DISTRIBUIÇÃO EXATA DO PRODUTO DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS INDEPENDENTES BETAS WEIBULLIZADAS

SIDNEI RAGAZZI

Orientador
Prof.Dr. Pushpa Narayan Rathie

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação da Universidade Estadual de Campinas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Estatística.

Outubro - 1979.

Ã minha esposa, Aceli

e à minha filha, Ludmilla

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Pushpa Narayan Rathie, que nos propos esse trabalho e nos orientou de maneira dedicada e segura.

Aos amigos de todas as horas, Eugênia e Reinaldo.

À todos os amigos pelo estímulo que nos deram.

Aos meus pais.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

Apresentaremos, neste trabalho, a distribuição exata do produto de variáveis aleatórias independentes que têm distribuição beta weibullizada. Desta maneira, estamos dando nossa colaboração para aumentar o número de trabalhos que envolvem esta distribuição, que segundo Johnson e Kotz [10, pg.52] são poucos.

Uma razão para este fato, talvez seja que tal distribuição é pouco conhecida. No entanto, uma variável aleatória beta weibullizada Z é obtida a partir de uma variável beta padrão Z^c, $c > 0$, e cuja importância em Estatística é indiscutível.

Dividimos nosso trabalho em três capítulos, tal que no capítulo I, damos uma relação dos resultados obtidos por nós, tais como as funções hipergeométricas G e H usadas para expressarmos as funções densidades de probabilidades e as funções de distribuições acumuladas.

O método utilizado na determinação da distribuição do produto, além das funções G e H, foi a transformada inversa de Mellin com a ajuda da teoria dos resíduos que são apresentados no capítulo II, onde damos também algumas noções sobre variáveis complexas.

No capítulo III, é apresentada a distribuição exata do produto de variáveis aleatórias betas weibullizadas em termos das funções G e H e também em formas computáveis, através de funções especiais tais como as funções gama, beta, psi e zeta que são apresentadas no capítulo I juntamente com outros resultados de in teresse.

Usando G e H, encontramos a distribuição do produto de variáveis aleatórias que possuem funções densidades com a mesma forma funcional mas com parâmetros diferentes. De maneira geral, é possível encontrar expressões em formas computáveis para G e H através da teoria dos resíduos, o que não foi feito no caso mais geral devido ao elevado grau de dificuldades encontradas, mas o fizemos em casos particulares não menos importantes.

Para expressarmos a distribuição do produto em termos de séries, isto é, em formas computáveis, utilizamos o fato de que uma variável aleatória beta weibullizada é obtida de uma beta na forma padrão. Isto é, conhecemos o seu r-ésimo momento natural. Além disso, as variáveis que compõem o produto são independentes. Desta forma conhecemos também o r-ésimo momento natural do produto delas. A partir disso, usamos a transformada inversa de Mellin e a teoria dos resíduos para atingir nossos objetivos.

Esse mesmo método foi anteriormente utilizado por Springer e Thompson, Lomnicki, e outros, para a obtenção da distribuição do produto de outras variáveis aleatórias, dentre as quais destacamos as uniformes, as monomiais e as betas que são casos particulares de beta weibullizada e também consideradas nesse trabalho.

Assim, uma das finalidades do nosso trabalho é apresentar a utilização de momentos naturais, transformada inversa de Mellin e a teoria dos resíduos, como técnica para a obtenção de distribuições de variáveis aleatórias.

CAPÍTULO I

RESULTADOS UTILIZADOS

Nesse primeiro capítulo, daremos uma relação dos resultados utilizados por nós e que também são encontrados na bibliografia indicada no final desse trabalho.

1.1 - FUNÇÕES ESPECIAIS

No Capítulo III, as funções especiais abaixo relacionadas são muito importantes. Elas são:

a) Função Gama (Integral de Euler)

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{\alpha-1}\, dt \ , \quad R(\alpha) > 0 \tag{1.1.1}$$

onde $R(\alpha)$ é a parte real de α.

Por integração parcial em (1.1.1) podemos escrever

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\,\Gamma(\alpha) \tag{1.1.2}$$

Para n = inteiro positivo, temos

$$\Gamma(n) = (n-1)! \tag{1.1.3}$$

b) Função Gama (de Weierstrass)

$$(1.1.4) \qquad \Gamma(\alpha) = \frac{1}{\alpha e^{\gamma\alpha} \prod_{n=1}^{\infty} \left[\left(1+\frac{\alpha}{n}\right) e^{-\frac{\alpha}{n}} \right]}$$

onde $\gamma \cong 0,5772156649...$ é a constante de Euler.

c) Função Psi

$$(1.1.5) \qquad \psi(\alpha) = \frac{d}{d\alpha} \log_e \Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}$$

d) Função Zeta Generalizada (de Riemann)

$$(1.1.6) \quad \zeta(s,\nu) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(\nu+r)^s} \quad , \quad \nu \neq 0,-1,-2,...$$

e) Relação entre as funções Psi e Zeta

$$(1.1.7) \qquad \frac{d^n}{ds^n} \psi(a+s) = (-1)^{n+1} (n!)\, \zeta(n+1,\ a+s)$$

f) Função Beta

$$(1.1.8) \quad B(\alpha,\beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,dt \ , \ R(\alpha) > 0 \ , \quad R(\beta) > 0$$

onde $R(\alpha)$ e $R(\beta)$ são as partes reais de α e β respectivamente.

g) Relação entre as funções Gama e Beta

$$(1.1.9) \qquad B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

1.2 - FUNÇÕES HIPERGEOMÉTRICAS

Daremos agora, uma relação de funções hipergeométricas que serão usadas no Capítulo III, para expressarmos as funções densidades e acumuladas do produto de v.a.'s independentes betas weibullizadas; ou sejam:

a) Função Hipergeométrica de Gauss

$$(1.2.1) \qquad {}_2F_1(a,b,c;z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{n!\,(c)_n} z^n$$

onde $c \neq 0$ ou inteiro negativo, $|z| < 1$; $z = 1$ e $R(c-a-b) > 0$; $z = -1$ e $R(c-a-b+1) > 0$; e ainda

$$(1.1.2) \qquad (a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} = a(a+1)\ldots(a+n-1) \ ; \ (a)_o = 1$$

b) Função G (de Meijer)

$$(1.2.3) \qquad G^{m,n}_{p,q}\left[z \,\middle|\, \begin{matrix} a_1,\ldots,an,\ a_{n+1},\ldots,a_p \\ b_1,\ldots,b_m,\ b_{m+1},\ldots,b_q \end{matrix} \right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\prod_{j=1}^{m} \Gamma(b_j+s) \prod_{j=1}^{n} \Gamma(1-a_j-s)}{\prod_{j=m+1}^{q} \Gamma(1-b_j-s) \prod_{j=n+1}^{p} \Gamma(a_j+s)} z^{-s}\, ds$$

onde $i = \sqrt{-1}$ e L é um contorno propriamente escolhido, e ainda

(i) $z \neq 0$

(ii) $1 \leq m \leq q$, $0 \leq n \leq p$; m,n,q,p são inteiros positivos.

(iii) Produto vazio é igual a 1.

(iv) Os números complexos a_j e b_j são tais que nunhum polo de $\Gamma(b_j+s)$, $j = 1,2,\ldots,m$ coincide com algum polo de $\Gamma(1-a_j-s)$, $j = 1,\ldots,n$.

(v) L é, por exemplo, um contorno que separa os pontos $-s = b_j + \nu$, $j = 1,\ldots,m$; $\nu = 0,1,\ldots$ e $-s = a_j-1-\nu$, $j = 1,\ldots,m$; $\nu = 0,1,\ldots$.

c) Função H (de Barnes-Mellin)

$$(1.2.4)\quad H^{m,n}_{p,q}\left[z \,\middle|\, \begin{matrix} (a_1,\alpha_1);\ldots;(a_n,\alpha_n);(a_{n+1},\alpha_{n+1});\ldots;(a_p,\alpha_p) \\ \\ (b_1,\beta_1);\ldots;(b_m,\beta_m);(b_{m+1},\beta_{m+1});\ldots;(b_q,\beta_q) \end{matrix} \right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(b_j+\beta_j s)\ \prod_{j=1}^{n}\Gamma(1-a_j-\alpha_j s)}{\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-a_j-\beta_j s)\ \prod_{j=n+1}^{p}\Gamma(a_j+\alpha_j s)}\, z^{-s}\, ds$$

onde $i = \sqrt{-1}$ e L é um contorno propriamente escolhido, e ainda

(i) $z \neq 0$

(ii) $1 \leq m \leq q$, $0 \leq n \leq p$; m,n,q,p são inteiros positivos.

(iii) $\alpha_j (j=1,\ldots,p)$, $\beta_j (j=1,\ldots,q)$ são números positivos e $a_j (j=1,\ldots,p)$, $b_j (j=1,\ldots,q)$ são números complexos tais que $\alpha_j(b_h+\nu) \neq \beta_h(a_j-1-\lambda)$ para $\nu,\lambda = 0,1,\ldots$; $h=1,\ldots,m$; $j= 1,\ldots,n$.

(iv) Produto vazio é igual a 1.

(v) L é, por exemplo, um contorno que separa os pontos $-s = (b_j+\nu)/\beta_j$, $j = 1,\ldots,m$; $\nu=0,1,\ldots$ e $-s = (a_j-1-\nu)/\alpha_j$, $j = 1,\ldots,m$; $\nu = 0,1,\ldots$.

d) <u>Relação entre as funções H e G</u>

Quando $\alpha_1 = \ldots = \alpha_p = \beta_1 = \ldots = \beta_q = 1$, a função H definida em (1.2.4) é dada por:

$$(1.2.5)\quad H^{m,n}_{p,q}\left[z\left|\begin{matrix}(a_1,1);\ldots;(a_p,1)\\(b_1,1);\ldots;(b_q,1)\end{matrix}\right.\right] = G^{m,n}_{p,q}\left[z\left|\begin{matrix}a_1,\ldots,a_p\\b_1,\ldots,b_q\end{matrix}\right.\right]$$

e) <u>Um caso particular da função G</u>

$$(1.2.6)\quad G^{2,0}_{2,2}\left[z\left|\begin{matrix}\alpha_1+\beta_1-1, & \alpha_2+\beta_2-1\\ \alpha_1-1 &, \alpha_2-1\end{matrix}\right.\right] = \frac{z^{\alpha_2-1}(1-z)^{\beta_1+\beta_2-1}}{\Gamma(\beta_1+\beta_2)}\times$$

$$\times\ {}_2F_1(\alpha_2+\beta_2-\alpha_1,\beta_1;\beta_1+\beta_2;1-z),\quad |z|<1\ .$$

1.3 - DISTRIBUIÇÕES CONTÍNUAS

Apresentaremos a seguir as funções densidades das distribuições de particular interesse nesse trabalho, que são: beta weibullizada, beta, monomial e uniforme.

a) Distribuição Beta Weibullizada

A função densidade de probabilidade de uma variável aleatória Z com distribuição beta weibullizada é dada por:

$$(1.3.1) \qquad f(z) = \frac{1}{B(p,q)}\, c(z^c)^{p-\frac{1}{c}}(1-z^c)^{q-1} \quad , \quad 0 < z < 1$$

onde $c > 0$, $p > 0$, $q > 0$.

b) Distribuição Beta

A função densidade de probabilidade de uma variável aleatória Z com distribuição beta (na forma padrão) é dada por:

$$(1.3.2) \qquad f(z) = \frac{1}{B(p,q)}\, z^{p-1}(1-z)^{q-1} \quad , \quad 0 < z < 1$$

onde $p > 0$ e $q > 0$.

c) Momentos de uma v.a. beta

O r-ésimo momento natural de uma v.a. Z com distribuição beta é dado por:

(1.3.3) $$\mu_r'(Z) = E[Z^r] = \frac{\Gamma(p+q)\Gamma(p+r)}{\Gamma(p)\Gamma(p+q+r)}$$

d) <u>Distribuição Monomial</u> (função-potência)

A função densidade de uma v.a. Z monomial é dada por:

(1.3.4) $$f(z) = p\, z^{p-1}\ , \quad 0 < z < 1$$

onde $p > 0$.

e) <u>Distribuição Uniforme</u>

A função densidade de uma v.a. Z uniforme no intervalo (0,1) é dada por:

(1.3.5) $$f(z) = 1\ , \quad 0 < z < 1$$

1.4 - OUTROS RESULTADOS

Usaremos, ainda, os seguintes resultados:

a) <u>Integral de uma forma logarítmica</u>

(1.4.1) $$\int x^m (\log x)^n dx = (-1)^n \frac{n!}{(m+1)!}\, x^{m+1} \sum_{r=0}^{n} \frac{(-\log x)^r}{r!\,(m+1)^{n-r}}$$

onde $n+1$ é inteiro, $m > 0$ e $0 < x < 1$.

b) <u>Derivada n-ésima do produto de duas funções</u>

(1.4.2) $$\frac{d^n}{dt^n}(A\ B) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} A^{(i)} B^{(n-i)}\ , \qquad n = 0,1,\ldots$$

onde A e B são funções de t e $A^{(i)} = \frac{d^i}{dt^i} A$.

c) <u>Função densidade da n-ésima estatística de ordem</u>

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com função distribuição acumuladas F e função densidade f, as quais são positivas e contínuas para $a<x<b$ e zero em outro caso, e sejam $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ estatísticas de ordem. Então a função densidade $g_n(y_n)$ de Y_n é dada por

$$(1.4.3) \quad g_n(y_n) = \begin{cases} n[F(y_n)]^{n-1} f(y_n) & , \ a < y_n < b \\ 0 & , \ \text{e.o.c.} \end{cases}$$

d) <u>Função densidade da Amplitude Amostral</u>

Considerando o ítem (c) acima, seja $Y = Y_n - Y_1$ a amplitude amostral. A função densidade de Y é dada por:

$$(1.4.4) \quad f_y(y) = \begin{cases} n(n-1) \displaystyle\int_a^{b-y} [F(y+z)-F(z)]^{n-2} f(z)f(y+z)dz \ , & 0 < y < b-a \\ 0 \quad , \text{ em outro caso} \end{cases}$$

e) <u>Função densidade de uma transformação de variável</u>

Seja X uma variável aleatória com função densidade f_x contínua em R. Seja a transformação um a um dada por $Y = h(x)$. A função densidade de Y é dada por

$$f_y(y) = \begin{cases} f_x[h^{-1}(y)] \left| \dfrac{d}{dy} h^{-1}(y) \right| & , \quad y \in T \\ 0 \end{cases}$$

onde T é a imagem de h.

CAPÍTULO II

NOÇÕES DE VARIÁVEIS COMPLEXAS

Apresentaremos aqui, alguns teoremas e definições sobre variáveis complexas assim como a Transformada Inversa de Mellin, que formalizam os métodos utilizados na determinação da distribuição de probabilidades do produto de variáveis betas weibullizadas.

2.1 - VARIÁVEIS COMPLEXAS

Nesta secção, daremos os elementos de variáveis complexas que compõem a teoria dos resíduos usada na resolução do nosso problema.

DEFINIÇÃO 2.1.1: Diz-se que a função $g(s)$ da variável complexa s é analítica num ponto s_o, se a sua derivada $g'(s)$ existe não só em s_o como também em todo ponto s de uma vizinhança de s_o.

DEFINIÇÃO 2.1.2: Um ponto singular de uma função $g(s)$ é um ponto do plano complexo onde a função $g(s)$ deixa de ser analítica.

DEFINIÇÃO 2.1.3: Se existe uma vizinhança de um ponto singular s_o de uma função analítica $g(s)$, exceto no próprio ponto s_o, então s_o se diz ponto singular isolado ou singularidade isolada de $g(s)$.

Sendo s_o uma singularidade isolada de uma função $g(s)$ existe um número positivo r, tal que $g(s)$ é analítica em cada ponto s para o qual $0 < |s - s_o| < r$. Nessa vizinhança a função é representada pela série de Laurent.

$$(2.1.1) \qquad g(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (s-s_o)^n + \frac{b_1}{(s-s_o)} + \frac{b_2}{(s-s_o)^2} + \dots$$

onde os coeficientes são dados por:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{g(s)}{(s-s_o)^{n+1}}\, ds \qquad , \qquad n = 0,1,2,\dots$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} \frac{g(s)}{(s-s_o)^{-n+1}}\, ds \qquad , \qquad n = 1,2,\dots$$

tal que L_1 e L_2 são dois contornos fechados contendo s_o.

Em particular, nos interessa a definição do coeficiente b_1 dada abaixo.

DEFINIÇÃO 2.1.4: O coeficiente b_1 de $(s-s_o)^{-1}$ em (2.1.1) é chamado de resíduo de $g(s)$ no ponto singular isolado s_o e é dado por

$$(2.1.2) \qquad b_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{L} g(s)ds$$

onde L é um contorno fechado que inclui s_o tal que $g(s)$ é analítica sobre L e no interior de L.

TEOREMA DO RESÍDUO (2.1.1): Seja L um contorno fechado tal que uma função $g(s)$ é analítica sobre e dentro de L, exceto em um número finito de singularidades isoladas $s_1, s_2, \ldots, s_k$ interiores a L. Se $R_1, R_2, \ldots, R_k$ são os resíduos de $g(s)$ nessas singularidades, então

$$(2.1.3) \qquad \int_L g(s)ds = 2\pi i(R_1 + R_2 + \ldots + R_k)$$

onde a integral é calculada no sentido positivo (anti-horário) ao longo de L.

A demonstração desse teorema é dada, por exemplo, em [2 , pg. 147] ou [1 , pg. 122].

Na série de Laurent, dada em (2.1.1), a série de potências negativas de $(s-s_o)$ é chamada de parte principal de $g(s)$ em torno de s_o.

A estrutura da parte principal tem grande influência sobre o comportamento da função na proximidade do ponto singular, como veremos a seguir.

DEFINIÇÃO 2.1.5: Suponha que a parte principal em (2.1.1) contenha somente um número finito de termos; então existe um inteiro m tal que os coeficientes $b_{m+1}, b_{m+2}, \ldots$ são todos nulos e

$$(2.1.4) \quad g(s) = \frac{b_1}{(s-s_o)} + \frac{b_2}{(s-s_o)^2} + \ldots + \frac{b_m}{(s-s_o)^m} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (s-s_o)^n$$

quando $0 < |s-s_o| < r$, para algum número positivo r, onde $b_m \neq 0$. O ponto singular isolado s_o é então chamado polo de ordem m da função $g(s)$.

OBS: 1) Um polo de ordem $m=1$ é chamado polo simples.

2) Quando a parte principal de $g(s)$ em torno de s_o tem uma infinidade de termos, o ponto é chamado de ponto singular essencial da função.

Para determinarmos polos e seus resíduos de maneira mais prá tica enunciaremos o teorema seguinte.

TEOREMA 2.1.2: Suponhamos que uma função $g(s)$ satisfaça as seguintes condições: para algum inteiro positivo m existe um valor $\phi(s_o)$, diferente de zero, tal que a função

$$\phi(s) = (s-s_o)^m g(s) \tag{2.1.5}$$

é analítica em s_o. Então $g(s)$ tem um polo de ordem m em s_o. Seu resíduo em s_o é dado por

$$R_o = \frac{\phi^{(m-1)}(s_o)}{(m-1)!} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{s \to s_o} \frac{d^{m-1}}{ds^{m-1}} [(s-s_o)^m g(s)] \tag{2.1.6}$$

Para a demonstração desse teorema, ver [2 , pag 149].

As condições desse teorema são satisfeitas quando g tem a forma

$$g(s) = \frac{\emptyset(s)}{(s-s_o)^m} \quad , \quad m = 1,2,... \tag{2.1.7}$$

onde a função $\emptyset(s)$ é analítica em s_o e $\emptyset(s_o) \neq 0$.

Uma função de particular interesse em nosso trabalho é a função Gama. Usando a definição (1.1.4), ou seja,

$$\Gamma(s) = \frac{1}{s\, e^{\gamma s} \prod_{n=1}^{\infty} [(1+\frac{s}{n})e^{-\frac{s}{n}}]} \tag{2.1.8}$$

vemos que $\Gamma(s)$ é analítica em toda parte no plano complexo exceto em $s = 0,-1,-2,...,$ que são polos simples de $\Gamma(s)$.

2.2 - A TRANSFORMADA DE MELLIN

Abaixo daremos as definições de Transformada de Mellin e Tranformada Inversa de Mellin que são de grande importância na determinação da distribuição de probabilidades do produto de variáveis aleatórias.

DEFINIÇÃO 2.2.1: A TRANSFORMADA DE MELLIN de uma função $f(z)$, para $z > 0$, é definida por

$$g(s) = \int_0^{\infty} z^{s-1}\, f(z)dz \tag{2.2.1}$$

para $R(s) > 0$.

DEFINIÇÃO 2.2.2: Se a função $g(s)$ é a transformada de Mellin da função $f(z)$, e s é uma variável complexa, então $f(z)$ é a TRANSFORMADA INVERSA DE MELLIN e é dada por

$$(2.2.2) \qquad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L z^{-s} g(s) ds \quad , \qquad R(s) > 0$$

onde $i = \sqrt{-1}$, L é um contorno propriamente escolhido e $R(s)$ é a parte real de s.

DEFINIÇÃO 2.2.3: Seja $f(z)$ a função densidade de probabilidade de uma variável aleatória $Z > 0$. Então o $(s-1)$-ésimo momento natural de Z é dado por:

$$(2.2.3) \quad \mu'_{(s-1)}(Z) = E(Z^{s-1}) = \int_0^\infty z^{s-1} f(z) ds$$

Fazendo uma analogia entre esta última definição e a transformada de Mellin, vemos que

$$(2.2.4) \qquad g(s) = E[Z^{s-1}]$$

isto é, $g(s)$ é a transformada de Mellin da função densidade $f(z)$ da variável aleatória Z.

Analogamente, a transformada inversa de Mellin nos dá a função densidade $f(z)$ de Z se conhecemos $g(s)$ isto é, o $(s-1)$-ésimo momento da variável Z.

No capítulo III, utilizaremos a transformada inversa de Mellin para a determinação da função densidade de $Z = \prod_{i=1}^{n} Z_i$, tal que a variável aleatória Z_i, $i = 1,2,\ldots,n$, tem distribuição beta weibullizada e portanto conhecemos o seu (s-1)-ésimo momento.

Também faremos uso da teoria dos resíduos para a resolução da integral de (2.2.2).

CAPÍTULO III

DISTRIBUIÇÃO EXATA DO PRODUTO DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS BETAS WEIBULLIZADAS

3.0 - INTRODUÇÃO

Johnson e Kotz [10] comenta que quase nada foi feito com respeito a distribuição beta weibullizada que é obtida da variável aleatória Z tal que, para algum c, Z^c tem distribuição beta padrão.

Os poucos trabalhos existentes tratam da distribuição do produto e do quociente de variáveis aleatórias tais como uniformes, monomiais e betas que são casos particulares de beta weibullizada. Em relação a v.a.'s uniformes temos, por exemplo, os trabalhos de Gray e Obell [7], Rahman [17], Rider [21] e Sakamoto [24]. Com respeito a v.a.'s monomiais podemos citar Rider [23] e sobre v.a.'s betas temos os trabalhos de Jambunathan [8], Mathai [14] e Springer e Thompson [27].

Apresentaremos, neste capítulo, a distribuição exata do produto de $n \geq 2$ v.a. independentes betas weibullizadas, em termos da função H e também em forma de séries computáveis.

3.1 - "DISTRIBUIÇÃO DO PRODUTO DE V.A. INDEPENDENTES BETAS WEIBULLIZADAS"

Nesta secção encontraremos a distribuição do produto, em termos da função H, para quaisquer parâmetros das v.a.'s. Este resultado será apresentado no teorema 3.1.1. Apresentaremos também um caso particular desse resultado.

Usando a teoria dos resíduos é possível encontrar, de maneira geral, expressões para a função H em termos de séries que são computáveis (funções gama, psi e zeta para as quais existem subrotinas para computação). Essa teoria não foi aplicada neste caso mais geral, devido a complexidade na determinação dos polos, mas o faremos em capítulos subsequentes para casos especiais que também apresentam um certo grau de dificuldade.

TEOREMA 3.1.1: Sejam $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ v.a.'s independentes betas weibullizadas de parâmetros $p_i > 0$, $q_i > 0$ e $c_i > 0$. Ou seja, Z_i tem função densidade dada por

$$(3.1.1) \quad f_i(z_i) = \frac{\Gamma(p_i + q_i)}{\Gamma(p_i)\Gamma(q_i)} c_i (z_i^{c_i})^{p_i - \frac{1}{c_i}} (1 - z_i^{c_i})^{q_i - 1}, \quad 0 < z_i < 1$$

com $p_i > 0$, $q_i > 0$ e $c_i > 0$, $\forall i = 1,2,\ldots,n$.

Seja

$$(3.1.2) \qquad Z = \prod_{i=1}^{n} Z_i .$$

Então a função densidade $f(z)$ de Z é

$$(3.1.3) \quad f(z) = \frac{\prod_{i=1}^{n} \Gamma(p_i + q_i)}{\prod_{i=1}^{n} \Gamma(p_i)} H_{n,n}^{n,0} \left[z \left| \begin{matrix} (p_1 + q_1 - \frac{1}{c_1}, \frac{1}{c_1}); \ldots ; (p_n + q_n - \frac{1}{c_n}, \frac{1}{c_n}) \\ (p_1 - \frac{1}{c_1}, \frac{1}{c_1}); \ldots ; (p_n - \frac{1}{c_n}, \frac{1}{c_n}) \end{matrix} \right. \right]$$

$$, \quad 0 < z < 1$$

e a função distribuição acumulada $F(z)$, de Z é

$$(3.1.3)\quad F(z) = \frac{\prod_{i=1}^{n} \Gamma(p_i+q_i)}{\prod_{i=1}^{n} \Gamma(p_i)}\, z\, H^{n,1}_{n+1,n+1}\left[z \,\middle|\, \begin{matrix} (0,1);(p_1+q_1-\frac{1}{c_1},\frac{1}{c_1});\ldots;(p_n+q_n-\frac{1}{c_n},\frac{1}{c_n}) \\ (p_1-\frac{1}{c_1},\frac{1}{c_1});\ldots;(p_n-\frac{1}{c_n},\frac{1}{c_n});\ (-1,1) \end{matrix} \right]$$

$$,\ 0 < z < 1$$

DEMONSTRAÇÃO:

Temos que o $(s-1)$-ésimo momento de Z, $g(s)$, é dado por

$$(3.1.5)\quad g(s) = E\,[Z^{(s-1)}] = \prod_{i=1}^{n} E\,[Z_i^{(s-1)}] = \prod_{i=1}^{n} E\,[(Z_i^{c_i})^{\frac{s-1}{c_i}}]$$

Como $Z_i^{c_i}$ tem distribuição beta por (1.3.2), conhecemos o seu $(\frac{s-1}{c_i})$-ésimo momento, dado por (1.3.3), então

$$(3.1.6)\quad g(s) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\Gamma(p_i+q_i)\ (p_i + \frac{s-1}{c_i})}{\Gamma(p_i)\Gamma(p_i+q_i + \frac{s-1}{c_i})}$$

Usando a transformada inversa de Mellin (2.2.2), a função densidade de Z é

$$(3.1.7)\quad f(z) = \frac{\prod_{i=1}^{n} \Gamma(p_i+q_i)}{\prod_{i=1}^{n} \Gamma(p_i)} \frac{1}{2\pi i} \int_L z^{-s} \frac{\prod_{i=1}^{n} \Gamma(p_i + \frac{s-1}{c_i})}{\prod_{i=1}^{n} \Gamma(p_i+q_i + \frac{s-1}{c_i})}\, ds$$

onde L é um contorno que inclui os polos de

$$\prod_{i=1}^{n} \Gamma(p_i + \frac{s-1}{c_i}) \Big/ \prod_{i=1}^{n} \Gamma(p_i + q_i + \frac{s-1}{c_i})$$

Usando a função H, definida em (1.2.4), temos que a função densidade $f(z)$ de Z é dada por (3.1.3).

A função distribuição acumulada $F(z)$ de Z é dada por

$$F(z) = \int_0^z f(t)dt$$

$$= \frac{\prod_{i=1}^{n} \Gamma(p_i+q_i)}{\prod_{i=1}^{n} \Gamma(p_i)} \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\prod_{i=1}^{n} \Gamma(p_i - \frac{1}{c_i} + \frac{1}{c_i} s)}{\prod_{i=1}^{n} \Gamma(p_i+q_i - \frac{1}{c_i} + \frac{1}{c_i} s)} \int_0^z t^{-s} dt\, ds$$

$$= \frac{\prod_{i=1}^{n} \Gamma(p_i+q_i)}{\prod_{i=1}^{n} \Gamma(p_i)} z \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\prod_{i=1}^{n} \Gamma(p_i - \frac{1}{c_i} + \frac{1}{c_i} s)}{\prod_{i=1}^{n} \Gamma(p_i+q_i - \frac{1}{c_i} + \frac{1}{c_i} s)} \frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(2-s)} z^{-s} ds$$

e por (1.2.4) temos que $F(z)$ é dada por 3.1.4.

3.1.1 - CASO PARTICULAR

Da função H podemos conseguir a função G, (1.2.5); mas tanto para H quanto para G, nem sempre existem resultados em formas computáveis. Alguns casos especiais são apresentados no livro de Mathai e Saxena [15 ,pg. 61], como por exemplo ver(1.2.6).

Assim, usando (1.2.5), (1.2.6), (3.1.3) e para $n=2$; $c_i = 1$, $i = 1,2$, temos que a função densidade de Z é dada por:

$$(3.1.8)\quad f(z) = \frac{[\prod_{i=1}^{2} \Gamma(p_i+q_i)]}{[\prod_{i=1}^{2} \Gamma(p_i)]} \frac{z^{p_1-1}(1-z)^{q_1+q_2-1}}{\Gamma(q_1+q_2)} {}_2F_1(p_2+q_2-q_1, q_1; q_1+q_2; 1-z),$$

$$, \; 0 < z < 1$$

3.2 - "PRODUTO DE BETAS WEIBULLIZADAS COM PARÂMETROS $p_i = p, q_i=q$, $c_i = c$"

Agora apresentaremos a distribuição do produto de betas weibullizadas com parâmetros p, q e c, em termos da função G e também em séries, no teorema 3.2.1. Casos particulares dos resultados obtidos serão apresentados no final desta secção.

TEOREMA 3.2.1 - Sejam $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ v.a.'s independentes com distribuição beta weibullizada com parâmetros $p_i = p$, $q_i = q$ e $c_i = c$, $\forall i = 1,2,\ldots,n$. Ou seja, Z_i tem função densidade dada por:

$$(3.2.1)\quad f_i(z_i) = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} c(z_i^c)^{p-\frac{1}{c}} (1-z_i^c)^{q-1} \; , \; 0 < z_i < 1$$

onde $p > 0$, $q > 0$ e $c > 0$.

Então a função densidade de $Z = \prod_{i=1}^{n} Z_i$ é dada por:

$$(3.2.2)\quad f(z) = c\,\frac{\Gamma^n(p+q)}{\Gamma^n(p)}\,(z^c)^{p-\frac{1}{c}}\; G^{n,0}_{n,n}\left[z^c \,\middle|\, \begin{matrix} q\ ,\ldots,q \\ 0\ ,\ldots,0 \end{matrix} \right],\quad 0<z<1$$

e a função acumulada é

$$(3.2.3)\quad F(z) = \frac{\Gamma^n(p+q)}{\Gamma^n(p)}\,(z^c)^p\; G^{n-1}_{n+1,n+1}\left[z^c \,\middle|\, \begin{matrix} 1-p,q\ ,\ldots,q \\ 0,\ldots,0,\ -p \end{matrix} \right],\quad 0<z<1$$

Para expressarmos $f(z)$ e $F(z)$ em séries, consideraremos dois casos, ou sejam: Caso 1 com $q \neq$ inteiro positivo e o caso 2 com $q =$ inteiro positivo. Esta consideração é necessária para a determinação de polos.

CASO 1: ($q \neq$ inteiro positivo)

Para $q \neq$ inteiro positivo, a função densidade $f(z)$ de Z é

$$(3.2.4)\quad f(z) = c\,\frac{\Gamma^n(p+q)}{\Gamma^n(p)}\, z^{cp-1} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(z^c)^r}{(n-1)!} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} (-\log z^c)^j A_{0r}^{(n-1-j)}\ ,$$

$$,\ 0<z<1$$

e a função acumulada $F(z)$ é

$$(3.2.5)\quad F(z) = \frac{\Gamma^n(p+q)}{\Gamma^n(p)} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} A_{0r}^{(n-1-j)} (j!)\, z^{cr+cp}$$

$$\times \sum_{v=0}^{j} \frac{(-\log z^c)^v}{v!\,(r+p)^{j-v+1}} \quad , \quad 0 < z < 1$$

onde

$$(3.2.6) \qquad A_{0r}^{(n-1-j)} = \lim_{t\to -r} A_r^{(n-1-j)}$$

e

$$(3.2.7) \qquad A_{0r}^{(m)} = \sum_{j=0}^{m-1} \binom{m-1}{j} A_{0r}^{(m-1-j)} B_{0r}^{(j)} \quad , \quad m \geq 1$$

tal que

$$(3.2.8) \quad A_r^{(0)} = A_r = \frac{\Gamma^n(t+r+1)}{\left[\prod_{j=0}^{r-1}(t+j)^n\right]\Gamma^n(q+t)}$$

e

$$(3.2.9) \quad B_r = \frac{\partial}{\partial r}\log A_r \;;\; B_{0r} = \lim_{t\to -r} B_r$$

CASO 2: (q = inteiro positivo)

Para q = inteiro positivo, a função densidade $f(z)$ é

$$(3.2.10)\ f(z) = c\left[\prod_{j=1}^{q-1}(t+j)^n\right] z^{cp-1} \sum_{i=0}^{q-1} \frac{(z^c)^i}{(n-1)!} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (-\log z^c)^k A_{0i}^{(n-1-k)} \; ,$$

$$, \; 0 < z < 1$$

e a função acumulada $F(z)$ é

$$(3.2.11)\quad F(z) = \left[\prod_{j=0}^{q-1} (p+j)^n\right] \sum_{i=0}^{q-1} \frac{1}{(n-1)!} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} A_{0i}^{(n-1-k)} (k!) z^{ci+cp}$$

$$\times \sum_{v=0}^{k} \frac{(-\log z^c)^v}{v!\,(i+p)^{k-v+1}} \quad , \quad 0 < z < 1$$

onde

$$(3.2.12)\qquad A_{0i}^{(n-1-k)} = \lim_{t\to -i} A_i^{(n-1-k)}$$

e

$$(3.2.13)\qquad A_{0i}^{(m)} = \sum_{r=0}^{m-1} \binom{m-1}{r} A_{0i}^{(m-1-r)} B_{0i}^{(r)} \quad , \quad m \geq 1$$

tal que

$$(3.2.14)\qquad A_i^{(0)} = A_i = \frac{1}{\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{q-1} (t+j)^n}$$

e

$$(3.2.15)\qquad B_i = \frac{\partial}{\partial t} \log A_i \quad ; \quad B_{0i} = \lim_{t\to -i} B_i$$

DEMONSTRAÇÃO:

Temos que o (s-1)-ésimo momento de Z, g(s), é dado por (3.1.6) fazendo $p_i = p$, $q_i = q$ e $c_i = c$, $\forall i = 1,2,\ldots,n$.

Usando a transformada inversa de Mellin, (2.2.2), a função densidade de Z é

$$(3.2.16)\quad f(z) = \frac{\Gamma^n(p+q)}{\Gamma^n(p)} \frac{1}{2\pi i} \int_L z^{-s} \frac{\Gamma^n(p+\frac{s}{c}-\frac{1}{c})}{\Gamma^n(p+q+\frac{s}{c}-\frac{1}{c})}\, ds$$

onde L é um contorno que inclui os polos de

$$(3.2.17)\qquad \Gamma^n(p+\frac{s}{c}-\frac{1}{c}) \,/\, \Gamma^n(p+q+\frac{s}{c}-\frac{1}{c})$$

Fazendo

$$t = p + \frac{s}{c} - \frac{1}{c}$$

podemos escrever (3.2.17) como sendo

$$(3.2.18)\quad f(z) = c\, \frac{\Gamma^n(p+q)}{\Gamma^n(p)}\, z^{cp-1} \frac{1}{2\pi i} \int_L (z^c)^{-t} \frac{\Gamma^n(t)}{\Gamma^n(q+t)}\, dt$$

onde L é um contorno que inclui os polos de

$$(3.2.19)\qquad \Gamma^n(t) \,/\, \Gamma^n(q+t)$$

Usando a função G, (1.2.3), temos que a função densidade f(z) de Z é dada por (3.2.2).

A função distribuição acumulada $F(z)$, de Z, é dada por

$$(3.2.20) \qquad F(z) = \int_0^z f(y)dy$$

$$= c\,\frac{\Gamma^n(p+q)}{\Gamma^n(p)}\,\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\Gamma^n(t)}{\Gamma^n(q+t)}\int_0^z y^{cp-ct-1}\,dy\,dt$$

$$= \frac{\Gamma^n(p+q)}{\Gamma^n(p)}(z^c)^p \cdot \frac{1}{2\pi i}\int_L (z^c)^{-t}\,\frac{\Gamma^n(t)}{\Gamma^n(q+t)}\,\frac{\Gamma(p-t)}{\Gamma(p-t+1)}\,dt$$

e por (1.2.3), temos que $F(z)$ pode ser escrita como (3.2.3).

Para demonstrarmos (3.2.4), (3.2.5), (3.2.10) e (3.2.11) devemos considerar (3.2.18). Usando a teoria dos resíduos devemos determinar os polos de (3.2.19). Para tanto, consideraremos o caso 1, com $q \neq$ inteiro positivo e o caso 2, com $q =$ inteiro positivo.

CASO 1: $q \neq$ inteiro positivo

Neste caso, $q \neq$ inteiro positivo e os polos de (3.2.19) são:

$$t = -r \ , \quad \forall r = 0,1,2,\ldots$$

todos de ordem n.

Usando o teorema do resíduo (2.1.3) e por (3.2.18) temos

$$(3.2.21) \qquad f(z) = c\,\frac{\Gamma^n(p+q)}{\Gamma^n(p)}\,z^{cp-1} \cdot \sum_{r=0}^{\infty} R_r$$

onde

$$(3.2.22) \quad R_r = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{t\to -r} \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} \left[(t+r)^n \frac{\Gamma^n(t)(z^c)^{-t}}{\Gamma^n(q+t)} \right]$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \lim_{t\to -r} \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} \left[\frac{\Gamma^n(t+r+1)(z^c)^{-t}}{\left[\prod_{j=0}^{r-1} (t+j)^n\right] \Gamma^n(q+t)} \right]$$

$$= \frac{(z^c)^r}{(n-1)!} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} (-\log z^c)^j A_{0r}^{(n-1-j)}$$

tal que

$$A_{0r}^{(n-1-j)} = \lim_{t\to -r} A_r^{(n-1-j)}$$

onde

$$A_{0r}^{(m)} = \frac{\partial^m}{\partial t^m} A_{0r} = \frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}} [A_{0r} \cdot B_{0r}]$$

$$= \sum_{i=0}^{m-1} \binom{m-1}{i} A_{0r}^{(m-1-i)} B_{0r}^{(i)} \quad , \quad m \geq 1$$

e

$$A_r^{(0)} = A_r = \frac{\Gamma^n(t+r+1)}{\left[\prod_{j=0}^{r-1} (t+j)^n\right] \Gamma^n(q+t)}$$

e usando (1.1.5), temos

$$B_r^{(0)} = B_r = \frac{\partial}{\partial t} \log A_r$$

$$= n\,\psi(t+r+1) - n \sum_{j=0}^{r-1} \frac{1}{(t+j)} - n\,\psi(q+t)$$

sendo que para $K = 1,2,\ldots,m-1$, usando (1.1.6), temos

$$B_r^{(k)} = n(-1)^{k+1}(k!)\,\zeta(k+1,t+r+1) - n \sum_{j=0}^{r-1} (-1)^k (k!) \frac{1}{(t+j)^{k+1}}$$

$$- n(-1)^{k+1}(k!)\,\zeta(k+1,\ q+t)$$

e

$$B_{0r}^{(k)} = \lim_{t \to -r} B_r^{(k)}$$

$$= n(-1)^{k+1}(k!)[\,\zeta(k+1,1) + \sum_{j=0}^{r-1} \frac{1}{(j-r)^{k+1}} - \zeta(k+1,\ q-r)]$$

portanto, substituindo-se (3.2.22) em (3.2.21) temos que a função densidade de $f(z)$ de Z é dada por (3.2.4)

A função distribuição acumulada $F(z)$ é dada por

$$F(z) = \int_0^z f(y)\,dy$$

$$= c\,\frac{\Gamma^n(p+q)}{\Gamma^n(p)} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} A_{0r}^{(n-1-j)} \int_0^z y^{cr+cp-1} (-\log y^c)^j \, dy$$

usando (1.4.1), temos que $F(z)$ pode ser escrita como em (3.2.5).

CASO 2: q = inteiro positivo

Neste caso, q = inteiro positivo e há cancelamento das gamas em (3.2.19), ou seja

$$(3.2.23) \qquad \frac{\Gamma^n(t)}{\Gamma^n(q+t)} = \frac{1}{\prod_{i=0}^{q-1} (t+i)^n}$$

cujos polos são

$$t = -i \quad , \quad \forall i = 0,1,\dots,q-1$$

todos de ordem n.

Pelo teorema do resíduo (2.1.3) e por (3.2.18), temos

$$(3.2.24) \qquad f(z) = c \left[\prod_{j=1}^{q-1} (p+i)^n \right] z^{cp-1} \sum_{i=1}^{q-1} R_i$$

onde

$$(3.2.25) \qquad R_i = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{t\to -r} \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} \left[(t+i)^n \frac{(z^c)^{-t}}{\prod_{j=0}^{q-1} (t+j)^n} \right]$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \lim_{t \to -i} \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} \left[\frac{(z^c)^{-t}}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{q-1} (t+j)^n} \right]$$

$$= \frac{(z^c)^i}{(n-1)!} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (-\log z^c)^k A_{0i}^{(n-1-k)}$$

tal que

$$A_{0i}^{(n-1-k)} = \lim_{t \to -i} A_i^{(n-1-k)}$$

sendo que

$$A_{0i}^{(m)} = \frac{\partial^m}{\partial t^m} A_{0i} = \frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}} [A_{0i} \cdot B_{0i}]$$

$$= \sum_{r=0}^{m-1} \binom{m-1}{r} A_{0i}^{(m-1-r)} B_{0i}^{(r)} \quad , \; m \geq 1$$

onde

$$A_i^{(0)} = A_i = \frac{1}{\prod_{\substack{i=0 \\ j \neq i}}^{q-1} (t+j)^n}$$

e

$$B_i = \frac{\partial}{\partial t} \log A_i$$

$$= - n \sum_{j=0}^{q-1} \frac{1}{(t+j)}$$

e para $\ell = 1,2,\ldots,m-1$, temos

$$B_i^{(\ell)} = n(-1)^{\ell+1}(\ell!) \sum_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{q-1} \frac{1}{(t+j)^{m+1}}$$

assim

$$B_{0i}^{(\ell)} = \lim_{t\to -i} B_i^{(\ell)}$$

$$= n(-1)^{\ell+1}(\ell!) \sum_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{q-1} \frac{1}{(j-i)^{m+1}}$$

portanto, substituindo (3.2.25) em (3.2.24), temos que a função densidade de Z é dada por (3.2.10)

A função distribuição acumulada $F(z)$ é dada por

$$F(z) = \int_0^z f(y)dy$$

$$= c\,[\prod_{j=1}^{q-1} (p+j)^n] \sum_{i=1}^{q-1} \frac{1}{(n-1)!} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} A_{0i}^{(n-1-k)} \int_0^z y^{ci+cp-1}(-\log y^c)^k\, dy$$

e por (1.4.1) podemos escrever $F(z)$ como sendo (3.2.11).

3.2.1 - CASOS PARTICULARES

Apresentaremos aqui, 3 casos particulares de v.a. beta weibullizada que são uniforme, monomial (função-potência) e beta.

As distribuições dos produtos serão dados em corolários decorrentes do teorema 3.2.1.

3.2.1.1 - VARIÁVEIS UNIFORMES

Quando $p = q = c = 1$, a função densidade de Z_i dada por (3.2.1) pode ser escrita como (1.3.5), ou seja

$$f_i(z_i) = 1 \ , \quad 0 < z_i < 1$$

ou seja, Z_i , $\forall i = 1,=,\ldots,n$ tem distribuição uniforme no intervalo (0,1). O corolário seguinte apresenta a distribuição de $Z = \prod_{i=1}^{n} Z_i$.

COROLÁRIO 3.2.1.1 - Sejam $Z_1, Z_2,\ldots,Z_n$ v.a.'s independentes uniformemente distribuidas no intervalo (0,1). Então a função densidade de $Z = \prod_{i=1}^{n} Z_i$ é dada por

$$(3.2.1.1.1) \quad f(z) = G^{n,0}_{n,n}\left[z\left|\begin{matrix}1,\ldots,1\\0,\ldots,0\end{matrix}\right.\right] = \frac{(-\log z)^{n-1}}{(n-1)!} \ , \quad 0 < z < 1$$

Esse resultado também foi apresentado por Sakamoto [24] e Gray e Odell [7] . A função acumulada F(z), de Z, é

$$(3.2.1.1.2) \quad f(z) = Z^{n,1}_{n+1,n+1}\left[z\left|\begin{matrix}0,1,\ldots,0\\0,\ldots,0,-1\end{matrix}\right.\right] = z\sum_{v=0}^{n-1}\frac{(-\log z)^v}{v!} \ , \quad 0 < z < 1$$

DEMONSTRAÇÃO:

Usando (3.2.2) e (3.2.10), fazendo $p = q = c = 1$ e tendo por (3.2.12) que

$$A_{00}^{(0)} = A_0^{(0)} = A_0 = 1$$

e

$$(3.2.1.1.3) \qquad A_{00}^{(n-1-k)} = \begin{cases} 0, & k = 0,1,2,\ldots,n-2 \\ 1, & k = n-1 \end{cases}$$

temos que a função densidade de Z é dada por (3.2.1.1.1).

Por (3.2.3), (3.2.11), (3.2.1.1.3) e com $p = q = c = 1$ temos que a função acumulada de Z é dada por (3.2.1.1.2).

3.2.1.2 - VARIÁVEIS MONOMIAIS

Quando $c = 1$, $q = 1$ e $p > 0$, a função densidade de Z_i dada por (3.2.1) pode ser escrita por (1.3.4), ou seja

$$f_i(z_i) = p\, z_i^{p-1} \quad , \quad 0 < z_i < 1$$

ou seja Z_i, $\forall i = 1,2,\ldots,n$ tem distribuição monomial. A distribuição de $Z = \prod_{i=1}^{n} Z_i$ é apresentada no próximo corolário.

COROLÁRIO 3.2.1.2 - Sejam $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ v.a.'s independentes com distribuição monomial. Então a função densidade de $Z = \prod_{i=1}^{n} Z_i$ é dada por:

$$(3.2.1.1.4)\quad f(z) = p^n z^{p-1} G^{n,0}_{n,n}\left[z \,\middle|\, \begin{matrix} 1,\dots,1 \\ 0,\dots,0 \end{matrix} \right] = p^n z^{p-1} \frac{(-\log z)^{n-1}}{(n-1)!} \quad ,$$

$$,0 < z < 1$$

Esse resultado foi apresentado por Springer - Thompson [26], Rider [23] e Rahman [17].

A função acumulada de Z é dada por:

$$(3.2.1.1.5)\quad F(z) = p^n z^p G^{n,1}_{n+1,n+1}\left[z \,\middle|\, \begin{matrix} 1-p,1,\dots 1 \\ 0,\dots,0,-p \end{matrix} \right] = z^p \sum_{v=0}^{n-1} \frac{[p(-\log z)]^v}{v!} \quad ,$$

$$,0 < z < 1$$

DEMONSTRAÇÃO:

Por (3.2.2), (3.2.10), (3.2.1.1.3), com $c = 1$, $q = 1$ e $p > 0$, temos que a função densidade de Z é dada por (3.2.1.1.4).

Por (3.2.3), (3.2.11), (3.2.1.1.3) com $c = 1$, $q = 1$, e $p > 0$ temos que a função acumulada de Z é dada por (3.2.1.1.5).

3.2.1.3 - VARIÁVEIS BETA

Quando $c = 1$, $p > 0$ e $q > 0$, a função densidade de Z_i dada por (3.2.1) pode ser escrita por (1.3.2), ou seja Z_i, $\forall i = 1,2,\dots,n$ tem distribuição beta. No corolário seguinte, apresentaremos a distribuição de $Z = \prod_{i=1}^{n} Z_i$.

COROLÁRIO 3.2.1.3 - Sejam $Z_1, Z_2,\dots,Z_n$ v.a.'s independentes com distribuição beta. Então a função densidade de $Z = \prod_{i=1}^{n} Z_i$, em termos da função G , é dada por:

$$(3.2.1.1.6)\quad f(z) = \frac{\Gamma^n(p+q)}{\Gamma^n(p)} z^{p-1} G_{n,n}^{n,0}\left[z \left| \begin{matrix} q,\ldots,q \\ \\ 0,\ldots,0, \end{matrix} \right. \right] , \quad 0 < z < 1$$

A função acumulada é

$$(3.2.1.1.7)\quad F(z) = \frac{\Gamma^n(p+q)}{\Gamma^n(p)} z^{p} G_{n+1,n+1}^{n,1}\left[z \left| \begin{matrix} 1-p,\ q,\ldots,q \\ 0,\ldots,0,\ -p \end{matrix} \right. \right] , \quad 0 < z < 1$$

Para expressarmos f(z) e F(z) em séries, devemos considerar dois subcasos, ou sejam: subcaso 1, com q $\neq$ inteiro positivo e subcaso 2, com q = inteiro positivo.

SUBCASO 1: (q $\neq$ inteiro positivo)

Para q $\neq$ inteiro positivo a função densidade de Z é

$$(3.2.1.1.8)\quad f(z) = \frac{\Gamma^n(p+q)}{\Gamma^n(p)} z^{p-1} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{z^r}{(n-1)!} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} (-\log z)^j A_{0r}^{(n-1-k)} ,$$

$$, 0 < z < 1$$

e a função acumulada de Z é

$$(3.2.1.1.9)\quad F(z) = \frac{\Gamma^n(p+q)}{\Gamma^n(p)} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} A_{0r}^{(n-1-j)} (j!) z^{r+p}$$

$$\times \sum_{v=0}^{j} \frac{(-\log z)^v}{v!\,(r+p)^{j-v+1}} , \quad 0 < z < 1$$

onde $A_{0r}^{(n-1-k)}$ é dado por (3.2.6).

SUBCASO 2: (q = inteiro positivo)

Para q = inteiro positivo a função densidade de Z é

$$(3.2.1.1.10)\quad f(z) = [\prod_{j=0}^{q-1} (p+j)^n]\, z^{p-1} \sum_{i=0}^{q-1} \frac{z^i}{(n-1)!} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (-\log z)^k A_{0i}^{(n-1-k)} \, , \quad 0 < z < 1$$

e a função acumulada de Z é

$$(3.2.1.1.11)\quad F(z) = [\prod_{j=0}^{q-1} (p+j)^n] \sum_{i=0}^{q-1} \frac{1}{(n-1)!} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} A_{0i}^{(n-1-k)} (k!) z^{i+p} \times \sum_{v=0}^{k} \frac{(-\log z)^v}{v!\,(i+p)^{k-v-1}} \, , \quad 0 < z < 1$$

onde $A_{0i}^{(n-1-k)}$ é dado por (3.2.12).

DEMONSTRAÇÃO:

Por (3.2.2) e (3.2.3), com c = 1 temos que a função densidade e a função acumulada de Z são dados por (3.2.1.1.6) e (3.2.1.1.7), respectivamente.

Em termos de séries, considerando o subcaso 1 com $q \neq$ inteiro positivo, temos por (3.2.4) e (3.2.5) que a função densidade e a função acumulada de Z são dadas por (3.2.1.1.10) e (3.2.1.1.11), respectivamente.

Considerando o subcaso 2 com q = inteiro positivo, temos por (3.2.10) que a função densidade de Z é dada por (3.2.1.1.10) e usando (3.2.11) temos que a função acumulada de Z é dada por (3.2.1.1.11).

Esses resultados também foram apresentados por Springer e Thompson [27] e Mathai [14] . Ver também Rathie e Kauffman [20].

3.3 - "PRODUTO DE BETAS WEIBULLIZADAS COM PARÂMETROS p_i, $q_i = q$, c_i"

A distribuição do produto de n betas weibullizadas com parâmetros p_i, $q_i = q$ e c_i, $\forall i = 1,2,\ldots,n$ será dada no teorema 3.3.1 seguinte, em termos da função H e também em série.

Para a expressão em série consideraremos dois casos, ou sejam: caso 1 com q = inteiro positivo, p_i e c_i, $\forall i = 1,\ldots,n$, e o caso 2 com $q \neq$ inteiro positivo, p_i e $c_i = c$, $\forall i = 1,2,\ldots,n$.

A restrição $c_i = c$, no caso 2, é necessária para que a determinação dos polos não se torne por demais complicada.

TEOREMA 3.3.1 - Sejam $Z_1, Z_2,\ldots,Z_n$ v.a.'s independentes tal que Z_i, $\forall i = 1,2,\ldots,n$ tem distribuição beta weibullizada com parâmetros p_i, $q_i = q$ e c_i. Ou seja, Z_i tem função densidade dada por:

$$(3.3.1)\quad f_i(z_i) = \frac{\Gamma(p_i+q)}{\Gamma(p_i)\Gamma(q)}\, c_i (z_i^{c_i})^{p_i - \frac{1}{c_i}} (1-z_i^{c_i})^{q-1}\ ,\quad 0 < z_i < 1$$

onde $p_i > 0$, $q > 0$ e $c_i > 0$, $\forall i = 1,2,\ldots,n$.

Então a função densidade de $Z = \prod_{i=1}^{n} Z_i$ é dada por

$$(3.3.2)\quad f(z) = \frac{\prod_{i=1}^{n}\Gamma(p_i+q)}{\prod_{i=1}^{n}\Gamma(p_i)}\, H_{n,n}^{n,0}\left[z \,\middle|\, \begin{matrix} (p_1+q-\frac{1}{c_1},\frac{1}{c_1});\ldots;(p_n+q-\frac{1}{c_n},\frac{1}{c_n}) \\ (p_1-\frac{1}{c_1},\frac{1}{c_1});\ldots;\ (p_n-\frac{1}{c_n},\ \frac{1}{c_n}) \end{matrix} \right] \quad , 0<z<1$$

e a função distribuição acumulada de Z é dada por:

$$(3.3.3)\ F(z) = \frac{\prod_{i=1}^{n}\Gamma(p_i+q)}{\prod_{i=1}^{n}\Gamma(p_i)}\, z\, H_{n+1,n+1}^{n,1}\left[z \,\middle|\, \begin{matrix} (0,1);(p_1+q-\frac{1}{c_1},\frac{1}{c_1});\ldots;(p_n+q-\frac{1}{c_n},\frac{1}{c_n}) \\ (p_1-\frac{1}{c_1},\frac{1}{c_1});\ldots;(p_n-\frac{1}{c_n},\frac{1}{c_n})\ ;\ (-1,1) \end{matrix} \right]$$

$$, 0 < z < 1$$

Para expressarmos $f(z)$ e $F(z)$ em séries, consideraremos dois casos, ou sejam: o caso 1 com q = inteiro positivo, $p_i > 0$ e $c_i > 0$, e o caso 2 com $q \neq$ inteiro positivo, $p_i > 0$ e $c_i = c > 0$.

CASO 1: (q = inteiro positivo)

Para q = inteiro positivo, $p_i > 0$ e $c_i > 0$, $\forall i = 1,2,\ldots,n$ a função densidade de $f(z)$ de Z, é dada por

$$(3.3.4)\ f(z) = \frac{[\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=0}^{q-1}(p_i+j)]}{[\prod_{i=1}^{n}(\frac{1}{c_i})^q]} \sum_{k=1}^{m} \frac{z^{\alpha_k}}{(\beta_k-1)!} \sum_{v=0}^{\beta_k-1} \binom{\beta_k-1}{v} (-\log z)^v A_{0k}^{(\beta_k-1-v)} ,$$

$$, 0 < z < 1$$

e a função distribuição acumulada $F(z)$, de Z, é dada por:

$$(3.3.5)\quad F(z) = \frac{\left[\prod_{i=1}^{n} \prod_{j=0}^{q-1} (p_i+j)\right]}{\left[\prod_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{c_i}\right)^q\right]} \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{(\beta_k-1)!} \sum_{v=0}^{\beta_k-1} \binom{\beta_k-1}{v} A_{0k}^{(\beta_k-1-v)}$$

$$\times (-1)^v (v!) z^{\alpha_k+1} \sum_{r=0}^{v} \frac{(\log z)^r}{r!\,(\alpha_k+1)^{v+1-r}} , \quad 0 < z < 1$$

onde

$$(3.3.6)\qquad A_{0k}^{(\beta_k-1-v)} = \lim_{s\to-\alpha_k} A_k^{(\beta_k-1-v)}$$

e

$$(3.3.7)\qquad A_{0k}^{(u)} = \sum_{r=0}^{u-1} \binom{u-1}{r} A_{0k}^{(u-1-r)} B_{0k}^{(u)} , \quad u \geq 1$$

tal que

$$(3.3.8)\qquad A_k^{(0)} = A_k = \frac{1}{\prod_{\substack{\ell=1\\ \ell\neq k}}^{m} (s+\alpha_\ell)^{\beta_\ell}}$$

$$(3.3.9)\qquad B_k = \frac{\partial}{\partial s} \log A_k \; ; \; B_{0k} = \lim_{s\to-\alpha_k} B_k$$

CASO 2: ($q \neq$ inteiro positivo)

Para $q \neq$ inteiro positivo, $p_i > 0$ e $c_i = c > 0$, $\forall i = 1,2,\ldots,n$, a função densidade $f(z)$, de Z, é dada por

$$(3.3.10)\quad f(z) = c\{ \sum_{r=1}^{k} \sum_{j=1}^{p_r} \sum_{v=1}^{r} \sum_{i=0}^{n_{jrr-v}-1} \frac{z^{\alpha_{jrr-v_1}+i}}{(v-1)!} \sum_{\ell=1}^{v-1} \binom{v-1}{\ell} (-\log z)^{v-1-\ell} A_{jr0}^{(\ell)} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\ell'} \sum_{j=1}^{q_k} \frac{z^{\alpha_{2k}+\beta-j}}{(m_{kj}-1)!} \sum_{u=0}^{m_{kj}-1} \binom{m_{kj}-1}{u} (-\log z)^{m_{kj}-1-u} C_{jk0}^{(u)} \} ,$$

$$,0 < z < 1$$

e a função distribuição acumulada $F(z)$, de Z, é dada por

$$(3.3.11)\quad F(z) = c\{ \sum_{r=1}^{k} \sum_{j=1}^{p_r} \sum_{v=1}^{r} \sum_{i=0}^{n_{jrr-v}-1} \frac{1}{(v-1)!} \sum_{\ell=1}^{v-1} \binom{v-1}{\ell} A_{jr0}^{(\ell)}$$

$$\times (-1)^{v-1-\ell} \frac{(v-1-\ell)!}{(\alpha_{jrr-v+1}+i} z^{\alpha_{jrr-v+1}+i+1} \sum_{r_1=0}^{v-1-\ell} \frac{(\log z)^{r_1}}{r_1!(\alpha_{jrr-v+1}+i+1)^{v-1-\ell-r_1}} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\ell'} \sum_{j=1}^{q_k} \frac{1}{(m_{kj}-1)!} \sum_{u=0}^{m_{kj}-1} \binom{m_{kj}-1}{u} C_{jk0}^{(u)} (-1)^{m_{kj}-1-u}$$

$$\times \frac{(m_{kj}-1-u)!}{(\alpha_{2k}+\beta-j+1} z^{\alpha_{2k}+\beta-j+1} \sum_{r_2=0}^{m_{kj}-1-u} \frac{(\log z)^{r_2}}{r_2!(\alpha_{2k}+\beta-j+1)^{m_{kj}-1-u-r_2}} ,$$

$$,0 < z < 1$$

onde

$$(3.3.12)\quad A_{jr0}^{(\ell)} = \lim_{s \to -(\alpha_{jrr-v+1}+i)} A_{jr}^{(\ell)}$$

e

$$(3.3.13)\quad A^{(\ell)}_{jr0} = \sum_{x=0}^{\ell-1} \binom{\ell-1}{x} A^{(\ell-1-x)}_{jr0}\ B^{(x)}_{jr0}\ , \qquad \ell \geq 1$$

tal que

$$(3.3.14)\quad A^{(0)}_{jr} = A_{jr} = \frac{\Gamma^{v}(\alpha_{jrr-v+1}+i+s+1)\left[\prod_{u=1}^{k}\prod_{\substack{m=1\\(m,u)\neq(j,r)}}^{q_u}\prod_{t=1}^{u}\Gamma(\alpha_{mut}+s)\right]\left[\prod_{t=1}^{r-v}\Gamma(\alpha_{jrt}+s)\right]}{\left[\prod_{\theta=0}^{i-1}(\theta+\alpha_{jrr-v+1}+s)\right]\left[\prod_{k=1}^{v-1}\prod_{h=k}^{v-1}\prod_{t=0}^{n_{jrr-h}-1}(\alpha_{jrr-h+1}+s+t)\right]}$$

$$\times\left[\prod_{k=1}^{\ell'}\prod_{j=1}^{q_k}\frac{1}{(s+\alpha_{2k}+\beta-j)^{m_{kj}}}\right]\left[\prod_{j=1}^{p}\frac{\Gamma(\alpha_{m+\ell+j}+s)}{\Gamma(\alpha_{3j}+\beta+s)}\right].$$

e

$$(3.3.15)\quad B_{jr} = \frac{\partial}{\partial s}\log A_{jr}\ ;\ B_{jr0} = \lim_{s\to-\alpha_{2k}-\beta+j} B_{jr}$$

onde para $r \geq 2$

$$(3.3.16)\quad \begin{cases} \alpha_{jr1}-\alpha_{jr2}=n_{jr1}\\ \alpha_{jr2}-\alpha_{jr3}=n_{jr2}\\ \vdots\\ \alpha_{jrr-1}-\alpha_{jrr}=n_{jrr-1}\end{cases}$$

e $n_{jr1}, n_{jr2}, \ldots, n_{jrr-1}$ são inteiros não-negativos e para todo fixado r, $\alpha_{jri} - \alpha_{mrh} \neq \pm v$, $v = 0,1,\ldots, j \neq m$; $i,h = 1,2,\ldots,r$, isto é, os α's podem diferir por inteiros.

Ainda temos que

$$(3.3.17) \qquad C_{jk0}^{(u)} = \lim_{s \to -\alpha_{2k} - \beta + j} C_{jk}^{(u)}$$

e

$$(3.3.18) \qquad C_{jk0}^{(u)} = \sum_{t=0}^{u-1} \binom{u-1}{t} C_{jk0}^{(u-1-t)} D_{jk0}^{(t)} \quad , \; u \geq 1$$

tal que

$$(3.3.19) \quad C_{jk}^{(0)} = C_k = \left[\prod_{\substack{h=1 \\ (k,j) \neq (h,g)}}^{\ell'} \prod_{g=1}^{q_k} \frac{1}{(s+\alpha_{2k}+\beta-g)^{m_{hg}}} \right] \left[\prod_{i=1}^{m} \frac{\Gamma(\alpha_j + s)}{\Gamma(\alpha_{1j}+\beta+s)} \right]$$

$$\times \prod_{j=1}^{p} \frac{\Gamma(\alpha_{m+\ell+j}+s)}{\Gamma(\alpha_{3j}+\beta+s)}$$

e

$$(3.3.20) \quad D_{jk} = \frac{\partial}{\partial s} \log C_{jk} \quad ; \quad D_{jk0} = \lim_{s \to -\alpha_{2k} - \beta + j} D_{jk}$$

DEMONSTRAÇÃO:

Para

$$p_i > 0 \quad , \; q_i = q \quad e \quad c_i > 0 \quad , \; \forall i = 1,2,\ldots,n$$

e usando (3.1.6), temos que o (s-1)-ésimo momento de $Z = \prod_{i=1}^{n} Z_i$, $g(s)$, é dado por

$$(3.3.21) \qquad g(s) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\Gamma(p_i+q)\Gamma(p_i - \frac{1}{c_i} + \frac{s}{c_i})}{\Gamma(p_i)\Gamma(p_i+q-\frac{1}{c_i}+\frac{s}{c_i})}$$

Usando a transformada inversa de Melinn (2.2.2), temos que a função densidade de Z é dada por

$$(3.3.22) \quad f(z) = \frac{\prod_{i=1}^{n}\Gamma(p_i+q)}{\prod_{i=1}^{n}\Gamma(p_i)} \frac{1}{2\pi i}\int_L z^{-s} \frac{\prod_{i=1}^{n}\Gamma(p_i - \frac{1}{c_i} + \frac{s}{c_i})}{\prod_{i=1}^{n}\Gamma(p_i+q-\frac{1}{c_i}+\frac{s}{c_i})} ds$$

onde L é um contorno que inclui os polos de

$$(3.3.23) \quad \prod_{i=1}^{n}\Gamma(p_i - \frac{1}{c_i} + \frac{1}{c_i}) \Big/ \prod_{i=1}^{n}\Gamma(p_i + q - \frac{1}{c_i} + \frac{1}{c_i})$$

Usando a função H, definida em (1.2.4), temos que a função densidade $f(z)$ de Z é dada por (3.3.2).

A função distribuição acumulada $F(z)$ de Z é dada por

$$(3.3.24) \qquad F(z) = \int_0^z f(t)dt$$

$$= \frac{\prod_{i=1}^{n}\Gamma(p_i+q)}{\prod_{i=1}^{n}\Gamma(p_i)} \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\prod_{i=1}^{n}\Gamma(p_i - \frac{1}{c_i} + \frac{s}{c_i})}{\prod_{i=1}^{n}\Gamma(p_i+q-\frac{1}{c_i}+\frac{s}{c_i})}\int_0^z t^{-s}\, dt\, ds$$

$$= \frac{\prod_{i=1}^{n} \Gamma(p_i+q)}{\prod_{i=1}^{n} \Gamma(p_i)} \cdot z \, \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\prod_{i=1}^{n} \Gamma(p_i - \frac{1}{c_i} + \frac{s}{c_i})}{\prod_{i=1}^{n} \Gamma(p_i+q- \frac{1}{c_i} + \frac{s}{c_i})} \frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(2-s)} \; z^{-s} \, ds$$

e por (1.2.4) temos que $F(z)$ é dada por (3.3.3).

Para demonstrarmos (3.3.4), (3.3.5), (3.3.10) e (3.3.11) usaremos a teoria dos resíduos, sendo que para determinarmos os polos de (3.3.23) é necessário considerarmos dois casos distintos, ou sejam: o caso 1, com q = inteiro positivo, $p_i > 0$ e $c_i > 0$, $\forall i = 1,2,\ldots,n$ e o caso 2, com $q \neq$ inteiro positivo, $p_i > 0$ e $c_i = c > 0$, $\forall i = 1,2,\ldots,n$.

CASO 1: (q = inteiro positivo)

Para q = inteiro positivo, $f(z)$ dada em (3.3.22) pode ser escrita como sendo

$$(3.3.25) \quad f(z) = [\prod_{i=1}^{n} \prod_{j=0}^{q-1} (p_i+j)] \, \frac{1}{2\pi i} \int_L z^{-s} \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} \prod_{j=0}^{q-1} (p_i - \frac{1}{c_i} + \frac{s}{c_i} + j)} \, ds$$

$$= \frac{[\prod_{i=1}^{n} \prod_{j=0}^{q-1} (p_i+j)]}{[\prod_{i=1}^{n} (\frac{1}{c_i})^q]} \, \frac{1}{2\pi i} \int_L z^{-s} \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} \prod_{j=0}^{q-1} (s-1+c_i p_i + c_i j)} \, ds$$

Temos nq termos do tipo $s-1-c_ip_i+c_ij$.

Seja α_k representar $c_ip_i + c_ij - 1$ para algum i e j fixos.

Seja $\beta_k \geq 1$ representar o número de vezes que α_k ocorre, para $k = 1,2,\ldots,m$ tal que $\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_m = nq$ e $m = 1,2,\ldots,nq$.

Então podemos escrever (3.3.25) como sendo

$$(3.3.26)\quad f(z) = \frac{\left[\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=0}^{q-1}(p_i+j)\right]}{\left[\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{c_i}\right)^q\right]}\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{1}{\prod_{i=1}^{m}(s+\alpha_k)^{\beta_k}}\,ds$$

onde L é um contorno que inclui os polos de

$$(3.3.27)\qquad \left[\prod_{i=1}^{m}(s+\alpha_k)^{\beta_k}\right]^{-1}$$

que são

$$s = -\alpha_k\ ,\ \forall k = 1,2,\ldots,m$$

de ordens β_k, $\forall k = 1,2,\ldots,m$, respectivamente.

Pelo teorema do resíduo (2.1.3) e por (3.3.26), temos que

$$(3.3.28)\qquad f(z) = \frac{\left[\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=0}^{q-1}(p_i+j)\right]}{\left[\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{c_i}\right)^q\right]}\sum_{k=1}^{m} R_{\alpha_k}$$

onde

$$(3.3.29)\quad R_{\alpha_k} = \frac{1}{(\beta_k-1)!} \lim_{s\to -\alpha_k} \frac{\partial^{\beta_k-1}}{\partial s^{\beta_k-1}} \left\{ (s+\alpha_k)^{\beta_k} \frac{z^{-s}}{\prod_{\ell=1}^{m} (s+\alpha_\ell)^{\beta_\ell}} \right\}$$

$$= \frac{1}{(\beta_k-1)!} \lim_{s\to -\alpha_k} \frac{\partial^{\beta_k-1}}{\partial s^{\beta_k-1}} \left\{ \frac{z^{-s}}{\prod_{\substack{\ell=1\\ \ell\neq k}}^{m} (s+\alpha_\ell)^{\beta_\ell}} \right\}$$

$$= \frac{z^{\alpha_k}}{(\beta_k-1)!} \sum_{v=0}^{\beta_k} \binom{\beta_k-1}{v} (-\log z)^{v} A_{0k}^{(\beta_k-1-v)}$$

tal que

$$A_{0k}^{(\beta_k-1-v)} = \lim_{s\to -\alpha_k} A_k^{(\beta_k-1-v)}$$

e

$$A_{0k}^{(u)} = \sum_{r=0}^{u-1} \binom{u-1}{r} A_{0k}^{(u-1-r)} B_{0k}^{(u)} \quad , \quad u \geq 1$$

onde

$$A_k^{(0)} \quad \frac{1}{\prod_{\substack{\ell=1\\ \ell\neq k}}^{m} (s+\alpha_\ell)^{\beta_\ell}}$$

e

$$B_k = \frac{\partial}{\partial s} \log A_k = \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell\neq k}}^{m} (s+\alpha_\ell)^{-1}(-\beta_\ell)$$

sendo que para $r = 1,2,\ldots, \beta_k - 1 - v$, temos

$$B_k^{(r)} = (-1)^{r+1}(r!) \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell\neq k}}^{m} (s+\alpha_\ell)^{-(r+1)} \beta_\ell$$

e

$$B_{0k}^{(r)} = \lim_{s \to -\alpha_k} B_k^{(r)}$$

$$= (-1)^{r+1}(r!) \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell\neq k}}^{m} (\alpha_k - \alpha_\ell)^{-(r+1)} \beta_\ell$$

Portanto, substituindo (3.3.29) em (3.3.28), temos que a função densidade $f(z)$, de Z, é dada por (3.3.4)

A função distribuição acumulada $F(z)$, de Z, é dada por

$$F(z) = \int_0^z f(y)\,dy$$

$$= \frac{\left[\prod_{i=1}^{n} \prod_{j=0}^{q-1} (p_i+j)\right]}{\left[\prod_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{c_i}\right)^q\right]} \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{(\beta_k-1)!} \sum_{v=0}^{\beta_k-1} \binom{\beta_k-1}{v} A_{0k}^{(\beta_k-1-v)} \int_0^z y^{\alpha_k}(-\log y)^v\,dy$$

e usando (1.4.1), temos que $F(z)$ é dada por (3.3.5).

CASO 2: ($q \neq$ inteiro positivo)

Para $q \neq$ inteiro positivo e $c_i = C$, $\forall i = 1,2,\ldots,n$, e usando a transformação $t = \frac{s}{c}$, a função densidade $f(z)$ dada em (3.3.22) pode ser escrita por

$$(3.3.30)\quad f(z) = \frac{[\prod_{i=1}^{n} \Gamma(p_i+q)]}{[\prod_{i=1}^{n} \Gamma(p_i)]} C \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_L (z^c)^{-t} \frac{\prod_{i=1}^{n} \Gamma(p_i - \frac{1}{c} + t)}{\prod_{i=1}^{n} \Gamma(p_i+q-\frac{1}{c}+t)}\, dt$$

onde L é um contorno que inclui os polos de

$$(3.3.31)\quad \prod_{i=1}^{n} \Gamma(p_i - \frac{1}{c} + t) \Big/ \prod_{i=1}^{n} \Gamma(p_i + q - \frac{1}{c} + t)$$

que requer uma outra representação para a determinação de seus polos. Para tanto será usado o resultado apresentado por Mathai e Saxena [15, pg. 171].

Assim, temos que (3.3.31) é escrita por

$$(3.3.32)\quad \frac{\prod_{j=1}^{n} \Gamma(p_j - \frac{1}{c} + t)}{\prod_{j=1}^{n} \Gamma(p_j + q - \frac{1}{c} + t)} = \prod_{j=1}^{n} \frac{\Gamma(\alpha_j + t)}{\Gamma(\alpha_j + \beta + t)}$$

onde $\alpha_j = p_j - \frac{1}{c}$

$\beta = q$

Ainda podemos escrever (3.3.32) como sendo

$$\prod_{j=1}^{m+\ell+p} \frac{\Gamma(\alpha_j + t)}{\Gamma(\alpha_j + \beta + t)} = \Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 \quad , \quad n = m + \ell + p \tag{3.3.33}$$

tal que Δ_1 é dado por

$$\Delta_1 = \prod_{j=1}^{m} \frac{\Gamma(\alpha_j + t)}{\Gamma(\alpha_{1j}+\beta+t)} \tag{3.3.34}$$

$$= \frac{\prod_{r=1}^{k} \prod_{j=1}^{p_r} \Gamma(\alpha_{jr1} + t)\Gamma(\alpha_{jr2} + t) \ldots \Gamma(\alpha_{jrr} + t)}{\prod_{j=1}^{m} \Gamma(\alpha_{1j} + \beta + t)} \quad ,$$

$$, \quad m = k \cdot p_r$$

onde, para $r \geq 2$, temos que

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{jr1} - \alpha_{jr2} = n_{jr1} \\ \alpha_{jr2} - \alpha_{jr3} = n_{jr2} \\ \quad\vdots \\ \alpha_{jrr-1} - \alpha_{jrr} = n_{jrr-1} \end{array} \right. \tag{3.3.35}$$

tal que $n_{jr1}, n_{jr2}, \ldots, n_{jrr-1}$ são inteiros não-negativos e para todo fixado r, $\alpha_{jri} - \alpha_{mrh} \neq \pm v$, $v = 0,1,\ldots;\ j \neq m$; $i,h = 1,2,\ldots,r$; isto é, os α's podem diferir por inteiros.

O Δ_2 é dado por:

$$(3.3.36) \qquad \Delta_2 = \prod_{j=1}^{\ell} \frac{\Gamma(\alpha_{m+j} + t)}{\Gamma(\alpha_j + \beta + t)}$$

$$= \prod_{k=1}^{\ell'} \prod_{j=1}^{q_k} (\alpha_{2k} + \beta + t - j)^{-m_{kj}} \quad , \quad \ell = \ell' \cdot q_k$$

e o Δ_3 é dado por:

$$(3.3.37) \qquad \Delta_3 = \sum_{j=1}^{p} \frac{\Gamma(\alpha_{m+\ell+j} + t)}{\Gamma(\alpha_{3j} + \beta + t)}$$

Desta forma, admitimos que:

(a) em Δ_1, (3.3.34), nenhuma das gamas se cancelam

(b) em Δ_2, (3.3.36), há cancelação, resultando fatores no denominador

(c) em Δ_3, (3.3.37), as gamas se cancelam tendo alguns fatores no numerador.

(d) e ainda em Δ_2 temos

(i) $0 \leq m_{kj} \leq \ell$

m_{kj} ; $j = 1,2,\ldots,q_k$, $k = 1,2,\ldots,\ell'$; são todos inteiros não-negativos

(ii) $0 \leq \ell' \leq \ell$

(iii) $\alpha_{2i} + \beta - k \neq \alpha_{2j} + \beta - v$; $i,j = 1,2,\ldots,\ell'$; $i \neq j$; $k,v = 1,2,\ldots,\max_j \{q_j\}$

Admitimos ainda que nenhum dos polos de Δ_1 coincide com algum dos polos de Δ_2 ou algum dos zeros de Δ_3 e nenhum dos polos de Δ_2 coincide com algum dos zeros de Δ_3. Pela rearrumação das gamas em (3.3.33) esta pressuposição pode sempre ser considerada.

Em Δ_1, dado por (3.3.34), os polos residem no numerador e para determiná-los, consideramos, sem perda de generalidade, que

$$\alpha_{jr1} \geq \alpha_{jr2} \geq \cdots \geq \alpha_{jrr}$$

Então, para fixados $\underline{j}$ e $\underline{r}$, temos que:
os polos de ordem 1 vem da equação

$$\alpha_{jrr} + t + i = 0 \quad \text{para} \quad i = 0,1,\ldots,n_{jrr-1}$$

os polos de ordem 2 vem da equação

$$\alpha_{jrr-1} + t + i = 0 \quad \text{para} \quad i = 0,1,\ldots,n_{jrr-2} - 1$$

e assim sucessivamente, temos que:
os polos de ordem r vem da equação

$$\alpha_{jr1} + t + i = 0 \quad \text{para} \quad i = 0,1,\ldots$$

Os resíduos R_{1i} , $i = 0,1,\ldots,n_{jrr-1}-1$, correspondentes aos polos de ordem 1, são dados por:

$$R_{1i} = \lim_{t \to -(\alpha_{jrr}+i)} (t+\alpha_{jrr}+i) \prod_{s=1}^{r} \Gamma(\alpha_{jrs}+t) \cdot \frac{\Delta_2\Delta_3(z^c)^{-t}}{\prod_{j=1}^{m} \Gamma(\alpha_{1j}+ \beta + t)}$$

$$= \lim_{t\to-(\alpha_{jrr}+i)} \frac{\Gamma(t+\alpha_{jrr} + i + 1)}{\prod_{j=0}^{i=1} (\alpha_{jrr}+t+j)} \prod_{s=1}^{r-1} \Gamma(\alpha_{jrs}+t) \cdot \frac{\Delta_2\Delta_3(z^c)^{-t}}{\prod_{j=1}^{m} \Gamma(\alpha_{j1} + \beta + t)}$$

$$= \frac{\prod_{s=1}^{r-1} \Gamma(\alpha_{jrs} - \alpha_{jrr} - i)\Delta_{02}\Delta_{03}(z^c)^{\alpha_{jrr}+i}}{(-1)^i (i!) \prod_{j=1}^{m} \Gamma(\alpha_{1j} + \beta - \alpha_{jrr} - i)}$$

$$= \frac{(n_{jr1}+n_{jr2}+\ldots+n_{jrr-1}-i-1)! \ \ldots (n_{jrr-1}-i-1)!\Delta_{02}\Delta_{03}(z^c)^{\alpha_{jrr}+i}}{(-1)^i \ i! \prod_{j=1}^{m} \Gamma(\alpha_{1j} + \beta - \alpha_{jrr} - i)}$$

para $i = 0,1,\ldots,m_{r-1}-1$ e $r \geq 2$

onde

$$\Delta_{02} = \lim_{t \to -(\alpha_{jrr}+i)} \Delta_2 \quad ; \quad \Delta_{03} = \lim_{t \to -(\alpha_{jrr}+i)} \Delta_3$$

e

$$R_{1i} = \frac{\Delta'_{02}\Delta'_{03}(z^c)^{\alpha_{j11}+i}}{(-1)^i (i!) \prod_{j=1}^{m} \Gamma(\alpha_{1j} + \beta - \alpha_{j11} - i)}$$

para $i = 0,1,\ldots;$ e $r = 1$; onde

$$\Delta'_{02} = \lim_{t \to -(\alpha_{j11}+i)} \Delta_2 \quad ; \quad \Delta'_{03} = \lim_{t \to -(\alpha_{j11}+i)} \Delta_3$$

Em geral, o resíduo correspondente ao polo de ordem v, $\forall v = 1,2,\ldots,r$, é dado por

$$(3.3.38) \quad R_{vi} = \lim_{t \to -(\alpha_{jrr-v+1}+i)} \left\{ \frac{1}{(v-1)!} \frac{\partial^{v-1}}{\partial t^{v-1}} \left[(t+\alpha_{jrr-v+1}+i)^v \frac{\prod_{s=1}^{r} (\alpha_{jrs}+t)\Delta_2\Delta_3(z^c)^{-t}}{\prod_{j=1}^{m} \Gamma(\alpha_{1j} + \beta + t)} \right] \right\}$$

$$= \frac{1}{(v-1)!} \lim_{t \to -(\alpha_{jrr-v+1}+i)} \frac{\partial^{v-1}}{\partial t^{v-1}} \{(t + \alpha_{jrr-v+1} + i)^v$$

$$\times \frac{[\prod_{u=1}^{k} \prod_{m=1}^{p_u} \prod_{s=1}^{r} \Gamma(\alpha_{mus} + t)]}{[\prod_{j=1}^{m} \Gamma(\alpha_{1j}+\beta+t)]} [\prod_{k=1}^{\ell'} \prod_{j=1}^{q_k} \frac{1}{(t + \alpha_{2k} + \beta - j)^{m_{kj}}}]$$

$$\times \left[\prod_{i=1}^{p} \frac{\Gamma(\alpha_{m+\ell+j}+t)}{\Gamma(\alpha_{3j}+\beta+t)} \right] (z^c)^{-t} \}$$

$$= \frac{1}{(v-1)!} \lim_{t \to -(\alpha_{jrr-v+1}+i)} \frac{\partial^{v-1}}{\partial t^{v-1}} \left\{ \frac{\Gamma^v(\alpha_{jrr-v+1}+i+t+1)}{\prod_{\theta=0}^{i-1} (\theta+\alpha_{jrr-v+1}+t)^v} \right.$$

$$\times \frac{\left[\prod_{u=1}^{k} \prod_{m=1}^{q_u} \prod_{\substack{s=1 \\ (m,u)\neq(j,r)}}^{u} \Gamma(\alpha_{mus}+t) \right] \left[\prod_{s=1}^{r-v} \Gamma(\alpha_{jrs}+t) \right]}{\left[\prod_{k=1}^{v-1} \prod_{h=k}^{v-1} \prod_{s=0}^{n_{jrr-h}-1} (\alpha_{jrr-h+1}+t+s) \right] \left[\prod_{j=1}^{m} \Gamma(\alpha_{1j}+\beta+t) \right]}$$

$$\times \left[\sum_{k=1}^{\ell'} \sum_{j=1}^{q_k} \frac{1}{(t+\alpha_{2k}+\beta-j)^{m_{kj}}} \right] \left[\prod_{j=1}^{p} \frac{\Gamma(\alpha_{m+\ell+j}+t)}{\Gamma(\alpha_{3j}+\beta+t)} \right] (z^c)^{-t} \}$$

$$= \frac{(z^c)^{\alpha_{jrr-v+1}+i}}{(v-1)!} \sum_{\ell=1}^{v-1} \binom{v-1}{\ell} (-\log z^c)^{v-1-\ell} A_{jr0}^{(\ell)}$$

onde $A_{jr0}^{(\ell)}$ é dado a seguir, convencionando-se que $n_{jr0} = \infty$ para todo $j = 1,2,\ldots,p_r$; $r = 1,2,\ldots,k$.

Temos que

$$A_{jr0}^{(\ell)} = \lim_{t \to -(\alpha_{jrr-v+1}+i)} A_{jr}^{(\ell)}$$

e

$$A_{jr0}^{(\ell)} = \sum_{x=0}^{\ell-1} \binom{\ell-1}{x} A_{jr0}^{(\ell-1-x)} B_{jr0}^{(x)} \quad , \quad \ell \geq 1$$

tal que

$$A_{jr}^{(0)} = A_{jr} = \frac{\Gamma^{v}(\alpha_{jrr-v+1}+i+t+1) \left[\prod_{\substack{u=1 \\ (m,u)\neq(j,r)}}^{k} \prod_{m=1}^{q_u} \prod_{s=1}^{u} \Gamma(\alpha_{mus}+t) \right] \left[\prod_{s=1}^{r-v} \Gamma(\alpha_{jrs}+t) \right]}{\left[\prod_{\ell=0}^{i-1} (\theta+\alpha_{jrr-v+1}+t) \right] \left[\prod_{k=1}^{v-1} \prod_{h=k}^{v-1} \prod_{s=0}^{n_{jrr-h}-1} (\alpha_{jrr-h+1}+t+s) \right]} \times$$

$$\times \left[\prod_{k=1}^{\ell'} \prod_{j=1}^{q_k} \frac{1}{(t+\alpha_{2k}+\beta-j)^{m_{kj}}} \right] \left[\prod_{j=1}^{p} \frac{\Gamma(\alpha_{m+\ell+j}+t)}{\Gamma(\alpha_{3j}+\beta+t)} \right]$$

e

$$B_{jr} = \frac{\partial}{\partial s} \log A_{jr}$$

$$= v\,\psi(\alpha_{jrr-v+1}+i+t+1) + \sum_{\substack{u=1 \\ (m,u)\neq(j,r)}}^{k} \sum_{m=1}^{q_k} \sum_{s=1}^{u} \psi(\alpha_{mus}+t) +$$

$$+ \sum_{s=1}^{r-v} \psi(\alpha_{jrs}+t) - \sum_{\theta=0}^{i-1} v(\theta+\alpha_{jrr-v+1}+t)^{-1} -$$

$$- \sum_{k=1}^{v-1} \sum_{h=k}^{v-1} \sum_{j=1}^{n_{jrr-h}-1} (\alpha_{jrr-h+1}+t+s)^{-1} - \sum_{k=1}^{\ell'} \sum_{j=1}^{q_k} m_{jk}(t+\alpha_{2k}+\beta-j)^{-1} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{p} \psi(\alpha_{m+\ell+j}+t) - \sum_{j=1}^{p} \psi(\alpha_{3j}+\beta+t)$$

e como

$$B_{jr0} = \lim_{t \to -(\alpha_{jrr-v+1}+i)} B_{jr}$$

usando (1.1.5), temos

$$B_{jr0} = \sum_{\substack{u=1 \\ (m,u)\neq(j,r)}}^{k} \sum_{m=1}^{q_u} \sum_{s=1}^{u} (\alpha_{mus} - \alpha_{jrr-v+1} - i) -$$

$$- \sum_{k=1}^{\ell'} \sum_{j=1}^{q_k} \frac{m_{jk}}{(\alpha_{jrr-v+1}-i+\alpha_{2k}+\beta-j)} + \sum_{j=1}^{p} \psi(\alpha_{m+\ell+j} - \alpha_{jrr-v+1} - i) -$$

$$- \sum_{j=1}^{p} \psi(\alpha_{3j} + \beta - \alpha_{jrr-v+1} - i) + v\,\psi(1) +$$

$$+ \sum_{s=1}^{r-v} \psi(\alpha_{jrs} - \alpha_{jrr-v+1} - i) - \sum_{\theta=0}^{i-1} \frac{v}{(\theta - i)} -$$

$$- \sum_{k=1}^{v-1} \sum_{h=k}^{v-1} \sum_{s=0}^{n_{jrr-h}-1} \frac{1}{(\alpha_{jrr-h+1} - \alpha_{jrr-v+1} - i + s)}$$

usando (3.3.35), podemos escrever B_{jr0} como sendo

$$B_{jr0} = \sum_{\substack{u=1 \\ (m,u)\neq(j,r)}}^{k} \sum_{m=1}^{q_u} \sum_{s=1}^{u} \psi(\alpha_{mus} - \alpha_{jrr-v+1} - i) -$$

$$- \sum_{k=1}^{\ell'} \sum_{j=1}^{q_k} \frac{m_{kj}}{(\alpha_{jrr-v+1} - i + \alpha_{2k} + \beta - j)} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{p} \psi(\alpha_{m+\ell+j} - \alpha_{jrr-v+1} - i) - \sum_{j=1}^{p} \psi(\alpha_{3j} + \beta - \alpha_{jrr-v+1} - i) +$$

$$+ v\, \psi(1) + \psi(n_{jr1} + n_{jr2} + \ldots + n_{jrr-v} - i) +$$

$$+ \psi(n_{jr2} + n_{jr3} + \ldots + n_{jrr-v} - i) + \ldots + \psi(n_{jrr-v} - i) +$$

$$+ v\,[1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{i}] + (v-1)[\frac{1}{(i+1)} + \ldots + \frac{1}{(i+n_{jrr-v+1})}] +$$

$$+ \ldots + \frac{1}{(i + n_{jrr-v+1} + \ldots + n_{jrr-1})}$$

Temos ainda que

$$B_{jr}^{(x)} = \frac{\partial^x}{\partial t^x} \{ B_{jr} \} \qquad \text{para} \quad x \geq 1$$

e $$B^{(x)}_{jr0} = \lim_{t \to -(\alpha_{jrr-v+1} + i)} B^{(x)}_{jr}$$

Usando (1.1.6), podemos escrever

$$B^{(x)}_{jr0} = (-1)^x\, x!\, \{ \sum_{\substack{u=1 \\ (m,u)\neq(j,r)}}^{k} \sum_{m=1}^{q_u} \sum_{\ell=1}^{u} \zeta(x+1,\ \alpha_{mus} - \alpha_{jrr-v+1} - i) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\ell'} \sum_{j=1}^{q_k} m_{kj} (\alpha'_{2k} + \beta - \alpha_{jrr-v+1} - i - j)^{-(x+1)} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{p} \zeta(x+1,\ \alpha_{m+\ell-j} - \alpha_{jrr-v+1} - i) -$$

$$- \sum_{j=1}^{p} \zeta(x+1,\ \alpha'_{3j} + \beta - \alpha_{jrr-v+1} - i) +$$

$$+ v\ \zeta(x+1,1) + \zeta(x+1,\ n_{jr1} + n_{jr2} + \ldots + n_{jrr-v} - i) +$$

$$+ \zeta(x+1,\ n_{jr2} + \ldots + n_{jrr-v} - i) + \ldots + \zeta(x+1, n_{jrr-v} - i)\} +$$

$$+ x!\, \{ v\, [\frac{1}{1^{x+1}} + \frac{1}{2^{x+1}} + \ldots + \frac{1}{i^{x+1}}] +$$

$$+ (v-1)[\frac{1}{(i+1)^{x+1}} + \ldots + \frac{1}{(i+n_{jrr-v+1})^{x+1}}] +$$

$$+ \ldots + \frac{1}{(i + n_{jrr-v+1} + \ldots + n_{jrr-1})^{x+1}} \} .$$

Em Δ_2 , dado por (3.3.36), os polos são

$$t = j - \alpha_{2k} - \beta \quad ; \quad \forall k = 1,2,\ldots,\ell' \quad , \quad \forall j = 1,2,\ldots,q_k$$

de ordem m_{kj}.

Portanto temos $q_1 + q_2 + \ldots + q_{\ell'}$ polos.

O resíduo R_{kj} correspondente ao polo de ordem m_{kj} é dado por:

$$(3.3.39) \quad R_{kj} = \frac{1}{(m_{kj}-1)!} \lim_{t \to -\alpha_{2k}-\beta+j} \frac{\partial^{m_{kj}-1}}{\partial t^{m_{kj}-1}} \{(t + \alpha_{2k} + \beta - j)^{m_{kj}}$$

$$\times [\prod_{h=1}^{\ell'} \prod_{g=1}^{q_h} (t + \alpha_{2h} + \beta - g)^{m_{hg}}] \Delta_1 \Delta_3 (z^c)^{-t}\}$$

$$= \frac{1}{(m_{kj}-1)!} \lim_{t \to -\alpha_{2k}-\beta+j} \frac{\partial^{m_{kj}-1}}{\partial t^{m_{kj}-1}} \{[\prod_{\substack{h=1 \\ (k,j)\neq(h,g)}}^{\ell'} \prod_{g=1}^{q_h} \frac{1}{(t+\alpha_{2h}+\beta-g)^{m_{hg}}}]$$

$$\times [\prod_{j=1}^{m} \frac{\Gamma(\alpha_j + t)}{\Gamma(\alpha_{1j} + \beta + t)}] [\prod_{j=1}^{p} \frac{\Gamma(\alpha_{m+\ell+j} + t)}{\Gamma(\alpha_{3j} + \beta + t)}] (z^c)^{-t} \}$$

$$= \frac{(z^c)^{\alpha_{2k} + \beta - j}}{(m_{kj} - 1)!} \sum_{u=0}^{m_{kj}-1} \binom{m_{kj}-1}{u} (-\log z^c)^{m_{kj}-1-u} C_{jk0}^{(u)}$$

onde $C_{jk0}^{(u)}$ é dado a seguir, convencionando-se que $n_{jr0} = \infty$ para todo $j = 1,2,\ldots,p_r$; $r = 1,2,\ldots,k$.

Temos que

$$C_{jk0}^{(u)} = \lim_{t \to -\alpha_{2k} - \beta + j} C_{jk}^{(u)}$$

e

$$C_{jk0}^{(u)} = \sum_{s=0}^{u-1} \binom{u-1}{s} C_{jk0}^{(u-1-s)} D_{jk0}^{(s)} \quad , \quad s \geq 1$$

tal que

$$C_{jk}^{(0)} = C_{jk} = \prod_{\substack{h=1 \\ (k,j) \neq (h,g)}}^{\ell'} \prod_{g=1}^{q_h} \frac{1}{(t + \alpha_{2k} + \beta - g)^{m_{hg}}} \times$$

$$\times \left[\prod_{j=1}^{m} \frac{\Gamma(\alpha_j + t)}{\Gamma(\alpha_{1j} + \beta + t)} \right] \left[\prod_{j=1}^{p} \frac{\Gamma(\alpha_{m+\ell+j} + t)}{\Gamma(\alpha_{3j} + \beta + t)} \right]$$

$$D_{jk} = \frac{\partial}{\partial t} \log C_{jk}$$

$$= \sum_{\substack{h=1 \\ (k,j)\neq(h,g)}}^{\ell'} \sum_{g=1}^{q_h} (-m_{hg})(t + \alpha_{2h} + \beta - g)^{-1} + \sum_{j=1}^{m} \psi(\alpha_j + t) -$$

$$- \sum_{j=1}^{m} \psi(\alpha_{1j} + \beta + t) + \sum_{j=1}^{p} \psi(\alpha_{m+\ell+j} + t) - \sum_{j=1}^{p} \psi(\alpha_{3j} + \beta + t)$$

e como

$$D_{jk0} = \lim_{t \to -\alpha_{2k} - \beta + j} D_{jk}$$

temos

$$D_{jk0} = \sum_{\substack{h=1 \\ (k,j)\neq(h,g)}}^{\ell'} \sum_{g=1}^{q_h} (-m_{hg})(\alpha_{2h} - \alpha_{2k} + j - g)^{-1} + \sum_{j=1}^{m} \psi(\alpha_j - \alpha_{2k} - \beta + j) -$$

$$- \sum_{j=1}^{m} \psi(\alpha_{1j} - \alpha_{2k} + j) + \sum_{j=1}^{p} \psi(\alpha_{m+\ell+j} - \alpha_{2k} - \beta + j) -$$

$$- \sum_{j=1}^{p} \psi(\alpha_{3j} - \alpha_{2k} + j)$$

Temos ainda que

$$D_{jk}^{(x)} = \frac{\partial^x}{\partial t^x} \{ D_{jk} \} \qquad \text{para} \quad x \geq 1$$

e

$$D_{jk0}^{(x)} = \lim_{t \to -\alpha_{2k} - \beta + j} D_{jk}^{(x)}$$

Usando (1.1.6), podemos escrever

$$D_{jk0}^{(x)} = (-1)^{x-1}(x!)\left\{ \sum_{\substack{h=1 \\ (k,j)\neq(h,g)}}^{\ell'} \sum_{g=1}^{q_h} m_{hg}(\alpha_{2h} - \alpha_{2k} + j - g)^{-(x+1)} + \right.$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} \zeta(x+1, \alpha_j - \alpha_{2k} - \beta + j) - \sum_{j=1}^{m} \zeta(x+1, \alpha_{1j} - \alpha_{2k} + j) +$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{p} (x+1, \alpha_{m+\ell+j} - \alpha_{2k} - \beta + j) - \sum_{j=1}^{p} \zeta(x+1, \alpha_{3j} - \alpha_{2k} + j) \right\}$$

Em Δ_3, dado por (3.3.37), não se tem polos.

Utilizando o teorema do resíduo, a função densidade $f(z)$, de Z, é dada por:

$$f(z) = \frac{\left[\prod_{i=1}^{n} \Gamma(p_i + q)\right]}{\left[\prod_{i=1}^{n} \Gamma(p_i)\right]} C \cdot \left[\sum_{r=1}^{k} \sum_{j=1}^{p_r} \sum_{v=1}^{r} \sum_{i=0}^{n_{jrr-v}-1} R_{vi} + \sum_{k=1}^{\ell'} \sum_{j=1}^{q_k} R_{kj} \right],$$

$$, \quad 0 < z < 1$$

que pode ser escrita como em (3.3.10), usando (3.3.38) e (3.3.39).

A função distribuição acumulada $F(z)$, de Z, é dada por:

$$F(z) = \int_0^z f(y)dy$$

$$= \frac{\left[\prod_{i=1}^{n} \Gamma(p_i+q)\right]}{\left[\prod_{i=1}^{n} \Gamma(p_i)\right]} C \left\{ \sum_{r=1}^{k} \sum_{j=1}^{p_r} \sum_{v=1}^{r} \sum_{i=0}^{n_{jrr-v}-1} \frac{1}{(v-1)!} \right.$$

$$\times \sum_{\ell=1}^{v-1} \binom{v-1}{\ell} A_{jr0}^{(\ell)} \int_0^z (y^c)^{\alpha_{jrr-v+1}+i} (-\log y^c)^{v-1-\ell}\, dy +$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{\ell'} \sum_{j=1}^{q_k} \frac{1}{(m_{kj}-1)!} \sum_{u=0}^{m_{kj}-1} \binom{m_{kj}-1}{u} C_{jk0}^{(u)} \int_0^z (y^c)^{\alpha_{2k}+\beta-j} (-\log y^c)^{m_{kj}-1-u} \right\} dy$$

e usando (1.4.1), temos que $F(z)$ pode ser escrita como em (3.3.11).

3.3.1 - CASOS PARTICULARES

Apresentaremos agora, 2 casos particulares dos resultados obtidos anteriormente que são a distribuição do produto de monomiais (função-potência) e a do produto de betas.

Os resultados serão apresentados em corolários decorrentes do teorema 3.3.1.

3.3.1.1 - VARIÁVEIS MONOMIAIS

Quando $c_i = 1$, $q = 1$ e $p_i > 0$, $\forall i = 1,2,\ldots,n$; a função densidade de Z_i dada por (3.3.1), pode ser escrita como em (1.3.4), ou seja

$$(3.3.1.1.1) \qquad f_i(z_i) = p_i z_i^{p_i - 1} \qquad , \ 0 < z_i < 1$$

ou seja, Z_i, $\forall i = 1,2,\ldots,n$ tem distribuição monomial.

No próximo corolário é apresentada a distribuição de $Z = \prod_{i=1}^{n} Z_i$.

COROLÁRIO 3.3.1.1 - Sejam $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ v.a.'s independentes tal que Z_i, $\forall i = 1,2,\ldots,n$, tem função densidade dada por (3.3.1.1.1). Então a função densidade de $Z = \prod_{i=1}^{n} Z_i$ é dada por:

$$(3.3.1.1.2) \ f(z) = \left(\prod_{i=1}^{n} p_i\right) G_{n,n}^{n,0}\left[z \,\middle|\, \begin{matrix} p_1, \ldots, p_n \\ p_1 - 1, \ldots, p_n - 1 \end{matrix} \right] =$$

$$= \left(\prod_{i=1}^{n} p_i\right) \sum_{k=1}^{n} \frac{z^{p_k - 1}}{\prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq k}}^{n} (p_\ell - p_k)} \qquad , \ 0 < z < 1$$

a função acumulada de Z é dada por:

$$(3.3.1.1.3) \ F(z) = \left(\prod_{i=1}^{n} p_i\right) z \ \ G_{n+1,n+1}^{n,1}\left[z \,\middle|\, \begin{matrix} 0, p_1, \ldots, p_n \\ p_1 - 1, \ldots, p_n - 1, -1 \end{matrix} \right] =$$

$$= \left(\prod_{i=1}^{n} p_i\right) \sum_{k=1}^{n} \frac{z^{p_k}}{\prod_{\substack{\ell=1\\ \ell\neq k}}^{n} (p_\ell - p_k)} \quad , \qquad 0 < z < 1$$

DEMONSTRAÇÃO:

Por (3.3.2), (3.3.4), fazendo $c_i = 1$, $q = 1$ e $p_i > 0$, $\forall i = 1,2,\ldots,n$, usando (1.2.5) e tendo, pelas considerações feitas na demonstração do Caso 1 do Teorema 3.3.1, que:

a) $m = 1,2,\ldots,n$

b) $\beta_1 + \beta_2 +\ldots+ \beta_m = n$

c) $\alpha_k = p_k - 1$, pois $j = 0$ quando $q = 1$.

Agora α_k aparece uma só vez, isto é, $\beta_k = 1$, $\forall k=1,2,\ldots,n$.

d) Como consequência de (a), (b) e (c) e por (3.3.8) e (3.3.9), temos que

$$A_k^{(0)} = A_k = \frac{1}{\prod_{\substack{\ell=1\\ \ell\neq k}}^{n} (t + p_\ell + 1)}$$

e

$$B_k = -\sum_{\substack{\ell=1\\ \ell\neq k}}^{n} (t + p_\ell - 1)^{-1}$$

e ainda, usando (3.3.6) e (3.3.7), temos que

$$(3.3.1.1.4) \quad A_{0k}^{(0)} = \lim_{t \to 1-p_k} A_k^{(0)} = \frac{1}{\prod_{\substack{\ell=1\\ \ell\neq k}}^{n} (p_\ell - p_k)}$$

e portanto a função densidade de Z pode ser escrita por (3.3.1.1.2).

Por (3.3.3), (1.2.5), (3.3.5), considerando $c_i = 1$, $q = 1$ e $p_i > 0$, $\forall i = 1,2,\ldots,n$ e ainda por (3.3.1.1.4) temos que a função acumulada de Z é dada por (3.3.1.1.3).

3.3.1.2 - VARIÁVEIS BETAS

Quando $c_i = 1$, $q > 0$ e $p_i > 0$, $\forall i = 1,2,\ldots,n$, a função densidade de Z_i dada por (3.3.1), pode ser escrita como em (1.3.2), ou seja

$$(3.3.1.2.1) \quad f_i(z_i) = \frac{1}{B(q,p_i)} z_i^{q-1} (1-z_i)^{p_i-1} \quad , \quad 0 < z_i < 1$$

ou seja, Z_i, $\forall i = 1,2,\ldots,n$ tem distribuição beta.

No corolário a seguir, apresentaremos a distribuição de $Z = \prod_{i=1}^{n} Z_i$, onde Z_i é uma v.a. beta.

COROLÁRIO 3.3.1.2 - Sejam $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ v.a.'s independentes tal que Z_i, $\forall i = 1,2,\ldots,n$, tem função densidade dada por (3.3.1.2.1). Então, em termos de função G, a função densidade de $Z = \prod_{i=1}^{n} Z_i$ é dada por

$$(3.3.1.2.2) \quad f(z) = \frac{\left[\prod_{i=1}^{n} \Gamma(p_i+q)\right]}{\left[\prod_{i=1}^{n} \Gamma(p_i)\right]} G_{n,n}^{n,0}\left[z \,\middle|\, \begin{matrix} p_1+q-1,\ldots,p_n+q-1 \\ p_1-1,\ldots,p_n-1 \end{matrix}\right] \quad , \; 0 < z < 1$$

e a função acumulada de Z é dada por

$$(3.3.1.2.3)\quad F(z) = \frac{[\prod_{i=1}^{n} \Gamma(p_i+q)]}{[\prod_{i=1}^{n} \Gamma(p_i)]}\; z\; G^{n,1}_{n+1,n+1}\left[z \,\middle|\, \begin{matrix} 0, p_1+q-1, \ldots, p_n+q-1 \\ p_1-1, \ldots, p_n-1, -1 \end{matrix} \right]$$

$$, \; 0 < z < 1$$

Para expressarmos $f(z)$ e $F(z)$ em séries, temos que conside - rar dois subcasos, ou sejam:

SUBCASO 1 : (q = inteiro positivo)

Se q = inteiro positivo, a função densidade $f(z)$ de Z é dada por (3.3.4) e a função acumulada $F(z)$ é dada por (3.3.5), lembrando que para $c_i = 1$ temos $\alpha_k = p_i+j-1$, $\forall i = 1,2,\ldots,n$; $\forall j = 1,2,\ldots,q-1$; $\forall k = 1,2,\ldots,m$.

SUBCASO 2 : ($q \neq$ inteiro positivo)

Se $q \neq$ inteiro positivo, a função densidade $f(z)$ de Z é dada por (3.3.10) e a função acumulada $F(z)$ é dada por (3.3.11), lembrando que para $c_i = 1$, temos $\alpha_j = p_j-1$, $\forall i = 1,\ldots,n$, $\forall_j = 1,2,\ldots,n$.

DEMONSTRAÇÃO:

Por (3.3.2) e (3.3.3), fazendo $c_i = 1$, $\forall i = 1,2,\ldots,n$ e usando (1.2.5), temos que a função densidade $f(z)$ e a função acumulada $F(z)$ são dadas por (3.3.1.2.2) e (3.3.1.2.3) respectivamente.

Em termos de séries, temos que o subcaso 1 com q = inteiro positivo é um caso particular do caso 1 do teorema 3.3.1, lembrando que para $c_i = 1$ temos $\alpha_k = p_i+j-1$, $\forall i = 1,2,\ldots,n$; $\forall j = 1, 2,\ldots,q-1$, isto é, a função densidade $f(z)$ e a função acumulada $F(z)$ são dadas por (3.3.4) e (3.3.5) respectivamente.

O subcaso 2, com $q \neq$ inteiro positivo, é um caso particular do caso 2 do Teorema 3.3.1, com a restrição que para $c = 1$ temos $\alpha_j = p_j-1$, $\forall j = 1,2,\ldots,n$. Então a função densidade $f(z)$ e a função acumulada $F(z)$ são dadas por (3.3.10) e (3.3.11) respectivamente.

Resultados sobre distribuição do produto de variáveis betas são apresentados por Springer e Thompson [27] e Mathai [14]. (Ver também Rathie e Kauffman [20] e Rider [22]).

3.4 - APLICAÇÕES

Rahman [17] comenta que em engenharia de produção de alta precisão com limites de especificação próximos, o erro aleatório do processo de produção tem distribuição aproximadamente uniforme. Em tal situação, é interessante voltar a atenção para o erro máximo em vez do erro médio.

Suponha agora que a produção está sendo levada a efeito por k máquinas semelhantes tal que os erros máximos nas unidades do produto manufaturado por elas são $\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_k$ respectivamente. Os valores máximos obtidos em amostras aleatórias das unidades produzidas pelas máquinas são estimadores de máxima verossimilhança de $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ e são usados para testar a hipótese de que os θ_i, $i = 1,\ldots,k$ são conjuntamente iguais a algum θ_o dado pelos limites de especificação.

Um teste estatístico indicado para esta hipótese é o produto dos valores amostrais máximos.

Analogamente, a amplitude amostral é outra estatística usada em controle de qualidade, e é sabido que para esta estatística é conveniente usar a média geométrica.

Apresentaremos, a seguir, a distribuição do produto dos erros máximos e da média geométrica das amplitudes amostrais.

3.4.1 - DISTRIBUIÇÃO DO PRODUTO DE k VALORES MÁXIMOS

Seja X a variável aleatória que representa o erro do processo de produção. Vamos supor sem perda de generalidade que X é uniformemente distribuída no intervalo $(0,1)$.

Retira-se uma amostra de tamanho n de cada população, isto é, de cada máquina, sendo $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ as estatísticas de ordem correspondentes a cada amostra. Então a função densidade $g_n(y_n)$ da n-ésima estatística Y_n é dada por (1.4.3), ou seja

$$(3.4.1.1) \quad g_n(y_n) = n[F(y_n)]^{n-1} f(y_n), \quad 0 < y_n < 1$$

onde $F(x)$ é a função acumulada e $f(x)$ é a função densidade de X. Ou seja,

$$(3.4.1.2) \qquad g_n(y_n) = \begin{cases} n\, y_n^{n-1} & , \quad 0 < y_n < 1 \\ 0 & , \quad \text{e.o.c.} \end{cases}$$

isto é, Y_n tem distribuição monomial (função-potência) de parâmetro n.

Seja

$$(3.4.1.3) \qquad Z = Y_{1n} . Y_{2n} . \dots . Y_{kn}$$

onde Y_{in} é a n-ésima estatística de ordem da amostra de tamanho n proveniente da máquina i, $\forall i = 1,2,\dots,k$. Então a função densidade de Z, usando (3.2.1.1.4), é dada por:

$$(3.4.1.4) \qquad f(z) = \frac{n^k}{(k-1)!} z^{n-1} (-\log z)^{k-1} \quad , \quad 0 < z < 1$$

Este resultado também foi apresentado por Rider [21].

3.4.2 - DISTRIBUIÇÃO DA MÉDIA GEOMÉTRICA

Como visto anteriormente, seja X a v.a. erro do processo de produção; X é uniformemente distribuída no intervalo (0,1).

Uma amostra de tamanho n é retirada de cada população, sendo $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ as estatísticas de ordem correspondente a cada amostra. Então a função densidade de probabilidade $h(t)$ da amplitude amostral $T = Y_n - Y_1$, usando (1.4.4), é dada por

$$(3.4.2.1) \qquad h^t = \begin{cases} n(n-1)t^{n-2}(1-t) & , \quad 0 < t < 1 \\ 0 & , \quad \text{e.o.c.} \end{cases}$$

isto é, T tem distribuição beta de parâmetros $(n-1)$ e 2.

A média geométrica de k amplitudes amostrais é dada por

$$Z = \sqrt[k]{T_1 \, T_2 \, \ldots \, T_k} \tag{3.4.2.2}$$

onde T_i, $i = 1,2,\ldots,k$, é a amplitude amostral proveniente da i-ésima máquina.

A função densidade de $U = Z^k$, usando (3.2.10) com $c = 1$ é dada por

$$f(u) = n^k (n-1)^k \, u^{n-2} \sum_{i=1}^{1} \frac{u^i}{(k-1)!} \sum_{r=0}^{k-1} \binom{k-1}{r} (-\log u)^r A_{0i}^{(k-1-r)} \tag{3.4.2.3}$$

$$, \; 0 < u < 1$$

tal que, usando (3.2.12), (3.2.14) e usando o fato de que $i = 0,1$, $A_{0i}^{(k-1-r)}$ é dado por

$$A_{00}^{(k-1-r)} = \frac{(-1)^{k-1-r} \, k(k+1)\ldots(2k-2-r)}{1^{2k-(r+1)}} \quad \text{se } i = 0$$

(3.4.2.4)

$$A_{01}^{(k-1-r)} = \frac{(-1)^{k-1-r} \, k(k+1)\ldots(2k-2-r)}{(-1)^{2k-(r+1)}} \quad \text{se } i = 1$$

Este resultado também foi apresentado por Rider [22].

Mas, estamos querendo a distribuição de $Z = \sqrt[k]{U}$, cuja função densidade, usando (1.4.5), é dada por

$$(3.4.2.5) \qquad f_Z(z) = \begin{cases} F_U\,[g^{-1}(z)]\,\left|\frac{d}{dz}\, g^{-1}(z)\right| & , \quad 0 < z < 1 \\ 0 & , \quad \text{e.o.c.} \end{cases}$$

Seja

$$(3.4.2.6) \qquad z = g(u) = \sqrt[k]{u}$$

então

$$(3.4.2.7) \qquad g^{-1}(z) = z^k \,.$$

e

$$(3.4.2.8) \qquad \left|\frac{d}{dz}\, g^{-1}(z)\right| = \left|k\, z^{k-1}\right|$$

então a função densidade de Z é dado por

$$f_Z(z) = k\, n^k (n-1)^k\, z^{k(n-2)+(k-1)} \sum_{i=1}^{1} \frac{z^{ki}}{(k-1)!} \sum_{r=0}^{k-1} \binom{k-1}{r} (-\log z^k)^r A_{0i}^{(k-1-r)} \,, \qquad 0 < z < 1$$

onde $A_{0i}^{(k-1-r)}$ é dado por (3.4.2.4).

BIBLIOGRAFIA

[1] ÁVILA, G.S.S. (1974). *Funções de uma Variável Complexa,* Ed. Universidade de Brasília.

[2] CHURCHILL, R.V. (1975). *Variáveis Complexas e suas Aplicações,* McGraw-Hill.

[3] CRAIG, C.C. (1936). On the Frequency Function of xy, of *Ann. Math. Statist.* 7, 1-15.

[4] EPSTEIN, B. (1948). Some Applications of the Mellin Tranform in Statistics, *Ann. Math. Statist.* 19, 370 - 379.

[5] ERDÊLYI, A., MAGNUS, W., OBERHETTINGER, F. e TRICOMI, G.F. (1953). *Higher Transcendental Functions*, Vol.I, McGraw-Hill.

[6] ERDÊLYI, A., MAGNUS, W., OBERHETTINGER, F. e TRICOMI, G.F. (1954). *Tables of Integral Transforms*, Vol. I , McGraw-Hill.

[7] GRAY, H.L. e ODELL, P.L. (1966). On Sums and Products of Rectangular Variates, *Biometrika* 53, 615 - 617.

[8] JAMBUNATHAN, M.V. (1954). Some Properties of Beta and Gamma Distributions, *Ann. Math. Statist.* 25, 401 - 404.

[9] JOHNSON, N.L. e KOTZ, S. (1970). *Distributions in Statistics: Continuous Univariate Distributions - 1*, John Wiley.

[10] JOHNSON, N.L. e KOTZ, S. (1970 a). *Distributions in Statistics: Continuous Univariate Distributions - 2*, John Wiley.

[11] KOTLARSKI, I. (1962 a). On Groups of n Independent Random Variables whose Product follows the Beta Distributions, *Colloquium Math*. 9, 325 - 332.

[12] LOMNICKI, Z.A. (1967). On the Distribution of Products of Random Variables, *J. Royal Statist. Soc.* B29, 513 - 524.

[13] LUKE, Y.L. (1969). *The Special Functions and Their Approximations*, Vol. I, Academic Press.

[14] MATHAI, A.M. (1971). An Expansion of Meijer's G-function and the Distribution of Products of Independent Beta Variates, *S. Afr, Statist. J.* 5, 71 - 90.

[15] MATHAI, A.M. e SAXENA, R.K. (1973). *Generalized Hipergeometric Functions with Applications in Statistics and Physical Science, Lecture Notes in Mathematics* Nº 348 , Springer-Verlag.

[16] MATHAI, A.M. e RATHIE, P.N. (1976). On the Exact Distribution of Products of Generalized Gamma Variables, (*ainda não publicado*).

[17] RAHMAN , N.A. (1964). Some Generalizations of the Distributions of Product Statistics arising from Rectangular Populations, *JASA*, 59, 557 - 563.

[18] RATHIE, P.N. (1975). The Distribution of Products of Generalized Student-t and F-variables, *20th Brazilian Regional Conference of the International Biometrics Society held at Piracicaba*, S.P. September 20 - 26.

[19] RATHIE, P.N. (1976). The Exact Distributions of Products of Independent Random Variables, *28th Annual Meeting of the Brasilian Society for Progress of Science*, Brasília, July 7 - 14.

[20] RATHIE, P.N. e KAUFMAN, H. (1977). On the Distribution of Products and Quotient of Independent Random Variables, *Metron, (aceito para publicação)*

[21] RIDER, P.R. (1955). The Distribution of the Products of Maximum Values in Samples from a Rectangular Distribution, *JASA*, 50, 1142 - 1143.

[22] RIDER, P.R. (1953). The Distribution of the Products of Ranges in Sample from a Rectangular Population, *JASA*, 48, 546 - 549.

[23] RIDER, P.R. (1964). Distribution of Products and of Quotient of Maximum Values in Sample from a Power-Function Population, *JASA*, 59, 877 - 880.

[24] SAKAMOTO, A. (1943). On the Distributions of the Products and Quotient of the Independent and Uniformly Distributed Random Variables, *Tôhoku Math. J.* 49, 243 - 260.

[25] SELBY, M.S. (1970). *Standard Mathematical Tables*, The Chemical Rubber Co.

[26] SPRINGER, M.D. e THOMPSON, W.E. (1966). The Distribution of Products of Independent Random Variables, *SIAM J. Appl. Math.*, 14, 511 - 526.

[27] SPRINGER, M.D. e THOMPSON, W.E. (1970). The Distribution of Products of Beta, Gamma and Gaussian Random Variables , *SIAM, J. Appl. Math.*,18, 721 - 737.

[28] ZOLOTAREV, V.M. (1962). On a General Theory of Multiplication of Independent Random Variables, *Dokl. Akad. Nauk., SSSR*, 142, 788 - 791.