que y é uma variável aleatória e s, ξ constantes, $\xi > 0$, $s > 0$

$$(3.1) \quad \xi^s \Pr[|y| \geq \xi] \leq \int_{|y| \geq \xi} |y|^s dP \leq \int_{\Omega} |y|^s dP = \|y\|_{L^s(P)}^s$$

$$(3.2) \quad \Pr[|y| \geq \xi] \leq \frac{1+\xi}{\xi} \int_{\Omega} \frac{|y|}{1+|y|} dP \leq \frac{1+\xi}{\xi} \|y\|_{L^1(P)}$$

$$(3.3) \quad \int_{\Omega} \frac{|y|}{1+|y|} dP \leq \Pr[|y| \geq \xi] + \frac{\xi}{1+\xi} \Pr[|y| < \xi] \leq \Pr[|y| \geq \xi] + \frac{\xi}{1+\xi}$$

$$(3.4) \quad 0 \leq \gamma_1 \leq \gamma_2 \quad \frac{\gamma_1}{1+\gamma_1} \leq \frac{\gamma_2}{1+\gamma_2}$$

$$(3.5) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \frac{|\alpha + \beta|}{1 + |\alpha + \beta|} \leq \frac{|\alpha|}{1 + |\alpha|} + \frac{|\beta|}{1 + |\beta|}$$

$$(3.6) \quad \forall a, b \geq 0, \quad p \geq 1 \quad \left(\frac{a+b}{2} \right)^p \leq \frac{1}{2} (a^p + b^p)$$

Teorema de extensão:

Sejam $p, p' \geq 1$.

Seja ζ uma aplicação linear:

$$\zeta : \mathcal{E}_{\ell, M} \rightarrow \mathcal{L}^{p'}(P),$$

contínua com respeito às respectivas seminormas de:

$$\mathcal{L}^p(g \otimes P) \quad \text{e} \quad \mathcal{L}^{p'}(P)$$

e verificando a condição:

$$(3.7) \quad \text{Se } f \in \mathcal{E}_{\ell, M} \text{ e } f_{w_0} = 0 \text{ para } w_0 \in \Omega, \text{ ou seja, se } f(t, w_0) = 0, \forall t \in D \text{ então } \zeta(f)(w_0) = 0.$$

Nestas condições existe uma extensão de ζ ao espaço $\mathcal{L}^p(g \otimes P)_M$, contínua e quase linear (§), compátivel com uma extensão ao espaço $\mathcal{L}_w^p(g)_M$.

$$(\S) \Rightarrow K \in \mathbb{R}, f, f' \in \mathcal{L}^p(g \otimes P)_M \Rightarrow \zeta(Kf) = K \zeta(f)$$

q.t.p. Ω, P

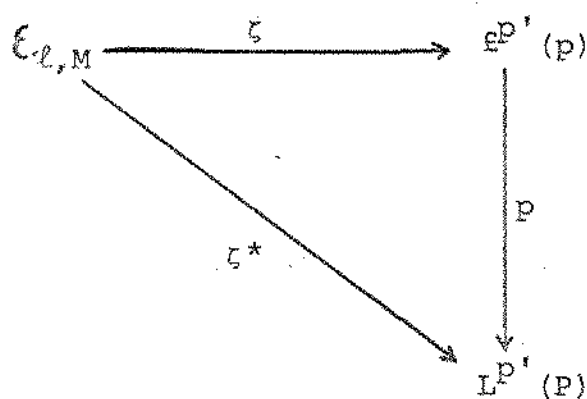
$$\zeta(f + f') = \zeta(f) + \zeta(f')$$

Demonstração:

Seja $p : \mathcal{L}^{p'}(P) \rightarrow L^{p'}(P)$;

a aplicação $p(f) = \{h \in \mathcal{L}^{p'}(P) \mid f = h \text{ q.t.p. } \Omega, P\}$;

a aplicação $\zeta^* = p \circ \zeta$



é uma aplicação linear e contínua do espaço $\mathcal{E}_{\ell, M}$ no espaço de Banach $L^{p'}(P)$. E $\|\zeta^*\| = \|\zeta\|$

Mas, pelo primeiro teorema de aproximação $\mathcal{E}_{\ell, M}$ é denso em $\mathcal{L}^p(g \otimes P)_M$ e portanto existirá uma única extensão contínua de ζ^* a $L^p(g \otimes P)$ que conservará a norma da aplicação ζ . A esta extensão seguiremos chamando-a ζ^* , definida por:

$$\forall f \in \mathcal{L}^p(g \otimes P)_M, \quad \zeta^*(f) = \lim_{L^{p'}(P)} \zeta^*(f_n)$$

com $f_n \in \mathcal{E}_{\ell, M}$, $\|f - f_n\|_{\mathcal{L}^p(g \otimes P)} \rightarrow 0$

Se para todo $f \in L^p(g \otimes P)_M$ escolhemos um certo representante de $\zeta^*(f)$ em $L^{p'}(P)$, ou seja, um $\alpha \in L^{p'}(P)$ tal que $p(\alpha) = \zeta^*(f)$, tomando $\alpha = \zeta(f)$ se $f \in \mathcal{E}_{L,M}$, obteremos uma aplicação:

$$L^p(g \otimes P)_M \rightarrow L^{p'}(P),$$

que diremos ser uma versão da extensão de ζ e que seguiremos chamando ζ .

Verifica-se obviamente que:

$$\forall f \in L^p(g \otimes P)_M \Rightarrow p \circ \zeta(f) = \zeta^*(f)$$

$$\text{e } \|\zeta(f)\|_{L^{p'}(P)} = \|\zeta^*(f)\|_{L^{p'}(P)}.$$

Essas possíveis versões da extensão são funções contínuas :

$$\|\zeta(f - g)\|_{L^{p'}(P)} = \|\zeta^*(f - g)\|_{L^{p'}(P)} \leq \|\zeta\| \|f - g\|_{L^p(g \otimes P)}$$

e são funções quase-lineares no seguinte sentido.

Sejam $f, h \in L^p(g \otimes P)_M$; $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} p[\zeta(K_1 f + K_2 h)] &= \zeta^*(K_1 f + K_2 h) = \\ &= K_1(\zeta^*(f)) + K_2(\zeta^*(h)) = \\ &= K_1 p(\zeta(f)) + K_2 p(\zeta(h)) = \end{aligned}$$

$$= \int (K_1 \zeta(f) + K_2 \zeta(h))$$

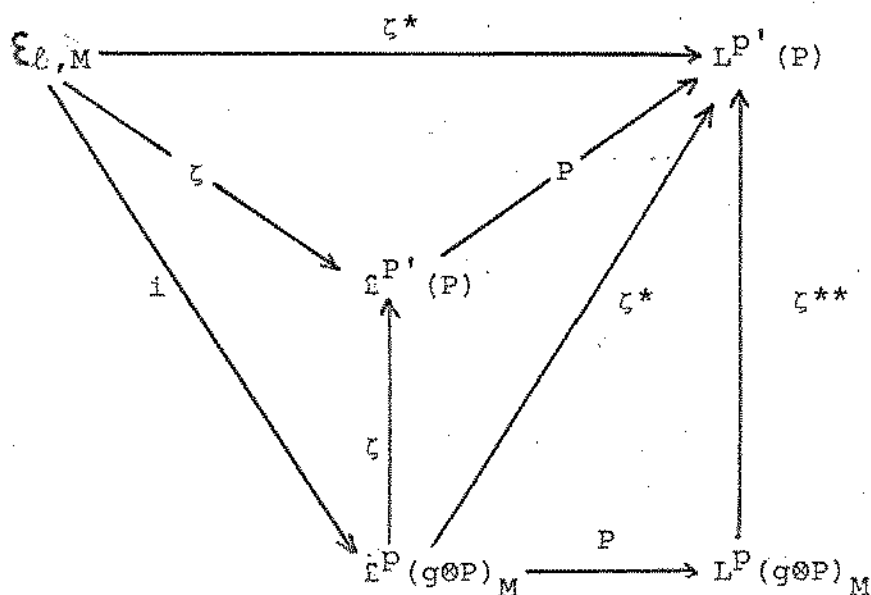
$$\Rightarrow \zeta(K_1 f + K_2 h) = K_1 \zeta(f) + K_2 \zeta(h) \quad \text{q.t.p. } \Omega, P$$

Por outro lado, a continuidade de ζ^* implica que, se $f, h \in \mathcal{E}^P(g \otimes P)$ e $\|f - h\|_{\mathcal{E}^P(g \otimes P)} = 0$, ou seja $f = h$ q.t.p. $D \times \Omega$, $g \otimes P$, então:

$$\zeta^*(f) = \zeta^*(h), \text{ e portanto que a aplicação:}$$

$$\zeta^{**} : L^P(g \otimes P)_M \rightarrow L^{P'}(P),$$

dada por $\zeta^{**}(\bar{f}) = \zeta^*(f)$, sendo f um representante qualquer da classe $\bar{f} \in L^P(g \otimes P)$, está bem definida e obtemos, portanto, o seguinte diagrama comutativo:



Como consequência da continuidade da extensão teremos o óbvio:

Teorema 3.1 : Se $\{f_n\}$, $f \in L^p(g \otimes P)_M$,

$$\|f_n - f\|_{L^p(g \otimes P)} \rightarrow 0 \implies \|\zeta(f) - \zeta(f_n)\|_{L^p(P)} \rightarrow 0$$

Passamos a construir agora a extensão a $L^p_w(g)_M$.

Teorema 3.2 - Seja $f \in L^{p,1}(g \otimes P)_M$, $\Omega_0 \in \mathcal{Q}$ tal que $f(s, w) = 0 \quad \forall s \in D, w \in \Omega_0$; e seja α uma versão de $\zeta(f)$.

Existe $\Omega_1 \subset \Omega_0$ com $\Pr(\Omega_1) = \Pr(\Omega_0)$ tal que $\alpha(w) = 0, \quad \forall w \in \Omega_1$.

Demonstração: Revendo a construção dos processos em escada que aproximam f , tal como o fizemos em [I], observamos que a propriedade $f(s, w) = 0 \quad \forall s \in D, w \in \Omega_0$ continuará sendo verificada pelos:

- processos limitados

$$f_N(t, w) = \zeta_N(f(t, w)), \text{ obtidos a partir de } f \text{ e definidos em (1.13)}$$

- processos contínuos obtidos a partir dos limitados anteriores e definidos por (1.1)

- processos em escada obtidos a partir dos contínuos anteriores e definidos por (1.7)

os processos α_n, β_n^* definidos em (1.12) e (1.13)

Ou seja, podemos escolher os f_n , em escada, tais que:

$$\|f - f_n\|_{L^P(g \otimes P)} \rightarrow 0,$$

$$f_n(s, w) = 0 \quad \forall s \in D, \forall w \in \Omega_0$$

Pela condição (3.7) temos $\zeta(f_n)(w) = 0, \quad \forall w \in \Omega_0$.

$$\text{Mas, } \zeta(f_n) \xrightarrow{L^P(P)} \alpha \Rightarrow \chi_{\Omega_0} \cdot \zeta(f_n) \xrightarrow{L^P(P)} \chi_{\Omega_0} \cdot \alpha$$

$\Rightarrow \chi_{\Omega_0} \zeta(f_{n_K}) \rightarrow \chi_{\Omega_0} \cdot \alpha$ pontualmente q.t.p. Ω, P para uma certa subsucessão n_K . E como acabamos de ver $\chi_{\Omega_0} \zeta(f_{n_K}) = 0 \rightarrow \chi_{\Omega_0} \cdot \alpha = 0$ q.t.p. Ω, P . O que demonstra o teorema.

Colorário: Se $f, h \in L^P(g \otimes P)_M$, $\Omega_0 \in \mathcal{Q}$ com $f(s, w) = h(s, w) \quad \forall s \in D, w \in \Omega_0$, [ou se preferirmos $f_w = h_w, \quad \forall w \in \Omega_0$] e α, β são versões, respectivamente, de $\zeta(f), \zeta(h)$:

existe $\Omega_1 \subset \Omega_0$ com $\Pr(\Omega_0) = \Pr(\Omega_1)$ tal que

$$\alpha(w) = \beta(w) \quad \forall w \in \Omega_1.$$

Consideremos a seguir $f \in L^P(g \otimes P)_M$, $r > 0$ e $\xi > 0$. Definimos como em (1.18).

$$f_r(t, w) = f(t, w) \chi_{[a, \ell(w))}(t),$$

$$\text{sendo } \ell(w) = \sup \left\{ s \mid \int_a^s |f(u, w)|^p d g(u) < r \right\}$$

$$= b + 1 \text{ se } \int_a^b |f(u, w)|^p d g(u) < r$$

Como já foi demonstrado em [I], $f_r \in L^P(g \otimes P)_M$ e por (1.20),

$$\|f_r\|_{L^P(g \otimes P)}^p \leq r$$

Pela quase linearidade de ζ :

$$\zeta(f) = \zeta(f_r) + \zeta(f - f_r) \quad \text{q.t.p. } \Omega, P \implies$$

$$(3.9) \implies \Pr \{ w \mid |\zeta(f)| \geq \xi \} \leq \Pr \{ w \mid |\zeta(f - f_r)| > 0 \} +$$

$$+ \Pr \{ w \mid |\zeta(f_r)| \geq \xi \}$$

Mas

$$(3.10) \quad \Pr \{ w \mid (f - f_r)_w = 0 \} \geq \Pr \left\{ w \mid \int_{[a, b]} |f|^p d g < r \right\}$$

e pelo teorema 3.2

$$(3.11) \quad \Pr\{w \mid \zeta(f)_w - \zeta(f_r)_w = 0\} \geq \Pr\{w \mid (f-f_r)_w = 0\}$$

de (3.9), (3.10) e (3.11) deduzimos:

$$(3.12) \quad \Pr[|\zeta(f)| \geq \xi] \leq \Pr[|\zeta(f_r)| \geq \xi] + \\ \Pr\left[\int_D |f|^p dg \geq r\right].$$

Pela desigualdade (3.1),

$$\Pr[|\zeta(f_r)| \geq \xi] \leq \frac{1}{\xi^{p'}} \|\zeta(f_r)\|_{L^{p'}(P)}$$

e, pela continuidade de ζ :

$$\Pr[|\zeta(f_r)| \geq \xi] \leq \frac{1}{\xi^{p'}} \|\zeta\| \|f_r\|_{L^p(g \otimes P)} \leq \frac{\|\zeta\|}{\xi^{p'}} r^{1/p}$$

e substituindo em (3.12) aparece:

$$(3.13) \quad \Pr[|\zeta(f)| \geq \xi] \leq \Pr\left[\int_D |f|^p dg \geq r\right] + \frac{\|\zeta\|}{\xi^{p'}} r^{1/p}$$

e se aplicarmos a desigualdade (3.2) temos

$$\Pr[|\zeta(f_r)| \geq \xi] \leq \frac{1+\xi}{\xi} \|\zeta(f_r)\|_{L^{p'}(P)} \leq \frac{1+\xi}{\xi} \|\zeta\| r^{1/p}$$

que levada a (3.12) fornece:

$$(3.14) \quad \Pr [|\zeta(f)| \geq \xi] \leq \Pr \left[\int_D |f|^p d g \geq r \right] + \frac{1+\xi}{\xi} \|\zeta\| r^{1/p}$$

Ambas desigualdades (3.13) e (3.14) válidas $\forall \xi, r > 0$.

Com elas, estamos em condições de estender ζ a $\mathcal{L}_W^p(g)_M$.

Seja $f \in \mathcal{L}_W^p(g)_M$.

Pelo teorema (1.2), $\exists f_n \in \mathcal{L}_{\ell, M}$ tais que:

$$(3.15) \quad \int_D |f - f_n|^p d g \xrightarrow{\Pr} 0 \Rightarrow \int_D |f_n - f_m|^p d g \xrightarrow{\Pr} 0$$

$n \rightarrow \infty \qquad \qquad \qquad n, m \rightarrow \infty$

e pela desigualdade (3.13) temos:

$$(3.16) \quad \Pr [|\zeta(f_n) - \zeta(f_m)| \geq \xi] \leq \Pr \left[\int_D |f_n - f_m|^p d g \geq r \right] +$$

$$+ \frac{\|\zeta\| r^{1/p}}{\xi^{p'}}$$

ou ainda, pela (3.14) :

$$\Pr[|\zeta(f_n) - \zeta(f_m)| \geq \xi] \leq \Pr\left[\int_D |f_n - f_m|^p d g \geq r\right] + \left(\frac{1+\xi}{\xi}\right) \|\zeta\| r^{1/p}$$

ambas sendo válidas $\forall r, \xi > 0$; qualquer delas junto a (3.15) implicam que $\{\zeta(f_n)\}$ é de Cauchy em probabilidade.

$$\text{Definimos portanto } \zeta(f) = \lim_{\text{Pr}} \zeta(f_n)$$

Como limite em probabilidade, para valorizar $\zeta(f)$, podemos escolher uma entre uma classe de variáveis que coincidem q.t.p.Ω, P.E., como anteriormente, chamaremos *versão da extensão* a uma determinada escolha dessas variáveis.

Ou seja, a rigor, a definição da extensão seria:

$$\zeta(f) = \lim_{\text{Pr}} \zeta(f_n) \text{ se } \{f_n\} \subset \mathcal{E}_{\ell, M}, \int_D |f - f_n|^p d g \xrightarrow{\text{Pr}} 0$$

Primeiramente, vamos provar que essa definição é possível, ou seja, que a classe a partir da qual extraímos o valor da versão, $\zeta(f)$, não depende da sucessão $\{f_n\}$, de processos em escada, usada para aproximar f .

De fato, se $\{f_n^*\}$ fosse uma nova sucessão tal que:

$$\int_D |f - f_n^*|^p d g \xrightarrow{\text{Pr}} 0$$

$n \rightarrow \infty$

consideraríamos a sucessão $f_1, f_1^*, \dots, f_n, f_n^*, \dots = \{\alpha_n\}$ que seria uma terceira subsucessão verificando:

$$\int_D |f - \alpha_n|^p d g \xrightarrow{\text{Pr}} 0$$

e por (3.15), (3.16) concluiríamos que $\{\zeta(\alpha_n)\}$ seria convergente em probabilidade e sendo $\{\zeta(f_n)\}$, $\{\zeta(f_n^*)\}$ subsucessões de $\{\zeta(\alpha_n)\}$, definem a mesma classe como limite em probabilidade.

A compatibilidade com a primeira fase da extensão resulta imediata, pois:

$$\text{se } f \in \mathcal{L}^p(g \otimes P)_M ; f_n \in \mathcal{E}_{\ell, M} \text{ tais que } \|f - f_n\|_{\mathcal{L}^p(g \otimes P)} \longrightarrow 0$$

$n \rightarrow \infty$

a extensão primeiramente definida verificará:

$$\zeta(f) \in \lim_{\substack{\mathcal{L}^{P'}(P) \\ n \rightarrow \infty}} \zeta(f_n) \implies \zeta(f) = \lim_{\substack{\text{Pr} \\ n \rightarrow \infty}} \zeta(f_n)$$

$$\text{Mas } \|f - f_n\|_{\mathcal{L}^P(g \otimes P)}^P = \int_{\Omega} dP \int_D |f - f_n|^P dg \longrightarrow 0$$

$$\Rightarrow \int_D |f - f_n|^P dg \xrightarrow{\text{Pr}} 0$$

$$\text{e } \zeta(f) \in \lim_{\substack{\text{Pr}}} \zeta(f_n) \quad \text{se} \quad \int_D |f - f_n|^P dg \xrightarrow{\text{Pr}} 0$$

com $\{f_n\} \subset \mathcal{E}_{\ell, M}$ é a definição atual.

Linearidade da extensão:

Sejam $f, h \in \mathcal{L}_W^P(g)_M$, $\{f_n\}, \{h_n\} \subset \mathcal{E}_{\ell, M}$ tais que:

$$\int_D |f - f_n|^P dg \xrightarrow{\text{Pr}} 0, \quad \int_D |h - h_n|^P dg \xrightarrow{\text{Pr}} 0$$

Pela definição da extensão:

$$\zeta(f) \in \lim_{\text{Pr}} \zeta(f_n); \quad \zeta(h) \in \lim_{\text{Pr}} \zeta(h_n)$$

Sejam $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$

$$\int_D |k_1 f + k_2 h - (k_1 f_n + k_2 h_n)|^p dg = \int_D |k_1 (f - f_n) + k_2 (h - h_n)|^p dg \leq$$

pela desigualdade (3.6)

$$\leq 2^{p-1} \left[|k_1|^p \int_D |f - f_n|^p dg + |k_2|^p \int_D |h - h_n|^p dg \right]$$

e deduzimos portanto que:

$$\int_D |k_1 f + k_2 h - (k_1 f_n + k_2 h_n)|^p dg \xrightarrow{\text{Pr}} 0$$

e pela definição da extensão:

$$\zeta(k_1 f + k_2 h) = \lim_{\text{Pr}} \zeta(k_1 f_n + k_2 h_n) =$$

$$= k_1 \lim_{\text{Pr}} \zeta(f_n) + k_2 \lim_{\text{Pr}} \zeta(h_n) = k_1 \zeta(f) + k_2 \zeta(h)$$

Portanto: $\zeta(k_1 f + k_2 h) = k_1 \zeta(f) + k_2 \zeta(h)$, q.t.p. Ω, p e a extensão definida é uma aplicação quase linear.

Extensão das desigualdades (3.13) e (3.14):

Seja $f \in L^p_W(g)_M$; $\{f_n\}$, $f_n \in \mathcal{E}_{\ell, M}$ tais que

$$\int_D |f - f_n|^p d g \xrightarrow{\text{Pr}} 0 \\ n \rightarrow \infty$$

Sejam $r_2 > r > 0$ e $\xi > \xi_2 > 0$

$$\text{Por (3.13), } \Pr \left[|\zeta(f_n)| \geq \xi_2 \right] \leq \Pr \left[\int_D |f_n|^p d g \geq r_2 \right] +$$

$$+ \frac{\|\zeta\| r_2^{1/p}}{\xi_2^{p'}}$$

$$\text{e } \Pr \left[|\zeta(f)| \geq \xi \right] \leq \Pr \left[|\zeta(f_n)| \geq \xi_2 \right] + \Pr \left[|\zeta(f-f_n)| \geq \xi - \xi_2 \right]$$

$$(3.17) \quad \Pr \left[|\zeta(f)| \geq \xi \right] \leq \Pr \left[|\zeta(f-f_n)| \geq \xi - \xi_2 \right] +$$

$$+ \Pr \left[\int_D |(f_n - f) + f|^p d g \geq r_2 \right] + \frac{\|\zeta\| r_2^{1/p}}{\xi^{p'}}$$

mas pela desigualdade (3.6)

$$\begin{aligned} \Pr \left[\int_D |(f_n - f) + f|^p dg \geq r_2 \right] &\leq \Pr \left[2^{p-1} \int_D (|f_n - f|^p + |f|^p) dg \geq r_2 \right] \leq \\ &\leq \Pr \left[\int_D |f - f_n|^p dg \geq \frac{r_2 - r}{2^{p-1}} \right] + \Pr \left[\int_D |f|^p dg \geq \frac{r}{2^{p-1}} \right] \end{aligned}$$

que substituindo em (3.17) e fazendo $n \rightarrow \infty$ teremos

$$\Pr \left[|\zeta(f)| \geq \xi \right] \leq \Pr \left[\int_D |f|^p dg \geq \frac{r}{2^{p-1}} \right] + \frac{\|\zeta\| r^{1/p}}{\xi^{p'}}$$

e fazendo agora $\xi_2 + \xi$, $r_2 + r$ obtemos:

$$(3.18) \quad \Pr \left[|\zeta(f)| \geq \xi \right] \leq \Pr \left[\int_D |f|^p dg \geq \frac{r}{2^{p-1}} \right] + \frac{\|\zeta\| r^{1/p}}{\xi^{p'}}$$

e analogamente, empregando (3.14) para majorar $\Pr [|\zeta(f_n)| \geq \xi_2]$

obteríamos:

$$(3.19) \quad \Pr \left[|\zeta(f)| \geq \xi \right] \leq \Pr \left[\int_D |f|^p dg \geq \frac{r}{2^{p-1}} \right] + \frac{\|\zeta\| r^{1/p} (1 + \xi)}{\xi}$$

As desigualdades (3.18) e (3.19) sendo válidas $\forall \xi, r > 0$

Teorema 3.3 : Sejam $\{f_n\}$, f processos de $\mathcal{L}_w^p(g)_M$ tais que:

$$\int |f - f_n|^p dg \xrightarrow{\Pr} 0,$$

então: $\zeta(f_n) \xrightarrow{\Pr} \zeta(f)$

A demonstração é uma consequência direta das desigualdades (3.18) e (3.19) considerando-se $f - f_n$ em lugar de f .

Extensão do teorema 3.2:

Teorema 3.4 : Seja $f \in \mathcal{L}_w^p(g)_M$, $\Omega_0 \in \mathcal{Q}$ tal que:

$f(s, w) = 0$, $\forall s \in D$, $w \in \Omega_0$ e seja α uma versão de $\zeta(f)$.

Existe $\Omega_1 \subset \Omega_0$ com $\Pr(\Omega_1) = \Pr(\Omega_0)$ tal que:

$$\alpha(w) = 0, \quad \forall w \in \Omega_1.$$

Demonstração: Para todo N natural definimos, como em (1.18):

$$f_N(t, w) = \chi_{[a, \ell(w))}(t) \cdot f(t, w)$$

Pela própria definição de $\mathcal{L}_w^P(g)_M$ temos:

$$\int_D |f - f_N|^P dg \rightarrow 0 \quad \text{q.t.p. } \Omega, P,$$

$$\text{e portanto, } \int_D |f - f_N|^P dg \xrightarrow{\Pr} 0,$$

e pelo teorema (3.3), $\alpha = \lim_{\Pr} \alpha_N$ onde α_N são verões de $\zeta(f_N)$.

Existe uma subsucessão α_{N_k} e um evento $\Omega^* \in \mathcal{Q}$, com $\Pr(\Omega^*) = 1$, tais que:

$$\alpha_{N_k}(w) \rightarrow \alpha(w) \quad \forall w \in \Omega^*.$$

$$k \rightarrow \infty$$

Por outro lado, $f_N \in \mathcal{L}^P(g \otimes P)$ e $f_N(s, w) = 0 \quad \forall s \in D,$

$w \in \Omega_0$.

Pelo próprio teorema 3.2, $\exists \Omega_N$, com $\Pr(\Omega_N) = \Pr(\Omega_0)$ e $\alpha_N(w) = 0$, $\forall w \in \Omega_N$

Tomando $\Omega^{**} = \bigcap_N \Omega_N \Rightarrow \Pr(\Omega^{**}) = \Pr(\Omega_0)$ e $\alpha_N(w) = 0$, $\forall w \in \Omega^{**}$.

Tomando finalmente $\Omega_1 = \Omega^* \cap \Omega^{**} \Rightarrow \Omega_1 \subset \Omega^{**} \subset \Omega_0$,

$\Pr(\Omega_1) = \Pr(\Omega_0)$ e $\forall w \in \Omega_1 \subset \Omega^*$, $\alpha(w) = \lim_{k \rightarrow \infty} (\alpha_{N_k})(w) = \lim(0) = 0$

E a consequência óbvia:

Se $f, h \in \mathcal{F}_W^P(g)_M$, $\Omega_0 \in \mathcal{Q}$ tal que;

$f(s, w) = h(s, w) \quad \forall s \in D, w \in \Omega_0$ e se α, β são versões de $\zeta(f), \zeta(h)$, existe:

$\Omega_1 \subset \Omega_0$, com $\Pr(\Omega_1) = \Pr(\Omega_0)$ e $\forall w \in \Omega_1, \alpha(w) = \beta(w)$

Metatrificação do Teorema da extensão:

O espaço X , das variáveis aleatórias sobre Ω , pode se considerar um espaço semimétrico com a semi-distância:

$$(3.20) \quad \rho(f, h) = \int_{\Omega} \frac{|f - h|}{1 + |f - h|} dP$$

A demonstração de que ρ é efetivamente uma semi-distância, cujos limites coincidem com os limites em probabilidade aparece, por exemplo, no texto de Yeh(), capítulo 19. Vamos proceder a uma demonstração análoga para provar que $f_W^P(g)_M$ também se pode considerar um espaço semi-métrico com a semi-distância.

$$(3.21) \quad \tilde{\rho}(f, h) = \int_{\Omega} \frac{\left(\int_D |f-h|^P d g \right)^{1/p}}{1 + \left(\int_D |f-h|^P d g \right)^{1/p}} dP$$

A função $\tilde{\rho}$ verifica as propriedades de uma semi-distância:

$$- \tilde{\rho}(f, h) \geq 0, \quad \forall f, h \in f_W^P(g)_M$$

$$- \tilde{\rho}(f, f) = 0$$

$$- \tilde{\rho}(f, l) \leq \tilde{\rho}(f, h) + \tilde{\rho}(h, l)$$

De fato, pela desigualdade (3.4):

$$\tilde{\rho}(f, \ell) \leq \left[\frac{\left(\int_D |f-h|^p d g \right)^{1/p} + \left(\int_D |h-\ell|^p d g \right)^{1/p}}{1 + \left(\int_D |f-h|^p d g \right)^{1/p} + \left(\int_D |h-\ell|^p d g \right)^{1/p}} \right]^p \leq$$

$\leq \tilde{\rho}(f, h) + \tilde{\rho}(h, \ell)$ pela desigualdade (3.5)

A semi-distância $\tilde{\rho}$, sobre o subespaço $L^p(g \otimes P)_M$, esta dominada pela semi-distância própria de $L^p(g \otimes P)_M$ como espaço seminormado:

se $f, h \in L^p(g \otimes P)$

$$\tilde{\rho}(f, h) \leq \left[\int_D \left(\int |f-h|^p d g \right)^{1/p} d P \leq$$

$$\leq \left[\int_D \int |f-h|^p d g \right]^{1/p} = \|f-h\|_{L^p(g \otimes P)}$$

Com relação a esta semi-distância, o espaço $\mathcal{E}_{\ell, M}$ é denso em $\mathcal{E}_W^P(g)_M$.

De fato, seja:

$f \in \mathcal{E}_W^P(g)_M$, $\{f_n\} \subset \mathcal{E}_{\ell, M}$ tais que:

$$(2,23) \quad \int_D |f - f_n|^p dg \xrightarrow{\text{Pr}} 0$$

pela desigualdade (3.3), $\forall \xi > 0$, $r > 0$

$$(3.24) \quad \tilde{\rho}(f, f_n) = \left[\frac{\left(\int_D |f - f_n|^p dg \right)^{1/p}}{1 + \left(\int_D |f - f_n|^p dg \right)^{1/p}} \right] dP \leq$$

$$\leq P_r \left[\int_D |f - f_n|^p dg \geq \xi^p \right] + \frac{\xi}{1 + \xi}$$

que junto a (3.23) demonstra a densidade de $\mathcal{E}_{\ell, M}$ em $\mathcal{L}_w^p(g)_M$.

Seja agora $f, h \in \mathcal{E}_{\ell, M} \subset \mathcal{L}^p(g \otimes P)_M$;

$\zeta : \mathcal{E}_{\ell, M} \longrightarrow \mathcal{L}^{p'}(P)$ continua com relação às seminormas. Pela desigualdade (3.3).

$$(3.25) \quad \rho(\zeta(f), \zeta(h)) \leq \Pr \left[|\zeta(f) - \zeta(h)| \geq \xi \right] + \frac{\xi}{1 + \xi}$$

Pela desigualdade (3.13)

$$\Pr \left[|\zeta(f) - \zeta(h)| \geq \xi \right] \leq \Pr \left[\int_D |f - h|^p d g \geq r \right] + \frac{\|\zeta\| r^{1/p}}{\xi^{p'}}$$

Pela desigualdade (3.2)

$$\begin{aligned} \Pr \left[\int_D |f - h|^p d g \geq r \right] &= \Pr \left[\left(\int_D |f - h|^p d g \right)^{1/p} \geq r^{1/p} \right] \\ &\leq \frac{1 + r^{1/p}}{r^{1/p}} \rho(f, h). \end{aligned}$$

e substituindo em (3.25) :

$$(3.26) \quad \rho(\zeta(f), \zeta(h)) < \frac{\xi}{1+\xi} + \frac{\|\zeta\| r^{1/p}}{\xi^{p'}} + \frac{1+r^{1/p}}{r^{1/p}} \tilde{\rho}(f,h)$$

e esta desigualdade implica a continuidade de ζ com relação a $\rho, \tilde{\rho}$.

Vamos identificar o espaço métrico associado a $E_W^P(g)_M, \tilde{\rho}$.

Sejam $f, h \in E_W^P(g)_M$ e seja:

$$\tilde{\rho}(f,h) = \frac{\left(\int_D |f-h|^P d g \right)^{1/p}}{\int_D 1 + \left((f-h)^P d g \right)^{1/p}} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\int_D |f-h|^P d g \right)^{1/p} = 0 \quad \text{q.t.p. } \Omega, P \Rightarrow$$

$$\exists \Omega_0 \in \Omega \text{ com } Pr(\Omega_0) = 1 \text{ tal que } \forall w \in \Omega_0, f(t,w) =$$

$$= h(t,w) \quad \text{q.t.p. } D, m_g.$$

Ou seja, f, h são representantes de um mesmo elemento de $L_W^p(g)$.

Portanto o espaço métrico associado a $L_W^p(g)_M$ é $L_W^p(g)_M$.

Seja: X, ρ , o espaço métrico associado a X, ρ e, seja: $p: X \rightarrow X = X/\sim$, donde a aplicação p faz corresponder a cada elemento sua classe, e a equivalência $\sim$ significa igualdade q.t.p. Ω, P .

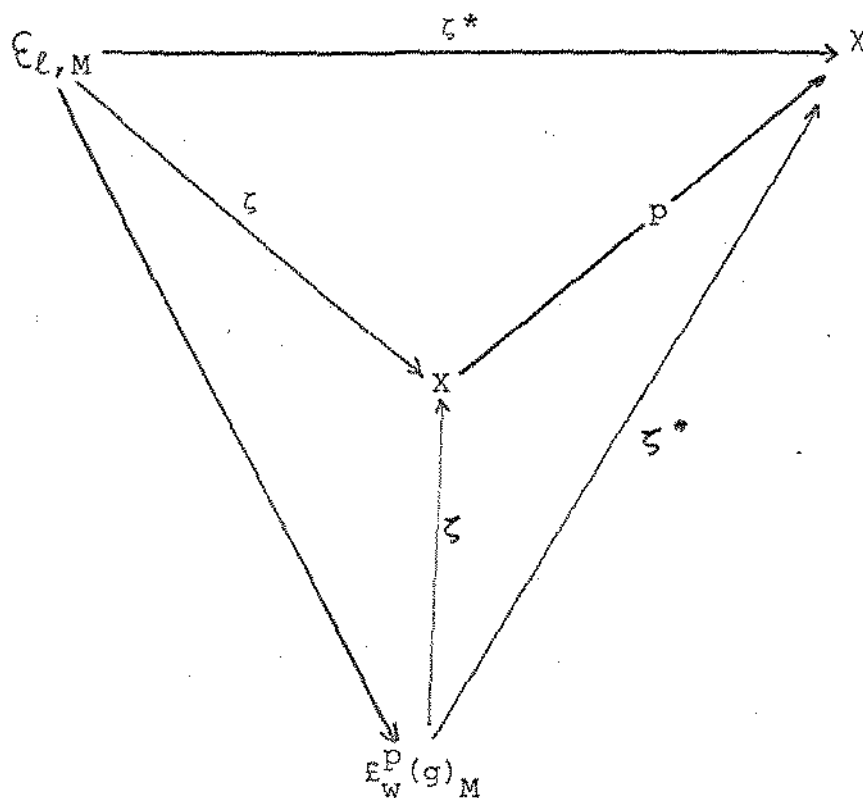
Seja $f \in L_W^p(g)_M$, $\{f_n\} \subset \mathcal{L}_{\ell, M}$ tais que:

$$\int_D |f - f_n|^p dg \xrightarrow{Pr} 0.$$

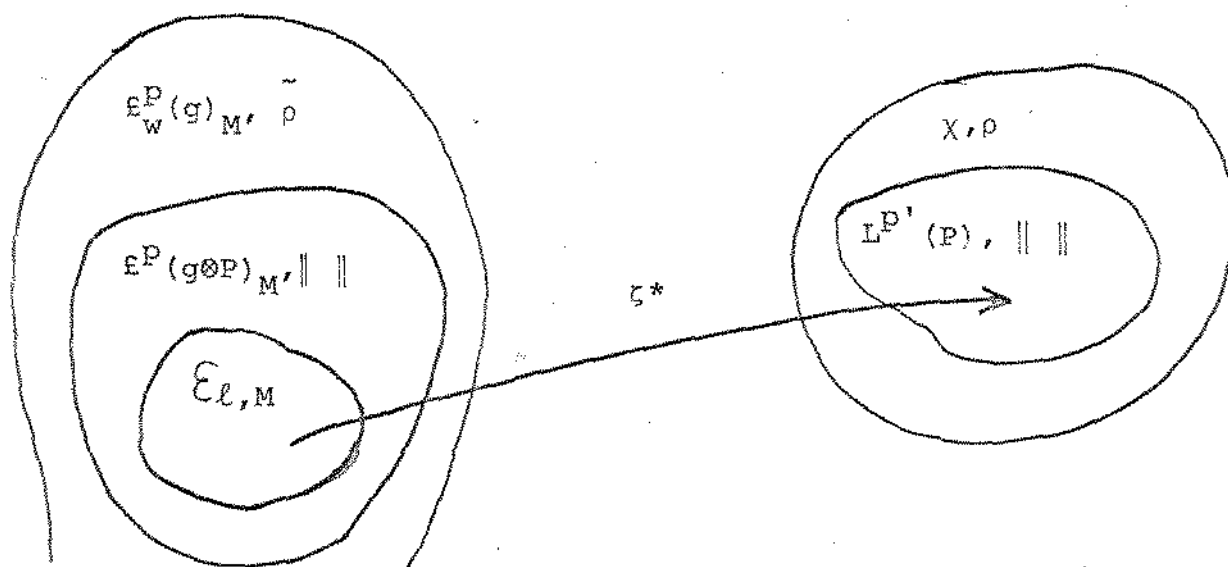
Se definimos $\zeta^*(f) = \lim_{Pr} (f_n) \in X$, está claro que

$\zeta^* = p \circ \zeta$, e é linear por ser ζ quase linear, ainda ζ^* define

uma aplicação contínua de $\mathcal{L}_{\ell, M}$, no espaço métrico completo X, ρ : estamos em condições análogas à extensão estabelecida na primeira fase e podemos construir o seguinte diagrama comutativo:



Visualizando as duas extensões:



$\xi_{\ell, M}$ é simultaneamente denso em $\mathcal{E}^P(g \otimes P)_M$, $\|\cdot\|_P$ e em $\mathcal{E}_W^P(g)_M$, ρ ; e a aplicação $\zeta^* = p_0 \zeta$ é simultaneamente contínua com respeito aos pares de topologias gerados pelas normas e pelas distâncias; o teorema da extensão passa a ser um caso particular do teorema de prolongação por continuidade, de aplicações definidas sobre conjuntos densos de um espaço topológico e com valores em um espaço métrico completo.

Aproximação da extensão mediante partições

Quando g é contínua a esquerda, combinando os teoremas 2.3 e 3.1, teremos o...

Teorema 3.5 : Se $f \in \mathcal{E}^P(g \otimes P)_M \Rightarrow \zeta(f) = \lim_{\substack{\mathcal{E}^{P'}(P) \\ (\delta, \delta^*) \rightarrow (0,0)}} \zeta(S(\pi, f))$

E dos teoremas 2.4 e 3.3 depreende-se o...

Teorema 3.6 : Se $f \in \mathcal{E}_W^P(g)_M \Rightarrow \zeta(f) = \lim_{\substack{P_r \\ (\delta, \delta^*) \rightarrow (0,0)}} \zeta(S(\pi, f))$

E em qualquer caso com g monótona não decrescente, dos teoremas 2.6 e 3.1, o

Teorema 3.7 : Se $f \in \mathcal{E}^P(g \otimes P)_M$ é $\mathcal{E}^P$ - limitado e $\mathcal{E}^P$ - contínuo q.t.p. D , m_g e π são partições de Cauchy:

$$\begin{aligned} \zeta(f) &= \lim_{\substack{\mathcal{E}^P(P) \\ \|\pi\| \rightarrow 0}} \zeta(S(\pi, f)) \end{aligned}$$

E do teorema 2.6 e o 3.3 o...

Teorema 3.8: Se $f \in \mathcal{E}_W^P(g)_M$, $f_W \in R|g|$ q.t.p. Ω , P e π são partições de Cauchy:

$$\begin{aligned} \zeta(f) &= \lim_{\substack{Pr \\ \|\pi\| \rightarrow 0}} \zeta(S(\pi, f)) \end{aligned}$$

Comentários finais:

Resulta curioso que a continuidade de ζ em relação às seminormas em $\mathcal{E}^P(g \otimes P)$ e em $\mathcal{E}^P(P)$ é quase suficiente para implicar a

a continuidade de ζ com relação a $\tilde{\rho}$ e ρ . Uma implicação intuitiva que não é, em absoluto, evidente e tampouco imediata... Essa implicação foi alcançada com uma desigualdade do tipo (3.13) ou (3.14) e, para a obter usamos não só a continuidade de ζ em relação às seminormas e a relação estandarizada entre vários tipos de convergência nos espaços de probabilidade, como também, a muito modesta e quase despercebida condição (3.7)!

O teorema de extensão - quando g é contínua - é igualmente válido se em lugar de considerar ζ definida sobre $\mathcal{E}_{\ell, M}$, a considerarmos definida sobre os processos contínuos e limitados, verificando M ... Ou ainda, sobre qualquer conjunto de processos cuja aderência, com relação a $\|\cdot\|_p$, cubra $\mathcal{E}_{\ell, M}$ (Naturalmente, por (3.22), a aderência com relação a $\tilde{\rho}$ também cobrirá $\mathcal{E}_{\ell, M}$) e, teremos que supor a condição (3.7) verificada sobre o conjunto denso alternativo.

Para obter a extensão de ζ a $E_w^{P_1}(g)_M$ bastaria que ζ estivesse definida sobre $\mathcal{E}_{\ell, M}$ e que fosse contínua com relação a $\tilde{\rho}$ e ρ . Mas é conveniente, nas integrais estocásticas, e suas aplicações, dispor em alguns casos de um limite mais rico que o limite em probabilidade... Ainda que seja só para poder empregar a palavra esperança...

CAPÍTULO IV

APLICAÇÕES DO TEOREMA DE EXTENSÃO I:

A INTEGRAL SIMPLES DE McSHANE

INTRODUÇÃO:

Vamos estudar a integral estocástica de um processo f com relação a um processo integrador Z , ambos adaptados a uma família crescente de σ -álgebras $\mathbb{F}_t$, $t \in D$, sendo que Z verifica ainda:

$$(4.1) \quad \begin{cases} |E[(Z(t, \omega) - Z(s, \omega)) / \mathbb{F}_s]| \leq g(t) - g(s) \\ E[(Z(t, \omega) - Z(s, \omega))^2 / \mathbb{F}_s] \leq g(t) - g(s) \end{cases}$$

sendo $g: D \longrightarrow \mathbb{R}$, uma função monótona não decrescente e contínua em b .

Estas condições são do tipo das pressupostas por McShane em (18) e em (19). Em (18), onde a integral prolonga-se até um estudo básico do cálculo estocástico, emprega-se uma g linear, cobrindo já os importantes exemplos do Movimento Browniano e dos processos de Poisson ... : Em (19), onde se pressupõem condições mais gerais, restringe-se em contrapartida o espaço dos processos integráveis... Em ambos trabalhos, a integral é definida como o limite de somas de Riemann Itô-retardadas, no sentido que vimos no capítulo II.

Veremos a existência da integral como um exemplo de aplicação do teorema de extensão estabelecido em III.

Como vimos no capítulo II, quando g é contínua a esquerda, as partições Itô-retardadas definem processos adaptados e em escada que aproximam um dado processo. A aproximação da integral mediante somas de Riemann Itô-retardadas aparece como consequência da continuidade da integral, do dito teorema de extensão e dos teoremas de aproximação.

EXISTÊNCIA DA INTEGRAL SIMPLES:

McShane (19) prova uma desigualdade, que chama "lema fundamental" e que lhe serve de base para estabelecer os teoremas de existência da integral. Usaremos também esta desigualdade para fundamentar a existência da integral nas condições (4.1).

O citado lema estabelece: Sejam $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_m$ σ -subálgebras de $\mathcal{Q}$. Sejam $U_1, U_2, \dots, U_m, \Delta_1, \dots, \Delta_m$ variáveis aleatórias tais que $\forall k \leq m$ as variáveis

$$U_1, \dots, U_k$$

$$\Delta_1, \dots, \Delta_{k-1}$$

são $\mathbb{F}_k$ -mensuráveis. Sejam $C_1, \dots, C_m, D_1, \dots, D_m$ números reais positivos tais que

$$|E(\Delta_J/F_J)| \leq C_J, \quad E(\Delta_J^2/F_J) \leq D_J$$

Então:

$$(4.2) \quad \left\| \sum_{J=1}^m U_J \Delta_J \right\|_{L^2(P)} \leq 2 \sum_{J=1}^m \|U_J\|_{L^2(P)} C_J + \left\{ \sum_{J=1}^m \|U_J\|_{L^2(P)}^2 D_J \right\}^{1/2}$$

[donde os valores ∞ são permitidos para $\|\cdot\|_{L^2(P)}$]

Seja $f \in \mathcal{E}_{\ell, M}$.

$$f(t, \omega) = \sum_{i=1}^n U_i(\omega) \chi_{J_i} \quad \text{com } J_i = [t_i, t_{i+1}), \quad J_n = [t_n, t_{n+1}]$$

$i < n$

$$a = t_1 < t_2 < \dots < t_{n+1} = b.$$

Definimos:

$$\left(\int_D f dZ \right)(\omega) = \sum_{i=1}^n U_i(\omega) (Z(t_{i+1}, \omega) - Z(t_i, \omega)).$$

Assim definida, a integral é uma aplicação linear:

$$\int: \mathcal{E}_{\ell, M} \longrightarrow L^2(P)$$

posto que U_i são variáveis limitadas e,

$$\int_{\Omega} (Z_{t_{i+1}} - Z_{t_i})^2 dP = E[E[(Z_{t_{i+1}} - Z_{t_i})^2 / \mathcal{F}_{t_i}]] \leq$$

$$\leq E(g(t_{i+1}) - g(t_i)) = g(t_{i+1}) - g(t_i)$$

$$\Rightarrow U_i (Z_{t_{i+1}} - Z_{t_i}) \in \mathcal{L}^2(P) \quad \text{e} \quad \int_D f dZ \in \mathcal{L}^2(P).$$

E estamos em condições de aplicar a desigualdade (4.2) com $\mathcal{F}_i = \mathcal{F}_{t_i}$,
 $\Delta_i = Z_{t_{i+1}} - Z_{t_i}$, $D_i = C_i = g(t_{i+1}) - g(t_i)$,

que nos dará:

$$(4.3) \left\| \int_D f dZ \right\|_{\mathcal{L}^2(P)} \leq 2 \sum_{J=1}^n \|U_J\|_{\mathcal{L}^2(P)} (g(t_{J+1}) - g(t_J)) +$$

$$\left\{ \sum_{J=1}^n \|U_J\|_{\mathcal{L}^2(P)}^2 (g(t_{J+1}) - g(t_J)) \right\}^{1/2}$$

mas,

$$\sum_{J=1}^n \|U_J\|_{\mathcal{L}^2(P)} (g(t_{J+1}) - g(t_J)) = \sum_{J=1}^n \left\{ \left[\|U_J\|_{\mathcal{L}^2(P)}^2 (g(t_{J+1}) - g(t_J)) \right]^{1/2} \cdot [g(t_{J+1}) - g(t_J)]^{1/2} \right\}$$

e, aplicando a desigualdade de Schwartz temos:

$$\leq \left\{ \sum_{J=1}^m \|U_J\|_{L^2(P)}^2 (g(t_{J+1}) - g(t_J)) \right\}^{1/2} \cdot (g(b) - g(a))^{1/2}$$

que substituindo em (4.3) nos dá:

$$\left\| \int_D f dZ \right\|_{L^2(P)} \leq [2(g(b) - g(a))^{1/2} + 1] \cdot$$

$$\cdot \left\{ \sum_{J=1}^m \|U_J\|_{L^2(P)}^2 (g(t_{J+1}) - g(t_J)) \right\}^{1/2}$$

$$\text{e} \quad \sum_{J=1}^m \|U_J\|_{L^2(P)}^2 (g(t_{J+1}) - g(t_J)) = \int_D \|f_t\|_{L^2(P)}^2 dg(t) =$$

$$= \int_D \left[\int_{\Omega} |f(t, \omega)|^2 dP(\omega) \right] dg(t) = \|f\|_{L^2(g \otimes P)}^2$$

e finalmente

$$(4.4) \quad \left\| \int_D f dZ \right\|_{L^2(P)} \leq [2(g(b) - g(a))^{1/2} + 1] \|f\|_{L^2(g \otimes P)}$$

que implica a continuidade da aplicação f , que, além disso, por sua definição, verifica a condição (3.7)...

Pelo teorema de extensão a integral poder-se a prolongar a $L^2(g \otimes P)_M$ como um limite em $L^2(P)$ e, a $L^2_w(g)_M$ como um limite em probabilidade.

Mais corretamente:

Se $f \in L^2(g \otimes P)_M$ e $\{f_n\} \subset \mathcal{E}_{\ell, M}$ com $\|f - f_n\|_{L^2(g \otimes P)} \xrightarrow{} 0$,

pelo teorema (3.1):

$$\int f dZ = \lim_{L^2(P)} \int f_n dZ$$

e se, $f \in L^2_w(g)_M$ e $\{f_n\} \subset \mathcal{E}_{\ell, M}$ tais que $\int_D |f - f_n|^2 dg \xrightarrow{P_r} 0$,

pelo teorema (3.3):

$$\int f dZ = \lim_{Pr} \int f_n dZ.$$

E a existência e construção de tais sucessões já foi estudada em [I].

A seguir, atualizamos uma tábua com as propriedades da integral, a maioria já demonstradas em [II]:

— Por (4.4) a norma da aplicação integral; $f: L^2(g \otimes P)_M \longrightarrow L^2(P)$, está acotada por: $\| \int \| \leq 2(g(b) - g(a))^{1/2} + 1$

— Se $f, h \in \mathcal{L}^2_w(g)_M$, $\Omega_0 \in \mathcal{Q}$, α e β versões de $\int_D f dZ$ e $\int_D h dZ$
e $f_w = h_w \forall w \in \Omega_0$, existe $\Omega_1 \subset \Omega_0$ com $\Pr(\Omega_1) = \Pr(\Omega_0)$ tal que:
 $\alpha(w) = \beta(w)$, $\forall w \in \Omega_1$ [teorema 2.4]

— Se $\{f_n\}$, $f \in \mathcal{L}^2_w(g)_M$:

$$\int_D |f - f_n|^2 dg \xrightarrow{\Pr} 0 \implies \int_D f_n dZ \xrightarrow{\Pr} \int_D f dZ \quad [\text{teorema 2.3}].$$

— Se $\{f_n\}$, $f \in \mathcal{L}^2(g \otimes P)_M$:

$$[\text{teorema 2.1}] \quad \int_{\Omega} \int_D |f - f_n|^2 dg dP \longrightarrow 0 \implies \int_D f_n dZ \xrightarrow{\mathcal{L}^2(P)} \int_D f dZ$$

$$\int_D |f - f_n|^2 dg \xrightarrow{\Pr} 0 \implies \int_D f_n dZ \xrightarrow{\Pr} \int_D f dZ$$

— Se $f \in \mathcal{L}^2_w(g)_M$, $\varepsilon, r > 0$:

$$\Pr \left[\left| \int_D f dZ \right| \geq \varepsilon \right] \leq \Pr \left[\int |f|^2 dg \geq r/2 \right] + \frac{r^{1/2} [2(g(b) - g(a))^{1/2} + 1]}{\varepsilon^2}$$

e também:

$$\Pr \left[\left| \int_D f dZ \right| \geq \varepsilon \right] \leq \Pr \left[\int |f|^2 dg \geq r/2 \right] + \frac{r^{1/2} [2(g(b) - g(a))^{1/2} + 1]}{\varepsilon} (1 + \varepsilon)$$

[desigualdades (3.18) e (3.19)] . . .

E se $f, g \in \mathcal{L}^2(g \otimes P)_M$ as desigualdades anteriores podem ser melhoradas colocando:

$$Pr \left[\int |f|^2 dg \geq r \right] \text{ em lugar de } Pr \left[\int |f|^2 dg > r/2 \right]$$

— A prolongação da integral a $\mathcal{L}^2(g \otimes P)_M$ ou a $\mathcal{L}^2_\omega(g)_M$, como função com valores $\mathcal{L}^2(P)$ ou X , é uma função quase linear.

Os produtos :

$$\mathcal{L}^2(g \otimes P)_M \xrightarrow{f} \mathcal{L}^2(P) \longrightarrow L^2(P)$$

$$\mathcal{L}^2_\omega(g)_M \xrightarrow{f} X \longrightarrow X$$

passam a ser aplicações lineares contínuas.

TEOREMA [4.1]: Seja $f \in \mathcal{L}^2_\omega(g)_M$ e $U = U(\omega)$, variável aleatória acotada, mensurável em relação a $\mathcal{F}_a$, então:

$$\int U f dZ = U \int f dZ .$$

De fato: Se $f \in \mathcal{E}_{\ell, M}$, o deduzimos da definição da integral. Seja

$f \in \mathcal{L}^2_\omega(g)_M$. Sejam $\{f_n\} \subset \mathcal{E}_{\ell, M}$ tais que:

$$\int_D |f - f_n|^2 dg \xrightarrow{Pr} 0 \implies \int_D f_n dZ \xrightarrow{Pr} \int_D f dZ ,$$

e posto que U é limitada: $U \int_D f_n dZ \xrightarrow{\text{Pr}} U \int_D f dZ$

Se $|U(\omega)| \leq K, \quad \forall \omega \in \Omega$

teremos que:

$$\int_D |Uf - Uf_n|^2 dg \leq K^2 \int_D |f - f_n|^2 dg \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_D |Uf - Uf_n|^2 dg \xrightarrow{\text{Pr}} 0 \Rightarrow \int_D Uf dZ = \lim_{\text{Pr}} \int_D Uf_n dZ =$$

$$= \lim_{\text{Pr}} U \int_D f_n dZ = U \int_D f dZ.$$

CASOS ESPECIAIS:

1º) Suponhamos que se verifique, para $a \leq s \leq t \leq b$

$$(4.5) \quad \begin{cases} E[(Z_t - Z_s)/F_s] = 0 \\ E[(Z_t - Z_s)^2/F_s] \leq g(t) - g(s). \end{cases}$$

Neste caso a integral de um processo $f \in L^2(g \otimes P)_M$ tem esperança zero.

$$\text{Se } f \in \mathcal{E}_{\ell, M}, \quad f = \sum U_i \chi_{J_i} \Rightarrow \int_D f dZ =$$

$$= \sum U_i (Z_{t_{i+1}} - Z_{t_i}) \text{ e}$$

$$\begin{aligned}
E \left[\int_D f dZ \right] &= \sum E[U_i (Z_{t_{i+1}} - Z_{t_i})] = \\
&= \sum E[E[U_i (Z_{t_{i+1}} - Z_{t_i}) / \mathcal{F}_{t_i}]] = \\
&= \sum E[U_i E[(Z_{t_{i+1}} - Z_{t_i}) / \mathcal{F}_{t_i}]] = \\
&= \sum 0 = 0
\end{aligned}$$

Se $f \in \mathcal{L}^2(g \otimes P)_M$, $\{f_n\} \subset \mathcal{L}_{\ell, M}$ tais que:

$$\|f - f_n\|_{\mathcal{L}^2(g \otimes P)} \longrightarrow 0 \implies \int_D f dZ = \lim_{\mathcal{L}^2(P)} \int_D f_n dZ$$

$$\implies \int_D f_n dZ \xrightarrow{\mathcal{L}^1(P)} \int_D f dZ \implies$$

$$(4.6) \quad E \int_D f dZ = \lim E \int_D f_n dZ = 0$$

Além disso, $\forall f \in \mathcal{L}^2(g \otimes P)_M$,

$$(4.7) \quad E \left[\int_D f dZ / \mathcal{F}_a \right] = 0$$

De fato: Seja U , variável aleatória acotada e mensurável em relação a $\mathcal{F}_a \implies U f \in \mathcal{L}^2(g \otimes P)_M$ e, como acabamos de ver e, pelo teorema (4.1)

$$\begin{aligned}
 E \int_D U f dZ &= 0 = E[U \int_D f dZ] = \\
 &= E[E[U \int_D f dZ / \mathcal{F}_a]] = E[U E[\int_D f dZ / \mathcal{F}_a]]
 \end{aligned}$$

mas $E[\int_D f dZ / \mathcal{F}_a]$ é uma variável mensurável com respeito a $\mathcal{F}_a$ e tomando $U = \chi_A$ com $A \in \mathcal{F}_a$ teremos:

$$\begin{aligned}
 \int_A E[\int_D f dZ / \mathcal{F}_a] dP &= 0 \quad \forall A \in \mathcal{F}_a \implies \\
 E[\int_D f dZ / \mathcal{F}_a] &\equiv 0.
 \end{aligned}$$

2º) Suponhamos agora:

$$(4.8) \quad \begin{cases} E[(Z_t - Z_s) / \mathcal{F}_s] = 0 \\ E[(Z_t - Z_s)^2 / \mathcal{F}_s] = g(t) - g(s) \end{cases} \quad \forall a \leq s \leq t \leq b$$

Seja $f \in \mathcal{L}_M$, $f = \sum_{i=1}^m U_i \chi_{J_i}$, $\int_D f dZ = \sum_{i=1}^m U_i (Z_{t_{i+1}} - Z_{t_i})$

$$\begin{aligned}
 \|\int_D f dZ\|_{L^2(P)}^2 &= E \left[\sum_{i=1}^m U_i (Z_{t_{i+1}} - Z_{t_i}) \right]^2 = \sum_{i=1}^m E[U_i^2 (Z_{t_{i+1}} - Z_{t_i})^2] \\
 &\quad + \sum_{i \neq j} E[U_i (Z_{t_{i+1}} - Z_{t_i}) U_j (Z_{t_{j+1}} - Z_{t_j})]
 \end{aligned}$$

mas se $i \neq J$, $i < J$

$$\begin{aligned} E[U_i U_J (Z_{t_{i+1}} - Z_{t_i})(Z_{t_{J+1}} - Z_{t_J})] &= \\ &= E[E[U_i U_J (Z_{t_{i+1}} - Z_{t_i})(Z_{t_{J+1}} - Z_{t_J}) / \mathcal{F}_{t_J}]] = \\ &= E[U_i U_J (Z_{t_{i+1}} - Z_{t_i}) E[(Z_{t_{J+1}} - Z_{t_J}) / \mathcal{F}_{t_J}]] = 0 \end{aligned}$$

portanto:

$$\begin{aligned} \left\| \int_D f dz \right\|_{L^2(P)}^2 &= \sum_{i=1}^m E[U_i^2 (Z_{t_{i+1}} - Z_{t_i})^2] = \\ &= \sum_{i=1}^m E[U_i^2 E[(Z_{t_{i+1}} - Z_{t_i})^2 / \mathcal{F}_{t_i}]] = \\ &= \sum_{i=1}^m E(U_i)^2 (g(t_{i+1}) - g(t_i)) = \end{aligned}$$

$$\|f\|_{L^2(g \otimes P)}^2.$$

Portanto a aplicação integral $f : \varepsilon_{\ell, M} \longrightarrow L^2(P)$ teria norma 1, que como vimos em [II] coincidirá com a norma da aplicação estendida:

$$f: L^2(g \otimes P)_M \longrightarrow L^2(P)$$

e que será, portanto, uma *isometria*.

APROXIMAÇÕES DA INTEGRAL:

LEMA 4.2 - Podemos escolher uma versão da integral tal que, $\forall f$ em escada, $f \in L^2_w(g)_M$, $f(t, \omega) = \sum_{i=1}^n U_i(\omega) \chi_{[t_i, t_{i+1})}(t)$ tenhamos:

$$\left(\int f dZ \right)(\omega) = \sum_{i=1}^n U_i(\omega) [Z(t_{i+1}, \omega) - Z(t_i, \omega)]$$

DEMONSTRAÇÃO: Consideremos:

$$f_N(t, \omega) = \chi_{(-N, N)}(f(t, \omega)).$$

$$\text{Pela definição de } L^2_w(g)_M \Rightarrow \int_D f_w^2 dg < \infty \text{ q.t.p. } \Omega, P \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{q.t.p. } \Omega, P, f_w(t) < \infty \text{ q.t.p. } D, m_g \Rightarrow \text{q.t.p. } \Omega, P,$$

$$f_{N_w}(t) \longrightarrow f_w(t) \text{ q.t.p. } D, m_g \text{ e } |f_{N_w}(t)| \leq |f_w(t)| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{q.t.p. } \Omega, P \int_D |f_N - f|^2 dg \longrightarrow 0.$$

$$\Rightarrow \int_D |f - f_N|^2 dg \xrightarrow{\text{Pr}} 0 \Rightarrow 0 \text{ (pelo teorema (3.3))}$$

$$\Rightarrow \int_D f dZ = \lim_{\substack{\text{Pr} \\ N \rightarrow \infty}} \int_D f_N dZ,$$

mas, f_N é limitado e, pela definição da integral,

$$\left(\int_D f_N dz \right) (\omega) = \sum_{i=1}^n \{ \chi_{(-N, N)} (U_i(\omega)) \} [Z(t_{i+1}, \omega) - Z(t_i, \omega)]$$

$$\text{Se } \forall i \leq n, \quad |U_i(\omega)| < \infty \implies \left(\int_D f_N dz \right) (\omega) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \sum_{i=1}^n U_i(\omega) [Z(t_{i+1}, \omega) - Z(t_i, \omega)],$$

algum $|U_i(\omega)|$ pode ser ∞ , ou bem no conjunto de probabilidade

zero em que não existe $\int_D f^2 dg$, ou bem, se $\int_D f^2 dg < \infty \implies$

$$\implies g(t_{i+1}) - g(t_i) = 0 \implies E(Z_{t_{i+1}} - Z_{t_i})^2 =$$

$$= E[E[(Z_{t_{i+1}} - Z_{t_i})^2 / \mathcal{F}_{t_i}]] \leq E(g(t_{i+1}) - g(t_i)) = 0$$

$$\implies Z_{t_{i+1}} - Z_{t_i} = 0 \text{ q.t.p. } \Omega, P \implies$$

$$\implies U_i(\omega) [Z(t_{i+1}, \omega) - Z(t_i, \omega)] = 0 \text{ q.t.p. } \Omega, P \text{ e neste caso}$$

$$\{ \chi_{(-N, N)} U_i(\omega) \} [Z(t_{i+1}, \omega) - Z(t_i, \omega)] = 0$$

Portanto:

$$\left(\int_D f_N dz \right) (\omega) \longrightarrow \sum_{i=1}^n U_i(\omega) (Z(t_{i+1}, \omega) - Z(t_i, \omega)) \text{ q.t.p. } \Omega, P \implies$$

$$\Rightarrow \int_D f_N dZ \xrightarrow{Pr} \sum_{i=1}^n U_i [Z_{t_{i+1}} - Z_{t_i}] \text{ e}$$

$$\int_D f_N dZ \longrightarrow \int f dZ, \text{ que demonstra o lema.}$$

Seja agora $f \in \mathcal{L}^2(g \otimes P)_M$.

Pelo teorema 3.5 :

$$\int_D f dZ = \lim_{\mathcal{L}^2(P)} \int_D S(\pi, f) dZ$$

$$(\delta, \delta^*) \longrightarrow (0, 0)$$

mas se $\pi = \{(J_i, \tau_i), i = 1, \dots, K; J_i = [t_i, t_{i+1}]\}$

$$S(\pi, f) = f_{\tau_i} \chi_{J_i} \Rightarrow \text{pelo lema 4.2}$$

$$\int_D S(\pi, f) dZ = \sum f_{\tau_i} \cdot (Z_{t_{i+1}} - Z_{t_i}) = S(\pi, f, Z)$$

Portanto obteremos:

$$\int_D f dZ = \lim_{\mathcal{L}^2(P)} S(\pi, f, Z)$$

$$(\delta, \delta^*) \longrightarrow (0, 0)$$

Seja $f \in \mathcal{L}^2_{\omega}(g)_M$.

Pelo teorema 3.6:

$$\int_D f dZ = \lim_{Pr} \int_D S(\pi, f) dZ = \lim_{Pr} S(\pi, f, Z)$$

$$(\delta, \delta^*) \rightarrow (0, 0)$$

$$(\delta, \delta^*) \rightarrow (0, 0)$$

Resultados estes que podemos resumir no...

TEOREMA 4.3: Se $f \in \mathcal{L}^2(g \otimes P)_M$, respectivamente $f \in \mathcal{L}^2_{\omega}(g)_M$,

$\int_D f dZ$ é o limite em $\mathcal{L}^2(P)$, respectivamente em probabilidade das somas de Riemann retardadas $S(\pi, f, Z)$, quando $(\delta, \delta^*) \rightarrow (0, 0)$.

O teorema fundamental de McShane de existência de integrais estocásticas aparece como uma consequência do teorema 3.7.

TEOREMA 4.4: Seja $f \in \mathcal{L}^2(g \otimes P)_M$ um processo $\mathcal{L}^2$ -limitado e $\mathcal{L}^2$ -contínuo q.t.p. D, m_g com g monótona não decrescente; ou seja que a função

$$t \longrightarrow f_t \in \mathcal{L}^2(P)$$

é limitada e contínua q.t.p. D, m_g . E seja

$\pi = \{a = t_0 < t_1 \dots < t_n = b\}$ partição de Cauchy de D .

Se verifica que:

$$S(\pi, f, Z) = \sum_{i=1}^n f_{t_{i-1}} [Z_{t_i} - Z_{t_{i-1}}] \xrightarrow[\substack{\mathcal{L}^2(P) \\ |\pi| \rightarrow 0}]{} \int_D f dZ$$

DEMONSTRAÇÃO : Para cada partição π consideramos o processo em es cada

$$S(\pi, f) = \sum_{i=1}^{n-1} f_{t_{i-1}} \chi_{[t_{i-1}, t_i)} + f_{t_{n-1}} \chi_{[t_{n-1}, b]}$$

$S(\pi, f)$ é um processo escalonado e adaptado que, portanto, verifica M. Pela definição da integral

$$\int_D S(\pi, f) dz = S(\pi, f, Z)$$

e pela continuidade da integral, o teorema 4.4 resulta numa consequência da convergência

$$\left\| f - S(\pi, f) \right\|_{L^2(g \otimes P)} \longrightarrow 0$$

$$|\pi| \longrightarrow 0$$

que foi estabelecida no teorema 2.5.

Como consequência do teorema 3.8 e do lema 4.2 obtemos o

TEOREMA 4.5 : Seja $f \in \mathcal{L}_w^2(g)_M$ tal que

$$f_w \in R[g] \quad \text{q.t.p. } \Omega, P ; \{\pi\} \text{ partições de Cauchy.}$$

$$\text{Então: } S(\pi, f, Z) \xrightarrow{\text{Pr}} \int_D f dz$$

$$|\pi| \longrightarrow 0$$

TEOREMA 4.6: Seja $f \in L^2_w(g)_M$ um processo com trajetórias de variação limitada q.t.p. Ω, P e Z um processo de trajetórias contínuas q.t.p. Ω, P verificando as condições (4.1). Então:

$$\left(\int_D f \, dZ \right) (w) = \int_D f_w \, dZ_w \quad \text{q.t.p. } \Omega, P$$

onde $\int_D f_w \, dZ_w$ representa a integral, existente no sentido de Riemann-Stieltjes, da trajetória f_w de variação limitada com relação à trajetória contínua Z_w .

DEMONSTRAÇÃO: f_w de variação limitada e g contínua $\Rightarrow f_w \in R[g]$.

Seja $\{\pi_n\}$ uma sucessão de partições de Cauchy com $|\pi_n| \rightarrow 0$.

Pelo teorema anterior 4.5

$$S(\pi_n, f, Z) \xrightarrow{\text{Pr}} \int_D f \, dZ$$

e existirá uma subsucessão $\{\pi_{n_K}\}$ tal que

$$S(\pi_{n_K}, f, Z) (w) \longrightarrow \left(\int_D f \, dZ \right) (w) \quad \text{q.t.p. } \Omega, P$$

$$\text{Mas } S(\pi_{n_K}, f, Z) (w) \longrightarrow \int_D f_w \, dZ_w \quad \text{q.t.p. } \Omega, P$$

o que prova o teorema.

Nas condições do teorema 4.6 se deduzem os seguintes Corolários:

1º) Como para os processos em escada e limitados se verifica que

$$\left(\int_D f \, dZ \right) (w) = \int_D f_w \, dZ_w$$

podemos escolher uma versão da integral tal que para todos os processos com trajetórias de variação limitada

$$\left(\int_D f \, dZ \right) (w) = \int_D f_w \, dZ_w \quad \forall w \in \Omega$$

2º) O resultado anterior proporciona uma definição alternativa da integral: no capítulo I vimos que $\forall f \in L^P(g \otimes P)_M$.

$$\left\| f - \hat{f}_h \right\|_{L^P(g \otimes P)} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

$$\text{sendo } \hat{f}_h(t, w) = \int_{\alpha_h(t)}^t f(s, w) \, dg(s) \text{ e}$$

$\hat{f}_h(t, w) = 0$ sobre o conjunto desprezível de trajetórias em que f_w não fosse integrável.

Assim sendo, $\hat{f}_h$ tem suas trajetórias de variação limitada e pelo teorema 4.6 e o corolário 1º

$$\left(\int_D \hat{f}_h \, d z \right) (w) = \int_D (\hat{f}_h)_w \, d z_w$$

e pelo teorema 3.1

$$\int_D f \, d z = \lim_{\substack{f^2(p) \\ h \rightarrow 0}} \int_D \hat{f}_h \, d z$$

VERSÕES ESTRITAS.

Seja g contínua, monótona não decrescente $f \in \mathcal{L}_w^2(g)_M$

$$\Omega_0 = \{w \in \Omega \mid f_w \in R[g], \mid z_w(t) - z_w(s) \mid \leq K(w) (g(t) - g(s)), \text{ com } K(w) \geq 0\}$$

Vamos provar primeiramente que $\forall w \in \Omega_0, f_w \in R[z_w]$.

Com efeito:

Se $w \in \Omega_0$, z_w será de variação limitada e podemos falar de integrais com relação a z_w como limites de somas de Riemann-Stieltjes. Seja $V_w(t)$ a função "variação total de z_w sobre o intervalo $[a, t]$ ". A desigualdade $\mid z_w(t) - z_w(s) \mid \leq K(w) \mid g(t) - g(s) \mid$ implica que $\forall s \leq t, V_w(t) - V_w(s) \leq K(w) (g(t) - g(s))$.

Para provar que $f_w \in R[z_w]$ bastará provar que $f_w \in R[V_w]$

Seja π uma partição de $D : a = t_0 < t_1 \dots < t_n = b$ e m_i, M_i inferior e superior de f_w em $[t_{i-1}, t_i]$

$$\sum_{i=1}^n (M_i - m_i) (V_w(t_i) - V_w(t_{i-1})) \leq \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) (g(t_i) - g(t_{i-1}))$$

e a integrabilidade com relação a V_w se deduz da integrabilidade com relação a g .

Pelo teorema 4.3 existe uma sucessão de pares $(\delta_n, \delta_n^*) \longrightarrow (0, 0)$, podendo ser $\delta_n(t) < \frac{1}{n}$ e $\delta_n^* < \frac{1}{n}$, tais que se π_n são partições Itô-retardadas adaptadas a $(\delta_n, \delta_n^*, g)$, $S(\pi_n, f, Z) \xrightarrow{\text{Pr}} \int_D f \, dZ$.

Além disso: Se $\pi_n = \{(A_i, \tau_i) \mid A_i = [t_{i-1}, t_i], i=1 \dots K\}$ podemos redefinir $\tau_i = t_i$, pois a nova partição continuará adaptando-se a $(\delta_n, \delta_n^*, g)$.

Seja agora π_n^* a partição de D resultante de considerar π_n junto aos intervalos necessários, de medida inferior a $\frac{1}{n}$, para cobrir D . Existirão certo $N \in \mathbb{Q}$ com $\text{Pr}(N) = 0$ e uma subsucessão $\{\pi_{n_K}\}$ tais que se $w \notin N$

$$S(\pi_{n_K}, f, Z)(w) \longrightarrow \left(\int_D f \, dZ \right)(w)$$

Mas $\pi_{n_K}^*$ diferencia-se de π_{n_K} num conjunto de intervalos de g -medida global inferior a $\delta_{n_K}^*$, que unido a desigualdade

$$|Z_w(t) - Z_w(s)| \leq K(w) |g(t) - g(s)|$$

implicam que $| S(\pi_{n_K}^*, f, Z) - S(\pi_{n_K}, f, Z) | \leq$

$$\leq \sup_{t \in D} | f_w(t) | \cdot K(w) \delta_{n_K}^* \xrightarrow{K \rightarrow \infty} 0$$

$$\text{Portanto } \forall w \notin N \Rightarrow S(\pi_{n_K}^*, f, Z)(w) \xrightarrow{K \rightarrow \infty} \left(\int_D f \, dZ \right)(w)$$

$$\text{e se } w \in \Omega_0 \Rightarrow S(\pi_{n_K}^*, f, Z)(w) = S(\pi_{n_K}^*, f_w, Z_w) \xrightarrow{} \int_D f_w \, dZ_w$$

$$\text{Portanto } \forall w \in \Omega_0 \cap N^c : \left(\int_D f \, dZ \right)(w) = \int_D f_w \, dZ_w$$

Chamando

$$F(w) = \begin{cases} \int_D f_w \, dZ_w & \text{se } w \in \Omega_0 \\ \left(\int_D f \, dZ \right)(w) & \text{se } w \notin \Omega_0 \end{cases}$$

$$F = \int_D f \, dZ \quad \text{q.t.p. } \Omega, P \quad \text{e podemos tomar } F \text{ como}$$

o valor sobre f de uma versão da integral.

McShane, considerando $g = K \cdot i$, chama a estas versões -

de "versões estritas".

Para o importante caso do Movimento Browniano, as trajetórias são de variação ilimitada q.t.p. Ω, P e portanto as "versões estritas" não existem.

POSSÍVEIS VERSÕES DE Z .

Sejam Z, Z^* dois processos estocásticos adaptados e e quivalentes, ou seja:

$\forall t \in D \quad Z_t, Z_t^* \text{ são } \mathcal{F}_t\text{-mensuráveis}$

$$Z_t = Z_t^* \text{ q.t.p. } \Omega, P$$

Se a definição trivial de integral para processos de $\mathcal{E}_{\ell, M}$ proporciona uma aplicação

$$\mathcal{E}_{\ell, M} \ni f \longrightarrow \int_D f dZ \text{ e } \mathcal{L}^{P'}(P)$$

$\cap$

$$\mathcal{L}^P(g \otimes P)_M$$

contínua, também fará sentido e será contínua a aplicação

$$f \longrightarrow \int_D f dZ^*$$

pois, pela definição da integral sobre $\mathcal{E}_{\ell, M}$, deduzimos que

$$\int_D f dZ^* = \int_D f dZ \quad \text{q.t.p. } \Omega, P$$

Nestas condições o teorema de extensão proporcionará -
uma mesma integral estocástica. Com efeito:

$$\forall f \in \mathcal{L}_w^P(g)_M \text{ e } \{f_n\} \subset \mathcal{E}_{\ell, M} \mid \int_D |f - f_n|^P d g \xrightarrow{\text{Pr}} 0$$

$$\Rightarrow \int_D f dZ = \lim_{\text{Pr}} \int_D f_n dZ = \lim_{\text{Pr}} \int_D f_n dZ^* = \int_D f dZ^*$$

$$\Rightarrow \int_D f dZ = \int_D f dZ^* \quad \text{q.t.p. } \Omega, P$$

Mais concretamente: Se Z é um processo que verifica as condições (4.1) e Z^* um processo equivalente a Z , como as esperanças condicionadas estão definidas q.t.p., Z^* também verificará as condições (4.1). Se ambos Z, Z^* são adaptados, proporcionarão uma mesma integral estocástica.

CAPÍTULO V

APLICAÇÕES DO TEOREMA DE EXTENSÃO:INTEGRAIS INDEFINIDAS E ITERADASIntegrais Indefinidas.-

Consideremos uma função $g:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, monótona, não decrescente e contínua. E ainda um processo adaptado Z tal que para todo $[s,t] \subset [a,b]$ a definição da integral sobre E_{LM} , ou seja:

$$\int : E_{LM} \longrightarrow \mathcal{L}^{p'}(P)$$

$$\cap$$

$$\mathcal{L}^p(g \otimes P)_M$$

proporciona uma aplicação contínua e de norma majorada por uma certa constante $C > 0$ como se segue:

$$\left\| \int_{[s,t]} f dZ \right\|_{\mathcal{L}^{p'}(P)} \leq C \cdot \left\{ \int_{[s,t]} \|f_t\|_{\mathcal{L}^p(P)} dg \right\}^{1/p} \quad \forall [s,t] \subset [a,b]$$

Naturalmente o teorema de extensão garante a existência da integral sobre os espaços mais gerais

$$\begin{array}{ccccc}
 \int : \mathcal{E}_M & \longrightarrow & \mathcal{E}^{P'}(P) & \subset & X, e \\
 & \searrow & \nearrow & & \\
 & \mathcal{E}^P(g \otimes P)_M & & & \\
 & \searrow & \nearrow & & \\
 & \mathcal{E}_W^P(g)_M & & &
 \end{array}$$

Sejam: $f \in \mathcal{E}_W^P(g)_M$, $t \in [a, b]$; $f|_{[a, t]}$, $f|_{[t, b]}$
restrições de f aos intervalos $[a, t]$, $[t, b]$

as

Teorema 5.1.

$$(5.1) \quad f|_{[a, t]}, \quad f|_{[t, b]} \in \mathcal{E}_W^P(g)_M$$

$$(5.2) \quad \int_{[a, t]} f dz = \int_{[a, b]} f \chi_{[a, t]} dz \quad \text{q.t.p. } \Omega, P$$

$$\int_{[t, b]} f dz = \int_{[a, b]} f \chi_{[t, b]} dz \quad \text{q.t.p. } \Omega, P$$

$$(5.3) \quad \int_{[a, b]} f dz = \int_{[a, t]} f dz + \int_{[t, b]} f dz \quad \text{q.t.p. } \Omega, P$$

Demonstração: Para provarmos (5.1) passamos a verificar que

$f|_{[t, b]} \in \mathcal{E}_W^P(g)_M$; bastando para tanto mostrarmos que $f|_{[t, b]}$ verifica M.

Seja $t', t \leq t' \leq b$ e A um boreliano, $A \subset R$:

$$f|_{[t,t']}^{-1}(A) = \left[f|_{[a,t]}^{-1}(A) \right] \cap \left[[t,t'] \times \Omega \right]$$

$$f|_{[a,t]}^{-1}(A) \in M_{g[a,t]} \otimes \mathcal{F}_t, \text{ pois } f \text{ verifica } M.$$

Reduzindo-se o problema provar que: $\forall H \in M_{g[a,t]} \otimes \mathcal{F}_t$,

$$\Rightarrow H \cap \left[[t,t'] \times \Omega \right] \in M_{g[t,t']} \otimes \mathcal{F}_t.$$

O conjunto de H 's $\in M_{g[a,t]} \otimes \mathcal{F}_t$, com a propriedade acima é uma σ -álgebra que contém os produtos $V \times B$ onde, $V \in M_{g[a,t]}$ e $B \in \mathcal{F}_t$. A propriedade será válida, portanto, para a σ -álgebra gerada por esses produtos, ou seja: $M_{g[a,t]} \otimes \mathcal{F}_t \dots$

Para provarmos (5.2) consideremos $t \in (a,b)$ pois para $t = a, b$ a igualdade é evidente.

Sejam $f_n : [a,t] \times \Omega \longrightarrow R, f_n \in \mathcal{E}_{1,M}$

$$\text{com } \int_{[a,t]} |f - f_n|^p dg \longrightarrow 0 \quad \text{q.t.p. } \Omega, p$$

e definamos $\{f_n^*\}$ tais que:

$$f_n^* : [a,b] \times \Omega \longrightarrow R, \quad f_n^*(s,w) = 0, \quad s \geq t$$

$$f_n^*(s,w) = f_n(s,w), \quad s < t$$

por sua definição $f_n^* \in \mathcal{E}_{1,M}$

Para obtermos (5.2) basta agora aplicarmos o teorema 3.3

$$\int_{[a,t]} |f - f_n|^p dg \longrightarrow 0, \text{ q.t.p. } \Omega, P \Rightarrow \int_{[a,t]} f dZ = \lim_{Pr} \int_{[a,t]} f_n dZ$$

||

$$\int_{[a,b]} |f|_{[a,t]} - f_n^*|^p dg \Rightarrow \int_{[a,b]} |f|_{[a,t]} dZ = \lim_{Pr} \int_{[a,b]} f_n^* dZ$$

mas por sua definição $\int_{[a,b]} f_n^* dZ = \int_{[a,t]} f_n dZ$ resultando

as igualdades (5.2)

Finalmente:

$$(5.4) \quad f = f|_{[a,t]} + f|_{[t,b]} - f|_{\{t\}}$$

Todavia, por ser g contínua

$$\int_{[a,b]} |f|_{\{t\}}|^p dg = 0 \Rightarrow \int_{[a,b]} f|_{\{t\}} dZ = 0, \text{ q.t.p. } \Omega, P$$

e (5.3) resulta de (5.4) e da quase linearidade da extensão.

Definição.-

$$F(t,w) = \left(\int_{[a,t]} f dZ \right) (w)$$

para $(t,w) \in D \times \Omega$, é a integral estocástica indefinida.

Teorema 5.2. A integral estocástica indefinida admite uma versão adaptada que é um processo contínuo em probabilidade. Se $f \in \mathcal{L}^p(g \otimes P)_M$

o processo integral é além disso $I^P(P)$ - contínuo ou seja, contínuo como função

$$\int f : [a, b] \longrightarrow I^P(P)$$

$$\left(\int f \right)(t) = \int_{[a, t]} f dZ \in I^P(P)$$

Demonstração: Sejam $f_n \in \mathcal{E}_{1,M}$ $\left| \int_{[a, t]} f_n dZ \xrightarrow{Pr} \int_{[a, t]} f dZ \right.$

Existirá uma subsucessão convergente q.t.p. Ω, P ou seja

$$\int_{[a, t]} f_{n_k} dZ \longrightarrow \int_{[a, t]} f dZ \quad \text{q.t.p. } \Omega, P.$$

Mas, pela definição da integral sobre $\mathcal{E}_{1,M}$, e sendo f_{n_k} e Z processos adaptados, $\int_{[a, t]} f_{n_k} dZ$ será mensurável com relação a

$\mathcal{F}_t$; consequentemente a $\int_{[a, t]} f dZ$ será mensurável q.t.p.

com relação a $\mathcal{F}_t$ e poderemos escolher uma versão mensurável.

Por ser g contínua e pelas desigualdades (3.18) ou (3.19) segue-se que:

$$\begin{aligned}
 & \int_{[a,b]} |f|_{[t', t'']}^p dg \xrightarrow[t'' \rightarrow t']{} 0, \text{ q.t.p. } \Omega, P. \\
 \Rightarrow & \int_{[a,b]} |f|_{[t', t'']}^p dg \xrightarrow[t'' \rightarrow t']{\text{Pr}} 0 \Rightarrow \\
 (5.5) \quad & \int_{[a,b]} f|_{[t', t'']} dz = \int_{[t', t'']} f dz = F_{t''} - F_{t'} \xrightarrow[t'' \rightarrow t']{\text{Pr}} 0
 \end{aligned}$$

Finalmente, se $f \in \mathcal{L}^p(g \otimes P)_M$ então:

$$\|F_{t''} - F_{t'}\|_{\mathcal{L}^{p'}(P)}^p = \left\| \int_{[t', t'']} f dz \right\|_{\mathcal{L}^{p'}(P)}^p \leq C^p \int_{[t', t'']} \|f_t\|_{\mathcal{L}^p(P)}^p dg(t)$$

e novamente pela continuidade de g :

$$\|F_{t''} - F_{t'}\|_{\mathcal{L}^{p'}(P)} \xrightarrow[t'' > t']{} 0$$

Analogamente provar-se-ia a continuidade a esquerda e com ela o teorema 5.2.

Variação quadrática de um processo.-

Suporemos processos integradores Z que verifiquem as condições (4.1) com relação a uma função g monótona não decrescente e contínua.

Sejam $[s, t] \subset [a, b]$ e $\pi = \{s = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t\}$ uma partição de $[s, t]$.

Consideremos a variável aleatória

$$V_\pi = \sum_{i=1}^n (Z_{t_i} - Z_{t_{i-1}})^2$$

ou seja $V_\pi(w) = Z(t, w)^2 - Z(s, w)^2 - 2 \sum_{i=1}^n Z(t_{i-1}, w) (Z(t_i, w) - Z(t_{i-1}, w))$

Pelas condições 4.1, com g contínua, o processo Z é L^2 -contínuo em $[a, b]$ e pelo teorema 4.4 temos:

$$\sum_{i=1}^n Z_{t_{i-1}} (Z_{t_i} - Z_{t_{i-1}}) \xrightarrow[|\pi| \rightarrow 0]{L^2(P)} \int_{[s, t]} Z \, dZ$$

As variáveis $Z_t^2, Z_s^2 \in L^1(P)$ pois $Z_t \in L^2(P) \forall t \in [a, b]$

Portanto:

$$(5.7) \quad V_\pi \xrightarrow[|\pi| \rightarrow 0]{} Z_t^2 - Z_s^2 - 2 \int_{[s, t]} Z \, dZ \quad \text{em } L^1(P)$$

Denotaremos esse limite como $V_{[s, t]}$ e o chamaremos "variação quadrática de Z no intervalo $[s, t]$ ".

Pelo teorema 5.1, $V_{[s,t]} = V_{[a,b]} - V_{[a,s]}$ q.t.p. Ω, P

Pelo teorema 5.2, $V_{[a,t]}$ possui uma versão adaptada. Além disso, é uma submartingala com relação as σ -subálgebras $\{\mathcal{F}_t\}$, pois se $\pi = \{t_i\}$ é uma partição de $[s,t]$

$$\begin{aligned} (5.8) \quad E \left[(V_{[a,t]} - V_{[a,s]}) / \mathcal{F}_s \right] &= E \left[V_{[s,t]} / \mathcal{F}_s \right] = \\ &= \lim_{\substack{\ell^1(P) \\ |\pi| \rightarrow 0}} E \left[\sum (Z_{t_i} - Z_{t_{i-1}})^2 / \mathcal{F}_s \right] \geq 0 \end{aligned}$$

[aplicamos aqui que para qualquer sucessão $\{x_n\} \subset \ell^1(P)$ e qualquer σ -álgebra $\mathcal{F}$, $x_n \xrightarrow{\ell^1(P)} x \Rightarrow E[x_n / \mathcal{F}] \xrightarrow{\ell^1(P)} E[x / \mathcal{F}]$]

Pelas condições (4.1)

$$\begin{aligned} (5.9) \quad E \left[V_{[s,t]} / \mathcal{F}_s \right] &= \lim_{\substack{\ell^1(P) \\ |\pi| \rightarrow 0}} E \left[\sum (Z_{t_i} - Z_{t_{i-1}})^2 / \mathcal{F}_s \right] \leq \\ &\leq \lim_{\substack{\ell^1(P) \\ |\pi| \rightarrow 0}} \sum (g(t_i) - g(t_{i-1})) = g(t) - g(s) \end{aligned}$$

No caso especial do Movimento Browniano demonstra-se (Doob(5)) que

$$V_{[s,t]} = E(Z_t - Z_s)^2 = k(t-s) \quad \text{com } k > 0$$

Variação conjunta de dois processos.-

Dados dois processos Z, Z' verificando as condições (4.1) e uma partição $\pi = \{s = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t\}$ de $[s, t] \subset [a, b]$ podemos definir:

$$V_\pi = \sum_{i=1}^n (Z_{t_i} - Z_{t_{i-1}})(Z'_{t_i} - Z'_{t_{i-1}})$$

$$V_\pi \in \mathcal{L}^1(P) \text{ pois os fatores pertencem a } \mathcal{L}^2(P)$$

$$V_\pi = Z_t Z'_t - Z_s Z'_s - \sum_{i=1}^n \left[Z_{t_{i-1}} (Z'_{t_i} - Z'_{t_{i-1}}) + Z'_{t_{i-1}} (Z_{t_i} - Z_{t_{i-1}}) \right]$$

e pelos mesmos argumentos

$$V_\pi \xrightarrow[\mathcal{L}^1(P)]{} Z_t Z'_t - Z_s Z'_s - \int_{[s,t]} Z \, dZ' - \int_{[s,t]} Z' \, dZ =$$

$$|\pi| \rightarrow 0$$

$$= V_{[s,t]}(Z, Z') = V_{[a,t]}(Z, Z') - V_{[a,s]}(Z, Z')$$

O processo $V_{[s,t]}(Z, Z')$ possui uma versão adaptada, não é em geral uma submartingala, mas se pode expressar como diferença de duas submartingalas; de fato, chamando:

$$(5.10) \quad \begin{cases} Z^* = (Z + Z')/2 \\ Z^{**} = (Z - Z')/2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\left| E \left[(Z_t^* - Z_s^*) / \mathcal{F}_s \right] \right| &\leq \frac{1}{2} \left\{ \left| E \left[(Z_t - Z_s) / \mathcal{F}_s \right] \right| + \left| E \left[(Z_t' - Z_s') / \mathcal{F}_s \right] \right| \right\} \\
&\leq g(t) - g(s); \text{ e } E \left[(Z_t^* - Z_s^*)^2 / \mathcal{F}_s \right] = \frac{1}{4} \left\{ E \left[(Z_t - Z_s)^2 / \mathcal{F}_s \right] + \right. \\
&\quad \left. + E \left[(Z_t' - Z_s')^2 / \mathcal{F}_s \right] + 2E \left[(Z_t - Z_s)(Z_t' - Z_s') / \mathcal{F}_s \right] \right\}
\end{aligned}$$

E se $A \in \mathcal{F}_s$, teremos que:

$$\begin{aligned}
\left| \int_A (Z_t - Z_s)(Z_t' - Z_s') dP \right| &= \left| \int_{\Omega} \chi_A (Z_t - Z_s)(Z_t' - Z_s') dP \right| \leq \\
&\leq \left[\int_{\Omega} \chi_A (Z_t - Z_s)^2 dP \right]^{1/2} \left[\int_{\Omega} \chi_A (Z_t' - Z_s')^2 dP \right]^{1/2} = \\
&\quad \left[\int_A E \left[(Z_t - Z_s)^2 / \mathcal{F}_s \right] dP \cdot \int_A E \left[(Z_t' - Z_s')^2 / \mathcal{F}_s \right] dP \right]^{1/2} \\
&\leq \Pr(A) (g(t) - g(s))
\end{aligned}$$

$$\text{ou seja, } \forall A \in \mathcal{F}_s \Rightarrow -(g(t) - g(s)) \leq \frac{1}{\Pr(A)} \int_A (Z_t - Z_s)(Z_t' - Z_s') dP \leq$$

$$\leq g(t) - g(s) \Rightarrow \left| E \left[(Z_t - Z_s)(Z_t' - Z_s') / \mathcal{F}_s \right] \right| \leq g(t) - g(s)$$

$$\text{E portanto } E \left[(Z_t^* - Z_s^*)^2 / \mathcal{F}_s \right] \leq g(t) - g(s)$$

E, procedendo analogamente para Z^{**} , podemos afirmar que, se

Z, Z' verificam (4.1) $\Rightarrow Z^*, Z^{**}$ verificam (4.1)

$$\begin{aligned}
\text{e } \forall [t_{i-1}, t_i] \subset [a, t] \subset [a, b], (Z_{t_i} - Z_{t_{i-1}})(Z_{t_i}' - Z_{t_{i-1}}') &= (Z_{t_i}^* - Z_{t_{i-1}}^*)^2 - \\
&\quad - (Z_{t_i}^{**} - Z_{t_{i-1}}^{**})^2
\end{aligned}$$

somando para todos os intervalos de uma partição π de $[a, t]$ e tomando limites em $\mathcal{L}^1(P)$ quando $|\pi| \longrightarrow 0$ teremos:

$$(5.11) \quad V_{[a, t]}(Z, Z') = V_{[a, t]}(Z^*, Z^*) - V_{[a, t]}(Z^{**}, Z^{**}) \quad \text{q.t.p. } \Omega, P$$

Finalmente de (5.9) e (5.11) deduzimos que

$$\begin{aligned} (5.12) \quad & \left| E[V_{[s, t]}(Z, Z') / \mathcal{F}_s] \right| \leq E[|V_{[s, t]}(Z, Z')| / \mathcal{F}_s] \leq \\ & \leq E[V_{[s, t]}(Z^*, Z^*) / \mathcal{F}_s] + E[V_{[s, t]}(Z^{**}, Z^{**}) / \mathcal{F}_s] \leq \\ & \leq 2(g(t) - g(s)) \quad \text{q.t.p. } \Omega, P. \end{aligned}$$

Integrais Iteradas. - Sejam Z, Z' dois processos verificando (4.1). Seja $V(t, w)$ o processo "variação conjunta de Z, Z' " já definido.

Definição.- Dado $f \in \mathcal{L}_{\ell, M}$ chamaremos integral iterada de f com relação aos processos Z, Z' à integral simples com relação ao processo V ou seja:

$$\int_{[a, b]} f \, dz \, dz' = \int_{[a, b]} f \, dV$$

A definição é coerente pois as distintas versões da "variação conjunta" são processos equivalentes e, como vimos no capítulo IV, processos integradores equivalentes dão lugar a uma mesma integral estocástica.

Teorema 5.3.- A integral iterada

$$\int : \underbrace{\mathcal{E}_{1,M}}_{\mathcal{L}^1(g \otimes P)_M} \longrightarrow \mathcal{L}^1(P)$$

é contínua com relação às normas de $\mathcal{L}^1(g \otimes P)$ e $\mathcal{L}^1(P)$ e pode portanto estender-se aos espaços $\mathcal{L}^1(g \otimes P)_M$ e $\mathcal{L}_w^1(g)_M$ como limite em $\mathcal{L}^1(P)$ e como limite em probabilidade respectivamente.

Além disso, a integral iterada indefinida admite uma versão adaptada, é um processo contínuo em probabilidade e, se $f \in \mathcal{L}^1(g \otimes P)_M$ é também $\mathcal{L}^1$ -contínuo.

Demonstração: Seja $f(t, w) = \sum_{i=1}^n a_i(w) \chi_{J_i}(t)$

com $J_i = [t_{i-1}, t_i)$, $i < n$

$$J_n = [t_{n-1}, t_n]$$

a_i mensurável com relação a $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$

$$\begin{aligned} \left\| \int_{[a,b]} f \, dv \right\|_{\mathcal{L}^1(P)} &= \left\| \sum a_i (V_{t_i} - V_{t_{i-1}}) \right\|_{\mathcal{L}^1(P)} \\ &\leq \sum \left\| a_i (V_{t_i} - V_{t_{i-1}}) \right\|_{\mathcal{L}^1(P)} = \sum E(|a_i| |V_{t_i} - V_{t_{i-1}}|) = \\ &= \sum E \left[|a_i| E[|V_{t_i} - V_{t_{i-1}}| / \mathcal{F}_{t_{i-1}}] \right] \leq \quad (\text{por 5.11}) \\ &\leq 2 \sum E \left[|a_i| (g(t_i) - g(t_{i-1})) \right] = 2 \|f\|_{\mathcal{L}^1(g \otimes P)} \end{aligned}$$

O que prova a continuidade da integral. As outras afirmações do enunciado resultam da aplicação do teorema de extensão e do teorema 5.2

Como no capítulo IV podemos deduzir as seguintes consequências

- A norma da integral iterada:

$$\int: \mathcal{L}^1(g \otimes P) \longrightarrow \mathcal{L}^1(P)$$

está majorada por 2.

- $f, h \in \mathcal{L}_W^1(g)_M$, $\Omega_0 \in \mathcal{Q}$ e α, β versões de $\int_D f dZ dZ'$ e $\int_D h dZ dZ'$;

$$f_W = h_W \quad \forall w \in \Omega_0 \Rightarrow \exists \Omega_1 \subset \Omega_0 \text{ com } \Pr(\Omega_1) = \Pr(\Omega_0)$$

tal que: $\alpha(w) = \beta(w)$, $\forall w \in \Omega_1$

- Se $\{f_n\}$, $f \in \mathcal{L}^1(g \otimes P)_M$ [respectivamente $\alpha \in \mathcal{L}_W^1(g)_M$]

$$\|f - f_n\|_{\mathcal{L}^1(g \otimes P)} \longrightarrow 0 \text{ [respectivamente } \int_D |f - f_n| dg \xrightarrow{\Pr} 0]$$

$$\Rightarrow \int_D f_n dZ dZ' \xrightarrow{\mathcal{L}^1(P)} \int_D f dZ dZ' \text{ [respectivamente em probabilidade]}$$

- $f \in \mathcal{L}_W^1(g)_M, \xi, r > 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \Pr \left[\left| \int_D f dZ dZ' \right| \geq \xi \right] \leq \Pr \left[\int_D |f| dg \geq r \right] + \frac{2r}{\xi}$$

- A integral iterada é quase-linear
- Se $f \in \mathcal{L}^1(g)_M$ e $u = u(w)$ é uma variável aleatória limitada e mensurável com relação a $\mathcal{F}_a$

$$\int_D u f \, dZ dZ' = u \int_D f dZ dZ'$$

(a demonstração repete os argumentos do teorema 4.1)

Aproximação da integral mediante partições.-

Definição.- Seja $\pi = \{(\tau_1, J_1), \dots, (\tau_k, J_k)\}$ uma partição de $[a, b]$ de Cauchy ou ainda Itô-retardada adaptada a (δ, δ^*, g) com $\delta^* > 0$ e $\delta: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $\delta > 0$ q.t.p. D, M_g .
Sejam $J_i = [t_{i-1}, t_i]$ e possivelmente $J_k = [t_{k-1}, b]$ e $\tau_i \leq t_{i-1}$.
Definimos as somas de Riemann iteradas como:

$$S(\pi, f, Z, Z') = \sum_{i=1}^k f_{\tau_i} (Z_{t_i} - Z_{t_{i-1}})(Z'_{t_i} - Z'_{t_{i-1}})$$

$$\text{e } S(\pi, f, Z^2) = S(\pi, f, Z, Z)$$

O enunciado paralelo ao teorema 4.2. é

Teorema 5.4.- Se $f \in \mathcal{L}^1(g \otimes P)_M$ - respectivamente a $\mathcal{L}^1_w(g)$ -

$\int_D f \, dZ dZ'$ é o limite em $\mathcal{L}^1(P)$ - respectivamente em probabilidade - das somas de Riemann iteradas $S(\pi, f, Z, Z')$ adaptadas a (δ, δ^*, g) quando $(\delta, \delta^*) \longrightarrow (0, 0)$

E o análogo ao teorema 4.4. vem dado por ...

Teorema 5.5.- Se $f \in \mathcal{L}^1(g \otimes P)$ for $\mathcal{L}^1$ - limitado e $\mathcal{L}^1$ - contínuo q.t.p. D , M_g e $\{\pi\}$ representam partições de Cauchy de $[a,b]$, então:

$$\int_D f \, dZ dZ' = \lim_{\substack{\mathcal{L}^1(P) \\ \|\pi\| \rightarrow 0}} S(\pi, f, Z, Z')$$

Para provar estes teoremas bastará considerar o caso em que $Z = Z'$, pois chamando $V(Z, Z')$ ao processo "variação conjunta" de Z e Z' , e definindo Z^* , Z^{**} como em (5.10), já vimos em (5.11) que:

$$V(Z, Z') = V(Z^*, Z^*) - V(Z^{**}, Z^{**})$$

e pela definição da integral iterada:

$$\int_D f \, dZ dZ' = \int_D f \, dV(Z, Z')$$

e portanto:

$$\int_D f \, dZ dZ' = \int_D f \, (dZ^*)^2 - \int_D f \, (dZ^{**})^2$$

- a igualdade é trivialmente válida para processos em escada e se conservaria tomando limites em $\mathcal{L}^1(P)$ ou em probabilidade-. Por outro lado, pela sua definição, $\forall \pi$

$$S(\pi, f, Z, Z') = S(\pi, f, Z^*, Z^*) - S(\pi, f, Z^{**}, Z^{**})$$

de onde deduzimos que se os teoremas são válidos no caso $Z = Z'$, serão válidos em geral.

Demonstração: Sejam $f \in \mathcal{L}^1(g \otimes P)_M$, $\{f_n\} \subset \mathcal{E}_{1,M}$, π partição de $[a,b]$ adaptada a (δ, δ^*, g) , V a variação quadrática de Z , $\xi > 0$:

$$\left\| \int_D f \, dZ^2 - S(\pi, f, Z, Z) \right\|_{\mathcal{L}^1(P)} = \left\| \int_D f \, dV - S(\pi, f, Z, Z) \right\| \leq$$

(a) $\left\| \int_D (f - f_n) \, dV \right\|_{\mathcal{L}^1(P)} +$

(b) $\left\| \int_D f_n \, dV - S(\pi, f_n, Z, Z) \right\|_{\mathcal{L}^1(P)} +$

(c) $\left\| S(\pi, f - f_n, Z, Z) \right\|_{\mathcal{L}^1(P)}$

Pela continuidade da integral temos:

$$\left\| \int_D (f - f_n) \, dV \right\|_{\mathcal{L}^1(P)} \leq 2 \|f - f_n\|_{\mathcal{L}^1(P)}$$

e pela densidade de $\mathcal{E}_{1,M}$ em $\mathcal{L}^1(g \otimes P)_M$ poderemos escolher $f_n \in \mathcal{E}_{1,M}$

$$\text{tal que: } \|f - f_n\|_{\mathcal{L}^1(P)} \leq \xi/6 \implies (a) \leq \xi/3$$

$$\begin{aligned} \|S(\pi, f - f_n, Z, Z)\|_{\mathcal{L}^1(P)} &= E \left| \sum (f - f_n)_{\tau_i} (Z_{t_i} - Z_{t_{i-1}})^2 \right| \leq \\ &\leq \sum E \left| (f - f_n)_{\tau_i} (Z_{t_i} - Z_{t_{i-1}})^2 \right| = \sum E \left| (f - f_n)_{\tau_i} \right| E \left| (Z_{t_i} - Z_{t_{i-1}})^2 / \mathbb{E}_{t_i} \right| \\ &\leq \sum E \left| (f - f_n)_{\tau_i} \right| (g(t_i) - g(t_{i-1})) = S(\pi, \|f - f_n\|_{\mathcal{L}^1(P)}, g) \end{aligned}$$

Mas pelo teorema 3.1, $S(\pi, \|f - f_n\|_{\mathcal{L}^1(P)}, g)$ é uma aproximação de

$$\|f - f_n\|_{\mathcal{L}^1(P)} \leq \xi/6$$

Portanto existem δ_1, δ_1^* , tais que $\forall \pi$ Itô-retardada relativa a $(\delta_1, \delta_1^*, g)$

$$(c) \leq S(\pi, \|f - f_n\|, g) \leq \xi/3$$

Para limitar b), reconsideremos que, por (5.7), $\forall \xi_0 > 0$, existe $\delta_0 > 0$ tal que $\forall \pi = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$, partição de $[a, b]$, de tamanho $|\pi| < \delta_0$, $\left\| V_{[a,b]}(Z, Z) - \sum_{i=1}^n (Z_{t_i} - Z_{t_{i-1}})^2 \right\|_{\mathcal{L}^1(P)} < \xi_0$

Esta afirmação continuará sendo válida para qualquer conjunto de subintervalos disjuntos $\{[s_i, s'_i]\}$ de $[a, b]$ e qualquer união de partições $\{\pi_i\}$ destes subintervalos, com $|\pi_i| < \delta_0$

De fato: completando as partições π_i de $[s_i, s'_i]$ com partições π_j^* de subintervalos disjuntos $[c_j, c'_j]$ para cobrir totalmente $[a, b]$, e chamando $\pi_i = \{t_{i,k}\}$, $\pi_j^* = \{t_{j,k}\}$, teríamos:

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_i V_{[s_i, s'_i]}(Z, Z) - \sum_i \sum_k (Z_{t_{i,k}} - Z_{t_{i,k-1}})^2 \right\|_{\mathcal{E}^1(P)} \leq \\ & \left\| V_{[a, b]}(Z, Z) - \sum_{i,k} (Z_{t_{i,k}} - Z_{t_{i,k-1}})^2 - \sum_{j,k} (Z_{t_{j,k}} - Z_{t_{j,k-1}})^2 \right\|_{\mathcal{E}^1(P)} + \\ & + \sum_j \left\| V_{[c_j, c'_j]}(Z, Z) - \sum_{j,k} (Z_{t_{j,k}} - Z_{t_{j,k-1}})^2 \right\|_{\mathcal{E}^1(P)} \end{aligned}$$

tomando $|\pi_j^*| < \delta_0$, o primeiro somando será menor que ξ_0 e fazendo $|\pi_j^*| \longrightarrow 0$, o segundo somando pode ser feito arbitrariamente pequeno. Portanto:

$$(5.13) \quad \left\| \sum_i V_{[s_i, s'_i]}(Z, Z) - \sum_i \sum_k (Z_{t_{i,k}} - Z_{t_{i,k-1}})^2 \right\|_{\mathcal{E}^1(P)} < \xi_0$$

Seja $f_n(t, w) = \sum_{1 \leq i \leq k} a_i(w) \chi_{J_i}(t)$, com $J_i = [t_{i-1}, t_i]$; $J_k = [t_{k-1}, t_k]$

Como vimos no capítulo II escolhendo uma $\delta_2(t) = \sum_{i=1}^k (t_i - t) \chi_{J_i}(t)$

as partições π relativas a $(\delta_2, \delta_2^*, g)$, são reunião de k partições π_i dos intervalos J_i relativas a $(\delta_2|_{J_i}, \delta_2^*, g)$

Esta análise de π , continuará sendo possível tomando

$$\delta_2(t) = \min \left\{ \sum_{i=1}^k (t_i - t) \chi_{J_i}(t), \delta_0 \right\}$$

Seja pois π uma partição relativa a $(\delta_2, \delta_2^*, g)$, com $\delta_2^* > 0$. Chamaremos $\{\pi\}$ ao conjunto de intervalos de π e $D - \{\pi\}$ ao conjunto de intervalos fechados que complementam a partição π proporcionando uma partição de $[a, b]$.

Seja $M = \sup\{|f_n(t, w)|, t \in D, w \in \Omega\}$

$$\begin{aligned} \| S(\pi, f_n, Z, Z) - \int_D f_n dV \|_{\mathcal{E}^1(P)} &\leq \\ \| S(\pi, f_n, Z, Z) - \int_{\{\pi\}} f_n dV \|_{\mathcal{E}^1(P)} + \| \int_{D-\{\pi\}} f_n dV \|_{\mathcal{E}^1(P)} \end{aligned}$$

Pela continuidade da integral:

$$\begin{aligned} \| \int_{D-\{\pi\}} f_n dV \|_{\mathcal{E}^1(P)} &\leq 2 \int_{D-\{\pi\}} \| f_{n,t} \|_{\mathcal{E}^1(P)} dg(t) \leq 2M m_g(D-\{\pi\}) \leq 2M\delta_2^* \\ \| S(\pi, f_n, Z, Z) - \int_{\{\pi\}} f_n dV \|_{\mathcal{E}^1(P)} &\leq \sum_{i=1}^k \| S(\pi_i, f_n, Z, Z) - \int_{\{\pi_i\}} f_n dV \|_{\mathcal{E}^1(P)} \\ &= \sum_{i=1}^k \| a_i (S(\pi_i, 1, Z, Z) - \int_{\{\pi_i\}} 1 dV) \|_{\mathcal{E}^1(P)} \leq k M \xi_0, \text{ por (5.13)} \end{aligned}$$

tomando $\xi_0 < \xi/6KM$, $\delta_2^* < \xi/12M$, $\delta(t) = \min\{\delta_1(t), \delta_2(t)\}$

$\delta^* = \min\{\delta_1^*, \delta_2^*\}$ e π relativa a (δ, δ^*, g)

teremos $b) < \xi/3$

$$e \quad \| \int_D f(dZ)^2 - S(\pi, f, Z, Z) \|_{\mathcal{E}^1(P)} \leq \xi$$

Seja agora $f \in \mathcal{E}_W^1(g)_M$ e f_N os processos "truncados" definidos em (1.19).

Como vimos na demonstração do teorema 2.3, $\forall \xi > 0$, existe N tal que $\Pr[f - f_N \neq 0] \leq \xi/3$

e pela desigualdade (3.18), $\forall r > 0$

$$\Pr \left[\left| \int_D (f-f_N) dV \right| \geq \xi/3 \right] \leq \Pr \left[\int_D |f-f_N| dg \geq r \right] + \frac{6r}{\xi} \leq \frac{\xi}{3} + \frac{6r}{\xi}$$

fazendo $r \longrightarrow 0$

$$\Pr \left[\left| \int_D (f-f_N) dV \right| \geq \xi/3 \right] \leq \xi/3$$

Portanto

$$\Pr \left[\left| \int_D f dV - S(\pi, f, Z, Z) \right| \geq \xi \right] \leq$$

$$\Pr \left[\left| \int_D (f-f_N) dV \right| \geq \xi/3 \right] \quad (a)$$

$$+ \Pr \left[\left| \int_D f_N dV - S(\pi, f_N, Z, Z) \right| \geq \xi/3 \right] \quad (b)$$

$$+ \Pr \left[|S(\pi, f-f_N, Z, Z)| \geq \xi/3 \right] \quad (c)$$

$$(a) \leq \xi/3, (c) \leq \Pr[f-f_N \neq 0] \leq \xi/3$$

$f_N \in \mathcal{L}^1_{\pi}(\mathcal{G} \otimes P)_M$ e pelo que já demonstramos existem δ, δ^* tais que $\forall \pi$ relativa a (δ, δ^*, g)

$$\left\| \int_D f_N dV - S(\pi, f_N, Z, Z) \right\|_{\mathcal{L}^1(P)} \leq (\xi/3)^2$$

e pela desigualdade (3.1) $b) \leq \xi/3$

Concluindo assim a demonstração do teorema 5.4.

Passamos a demonstrar o teorema 5.5.

Seja f $\mathcal{L}^1$ -limitado e $\mathcal{L}^1$ -contínuo, $f^* \in \mathcal{E}_{1,M}$

π partição de Cauchy de $[a, b]$

$$\begin{aligned}
& \left\| \int_D f \, dV - S(\pi, f, Z, Z) \right\|_{L^1(P)} \leq \\
& \left\| \int_D f \, dV - S(\pi, f, V) \right\|_{L^1(P)} + \left\| S(\pi, f-f^*, V) \right\|_{L^1(P)} + \\
& \left\| S(\pi, f^*, V) - S(\pi, f^*, Z, Z) \right\|_{L^1(P)} + \left\| S(\pi, f-f^*, Z, Z) \right\|_{L^1(P)}
\end{aligned}$$

Pela continuidade da integral iterada e o teorema 2.5.

$$\forall \xi > 0, \exists \delta_1 > 0 \mid |\pi| < \delta_1 \implies$$

$$\implies \left\| \int_D f \, dV - S(\pi, f, V) \right\|_{L^1(P)} \leq 2 \|f - S(\pi, f)\|_{L^1(P)} \leq \xi/4$$

Pela densidade de $\mathcal{E}_{L,M}$ em $L^1(g \otimes P)$, podemos tomar $f^* \in \mathcal{E}_{L,M}$ tal que

$$\|f - f^*\|_{L^1(g \otimes P)} < \xi/16 \implies (\|f\| \leq 2) \implies \left\| \int_D (f - f^*) \, dV \right\|_{L^1(P)} < \frac{\xi}{8}$$

e pelo mesmo teorema 2.5., considerando que visto ser g contínua $f - f^*$ é L^1 -limitado e L^1 -contínuo q.t.p. D, m_g , existe $\delta_2 > 0$ tal que $\forall \pi$ de Cauchy com $|\pi| < \delta_2$

$$\left\| S(\pi, f - f^*, V) - \int_D (f - f^*) \, dV \right\|_{L^1(P)} < \xi/8 \implies \text{o segundo somando é } < \frac{\xi}{4}$$

$$\text{Seja } f^*(t, w) = \sum_{i=1}^k a_i(w) \chi_{J_i}, \quad J_i = [t_{i-1}, t_i), \quad J_k = [t_{k-1}, b]$$

$M = \sup\{|f^*(t, w)|, t \in D, w \in \Omega\}$, $\pi = \{a = s_0 < s_1 < \dots < s_n = b\}$ uma partição de $[a, b]$.

Como vimos anteriormente $\forall \xi_0 > 0$ existe $\delta_0 = \delta(\xi_0) > 0$ tal que

$\forall \pi$ de Cauchy com $|\pi| < \delta_0$, se verifica (5.13) para qualquer sub-

conjunto de intervalos.

$$\begin{aligned} & \| S(\pi, f^*, V) - S(\pi, f^*, Z, Z) \|_{\mathcal{L}^1(P)} = \\ & = \sum_{i=1}^k \| a_i \| \sum_{j: t_{j-1} \leq s_{i-1} < t_j} (V[s_{j-1}, s_j](Z, Z) - (Z_{s_j} - Z_{s_{j-1}})^2) \| \leq k M \xi_0 \\ \text{tomando } \xi_0 &= \xi/4 \text{ KM obteremos } \delta_3 = \delta(\xi_0) \end{aligned}$$

Finalmente:

$$\begin{aligned} & \| S(\pi, f-f^*, Z, Z) \|_{\mathcal{L}^1(P)} \leq \sum_{i=1}^n E \left[| (f-f^*)_{s_{i-1}} | (Z_{s_i} - Z_{s_{i-1}})^2 \right] = \\ & = \sum_{i=1}^n E | (f-f^*)_{s_{i-1}} | E \left[(Z_{s_i} - Z_{s_{i-1}})^2 / \mathcal{G}_{s_{i-1}} \right] \leq \\ & \leq \sum_{i=1}^n E | (f-f^*)_{s_{i-1}} | (g(s_i) - g(s_{i-1})) = S(\pi, \| f-f^* \|_{\mathcal{L}^1(P)}, g) \end{aligned}$$

que, de novo pelo teorema 2.5., é uma aproximação de

$$\int_D \| f - f^* \|_{\mathcal{L}^1(P)} dg = \| f-f^* \|_{\mathcal{L}^1(g \otimes P)} \leq \xi/16 \implies$$

$$\exists \delta_4 > 0 \mid |\pi| < \delta \implies S(\pi, \| f-f^* \|, g) < \xi/4$$

Tomando $\delta = \min \{ \delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4 \}$

Se π é de Cauchy com $|\pi| < \delta$

$$\left\| \int_D f dV - S(\pi, f, Z, Z) \right\|_{\mathcal{L}^1(P)} \leq \xi$$

CAPÍTULO VI

ADAPTAÇÃO DA FÓRMULA DE ITÔ

Primeiramente provaremos a existência de versões contínuas da integral indefinida.

Restringindo a generalidade das condições impostas no Capítulo V, suporemos:

(6.1) $g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ monótona, não decrescente e contínua.

(6.2) Um processo adaptado Z , contínuo q.t.p. Ω, P , verificando: $\left| E(Z_\beta - Z_\alpha) / \mathcal{F}_\alpha \right| \leq K (g(\beta) - g(\alpha))$ para $K > 0, \forall \alpha, \beta \in D, \alpha < \beta$ e tal que para algum p , $1 \leq p < \infty$, $\forall [s, t] \subset D$, a definição da integral estocástica sobre $\mathcal{E}_{\ell, M}$, ou seja

$$\int : \mathcal{E}_{\ell, M} \longrightarrow E^P(P)$$

$$\cap$$

$$E^P(g \otimes P)_M$$

proporcione uma aplicação contínua e de norma majorada por uma certa constante C .

Lema 6.1. - Se $h : D \longrightarrow \mathbb{R}$ é lipchitziana em relação a g , o

processo $Z(t, w) = h(t)$ verifica as condições (6.2).

DEMONSTRAÇÃO: Se K^* é uma constante de Lipchitz e se

$f \in \mathcal{E}_{\ell, M}$, $f = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{J_i}$, em escada, definida no intervalo

$[s, t]$, teremos:

$$\left\| \int_{[s, t]} f \, d h \right\|_{\mathcal{E}^p(P)} = \left\| \sum_{i=1}^n a_i \Delta_{J_i}(h) \right\|_{\mathcal{E}^p(P)} \leq K^* \sum_{i=1}^n \|a_i\|_{\mathcal{E}^p(P)} \Delta_{J_i}(g)$$

$$= K^* \int_{[s, t]} \|f_t\|_{\mathcal{E}^p(P)} \, d g \leq K^* \left(\int_{[s, t]} \|f_t\|_{\mathcal{E}^p(P)}^p \, d g \right)^{1/p} (g(t) - g(s))^{1/q}$$

$$\leq K^* \|f\|_{\mathcal{E}^p(g \otimes P)} (g(b) - g(a))^{1/q} \quad \text{sendo } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Lema 6.2. - Se $f \in \mathcal{E}^p(g \otimes P)_M$, a integral estocástica indefinida

$$(6.3) \quad \int_{[a, t]} K |f| \, d g \pm \int_{[a, t]} f \, d z$$

é uma submartingala.

DEMONSTRAÇÃO: Seja $f \in \mathcal{E}_{\ell, M}$; $f(t, w) = \sum_{i=1}^n U_i(w) \chi_{[t_{i-1}, t_i)}(t)$

$t, t' \in D$ com $a \leq t < t' \leq b$

$a = t_0 < t_1 < \dots < t_p \leq t < t_{p+1} < \dots < t_\ell \leq t' < t_{\ell+1} < \dots < t_n = b$

Consideremos a partição de $[t, t']$: $t < t_{p+1} < \dots < t_\ell \leq t'$;

Seja $[\alpha, \beta]$ um dos intervalos dessa partição e F uma versão de

(6.3), $V(w) = f(s, w)$ para $s \in [\alpha, \beta]$

$$\begin{aligned} E[(F_\beta - F_\alpha)/\mathcal{F}_t] &= E[E[(F_\beta - F_\alpha)/\mathcal{F}_\alpha]/\mathcal{F}_t] = \\ &= K E[|V|(g(\beta) - g(\alpha))/\mathcal{F}_t] \pm E[V E[(Z_\beta - Z_\alpha)/\mathcal{F}_\alpha]/\mathcal{F}_t] \\ &\geq K E[|V|(g(\beta) - g(\alpha))/\mathcal{F}_t] - K E[|V|(g(\beta) - g(\alpha))/\mathcal{F}_t] \geq 0 \end{aligned}$$

e somando para todos os intervalos $[\alpha, \beta]$ da partição de $[t, t']$ teremos:

$$E[(F_{t'} - F_t)/\mathcal{F}_t] \geq 0$$

$\implies F$ é submartingala

Seja agora $f \in \mathcal{L}^p(g \otimes P)_M$; $f_n \in \mathcal{L}_{\ell, M}$ tais que

$$\left\| f - f_n \right\|_{\mathcal{L}^p(g \otimes P)} \longrightarrow 0$$

Sejam F, F_n versões de (6.3) correspondentes a f e f_n

$$\begin{aligned} (6.4) \quad \left\| \int_{[a, t]} |f| d g - \int_{[a, t]} |f_n| d g \right\|_{\mathcal{L}^p(P)} &= \left\| \int_{[a, t]} (|f| - |f_n|) d g \right\|_{\mathcal{L}^p(P)} \leq \\ &\leq (g(b) - g(a))^{1/q} \|f - f_n\|_{\mathcal{L}^p(g \otimes P)} \end{aligned}$$

analogamente

$$(6.5) \quad \left\| \int_{[a, t]} f d z - \int_{[a, t]} f_n d z \right\|_{\mathcal{L}^p(P)} \leq C \|f - f_n\|_{\mathcal{L}^p(g \otimes P)}$$

de (6.4) e (6.5) concluímos que $\left\| F_t - (F_n)_t \right\|_{\mathcal{L}^1(P)} \longrightarrow 0 \implies$

$$\left. \begin{aligned} &\implies (F_n)_t \xrightarrow{\mathcal{L}^1(P)} F_t \\ &\text{e } F_n \text{ submartingalas} \end{aligned} \right\} \implies F \text{ é submartingala}$$

visto que a convergência em $\mathcal{L}^1(P)$ de variáveis aleatórias implica a convergência das esperanças condicionadas dessas variáveis em relação a qualquer σ -subálgebra.

Antes de provarmos a existência de versões contínuas, estabelecemos uma prolongação do teorema 3.4.

Lema 6.3. - Seja $f \in \mathcal{L}_w^P(g)_M$, If uma versão contínua da integral estocástica (caso a mesma exista), $A \in \mathcal{Q} \mid f(.,w) = 0 \quad \forall w \in A$

$$\exists A^* \subset A \text{ com } \Pr(A^*) = \Pr(A) \mid If(.,w) = 0, \quad \forall w \in A^*$$

DEMONSTRAÇÃO: Seja S o subconjunto dos racionais de $[a,b]$. Pelo teorema 3.4, $\forall t \in S$ existe $A_t \subset A$ com $\Pr(A_t) = \Pr(A)$ tal que $If(t, w) = 0, \quad \forall w \in A_t$.

$$\text{Seja } A^* = \bigcap_{t \in S} A_t \Rightarrow A^* \subset A, \quad \Pr(A^*) = \Pr(A)$$

$$\left. \begin{aligned} &If(t, w) = 0, \quad \forall w \in A^*, \quad t \in S \\ &If \text{ contínuo} \end{aligned} \right\} \implies (If)_w = 0 \quad \forall w \in A^*$$

como queríamos demonstrar.

Teorema 6.4. - Se g, Z verificam as condições (6.1) e (6.2), para todo processo $f \in \mathcal{F}_w(g)_M$ existe uma versão da integral estocástica indefinida que é um processo contínuo.

DEMONSTRAÇÃO: Sejam $f \in \mathcal{F}^p(g \otimes P)_M$, $\{f_n\} \subset \mathcal{F}_{\ell, M}$ tais que

$$\|f - f_n\|_{\mathcal{F}^p(g \otimes P)} < 2^{-2n} [C + K(g(b) - g(a))^{1/q}]$$

S os racionais de $[a, b]$, $\sigma = \pm 1$, $h_n = f - f_n$

$$\psi_{n, \sigma}(t, w) = \left[\int_{[a, t]} K |h_n| d g \right](w) + \left[\sigma \int_{[a, t]} h_n d Z \right](w)$$

Pelo lema 6.2, $\psi_{n, \sigma}$ é submartingala.

$$E[\psi_{n, \sigma}^+] \leq \|\psi_{n, \sigma}\|_{\mathcal{F}^1(P)} \leq \|\psi_{n, \sigma}\|_{\mathcal{F}^p(P)} \leq$$

$$\leq [C + K(g(b) - g(a))^{1/q}] \|h_n\|_{\mathcal{F}^p(g \otimes P)} \leq 2^{-2n}$$

Seja $A_{n, \sigma} = \{w \in \Omega \mid \sup\{\psi_{n, \sigma}(t, w) \mid t \in S\} > 2^{-n}\}$

Pela desigualdade fundamental das martingalas

$$\Pr[A_{n, \sigma}] \leq 2^n E[\psi_{n, \sigma}^+] \leq 2^{-n}$$

$$A_n = \{w \in \Omega \mid \sup_{t \in S} \left| \int_{[a, t]} h_n d Z \right| > 2^{-n}\} \subset A_{n, 1} \cup A_{n, -1}$$

$$\Rightarrow \Pr(A_n) \leq 2^{1-n} \Rightarrow \Pr \left[\bigcup_{n > K} A_n \right] \leq \sum_{n > K} 2^{1-n} = 2^{1-K}$$

$$\text{Se } A = \bigcap_{K} \bigcup_{n > K} A_n \Rightarrow \Pr(A) = 0$$

$$e \forall w \notin A \Rightarrow \exists K \mid w \notin \bigcup_{n > K} A_n \Rightarrow \forall n > K, t \in S, \left| \int_{[a, t]} h_n d Z \right| \leq 2^{-n}.$$

$$(6.6) \Rightarrow H_n(t, w) = \left(\int_{[a, t]} h_n d Z \right)(w) \longrightarrow 0 \text{ q.t.p. } \Omega, P.$$

uniformemente em t .

Se F, F_n são versões da integral estocástica indefinida de f, f_n , teremos que: $F_t = (F_n)_t + (H_n)_t$ q.t.p. Ω, P .

Como S é numerável...

$\forall t \in S, F(t, w) = F_n(t, w) + H_n(t, w)$ q.t.p. Ω, P

e por (6.6), $\exists N_1 \in \mathcal{Q}$ com $\Pr(N_1) = 0 \mid \forall w \notin N_1$

$F_n(t, w) \longrightarrow F(t, w)$

uniformemente em $t \in S$.

Pela definição da integral estocástica e a condição (6.2)

$\exists N_2$ com $\Pr(N_2) = 0 \mid \forall w \notin N_2, F_n(., w)$ é contínua.

Ou seja: $\forall w \notin N_1 \cup N_2, \epsilon > 0, n \mid |F_n(t, w) - F(t, w)| < \epsilon/3, \forall t \in S$

e $\delta > 0 \mid |t - t'| < \delta \Rightarrow |F_n(t, w) - F_n(t', w)| < \epsilon/3$

Portanto $\forall s, t \in S, |t - s| < \delta \Rightarrow |F(t, w) - F(s, w)| < \epsilon$

$\Rightarrow \forall w \notin N_1 \cup N_2, F(., w)$ é uniformemente contínua em S

$\Rightarrow \forall w \notin N_1 \cup N_2, F(., w)$ é a restrição a S de uma função contínua $F^*(., w)$.

Definimos $F^*(t, w) = 0 \mid \forall t \in D$ se $w \in N_1 \cup N_2$

Seja $t \in D, \{t_n\} \subset S \mid t_n \longrightarrow t$

$\forall t_n, w \notin N_1 \cup N_2, F(t_n, w) = F^*(t_n, w)$

Pelo teorema 5.2, F é contínuo em probabilidade

$\Rightarrow F_{t_n} \xrightarrow{\Pr} F_t \Rightarrow \exists \{n_K\}, N_3(t) \in \mathcal{Q}$ com $\Pr[N_3(t)] = 0$

tal que $\forall w \notin N_1 \cup N_2 \cup N_3$,

$F(t_{n_K}, w) \longrightarrow F(t, w)$

e $F^*(t_{n_K}, w) \longrightarrow F^*(t, w)$ pela continuidade de F^*

$\Rightarrow F^*_t = F_t$ q.t.p. $\Omega, P \Rightarrow$

$\Rightarrow F^*$ é uma versão contínua da integral indefinida

Seja agora $f \in \mathcal{E}_w^P(g)_M$ e $\{f_N\}$ os processos "truncados" definidos em (1.19); $f_N \in \mathcal{E}_w^P(g \otimes P)_M$; e If_N versões contínuas da integral estocástica indefinida.

Sejam $A_N = \{w \mid \int_D |f|^P dg < N\}$

Pela definição de $\mathcal{E}_w^P(g)_M \Rightarrow \Pr \left[\bigcup_N A_N \right] = 1$

e $\forall w \in A_N \Rightarrow f_{N+K}(t, w) = f(t, w) \quad \forall t \in D \Rightarrow$

$$\Rightarrow (f_N - f_{N+K})(\cdot, w) = 0 \Rightarrow$$

(pelo lema 6.3) $\Rightarrow \exists B_{N,K} \subset A_N$ com $\Pr(B_{N,K}) = \Pr(A_N)$ tal que

$$\forall w \in B_{N,K}, \quad If_N(\cdot, w) = If_{N+K}(\cdot, w)$$

Seja $B_N = \bigcap_K B_{N,K} \Rightarrow \Pr(B_N) = \Pr(A_N)$

$$\text{e } \forall w \in B_N, \quad \forall K, \quad If_N(\cdot, w) = If_{N+K}(\cdot, w)$$

Definimos $G_N = \bigcup_I B_K \subset \bigcup_I A_K = A_N \Rightarrow$

$$\Pr(G_N) = \Pr(A_N) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Pr(UG_N) = \lim_N \Pr(G_N) = \lim_N \Pr(A_N) = \Pr(UA_N) = 1$$

$$\text{e } \forall w \in G_N \text{ e } \forall K > 0, \quad If_N(\cdot, w) = If_{N+K}(\cdot, w)$$

$$\Rightarrow \forall w \in \bigcup_N G_N, \quad J \mid w \in G_J \Rightarrow If_{J+K}(\cdot, w) =$$

$$= If_J(\cdot, w) \quad \forall K > 0 \Rightarrow$$

$\forall w \in UG_N$, a sucessão $If_N(\cdot, w)$ converge uniformemente para uma certa $\alpha(\cdot, w)$ contínua.

Fazendo $\alpha(t, w) = 0$ se $w \in (UG_N)^c$

teremos:

$$(6.7) \quad If_N(\cdot, w) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} \alpha(\cdot, w) \text{ uniformemente e q.t.p. } \Omega, P.$$

Por outro lado

$$\int_D |f - f_N|^P dg \longrightarrow 0 \text{ q.t.p. } \Omega, P \Rightarrow$$

$$\int_D |f - f_N|^P dg \xrightarrow{\text{Pr}} 0 \Rightarrow$$

pelo teorema 3.3

$$\forall t \in D, I(f_N)(t, \cdot) \xrightarrow{\text{Pr}} If(t, \cdot) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists \{N_K\} \text{ tal que } I(f_{N_K})(t, \cdot) \longrightarrow If(t, \cdot) \text{ q.t.p. } \Omega, P.$$

e por (6.7)

$$I(f_{N_K})(t, \cdot) \longrightarrow \alpha(t, \cdot) \text{ q.t.p. } \Omega, P \Rightarrow \alpha(t, \cdot) = If(t, \cdot) \text{ q.t.p. } \Omega, P.$$

E portanto α é uma versão contínua da integral C.Q.D..

Corolário 6.5. - Se g é monótona não decrescente e contínua e Z, Z' são processos adaptados, contínuos q.t.p. Ω, P , verificando as condições (4.1), a integral simples e a integral iterada admitem versões que são processos contínuos.

DEMONSTRAÇÃO: Para as integrais simples, é uma consequência imediata do teorema. A variação conjunta de Z, Z' , ou seja, a variável:

$$Z_t Z'_t - Z_a Z'_a - \int_{[a,t]} Z dZ' - \int_{[a,t]} Z' dZ$$

possui uma versão contínua q.t.p. e por (5.12) verificará as condições (6.2) C.Q.D..

Corolário 6.6. - Para a versão contínua da variação conjunta dos processos, as trajetórias são de variação limitada q.t.p. Ω, P .

DEMONSTRAÇÃO: Por (5.11), bastará provar o corolário para a variação quadrática de um único processo. Seja $V[s, t]$ essa variação no intervalo $[s, t]$ C D.

Como já vimos $V[a, t] = V[a, s] + V[s, t]$ q.t.p. Ω, P .

E por sua definição e (5.7) $V[s, t] \geq 0$ q.t.p. Ω, P .

$\Rightarrow \forall t \geq s, V[a, t] \geq V[a, s]$ q.t.p. Ω, P .

Seja S o conjunto de racionais de $[a, b]$, $s, r \in S, s < r$.

Seja $A_{s,r} \in \mathcal{Q} \mid \Pr[A_{s,r}] = 1$ e $V[a, s](w) \leq V[a, r](w), \forall w \in A_{s,r}$

$$A_r = \bigcap_{s \in S, s < r} A_{s,r} \Rightarrow \Pr[A_r] = 1$$

e $\forall s \in S, s < r, w \in A_r \Rightarrow V[a, s](w) \leq V[a, r](w)$

Seja $A = \bigcap_{r \in S} A_r \Rightarrow \Pr(A) = 1$

$\forall s, r \in S, s < r, w \in A \Rightarrow V[a, s](w) \leq V[a, r](w)$

E levando em conta a continuidade de V

$\forall w \in A; t, t' \in D, t < t' \Rightarrow V[a, t](w) \leq V[a, t'](w)$

como queríamos demonstrar.

Teorema 6.7. - Sejam $\{f_n\}, f \in \mathcal{L}_w^P(g)_M$ tais que

$$\int_D |f - f_n|^p dg \longrightarrow 0 \text{ q.t.p. } \Omega, P$$

e ξ, ξ_n versões contínuas da integral em relação a Z que verifi que (6.1) e (6.2).

Existe uma subsucessão ξ_{n_K} e $A \in \mathcal{Q}$ com $\Pr(A) = 1$ tais que

$$\xi_{n_K}(\cdot, w) \longrightarrow \xi(\cdot, w) \quad \forall w \in A$$

DEMONSTRAÇÃO: Como em (1.19) definimos processos truncados:

$$h_n(t, w) = \chi_{[0,1]} \left[\int_{[a,t]} |f - f_n|^P d g \right] \cdot (f - f_n)(t, w)$$

Pelo demonstrado no teorema 1.2

$$h_n \in \mathcal{L}^P(g \otimes P)_M \text{ e } \|h_n\|_{\mathcal{L}^P(g \otimes P)} \leq 1$$

Além disso:

$$|h_n(t, w)| \leq |(f - f_n)(t, w)| \text{ e } 1 \geq \int_D |h_n|^P d g \longrightarrow 0 \text{ q.t.p. } \Omega, P$$

O teorema de convergência dominada garante que:

$$\|h_n\|_{\mathcal{L}^P(g \otimes P)} = \int_{\Omega} d P \int_D |h_n|^P d g \longrightarrow 0$$

Existirá uma subsucessão tal que

$$\|h_{n_K}\|_{\mathcal{L}^P(g \otimes P)} < 2^{-2K} \left[C + K (g(b) - g(a))^{1/q} \right]^{-1}$$

Seja $\left(\int_{[a,t]} h_n d Z \right)(w)$ uma versão contínua da integral.

Pelo já demonstrado no teorema 6.4

$$\Pr\{w \in \Omega \mid \sup_{t \in D} \left| \int_{[a,t]} h_{n_K} d Z \right| > 2^{-K}\} \leq 2^{1-K}$$

Por outro lado, da hipótese do teorema,

$$\int_D |f - f_n|^P d g \longrightarrow 0 \text{ q.t.p. } \Omega, P$$

se deduz que

$$\int_D |f - f_n|^p d g \xrightarrow{\text{Pr}} 0$$

(sendo em realidade suficiente supor esta hipótese mais fraca) e portanto $\forall n > 0 \exists K_0 \quad |K| > K_0 \Rightarrow \text{Pr} \left[\int_D |f - f_{n_K}|^p d g > 1 \right] \leq n$

$$\text{Se } A_K = \{w \in \Omega \mid \int_D |f - f_{n_K}|^p d g \leq 1\} \Rightarrow \text{Pr}(A_K) \geq 1 - n$$

$$\text{e } \forall w \in A_K, h_{n_K}(\cdot, w) = f(\cdot, w) - f_{n_K}(\cdot, w) \Rightarrow$$

$$\text{pelo lema 6.3 } \exists B_K \subset A_K \text{ com } \text{Pr}(B_K) = \text{Pr}(A_K)$$

$$\text{tal que } \forall w \in B_K, \left(\int_{[a,t]} h_{n_K} dZ \right) (w) = \left(\int_{[a,t]} f dZ \right) (w) - \left(\int_{[a,t]} f_{n_K} dZ \right) (w)$$

Portanto

$$\{w \mid \sup_{t \in D} \left| \int_{[a,t]} (f - f_{n_K}) dZ \right| > 2^{-K} \} =$$

$$= \{w \mid \sup_{t \in D} \left| \int_{[a,t]} (f - f_{n_K}) dZ \right| > 2^{-K} \} \cap (B_K \cup B_K^c) \subset$$

$$\subset \{w \mid \sup_{t \in D} \left| \int_{[a,t]} h_{n_K} dZ \right| > 2^{-K} \} \cup B_K^c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Pr \left\{ w \mid \sup_{t \in D} \left| \int_{[a,t]} (f - f_{n_K}) \, d z \right| > 2^{-K} \right\} < 2^{1-K} + \eta$$

$$= \sup_{t \in D} \left| \int_{[a,t]} (f - f_{n_K}) \, d z \right| \xrightarrow{\Pr} 0$$

existirá uma subsucessão que convergerá para 0 q.t.p. Ω , P como queríamos demonstrar.

A seguir estabeleceremos uma "versão" da fórmula de Itô adaptada a medida gerada por g .

Definição: Dados os processos adaptados $f, a_i, \xi_i, b_j, z_j, z'_j$ diremos que satisfazem a equação

$$df = \sum_i a_i d\xi_i + \sum_j b_j dz_j dz'_j$$

se $V[s, t] \subset D$:

$$[f]_s^t = \sum_i \int_{[s,t]} a_i d\xi_i + \sum_j \int_{[s,t]} b_j dz_j dz'_j \quad \text{q.t.p. } \Omega, P.$$

Teorema 6.8. - Sejam $\xi_i, i = 1, \dots, n$, processos contínuos verificando:

$$(6.8) \quad d\xi_i = \sum_{\alpha=1}^k a_{i\alpha} dg + \sum_{\alpha=1}^{\ell} b_{i\alpha} dz_{i\alpha} + \sum_{\alpha, \beta=1}^m c_{i\alpha\beta} dz'_{i\alpha\beta} dz''_{i\alpha\beta}$$

com $c_{i\alpha\beta}, a_{i\alpha} \in \mathcal{L}_w^1(g)_M$; $b_{i\alpha} \in \mathcal{L}_w^2(g)_M$.

$z_{i\alpha}, z'_{i\alpha\beta}, z''_{i\alpha\beta}$ processos contínuos q.t.p. Ω, P , verificando as condições (4.1).

Seja $h: D \longrightarrow R$ lipchitziana com relação a g e

$f(x_1, \dots, x_n, y): R^{n+1} \longrightarrow R$ tal que

$$f, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_j} \text{ sejam contínuas.}$$

Nestas condições, o processo:

$$f(\xi_1(t, w), \xi_2(t, w), \dots, \xi_n(t, w), h(t))$$

verifica a equação:

$$\begin{aligned}
 (6.9) \quad df = \frac{\partial f}{\partial y} dh + \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=1}^k \frac{\partial f}{\partial x_i} a_{i\alpha} dg + \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=1}^l \frac{\partial f}{\partial x_i} b_{i\alpha} dz_{i\alpha} + \\
 + \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha, \beta=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i} c_{i\alpha\beta} dz'_{i\alpha\beta} dz''_{i\alpha\beta} + \\
 + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \sum_{\alpha, \beta=1}^l \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} b_{i\alpha} b_{j\beta} dz_{i\alpha} dz_{j\beta}
 \end{aligned}$$

que se pode escrever abreviadamente como

$$df = \frac{\partial f}{\partial y} dh + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} d\xi_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \sum_{\alpha, \beta=1}^l \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} b_{i\alpha} b_{j\beta} dz_{i\alpha} dz_{j\beta}.$$

Nas equações (6.8), (6.9), g e h devem ser entendidas como processos estocásticos (constantes em cada $t \in D$) e todas as integrais tacitamente consideradas como integrais estocásticas. As derivadas, calculadas no valor $(\xi_1(t, \omega), \dots, \xi_n(t, \omega), h(t))$ são processos contínuos e adaptados, tendo sentido as integrais consideradas em (6.9), visto que os integrandos pertencem a espaços adequados:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f}{\partial y} \in \mathbb{L}_w^p(g)_M \quad \text{para } 1 \leq p < \infty, \quad \frac{\partial f}{\partial x_i} b_{i\alpha} \in \mathbb{L}_w^2(g)_M \\
 \frac{\partial f}{\partial x_i} a_{i\alpha}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_i} c_{i\alpha\beta}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} b_{i\alpha} b_{j\beta} \in \mathbb{L}_w^1(g)_M
 \end{aligned}$$

DEMONSTRAÇÃO: Provaremos a fórmula escalonadamente.

a) Para $n = 1$; $f(x, y) = x \cdot y$; $m = k = l = 1$; a fórmula se reduz à equação:

$$(6.10) \quad d(h.\xi) = \xi dh + hadg + hbd Z + hcdZ'd Z''$$

Sejam $t_1, t_2 \in D$, $t_1 < t_2$ e os processos a, b, c , variáveis aleatórias constantes no intervalo $[t_1, t_2]$.

Nestas condições $\forall t \in [t_1, t_2]$.

$$(6.11) \quad \xi_t = \xi(t, \cdot) = \xi_{t_1} + a(g(t) - g(t_1)) + b(Z_t - Z_{t_1}) + c(V_t - V_{t_1}).$$

Sendo V_t uma versão contínua da "variação conjunta de Z', Z'' " e a igualdade, q.t.p. Ω, P .

O segundo membro de (6.10) dá lugar a:

$$\begin{aligned} (6.12) \quad & \int_{[t_1, t_2]} hadg + \int_{[t_1, t_2]} hbdZ + \int_{[t_1, t_2]} hcdZ'dZ'' + \int_{[t_1, t_2]} \xi_{t_1} dh + \\ & + \int_{[t_1, t_2]} a(g(t) - g(t_1))dh + \int_{[t_1, t_2]} b(Z_t - Z_{t_1})dh + \int_{[t_1, t_2]} c(V_t - V_{t_1})dh = \\ & = (h(t_2) - h(t_1))(\xi_{t_1} - ag(t_1) - bZ_{t_1} - cV_{t_1}) + \\ & + a \left[\int_{[t_1, t_2]} g dh + \int_{[t_1, t_2]} h dg \right] + b \left[\int_{[t_1, t_2]} Z dh + \int_{[t_1, t_2]} h dZ \right] + c \left[\int_{[t_1, t_2]} V dh + \int_{[t_1, t_2]} h dV \right] \end{aligned}$$

No segundo membro de (6.12), a continuidade de todos os integrandos q.t.p. Ω, P , permite afirmar, pelos mesmos argumentos empregados no teorema 4.5, que essas integrais são os limites em probabilidade de somas de Cauchy quando o tamanho das partições tende para zero. Portanto uma subsucessão dessas somas convergirá q.t.p. Ω, P e o limite coincidirá com as correspondentes integrais de Riemann - Stieltjes, que existem para as trajetórias individualmente (q.t.p. Ω, P), visto que em todas essas integrais

o integrando e o integrador tem (q.t.p. Ω, P) trajetórias contínuas e de variação limitada respectivamente ou vice-versa.

De tudo isso deduzimos que uma versão do segundo membro de (6.12) é:

$$(h(t_2) - h(t_1)) (\xi_{t_1} - a g(t_1) - b z_{t_1} - c v_{t_1}) +$$

$$+ [a g h + b h z + c h v]_{t_1}^{t_2} = [\xi h]_{t_1}^{t_2}.$$

Se $a, b, c \in \mathcal{E}_{\ell, M}$ e dividimos $[t_1, t_2] = \cup [s_i, s_i^*)$ nos subintervalos disjuntos em que a, b, c são constantes, pelo já demonstrado, a fórmula será válida para expressar

$$[h \cdot \xi]_{s_i}^{s_i^*}$$

e seguirá sendo válida para expressar $[h \cdot \xi]_{t_1}^{t_2}$, pela aditividade de

$$[h \cdot \xi]_{t_1}^{t_2} = \sum [h \cdot \xi]_{s_i}^{s_i^*}$$

e a aditividade de todas as integrais do primeiro membro de (6.12).

Finalmente, se $a, c \in \mathcal{L}_w^1(g)_M$, $b \in \mathcal{L}^2(g \otimes P)_M$

e $a_n, b_n, c_n \in \mathcal{E}_{\ell, M}$, tais que

$$(6.13) \quad \left. \begin{aligned} \int_D |a - a_n| dg &\longrightarrow 0 \\ \int_D |b - b_n| dg &\longrightarrow 0 \\ \int_D |c - c_n| dg &\longrightarrow 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{q.t.p. } \Omega, P$$

chamando ξ_n a uma versão de

$$(6.14) \quad \xi_{t_1} + \int_{[t_1, t_2]} a_n dg + \int_{[t_1, t_2]} b_n dz + \int_{[t_1, t_2]} c_n dv, \quad \text{com } t \in [t_1, t_2]$$

pelo teorema 6.7 existirá uma subsucessão n' tal que

$\xi_n, (.,w) \longrightarrow \xi(.,w)$ q.t.p. Ω, P uniformemente.

$$(6.15) \quad [\xi_n]_{t_1}^{t_2} \longrightarrow [\xi]_{t_1}^{t_2} \text{ q.t.p. } \Omega, P \\ \Rightarrow [h \cdot \xi_n]_{t_1}^{t_2} \longrightarrow [h \xi]_{t_1}^{t_2} \text{ q.t.p. } \Omega, P \Rightarrow$$

$$(6.16) \quad [h \cdot \xi_n]_{t_1}^{t_2} \xrightarrow{Pr} [h \xi]_{t_1}^{t_2}$$

pelo já demonstrado:

$$(6.17) \quad [h \cdot \xi_n]_{t_1}^{t_2} = \int_{[t_1, t_2]} h a_n, dg + \int_{[t_1, t_2]} h b_n, dz + \int_{[t_1, t_2]} h c_n, dv + \int_{[t_1, t_2]} \xi_n, dh \\ \text{q.t.p. } \Omega, P$$

Pela convergência uniforme de ξ_n ,

$$\int_D |\xi_n - \xi| dg \longrightarrow 0 \quad \text{q.t.p. } \Omega, P$$

e

$$\left. \begin{aligned} \int_D |h(a_n - a)| dg &\longrightarrow 0 \\ \int_D |h(b_n - b)| dg &\longrightarrow 0 \\ \int_D |h(c_n - c)| dg &\longrightarrow 0 \end{aligned} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{q.t.p. } \Omega, P \\ \text{pela continuidade de } h. \end{array}$$

Pelo lema 6.1 e o teorema 3.3, as integrais do segundo membro de (6.17) convergem em probabilidade até as respectivas integrais substituindo a_n, b_n, c_n, ξ_n por a, b, c, ξ . Este resultado, junto a (6.16) e a definição de diferencial $\Rightarrow$

(6.10). Para um processo ξ definido por (6.8), a fórmula se demonstra decompondo ξ em somandos com $m = l = k = 1$ e aplicando a propriedade distributiva.

b) Seja $\xi_1 = Z^*$, $\xi_2 = \xi$, $f(x_1, \dots, x_n, y) = x_1 \cdot x_2$.

Se trata de provar que:

$$(6.18) \quad d(Z^* \cdot \xi) = \xi dZ^* + Z^* d\xi + \sum_{\alpha} b_{\alpha} dZ^* dZ_{\alpha}$$

Como em a), a propriedade distributiva (considerando ξ , $d\xi$ como soma de elementos do mesmo tipo) permite reduzir a demonstração - ao caso $k = l = m = 1$. E também como em a) consideraremos primei_ramente a, b, c variáveis constantes em $[t_1, t_2]$;

$$\begin{aligned} & \int_{[t_1, t_2]} \xi dZ^* + \int_{[t_1, t_2]} Z^* d\xi = a \left[\int_{[t_1, t_2]} Z^* dg + \int_{[t_1, t_2]} g dZ^* \right] \\ & + b \left[\int_{[t_1, t_2]} Z^* dZ + \int_{[t_1, t_2]} Z dZ^* \right] + c \left[\int_{[t_1, t_2]} Z^* dV + \int_{[t_1, t_2]} V dZ^* \right] \\ & + \left[\xi_{t_1} - ag(t_1) - bZ_{t_1} - cV_{t_1} \right] [Z^*_{t_2} - Z^*_{t_1}] \end{aligned}$$

Pelos mesmos argumentos que em a), e levando em conta o corolário 6.6 o primeiro e o terceiro somandos dão lugar a

$$\left[Z^* (ag + cV) \right]_{t_1}^{t_2} \quad \text{q.t.p. } \Omega, P$$

E pela definição de variação conjunta, o segundo somando é

$$\left[b \, z^* \, z \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{[t_1, t_2]} b \, d z \, d z^*$$

Portanto:

$$(6.19) \quad \int_{[t_1, t_2]} \xi \, d z^* + \int_{[t_1, t_2]} z^* \, d \xi = \left[z^* \, \xi \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{[t_1, t_2]} b \, d z \, d z^*$$

q.t.p. Ω , P .

A extensão ao caso em que $a, b, c \in \xi_{\ell, M}$, obtém-se sub dividindo adequadamente o intervalo $|t_1, t_2|$.

Finalmente, se $a, c \in \xi_w^1(g)_M$, $b \in \xi_w^2(g)_M$; $a_n, b_n, c_n \in \xi_{\ell, M}$, verificando (6.13), ξ_n verificando (6.14), pelo teorema 6.7:

$$\xi_n(., w) \longrightarrow \xi(., w) \text{ uniformemente q.t.p. } \Omega, P$$

$$\Rightarrow \int_D |\xi_n - \xi| \, d g \longrightarrow 0 \text{ q.t.p. } \Omega, P. \text{ E pelo teorema 3.3}$$

$$\int_{[t_1, t_2]} \xi_n \, d z^* \xrightarrow{\text{Pr}} \int_{[t_1, t_2]} \xi \, d z^*$$

e analogamente, pela continuidade de z^* q.t.p. Ω, P :

$$\int_D |z^*(a_n - a)| \, d g \longrightarrow 0, \text{ q.t.p. } \Omega, P \Rightarrow \int_{[t_1, t_2]} z^* a_n \, d g \xrightarrow{\text{Pr}} \int_{[t_1, t_2]} z^* a \, d g$$

$$\int_D |z^*(b_n - b)|^2 \, d g \longrightarrow 0, \text{ q.t.p. } \Omega, P \Rightarrow \int_{[t_1, t_2]} z^* b_n \, d z \xrightarrow{\text{Pr}} \int_{[t_1, t_2]} z^* b \, d z$$

$$\int_D |z^*(c_n - c)| dg \rightarrow 0, \text{ q.t.p. } \Omega, P \Rightarrow \int_{[t_1, t_2]} z^* c_n dV \xrightarrow{\text{Pr}} \int_{[t_1, t_2]} z^* c dV$$

$$\int_D |b_n - b|^2 dg \rightarrow 0, \text{ q.t.p. } \Omega, P \Rightarrow \int_0^1 |b_n - b| dg \rightarrow 0 \text{ q.t.p. } \Omega, P$$

$$\Rightarrow \int_{[t_1, t_2]} b_n dL dz^* \xrightarrow{\text{Pr}} \int_{[t_1, t_2]} b dz dz^*$$

$$\text{e finalmente } [Z^* \xi_n]_{t_1}^{t_2} \longrightarrow [Z^* \xi]_{t_1}^{t_2} \quad \text{q.t.p. } \Omega, P$$

Estas convergências levadas a (6.19) demonstram (6.18)

$$\begin{aligned} \text{c) } \xi_1 = V^*, \text{ a variação conjunta de } Z, Z'; \xi_2 = \xi \text{ e } f(x, \dots, x_n, y) = \\ = x_1 \cdot x_2 \end{aligned}$$

Trata-se de provar que $d(V^* \cdot \xi) = V^* d\xi + \xi dV^*$.

Pela propriedade distributiva suporemos que, para $\xi, k=l=$
 $= m = 1$ e assumiremos primeiramente que, no intervalo $[t_1, t_2] \subset D$,
 a, b, c são variáveis aleatórias constantes.

$$\int_{[t_1, t_2]} V^* d\xi + \int_{[t_1, t_2]} \xi dV^* = a \left[\int_{[t_1, t_2]} V^* dg + \int_{[t_1, t_2]} g dV^* \right] +$$

$$\begin{aligned}
& + b \left[\int_{[t_1, t_2]} v^* d z + \int_{[t_1, t_2]} z d v^* \right] + c \left[\int_{[t_1, t_2]} v^* d v + \int_{[t_1, t_2]} v d v^* \right] + \\
& + (\xi_{t_1} - a g(t_1) - b z_{t_1} - c v_{t_1}) (v^*_{t_2} - v^*_{t_1})
\end{aligned}$$

E por serem V e V^* de variação limitada e contínuas q.t.p. Ω , P obtemos:

$$\begin{aligned}
& \left[\int_{[t_1, t_2]} v^* d \xi + \int_{[t_1, t_2]} \xi d v^* \right] = \left[v^* (a g + b z + c v) \right]_{t_1}^{t_2} + \\
& + (\xi_{t_1} - a g(t_1) - b z_{t_1} - c v_{t_1}) (v^*_{t_2} - v^*_{t_1}) = \left[v^* \xi \right]_{t_1}^{t_2}.
\end{aligned}$$

A demonstração para $a, b, c \in \mathcal{E}_{\ell, M}$ e sua extensão ao caso geral repete os argumentos empregados em a) e b).

d) A seguir deduziremos a diferencial de um produto de processos considerando $f(x_1, \dots, x_n, y) = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots$.

Se trata de provar que:

$$(6.20) \quad d(\xi_1 \cdot \xi_2) = \xi_1 d \xi_2 + \xi_2 d \xi_1 + \sum_{\alpha, \beta} b_{1\alpha} b_{2\beta} d z_{1\alpha} d z_{2\beta}$$

Pela propriedade distributiva, bastará provar a fórmula no caso $k = \ell = m = 1$. Como nos casos anteriores, consideramos $t_1 < t_2$

$t_1, t_2 \in D$ e, primeiramente, a_1, b_1, c_1 processos com variáveis aleatórias constantes no intervalo $[t_1, t_2)$. Neste caso, para $t \in [t_1, t_2)$, (6.1) se escreve:

$$\begin{aligned}
 d(\xi_1 \cdot \xi_2) &= d \left[\xi_{t_1} + a_1(g(t) - g(t_1) + b_1((Z_1)_t - (Z_1)_{t_1}) + \right. \\
 &\quad \left. + c_1((V_1)_t - (V_1)_{t_1})) \cdot \xi_2 \right] = \\
 &= \left[\xi_{t_1} - a_1 g(t_1) - b_1 (Z_1)_{t_1} - c_1 (V_1)_{t_1} \right] d \xi_2 + \\
 &+ a_1 d(g \cdot \xi_2) + b_1 d(Z_1 \cdot \xi_2) + c_1 d(V_1 \cdot \xi_2) = \\
 &= \left[\xi_{t_1} - a_1 g(t_1) - b_1 (Z_1)_{t_1} - c_1 (V_1)_{t_1} \right] d \xi_2 + \\
 &+ a_1 \xi_2 dg + a_1 g d \xi_2 + b_1 b_2 d Z_1 d Z_2 + b_1 \xi_2 d Z_1 + \\
 &+ b_1 Z_1 d \xi_2 + c_1 V_1 d \xi_2 + c_1 \xi_2 d V_1 = \\
 &= \xi_1 d \xi_2 + \xi_2 d \xi_1 + b_1 b_2 d Z_1 d Z_2
 \end{aligned}$$

Decompondo $[t_1, t_2)$ em subintervalos, estenderíamos a fórmula ao caso em que $a_1, b_1, c_1 \in \mathcal{E}_{\lambda, M}$.

Se $a_1, c_1 \in \xi_w^1(g)_M$, $b_1 \in \xi_w^2(g)_M$ e $a_n, b_n, c_n \in \xi_{\ell, M}$ tais que se verifique (6.13) com a_1, b_1, c_1 em lugar de a, b, c , se verificarão (6.15), (6.16) com ξ_1, ξ_2 em lugar de ξ e h respectivamente, ou seja:

$$(6.21) \quad \left[\xi_2 \cdot \xi_n \right]_{t_1}^{t_2} \xrightarrow{\text{Pr}} \left[\xi_2 \cdot \xi_1 \right]_{t_1}^{t_2}$$

$$(6.22) \quad \left[\xi_2 \cdot \xi_n \right]_{t_1}^{t_2} = \int_{[t_1, t_2]} a_2 \xi_n \, d g + \int_{[t_1, t_2]} b_2 \xi_n \, d z_2 +$$

$$+ \int_{[t_1, t_2]} c_2 \xi_n \, d v_2 + \int_{[t_1, t_2]} b_2 b_n \, d z_1 \, d z_2 +$$

$$+ \int_{[t_1, t_2]} \xi_2 a_n \, d g + \int_{[t_1, t_2]} \xi_2 b_n \, d z_1 + \int_{[t_1, t_2]} \xi_2 c_n \, d v_1$$

Pela convergência q.t.p. Ω, P , uniformemente em $t \in D$ de

$$\xi_n(t, w) \longrightarrow \xi_1(t, w) \quad \text{teremos:}$$

$$\int_{[t_1, t_2]} |\xi_n - \xi_1| |a_2| d g \longrightarrow 0$$

$$\int_{[t_1, t_2]} |\xi_n - \xi_1| |b_2| d g \longrightarrow 0$$

$$\int_{[t_1, t_2]} |\xi_n - \xi_1| |c_2| d g \longrightarrow 0$$

$$\int_{[t_1, t_2]} |b_n - b_1| |b_2| d g \longrightarrow 0$$

e pela continuidade do processo ξ_2 :

$$\int_{[t_1, t_2]} |a_n - a_1| |\xi_2| d g \longrightarrow 0$$

$$\int_{[t_1, t_2]} |b_n - b_1| |\xi_2| d g \longrightarrow 0$$

$$\int_{[t_1, t_2]} |c_n - c_1| d g \longrightarrow 0$$

Todas as convergências entendidas q.t.p. Ω , P .

Pelo teorema 3.3, as integrais do segundo membro de

(6.22) convergem em probabilidade até as respectivas integrais substituindo a_n, b_n, c_n, ξ_n por a_1, b_1, c_1 que junto a (6.21) prova (6.20).

e) A fórmula é válida para polinômios de uma variável.

Bastará prová-la para a função x^n ou seja:

$$(6.23) \quad d(\xi^n) = n \xi^{n-1} d\xi + \frac{1}{2} n(n-1) \sum_{\alpha, \beta=1}^{\ell} b_{\alpha} b_{\beta} dZ_{\alpha} dZ_{\beta}$$

Para $n = 2$ é uma consequência de d) com $\xi_1 = \xi_2$. Suposta a fórmula válida para n , procedemos por indução aplicando d) :

$$\begin{aligned} d(\xi^{n+1}) &= d(\xi^n \cdot \xi) = \\ &= \xi d(\xi^n) + \xi^n d\xi + n \xi^{n-1} \sum_{\alpha, \beta=1}^{\ell} b_{\alpha} b_{\beta} dZ_{\alpha} dZ_{\beta} = \\ &= (n+1) \xi^n d\xi + \frac{1}{2} (n+1) n \xi^{n-1} \sum_{\alpha, \beta=1}^{\ell} b_{\alpha} b_{\beta} dZ_{\alpha} dZ_{\beta} \end{aligned}$$

Portanto se $Q(x)$ representa um polinômio

$$(6.24) \quad d[Q(\xi)] = Q'(\xi) d\xi + \frac{1}{2} Q''(\xi) \sum_{\alpha, \beta=1}^{\ell} b_{\alpha} b_{\beta} dZ_{\alpha} dZ_{\beta}$$

f) A seguir provaremos a fórmula para polinômios em n variáveis; seja $Q(x_1, \dots, x_n)$ o polinômio considerado. Se trata de provar que:

$$(6.25) \quad d[Q(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)] = \sum_{i=1}^n \frac{\partial Q}{\partial x_i} d\xi_i +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i,j} \sum_{\alpha,\beta} \frac{\partial^2 Q}{\partial x_i \partial x_j} b_{i\alpha} b_{j\beta} d z_{i\alpha} d z_{j\beta}$$

Para $n = 1$ é o resultado anterior. Vamos proceder por indução supondo válida a fórmula para polinômios de até n variáveis e aplicando d)

$$Q(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = \sum_{s=0}^k x_{n+1}^s Q_s(x_1, \dots, x_n)$$

$$d \left[Q(\xi_1, \dots, \xi_n, \xi_{n+1}) \right] = \sum_{s=0}^k \left[Q_s(\xi_1, \dots, \xi_n) d(\xi_{n+1}^s + \right.$$

$$+ \xi_{n+1}^s d Q_s(\xi_1, \dots, \xi_n) +$$

$$\left. + s(\xi_{n+1}^{s-1}) \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha,\beta} b_{n+1\alpha} b_{i\beta} \frac{\partial Q_s}{\partial x_i} d z_{n+1\alpha} d z_{i\beta} \right] =$$

$$= \sum_{s=0}^k \left[s(\xi_{n+1}^{s-1}) Q_s(\xi_1, \dots, \xi_n) d \xi_{n+1} + \xi_{n+1}^s \sum_{i=1}^n \frac{\partial Q_s}{\partial x_i} d \xi_i \right.$$

$$+ \frac{1}{2} s(s-1) \xi_{n+1}^{s-2} Q_s(\xi_1, \dots, \xi_n) \sum_{\alpha,\beta} b_{n+1\alpha} b_{n+1\beta} d z_{n+1\alpha} d z_{n+1\beta}$$

$$+ \frac{1}{2} \xi_{n+1}^s \sum_{i,j=1}^n \sum_{\alpha,\beta=1}^{\ell} \frac{\partial^2 Q_s}{\partial x_i \partial x_j} b_{i\alpha} b_{j\beta} d z_{i\alpha} d z_{j\beta}$$

$$\left. + s(\xi_{n+1}^{s-1}) \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha,\beta=1}^{\ell} b_{n+1\alpha} b_{i\beta} \frac{\partial Q_s}{\partial x_i} d z_{n+1\alpha} d z_{i\beta} \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial Q}{\partial x_i} d\xi_i + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Q}{\partial x_{n+1}^2} \sum_{\alpha, \beta} b_{n+1\alpha} b_{n+1\beta} dz_{n+1\alpha} dz_{n+1\beta} \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 Q}{\partial x_i \partial x_j} \sum_{\alpha, \beta=1}^{\ell} b_{i\alpha} b_{j\beta} dz_{i\alpha} dz_{j\beta} \\
&+ \frac{1}{2} \left[2 \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 Q}{\partial x_{n+1} \partial x_j} \sum_{\alpha, \beta} b_{n+1\alpha} b_{j\beta} dz_{n+1\alpha} dz_{j\beta} \right] \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial Q}{\partial x_i} d\xi_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n+1} \frac{\partial^2 Q}{\partial x_i \partial x_j} b_{i\alpha} b_{j\beta} dz_{i\alpha} dz_{j\beta}
\end{aligned}$$

g) Se $f(x_1, x_2, \dots, x_n, y)$ é um polinômio, podemos considerar

$\xi_{n+1}(t, w) = h(t)$; ou seja $b_{n+1\alpha} = a_{n+1\alpha} = 0$ e por ser h lipchitziana em relação a g , existe $f^* \in \mathcal{E}^1(g)$ tal que

$$\left[h \right]_{t_1}^{t_2} = \int_{[t_1, t_2]} f^* dg \Rightarrow dh = f^* dg$$

e podemos aplicar o resultado anterior

$$\begin{aligned}
d[f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, h)] &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} d\xi_i + \frac{\partial f}{\partial y} dh + \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \sum_{\alpha, \beta} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} b_{i\alpha} b_{j\beta} dz_{i\alpha} dz_{j\beta}
\end{aligned}$$

h) No caso geral em que $f(x_1, x_2, \dots, x_n, y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ sejam contínuas, a teoria da aproximação nos garante a existência de uma sucessão de polinômios $\{Q_s\}$ tal que

$$Q_s \longrightarrow f, \quad \frac{\partial Q_s}{\partial x_i} \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

$$\frac{\partial Q_s}{\partial y} \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 Q_s}{\partial x_i \partial x_j} \longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

uniformemente sobre compactos de R^{n+1} .

Pelo já demonstrado,

$$\begin{aligned} (6.26) \quad & \left[Q_s(\xi_1(t, w), \dots, \xi_n(t, w), h(t)) \right]_{t_1}^{t_2} = \\ & = \int_{[t_1, t_2]} \left[\frac{\partial Q_s}{\partial y} dh + \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=1}^k \frac{\partial Q_s}{\partial x_i} a_{i\alpha} dg + \right. \\ & + \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=1}^l \frac{\partial Q_s}{\partial x_i} b_{i\alpha} dz_{i\alpha} + \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha, \beta=1}^m \frac{\partial Q_s}{\partial x_i} c_{i\alpha} dz'_{i\alpha} dz''_{i\beta} \\ & \left. + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \sum_{\alpha, \beta=1}^l \frac{\partial^2 Q_s}{\partial x_i \partial x_j} b_{i\alpha} b_{j\beta} dz_{i\alpha} dz_{j\beta} \right] \quad \text{q.t.p. } \Omega, P. \end{aligned}$$

Mas $\xi_1(\cdot, w)$, $h(\cdot)$ e $C_R(D)$ e portanto

$\{(\xi_1(t,w), \dots, \xi_n(t,w), h(t)) \mid t \in D\}$ é compacto em R^{n+1} .

Portanto, quando $s \longrightarrow \infty$

$$\int_{[t_1, t_2]} \left| \frac{\partial Q_s}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \right| dg \longrightarrow 0$$

$$\int_{[t_1, t_2]} \left| \frac{\partial Q_s}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| |a_{i\alpha}| dg \longrightarrow 0 \quad \text{q.t.p. } \Omega, P$$

$$\int_{[t_1, t_2]} \left| \frac{\partial Q_s}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|^2 |b_{i\alpha}|^2 dg \longrightarrow 0 \quad \text{q.t.p. } \Omega, P$$

$$\int_{[t_1, t_2]} \left| \frac{\partial Q_s}{\partial x_i} - \frac{f}{x_i} \right| |c_{i\alpha}| dg \longrightarrow 0 \quad \text{q.t.p. } \Omega, P$$

$$\int_{[t_1, t_2]} \left| \frac{\partial^2 Q_s}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right| |b_{i\alpha} b_{j\beta}| dg \longrightarrow 0 \quad \text{q.t.p. } \Omega, P$$

Pelo teorema 3.3 (levando em conta o lema 6.1) as integrais do segundo membro de (6.26) convergirão em probabilidade até as mesmas integrais substituindo os Q_s por f ; existirá portanto uma subseqüência $\{s_k\}$ que proporcionará uma convergência q.t.p. Ω, P .

Tomando versões contínuas dessas integrais, $t_1 = a$, $t_2 = t$, ambos os membros de (6.9) serão processos contínuos e equivalentes e portanto, "quase certamente iguais", ou seja, existe $A \subset \Omega$ com $\Pr(A) = 1$ tal que

$$f(\xi_1(t, w), \dots, \xi_n(t, w), h(t)) =$$

$$= f(\xi_1(a, w), \dots, \xi_n(a, w), h(a)) + \int_{[a, t]} \frac{\partial f}{\partial y} d h +$$

$$+ \sum_{i, \alpha} \int_{[a, t]} \frac{\partial f}{\partial x_i} a_{i\alpha} d g + \sum_{i, \alpha} \int_{[a, t]} \frac{\partial f}{\partial x_i} b_{i\alpha} d Z_{i\alpha} +$$

$$+ \sum_{i, \alpha} \int_{[a, t]} \frac{\partial f}{\partial x_i} c_{i\alpha} d Z'_{i\alpha} d Z''_{i\alpha} +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i, j} \sum_{\alpha, \beta} \int_{[a, t]} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} b_{i\alpha} b_{j\beta} d Z_{i\alpha} d Z_{j\beta} \quad \forall t \in D, w \in A.$$

CAPÍTULO VII

COMPARAÇÃO DAS INTEGRAIS DE McSHANE E DE YOUNG

Apresentaremos o método de construção da Integral de Laurence C. Young, e primeiramente a noção de funções estimadoras em condições mais gerais que em (38).

Sejam $r > 0$; $\zeta, \psi : [0, 2r] \longrightarrow \mathbb{R}$ com as propriedades

$$(7.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \zeta \text{ não negativa e boreliana} \\ \psi \text{ contínua monótona não decrescente com } \psi(0) = 0 \\ \exists c \in \mathbb{R}, c \geq 1 \mid \forall u, v \in (0, r] \text{ com } u < v \Rightarrow \\ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\zeta(v)}{v} \leq c \frac{\zeta(u)}{u} \\ \psi(2u) \leq c \psi(u) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

DEFINIÇÃO: Diremos que (ζ, ψ) é um par de funções estimadoras se verificam (7.1) e se para todo $h \in (0, 2r]$ existe a Integral de Lebesgue-Stieltjes:

$$(7.2) \quad S(h) = \int_{[0, h]} \frac{\zeta(u)}{u} d\psi(u) < \infty$$

Lema 7.1. Seja (ζ, ψ) um par de funções estimadoras e $K \in \mathbb{R}$, $K > 1$. Toda sucessão $\{h_n\}$ monótona não crescente que verifique

$$(7.3) \quad \begin{cases} h_0 \leq r \\ h_n \longrightarrow 0 \\ n \longrightarrow \infty \\ \forall n \geq 1, K \psi(h_n) \leq (h_{n-1}) \end{cases}$$

dá lugar a uma série convergente.

$$(7.4) \quad \sum_{n \geq 0} \frac{\zeta(h_n)}{h_n} \psi(2h_n) < \infty$$

Demonstração: Por ser ψ nula e contínua na origem, o conjunto de sucessões $\{h_n\}$ que verificam (7.3) não é vazio.

Definindo

$$(7.5) \quad s_n = \int_{h_n}^{h_{n-1}} \frac{\zeta(u)}{u} d\psi(u)$$

por (7.1) teremos:

$$\begin{aligned} s_n &\geq \frac{1}{c} \frac{\zeta(h_{n-1})}{h_{n-1}} \left[\psi(h_{n-1}) - \psi(h_n) \right] \geq \frac{1}{c} \left(1 - \frac{1}{K}\right) \frac{\zeta(h_{n-1})}{h_{n-1}} \psi(h_{n-1}) \\ &\geq \frac{1}{c^2} \left(1 - \frac{1}{K}\right) \frac{\zeta(h_{n-1})}{h_{n-1}} \psi(2h_{n-1}) \end{aligned}$$

e o lema resulta como consequência de (7.2).

Seja g monótona não decrescente e contínua.

Consideremos a prolongação de g a $\mathbb{R}$ definida por:

$$g(t) = \begin{cases} g(b) + t - b & \text{se } t > b \\ g(a) + t - a & \text{se } t < a \end{cases}$$

Seja $h > 0$, $h \leq g(b) - g(a)$ e como no lema 1.3, $\forall s \leq h$

$$(7.7) \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} \alpha_s(t) = \sup. \{u < t \mid g(t) - g(u) = s\} \\ \beta_s(t) = \inf. \{u > t \mid g(u) - g(t) = s\} \end{cases}$$

Estas funções α_s, β_s permitem estabelecer o seguinte

Lema 7.2: Se $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\gamma \in \mathcal{L}^1(g)$

$$(7.8) \quad \int_{\mathbb{R}} \gamma(t) dg(t) = \int_{\mathbb{R}} \gamma(\alpha_s(t)) dg(t) = \int_{\mathbb{R}} \gamma(\beta_s(t)) dg(t)$$

Demonstração: Seja $\gamma \equiv \chi_{[c,d]}$

$$t \geq \beta_s(c) \iff g(t) - g(c) \geq s \iff \alpha_s(t) \geq c$$

$$t < \beta_s(d) \iff g(t) - g(d) < s \iff \alpha_s(t) < d$$

$$\text{Portanto } t \in [\beta_s(c), \beta_s(d)) \iff \alpha_s(t) \in [c, d)$$

$$\alpha_s^{-1}[c, d) = [\beta_s(c), \beta_s(d)) \quad \text{e} \quad \alpha_s[c, d] = [\alpha_s(c), \alpha_s(d)]$$

$$\text{Como } g(\beta_s(d)) - g(\beta_s(c)) = g(d) - g(c) = g(\alpha_s(d)) - g(\alpha_s(c))$$

α_s, α_s^{-1} transformarão conjuntos de medida nula em conjuntos de medida nula; por ser α_s contínua, α_s^{-1} transformará borelianos em

borelianos.

Decompondo um conjunto mensurável na união de um boreliano e um conjunto de g -medida nula, concluímos que α_s é mensurável

$$\alpha_s : R, M_g \longrightarrow R, M_g$$

E portanto se $\gamma : R, M_g \longrightarrow R$

é mensurável, $\gamma \circ \alpha_s$ também o será.

Passamos a provar (7.8) quando $\gamma = \chi_{[c, d)}$

$$\int_R \chi_{[c, d)}(t) dg(t) = g(d) - g(c) = g(\beta_s(d)) - g(\beta_s(c)) =$$

$$= \int_R \chi_{[\beta_s(c), \beta_s(d))}(t) dg(t) = \int_R \chi_{[c, d)}(\alpha_s(t)) dg(t)$$

E analogamente com a segunda igualdade

As funções

$$M_g \ni A \begin{cases} \longrightarrow \int_R \chi_A(t) dg(t) \\ \longrightarrow \int_R \chi_A(\alpha_s(t)) dg(t) \\ \longrightarrow \int_R \chi_A(\beta_s(t)) dg(t) \end{cases}$$

definem medidas sobre M_g que coincidem sobre a álgebra das uniões finitas de intervalos semiabertos $\Rightarrow$ coincidem sobre M_g e (7.8) será válida para funções características de mensuráveis. A extensão das igualdades (7.8) a funções integráveis positivas se obtém através de funções crescentes:

$$\gamma_n = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i-1}{2^n} \chi_{\gamma^{-1}(J_i)}; \text{ com } J_i = \left[\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n} \right)$$

que aproximam γ pontualmente e em $L^1(g)$.

Finalmente a extensão para funções integráveis se obtém mediante a típica expressão de γ como diferença de duas funções integráveis positivas.

Nos propomos construir a partir de um processo dado funções que verificam as condições (7.1) para ψ .

Seja $f \in L^2(g \otimes P)_M$ também prolongada de D a R com a definição $f(t,w) = 0 \quad \forall t \notin D$.

Definição: Dado $p, 1 \leq p \leq 2$ consideramos a função

$$\psi_{p,f} : [0,h] \longrightarrow R \text{ definida por}$$

$$(7.9) \quad \begin{cases} \psi_{p,f}(0) = 0 \\ \psi_{p,f}(c) = \sup_{0 < s \leq c} \frac{1}{s} \int_R dg(t) \int_{\alpha_s(t)}^{\beta_s(t)} \|f_u - f_t\|_{L^2(P)}^p dg(u) \\ \forall c \in (0,h] \end{cases}$$

e passamos a deduzir suas principais propriedades:

a) $\psi_{p,f}(c) < \infty \quad \forall c \in [0, h] , \quad 1 \leq p \leq 2 , f \in L^2(g \otimes P)$

Com efeito, pelo lema 1.3:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{s} \int_R dg(t) \int_{\alpha_s(t)}^{\beta_s(t)} \|f_t - f_u\|_{L^2(P)}^p dg(u) \leq \\
 & \leq \frac{2}{s} \int_R dg(t) \int_{\alpha_s(t)}^{\beta_s(t)} \|f_t\|_{L^2(P)}^p + \|f_u\|_{L^2(P)}^p dg(u) \leq \\
 & \leq 8 \int_R \|f_t\|_{L^2(P)}^p dg(t) = 8 \int_{[a,b]} \|f_t\|_{L^2(P)}^p dg(t) \leq \\
 & \leq 8 (g(b) - g(a))^{(2-p)/2} \|f\|_{L^2(g \otimes P)}^p
 \end{aligned}$$

b) Se $\psi_{p,f}(c) = 0$ para algum $c > 0 \Rightarrow \psi_{p,f} = 0$

Com efeito: $\psi_{p,f}(c)=0 \Rightarrow \exists A$ com $m_g(A) = 0$ tal que

$$(7.10) \quad \forall t \notin A \quad \int_{\alpha_c(t)}^{\beta_c(t)} \|f_u - f_t\|_{L^2(P)}^p dg(u) = 0$$

É fácil verificar que $\{(\alpha_c(t), \beta_c(t)), t \notin A\}$ é uma cobertura aberta do compacto $D \Rightarrow \exists$ uma subcobertura finita:

$$\{(\alpha_c(t_1), \beta_c(t_1)), i = 1, \dots, n\}$$

Por (7.10), a cada intervalo $(\alpha_c(t_1), \beta_c(t_1))$ corresponde-lhe um conjunto mensurável A_1 com $m_g(A_1) = 0$ tal que

$$\|f_u - f_{t_1}\|_{L^2(P)} = 0 \quad \forall u \notin A_1$$

Considerando $A^* = \bigcup_1^n A_1 \Rightarrow m_g(A^*) = 0$ e $\forall u \notin A^*, i = 1, \dots, n$

$$\|f_u - f_{t_1}\|_{L^2(P)} = 0$$

$$\Rightarrow \forall u, v \in D; u, v \notin A^* \Rightarrow \|f_u - f_v\|_{L^2(P)} = 0$$

e escolhendo $t \in (a, \beta_{c/2}(a))$, $t \notin A^* \Rightarrow$

$$\Rightarrow \alpha_c(t) < a \Rightarrow u < a, u \in (\alpha_c(t), \beta_c(t)), u \in A^*$$

$$\text{e portanto } \|f_t - f_u\|_{L^2(P)} = 0$$

que junto a $f_u = 0$ por ser $u < a \Rightarrow$

$$(7.11) \Rightarrow \|f_t\|_{L^2(P)} = 0 \quad \forall t \in D, t \notin A^* \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{\alpha_s(t)}^{\beta_s(t)} \|f_t - f_u\|_{L^2(P)}^p dg(u) = 0 \quad \forall s \leq h \Rightarrow \psi_{p,f} = 0$$

e por (7.11) isto corresponderia a um processo que como função

$$f : D \longrightarrow L^2(P)$$

seria a função nula.

c) $\psi_{p,f}$ é monótona não decrescente.

d) $\forall c \in (0, h]$, $\psi_{p,f}$ é contínua em c .

$$\text{Bastará que } \int_R dg(t) \int_{\alpha_s(t)}^{\beta_s(t)} \|f_u - f_t\|_{L^2(P)}^p dg(u)$$

seja contínua em $s \in (0, h]$.

$$\text{Considerando } \zeta(s, t) = \int_{\alpha_s(t)}^{\beta_s(t)} \|f_u - f_t\|_{L^2(P)}^p dg(u) \leq$$

$$\leq 2 \int_{\alpha_h(a)}^{\beta_h(b)} (\|f_u\|^p + \|f_t\|^p) dg(u) = 2 \left[\int_a^b \|f_u\|_{L^2(P)}^p + \right. \\ \left. + (g(b) - g(a) + 2h) \|f_t\|_{L^2(P)}^p \right]$$

$$= \gamma(t) \in L^1(g)$$

Ademais se $s < s'$ teremos que

$$0 \leq \zeta(s', t) - \zeta(s, t) = \int_{\beta_s(t)}^{\beta_{s'}(t)} \frac{\|f_u - f_t\|_{L^2(P)}^p}{L^2(P)} dg(u) +$$

$$+ \int_{\alpha_{s'}(t)}^{\alpha_s(t)} \frac{\|f_u - f_t\|_{L^2(P)}^p}{L^2(P)} dg(u)$$

$$\text{e } g(\alpha_{s'}(t)) - g(\alpha_s(t)) = s' - s = g(\beta_{s'}(t)) - g(\beta_s(t)) \Rightarrow$$

$\Rightarrow \zeta(s, t)$ é contínua com relação a s em $(0, h]$.

Nos textos usuais de análise (ver por exemplo Lang (16) capítulo XIV, lema 1), se prova que se $\zeta(s, t)$ é uma função de duas variáveis dominada por uma função $\gamma(t)$ e $L^1(g)$ e contínua com relação a s e (u, u') , a integral $\int \zeta(s, t) dg(t)$ é contínua em s e (u, u') . Considerando $(u, u') = (0, h)$ fica provada a continuidade.

$$(7.12) \quad \text{e) } \psi_{p,f}(c) \leq \frac{13}{2} \psi_{p,f}(c/2)$$

$$\psi_{p,f}(c) = \sup_{0 < s \leq c} \frac{1}{s} \int dg(t) \int_{\alpha_s(t)}^{\beta_s(t)} \frac{\|f_u - f_t\|_{L^2(P)}^p}{L^2(P)} dg(u) =$$

$$= \frac{1}{2} \sup_{0 < s \leq c/2} \frac{1}{s} \int dg(t) \int_{\alpha_{2s}(t)}^{\beta_{2s}(t)} \frac{\|f_u - f_t\|_{L^2(P)}^p}{L^2(P)} dg(u) \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} \left[\psi_{p,f}(c/2) + \sup_{0 < s \leq c/2} \frac{1}{s} \int dg(t) \int_{\beta_s(t)}^{\beta_{2s}(t)} \|f_u - f_t\|_{\ell^2(P)}^p dg(u) + \right. \\ \left. + \sup_{0 < s \leq c/2} \frac{1}{s} \int dg(t) \int_{\alpha_{2s}(t)}^{\alpha_s(t)} \|f_u - f_t\|_{\ell^2(P)}^p dg(u) \right]$$

$$e \quad \frac{1}{s} \int dg(t) \int_{\alpha_{2s}(t)}^{\alpha_s(t)} \|f_u - f_t\|_{\ell^2(P)}^p dg(u) \leq$$

$$\leq 2^{p-1} \left[\frac{1}{s} \int dg(t) \int_{\alpha_{2s}(t)}^{\alpha_s(t)} \|f_u - f_{\alpha_s}(t)\|_{\ell^2(P)}^p dg(u) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{s} \int dg(t) \int_{\alpha_{2s}(t)}^{\alpha_s(t)} \|f_{\alpha_s}(t) - f_t\|_{\ell^2(P)}^p dg(u) \right]$$

e pelo lema 7.2

$$\frac{1}{s} \int dg(t) \int_{\alpha_{2s}(t)}^{\alpha_s(t)} \|f_u - f_{\alpha_s}(t)\|_{\ell^2(P)}^p dg(u) =$$

$$= \frac{1}{s} \int dg(t) \int_{\alpha_s(\alpha_s(t))}^{\alpha_s(t)} \|f_u - f_{\alpha_s(t)}\|_{L^2(P)}^p dg(u) =$$

$$= \frac{1}{s} \int dg(t) \int_{\alpha_s(t)}^t \|f_u - f_t\|_{L^2(P)}^p dg(u) \leq \psi_{p,f}(c/2)$$

$$\frac{1}{s} \int dg(t) \int_{\alpha_{2s}(t)}^{\alpha_s(t)} \|f_{\alpha_s(t)} - f_t\|_{L^2(P)}^p dg(u) =$$

$$= \int dg(t) \|f_{\alpha_s(t)} - f_t\|_{L^2(P)}^p = \frac{1}{s} \int dg(t) \int_{\alpha_s(t)}^t \|f_{\alpha_s(t)} - f_t\|_{L^2(P)}^p dg(u)$$

$$\leq 2^{p-1} \left[\frac{1}{s} \int dg(t) \int_{\alpha_s(t)}^t \|f_{\alpha_s(t)} - f_u\|_{L^2(P)}^p dg(u) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{s} \int dg(t) \int_{\alpha_s(t)}^t \|f_t - f_u\|_{L^2(P)}^p dg(u) \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= 2^{p-1} \left[\frac{1}{s} \int dg(t) \int_{\alpha_s(t)}^{\beta_s(\alpha_s(t))} \frac{\|f_{\alpha_s(t)} - f_u\|^p}{f^{2(p)}} dg(u) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{s} \int dg(t) \int_{\alpha_s(t)}^t \frac{\|f_t - f_u\|^p}{f^{2(p)}} dg(u) \right] = \\
&= 2^{p-1} \left[\frac{1}{s} \int dg(t) \int_t^{\beta_s(t)} \frac{\|f_t - f_u\|^p}{f^{2(p)}} dg(u) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{s} \int dg(t) \int_{\alpha_s(t)}^t \frac{\|f_t - f_u\|^p}{f^{2(p)}} dg(u) \right] \leq 2^{p-1} \psi_{p,f}(c/2)
\end{aligned}$$

Procedendo analogamente com

$$\frac{1}{s} \int dg(t) \int_{\beta_s(t)}^{\beta_{2s}(t)} \frac{\|f_u - f_t\|^p}{f^{2(p)}} dg(u)$$

obtemos:

$$\begin{aligned}
\psi_{p,f}(c) &\leq \frac{1}{2} \left[\psi_{p,f}(c/2) + 2(2^{p-1}(\psi_{p,f}(c/2) + 2^{p-1}\psi_{p,f}(c/2))) \right] \\
&\leq 13/2 \cdot \psi_{p,f}(c/2)
\end{aligned}$$

f) $\psi_{p,f}$ é contínua em 0.

Essa é precisamente a chave do nosso teorema de aproximação formalizada no teorema 1.5

$$(7.13) \quad g) \psi_{1,f}(c) \leq [4h + 2(g(b) - g(a))]^{1/2} \psi_{2,f}^{1/2}(c)$$

$$\text{com efeito: } \frac{1}{s} \int dg(t) \int_{\alpha_s(t)}^{\beta_s(t)} \frac{\|f_t - f_u\|_{\ell^2(P)}^2}{\ell^2(P)} dg(u) \leq$$

$$\leq \frac{\sqrt{2}}{s^{1/2}} \int dg(t) \left[\int_{\alpha_s(t)}^{\beta_s(t)} \frac{\|f_u - f_t\|_{\ell^2(P)}^2}{\ell^2(P)} dg(u) \right]^{1/2} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{s^{1/2}} \int_{[\alpha_h(a), \beta_h(b)]} dg(t) \left[\int_{\alpha_s(t)}^{\beta_s(t)} \frac{\|f_u - f_t\|_{\ell^2(P)}^2}{\ell^2(P)} dg(u) \right]^{1/2} \leq$$

$$\leq \sqrt{2} (g(b) - g(a) + 2h)^{1/2} \frac{1}{s^{1/2}} \left[\int dg(t) \int_{\alpha_s(t)}^{\beta_s(t)} \frac{\|f_u - f_t\|_{\ell^2(P)}^2}{\ell^2(P)} dg(u) \right]^{1/2}$$

$$= [4h + 2(g(b) - g(a))]^{1/2} \left[\frac{1}{s} \int dg(t) \int_{\alpha_s(t)}^{\beta_s(t)} \frac{\|f_u - f_t\|_{\ell^2(P)}^2}{\ell^2(P)} dg(u) \right]^{1/2}$$

h) Se $g(t) = K \cdot t$ com $K > 0 \Rightarrow$

$$(7.14) \quad \Rightarrow \psi_{p,f}(c) \leq 2K \sup_{-\frac{c}{K} \leq s \leq \frac{c}{K}} \int ||f_{t+s} - f_t||_{\mathcal{L}^2(P)}^p dt$$

Com efeito se $u \leq c$

$$\int K^2 dt \frac{1}{u} \int_{t-u/K}^{t+u/K} ||f_v - f_t||_{\mathcal{L}^2(P)}^2 dv =$$

$$= K^2 \int dt \frac{1}{u} \int_{-u/K}^{u/K} ||f_{t+s} - f_t||_{\mathcal{L}^2(P)}^p ds =$$

$$= K^2 \frac{1}{u} \int_{-u/K}^{u/K} ds \int dt ||f_{t+s} - f_t||_{\mathcal{L}^2(P)}^p \leq$$

$$\leq 2K \sup_{-\frac{c}{K} \leq s \leq \frac{c}{K}} \int ||f_{t+s} - f_t||_{\mathcal{L}^2(P)}^p dt$$

Vamos precisar de uma caracterização da integral estocástica com relação a g .

Lema 7.3: Se $f \in \mathcal{L}^2(g \otimes P)_M$, a imagem da integral estocástica $\int_D f dg$ em $L^2(P)$, coincide com a Integral de Bochner de f_s considerada como função valorada em $L^2(P)$. Em consequência a integral de Bochner indefinida possuirá uma versão em $\mathcal{L}^2(P)$ que será um pro

cesso contínuo e adaptado. Mais concretamente, esta versão é:

$$(7.15) \quad \left[\int_{[a,t]} f_s dg(s) \right] (w) = \int_{[a,t]} f(s,w) dg(s) \quad \text{q.t.p. } \Omega, P$$

onde a primeira integral é uma versão da integral de Bochner ou estocástica aplicada em w e a segunda uma integral usual de Lebesgue-Stieltjes.

Demonstração: Este lema é trivialmente válido se $f \in \mathcal{E}_{\ell, M}$

Seja $f \in \mathcal{E}^2(g \otimes P)$, $\{f_n\} \subset \mathcal{E}_{\ell, M} \mid f_n \xrightarrow{\mathcal{E}^2(g \otimes P)} f \Rightarrow$

$$(7.16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{[a,t]} \|f - f_n\|_{\mathcal{E}^2(P)}^2 dg \longrightarrow 0 \\ \int_{\Omega} dP \int_{[a,t]} |f - f_n|^2 dg \longrightarrow 0 \end{array} \right\} \quad \forall t \in D$$

Pelo lema 6.1 e pelo teorema 3.1

$$\int_{[a,t]} f_n dg \longrightarrow \int_{[a,t]} f dg \quad \text{consideradas como integrais estocásticas}$$

Seja $\zeta(t,w) = \left[\int_{[a,t]} f dg \right] (w)$ versão contínua da integral estocástica.

Da primeira convergência em (7.16) deduzimos que:

$$f_n : D \longrightarrow L^2(P) \text{ definida por}$$

$$f_n(s) = f_n(s, \cdot) = f_{n_s}$$

é uma sucessão de Cauchy no espaço L^2 (e portanto em L^1 por ser $g(b) - g(a) < \infty$) de funções de D em $L^2(P)$.

Portanto

$$(7.17) \quad \int_{[a,t]} f_n dg \longrightarrow \int_{[a,t]} f dg \in L^2(P) \text{ como integrais de Bochner.}$$

Tomando uma subsucessão (sempre subsucessões - das subsucessões anteriores), da segunda convergência de (7.16) - deduzimos que:

$$\forall t \in D, \quad \int_{[a,t]} |f - f_n|^2 dg \longrightarrow 0 \quad \text{q.t.p. } \Omega, P \Rightarrow$$

$$(7.18) \quad \left[\int_{[a,t]} f_{n_s} dg(s) \right] (w) = \int_{[a,t]} f_n(s, w) dg(s) \longrightarrow \int_{[a,t]} f(s, w) dg(s)$$

$$n \longrightarrow \infty \text{ q.t.p. } \Omega, P$$

Mas a partir de (7.17) e de novo para certa subsucessão,

$$(7.19) \quad \left[\int_{[a,t]} f_{n_s} dg(s) \right] (w) \longrightarrow \left[\int_{[a,t]} f_s dg(s) \right] (w)$$

De (7.18) e (7.19) concluimos que $\zeta(t,w)$ e $\int_{[a,t]} f(s,w) dg(s)$ seriam dois processos contínuos equivalentes ,

portanto, quase seguramente iguais como queríamos demonstrar.

Consideramos agora processos em escada que, aproximando um processo dado, servirão para definir a integral.

Seja $f \in L^2(g \otimes P)_M$, $D = [a,b]$

$$h_0 = (g(b) - g(a))/N_0$$

podendo ser $N_0 \geq 1$, natural e arbitrário.

Sejam a_0, b_0 com $a = \alpha_{h_0}(a)$, $b_0 = \beta_{h_0}(b)$.

Consideremos uma sucessão de partições π_n de $[a_0, b_0]$

$$[a_0, b_0] = \bigcup_i \Delta_{i,n} \text{ com } \Delta_{i,n} = [t_{i-1,n}, t_{i,n})$$

$$g(t_{i,n}) - g(t_{i-1,n}) = h_n = h_0 \cdot 2^{-n}$$

E podemos construir π_n de tal forma que $\pi_n \subset \pi_{n+1}$. Com esta sucessão de partições, podemos definir as "médias escalonadas re tardadas" como:

$$(7.20) \quad \begin{cases} \forall t \in D, f_{n_t}^- = f_n^-(t, \cdot) = \sum_i \left[\frac{1}{h_n} \int_{\Delta_{i-1,n}} f_s dg(s) \right] \cdot \chi_{\Delta_{i,n}}(t) \\ e f_{n_t}^- = 0 \text{ se } t \notin D \end{cases}$$

as integrais, entendidas como versões adaptadas da integral esto-
cástica ou de Bochner, definem f_n^- como um processo escalonado e
adaptado, não necessariamente limitado.

Seja $p, 1 \leq p \leq 2$

$t \in D, t \in \Delta_{i,n}$

$$\begin{aligned} \|f_{n_t}^- - f_t\|_{\mathcal{E}^2(P)}^p &= \left\| \frac{1}{h_n} \int_{\Delta_{i-1,n}} (f_s - f_t) dg(s) \right\|_{\mathcal{E}^2(P)}^p \leq \\ &\leq \frac{1}{h_n} \int_{\Delta_{i-1,n}} \|f_s - f_t\|_{\mathcal{E}^2(P)}^p dg(s) \leq \frac{1}{h_n} \int_{\alpha_{2h_n}(t)}^t \|f_s - f_t\| dg(s) \end{aligned}$$

Portanto

$$(7.21) \quad \int_D \|f_{n_t}^- - f_t\|_{\mathcal{E}^2(P)}^p dg(t) \leq 2 \psi_{p,f}(2h_n)$$

e em particular

$$(7.22) \quad \|f_n^- - f\|_{\mathcal{E}(g \otimes P)}^2 \leq 2 \psi_{2f}(2h_n)$$

Se $n \leq m$, teremos:

$$(7.23) \quad \int_D \|f_{n_t}^- - f_{m_t}^-\|_{\mathcal{E}^2(P)}^p dg(t) \leq 2^{p-1} \left[\int_D \|f_{n_t}^- - f_t\|_{\mathcal{E}^2(P)}^p dg(t) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \int_D ||f_{m_t}^- - f_t||^p_{2(P)} dg(t) \Big] \leq \\
& \leq 2^p \left[\psi_{p,f}(2h_n) + \psi_{p,f}(2h_m) \right] \leq 2^{p+1} \psi_{p,f}(2h_n)
\end{aligned}$$

Em particular, de (7.22) deduzimos que:

$$\begin{aligned}
(7.24) \quad f &= \lim_{n \rightarrow \infty} f_n^-, \text{ pela continuidade em 0 de } \psi_{p,f} \\
& \in \mathcal{L}^2(g \otimes P)
\end{aligned}$$

Definição: Seja Z um processo definido sobre $D = [a, b]$.

Z é uma quase martingala, quando é adaptado e verifica as condições:

$$(7.25) \quad \forall s < t, \quad s, t \in [a, b] \quad \left\{ \begin{array}{l} |E[(Z_t - Z_s)/\mathcal{F}_s]| \leq \zeta(g(t) - g(s)) \\ E[(Z_t - Z_s)^2/\mathcal{F}_s] \leq \theta(g(t) - g(s)) \end{array} \right.$$

Sendo ζ, θ duas funções borelianas não negativas e g monótona - não decrescente. Esta noção de deve essencialmente a L.C. Young (39). Aqui como no resto deste capítulo, suponhamos ademais que g seja contínua.

Evidentemente as condições de McShane (4.1) são um caso particular de (7.25) quando $\zeta(t) = \theta(t) = t$.

Seja π uma partição de D , $\pi = \{a = t_0, t_1, \dots, t_n = b\}$

com $g(t_i) - g(t_{i-1}) = h \quad \forall i = 1, \dots, n$.

Seja $f \in \mathcal{L}^2(g \otimes P)_M$ um processo em escada com variáveis f_s constantes nos intervalos $\Delta_i = [t_{i-1}, t_i)$, $I(f)$ a integral estocástica.

$$[I(f)](w) = \sum_{i=1}^n f(t_{i-1}, w) (Z(t_i, w) - Z(t_{i-1}, w))$$

Pela desigualdade fundamental de McShane (4.2):

$$\begin{aligned} \|I(f)\|_{\mathcal{L}^2(P)} &\leq 2 \sum_{i=1}^n \|f_{t_{i-1}}\|_{\mathcal{L}^2(P)} \cdot \zeta(h) + \\ &+ \left[\sum_{i=1}^n \|f_{t_{i-1}}\|_{\mathcal{L}^2(P)}^2 \theta(h) \right]^{1/2} = \\ &= 2 \frac{\zeta(h)}{h} \sum_{i=1}^n \|f_{t_{i-1}}\|_{\mathcal{L}^2(P)} \cdot h + \left[\frac{\theta(h)}{h} \sum_{i=1}^n \|f_{t_{i-1}}\|_{\mathcal{L}^2(P)}^2 h \right]^{1/2} \end{aligned}$$

ou seja

$$\begin{aligned} (7.26) \quad \|I(f)\|_{\mathcal{L}^2(P)} &\leq 2 \frac{\zeta(h)}{h} \int_D \|f_s\|_{\mathcal{L}^2(P)} dg(s) + \\ &+ \left[\frac{\theta(h)}{h} \int_D \|f_s\|_{\mathcal{L}^2(P)}^2 dg(s) \right]^{1/2} = C_M \end{aligned}$$

L.C. Young (39) obtém a seguinte majoração para a norma da integral:

$$\begin{aligned}
 (7.27) \quad ||I(f)||_{\mathfrak{L}^2(P)} &\leq \frac{2\sqrt{\zeta(h) (\theta(h))^{1/2}}}{h} \left(\int_D ||f||_{\mathfrak{L}^2(P)}^2 dg(s) + \right. \\
 &\quad \left. + \left[\frac{\theta(h)}{h} \int_D ||f||_{\mathfrak{L}^2(P)}^2 dg(s) \right]^{1/2} \right) = C_Y
 \end{aligned}$$

Em nossa opinião a majoração (7.26), resultado de aplicar a desigualdade de McShane nas condições de Young, é mais potente que - (7.27) no seguinte sentido: Se $A \in \mathcal{F}_S$

$$\begin{aligned}
 \int_A |z_t - z_s| dP &\leq \left[\int_A |z_t - z_s|^2 dP \right]^{1/2} \cdot [Pr(A)]^{1/2} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \frac{1}{Pr(A)} \int_A |z_t - z_s| dP &\leq \left[\frac{1}{Pr(A)} \int_A |z_t - z_s|^2 dP \right]^{1/2} = \\
 &= \left[\frac{1}{Pr(A)} \int_A E[(z_t - z_s)^2 / \mathcal{F}_S] dP \right]^{1/2} \leq \\
 &\leq [\theta(g(t) - g(s))]^{1/2}
 \end{aligned}$$

$$\text{Portanto } [E(z_t - z_s) / \mathcal{F}_S] \leq E[|z_t - z_s| / \mathcal{F}_S] \leq [\theta(g(t) - g(s))]^{1/2}$$

q.t.p. $\Omega, \mathcal{F}_S, P$.

e poderemos escolher uma versão da esperança condicionada tal que:

$$[E(z_t - z_s)/F_s] \leq [\theta(g(t) - g(s))]^{1/2}.$$

Em consequência podemos supor, sem restringir a generalidade, que:

$$\zeta \leq \theta^{1/2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \zeta \leq (\zeta \cdot \theta^{1/2})^{1/2} \Rightarrow C_M \leq \sqrt{2} C_Y$$

E, como não temos uma desigualdade similar em sentido contrário, consideramos (7.26) mais potente que (7.27).

Quando $\rho(t) = t^{1/2} [\theta(t)]^{1/2}$ podemos escrever

$$(7.28) \quad \|I(f)\|_{\mathcal{E}^2(P)} \leq 2 \frac{\zeta(h)}{h} \int_D \|f_s\|_{\mathcal{E}^2(P)} dg(s) + \frac{\rho(h)}{h} \|f\|_{\mathcal{E}^2(g \otimes P)}$$

Consideremos a continuação um processo f e $\mathcal{E}^2(g \otimes P)_M$; a sucessão de partições π_n já definida e as "médias escalonadas retardadas" f_n^- , definidas a partir de f e π_n .

Sejam $m \geq n \geq 1$

$f_n^- - f_m^-$ é um processo escalonado e adaptado com variáveis constantes nos intervalos Δ_{im} cuja g -medida é h_m . Aplicando (7.28) e tendo em conta (7.23)

$$(7.29) \quad \|I(f_m^-) - I(f_n^-)\|_{\mathcal{E}^2(P)} \leq 8 \left[\frac{\zeta(h_n)}{h_n} \psi_{1f}(2h_n) + \frac{\rho(h_n)}{h_n} \psi_{2f}^{1/2}(2h_n) \right]$$

Suponhamos que, para alguma subsucessão $\{h_v\}$ de $\{h_n\}$ a série

$$(7.3) \quad S^* = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{\zeta(h_v)}{h_v} \psi_{1f}(2h_v) + \frac{\theta(h_v)}{h_v} \left[\psi_{2f}(2h_v) \right]^{1/2} < \infty$$

Se $S^* < \infty$, (7.29) $\Rightarrow \lim_{\mathcal{F}^2(P)} I(f_v^-) = I(f)$ quando $v \rightarrow \infty$

Ademais $\forall h_s \in \{h_v\}$

$$(7.31) \quad \|I(f) - I(f_s^-)\|_{\mathcal{F}^2(P)} \leq 8 \sum_{v=s}^{\infty} \left[\frac{\zeta(h_v)}{h_v} \psi_{1f}(2h_v) + \frac{\rho(h_v)}{h_v} \psi_{2f}^{1/2}(2h_v) \right]$$

e $\forall n \geq s$ ainda que $h_n \notin h_v$, por (7.29) e (7.31):

$$(7.32) \quad \|I(f) - I(f_n^-)\|_{\mathcal{F}^2(P)} \leq \|I(f) - I(f_s^-)\|_{\mathcal{F}^2(P)} + \|I(f_s^-) - I(f_n^-)\|_{\mathcal{F}^2(P)} \\ \leq 16 \sum_{v=s}^{\infty} \left[\frac{\zeta(h_v)}{h_v} \psi_{1f}(2h_v) + \frac{\rho(h_v)}{h_v} \psi_{2f}^{1/2}(2h_v) \right]$$

A partir desta última desigualdade podemos adoptar a seguinte...

Definição: A integral estocástica de f é o limite

$$(7.33) \quad I(f) = \lim_{\substack{\mathcal{F}^2(P) \\ n \rightarrow \infty}} I(f_n^-)$$

quando existe.

$$\text{Posto que } (f + f^*)_n^- = f_n^- + f_n^{*-}$$

$$\text{e } \forall K \in \mathbb{R}, \quad (Kf)_n^- = K \cdot (f_n^-)$$

concluimos que o conjunto de processos integráveis é um subespaço

ço vetorial de $\ell^2(g \otimes P)_M$.

Existência da Integral

Por (7.32) uma condição suficiente de existência da integral e a existência de uma subsucessão $\{h_v\} \subset \{h_0 \cdot 2^{-n}\}, n \geq 0$ tal que a série

$$S^* = \sum_{v=1}^{\infty} \left[\frac{\zeta(h_v)}{h_v} \psi_{1,f} + \frac{\rho(h_v)}{h_v} \psi_{2,f}^{1/2}(2h_v) \right]$$

seja convergente.

Vamos formalizar condições para que S^* seja convergente

Teorema 7.4: Pelo lema 7.1, a integral existirá quando

(7.34) $(\zeta, \psi_{1,f}), (\rho, \psi_{2,f}^{1/2})$ sejam dois pares de funções estimadoras.

Em virtude das propriedades de $\psi_{p,f}$ isto se reduz a:

$$(7.35) \quad \left\{ \begin{array}{l} c \geq 1 \mid \forall u, v \in [0, h_0] \quad u < v \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\zeta(v)}{v} < c \frac{\zeta(u)}{u} \\ \frac{\rho(v)}{v} \leq c \frac{\rho(u)}{u} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\theta(v)}{v} \leq c \frac{\theta(u)}{u} \end{array} \right.$$

$$(7.36) \quad \int_0^{h_0} \frac{\zeta(u)}{u} d\psi_{1,f}(u) < \infty ; \quad \int_0^{h_0} \frac{\zeta(u)}{u} d(\psi_{2,f}^{1/2})(u) < \infty$$

Neste caso qualquer subsucessão $\{h_v\}$ de $\{h_0 \cdot 2^{-n}\}$ que verifique, para uma $K > 1$.

$$(7.37) \quad \begin{cases} K \cdot \psi_{1f}(h_v) \leq \psi_{1f}(h_{v-1}) \\ K \cdot \psi_{2f}^{1/2}(h_v) \leq \psi_{2f}^{1/2}(h_{v-1}) \end{cases}$$

proporcionará a convergência de S^* .

E estas subsucessões, pela continuidade e anulação na origem de $\psi_{p,f}$, existirão sempre.

Supondo que se verificam as condições (7.35) que se referem à definição do processo integrador como quase martingala, o conjunto de processos $f \in \mathcal{E}^2(g \otimes P)_M$ que verificam (7.36) é um cone (*) que denotaremos C_Y .

Sejam $f, l \in C_Y$.

Seja $\{h_v\}$ uma subsucessão tal que se verifiquem (7.37) simultaneamente para f, l .

Pela definição de ψ_p : $\psi_{p,f+l} \leq 2^{p-1} (\psi_{p,f} + \psi_{p,l})$

$$\text{Portanto } \sum_{v=1}^{\infty} \left[\frac{\zeta(h_v)}{h_v} \psi_{1,f+l}(2h_v) + \frac{\zeta(h_v)}{h_v} \psi_{2,f+l}^{1/2}(2h_v) \right]$$

$$\leq 2 \left[\sum_{v=1}^{\infty} \left[\frac{\zeta(h_v)}{h_v} \psi_{1,f}(2h_v) + \frac{\zeta(h_v)}{h_v} \psi_{2f}^{1/2}(2h_v) \right] + \right.$$

(*) No sentido de que é fechado com relação ao produto por escalares. Isto porque $\forall K \in \mathbb{R} \quad \psi_{p,Kf} = |K|^p \psi_{p,f}$

$$+ \sum_{v=1}^{\infty} \left[\frac{\zeta(h_v)}{h_v} \psi_{1,\ell}(2h_v) + \frac{\zeta(h_v)}{h_v} \psi_{2\ell}^{1/2}(2h_v) \right]$$

e podemos enunciar o seguinte

Teorema 7.5: O subespaço vetorial $\mathcal{L}_Y$ gerado pelo cone C_Y é um subespaço de processos integráveis.

Chamaremos o cone C_Y e o espaço gerado $\mathcal{L}_Y$ cone e subespaço de Young:

$$C_Y \subset \mathcal{L}_Y \subset \mathcal{L}^2(g \otimes P)_M$$

No caso em que $\zeta(s)=\theta(s)=s \Rightarrow \rho(s)=s$, reencontramos as condições (4.1) de McShane para g contínua.

As condições (7.35) se verificam com $c=1$ e para todo processo $f \in \mathcal{L}^2(g \otimes P)_M$

$$\int_0^{h_0} \frac{\zeta(u)}{u} d\psi_{1f}(u) = \psi_{1f}(h_0) < \infty; \quad \int_0^{h_0} \frac{\zeta(u)}{u} d(\psi_{2f}^{1/2})(u) =$$

$$= \psi_{2f}^{1/2}(h_0) < \infty$$

pela propriedade (a) das funções $\psi_{p,f}$.

Ou seja:

$$\mathcal{L}^2(g \otimes P)_M \subset C_Y \subset \mathcal{L}_Y \subset \mathcal{L}^2(g \otimes P)_M$$

Ademais, por (7.24) e pelo Teorema 3.1, a atual definição é coerente com a dada no capítulo IV e podemos enunciar o

Teorema 7.6 : Quando g é contínua, a integral de Itô-McShane é um caso particular da integral de Young e

$$C_Y = \mathcal{I}^2(g \otimes P)_M$$

Uma definição alternativa para a integral

Sejam $f, Z \in \mathcal{I}^2(I \otimes P)_M$ verificando as condições (7.25) com $g(t) = t$; ζ, θ contínuas, não decrescentes y nulas na origem.

Consideremos $D^* = [a-1, b-1]$; f, Z prolongadas sobre D^* (e sobre R) da forma

$$f(s, w) = 0 \quad \text{se} \quad s \notin [a, b]$$

$$Z(s, w) = Z(a, w) \text{ se } s \leq a; \quad Z(s, w) = Z(b, w) \text{ se } s \geq b$$

A função Z , com esta prolongação, continua verificando as condições (7.25) [e conservando a continuidade das trajetórias se Z é um processo contínuo].

$$f, Z \in \mathcal{I}^2(I \otimes P) \Rightarrow f_s, Z_s \in \mathcal{I}^2(P) \text{ q.t.p. } D, m_1$$

$$\Rightarrow f_s \cdot Z_{s+t} \in \mathcal{I}^1(P) \text{ q.t.p. } D, m_1$$

Além disso, $\forall t \in [0, 1]$ a função

$$D \ni s \longrightarrow f_s \cdot Z_{t+s} \in L^1(P) \text{ é integrável Bochner}$$

Com efeito: a mensurabilidade q.t.p. é garantida aproximando f, Z em $\mathcal{I}^2(I \otimes P)$ com processos de $\mathcal{E}_{\ell, M}$.

Bastará provar que a aplicação

$s \longrightarrow ||f_s \cdot z_{t+s}||_{\ell^1(P)}$ é integrável

$$\begin{aligned} \int_D ||f_s \cdot z_{t+s}||_{\ell^1(P)} ds &\leq \int_D ds ||f_s||_{\ell^2(P)} ||z_{t+s}||_{\ell^2(P)} \leq \\ &\leq \int_D ||f_s||_{\ell^2(P)} (||z_{t+s} - z_a||_{\ell^2(P)} + ||z_a||_{\ell^2(P)}) ds \leq [\text{por (7.25)}] \\ &\leq [K + ||z_a||_{\ell^2(P)}] \int_D ||f_s||_{\ell^2(P)} ds ; \text{ com } (\theta(b+1-a))^{1/2} = K \end{aligned}$$

$$(7.38) \Rightarrow \int_D ||f_s \cdot z_{t+s}||_{\ell^1(P)} ds \leq [K + ||z_a||_{\ell^2(P)}] (b-a)^{1/2} ||f||_{\ell^2(I \otimes P)}$$

Em consequência podemos estabelecer a seguinte

Definição: A convolução $f^* z$ se define como a função

$$[0,1] \ni t \longrightarrow f^* z(t) = \int_D f_s \cdot z_{t+s} ds \in L^1(P)$$

Naturalmente

$$f^* z(t) = \int_R f_s \cdot z_{t+s} ds = \int_R f_{s-t} \cdot z_s ds = \int_{D^*} f_{s-t} \cdot z_s ds$$

$$e \left\| \int_D f_s \cdot z_{t+s} ds \right\|_{\ell^1(P)} \leq \int_D ||f_s \cdot z_{t+s}||_{\ell^1(P)} ds$$

=> por (7.38)

$$(7.39) \quad \left\| \int_D f_s z_{t+s} ds \right\|_{L^1(P)} \leq \left[K + \|z_a\|_{L^2(P)} \right] (b-a)^{1/2} \|f\|_{L^2(i\otimes P)}$$

Desta desigualdade se desprende que se $f, \{f_n\} \in L^2(i\otimes P)_M$ tais que:

$$(7.40) \quad \left\| f - f_n \right\|_{L^2(i\otimes P)} \longrightarrow 0 \implies f_n * Z(t) \xrightarrow{L^1(P)} f * Z(t) \text{ uniformemente em } t$$

Em continuação vamos provar um lema que usaremos para derivar convoluções de processos escalonados.

Lema 7.7: Seja $t_0 \in [a, b]$

$u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $u \in L^2(P)$, mensurável com relação a $\mathcal{G}_{t_0}$.

Se verifica que:

a) $[t_0, b+1] \ni s \longrightarrow u \cdot z_s \in L^1(P)$ é integrável

b) a função

$$\alpha(t) = \int_{t_0}^t u z_s ds \in L^1(P), \quad t \in [t_0, b+1]$$

é diferenciável em todo $t \in [t_0, b+1]$ com respeito ao próprio $[t_0, b+1]$ e sua derivada é $u \cdot z_t$, ou seja, a função $(u z_t)(w) = u(w) \cdot z(t, w)$.

Demonstração: Construindo $u^*(t, w) = \chi_{[t_0, b+1]}(t) \cdot u(w)$ com $t \in D^* \implies u^* \in L^2(i \otimes P)_M$.

$\int_{t_0}^t u z_s ds = \int_{t_0}^t u_s^* z_s ds$ e (a) passa a ser um caso particular do já demonstrado ao provar a existência da convolução.

Para provar b) consideramos $t \in [t_0, b+1]$ e $t_0 < t + \Delta t < b+1$. Se $\Delta t > 0$,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\alpha(t+\Delta t) - \alpha(t)}{\Delta t} - u z_t \right\|_{\mathcal{L}^1(P)} &\leq \frac{1}{\Delta t} \left\| \int_t^{t+\Delta t} u(z_s - z_t) ds \right\|_{\mathcal{L}^1(P)} \leq \\ &\leq \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \|u(z_s - z_t)\|_{\mathcal{L}^1(P)} ds \leq \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \|u\|_{\mathcal{L}^2(P)} \|z_s - z_t\|_{\mathcal{L}^2(P)} ds \\ &\leq \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \|u\|_{\mathcal{L}^2(P)} \cdot (\theta(s-t))^{1/2} ds \leq \|u\| \cdot (\theta(\Delta t))^{1/2} \end{aligned}$$

E considerando $\Delta t < 0$ [caso de $t > t_0$] obteremos

$$\left\| \frac{\alpha(t+\Delta t) - \alpha(t)}{\Delta t} - u z_t \right\|_{\mathcal{L}^1(P)} \leq \|u\| [\theta(|\Delta t|)]^{1/2} \xrightarrow{|\Delta t| \rightarrow 0} 0$$

Seja agora um processo escalonado e adaptado $f \in \mathcal{L}^2(\mathcal{GPP})_M$ que escreveremos abreviadamente:

$$f = \sum_{i=1}^m u_i \chi_{J_i}$$

$$f * z(t) = \sum_{i=1}^m \int_D u_i \chi_{[t_i, t_{i+1})}(s-t) z_s ds =$$

$$\sum_{i=1}^m \left[\int_{t_i+t}^{t_{i+1}+t} u_i z_s ds \right] = \sum_{i=1}^m \left[\int_{t_i}^{t_{i+1}+t} u_i z_s ds - \int_{t_i}^{t_i+t} u_i z_s ds \right]$$

e por ser f adaptado, u_i será mensurável com respeito a $\mathcal{F}_{t_i}$ e podemos aplicar o lema 7.7

$f * z$ é diferenciável em $[0, 1]$ e a derivada, com respeito deste intervalo é:

$$(7.41) \quad (f * z)'(t) = \sum_{i=1}^m u_i \left| z_{t_{i+1}+t} - z_{t_i+t} \right|$$

$$= \int_D \left[\sum u_i \chi_{J_i+t} \right] dz \in L^2(P) \Rightarrow$$

$$(7.42) \quad (f * z)'(0) = \int_D f dz$$

Se $t_{i+1} - t_i = h$, $\forall i$ por (7.26) teremos que:

$$\|f * z'(t)\|_{L^1(P)} \leq \|f * z'(t)\|_{L^2(P)} \leq$$

$$\leq 2 \frac{L(h)}{h} \int_D \left\| \sum u_i \chi_{J_i+t}(s) \right\|_{L^2(P)} ds +$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\frac{\theta(h)}{h} \int_D \| \sum u_i X_{J_i+t}(s) \|^2_{L^2(P)} ds \right]^{1/2} = \\
& \leq 2 \frac{\zeta(h)}{h} \sum \| u_i \|^2_{L^2(P)} \cdot h + \left[\frac{\theta(h)}{h} \right]^{1/2} \left[\sum \| u_i \|^2_{L^2(P)} h \right]^{1/2} = \\
& = 2 \frac{\zeta(h)}{h} \int_D \| f_s \|^2_{L^2(P)} ds + \left[\frac{\theta(h)}{h} \right]^{1/2} \left[\int_D \| f_s \|^2_{L^2(P)} ds \right]^{1/2}
\end{aligned}$$

Seja agora $f \in L^2(I \otimes P)_M$, f_n^- as médias escalonadas retardadas definidas anteriormente.

Da desigualdade anterior deduzimos como em (7.29) para $m \geq n$:

$$\| ((f_n^- - f_m^-) * Z)'(t) \|_{L^2(P)} \leq 8 \left[\frac{\zeta(h_n)}{h_n} \psi_{1f}(2h_n) + \frac{\rho(h_n)}{h_n} \psi_{2f}^{1/2}(2h_n) \right]$$

No caso em que exista uma subsucessão para qual a série (7.30) seja convergente (em particular para os espaços de Young) deduzimos que:

$(f_n^- * Z)'(t)$ é de Cauchy em $L^2(P)$ e converge para um elemento $\beta(t) \in L^2(P)$ uniformemente em t . Tomando em conta (7.24) e (7.40) podemos resumir que:

$$\left. \begin{aligned} f_n^- * Z(t) &\xrightarrow{L^1(P)} f * Z(t) \\ (f_n^- * Z)'(t) &\xrightarrow{L^2(P)} \beta(t) \end{aligned} \right\} \text{uniformemente em } t \in [0,1]$$

A seguir adaptamos um resultado clássico do cálculo de funções com valores em espaços de Banach.

Vamos chamar

$$\alpha_n(t) = f_n^- * Z(t) \quad , \quad \alpha(t) = f * Z(t)$$

Sejam $t, t + \Delta t \in [0, 1]$, $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned}
 (7.43) \quad & \| \alpha(t + \Delta t) - \alpha(t) - \beta(t) \cdot \Delta t \|_{\mathcal{L}^1(P)} \leq \\
 & \leq \| (\alpha - \alpha_n)(t + \Delta t) - (\alpha - \alpha_n)(t) \|_{\mathcal{L}^1(P)} \\
 & + \| \alpha_n(t + \Delta t) - \alpha_n(t) - \alpha'_n(t) \cdot \Delta t \|_{\mathcal{L}^1(P)} \\
 & + \| \alpha'_n(t) - \beta(t) \|_{\mathcal{L}^1(P)} \cdot |\Delta t| \\
 & \| (\alpha - \alpha_n)(t + \Delta t) - (\alpha - \alpha_n)(t) \|_{\mathcal{L}^1(P)} = \\
 & \lim_{m \rightarrow \infty} \| (\alpha_m - \alpha_n)(t + \Delta t) - (\alpha_m - \alpha_n)(t) \|_{\mathcal{L}^1(P)} \\
 & \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \left[|\Delta t| \sup_{s \in [0, 1]} \left\{ \| (\alpha'_m - \alpha'_n)(s) \|_{\mathcal{L}^1(P)} \right\} \right]
 \end{aligned}$$

Pela convergência uniforme de α'_n existirá um n_1 tal que $\forall n \geq n_1$ o primeiro sumando de (7.43) será inferior a $\frac{\epsilon}{3} |\Delta t|$.

Por esta mesma convergência uniforme existirá n_2 tal que $n \geq n_2 \Rightarrow \|\alpha'_n(t) - \beta(t)\|_{1(P)} \leq \epsilon/3$.

E fixado um $n \geq \max(n_1, n_2)$ pela própria definição de derivada $\exists \delta > 0$ tal que

$$|\Delta t| < \delta \Rightarrow \|\alpha_n(t + \Delta t) - \alpha_n(t) - \alpha'_n(t) \cdot \Delta t\|_{1(P)} \leq \epsilon \Delta t.$$

Estas três majorações levadas a (7.43) provam que $\beta(t) = \alpha'(t)$.

Portanto

$$\left. \begin{array}{l} f_n^- * Z'(0) \xrightarrow{\mathcal{L}^2(P)} f * Z'(0) \\ \parallel \\ \int_D f_n^- dZ \xrightarrow{\mathcal{L}^2(P)} \int_D f dZ \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (f * Z)'(0) = \int_D f dZ$$

Sempre que a sucessão $\{h_n\}$ admita uma subsucessão para a qual

$$\sum_{l=1}^{\infty} \left[\frac{\zeta(h_v)}{h_v} \psi_{1,f}(2h_v) + \frac{\rho(h_v)}{h_v} \left[\psi_{2,f}(2h_v) \right]^{1/2} \right] < \infty$$

Em particular

a) para os espaços de Young

b) no caso em que $\zeta(s) = \theta(s) = K \cdot s$ com $K > 0$

$\forall f \in {}^2(i \otimes P)_M$; ou seja, para as condições de McShane no caso em que g seja linear.

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

1. Cabaña, E.M.: "Stochastic integration in separable Hilbert spaces". Instituto de Mat. e Estat. de Montevideo (1966).
2. Cignoli, R. e Cotlar, M.: "Introduction to functional Analysis" North Holland, Amsterdam (1974).
3. Cignoli, R.: "Medidas de Radon", Notas da Universidade de los Andes (1975).
4. Dellacherie, C. e Meyer, P.: "Probabilités et Potentiel". Institut de Mathematique de l'Université de Strasbourg (1975).
5. Doob, J.L.: "Stochastic Processes". John Wiley, London (1953).
6. Einstein, A.: "Investigation on the theory of the Brownian movement" Methuen, London (1926).
7. Fernández Vivas, C.: "Aportaciones a la teoria de ecuaciones integrales estocasticas" Tesis doctorales de la Universidad de Granada (1975).
8. Fridman, A.: "Stochastic Differential Equations and Applications" Academic Press, London (1976).
9. Halmos, P.R.: "Measure Theory", Van Nostrand, London (1950).
10. Hildebrandt, T.H.: "Introduction to the theory of integration" Academic Press, London (1963).
11. Hobson, F.W.: "The theory of functions of a real variable and the theory of Fourier's series" Dover Publications, New York (1921).
12. Itô, K.: "Stochastic Integral". Proc. Jap. Acad. 20 (1944).

13. Itô, K.: "On a formula concerning stochastic differentials" . Nagoya Mathematical Journal, Vol. 3, outubro (1951).
14. Kunita, H.: "Stochastic integrals based on martingales valued in Hilbert space". Nagoya Math. Journal 38 (1970).
15. Kunita, H. e Watanabe, S.: "On square integrable martingales". Nagoya Math. Journal 30 (1967).
16. Lang, S.: "Analysis II". Addison - Wesley, London (1969).
17. McKean, H.P.: "Stochastic Integrals". Academic Press, London (1969).
18. McShane, E.J.: "Integration". Princeton University Press, - Princeton (1944).
19. McShane, E.J.: "A Riemann-type integral that includes Lebesgue -Stieltjes, Bohner and stochastic integrals". An. Math. Soc. Memoirs, vol. 88 (1969).
20. McShane, E.J.: "Stochastic integrals and stochastic functional equations". SIAM. J. Appl. Math. 17 (1969).
21. McShane, E.J.: "Stochastic calculus and stochastic models" Academic Press, London (1974).
22. McShane, E.J.: "Stochastic differential equations". J. Multi variate Analysis 5 (1975).
23. McShane., E.J.: "Stochastic differential equations" Proc. of the sixth Berkeley symposium on Mathematical Statistics and Probability, vol. III, Probability theory, pags. 263 - 294.
24. Metivier, M.: "The stochastic integral with respecto to - processes with values in a reflexive Banach space". Probability 19 (1974).
25. Meyer, P.: "Integrales Stochastiques" Lecture Notes in Math.,

- vol. 39, Springer-Verlag, Berlin (1967).
26. Meyer, P.: "Un cours sur les integrales stochastiques".
Lecture Notes in Math. vol. 511, Springer-Verlag, Berlin (1976).
 27. Munroe, M.E.: "Introduction to the theory of integration".
Addison-Wesley, Massachusetts (1959).
 28. Nachbin, L.: "Formulação geral do teorema de aproximação de
Weierstrass para funções diferenciáveis". Exposições de Mat
emática. Fortaleza, Ceará, Brasil.
 29. Neveu, J.: "Calcul de Probabilités". Masson et Cie. Paris -
(1964).
 30. Payley, R.; Wiener, N. e Zygmund, A.: "Notes on random -
functions". Math. Z. 37 (1933).
 31. Protter, P.: "A comparison of stochastic integrals" Ann.
Probability (197 ?).
 32. Wiener, N.: "Differential space". J. Math. and Physics 2 (1923).
 33. Yeh, J.: "Stochastic processes and the Wiener integral". Marcel
Dekker, New York (1973).
 34. Young, L.C.: "Integrales de Stieltjes et convergence de séries
de Fourier". Soc. Math. de France, Conférences de la Reunion
Internat. de Math., Paris (1937).
 35. Young, L.C.: "A further inequality for Stieltjes integrals",
J. London Math. Soc. 18 (1943).
 36. Young, L.C.: "An inequality of the Holder type connected with
Stieltjes integration". Acta Math. 67 (1936).
 37. Young, L.C.: "Inequalities connected with bounded p-th power
variation in the Wiener sense and with integrated Lipchitz
conditions". Proc. London Math. Soc. (2) 43 (1937).

38. Young, L.C.: "Some new stochastic integrals and Stieltjes - integrals. Part I: Analogues of Hardy and Littlewood classes" Advances in Probability, vol. 2, Marcel Dekker, New York , (1970).
39. Young, L.C.: "Some new stochastic integrals ans Stieltjes- integrals. Part II: Nigh-martingales".

AGRADECIMENTOS

Ao Instituto de Matemática da UNICAMP que me admitiu como aluno regular no seu curso de Doutorado...

Ao Dr. Roberto Cignoli que acreditou no meu trabalho e com santa paciência corrigiu os erros mais visíveis, às vezes delirantes...

Ao Dr. Carlos Segovia cujas idéias simplificaram, e muito, algumas das demonstrações...

A Célia Maria e Irene Camilo que datilografaram o manuscrito...

A Wen-Fong, Regina, Princesa, Nadeia e Clarita que forneceram a tradução aqui presente...

A meu pai, ao Dr. Epitácio, Maria José e aos funcionários da Clínica Macedo que empurraram a saída dos primeiros exemplares...

E também...

A Francisco Bas Ramallo, o filósofo-mestre-amigo - que me acompanhou nos primeiros passos universitários...

A Enrique Cansado, que me animou a travessar a Cordilheira dos Andes e desembarcar na América Latina, naquele Santiago promissor dos anos 72...

Ao Chile, a Salvador Allende Gossens e tantos outros que, para mim, continuam vivos...

A Francisco Wefort, Fernando Henrique Cardoso e Rubens Murillo Marques que me trouxeram até Campinas...

A Frederico Garcia Lorca que me ajudou a cultivar a lua, a pena e a esperança neste outro lado do Atlântico...

Aos familiares e amigos da Espanha que me aguardam na incerteza de um tempo novo, mais complexo e possível que aquele que juntos conhecemos...

Aos rios São Francisco e Amazonas sobre os quais - ainda pude navegar...

A Carmen Arozamena de Cignoli e a Dona Lazineha que enfeitaram de café e carinho este pobre discurso matemático...

Aos meus alunos brasileiros, especialmente a turma que se formou em 77, pela sua humaníssima simplicidade e o calor das suas vozes...

A Maria do Mar, a chama verde e pequena, cuja ausência esteve tão presente no percurso difuso dos últimos anos...

E a Charles Spencer Chaplin... Porque se Carlitos fosse matemático, eu iria com bengala pelas ruas...

EPÍLOGO

QUERO COMPRAR UMA LUA...

Enquanto escrevo umas fórmulas
os coqueiros cearenses
se reúnem
beira-mar...

Veleiros de verdes velas
acompanhando o sussurro
de ondas verdes
com os ramos...

Quero comprar uma lua,
uma lua
azul marinho...

Uma lua que não chore
na floresta de colares
de um luzeiro
adormecido...

Quero comprar uma lua
para aquecê-la nos dedos
e para a por no teto
do meu quarto
quando escrevo...

Quero comprar uma lua,
uma lua
azul marinho...

Eduardo, Brasil, 1979.

Yo no le canto a la luna
porque alumbra y nada más
le canto porque ella sabe
de mi largo caminar.

Atahualpa Yupanqui, América do
Sul, segunda parte do século XX.