

FIBRADOS COM CURVATURA NÃO-NEGATIVA

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida pelo Sr. Maria Alice Bozola Grou e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 10 de Dezembro de 1987.



Prof. Dr. Alcibíades Rigas
Orientador

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

- 1987 -

G917f

9104/BC

BIBLIOTECA CENTRAL

FIBRADOS COM CURVATURA NÃO-NEGATIVA

Maria Alice Bozola Grou

Prof. Dr. Alcibiades Rigas

Orientador

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Dezembro - 1987

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Alcibiades Rigas, pela proposição do problema, pela orientação segura e principalmente pela profunda compreensão da nossa realidade de trabalho. Muitas vezes foi preciso esperar por mim.

Ao Prof. Dr. Nelson Lima Teixeira, responsável pela minha primeira reflexão a respeito de uma nova perspectiva.

Aos meus amigos do IMECC, pelo apoio e incentivo. Particularmente à Vera e à Miriam, companheiras sempre presentes nesta minha caminhada.

À Sueli, pelo alento de ter sempre, antes de tudo, acreditado em mim.

À Lourdes, pela competência e dedicação na datilografia deste trabalho.

Ao Rogério, Breno, Theo e Fábio, por terem dado um sentido maior à luta.

..."não se pode tentar mais nada do que estabelecer o princípio e a direção de uma estrada infinitamente longa. A pretensão de qualquer plenitude sistemática e definitiva seria, pelo menos, uma auto-ilusão. Aqui a perfeição só pode ser obtida pelo estudante individual no sentido subjetivo, de que ele comunica tudo quanto conseguiu ver."

George Simmel

ÍNDICE

INTRODUÇÃO	i
CAPÍTULO I - MÉTRICAS E FORMA DE CURVATURA EM FIBRADOS. A TÉCNICA DA SUBMERSÃO RIEMANNIANA	1
§1 - Introdução	1
§2 - Submersões Riemannianas - Equações Fundamentais .	2
§3 - Conexão e Forma de Curvatura em Fibrados Principais	7
§4 - Métricas sobre Fibrados	11
§5 - Determinação da Geometria do Fibrado $S^3 \dots S^7 \rightarrow S^4$	15
CAPÍTULO II - CURVATURA ESCALAR EM FIBRADOS	34
§1 - Introdução	34
§2 - Curvatura Escalar em Fibrados Principais Compactos	40
§3 - Curvatura Escalar em Fibrados Associados Compactos	47
§4 - Algumas Considerações a Respeito da Curvatura de Ricci	64
APÊNDICE (A.2) - Sobre a Curvatura Seccional em Fibrados Principais e Fibrados Associados	67
CAPÍTULO III - MÉTRICAS DE CURVATURA SECCIONAL NÃO - NEGATIVA EM FIBRADOS PRINCIPAIS	74

§1 - Introdução	74
§2 - Curvatura Positiva e o Conceito de "Fatness" em Fibrados Principais	83
§3 - Componentes do Tensor de Curvatura no Fibrado $G \dots P \longrightarrow M$ relativamente à Métrica g_f . . .	85
§4 - A Curvatura Seccional no Fibrado $G \dots P \longrightarrow M$ quando $G = S^3$ ou $G = SO(3)$	96
§5 - A Não-Negatividade da Curvatura Seccional da Mé- trica g_f em Fibrados do tipo $GS(3) \dots P \longrightarrow M$. .	110
§6 - Observações Finais	114
APÊNDICE (A.3.1) - Um Algoritmo para testar a Não-Negativida de da Curvatura Seccional da Métrica g_f em Fi- brados $GS(3) \dots P \longrightarrow M$	116
APÊNDICE (A.3.2) - Demonstração do Teorema (3.2.1)	124
REFERÊNCIAS	131

INTRODUÇÃO

Na investigação sobre a existência de métricas com curvatura seccional não-negativa em espaços totais de fibrados principais $G \dots P \xrightarrow{\pi} M$, uma estratégia interessante é considerar em P a família de métricas a 1-parâmetro: $g_t = \pi_* \langle \cdot, \cdot \rangle_M + t^2 \langle \omega, \omega \rangle_G$ (onde t é uma constante positiva e ω , uma conexão em P); principalmente porque a projeção π , neste caso, é uma submersão riemanniana, e as fórmulas de O'Neill (ver [ON]) se tornam uma ferramenta eficaz para obter informações a respeito da curvatura de P . Em particular, resultados sobre a existência de métricas com curvatura de Ricci positiva, em fibrados, foram obtidos usando este tipo de estratégia (ver por ex., os artigos de Poor [P], Hernandez [H] e Nash [N]).

Nosso primeiro passo, que possibilitou uma maior familiaridade com as técnicas da submersão riemanniana, foi usar este tipo de métrica g_t para obter condições sobre o grupo estrutural G e sobre o tipo de ação deste grupo sobre a fibra F em fibrados principais $G \dots P \longrightarrow M$ e em fibrados associados (E, M, F, G, π) de tal modo que toda função real C^∞ sobre o espaço total P (ou E) se realize como curvatura escalar (Teoremas (2.2.3), (2.3.9) e (2.3.11)). O Capítulo II trata essencialmente deste assunto.

Com relação à curvatura seccional não-negativa em fibrados,

uma questão proposta por Cheeger/Gromoll em [G,C] - (1972), diz respeito à determinação dos fibrados sobre esferas usuais que admitem métricas completas de curvatura seccional não-negativa. Muito pouco foi publicado nesta linha de pesquisa, desde então (ver Introdução do Capítulo III), e esta questão foi novamente considerada por Yau em [Y] - (Problem Section) - (1982).

A nossa proposta foi então, dada a abrangência e dificuldade da questão de Cheeger/Gromoll, obter condições de delineamento deste problema, quando fixamos, nos fibrados de esferas, métricas que são naturais.

O fato de o parâmetro t na métrica g_t ser uma constante, implica, em particular, que as fibras em P são totalmente geodésicas. Esta restrição sobre as fibras, acrescida do fato de que o único S^3 -fibrado sobre S^4 , com fibras totalmente geodésicas e curvatura estritamente positiva é o fibrado de Hopf (conjectura de Weinstein, provada por Derdziński/Rigas em [D,R-1] - (1981)), nos levou a considerar uma métrica mais geral em P , do tipo $g_f = \pi_* \langle \cdot, \cdot \rangle_M + f^2(x) \langle \cdot, \cdot \rangle_G$, onde $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função real diferenciável e estritamente positiva. As fibras em P , agora, deixam de ser totalmente geodésicas. Conseguimos então estabelecer condições necessárias e suficientes para a não-negatividade da curvatura seccional da métrica g_f no fibrado principal $G \dots P \longrightarrow M$ para M compacta com curvatura seccional $K_M > 0$ ($\dim M \geq 2$) e para $G = S^3$ ou $G = SO(3)$. (Teoremas (3.5.1) e (3.5.3)). Os Apêndices (A.3.1) e (A.3.3) tratam de encaminhamentos para viabilizar resultados mais conclusivos.

No Capítulo I, estabelecemos a notação e resumimos alguns conceitos relativos a métricas, conexões e submersão riemanniana que serão utilizados e incluimos a discussão, em detalhes, da geometria do fibrado $S^3 \dots S^7 \longrightarrow S^1$, com a métrica induzida de $S_p(2)$.

Foi de fundamental importância, neste trabalho, uma pesquisa bibliográfica abrangente, coletando principalmente resultados e exemplos de variedades com curvatura não-negativa.

CAPÍTULO I

MÉTRICAS E FORMA DE CURVATURA EM FIBRADOS. A TÉCNICA DA SUBMERSÃO RIEMANNIANA

§1. INTRODUÇÃO

Se o espaço base M e o grupo estrutural G de um fibrado principal $G \rightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ são variedades riemannianas, então, fixando uma conexão no fibrado principal e utilizando as estruturas de M e G , podemos definir uma métrica riemanniana em P .

Uma maneira natural de obter uma tal métrica, consiste simplesmente em declarar os subespaços horizontal e vertical, ortogonais e usar a métrica natural induzida sobre cada componente. A projeção $P \xrightarrow{\pi} M$ é então uma submersão riemanniana (com fibras totalmente geodésicas, neste caso) e podemos então usar as fórmulas O'Neill [ON] para calcular a curvatura de P .

Em geral, é esta a estratégia usada para se obter informações a respeito da curvatura de P (ver, por exemplo, os artigos de Nasch [N], Poor [P] e Jensen [J]) e particularmente, a técnica da submersão riemanniana, tem se mostrado muito eficiente na obtenção de exemplos de variedades de curvatura seccional não-negativa. Voltaremos a este assunto com exemplos e bibliografia específica na introdução do capítulo III.

O objetivo principal deste capítulo é, então, estabelecer alguns conceitos e notações relativos a estas técnicas, e que serão necessários para o desenvolvimento dos capítulos posteriores.

No último parágrafo, a título de exemplo, manipulamos com estes conceitos, e determinamos em detalhes, a geometria do fibra do $S^3 \dots S^7 \longrightarrow S^4$ num contexto específico.

§2. SUBMERSÕES RIEMANNIANAS - EQUAÇÕES FUNDAMENTAIS

Os resultados aqui relacionados foram obtidos por Barrett O'Neill. Para maiores detalhes, ver [ON].

Sejam M e N variedades riemannianas e $\pi : N \longrightarrow M$ uma aplicação diferenciável, com $(d\pi)_p$ sobrejetiva, para todo $p \in N$. Isto implica que para cada $x \in M$, $\pi^{-1}(x)$ é uma subvariedade de N . Para cada $p \in N$, denotaremos por H_p o complemento ortogonal em $T_p N$, de $V_p = T_p(\pi^{-1}(x))$, o espaço tangente à fibra em p .

A aplicação π é uma *submersão riemanniana* se

$$(d\pi)_p : H_p \longrightarrow T_x M \text{ é uma isometria para todo } p \in N.$$

Se X é um campo de vetores em N , denotaremos por

$X = X^H + X^V$, a decomposição em suas componentes horizontal e vertical em H_p e V_p , respectivamente.

Existem em N , dois tensores do tipo $(2,1)$ associados à

submersão riemanniana.

Para campos vetoriais E e F , em N , define-se:

$$A_E^F = \left[\begin{array}{cc} \nabla & F^H \\ E^H & \end{array} \right]^V + \left[\begin{array}{cc} \nabla & F^V \\ E^H & \end{array} \right]^H$$

e

$$T_E^F = \left[\begin{array}{cc} \nabla & F^V \\ E^V & \end{array} \right]^H + \left[\begin{array}{cc} \nabla & F^H \\ E^V & \end{array} \right]^V .$$

Se X e Y são campos vetoriais horizontais sobre N , então:

$$A_X^Y = \frac{1}{2} [X, Y]^V = -A_Y^X .$$

Então a distribuição horizontal é integrável se e somente se $A_X^Y = 0$, quaisquer que sejam X e Y campos horizontais em N .

O tensor A é então o *tensor integrabilidade da distribuição horizontal de N* . (ver Lemma (1.2.2))

Por outro lado, se V e W são campos vetoriais verticais em N , então:

$$T_V^W = \left[\begin{array}{c} \nabla \\ V \end{array} W \right]^H$$

que é a 2^a forma fundamental das fibras.

Note que $T \equiv 0$ é equivalente a dizer que as fibras são totalmente geodésicas (ver Lemma (1.2.2)).

Um campo vetorial X em N é chamado de *horizontal básico* se é π -relacionado com um campo vetorial X_* sobre M , isto é, $\pi_*X = X_*$.

Por outro lado, dado um campo vetorial X_* em M , existe um único levantamento horizontal X em N tal que

$$\pi_*X = X_* \circ \pi .$$

Esta correspondência biunívoca entre campos vetoriais horizontais básicos sobre N e campos vetoriais arbitrários sobre M preserva produto interno, colchete de Lie e derivada covariante. Isto significa que, se X e Y são campos vetoriais básicos, então:

$$(1.2.1) \quad (a) \quad \langle X, Y \rangle = \langle X_*, Y_* \rangle \circ \pi$$

$$(b) \quad [X, Y]^H \text{ é o campo vetorial básico que corresponde a } [X_*, Y_*] .$$

e

$$(c) \quad (\nabla_X Y)^H \text{ é o campo vetorial básico que corresponde a } \nabla_{X_*}^* (Y_*) .$$

O Lema a seguir estabelece relações entre T , A e as derivadas covariantes em N :

LEMA (1.2.2). Sejam X e Y campos vetoriais horizontais, V e W campos vetoriais verticais e $\hat{\nabla}_V W = (\nabla_V W)^V$ a derivada covariante das fibras. Então:

$$(i) \nabla_V W = T_V W + \hat{\nabla}_V W$$

$$(ii) \nabla_V X = (\nabla_V X)^H + T_V X$$

$$(iii) \nabla_X V = A_X V + (\nabla_X V)^V$$

$$(iv) \nabla_X Y = (\nabla_X Y)^H + A_X Y$$

Além disso, se X é básico, $(\nabla_V X)^H = A_X V$

Existem cinco equações fundamentais associadas à submersão $\pi : N \longrightarrow M$ (ver O'Neill [ON]), dependendo do número n ($n = 0, 1, 2, 3, 4$) de vetores horizontais que comparecem no tensor de curvatura $\langle R(E_1, E_2) E_3, E_4 \rangle$, com os restantes sendo verticais. Estas equações determinam completamente a curvatura de N .

No caso particular da curvatura seccional, estas equações se simplificam bastante. Temos, então, o seguinte teorema:

TEOREMA (1.2.3). Seja $\pi : N \longrightarrow M$ uma submersão e sejam, K , K^M e $\hat{K}$ as curvaturas seccionais de N, M e das fibras (como subvariedades riemannianas de N). Se x e y são vetores horizontais em um ponto de N e v e w são verticais, então:

$$(i) \quad K_{V \wedge W} = \hat{K}_{V \wedge W} - \frac{\langle T_V v, T_W w \rangle - \|T_V w\|^2}{\|v \wedge w\|^2}$$

$$(ii) \quad K_{x \wedge v} (\|x\|^2 \|v\|^2) = \langle (\nabla_x T)_v v, x \rangle + \|A_x v\|^2 - \|T_v x\|^2$$

$$(iii) \quad K_{x \wedge y} = K_{x^* \wedge y^*}^M - 3 \frac{\|A_x y\|^2}{\|x \wedge y\|^2} \quad \text{onde } x^* = \pi_*(x).$$

OBSERVAÇÃO (1.2.4). Uma consequência imediata de (iii) é que se N tem curvatura seccional não-negativa, então M também possui curvatura seccional não-negativa.

OBSERVAÇÃO (1.2.5). Um processo que é usado com sucesso, para obter alguns exemplos interessantes de variedades completas de curvatura não-negativa é o seguinte: Seja N uma variedade riemanniana completa e H um grupo de isometrias atuando livremente sobre N tal que o espaço de órbitas $M = N/H$ é uma variedade, base do fibrado principal $H \dots N \xrightarrow{\pi} M$. A ação de H por isometrias torna a projeção π uma submersão riemanniana. Em particular, se N possui curvatura seccional não negativa $K \geq 0$ (resp. positiva, se $K > 0$), a observação anterior garante que M também possui curvatura seccional não negativa (resp. positiva).

OBSERVAÇÃO (1.2.6). Como um caso especial, se G é um grupo de Lie com métrica bi-invariante com $K \geq 0$ e H é um subgrupo fechado, então toda ação de H sobre uma variedade completa F com $K \geq 0$, induz uma ação diagonal livre de H sobre o produto riemanniano $G \times F$. O fibrado $F \dots \frac{G \times F}{H} \longrightarrow \frac{G}{H}$ associado ao fibrado principal

$H \dots G \longrightarrow \frac{G}{H}$ é tal que $\frac{G \times F}{H}$ possui curvatura seccional $K \geq 0$.

Por exemplo, se $G = SO(n+1)$ e $H = SO(n)$ atua sobre o espaço euclidiano $F = \mathbb{R}^n$, por rotação, então $\frac{G \times F}{H} = \frac{SO(n+1) \times \mathbb{R}^n}{SO(n)} = TS^n$, o fibrado tangente à esfera S^n . Portanto TS^n admite métrica completa com $K \geq 0$, para todo $n \geq 1$.

§3. CONEXÃO E FORMA DE CURVATURA EM FIBRADOS PRINCIPAIS.

Vamos expor, de maneira sucinta, alguns conceitos sobre a teoria de conexões em fibrados principais. A teoria detalhada deste assunto se encontra em Kobayashi/Nomizu [K,N] - volume I.

Uma estrutura de fibrado principal é obtida naturalmente quando temos uma variedade P na qual atua, de maneira livre, à direita, um grupo de Lie G . Temos então um fibrado principal

$$G \dots P \longrightarrow M$$

onde M é o quociente diferenciável da ação e G é chamado de grupo estrutural.

A ação livre, à direita, de G sobre P , induz um homomorfismo de álgebras de Lie:

$$\alpha : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{X}(P) \quad , \quad \text{injetivo} \quad ,$$

da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G na álgebra de Lie dos campos vetoriais sobre P .

Para cada $A \in \mathfrak{g}$, $\alpha(A) = A^*$ é chamado de campo vetorial fundamental correspondente a A e obtido da seguinte maneira:

Para cada $p \in P$, considere a aplicação $p : G \longrightarrow P$ tal que $p(g) = p \cdot g$ para $g \in G$. Então:

$$\alpha(A)(p) = A^*(p) = dp(A(e)) = \frac{d}{dt} (p \cdot \exp tA)_{t=0}$$

A^* é portanto tangente às fibras.

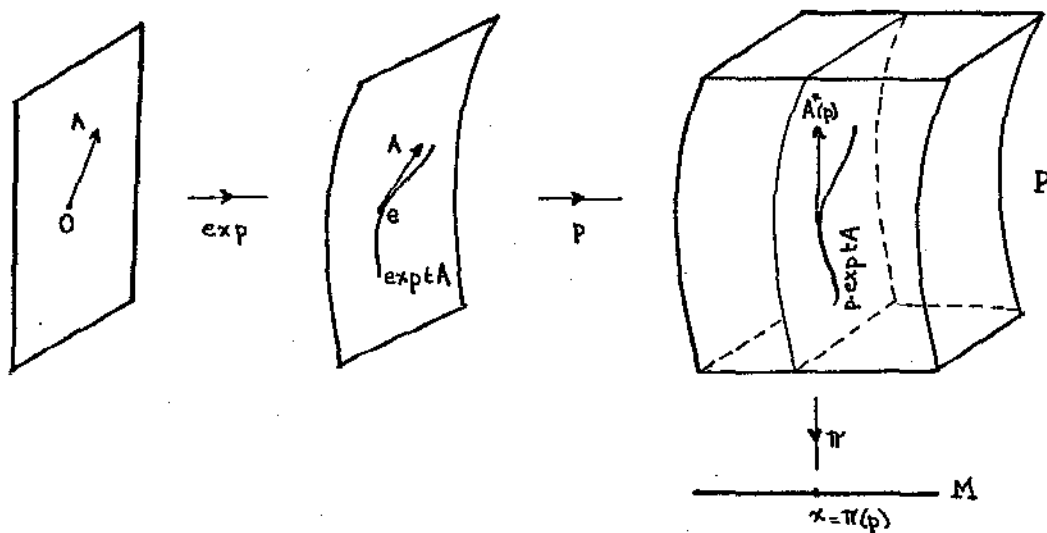


Figura 1

OBSERVAÇÃO (1.3.1). Se a ação de um grupo de Lie G sobre uma variedade F não é livre, então α não é necessariamente injetivo. Neste caso, se G possui métrica bi-invariante e F é riemanniana, com $\dim G = n$ e $\dim F = r$, então para cada ponto $q \in F$, existem bases ortonormais,

$e_1, \dots, e_n$ e $f_1, \dots, f_r$ de g e $T_q F$,

respectivamente e constantes $\lambda_1(q), \dots, \lambda_n(q)$ satisfazendo

$$\lambda_1(q) \geq \lambda_2(q) \geq \dots \geq \lambda_s(q) > \lambda_{s+1}(q) = \dots = \lambda_n(q) = 0$$

tal que, se $\alpha_q : g \longrightarrow T_q F$, então:

$$\begin{aligned} \alpha_q(e_i) &= \lambda_i(q) f_i, & i &= 1, \dots, s \\ &= 0, & i &= s+1, \dots, n \end{aligned}$$

Os $\lambda_i(q)$ são as raízes características de α_q e dependem continuamente de q (ver artigo/Nomizu [NM-2]).

Suponha que a dimensão de M é igual a m .

Uma conexão no fibrado principal $G \dots P \longrightarrow M$, é uma distribuição diferenciável H , m -dimensional em P , satisfazendo:

- (a) $\forall p \in P, T_p P = V_p + H_p$, decomposição em soma direta, onde V_p é o espaço tangente à fibra de π que passa por p . (ver figura 2)
- (b) $(dR_g)H_p = H_{pg}$, $\forall g \in G, \forall p \in P$, onde $R_g(p) = pg$ é a transformação em P , induzida pela ação de G .

H_p e V_p são chamados respectivamente de subespaços horizontal e vertical.

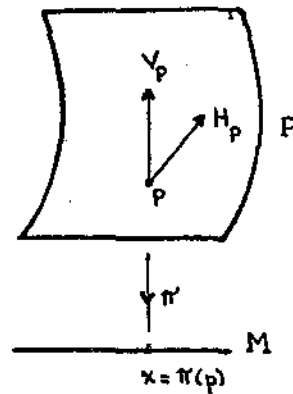


Figura 2

Existe uma formulação dual da conexão H em P chamada *forma conexão da distribuição horizontal* H , que é uma 1-forma sobre P , com valores na álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G , definida como segue:

Se $X \in T_p P$, considere a decomposição

$$X = X^H + X^V, \quad X^H \in H_p \quad \text{e} \quad X^V \in V_p.$$

Existe um único $A \in \mathfrak{g}$ tal que $A^*(p) = X^V$.

Então, para cada $p \in P$,

$\omega : T_p P \longrightarrow \mathfrak{g}$ é definido por $\omega(X)(p) = A$.

Observamos que ω é basicamente a regra:

$$X \longrightarrow X^V$$

A *forma de curvatura* Ω de uma conexão H com 1-forma ω é uma 2-forma horizontal com valores em $\mathfrak{g}$, definida por:

$$\Omega(X, Y)(p) = \frac{1}{2} \omega([X^H, Y^H]) \equiv \frac{1}{2} [X^H, Y^H] V$$

Ω mede portanto o quanto a distribuição horizontal é não-integrável.

§4. MÉTRICAS SOBRE FIBRADOS

Considere um fibrado principal $G \dots P \xrightarrow{\pi} M$.

Vamos supor que G possui uma métrica bi-invariante $\langle \cdot, \cdot \rangle_G$, e seja $\omega : TP \longrightarrow g$ uma forma conexão em P .

Seja F uma variedade riemanniana de dimensão r e suponhamos que G atua, à esquerda, sobre F .

Dadas funções diferenciáveis positivas f e h sobre M , definimos uma (f, h) -métrica sobre $P \times F$ por:

$$(1.4.1) \quad \|V\|^2 = \|(\pi \circ \pi_1)_* V\|_M^2 + f(x) \|\omega \circ \pi_{1*} V\|_G^2 + h(x) \|\pi_{2*} V\|_F^2$$

onde V é tangente a $P \times F$ no ponto (p, f) , $\pi(p) = x \in M$ e $\pi_1 : P \times F \longrightarrow P$ e $\pi_2 : P \times F \longrightarrow F$ são projeções no primeiro e segundo fatores, respectivamente.

Para os nossos objetivos não há interesse em considerar um multiplicador à frente do primeiro termo da métrica acima. Na verdade, estamos interessados na definição de métricas sobre fibrados principais e associados, que tornam as respectivas projeções, submersões riemannianas.

OBSERVAÇÃO (1.4.2). Quando nos referimos à *f-métrica sobre P*, estaremos considerando uma métrica sobre P, dada pelos dois primeiros termos da expressão (1.4.1). Relativamente a cada *f-métrica*, π é uma submersão riemanniana.

Por outro lado, considerando a ação livre, à direita de G sobre $P \times F$, dada por:

$$P \times F \times G \longrightarrow P \times F \quad \text{tal que}$$

$$(p, f) \cdot g = (p \cdot g, g^{-1}f)$$

obtemos o quociente $E = \frac{P \times F}{G}$. Temos então um fibrado associado ao fibrado principal $G \dots P \xrightarrow{\pi} M$, com fibra F, que denotaremos por $(E, M, F, G, \hat{\pi})$ e um diagrama comutativo:

$$(1.4.3) \quad \begin{array}{ccc} & G & G \\ & \vdots & \vdots \\ & F \dots P \times F & \xrightarrow{\pi_1} P \\ & \downarrow \tilde{\pi} & \downarrow \pi \\ F \dots E = \frac{P \times F}{G} & \xrightarrow{\hat{\pi}} & M \end{array}$$

As (f, h) -métricas sobre $P \times F$ são G-invariantes e portanto induzem, por projeção horizontal, uma família de métricas $(f, h)_E$ em $E = \frac{P \times F}{G}$ (métricas quociente) tal que $\tilde{\pi}$ é uma submersão riemanniana para cada par (f, h) .

Além disso, $\hat{\pi}$ é também uma submersão riemanniana, desde que

para um vetor tangente horizontal x em $d \in E$, existe um único levantamento horizontal $\bar{x}$ em $T_{(p,f)}(P \times F)$ tal que $x = \tilde{\pi}_* \bar{x}$.

Então é óbvio que $\|x\|_E^2 = \|\pi_{1*} \bar{x}\|_P^2 = \|\pi_* x\|_M^2$.

Os seguintes resultados, cujas demonstrações podem ser encontradas em Poor [P], nos serão úteis no decorrer dos próximos capítulos.

LEMA (1.4.4). Sejam V um elemento de $\mathfrak{g}$ e $\bar{X}$ um campo vetorial sobre M . Consideremos, respectivamente, o campo vertical básico V^* e o campo horizontal básico X em P , relativamente a submersão π .

Então $[V^*, X]$ é zero.

PROPOSIÇÃO (1.4.5). As seguintes condições são equivalentes:

- (a) a função f é constante.
- (b) as fibras de π são totalmente geodésicas em P .
- (c) as fibras de $\hat{\pi}$ são totalmente geodésicas em E .

PROPOSIÇÃO (1.4.6). Se x_0 e x_1 são pontos em M para os quais $f(x_0) = f(x_1)$ e $h(x_0) = h(x_1)$, então as fibras $\pi^{-1}(x_0)$ e $\pi^{-1}(x_1)$ são isométricas em P e também $\hat{\pi}^{-1}(x_0)$ e $\hat{\pi}^{-1}(x_1)$ são isométricas em E .

OBSERVAÇÃO (1.4.7). Um tipo de métrica bastante utilizada na

literatura (ver, por exemplo, os artigos de Jensen [J] e Poor [P]), no caso de fibrados principais $G \dots P \longrightarrow M$ é a métrica riemanniana:

$$g_t = \pi_* \langle \rangle_M + t^2 \langle \omega, \omega \rangle_G.$$

Neste caso, $f(x) \equiv t^2$ (onde t é uma constante positiva), e as fibras de π são portanto totalmente geodésicas em P , fato este que, em alguns casos, pode significar um obstáculo para a obtenção de curvatura seccional positiva (ver [WT] e [D,R]).

Os cálculos efetuados no capítulo II foram feitos fixando uma métrica deste tipo em fibrados principais.

No capítulo III, introduzimos para estes fibrados, uma métrica mais geral, do tipo:

$$g_f = \pi_* \langle \rangle_M + f(x)^2 \langle \omega, \omega \rangle_G$$

com f não constante e estritamente positiva.

As fibras de π deixam de ser, neste caso, totalmente geodésicas.

Um caso particular desta situação ocorre nas variedades riemannianas denominadas "F-warped product"

$(M \times_F N, h^M \times_F h^N)$ usadas, por exemplo, por Derdziński em [D], onde (M, h^M) e (N, h^N) são variedades riemannianas, F é uma função positiva em M , e a métrica $h^M \times_F h^N$ é definida por:

$$(h^M_{x_F} h^N)_{(x,y)}(u+X, v+Y) = h^M_x(u,v) + F(x)h^N_y(X,Y)$$

para $u,v \in T_x M$ e $X,Y \in T_y N$.

§5. DETERMINAÇÃO DA GEOMETRIA DO FIBRADO $S^3 \dots S^7 \longrightarrow S^4$.

Faremos nossos cálculos fixando em S^7 uma métrica específica, ou seja, a métrica projetada do grupo simplético $S_p(2)$ (o grupo das transformações lineares de $\mathbb{H}^2 \longrightarrow \mathbb{H}^2$ que preservam o produto interno, onde $\mathbb{H}$ é o corpo dos quatêrnios) através da projeção π do diagrama:

$$(1.5.1) \quad \begin{array}{ccc} S^3 \times S^3 & & S^3 \\ \vdots & & \vdots \\ S^3 \dots S_p(2) & \xrightarrow{\pi} & S^7 \\ \downarrow \bar{\pi} & & \downarrow \hat{\pi} \\ S^4 & & S^4 \end{array}$$

$S_p(2)$ pode ser identificado com o grupo das matrizes quaterniônicas Q , 2×2 , satisfazendo

$$QQ^* = Q^*Q = I$$

onde Q^* denota a transposta conjugada de Q .

Consideremos em $S_p(2)$ a métrica bi-invariante de grupo de Lie semi-simples, definida como segue:

Dadas as matrizes $A, B \in T_I S_p(2)$

$$(h^M_{x_F} h^N)_{(x,y)} (u+X, v+Y) = h^M_X(u,v) + F(x) h^N_Y(X,Y)$$

para $u, v \in T^M_X$ e $X, Y \in T^N_Y$.

§5. DETERMINAÇÃO DA GEOMETRIA DO FIBRADO $S^3 \dots S^7 \longrightarrow S^4$.

Faremos nossos cálculos fixando em S^7 uma métrica específica, ou seja, a métrica projetada do grupo simplético $S_p(2)$ (o grupo das transformações lineares de $\mathbb{H}^2 \longrightarrow \mathbb{H}^2$ que preservam o produto interno, onde $\mathbb{H}$ é o corpo dos quatêrnios) através da projeção π do diagrama:

$$(1.5.1) \quad \begin{array}{ccc} S^3 \times S^3 & & S^3 \\ \vdots & & \vdots \\ S^3 \dots S_p(2) & \xrightarrow{\pi} & S^7 \\ \downarrow \bar{\pi} & & \downarrow \hat{\pi} \\ S^4 & & S^4 \end{array}$$

$S_p(2)$ pode ser identificado com o grupo das matrizes quaterniônicas Q , 2×2 , satisfazendo

$$QQ^* = Q^*Q = I$$

onde Q^* denota a transposta conjugada de Q .

Consideremos em $S_p(2)$ a métrica bi-invariante de grupo de Lie semi-simples, definida como segue:

Dadas as matrizes $A, B \in T_I S_p(2)$

$\langle A, B \rangle = \text{parte real do traço } (AB^*)$.

Este produto interno determina uma única métrica riemanniana invariante à esquerda sobre $S_p(2)$. Além disso, este produto interno é invariante pela ação adjunta de $S_p(2)$ sobre sua álgebra de Lie, ou seja:

para $Q \in S_p(2)$ e $A, B \in T_I S_p(2)$,

$$\langle \text{Ad}_Q A, \text{Ad}_Q B \rangle = \langle A, B \rangle .$$

Concluimos então que a métrica acima definida sobre $S_p(2)$ é também invariante à direita e portanto bi-invariante.

Por outro lado, $S^3 \equiv S_p(1)$ atua por multiplicação, como $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S_p(1) \end{bmatrix}$ sobre $S_p(2)$ (ver Obs. (1.5.5)). Esta é a representação canônica de $S_p(1) \longrightarrow S_p(2)$.

Consideremos então S^7 como o espaço quociente $S^7 = S_p(2) / S^3$, com a métrica quociente, que é então, invariante pela ação, à esquerda, de $S_p(2)$ sobre S^7 .

Neste contexto,

$$S^7 = \left\{ \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix} ; \lambda, \mu \in \mathbb{H} \text{ t.q.: } \lambda \bar{\lambda} + \mu \bar{\mu} = 1 \right\} \subseteq \mathbb{H}^2 \equiv \mathbb{R}^8$$

e a ação à esquerda de $S_p(2)$ sobre S^7 , definida por:

para $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \in S_p(2)$ e $\begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix} \in S^7$,

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} a\lambda + c\mu \\ b\lambda + d\mu \end{bmatrix}$$

Como $(a\lambda + c\mu)(\overline{a\lambda + c\mu}) + (b\lambda + d\mu)(\overline{b\lambda + d\mu}) = \lambda\bar{\lambda} + \mu\bar{\mu} = 1$,
a ação é por isometrias.

(1.5.2.). Uma secção local $\bar{s}: V \subset S^7 \xrightarrow{\text{ab}} S_p(2)$ é obtida se pa-

ra cada $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in V$, determinamos o elemento

$$Q = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \in S_p(2) \text{ tal que } \pi(Q) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}.$$

Usando o fato de que $QQ^* = Q^*Q = I$, podemos considerar a seguinte expressão para $\bar{s}$:

$$\bar{s} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & \frac{-a\bar{b}a}{|a|^2} \\ b & a \end{bmatrix} \in S_p(2)$$

num aberto $V \subset S^7$ onde $a \neq 0$, ou:

$$s \left[\begin{array}{c} a \\ b \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} a & b \\ b & \frac{-b \bar{a} b}{|b|^2} \end{array} \right] \in S_p(2)$$

num aberto $V' \subset S^7$ onde $b \neq 0$.

A expressão genérica para tais secções é obtida, fazendo variar $u \in S^3$ em:

$$\left[\begin{array}{cc} a & \frac{-a \bar{b} a}{|a|^2} u \\ b & au \end{array} \right] \quad e \quad \left[\begin{array}{cc} a & bu \\ b & \frac{-b \bar{a} b}{|b|^2} u \end{array} \right]$$

Vejamos outras ações envolvidas no diagrama (1.5.1)

(1.5.3.) A ação, à direita, de S^3 sobre S^7 .

Para $u \in S^3$ (ou seja, $u \in \mathbb{H}$ tal que $u\bar{u} = 1$), temos:

$$\left[\begin{array}{c} a \\ b \end{array} \right] u := \left[\begin{array}{c} au \\ bu \end{array} \right] \quad \text{onde} \quad \left[\begin{array}{c} a \\ b \end{array} \right] \in S^7.$$

Como $au \bar{a}u + bu \bar{b}u = a\bar{a} + b\bar{b} = 1$, a ação é por isometrias.

Além disso, a projeção $\hat{\pi} : S^7 \longrightarrow S^4$ é dada por:

$$\hat{\pi} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \left[\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \right] = (2a\bar{b}, a\bar{a} - b\bar{b}) \in S^4 \subseteq \mathbb{R}^5$$

onde $\xi = 2a\bar{b} \in \bar{D}^4$ (disco fechado em $\mathbb{R}^4$) e $h = a\bar{a} - b\bar{b} \in [-1, 1]$

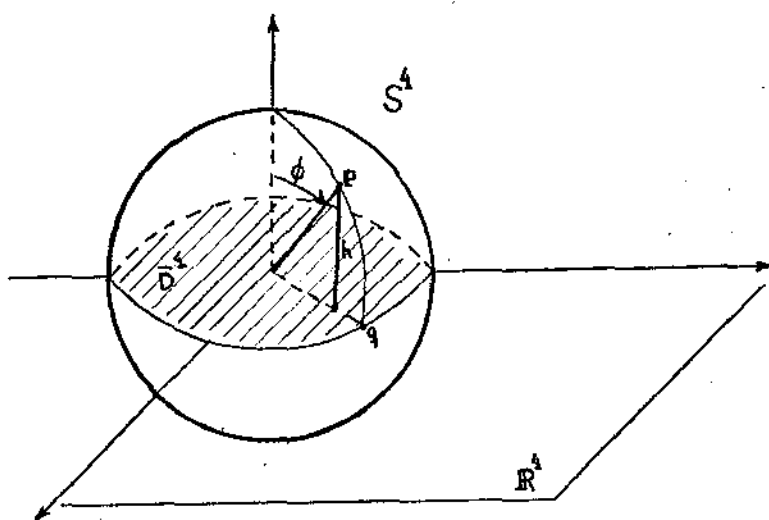


Figura 3

Nestas condições, uma secção local $s : U \subset S^4 \xrightarrow{ab} S^7$ é obtida, se fixando $P = (\xi, h) \in U$ ($\xi \in \bar{D}^4$, $h \neq \pm 1$), determinamos um elemento $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in S^7$ tal que

$$\hat{\pi} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = (\xi, h) = (2a\bar{b}, a\bar{a} - b\bar{b}).$$

Após alguns cálculos elementares chegamos a uma expressão para uma secção local do tipo acima, que é

$$s(\xi, h) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(1-h)[2(1+h)]^{1/2}} \xi^2 \\ \frac{1}{[2(1+h)]^{1/2}} \xi \end{bmatrix} \in S^7$$

Uma expressão genérica para tais secções é obtida fazendo variar $u \in S^3$ em:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{(1-h)[2(1+h)]^{1/2}} \xi^2 \cdot u \\ \frac{1}{[2(1+h)]^{1/2}} \xi \cdot u \end{bmatrix} \quad h \neq +1, -1$$

OBSERVAÇÃO (1.5.4). (a) A ação à esquerda, de $S_p(2)$ sobre S^7 , comuta com a ação à direita, de S^3 sobre S^7 e então define uma ação à esquerda de $S_p(2)$ sobre S^4 , que é transitiva, desde que a ação de $S_p(2)$ sobre S^7 é transitiva.

Para $Q \in S_p(2)$, $\xi \in S^7$ e $q \in S^3$,

$$(Q\xi)q = Q(\xi q) .$$

Fixando sobre S^4 a métrica da submersão através de $\hat{\pi}, S_p(2)$ preserva as fibras de $\hat{\pi}$ e atuando por isometrias sobre S^7 , preserva os espaços horizontais.

Portanto $S_p(2)$ atua transitivamente e por isometrias sobre S^4 , com a métrica da submersão $\hat{\pi}$.

(b) Isto implica essencialmente que $S_p(2) \cong \text{Spin}(5)$.

OBSERVAÇÃO (1.5.5). Considerando a ação à direita, de S^3 como

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S_p(1) \end{bmatrix} \text{ sobre } S_p(2), \text{ para } q \in S^3 \text{ e } \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \in S_p(2):$$

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} a & cq \\ b & dq \end{bmatrix}.$$

Compondo com a ação à direita, de S^3 sobre S^7 , temos:

$$\left[\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} q' & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q' & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aq' & cq \\ bq' & dq \end{bmatrix}$$

Esta é a ação à direita de $S^3 \times S^3$ como $\begin{bmatrix} S_p(1) & 0 \\ 0 & S_p(1) \end{bmatrix}$ sobre $S_p(2)$.

Sabendo que o espaço tangente $T_I S_p(2)$ (que é a álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de $S_p(2)$) é o conjunto das matrizes quaterniônicas A , 2×2 , satisfazendo: $A + A^* = 0$, então

$$T_I S_p(2) = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ -\bar{y} & w \end{bmatrix} \text{ tal que } y \in \mathbb{H} \text{ e } x \text{ e } w \text{ são do tipo } \alpha i + \beta j + \gamma k \right\}$$

ou ainda:

$$g = \left[\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} j & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & j \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \right. \\ \left. \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & j \\ j & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & k \\ k & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ +1 & 0 \end{bmatrix} \right].$$

Considerando a ação à direita, de $S^3 \times S^3$ sobre $S_p(2)$, um conjunto de geradores da fibra (ou espaço vertical) e do espaço horizontal, na identidade, são respectivamente:

$$\text{Vert}_I = \left[\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} j & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & j \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \right] \equiv h$$

e

$$\text{Hor}_I = \left[e_1 = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}; e_2 = \begin{bmatrix} 0 & j \\ j & 0 \end{bmatrix}; e_3 = \begin{bmatrix} 0 & k \\ k & 0 \end{bmatrix}; e_4 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ +1 & 0 \end{bmatrix} \right] \equiv m$$

OBSERVAÇÃO (1.5.6). Vamos considerar agora S^4 como sendo o espaço homogêneo riemanniano:

$$S^4 = S_p(2) / S^3 \times S^3, \text{ com a métrica riemanniana invariante canônica.}$$

Da observação (1.5.4) sabemos que a ação de $S_p(2)$ sobre S^4 é transitiva.

Além disso, é fácil verificar que a álgebra de Lie g de $S_p(2)$ que se decompõe como

$$g = h \oplus m \quad , \quad \text{satisfaz:}$$

$$(a) \quad [h, h] \subset h \quad ; \quad (b) \quad [h, m] \subset m \quad \text{e} \quad (c) \quad [m, m] \subset h .$$

Nestas condições (ver Kobayashi-Nomizu [K,N] - vol. III pág. 193):

$$R(X,Y)Z = - [[X,Y], Z] \quad \text{para} \quad X, Y \text{ e } Z \in m ,$$

onde $m \equiv T_0(S^4)$, o espaço tangente a S^4 na origem.

Efetuando os cálculos, obtemos:

$$R_{\alpha\beta\beta\alpha} = \langle -[[e_\alpha, e_\beta], e_\beta], e_\alpha \rangle = 4\langle e_\alpha, e_\alpha \rangle = 8, \text{ pois}$$

$$(\text{se } \alpha, \beta = 1, 2, 3, 4 ; \alpha \neq \beta)$$

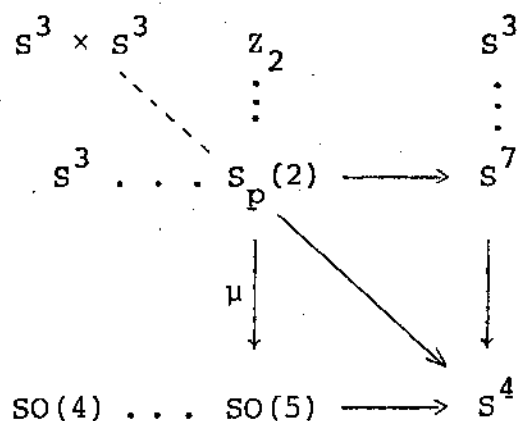
$$\|e_\alpha\|^2 = \langle e_\alpha, e_\alpha \rangle = 2$$

e:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0 \quad (\text{se } \alpha \neq \delta \text{ e } \beta \neq \gamma).$$

Concluimos então que o espaço homogêneo $S^4 = S_P(2)/S^3 \times S^3$ tem curvatura seccional constante igual a 2 e portanto $\bar{e}$, em particular, um espaço simétrico. Além disso, observamos que a métrica de S^4 neste contexto $\bar{e}$ homotética à métrica canônica de $S^4 \equiv SO(5)/SO(4) \subseteq \mathbb{R}^5$.

O diagrama a seguir nos dá uma visão mais abrangente deste fato:



A projeção μ é dada essencialmente pela ação da Observação (1.5.4) e a figura 3.

Vamos agora determinar uma base para o espaço horizontal $\text{Hor}_Q \subset T_Q S_p(2)$, onde $Q = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ é um ponto genérico de $S_p(2)$ e sua projeção sobre S^7 através da projeção π (ver diagrama (1.5.1)).

Chamemos de $E_\lambda(Q) = dL_Q(e_\lambda)$

$\{E_\lambda(Q)\}_{\lambda=1,2,3,4}$ é uma base ortogonal de

$$\text{Hor}_Q \subset T_Q S_p(2).$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad E_1(Q) &= dL_Q \cdot e_1 = dL_Q \cdot \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix} = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & it \\ it & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ci & ai \\ di & bi \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Analogamente obtemos:

$$(ii) \ E_2(Q) = dL_Q \cdot e_2 = \begin{bmatrix} cj & aj \\ dj & bj \end{bmatrix}$$

$$(iii) \ E_3(Q) = dL_Q \cdot e_3 = \begin{bmatrix} ck & ak \\ dk & bk \end{bmatrix}$$

$$(iv) \ E_4(Q) = dL_Q \cdot e_4 = \begin{bmatrix} c & -a \\ d & -b \end{bmatrix}.$$

O próximo Lema determina o colchete de Lie para os campos $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$.

LEMA (1.5.7).

$$1) \ [E_1, E_2]_Q = 2 \begin{bmatrix} ak & ck \\ bk & dk \end{bmatrix} \qquad 4) \ [E_4, E_1]_Q = 2 \begin{bmatrix} +ai & -ci \\ +bi & -di \end{bmatrix}$$

$$2) \ [E_1, E_3]_Q = -2 \begin{bmatrix} aj & cj \\ bj & dj \end{bmatrix} \qquad 5) \ [E_4, E_2]_Q = 2 \begin{bmatrix} +aj & -cj \\ +bj & -dj \end{bmatrix}$$

$$3) \ [E_2, E_3]_Q = 2 \begin{bmatrix} ai & ci \\ bi & di \end{bmatrix} \qquad 6) \ [E_4, E_3]_Q = 2 \begin{bmatrix} +ak & -ck \\ +bk & -dk \end{bmatrix}$$

PROVA. Basta usar o fato de que $[E_\alpha, E_\beta]_Q = dL_Q[e_\alpha, e_\beta]_I$. $\square$

OBSERVAÇÃO (1.5.8). As projeções dos campos $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ no TS^7 no ponto $\pi \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$, através da projeção π nos fornece:

$$d\pi E_1 = \begin{bmatrix} ci \\ di \end{bmatrix}; \quad d\pi E_2 = \begin{bmatrix} cj \\ dj \end{bmatrix}; \quad d\pi E_3 = \begin{bmatrix} ck \\ dk \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad d\pi E_4 = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}.$$

Usando a notação $X_\lambda = d\pi E_\lambda$, estabelecemos a seguir a forma de curvatura $\hat{\Omega}$ de S^7 .

LEMA (1.5.9).

- a) $\hat{\Omega}(X_4, X_1) = -\hat{\Omega}(X_2, X_3) = 2 \begin{bmatrix} ai \\ bi \end{bmatrix}$
- b) $\hat{\Omega}(X_4, X_2) = \hat{\Omega}(X_1, X_3) = 2 \begin{bmatrix} aj \\ bj \end{bmatrix}$
- c) $\hat{\Omega}(X_4, X_3) = -\hat{\Omega}(X_1, X_2) = 2 \begin{bmatrix} ak \\ bk \end{bmatrix}$

que são campos vetoriais verticais fundamentais e que denotaremos respectivamente por $2V_1$, $2V_2$ e $2V_3$.

Em particular, as relações (a), (b) e (c) implicam que a conexão $\hat{\nabla}$ em S^7 é auto-dual. $\square$

Fixemos índices satisfazendo às condições:

$$1 \leq i, j, \ell, m \leq 4$$

$$1 \leq \alpha \leq 3.$$

Vamos determinar, na proposição seguinte, a conexão e a derivada $\hat{\nabla}_{X_m}$ da 2-forma horizontal a valores reais $\langle \hat{\Omega}(\cdot, \cdot), V_\alpha \rangle_{S^3}$ em $T^{S^7} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$.

Denotando por: $\hat{H}_{ij;m}^\alpha = \langle (\hat{\nabla}_{X_m} \hat{\Omega})(X_i, X_j), V_\alpha \rangle_{S^7}$, temos:

PROPOSIÇÃO (1.5.10). $\hat{H}_{ij;m}^\alpha \equiv 0$ em S^7 , com a métrica projetada de $S_p(2)$.

PROVA. Se E e F são campos vetoriais tangentes a $S_p(2)$, uma equação da submersão riemanniana:

$$S^3 \dots S_p(2) \xrightarrow{\pi} S^7 \quad \text{é:}$$

$$\bar{\nabla}_{E^H} F^H = \left[\hat{\nabla}_{d\pi E} d\pi F \right]^h + \frac{1}{2} [E^H, F^H]^V$$

onde $\bar{\nabla}$ e $\hat{\nabla}$ são as derivações em $S_p(2)$ e S^7 , respectivamente. Então

$$\begin{aligned} \left[\hat{\nabla}_{X_4} X_1 \right]^h &= \left[\hat{\nabla}_{d\pi E_4} d\pi E_1 \right]^h = \bar{\nabla}_{E_4} E_1 - \frac{1}{2} [E_4, E_1]^V = \\ &= \frac{1}{2} [E_4, E_1] - \frac{1}{2} [E_4, E_1]^V = \frac{1}{2} [E_4, E_1]^H. \end{aligned}$$

Cálculos anteriores nos fornecem:

$$\left[\hat{\nabla}_{X_4} X_1 \right]^h = \begin{bmatrix} +ai & 0 \\ +bi & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \hat{\nabla}_{X_4} X_1 = \begin{bmatrix} +ai \\ +bi \end{bmatrix} = +v_1.$$

Como $\hat{\nabla}_{X_4} X_1 - \hat{\nabla}_{X_1} X_4 = [X_4, X_1] = -2v_1 \Rightarrow \hat{\nabla}_{X_1} X_4 = v_1.$

Analogamente obtemos:

$$\hat{\nabla}_{X_3} X_2 = -\hat{\nabla}_{X_2} X_3 = -v_1 = +\hat{\nabla}_{X_1} X_4 = -\hat{\nabla}_{X_4} X_1$$

$$\hat{\nabla}_{X_4} X_2 = +v_2 = -\hat{\nabla}_{X_1} X_3$$

$$\hat{\nabla}_{X_4} X_3 = +v_3 = -\hat{\nabla}_{X_2} X_1.$$

Além disso, $\hat{\nabla}_{X_\ell} X_\ell = 0$. Então $\hat{\nabla}_{X_\ell} X_m = 0$ se $\ell = m$, ou então é vertical fundamental se $\ell \neq m$ (ver Lema (1.5.9)).

De qualquer modo, $\hat{\Omega}(\hat{\nabla}_{X_m} X_i, X_j) = 0$.

Por outro lado,

$$(\hat{\nabla}_{X_m} \hat{\Omega})(X_i, X_j) = \hat{\nabla}_{X_m} (\hat{\Omega}(X_i, X_j)) \text{ é horizontal pois}$$

$$\hat{\Omega}(X_i, X_j) \text{ é vertical fundamental.}$$

Finalmente obtemos:

$$\begin{aligned} \hat{H}_{ij;m}^\alpha &= \langle (\hat{\nabla}_{X_m} \hat{\Omega})(X_i, X_j), X_\alpha \rangle_{S^7} = \\ &= \langle \hat{\nabla}_{X_m} (\hat{\Omega}(X_i, X_j)) - \hat{\Omega}(\hat{\nabla}_{X_m} X_i, X_j) - \hat{\Omega}(X_i, \hat{\nabla}_{X_m} X_j), V_\alpha \rangle_{S^7} = \\ &= 0. \quad \square \end{aligned}$$

(1.5.11). Vejamos agora o que podemos dizer a respeito da curvatura seccional de S^7 , com a métrica projetada de $S_p(2)$, que dá a S^7 uma estrutura de espaço riemanniano homogêneo normal.

Numa 1^a etapa, usaremos a fórmula de O'Neill (ver Teorema (1.2.3)) para a submersão:

$$S^3 \dots S_p(2) \xrightarrow{\pi} S^7.$$

Se X e Y são vetores horizontais ortonormais de $S_p(2)$ em Q , com $X^* = d\pi X$ e $Y^* = d\pi Y$,

$$K_{\pi(Q)}^{S^7}(X^*, Y^*) = K_Q^{S_p(2)}(X, Y) + \frac{3}{4} \frac{\| [X, Y]^V \|^2}{\| X \wedge Y \|^2}$$

É evidente, pela fórmula acima, que a curvatura seccional de S^7 é ≥ 0 .

Nosso objetivo é mostrar que a curvatura seccional de S^7 é estritamente positiva e não constante.

Em $\pi(Q) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, o espaço tangente a S^7 é gerado por:

$$\left\{ \begin{bmatrix} ai \\ bi \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} aj \\ bj \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ak \\ bk \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ci \\ di \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} cj \\ dj \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} ck \\ dk \end{bmatrix} \right\}$$

Em particular, se tomamos $Q = I$, $\pi(Q) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e

$$T_{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} S^7 = \left[\begin{bmatrix} i \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} j \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} k \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ j \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ k \end{bmatrix} \right]$$

Façamos agora $x_1^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $y^* = \begin{bmatrix} 0 \\ i \end{bmatrix}$.

Então $x_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $y_1 = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$.

A fórmula de O'Neill nos fornece, neste caso:

$$K_{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}^{S^7}(x_1^*, y_1^*) = 11/4.$$

Por outro lado, se tomamos $x_2^* = \begin{bmatrix} i \\ 0 \end{bmatrix}$ e $y_2^* = \begin{bmatrix} 0 \\ j \end{bmatrix}$,
então $x_2 = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $y_2 = \begin{bmatrix} 0 & j \\ j & 0 \end{bmatrix}$. Neste caso,

$$K_{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}^{S^7}(x_2^*, y_2^*) = 1/2.$$

Isto é suficiente para concluirmos que S^7 , com a métrica projetada de $S_p(2)$, possui curvatura seccional não constante. Portanto esta métrica não é homotética à métrica usual de $S^7 \equiv SO(8)/SO(7) \subseteq \mathbb{R}^8$. (Comparar com a Observação (1.5.6)).

Quando consideramos $S^7 = S_p(2)/S^3$, a álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de $S_p(2)$ se decompõe como $\mathfrak{g} = \bar{\mathfrak{h}} \oplus \bar{\mathfrak{m}}$, onde

$$\bar{\mathfrak{h}} = \left[\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & j \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \right] \text{ é a álgebra de Lie de } S^3$$

e

$$\bar{m} = \left[\begin{array}{cc} \bar{i} & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right], \left[\begin{array}{cc} \bar{j} & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right], \left[\begin{array}{cc} \bar{k} & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right], \left[\begin{array}{cc} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{array} \right], \left[\begin{array}{cc} 0 & \bar{i} \\ \bar{i} & 0 \end{array} \right], \left[\begin{array}{cc} 0 & \bar{j} \\ \bar{j} & 0 \end{array} \right], \left[\begin{array}{cc} 0 & \bar{k} \\ \bar{k} & 0 \end{array} \right]$$

É fácil verificar que a decomposição acima não satisfaz pelo menos uma das três condições necessárias para que $(g, \bar{h}, \bar{\sigma})$ seja uma álgebra de Lie simétrica (isto é, $[\bar{h}, \bar{h}] \subset \bar{h}$; $[\bar{h}, \bar{m}] \subset \bar{m}$ e $[\bar{m}, \bar{m}] \subset \bar{h}$).

Basta observar, por exemplo que

$$\left[\begin{array}{cc} \bar{i} & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} 0 & \bar{i} \\ \bar{i} & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{array} \right] \in \bar{m} \Rightarrow [\bar{m}, \bar{m}] \not\subset \bar{h}.$$

Isto garante que o espaço riemanniano homogêneo normal $S^7 = S_p(2)/S_3$ não é um espaço simétrico. Outro argumento que poderíamos usar para justificar o mesmo fato é o resultado de Cartan (ver [CT]): "Um espaço riemanniano simétrico compacto de posto um e dimensão ímpar tem curvatura constante".

Resta provar que a curvatura seccional de S^7 é estritamente positiva.

Para isto, vamos considerar a decomposição $g = \bar{h} \oplus \bar{m}$ citada anteriormente e a fórmula O'Neill, que reescrevemos como:

$$K_{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}^{S^7} (X^*, Y^*) = \frac{1}{4} \left\| [X, Y]_{\bar{m}} \right\|^2 + \frac{3}{4} \left\| [X, Y]_{\bar{h}} \right\|^2.$$

É evidente que se $[X,Y]_g \neq 0$, $\forall s$ $X,Y \in \bar{m}$ linearmente independentes, então a curvatura seccional S^7 é estritamente positiva. (Observamos que, de maneira geral, esta condição sobre a decomposição da álgebra de Lie $\hat{G}$, é necessária e suficiente para garantir que um espaço riemanniano homogêneo normal G/H tenha curvatura > 0 - ver [NM-1] e [B]).

No nosso caso, um elemento genérico de $\bar{m}$ é do tipo:

$$\begin{bmatrix} x & y \\ -\bar{y} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{onde } x = \alpha i + \beta j + \gamma k \quad \text{com } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \\ \text{e } y \in \mathbb{H}.$$

Então, dados dois elementos $X, Y \in \bar{m}$,

$$X = \begin{bmatrix} a & b \\ -\bar{b} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad Y = \begin{bmatrix} c & d \\ -\bar{d} & 0 \end{bmatrix},$$

a condição $[X,Y] = XY - YX = 0$ nos fornece as equações:

$$\begin{cases} (1) & ac - ca = b\bar{d} - d\bar{b} \\ (2) & ad - cb = 0 \\ (3) & \bar{d}a - \bar{b}c = 0 \\ (4) & \bar{d}b = \bar{b}d. \end{cases}$$

A equação (4) $\Rightarrow \bar{d}b = \overline{(\bar{d}b)} \Rightarrow \bar{d}b$ é real. Então $b = \alpha \frac{d}{\|d\|^2}$

(onde $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\alpha, b, d \neq 0$, para que X e Y sejam L.I.).

Além disso, a equação (1) $\Rightarrow ac = ca \Rightarrow a$ e c comutam e a

equação (2) $\Rightarrow ad - \alpha \frac{cd}{\|d\|^2} = 0 \xrightarrow{d \neq 0} a = \frac{\alpha}{\|d\|^2} c$. Teremos então:

$$X = \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{\|d\|^2} c & \frac{\alpha}{\|d\|^2} d \\ -\frac{\alpha}{\|d\|^2} \bar{d} & 0 \end{bmatrix} = \frac{\alpha}{\|d\|^2} \begin{bmatrix} c & d \\ -\bar{d} & 0 \end{bmatrix} = \frac{\alpha}{\|d\|^2} Y,$$

ou seja, X e Y são linearmente dependentes.

Então, se X e $Y \in \bar{m}$ são linearmente independentes, teremos necessariamente: $[X, Y] \neq 0$.

Concluimos então que a curvatura seccional de S^7 no contexto considerado é estritamente positiva.

OBSERVAÇÃO (1.5.12). O espaço riemanniano homogêneo normal de curvatura estritamente positiva $S_p(2)/S_p(1)$ de Berger (ver [B]), que ele prova não ser homeomorfo a um espaço riemanniano simétrico de posto um é obtido através de uma outra representação $S_p(1) \longrightarrow S_p(2)$. Aquele espaço M^7 tem $\pi_3(M^7) \cong \mathbb{Z}_{10}$.

CAPÍTULO II

CURVATURA ESCALAR DE FIBRADOS

§1. INTRODUÇÃO

Um problema básico em Geometria Riemanniana é o de descrever o conjunto de funções curvatura escalar associado com métricas riemannianas sobre uma dada variedade.

Para variedades compactas M , de dimensão dois, existe uma condição necessária sobre sua curvatura Gaussiana K , que é uma condição global dada pelo teorema de Gauss-Bonnet, em termos de sua característica de Euler, $\chi(M)$:

se $\chi(M) > 0$, então K deve ser positiva em algum ponto de M .

se $\chi(M) = 0$, então K muda de sinal ou $K \equiv 0$ em M .

se $\chi(M) < 0$, então K deve ser negativa em algum ponto de M .

Em [K, W-1], Kazdan e Warner mostraram que, neste caso, esta condição é também suficiente para uma dada função diferenciável K sobre M ser a curvatura de Gauss de alguma métrica.

Se M é compacta e $\dim M \geq 3$, então um resultado análogo requer a existência de métricas com curvatura escalar constante positiva sobre M :

TEOREMA (2.1.1). (Kazdan-Warner - [K, W-2]). Seja M^n ($n \geq 3$) uma variedade compacta

- a) Toda função $K \in C^\infty(M)$ que é negativa em algum ponto de M é uma curvatura escalar.
- b) Todo elemento de $C^\infty(M)$ é uma curvatura escalar, se e somente se M admite uma métrica com curvatura escalar constante positiva.

Em particular, se $M = S^n$, $n \geq 3$, toda função $K \in C^\infty(S^n)$ é curvatura escalar de alguma métrica sobre S^n .

Por outro lado, existem obstruções topológicas para métricas com curvatura escalar positiva. Um conhecido teorema de Lichnerowicz [L] afirma que uma variedade spin compacta com genus de Hirzebruch $\hat{A} \neq 0$ não admite métrica riemanniana de curvatura escalar positiva. (Exemplos de tais variedades aparecem na teoria de spin cobordismo - ver Milnor [M]). Usando um refinamento deste resultado e o teorema do índice de Atiyah-Singer, N. Hitchin [HT] provou o seguinte resultado:

TEOREMA (2.1.2). As esferas exóticas que não são bordos de variedades spin não admitem métrica de curvatura escalar $S \geq 0$ e $S \neq 0$.

Em [L, Y], Lawson e Yau provaram que

TEOREMA (2.1.3). Se uma variedade compacta M admite uma ação

diferenciável e efetiva de um grupo de Lie compacto, conexo e não-abeliano (isto é, se admite uma ação não-trivial de S^3) então M admite uma métrica riemanniana de curvatura escalar estritamente positiva.

Comparando este resultado com o de N. Hitchin, conclui-se que: se Σ^n é uma n -esfera exótica que não é bordo de uma variedade de spin, então os únicos possíveis grupos de transformação compacto e conexo de Σ^n são toros de dimensão $\leq [\frac{n+1}{2}]$.

Teoremas análogos de não-existência foram obtidos para variedades com grupos fundamentais "grandes". As referências são os artigos de Gromov e Lawson, [G, L-1] e [G, L-2], onde são estabelecidas novas obstruções para a existência de métricas com curvatura escalar positiva sobre variedades que não são simplesmente conexas. Shoen e Yau em [S, Y-1] e [S, Y-2] estudaram, em particular, superfícies minimais incompressíveis, variedades tridimensionais com curvatura escalar não-negativa e determinaram novas obstruções topológicas para a existência de métricas com curvatura escalar positiva em tais variedades. O estudo efetuado por eles abrange o caso não compacto e sua relação com a teoria da relatividade geral. Eles estabeleceram, em particular, que o toro de dimensão ≤ 7 não admite métrica de curvatura escalar positiva. Gromov e Lawson em [G, L-2] generalizaram este resultado provando que toda métrica riemanniana de curvatura escalar não negativa sobre o toro T^n é "flat". Neste mesmo artigo, dão um tratamento especial para o caso das variedades de dimensão 3: Módulo certas questões relativas a

variedades com grupo fundamental finito, eles obtiveram uma classificação para as variedades de dimensão 3 que admitem métrica de curvatura escalar positiva.

Finalmente, em [G, L-1] (Gromov e Lawson) encontramos uma classificação parcial das variedades compactas, simplesmente conexas de curvatura escalar positiva. Um dos resultados básicos é o seguinte:

TEOREMA (2.1.4). Seja M uma variedade compacta que admite uma métrica riemanniana de curvatura escalar positiva. Então toda variedade que pode ser obtida de M através de uma cirurgia em codimensão ≥ 3 , também admite uma métrica com curvatura escalar positiva.

Existem também obstruções topológicas para curvatura escalar zero:

TEOREMA (2.1.5). (ver Kazdan-Warner [K, W-3]). Seja M uma variedade spin com $\hat{A} \neq 0$ (genus de Hirzebruch) e primeiro número de Betti, $\beta_1(M) \neq 0$. Então M não admite uma métrica de curvatura escalar zero.

O caso não compacto é tratado por Kazdan-Warner em [K, W-4]. Na verdade, para uma grande classe de variedades abertas, toda função diferenciável é uma curvatura escalar. Mais precisamente:

TEOREMA (2.1.6). Seja M uma variedade não-compacta de dimensão ≥ 2 , difeomorfa a uma subvariedade aberta de alguma variedade compacta

$\tilde{M}$. Então toda função $S \in C^\infty(M)$ é a curvatura Gaussiana (resp. escalar, se $\dim M \geq 3$) de alguma métrica riemanniana sobre M .

Como um caso particular, se $M = \mathbb{R}^n$, toda função $S \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ é curvatura escalar de alguma métrica sobre $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$).

Na verdade, tudo leva a crer que o teorema anterior deve ser verificado para toda variedade não-compacta de dimensão ≥ 3 . Foram algumas técnicas na sua demonstração que exigiram a hipótese de que M "morasse" em uma variedade compacta.

No estudo de curvaturas escalares prescritas, uma ferramenta bastante eficiente que usaremos no decorrer deste capítulo é o seguinte teorema:

TEOREMA (2.1.7). (ver Kazdan-Warner [K, W-2]). Seja (M, g) uma variedade diferenciável compacta, com curvatura Gaussiana (resp. escalar, se $\dim M \geq 3$) S , e seja $f \in C^\infty(M)$. Se existe uma constante $c > 0$ tal que:

$$\min cf < S(x) < \max cf.$$

para todo $x \in M$, então existe uma métrica g_1 em M com curvatura Gaussiana (resp. escalar) f .

Este teorema, juntamente com as técnicas da submersão riemanniana foram utilizadas por Rigas em [R-1], para mostrar que toda

função $C^\infty f : G_2(M) \rightarrow \mathbb{R}$, M^n uma variedade riemanniana conexa, compacta, de dimensão ≥ 3 é a função curvatura escalar de alguma métrica riemanniana completa sobre $G_2(M)$, o fibrado grassmanniano dos 2-planos sobre M , exceto talvez quando $f = \text{constante} \geq 0$. Um resultado análogo vale para $O(M)$, o fibrado dos frames ortonormais de M .

Usaremos neste capítulo, as mesmas técnicas, para provar um resultado análogo, em casos mais gerais de espaços totais de fibrados principais $G \dots P \rightarrow M$ e de fibrados associados (E, M, F, G, π) compactos. Sob determinadas condições, provaremos que toda função real definida em P (ou em E), é a curvatura escalar de alguma métrica riemanniana sobre P (ou E), exceto talvez quando $f = \text{constante} \geq 0$. Comparando este resultado com o já citado Teorema de Hitchin concluimos, por exemplo, que as esferas exóticas que não são bordos de variedades spin, não podem ser espaços totais de certos tipos de fibrados bastante gerais.

Acrescentamos ainda, um último parágrafo (§4) onde tecemos algumas considerações a respeito da teoria de curvaturas de Ricci prescritas; e um Apêndice onde são efetuados alguns cálculos com o objetivo de obter dados a respeito da curvatura seccional do espaço total de um fibrado.

§2. CURVATURA ESCALAR EM FIBRADOS PRINCIPAIS COMPACTOS.

Consideremos um fibrado principal

$$G \dots P \xrightarrow{\pi} M$$

onde M é uma variedade riemanniana compacta de dimensão m e G um grupo de Lie compacto, de dimensão n .

Fixemos uma métrica $\langle , \rangle_M$ em M , uma métrica bi-invariante $\langle , \rangle_G$ em G e uma conexão ω em P .

Para cada $t > 0$ e $X, Y \in T_p P$, definimos uma métrica riemanniana g_t em P por:

$$g_t \langle X, Y \rangle = \langle X, Y \rangle_t = \langle \pi_*(X), \pi_*(Y) \rangle_M + t^2 \langle \omega(X), \omega(Y) \rangle_G.$$

Esta é uma f -métrica sobre P , com

$$f(x) = t^2 = c \frac{t}{e}, \quad \forall x \in M.$$

Sabemos (ver §4 - Cap. I) que G atua por isometrias em cada (P, g_t) , que π é uma submersão riemanniana relativamente a cada (P, g_t) em $(M, \langle , \rangle_M)$ e que as fibras em P são totalmente geodéticas.

Seja U um aberto em M e $\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_m$ uma base ortonormal diferenciável em U .

Com a finalidade de simplificar os cálculos, é conveniente introduzir um conjunto de bases adaptadas em $\pi^{-1}(U)$, consistindo de todas as bases g_t -ortonormais da forma:

$$\{X_1, \dots, X_m, t^{-1}X_{m+1}^*, \dots, t^{-1}X_{m+n}^*\}$$

onde para cada ponto $p \in \pi^{-1}(U)$, os vetores $X_1, \dots, X_m$ formam uma base ortonormal de vetores ω -horizontais (para cada i , $1 \leq i \leq m$, X_i é o levantamento horizontal de $\bar{X}_i$) e os vetores $X_{m+1}^*, \dots, X_{m+n}^*$ são campos vetoriais verticais fundamentais em P , induzidos por uma base de campos vetoriais, na álgebra de Lie g , $\{X_{m+1}, \dots, X_{m+n}\}$ ortonormais relativamente à métrica $\langle, \rangle_G$.

Consideremos índices satisfazendo às condições:

$$1 \leq i, j, k, \ell \leq m$$

$$m+1 \leq a, b, c, d, f \leq m+n$$

$$1 \leq \lambda, \mu, \eta, \xi \leq m+n.$$

Colocamos $[X_a, X_b] = \sum_c C_{ab}^c X_c$, relação que define as constantes da álgebra de Lie g e definimos funções H_{ij}^a em $\pi^{-1}(U)$ por:

$$H_{ij}^a(p) = \frac{1}{2} \langle \omega([X_i, X_j]), X_a \rangle_G(p), \quad p \in \pi^{-1}(U)$$

Note que $\Omega(X_i, X_j) = -\sum_a H_{ij}^a X_a$

$$H_{ij}^a + H_{ji}^a = 0$$

e H_{ij}^a não depende de t .

Além disso, $H_{ij}^a(p) = H_{ij}^a(p.u)$ para todo $u \in G$, pois a métrica g_t é invariante pela ação de G . Então, ao invés de $H_{ij}^a(p)$ podemos escrever $H_{ij}^a(x)$, onde $x = \pi(p)$.

Lembramos que $H_{ij;m}^a$ é a derivada de V_{X_m} da 2-forma horizontal a valores reais $\langle \Omega(\cdot, \cdot), X_a \rangle_G$ em (X_i, X_j) .

Denotemos por $R_{\lambda\mu\eta\xi} = \langle R(X_\lambda, X_\mu)X_\eta, X_\xi \rangle_t$ as componentes do tensor de curvatura em P , relativamente à métrica g_t .

Usaremos o seguinte resultado obtido por Jensen em [J].

PROPOSIÇÃO (2.2.1).

$$i) R_{ijkl} = R_{ijkl}^M - t^2 \sum_a (2H_{ij}^a H_{km}^a + H_{ik}^a H_{jm}^a - H_{im}^a H_{jk}^a)$$

$$ii) R_{ijma} = -t H_{ij;m}^a$$

$$iii) R_{ijab} = t^2 \sum_k (H_{ik}^a H_{kj}^b - H_{ik}^b H_{kj}^a) - \sum_c H_{ij}^c C_{ab}^c$$

$$\text{iv)} \quad R_{iajb} = -t^2 \sum_k H_{ik}^b H_{kj}^a + \frac{1}{2} \sum_c H_{ij}^c C_{cb}^a$$

$$\text{v)} \quad R_{abic} = 0$$

$$\text{vi)} \quad R_{abcd} = \frac{1}{4} t^{-2} \sum_f C_{bf}^a C_{cd}^f .$$

Todas as componentes do tensor de curvatura podem ser obtidas destas usando as identidades:

$$R_{\lambda\mu\eta\xi} = -R_{\mu\lambda\eta\xi} = -R_{\lambda\mu\xi\eta} = R_{\eta\xi\lambda\mu} \quad e$$

$$R_{\lambda\mu\eta\xi} + R_{\mu\eta\lambda\xi} + R_{\eta\lambda\mu\xi} = 0 .$$

A seguinte proposição nos dá a expressão da curvatura escalar de (P, g_t) .

PROPOSIÇÃO (2.2.2). Se $S_{g_t}(p)$ é a curvatura escalar num ponto $p \in P$, relativamente à métrica g_t ; $S_M(x)$ é a curvatura escalar de M em $x = \pi(p)$ e $S_{G_p}(p)$ é a curvatura escalar da fibra G_p em p , então:

$$S_{g_t}(p) = S_M(x) + t^2 H(x) + t^{-2} S_{G_p}(p)$$

$$\text{onde } H(x) = 2 \sum_a \sum_{i < j} (H_{ij}^a(x))^2 \geq 0 .$$

PROVA. Fixemos uma base adaptada diferenciável

$\{X_1, \dots, X_m, t^{-1}X_{m+1}^*, \dots, t^{-1}X_{m+n}^*\}$ em cada ponto $p \in \pi^{-1}(U)$.

Temos:

$$S_{g_t}(p) = \sum_{\lambda, \mu=1}^{m+n} K_{\lambda\mu}(p)$$

onde $K_{\lambda\mu} = \langle R(X_\lambda, X_\mu)X_\lambda, X_\mu \rangle_t$ é a curvatura seccional do subespaço de $T_p P$ gerado pelos vetores $\{X_\lambda, X_\mu\}$.

Reescrevendo, vem:

$$S_{g_t}(p) = \sum_{i < j} K_{ij} + \sum_{i, a} K_{ia} + \sum_{a < b} K_{ab}.$$

Usando a proposição (2.2.1), obtemos:

$$\begin{aligned} S_{g_t}(p) &= \sum_{i < j} K_{ij}^M + 3t^2 \sum_{i < j} \left(\sum_a (H_{ij}^a)^2(p) \right) + \\ &+ t^2 \sum_{i, a} \left(\sum_k (H_{ik}^a)^2(p) \right) + t^{-2} \sum_{a < b} \left(\frac{1}{4} \sum_f C_{bf}^a C_{ba}^f \right) \\ &= \sum_{i < j} K_{ij}^M + 2t^2 \sum_a \left(\sum_{i < j} (H_{ij}^a)^2(p) \right) + t^{-2} \sum_{a < b} K^G(X_a, X_b). \end{aligned}$$

Conclusão:

$$S_{g_t}(p) = S_M(x) + t^2 H(p) + t^{-2} S_{G_P}(p) \quad ; \quad x = \pi(p). \quad \square$$

TEOREMA (2.2.3). Considere um fibrado principal $G \dots P \rightarrow M$, onde G é um grupo de Lie compacto e semi-simples de dimensão ≥ 2 , e M é uma variedade riemanniana compacta, também de dimensão ≥ 2 . Então toda função C^∞ $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função curvatura escalar para alguma métrica riemanniana completa sobre P , exceto talvez quando $f = \text{constante} \geq 0$.

PROVA. Denotemos por $S_{g_t}^M$ e $S_{g_t}^m$ os valores máximo e mínimo da curvatura escalar na métrica g_t .

Usando o resultado da proposição (2.2.2), vemos que $\frac{S_{g_t}^m}{S_{g_t}^M} \rightarrow 1$ quando $t \rightarrow 0$, desde que $S_M(x)$ é limitada, $H(p)$ também é limitada independente do valor de t e $S_{G_P}(p) > 0$.

Então, fixado qualquer λ em $(0,1)$, $\exists$ um número positivo t satisfazendo

$$\lambda < \frac{S_{g_t}^m}{S_{g_t}^M} < 1.$$

Nestas condições, podemos usar o Teorema (2.1.7) de Kazdan-Warner para concluir a demonstração. O teorema (2.3.9), que é um caso mais geral deste teorema, será demonstrado no próximo parágrafo, de maneira análoga, mas com maiores detalhes. $\square$

Podemos extrair como consequência deste teorema um resultado já conhecido:

COROLÁRIO (2.2.4). O toro T^n não admite ação livre, à direita, através de um grupo de Lie compacto e semi-simples.

PROVA. Neste contexto, o resultado acima é consequência direta do seguinte fato, já citado na introdução deste capítulo: "Toda métrica riemanniana de curvatura escalar não-negativa sobre o toro T^n é "flat". $\square$

OBSERVAÇÃO (2.2.5). No teorema (2.2.3), $\dim P \geq 4$. O caso $\dim P = 3$ pode ser obtido somente quando $\dim G = 1$ (portanto $G = S^1$) e $\dim M = 2$. Neste caso, devemos impor $K_M > 0$. Então, pelo teorema de Gauss-Bonnet e a classificação das variedades compactas de dimensão 2, $M = S^2$ ou $M = \mathbb{R}P^2$. Mas os S^1 -fibrados sobre S^2 tem como espaços totais os espaços $S^3/\mathbb{Z}_n$, onde existe métrica de curvatura constante igual a 1. Além disso, o único S^1 -fibrado sobre $\mathbb{R}P^2$, não trivial, é o fibrado dos frames ortonormais de $\mathbb{R}P^2$ (neste caso, ver Rigas R-1). Fica claro, então, que o teorema não é significativo em dimensão 3.

§3. CURVATURA ESCALAR EM FIBRADOS ASSOCIADOS COMPACTOS

Considere um fibrado principal $G \dots P \rightarrow M$ nas condições do parágrafo 2.

Seja F uma variedade riemanniana compacta, de dimensão r . Vamos supor que o grupo de Lie G atua à esquerda sobre F .

Sabemos então que G atua à direita sobre $P \times F$ e obtemos o fibrado

$$(E, M, F, G, \hat{\pi}) \quad \text{onde} \quad E = \frac{P \times F}{G}$$

associado ao fibrado principal $G \dots P \rightarrow M$ (ver diagrama (2.3.1)).

Vamos fixar em $P \times F$ uma família de (f, h) -métricas com $f = h = t^2 = c^{te}$ (ver §4 - Cap. I). Mais precisamente, vamos considerar uma família de métricas $\tilde{g}_t \equiv \langle, \rangle_t$, que é a métrica produto em $P \times F$, dada por:

$$g_t \equiv \langle, \rangle_t = \langle, \rangle_t \times \langle, \rangle_{F,t}, \quad (t > 0)$$

onde $\langle, \rangle_t$ é a g_t -métrica no fibrado principal $G \dots P \rightarrow M$ e

$$\langle, \rangle_{F,t} = t^2 \langle, \rangle_F, \quad \text{para uma métrica } \langle, \rangle_F \text{ fixada em } F.$$

De maneira explícita, se $Y, Z \in T_{(p,y)}(P \times F)$ e $\pi_1 : P \times F \rightarrow P$ e $\pi_2 : P \times F \rightarrow F$ são projeções no primeiro e no segundo fatores,

respectivamente, então:

$$\begin{aligned}
 \langle Y, Z \rangle_t &= \langle \pi_{1*} Y, \pi_{1*} Z \rangle_t \times \langle \pi_{2*} Y, \pi_{2*} Z \rangle_{F,t} = \\
 &= \langle (\pi \circ \pi_1)_* Y, (\pi \circ \pi_1)_* Z \rangle_M + t^2 \langle \omega(\pi_{1*} Y), \omega(\pi_{1*} Z) \rangle_G + \\
 &\quad + t^2 \langle \pi_{2*} Y, \pi_{2*} Z \rangle_F.
 \end{aligned}$$

As métricas $\tilde{g}_t$ são G-invariantes e portanto induzem, por submersão riemanniana, uma família de métricas $\hat{g}_t \equiv \langle, \rangle_{E,t}$ em $E = \frac{P \times F}{G}$ (métricas quociente) tal que:

$\tilde{\pi} : P \times F \rightarrow \frac{P \times F}{G}$ é uma submersão riemanniana para cada t .

De (1.4.3), sabemos que, relativamente ao fibrado associado $F \dots E \xrightarrow{\hat{\pi}} M$, cada métrica $\langle, \rangle_{E,t}$ é completa e as fibras em E são totalmente geodésicas e mutuamente isométricas.

Nestas condições, o seguinte diagrama, onde todas as projeções são submersões riemannianas, é comutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 & G & G \\
 & \vdots & \vdots \\
 & \vdots & \vdots \\
 (2.3.1) & F \dots P \times F, \tilde{g}_t & \xrightarrow{\pi_1} P, g_t, \omega \\
 & \downarrow \tilde{\pi} & \searrow \pi \\
 & F \dots E = \frac{P \times F}{G}, \hat{g}_t & \xrightarrow{\hat{\pi}} M
 \end{array}$$

(2.3.2). Sejam U um aberto em M , $(p, y) \in \pi^{-1}(U) \times F$, e $\tilde{\pi}(p, y) \in E$ onde $x = \pi(p) \in M$.

Estamos interessados no cálculo de

$S_{\langle, \rangle_{E, t}}(\tilde{\pi}(p, y))$: a curvatura escalar em $\tilde{\pi}(p, y)$ relativamente à métrica $\hat{g}_t$.

Uma base $\langle, \rangle_{E, t}$ -ortonormal em $\tilde{\pi}(p, y)$ é obtida por projeção de uma base $\langle, \rangle_t$ -ortonormal de $P \times F$ em (p, y) , $\tilde{\pi}$ -horizontal (isto é, normal a $\tilde{\pi}$ -fibra relativamente a $\tilde{g}_t$).

Vamos à construção de uma tal base.

Para $(p, y) \in P \times F$, chamaremos de $\tilde{V}_{p, y}$ o subespaço vertical em (p, y) e $\tilde{H}_{p, y}$ o subespaço horizontal em (p, y) , relativamente à métrica $\tilde{g}_t$ e à projeção $\tilde{\pi}$.

Para uma base ortonormal fixa $\{e_1, \dots, e_n\}$ em g , sejam

$\bar{e}_1(p), \dots, \bar{e}_n(p)$ e $\tilde{e}_1(y), \dots, \tilde{e}_n(y)$, campos vetoriais fundamentais associados, sobre P e F , respectivamente. Como a ação de G sobre F não é necessariamente livre, os campos vetoriais $\{\tilde{e}_i(y)\}_{i=1, \dots, n}$ podem ser linearmente dependentes em vários pontos de F . Temos:

$$\bar{e}_i(p) = \frac{d}{dt} (p \cdot \exp t e_i)_{t=0} \quad \text{e} \quad \tilde{e}_i(y) = \frac{d}{dt} ((\exp t e_i) y)_{t=0}.$$

Considere agora o campo vetorial fundamental em $P \times F$:

$$\begin{aligned} (e_i^*)_{(p,y)} &= \frac{d}{dt} ((p,y) \cdot \exp t e_i)_{t=0} = \frac{d}{dt} (p \exp t e_i, (\exp t e_i)^{-1} y)_{t=0} = \\ &= (\bar{e}_i(p), -\tilde{e}_i(y)) \equiv \bar{e}_i(p) - \tilde{e}_i(y) \end{aligned}$$

Podemos então afirmar que $\{\bar{e}_i(p) - \tilde{e}_i(y)\}_{i=1, \dots, n}$ é uma base para $\tilde{V}_{p,y}$.

Além disso, como $T_{(p,y)}(P \times F) = H_p \oplus V_p \oplus F_y$ e $\tilde{V}_{p,y} \subset V_p \oplus F_y$ é um subespaço linear, chamado $Q_{p,y} = (V_{p,y})^1$ em $V_p \oplus F_y$, temos:

$$\tilde{H}_{p,y} = Q_{p,y} \oplus H_p.$$

É óbvio que $\tilde{V}_{p,y}$ e $\tilde{H}_{p,y}$ não dependem de t .

Para $y \in F$, existe uma base ortonormal relativamente a métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle_F$ $\{f_1, \dots, f_s, k_1, \dots, k_{r-s}\}$ de $T_y F$ e constantes $\lambda_\ell(y) > 0$, satisfazendo:

$$\begin{cases} \tilde{e}_\ell(y) = \lambda_\ell(y) f_\ell & , \quad \ell = 1, \dots, s \\ = 0 & , \quad \ell = s+1, \dots, n \end{cases}$$

Com esta escolha, os vetores

$$\{\bar{e}_1(p) - \lambda_1(y) f_1, \dots, \bar{e}_s(p) - \lambda_s(y) f_s, \bar{e}_{s+1}(p), \dots, \bar{e}_n(p)\}$$

formam uma base ortogonal para $\tilde{V}_{p,y}$, pois geram o espaço vertical e são mutuamente ortogonais.

(2.3.3). Finalmente, $\{v_\eta\}_{\eta=1, \dots, n}$, onde

$$\begin{cases} v_\eta = [t(1+\lambda_\eta^2(y))^{1/2}]^{-1} (\bar{e}_\eta(p) - \lambda_\eta(p) f_\eta) & ; \quad 1 \leq \eta \leq s \\ e \\ v_\eta = t^{-1} \bar{e}_\eta(p) & ; \quad s+1 \leq \eta \leq n \end{cases}$$

é uma base ortonormal para $\tilde{V}_{p,y}$.

(2.3.4). Vejamos agora uma base ortonormal para $\tilde{H}_{p,y}$.

Se $h_1, \dots, h_m$ é uma base ortonormal para $H_p \subset T_p P$, então

$$\{h_1, \dots, h_m, \hat{k}_1, \dots, \hat{k}_{r-s}, \omega_1, \dots, \omega_s\}$$

é uma base ortonormal para $\tilde{H}_{p,y}$ relativamente à métrica $\tilde{g}_t$, onde

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{k}_j = t^{-1} k_j \quad ; \quad 1 \leq j \leq r-s \\ e \\ \omega_\ell = [t(1+\lambda_\ell^2(y)^{1/2})]^{-1} (\lambda_\ell(y) \bar{e}_\ell(y) + f_\ell) \\ \quad \quad \quad 1 \leq \ell \leq s \end{array} \right.$$

pois $m+r$ vetores ortonormais, $\bar{e}$ é perpendicular a cada elemento da base vertical.

Considere índices satisfazendo:

$$1 \leq i, j \leq m$$

$$1 \leq \alpha, \beta \leq m+r$$

$$1 \leq \lambda, \mu \leq r-s$$

$$1 \leq a, b \leq s$$

$$1 \leq \eta \leq n.$$

Seja $\hat{K}_{\alpha, \beta} = K_{\hat{g}_t}(\tilde{\pi}_*(X_\alpha), \tilde{\pi}_*(X_\beta))$ onde $K_{\hat{g}_t}$ é a curvatura seccional relativamente à métrica $\hat{g}_t = \langle, \rangle_{E, t}$ e X_α e X_β são um dos h_i 's ou $\hat{k}_\lambda$'s ou ω_a 's.

Usando a fórmula de O'Neill para a curvatura em uma submersão riemanniana (ver (1.2.3)), temos:

$$(2.3.5) \quad \hat{K}_{\alpha, \beta} = K_{\tilde{g}_t}(X_\alpha, X_\beta) + \frac{3}{4} \left\| [X_\alpha, X_\beta]^V \right\|_{\tilde{g}_t}^2$$

onde V denota a projeção $\tilde{g}_t$ -ortogonal na $\tilde{\pi}$ -fibra em cada $T_{(p, y)}(P \times F)$.

Por outro lado, a curvatura escalar $S_{\langle, \rangle_{E,t}}(\tilde{\pi}(p,y))$ é calculada como:

$$\begin{aligned}
 (2.3.6) \quad S_{\langle, \rangle_{E,t}}(\tilde{\pi}(p,y)) &= \sum_{\alpha, \beta} \hat{K}_{\alpha, \beta} = \\
 &= \sum_{i < j} \hat{K}_{ij} + \sum_{\lambda < \mu} \hat{K}_{\lambda \mu} + \sum_{a < b} \hat{K}_{ab} + \sum_{i, \lambda} \hat{K}_{i\lambda} + \\
 &\quad + \sum_{i, a} \hat{K}_{ia} + \sum_{\lambda, a} \hat{K}_{\lambda a}.
 \end{aligned}$$

Na proposição seguinte, obtemos as curvaturas seccionais $\hat{K}_{\alpha\beta}$ na métrica $\hat{g}_t$ em termos das curvaturas seccionais K_M de M , K_F de F , K_G de G e da conexão ω .

PROPOSIÇÃO (2.3.7).

$$(i) \quad \hat{K}_{ij} = K_M(\pi_* h_i, \pi_* h_j) - 3t^2 \sum_{\eta=1}^s \frac{\lambda_\eta^2}{1+\lambda_\eta^2} (H_{ij}^\eta)^2$$

$$(ii) \quad \hat{K}_{i\lambda} = 0$$

$$(iii) \quad \hat{K}_{\lambda\mu} = t^{-2} K_F(k_\lambda, k_\mu) + \frac{3}{4} t^{-2} \sum_{\eta=1}^s \frac{\lambda_\eta^2}{1+\lambda_\eta^2} (M_{\lambda\mu}^\eta)^2$$

$$(iv) \quad \hat{K}_{ia} = t^2 \frac{\lambda_a^2}{1+\lambda_a^2} \sum_j (H_{ij}^a)^2$$

$$(v) \hat{K}_{\lambda a} = t^{-2} \frac{1}{1+\lambda_a^2} K_F(k_\lambda, f_a) + \frac{3}{4} t^{-2} \sum_{\eta=1}^s \frac{1}{1+\lambda_a^2} \frac{\lambda_\eta^2}{1+\lambda_\eta^2} (N_{\lambda a}^\eta)^2$$

$$(vi) \hat{K}_{ab} = t^{-2} \frac{\lambda_a^2}{1+\lambda_a^2} \frac{\lambda_b^2}{1+\lambda_b^2} K_G(e_a, e_b) + t^{-2} \frac{1}{1+\lambda_a^2} \frac{1}{1+\lambda_b^2} K_F(f_a, f_b) +$$

$$+ \frac{3}{4} t^{-2} \frac{1}{1+\lambda_a^2} \frac{1}{1+\lambda_b^2} \sum_{\eta=1}^s \frac{1}{1+\lambda_\eta^2} (\lambda_a \lambda_b C_{ab}^\eta - \lambda_\eta D_{ab}^\eta)^2 +$$

$$+ \frac{3}{4} t^{-2} \frac{\lambda_a^2}{1+\lambda_a^2} \frac{\lambda_b^2}{1+\lambda_b^2} \sum_{\eta=s+1}^m (C_{ab}^\eta)^2$$

onde:

$$H_{ij}^a = \frac{1}{2} \langle \omega[h_i, h_j], e_a \rangle_G \quad D_{ab}^\eta = \langle [f_a, f_b], f_\eta \rangle_F$$

$$C_{ab}^\eta = \langle [e_a, e_b], e_\eta \rangle_G \quad M_{\lambda\mu}^\eta = \langle [k_\lambda, k_\mu], f_\eta \rangle_F$$

$$e \quad N_{\lambda a}^\eta = \langle [k_\lambda, f_a], f_\eta \rangle_F$$

PROVA. (i) Cálculo de $\hat{K}_{ij}$:

Usando a expressão (2.3.5), obtemos

$$\hat{K}_{ij} = K_{\tilde{g}_t}(h_i, h_j) + \frac{3}{4} \left\| [h_i, h_j] V \right\|_{\tilde{g}_t}^2, \quad h_i, h_j \in H_p \subset T_p P.$$

Por outro lado, usando novamente o teorema de O'Neill para a submersão $\pi: P \rightarrow M$ (ver diagrama (2.3.1)), vem:

$$K_{\tilde{g}_t}(h_i, h_j) = K_{g_t}(h_i, h_j) = K_M(\pi_* h_i, \pi_* h_j) - \frac{3}{4} \left\| [h_i, h_j]^W \right\|_t^2$$

onde W denota a componente vertical relativamente à π -fibra.

Mas:

$$[h_i, h_j]^W = \sum_{n=1}^m g_t([h_i, h_j], \bar{e}_n^*) \bar{e}_n^*$$

onde $\{\bar{e}_n^*\}$ é uma base g_t -ortonormal de V_p ($\bar{e}_n^* = t^{-1} e_n$).

Então:

$$[h_i, h_j]^W = \sum_{n=1}^m \langle \omega([h_i, h_j]), e_n \rangle_G \bar{e}_n$$

Se $\| \cdot \|_t$ é a norma relativamente a g_t , vem:

$$(i-1) \quad \left\| [h_i, h_j]^W \right\|_t^2 = t^2 \sum_{n=1}^m \langle \omega([h_i, h_j], e_n)_G \rangle^2 = 4t^2 \sum_{n=1}^m (H_{ij}^n)^2$$

$$\text{pois } \|\bar{e}_n\|^2 = t^2.$$

Calculemos agora $[h_i, h_j]^V$, projeção $\tilde{g}_t$ -ortogonal em relação a $\tilde{\pi}$ -fibra. Temos:

$$\begin{aligned} [h_i, h_j]^V &= \sum_{n=1}^s \tilde{g}_t([h_i, h_j], t^{-1}(1+\lambda_n^2)^{-\frac{1}{2}} (\bar{e}_n - \lambda_n f_n)) t^{-1}(1+\lambda_n^2)^{-\frac{1}{2}} (\bar{e}_n - \lambda_n f_n) \\ &\quad + \sum_{n=s+1}^m \tilde{g}_t([h_i, h_j], t^{-1} \bar{e}_n) t^{-1} \bar{e}_n. \end{aligned}$$

Usando a notação: $A_\eta = (1+\lambda_\eta^2)^{-\frac{1}{2}}$, obtemos

$$(i-2) \quad \left\| [h_i, h_j]^V \right\|_{\tilde{g}_t}^2 = 4t^2 \sum_{\eta=1}^s A_\eta^4 (H_{ij}^\eta)^2 - 4t^2 \sum_{\eta=1}^s \lambda_\eta^2 A_\eta^4 (H_{ij}^\eta)^2 + \\ + 4t^2 \sum_{\eta=s+1}^m (H_{ij}^\eta)^2$$

Finalmente, usando as relações (i-1) e (i-2) na expressão:

$$\hat{K}_{ij} = K_M(\pi_* h_i, \pi_* h_j) - \frac{3}{4} \left\| [h_i, h_j]^W \right\|_t^2 + \frac{3}{4} \left\| [h_i, h_j]^V \right\|_{\tilde{g}_t}^2$$

obtemos (i).

(ii) Cálculo de $\hat{K}_{i\lambda}$:

Usando a expressão (2.3.5) que é fórmula de O'Neill para a submersão riemanniana $\tilde{\pi} : P \times F \rightarrow \frac{P \times F}{G}$, vem:

$$\hat{K}_{i\lambda} = K_{\langle \cdot, \cdot \rangle_{E,t}}(\tilde{\pi}_*(h_i), \tilde{\pi}_*(\hat{k}_\lambda)) = K_{\tilde{g}_t}(h_i, \hat{k}_\lambda) + \frac{3}{4} \left\| [h_i, \hat{k}_\lambda] \right\|_{\tilde{g}_t}^2.$$

Na métrica produto $\tilde{g}_t$ em $P \times F$, temos:

$$K_{\tilde{g}_t}(h_i, \hat{k}_\lambda) = 0 \quad \text{e} \quad [h_i, \hat{k}_\lambda] = 0.$$

Segue então que $\hat{K}_{i\lambda} = 0$.

(v) Cálculo de $\hat{K}_{\lambda a}$:

Novamente, usando a fórmula de O'Neill, vem:

$$\hat{K}_{\lambda a} = K_{\tilde{g}_t}(\hat{k}_{\lambda}, \omega_a) + \frac{3}{4} \left\| [\hat{k}_{\lambda}, \omega_a]^V \right\|^2$$

Mas,

$$\begin{aligned} [\hat{k}_{\lambda}, \omega_a]^V &= [\hat{k}_{\lambda}, t^{-1}_{\lambda} A_a \bar{e}_a + t^{-1}_{A_a} f_a]^V = \\ &= t^{-2}_{A_a} [k_{\lambda}, f_a]^V = \\ &= t^{-2}_{A_a} \sum_{\eta=1}^n \tilde{g}_t(t^{-2}_{A_a} [k_{\lambda}, f_a], v_{\eta}) v_{\eta} \end{aligned}$$

$$\text{onde } v_{\eta} = t^{-1}_{A_{\eta}} \bar{e}_{\eta} - t^{-1}_{\lambda_{\eta} A_{\eta}} f_{\eta}.$$

Alguns cálculos nos levam a:

$$\left\| [\hat{k}_{\lambda}, \omega_a]^V \right\|_{\tilde{g}_t}^2 = t^{-2} \sum_{\eta=1}^s \frac{1}{1+\lambda_a^2} \frac{\lambda_{\eta}^2}{1+\lambda_{\eta}^2} (N_{\lambda a}^{\eta})^2$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} K_{\tilde{g}_t}(\hat{k}_{\lambda}, \omega_a) &= t^{-4}_{A_a^2} \langle R(k_{\lambda}, f_a) k_{\lambda}, f_a \rangle_t = \\ &= t^{-4}_{A_a^2} t^2 \langle R(k_{\lambda}, f_a) k_{\lambda}, f_a \rangle_F = t^{-2}_{A_a^2} K_F(k_{\lambda}, f_a). \end{aligned}$$

Os cálculos de (iii), (iv) e (vi) serão omitidos porque embora exaustivos, são efetuados de maneira totalmente análoga aos anteriores. $\square$

Na proposição seguinte daremos uma expressão para a curvatura escalar em espaços totais de fibrados associados $(E, M, F, G, \hat{\pi})$. Este resultado é obtido através da soma (2.3.6) das curvaturas seccionais obtidas na proposição (2.3.7). Com o objetivo de obter uma expressão simplificada, usaremos a seguinte notação:

$$(a) \quad \Theta(x) \equiv 2 \sum_{i,j=1}^m \sum_{a=1}^s \frac{\lambda_a^2}{1+\lambda_a^2} (H_{ij}^a)^2 \geq 0 \quad \text{para todo}$$

$p \in \pi^{-1}(U)$, onde $x = \pi(p) \in M$.

$\Theta(x)$ será o coeficiente de t^2 na expressão da curvatura escalar $S_{(\lambda_{E,t}(\tilde{\pi}(p,y)))}$.

$$\begin{aligned} (b) \quad F(\lambda_a, \lambda_b, \lambda_\eta, M_{\lambda\mu}^\eta, N_{\lambda a}^\eta, C_{ab}^\eta, D_{ab}^\eta) \equiv \\ \equiv \sum_{\lambda < \mu} \sum_{\eta=1}^s \frac{\lambda_\eta^2}{1+\lambda_\eta^2} (M_{\lambda\mu}^\eta)^2 + \sum_{\lambda, a} \sum_{\eta=1}^s \frac{1}{1+\lambda_a^2} \frac{\lambda_\eta^2}{1+\lambda_\eta^2} (N_{\lambda a}^\eta)^2 + \\ + \sum_{a < b} \sum_{\eta=s+1}^n \frac{\lambda_a^2}{1+\lambda_a^2} \frac{\lambda_b^2}{1+\lambda_b^2} (C_{ab}^\eta)^2 + \\ + \sum_{a < b} \sum_{\eta=1}^s \frac{1}{1+\lambda_a^2} \frac{1}{1+\lambda_b^2} \frac{1}{1+\lambda_\eta^2} (\lambda_a \lambda_b C_{ab}^\eta - \lambda_\eta D_{ab}^\eta)^2. \end{aligned}$$

Observamos que esta expressão é não-negativa e limitada, independente do valor de t .

c) Finalmente, denotaremos por $\Lambda(u)$, $u \in E$, ($u \equiv \tilde{\pi}(p, y)$) o coeficiente de t^{-2} na expressão de $S_{\langle, \rangle_{E,t}}(\tilde{\pi}(p, y))$, onde:

$$\begin{aligned} \Lambda(u) \equiv & \sum_{a < b} \frac{\lambda_a^2}{1 + \lambda_a^2} \frac{\lambda_b^2}{1 + \lambda_b^2} K_G(e_a, e_b) + \\ & + \left[\sum_{\lambda < \mu} K_F(k_\lambda, k_\mu) + \sum_{\lambda, a} \frac{1}{1 + \lambda_a^2} K_F(k_\lambda, f_a) + \sum_{a < b} \frac{1}{1 + \lambda_a^2} \frac{1}{1 + \lambda_b^2} K_F(f_a, f_b) \right] + \\ & + 3/4 F(\lambda_a, \lambda_b, \lambda_\eta, M_{\lambda\mu}^\eta, N_{\lambda,a}^\eta, C_{ab}^\eta, D_{ab}^\eta) \end{aligned}$$

PROPOSIÇÃO (2.3.8). Se $S_{\langle, \rangle_{E,t}}(\tilde{\pi}(p, y))$ é a curvatura escalar num ponto $\tilde{\pi}(p, y) \in E$, relativamente à métrica $\langle, \rangle_{E,t}$; $S_M(x)$ é a curvatura escalar de M em $x = \pi(p)$; K_G é a curvatura seccional do grupo estrutural G e K_F , a curvatura seccional da fibra F , então:

$$S_{\langle, \rangle_{E,t}}(\tilde{\pi}(p, y)) = S_M(x) - t^2 \Theta(x) + t^{-2} \Lambda(u)$$

onde $x = \pi(p)$ e $u = \tilde{\pi}(p, y)$.

Com estes dados, podemos agora concluir:

TEOREMA (2.3.9). Seja $(E, M, F, G, \hat{\pi})$ um fibrado com M compacta e suponha que G é compacto de dimensão ≥ 2 . Se F é compacta de dimensão ≥ 2 e admite uma métrica G -invariante de curvatura

seccional $K_F > 0$, então existe um número real λ ($0 < \lambda < 1$) tal que toda função C^∞ $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisfaça $\frac{f_{\min}}{f_{\max}} < \lambda$, é uma função curvatura escalar de alguma métrica riemanniana em E , exceto talvez quando $f = \text{constante} \geq 0$.

PROVA. Na expressão de $H_{ij}^a = \frac{1}{2} \langle \omega([h_i, h_j]), e_a \rangle_G$, os vetores h_i e h_j são elementos de uma base ortonormal do subespaço horizontal tal $\tilde{H}_{p,y} \subset T_{p,y}(P \times F)$.

São portanto vetores de comprimento unitário relativamente à métrica $\tilde{g}_t$, para todo $t > 0$. Então o comprimento de $\omega([h_i, h_j])$ na álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G é limitado independente do valor de t . Isto significa que o coeficiente de t^2 na expressão de $S_{\langle, \rangle_{E,t}}(\tilde{\pi}(p,y))$ (ver proposição (2.3.8)) é limitado para todo valor de t , para qualquer $x = \pi(p) \in M$.

Além disso, o coeficiente de t^{-2} , $\Lambda(u)$, na mesma expressão é estritamente positivo e também limitado, independentemente de t , uma vez que é uma soma de parcelas envolvendo as curvaturas seccionais de G e F e $F(\lambda_a, \lambda_b, \lambda_\eta, M_{\lambda\mu}^\eta, N_{\lambda a}^\eta, D_{ab}^\eta, C_{ab}^\eta)$.

Então, denotando por $S_{\langle, \rangle_{E,t}}^m$ e $S_{\langle, \rangle_{E,t}}^M$ os valores máximo e mínimo da curvatura escalar na métrica $\langle, \rangle_{E,t}$ e desde que a curvatura escalar de M , $S_M(x)$ é limitada, temos que:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{S_{\langle, \rangle_{E,t}}^m(t)}{S_{\langle, \rangle_{E,t}}^M(t)} = \frac{\min \Lambda(u)}{\max \Lambda(u)} = \lambda < 1$$

Nestas condições, o resultado sai naturalmente do teorema (2.1.7) de Kazdan-Warner. $\square$

OBSERVAÇÃO (2.3.10). Podemos estabelecer hipóteses alternativas para o teorema (2.3.9) se considerarmos, por exemplo, que o grupo de Lie G é compacto e semi-simples. Neste caso, a curvatura escalar de G é estritamente positiva, e então a restrição sobre a curvatura seccional da fibra F poderá ser enfraquecida para não-negativa ($K_F \geq 0$). Nestas condições, de maneira análoga, chegamos às mesmas conclusões do teorema acima citado, para o fibrado $(E, M, F, G, \hat{\pi})$.

Podemos também supor, numa segunda alternativa, que F admite uma ação pelo grupo de Lie compacto G , com apenas um tipo de órbita. Neste caso, F é um fibrado sobre F/G com fibras difeomorfas à única órbita G/H . Em consequência deste fato, o coeficiente $\Lambda(u)$ de t^{-2} na expressão da curvatura escalar $S_{\langle, \rangle_{E,t}}(\tilde{\pi}(p, y))$ será constante e então:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{S_{\langle, \rangle_{E,t}}^m(t)}{S_{\langle, \rangle_{E,t}}^M(t)} = 1$$

Podemos então enunciar:

TEOREMA (2.3.11). Seja $(E, M, F, G, \hat{\pi})$ um fibrado com M compacta. Se F é compacta de dimensão ≥ 2 e admite uma métrica G -invariante de curvatura seccional $K_F > 0$ e uma ação pelo grupo de Lie compacto G , $\dim G \geq 2$, com apenas um tipo de órbita, então toda função C^∞ $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função curvatura escalar de alguma métrica riemanniana em E , exceto talvez quando $f = \text{constante} \geq 0$.

Se, em particular, F admite uma ação transitiva pelo grupo de Lie compacto G , então $F = G/H$ onde $H \subset G$ é um subgrupo fechado e a ação é por multiplicação à esquerda. Considerando em F a métrica homogênea normal, que é G -invariante, então cada função real $\lambda_\ell : F \longrightarrow \mathbb{R}$ ($\ell=1, \dots, s$) é identicamente igual a 1 ou 0. Então a expressão de curvatura escalar dada pela proposição (2.3.8) simplifica-se na fórmula:

$$S_{\langle \cdot, \cdot \rangle_{E,t}}(\hat{\pi}(p,y)) = S_M(x) - t^2 \sum_{i < j=1}^m \sum_{a=1}^r (H_{ij}^a)^2 + \\ + \frac{1}{4} t^{-2} \sum_{a < b} K_G(e_a, e_b) + \frac{1}{4} t^{-2} S_F(y) + \frac{3}{4} t^{-2} F(C_{ab}^\eta, D_{ab}^\eta)$$

onde:

$S_F(y)$ é a curvatura escalar de F em y e

$$F(C_{ab}^\eta, D_{ab}^\eta) = \frac{1}{4} \sum_{a < b} \sum_{\eta=r+1}^m (C_{ab}^\eta)^2 + \frac{1}{8} \sum_{a < b} \sum_{\eta=1}^r (C_{ab}^\eta - D_{ab}^\eta)^2$$

Se fizermos então uma hipótese mais restritiva sobre o tipo

da ação sobre F , podemos reduzir as condições sobre sua curvatura e obtemos o resultado:

TEOREMA (2.3.12). Seja $(E, M, G/H, G, \hat{\pi})$ um fibrado M compacta. Se G/H possui dimensão ≥ 2 e admite uma métrica com curvatura escalar $S_F > 0$, então toda função real $C^\infty f : E \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função curvatura escalar de alguma métrica riemanniana em E , exceto talvez quando $f = \text{constante} \geq 0$.

PROVA. Análoga à do teorema (2.3.9). $\square$

O seguinte corolário é imediato:

COROLÁRIO (2.3.13). Seja $(E, M, S^n, O(n+1), \hat{\pi})$, $n \geq 2$, um fibrado de esfera, cuja base M é compacta. Então toda função $C^\infty f : E \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função curvatura escalar de alguma métrica riemanniana em E , exceto talvez quando $f = \text{constante} \geq 0$.

Eells e Kriper em $[E, K]$ efetuaram o cálculo do número de 7 (15) esferas exóticas que se exprimem como fibrados de esfera sobre esfera "standard". Este dado nos leva ao seguinte resultado:

COROLÁRIO (2.3.14). Das 28 (16.256) classes de difeomorfismos de 7 (15-) esferas exóticas, 16 (4.096) são tais que toda função real $C^\infty f : \Sigma^7 \rightarrow \mathbb{R}$ ($f : \Sigma^{15} \rightarrow \mathbb{R}$) é uma função curvatura escalar de alguma métrica riemanniana em Σ^7 (Σ^{15}) exceto talvez quando $f = \text{constante} \geq 0$.

Por outro lado, o teorema (2.1.2) de Hitchin garante que as esferas exóticas que não são bordos de variedades spin não admitem sequer métrica de curvatura escalar $S \geq 0$ e $S \neq 0$. Concluimos portanto:

COROLÁRIO (2.3.15). As esferas exóticas que não são bordos de variedades spin não se deixam exprimir como espaços totais de fibradados bastante gerais.

Concluimos este parágrafo observando que em dimensões $n=8k+1$ e $n=8k+2$ ($k \in \mathbb{R}$), por exemplo, metade das esferas exóticas Σ^n não são bordos de variedades spin (ver Lawson-Yau - [L,Y]).

§4. ALGUMAS CONSIDERAÇÕES A RESPEITO DA CURVATURA DE RICCI

Como já observamos na introdução deste capítulo, o estudo global de curvaturas escalares prescritas foi extensivamente explorado por Warner-Kazdan. Um estudo análogo para o caso da curvatura de Ricci foi feito por D. Deturck e J. Kazdan.

Lembramos que se M é uma variedade riemanniana e se $x, y, z \in T_p M$, o tensor de Ricci é um tensor 2-covariante definido como sendo o traço da transformação linear $z \longrightarrow R(z, x)y$. Portanto:

$$\text{Ric}(x, y) = \sum_i \langle R(e_i, x)y, e_i \rangle$$

onde e_i é uma base ortonormal de $T_p M$. A curvatura de Ricci de um vetor x é o número $\text{Ric}(x, x)$.

A questão fundamental analisada por D. Deturck em [DT-1] e [DT-2] é então determinar quais tensores covariantes simétricos de

posto dois, podem ser tensores de Ricci de métricas riemannianas. A definição da curvatura de Ricci torna o problema de determinar uma métrica g que realiza uma dada curvatura de Ricci R , um problema de determinar a solução de um sistema de equações diferenciais parciais não-linear de segunda ordem, a saber:

$$\text{Ricc}(g) = R.$$

Surge aqui uma dificuldade, porque embora o número de equações e incógnitas do sistema acima seja o mesmo (g e R são simétricos), a solução encontrada deve também satisfazer certas condições de compatibilidade impostas pela identidade de Bianchi.

Vejamos um resumo dos resultados obtidos, na teoria local:

Para variedades de dimensão dois, a solução é bastante simplificada e vale:

TEOREMA (2.4.1) (ver [DT-1]). Uma condição necessária e suficiente para que R seja localmente o tensor de Ricci de uma métrica riemanniana (quando $n=2$) é que $R_{ij} = \sigma \gamma_{ij}$ onde σ é uma função escalar e γ_{ij} é positivo definido. Sobre uma variedade compacta M de dimensão dois, um tensor do tipo acima é o tensor de Ricci de uma métrica sobre M se e somente se $\int_M \sigma dV_\gamma = 2\pi X(M)$.

Para variedades de dimensão ≥ 3 , o resultado é o seguinte:

TEOREMA (2.4.2) (ver [DT-2]). Se R_{ij} é um campo tensorial $C^{m+\sigma}$

(resp. C^∞ , analítico) ($m > 2$) em uma vizinhança de um ponto p sobre uma variedade de dimensão ≥ 3 , e se $R^{-1}(p)$ existe, então existe uma métrica Riemanniana $C^{m+\sigma}$ (C^∞ , analítica) g tal que $\text{Ric}(g) = R$ em uma vizinhança de p .

Outros resultados relativos à curvatura de Ricci em fibrados foram obtidos independentemente por Poor [P], Hernandez [H] e Nash [N] :

TEOREMA (2.4.3). Se (M, h) é uma variedade riemanniana completa com $\text{Ric}(X) \geq s > 0$ para todos os vetores unitários X em TM e $G \dots P \rightarrow M$ é um fibrado principal sobre M com fibra de um grupo de Lie compacto G , então existe uma métrica G -invariante g_t em P com curvatura de Ricci positiva.

Segue o seguinte corolário:

TEOREMA (2.4.4). Se (M, h) e $G \dots P \rightarrow M$ são como no teorema anterior e F é uma variedade riemanniana com curvatura seccional positiva, invariante sob G , então o fibrado associado $P \times_G F$ possui uma métrica riemanniana com curvatura de Ricci positiva.

A demonstração deste teorema segue simplesmente de uma soma de parcelas apropriadas dos cálculos efetuados no parágrafo 3.

APÊNDICE - (A.2)

SOBRE A CURVATURA SECCIONAL EM FIBRADOS

PRINCIPAIS E FIBRADOS ASSOCIADOS

O cálculo da curvatura seccional do espaço total P do fibrado principal $G \dots P \rightarrow M$, relativamente à métrica g_t foi efetuado por Mercuri-Rigas em $[M,R]$, usando as componentes do tensor de curvatura obtidas por Jensen em $[J]$.

Se X e Y são dois vetores ortonormais em $T_P P$, com

$$X = \sum_{i=1}^m x_i X_i + \sum_{a=m+1}^{m+n} x_a X_a \quad \text{e} \quad Y = \sum_{i=1}^m y_i X_i + \sum_{a=m+1}^{m+n} y_a X_a$$

onde $m = \dim M$ e $n = \dim G$, então a expressão da curvatura seccional é:

$$\begin{aligned} K(X,Y) = & t^{-2} \left(\sum_{\substack{a,b \\ a \neq b}} x_a^2 y_b^2 \right) K_G(X^V, Y^V) + \left(\sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} x_i^2 y_j^2 \right) K_M(\pi_* X, \pi_* Y) + \\ & + \alpha(X,Y) + t\beta(X,Y) + t^2\gamma(X,Y) \end{aligned}$$

onde α, β e γ são funções limitadas em $T_1 P \times T_1 P$, onde $T_1 P$ é o fibrado tangente unitário de P relativamente a g_t .

O interesse numa expressão análoga para a curvatura seccional no espaço total do fibrado associado $(E, M, F, G, \hat{\pi})$ nos levou ao cálculo das componentes do tensor de curvatura da métrica $\hat{g}_t$ em E.

Estes cálculos foram efetuados usando a mesma notação e as mesmas bases ortonormais para $\tilde{H}_{p,Y}$ e $\tilde{V}_{p,Y}$ obtidas no parágrafo 3 deste capítulo e a seguinte fórmula de O'Neill (ver [ON], p. 464):

$$\begin{aligned} & \langle \hat{R}(\tilde{\pi}_* Z_A, \tilde{\pi}_* Z_B) \tilde{\pi}_* Z_C, \tilde{\pi}_* Z_D \rangle \circ \tilde{\pi} = \\ & = \langle (\hat{R}(\tilde{\pi}_* Z_A, \tilde{\pi}_* Z_B) \tilde{\pi}_* Z_C)^h, Z_D \rangle = \\ & = \langle \tilde{R}(Z_A, Z_B) Z_C, Z_D \rangle - 2 \langle A_{Z_A} Z_B, A_{Z_C} Z_D \rangle + \\ & + \langle A_{Z_B} Z_C, A_{Z_A} Z_D \rangle + \langle A_{Z_C} Z_A, A_{Z_B} Z_D \rangle \end{aligned}$$

onde $\{\bar{Z}_1, \dots, \bar{Z}_n, \bar{Z}_{n+1}, \dots, \bar{Z}_{n+r}\}$, com $\bar{Z}_A = \tilde{\pi}_* Z_A$ (ver diagrama (2.3.1)) ($1 \leq A, B, C, D \leq n+r$) e $Z_A \in \tilde{H}_{p,Y}$, é uma base $\langle, \rangle_{E,t}$ ortonormal de $T_{\tilde{\pi}(p,Y)} E$.

Então, fixando índices

$$1 \leq i, j, k, \ell \leq n$$

$$1 \leq \lambda, \mu, \eta, \xi \leq r-s$$

$$1 \leq a, b, c, d \leq s$$

$$1 \leq u \leq m$$

e denotando por $H_{ij;l}^a = \nabla_{h_l} (\langle \Omega(,), e_a \rangle_G) (h_i, h_j)$

e:

$$\hat{R}_{ABCD} = \hat{R}(\bar{z}_A, \bar{z}_B, \bar{z}_C, \bar{z}_D) = \langle \hat{R}(\bar{z}_A, \bar{z}_B) \bar{z}_C, \bar{z}_D \rangle_t^{\wedge}$$

obtemos, através de cálculos análogos aos da Proposição (2.3.7):

$$(i) \hat{R}_{ijkl} = R_{ijkl}^M + t^2 \sum_{p=1}^S \lambda_p^2 L_p^2 (2H_{ij}^p H_{kl}^p + H_{ik}^p H_{jl}^p - H_{il}^p H_{jk}^p)$$

$$(ii) \hat{R}_{ijl\lambda} = 0$$

$$(iii) \hat{R}_{ij\lambda\mu} = \sum_{p=1}^S \lambda_p L_p^2 H_{ij}^p M_{\lambda\mu}^p$$

$$(iv) \hat{R}_{i\lambda j\mu} = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^S \lambda_p L_p^2 H_{ij}^p M_{\lambda\mu}^p$$

$$(v) \hat{R}_{\lambda\mu i\eta} = 0$$

$$(vi) \hat{R}_{\lambda\mu\eta\xi} = t^{-2} R_{\lambda\mu\eta\xi}^F - \frac{1}{2} t^{-2} \sum_{p=1}^S \lambda_p^2 L_p^2 (M_{\lambda\mu}^p M_{\eta\xi}^p - \frac{1}{2} M_{\mu\eta}^p M_{\lambda\xi}^p - \frac{1}{2} M_{\eta\lambda}^p M_{\mu\xi}^p)$$

$$(vii) \hat{R}_{ijla} = -t^{-1} \lambda_a L_a H_{ij;a}^a$$

$$(viii) \hat{R}_{ijab} = t^2 \lambda_a \lambda_b L_a L_b \sum_{p=1}^n (H_{ip}^a H_{pj}^b - H_{ip}^b H_{pj}^a) + \lambda_a \lambda_b L_a L_b \left[\sum_{p=1}^S \lambda_p L_p^2 H_{ij}^p D_{ab}^p - \sum_{p=1}^S L_p^2 H_{ij}^p C_{ab}^p - \sum_{q=1}^m H_{ij}^q C_{ab}^q - \sum_{p=s+1}^m H_{ij}^p C_{ab}^p \right]$$

$$(ix) \hat{R}_{iajb} = -t^2 \lambda_a \lambda_b L_a L_b \sum_{p=1}^n H_{ip}^b H_{pj}^a + \lambda_a \lambda_b L_a L_b \left[\frac{1}{2} \sum_{q=1}^m H_{ij}^q C_{qb}^a - \frac{1}{2} \sum_{p=1}^S L_p^2 H_{ij}^p C_{ab}^p + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^S \lambda_p L_p^2 H_{ij}^p D_{ab}^p - \frac{1}{2} \sum_{p=s+1}^m H_{ij}^p C_{ab}^p \right]$$

$$(x) \hat{R}_{abic} = 0$$

$$(xi) \hat{R}_{abcd} = t^2 L_a L_b L_c L_d R_{abcd}^F + t^{-2} \lambda_a \lambda_b \lambda_c \lambda_d L_a L_b L_c L_d \left[\frac{1}{4} \sum_{p=1}^m C_{ab}^p C_{cd}^p - \frac{1}{2} \sum_{p=s+1}^m C_{ab}^p C_{cd}^p + \frac{1}{4} \sum_{p=s+1}^m C_{bc}^p C_{ad}^p + \frac{1}{4} \sum_{p=s+1}^m C_{ca}^p C_{bd}^p \right] - \\ - \frac{1}{4} t^{-2} L_a L_b L_c L_d \sum_{p=1}^s L_p^2 \left[2(\lambda_a \lambda_b C_{ab}^p - \lambda_p D_{ab}^p)(\lambda_c \lambda_d C_{cd}^p - \lambda_p D_{cd}^p) - (\lambda_b \lambda_c C_{bc}^p - \lambda_p D_{bc}^p)(\lambda_a \lambda_d C_{ad}^p - \lambda_p D_{ad}^p) - (\lambda_c \lambda_a C_{ca}^p - \lambda_p D_{ca}^p)(\lambda_b \lambda_d C_{bd}^p - \lambda_p D_{bd}^p) \right]$$

$$(xii) \hat{R}_{\lambda\mu\xi a} = t^{-2} L_a R_{\lambda\mu\xi a}^F - \frac{1}{2} t^{-2} L_a \sum_{p=1}^s \lambda_p^2 L_p^2 \left[M_{\lambda\mu}^p N_{\xi a}^p - \frac{1}{2} M_{\mu\xi}^p N_{\lambda a}^p - \frac{1}{2} M_{\xi\lambda}^p N_{\mu a}^p \right]$$

$$(xiii) \hat{R}_{\lambda\mu ab} = t^{-2} L_a L_b R_{\lambda\mu ab}^F + \frac{1}{2} t^{-2} L_a L_b \sum_{p=1}^s \lambda_p^2 L_p^2 \left[(\lambda_a \lambda_b C_{ab}^p - \lambda_p D_{ab}^p) N_{\lambda\mu}^p + \frac{1}{2} \lambda_p N_{\mu a}^p N_{\lambda b}^p - \frac{1}{2} \lambda_p N_{\lambda a}^p N_{\mu b}^p \right]$$

$$(xiv) \hat{R}_{\lambda a \mu b} = t^{-2} L_a L_b R_{\lambda a \mu b}^F - \frac{1}{2} t^{-2} L_a L_b \sum_{p=1}^s \lambda_p^2 L_p^2 \left[\lambda_p N_{\lambda a}^p N_{\mu b}^p + \frac{1}{2} \lambda_p N_{\mu a}^p N_{\lambda b}^p - \frac{1}{2} (\lambda_a \lambda_b C_{ab}^p - \lambda_p D_{ab}^p) M_{\lambda\mu}^p \right]$$

$$(xv) \hat{R}_{ab\lambda c} = t^{-2} L_a L_b L_c R_{ab\lambda c}^F + \frac{1}{2} t^{-2} L_a L_b L_c \sum_{p=1}^s \lambda_p^2 L_p^2 \left[(\lambda_a \lambda_b C_{ab}^p - \lambda_p D_{ab}^p) N_{\lambda c}^p - \frac{1}{2} (\lambda_b \lambda_c C_{bc}^p - \lambda_p D_{bc}^p) N_{\lambda a}^p + \frac{1}{2} (\lambda_a \lambda_c C_{ac}^p - \lambda_p D_{ac}^p) N_{\lambda b}^p \right]$$

onde $C_{ab}^p = \langle [e_a, e_b], e_p \rangle_G$

$$D_{ab}^p = \langle [f_a, f_b], f_p \rangle_F$$

$$M_{\lambda\mu}^p = \langle [k_\lambda, k_\mu], f_p \rangle_F$$

$$N_{\xi a}^p = \langle [k_\xi, f_a], f_p \rangle_F$$

$$e \quad L_q = \frac{1}{(1 + \lambda_q^2)^{1/2}} \quad (q = a, b, c, d)$$

As demais componentes do tensor de curvatura podem ser obtidas destas, usando as identidades:

$$\hat{R}_{ABCD} = -\hat{R}_{BACD} = -\hat{R}_{ABDC} = \hat{R}_{CDAB}$$

e

$$\hat{R}_{ABCD} + \hat{R}_{CABD} + \hat{R}_{BCAD} = 0.$$

OBSERVAÇÕES:

(A.1) - O cálculo manual da curvatura seccional $\hat{K}(X,Y)$ para X,Y dois vetores ortonormais quaisquer de $T_{\pi}(p,y)^E$ se tornou impraticável, em consequência de suas extensas expressões.

(A.2) - Obtidas as expressões de $K(X,Y)$ e $\hat{K}(X,Y)$, o problema que se coloca, numa 2^a etapa, é a investigação sobre a existência de conexões especiais em $G \dots P \rightarrow M$ e/ou $F \dots E \rightarrow M$, pelo menos em alguns casos particulares, para podermos concluir, usando tais expressões, em quais casos as métricas g_t e/ou $\hat{g}_t$ têm curvatura seccional não negativa. Tais investigações envolvem resoluções de sistemas de equações a derivadas parciais essencialmente não-lineares e não triviais.

Tendo em vista as observações anteriores, passaremos no próximo capítulo a fazer o encaminhamento para o estudo de um caso específico.

CAPÍTULO III

MÉTRICAS DE CURVATURA SECCIONAL NÃO-NEGATIVA
EM FIBRADOS PRINCIPAIS

§1. INTRODUÇÃO

No contexto geral da classificação de variedades riemannianas com dadas condições sobre sua curvatura, é fato bastante conhecido que, a menos de recobrimentos riemannianos, as variedades com curvatura seccional K constante são isométricas a esferas, espaços euclidianos ou espaços hiperbólicos conforme esta curvatura seja positiva, nula ou negativa. No caso das variedades riemannianas completas, simplesmente conexas de curvatura seccional negativa ou nula ($K \leq 0$), o clássico teorema de Hadamard-Cartan estabelece que elas são difeomorfas ao espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$.

A grande dificuldade se encontra justamente no estudo de variedades de curvatura seccional estritamente positiva (ou não negativa).

Um resultado bastante significativo é que nos dá informações sobre a estrutura topológica da variedade garante que se M é riemanniana, completa, com curvatura seccional $K \geq \delta > 0$, então M é necessariamente compacta (Corolário do Teorema de Bonnet-Meyers).

O caso alternativo do estudo da estrutura de variedades completas abertas de curvatura seccional positiva é dado por Gromoll e Meyer em [G,M-1] (1969) e Cheeger e Gromoll em [C,G] (1972). Eles generalizam, para dimensões arbitrárias, o seguinte teorema de Con Vossen para variedades não compactas de dimensão dois e de curvatura não negativa: "Em dimensão dois, uma variedade completa não compacta de curvatura não negativa é difeomorfa a $\mathbb{R}^2$ ou é "flat". Os teoremas básicos de Cheeger-Gromoll e Gromoll-Meyer são os seguintes:

TEOREMA (3.1.1). ([C,G]). Seja M^n uma variedade riemanniana não-compacta, completa, de curvatura seccional não-negativa ($K \geq 0$). Então existe uma subvariedade $S \subseteq M$, totalmente geodésica, compacta, chamada "alma" de M , tal que M é difeomorfa ao fibrado normal $\nu(S)$.

TEOREMA (3.1.2). ([G,M-1]). Seja M^n uma variedade riemanniana não-compacta, completa, de curvatura seccional $K > 0$. Então M é difeomorfa a $\mathbb{R}^n$.

Durante algum tempo, os únicos exemplos conhecidos de variedades diferenciáveis simplesmente conexas munidas de estrutura riemanniana de curvatura seccional estritamente positiva eram: as esferas, os espaços projetivos complexos, os espaços projetivos quaterniônicos e o plano projetivo de Cayley. Estes espaços constituem exatamente a classe dos espaços riemannianos simétricos compactos de posto um.

Vejamos então um resumo dos principais exemplos encontrados na literatura mais recente.

A classificação de todas as variedades diferenciáveis simplesmente conexas que admitem métrica riemanniana homogênea de curvatura seccional estritamente positiva foi obtida na sequência dos trabalhos de Berger [B] - (1961), Wallach [W] - (1972) e Bérard Bergery [BB] - (1976).

Berger obteve uma classificação dos espaços homogêneos normais, e também dois novos tipos topológicos, em dimensão ímpar, de variedades que admitem curvatura seccional estritamente positiva, a saber:

$$V_1 = \text{Sp}(2) / \text{SU}(2), \text{ de dimensão } 7 \text{ (ver Obs. (1.5.12))}$$

e

$$V_2 = \text{SU}(5) / \text{Sp}(2) \times T, \text{ de dimensão } 13$$

onde T denota o círculo tal que $\text{SU}(4) \times T = \text{U}(4)$ pela inclusão clássica $\text{U}(4) \subset \text{SU}(5)$.

Em [W], Wallach generaliza os resultados de Berger para dimensão par, obtendo a classificação de todos os espaços homogêneos compactos de dimensão par que admitem estrutura riemanniana homogênea de curvatura seccional estritamente positiva. São obtidos também três novos tipos topológicos de variedades que admitem métrica com curvatura seccional $K > 0$. Estes exemplos são:

$SU(3)/T$, de dimensão 4, onde T é o toro maximal de $SU(3)$.

$Sp(3)/SU(2) \times SU(2) \times SU(2)$, de dimensão 16

e $F4/Sp(8)$, de dimensão 24.

Ao lado dos espaços simétricos de posto um e dos cinco exemplos citados de Berger e Wallach (que são variedades de tipo topológico distinto dos espaços simétricos de posto um), existe ainda uma *série infinita de variedades com curvatura seccional $K > 0$, de dimensão 7, de tipos de homotopia distintos* que foram obtidas por Aloff e Wallach em [A,W] - (1975). (A conjectura de que neste contexto, não existem outros exemplos, foi provada por Bérard Bergery em [BB]).

Finalmente, em [E] - (1982), Eschenburg obteve novos exemplos numa classe mais geral de variedades. Se G é um grupo de Lie qualquer, o grupo $G^2 = G \times G$ atua sobre G por translações à direita e à esquerda. Se U é um subgrupo compacto de G^2 , que atua sem pontos fixos, então o espaço de órbitas G/U é uma variedade diferenciável, que não é homogênea em geral. (A esfera exótica de dimensão 7 e $K \geq 0$ construída por Gromoll e Meyer, que será citada posteriormente, foi obtida desta maneira). Eschenburg aplicou este método a $G = SU(3)$, $U \cong U(1)$ em G^2 e obteve uma família de variedades compactas, simplesmente conexas, topologicamente distintas, de dimensão 7, que não são homotopicamente equivalentes

a espaços riemannianos homogêneos compactos e que possuem curvatura seccional estritamente positiva, e "aproximam" de uma certa maneira os exemplos de Aloff e Wallach.

Passemos agora aos exemplos de variedades riemannianas com curvatura seccional não negativa ($K \geq 0$).

Usando a fórmula de O'Neill no contexto das observações (1.2.5) e (1.2.6), Gromoll e Meyer em [G,M-2] - (1974), construíram uma variedade riemanniana Σ^7 com métrica de curvatura seccional $K \geq 0$, tal que Σ^7 é homeomorfa a S^7 , mas com estrutura diferenciável exótica. Mais precisamente, consideraram uma ação livre de $S^3 \times S^3 \cong S_p(1) \times S_p(1)$ sobre $S_p(2)$, obtendo uma variedade quociente $S_p(2) /_{S^3 \times S^3}$ difeomorfa a S^4 . Em particular, a diagonal Δ em $S^3 \times S^3$ atua livremente sobre $S_p(2)$. A variedade quociente $\Sigma^7 = S_p(2) /_{\Delta}$ é um S^3 -fibrado, não principal, sobre S^4 :

$$S^3 \times S^3 /_{\Delta} \cong S^3$$

$$\vdots$$

$$S_p(2) /_{\Delta} = \Sigma^7$$

$$\downarrow$$

$$S_p(2) /_{S^3 \times S^3} \cong S^4$$

Não é conhecido se a métrica obtida sobre esta esfera exótica pode ou não ser deformada em uma outra com curvatura seccional estritamente positiva. A propósito, sobre as esferas exóticas, lembramos, do Capítulo II, que muitas delas não admitem nem mesmo métricas de curvatura escalar não negativa. É interessante observar também que A. Weinstein tinha conjecturado já em 1968 - [WT-1] que esta esfera, em particular, não admite métrica riemanniana com fibras totalmente geodésicas e curvatura seccional estritamente positiva ($K > 0$). Esta conjectura foi provada por Derdziński e Rigas em 1980 (ver [D,R-1]), onde o principal resultado estabelecido por eles é que o único S^3 -fibrado sobre S^4 que admite métrica riemanniana com fibras totalmente geodésicas e curvatura seccional $K > 0$ é o fibrado de Hopf $S^3 \rightarrow S^4$.

Uma pergunta que segue naturalmente do Teorema (3.1.1) (ver início deste parágrafo) é como construir métricas de curvatura seccional não negativa em fibrados vetoriais sobre variedades compactas que já possuem métricas de curvatura seccional não-negativa, ou, de maneira mais específica, como foi proposto por Cheeger e Gromoll em [C,G] - (1972) e por Yau em [Y] - (1982):

QUAIS FIBRADOS VETORIAIS REAIS SOBRE ESFERAS EUCLIDIANAS S^n ADMITEM MÉTRICAS COMPLETAS DE CURVATURA SECCIONAL $K \geq 0$?

Os casos de fibrados vetoriais sobre esferas de dimensão mais baixa, isto é, S^1 , S^2 e S^3 são relativamente simples e todos eles

admitem métrica riemanniana com $K \geq 0$ (ver, por exemplo [M,R]), e também todos os fibrados vetoriais sobre S^5 admitem métrica riemanniana com $K \geq 0$ (ver [R-4]).

O primeiro caso interessante é o de fibrados vetoriais sobre S^4 , e está associado com o problema de existência de métricas de curvatura seccional não-negativa em algumas esferas exóticas de dimensão 7. Alguns exemplos são descritos por Rigas em [R-2] - (1978) e [R-3] - (1968).

Um resultado parcial, no caso estável, em resposta à questão anteriormente citada, foi estabelecido por Rigas em [R-2]: *Para toda classe de fibrados vetoriais estáveis sobre uma esfera, existe um representante, cujo espaço total admite uma métrica de curvatura seccional não-negativa.* Em outras palavras, dado qualquer fibrado vetorial ξ sobre uma esfera S^k , existe um fibrado trivial τ sobre S^k tal que a soma direta $\xi \oplus \tau$ admite uma métrica riemanniana completa com $K \geq 0$.

O problema central deste trabalho, que passamos a descrever, está relacionado com esta questão.

Conforme já observamos em (1.4.7), a métrica utilizada na literatura para obter informações a respeito da curvatura do espaço total de um fibrado principal $G \dots P \longrightarrow M$ é, em geral, a métrica riemanniana g_t (utilizada nos cálculos do Capítulo II), definida por

$$g_t = \pi_* \langle , \rangle_M + t^2 \langle \omega, \omega \rangle_G$$

onde t é uma constante positiva e ω é uma conexão em P . Neste caso, a projeção π é uma submersão riemanniana e as fibras de π são totalmente geodésicas.

As fórmulas de O'Neill ([ON]) impõem restrições naturais sobre a base M ($\dim M \geq 2$) e o grupo G , que deverão ter, então, curvatura seccional estritamente positiva (a não ser que $G = S^1$), e portanto $G = S^3$ ou $G = SO(3)$.

Numa tentativa de dar uma resposta à pergunta se existem, nestas condições, métricas de curvatura seccional positiva dentre as métricas da família g_t , Derdziński e Rigas (em [D,R-2]) estabeleceram uma condição necessária e suficiente para a positividade da curvatura seccional de g_t , para t próximo de zero.

O fato desta condição impor uma restrição muito forte sobre a forma de curvatura Ω de P , acrescido do fato de que o único S^3 -fibrado sobre S^4 que admite métrica riemanniana com fibras totalmente geodésicas e curvatura seccional $K > 0$ é o fibrado de Hopf, nos levou a considerar uma métrica um pouco mais geral em P , do tipo:

$$g_f = \pi_* \langle \cdot, \cdot \rangle_M + f^2 \langle \omega, \omega \rangle_G$$

onde f é uma função real estritamente positiva, diferenciável, definida em M .

O que é fundamental nesta nossa escolha é que as fibras de π deixam de ser totalmente geodésicas (ver (1.4.1) e (1.4.5)).

Usando técnicas análogas às notas anteriormente citadas, estabelecemos também condições necessárias e suficientes para a não-negatividade da curvatura seccional da métrica g_f no fibrado principal $G \dots P \longrightarrow M$ para M compacta com curvatura seccional $K > 0$ ($\dim M \geq 2$) e para $G = S^3$ ou $G = SO(3)$.

No entanto, obter uma resposta à pergunta: É possível definir $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ nas condições fixadas de tal modo que as condições necessárias e suficientes obtidas no nosso estudo se verifiquem, é um problema não trivial, que por enquanto achamos seja viável quando aplicamos nosso teste para uma classe pré-fixada de conexões em P . Ou seja, feita uma escolha de uma classe de conexões em P , tentamos a partir daí, viabilizar ou não a existência da função f .

Passamos então à análise do caso dos S^3 -fibrados principais sobre S^7 , quando a conexão fixada em P é a conexão "pull-back", via uma aplicação grau n , $h_n : S^7 \longrightarrow S^7$. Definimos então todas as etapas a serem elaboradas para este caso, estabelecendo um algoritmo que decidirá sobre a existência ou não de uma métrica do tipo g_f com curvatura seccional não-negativa em tais fibrados. Porém, não encontramos uma maneira elegante de finalizar os cálculos e obter um resultado conclusivo.

Outras perspectivas de aplicação do nosso resultado se encontram em observações feitas no final deste trabalho.

§2. CURVATURA POSITIVA E O CONCEITO DE "FATNESS" EM FIBRADOS PRINCIPAIS.

Nesta secção, descrevemos uma condição necessária e suficiente para que métricas do tipo g_t citadas no parágrafo anterior produzam curvatura positiva no espaço total de um fibrado principal.

Consideremos então $G \dots P \xrightarrow{\pi} M$ um fibrado principal sobre uma variedade compacta M de dimensão ≥ 2 e onde o grupo de Lie G também é compacto.

Denotemos por ω e Ω respectivamente a forma de conexão e a forma de curvatura no fibrado em questão. Podemos obter formas horizontais a valores reais em P tomando composições $\mu \circ \Omega$, com $\mu \in g^*$, onde g é a álgebra de Lie de G . Segundo A. Weinstein [W], dizemos que ω é uma conexão " g^* -fat", se para todo $\mu \in g^*$, a forma $\mu \circ \Omega$ é não-degenerada para cada espaço horizontal em TP .

Se $G \dots P \xrightarrow{\pi} M$ admite uma conexão " g^* -fat", dizemos que este fibrado é um " fat-bundle ".

Usaremos neste parágrafo, especificamente, a seguinte expressão para a métrica g_t :

$$g_t(X, Y) = h(d\pi(X), d\pi(Y)) + tQ(\omega(X), \omega(Y))$$

onde ω é uma forma de conexão em P , h é uma métrica em M , Q é uma métrica bi-invariante em G e $t > 0$.

OBSERVAÇÃO (3.2.1). Para secções planas vertizontais, geradas por um vetor vertical e um horizontal, a curvatura (calculada via fórmulas de O'Neill) é não negativa, e será estritamente positiva se e somente se a conexão é "g*-fat".

O Teorema (3.2.1) a seguir (extraído de notas não publicadas de Perdziński e Rigas e cuja demonstração transcrevemos no Apêndice (3.A.2) deste trabalho) nos fornece um teste para verificar quando existem métricas de curvatura seccional positiva entre as métricas do tipo g_t , para t perto do zero.

Por razões já mencionadas, é necessário que a forma de curvatura ω seja "g*-fat" e (M, h) e (G, Q) tenham curvatura positiva. Então $G = S^1$ ou $G = S^3$ ou $G = SO(3)$, onde Q nos dois últimos casos é um múltiplo da forma de Killing. Além disso, a forma de curvatura Ω pode ser vista como uma 2-forma sobre M com valores no fibrado adjunto $\text{ad}P = P \times_{\text{ad}} g$, onde o último possui uma métrica natural nas fibras, compatível com a conexão natural. Neste caso, a expressão $\langle (\nabla_X \Omega)(Y, Z), u \rangle$ faz sentido para X, Y, Z tangentes a M e $u \in \text{ad}P$.

TEOREMA (3.2.1). Seja $P \longrightarrow M$ um G -fibrado principal com uma conexão ω sobre uma variedade compacta M , $\dim M = n \geq 2$, onde $G = S^3$ ou $G = SO(3)$. Fixe uma métrica bi-invariante Q em G . Então as seguintes condições são equivalentes:

- (i) g_t tem curvatura seccional positiva para todo $t > 0$,

suficientemente pequeno.

(ii) A conexão ω é g^* -fat e para todo $x \in M$, e vetores ortogonais $X, Y \in T_x M$ e todo elemento $u \in \text{ad}P$, não-nulo, temos:

$$R^h(X, Y, X, Y) = \sum_{k=1}^n \langle u, \Omega(X, X_k) \rangle^2 > \langle u, (\nabla_X \Omega)(X, Y) \rangle^2,$$

onde $X_1, \dots, X_n$ é uma base ortonormal arbitrária de $T_x M$ e R^h denota o tensor de curvatura de (M, h) .

OBSERVAÇÃO (3.2.2). Condições para a positividade da curvatura seccional de g_t , quando $G = S^1$, foram obtidas por L. Bérard Bergery.

§3. COMPONENTES DO TENSOR DE CURVATURA NO FIBRADO $G \dots P \longrightarrow M$ RELATIVAMENTE À MÉTRICA g_f .

Consideremos novamente um fibrado principal

$$G \dots P \xrightarrow{\pi} M$$

onde M é uma variedade riemanniana de dimensão $n \geq 2$ e G é um grupo de Lie compacto, de dimensão $r \geq 2$, com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$.

Fixemos uma métrica $\langle, \rangle_M$ em M , uma métrica bi-invariante $\langle, \rangle_G$ em G e uma conexão ω em P .

Para cada função real estritamente positiva e diferenciável f definida em M , definimos uma métrica riemanniana $g_f = \langle, \rangle_f$ em P por:

$$(3.3.1) \quad \langle X, Y \rangle_f = \langle \pi_* X, \pi_* Y \rangle_M + f(x)^2 \langle \omega(X), \omega(Y) \rangle_G$$

onde $X, Y \in T_x P$.

Relativamente a esta métrica:

- 1) G atua por isometrias em cada (P, g_f) .
- 2) π é uma submersão riemanniana de cada (P, g_f) em $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle_M)$.

OBSERVAÇÃO (3.3.2). Como a função f não é, em geral, constante, as fibras de π não são, neste caso, totalmente geodésicas em P , nem mutuamente isométricas (ver (1.4.5)). Por outro lado, todas as fibras possuem métricas bi-invariantes, homotéticas a uma métrica "standard" $\langle \cdot, \cdot \rangle_G$ de G . Além disso, iremos provar no Teorema (3.3.7) que para $p \in P$, a fibra G_p de π é mínima relativamente à métrica g_f se e somente se $x = \pi(p) \in M$ é ponto crítico de f .

OBSERVAÇÃO (3.3.3). Neste e no próximo capítulo usaremos, especificamente a seguinte definição para a forma de curvatura $\bar{\Omega}$ da conexão ω :

$$\bar{\Omega}(X, Y) = - [X^H, Y^H]^V$$

O próximo lema nos fornece algumas relações interessantes relativas à conexão riemanniana ∇ de (P, g_f) :

LEMA (3.3.4). Se X, Y e Z são campos vetoriais horizontais "standard" (levantamentos horizontais locais) de campos vetoriais $\bar{X}, \bar{Y}$

e $\tilde{Z}$ de M e U^* , V^* e W^* são campos vetoriais verticais fundamentais, então:

$$(a) \langle \nabla_{U^*} V^*, X \rangle_f = -\frac{1}{2} X(f^2) \langle U, V \rangle_G.$$

Em particular, se U é um campo vetorial unitário de g , então:

$$(a') \langle \nabla_{U^*} U^*, X \rangle_f = -\frac{1}{2} X(f^2)$$

$$(b) \langle \nabla_{U^*} V^*, W^* \rangle_f = \frac{1}{2} f^2 \langle [U, V], W \rangle_G$$

$$(c) \langle \nabla_X V^*, W^* \rangle_f = \frac{1}{2} X(f^2) \langle V, W \rangle_G$$

$$(d) \langle \nabla_X V^*, Y \rangle_f = \frac{1}{2} f^2 \langle \bar{\Omega}(X, Y), V \rangle_G$$

$$(e) \nabla_X V^* = \nabla_{V^*} X$$

$$(f) \nabla_X Y = (\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y})^h + \frac{1}{2} [X, Y]^V$$

onde $\bar{\nabla}$ é a conexão de M .

OBSERVAÇÃO: (d) é tensorial em X, Y e V^* . Portanto se H_1 e H_2 são campos horizontais e V_1 é vertical em P , então vale

$$(d') \langle \nabla_{H_1} V_1, H_2 \rangle_f = \frac{1}{2} f^2 \langle \bar{\Omega}(H_1, H_2), V_1 \rangle_G.$$

PROVA. Estas relações são obtidas diretamente da fórmula que define a conexão riemanniana ∇ a partir da métrica g_f de P : (ver [C])

$$2\langle \nabla_U V, W \rangle_f = U\langle V, W \rangle_f + V\langle U, W \rangle_f - W\langle U, V \rangle_f + \\ + \langle [U, V], W \rangle_f + \langle [W, U], V \rangle_f - \langle [V, W], U \rangle_f .$$

Os cálculos são efetuados de maneira análoga à dedução das fórmulas correspondentes para o caso da métrica g_t , encontradas por exemplo em ([M,R] - pag. 102). $\square$

EXEMPLO (3.3.5). Determinaremos, neste exemplo, uma conexão em S^4 induzida por uma métrica do tipo (3.3.1)

Para tanto, consideremos cada ponto $p \in S^4$ com coordenadas do tipo $P = (q, \phi)$ onde $q \in S^3$ e $\phi \in (0, \pi)$

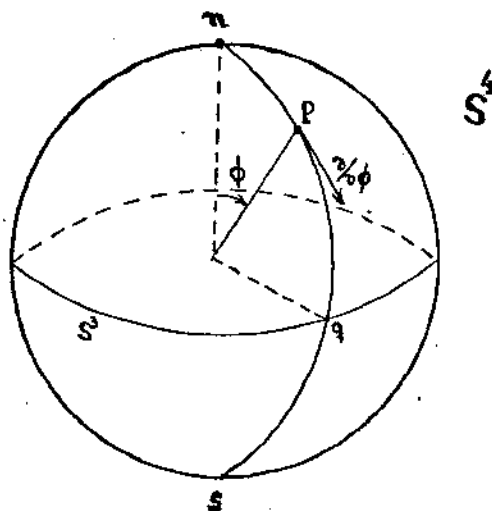


Figura 4

Nestas condições, podemos considerar S^4 (exceto dois pontos, o polo norte e o polo sul) como sendo o espaço total de um fibrado principal trivial:

$$S^3 \dots S^3 \times (0, \pi) \xrightarrow{P} (0, \pi)$$

onde, em $S^3 \times (0, \pi) \cong S^4 - \{n, s\}$ fixamos a métrica

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \cong \langle \cdot, \cdot \rangle_\phi = d\phi^2 + f(\phi) \langle \cdot, \cdot \rangle_{S^3}$$

onde $f(\phi) = \sin \phi$.

É óbvio que as fibras de p não são totalmente geodésicas (exceto quando $\phi = \pi/2$) nem isométricas.

Uma base local de campos de vetores tangentes a S^4 numa vizinhança de um ponto $P = (q, \phi)$ será do tipo:

$$\{\vec{q}_i, \vec{q}_j, \vec{q}_k, \partial/\partial\phi\}$$

onde $\vec{q}_i, \vec{q}_j, \vec{q}_k$ são campos vetoriais verticais fundamentais globais, induzidos da base $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ de $T_I S^3$ e $\partial/\partial\phi$ é um campo vetorial horizontal local.

Fixando a notação:

$$\tilde{X}_1 = \vec{i}_q = \vec{q}_i = \vec{i}^* ; \quad \tilde{X}_2 = \vec{q}_j = \vec{j}^* ; \quad \tilde{X}_3 = \vec{q}_k = \vec{k}^*$$

e $\tilde{X}_4 = \partial/\partial\phi$; e usando as relações do Lema (3.3.4) obtemos a conexão $\tilde{\nabla}$ em S^4 :

$$(i) \quad \tilde{\nabla}_{\tilde{X}_1} \tilde{X}_2 = 2 \operatorname{sen} \phi \tilde{X}_3$$

$$(ii) \quad \tilde{\nabla}_{\tilde{X}_1} \tilde{X}_3 = -2 \operatorname{sen} \phi \tilde{X}_2$$

$$(iii) \quad \tilde{\nabla}_{\tilde{X}_2} \tilde{X}_3 = 2 \operatorname{sen} \phi \tilde{X}_1$$

$$(iv) \quad \tilde{\nabla}_{\tilde{X}_1} \tilde{X}_1 = \tilde{\nabla}_{\tilde{X}_2} \tilde{X}_2 = \tilde{\nabla}_{\tilde{X}_3} \tilde{X}_3 = -\frac{1}{2} \cos \phi \tilde{X}_4$$

$$(v) \quad \tilde{\nabla}_{\tilde{X}_1} \tilde{X}_4 = \frac{1}{2} \cos \phi \tilde{X}_1$$

$$(vi) \quad \tilde{\nabla}_{\tilde{X}_2} \tilde{X}_4 = \frac{1}{2} \cos \phi \tilde{X}_2$$

$$(vii) \quad \tilde{\nabla}_{\tilde{X}_3} \tilde{X}_4 = \frac{1}{2} \cos \phi \tilde{X}_3$$

$$(viii) \quad \tilde{\nabla}_{\tilde{X}_4} \tilde{X}_4 = 0 \quad \square$$

Como é usual, para o tipo de cálculo que iremos efetuar, devemos introduzir agora um conjunto de bases adaptadas em $\pi^{-1}(U)$ (onde U é um aberto em M) consistindo de todas as bases g_f -ortogonais da forma

$$\{X_1, X_2, \dots, X_n, f^{-1}V_1^*, \dots, f^{-1}V_r^*\}$$

onde para cada ponto $u \in \pi^{-1}(U) \subset P$, os vetores $X_1, X_2, \dots, X_n$ formam uma base ortonormal de vetores ω -horizontais (levantamento de uma base ortonormal $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \dots, \tilde{X}_n$ diferenciável em U), e os vetores $V_1^*, \dots, V_r^*$ são campos vetoriais verticais fundamentais em P , induzidos de uma base ortonormal $V_1, \dots, V_r$ de g .

Consideremos índices satisfazendo às seguintes condições:

$$1 \leq i, j, k, \ell, m \leq n$$

$$1 \leq a, b, c, d, s \leq r.$$

Usando as equações fundamentais associadas à submersão $\pi : P \rightarrow M$, obtidas por O'Neill em [ON] e o Lema (3.3.4), obtemos as componentes do tensor de curvatura de Riemann de g_f , expresso em termos da curvatura de M , da conexão ω e da função f e suas derivadas:

PROPOSIÇÃO (3.3.6).

$$(i) \quad R_{ijkm}^f = R_{ijkm}^M - f^2 \sum_{\ell} \left[\frac{1}{2} \bar{H}_{ij}^{\ell} \bar{H}_{km}^{\ell} + \frac{1}{4} \bar{H}_{ik}^{\ell} \bar{H}_{jm}^{\ell} - \frac{1}{4} \bar{H}_{im}^{\ell} \bar{H}_{jk}^{\ell} \right]$$

$$(ii) \quad R_{ijma}^f = \frac{1}{2} f \bar{H}_{ij;m}^a - \frac{1}{2} X_m(f) \bar{H}_{ij}^a + \frac{1}{2} X_i(f) \bar{H}_{jm}^a + \frac{1}{2} X_j(f) \bar{H}_{mi}^a$$

$$(iii) \quad R_{ijab}^f = \frac{1}{4} f^2 \sum_{\ell} [\bar{H}_{i\ell}^a \bar{H}_{\ell j}^b - \bar{H}_{j\ell}^a \bar{H}_{\ell i}^b] - \sum_s \bar{H}_{ij}^s C_{bs}^a$$

$$(iv) R_{iajb}^f = \frac{1}{4} f^2 \sum_{\ell} \bar{H}_{i\ell}^b \bar{H}_{\ell j}^a - \frac{1}{2} \sum_s \bar{H}_{ij}^s C_{sb}^a - \\ - f^{-1} [X_i(X_j(f)) + \sum_{\ell} X_{\ell}(f) \Gamma_{i\ell}^j] \delta_{ab}$$

$$(v) R_{abic}^f = \frac{1}{2} \sum_{\ell} X_{\ell}(f) (\delta_{bc} \bar{H}_{i\ell}^a - \delta_{ac} \bar{H}_{i\ell}^b)$$

$$(vi) R_{abcd}^f = \frac{1}{4} f^{-2} \sum_s C_{bs}^a C_{cd}^s + f^{-2} \sum_{\ell} X(f)^2 (\delta_{bc} \delta_{ad} - \delta_{ac} \delta_{bd})$$

onde $\bar{H}_{ij}^a = \langle \bar{\Omega}(X_i, X_j), V_a \rangle_G$, $\bar{H}_{ij;m}^a = \nabla_{X_m} (\langle \bar{\Omega}(\cdot, \cdot), V_a \rangle_G)(X_i, X_j)$ e δ_{ab} é o símbolo de Kronecker.

Todas as componentes do tensor de curvatura podem ser obtidas destas, usando as identidades:

$$R_{ABCD} = -R_{BACD} = -R_{ABDC}; R_{ABCD} = R_{CDAB} \quad e$$

$$R_{ABCD} + R_{BCAD} + R_{CABD} = 0.$$

PROVA. Usando os resultados (a), (b), (c) e (d) do Lema (3.3.3) e usando a notação:

$$V_S = f^{-1} V_S^*$$

obtemos as seguintes fórmulas:

$$(a') (\nabla_{V_a^*} V_b^*)^H = \sum_{\ell} \langle \nabla_{V_a^*} V_b^*, X_{\ell} \rangle_f X_{\ell} = -\frac{1}{2} \sum_{\ell} X_{\ell}(f^2) X_{\ell} \delta_{ab}$$

$$(b') \quad (\nabla_{V_a^*} V_b^*)^V = \sum_s \langle \nabla_{V_a^*} V_b^*, V_s \rangle_f V_s = \sum_s C_{ab}^s V_s^*$$

$$(c') \quad (\nabla_{X_i} V_a^*)^V = \sum_s \langle \nabla_{X_i} V_a^*, V_s \rangle_f V_s = \frac{1}{2} f^{-2} X_i(f^2) V_a^* = f^{-1} X_i(f) V_a^*$$

$$(d') \quad (\nabla_{X_i} V_a^*)^H = \sum_\ell \langle \nabla_{X_i} V_a^*, X_\ell \rangle_f X_\ell = \frac{1}{2} f^2 \sum_\ell H_{i\ell}^a X_\ell$$

Além destas, necessitaremos também das seguintes relações:

$$(1) \quad A_{X_i} X_j = \frac{1}{2} [X_i, X_j]^V = -\frac{1}{2} \sum_s H_{ij}^s V_s^*$$

$$(2) \quad T_{V_a} V_c = f^{-2} T_{V_a^*} V_c^* = -\frac{1}{2} f^{-2} \sum_\ell X_\ell(f^2) X_\ell \delta_{ac}$$

$$(3) \quad (\nabla_{X_m} A)_{X_i} X_j = (\nabla_{X_m} \bar{\Omega})(X_i, X_j)$$

$$(4) \quad A_{X_i} V_a = f^{-1} A_{X_i} V_a^* = \frac{1}{2} f \sum_\ell H_{i\ell}^a X_\ell$$

$$(5) \quad T_{V_a} X_m = (\nabla_{V_a} X_m)^V = f^{-3} \sum_s \langle \nabla_{X_m} V_a^*, V_s^* \rangle_G V_s^* \stackrel{(c')}{=} \\ = f^{-3} \sum_s \frac{1}{2} X_m(f^2) \langle V_a, V_s \rangle_G V_s^* = f^{-2} X_m(f) V_a^*$$

$$(6) \quad (\nabla_{V_a} A)_{X_i} X_j = -\frac{1}{2} [\nabla_{V_a} (\bar{\Omega}(X_i, X_j)) - \bar{\Omega}((\nabla_{V_a} X_i)^H, X_j) - \\ - \bar{\Omega}(X_i, (\nabla_{V_a} X_j)^H)]$$

onde

$$\nabla_{V_a} (\bar{\Omega}(X_i, X_j)) = f^{-1} \sum_s H_{ij}^s V_a^* V_s^*$$

$$\bar{\Omega}((\nabla_{V_a} X_i)^H, X_j) = \frac{1}{2} f \sum_{\ell} H_{i\ell}^a \bar{\Omega}(X_{\ell}, X_j)$$

$$(7) \quad (\nabla_{X_i}^T)_{V_a} V_b = \delta_{ab} [-X_i (f^{-1} \sum_{\ell} X_{\ell}(f)) X_{\ell} - f^{-1} \sum_{\ell} X_{\ell}(f) \nabla_{X_i} X_{\ell}]$$

$$(8) \quad (\nabla_{V_b}^T)_{V_a} V_c = -f^{-2} C_{ac}^b \sum_{\ell} X_{\ell}(f) X_{\ell} - f^{-3} \sum_{\ell} X_{\ell}(f)^2 V_b^* \delta_{ac}.$$

Para calcular R_{ijma}^f , por exemplo, fazemos

$$\begin{aligned} R_{ijma}^f &= \langle R(X_i, X_j) X_m, V_a \rangle_f \stackrel{[ON]}{=} \\ &= \langle (\nabla_{X_m}^T A)_{X_i} X_j, V_a \rangle_f + \langle A_{X_i} X_j, T_{V_a} X_m \rangle_f - \\ &\quad - \langle A_{X_j} X_m, T_{V_a} X_i \rangle_f - \langle A_{X_m} X_i, T_{V_a} X_j \rangle_f \end{aligned}$$

e usamos as relações (1), (3) e (5).

Cálculos análogos nos fornecem as demais componentes do tensor de curvatura. $\square$

Usando notação compatível com a estabelecida desde que o início deste parágrafo, podemos agora provar que:

TEOREMA (3.3.7). A fibra G_p de π , num ponto p do espaço total do

fibrado principal $G \dots P \xrightarrow{\pi} M$ é mínima relativamente à métrica g_f se e somente se o ponto $x = \pi(p) \in M$ é ponto crítico da função f .

PROVA. Se $\{X_1, X_2, \dots, X_n, f^{-1}V_1^*, \dots, f^{-1}V_r^*\}$ é uma base local em $\pi^{-1}(U) \ni p$ (onde U é um aberto em M) de vetores g_f -ortonormais, então, na demonstração da proposição (3.3.6) já tínhamos determinado uma expressão para a segunda forma fundamental das fibras, ou seja:

Para $1 \leq a, b, c \leq r$, usando a notação $V_c = f^{-1}V_c^*$, tínhamos:

$$\begin{aligned} T_{V_a} V_b &= B(V_a, V_b) = f^{-2} T_{V_a^*} V_b^* = -\frac{1}{2} f^{-2} \sum_j X_j(f^2) X_j \delta_{ab} = \\ &= -f^{-1} \sum_j X_j(f) X_j \delta_{ab}. \end{aligned}$$

Então, denotando por

$$H_{X_i}(V_a, V_a) = \langle T_{V_a} V_a, X_i \rangle_f, \quad \text{vem}$$

$$H_{X_i}(V_a, V_a) = \langle -f^{-1} \sum_j X_j(f) X_j, X_i \rangle_f = -f^{-1} X_i(f).$$

Sabemos que a fibra G_p será mínima se e somente se o vetor curvatura média:

$$H(u) = \frac{1}{n} \sum_j (\text{traço } H_{X_j}(u)) X_j(u)$$

é nulo, para todo $u \in G_p$.

Então,

$$\begin{aligned} H(u) &= \frac{1}{n} \sum_j \left(\sum_{a=1}^r H_{X_j}(V_a, V_a)(u) \right) X_j(u) = \\ &= \frac{1}{n} \sum_j \left(\sum_{a=1}^r (-f^{-1} X_j(f)(u)) X_j(u) \right) = \\ &= -\frac{r}{n} f^{-1} \sum_j X_j(f)(u) X_j(u) . \end{aligned}$$

Portanto, $H(u) = 0 \iff X_j(f) = 0, \forall j = 1, \dots, n \iff x = \pi(p)$ é ponto crítico de f . $\square$

OBSERVAÇÃO (3.3.8). Pelos cálculos efetuados na demonstração do Teorema (3.3.7), podemos concluir que as fibras G_p , onde $x = \pi(p)$ é ponto crítico de f , na verdade, são mais do que mínimas, são totalmente geodésicas. Isto porque $X_i(f) = 0, \forall i = 1, \dots, n \implies$ a segunda forma fundamental é identicamente nula.

§4. A CURVATURA SECCIONAL NO FIBRADO $G \dots P \longrightarrow M$ QUANDO $G = S^3$ OU $G = SO(3)$.

Como já dissemos anteriormente, impondo a restrição de que a curvatura do grupo estrutural G deva ser positiva, devemos ter $G = S^3$ ou $G = SO(3)$. Usaremos a notação $GS(3) \dots P \longrightarrow M$ para o fibrado principal $G \dots P \longrightarrow M$ quando $G = S^3$ ou $G = SO(3)$. Usando propriedades específicas de suas álgebras de Lie, obteremos informações mais precisas da geometria de $GS(3) \dots P \longrightarrow M$.

Iniciaremos nossos cálculos considerando uma situação bem geral, ou seja, vamos considerar sobre $GS(3)$ uma métrica invariante

pela esquerda, determinada por um produto interno positivo definido v sobre $\hat{GS}(3)$ tal que

$$\begin{cases} v(e_\alpha, e_\alpha) = \lambda_\alpha^2 \\ v(e_\alpha, e_\beta) = 0 ; \alpha \neq \beta \end{cases} \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3)$$

onde $\{e_1, e_2, e_3\}$ é uma base fixa de $\hat{GS}(3) \cong \mathbb{R}^3$ e $\lambda_\alpha: M \longrightarrow \mathbb{R}^+$ ($\alpha = 1, 2, 3$) são funções C^∞ .

Fixando uma conexão ω em P , uma métrica ds^2 em M e funções λ_α nas condições acima, definimos a seguinte métrica sobre P :

$$\langle X, Y \rangle_v(p) = ds^2(\bar{X}, \bar{Y})(x) + v(x)(\omega(X), \omega(Y))$$

onde $p \in P$, $\pi(p) = x \in M$; $X, Y \in T_p P$; $\bar{X} = \pi_* X$, $\bar{Y} = \pi_* Y$ e $v(x)$ é uma expressão envolvendo os $\lambda_\alpha(x)$.

Se e_α^* ($\alpha = 1, 2, 3$) é o campo vetorial vertical fundamental associado a e_α , então a base

$$\{\bar{e}_\alpha\}_{\alpha=1,2,3} = \left\{ \frac{e_\alpha^*}{\lambda_\alpha(x)} \right\}_{\alpha=1,2,3}$$

é uma base v -ortonormal global de campos vetoriais tangentes à fibra, relativamente à métrica $\langle, \rangle_v$ de P .

Lembrando que em $\hat{GS}(3)$, as constantes estruturais são dadas por:

$$[e_1, e_2] = e_3 ; [e_2, e_3] = e_1 \text{ e } [e_3, e_1] = e_2$$

e denotando por

$$\Lambda_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 \lambda_3} ; \quad \Lambda_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 \lambda_3} \quad \text{e} \quad \Lambda_3 = \frac{\lambda_3}{\lambda_1 \lambda_2}$$

obtemos

$$[\omega(\overline{e_1}(u)) , \omega(\overline{e_2}(u))] = \Lambda_3(x) \omega(\overline{e_3}(u))$$

$$[\omega(\overline{e_2}(u)) , \omega(\overline{e_3}(u))] = \Lambda_1(x) \omega(\overline{e_1}(u))$$

$$[\omega(\overline{e_3}(u)) , \omega(\overline{e_1}(u))] = \Lambda_2(x) \omega(\overline{e_2}(u))$$

Além disso,

$$[\overline{e_\alpha}, \overline{e_\beta}]_u = \Lambda_\gamma(x) \overline{e_\gamma}$$

onde $e_\alpha \times e_\beta = e_\gamma$ para $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ uma permutação par de $\{1, 2, 3\}$.

LEMA (3.4.1). Se X é um campo vetorial horizontal básico (isto é , $\pi_*(X) = \bar{X} \in \mathfrak{X}(M)$), então

$$[X, \overline{e_\alpha}] = X(\log M_\alpha) \overline{e_\alpha} \quad \text{onde} \quad M_\alpha = \frac{1}{\lambda_\alpha} .$$

PROVA. Desde que $[X, e_\alpha^*] = 0$, vem

$$\begin{aligned}
 [X, \overline{e_\alpha}] &= [X, \frac{e_\alpha^*}{\lambda_\alpha}] = X(\frac{1}{\lambda_\alpha}) e_\alpha^* = \frac{1}{M_\alpha} X(M_\alpha) \overline{e_\alpha} = \\
 &= X(\log M_\alpha) \overline{e_\alpha} \quad . \quad \square
 \end{aligned}$$

Consideremos agora, numa vizinhança de $u \in P$, uma base local ortonormal de levantamentos horizontais $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ e índices satisfazendo

$$1 \leq i, j, k \leq n$$

$$1 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq 3$$

O próximo Lema estabelece as relações da derivada covariante dos diversos tipos de campos em P .

LEMA (3.4.2).

$$(a) \quad \nabla_{\overline{e_\alpha}} \overline{e_\beta} = \sum_i \delta_{\alpha\beta} X_i (\log M_\alpha) X_i + \mu_\alpha (e_\alpha \times e_\beta)$$

$$\text{onde } \mu_\alpha = \langle \nabla_{\overline{e_\alpha}} \overline{e_\beta}, \overline{e_\gamma} \rangle_v \quad .$$

Portanto,

$$\text{se } \alpha \neq \beta : (a') \quad \nabla_{\overline{e_\alpha}} \overline{e_\beta} = \mu_\alpha e_\alpha \times e_\beta$$

$$\text{se } \alpha = \beta : (a'') \quad \nabla_{\overline{e_\alpha}} \overline{e_\alpha} = \sum_i X_i (\log M_\alpha) X_i$$

$$(b) \quad \nabla_{X_i} \overline{e_\alpha} = \frac{1}{2} \sum_j \overline{\Omega}_{ij}^\alpha X_j$$

$$(c) \nabla_{\bar{e}_\alpha} X_i = \frac{1}{2} \sum_j \bar{\Omega}_{ij}^\alpha X_j - X_i (\log M_\alpha) \bar{e}_\alpha$$

$$(d) \nabla_{X_i} X_j = \sum_k ds^2(\bar{\nabla}_{X_i} \bar{X}_j, \bar{X}_k) X_k - \frac{1}{2} \sum_\alpha \bar{\Omega}_{ij}^\alpha \bar{e}_\alpha.$$

PROVA. Nas justificativas de (a) a (d) usamos a fórmula "standard" que define uma conexão riemanniana em termos da métrica $\langle, \rangle_v$ e do colchete de Lie

(a) Usando o fato de que

$$X_i \langle \bar{e}_\beta, \bar{e}_\alpha \rangle_v = 0 \quad \text{e} \quad \langle [\bar{e}_\beta, \bar{e}_\alpha], X_i \rangle_v = 0$$

obtemos

$$2 \langle \nabla_{\bar{e}_\alpha} \bar{e}_\beta, X_i \rangle_v = \langle [X_i, \bar{e}_\alpha], \bar{e}_\beta \rangle_v + \langle [X_i, \bar{e}_\beta], \bar{e}_\alpha \rangle_v.$$

$$\text{Pelo Lema (3.4.1), } [X_i, \bar{e}_\alpha] = X_i (\log M_\alpha) \bar{e}_\alpha.$$

$$\text{Então: } \langle \nabla_{\bar{e}_\alpha} \bar{e}_\beta, X_i \rangle_v = X_i (\log(M_\alpha)) \delta_{\alpha\beta}$$

que é uma componente horizontal de $\nabla_{\bar{e}_\alpha} \bar{e}_\beta$.

Para calcular a componente vertical, observamos que:

$$2 \langle \nabla_{\bar{e}_1} \bar{e}_2, \bar{e}_3 \rangle_v = \langle [\bar{e}_1, \bar{e}_2], \bar{e}_3 \rangle_v - \langle [\bar{e}_2, \bar{e}_3], \bar{e}_1 \rangle_v +$$

$$+ \langle [\bar{e}_3, \bar{e}_1], \bar{e}_2 \rangle_v =$$

$$= \Lambda_3(x) - \Lambda_1(x) + \Lambda_2(x).$$

Denotando $\Lambda_3(x) - \Lambda_1(x) + \Lambda_2(x) = 2\mu_1$

vem

$$\langle \nabla_{e_1} \bar{e}_2, \bar{e}_3 \rangle_v = \mu_1$$

Analogamente, obtemos

$$\langle \nabla_{e_2} \bar{e}_1, \bar{e}_3 \rangle_v = -\mu_2 \quad \text{e} \quad \langle \nabla_{e_3} \bar{e}_2, \bar{e}_1 \rangle_v = -\mu_3$$

Ou ainda,

$$(\nabla_{e_\alpha} (\text{vert.}))^V = \mu_\alpha \times (\text{vert.})$$

(b) $\nabla_{X_i} \bar{e}_\alpha$ só possui componente horizontal. De fato:

$$\begin{aligned} 2 \langle \nabla_{X_i} \bar{e}_\alpha, \bar{e}_\beta \rangle_v &= \langle [X_i, \bar{e}_\alpha], \bar{e}_\beta \rangle_v - \langle [X_i, \bar{e}_\beta], \bar{e}_\alpha \rangle_v \quad (\text{que é zero quando } \alpha = \beta) \\ &= \langle X(\log M_\alpha) \bar{e}_\alpha, \bar{e}_\beta \rangle_v - \langle X(\log M_\alpha) \bar{e}_\beta, \bar{e}_\alpha \rangle_v \\ &= X(\log M_\alpha) \delta_{\alpha\beta} - X(\log M_\beta) \delta_{\beta\alpha} \\ &= 0 \quad \forall \alpha, \beta \end{aligned}$$

Por outro lado, a sua componente horizontal é calculada diretamente de:

$$\begin{aligned} 2 \langle \nabla_{X_i} \bar{e}_\alpha, X_j \rangle_v &= - \langle [X_i, X_j], \bar{e}_\alpha \rangle_v + \langle [X_j, \bar{e}_\alpha], X_i \rangle_v - \\ &\quad - \langle [X_i, \bar{e}_\alpha], X_j \rangle_v. \end{aligned}$$

Mas as duas últimas parcelas são nulas, pois

$[X_i, \bar{e}_\alpha]$ é vertical. Então

$$\langle \nabla_{X_i} \bar{e}_\alpha, X_j \rangle_v = \frac{1}{2} \langle -[X_i, X_j], \bar{e}_\alpha \rangle_v = \frac{1}{2} \bar{\Omega}_{ij}^\alpha$$

(c) A componente horizontal de $\nabla_{\bar{e}_\alpha} X_i$ é calculada de maneira totalmente análoga à da componente horizontal de $\nabla_{X_i} \bar{e}_\alpha$.

Vejamos sua componente vertical:

$$2 \langle \nabla_{\bar{e}_\alpha} X_i, \bar{e}_\beta \rangle_v = 2 \langle [\bar{e}_\alpha, X_i], \bar{e}_\beta \rangle_v + 2 \langle \nabla_X \bar{e}_\alpha, \bar{e}_\beta \rangle_v$$

A última parcela é nula, em consequência do fato de $\nabla_X \bar{e}_\alpha$ ser horizontal.

Então:

$$\langle \nabla_{\bar{e}_\alpha} X_i, \bar{e}_\beta \rangle_v = - \langle X_i (\log M_\alpha) \bar{e}_\alpha, \bar{e}_\beta \rangle_v$$

$$= -\delta_{\alpha\beta} X_i (\log M_\alpha)$$

(d) Cálculos análogos aos anteriores nos fornecem

$$\langle \nabla_{X_i} X_j, \bar{e}_\alpha \rangle_v = - \frac{1}{2} \bar{\Omega}_{ij}^\alpha$$

e

$$\begin{aligned}
2\langle \nabla_{X_i} X_j, X_k \rangle_v &= \langle [X_i, X_j], X_k \rangle_v + \langle [X_k, X_i], X_j \rangle_v + \\
&\quad + \langle [X_k, X_j], X_i \rangle_v = \\
&= ds^2([X_i, X_j], X_k) + ds^2([X_k, X_i], X_j) + \\
&\quad + ds^2([X_k, X_j], X_i) = 2ds^2(\bar{\nabla}_{X_i} \bar{X}_j, \bar{X}_k)
\end{aligned}$$

ou seja: $(\nabla_{X_i} X_j)^H = (\bar{\nabla}_{X_i} \bar{X}_j)^h$ (levantamento horizontal). $\square$

OBSERVAÇÃO (3.4.3). Para efeito de simplificação da notação, vamos definir $f_\alpha = \log(\frac{1}{\lambda_\alpha})$. Neste caso, $\lambda_\alpha = \exp(-f_\alpha)$ e

$$X(\log M_\alpha) = X(f_\alpha) \quad .$$

Reescrevendo os dois lemas anteriores na nova notação, as fórmulas obtidas anteriormente se transformam em:

LEMA (3.4.4).

$$(1) [X, \bar{e}_\alpha] = X(f_\alpha) \bar{e}_\alpha$$

$$(2) \nabla_{\bar{e}_\alpha} \bar{e}_\beta = \sum_i \delta_{\alpha\beta} X_i(f_\alpha) X_i + \mu_\alpha \bar{e}_\alpha \times e_\beta$$

$$\text{onde } \mu_\alpha = \langle \nabla_{\bar{e}_\alpha} \bar{e}_\beta, \bar{e}_\gamma \rangle_v$$

$$(2') \quad \nabla_{\bar{e}_\alpha} \bar{e}_\beta = \mu_\alpha \bar{e}_\alpha \times \bar{e}_\beta \quad (\alpha \neq \beta)$$

$$(2'') \quad \nabla_{\bar{e}_\alpha} \bar{e}_\alpha = \sum_i X_i (f_\alpha) X_i$$

$$(3) \quad \nabla_{X_i} \bar{e}_\alpha = \frac{1}{2} \sum_j \bar{\Omega}_{ij}^\alpha X_j$$

$$(4) \quad \nabla_{\bar{e}_\alpha} X_i = \frac{1}{2} \sum_j \bar{\Omega}_{ij}^\alpha X_j - X_i (f_\alpha) \bar{e}_\alpha$$

$$(5) \quad \nabla_{X_i} X_j = \sum_k ds^2(\bar{\nabla}_{X_i} \bar{X}_j, \bar{X}_k) X_k - \frac{1}{2} \sum_\alpha \bar{\Omega}_{ij}^\alpha \bar{e}_\alpha$$

OBSERVAÇÃO (3.4.5). Para efeito de simplificação dos cálculos nos restringimos ao caso particular: $f_\alpha = f_\beta = f_\gamma \equiv f$. Neste caso, a métrica $\langle, \rangle_V$ de P será expressa por

$$\langle X, Y \rangle_f = ds^2(\pi_* X, \pi_* Y) + \exp(-2f) \langle \omega(X), \omega(Y) \rangle_{GS(3)}$$

Relativamente a esta métrica, as componentes do tensor de curvatura de Riemann do fibrado $GS(3) \dots P \rightarrow M$ são dados pela proposição:

PROPOSIÇÃO (3.4.6).

$$(i) \quad R_{ijij}^f = R_{ijij}^M - \frac{3}{4} \sum_\gamma (\Omega_{ij}^\gamma)^2 \equiv K_{ij}$$

$$(ii) \quad R_{ij\alpha j}^f = X_j(f) \Omega_{ij}^\alpha + \frac{1}{2} H_{ij;j}^\alpha$$

$$(iii) \quad R_{ij\alpha\beta}^f = \frac{1}{4} \sum_k (\Omega_{jk}^\alpha \Omega_{ki}^\beta - \Omega_{ik}^\alpha \Omega_{kj}^\beta) - \frac{1}{2} \exp f \, \Omega_{ij}^\gamma$$

$$(iv) \quad R_{i\alpha\beta j}^f = \frac{1}{4} \sum_k \Omega_{jk}^\alpha \Omega_{ki}^\beta - \frac{1}{4} \exp f \, \Omega_{ij}^\gamma$$

$$(v) \quad R_{i\alpha i\alpha}^f = X_i X_i f + \sum_k X_k f \langle \nabla_{X_i} X_k, X_i \rangle - (X_i f)^2 + \frac{1}{4} \sum_k (\Omega_{ik}^\alpha)^2 \equiv K_{i\alpha}$$

$$(vi) \quad R_{\alpha\beta i\beta}^f = -\frac{1}{2} \sum_k X_k f \, \Omega_{ik}^\alpha$$

$$(vii) \quad R_{\alpha\beta\alpha\beta}^f = \frac{1}{4} \exp(2f) - \sum_k (X_k f)^2 \equiv K_{\alpha\beta}$$

PROVA. Podemos usar a Proposição (3.3.4) e fazer as identificações convenientes, ou seja $f \equiv \exp(-f)$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle_G \equiv \langle \cdot, \cdot \rangle_{GS(3)}$

Ou então podemos calcular novamente as componentes do tensor de curvatura, usando a definição. Os detalhes são omitidos. $\square$

OBSERVAÇÃO (3.4.7). Na proposição anterior usamos as seguintes notações:

$$(1) \quad \Omega_{ij}^\alpha = \langle \Omega_{ij}, \exp(f) e_\alpha \rangle_f = \exp(-f) \bar{\Omega}_{ij}^\alpha$$

$$(2) \quad H_{ij;l}^\alpha = \langle (\nabla_{X_l} \Omega)(X_i, X_j), \exp(f) e_\alpha \rangle_f = \exp(-f) \bar{H}_{ij;l}^\alpha$$

$$\text{onde} \quad \begin{cases} \bar{\Omega}_{ij}^\alpha = \langle -[X_i, X_j], e_\alpha \rangle_{GS(3)} \\ \bar{H}_{ij;l}^\alpha = \langle (\nabla_{X_l} \bar{\Omega})(X_i, X_j), e_\alpha \rangle_{GS(3)} \end{cases}$$

OBSERVAÇÃO (3.4.8). Chamamos a atenção para a relação (v) da Proposição (3.4.6) que dá a curvatura vertical para vetores da base fixada. Comparando com a Observação (3.2.1), fica claro como a função f pode interferir de fato, no cálculo de tal curvatura. Mais detalhadamente, no caso da métrica g_t , $K_{i\alpha} = \frac{1}{4} t^2 \sum_k (\bar{\Omega}_{ik}^\alpha)^2 \geq 0$

(e $K_{i\alpha} > 0$ ($\forall \alpha$) $\iff \omega$ é g^* -fat). No caso da métrica g_f , a função f deve ser definida de tal modo que, em particular:

$$(v): K_{i\alpha} = \frac{1}{4} (e^{-f})^2 \sum_k (\bar{\Omega}_{ik}^\alpha)^2 + X_i X_i f + \\ + \sum_k X_k f \langle \nabla_{X_i} X_k, X_i \rangle - (X_i f)^2$$

seja > 0 (ou ≥ 0); condição esta que já impõe fortes restrições às derivadas de 1ª e 2ª ordem da função f .

LEMA (3.4.9). Seja $\sigma \subset T_u P$ um plano bidimensional. Então existe sempre uma base ortonormal $\{X, Y\}$ de σ nas seguintes condições:

$$\begin{cases} X = aX_i + be_\alpha \\ Y = cX_j + de_\beta \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{com } i \neq j, \quad \alpha \neq \beta \\ \text{e } a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1. \end{matrix}$$

PROVA. Seja $\{X, Y\}$ uma base ortonormal qualquer de $\sigma \subset T_u P$. Então

$X = X^H + X^V$ e $Y = Y^H + Y^V$ (decomposições nas componentes horizontal e vertical).

Podemos supor, sem perda de generalidade que

$$\langle X^H, Y^H \rangle = \langle X^V, Y^V \rangle = 0$$

De fato, se $\langle X^H, Y^H \rangle \neq 0$, consideramos a seguinte mudança de base em σ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{X} = \cos \theta X - \sin \theta Y \\ \text{e} \\ \tilde{Y} = \sin \theta X + \cos \theta Y \end{array} \right.$$

$\{\tilde{X}, \tilde{Y}\}$ também é uma base ortonormal de σ . Além disso:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{X}^H = \cos \theta X^H - \sin \theta Y^H \\ \text{e} \\ \tilde{Y}^H = \sin \theta X^H + \cos \theta Y^H \end{array} \right.$$

$$\text{Então: } \langle \tilde{X}^H, \tilde{Y}^H \rangle = \frac{1}{2} \sin 2\theta (\|X^H\|^2 - \|Y^H\|^2) + \cos 2\theta \langle X^H, Y^H \rangle.$$

$$\text{Portanto } \langle \tilde{X}^H, \tilde{Y}^H \rangle = 0 \iff \cotg 2\theta = \frac{\|Y^H\|^2 - \|X^H\|^2}{2\langle X^H, Y^H \rangle}.$$

Concluimos então que se $\langle X^H, Y^H \rangle \neq 0$, existe θ tal que $\langle \tilde{X}^H, \tilde{Y}^H \rangle = 0$.

Além disso, como $\langle X, Y \rangle = 0$,

$$\langle X^H, Y^H \rangle = 0 \iff \langle X^V, Y^V \rangle = 0 \quad \square$$

Como a curvatura seccional $K(\sigma)$ em um ponto $u \in P$, para $\sigma \in T_u P$ não depende da escolha da base de σ , tomaremos para o cálculo de $K(\sigma)$ em $GS(3) \dots P \longrightarrow M$, uma base nas condições do Lema (3.4.9). Então:

$$\begin{aligned} K(\sigma) &= K(X, Y) = K(aX_i + be_\alpha, cX_j + de_\beta) = \\ &= \langle R(aX_i + be_\alpha, cX_j + de_\beta)(aX_i + be_\alpha), cX_j + de_\beta \rangle = \\ &= a^2 c^2 K_{ij} + 2abc^2 R_{ij\alpha j} + 2a^2 cd R_{ij i\beta} + \\ &+ 2abcd R_{i\beta\alpha j} + 2abcd R_{ij\alpha\beta} + b^2 c^2 K_{j\alpha} + \\ &+ 2b^2 cd R_{\alpha\beta\alpha j} + 2abd^2 R_{i\beta\alpha\beta} + b^2 d^2 K_{\alpha\beta} + \\ &+ a^2 d^2 K_{i\beta}. \end{aligned}$$

As componentes do tensor de curvatura que aparecem nesta expressão foram calculadas na Proposição (3.4.6). Fazendo a substituição, obtemos:

PROPOSIÇÃO (3.4.10).

$$\begin{aligned}
 K(\sigma) = & a^2 c^2 K_{ij} + b^2 c^2 K_{j\alpha} + b^2 d^2 K_{\alpha\beta} + a^2 d^2 K_{i\beta} + \\
 & + 2abc^2 \{X_j(f) \Omega_{ij}^\alpha + \frac{1}{2} H_{ij;j}^\alpha\} + \\
 & + 2a^2 cd \{X_i(f) \Omega_{ji}^\beta + \frac{1}{2} H_{ji;i}^\beta\} + \\
 & + 2abcd \left\{ \frac{1}{4} \sum_k \Omega_{ik}^\alpha \Omega_{kj}^\beta + \frac{1}{4} \exp f \Omega_{ij}^\gamma \right\} + \\
 & + 2abcd \left\{ \frac{1}{4} \sum_k (\Omega_{jk}^\alpha \Omega_{ki}^\beta - \Omega_{ik}^\alpha \Omega_{kj}^\beta) - \exp f \Omega_{ij}^\gamma \right\} + \\
 & + 2b^2 cd \left\{ -\frac{1}{2} \sum_k (X_k f) \Omega_{jk}^\beta \right\} + \\
 & + 2abd^2 \left\{ -\frac{1}{2} \sum_k (X_k f) \Omega_{ik}^\alpha \right\}.
 \end{aligned}$$

OBSERVAÇÃO (3.4.11). O Lema (3.4.9) utilizado na Proposição (3.4.10) e também no Teorema (3.2.1), embora elementar, é bastante significativo do ponto de vista da obtenção de uma expressão "simplificada" para a curvatura seccional. Sem a sua utilização, esta expressão seria significativamente mais complicada. Veja, por exemplo, a expressão da mesma $K(\sigma)$ no Apêndice do Capítulo II, no caso da métrica g_t , ou, em maiores detalhes em [M-R].

§5. A NÃO-NEGATIVIDADE DA CURVATURA SECCIONAL DA MÉTRICA g_f EM FIBRADOS DO TIPO $GS(3) \dots P \longrightarrow M$.

Algumas condições necessárias são estabelecidas a partir do resultado da Proposição (3.4.8), segundo as seguintes etapas:

(i) Vamos supor que $c = 0$ ($\implies d = \pm 1$). Então

$$K(\sigma) = b^2 K_{\alpha\beta} + a^2 K_{i\beta} + 2ab \left\{ -\frac{1}{2} \sum_k (X_k f) \Omega_{ik}^\alpha \right\} \geq 0$$

$$\text{Se } b = 0 \implies K_{i\beta} \geq 0$$

Se $b \neq 0$, vem:

$$K_{i\beta} \left(\frac{a}{b}\right)^2 - 2 \left\{ \frac{1}{2} \sum_k (X_k f) \Omega_{ik}^\alpha \right\} \left(\frac{a}{b}\right) + K_{\alpha\beta} \geq 0$$

Se $K_{i\beta} \geq 0$, o discriminante $\mathcal{D}(\frac{a}{b})$ deve ser ≤ 0 . Mas

$$\mathcal{D}(\frac{a}{b}) = \left(\sum_k (X_k f) \Omega_{ik}^\alpha \right)^2 - 4K_{i\beta} K_{\alpha\beta} \leq 0.$$

Portanto:

$$\left(-\frac{1}{2} \sum_k (X_k f) \Omega_{ik}^\alpha \right)^2 \leq K_{i\beta} K_{\alpha\beta}.$$

(ii) Vamos supor agora que $b = 0$ ($\implies a = \pm 1$). Então

$$K(\sigma) = c^2 K_{ij} + d^2 K_{i\beta} + 2cd \{ X_i f \Omega_{j1}^\beta + \frac{1}{2} H_{ji;i}^\beta \} \geq 0$$

Dividindo por c^2 , vem:

$$K_{i\beta} \left(\frac{d}{c}\right)^2 + 2\left(\frac{d}{c}\right) \{X_{if} \Omega_{ji}^\mu + \frac{1}{2} H_{ji;i}^\beta\} + K_{ij} \geq 0$$

Assumindo que $K_{i\beta} \geq 0$,

$$D\left(\frac{d}{c}\right) \leq 0 \iff (X_i(f) \Omega_{ji}^\beta + \frac{1}{2} H_{ji;i}^\beta)^2 \leq K_{i\beta} K_{ij}$$

(iii) Se $a = 0$ ($\implies b = \pm 1$), de maneira análoga obtemos a nova condição $K_{\alpha\beta} \geq 0$.

(iv) Se $d = 0$ ($\implies c = \pm 1$), a condição a ser acrescentada será $K_{ij} \geq 0$.

Acabamos de verificar então o seguinte resultado:

TEOREMA (3.5.1). Seja $P \xrightarrow{\pi} M$ um G -fibrado principal com uma conexão ω , sobre uma variedade compacta M ($\dim M \geq 2$) com métrica Riemanniana ds^2 , onde $G = S^3$ ou $G = SO(3)$. Se para alguma função $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável, a métrica g_f possui curvatura seccional não negativa, então

$$(1) K_{ij} \geq 0$$

$$(2) K_{\alpha\beta} \geq 0$$

$$(3) [(X_i f) \Omega_{ji}^\beta + \frac{1}{2} H_{ji;i}^\beta]^2 \leq K_{i\beta} K_{ij}$$

$$(4) [\sum_k (X_k f) \Omega_{ik}^\alpha]^2 \leq 4 K_{i\beta} K_{\alpha\beta}$$

OBSERVAÇÃO (3.5.2). As desigualdades (1)-(4) do Teorema anterior

nos fornecem um 1º teste para tentar viabilizar a existência da função f que satisfaça, para a conexão ω fixada em P , algumas condições necessárias para a métrica g_f possuir curvatura seccional não negativa.

Para obter condições necessárias e suficientes, observamos que podemos obter uma outra expressão para $K(\sigma)$ da Proposição (3.4.9). Podemos supor, sem perda de generalidade que $bd \neq 0$. Dividindo $K(\sigma)$ por $b^2 d^2$ e colocando $\lambda = \frac{a}{b}$ e $\mu = \frac{c}{d}$, obtemos:

$$\begin{aligned} K(\sigma) = & \lambda^2 [\mu^2 K_{ij} + 2\mu \tilde{H}_{ji;i}^\beta + K_{i\beta}] + \\ & + 2\lambda [\mu^2 \tilde{H}_{ij;j}^\alpha + \mu \Gamma_{\alpha\beta ji} + \Delta_\alpha^i] + \\ & + [\mu^2 K_{j\alpha} + 2\mu \Delta_\beta^j + K_{\alpha\beta}] \end{aligned}$$

que é uma expressão do 4º grau nas variáveis λ e μ e onde:

$$\tilde{H}_{ji;i}^\alpha = (X_i f) \Omega_{ji}^\alpha + \frac{1}{2} H_{ji;i}^\alpha$$

$$\Delta_\alpha^i = -\frac{1}{2} \sum_k (X_k f) \Omega_{ik}^\alpha$$

e

$$\Gamma_{\alpha\beta ji} = \frac{1}{4} \sum_k \Omega_{jk}^\alpha \Omega_{ki}^\beta - \frac{1}{4} (\exp f) \Omega_{ij}^\gamma.$$

Denotando por $\phi(\mu)$, $\psi(\mu)$ e $\Omega(\mu)$ os polinômios do 2º grau na variável μ que são, respectivamente, os coeficientes de λ^2 , λ^1

e λ^0 , obtemos

$$K(\sigma)(\lambda) = \phi(\mu)\lambda^2 + 2\psi(\mu)\lambda + \Omega(\mu)$$

que assumirá valores não negativos se e somente se $\phi(\mu) \geq 0$ e $K(\sigma)(\mu)$ não possui raízes reais distintas. Mas:

$$(i) \quad \phi(\mu) \geq 0 \implies \begin{cases} K_{ij} \geq 0 \\ K_{i\beta} \geq 0 \\ \text{e} \\ (\tilde{H}_{ji;i}^\beta)^2 \leq K_{ij}K_{i\beta} \end{cases}$$

e

(ii) $K(\sigma)(\lambda)$ não possui raízes reais distintas $\iff \psi^2(\mu) \leq \Omega(\mu)\phi(\mu)$.

Podemos então enunciar o próximo teorema que estabelece um critério para o teste da Não-negatividade da curvatura seccional de g_f em fibrados $SG(3) \dots P \longrightarrow M$.

TEOREMA (3.5.3). Seja $P \xrightarrow{\pi} M$ um G -fibrado principal com uma conexão ω , sobre uma variedade compacta M ($\dim M \geq 2$) com métrica riemanniana ds^2 , onde $G = S^3$ ou $G = SO(3)$. Então as seguintes condições são equivalentes:

(i) Existe uma função $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciável de modo que

$$(I) \quad K_{ij} \geq 0$$

$$(II) \quad \left[(X_{if})_{ji}^\beta + \frac{1}{2} H_{ji;i}^\beta \right]^2 \leq K_{ij} K_{i\beta}$$

$$(III) \quad \left[\mu^2 \tilde{H}_{ij;j}^\alpha + \mu \Gamma_{\alpha\beta ji} + \Delta_\alpha^i \right]^2 \leq \\ \leq \left[\mu^2 K_{ij} + 2\mu \tilde{H}_{ji;i}^\beta + K_{i\beta} \right] \left[\mu^2 K_{j\alpha} + 2\mu \Delta_\beta^j + K_{\alpha\beta} \right],$$

$$\forall \mu \in \mathbb{R}$$

(ii) A métrica g_f possui curvatura seccional não negativa.

§6. OBSERVAÇÕES FINAIS

(3.6.1). Uma das perspectivas de aplicação dos Teoremas (3.5.1) e (3.5.3) no caso dos S^3 -fibrados principais sobre S^4 é viabilizar o teste para os instantons (ver Atiyah - [A]), que são mínimos do funcional de Yang-Mills (Energia), isto é, $\int_{S^4} \|\Omega\|^2$ é o mínimo sobre todas as conexões principais ω em P_K .

(3.6.2). Em particular, pode-se utilizar o método desenvolvido no Apêndice (3.A.3) de "pull-back" de conexões através de aplicações de grau n , no caso das aplicações de t'Hooft (ver A.3.4.5) que, por sinal, dão início aos instantons (não todos).

(3.6.3). Uma das dificuldades mais sutis relativa ao método que

usa conexões "pull-back" via aplicações de grau n , ainda no caso dos S^3 -fibrados principais sobre S^4 , é a descrição do conjunto dos pontos críticos de tais aplicações, que não é constituído somente de singularidades isoladas (ver K. Uhlenbeck - [U-1] e [U-2]).

APÊNDICE A.3.1

UM ALGORITMO PARA TESTAR A NÃO-NEGATIVIDADE DA CURVATURA
SECCIONAL DA MÉTRICA g_f EM FIBRADOS $GS(3) \dots P \longrightarrow M$

Vamos provar, inicialmente, que a Condição (I) do Teorema (3.5.3), pode se verificar, em geral, para qualquer conexão ω em P e qualquer função diferenciável $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$.

LEMA (3.7.1). Existe sempre uma métrica homotética à métrica original ds^2 da variedade base M , de tal forma que a Condição (I) (Teorema (3.5.3)) seja verificada.

PROVA. Fixemos em M , uma métrica ds_λ^2 homotética à original ds^2 , ou seja; $ds_\lambda^2 = \lambda ds^2$.

Consideremos vetores X_i, X_j , ω -horizontais em P , levantamentos horizontais de vetores $\tilde{X}_i, \tilde{X}_j$ ds^2 -ortonormais em M .

Neste caso, $\|X_i\|_\lambda^2 = \lambda \|X_i\|^2$. Denotemos por $X_i^\lambda = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} X_i$ e $X_j^\lambda = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} X_j$. Então:

$$\begin{aligned} \sum_Y (\Omega_{ij}^Y(\lambda))^2 &= \sum_Y (\langle \Omega(X_i^\lambda, X_j^\lambda), e_Y^f e_Y^f \rangle)^2 = \\ &= \frac{1}{\lambda^2} \sum_Y (\Omega_{ij}^Y)^2. \end{aligned}$$

Por outro lado, é óbvio que

$$K_{ij}^M(\lambda) = \frac{1}{\lambda} K_{ij}^M$$

Então, na métrica ds_λ^2 , a Condição (I) fica:

$$\begin{aligned} K_{ij}(\lambda) &= K_{ij}^M(\lambda) - \frac{3}{4} \sum_Y (\Omega_{ij}^Y(\lambda))^2 = \\ &= \frac{1}{\lambda} [K_{ij}^M - \frac{3}{4} \frac{1}{\lambda} \sum_Y (\Omega_{ij}^Y)^2] . \end{aligned}$$

Como $\sum_Y (\Omega_{ij}^Y)^2$ é limitado superiormente para todo par ds^2 -ortonormal $\{\tilde{X}_i, \tilde{X}_j\}$, $\exists \lambda > 0$ suficientemente grande tal que $K_{ij}(\lambda) > \epsilon > 0$. $\square$

As próximas etapas, que dizem respeito às condições (II) e (III) do Teorema (3.5.3), poderão ser viabilizadas, de maneira concreta, com a escolha de uma forma de conexão ω em P . É bom ter sempre em mente que, fixada ω em P , a pergunta que se segue é: É possível definir $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciável de tal forma que (II) e (III) se verifiquem simultaneamente?

Vamos começar reescrevendo a Condição (III) na seguinte forma:

$$(III) [K_{ij}K_{j\alpha} - (\tilde{H}_{ij;j}^\alpha)^2] \mu^4 + [2K_{ij}\Delta_\beta^j + 2K_{j\alpha}\tilde{H}_{ji;i}^\beta - 2\tilde{H}_{ij;j}^\alpha \Gamma_{\alpha\beta ji}] \mu^3 +$$

$$\begin{aligned}
& + [K_{ij}K_{\alpha\beta} + 4\tilde{H}_{ji;i}^{\beta}\Delta_{\beta}^j + K_{i\beta}K_{j\alpha} - 2\tilde{H}_{ij;j}^{\alpha}\Delta_{\alpha}^i - (\Gamma_{\alpha\beta ji})^2] \mu^2 + \\
& + [2K_{\alpha\beta}\tilde{H}_{ji;i}^{\beta} + 2K_{i\beta}\Delta_{\beta}^j - 2\Gamma_{\alpha\beta ji}\Delta_{\alpha}^i] \mu + \\
& + [K_{i\beta}K_{\alpha\beta} - (\Delta_{\alpha}^i)^2] \geq 0, \quad \forall \mu \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Denotando por $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, $D(x)$ e $E(x)$, respectivamente os coeficientes μ^4 , μ^3 , μ^2 , μ^1 e μ^0 , a Condição (III) é equivalente a determinar condições sobre estes coeficientes de tal forma que o polinômio do 4º grau:

$$Q(x)(\mu) = A(x)\mu^4 + B(x)\mu^3 + C(x)\mu^2 + D(x)\mu + E(x) \geq 0, \quad \forall \mu \in \mathbb{R}.$$

O coeficiente de μ^4 , $A(x)$, deverá ser necessariamente não negativo. Observamos que $A(x) \geq 0$ é justamente a Condição (II):

$$K_{ij}K_{j\alpha} - (\tilde{H}_{ij;j}^{\alpha})^2 \geq 0.$$

Passaremos então a considerar dois casos:

1º CASO. Existe $x_0 \in P$ tal que $A(x_0) = 0$. Neste caso:

$$Q(x_0)(\mu) = B(x_0)\mu^3 + C(x_0)\mu^2 + D(x_0)\mu + E(x_0)$$

que, como polinômio do 3º grau, possui pelo menos uma raiz real, assumindo portanto valores negativos.

Em vista disto, devemos impor:

$$B(x_0) = 0 \quad ; \quad \text{e então:}$$

$$Q(x_0)(\mu) = C(x_0)\mu^2 + D(x_0)\mu + E(x_0) \quad .$$

A próxima proposição esclarece este 1º Caso:

PROPOSIÇÃO (3.7.2). Se para uma dada conexão ω em P e uma função $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciável, existe pelo menos um ponto $x_0 \in P$ para o qual $K_{ij}K_{j\alpha} - (\tilde{H}_{ij;j}^\alpha)^2 = 0$, então as seguintes condições são equivalentes:

(1) A métrica g_f possui curvatura seccional não negativa no ponto x_0 .

(2) A função $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ também satisfaz

$$(i) \quad B(x_0) = 0, \quad C(x_0) > 0 \quad \text{e} \quad E(x_0)C(x_0) \geq D(x_0)^2$$

ou

$$(ii) \quad B(x_0) = C(x_0) = D(x_0) = 0 \quad \text{e} \quad E(x_0) \geq 0 \quad .$$

COROLÁRIO (3.7.3). Se, em particular, para um ponto $x_0 \in P$, existem índices j e α para os quais a curvatura vertical $K_{j\alpha}(x_0) = 0$ então $\tilde{H}_{ij;j}^\alpha = 0$.

2º CASO. O ponto $x_0 \in P$ é tal que $A(x_0) > 0$.

Dividindo $Q(x_0)(\mu)$ por $A(x_0)$, obtemos:

$$q(\mu) = q(x_0)(\mu) = \mu^4 + b(x_0)\mu^3 + c(x_0)\mu^2 + d(x_0)\mu + e(x_0)$$

onde

$$b(x_0) = \frac{B(x_0)}{A(x_0)}, \quad c(x_0) = \frac{C(x_0)}{A(x_0)}, \quad d(x_0) = \frac{D(x_0)}{A(x_0)} \quad \text{e} \quad e(x_0) = \frac{E(x_0)}{A(x_0)}.$$

Devemos obter agora, condições sobre os coeficientes de $q(\mu)$ de tal forma que ele assuma sempre valores ≥ 0 , $\forall \mu \in \mathbb{R}$.

OBSERVAÇÃO (3.7.4). O polinômio $q(\mu)$ não deverá possuir duas raízes reais a e b simples e distintas. Neste caso, ele se fatoraria, por exemplo como $(x-a)(x-b)(x-c)^2$ ($c \in \mathbb{R}$) ou como $(x-a)(x-b)(x^2 + \alpha x + \beta)$, e portanto assumiria valores negativos entre as raízes a e b . Então, se $q(\mu)$ possuir raízes reais, elas deverão ter multiplicidade par. Ou seja, $q(\mu) = (x-a)^2 \cdot (x-c)^2$ ou $q(\mu) = (x-a)^2 \cdot (x^2 + \alpha x + \beta)$.

(3.7.5). Vamos determinar condições sobre os coeficientes de $q(\mu)$, determinando seu valor nos seus pontos críticos que são as raízes de

$$q'(\mu) = 4\mu^3 + 3b(x_0)\mu^2 + 2c(x_0)\mu + d(x_0).$$

Denotemos por:

$$p(\mu) = \mu^3 + \alpha_1 \mu^2 + \alpha_2 \mu + \alpha_3$$

onde

$$\alpha_1 = 3/4 b(x_0) ; \quad \alpha_2 = 1/2 c(x_0) \quad \text{e} \quad \alpha_3 = 1/4 d(x_0)$$

Definindo a transformação $\mu = \lambda - \frac{1}{3} \alpha_1$, obtemos o polinômio

$$\bar{p}(\lambda) = \lambda^3 + M\lambda + N, \text{ onde}$$

$$M = -\frac{1}{3} \alpha_1^2 + \alpha_2$$

e

$$N = -\frac{2}{27} \alpha_1^3 - \frac{1}{3} \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_3.$$

O produto das diferenças das raízes de $\bar{p}(\lambda)$ deverão satisfazer:

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_3) = \sqrt{D} = \sqrt{-4M^3 - 27N^2},$$

onde D é portanto o discriminante da equação cúbica.

Estamos interessados em $\mu_i = \lambda_i - \frac{1}{3} \alpha_1$ ($i=1,2,3$) que são as raízes de $p(\mu)$ (e portanto pontos críticos de $q(\mu)$), onde, denotando por:

$$N^+ = \sqrt[3]{-\frac{27}{2}N + \frac{3}{2}\sqrt{-3D}} \quad \text{e por} \quad N^- = \sqrt[3]{-\frac{27}{2}N - \frac{3}{2}\sqrt{-3D}}$$

$$3\lambda_1 = N^+ + N^-$$

$$3\lambda_2 = \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3}\right)N^+ + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}\right)N^-$$

$$3\lambda_3 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}\right)N^+ + \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3}\right)N^-.$$

CASO 2.1. Se o discriminante $D > 0$, $p(\mu)$ tem 3 raízes reais distintas que são os pontos críticos de $q(\mu)$, $\mu_1 < \mu_2 < \mu_3$. Então μ_1 e μ_3 são mínimos locais e μ_2 é máximo local para $q(\mu)$. Devemos então calcular $q(\mu_1)$ e $q(\mu_3)$ e verificar se são ≥ 0 . Neste caso, $q(\mu) \geq 0$, $\forall \mu \in \mathbb{R}$.

CASO 2.2. Se o discriminante $D = 0$, então $p(\mu)$ tem pelo menos duas raízes reais iguais, $\bar{\mu}_1 = \bar{\mu}_2$ e $\bar{\mu}_3$. Neste caso, $q(\mu)$ terá um ponto de mínimo local em $\bar{\mu}_1$ e uma inflexão em $\bar{\mu}_3$ ou então $p(\mu)$ terá somente um mínimo local em $\bar{\mu}_1$. Em ambos casos, se $q(\bar{\mu}_1) \geq 0$ então $q(\mu) \geq 0$, $\forall \mu \in \mathbb{R}$.

CASO 2.3. Se o discriminante $D < 0$, então $p(\mu)$ tem uma única raiz real $\tilde{\mu}_1$. Neste caso $q(\tilde{\mu}_1)$ é o mínimo absoluto de $q(\mu)$. Então se $q(\tilde{\mu}_1) \geq 0$, $q(\mu) \geq 0$, $\forall \mu \in \mathbb{R}$.

Reunimos os três últimos casos na proposição a seguir:

PROPOSIÇÃO (3.7.6). Se para uma dada conexão ω em P e uma função $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciável, num ponto $x_0 \in P$, $K_{ij}K_{j\alpha} - (\tilde{H}_{ij;j}^\alpha)^2 > 0$, então as seguintes condições são equivalentes:

(1) A métrica g_f possui curvatura seccional não negativa no ponto x_0 .

(2) A função $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ também satisfaz

$$(iii) \quad D > 0, \quad q(\mu_1) \geq 0 \quad \text{e} \quad q(\mu_2) \geq 0$$

ou

$$(iv) \quad D = 0 \quad \text{e} \quad q(\bar{\mu}_1) \geq 0$$

ou

$$(v) \quad D < 0 \quad \text{e} \quad q(\tilde{\mu}_1) \geq 0$$

onde $D, \mu_1, \mu_2, \bar{\mu}_1$ e $\tilde{\mu}_2$ são obtidos como no desenvolvimento de (3.7.5).

APÊNDICE A.3.2

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA (3.2.1) - (EXTRAÍDO DE NOTAS
NÃO PUBLICADAS - DERDZIŃSKI-RIGAS)

PROVA. Iniciamos com a demonstração do seguinte

LEMA (3.8.1). Dados parâmetros reais $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \xi, \eta, \theta, \lambda$, defina a família de funções $\varphi_t : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ ($t > 0$) por:

$$\begin{aligned} \varphi_t(A, B, C, D) = & \alpha A^2 C^2 + t(\beta A^2 C^2 + \gamma A^2 C D + \delta A C^2 B + \epsilon A B C D + \lambda B^2 D^2) + \\ & + t^2(\theta A^2 D^2 + \eta B^2 C^2 + \xi A B C D). \end{aligned}$$

Então as seguintes condições são equivalentes:

(i) Existe um número real positivo t_0 , dependendo continuamente de $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \xi, \eta, \theta, \lambda$ e tal que

(a) $\varphi_t(A, B, C, D) > 0$, sempre que $0 < t \leq t_0$, e

(b) $A^2 + B^2 = 1 = C^2 + D^2$

(ii) Os parâmetros satisfazem

$$(c) \begin{cases} \lambda > 0, \theta > 0, \eta > 0 \\ 4\alpha\theta > \gamma^2, 4\alpha\eta > \delta^2. \end{cases}$$

PROVA DO LEMA. Assuma (i). Então (ii) segue imediatamente de (a) considerando inicialmente $B = D = 1$, $A = C = 0$; depois $A=1$, $B = 0$ e, finalmente $C = 1$, $D = 0$.

Assuma agora (ii). Desde que (b) e (c) junto com $BD = 0$ implica (a) para todo $t > 0$ suficientemente pequeno, podemos considerar somente o caso $BD \neq 0$. Dividindo $\varphi_t(A,B,C,D)$ por $B^2 D^2$ e fazendo $x = A/B$, $y = C/D$, vemos que a desigualdade (a) é equivalente a:

$$(d) \quad \begin{cases} x^2 (\alpha + t\beta)y^2 + t\gamma y + t^2\theta + x[t\delta y^2 + t\epsilon y + t^2\zeta y] + \\ + t\lambda + t^2\eta y^2 > 0 \end{cases}$$

para quaisquer reais x, y , desde que $t > 0$ seja suficientemente pequeno. A expressão

$$(\alpha + t\beta)y^2 + t\gamma y + t^2\theta$$

é positiva para $t > 0$ e todo real y , desde que $\alpha + t\beta > 0$ e o discriminante (com relação a y),

$$t^2(\gamma^2 - 4\alpha\theta - 4t\beta\theta) < 0$$

para t próximo de zero.

Portanto, para $t > 0$ suficientemente pequeno, o lado esquerdo de (d) pode ser visto como uma equação binomial na variável

x com o coeficiente em x^2 , positivo. A condição (d) é então equivalente a não-negatividade do correspondente discriminante, isto é, a

$$(e) \quad \left\{ \begin{aligned} & y^2 [y^2 (\delta^2 - 4\alpha\eta - 4t\beta\eta) + y(2\delta\varepsilon + 2\delta\xi t - 4t\gamma\eta) + \\ & + (\varepsilon + \xi t)^2 - 4t^2\theta\eta] < \lambda \left[\left(\frac{4\alpha}{t} + 4\beta \right) y^2 + \right. \\ & \left. + 4\gamma y + 4t\theta \right] \end{aligned} \right.$$

O lado esquerdo de (e) é uma família de funções $F_t(y)$ na variável y , dependendo do parâmetro $t > 0$, satisfazendo $F_t(0) = 0$, $\frac{d}{dt} F_t(y) \Big|_{y=0} = 0$, $\lim_{|y| \rightarrow \infty} F_t(y) = -\infty$ e uniformemente limitada em uma vizinhança fixada de $y = 0$ (ver Figura 5). Para t suficientemente pequeno, F_t é sempre independente de t . Por outro lado, o lado direito de (e) é igual a

$$\lambda \left(\frac{4\alpha}{t} + 4\beta \right) \left[\left(y + \frac{t\gamma}{2(\alpha + t\beta)} \right)^2 + \left(\frac{t}{2(\alpha + t\beta)} \right)^2 (4\alpha\theta - \gamma^2 + 4t\beta\theta) \right]$$

que é uma família $G_t(y)$ de binomiais satisfazendo $\lim_{t \rightarrow 0} G_t'' = \infty$. O

mínimo de G_t ocorre em $m_t = -\frac{t\gamma}{2(\alpha + t\beta)}$ e é igual a

$$\frac{\lambda t}{\alpha + t\beta} (4\alpha\theta - \gamma^2 + 4t\beta\theta).$$

Os gráficos de G_t formam uma família a 1-parâmetro de parábolas, para as quais a curva dos vértices $t \longrightarrow L(t) = (m_t, G_t(m_t))$

satisfaz:

$$L(0) = (0,0) \text{ e } L'(0) = \left(-\frac{\gamma}{2\alpha}, \frac{\lambda}{\alpha} (4\alpha\theta - \gamma^2)\right)$$

com segunda componente > 0 , em vista de (c).

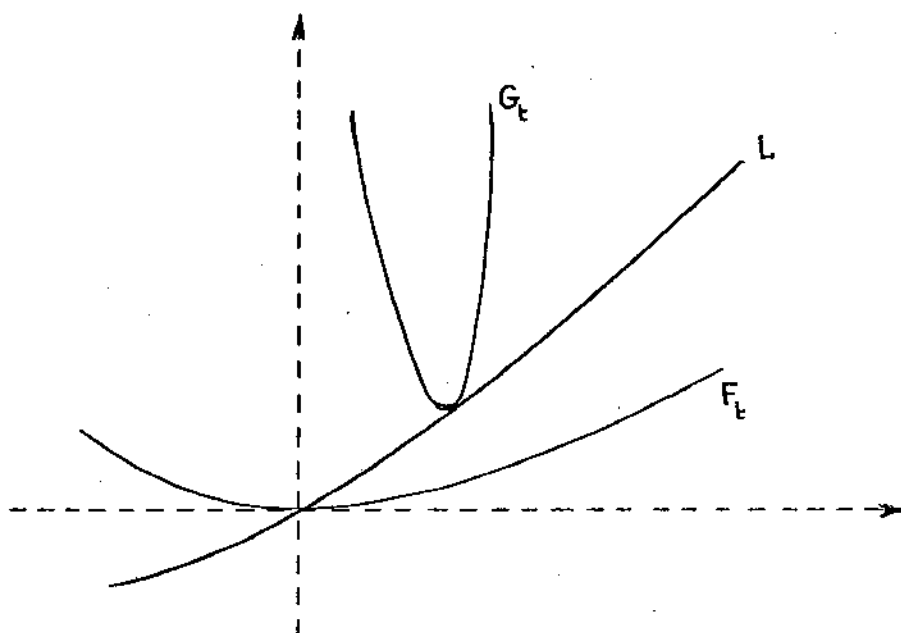


Figura 5

Portanto, L não é tangente ao eixo horizontal em $(0,0)$. As parábolas G_t têm um comportamento como na Figura 5, o que completa a prova.

PROVA DO TEOREMA (3.2.1). Fixe um subconjunto aberto $U \subset M$ e um

campo de vetores $e_1, \dots, e_n$, h-ortonormais em U e escolha uma base Q-ortonormal u_1, u_2, u_3 de g (A notação usada é a mesma do §2 - Capítulo III). Assumimos agora que $i, j, k, l \in \{1, \dots, n\}$ e $\alpha, \beta, \gamma \in \{1, 2, 3\}$. Além disso, para um campo vetorial X em M , e $u \in g$, denotamos por $\bar{X}$ o levantamento horizontal de X e por u^* , o campo vetorial fundamental em P correspondente a u . Finalmente, $\overset{t}{\nabla}$ e R^t (respect., $\overset{h}{\nabla}$ e R^h ou $\overset{Q}{\nabla}$ e R^Q) denotam a derivada covariante e o tensor de curvatura de (P, g_t) (resp. de (M, h) ou (G, Q)). A base local de campos vetoriais $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n, u_1^*, u_2^*, u_3^*$ satisfaz agora as relações:

$$g_t(\bar{e}_i, \bar{e}_j) = \delta_{ij}, \quad g_t(\bar{e}_i, u_\alpha^*) = 0,$$

$$g_t(u_\alpha^*, u_\beta^*) = t\delta_{\alpha\beta}, \quad \overset{t}{\nabla}_{\bar{e}_i} \bar{e}_j = \left(\overset{h}{\nabla}_{e_i} e_j \right) - 1/2 (\Omega(e_i, e_j))^*,$$

$$\overset{t}{\nabla}_{\bar{e}_i} u_\alpha^* = \overset{t}{\nabla}_{u_\alpha^*} \bar{e}_i = 1/2 \sum_k \Omega_{ik}^\alpha \bar{e}_k, \quad \overset{t}{\nabla}_{u_\alpha^*} u_\beta^* = \left(\overset{G}{\nabla}_{u_\alpha} u_\beta \right)^*,$$

onde

$$\Omega = d\omega + [\omega, \omega] \quad \text{é a forma de curvatura e}$$

$$\Omega(\bar{e}_i, \bar{e}_j) = \sum_\alpha \Omega_{ij}^\alpha u_\alpha^*. \quad \text{Usando agora as notações:}$$

$$R_{ijk\alpha}^t = R^t(\bar{e}_i, \bar{e}_j, \bar{e}_k, u_\alpha^*), \quad R_{ijkl}^h = R^h(e_i, e_j, e_k, e_l), \quad \text{etc.,}$$

temos:

$$R_{ijkl}^t = R_{ijkl}^h + tA_{ijkl}$$

$$R_{ijk\alpha}^t = tB_{ijk\alpha}$$

$$R_{iaj\beta}^t = tC_{iaj\beta} + \frac{1}{4} t^2 \sum_k \Omega_{jk}^\alpha \Omega_{ik}^\beta$$

$$R_{ija\beta}^t = 2tC_{iaj\beta} + \frac{1}{4} t^2 \sum_k (\Omega_{jk}^\alpha \Omega_{ik}^\beta - \Omega_{ik}^\alpha \Omega_{jk}^\beta)$$

$$R_{ia\beta\gamma}^t = 0$$

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}^t = tR_{\alpha\beta\gamma\delta}^Q$$

onde A_{ijkl} , $B_{ijk\alpha}$, $C_{iaj\beta}$ são expressões que independem de t . É importante observar que $C_{iaj\beta} + C_{ja i\beta} = 0$ e

$$B_{ijk\alpha} = \frac{1}{2} \langle (\nabla_{e_i} \Omega)(e_j, e_k), u_\alpha \rangle - \frac{1}{2} \langle (\nabla_{e_j} \Omega)(e_i, e_k), e_\alpha \rangle,$$

onde u_α é considerado (de modo não-canônico) como elemento de adP. Considere agora um plano bidimensional tangente a P. É fácil verificar que sempre existe uma base g_1 -ortonormal da forma

$$X = A\bar{e}_i + Bu_\alpha^*, \quad Y = C\bar{e}_j + Du_\beta^* \quad \text{com } i \neq j, \quad \alpha \neq \beta$$

e $A^2 + B^2 = C^2 + D^2 = 1$ (ver Lema (3.4.9)). Das fórmulas

anteriores, temos:

$$R^t(X, Y, X, Y) = \varphi(A, B, C, D) \quad , \quad \varphi_t \text{ definida como no Lema (3.8.1)} \quad ,$$

com

$$\alpha = R^h_{ijij} \quad , \quad \beta = A_{ijij} \quad , \quad \gamma = 2B_{ij i \beta} \quad , \quad \delta = -2B_{ij j \alpha} \quad ,$$

$$\epsilon = 6C_{i \alpha j \beta} \quad , \quad \xi = \sum_k \left(\frac{1}{2} \Omega^{\alpha}_{jk} \Omega^{\beta}_{ik} - \Omega^{\alpha}_{ik} \Omega^{\beta}_{jk} \right) \quad ,$$

$$\eta = \frac{1}{4} \sum_k (\Omega^{\alpha}_{jk})^2 \quad , \quad \theta = \frac{1}{4} \sum_k (\Omega^{\beta}_{ik})^2 \quad , \quad \lambda = R^Q_{\alpha \beta \alpha \beta} \quad .$$

O resultado segue agora imediatamente do Lema (3.8.1).

REFERÊNCIAS

- [A] M.F. Atiyah - Geometry of Yang-Mills Fields - Lezione Fermiane - Accad. Naz. dei Lincei - Scuola Normale Superiore - Pisa - (1979).
- [A,W] S. Aloff and N. Wallach - An Infinite Family of Distinct 7-Manifolds Admitting Positively Curved Riemannian Structures - Bull. of the Am. Math. Soc. - 81 - (1975).
- [B] M. Berger - Les Variétés Riemanniennes Homogènes Normales Simplement Connexes a Courbure Strictement Positive - Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa - 15 - (1961).
- [BB] B. Bergery - Les Variétés Riemanniennes Homogènes Simplement Connexes de Dimension Impaire a Courbure Strictement Positive - J. Math. Pures et Appl. - 55 - (1976).
- [C] M.P. do Carmo - Notas de Geometria Riemanniana - Notas I.M.P.A - Rio de Janeiro - (1978).
- [C,G] J. Cheeger and D. Gromoll - On the Structure of Complete Manifolds of Nonnegative Curvature - Ann. of Math. - (1972).

- [CT] E. Cartan - Sur Certaines Formes Riemanniennes Remarquables des Géométries à Groupe Fondamental Simple - Ann. Ecol. Norm. - 44 - (1927).
- [D] A. Derdziński - On Compact Riemannian Manifolds with Harmonic Curvature - Math. Ann. - 259 - (1982).
- [D,R-1] A. Derdziński and A. Rigas - Unflat Connections in 3-Sphere Bundles Over S^4 - Am. Math. Soc. - (1981).
- [D,R-2] A. Derdziński and A. Rigas - Unflatness and Positive Curvature - Notas não Publicadas.
- [DT-1] D. Deturck - The Equation of Prescribed Ricci Curvature - Bull. of the Am. Math. Soc. - 3 - (1980).
- [DT-2] D. Deturck - Metrics with Prescribed Ricci Curvature - Proc. of Diff. Geo. Seminar - (1980).
- [E] J.H. Eschenburg - New Examples of Manifolds with Strictly Positive Curvature - Invent. Math. - 66 - (1982).
- [E,K] J. Eells and N.H. Kuiper - An Invariant for Certain Smooth Manifolds - Ann. Math. Pura Appl. - 60 - (1962).

- [G,L-1] M.Gromov and H.B. Lawson, Jr. - The Classification of Simply Connected Manifolds of Positive Scalar Curvature - Ann. of Math. - 111 - (1980).
- [G,L-2] M. Gromov and H.B. Lawson, Jr. - Spin and Scalar Curvature in the Presence of a Fundamental Group I - Ann. of Math. - 111 - (1980).
- [G,M-1] D. Gromoll and W. Meyer - On Complete Open Manifolds of Positive Curvature - Ann. of Math. - 90 - (1969).
- [G,M-2] D. Gromoll and W. Meyer - An Exotic Sphere with Nonnegative Sectional Curvature - Ann. of Math. - (1974).
- [H] H. Hernandez - A Class of Compact Manifolds with Positive Ricci Curvature - Thesis - SUNY - (1973).
- [HL] P. Hilton - Suspension Theorems and the Generalized Hopf Invariant - Proc. London Math. Soc. - (3) - (1951).
- [HT] N. Hitchin - Harmonic Spinors - Advances in Math. - 14 - (1974).
- [HU] S.T. Hu - Homotopy Theory - Academic Press - New York - (1959).

- [J] G.R. Jensen - Einstein Metrics on Principal Fibre Bundles
- J. Diff. Geo. - 8 - (1973).
- [K,N] S. Kobayashi and K. Nomizu - Foundations of Differential
Geometry - Volumes I e II - Interscience - New York - (1969).
- [K,W-1] J. Kazdan and F.W. Warner - Existence and Conformal De-
formation of Metrics with Prescribed Gaussian and Scalar
Curvatures - Ann. of Math. - (1975).
- [K,W-2] J. Kazdan and F.W. Warner - A Direct Approach to the De-
termination of Gaussian and Scalar Curvature Functions - In-
ventiones Math. - 28 - (1975).
- [K,W-3] J. Kazdan and F.W. Warner - Prescribing Curvatures - Proc.
of Symposia in Pure Math. - 27 - (1975).
- [K,W-4] J. Kazdan and F.W. Warner - Scalar Curvature and Conformal
Deformation of Riemannian Structure - J. Diff. Geometry - 10-
- (1975).
- [L] A. Lichnerowicz - Spineurs Harmoniques - C.R. Acad. Sci.
Paris Sér. - 257 - (1963).

- [L,Y] H.B. Lawson and S.T. Yau - Scalar Curvature, Non-Abelian Group Actions, and the Degree of Symmetry of Exotic Spheres - Comment. Math. Helv. - 49 - (1974).
- [M] J.W. Milnor - Remarks Concerning Spin Manifolds - Diff. and Comb. Topology - Princeton University Press, Princeton - (1965).
- [M,R] F. Mercuri e A. Rigas - Curvatura e Topologia - Escola de Geo. Dif.-Univ. do Ceará - (1978).
- [N] J. Nash - Positive Ricci Curvature on Fibre Bundles - Thesis - SUNY.
- [NM-1] K. Nomizu - Invariant Affine Connections on Homogeneous Spaces - Amer. J. of Math. - 76 - (1954).
- [NM-2] K. Nomizu - Characteristic Roots and Vectors of a Differentiable Family of Symmetric Matrices - Linear and Multilinear Algebra - 1 - (1973).
- [ON] B. O'Neill - The Fundamental Equations of a Submersion - Michigan Math. Journal - 13 - (1966).

- [P] W.A. Poor - Some Exotic Spheres with Positive Ricci curvature - Math. Ann. - 216 - (1975).
- [R-1] A. Rigas - Scalar Curvatures on $O(M)$, $G_2(M)$ - Proc. of the Am. Math. Soc. - 61 - (1976).
- [R-2] A. Rigas - Geodesic Spheres as Generators of the Homotopy Groups of O , BO - Journal of Differential Geometry - 12 (1978).
- [R-3] A. Rigas - Some Bundles of Non-Negative Curvature - Math. Ann. - 232 - (1978).
- [R-4] A. Rigas - Atas da IV Escola de Geometria Diferencial - USP , SP - 1984.
- [S,Y-1] R. Shoen and S.T. Yau - On the Structure of Manifolds with Positive Scalar Curvature - Manuscripta Math. - 28 - (1979).
- [S,Y-2] R. Shoen and S.T. Yau - Existence of Incompressible Minimal Surfaces and the Topology of three Dimensional Manifolds with Nonnegative Scalar Curvature - Annals of Math. - 110 - (1979).
- [U-1] K. Uhlenbeck - Removable Singularities in Yang-Mills Fields - Bull. Amer. Soc. - 1 - (1979).

- [U-2] K. Uhlenbeck - Removable Singularities in Yang Mills Fields - Comm. Math. Phys. - 83 - (1982).
- [Y] S.T. Yau - Seminar on Differential Geometry - Problem Section - Annals of Math. Studies - 102 - (1982).
- [W] N. Wallach - Compact Homogeneous Riemannian Manifolds with Strictly Positive Curvature - Ann. of Math. - 96 - (1972).
- [WT-1] A. Weinstein - Unflat Bundles and Metrics of Positive Curvature - Notices Amer. Math. Soc. - 15 - (1968).
- [WT-2] A. Weinstein - Fat Bundles and Symplectic Manifolds - Advances in Math. - 37 - (1980).