UNICAMP

Nelson Dantas Louza Júnior

A Propriedade de Aproximação em Espaços de Funções Holomorfas em Domínios de Riemann

CAMPINAS
2012

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA
E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

NELSON DANTAS LOUZA JÚNIOR

A Propriedade de Aproximação em Espaços de Funções Holomorfas em Domínios de Riemann

Orientador: Prof. Dr. Jorge Tulio Mujica Ascui

Tese de doutorado apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Unicamp para obtenção do título de Doutor em matemática

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA TESE
DEFENDIDA PELO ALUNO NELSON DANTAS LOUZA JÚNIOR
E ORIENTADA PELO PROF.DR . JORGE TULIO MUJICA ASCUI

Assinatura do Orientador

CAMPINAS
2012

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA POR
MARIA FABIANA BEZERRA MULLER - CRB8/6162
BIBLIOTECA DO INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E
COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA - UNICAMP

L939p	Louza Júnior, Nelson Dantas, 1981- A propriedade de aproximação em espaços de funções holomorfas em domínios de Riemann / Nelson Dantas Louza Júnior. – Campinas, SP : [s.n.], 2012. Orientador: Jorge Tulio Mujica Ascui. Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. 1. Análise funcional. 2. Teoria da aproximação. 3. Aplicações holomorfas. 4. Fréchet, Espaços de. I. Mujica Ascui, Jorge Tulio,1946-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em inglês: The approximation property for spaces of holomorphic functions in Riemann domain
Palavras-chave em inglês:
Functional analysis
Approximation theory
Holomorphic mappings
Fréchet, Spaces
Área de concentração: Matemática
Titulação: Doutor em Matemática
Banca examinadora:
Jorge Tulio Mujica Ascui [Orientador]
Ary Orozimbo Chiacchio
Daniela Mariz Silva Vieira
Geraldo Márcio de Azevedo Botelho
Luiza Amália de Moraes
Data de defesa: 20-09-2012
Programa de Pós-Graduação: Matemática

Tese de Doutorado defendida em 20 de setembro de 2012 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). JORGE TULIO MUJICA ASCUI

Prof(a). Dr(a). DANIELA MARIZ SILVA VIEIRA

Luiza Amália de Moraes

Prof(a). Dr(a). LUIZA AMÁLIA DE MORAES

Prof(a). Dr(a). GERALDO MÁRCIO DE AZEVEDO BOTELHO

Ary O. Chiacchio

Prof(a). Dr(a). ARY OROZIMBO CHIACCHIO

Aos meus pais

Nelson e

Deize.

Ao meu irmão

Bruno

e a minha avó

Altair.

Agradecimentos

- Em primeiro lugar, agradeço a Deus pela vida e por sempre me reanimar quando as adversidades se posicionam;

- Agradeço à Nossa Senhora Desatadora dos Nós por sempre estar ao meu lado nos momentos difíceis;

- Agradeço à minha família pelo amor incondicional e por sempre me encher de confiança e coragem;

- Agradeço à minha namorada Glaucia Aline Colle pela paciência e pelo incentivo.

- Agradeço aos amigos da minha turma do doutorado: Alisson, Ariane, Eduardo, Grasiele, Ivan, Luiz e Thiago Castilho. A força e o companheirismo vindos destas pessoas fizeram da minha trajetória na Unicamp uma época muito especial e cheia de ótimas lembranças;

- Agradeço ao professor Jorge Túlio Mujica Ascui pela paciência e por me orientar de forma segura ;

- Agradeço, sem distinção, a todos os funcionários do IMECC por fazerem deste local um ambiente bastante propício ao estudo e à pesquisa;

- Agradeço a minha orientadora de mestrado Luiza Amália de Moraes pela amizade e pelo incentivo desde o início da minha formação superior.

- Agradeço aos professores da graduação Nedir do Espírito Santo e Ivo Fernandez Lopez pelo apoio e dedicação durante o início da minha formação superior.

- Agradeço aos membros da banca examinadora por apontarem várias correções e por apresentarem valiosas sugestões que aprimoraram a versão final deste trabalho;

- Agradeço à Capes e ao CNPq pelo imprescindível apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho estabelecemos condições para que o predual do espaço $H(\Omega)$ de aplicações holomorfas em domínios de Riemann tenha a propriedade de aproximação e a propriedade de aproximação limitada. Para tal utilizamos fundamentalmente uma extensão do Teorema de Linearização de Mazet. Provamos que se E é um espaço localmente convexo com uma base de Schauder equicontínua, então o predual $G(U)$ tem a propriedade de aproximação limitada para cada aberto equilibrado $U \subset E$. Provamos também que se E é um espaço de Fréchet separável com a propriedade de aproximação limitada, então $G(\Omega)$ tem a propriedade de aproximação para cada domínio de Riemann (Ω, p) sobre E. Além disso, demonstramos que se (Ω, p) é um domínio de Riemann sobre um espaço (DFC) E, então E tem a propriedade de aproximação se, e só se $G(\Omega)$ tem a propriedade de aproximação se, e só se $(H(\Omega), \tau_c)$ tem a propriedade de aproximação.

Palavras-chave: Análise funcional, Teoria da aproximação, Aplicações holomorfas, Fréchet, Espaços de.

Abstract

In this work we establish conditions for the predual of the space $H(\Omega)$ of holomorphic mappings in a Riemann domains Ω, to have the approximation property and the bounded approximation property. For this we use essentially an extension of Mazet linearization theorem. We also prove tha if E is a locally convex space with an equicontinuos Schauder basis, then the predual $G(U)$ has the bounded approximation property for each balanced open subset U of E. We obtain that if E is a separable Fréchet space with the bounded approximation property, then $G(\Omega)$ has the approximation property for each Riemann domains (Ω, p) over E. Moreover, we prove that if (Ω, p) is a Riemann domains over a (DFC)-space E, then E has the approximation property if only if $G(\Omega)$ has the approximation property, if only if $(H(\Omega), \tau_c)$ has the approximation property.

Keywords: Functional analysis, Approximation theory, Holomorphic mappings, Fréchet, Spaces.

Conteúdo

Introdução

Em 1955, a propriedade de aproximação foi introduzida por A. Grothendiek em [9]. Após o contra-exemplo de P. Enflo em [7], que mostra a existência de espaços de Banach sem a propriedade da aproximação, muitas pessoas trabalham para descobrir espaços com essa propriedade. Em nosso trabalho, investigamos condições para que espaços de funções holomorfas tenham a propriedade de aproximação e a propriedade de aproximação limitada. Entre os espaços estudados damos ênfase ao espaço $G(\Omega)$, que é o predual do espaço das funções holomorfas $H(\Omega)$.

Nossos resultados relacionados à propriedade de aproximação e a propriedade de aproximação limitada são fundamentados no Teorema de Linearização de Mazet [14], que prova a existência de um espaço localmente convexo completo $G(U)$, em que U é um subconjunto aberto de um espaço localmente convexo, e uma aplicação holomorfa δ_U de U em $G(U)$, com a propriedade de que dados um espaço localmente convexo completo F e uma aplicação holomorfa f de U em F existe uma única aplicação linear T_f de $G(U)$ em F tal que $T_f \circ \delta_U = f$.

Em [18] J. Mujica e L. Nachbin demonstraram o Teorema da Linearização de Mazet usando limites indutivos de espaços de Banach. Neste mesmo artigo eles provaram a existência de um subespaço denso $G_0(U)$ de $G(U)$ tal que a aplicação δ_U tem imagem contida em $G_0(U)$, com a propriedade de que dados um espaço localmente convexo completo F e uma aplicação G-holomorfa f de U em F, existe uma única aplicação linear T_f de $G_0(U)$ em F tal que $T_f \circ \delta_U = f$. No capítulo 2 estendemos os resultados de J. Mujica e L. Nachbin ao caso de domínios de Riemann. No Teorema 2.3 provamos que, se (Ω, p) é um domínio de Riemann sobre um espaço localmente convexo E, então existem um espaço localmente convexo completo $G(\Omega)$ e uma aplicação holomorfa δ_Ω de Ω em $G(\Omega)$ tais que, para cada espaço localmente convexo F e cada aplicação holomorfa f de Ω em F, existe uma única aplicação linear T_f de $G(\Omega)$ em F tal que $T_f \circ \delta_\Omega = f$. No Teorema 2.13 provamos que, se (Ω, p) é um domínio de Riemann sobre um espaço localmente convexo E, então existe um subespaço denso $G_0(\Omega)$ de $G(\Omega)$ tal que a aplicação δ_Ω tem imagem contida em $G_0(\Omega)$, com a propriedade de que dados um espaço localmente convexo completo F e uma aplicação G-holomorfa f de Ω em F, existe uma única aplicação linear T_f de $G_0(\Omega)$ em F tal que $T_f \circ \delta_\Omega = f$.

No Capítulo 3 procuramos condições para que o espaço de funções holomorfas em um domínio de Riemann sobre um espaço localmente convexo, $H(\Omega)$, e seu predual, $G(\Omega)$, tenham a propriedade de aproximação ou a propriedade de aproximação limitada. Seja (Ω, p) um domínio de Riemann sobre um espaço localmente convexo E. Na Proposição 3.6 provamos que, se para cada espaço de Banach F e cada aplicação holomorfa f de Ω em F, existe uma rede localmente limitada $(f_i)_{i \in I}$ de aplicações holomorfas de posto finito de Ω em F, que converge pontualmente a f, então $G(\Omega)$ tem a propriedade de aproximação. No Teorema 3.13 melhoramos a Proposição 3.6 ao provar que $G(\Omega)$ tem a propriedade de aproximação limitada se, e somente se, para cada espaço localmente convexo F e cada aplicação holomorfa f de Ω em F, existe uma rede amplamente limitada $(f_i)_{i \in I}$ de aplicações holomorfas de posto finito de Ω em F, que converge a f na topologia compacto-aberta. No Teorema 3.19 provamos que, se E é um espaço localmente convexo com uma base de Schauder equicontínua, então $G(U)$ tem a propriedade de aproximação limitada para cada aberto equilibrado $U \subset E$.

No Capítulo 4 procuramos condições para que os espaços de funções holomorfas em espaços de Fréchet, e seus preduais, tenham a propriedade de aproximação ou a propriedade de aproximação limitada. No Teorema 4.8 provamos que, se E é um espaço de Fréchet separável com a propriedade de aproximação limitada, então $G(\Omega)$ tem a propriedade de aproximação para cada domínio de Riemann (Ω, p) sobre E. No Teorema 4.13 provamos que, se E é um espaço de Fréchet separável, então E tem a propriedade de aproximação limitada se, e somente se, $G(U)$ tem a propriedade de aproximação limitada para um subconjunto aberto equilibrado $U \subset E$. Este resultado melhora um resultado de E. Çaliskan [3].

No Capítulo 5 procuramos condições para que os espaços de funções holomorfas em espaços (DFC), e seus preduais, tenham a propriedade de aproximação. No Teorema 5.8 provamos que, se (Ω, p) é um domínio de Riemann sobre um espaço (DFC) E, então E tem a propriedade de aproximação se, e só se, $G(\Omega)$ tem a propriedade de aproximação se, e só se, o espaço de aplicações holomorfas $H(\Omega)$ com a topologia compacto-aberta tem a propriedade de aproximação. Este resultado melhora um resultado de S. Dineen e J. Mujica [5].

Capítulo 1

Resultados preliminares

Dividimos o capítulo em seis seções: espaços localmente convexos, a propriedade de aproximação, a propriedade de aproximação limitada, topologias projetivas e indutivas, polinômios e aplicações holomorfas, e domínios de Riemann.

Neste capítulo demonstramos apenas os resultados que não encontramos na literatura.

1.1 Espaços localmente convexos

Todos os espaços localmente convexos considerados serão supostos Hausdorff e complexos.

Se E é um espaço localmente convexo denotaremos por $V(E)$ o conjunto de todas as vizinhanças convexas e equilibradas de zero em E, e denotaremos por $B_0(E)$ uma base de vizinhanças convexas e equilibradas de zero em E. Denotaremos por $cs(E)$ o conjunto das seminormas contínuas em E.

Definição 1.1 *Sejam E e F espaços localmente convexos. Denotaremos por $L(E, F)$ o espaço vetorial das aplicações lineares contínuas de E em F. Quando $F = \mathbb{C}$ escreveremos E' no lugar de $L(E, \mathbb{C})$ e dizemos que E' é o dual de E. Seja D um espaço localmente convexo. Dizemos que D é o predual de E se $D' = E$.*

Definição 1.2 *Seja A um subconjunto limitado, convexo e equilibrado de um espaço localmente convexo E. Denotaremos por E_A o subespaço vetorial de E gerado por A com a norma dada pelo funcional de Minkowski p_A.*

Definição 1.3 *Seja V uma vizinhança convexa e equilibrada de zero em um espaço localmente convexo E. Denotaremos por E_V o espaço normado $(E, p_V)/p_V^{-1}(0)$ em que p_V é o funcional de Minkowski. Denotaremos por $\pi_V \in L(E, E_V)$ a aplicação quociente $\pi_V : E \to E_V$.*

Definição 1.4 *Seja E um espaço localmente convexo e seja $\alpha \in cs(E)$. Denotaremos por E_α o espaço vetorial $E/\alpha^{-1}(0)$ munido da norma $\overline{\alpha}(\overline{x}) = \inf\{\alpha(y); y \in \overline{x}\}$. Denotaremos por $\pi_\alpha \in L(E, E_\alpha)$ a aplicação quociente $\pi_\alpha : E \to E_\alpha$.*

Definição 1.5 *Seja $\mathcal{F}$ um conjunto de aplicações do espaço topológico X no espaço vetorial topológico F. Diremos que $\mathcal{F}$ é equicontínuo em $a \in X$ se para toda vizinhança W de zero em F existe uma vizinhança V de a em X tal que $f(x) - f(a) \in W$ para todos $x \in V$ e $f \in \mathcal{F}$. Diremos que $\mathcal{F}$ é equicontínuo se é equicontínuo em todos os pontos de X.*

Proposição 1.6 *([13], p. 199, Proposição 4)*

Seja $\mathcal{F}$ um conjunto de aplicações lineares do espaço vetorial topológico E no espaço vetorial topológico F. O conjunto $\mathcal{F}$ é uniformemente equicontínuo se, e somente se, é equicontínuo na origem.

Definição 1.7 *Seja X um conjunto e seja Y um espaço vetorial. Diremos que uma aplicação $f : X \to Y$ tem posto finito se o subespaço N de Y gerado por $f(X)$ tem dimensão finita.*

Definição 1.8 *Sejam E e F espaços localmente convexos. Denotaremos por $E' \otimes F$ o espaço vetorial de todas as aplicações lineares contínuas de posto finito de E em F.*

Proposição 1.9 *([12], p. 61, Teorema 2) Seja E um espaço vetorial topológico, seja E_0 um subespaço vetorial denso de E, e seja F um espaço vetorial topológico de Hausdorff completo. Então dada uma aplicação linear $T : E_0 \to F$ existe uma única aplicação linear $\widetilde{T} \in L(E, F)$ tal que $T(x) = \widetilde{T}(x)$ para cada $x \in E_0$.*

Sejam E_0 um subespaço vetorial denso de um espaço veotrial topológico E, F um espaço vetorial topológico de Hausdorff completo e $T \in L(E_0, F)$. O único elemento de $L(E, F)$ que estende T (cuja existência é garantida pela Proposição 1.9) será sempre denotado por $\widetilde{T}$.

Lema 1.10 *Seja E um espaço localmente convexo, seja $N = [x; x \in A]$ o subespaço gerado por $A \subset E$, e seja F um espaço localmente convexo. Se existe uma rede $(T_i)_{i\in I} \subset L(N, F)$ que converge pontualmente a $T \in L(N, F)$ em A então a rede $(T_i)_{i\in I}$ converge pontualmente a T em N.*

Demonstração: Dado $x \in N$, existem $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ e $x_1, \ldots, x_n \in A$ tais que $x = \sum_{i=1}^{n} c_j x_j$.

Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que $2^k > \max_{1\leq j\leq n} |c_j|$. Seja V uma vizinhança convexa e equilibrada de zero em F.

Como $(T_i)_{i\in I}$ converge pontualmente a T em A, existe $\beta \in I$ tal que $T_i(x_j) - T(x_j) \in \frac{1}{2^{n+k}}V$ para cada $i \geq \beta$ e $j \in \{1, \ldots, n\}$. Segue que para cada $i \geq \beta$ e $j \in \{1, \ldots, n\}$ existe $a_{ij} \in V$ tal que $T_i(x_j) - T(x_j) = \frac{1}{2^k}\frac{1}{2^n}a_{ij}$.

Como $\frac{1}{2^n}a_{ij} \in \frac{1}{2^n}V, \frac{1}{2^n}V$ é equilibrado e $|\frac{c_j}{2^k}| \leq 1$ para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, temos que $T_i(c_j x_j) - T(c_j x_j) = c_j(T_i(x_j) - T(x_j)) = \frac{c_j}{2^k}\frac{1}{2^n}a_{ij} \in \frac{1}{2^n}V$ para cada $i \geq \beta$ e $j \in \{1, \ldots, n\}$. Segue que

$T_i(x) - T(x) = T_i(\sum_{j=1}^{n} c_j x_j) - T(\sum_{j=1}^{n} c_j x_j) = \sum_{j=1}^{n}(T_i(c_j x_j) - T(c_j x_j)) \in \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2^n}V$ para $i \geq \beta$.

Como V é convexo e equilibrado e $\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2^n} = \frac{n}{2^n} < 1$ temos que $T_i(x) - T(x) \in \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2^n}V \subset V$ para $i \geq \beta$. Donde concluímos que a rede $(T_i(x))_{i\in I}$ converge a $T(x)$.

$\square$

Lema 1.11 *Seja E um espaço vetorial topológico, seja E_0 um subespaço vetorial denso de E, e seja F um espaço vetorial topológico de Hausdorff completo. Então dada uma família equicontínua $(T_i)_{i\in I} \subset L(E_0, F)$ temos que $(\widetilde{T}_i)_{i\in I} \subset L(E, F)$ é equicontínua.*

Demonstração:

Seja V uma vizinhança fechada de zero em F. Como a família $(T_i)_{i\in I}$ é equicontínua, existe uma vizinhança U de zero de E tal que $T_i(U \cap E_0) \subset V$ para cada $i \in I$. Como E_0 é denso em E temos que $U \cap E_0$ é denso em U. Segue da continuidade de cada $\widetilde{T}_i$ que $\widetilde{T}_i(U) \subset \overline{T_i(U \cap E_0)} \subset \overline{V} = V$. Donde concluímos que $(\widetilde{T}_i)_{i\in I}$ é uma família equicontínua. □

Lema 1.12 *Sejam E um espaço localmente convexo, E_0 um subespaço denso de E, e F um espaço localmente convexo completo. Seja $T \in L(E_0, F)$ tal que existe uma rede equicontínua $(T_i)_{i\in I} \subset E_0' \otimes F$ que converge pontualmente a T em E_0. Então a rede $(\widetilde{T}_i)_{i\in I}$ é uma rede em $E' \otimes F$ que converge pontualmente a $\widetilde{T} : E \to F$ em E.*

Demonstração: Seja $T \in L(E_0, F)$ tal que existe uma rede equicontínua $(T_i)_{i\in I} \subset E_0' \otimes F$ que converge pontualmente a T. Pelo Lema 1.11 a rede $(\widetilde{T}_i)_{i\in I} \subset L(E, F)$ é equicontínua.

Vamos mostrar que cada $\widetilde{T}_i$ tem posto finito.

Para cada $x \in E$ existe uma rede $(x_\alpha)_{\alpha\in A} \subset E_0$ tal que $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ converge a x. Como $\widetilde{T}_i$ é uma aplicação contínua obtemos que $\widetilde{T}_i(x) = \lim_\alpha \widetilde{T}_i(x_\alpha) = \lim_\alpha T_i(x_\alpha)$. Considere $N_i = [T_i(x); x \in E_0]$. Como T_i tem posto finito temos que N_i tem dimensão finita, e portanto é completo. Logo $\widetilde{T}_i(x) \in N_i$, e consequentemente $\widetilde{T}_i$ tem posto finito.

Vamos mostrar que a rede $(\widetilde{T}_i)_{i\in I}$ converge pontualmente a $\widetilde{T}$ em E.

Seja $x \in E$ e V uma vizinhança convexa e equilibrada de zero em F. Como $(\widetilde{T}_i)_{i\in I}$ é uma rede equicontínua temos que $(\widetilde{T}_i - \widetilde{T})_{i\in I}$ é uma rede equicontínua. Então existe uma vizinhança de zero U de E tal que $\widetilde{T}_i(U) - \widetilde{T}(U) \subset \frac{1}{2}V$ para cada $i \in I$.

Como E_0 é denso em E existe $x_U \in E_0$ tal que $x - x_U \in U$. Como T_i converge pontualmente a T, existe $\beta \in I$ tal que $T_i(x_U) - T(x_U) \in \frac{1}{2}V$ para cada $i \geq \beta$.

Segue que

$\widetilde{T}_i(x) - \widetilde{T}(x) =$

$\widetilde{T}_i(x) - \widetilde{T}_i(x_U) + \widetilde{T}_i(x_U) + \widetilde{T}(x_U) - \widetilde{T}(x_U) - \widetilde{T}(x) =$

$\widetilde{T}_i(x) - \widetilde{T}_i(x_U) + T_i(x_U) - T(x_U) + \widetilde{T}(x_U) - \widetilde{T}(x) =$

$\widetilde{T}_i(x - x_U) - \widetilde{T}(x - x_U) + T_i(x_U) - T(x_U) \in \frac{1}{2}V + \frac{1}{2}V \subset V$ para cada $i \geq \beta$.

Logo $\widetilde{T}_i$ converge pontualmente a $\widetilde{T}$ em E.

□

Definição 1.13 *Uma sequência de vetores (e_n) em um espaço localmente convexo E é uma base, se para cada $x \in E$ existe uma única sequência de escalares (x_n) tal que*

$$x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k e_k = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k.$$

Se as aplicações $P_n : E \to E$, $P(\sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k) = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$ são contínuas para todo $n \in \mathbb{N}$, dizemos que a base é uma base de Schauder e se a família (P_n) de aplicações lineares é equicontínuas, dizemos que a base é uma base de Schauder equicontínua.

Definição 1.14 *Sejam X um espaço topológico e F um espaço localmente convexo. Considere $C(X, F)$ o espaço das aplicações contínuas de X em F. Seja $A \subset C(X, F)$, diremos que A é localmente limitado se para cada $x \in X$ existe uma vizinhança U de x em X tal que $A(U) = \{f(y); f \in A \text{ e } y \in U\}$ é limitado em F.*

Definição 1.15 *Sejam X um espaço topológico e F um espaço localmente convexo. Seja $A \subset C(X, F)$, diremos que A é amplamente limitado se $\beta \circ A$ é localmente limitado para cada $\beta \in cs(F)$.*

Teorema 1.16 *([17], p. 72 Teorema 9.12) Seja X um espaço topológico. Então cada subconjunto equicontínuo e pontualmente limitado de $C(X)$ é relativamente compacto na topologia compacto-aberta.*

Definição 1.17 *Sejam E e F espaços localmente convexos. Denotaremos $L_c(E, F)$ o espaço vetorial $L(E, F)$ com a topologia da convergência uniforme sobre os conjuntos compactos, convexos e equilibrados de E.*

O espaço topológico $L_c(E,F)$ admite como base de vizinhanças de zero os conjuntos $W(K,V)=\{T\in L(E,F); T(K)\subset V\}$, onde K varia sobre os subconjuntos compactos, convexos e equilibrados de E e V varia sobre as vizinhanças convexas, equilibradas e fechadas de zero em F. No caso $F=\mathbb{C}$ denotaremos $L_c(E,\mathbb{C})$ por E'_c.

Definição 1.18 *Seja E um espaço localmente convexo. Denotaremos por E'_b o dual forte de E, ou seja, E' munido da topologia da convergência uniforme sobre os subconjuntos limitados de E.*

Definição 1.19 *Diremos que um espaço localmente convexo E é um espaço (DFC) se $E=D'_c$ onde D é um espaço de Fréchet.*

Definição 1.20 *Um espaço topológico X é um k-espaço se um conjunto $U\subset X$ é aberto se $U\cap K$ é aberto em K para todo subconjunto compacto K de X.*

Todo espaço métrico e todo espaço (DFC) são k-espaços. Um aberto de um k-espaço também é um k-espaço.

Para o leitor interessado em espaços (DFC) indicamos o artigo de J. Mujica [16]. Já para o leitor interessado em k-espaços indicamos o livro de S. Willard [25].

Definição 1.21 *Um espaço localmente convexo E é um espaço de Schwartz se para toda vizinhança U convexa, equilibrada e fechada de zero em E, existe uma vizinhança V de zero em E tal que para todo $\alpha>0$ o conjunto V pode ser coberto por um número finito de translações de αU.*

Para os leitores interessados em espaços de Schwartz indicamos o livro de J. Horváth [11].

Definição 1.22 *Sejam E e F espaços localmente convexos. Denotaremos $E\epsilon F$ o espaço vetorial $L(E'_c,F)$ munido da topologia da convergência uniforme sobre os conjuntos equicontínuos de E'. O espaço $E\epsilon F$ é chamado de ϵ-produto de E e F.*

Os conjuntos $W(U^0; V) = \{T \in L(E'_c, F) : T(U^0) \subset V\}$, com $U \in V(E)$ fechada e $V \in V(F)$ fechada formam uma base de vizinhanças de zero em $E\epsilon F$, em que U^0 é o conjunto polar de U.

Teorema 1.23 *([23])*

Sejam E e F espaços localmente convexos. Então a aplicação $T \to T'$ é um isomorfismo entre $E\epsilon F$ e $F\epsilon E$.

Para espaços localmente convexos E e F o ϵ-produto de E e F foi introduzido por L. Schwartz ([23], [24])

1.2 A propriedade de aproximação

Nesta seção apresentaremos a definição da propriedade de aproximação bem como a relação desta com os espaços ϵ-produtos.

Definição 1.24 *Seja E um espaço localmente convexo. Diremos que E tem a propriedade de aproximação se a aplicação identidade de E pertence ao fecho de $E' \otimes E$ em $L_c(E, E)$.*

Teorema 1.25 *([19], Teorema 1.5)*

Seja E um espaço localmente convexo. São equivalentes:

(a) E tem a propriedade de aproximação.

(b) $L_c(E, E) = \overline{E' \otimes E}^c$

(c) $L_c(E, F) = \overline{E' \otimes F}^c$ para todo espaço localmente convexo F, ou equivalentemente para todo espaço de Banach F.

(d) $L_c(F, E) = \overline{F' \otimes E}^c$ para todo espaço localmente convexo F.

(e) $E\epsilon F = \overline{E \otimes F}^c$ para todo espaço localmente convexo F, ou equivalentemente para todo espaço de Banach F.

(f) $F\epsilon E = \overline{F \otimes E}^c$ para todo espaço localmente convexo F, ou equivalentemente para todo espaço de Banach F.

Proposição 1.26 *([19], Proposição 1.4)*

Seja E um espaço localmente convexo.

(a) Se E tem a propriedade de aproximação, então todo subespaço complementado de E também tem a propriedade de aproximação.

(b) Se E'_c tem a propriedade de aproximação, então E também tem a propriedade de aproximação.

(c) Se E é tonelado e tem a propriedade de aproximação, então E'_c também tem a propriedade de aproximação.

Lema 1.27 *([19], Lema 1.6) Sejam E e F espaços localmente convexos, e seja F_0 um subespaço denso de F. Se $L_c(E,F) = \overline{E' \otimes F}^c$ então $L_c(E,F_0) = \overline{E' \otimes F_0}^c$.*

Proposição 1.28 *Sejam E um espaço localmente convexo e E_0 um subespaço denso de E. Se E tem a propriedade de aproximação, então E_0 tem a propriedade de aproximação.*

Demonstração:

Suponhamos que E tenha a propriedade de aproximação. Sabemos pelo item (d) do Teorema 1.25 que $L_c(F,E) = \overline{F' \otimes E}^c$ para cada espaço localmente convexo F. Como E_0 é um subconjunto denso de E, temos pelo Lema 1.27 que $L_c(F,E_0) = \overline{F' \otimes E_0}^c$ para cada espaço localmente convexo F. Segue pelo item (d) do Teorema 1.25 que E_0 tem a propriedade de aproximação. □

1.3 A propriedade de aproximação limitada

Nesta seção apresentaremos a definição de propriedade de aproximação limitada, bem como a relação desta com os ϵ-produtos.

Definição 1.29 *Seja E um espaço localmente convexo. Diremos que E tem a propriedade de aproximação limitada se existe uma rede equicontínua de operadores $(T_i)_{i \in I} \subset L(E,E)$ de posto finito que converge pontualmente à identidade de E.*

Teorema 1.30 *([3], Proposição 2.8)*

Para um espaço localmente convexo E *considere as condições:*

(a) E *tem a propriedade de aproximação limitada.*

(b) *Dada uma aplicação* $T \in L(E,E)$ *existe uma rede equicontínua* $(T_i)_{i\in I} \subset E' \otimes E$ *que converge pontualmente a* T *em* E.

(c) *Para todo espaço localmente convexo* F, *dada uma aplicação* $T \in L(E,F)$ *existe uma rede equicontínua* $(T_i)_{i\in I} \subset E' \otimes F$ *que converge pontualmente a* T *em* E.

(d) *Para todo espaço localmente convexo* F, *dada uma aplicação* $T \in L(F,E)$ *existe uma rede equicontínua* $(T_i)_{i\in I} \subset F' \otimes E$ *que converge pontualmente a* T *em* F.

(e) *Para todo espaço localmente convexo* F, *dada uma aplicação* $T \in L(F'_c, E)$ *existe uma rede equicontínua* $(T_i)_{i\in I} \subset F \otimes E \subset L(F'_c, E)$ *que converge uniformemente a* T *sobre os conjuntos equicontínuos de* F'_c, *ou seja,* $(T_i)_{i\in I}$ *converge a* T *em* $F\epsilon E$.

(f) *Para todo espaço localmente convexo* F, *dada uma aplicação* $T \in L(E'_c, F)$ *existe uma rede equicontínua* $(T_i)_{i\in I} \subset E \otimes F \subset L(E'_c, F)$ *que converge uniformemente a* T *sobre os conjuntos equicontínuos de* E'_c, *ou seja,* $(T_i)_{i\in I}$ *converge a* T *em* $E\epsilon F$.

$(g)E'_c$ *tem a propriedade de aproximação limitada.*

São sempre verdades : $(a) \Leftrightarrow (b) \Leftrightarrow (c) \Leftrightarrow (d) \Leftrightarrow (e)$ *e* $(f) \Leftrightarrow (g)$. *Se* E *é um espaço semi-Montel então* $(e) \Rightarrow (f)$.

Observação 1.31 *Sejam* E *e* F *espaços localmente convexos. Sabemos que nos conjuntos equicontínuos de* $L(E,F)$ *a topologia da convergência pontual coincide com a topologia da convergência nos compactos. Desta maneira a propriedade de aproximação limitada implica na propriedade de aproximação.*

Proposição 1.32 *Seja* E *um espaço localmente convexo completo, e seja* E_0 *um subespaço denso de* E. *Se* E_0 *tem a propriedade de aproximação limitada, então* E *tem a propriedade de aproximação limitada.*

Demonstração: Seja E_0 um subespaço denso de E com a propriedade de aproximação limitada. Pelo item (c) do Teorema 1.30, para cada $T \in L(E,E)$ existe uma rede equicontínua $(T_i)_{i\in I} \subset E_0' \otimes E$ que converge pontualmente a T em E_0. Pelo Lema 1.11 existe uma rede equicontínua $(\widetilde{T}_i)_{i\in I} \subset E' \otimes E$ que converge pontualmente a T em E. Segue pelo Teorema 1.30 que E tem a propriedade de aproximação limitada. $\square$

Proposição 1.33 *([3], Proposição 2.4)*

Seja E um espaço localmente convexo com a propriedade de aproximação limitada. Então cada subespaço complementado de E tem a propriedade de aproximação limitada.

Teorema 1.34 *([3], Corolário 2.9)*

(a) Se E é um espaço localmente convexo semi-Montel com a propriedade de aproximação limitada, então E_c' tem a propriedade de aproximação limitada.

(b) Um espaço de Montel E tem a propriedade de aproximação limitada se, e somente se, $E_b' = E_c'$ tem a propriedade de aproximação limitada.

1.4 Topologias indutivas e projetivas

Seja E um espaço localmente convexo e $A \subset E$. Denotaremos por $\Gamma(A)$ a envoltória convexa e equilibrada de A.

Definição 1.35 *Seja E um espaço vetorial, seja $(E_i)_{i\in I}$ uma família de espaços localmente convexos indexados por um conjunto dirigido I, e seja $\pi_i : E_i \to E$ uma aplicação linear para cada $i \in I$. Chamaremos de topologia indutiva em E com relação à família de aplicações (π_i) à topologia localmente convexa mais fina em E que torna cada π_i contínua.*

Os subconjuntos convexos, equilibrados e absorventes V de E com $\pi_i^{-1}(V) \in V(E_i)$ para cada $i \in I$, formam uma base de vizinhanças de zero para a topologia indutiva.

Observação 1.36 *([11], p. 157) Sejam $(E_i)_{i\in I}$ uma família de espaços localmente convexos e E um espaço vetorial munido com a topologia indutiva com relação a uma* *família de aplicações $\pi_i : E_i \to E$. Se E coincide com o subespaço vetorial gerado pelo conjunto $\cup_i \pi_i(E_i)$, então os conjuntos $V = \Gamma(\cup_i \pi_i(V_i))$ onde $V_i \in V(E_i)$, formam uma base de vizinhanças de zero para a topologia indutiva.*

Definição 1.37 *Seja $(E_i)_{i\in I}$ uma família de espaços localmente convexos. Seja $\oplus_{i\in I} E_i$ o subespaço de todos os elementos $(x_i)_{i\in I} \in \Pi_{i\in I} E_i$ tais que $x_i \neq 0$ para apenas um número finito de índices. O espaço $\oplus_{i\in I} E_i$ munido da topologia indutiva com relação às aplicações canônicas $\pi_j : E_j \to \oplus_{i\in I} E_i$ é chamada de soma direta localmente convexa da família $(E_i)_{i\in I}$.*

Definição 1.38 *Seja E um espaço vetorial, e seja $(E_i, \tau_i)_{i\in I}$ uma família de subespaços vetoriais de E com as topologias τ_i indexada por um conjunto dirigido I tal que $E = \cup_{i\in I} E_i$. Se $i \leq j$ suponhamos que E_i é um subespaço de E_j tal que a inclusão $i_{i,j} : (E_i, \tau_i) \to (E_j, \tau_j)$ é contínua. Então $(E_i, \tau_i)_{i\in I}$ é dito um sistema indutivo injetivo de espaços localmente convexos. Considere τ a topologia localmente convexa mais fina em E tal que todas as inclusões $i_j : (E_j, \tau_j) \to (E, \tau)$ sejam contínuas. (E, τ) é dito o limite indutivo localmente convexo do sistema $(E_j, \tau_j)_{j\in I}$ e escrevemos $E = ind_{i\in I} E_i$.*

Definição 1.39 *Seja E um espaço vetorial, seja $(E_i)_{i\in I}$ uma família de espaços localmente convexos indexados por um conjunto dirigido I, e seja $\pi_i : E \to E_i$ uma aplicação linear para cada $i \in I$. Chamaremos de topologia projetiva em E com relação à família de aplicações $(\pi_i)_{i\in I}$ à topologia localmente convexa mais fraca em E que torna cada π_i contínua.*

Os conjuntos $\cap_{i\in A} \pi_i^{-1}(V_i)$ com $A \subset I$ finito e V_i aberto em E_i, formam uma base para os abertos da topologia projetiva.

Definição 1.40 *Sejam $(E_i)_{i\in I}$ uma família de espaços vetoriais topológicos indexada por um conjunto dirigido I e $\pi_{i,j} \in L(E_j, E_i)$ para todo $i, j \in I$ tal que $i \leq j$. A família $(E_i, \pi_{i,j})_{i\in I}$ é dita um sistema projetivo se satisfaz*

(1) $\pi_{i,i} : E_i \to E_i$ é a identidade para cada $i \in I$,

(2) $\pi_{i,j} \circ \pi_{j,k} = \pi_{i,k}$ *se* $i \leq j \leq k$.

O limite projetivo dos espaços E_i*, denotado por* $proj_{i\in I}E_i$*, é definido por*

$$proj_{i\in I}E_i := \{(x_i)_{i\in I} \in \Pi_{i\in I}E_i : x_i = \pi_{i,j}(x_j) \text{ sempre que } i \leq j\}.$$

O espaço $proj_{i\in I}E_i$ *é um subespaço fechado de* $\Pi_{i\in I}E_i$*, com a topologia induzida pela topologia produto.*

Teorema 1.41 *([13], p. 231)*

Seja E *um espaço localmente convexo completo então* E *é topologicamente isomorfo ao limite projetivo* $proj_W\widehat{E_W}$ *em que* W *varia sobre as vizinhanças convexas e equilibradas de zero em* E *e* $\widehat{E_W}$ *é o completamento de* E_W*.*

Definição 1.42 *Seja* E *um espaço localmente convexo. Diremos que* E'_i *é o dual* E' *de* E *com a topologia indutiva definida por* $E'_i = ind_V E'_{V^0} = ind_V(E_V)'_b$ *onde* V *varia sobre as vizinhanças convexas e equilibradas de zero em* E*, e* V^0 *denota o polar de* V *em* E'*.*

Definição 1.43 *Sejam* E *e* F *espaços localmente convexos. Denotaremos por* τ_l *a topologia sobre* $L(E,F)$ *introduzida por Nachbin [20], e definida por*

$$(L(E,F),\tau_l) = proj_W ind_V L(E_V, F_W)$$

onde V *e* W *variam sobre as vizinhanças convexas e equilibradas de zero em* E *e* F *respectivamente.*

1.5 Polinômios e aplicações holomorfas

Definição 1.44 *Sejam* E *e* F *espaços localmente convexos. Diremos que uma aplicação* $P : E \to F$ *é um polinômio m-homogêneo se existe uma aplicação m-linear* $A : E^m \to F$ *tal que* $P = A \circ \Delta_m$ *onde* $\Delta_m : E \to E^m$ *é a aplicação definida por* $\Delta_m(x) = \underbrace{(x,\cdots,x)}_{m\ vezes}$*. Denotaremos por* $P_a(^mE,F)$ *o espaço dos polinômios m-homogêneos e denotaremos por* $P(^mE,F)$ *o espaço dos polinômios m-homogêneos contínuos.*

Denotaremos $A(x^j, y^{m-j}) = A(\underbrace{(x, \cdots, x)}_{j\ vezes}, \underbrace{(y, \cdots, y)}_{m-j\ vezes})$ *para* $x, y \in E$ *e* $j \in \{1, \ldots, m\}$. *Dados* $P \in P_a(^m E, F)$, $B \subset E$ *e* $\alpha \in cs(F)$ *denotaremos* $||P||_{B,\alpha} = \sup_{x \in B} \alpha(P(x))$.

Lema 1.45 *([4], p. 12, Lema 1.9) Sejam* E *e* F *espaços localmente convexos,* $P = L \circ \Delta^n \in P_a(^n E, F)$ *e* $x, y \in E$.

(a) $P(x + y) = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} L(x^j, y^{n-j})$

(b) $P(x) - P(y) = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} L(y^j, (x - y)^{n-j})$

Lema 1.46 *([4], p. 14, Lema 1.10) Sejam* E *e* F *espaços localmente convexos,* $P \in P_a(^n E)$, $B \subset E$ *e* $\alpha \in cs(F)$.

(a) Se B *é equilibrado e* $x \in E$ *então* $||P||_{\alpha,B} \leq ||P||_{\alpha,x+B}$.

(b) Se B *é convexo e equilibrado então para todo* $x \in E$ *e* $\lambda > 0$ *com* $\lambda x \in B$ *temos* $||P||_{\alpha,x+B} \leq (1 + \frac{1}{\lambda})^n ||P||_{\alpha,B}$.

Definição 1.47 *Sejam* E *e* F *espaços localmente convexos e seja* $n \in \mathbb{N}$. *A topologia compacto-aberta* τ_c *sobre* $P(^m E, F)$ *é a topologia da convergência uniforme sobre os subconjuntos compactos de* E. *A topologia* τ_c *é gerada pelas seminormas* $p_{K,\alpha}(P) = \sup_{x \in K} \alpha \circ P(x)$ *onde* $\alpha \in cs(F)$ *e* K *varia sobre os subconjuntos compactos de* E.

Quando E é um espaço quase-completo então $L_c(E, F) = (P^1(E, F), \tau_c)$.

Definição 1.48 *Seja* E *um espaço localmente convexo e seja* F *um espaço normado. A topologia* τ_ω *sobre* $P(^m E, F)$ *é a topologia indutiva dada pelo espaço localmente convexo* $P(^m E_\alpha, F)$ *onde* $\alpha \in cs(E)$, *isto é,* $(P(^m E, F), \tau_\omega) = ind_{\alpha \in cs(E)}(P(^m E_\alpha, F), ||.||)$.

Uma seminorma p *em* $P(^m E, F)$ *é* τ_ω*-contínua se, e somente se, para cada vizinhança* V *de zero em* E *existe* $C(V) > 0$ *tal que* $p(P) \leq C(V)||P||_V$ *para todo* $P \in P(^m E, F)$.

Definição 1.49 *Sejam* E *e* F *espaços localmente convexos. Para cada* $T \in L(E, F)$ *definimos*

$$T' : \psi \in F' \to \psi \circ S \in E'.$$

Diremos que T' *é a adjunta de* T.

Definição 1.50 *Sejam E e F espaços localmente convexos e seja $n \in \mathbb{N}$. Para cada $P \in P(^nE, F)$ definimos*

$$P' : \psi \in F' \to \psi \circ P \in P(^nE).$$

Observe que $P' \in L(F'_c, (P(^nE), \tau_c)) = F\epsilon(P(^nE), \tau_c)$.

Definição 1.51 *Seja E um k-espaço localmente convexo e seja $n \in \mathbb{N}$. Definimos a aplicação avaliação*

$$\delta_n : E \to (P(^nE), \tau_c)'_c$$

por

$$\delta_n(x) : P \in P(^nE) \to P(x) \in \mathbb{C}.$$

Teorema 1.52 *([1], p. 11) Seja E um k-espaço localmente convexo, seja F um espaço localmente convexo quase-completo e seja $n \in \mathbb{N}$. Então a aplicação*

$$P \in (P(^nE, F), \tau_c) \to P' \in F\epsilon(P(^nE), \tau_c)$$

é um isomorfismo topológico. A aplicação inversa é dada por

$$S \in F\epsilon(P(^nE), \tau_c) \to S' \circ \delta_n \in (P(^nE, F), \tau_c)$$

onde S' é a adjunta de S.

Definição 1.53 *Sejam E e F espaços localmente convexos, e $U \subset E$ aberto. Uma aplicação $f : U \to F$ é G-holomorfa se para cada $a \in U$, $b \in E$ e $\psi \in E'$ a função $\lambda \to \psi \circ f(a + \lambda b)$ é holomorfa em alguma vizinhança de zero em $\mathbb{C}$. Denotaremos por $H_G(U, F)$ o espaço de todas as aplicações G-holomorfas de U em F. Quando $F = \mathbb{C}$ escreveremos $H_G(U)$ no lugar de $H_G(U, \mathbb{C})$.*

Definição 1.54 *Sejam E e F espaços localmente convexos e $U \subset E$ aberto. Uma aplicação $f : U \to F$ é holomorfa se é G-holomorfa e contínua. Denotaremos por $H(U, F)$ o espaço de todas as aplicações holomorfas de U em F. Quando $F = \mathbb{C}$ escreveremos $H(U)$ no lugar de $H(U, \mathbb{C})$.*

Observação 1.55 *([4], p. 148, Proposição 3.2)*

Sejam E e F espaços localmente convexos e $U \subset E$ aberto. Se $\xi \in U$ considere $B_\xi = \{z \in E : \xi + \lambda z \in U, |\lambda| \leq 1\}$. Uma aplicação $f : U \to F$ holomorfa admite uma única representação como uma série de polinômios homogêneos

$$f(\xi + z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(z)$$

uniformemente para todo $z \in B_\xi$, em que $P_n \in P(^nE, F)$. Tal representação é chamada de série de Taylor da função f em ξ. Denotamos por $P^m f(\xi)$ o m-ésimo termo da série de Taylor de f em ξ. Para cada $m \in \mathbb{N}$ e $z \in B_\xi$ temos a seguinte representação

$$P^m f(\xi)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=1} \frac{f(\xi + \lambda z)}{\lambda^{m+1}} d\lambda$$

conhecida como Fórmula Integral de Cauchy.

Teorema 1.56 *([15], p. 28, Proposição 4.4)*

Sejam E e F espaços localmente convexos e $U \subset E$ aberto. Sejam $f \in H(U, F)$ e $T \in L(F, G)$ onde G é um espaço localmente convexo. Então $f \circ T \in H(U, G)$ e $P^m(T \circ f)(a) = T \circ P^m(f)(a)$ para todo $a \in U$ e para todo $m \in \mathbb{N}$.

Definição 1.57 *Sejam $U \subset E$ um aberto de um espaço localmente convexo e F um espaço localmente convexo. A topologia compacto-aberta (ou a topologia da convergência uniforme sobre os subconjuntos compactos de U) em $H(U, F)$ é a topologia localmente convexa gerada pelas seminormas $p_{K,\alpha}(f) = \sup_{x \in K} \alpha(f(x))$ onde K varia sobre os subconjuntos compactos de U e $\alpha \in cs(F)$.*

Definição 1.58 *Sejam $U \subset E$ um aberto de um espaço localmente convexo e F um espaço normado. Uma seminorma p em $H(U, F)$ é τ_δ-contínua se para cada cobertura aberta, enumerável e crescente (V_n) de U, existem $n_0 \in \mathbb{N}$ e $c > 0$ tais que $p(f) \leq c||f||_{V_{n_0}}$ para toda $f \in H(U, F)$. A topologia τ_δ sobre $H(U, F)$ é a topologia localmente convexa gerada pelas seminormas τ_δ-contínuas. Se F é um espaço localmente convexo arbitrário temos $(H(U, F), \tau_\delta) = proj_{\beta \in cs(F)}(H(U, F_\beta), \tau_\delta)$.*

Definição 1.59 *Seja $U \subset E$ um aberto de um espaço localmente convexo e F um espaço normado. Uma seminorma p é dita ser portada por um compacto $K \subset U$ se para cada aberto V , $K \subset V \subset U$, existe $C_V > 0$ tal que $p(f) \leq C_V ||f||_V$ para todo $f \in H(U, F)$. A topologia τ_ω é gerada por todas as seminormas portadas por subconjuntos compactos de U. Se F é um espaço localmente convexo arbitrário temos $(H(U, F), \tau_\omega) = proj_{\beta \in cs(F)}(H(U, F_\beta), \tau_\omega)$.*

Definição 1.60 *Sejam E e F espaços localmente convexos e seja $K \subset E$ compacto. Considere $\bigcup\limits_V H(V, F)$ com V aberto e $K \subset V$. Podemos definir uma relação de equivalência $\sim$ sobre $\bigcup\limits_V H(V, F)$. Diremos que $f \sim g$ se existe um aberto W contendo K tal que f e g estão definidas em W e $f|_W = g|_W$. Sejam $\mathcal{V}$ o conjunto dos abertos de E contendo K e $H(K, F) = (\bigcup\limits_{V \in \mathcal{V}} H(V, F))/ \sim$. Se $f \in H(V, F)$ com V aberto contendo K, seja $\overline{f}$ a classe de equivalência de f em $H(K, F)$. Cada $\overline{f} \in H(K, F)$ é chamado de germe holomorfo sobre K. Definimos a topologia compacto-aberta sobre $H(K, F)$ da seguinte maneira: $(H(K, F), \tau_c) = ind_{K \subset V}(H(V, F), \tau_c)$ com V aberto. Definimos a topologia τ_ω sobre $H(K, F)$ da seguinte maneira $(H(K, F), \tau_\omega) = ind_{K \subset V}(H(V, F), \tau_\omega)$ com V aberto.*

Teorema 1.61 *([4], p. 172, Exemplo 3.20)*

Sejam E um espaço localmente convexo metrizável, F um espaço normado e U um subconjunto aberto de E. Então todo conjunto τ_c-limitado em $H(U, F)$ é localmente limitado.

Proposição 1.62 *([2], p. 27, Proposição 2.1) Seja K um subconjunto compacto de um espaço localmente convexo E. Então existe um espaço localmente convexo completo $G(K)$ tal que $G(K)'_i = (H(K), \tau_\omega)$.*

1.6 Domínios de Riemann

Definição 1.63 *Um domínio de Riemann sobre um espaço localmente convexo E é um par (Ω, p) onde Ω é um espaço topológico de Hausdorff e $p : \Omega \to E$ é um homeomorfismo local. Diremos que o par (U, p_U) é uma carta de Ω, se U é um aberto em Ω, $p(U)$ é um aberto em E e $p_U := p|U : U \to p(U)$ é um homeomorfismo.*

Denotaremos por $K(\Omega)$ o conjunto dos subconjuntos compactos de Ω.

Definição 1.64 *Sejam (Ω_1, p_1) e (Ω_2, p_2) domínios de Riemann sobre os espaços localmente convexos E e F respectivamente, e $T \in L(E, F)$. Então uma aplicação contínua*

$$j : (\Omega_1, p_1) \to (\Omega_2, p_2)$$

é chamada de um T-morfismo se o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} \Omega_1 \arrow[r, "j"] \arrow[d, "p_1"'] & \Omega_2 \arrow[d, "p_2"] \\ E \arrow[r, "T"'] & F \end{tikzcd}$$

comuta. Quando $E = F$ e T é a aplicação identidade chamaremos j apenas de um morfismo.

Observação 1.65 *([5], p. 144)*

Seja (Ω, p) um domínio de Riemann sobre um k-espaço localmente convexo E. Então (Ω, p) também é um k-espaço.

Definição 1.66 *Seja (Ω, p) um domínio de Riemann sobre o espaço localmente convexo E.Uma seção de Ω é uma aplicação contínua $\sigma : A \to \Omega$, em que $A \subset E$, tal que $p \circ \sigma$ é a identidade sobre A. Para cada $S \subset \Omega$ e $V \in V(E)$ aberto, escrevemos $S+V \subset \Omega$ se para cada $x \in S$ existe uma seção $\sigma_x : p(x)+V \to \Omega$ tal que $\sigma_x \circ p(x) = x$. Definimos $x + t = \sigma_x(p(x) + t)$ para todos $x \in S$ e $t \in V$.*

Definição 1.67 *Seja (Ω, p) um domínio de Riemann sobre um espaço localmente convexo E e seja F um espaço localmente convexo. Uma aplicação $f : \Omega \to F$ é dita* *holomorfa se para cada carta* (U, p_U) *de* Ω *a aplicação* $f \circ p_U^{-1} \in H(p(U), F)$ *. Denotaremos por* $H(\Omega, F)$ *o espaço de todas as aplicações holomorfas de* Ω *em* F*. Quando* $F = \mathbb{C}$ *escreveremos* $H(\Omega)$ *no lugar de* $H(\Omega, \mathbb{C})$.

Sejam (Ω_1, p_1) *e* (Ω_2, p_2) *domínios de Riemann sobre os espaços localmente convexos* E *e* F *respectivamente. Uma aplicação* $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ *é holomorfa se* $p_2 \circ f$ *é holomorfa.*

Na seção anterior, dados E e F espaços localmente convexos e $U \subset E$ aberto, definimos as topologias τ_c, τ_δ e τ_ω em $H(U, F)$. De maneira análoga, se (Ω, p) é um domínio de Riemann sobre E definimos as topologias τ_c, τ_δ e τ_ω em $H(\Omega, F)$.

Definição 1.68 *Sejam* E *um k-espaço localmente convexo,* F *um espaço localmente convexo quase-completo e* (Ω, p) *um domínio de Riemann sobre* E*. Para cada* $f \in H(\Omega, F)$ *definimos*

$$f' : \psi \in F' \to \psi \circ f \in H(\Omega).$$

Definição 1.69 *Sejam* E *um k-espaço localmente convexo e* (Ω, p) *um domínio de Riemann sobre* E*. Definimos a aplicação avaliação* $\delta_\Omega : \Omega \to (H(\Omega), \tau_c)'_c$ *por* $\delta_\Omega(x) : g \in H(\Omega) \to g(x) \in \mathbb{C}$ *para todo* $x \in \Omega$ *e* $g \in H(\Omega)$.

Teorema 1.70 *([22]) Seja* E *um k-espaço localmente convexo, seja* F *um espaço localmente convexo quase-completo e* (Ω, p) *um domínio de Riemann sobre* E.

Então a aplicação

$$f \in (H(\Omega, F), \tau_c) \to f' \in F\epsilon(H(\Omega), \tau_c)$$

é um isomorfismo topológico e a aplicação inversa é dada por

$$S \in F\epsilon(H(\Omega), \tau_c) \to S' \circ \delta_\Omega \in (H(\Omega, F), \tau_c)$$

onde S' *é a adjunta de* S.

Definição 1.71 *Seja* (Ω, p) *um domínio de Riemann sobre um espaço localmente convexo. Para* $\alpha \in cs(E)$*,* $x \in \Omega$*,* $a, b \in E$ *e* $r > 0$ *consideraremos* $B_E^\alpha(a, r) = \{x \in E : \alpha(x - a) < r\}$*,* $D_E(a, b, r) = \{a + \lambda b : \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| < r\}$*, e* $D_\Omega(x, a, r) = x + \{\lambda a, |\lambda| < r\}$.

Se $x \in \Omega$, $A \subset \Omega$, $a \in E$, sejam

$$d_\Omega(x,a) = \sup\{r \geq 0 : D_\Omega(x,a,r) \ existe\},$$

$$d_\Omega(a,A) = \inf_{x \in A} d_\Omega(x,a).$$

A função $d_\Omega : \Omega \times E \to [0,\infty]$ é semicontínua inferiormente.

Definição 1.72 *Uma função $u : (\Omega,p) \to [-\infty,+\infty)$, onde (Ω,p) é um domínio de Riemann sobre um espaço localmente convexo E, é plurisubharmônica se é semicontínua superiormente e para todos $x \in \Omega$, $a \in E$ e $r > 0$ tais que $\overline{D_\Omega(x,a,r)} \subset \Omega$ temos*

$$u(x) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x + r\exp^{i\theta} a)d\theta.$$

Definição 1.73 *Um domínio de Riemann (Ω,p) sobre um espaço localmente convexo E é pseudoconvexo se $-\log d_\Omega$ é uma função plurisubharmônica sobre o domínio de Riemann $(\Omega \times E, p \times I_{D_E})$*

Se F é um subespaço de E, consideremos o conjunto

$$\Omega_F = p^{-1}(p(\Omega) \cap F) = \{x \in \Omega : p(x) \in F\}.$$

Temos que $(\Omega_F, p|_{\Omega_F})$ é um domínio de Riemann sobre F e o diagrama de aplicações contínuas

$$\begin{tikzcd}
\Omega_{\Omega_F} \arrow[r, "i_{\Omega_F(x)=x}"] \arrow[d, "p|_{\Omega_F}"'] & \Omega \arrow[d, "p"] \\
F \arrow[r, "i_F(x)=x"'] & E
\end{tikzcd}$$

comuta.

Definição 1.74 *Seja (Ω,p) um domínio de Riemann sobre um espaço localmente convexo. Para cada $\alpha \in cs(E)$ definimos a função distância $d_\Omega^\alpha \to [0,\infty]$ por*

$$d_\Omega^\alpha(x) = \sup\{r > 0;\ existe\ uma\ se\acute{c}\tilde{a}o\ \sigma : B_E^\alpha(p(x),r) \to \Omega\ com\ \sigma \circ p(x) = x\}.$$

Capítulo 2

Linearização de aplicações holomorfas em domínios de Riemann

Para um subconjunto aberto U de um espaço localmente convexo E, Mazet provou em [14] a existência de um espaço localmente convexo completo $G(U)$ e de uma aplicação $\delta_U \in H(U, G(U))$, com a propriedade de que dado um espaço localmente convexo completo F e uma aplicação $f \in H(U, F)$ existe uma única aplicação $T_f \in L(G(U), F)$ tal que $T_f \circ \delta_U = f$. Mujica e Nachbin provaram em [18] que $G(U)'_i = (H(U), \tau_\delta)$, e deram uma outra demonstração para o Teorema de Linearização de Mazet . Neste mesmo artigo eles construiram o subespaço denso $G_0(U)$ de $G(U)$. Na seção 2.1 mostraremos a existência de um espaço localmente convexo completo $G(\Omega)$ tal que $G(\Omega)'_i = (H(\Omega), \tau_\delta)$ para um domínio de Riemann (Ω, p) sobre um espaço localmente convexo e generalizaremos o Teorema de Linearização de Mazet [14] para um domínio de Riemann sobre um espaço localmente convexo. Na seção 2.2 construiremos o subespaço denso $G_0(\Omega)$ de $G(\Omega)$.

Enunciaremos também o Teorema de Linearização para polinômios m-homogêneos na seção 2.3 e mostraremos resultados similares aos obtidos a partir do Teorema de

Linearização.

2.1 Linearização de aplicações holomorfas

Nesta seção generalizaremos o Teorema de Linearização provado por Mujica e Nachbin em [18]. Veremos que as mesmas técnicas podem ser aplicadas considerando um domínio de Riemann sobre um espaço localmente convexo em vez de um subconjunto aberto.

O resultado que enunciaremos a seguir é a chave para a demonstração do Teorema de Linearização de Mujica e Nachbin.

Teorema 2.1 *([18], Teorema 1.1)*

Seja $E = indE_\alpha$ o limite indutivo de uma família de espaços de Banach dirigida pela a inclusão.

(a) Seja τ uma topologia localmente convexa sobre E tal que a bola fechada unitária B_α de cada E_α é τ-compacta. Seja F o espaço localmente convexo completo dos funcionais lineares sobre E cuja restrição a cada B_α é τ-contínuos, com a topologia da convergência uniforme sobre os conjuntos B_α. Então a aplicação avaliação $J : E \to F'_i$ é um isomorfismo topológico.

(b) Se, além disso, o espaço E tem uma base de vizinhanças de zero τ-fechadas, convexas e equilibradas, então $F'_i = F'_b$ e E é topologicamente isomorfo ao dual forte de F.

Antes de mostrarmos o Teorema de Linearização para domínio de Riemann, precisamos de uma caracterização para a topologia τ_δ em espaços de aplicações holomorfas definidas em um domínio de Riemann sobre um espaço localmente convexo. Tal resultado já é conhecido para espaços de aplicações holomorfas definidas em um subconjunto aberto de um espaço localmente convexo.([4], p. 170, Proposição 3.17)

Proposição 2.2 *Seja (Ω, p) um domínio de Riemann sobre um espaço localmente convexo E e seja F um espaço de Banach. Então $(H(\Omega, F), \tau_\delta)$ é um limite indutivo* *de espaços de Fréchet. Em particular, é um espaço tonelado, bornológico e ultrabornológico.*

Demonstração: Seja $A = (C_n)$ uma cobertura aberta, enumerável e crescente de Ω.

Consideremos o espaço $H^\infty(A, F) = \{f \in H(\Omega, F); ||f||_{C_n} < \infty \ \forall n \in \mathbb{N}\}$ munido com a topologia τ_A gerada pela sequência de seminormas $p_n(f) = \sup_{y \in C_n} ||f(y)|| = ||f||_{C_n}$. Temos que $(H^\infty(A, F), \tau_A)$ é um espaço localmente convexo metrizável.

Vamos provar que o espaço $(H^\infty(A, F), \tau_A)$ é um espaço de Fréchet.

Seja (f_n) uma sequência de Cauchy em $(H^\infty(A, F), \tau_A)$. Como a topologia τ_A é dada pela convergência uniforme sobre os conjuntos C_n, temos que $(f_n(x))$ é uma sequência de Cauchy no espaço de Banach F.

Considere $f : \Omega \to F$ dada por $f(x) = \lim_n f_n(x)$. Como (f_n) é uma sequência de Cauchy em $(H^\infty(A, F), \tau_A)$, dados $\epsilon > 0$ e $j \in \mathbb{N}$ existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $||f_n(x) - f_m(x)|| < \epsilon$ para todos $n, m \geq j_0$ e $x \in C_j$. Fixando n e fazendo m tender ao infinito temos que $||f_n(x) - f(x)|| \leq \epsilon$ para todos $n \geq j_0$ e $x \in C_j$. Donde concluímos que a sequência (f_n) converge uniformemente a f sobre cada C_j. Em particular, f é uma aplicação contínua e (f_n) converge a f uniformemente sobre os compactos de Ω.

Seja (U, p_U) uma carta do domínio de Riemann (Ω, p). Para cada $a \in p(U)$, $b \in E$, e $\psi \in F'$ definamos

$$g_n(\lambda) = \psi \circ f_n \circ p_U^{-1}(a + \lambda b) \ e \ g(\lambda) = \psi \circ f \circ p_U^{-1}(a + \lambda b)$$

para todo $\lambda \in \Lambda = \{\lambda \in \mathbb{C} : a + \lambda b \in p(U)\}$. Segue que g_n é uma função holomorfa em Λ para cada $n \in \mathbb{N}$. Além disso, a sequência (g_n) converge uniformemente a g sobre os conjuntos compactos de Λ. Segue pelo Teorema de Weierstrass para funções holomorfas de uma variável complexa que g é holomorfa em Λ. Então $f \circ p_U^{-1}$ é uma aplicação G-holomorfa. Como f e p_U^{-1} são funções contínuas, obtemos que $f \circ p_U^{-1}$ é uma função contínua, e assim f é uma aplicação holomorfa.

Como a sequência (f_n) é uma sequência de Cauchy, para cada $j \in \mathbb{N}$ existe $M_j > 0$ tal que $||f_n(x)|| \leq M_j$ para $x \in C_j$ e $n \in \mathbb{N}$. Pelo fato de (f_n) convergir uniformemente a f em cada C_j, temos $||f(x)|| \leq M_j$ para cada $x \in C_j$. Logo $f \in H^\infty(A, F)$ e $(H^\infty(A, F), \tau_A)$ é um espaço de Fréchet.

Vejamos agora que $H(\Omega, F) = \cup_A H^\infty(A, F)$ onde A varia entre as coberturas abertas, enumeráveis e crescentes de Ω.

Seja $f \in H(\Omega, F)$. Consideremos para cada $n \in \mathbb{N}$ o subconjunto $W_n = \{x \in \Omega : ||f(x)|| < n\} \subset \Omega$. Como f é uma aplicação contínua, temos que $W = (W_n)$ é uma cobertura aberta crescente e enumerável de Ω. Segue que $f \in H_W(\Omega, F) \subset H(\Omega, F)$.

Sejam $A = (C_n) \in \mathcal{C}$ e $W = (D_n) \in \mathcal{C}$ em que $\mathcal{C}$ é o conjunto das coberturas abertas, enumeráveis e crescentes de Ω. Consideraremos a relação de ordem: $A \leq W$ se $C_n \subset D_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Consideremos $(H(\Omega, F), \tau_i) = ind_A(H^\infty(A, F), \tau_A)$ onde A varia sobre as coberturas abertas enumeráveis de Ω, e onde o limite indutivo é em relação a família $(i_A)_{A \in \mathcal{C}}$ em que $i_A : H^\infty(A, F) \to H(\Omega, F)$ é a inclusão.

Sejam q uma seminorma τ_δ-contínua em $H(\Omega, F)$ e $A = (C_n)$ uma cobertura enumerável de Ω. Então existem $n_0 \in \mathbb{N}$ e uma constante $C_A > 0$ tais que $q(f) \leq C_A ||f||_{C_{n_0}}$ para toda $f \in H(\Omega, F)$. Consequentemente i_A é uma aplicação τ_A-contínua e $\tau_\delta \leq \tau_i$.

Vamos mostrar que toda seminorma τ_i-contínua também é τ_δ-contínua.

Seja q uma seminorma τ_i-contínua. Suponha que q não seja τ_δ contínua. Então existe uma cobertura de abertos enumerável e crescente $V = (V_n)$ de Ω tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $f_n \in H(\Omega, F)$ de maneira que $q(f_n) \geq n||f_n||_{V_n}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ obtemos uma constante $M_n > 0$ tal que $||f_n||_{V_n} = M_n$. Definamos $g_n = \frac{1}{M_n} f_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Observemos que $(g_n) \subset H(\Omega, F)$, $||g_n||_{V_n} = 1$ e $q(g_n) = \frac{1}{M_n} q(f_n) \geq n \frac{1}{M_n} ||f_n||_{V_n} = n$.

Consideremos $W = (\overset{0}{W}_n)$ onde $\overset{0}{W}_n$ é o interior de $W_n = \{x \in \Omega; ||g_m(x)|| \leq n \ \forall m \in \mathbb{N}\}$. Vejamos que W é uma cobertura aberta enumerável de Ω. Sabemos que a sequência (g_n) é tal que $||g_n||_{V_n} = 1$ e $V_m \subset V_n$ para $m \leq n$. Assim, dado $m \in \mathbb{N}$ temos que $||g_n(x)|| \leq 1$ para todos $x \in V_m$ e $n \geq m$, donde concluímos que a sequência (g_n) é localmente limitada. Consequentemente W é uma cobertura aberta enumerável e crescente de Ω. Além disso, $(g_n) \subset H^\infty(W, F)$.

Consideremos o espaço $H^\infty(W, F) \subset H(\Omega, F)$. Como a inclusão

$$(H^\infty(W, F), \tau_W) \to (H(\Omega, F), \tau_i)$$

é contínua, existe uma seminorma $p_{\overset{0}{W}_{n_0}}$ de $(H^\infty(W, F), \tau_W)$ e existe uma constante C_{n_0} tais que $q(f) \leq C_{n_0} p_{\overset{0}{W}_{n_0}}(f)$ para toda $f \in H^\infty(W, F)$. Então $n \leq q(g_n) \leq C_{n_0} ||g_n||_{\overset{0}{W}_{n_0}} \leq C_{n_0} n_0$ para todo $n \in I\!\!N$, absurdo. Logo q é τ_δ-contínua e $\tau_\delta = \tau_i$.

□

Veremos agora que o Teorema de Linearização para espaços de aplicações holomorfas definidas em um aberto de um espaço localmente convexo pode ser generalizado para espaços de aplicações holomorfas, definidas em um domínio de Riemann sobre um espaço localmente convexo E.

Teorema 2.3 *(Teorema de Linearização)*

Seja (Ω, p) um domínio de Riemann sobre um espaço localmente convexo E. Então existe um espaço localmente convexo completo $G(\Omega)$ e uma aplicação $\delta_\Omega \in H(\Omega, G(\Omega))$ tal que sua imagem gera um subespaço denso em $G(\Omega)$, e com a propriedade de que para cada espaço localmente convexo completo F e cada $f \in H(\Omega, F)$ existe uma única $T_f \in L(G(\Omega), F)$ tal que $T_f \circ \delta_\Omega = f$.

Demonstração:

Seja $A = (C_n)$ uma cobertura aberta crescente e enumerável de Ω e $\alpha = (\alpha_n)$ uma sequência de números positivos. Consideremos o espaço

$$H^\infty(A) = \{f \in H(\Omega); ||f||_{C_n} < \infty \ \forall \ n\}$$

munido da topologia τ_A gerada pelas seminormas $p_{C_n}(f) = \sup_{y \in C_n} |f(y)| = ||f||_{C_n}$.

Definamos $B_A^\alpha = \{f \in H(\Omega); ||f||_{C_n} \leq \alpha_n \ \forall n \in I\!\!N\} \subset H^\infty(A)$. Para cada $f \in B_A^\alpha$ temos que $p_{C_n}(f) = ||f||_{C_n} \leq \alpha_n$ para todo $n \in I\!\!N$. Então o conjunto B_A^α é τ_A-limitado.

Vejamos que B_A^α é τ_A-fechado. Para tal, tomemos uma sequência $(f_n) \subset B_A^\alpha$ que converge a f em $(H^\infty(A), \tau_A)$. Como a topologia em $H^\infty(A)$ é dada pela convergência uniforme sobre os conjuntos C_n, a sequência (f_n) converge pontualmente a f. Consequentemente, obtemos que $f \in B_A^\alpha$, e em particular B_A^α é um conjunto τ_A-fechado. Sabemos pela Proposição 2.2 que o espaço $H^\infty(A)$ é um espaço de Fréchet. A partir daí obtemos que B_A^α é um conjunto completo.

Consideremos $H^\infty(A)_{B_A^\alpha}$ o subespaço de Banach de $H^\infty(A)$ gerado pelo conjunto B_A^α com a norma dada pelo funcional de Minkowski $p_{B_A^\alpha}$ e a inclusão contínua $i_\alpha : H^\infty(A)_{B_A^\alpha} \to (H^\infty(A), \tau_A)$. Dadas duas sequência $\alpha = (\alpha_n)$ e $\beta = (\beta_n)$ de números positivos, estabelecemos a relação de ordem $\alpha \leq \beta$ se $\alpha_n \leq \beta_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Seja $f \in H^\infty(A)$. Considerando $\beta = (M_n)$ tal que $||f||_{C_n} \leq M_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, temos que $f \in H^\infty(A)_{B_A^\beta}$, e desta maneira $H^\infty(A) = \cup_\alpha H^\infty(A)_{B_A^\alpha}$. Podemos estabelecer uma topologia sobre $H^\infty(A)$ dada por $(H^\infty(A), \tau_i) = ind_\alpha H^\infty(A)_{B_A^\alpha}$.

Mostraremos agora que a topologia τ_i coincide com a topologia gerada pela sequência de seminormas (p_{C_n}).

Como para cada sequência de números positivos α a inclusão

$$i_\alpha : H^\infty(A)_{B_A^\alpha} \to (H^\infty(A), \tau_A)$$

é contínua, temos que a aplicação identidade

$$(H^\infty(A), \tau_i) \to (H^\infty(A), \tau_A)$$

também é contínua, e com isso $\tau_A \leq \tau_i$.

Suponhamos agora a existência de uma seminorma q τ_i-contínua, que não seja τ_A-contínua. Então existe uma sequência $(g_n) \subset H^\infty(A)$ tal que $p_{C_n}(g_n) \leq 1$ e $q(g_n) \geq n$. Como, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\sup_{x \in C_n} |g_n(x)| \leq 1$, temos que $\sup_{x \in C_n} |g_m(x)| \leq 1$ para $m \geq n$. Considerando a sequência $\alpha = (\alpha_n)$ definida por

$$\alpha_n = \max\{1, \sup_{x \in C_n} |g_1(x)|, \cdots, \sup_{x \in C_n} |g_{n-1}(x)|\},$$

obtemos que $(g_n) \subset B_A^\alpha$.

Como $(H^\infty(A), \tau_i) = ind_\alpha H^\infty(A)_{B_A^\alpha}$ temos que a aplicação inclusão $H^\infty(A)_{B_A^\alpha} \to (H^\infty(A), \tau_i)$ é contínua, logo existe uma constante $C > 0$ tal que $q(f) \leq$

$Cp_{B_A^\alpha}(f)$ para toda $f \in H^\infty(A)_{B_A^\alpha}$. Dessa maneira $n \leq q(g_n) \leq Cp_{B_A^\alpha}(g_n) \leq C$ para todo $n \in \mathbb{N}$, absurdo. Donde concluímos que $\tau_i \leq \tau_A$ e consequentemente $\tau_i = \tau_A$.

Pela Proposição 2.2, temos que $(H(\Omega), \tau_\delta) = ind_A H^\infty(A)$ onde A varia sobre as coberturas abertas enumeráveis e crescentes de Ω. Segue que $(H(\Omega), \tau_\delta) = ind_A ind_\alpha H^\infty(A)_{B_A^\alpha}$ onde A varia sobre as coberturas abertas enumeráveis e crescentes de Ω, e α varia sobre as sequências positivas.

Mostraremos que $(H(\Omega), \tau_\delta) = ind_A ind_\alpha H^\infty(A)_{B_A^\alpha} = ind_{(A,\alpha)} H^\infty(A)_{B_A^\alpha}$ onde A varia sobre as coberturas abertas enumeráveis e crescentes de Ω, e α varia sobre as sequências positivas.

Como $H(\Omega) = \cup_A H^\infty(A)$ e $H^\infty(A) = \cup_\alpha H^\infty(A)_{B_A^\alpha}$, temos que $H(\Omega) = \cup_{(A,\alpha)} H^\infty(A)_{B_A^\alpha}$. Sabemos que as inclusões $i_\alpha : H^\infty(A)_{B_A^\alpha} \to (H^\infty(A), \tau_A)$ e $i_A : (H^\infty(A), \tau_A) \to (H(\Omega), \tau_\delta)$ são contínuas, então podemos considerar o seguinte espaço localmente convexo $(H(\Omega), \tau_I) = ind_{(A,\alpha)} H^\infty(A)_{B_A^\alpha}$. Consideremos a inclusão contínua $i_{A,\alpha} : H^\infty(A)_{B_A^\alpha} \to (H(\Omega), \tau_\delta)$ tal que $i_{A,\alpha} = i_A \circ i_\alpha$. Como $i_{A,\alpha}$ é contínua para cada A e cada α temos que $\tau_\delta \leq \tau_I$. Por outro lado, como as inclusões $H^\infty(A)_{B_A^\alpha} \to (H(\Omega), \tau_I)$ são contínuas, temos que a inclusão

$$(H(\Omega), \tau_\delta) = ind_A ind_\alpha H^\infty(A)_{B_A^\alpha} \to (H(\Omega), \tau_I)$$

é contínua , e consequentemente $\tau_I \leq \tau_\delta$. Obtemos então que $\tau_I = \tau_\delta$.

Pela definição, cada B_A^α é um conjunto convexo, equilibrado e localmente limitado de $H(\Omega)$. Sejam $x \in \Omega$ e (U, p_U) uma carta de Ω tal que $x \in U$. Para cada $f \in B_A^\alpha$ temos que a aplicação $f \circ p_U^{-1}$ é holomorfa. Além disso, como B_A^α é um conjunto localmente limitado, temos que $H = \{f \circ p_U^{-1}; f \in B_A^\alpha\}$ também é um conjunto localmente limitado. Consequentemente, H é um conjunto equicontínuo e pontualmente limitado. Então, dado $\epsilon > 0$ existe um aberto V contendo $p(x)$ tal que $|f \circ p_U^{-1}(y) - f \circ p_U^{-1}(p(x))| < \epsilon$ para todos $y \in V$ e $f \in B_A^\alpha$. Como p_U é um homeomorfismo e U é um subconjunto aberto de Ω, temos que $W = p_U^{-1}(V)$ é um subconjunto aberto de Ω. Então $|f(z) - f(x)| < \epsilon$ para todos $z \in W$ e $f \in B_A^\alpha$. Assim, $B_A^\alpha \subset H^\infty(A)$ é um conjunto equicontínuo e pontualmente limitado. Pelo Teorema de Ascoli 1.16, obtemos que B_A^α é τ_c-relativamente compacto.

Veremos que B_A^α é um subconjunto τ_c-fechado, e consequentemente τ_c-compacto. Com efeito, seja $(f_i)_{i\in I} \subset B_A^\alpha$ uma rede que converge a f em $(H(\Omega), \tau_c)$. Em particular, a rede $(f_i)_{i\in I}$ converge a f pontualmente. Como $|f_i(x)| \leq \alpha_n$ para todos $x \in C_n$ e $i \in I$ temos que $|f(x)| \leq \alpha_n$ para cada $x \in C_n$. Segue que B_A^α é um subconjunto τ_c-fechado.

Seja $G(\Omega)$ o espaço localmente convexo completo dos funcionais lineares sobre $H(\Omega)$, cuja restrição a cada bola B_A^α é τ_c-contínuos, com a topologia da convergência uniforme sobre os conjuntos B_A^α.

Como $(H(\Omega), \tau_\delta) = ind_{(A,\alpha)} H^\infty(A)_{B_A^\alpha}$, cada $H^\infty(A)_{B_A^\alpha}$ é um espaço de Banach e as bolas unitárias fechadas B_A^α de $H^\infty(A)_{B_A^\alpha}$ são τ_c-compactas, temos pelo Teorema 2.1 que a avaliação

$$J : (H(\Omega), \tau_\delta) \to (G(\Omega))'_i$$

é um isomorfismo topológico. Para cada $f \in H(\Omega)$ escreveremos $J(f) = J_f$.

Consideremos a aplicação avaliação $\delta_\Omega : \Omega \to G(\Omega)$ definida por $\delta_\Omega(x)(f) = f(x)$ para todos $x \in \Omega$ e $f \in H(\Omega)$. Como $\delta_\Omega(x) \in G(\Omega)$ para cada $x \in \Omega$, vale a igualdade $J_f \circ \delta_\Omega(x) = \delta_\Omega(x)(f) = f(x)$ para cada $x \in \Omega$ e $f \in H(\Omega)$.

Vamos mostrar agora que δ_Ω é uma aplicação holomorfa. Para tal mostraremos que $\delta_\Omega \circ p_U^{-1}$ é amplamente limitada e G-holomorfa para toda carta (U, p_U) do domínio de Riemann (Ω, p). Com isso veremos que $\delta_\Omega \circ p_U^{-1}$ é uma aplicação holomorfa para toda carta (U, p_U) do domínio de Riemann (Ω, p), e consequentemente δ_Ω é holomorfa.

Seja (U, p_U) uma carta de Ω. Para $\psi \in G(\Omega)'$, $a \in p(U)$ e $b \in E$ considere $\psi \circ \delta_\Omega \circ p_U^{-1}(a + \lambda b)$ para $\lambda \in \{\lambda \in \mathbb{C}; a + \lambda b \in p(U)\}$. Pela sobrejetividade da aplicação J existe $f \in H(\Omega)$ tal que $J_f = \psi$. Segue que

$$\psi \circ \delta_\Omega \circ p_U^{-1}(a + \lambda b) = J_f \circ \delta_\Omega \circ p_U^{-1}(a + \lambda b) = f \circ p_U^{-1}(a + \lambda b)$$

para $\lambda \in \{\lambda \in \mathbb{C}; a + \lambda b \in p(U)\}$. Como f é uma aplicação holomorfa temos que $f \circ p_U^{-1}$ é uma aplicação holomorfa, e consequentemente $\psi \circ \delta_\Omega \circ p_U(a + \lambda b)$ é uma aplicação holomorfa. Logo $\delta_\Omega \circ p_U^{-1}$ é G-holomorfa.

Antes de mostrarmos que a aplicação $\delta_U \circ p_\Omega^{-1}$ é amplamente limitada, vejamos que a topologia de $G(\Omega)$ é dada pelas seminormas $p_A^\alpha(u) = \sup\{|u(f)|; f \in B_A^\alpha\}$ onde A varia sobre as coberturas abertas e enumeráveis de Ω e α varia sobre as sequências de números positivos. Dados $\epsilon > 0$, uma sequência de números positivos α e uma cobertura aberta e enumerável A de Ω, considere $U_{p_A^\alpha,\epsilon} = \{u \in G(\Omega); p_A^\alpha(u) < \epsilon\}$. Se $u \in \frac{\epsilon}{2}(B_A^\alpha)^0$ temos que $|u(f)| < \frac{\epsilon}{2}$ para todo $f \in B_A^\alpha$, logo $\frac{\epsilon}{2}(B_A^\alpha)^0 \subset U_{p_A^\alpha,\epsilon}$. Pela definição da seminorma $p_A^\alpha(u)$ vemos que $U_{p_A^\alpha,1} \subset B_A^{\alpha 0}$. Obtemos então que a topologia de $G(\Omega)$ é gerada pelas seminormas p_A^α.

Veremos agora que $\delta_\Omega \circ p_U^{-1}$ é amplamente limitada. Seja p_A^α uma das seminormas que geram a topologia de $G(\Omega)$ onde $A = (C_n)$ é uma cobertura aberta, enumerável e crescente de Ω e $\alpha = (\alpha_n)$ é uma sequência de números positivos. Como a sequência de abertos (C_n) cobre Ω temos que $U = \bigcup_n (U \cap C_n)$ e $p(U) = \bigcup_n p(U \cap C_n)$. Segue que $p(U) = \cup_n p(U \cap C_n)$ onde $p(U \cap C_n)$ são conjuntos abertos em E e

$$p_A^\alpha(\delta_\Omega \circ p_U^{-1}(y)) = \sup\{|\delta_\Omega(p_U^{-1}(y))(f)|; f \in B_A^\alpha\} \leq \alpha_n$$

para todos $y \in p(U \cap C_n)$ e $n \in \mathbb{N}$. Assim, $\delta_\Omega \circ p_U^{-1}$ é amplamente limitada e consequentemente $\delta_\Omega \circ p_U^{-1}$ é holomorfa. Donde concluímos que δ_Ω é holomorfa.

Vejamos que a imagem de δ_Ω gera um subespaço denso em $G(\Omega)$. Suponha que tal fato não ocorra. Então existe um funcional linear $T \in G(\Omega)'$ tal que $T(\delta_\Omega(x)) = 0$ para todo $x \in \Omega$ e $T \neq 0$. Como J é uma aplicação sobrejetiva existe $f \in H(\Omega)$ não nula tal que $T = J_f$. Por outro lado, vale a igualdade

$$f(x) = \delta_\Omega(x)(f) = J_f(\delta_\Omega(x)) = T(\delta_\Omega(x)) = 0$$

para cada $x \in \Omega$, absurdo.

Para finalizar a demonstração do Teorema vamos mostrar que dados um espaço localmente convexo completo F e $f \in H(\Omega, F)$, existe uma única aplicação linear $T_f \in L(G(\Omega), F)$ tal que $T_f \circ \delta_\Omega = f$. Para mostrar essa propriedade vamos separar em três casos.

(1) Vamos supor que $F = \mathbb{C}$. Seja $f \in H(\Omega)$. Considerando $T_f = J_f$, como já tinhamos observado antes $T_f \circ \delta_\Omega = f$. Como T_f é um funcional linear e δ_Ω gera um subespaço denso em $G(\Omega)$ obtemos que T_f é único.

(2) Vamos supor agora que F seja um espaço de Banach. Seja $f \in H(\Omega, F)$. Consideremos $T_f : G(\Omega) \to F''$ tal que $T_f(u)(\psi) = J_{\psi \circ f}(u) = u(\psi \circ f)$ para todos $u \in G(\Omega)$ e $\psi \in F'$.

Para provarmos que a aplicação T_f está bem definida vamos mostrar que $T_f(u) \in F''$ para todo $u \in G(\Omega)$.

Consideremos o conjunto $B = \{\psi \circ f : \psi \in F', ||\psi|| \leq 1\}$. Como f é holomorfa temos que é localmente limitada. Então para cada $x \in \Omega$ existe uma vizinhança V_x de x em Ω e $C_x > 0$ tais que $|f(V_x)| \leq C_x$. Consequentemente

$$|\psi \circ f(V_x)| \leq ||\psi|| C_x \leq C_x$$

para $||\psi|| \leq 1$, donde concluímos que B é localmente limitado.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos $W_n = \{x \in \Omega; ||f(x)|| < n\}$. Como f é uma aplicação contínua temos que $W = (W_n)$ é uma cobertura aberta enumerável de Ω. Consideremos B_W^α onde $\alpha = (n)_{n \in \mathbb{N}}$. Como

$$|\psi \circ f(x)| \leq ||\psi|| ||f(x)|| < ||\psi|| n \leq n$$

para $x \in W_n$ e $||\psi|| \leq 1$ temos que $B \subset B_W^\alpha$.

Seja $u \in G(\Omega)$. Pela definição de $G(\Omega)$ temos que u é um funcional linear τ_c-contínuo sobre B_W^α. Então dado $\epsilon > 0$ existem $K \subset \Omega$ compacto e $C_1 > 0$ tal que $|u(g)| < \epsilon$ para $g \in U_{K,C_1} = \{g \in H(\Omega); \sup_{x \in K} |g(x)| < C_1\} \cap B_W^\alpha$. Seja $C_2 \geq C_1$ tal que $\sup_{x \in K} ||f(x)|| \leq C_2$. Para $\psi \in F'$ tal que $||\psi|| \leq \frac{C_1}{C_2} \leq 1$ obtemos que

$$\sup_{x \in K} |\psi \circ f(x)| \leq ||\psi|| \sup_{x \in K} ||f(x)|| \leq \frac{C_1}{C_2} C_2 = C_1.$$

Assim, $|T_f(u)(\psi)| = |u(\psi \circ f)| < \epsilon$ para $\psi \in F'$ tal que $||\psi|| \leq \frac{C_1}{C_2}$. Logo $T_f(u)$ é contínuo e T_f está bem definida.

Sejam u_1, $u_2 \in G(\Omega)$, $\psi \in F'$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Temos que

$$\begin{aligned} T_f(u_1 + \lambda u_2)(\psi) &= J_{\psi \circ f}(u_1 + \lambda u_2) = u_1 + \lambda u_2(\psi \circ f) \\ &= u_1(\psi \circ f) + \lambda u_2(\psi \circ f) = T_f(u_1)(\psi) + \lambda T_f(u_2)(\psi). \end{aligned}$$

Donde concluímos que T_f é uma aplicação linear.

Veremos que T_f é uma aplicação contínua.

Sabemos que $(B_W^\alpha)^0 \subset B^0$. Segue que $|T_f(u)(\psi)| = |u(\psi \circ f)| \leq 1$ para $u \in (B_W^\alpha)^0$ e $\psi \in F'$ tal que $||\psi|| \leq 1$. Donde concluímos que $||T_f(u)|| \leq 1$ para todo $u \in (B_W^\alpha)^0$, logo $T_f \in L(G(\Omega), F'')$.

Pela definição de T_f obtemos que

$$T_f(\delta_\Omega(x))(\psi) = T_{\psi \circ f}(\delta_\Omega(x)) = \delta_\Omega(x)(\psi \circ f) = \psi(f(x)) = f(x)(\psi)$$

para todos $x \in \Omega$ e $\psi \in F'$. Consequentemente temos que $T_f(\delta_\Omega(x)) = f(x)$ para todo $x \in \Omega$. Como T_f é uma aplicação linear e a imagem de δ_Ω gera um subespaço denso em $G(\Omega)$ temos que $T_f(g) \in F$ para cada $g \in G(\Omega)$, logo $T_f \in L(G(\Omega), F)$.

Mostraremos agora a unicidade de T_f. Seja $S \in L(G(\Omega), F)$ tal que $S \circ \delta_\Omega(x) = f(x)$ para todo $x \in \Omega$. Segue das linearidades de T_f e de S e do fato da imagem de δ_Ω gerar um subespaço denso de $G(\Omega)$ que $T_f = S$.

(3)

Suponha agora que F seja um espaço localmente convexo completo. Então $F = proj_W \widehat{F}_W$ onde W varia sobre as vizinhanças convexas e equilibradas de zero em F e $\widehat{F}_W$ é o completamento de F_W. Consideremos a aplicação canônica $\Pi_W : F \to \widehat{F}_W$. Consideremos também a aplicação canônica $\Pi_{WW'} : \widehat{F}_{W'} \to \widehat{F}_W$ quando $W \subset W'$. Sabemos que $\Pi_{WW'} \circ \pi_{W'} = \Pi_W$ quando $W \subset W'$.

Sejam $f \in H(\Omega, F)$ e W uma vizinhança convexa e equilibrada de zero em F. Como Π_W é uma aplicação linear temos que $\Pi_W \circ f \in H(\Omega, \widehat{F}_W)$. Segue pela parte (2) que existe uma única $T_W \in L(G(\Omega), \widehat{F}_W)$ tal que $T_W \circ \delta_\Omega = \Pi_W \circ f$. Pelo fato de $\Pi_{WW'} \circ \Pi_{W'} = \Pi_W$ quando W' é uma vizinhança convexa e equilibrada de zero em F tal que $W \subset W'$ temos que

$$\Pi_{WW'} \circ T_{W'} \circ \delta_\Omega = \Pi_{WW'} \circ \Pi_{W'} \circ f = \Pi_W \circ f.$$

A unicidade de T_W garante que $\Pi_{WW'} \circ T_{W'} = T_W$ quando $W \subset W'$.

Consideremos $T_f : G(\Omega) \to F = proj_W \widehat{F}_W$ dada por $T_f(x) = (T_W(x))_{W \in B_0(F)}$ onde $B_0(F)$ é uma base de vizinhanças convexas e equilibradas de zero em F. Como

$\Pi_{WW'} \circ T_{W'} = T_W$ quando $W \subset W'$ temos que T_f está bem definida. Usando o fato de que cada T_W é uma aplicação linear obtemos que T_f é uma aplicação linear. Para cada W vizinhança de zero convexa e equilibrada em F temos pela definição de T_f que $\Pi_W \circ T_f = T_W$ e consequentemente T_f é uma aplicação contínua. Além disso, obtemos que $\Pi_W \circ T_f \circ \delta_\Omega(x) = T_W \circ \delta_\Omega(x) = \Pi_W \circ f(x)$ para toda vizinhança convexa e equilibrada de zero em F. Então $T_f \circ \delta_\Omega(x) = f(x)$ para todo $x \in \Omega$. Como T_f é uma aplicação linear contínua e a imagem de δ_Ω é um subespaço denso de $G(\Omega)$ temos que T_f é a única aplicação em $L(G(\Omega), F)$ tal que $T_f \circ \delta_\Omega = f$.

$\square$

Observação 2.4 *(a) Se E é um espaço localmente convexo arbitrário, então $(H(\Omega), \tau_c)' \subset G(\Omega) \subset (H(\Omega), \tau_\delta)'$.*

(b) Se E é um espaço localmente convexo metrizável, então $G(\Omega)$ é o completamento de $(H(\Omega), \tau_c)'_c$.

Demonstração:

(a)

Segue diretamente da definição dos espaços $G(\Omega)$, $(H(\Omega), \tau_\delta)$ e $(H(\Omega), \tau_c)$.

(b)

Sabemos pela demonstração do Teorema de Linearização 2.3 que a topologia de $G(\Omega)$ é dada pela convergência uniforme sobre os conjuntos B_A^α onde A é uma cobertura de abertos crescente e enumerável e α é uma sequência de números positivos. Sabemos também que estes conjuntos são τ_c-compactos.

Vamos mostrar agora que os conjuntos compactos de $(H(\Omega), \tau_c)$ são localmente limitados.

Seja K um subconjunto compacto de $(H(\Omega), \tau_c)$. Suponha por absurdo que existe $x \in \Omega$ tal que para cada vizinhança V_x de x o conjunto $\{f(V_x); f \in K\}$ não seja limitado. Seja (U, p_U) uma carta contendo x. Temos que o conjunto

$$\{f \circ P_U^{-1}(P(V_x \bigcap U)); f \in K\}$$

também não é limitado para cada vizinhança V_x de x. Seja (V_n) uma base de vizinhanças de $p(x)$. Então para cada $n \in \mathbb{N}$ existem $a_n \in V_n$ e $f_n \in K$ tais que $||f_n \circ p^{-1}(a_n)|| > n$. Consideremos o conjunto compacto $L = \{a_n; n \in \mathbb{N}\} \bigcup \{p(x)\}$. Então $\sup_{f \in K} \sup_{y \in L} ||f \circ p_U^{-1}(y)|| \geq ||f_n \circ p_U^{-1}(a_n)|| \geq n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, absurdo. Donde concluímos que K é localmente limitado.

Na demonstração do Teorema de Linearização 2.3 vimos que todo conjunto localmente limitado está contido num conjunto B_A^α. Segue que os conjuntos dos elementos que geram as topologias de $G(\Omega)$ e de $(H(\Omega), \tau_c)'_c$ coincidem, e portanto geram a mesma topologia sobre $(H(\Omega), \tau_c)'_c$. Sabemos também pelo Teorema de Linearização 2.3 que a imagem da aplicação δ_Ω gera um subespaço denso em $G(\Omega)$. Pela Definição 1.69 a imagem de δ_Ω também está contida em $(H(\Omega), \tau_c)'$. Consequentemente o completamento de $(H(\Omega), \tau_c)'_c$ é $G(\Omega)$.

$\square$

Proposição 2.5 *Sejam E e F espaços localmente convexos com F completo e (Ω, p) um domínio de Riemann sobre E. Então a aplicação*

$$f \in (H(\Omega, F), \tau_c) \to T_f \in L_c(G(\Omega), F)$$

onde T_f é o único elemento de $L(G(\Omega), F)$ que satisfaz $T_f \circ \delta_\Omega = f$ é um isomorfismo algébrico cuja inversa é contínua.

Demonstração:

Consideremos a aplicação

$$T : H(\Omega, F) \to L(G(\Omega), F) \text{ dada por } T(f) = T_f$$

para cada $f \in H(\Omega, F)$.

Seja $g \in L(G(\Omega), F)$. Como $\delta_\Omega \in H(\Omega, G(\Omega))$, temos que $g \circ \delta_\Omega \in H(\Omega, F)$. Segue pelo Teorema de Linearização 2.3 que existe um único $T_{g \circ \delta_\Omega} \in L(G(\Omega), F)$ tal que $T_{g \circ \delta_\Omega} \circ \delta_\Omega = g \circ \delta_\Omega$. Como $T_{g \circ \delta_\Omega}$ e g são aplicações lineares contínuas e a imagem de δ_Ω gera um subespaço denso em $G(\Omega)$, temos que $T_{g \circ \delta_\Omega} = g$. Obtemos assim que T é uma aplicação sobrejetiva. Pelo Teorema de Linearização 2.3, para cada $f \in H(\Omega, F)$ existe um único $T_f \in L(G(\Omega), F)$ tal que $T_f \circ \delta_\Omega = f$. Logo T é uma aplicação injetiva.

Sejam $f, h \in H(\Omega, F)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Vemos que

$$T_{f+\lambda h} \circ \delta_\Omega = f + \lambda h = T_f \circ \delta_\Omega + \lambda T_h \circ \delta_\Omega.$$

Como a imagem de δ_Ω gera um subespaço denso em $G(\Omega)$, obtemos que $T_{f+\lambda h} = T_f + \lambda T_h$, e assim T é uma aplicação linear.

Mostraremos que $T^{-1} : L_c(G(\Omega), F) \to (H(\Omega, F), \tau_c)$ é uma aplicação contínua.

Sabemos que a família P das seminormas que geram a topogia τ_c é constituida pelas seminormas $p_{\beta,K}(f) = \sup_{x \in K} \beta(f(x))$, onde K é um subconjunto compacto de Ω e β é uma seminorma contínua de F. Sabemos também que a topologia $L_c(G(\Omega), F)$ é gerada pela família de seminormas $Q = \{q_{\beta,L}\}$, onde L é um subconjunto compacto, convexo e equilibrado de $G(\Omega)$, e β é uma seminorma contínua de F.

Seja $p_{\beta,K} \in P$, e conside $L = \overline{\Gamma(\delta_\Omega(K))} \subset G(\Omega)$. Como $G(\Omega)$ é completo, temos que L é compacto, convexo e equilibrado. Consideremos a seminorma $q_{\beta,L} \in Q$. Seja $g \in L(G(\Omega), F)$. Como T é uma aplicação sobrejetiva, existe $f \in H(\Omega, F)$ tal que $g = T_f$ e $g(\delta_\Omega(x)) = T_f(\delta_\Omega(x)) = f(x)$ para cada $x \in \Omega$. Segue que

$$p_{\beta,K}(T^{-1}(g)) = p_{\beta,K}(f) = \sup_{x \in K} \beta(f(x)) = \sup_{x \in K} \beta(T_f(\delta_\Omega(x))) \leq \sup_{y \in L} \beta(T_f(y)) = q_{\beta,L}(T_f) = q_{\beta,L}(g).$$

Logo T^{-1} é uma aplicação linear contínua. $\square$

Proposição 2.6 *Sejam E e F espaços localmente convexos, e seja (Ω, p) um domínio de Riemann sobre E. Uma aplicação $f \in H(\Omega, F)$ tem posto finito se, e somente se, $T_f \in L(G(\Omega), F)$ tem posto finito. Neste caso $[f(x); x \in \Omega] = [T_f(g); g \in G(\Omega)]$.*

Demonstração: $\Rightarrow$

Suponha que f tenha posto finito. Pelo Teorema 2.3 existe $T_f \in L(G(\Omega), F)$ tal que $T_f(\delta_\Omega(x)) = f(x)$ para todo $x \in \Omega$ onde $\delta_\Omega \in H(\Omega, G(\Omega))$. Considerando $N = [f(x); x \in \Omega]$, vemos que $T_f(y) \in N$ para todo $y \in [\delta_\Omega(x), x \in \Omega]$.

Seja $g \in G(\Omega)$. Como a imagem de δ_Ω gera um subespaço denso em $G(\Omega)$, existe uma rede $(y_\alpha)_{\alpha \in I} \subset [\delta_\Omega(x), x \in \Omega]$ que converge a g. Pela continuidade de T_f segue que $(T_f(y_\alpha))_{\alpha \in I}$ converge a $T_f(g)$. Como $(T_f(y_\alpha))_{\alpha \in I} \subset N$ e N é um espaço de dimensão finita, portanto fechado, segue que $T_f(g) \in N$. Donde concluímos que $[T_f(g); g \in G(\Omega)] := M \subset N$ e, consequentemente, T_f tem posto finito.

$\Leftarrow$

Suponha que $[T_f(g); g \in G(\Omega)]$ tenha dimensão finita. Como $T_f(\delta_\Omega(x)) = f(x)$ para cada $x \in \Omega$, temos que $N \subset [T_f(g); g \in G(\Omega)]$, e assim N tem dimensão finita. Segue da demonstração que $[f(x); x \in \Omega] = [T_f(g); g \in G(\Omega)]$.

$\square$

Proposição 2.7 *Sejam E e F espaços localmente convexos, com F completo, e (Ω, p) um domínio de Riemann sobre E. Então uma família $(f_i) \subset H(\Omega, F)$ é amplamente limitada se, e somente se, a respectiva família $(T_{f_i}) \subset L(G(\Omega), F)$ é equicontínua.*

Para demonstrar a Proposição 2.7 vamos precisar do seguinte lema.

Lema 2.8 *Sejam E um espaço localmente convexo, F um espaço de Banach e (Ω, p) um domínio de Riemann sobre E. Seja $A = (C_n)$ uma cobertura aberta, crescente e enumerável de Ω, seja $\alpha = (\alpha_n)$ uma sequência de números positivos, e seja*

$$B_A^\alpha(F) = \{f \in H(\Omega, F); \sup_{x \in C_n} ||f(x)|| \leq \alpha_n \ \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

Então para toda $f \in H(\Omega, F)$ são equivalentes:

(a) $f \in B_A^\alpha(F)$.

(b) $\psi \circ f \in B_A^\alpha$ para todo $\psi \in F'$ com $||\psi|| \leq 1$.

(c) $||T_f(u)|| \leq 1$ para todo $u \in (B_A^\alpha)^0$.

Demonstração:

Antes de mostrarmos as equivalências, vejamos que $B_A^\alpha = (B_A^\alpha)^{00}$ em relação ao sistema dual $(H(\Omega), G(\Omega))$.

Sabemos que B_A^α é um conjunto convexo, equilibrado e τ_c-fechado pela demonstração do Teorema de Linearização 2.3.

Como B_A^α é convexo e equilibrado, vale $B_A^\alpha = \overline{B_A^\alpha}^{\tau_c} = \overline{B_A^\alpha}^{\sigma(H(\Omega),(H(\Omega),\tau_c)')}$.

Pela Observação 2.4 temos que $(H(\Omega),\tau_c)' \subset G(\Omega)$. A partir daí, obtemos que B_A^α é $\sigma((H(\Omega),G(\Omega))$-fechado e, pelo Teorema do Bipolar, $B_A^\alpha = (B_A^\alpha)^{00}$.

$(a) \Rightarrow (b)$

Sejam $f \in B_A^\alpha(F)$ e $\psi \in F'$ tal que $||\psi|| \leq 1$. Para cada $x \in C_n$ temos $|\psi \circ f(x)| \leq ||\psi||||f(x)|| \leq \alpha_n$, logo $\psi \circ f \in B_A^\alpha$.

$(b) \Rightarrow (a)$

Suponha que $\psi \circ f \in B_A^\alpha$ para cada $\psi \in F'$ tal que $||\psi|| \leq 1$. Seja $x \in C_n$ tal que $f(x) \neq 0$. Pelo Teorema de Hahn-Banach existe $\psi \in F'$ tal que $\psi(f(x)) = ||f(x)||$ e $||\psi|| = 1$. Vemos então que $||f(x)|| = ||\psi(f(x))|| \leq \alpha_n$. Consequentemente $\sup_{x \in C_n} ||f(x)|| \leq \alpha_n$ e $f \in B_A^\alpha(F)$.

$(b) \Rightarrow (c)$

Suponha que $\psi \circ f \in B_A^\alpha$ para cada $\psi \in F'$ tal que $||\psi|| \leq 1$. Para cada $u \in (B_A^\alpha)^0$ temos

$$||T_f(u)(\psi)|| = ||T_{\psi \circ f}(u)|| = |u(\psi \circ f)| \leq 1.$$

Logo $||T_f(u)|| \leq 1$ para cada $u \in (B_A^\alpha)^0$.

$(c) \Rightarrow (b)$

Suponha que $||T_f(u)|| \leq 1$ para cada $u \in (B_A^\alpha)^0$. Para cada $\psi \in F'$ tal que $||\psi|| \leq 1$ temos $||T_f(u)(\psi)|| = |u(\psi \circ f)|| \leq 1$. Então $\psi \circ f \in (B_A^\alpha)^{00} = (B_A^\alpha)$ para cada $\psi \in F'$ tal que $||\psi|| \leq 1$.

$\square$

Demonstraremos agora a Proposição 2.7.

Demonstração: Seja F um espaço localmente convexo completo. Para cada vizinhança W convexa e equilibrada de zero em F consideraremos $\Pi_W : F \to \widehat{F}_W$ tal que $\Pi_W = i_W \circ \Pi_W$ onde $\Pi_W : F \to F_W$ é a aplicação quociente, $i_W : F_W \to \widehat{F}_W$ é a inclusão e $\widehat{F}_W$ é o completamento de F_W.

$\Longrightarrow$

Seja $(f_i)_{i\in I} \subset H(\Omega, F)$ uma família amplamente limitada. Então para cada W vizinhança convexa e equilibrada de zero em F, a família $(\Pi_W \circ f_i)_{i\in I}$ é localmente limitada. Consideremos $A = (\overset{0}{W_n})$ onde $\overset{0}{W_n}$ é o interior de

$$W_n = \{x \in \Omega; ||\Pi_W \circ f_i(x)|| \leq n \ \forall i \in I\}.$$

Vejamos que A é uma cobertura aberta enumerável de Ω. Sabemos que a família $(\Pi_W \circ f_i)_{i\in I}$ é localmente limitada. Então para cada $x \in \Omega$ existem uma vizinhança V_x de x e $n \in I\!\!N$ tais que $||\Pi_W \circ f_i(V_x)|| \leq n$ para todo $i \in I$. Temos que $x \in \overset{0}{W_n}$ e consequentemente A é uma cobertura aberta e enumerável de Ω. Como para cada $x \in \overset{0}{W_n}$ temos que $||\Pi_W \circ f_i(x)|| \leq n$ para todo $i \in I$, obtemos que $(\Pi_W \circ f_i)_{i\in I} \subset B_A^\alpha(F)$ onde $\alpha = (n)_{n\in I\!\!N}$.

Pelo Lema 2.8 segue que $||T_{\Pi_W \circ f_i}(u)|| \leq 1$ para cada $u \in (B_A^\alpha)^0$ e para todo $i \in I$. Como $(B_A^\alpha)^0$ é uma vizinhança de zero em $G(\Omega)$, a família $(T_{\Pi_w \circ f_i})_{i\in I}$ é equicontínua.

Para cada $i \in I$ sabemos, pelo Teorema de Linearização 2.3, que existem uma única aplicação linear $T_{f_i} \in L(G(\Omega), F)$ tal que $T_{f_i} \circ \delta_\Omega = f_i$, e uma única aplicação linear $T_{\Pi_W \circ f_i} \in L(G(\Omega), \widehat{F}_W)$ tal que $T_{\Pi_W \circ f_i} \circ \delta_\Omega = \Pi_W \circ f_i$. Segue que

$$T_{\Pi_W \circ f_i} \circ \delta_\Omega(x) = \Pi_W \circ f_i(x) = \Pi_W \circ T_{f_i} \circ \delta_\Omega(x).$$

Como a imagem de δ_Ω gera um subespaço denso em $G(\Omega)$, obtemos que $T_{\Pi_W \circ f_i} = \Pi_W \circ T_{f_i}$ para cada $i \in I$.

Como a família $(T_{\Pi_w \circ f_i})_{i\in I}$ é equicontínua, existe B_A^α tal que

$$||i_W \circ \Pi_W \circ T_{f_i}(u)|| = ||\Pi_W \circ T_{f_i}(u)|| = ||T_{\Pi_W \circ f_i}(u)|| < 1$$

para $u \in (B_A^\alpha)^0$. Logo $T_{f_i}(u) \in W$ para todo $u \in (B_A^\alpha)^0$ e a família $(T_{f_i})_{i\in I}$ é equicontínua.

$\Longleftarrow$

Suponha agora que a família $(T_{f_i})_{i\in I}$ seja equicontínua. Seja β uma seminorma contínua em F e defina $W = \{x \in F; \beta(x) < 1\}$. Como W é uma vizinhança aberta, convexa e equilibrada de zero em F, existe B_A^α tal que $T_{f_i}(u) \in W$ para cada $u \in (B_A^\alpha)^0$ e para todo $i \in I$. Segue que $||T_{\Pi_W \circ f_i}(u)|| = ||\Pi_W \circ T_{f_i}(u)|| < 1$ para cada $u \in (B_A^\alpha)^0$. Pelo Lema 2.8 temos que $(\Pi_W \circ f_i) \subset B_A^\alpha(\widehat{F}_W)$. Logo $\beta(f_i(x)) \leq \alpha_n$ para todo $x \in W_n$ e para todo $i \in I$. Donde concluímos que $(f_i)_{i \in I}$ é uma família amplamente limitada.

□

Na próxima proposição usaremos a notação do Teorema 1.70.

Proposição 2.9 *Seja E um k-espaço localmente convexo, seja F um espaço localmente convexo completo, e (Ω, p) um domínio de Riemann sobre E. Então uma família $(f_i)_{i\in I} \subset H(\Omega, F)$ é amplamente limitada se, e somente se, a correspondente família $(f_i'')_{i \in I} \subset L((H(\Omega), \tau_c)'_c, F)$ é equicontínua.*

Demonstração:

Como a topologia de $G(\Omega)$ tem uma base de vizinhanças de zero dada pelos conjuntos $(B_A^\alpha)^0$ onde A é uma cobertura aberta enumerável de Ω e α é uma sequência de números positivos, e cada B_A^α é τ_c-compacto, temos que a inclusão $j : (H(\Omega), \tau_c)'_c \to G(\Omega)$ é contínua.

Seja $T \in L((H(\Omega), \tau_c)'_c, F)$. Sabemos, pelo Teorema 1.70, que existe uma única $f \in H(\Omega, F)$ tal que $T = f''$ e $f'' \circ \delta_\Omega = f$. Por outro lado, pelo Teorema de Linearização 2.3, existe uma única aplicação $T_f \in L(G(\Omega), F)$ tal que $T_f \circ \delta_\Omega = f$. Como j é uma aplicação contínua, obtemos que $T_f|_{(H(\Omega),\tau_c)'_c} \in L((H(\Omega), \tau_c)'_c, F)$ e $T_f|_{(H(\Omega),\tau_c)'_c} = f''$.

$\Rightarrow$

Seja $(f_i)_{i\in I} \subset H(\Omega, F)$ uma família amplamente limitada. Pela Proposição 2.7, a respectiva família $(T_{f_i})_{i \in I} \subset L(G(\Omega), F)$ é equicontínua.

Como j é uma aplicação contínua e $(T_{f_i})_{i\in I}$ é uma família equicontínua, temos que $(T_{f_i}|_{(H(\Omega),\tau_c)'_c})_{i \in I} \subset L((H(\Omega), \tau_c)'_c, F)$ é equicontínua. Consequentemente a família $(f_i'')_{i\in I}$ é equicontínua.

$\Leftarrow$

Seja $(f_i)_{i\in I}$ uma família de aplicações em $H(\Omega, F)$. Sabemos pelo Teorema 1.70 que a família $(f_i)_{i \in I}$ é tal que $f_i = f_i'' \circ \delta_\Omega$ para cada $i \in I$.

Suponha que a correspondente família $(f_i'')_{i\in I}$ seja equicontínua.

Seja α uma seminorma contínua em F. Como $(f_i'')_{i\in I}$ é uma família equicontínua, existe uma vizinhança W de zero em $(H(\Omega),\tau_c)'_c$ tal que

$$f_i''(W) \subset U = \{x \in F; \alpha(x) < 1\}$$

para cada $i \in I$. Seja $x \in \Omega$. Como δ_Ω é uma aplicação contínua, existe uma vizinhança V_x de x tal que $\delta_\Omega(V_x) \subset W + \delta_\Omega(x)$. Segue que $f_i''(\delta_\Omega(V_x)) \subset f_i''(W) + f_i''(\delta_\Omega(x)) \subset U + f_i''(\delta_\Omega(x))$ para cada $i \in I$. Por outro lado, como W é um conjunto absorvente, existe $\beta > 0$ tal que $\beta f_i''(\delta_\Omega(x)) \in U$ para cada $i \in I$. Segue que

$$\alpha(f_i(V_x)) = \alpha(f_i''(\delta_\Omega(V_x))) \leq \alpha(U) + \alpha(f_i''(\delta_\Omega(x))) < 1 + \frac{1}{\beta}$$

para cada $i \in I$. Donde concluímos que a família $(f_i)_{i\in I}$ é amplamente limitada.

□

A próxima proposição generaliza um resultado de Mujica e Nachbin ([18], Proposição 2.6).

Proposição 2.10 *Seja (Ω, p) um domínio de Riemann sobre um espaço localmente convexo completo E. Então E é topologicamente isomorfo a um subespaço complementado de $G(\Omega)$.*

Demonstração: Sejam $a \in \Omega$ e (U, p_U) uma carta de (Ω, p) tais que $a \in U$. Como $p \circ p_U^{-1} : p(U) \to p(U)$ é a aplicação identidade, obtemos que $p \circ p_U \in H(p(U), E)$, e consequentemente $p \in H(\Omega, E)$.

Pelo Teorema de Linearização 2.3, existe $T \in L(G(\Omega), E)$ tal que $T \circ \delta_\Omega(x) = p(x)$ para todo $x \in \Omega$. Como $\delta_\Omega \in H(\Omega, G(\Omega))$, $\delta_\Omega \circ p_U^{-1}$ é analitica em $p(a)$.

Considere $S = P^1(\delta_\Omega \circ p_U^{-1})(p(a)) \in L(E, G(\Omega))$ em que $P^1(\delta_\Omega \circ p_U^{-1})(p(a))$ é o polinômio 1-homogêneo de $\delta_\Omega \circ p_U^{-1}$ em $p(a)$. Dado $y \in E$, escolhemos $r > 0$ tal que $p(a) + \xi y \in p(U)$ para todo $\xi \in \mathbb{C}$ com $|\xi| \leq r$. Pela Fórmula Integral de Cauchy,

$$S(y) = P^1(\delta_\Omega \circ p_U^{-1})(p(a))(y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=r} \frac{\delta_\Omega \circ p_U^{-1}(p(a) + \xi y)}{\xi^2} d\xi.$$

A partir daí, obtemos pelo Teorema 1.56 que

$$\begin{aligned} T \circ S(y) &= T \circ P^1(\delta_\Omega \circ p_U^{-1})(p(a))(y) = P^1(T \circ \delta_\Omega \circ p_U^{-1})(p(a))(y) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=r} \frac{T \circ \delta_\Omega \circ p_U^{-1}(p(a)+\xi y)}{\xi^2} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=r} \frac{p(a)+\xi y}{\xi^2} d\xi = y. \end{aligned}$$

Então $T \circ S(y) = y$ para cada $y \in E$, e assim E é um subespaço complementado de $G(\Omega)$. □

2.2 Linearização de aplicações G-holomorfas

Nesta seção definiremos os espaço de aplicações G-holomorfas definidas em um domínio de Riemann sobre um espaço localmente convexo E. Além disso, de maneira análoga como feito por Mujica e Nachbin em [18], dado um domínio de Riemann (Ω, p) sobre um espaço localmente convexo E, construiremos um subespaço vetorial denso $G_0(\Omega)$ de $G(\Omega)$. Mostraremos também que vale o Teorema da Linearização para aplicações G-holomorfas definidas em um domínio de Riemann sobre um espaço localmente convexo E.

Definição 2.11 *Sejam E e F espaços localmente convexos e (Ω, p) um domínio de Riemann sobre E. Uma aplicação $f : \Omega \to F$ é dita G-holomorfa se para cada carta (U, p_U) de Ω temos que $f \circ p_U^{-1}$ é uma aplicação G-holomorfa. Denotaremos por $H_G(\Omega, F)$ o espaço vetorial das aplicações G-holomorfas de Ω em F. Quando $F = \mathbb{C}$ escreveremos $H_G(\Omega)$ no lugar de $H_G(\Omega, \mathbb{C})$.*

Proposição 2.12 *Sejam E e F espaços localmente convexos e (Ω, p) um domínio de Riemann sobre E. Uma aplicação $f : \Omega \to F$ é holomorfa se, e somente se, f é G-holomorfa e contínua.*

Demonstração:

$\Rightarrow$ Seja $f : \Omega \to F$ uma aplicação holomorfa. Por definição temos que $f \circ p_U^{-1} \in H(p(U), F)$ para cada carta (U, p_U) de Ω. Consequentemente $f \circ p_U^{-1}$ é uma aplicação contínua e G-holomorfa, e assim f é uma aplicação contínua e G-holomorfa.

$\Leftarrow$

Suponha que $f : \Omega \to F$ seja uma aplicação G-holomorfa e contínua. Então para cada carta (U, p_U) de Ω temos que $f \circ p_U^{-1}$ é uma aplicação G-holomorfa e contínua, donde concluímos que $f \circ p_U^{-1} \in H(p(U), F)$. Por definição temos que f é uma aplicação holomorfa.

$\square$

Construiremos o subespaço vetorial $G_0(\Omega)$.

Seja (Ω, p) um domínio de Riemann sobre um espaço localmente convexo E. Para cada subespaço de dimensão finita M de E, consideremos o domínio de Riemann (Ω_M, p_M) onde $\Omega_M = p^{-1}(M)$ e $p_{\Omega_M} = p|_{\Omega_M}$. Consideremos a inclusão $i_M : \Omega_M \to \Omega$.

Pelo Teorema de Linearização 2.3 sabemos que $\delta_\Omega \in H(\Omega, G(\Omega))$. Sejam M um subespaço de dimensão finita de E, e (U_M, p_{U_M}) uma carta de Ω_M. Para cada $x \in U_M$ existe uma carta (U_x, p_{U_x}) de Ω tal que $x \in U_x \cap \Omega_M \subset U_M$. Como $\delta_\Omega \in H(\Omega, G(\Omega))$ temos que $\delta_\Omega \circ p_{U_x}^{-1} \in H(p(U_x), G(\Omega))$. Em particular, obtemos que a aplicação $\delta_\Omega \circ p_{U_x}$ é G-holomorfa. Segue que para cada $b \in M$ e $\psi \in G(\Omega)'$ existe uma vizinhança de zero A_x em $\mathbb{C}$ tal que a aplicação $\lambda \to \psi \circ \delta_\Omega \circ p_{U_x}^{-1}(p(x) + \lambda b)$ é holomorfa em A_x. Como $p_M = p|_{\Omega_M}$ e $\Omega_M = p^{-1}(M)$, temos que

$$\psi \circ \delta_\Omega \circ p_{U_x}^{-1}(p(x) + \lambda b) = \psi \circ \delta_\Omega \circ p_{U_M}^{-1}(p(x) + \lambda b).$$

Segue que a aplicação $\lambda \to \psi \circ \delta_\Omega \circ p_{U_M}^{-1}(p(x) + \lambda b)$ é holomorfa em A_x. Donde concluímos que $\delta_\Omega \circ p_{U_M}^{-1}$ é uma aplicação G-holomorfa, e consequentemente a aplicação $\delta_\Omega \circ i_M$ é holomorfa.

Como Ω_M é um domínio de Riemann sobre E temos, pelo Teorema de Linearização 2.3, que existe uma única aplicação linear $\pi_M \in L(G(\Omega_M), G(\Omega))$ tal que $\pi_M \circ \delta_{\Omega_M} = \delta_\Omega \circ i_M$. Ou seja, o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{tikzcd}
\Omega_M \arrow[r, "i_M"] \arrow[d, "\delta_{\Omega_M}"'] & \Omega \arrow[d, "\delta_\Omega"] \\
G(\Omega_M) \arrow[r, "\pi_M"'] & G(\Omega)
\end{tikzcd}$$

Sejam M e N subespaços de dimensão finita de E com $M \subset N$. Consideremos a inclusão $i_{NM} : \Omega_M \to \Omega_N$. Então, pelo Teorema de Linearização 2.3, existe uma única aplicação $\pi_{NM} \in L(G(\Omega_M), G(\Omega_N))$ tal que $\pi_{NM} \circ \delta_{\Omega_M} = \delta_{\Omega_N} \circ i_{NM}$. Ou seja, o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{tikzcd}
\Omega_M \arrow[r, "i_{NM}"] \arrow[d, "\delta_{\Omega_M}"'] & \Omega_N \arrow[d, "\delta_{\Omega_N}"] \\
G(\Omega_M) \arrow[r, "\pi_{NM}"'] & G(\Omega_N)
\end{tikzcd}$$

Como $i_M = i_N \circ i_{NM}$, $\pi_N \circ \delta_{\Omega_N} = \delta_\Omega \circ i_N$ e $\pi_M \circ \delta_{\Omega_M} = \delta_\Omega \circ i_M$ obtemos que $\pi_N \circ \pi_{NM} \circ \delta_{\Omega_M} = \delta_\Omega \circ i_N \circ i_{NM} = \delta_\Omega \circ i_M$. Segue, pelo Teorema de Linearização 2.3, que $\pi_N \circ \pi_{NM} = \pi_M$. Denotaremos $G_0(\Omega) = \bigcup\limits_M \pi_M(G(\Omega_M))$ onde M varia sobre os subespaços de dimensão finita de E. Consideraremos em $G_0(\Omega)$ a topologia induzida por $G(\Omega)$.

Teorema 2.13 *(Teorema de Linearização para Aplicações G-Holomorfas) Seja* (Ω, p) *um domínio de Riemann sobre um espaço localmente convexo* E. *Então:*

(a) $G_0(\Omega)$ *é um subespaço denso de* $G(\Omega)$.

(b) $\delta_\Omega \in H(\Omega, G_0(\Omega))$

(c) Para todo espaço localmente convexo completo F *e toda* $f \in H_G(\Omega, F)$ *existe uma única aplicação linear* $T_f : G_0 \to F$ *tal que* $T_f \circ \delta_\Omega = f$. *Além disso,* T_f *é contínua se, e somente se,* f *é contínua.*

Demonstração:

(a)

Seja $x \in \Omega$. Sabemos que existe um subespaço de dimensão finita M de E tal que $x \in \Omega_M$. Como $\delta_\Omega(x) = \pi_M \circ \delta_{\Omega_M}(x)$ temos que $\delta_\Omega(x) \in \pi_M(G(\Omega_M))$ e consequentemente $\delta_\Omega(x) \in G_0(\Omega)$.

Pelo Teorema de Linearização 2.3 sabemos que a imagem da aplicação δ_Ω gera um subespaço denso em $G(\Omega)$, e consequentemente $G_0(\Omega)$ é um subespaço denso de $G(\Omega)$.

(b)

Pelo Teorema de Linearização 2.3 sabemos que $\delta_\Omega \in H(\Omega, G(\Omega))$ e pelo item (a) $\delta_\Omega(x) \in G_0(\Omega)$ para todo $x \in \Omega$.

Seja (U, p_U) uma carta do domínio de Riemann (Ω, p). Para cada $a \in p(U)$ vamos mostrar que $P^m(\delta_\Omega \circ p_U^{-1})(a) \in P^m(E, G_0(\Omega))$ para todo $m \in \mathbb{N}$, e a partir daí obtemos que $\delta_\Omega \circ p_U^{-1} \in H(p(U), G_0(\Omega))$.

Sejam $a \in p(U)$, $t \in E$ e $m \in \mathbb{N}$. Seja $r > 0$ tal que $a + \xi t \in p(U)$ para todo $\xi \in \mathbb{C}$ tal que $|\xi| \leq r$. Como $\delta_\Omega \in H(\Omega, G(\Omega))$ temos, pela Fórmula Integral de Cauchy, que

$$P^m(\delta_\Omega \circ p_U^{-1})(a)(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=r} \frac{\delta_\Omega \circ p_U^{-1}(a + \xi t)}{\xi^{m+1}} d_\xi.$$

Consideremos M o subespaço de E gerado por a e t. Sabemos que existe uma única aplicação linear $\pi_M \in L(G(\Omega_M), G(\Omega))$ tal que $\pi_M \circ \delta_{\Omega_M}(x) = \delta_\Omega(x)$ para todo $x \in \Omega_M$. Consequentemente pelo Teorema 1.56,

$$\begin{aligned}
P^m(\delta_\Omega \circ p_U^{-1})(a)(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=r} \frac{\delta_\Omega \circ p_U^{-1}(a + \xi t)}{\xi^{m+1}} d_\xi \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=r} \frac{\pi_M \circ \delta_{\Omega_M} \circ p_U^{-1}(a + \xi t)}{\xi^{m+1}} d_\xi \\
&= P^m(\pi_M \circ \delta_{\Omega_M} \circ p_U^{-1})(a)(t) \\
&= \pi_M \circ P^m(\delta_{\Omega_M} \circ p_U^{-1})(a)(t).
\end{aligned}$$

Obtemos então que $P^m(\delta_\Omega \circ p_U^{-1})(a)(t) \in \pi_M(G(\Omega_M)) \subset G_0(\Omega)$. A partir daí $\delta_\Omega \circ p_U^{-1} \in H(p(U), G_0(\Omega))$, e assim $\delta_\Omega \in H(\Omega, G_0(\Omega))$.

(c)

Seja F um espaço localmente convexo completo e seja $f \in H_G(\Omega, F)$.

Para cada subespaço M de dimensão finita de E, temos que $f \circ i_M \in H(\Omega_M, F)$, e pelo Teorema de Linearização 2.3 existe uma única aplicação linear $T_M \in L(G(\Omega_M), F)$ tal que $T_M \circ \delta_{\Omega_M} = f \circ i_M$.

Sejam M e N subespaços de dimensão finita de E tais que $M \subset N$. Como valem as igualdades $T_N \circ \delta_{\Omega_N} = f \circ i_N$, $T_M \circ \delta_{\Omega_M} = f \circ i_M$, $i_M = i_N \circ i_{NM}$, e $\delta_{\Omega_N} \circ i_{NM} = \pi_{NM} \circ \delta_{\Omega_M}$, obtemos que

$$f \circ i_M = f \circ i_N \circ i_{NM} = T_N \circ \delta_{\Omega_N} \circ i_{NM} = T_N \circ \pi_{NM} \circ \delta_{\Omega_M}.$$

Segue, pelo Teorema de Linearização 2.3, que $T_N \circ \pi_{NM} = T_M$. Ou seja, o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{tikzcd}
\Omega_M \arrow[r, "i_{NM}"] \arrow[d, "\delta_{\Omega_M}"'] & \Omega_N \arrow[r, "i_N"] \arrow[d, "\delta_{\Omega_N}"'] & \Omega \arrow[d, "f"] \\
G(\Omega_M) \arrow[r, "\pi_{NM}"'] \arrow[rr, bend right, "T_M"'] & G(\Omega_N) \arrow[r, "T_N"] & F
\end{tikzcd}$$

Consideremos $T : G_0(\Omega) \to F$ dada por $T(x) = T_M(y)$ para $\pi_M(y) = x$. Veremos que T está bem definida. Sejam M e N subespaços de dimensão finita de E tais que $M \subset N$. Sejam $u_n \in G(\Omega_N)$ e $u_m \in G(\Omega_M)$ tais que $\pi_N(u_n) = \pi_M(u_m)$. Como $\pi_M = \pi_N \circ \pi_{NM}$ temos que $\pi_M(u_m) = \pi_N \circ \pi_{NM}(u_m) = \pi_N(u_n)$. Por outro lado, sabemos que $T_M = T_N \circ \pi_{NM}$, e a partir daí

$$T_M(u_m) = T_N \circ \pi_{NM}(u_m) = T \circ \pi_N \circ \pi_{NM}(u_m) = T \circ \pi_N(u_n) = T_N(u_n).$$

Sejam M e N subespaços de dimensão finita. Sejam $a_n \in G(\Omega_N)$ e $a_m \in G(\Omega_M)$ tais que $\pi_N(a_n) = \pi_M(a_m)$. Consideremos o espaço de dimensão finita $Z = M \cup N$. Seja $a_z \in G(\Omega_Z)$ tal que $\pi_Z(a_z) = \pi_M(a_m) = \pi_N(a_n)$. Como $M \subset Z$ e $N \subset Z$ temos que

$$T_M(a_m) = T_Z(a_z) = T_N(a_n).$$

Obtemos então que T está bem definida. Podemos ver que T é uma aplicação linear.

Como $T_M \circ \delta_M = f \circ i_M$ e $T \circ \pi_M = T_M$ para todo subespaço M de dimensão finita de E temos, pelo Teorema de Linearização 2.3, que T é a única aplicação linear tal que

$T \circ \pi_M = T_M$ para todo subespaço M de dimensão finita de E. Sejam $x \in \Omega$ e M um subespaço de dimensão finita de E tais que $x \in \Omega_M$. Então

$$f \circ i_M(x) = T_M \circ \delta_M(x) = T \circ \pi_M \circ \delta_{\Omega_M} \circ i_M(x) = T \circ \delta_\Omega(x).$$

Suponha que exista uma aplicação linear $S : G_0(\Omega) \to F$ tal que $S \circ \delta_\Omega = f$. Segue, para cada subespaço M de dimensão finita de E, que $f \circ i_M = S \circ \delta_\Omega \circ i_M = S \circ \pi_M \circ \delta_{\Omega_M}$. Consequentemente obtemos que $S \circ \pi_M = T_M = T \circ \pi_M$ para cada subespaço M de dimensão finita de E, e assim $T = S$.

Suponha agora que T seja uma aplicação contínua. Como δ_Ω também é uma aplicação contínua, obtemos que $f = T \circ \delta_\Omega$ é contínua. Se f é uma aplicação contínua então T_f também é uma aplicação contínua pelo Teorema de Linearização 2.3. Como $T_f|_{G_0(\Omega)} \in L(G_0(\Omega), F)$ e $T_f \circ \delta_\Omega = f$, temos pela unicidade de T que $T = T_f|_{G_o(\Omega)}$, e em particular a aplicação T é contínua.

□

A próxima proposição generaliza um resultado de Mujica e Nachbin ([18], Proposição 3.3).

Proposição 2.14 *Seja (Ω, p) um domínio de Riemann sobre um espaço localmente convexo E. Então E é topologicamente isomorfo a um subespaço complementado de $G_0(\Omega)$.*

Demonstração: Sejam $a \in \Omega$ e (U, p_U) uma carta de (Ω, p) tais que $a \in U$. Consideremos o polinômio 1-homogêneo $S = P^1(\delta_\Omega \circ p_U^{-1})(p(a)) \in L(E, G_0(\Omega))$. Seja $\widehat{E}$ o completamento de E. Pelo Teorema de Linearização 2.3, existe $T \in L(G(\Omega), \widehat{E})$ tal que $T \circ \delta_\Omega(x) = q(x)$ para todo $x \in \Omega$.

Sabemos pela demonstração da Proposição 2.10 que $T \circ S(y) = y$ para todo $y \in E$. Vamos mostrar que $T(G_0(\Omega)) \subset E$.

Seja M um subespaço de dimensão finita de E. Pelo Teorema de Linearização 2.3 existe uma única $T_M \in L(G(\Omega_M), M)$ tal que $T_M \circ \delta_{\Omega_M}(x) = p(x)$ para todo $x \in \Omega_M$.

Vimos na construção do espaço $G_0(\Omega)$ que $\pi_M \circ \delta_{\Omega_M}(x) = \delta_\Omega(x)$ para todo $x \in \Omega_M$ e, como $T \circ \pi_M = T_M$ temos $T \circ \pi_M \circ \delta_{\Omega_M} = p(x)$ para todo $x \in \Omega_M$. Da unicidade concluímos que $T \circ \pi_M = T_M$, e assim $T \circ \pi_M(z) \in M$ para todo $z \in G(\Omega_M)$. Como $G_0(\Omega) = \bigcup_M \pi_M(G(\Omega_M))$, onde M varia sobre os subespaços de dimensão finita de E, temos que $T(x) \in E$ para cada $x \in G_0(\Omega)$. Consequentemente $T \circ S(y) = y$ para todos $y \in E$ e $T \in L(G_0(\Omega), E)$. Então E é topologicamente isomorfo a um subespaço complementado de $G_0(\Omega)$. $\square$

2.3 Linearização de polinômios homogêneos

Nesta seção enunciaremos o Teorema de Linearização para polinômios m-homogêneos provado por Christopher Boyd em [2]. Veremos que se E e F são espaços localmente convexos, um polinômio $P \in P(^nE, F)$ tem posto finito se, e somente se, a correspondente aplicação linear $L_P \in L(Q(^nE), F)$ também tem posto finito.

Mostraremos também de maneira similar à Proposição 2.7, que se E e F são espaços localmente convexos, então uma família de polinômios m-homogêneos $(P_i)_{i\in I}$ é amplamente limitada se, e somente se, a correspondente família $(L_{P_i})_i$ é equicontínua.

Proposição 2.15 *([2], p. 36, Teorema 2.10) Seja E um espaço localmente convexo. Então para cada $n \in \mathbb{N}$, existe um espaço localmente convexo completo $Q(^nE)$ e um polinômio n-homogêneo $\delta_n \in P(^nE, Q(^nE))$ tal que a sua imagem gera um subespaço denso em $Q(^nE)$ com a propriedade de que, dado um espaço localmente convexo completo F e $P \in P(^nE, F)$ existe um único $L_P \in L(Q(^nE), F)$ tal que $P = L_P \circ \delta_n$.*

Observação 2.16 *Sejam E um espaço localmente convexo e $Q(^nE)$ o espaço localmente convexo completo dos funcionais lineares $\phi : P(^nE) \to \mathbb{C}$ tais que $\phi|_{B_V}$ é τ_c-contínuo onde $B_V = \{P \in P(^nE), |P(x)| \leq 1 \forall x \in V\}$ e V é uma vizinhança de zero convexa equilibrada e fechada. Cada conjunto B_V é convexo, equilibrado e τ_c-fechado. A topologia sobre $Q(^nE)$ é dada pela convergência uniforme sobre os conjuntos B_V quando V varia sobre as vizinhanças de zero convexas, equilibradas e fechadas.*

Na demonstração do Teorema 2.15 em [2], Christopher Boyd mostrou que a avaliação $J : P(^nE) \to (Q(^nE))'_i$ é um isomorfismo topológico, e com isso $Q(^nE)$ é o predual de $P(^nE)$. Além disso, temos que para cada espaço localmente convexo completo F,

$$L_P(u)(\psi) = L_{\psi\circ P}(u) = J(\psi \circ P)(u) = u(\psi \circ P)$$

para cada $P \in P(^nE, F)$, $u \in Q(^nE)$ e $\psi \in F'$.

Proposição 2.17 *Sejam E e F espaços localmente convexos com F completo. Então a aplicação $Q : L_c(Q(^nE), F) \to (P(^nE, F), \tau_c)$ dada por $Q(g) = g \circ \delta_n$ é um isomorfismo algébrico contínuo.*

Demonstração: Pela Proposição 2.15 sabemos que $\delta_n \in P(^nE, Q(^nE))$. Assim, para cada $g \in L(Q(^nE), F)$ temos que $g \circ \delta_n \in P(^nE, F)$, e desta maneira a função Q está bem definida. Sabemos, pela Proposição 2.15 que para cada $P \in P(^nE, F)$ existe um único $g \in L(Q(^nE), F)$ tal que $g \circ \delta_n = P$. Em particular, obtemos que a aplicação Q é uma bijeção.

A aplicação Q é linear. Com efeito, sejam $g, f \in L(Q(^nE), F)$ e $\gamma \in \mathrm{K}$. Pela definição da aplicação Q temos

$Q(g + \gamma f) = (g + \gamma f) \circ \delta_n = g \circ \delta_n + \gamma f \circ \delta_n = Q(g) + \gamma Q(g).$

Mostraremos que Q é contínua.

Sabemos que a família R das seminormas que geram a topologia τ_c em $P(^nE, F)$ é constituida pelas seminormas $p_{\beta,K}(f) = \sup_{x\in K} \beta(f(x))$ onde K é um subconjunto compacto de E e β é uma seminorma contínua em F. Sabemos também que a topologia $L_c(Q(^nE), F)$ é gerada pela família de seminormas $S = \{p_{\alpha,L}\}$ onde L é um subconjunto compacto, convexo e equilibrado de $Q(^nE)$, e α é uma seminorma contínua em F.

Seja $p_{\beta,K} \in R$, e definamos $L = \overline{\Gamma(\delta_n(K))} \subset Q(^nE)$. Como $Q(^nE)$ é completo, temos que L é compacto, convexo e equilibrado. Consideremos a seminorma $p_{\beta,L} \in S$. Para cada $g \in L(Q(^nE), F)$ obtemos que

$$p_{\beta,K}(Q(g)) = \sup_{x\in K} \beta(g \circ \delta_n(x)) \le \sup_{y\in L} \beta(g(y)) = p_{\beta,L}(g).$$

Donde concluímos que Q é uma aplicação contínua.

$\square$

Proposição 2.18 *Sejam E e F espaços localmente convexos, e $n \in \mathbb{N}$. Uma aplicação $g \in L(Q(^nE), F)$ tem posto finito se, e somente se, $Q(g) = P \in P(^nE, F)$ tem posto finito. Neste caso $[P(x); x \in E] = [g(f); f \in Q(^nE)]$.*

Demonstração: $\Rightarrow$ Seja $g \in L(Q(^nE), F)$. Pela Proposição 2.17 existe $P \in P(^nE, F)$ tal que $g(\delta_n(x)) = P(x)$ para todo $x \in E$. Suponha que P tenha posto finito. Considerando $N = [P(x); x \in E]$, vemos que $g(y) \in N$ para $y \in [\delta_n(x), x \in E]$.

Seja $f \in Q(^nE)$. Como a imagem de δ_n gera um subespaço denso em $Q(^nE)$, existe uma rede $(y_\alpha)_{\alpha \in I} \subset [\delta_n(x), x \in E]$ que converge a f. Pela continuidade de g segue que $g(y_\alpha)_{\alpha \in I}$ converge a $g(f)$. Como $(g(y_\alpha))_{\alpha \in I} \subset N$ e N é um espaço de dimensão finita, portanto fechado, temos que $g(f) \in N$. Donde concluímos que $[g(f); f \in Q(^nE)] := M \subset N$.

$\Leftarrow$ Seja $P \in P(^nE, F)$. Pela Proposição 2.15 existe $g \in L(Q(^nE), F)$ tal que $g \circ \delta_n(x) = P(x)$ para todo $x \in E$. Suponha que g tenha posto finito, ou seja que o espaço $[g(f); f \in Q(^nE)]$ tenha dimensão finita. Logo $N = [P(x); x \in E] \subset [g(f); f \in Q(^nE)]$, e N tem dimensão finita. Segue da demonstração que $[P(x); x \in E] = [g(f); f \in Q(^nE)]$. $\square$

Proposição 2.19 *Sejam E e F espaços localmente convexos com F completo e $n \in \mathbb{N}$. Então a família $(P_i)_{i \in I} \subset P(^nE, F)$ é amplamente limitada se, e somente se, a correspondente família $(L_{P_i})_{i \in I}$ é equicontínua.*

Para provar a Proposição 2.19 precisamos do seguinte resultado:

Lema 2.20 *Sejam E um espaço localmente convexo, F um espaço de Banach e $n \in \mathbb{N}$. Seja V uma vizinhança fechada, convexa e equilibrada de zero em E. Se $B_V(F) = \{P \in P(^nE, F); \sup_{x \in V} ||P(x)|| \leq 1\}$, então para cada $P \in P(^nE, F)$ são equivalentes:*

(a) $P \in B_V(F)$.

(b) $\psi \circ P \in B_V$ *para todo* $\psi \in F'$ *com* $||\psi|| \leq 1$.

(c) $||L_P(u)|| \leq 1$ *para todo* $u \in (B_V)^0$.

Demonstração:

Antes de mostrarmos as equivalências, vejamos que $B_V = (B_V)^{00}$ em relação ao sistema dual $(P(^nE), Q(^nE))$.

Sabemos que B_V é um conjunto convexo, equilibrado e τ_c-fechado.

Como B_V é convexo e equilibrado, $B_V = \overline{B_V}^{\tau_c} = \overline{B_V}^{\sigma(P(^nE),(P(^nE),\tau_c)')}$.

Como cada $\phi \in (P(^nE), \tau_c)'$ é τ_c-contínua sobre cada conjunto B_V de $P(^nE)$, temos que $(P(^nE), \tau_c)' \subset Q(^nE)$. A partir daí obtemos que B_V é $\sigma(P(^nE), Q(^nE))$-fechado e pelo Teorema do Bipolar $B_V = (B_V)^{00}$.

$(a) \Rightarrow (b)$

Sejam $P \in B_V(F)$ e $\psi \in F'$ tal que $||\psi|| \leq 1$. Para cada $x \in V$ obtemos $|\psi \circ P(x)| \leq ||\psi|| ||P(x)|| \leq 1$. Consequentemente temos que $\psi \circ P \in B_V$.

$(b) \Rightarrow (a)$

Suponha que $\psi \circ P \in B_V$ para cada $\psi \in F'$ tal que $||\psi|| \leq 1$. Seja $x \in V$ tal que $P(x) \neq 0$. Pelo Teorema de Hahn-Banach existe $\psi \in F'$ tal que $\psi(P(x)) = ||P(x)||$ e $||\psi|| = 1$. Vemos então que $||P(x)|| = |\psi(P(x))| \leq 1$. Consequentemente $\sup_{x \in V} ||P(x)|| \leq 1$ e $P \in B_V(F)$.

$(b) \Rightarrow (c)$

Suponha que $\psi \circ P \in B_V$ para cada $\psi \in F'$ tal que $||\psi|| \leq 1$. Para cada $u \in (B_V)^0$ temos

$$||L_P(u)(\psi)|| = ||L_{\psi \circ P}(u)|| = |u(\psi \circ P)| \leq 1.$$

Logo $||L_P(u)|| \leq 1$ para cada $u \in (B_V)^0$.

$(c) \Rightarrow (b)$

Suponha que $||L_P(u)|| \leq 1$ para cada $u \in (B_V)^0$. Para cada $\psi \in F'$ tal que $||\psi|| \leq 1$ temos $||L_P(u)(\psi)|| = |u(\psi \circ P)|| \leq 1$. Então $\psi \circ P \in (B_V)^{00} = B_V$ para cada $\psi \in F'$ tal que $||\psi|| \leq 1$.

$\square$

Demonstraremos agora a Proposição 2.19.

Demonstração: Seja F um espaço localmente convexo completo. Para cada vizinhança W convexa e equilibrada de zero em F consideraremos $\Pi_W : F \to \widehat{F}_W$ tal que $\Pi_W = i_W \circ \Pi_W$ onde $\Pi_W : F \to F_W$ é a aplicação quociente, $i_W : F_W \to \widehat{F}_W$ é a inclusão e $\widehat{F}_W$ é o completamento de F_W.

$\Rightarrow$

Seja $(P_i)_{i \in I} \subset P(^nE, F)$ uma família amplamente limitada. Então para cada vizinhança W convexa e equilibrada de zero em F temos que a família $(\Pi_W \circ P_i)_{i \in I}$ é localmente limitada. Segue que existem uma vizinhança V fechada, convexa e equilibrada de zero em E e $M > 0$ tais que $\sup_{x \in V} ||\Pi_W \circ P_i(x)|| \leq M$ para todo $i \in I$. Como $(P_i)_{i \in I}$ é uma família de polinômios n-homogêneos temos que $(\Pi_W \circ P_i)_{i \in I}$ também é uma família de polinômios n-homogêneos. Segue que $||\Pi_W \circ P_i(y)|| \leq 1$ para todos $i \in I$ e $y \in \frac{1}{\sqrt[n]{M}} V = V'$. Consequentemente $(\Pi_W \circ P_i)_{i \in I} \subset B_{V'}(\widehat{F}_W)$.

Pelo Lema 2.20 obtemos que $||L_{\Pi_W \circ P_i}(u)|| \leq 1$ para cada $u \in (B_{V'})^0$ e para todo $i \in I$. Como $(B_{V'})^0$ é uma vizinhança de zero em $G(\Omega)$ temos que a família $(L_{\Pi_W \circ P_i})_{i \in I}$ é equicontínua.

Para cada $i \in I$ sabemos, pelo Teorema de Linearização 2.15, que existe uma única aplicação linear $L_{P_i} \in L(Q(^nE), F)$ tal que $L_{P_i} \circ \delta_n = P_i$, e existe uma única aplicação linear $L_{\Pi_W \circ P_i} \in L(Q(^nE), \widehat{F}_W)$ tal que $L_{\Pi_W \circ P_i} \circ \delta_n = \Pi_W \circ P_i$. Segue que $L_{\Pi_W \circ P_i} \circ \delta_n(x) = \Pi_W \circ P_i = \Pi_W \circ L_{P_i} \circ \delta_n(x)$. Como $L_{\Pi_W \circ P_i}$ e $\Pi_W \circ L_{P_i}$ são aplicações lineares e a imagem de δ_n gera um subespaço denso em $Q(^nE)$, temos que $L_{\Pi_W \circ P_i} = \Pi_W \circ L_{P_i}$ para cada $i \in I$.

Como a família $(L_{\Pi_W \circ P_i})_{i \in I}$ é equicontínua, existe B_V tal que $||L_{\Pi_W \circ P_i}(u)|| = ||\Pi_W \circ L_{P_i}(u)|| < 1$ para $u \in (B_{V'})^0$. Logo $L_{P_i}(u) \in W$ para todo $u \in (B_{V'})^0$, e assim a família $(L_{P_i})_{i \in I}$ é equicontínua.

$\Leftarrow$

Suponha agora que a família $(L_{P_i})_{i \in I}$ seja equicontínua. Sejam β uma seminorma contínua em F e $W = \{x \in F; \beta(x) < 1\}$. Como W é uma vizinhança aberta, convexa e equilibrada de zero em F, existe B_V tal que $L_{P_i}(u) \in W$ para cada $u \in (B_V)^0$ e para todo $i \in I$. Segue que $||L_{\Pi_W \circ P_i}(u)|| = ||\Pi_W \circ L_{P_i}(u)|| < 1$ para cada $u \in (B_V)^0$. Pelo Lema 2.20 temos que $(\Pi_W \circ P_i) \subset B_V(\widehat{F}_W)$, e assim $\beta(P_i(x)) \leq 1$ para cada $x \in V$. Donde concluímos que $(P_i)_{i \in I}$ é uma família amplamente limitada.

□

Na próxima proposição usaremos a notação do Teorema 1.52

Proposição 2.21 *Sejam E um espaço localmente convexo, F um espaço localmente convexo completo, e $n \in \mathbb{N}$. Então uma família $(P_i)_{i \in I} \subset P(^nE, F)$ é amplamente limitada se, e somente se, a correspondente família $(P_i'')_{i \in I} \subset L((P(^nE), \tau_c)_c', F)$ é equicontínua.*

Demonstração:

$\Rightarrow$

Como a topologia de $Q(^nE)$ tem uma base de vizinhanças de zero dada pelos conjuntos $(B_V)^0$ onde V é uma vizinhança fechada convexa e equilibrada de zero em E, e cada B_V é convexo, equilibrado e τ_c-compacto, obtemos que a inclusão $j_n : (P(^nE), \tau_c)_c' \to Q(^nE)$ é contínua.

Seja $T \in L((P(^nE)\tau_c)_c', F)$. Sabemos pelo Teorema 1.52 e pelo Teorema 1.23 que existe um único $P \in P(^nE, F)$ tal que $T = P''$ e $P'' \circ \delta_n = P$. Por outro lado, pelo Teorema de Linearização para polinômios 2.15, existe uma única aplicação $L_P \in L(Q(^nE), F)$ tal que $L_P \circ \delta_n = P$. Como j_n é uma aplicação contínua temos que $L_P|_{(P(^nE),\tau_c)_c'} \in L((P(^nE), \tau_c)_c', F)$ e $L_P|_{(P(^nE),\tau_c)_c'} = P''$.

Seja $(P_i)_{i \in I} \subset P(^nE, F)$ uma família amplamente limitada. Temos pela Proposição 2.19 que a respectiva família $(L_{P_i})_{i \in I} \subset L(Q(^nE), F)$ é equicontínua.

Como j_n é uma aplicação contínua e $(L_{P_i})_{i \in I}$ é uma família equicontínua, temos que $(L_{p_i}|_{(P(^nE),\tau_c)_c'})_{i \in I} \subset L((P(^nE), \tau_c)_c', F)$ é equicontínua. Consequentemente a família $(P_i'')_{i \in I}$ é equicontínua.

$\Leftarrow$

Sabemos pelo Teorema 1.52 e pelo Teorema 1.23 que a família $(P_i)_{i \in I}$ é tal que $P_i = P_i'' \circ \delta_n$ para cada $i \in I$.

Suponha que $(P_i'')_{i\in I}$ seja uma família equicontínua.

Seja α uma seminorma contínua em F. Como $(P_i'')_{i\in I}$ é uma família equicontínua, existe uma vizinhança de zero W de $(P(^nE),\tau_c)'_c$ tal que

$$P_i''(W) \subset U = \{x \in F; \alpha(x) < 1\}$$

para cada $i \in I$.

Seja $x \in E$. Como δ_n é uma aplicação contínua, existe uma vizinhança V_x de x tal que $\delta_n(V_x) \subset W + \delta_n(x)$. Segue que

$$P_i''(\delta_n(V_x)) \subset P_i''(W) + P_i''(\delta_n(x)) \subset U + P_i''(\delta_n(x))$$

para cada $i \in I$. Por outro lado, como W é um conjunto absorvente existe $\beta > 0$ tal que $\beta P_i''(\delta_n(x)) \subset U$ para cada $i \in I$. Segue que

$$\sup_{y\in V_x} \alpha(P_i(y)) = \sup_{y\in V_x} \alpha(P_i''(\delta_n(y))) \leq \sup_{z\in U} \alpha(z) + \alpha(P_i''(\delta_n(x))) < 1 + \frac{1}{\beta}$$

para cada $i \in I$. Donde concluímos que a família $(P_i)_{i\in I}$ é amplamente limitada.

$\square$

Capítulo 3

Espaços de funções holomorfas em espaços localmente convexos

3.1 A propriedade de aproximação

Nesta seção daremos condições para que os espaços de funções holomorfas em espaços localmente convexos, e seus preduais, tenham a propriedade de aproximação. Para provarmos tais condições utilizaremos fortemente o Lema 1.12.

Além disso, veremos que se Ω é um domínio de Riemann sobre um k-espaço localmente convexo e se $G(\Omega)$ tem a propriedade de aproximação, então $(H(\Omega), \tau_c)$ também tem a propriedade de aproximação.

Proposição 3.1 *Seja (Ω, p) um domínio de Riemann sobre um espaço localmente convexo completo E. Se $G(\Omega)$ tem a propriedade de aproximação, então E tem a propriedade de aproximação.*

Demonstração: Sabemos pela Proposição 2.10 que E é isomorfo a um subespaço complementado de $G(\Omega)$. Como por hipótese $G(\Omega)$ tem a propriedade de aproximação, segue pela Proposição 1.26 (a) que E também a tem. $\square$

Proposição 3.2 *Seja (Ω, p) um domínio de Riemann sobre um espaço localmente convexo E. Se $G_0(\Omega)$ tem a propriedade de aproximação, então E tem a propriedade de aproximação.*

Demonstração: Sabemos pela Proposição 2.14 que E é isomorfo a um subespaço complementado de $G_0(\Omega)$. Como por hipótese $G_0(\Omega)$ tem a propriedade de aproximação, segue pela Proposição 1.26 (a) que E também a tem. $\square$

Proposição 3.3 *Sejam E um espaço localmente convexo e (Ω, p) um domínio de Riemann sobre E. Se $G(\Omega)$ tem a propriedade de aproximação, então $G_0(\Omega)$ tem a propriedade de aproximação.*

Demonstração: Pelo Teorema 2.13 temos que $G_0(\Omega)$ é um subespaço denso em $G(\Omega)$. Segue pela Proposição 1.28 que $G_0(\Omega)$ tem a propriedade de aproximação. $\square$

Pelos Teoremas 1.25 e 1.70 podemos obter uma condição necessária e suficiente para que o espaço $(H(\Omega), \tau_c)$ tenha a propriedade de aproximação. Tal condição é apresentada na próxima proposição.

Proposição 3.4 *([5], Corolário 2.3)) Seja E um k-espaço localmente convexo e seja (Ω, p) um domínio de Riemann sobre E. Então $(H(\Omega), \tau_c)$ tem a propriedade de aproximação se, e somente se, $H(\Omega) \otimes F$ é denso em $(H(\Omega, F), \tau_c)$ para cada espaço localmente convexo F, ou equivalentemente para cada espaço de Banach F.*

Proposição 3.5 *Sejam E um k-espaço localmente convexo, e (Ω, p) um domínio de Riemann sobre E. Se $G(\Omega)$ tem a propriedade de aproximação, então $(H(\Omega), \tau_c)$ também tem a propriedade de aproximação.*

Demonstração: Suponha que $G(\Omega)$ tenha a propriedade de aproximação. Segue pelo Teorema 1.25 que $L_c(G(\Omega), F) = \overline{G(\Omega)' \otimes F}^{\tau_c}$ para cada espaço de Banach F. Logo, pelo Teorema de Linearização 2.3, para cada $f \in H(\Omega, F)$ existe uma rede $(g_i)_{i \in I} \subset$

$G(\Omega)'\otimes F$ que converge a $g = T_f$ em $L_c(G(\Omega), F)$. Como pela Proposição 2.5 a aplicação $T^{-1} : L_c(G(\Omega), F) \to (H(\Omega, F), \tau_c)$ é contínua, temos que a rede $(T^{-1}(g_i))_{i\in I}$ converge a f em $(H(\Omega), \tau_c)$. Pela Proposição 2.6 sabemos que a rede $(T^{-1}(g_i))_{i\in I} \subset H(\Omega) \otimes F$. Segue que $H(\Omega) \otimes F$ é denso em $(H(\Omega, F), \tau_c)$, e pela Proposição 3.4 $(H(\Omega), \tau_c)$ tem a propriedade de aproximação. $\square$

Enunciaremos agora o principal resultado desta seção. Nele daremos uma condição suficiente para que o espaço $G(\Omega)$ tenha a propriedade de aproximação.

Proposição 3.6 *Sejam E um espaço localmente convexo e (Ω, p) um domínio de Riemann sobre E. Se para cada espaço de Banach F e cada $f \in H(\Omega, F)$ existe uma rede localmente limitada $(f_i)_{i\in I} \subset H(\Omega) \otimes F$ que converge a f pontualmente, então $G(\Omega)$ tem a propriedade de aproximação.*

Usaremos o próximo resultado para provar a Proposição 3.6.

Lema 3.7 *Sejam E um espaço localmente convexo, (Ω, p) um domínio de Riemann sobre E e F um espaço localmente convexo completo. Seja $f \in H(\Omega, F)$ tal que existe uma rede amplamente limitada $(f_i) \subset H(\Omega)\otimes F$ que converge a f pontualmente. Então a rede equicontínua (T_{f_i}) está contida em $G(\Omega)' \otimes F$ e converge a $T_f \in L(G(\Omega), F)$ pontualmente.*

Demonstração:

Pelo Teorema 2.3 sabemos que $A = \{\delta_\Omega(x), x \in \Omega\}$ gera um subespaço denso em $G(\Omega)$. Seja $f \in H(\Omega, F)$. Por hipótese existe uma rede amplamente limitada $(f_i)_{i\in I} \subset H(\Omega) \otimes F$ que converge pontualmente a f.

Vamos provar que $(T_{f_i})_{i\in I}$ converge pontualmente a T_f em A.

Sejam V uma vizinhança de zero em F e $x \in \Omega$. Sabemos que existe $i_0 \in I$ tal que $f_i(x) - f(x) \in V$ para $i \geq i_0$. Como, pelo Teorema 2.3, para cada $g \in H(\Omega, F)$ existe $T_g \in L(G(\Omega), F)$ tal que $g(x) = T_g(\delta_\Omega(x))$ para cada $x \in \Omega$, temos que $(T_{f_i})_{i\in I}$ converge pontualmente a T_f em A. Como a rede $(f_i)_{i\in I}$ é amplamente limitada, temos pela

Proposição 2.7 que a rede $(T_{f_i})_{i\in I}$ é equicontínua. Assim, existe uma rede equicontínua $(T_{f_i})_{i\in I}$ que converge pontualmente a T_f em A. Pelos Lemas 1.10 e 1.12 obtemos que a rede equicontínua $(T_{f_i})_{i\in I}$ converge pontualmente a T_f em $G(\Omega)$. Pela Proposição 2.6 sabemos que $(T_{f_i})_{i\in I} \subset G(\Omega)' \otimes F$. Isso completa a demonstração.

$\square$

Demonstraremos agora a Proposição 3.6

Demonstração: Sejam F um espaço de Banach e $f \in H(\Omega, F)$. Por hipótese existe uma rede localmente limitada $(f_i)_{i\in I} \subset H(\Omega) \otimes F$ que converge pontualmente a f.

Como a rede $(f_i)_{i\in I}$ é localmente limitada, temos pelo Lema 3.7 que a rede $(T_{f_i})_{i\in I}$ é equicontínua e $(T_{f_i})_{i\in I} \subset G(\Omega)' \otimes F$ que converge pontualmente a T_f em $G(\Omega)$. Segue que a rede $(T_{f_i})_{i\in I}$ converge a T_f uniformemente sobre os compactos, convexos e equilibrados de $G(\Omega)$. Como, pelo Teorema de Linearização 2.3, para cada $g \in L(G(\Omega), F)$ existe $f \in H(U, F)$ tal que $T_f = g$, obtemos que $L_c(G(\Omega), F) = \overline{G(\Omega)' \otimes F}$, e segue pelo Teorema 1.25 que $G(\Omega)$ tem a propriedade de aproximação. $\square$

No resultado a seguir daremos condições suficientes para que o completamento do espaço $(H(\Omega), \tau_c)'_c$ tenha a propriedade de aproximação.

Proposição 3.8 *Sejam E um k-espaço localmente convexo e (Ω, p) um domínio de Riemann sobre E. Se para cada espaço de Banach F e cada $f \in H(\Omega, F)$ existe uma rede localmente limitada $(f_i)_{i\in I} \subset H(\Omega) \otimes F$ que converge a f em $(H(\Omega, F), \tau_c)$, então o completamento do espaço $(H(\Omega), \tau_c)'_c$ tem a propriedade de aproximação.*

Demonstração:

Sejam F um espaço de Banach e $g \in L((\widehat{H(\Omega), \tau_c})'_c, F)$ em que $(\widehat{H(\Omega), \tau_c})'_c$ é o completamento de $(H(\Omega), \tau_c)'_c$. Consideremos o isomorfismo

$$T \in (H(\Omega), \tau_c)\epsilon F \to T \circ \delta_\Omega \in (H(\Omega, F), \tau_c)$$

dado pela Proposição 1.70. Por hipótese existe uma rede localmente limitada $(f_i)_{i\in I} \subset H(\Omega) \otimes F$ que converge a $g \circ \delta_\Omega$ em $(H(\Omega, F), \tau_c)$.

Pelo isomorfismo $T \in (H(\Omega), \tau_c)\epsilon F \to T \circ \delta_\Omega \in (H(\Omega, F), \tau_c)$ e pela Proposição 2.9 existe uma rede equicontínua $(g_i)_{i \in I} \subset H(\Omega) \otimes F$ que converge a g em $(H(\Omega), \tau_c)\epsilon F$. Em particular, a rede $(g_i)_{i \in I}$ converge pontualmente a g em $(H(\Omega), \tau_c)'_c$. Pelo Lema 1.12 existe uma rede equicontínua $(\widehat{g_i})_{i \in I} \subset (\widehat{H(\Omega), \tau_c})'_c{}' \otimes F$ que converge pontualmente a g em $(\widehat{H(\Omega), \tau_c})'_c$. Segue que a rede equicontínua $(\widehat{g_i})_{i \in I} \subset (\widehat{H(\Omega), \tau_c})'_c{}' \otimes F$ converge a g uniformemente sobre os compactos de $(\widehat{H(\Omega), \tau_c})'_c$. Pela Proposição 1.25 obtemos que $(\widehat{H(\Omega), \tau_c})'_c$ tem a propriedade de aproximação.

$\square$

O próximo resultado nos dá uma condição suficiente para que o espaço $Q(^nE)$ tenha a propriedade de aproximação.

Proposição 3.9 *Seja E um espaço localmente convexo e $n \in \mathbb{N}$. Se para cada espaço de Banach F e para cada $P \in P(^nE, F)$ existe uma rede localmente limitada $(P_i)_{i \in I} \subset P(^nE) \otimes F$ que converge pontualmente a P, então $Q(^nE)$ tem a propriedade de aproximação.*

Demonstração:

Sejam F um espaço de Banach e $L \in L(Q(^nE), F)$. Pelo Teorema 2.15 sabemos que $\{\delta_n(x), x \in E\}$ gera um subespaço denso em $Q(^nE)$ e que $L = L_P$ para algum $P \in P(^nE, F)$, isto é, $L \circ \delta_n = P$. Vamos provar a existência de uma rede $(L_{P_i})_{i \in I} \subset L(Q(^nE), F)$ que converge pontualmente a $L_P \in L(Q(^nE), F)$ em $A = \{\delta_n(x); x \in E\}$.

Por hipótese, existe uma rede localmente limitada $(P_i)_{i \in I} \subset P(^nE) \otimes F$ que converge pontualmente a P. Assim existe $i_0 \in I$ tal que $P_i(x) - P(x) \in V$ para $i \geq i_0$. Logo existe uma rede localmente limitada $(P_i)_{i \in I} \subset P(^nE) \otimes F$ tal que $(L_{P_i})_{i \in I}$ converge pontualmente a L_P em A.

Como a rede $(P_i)_{i \in I}$ é localmente limitada, obtemos pela Proposição 2.19 que a rede $(L_{P_i})_{i \in I}$ é equicontínua. Assim, existe uma rede equicontínua $(L_{P_i})_{i \in I}$ que converge pontualmente a L_P em A. Pelos Lemas 1.10 e 1.12 temos que a rede equicontínua $(L_{P_i})_{i \in I}$ converge pontualmente a L_P em $Q(^nE)$. Em particular, a rede $(L_{P_i})_{i \in I}$ converge a L_P uniformemente sobre os conjuntos compactos de $Q(^nE)$. Segue pela Proposição 2.18 que $(L_{P_i})_{i\in I} \subset Q(^nE)' \otimes F$. Consequentemente, pelo Teorema 1.25 obtemos que $Q(^nE)$ tem a propriedade de aproximação. $\square$

No resultado anterior demos uma condição suficiente para que o espaço $Q(^nE)$ tenha a propriedade de aproximação. Veremos agora que com esta mesma condição o completamento do espaço $(P(^nE), \tau_c)'_c$ também tem a propriedade de aproximação.

Proposição 3.10 *Sejam E um k-espaço localmente convexo e $n \in \mathbb{N}$. Se para cada espaço de Banach F e cada $P \in P(^nE, F)$ existe uma rede localmente limitada $(P_i)_{i\in I} \subset P(^nE) \otimes F$ que converge a P em $(P(^nE, F), \tau_c)$, então o completamento do espaço $(P(^nE), \tau_c)'_c$ tem a propriedade de aproximação.*

Demonstração:

Denotaremos por $(\widehat{P(^nE), \tau_c})'_c$ o completamento de $(P(^nE), \tau_c)'_c$.

Sejam F um espaço de Banach e $\widehat{g} \in L((\widehat{P(^nE), \tau_c})'_c, F)$. Denotaremos $g = \widehat{g}|_{(P(^nE),\tau_c)'_c}$.

Consideremos o isomorfismo $P \in (P(^nE, F), \tau_c) \to P' \in F\epsilon(P(^nE), \tau_c)$ dado pela Proposição 1.52. Por hipótese para cada $P \in P(^nE, F)$ existe uma rede localmente limitada $(P_i)_{i\in I} \subset P(^mE) \otimes F$ que converge a P em $(P(^nE, F), \tau_c)$.

Pelo isomorfismo $P \in (P(^nE, F), \tau_c) \to P' \in F\epsilon(P(^nE), \tau_c)$, pelo Teorema 1.23 e pela Proposição 2.21 existe uma rede equicontínua $(P''_i)_{i\in I} \subset (P(^nE), \tau_c) \otimes F$ que converge a g em $(P(^nE), \tau_c)\epsilon F$. Em particular, a rede $(P''_i)_{i\in I}$ converge a g pontualmente em $(P(^nE), \tau_c)'_c$.

Pelo Lema 1.12 existe uma rede equicontínua $(\widehat{P''}_i)_{i\in I} \subset (\widehat{P(^nE), \tau_c})'^{\,\prime}_c \otimes F$ que converge a $\widehat{g}$ pontualmente em $(\widehat{P(^nE), \tau_c})'_c$. Segue que a rede $(\widehat{P''}_i)_{i\in I} \subset (\widehat{P(^nE), \tau_c})'^{\,\prime}_c \otimes F$ converge a $\widehat{g}$ uniformemente sobre os compactos de $(\widehat{P(^nE), \tau_c})'_c$. Pelo Teorema 1.25 obtemos que $(\widehat{P(^nE), \tau_c})'_c$ tem a propriedade de aproximação. $\square$

Em [1] Aron e Schottenloher mostraram que um k-espaço localmente convexo E tem a propriedade de aproximação se, e somente se, $(H(U), \tau_c)$ tem a propriedade de aproximação para um aberto $U \subset E$ finitamente Runge. Sabemos que todo aberto equilibrado é finitamente Runge. No próximo resultado Erhan Çaliskan prova que um espaço de Fréchet E tem a propriedade de aproximação se, e somente se, $(H(U), \tau_c)$ tem a propriedade de aproximação para um aberto $U \subset E$ equilibrado. O resultado de Çaliskan complementa o resultado de Aron e Schottenloher no seguinte sentido:

Teorema 3.11 *([3], Teorema 3.4) Para cada espaço localmente convexo E considere as seguintes condições:*

(a) $(H(U), \tau_c)$ tem a propriedade de aproximação, para um (para todo) aberto equilibrado $U \subset E$.

(b) $(H(K), \tau_c)$ tem a propriedade de aproximação, para um (para todo) compacto equilibrado $K \subset E$.

(c) $(P(^nE), \tau_c)$ tem a propriedade de aproximação, para todo $n \in \mathbb{N}$.

(d) $Q(^nE)$ tem a propriedade de aproximação, para todo $n \in \mathbb{N}$.

(e) $G(K)$ tem a propriedade de aproximação, para um (para todo) compacto equilibrado $K \subset E$.

(f) $G(U)$ tem a propriedade de aproximação, para um (para todo) aberto equilibrado $U \subset E$.

(g) E tem a propriedade de aproximação.

(h) $(P(^nE, F), \tau_c) = \overline{P(^nE) \otimes F}$ para todo espaço localmente convexo F (ou equivalentemente para todo espaço de Banach F) e para todo $n \in \mathbb{N}$.

Então as implicações $(a) \Leftrightarrow (b) \Leftrightarrow (c) \Rightarrow (g) \Rightarrow (h)$, e $(d) \Leftrightarrow (e) \Leftrightarrow (f)$ são sempre verdadeiras. Se E é um k-espaço localmente convexo, então $(h) \Rightarrow (c)$. Se E é completo, então $(f) \Rightarrow (g)$. Se E é um espaço de Fréchet, então todas as condições são equivalentes.

O próximo corolário melhora um pouco o resultado de Erhan Çaliskan.

Proposição 3.12 *Para cada espaço localmente convexo E considere as seguintes condições:*

(a) $(H(U), \tau_c)$ tem a propriedade de aproximação, para um (para todo) aberto equilibrado $U \subset E$.

(b) $(H(K), \tau_c)$ *tem a propriedade de aproximação, para um (para todo) compacto equilibrado* $K \subset E$.

(c) $(P(^nE), \tau_c)$ *tem a propriedade de aproximação, para todo* $n \in \mathbb{N}$.

(d) $Q(^nE)$ *tem a propriedade de aproximação, para todo* $n \in \mathbb{N}$.

(e) $G(K)$ *tem a propriedade de aproximação, para um (para todo) compacto equilibrado* $K \subset E$.

(f) $G(U)$ *tem a propriedade de aproximação, para um (para todo) aberto equilibrado* $U \subset E$.

(g) $G_0(U)$ *tem a propriedade de aproximação, para um (para todo) aberto equilibrado* $U \subset E$.

(h) E *tem a propriedade de aproximação.*

(i) $(P(^nE, F), \tau_c) = \overline{P(^nE) \otimes F}$ *para todo espaço localmente convexo* F *(ou equivalentemente para todo espaço de Banach* F*) e para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Então as implicações $(a) \Leftrightarrow (b) \Leftrightarrow (c) \Rightarrow (h) \Rightarrow (i)$, *e* $(d) \Leftrightarrow (e) \Leftrightarrow (f) \Rightarrow (g) \Rightarrow (h)$ *são sempre verdadeiras. Se* E *é um k-espaço localmente convexo, então* $(i) \Rightarrow (c)$ *e* $(f) \Rightarrow (a)$ *. Se* E *é um espaço de Fréchet, então todas as condições são equivalentes.*

Demonstração: Para provar a proposição basta provar que as implicações $(f) \Rightarrow (g)$ e $(g) \Rightarrow (h)$ são verdadeiras quando E é um espaço localmente convexo, e provar que a implicação $(f) \Rightarrow (a)$ é verdadeira quando E é um k-espaço localmente convexo.

$(f) \Rightarrow (g)$

Suponha que $G(U)$ tenha a propriedade de aproximação para um aberto equilibrado U de um espaço localmente convexo E. Então pela Proposição 3.3 temos que $G_0(U)$ tem a propriedade de aproximação.

$(g) \Rightarrow (h)$

Suponha que $G_0(U)$ tenha a propriedade de aproximação para um aberto equilibrado U de um espaço localmente convexo E. Então pela Proposição 3.2 temos que E tem a propriedade de aproximação.

$(f) \Rightarrow (a)$ Suponha que $G(U)$ tenha a propriedade de aproximação para um aberto equilibrado U de um k-espaço localmente convexo. Então pela Proposição 3.5 obtemos que $(H(U), \tau_c)$ tem a propriedade de aproximação. $\square$

3.2 A propriedade de aproximação limitada

Nesta seção daremos condições para que os espaços de funções holomorfas em espaços localmente convexos, e seus preduais, tenham a propriedade de aproximação limitada.

O próximo resultado melhora a Proposição 3.6.

Teorema 3.13 *Seja E um espaço localmente convexo e seja (Ω, p) um domínio de Riemann sobre E. São equivalentes:*

(a) Para cada espaço localmente convexo completo F e cada $f \in H(\Omega, F)$ existe uma rede amplamente limitada $(f_i)_{i\in I} \subset H(\Omega) \otimes F$ que converge a f em $(H(\Omega, F), \tau_c)$.

(b) Para cada $f \in H(\Omega, G(\Omega))$ existe uma rede amplamente limitada $(f_i)_{i\in I} \subset H(\Omega) \otimes G(\Omega)$ que converge a f em $(H(\Omega, G(\Omega)), \tau_c)$.

(c) $G(\Omega)$ tem a propriedade de aproximação limitada.

Demonstração:

$(a) \Rightarrow (b)$

Basta considerarmos $F = G(\Omega)$.

$(b) \Rightarrow (c)$

Seja $T \in L(G(\Omega), G(\Omega))$. Pelo Teorema de Linearização 2.3 existe $g \in H(\Omega, G(\Omega))$ tal que $T = T_g$. Por hipótese existe uma rede amplamente limitada $(g_i)_{i\in I} \subset H(\Omega) \otimes G(\Omega)$ que converge a g em $(H(\Omega, G(\Omega)), \tau_c)$. Em particular, a rede $(g_i)_{i\in I}$ converge pontualmente a g e pelo Lema 3.7 temos que a rede $(T_{g_i})_{i\in I}$ está contida em $G(\Omega)' \otimes G(\Omega)$ e converge a $T_g \in L(G(\Omega), G(\Omega))$ pontualmente em $G(\Omega)$. Pelo Teorema 1.30 temos que $G(\Omega)$ tem a propriedade de aproximação limitada.

$(c) \Rightarrow (a)$

Suponha que $G(\Omega)$ tenha a propriedade de aproximação limitada. Então pelo Teorema 1.30, para cada espaço localmente convexo completo F e para cada $g \in$

$L(G(\Omega), F)$, existe uma rede equicontínua $(g_i)_{i\in I} \subset G(\Omega)' \otimes F$ que converge pontualmente a g em $G(\Omega)$. Segue que $(g_i)_{i\in I}$ converge uniformemente a g sobre os conjuntos compactos de $G(\Omega)$.

Sejam F um espaço localmente convexo completo, e $f \in H(\Omega, F)$. Sabemos pelo Teorema de Linearização 2.3 que $T_f \in L(G(\Omega), F)$. Assim, existe uma rede equicontínua $(g_i)_{i\in I} \subset G(\Omega)' \otimes F$ que converge uniformemente a T_f sobre os conjuntos compactos convexos e equilibrados de $G(\Omega)$. Como a aplicação $T^{-1} : L_c(G(\Omega), F) \to (H(\Omega, F), \tau_c)$ é bijetora e contínua pela Proposição 2.5, e a imagem de uma aplicação de posto finito é uma aplicação de posto finito pela Proposição 2.6, obtemos que a rede $(T^{-1}(g_i))_{i\in I} \subset H(\Omega) \otimes F$ converge a f em $(H(\Omega, F), \tau_c)$. Como a rede $(g_i)_{i\in I}$ é equicontínua, temos pela Proposição 2.7 que a rede $(T^{-1}(g_i))_{i\in I}$ é amplamente limitada.

□

O próximo resultado melhora a Proposição 3.8.

Proposição 3.14 *Seja E um k-espaço localmente convexo e seja (Ω, p) um domínio de Riemann sobre E. Se para cada espaço localmente convexo completo F e $f \in H(\Omega, F)$ existe uma rede amplamente limitada $(f_i)_{i\in I} \subset H(\Omega) \otimes F$ que converge a f em $(H(\Omega, F), \tau_c)$, então o completamento de $(H(\Omega), \tau_c)'_c$ tem a propriedade de aproximação limitada.*

Demonstração: Sejam F um espaço localmente convexo completo e $g \in L(\widehat{(H(\Omega), \tau_c)'_c}, F)$ em que $\widehat{(H(\Omega), \tau_c)'_c}$ é o completamento de $(H(\Omega), \tau_c)'_c$. Consideremos o isomorfismo $T \in (H(\Omega), \tau_c)\epsilon F \to T \circ \delta_\Omega \in (H(\Omega, F), \tau_c)$ dado pela Proposição 1.70 e pelo Teorema 1.23. Por hipótese existe uma rede amplamente limitada $(f_j)_{j\in J} \subset H(\Omega) \otimes F$ que converge a $g \circ \delta_\Omega$ em $(H(\Omega, F), \tau_c)$.

Pelo isomorfismo $T \in (H(\Omega), \tau_c)\epsilon F \to T \circ \delta_\Omega \in (H(\Omega, F), \tau_c)$ e pela Proposição 2.9, existe uma rede equicontínua $(g_j)_{j\in J} \subset H(\Omega) \otimes F$ que converge a g em $(H(\Omega), \tau_c)\epsilon F$. Em particular, a rede $(g_j)_{j\in J}$ converge a g pontualmente em $(H(\Omega), \tau_c)'_c$.

Segue do Lema 1.12 que existe uma rede equicontínua $(\widehat{g}_j))_{j\in J} \subset \widehat{(H(\Omega), \tau_c)'_c}' \otimes F$ que converge a g pontualmente em $\widehat{(H(\Omega), \tau_c)'_c}$. Pelo Teorema 1.30 obtemos que

$(\widehat{H(\Omega), \tau_c})'_c$ tem a propriedade de aproximação limitada.

$\square$

A próxima proposição melhora a Proposição 3.9.

Proposição 3.15 *Sejam E um espaço localmente convexo e $n \in \mathbb{N}$. São equivalentes:*

(a) Para cada espaço localmente convexo completo F e para cada $P \in P(^nE, F)$ existe uma rede amplamente limitada $(P_i)_{i\in I} \subset P(^nE) \otimes F$ que converge a P em $(P(^nE, F), \tau_c)$.

(b) Para cada $P \in P(^nE, Q(^nE))$ existe uma rede amplamente limitada $(P_i)_{i\in I} \subset P(^nE) \otimes Q(^nE)$ que converge a P em $(P(^nE, Q(^nE)), \tau_c)$.

(c) $Q(^nE)$ tem a propriedade de aproximação limitada.

Demonstração:

$(a) \Rightarrow (b)$

Basta tomarmos $F = Q(^nE)$.

$(b) \Rightarrow (c)$

Pelo Teorema 2.15 temos que dado $P \in P(^nE, Q(^nE))$ existe um único $L_P \in L(Q(^nE), Q(^nE))$ tal que $P(x) = L_P \circ \delta_n(x)$ para todo $x \in E$. Por hipótese existe uma rede amplamente limitada $(P_i)_{i\in I} \subset P(^nE)\otimes Q(^nE)$ que converge a P em $(P(^nE, Q(^nE)), \tau_c)$. Em particular, $(P_i)_{i\in I}$ converge pontualmente a P em E, o que implica $(L_{P_i})_{i\in I}$ convergir pontualmente a L_P em $A = \{\delta_n(x); x \in E\}$. Além disso, pela Proposição 2.21, $(P_i)_{i\in I}$ ser amplamente limitada implica em $(L_{P_i})_{i\in I}$ ser equicontínua em $Q(^nE)$. Como o espaço gerado por A é denso em $Q(^nE)$, pelos Lemas 1.10 e 1.12 obtemos que $(L_{P_i})_{i\in I}$ converge pontualmente a L_P em $Q(^nE)$. Como $P_i \in P(^nE) \otimes Q(^nE)$ para todo $i \in I$, segue pela Proposição 2.18 que L_{P_i} tem posto finito para todo $i \in i$, isto é, $(L_{P_i})_{i\in I} \subset P(^nE) \otimes Q(^nE)$.

Finalmente observamos que dada $L \in L(Q(^nE), Q(^nE))$, temos que $P = L \circ \delta_n \in P(^nE, Q(^nE))$ e $L = L_P$. Então, pelo Teorema 1.30 temos que $Q(^nE)$ tem a propriedade de aproximação limitada.

$(c) \Rightarrow (a)$

Suponha que $Q(^nE)$ tenha a propriedade de aproximação limitada. Então, pelo Teorema 1.30, para cada espaço localmente convexo completo F e para cada $g \in L(Q(^nE), F)$, existe uma rede equicontínua $(g_i)_{i\in I} \subset Q(^nE)' \otimes F$ que converge pontualmente a g em $Q(^nE)$. Segue que $(g_i)_{i\in I}$ converge uniformemente a g sobre os conjuntos compactos de $Q(^nE)$.

Seja $P \in P(^nE, F)$. Sabemos pelo Teorema de Linearização de Polinômios 2.15 que $L_P \in L(Q(^nE), F)$. Assim, existe uma rede equicontínua $(g_i)_{i\in I} \subset Q(^nE)' \otimes F$ que converge uniformemente a L_P sobre os conjuntos compactos convexos e equilibrados de $Q(^nE)$. Como a aplicação $Q : L_c(Q(^nE), F) \to (P(^nE, F), \tau_c)$ é bijetora e contínua pela Proposição 2.17, e além disso é tal que a imagem de uma aplicação de posto finito é uma aplicação de posto finito pela Proposição 2.18, a rede $(Q(g_i))_{i\in I} \subset P(^nE) \otimes F$ converge a P em $(P(^nE, F), \tau_c)$. Como a rede $(g_i)_{i\in I}$ é equicontínua, obtemos pela Proposição 2.19 que a rede $(g_i)_{i\in I}$ é amplamente limitada.

□

O próximo resultado melhora a Proposição 3.10.

Proposição 3.16 *Sejam E um k-espaço localmente convexo e $n \in \mathbb{N}$. Se para cada espaço localmente convexo completo F e para cada $P \in P(^nE, F)$ existe uma rede amplamente limitada $(P_i)_{i\in I} \subset P(^nE) \otimes F$ que converge a $P \in (P(^nE, F), \tau_c)$, então o completamento de $(P(^nE), \tau_c)'_c$ tem a propriedade de aproximação limitada.*

Demonstração: Denotaremos por $(P\widehat{(^nE), \tau_c})'_c$ o completamento de $(P(^nE), \tau_c)'_c$.

Sejam F um espaço localmente convexo completo e $\widehat{g} \in L((P\widehat{(^nE), \tau_c})'_c, F)$. Denotaremos $g = \widehat{g}|_{(P(^nE), \tau_c)'_c}$.

Consideremos o isomorfismo $P \in (P(^nE, F), \tau_c) \to P' \in F\epsilon(P(^nE), \tau_c)$ dado pela Proposição 1.52. Por hipótese, para cada $P \in P(^nE, F)$ existe uma rede amplamente limitada $(P_j)_{j\in J} \subset P(^nE) \otimes F$ que coverge para P em $(P(^nE, F), \tau_c)$.

Pelo isomorfismo $P \in (P(^nE, F), \tau_c) \to P' \in F\epsilon(P(^nE), \tau_c)$, pelo Teorema 1.23 e pela Proposição 2.21 existe uma rede equicontínua $(P''_j)_{j\in J} \subset P(^nE) \otimes F$ que converge a g em $(P(^nE), \tau_c)\epsilon F$. Em particular, a rede $(P''_j)_{j\in J}$ converge a g pontualmente em $(P(^nE), \tau_c)'_c$.

Pelo Lema 1.12 existe uma rede equicontínua $(\widehat{P''}_j)_{j\in J} \subset (P\widehat{(^nE), \tau_c})'_c{}' \otimes F$ que converge a $\widehat{g}$ pontualmente em $(P\widehat{(^nE), \tau_c})'_c$. Pelo Teorema 1.30 obtemos que $(P\widehat{(^nE), \tau_c})'_c$ tem a propriedade de aproximação limitada.

$\square$

Proposição 3.17 *Seja (Ω, p) um domínio de Riemann sobre um espaço localmente convexo completo E. Se $G(\Omega)$ tem a propriedade de aproximação limitada, então E tem a propriedade de aproximação limitada.*

Demonstração: Pela Proposição 2.10 sabemos que E é isomorfo a um subespaço complementado de $G(\Omega)$. Como por hipótese $G(\Omega)$ tem a propriedade de aproximação limitada, segue pela Proposição 1.33 que E também tem a propriedade de aproximação limitada. $\square$

Proposição 3.18 *([3], Proposição 3.3) Seja E um espaço localmente convexo. Então as seguintes condições são equivalentes:*

(a) $Q(^nE)$ tem a propriedade de aproximação limitada, para todo $n \in \mathbb{N}$.

(b) $G(U)$ tem a propriedade de aproximação limitada, para algum (para todo) aberto equilibrado $U \subset E$.

(c) $G(K)$ tem a propriedade de aproximação limitada, para algum (para todo) compacto equilibrado $K \subset E$.

Teorema 3.19 *Seja E um espaço localmente convexo com uma base de Schauder equicontínua. Então:*

(a) Para cada espaço localmente convexo F, $n \in \mathbb{N}$ e $P \in P(^nE, F)$ existe uma sequência amplamente limitada $(P_m) \subset P(^nE) \otimes F$ que converge a P em $(P(^nE, F), \tau_c)$.

(b) $Q(^nE)$ tem a propriedade de aproximação limitada, para todo $n \in \mathbb{N}$.

(c) $G(U)$ tem a propriedade de aproximação limitada, para algum(para todo) $U \subset E$ aberto e equilibrado.

(d) $G(K)$ tem a propriedade de aproximação limitada, para algum (para todo) $K \subset E$ compacto e equilibrado.

(e) Para cada espaço localmente convexo completo F, $U \subset E$ aberto e equilibrado e $f \in H(U,F)$ existe uma rede amplamente limitada $(f_i)_{i\in I} \subset H(U)' \otimes F$ que converge a f em $(H(U,F),\tau_c)$.

Demonstração:

(a)

Como E tem uma base de Schauder equicontínua, existe uma sequência de operadores equicontínuos $(T_m) \subset E' \otimes E$ que converge à identidade de E. Segue que (T_m) converge uniformemente sobre os compactos a identidade de E.

Sejam F um espaço localmente convexo, $n \in \mathbb{N}$, $P \in P(^nE,F)$ e K um subconjunto compacto de E. Dados $\epsilon > 0$ e $\alpha \in cs(F)$ existem uma seminorma contínua q de E e $\delta > 0$ tais que $\alpha(P(x) - P(y)) < \epsilon$ para todos $x \in K$ e $y \in E$ com $q(x-y) < \delta$.

Como (T_m) converge uniformemente sobre os compactos a I_E, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $q(T_m(x) - x) < \delta$ para $m \geq m_0$ e $x \in K$. Seque que $\alpha(P(T_m(x)) - P(x)) < \epsilon$ para todos $x \in K$ e $m \geq m_0$. Consequentemente $(P \circ T_m)$ converge a P em $(P(^nE,F),\tau_c)$. Como $(T_m) \subset E' \otimes E$ temos que $(P \circ T_m) \subset P(^nE) \otimes F$.

Vamos mostrar que $(P \circ T_m)$ é uma sequência amplamente limitada.

Seja α uma seminorma contínua em F. Consideremos a aplicação quociente $\pi_\alpha : F \to F_\alpha$. Como a sequência $(P \circ T_m) \subset P(^nE,F)$, a sequência $(\pi_\alpha \circ P \circ T_m) \subset P(^nE,F_\alpha)$.

Definamos $\widetilde{P} = \pi_\alpha \circ P$. Como $\widetilde{P}$ é um polinômio contínuo, é limitado em alguma vizinhança de zero. Segue da Fórmula de Polarização que existem uma vizinhança convexa e equilibrada de zero V em E e $M > 0$ tais que $||A||_{V^n} = M$ em que A é uma aplicação n-linear tal que $\widetilde{P} = A \circ \Delta^n$.

Como (T_m) é uma sequência equicontínua, existe uma vizinhança convexa e equilibrada de zero W tal que $T_m(W) \subset V$ para cada $m \in \mathbb{N}$.

Seja $z_0 \in E$. Como W é absorvente existe $\beta > 0$ tal que $\beta z_0 \in W$, e consequentemente $\beta T_m(z_0) \in V$ para todo $m \in \mathbb{N}$.

Pelo Lema 1.45, dados $x, y \in E$ e $\lambda \in K$, temos que

$$\widetilde{P}(x + \lambda y) = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} A[(x)^{n-r}(y)^r]\lambda^r.$$

Segue para todo $m \in \mathbb{N}$ e para todo $\delta > 0$ que

$$\sup_{z\in W} ||\widetilde{P}(T_m(z_0 + \delta z)) - \widetilde{P}(T_m(z_0))|| = \sup_{z\in W} ||\widetilde{P}(T_m(z_0) + \delta T_m(z)) - \widetilde{P}(T_m(z_0))|| \leq$$

$$\sup_{y\in V} ||\widetilde{P}(T_m(z_0) + \delta y) - \widetilde{P}(T_m(z_0))|| \leq \sup_{y\in V} ||\sum_{r=0}^{n-1} \binom{n}{r} A[(T_m(z_0))^{n-r}(y)^r]||\delta^r \leq$$

$$\sum_{r=0}^{n-1} \binom{n}{r} \sup_{y\in V} ||A[(T_m(z_0))^{n-r}(y)^r]||\delta^r = \sum_{r=0}^{n-1} \binom{n}{r} \frac{1}{\beta^{n-r}} \sup_{y\in V} ||A(\beta T_m(z_0)^{n-r} y^r||\delta^r \leq$$

$$\sum_{r=0}^{n-1} \binom{n}{r} \frac{M}{\beta^{n-r}} \delta^r = M[(\frac{1}{\beta} + \delta)^n - (\frac{1}{\beta})^n].$$

Assim, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $||\widetilde{P}(T_m(z_0 + \delta z)) - \widetilde{P}(T_m(z_0))|| < \epsilon$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Como W é uma vizinhança de zero, $z_0 + \delta W$ é uma vizinhança de z_0. Obtemos que $||\widetilde{P}(T_m(y)) - \widetilde{P}(T_m(z_0))|| < \epsilon$ para todos $y \in z_0 + \delta W$ e $m \in \mathbb{N}$. Segue para todos $m \in \mathbb{N}$ e $y \in z_0 + \delta W$ que

$$|\alpha(P \circ T_m(y)) - \alpha(P \circ T_m(z_0))| \leq \alpha(P \circ T_m(y) - P \circ T_m(z_0)) =$$

$$||\pi_\alpha(P \circ T_m(y) - P \circ T_m(z_0))|| = ||\pi_\alpha(P \circ T_m(y)) - \pi_\alpha(P \circ T_m(z_0))|| =$$

$$||\widetilde{P}(T_m(y)) - \widetilde{P}(T_m(z_0))|| < \epsilon.$$

Donde concluímos que a sequência $(\alpha \circ P \circ T_m)$ é equicontínua.

Como α é contínua e $(P \circ T_m)$ converge uniformemente sobre os compactos de E a P, $(\alpha \circ P \circ T_m)$ converge pontualmente a $\alpha \circ P$. Em particular, $(\alpha \circ P \circ T_m)$ é uma sequência pontualmente limitada.

Como a sequência $(\alpha \circ P \circ T_m)$ é equicontínua, dado $a \in E$ existe uma vizinhança V_a de a tal que $|\alpha \circ P \circ T_m(x) - \alpha \circ P \circ T_m(a)| < 1$ para todos $x \in V_a$ e $m \in \mathbb{N}$. Por outro lado existe $M > 0$ tal que $\alpha \circ P \circ T_m(a) < M$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Segue que $\alpha \circ P \circ T_m(x) < 1 + \alpha \circ P \circ T_m(a) < 1 + M$ para todos $x \in V_a$ e $m \in \mathbb{N}$. Donde concluímos que a sequência $(P \circ T_m)$ é amplamente limitada.

(b)

Por (a) e pela Proposição 3.15, segue que $Q(^nE)$ tem a propriedade de aproximação limitada.

(c) e (d)

Pela Proposição 3.18 temos que $G(U)$, para um $U \subset E$ aberto equilibrado, tem a propriedade de aproximação limitada se, e somente se, $G(K)$ tem a propriedade de aproximação limitada para um compacto e equilibrado $K \subset E$ se, e somente se, $Q(^nE)$ tem a propriedade de aproximação limitada para todo $n \in \mathbb{N}$.

(e)

Se $G(U)$ tem a propriedade de aproximação limitada para $U \subset E$ aberto equilibrado, então pelo Teorema 3.13 temos que para cada espaço localmente convexo completo F, $U \subset E$ aberto equilibrado e $f \in H(U,F)$ existe uma rede amplamente limitada $(f_i)_{i\in I} \subset H(U)' \otimes F$ que converge a f em $(H(U,F),\tau_c)$. □

Corolário 3.20 *Seja E um k-espaço localmente convexo com uma base de Schauder equicontínua e seja $U \subset E$ aberto equilibrado. Então:*

(a) O completamento de $(H(U),\tau_c)'_c$ tem a propriedade de aproximação limitada.

(b) O completamento de $(P(^nE),\tau_c)'_c$ tem a propriedade de aproximação limitada.

Demonstração:

(a)

Pelo item (e) do Teorema 3.19, temos que para cada espaço localmente convexo completo F e $f \in H(U,F)$ existe uma rede amplamente limitada $(f_i)_{i\in I} \subset H(U)' \otimes F$ que converge a f em $(H(U,F),\tau_c)$. Segue pela Proposição 3.14 que o completamento de $(H(U),\tau_c)'_c$ tem a propriedade de aproximação limitada.

(b) Pelo item (a) do Teorema 3.19, para cada espaço localmente convexo F e $P \in P(^nE,F)$ existe uma sequência amplamente limitada $(P_n) \subset P(^nE) \otimes F$ que converge para P em $(P(^nE,F),\tau_c)$. Consequentemente, pela Proposição 3.16 temos que o completamento de $(P(^nE),\tau_c)'_c$ tem a propriedade de aproximação limitada.

□

Corolário 3.21 *Seja E um k-espaço localmente convexo com uma base de Schauder equicontínua e seja $U \subset E$ aberto equilibrado. Então:*

(a) $(H(U), \tau_c)'_c$ tem a propriedade de aproximação.

(b) $(P(^nE), \tau_c)'_c$ tem a propriedade de aproximação.

Demonstração:

(a)

Pelo item (a) do Corolário 3.20 sabemos que o completamento do espaço $(H(U), \tau_c)'_c$ tem a propriedade de aproximação limitada. Em particular, pela Observação 1.31 temos que o completamento do espaço $(H(U), \tau_c)'_c$ tem a propriedade de aproximação. Segue da Proposição 1.28 que o espaço $(H(U), \tau_c)'_c$ tem a propriedade de aproximação.

(b)

Pelo item (b) do Corolário 3.20 sabemos que o completamento do espaço $(P(^nE), \tau_c)'_c$ tem a propriedade de aproximação limitada. Em particular, pela Observação 1.31 temos que o completamento do espaço $(P(^nE), \tau_c)'_c$ tem a propriedade de aproximação. Segue da Proposição 1.28 que o espaço $(P(^nE), \tau_c)'_c$ tem a propriedade de aproximação.

□

Capítulo 4

Espaços de funções holomorfas em espaços de Fréchet

4.1 A propriedade de aproximação

Nesta seção daremos condições para que os espaços de funções holomorfas em espaços de Fréchet, e seus preduais, tenham a propriedade de aproximação.

Proposição 4.1 *Seja X um espaço métrico e seja F um espaço localmente convexo. Se $(f_n) \subset C(X,F)$ converge a $f \in C(X,F)$ uniformemente sobre os conjuntos compactos de X, então a sequência (f_n) é amplamente limitada.*

Demonstração: Primeiramente vamos supor que F seja um espaço normado.

Seja $K \subset X$ um subconjunto compacto. Segue da hipótese que existe $d > 0$ tal que $||f_n(x)|| \leq d$ para cada $x \in K$ e $n \in \mathbb{N}$.

Suponha por absurdo que a sequência (f_n) não seja localmente limitada. Então existe uma subsequência (f_{n_m}) da sequência (f_n) e uma sequência $(x_m) \subset X$ tais que $x_m \in B(p, \frac{1}{m})$ e $||f_{n_m}(x_m)|| > m$. Pela construção da sequência (x_m) observamos que esta converge ao ponto p.

Como o conjunto $L = \{p\} \cup \{x_m; m \in \mathbb{N}\}$ é compacto, existe $d > 0$ tal que $||f_n(x)|| < d$ para todos $x \in L$ e $n \in \mathbb{N}$. O que contraria o fato de que $||f_{n_m}(x_m)|| > m$

para todo $m \in \mathbb{N}$. Logo a sequência (f_n) é localmente limitada.

Vamos supor agora que F seja um espaço localmente convexo.

Sejam α uma seminorma contínua em F. Como (f_n) converge uniformemente a f sobre os compactos de X, temos que para cada compacto K de X e $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $(f_n - f)(x) \in \{y \in F; \alpha(y) < \epsilon\}$ para todos $n \geq n_0$ e $x \in K$. Segue que

$$|\alpha(f_n(x)) - \alpha(f(x))| \leq \alpha(f_n(x) - f(x)) < \epsilon$$

para todos $n \geq n_o$ e $x \in K$. Logo a sequência $(\alpha \circ f_n)$ converge uniformemente a $\alpha \circ f$ sobre os conjuntos compactos de X. Obtemos da primeira parte da demonstração que a sequência $(\alpha \circ f_n)$ é localmente limitada. Donde concluímos que (f_n) é amplamente limitada. $\square$

Proposição 4.2 *Seja (Ω, p) um domínio de Riemann sobre um espaço localmente convexo metrizável E e seja F um espaço localmente convexo. Se $(f_n) \subset H(\Omega, F)$ converge a $f \in H(\Omega, F)$ em $(H(\Omega, F), \tau_c)$, então (f_n) é amplamente limitada.*

Demonstração: Seja $x_0 \in \Omega$. Como p é um homeomorfismo local, existe um aberto $U \subset \Omega$ contendo x_0 tal que $p(U)$ é aberto em E e $p_U = p|_U : U \to p(U)$ é um homeomorfismo.

Seja $K \subset p(U)$ compacto. Como p_U é um homeomorfismo, temos que $p_U^{-1}(K)$ é um subconjunto compacto de U. Consequentemente $p_U^{-1}(K)$ é um subconjunto compacto de Ω. Como (f_n) converge a f em $(H(\Omega, F), \tau_c)$, temos que (f_n) converge a f uniformemente sobre $p_U^{-1}(K)$. Segue que $(f_n \circ p_U^{-1})$ converge a $f \circ p_U^{-1}$ uniformemente sobre K.

Como $p_U(U)$ é um aberto em E, segue pela Proposição 4.1 que a sequência $(f_n \circ p_U^{-1})$ é amplamente limitada. Então, dada uma seminorma $\alpha \in cs(F)$, existe uma bola aberta $B(p(x_0), r) \subset p_U(U)$ tal que $(\alpha \circ f_n \circ p_U^{-1}(B(p(x_0), r)))$ é limitada. Como $B(p(x_0), r)$ é um conjunto aberto em $p_U(U)$, obtemos que $p_U^{-1}(B(p(x_0), r))$ é um conjunto aberto em U. Como U é um aberto em Ω, temos que $p_U^{-1}(B(p(x_0), r))$ é um conjunto aberto em Ω. Então a sequência $(\alpha \circ f_n)$ é limitada em uma vizinhança de x_0. Donde concluímos que a sequência (f_n) é amplamente limitada. $\square$

Teorema 4.3 *([5], Teorema 3.3)*

Seja E um espaço localmente convexo metrizável com uma base de Schauder equicontínua e seja (Ω, p) um domínio de Riemann pseudoconvexo conexo sobre E. Então:

(a) Para cada espaço de Banach F e cada $f \in H(\Omega, F)$ existe uma sequência $(f_n) \subset H(\Omega) \otimes F$ que converge a f em $(H(\Omega, F), \tau_c)$.

(b) $(H(\Omega), \tau_c)$ tem a propriedade de aproximação.

O Próximo teorema melhora o Teorema 4.3 de Dineen e Mujica.

Teorema 4.4 *Seja E um espaço localmente convexo metrizável com uma base de Schauder equicontínua, e seja (Ω, p) um domínio de Riemann pseudoconvexo sobre E. Então:*

(a) Para cada espaço de Banach F e cada $f \in H(\Omega, F)$ existe uma rede localmente limitada $(f_i)_{i \in I} \subset H(\Omega) \otimes F$ que converge a $f \in (H(\Omega, F), \tau_c)$.

(b) $G(\Omega)$ tem a propriedade de aproximação.

(c) $G_0(\Omega)$ tem a propriedade de aproximação.

(d) $(H(\Omega), \tau_c)'_c$ tem a propriedade de aproximação.

(e) $(H(\Omega), \tau_c)$ tem a propriedade de aproximação.

Para provar o Teorema 4.4 vamos precisar dos dois próximos lemas.

Lema 4.5 *Sejam E e F espaços localmente convexos e (Ω, p) um domínio de Riemann sobre E. Se $\Omega = \cup_{i \in I} \Omega_i$ onde cada Ω_i é uma componente conexa de Ω, então a aplicação*

$$\Psi : (H(\Omega, F), \tau_c) \to \Pi_{i \in I}(H(\Omega_i, F), \tau_c)$$

dada por $\Psi(f) = (f_i)_{i \in I}$ onde $f_i = f|_{\Omega_i}$ é um isomorfismo topológico.

Demonstração:

Primeiramente mostraremos que cada componente conexa de Ω é um subconjunto aberto de Ω.

Sejam Ω_i, com $i \in I$, uma componente conexa de Ω e $x \in \Omega_i$. Como p é um homeomorfismo local existe um subconjunto aberto U de Ω contendo x tal que $p(U)$ é um subconjunto aberto de E e $p_U : U \to p(U)$ é um homeomorfismo.

Seja $W_{p(x)}$ uma vizinhança aberta e convexa de $p(x)$ contida em $p(U)$. Como a aplicação p_U é um homeomorfismo, temos que $p_U^{-1}(W_{p(x)})$ é um subconjunto aberto e conexo de U. Segue que $p_U^{-1}(W_{p(x)})$ é um subconjunto aberto e conexo de Ω contendo x. Como Ω_i é o maior conjunto conexo contendo x, $p_U^{-1}(W_{p(x)}) \subset \Omega_i$. Logo Ω_i é um subconjunto aberto de Ω.

Definamos $\Psi : (H(\Omega, F), \tau_c) \to \Pi_{i \in I}(H(\Omega_i, F), \tau_c)$ por $\Psi(f) = (f_i)_{i \in I}$ onde $f_i = f|_{\Omega_i}$. Seja $f \in H(\Omega, F)$. Sabemos que para cada $i \in I$ a restrição $f|_{\Omega_i} \in H(\Omega_i, F)$. Donde concluímos que Ψ está bem definida. Não é difícil ver que a aplicação Ψ é uma aplicação linear e injetiva.

Vejamos agora que Ψ é uma aplicação sobrejetiva.

Seja $(f_i)_{i \in I} \in \Pi_{i \in I} H(\Omega, F)$. Consideremos $f : \Omega \to F$ dada por $f(x) = f_i(x)$ quando $x \in \Omega_i$. Como cada $x \in \Omega$ está contido em uma única componente conexa de Ω_i, a aplicação f está bem definida. Como as componente conexas de Ω são subconjuntos abertos, f é uma aplicação contínua.

Como (Ω, p) é um domínio de Riemann, definindo $p_i = p|_{\Omega_i}$ para cada $i \in I$ temos que (Ω_i, p_i) é um domínio de Riemann sobre E.

Seja (U, p_U) uma carta de (Ω, p). Podemos escrever $U = \cup_{i \in I}(\Omega_i \cap U)$. Definamos $U_i = (\Omega_i \cap U)$ para cada $i \in I$. Como $p_U : U \to p(U)$ é um homeomorfismo, podemos definir o homeomorfismo $p_{iU_i} : U_i \to p_i(U_i)$ em que $p_{iU_i} = p_U|_{U_i}$. Temos então que (U_i, p_{iU_i}) é uma carta de (Ω_i, p_i) para cada $i \in I$. Como $f_i \in H(\Omega_i, F)$ para cada $i \in I$ temos que $f_i \circ p_i^{-1} \in H(U_i, F)$.

Como $p_U : U \to p(U)$ é um homeomorfismo e as componentes conexas de Ω são disjuntas, os conjuntos $p(U_i)$ são disjuntos. Seja $y \in p(U)$. Então existe um único

$i \in I$ tal que $y \in p(U_i)$. Como $f_i \in H(\Omega_i, F)$, dados $\xi \in E$ e $\psi \in E'$ a aplicação $\psi \circ f_i \circ p_i^{-1}(y + \lambda\xi)$ é holomorfa em alguma vizinhança de zero em $\mathbb{C}$. Logo, pelas definições de f e p_i obtemos que $\psi \circ f \circ p^{-1}(y + \lambda\xi)$ é holomorfa em alguma vizinhança de zero em $\mathbb{C}$. Segue que $f \circ p^{-1}$ é G-holomorfa, e consequentemente holomorfa. Donde concluímos que f é holomorfa.

Vamos provar agora que Ψ é um isomorfismo topológico.

Seja W uma vizinhança de zero em $\Pi_{i \in I}(H(\Omega_i, F), \tau_c)$. Podemos escrever $W = \Pi_{i \in I} W_i$ onde $W_i = \{f \in H(\Omega_i, F) : \sup_{x \in K_i} \alpha_i(f(x)) < \epsilon_i\}$ onde ϵ_i é um número real positivo, α_i é uma seminorma em F e $K_i \subset \Omega_i$ compacto para $i \in I_0 = \{1, \ldots, n\}$ e $W_i = H(\Omega_i, F)$ para $i \in I \setminus I_0$.

Consideremos o compacto $K = \cup_{i=1}^n K_i$, a seminorma α em F tal que $\alpha_i \leq \alpha$ para $i \in I_0$ e $\epsilon = \min_{i \in I_0} \epsilon_i$.

Considere a vizinhança de zero $U_{\alpha,\epsilon} = \{f \in H(\Omega, F); \sup_{x \in K} \alpha(f(x)) < \epsilon\}$. Vemos que, para cada $f \in U_{\alpha,\epsilon}$, vale $\sup_{x \in K_i} \alpha_i(f(x)) < \epsilon \leq \epsilon_i$ para cada $i \in I_0$. Logo $(f_i)_{i \in I} \in W$. Donde concluímos que Ψ é uma aplicação contínua.

Seja $V = \{f \in H(\Omega, F); \sup_{x \in K} \alpha(f(x)) < \epsilon\}$ com $K \subset \Omega$ compacto e $\epsilon > 0$ uma vizinhança de zero em $H(\Omega, F)$.

Como as componentes conexas são subconjuntos abertos e fechados em Ω, existem $i_1, \ldots, i_n \in I$ e subconjuntos compactos $K_{i_j} \subset \Omega_{i_j}$ para $j \in \{1, \ldots, n\}$ tais que $K = \cup_{j=1}^n K_{i_j}$.

Consideremos a vizinhança de zero $V' = \Pi_{j \in I} W_j$ em F onde

$$W_j = \{g_j \in H(\Omega_j, F); \sup_{x \in K_j} \alpha(g(x)) < \frac{\epsilon}{2}\}$$

para $j \in \{i_1, \ldots, i_n\}$ e $W_j = H(\Omega_j, F)$ para $i \in I \setminus \{i_1, \ldots, i_n\}$. Se $(f_i)_{i \in I} \subset V'$, então $\sup_{x \in K_j} \alpha(f(x)) < \frac{\epsilon}{2}$ para $j \in \{i_1, \ldots, i_n\}$. Segue que $f \in V$, e consequentemente Ψ tem inversa contínua. $\square$

Lema 4.6 *Seja (Ω, p) um domínio de Riemann sobre E tal que $\Omega = \cup_{i \in I} \Omega_i$ em que cada Ω_i é uma componente conexa de Ω. Se para cada espaço localmente convexo F,*

$f \in H(\Omega, F)$ e $i \in I$ existe uma sequência amplamente limitada $(f_n^i) \subset H(\Omega_i) \otimes F$ que converge a $f|_{\Omega_i}$ em $(H(\Omega_i, F), \tau_c)$, então existe uma rede amplamente limitada $(f_j)_{j\in J} \subset H(\Omega) \otimes F$ que converge a f em $(H(\Omega, F), \tau_c)$.

Demonstração:

Sejam $K \subset \Omega$ compacto e F um espaço localmente convexo. Na demonstração do Lema 4.5 observamos que as componentes conexas Ω_i são subconjuntos abertos de Ω. Então existem $i_1, \ldots, i_n \in I$ e subconjuntos $K_{i_1} \subset \Omega_{i_1}, \ldots, K_{i_n} \subset \Omega_{i_n}$ compactos tais que $K = \cup_{j=i_1}^{i_n} K_j$. Seja $f \in H(\Omega, F)$. Por hipótese, para cada $i \in I$ existe uma sequência amplamente limitada $(f_n^i) \subset H(\Omega_i) \otimes F$ que converge a $f|_{\Omega_i}$ em $(H(\Omega_i, F), \tau_c)$. Então dados $\epsilon > 0$ e uma seminorma α em F, existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha(f(x) - f_n^j(x)) < \epsilon$ para todos $n \geq n_0$ e $x \in K_j$ com $j \in I_0 = \{i_1, \ldots, i_n\}$.

Consideremos $f_n^K : \Omega \to F$ definida por

$$f_n^K(x) = \begin{cases} f_n^i(x) & \text{se } x \in \Omega_i \text{ para } i \in I_0 \\ 0 & \text{se } x \in \Omega_i \text{ para } i \notin I_0 \end{cases}$$

Obtemos que a sequência $(f_n^K) \subset H(\Omega) \otimes F$ e $\alpha(f(x) - f_n^K(x)) < \epsilon$ para todos $n \geq n_0$ e $x \in K$.

Sejam $K_1, K_2 \subset \Omega$ compactos e $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$. Consideraremos a seguinte relação de ordem: $(K_1, n_1) \leq (K_2, n_2) \Leftrightarrow K_1 \subseteq K_2$ e $n_1 \leq n_2$. Definamos o conjunto $I = \{(K, n) : K \in K(\Omega), n \in \mathbb{N}\}$. Dados $(K_1, n_1), (K_2, n_2) \in I$ vemos que $(K_1, n_1) \leq (K_3, n_3)$ e $(K_2, n_2) \leq (K_3, n_3)$ onde $K_3 = K_1 \cup K_2$ e $n_3 = \max\{n_1, n_2\}$, e portanto I é um conjunto dirigido.

Consideremos a rede $(f_n^K)_{(K,n)\in K(\Omega)\times\mathbb{N}} \subset H(\Omega) \otimes F$. Dados $K_0 \subset \Omega$ compacto, uma seminorma α em F e $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha(f(x) - f_n^{K_0}(x)) < \epsilon$ para todos $n \geq n_0$ e $x \in K_0$. Observemos que para cada $n \in \mathbb{N}$ fixo $f_n^K(x) = f_n^{K_0}(x)$ para cada $x \in K_0$ e $K \subset \Omega$ compacto tal que $K_0 \subseteq K$. Consequentemente $\alpha(f(x) - f_n^K(x)) < \epsilon$ para $(K_0, n_0) \leq (K, n)$ e $x \in K_0$. Logo a rede $(f_n^K)_{(K,n)\in K(\Omega)\times\mathbb{N}}$ converge a f em $(H(\Omega, F), \tau_c)$.

Seja $x \in \Omega$. Então existe $i_0 \in I$ tal que $x \in \Omega_{i_0}$. Como a sequência $(f_n^{i_0})$ é amplamente limitada, dada uma seminorma α em F existe uma vizinhança V_x de x contida em Ω_{i_0} e $c > 0$ tal que $\alpha(f_n^{i_0}(V_x)) < c$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Se $K \cap \Omega_{i_0} \neq \emptyset$, então $f_n^K(V_x) = f_n^{i_0}(V_x)$. Se $K \cap \Omega_{i_0} = \emptyset$ então $f_n^K(V_x) = 0$. Logo $\alpha(f_n^K(V_x)) < c$ para todos $K \subset \Omega$ compacto e $n \in \mathbb{N}$. Donde concluímos que a rede $(f_n^K)_{(K,n)\in K(\Omega)\times\mathbb{N}}$ é amplamente limitada.

□

Provaremos agora o Teorema 4.4.

Demonstração:

(a)

Suponhamos que (Ω, p) seja um domínio de Riemann pseudoconvexo sobre E. Podemos escrever $\Omega = \cup_{i\in I}\Omega_i$ em que cada Ω_i é uma componente conexa de Ω. Sejam F um espaço de Banach e $f \in H(\Omega, F)$. Como cada componente conexa de um domínio de Riemann pseudoconvexo é um domínio de Riemann pseudoconvexo e conexo sobre E temos, pelo Teorema 4.3 que para cada $i \in I$ existe uma sequência $(h_n^i) \subset H(\Omega_i, F)$ que converge a $f|_{\Omega_i}$ em $(H(\Omega_i, F), \tau_c)$. Pela Proposição 4.2 obtemos que a sequência (h_n^i) é localmente limitada.

Pelo Lema 4.6, existe uma rede localmente limitada $(f_i)_{i\in I} \subset H(\Omega, F)$ que converge a f em $(H(\Omega, F), \tau_c)$.

(b)

Pelo item (a), para cada espaço de Banach F e cada $f \in H(\Omega, F)$ existe uma rede localmente limitada $(f_i)_{i\in I} \subset H(\Omega) \otimes F$ que converge a $f \in (H(\Omega, F), \tau_c)$. Segue da Proposição 3.6 que $G(\Omega)$ tem a propriedade de aproximação.

(c)

Como $G_0(\Omega)$ é um subespaço denso em $G(\Omega)$, segue pelo Corolário 3.3 que $G_0(\Omega)$ tem a propriedade de aproximação.

(d)

Pela Observação 2.4 sabemos que $G(\Omega)$ é o completamento de $(H(\Omega), \tau_c)'_c$. Segue pela Proposição 1.28 que $(H(\Omega), \tau_c)'_c$ tem a propriedade de aproximação.

(e)

Como $(H(\Omega), \tau_c)'_c$ tem a propriedade de aproximação, segue pela Proposição 1.26 (b) que $(H(\Omega), \tau_c)$ tem a propriedade de aproximação. □

Teorema 4.7 *([5], Corolário 3.7) Seja E um espaço de Fréchet separável com a propriedade de aproximação limitada e seja (Ω, p) um domínio de Riemann conexo sobre E. Então:*

(a) Para cada espaço de Banach F e cada $f \in H(\Omega, F)$ existe uma sequência $(f_n) \subset H(\Omega) \otimes F$ que converge a f em $(H(\Omega, F), \tau_c)$.

(b) $(H(\Omega), \tau_c)$ tem a propriedade de aproximação.

O próximo teorema melhora o Teorema 4.7 de Dineen e Mujica.

Teorema 4.8 *Seja E um espaço de Fréchet separável com a propriedade de aproximação limitada e seja (Ω, p) um domínio de Riemann sobre E. Então:*

(a) Para cada espaço de Banach F e $f \in H(\Omega, F)$ existe uma rede localmente limitada $(f_i)_{i\in I} \subset H(\Omega) \otimes F$ que converge a f em $(H(\Omega, F), \tau_c)$.

(b) $G(\Omega)$ tem a propriedade de aproximação.

(c) $G_0(\Omega)$ tem a propriedade de aproximação.

(d) $(H(\Omega), \tau_c)'_c$ tem a propriedade de aproximação.

(e) $(H(\Omega), \tau_c)$ tem a propriedade de aproximação.

Demonstração: (a)

Podemos considerar $\Omega = \cup_{i\in I}\Omega_i$ em que cada Ω_i é uma componente conexa de Ω. Podemos ver que para cada $i \in I$ o par (Ω_i, p_i) é um domínio de Riemann conexo sobre E em que $p_i = p|_{\Omega_i}$. Pelo Teorema 4.7, para cada espaço de Banach F, $f \in H(\Omega, F)$ e $i \in I$ existe uma sequência localmente limitada $(h_n^i) \subset H(\Omega_i) \otimes F$ que converge a $f|_{\Omega_i}$ em $(H(\Omega_i, F), \tau_c)$. Segue pelo Lema 4.6 que existe uma rede localmente limitada $(h_j)_{j\in J} \subset H(\Omega) \otimes F$ que converge a f em $(H(\Omega, F), \tau_c)$.

(b)

Segue de (a) e da Proposição 3.6 que $G(\Omega)$ tem a propriedade de aproximação.

(c)

Por (b) $G(\Omega)$ tem a propriedade de aproximação, segue pela Proposição 3.3 que $G(\Omega_0)$ também tem a propriedade de aproximação.

(d)

Pelo item (b), sabemos que $G(\Omega)$ tem a propriedade de aproximação . Como E é um espaço de Fréchet temos pela Observação 2.4 que $G(\Omega)$ é o completamento de $(H(\Omega), \tau_c)'_c$. Segue pela Proposição 1.28 que o espaço $(H(\Omega), \tau_c)'_c$ também tem a propriedade de aproximação.

(e)

Como $(H(\Omega), \tau_c)'_c$ tem a propriedade de aproximação, segue pela Proposição 1.26 (b) que $(H(\Omega), \tau_c)$ tem a propriedade de aproximação.

□

Veremos agora que se E é Fréchet-Schwartz e $U \subset E$ é aberto, então $G(U)$ tem a propriedade de aproximação se, e somente se, $(H(U), \tau_\delta)$ tem a propriedade de aproximação.

Teorema 4.9 *([8], Corolário 2.3)*

Seja E um espaço de Fréchet-Schwartz e $U \subset E$ aberto. Então $G(U) = (H(U), \tau_\delta)'_b$, $(H(U), \tau_\delta) = G(U)'_b$ e $(H(U), \tau_\delta)$ é um espaço de Montel.

Proposição 4.10 *Sejam E um espaço de Fréchet-Schwartz e $U \subset E$ aberto. Então são equivalentes:*

a) $G(U)$ tem a propriedade de aproximação.

b) $(H(U), \tau_\delta)$ tem a propriedade de aproximação.

Demonstração:

Como E é um espaço de Fréchet-Schwartz, temos pelo Teorema 4.9 que $G(U) = (H(U), \tau_\delta)'_b$ e $(H(U), \tau_\delta)$ é um espaço de Montel. Consequentemente $G(U) = (H(U), \tau_\delta)'_b = (H(U), \tau_\delta)'_c$.

$(a) \Rightarrow (b)$

Então $(H(U), \tau_\delta)'_c$ tem a propriedade de aproximação. Segue pela Proposição 1.26 (b) que $(H(U), \tau_\delta)$ tem a propriedade de aproximação.

$(b) \Rightarrow (a)$

Como $(H(U), \tau_\delta)$ é um espaço tonelado, temos pela Proposição 1.26 (c) que $(H(U), \tau_\delta)'_c$ tem a propriedade de aproximação. Logo $G(U)$ tem a propriedade de aproximação. $\square$

Seja E um espaço de Banach. Denotaremos por $P_{wu}(^nE)$ o subespaço de todos os $P \in P(^nE)$ que são fracamente uniformemente contínuos sobre os conjuntos limitados de E, com a topologia induzida pelo espaço de Banach $P(^nE)$.

Em [6] Dineen e Mujica mostraram que se E é um espaço de Banach com uma base de Schauder contrátil, $P(^nE) = P_{wu}(^nE)$, e se $U \subset E$ é aberto e conexo, então $(H(U), \tau_\delta)$ tem a propriedade de aproximação.

No Próximo resultado daremos condições sobre um espaço de Fréchet-Schwartz para que $(H(U), \tau_\delta)$ e seu dual tenham a propriedade de aproximação.

Corolário 4.11 *Seja E um espaço de Fréchet-Schwartz com a propriedade de aproximação limitada e seja $U \subset E$ aberto. Então:*

(a) $(H(U), \tau_\delta)$ tem a propriedade de aproximação.

(b) $(H(U), \tau_\delta)'_c$ tem a propriedade de aproximação.

Demonstração:

(a)

Seja $U \subset E$ aberto. Considere o domínio de Riemann (U, i) sobre E onde i é a inclusão. Sabemos pelo Teorema 4.8 que $G(U)$ tem a propriedade de aproximação. Pela Proposição 4.10 segue que $(H(U), \tau_\delta)$ tem a propriedade de aproximação.

(b)

Como $(H(U), \tau_\delta)$ é um espaço tonelado com a propriedade de aproximação, segue pela Proposição 1.26 (c) que $(H(U), \tau_\delta)'_c$ também tem a propriedade de aproximação. $\square$

4.2 A propriedade de aproximação limitada.

Nesta seção daremos condições para que os espaços de funções holomorfas em espaços de Fréchet, e seus preduais, tenham a propriedade de aproximação limitada.

Teorema 4.12 *([3], Teorema 3.2)*

Seja E um espaço de Fréchet. Consideremos as seguintes condições:

(a) $(H(U), \tau_c)$ tem a propriedade de aproximação limitada, para algum (para todo) aberto equilibrado $U \subset E$.

(b) $(H(K), \tau_c)$ tem a propriedade de aproximação limitada, para algum (para todo) compacto equilibrado $K \subset E$.

(c) $(P(^nE), \tau_c)$ tem a propriedade de aproximação limitada, para todo $n \in \mathbb{N}$.

(d) $Q(^nE)$ tem a propriedade de aproximação limitada, para todo $n \in \mathbb{N}$.

(e) $G(K)$ tem a propriedade de aproximação limitada, para algum (para todo) compacto equilibrado $K \subset E$.

(f) $G(U)$ tem a propriedade de aproximação limitada, para algum (para todo) aberto equilibrado $U \subset E$.

(g) E tem a propriedade de aproximação limitada.

(h) Para cada espaço localmente convexo F, $n \in \mathbb{N}$ e $P \in P(^nE, F)$ existe uma rede equicontínua $(P_i) \subset P(^nE) \otimes F$ que converge a P em $(P(^nE, F), \tau_c)$.

Então: $(a) \Leftrightarrow (b) \Leftrightarrow (c) \Rightarrow (d) \Leftrightarrow (e) \Leftrightarrow (f) \Rightarrow (g) \Leftrightarrow (h)$. Se $\tau_c = \tau_\omega$ em $H(E)$, então todas as condições são equivalentes.

O Próximo teorema melhora o Teorema 4.12 de Çaliskan no seguinte sentido:

Teorema 4.13 *Seja E um espaço de Fréchet. Considere as condições:*

(a) $(H(U), \tau_c)$ *tem a propriedade de aproximação limitada, para algum (para todo) aberto equilibrado* $U \subset E$.

(b) $(H(K), \tau_c)$ *tem a propriedade de aproximação limitada, para algum (para todo) compacto equilibrado* $K \subset E$.

(c) $(P(^nE), \tau_c)$ *tem a propriedade de aproximação limitada, para todo* $n \in \mathbb{N}$.

(d) $Q(^nE)$ *tem a propriedade de aproximação limitada, para todo* $n \in \mathbb{N}$.

(e) $G(K)$ *tem a propriedade de aproximação limitada, para algum (para todo) compacto equilibrado* $K \subset E$.

(f) $G(U)$ *tem a propriedade de aproximação limitada, para algum (para todo) aberto equilibrado* $U \subset E$.

(g) E *tem a propriedade de aproximação limitada.*

(h) Para cada espaço localmente convexo F, $n \in \mathbb{N}$ *e* $P \in P(^nE, F)$ *existe uma sequência amplamente limitada* $(P_k) \subset P(^nE) \otimes F$ *que converge a* P *em* $(P(^nE, F), \tau_c)$.

(i) Para cada espaço localmente convexo completo F, $U \subset E$ *equilibrado e* $f \in H(U, F)$ *existe uma rede amplamente limitada* $(f_i)_{i \in I} \subset H(U)' \otimes F$ *que converge a* f *em* $(H(U, F), \tau_c)$.

Então $(a) \Leftrightarrow (b) \Leftrightarrow (c) \Rightarrow (d) \Leftrightarrow (e) \Leftrightarrow (f) \Rightarrow (g)$.

Se um adição E *é separável, então* $(a) \Leftrightarrow (b) \Leftrightarrow (c) \Rightarrow (d) \Leftrightarrow (e) \Leftrightarrow (f) \Leftrightarrow (g) \Leftrightarrow (h) \Leftrightarrow (i)$.

Demonstração: Já sabemos pelo Teorema 4.12 que $(a) \Leftrightarrow (b) \Leftrightarrow (c) \Rightarrow (d) \Leftrightarrow (e) \Leftrightarrow (f) \Rightarrow (g)$.

Vamos supor agora que E é um espaço separável.

$(g) \Rightarrow (h)$

Suponha que E tenha a propriedade de aproximação limitada. Por resultado de Pelczynski ([21], Teorema 1), existem espaços de Fréchet M e N, tendo M uma base de Schauder, tais que $M = E \oplus N$. Considere $\pi : M \to E$ a projeção canônica e a aplicação linear $G : E \to M$ tal que $G(x) = (x, 0)$.

Sejam F um espaço localmente convexo e $P \in P(^nE, F)$. Como $P \circ \pi \in P(^nM, F)$ e toda base de Schauder em um espaço de Fréchet é equicontínua, temos pelo Teorema 3.19 que existe uma sequência amplamente limitada $(P_m) \subset P(^nM) \otimes F$ que converge a $P \circ \pi$ em $(P(^nM, F), \tau_c)$. Segue que a sequência $(P_m \circ G)$ converge a $P \circ \pi \circ G = P$ em $(P(^nE, F), \tau_c)$. Como $(P_m) \subset P(^nM) \otimes F$, temos que $(P_m \circ G) \subset P(^nE) \otimes F$. Pela Proposição 4.1 temos que a sequência $(P_m \circ G)$ é amplamente limitada.

$(h) \Rightarrow (d)$

Segue de (h) e da Proposição 3.15 que $Q(^nE)$ tem a propriedade de aproximação limitada.

$(f) \Leftrightarrow (i)$

Pelo Teorema 3.13 ocorre tal equivalência.

O que completa a demonstração.

□

Exemplo 4.14 *([3], Teorema 3.3)*

Seja E um espaço de Fréchet-Schwartz e seja $U \subset E$ um aberto equilibrado. Então E tem a propriedade de aproximação limitada se, e somente se, $(H(U), \tau_c)$ tem a propriedade de aproximação limitada se, e somente se, $G(U)$ tem a propriedade de aproximação limitada.

Proposição 4.15 *Se E é um espaço de Fréchet-Schwartz e $U \subset E$ aberto, então são equivalentes:*

a) $G(U)$ tem a propriedade de aproximação limitada.

b) $(H(U), \tau_\delta)$ tem a propriedade de aproximação limitada.

Demonstração:

Como E é um espaço Fréchet-Schwartz, temos pelo Teorema 4.9 que $G(U) = (H(U), \tau_\delta)'_b$ e $(H(U), \tau_\delta)$ é um espaço de Montel, consequentemente $G(U) = (H(U), \tau_\delta)'_b = (H(U), \tau_\delta)'_c$. Segue pelo Corolário 1.34 que $(H(U), \tau_\delta)$ tem a propriedade de aproximação limitada se, e somente se, $G(U)$ tem a propriedade de aproximação limitada.

□

Capítulo 5

Espaços de funções holomorfas em espaços (DFC)

5.1 A propriedade de aproximação

Nesta seção daremos condições para que os espaços de funções holomorfas em espaços (DFC), e seus preduais, tenham a propriedade de aproximação.

Lema 5.1 *([5], Lema 4.1) Seja E um espaço (DFC) e seja (Ω, p) um domínio de Riemann pseudoconvexo e conexo sobre E. Então:*

(a) Ω é hemicompacto.

(b) Existe $\alpha \in cs(E)$ tal que $d_\Omega^\alpha(x) > 0$ para todo $x \in \Omega$, existe um domínio de Riemann $(\Omega_\alpha, p_\alpha)$ conexo e pseudoconvexo sobre E_α e existe um π_α-morfismo $\pi_\alpha^* : \Omega \to \Omega_\alpha$ em que π_α é a aplicação linear de E no espaço quociente $E_\alpha = (E, \alpha)/\alpha^{-1}(0)$ munido da norma $\overline{\alpha}(\overline{x}) = \inf\{\alpha(y); y \in \overline{x}\}$.

(c) Para cada $f \in H(\Omega, F)$, onde F é um espaço de Banach, podemos escolher uma seminorma α e um domínio $\Omega_\alpha$em (b) de maneira que $f = f_\alpha \circ \pi_\alpha^*$ para toda $f_\alpha \in H(\Omega_\alpha, F)$.

Se (Ω, p) é um domínio de Riemann conexo e pseudoconvexo sobre um espaço (DFC) E, então $A(\Omega)$ denota a família de todas as seminormas $\alpha \in cs(E)$ que verificam o item (b) do Lema 5.1.

Teorema 5.2 *([5], Teorema 4.2) Seja E um espaço (DFC) com a propriedade de aproximação, e seja (Ω, p) um domínio de Riemann pseudoconvexo e conexo sobre E. Então:*

(a) E é o limite projetivo de uma família de espaços normados $(G_i)_{i\in I}$, onde cada um tem uma base de Schauder epuicontínua. Além disso, para cada $\alpha \in cs(E)$ existem $i \in I$ e $C_i \in L(G_i, E_\alpha)$ tais que $C_i \circ \sigma_i = \pi_\alpha$ onde $\sigma_i \in L(E, G_i)$ denota a aplicação canônica.

(b) Para cada $\alpha \in A(\Omega)$, existe um domínio de Riemann pseudoconvexo (Ω_i, p_i) sobre G_i, existe um σ_i-morfismo $\sigma_i^* : \Omega \to \Omega_i$, e existe um C_i-morfismo $C_i^* : \Omega_i \to \Omega_\alpha$ tal que $C_i^* \circ \sigma_i^* = \pi_\alpha^*$.

(c) Para cada $f \in H(\Omega, F)$, onde F é um espaço de Banach, podemos escolher um domínio de Riemann (Ω_i, p_i) em (b) tal que $f = f_i \circ \sigma_i^*$ para $f \in H(\Omega_i, F)$.

Definição 5.3 *Sejam E e F espaços localmente convexos, sejam (Ω, p) e $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{p})$ domínios de Riemann sobre E e seja $j : (\Omega, p) \to (\widetilde{\Omega}, \widetilde{p})$ um morfismo. Para cada $f \in H(\Omega, F)$ dizemos que $\widetilde{f} \in H(\widetilde{\Omega}, F)$ é uma extensão de f se $\widetilde{f} \circ j = f$.*

Definição 5.4 *Seja (Ω, p) um domínio de Riemann sobre um espaço localmente convexo quase completo E. O τ_c-espectro de $H(\Omega)$, denotado por $S(H(\Omega), \tau_c)$, é o conjunto de todos os funcionais lineares multiplicativos e τ_c-contínuos sobre $H(\Omega)$. Seja $\epsilon_\Omega : \Omega \to S(H(\Omega), \tau_c)$ a aplicação avaliação dada por $\epsilon_\Omega(x)(f) = f(x)$ para toda $f \in H(\Omega)$ e cada $x \in \Omega$. Para cada $f \in H(\Omega)$ definimos $\widehat{f} : S(H(\Omega), \tau_c) \to \mathbb{C}$ por $\widehat{f}(T) = T(f)$ para cada $T \in S(H(\Omega), \tau_c)$.*

Observação 5.5 *([5]) Considerando (Ω, p) um domínio de Riemann sobre um espaço localmente convexo quase completo E, temos pelo Teorema de Mackey-Arens que existe uma aplicação $\pi_\Omega : S(H(\Omega), \tau_c) \to E$ tal que $\phi \circ \pi_\Omega(T) = T(\phi \circ p)$ para todos $T \in S(H(\Omega), \tau_c)$ e $\phi \in E'$.*

Teorema 5.6 *([5], Teorema 3.6) Seja (Ω, p) um domínio de Riemann conexo sobre um espaço localmente convexo quase completo E. Então existe uma topologia de Hausdorff em $S(H(\Omega), \tau_c)$ com as seguintes propriedades:*

(a) $(S(H(\Omega), \tau_c), \pi_\Omega)$ é um domínio de Riemann pseudoconvexo sobre E.

(b) A aplicação $\epsilon_\Omega : \Omega \to S(H(\Omega), \tau_c)$ é um morfismo.

(c) Se $\widehat{\Omega}$ denota a componente conexa de $S(H(\Omega), \tau_c)$que contem $\epsilon_\Omega(\Omega)$, então $\widehat{f} \in H(\widehat{\Omega})$ para toda $f \in H(\Omega)$, e a aplicação extensão

$$f \in (H(\Omega), \tau_c) \to \widehat{f} \in (H(\widehat{\Omega}), \tau_c)$$

é um isomorfismo topológico.

(d) Se F é um espaço localmente convexo quase completo, então cada $f \in H(\Omega, F)$ admite uma extensão $\widehat{f} \in H(\widehat{\Omega}, F)$, e a aplicação extensão

$$f \in (H(\Omega, F), \tau_c) \to \widehat{f} \in (H(\widehat{\Omega}, F), \tau_c)$$

é um isomorfismo topológico.

Teorema 5.7 *([5], Corolário 4.4)*

Seja E um espaço (DFC). São equivalentes:

(a) E tem a propriedade de aproximação.

(b) $(H(\Omega), \tau_c)$ tem a propriedade de aproximação, para todo domínio de Riemann conexo (Ω, p) sobre E.

O próximo resultado melhora o Teorema 5.7 de Dineen e Mujica.

Teorema 5.8 *Seja E um espaço (DFC). São equivalentes:*

(a) E tem a propriedade de aproximação.

(b) Para cada espaço de Banach F, para todo domínio de Riemann (Ω, p) sobre E e toda $f \in (H(\Omega), \tau_c)$ existe uma rede localmente limitada $(f_j)_{j \in J} \subset H(\Omega) \otimes F$ que converge a f em $(H(\Omega, F), \tau_c)$.

(c) $G(\Omega)$ tem a propriedade de aproximação, para todo domínio de Riemann (Ω, p) sobre E.

(d) $G_0(\Omega)$ tem a propriedade de aproximação, para todo domínio de Riemann (Ω, p) sobre E.

(e) O completamento de $(H(\Omega), \tau_c)'_c$ tem a propriedade de aproximação, para todo domínio de Riemann (Ω, p) sobre E.

(f) $(H(\Omega), \tau_c)'_c$ tem a propriedade de aproximação, para todo domínio de Riemann (Ω, p) sobre E.

(g) $(H(\Omega), \tau_c)$ tem a propriedade de aproximação, para todo domínio de Riemann (Ω, p) sobre E.

(h) $(P(^nE), \tau_c)$ tem a propriedade de aproximação, para todo $n \in \mathbb{N}$.

(i) E'_c tem a propriedade de aproximação.

(j) Para cada espaço de Banach F, $n \in \mathbb{N}$ e $P \in P(^nE, F)$ existe uma sequência localmente limitada $(P_n) \subset P(^nE) \otimes F$ que converge a P em $(P(^nE, F), \tau_c)$.

(l) O completamento de $(P(^nE), \tau_c)'_c$ tem a propriedade de aproximação, para todo $n \in \mathbb{N}$.

(m) $(P(^nE), \tau_c)'_c$ tem a propriedade de aproximação, para todo $n \in \mathbb{N}$.

(n) $Q(^nE)$ tem a propriedade de aproximação, para todo $n \in \mathbb{N}$.

(o) $G(K)$tem a propriedade de aproximação, para um (para todo) $K \subset E$ compacto e equilibrado.

Demonstração: $(a) \Rightarrow (b)$

Dividiremos em dois casos a demonstração.

(1)

Primeiro suponhamos que (Ω, p) seja um domínio de Riemann conexo sobre E.

Seja F um espaço de Banach. Pelo Teorema 5.6 o τ_c-espectro $H(\Omega)$, denotado por $S(H(\Omega), \tau_c)$, é um domínio de Riemann pseudoconvexo sobre E, e a aplicação $S : (H(\Omega, F), \tau_c) \to (H(\widehat{\Omega}, F), \tau_c)$ dada por $S(f) = \widehat{f}$ é um isomorfismo topológico, onde $\widehat{\Omega}$ é a componente conexa de $S(H(\Omega), \tau_c)$ que contem $\epsilon_\Omega(\Omega)$. Como $\widehat{\Omega}$ é a componente conexa de um domínio de Riemann pseudoconvexo sobre E, $\widehat{\Omega}$ também é um domínio de Riemann pseudoconvexo sobre E. Se $f \in H(\Omega, F)$, então $S(f) = \widehat{f} \in$

$H(\widehat{\Omega}, F)$.

Pelo Teorema 5.2 E é o limite projetivo de uma família de espaços normados $(G_i)_{i\in I}$, onde cada um tem uma base de Schauder equicontínua. Além disso, existem $i \in I$, um domínio de Riemann pseudoconvexo (Ω_i, p_i) sobre um espaço normado G_i e um σ_i-morfismo $\sigma_i^* : \widehat{\Omega} \to \Omega_i$, em que $\sigma_i \in L(E, G_i)$ é a aplicação canônica, tal que $\widehat{f} = f_i \circ \sigma_i^*$ onde $f_i \in H(\Omega_i, F)$. Pelo Teorema 4.3 e pela Proposição 4.1, existe uma sequência localmente limitada $(h_n) \subset H(\Omega_i) \otimes F$ que converge a f_i em $(H(\Omega_i, F), \tau_c)$. Como σ_i^* é contínua, segue que a sequência $(h_n \circ \sigma_i^*) \subset H(\widehat{\Omega}) \otimes F$ é localmente limitada e converge a $\widehat{f} = f_i \circ \sigma_i^*$ em $(H(\widehat{\Omega}, F), \tau_c)$.

Podemos ver que $\widehat{f} \circ \epsilon_x = \epsilon_x(f) = f(x)$ para cada $x \in \Omega$, donde concluímos que $\widehat{f} \circ \epsilon_\Omega = f$. Como S é um isomorfismo topológico, a sequência

$$(h_n \circ \sigma_i^* \circ \epsilon_\Omega) = (S^{-1}(h_n \circ \sigma_i^*)) \subset H(\Omega) \otimes F$$

converge a f em $(H(\Omega, F), \tau_c)$. Pelo fato da sequência $(h_n \circ \sigma_i^*)$ ser localmente limitada e a aplicação ϵ_Ω ser contínua, a sequência $(S^{-1}(h_n \circ \sigma_i^*))$ é localmente limitada.

(2)

Suponhamos agora que (Ω, p) seja um domínio de Riemann sobre E. Podemos escrever $\Omega = \cup_{i\in I}\Omega_i$ onde cada Ω_i é uma componente conexa de Ω. Sejam F um espaço de Banach e $f \in H(\Omega, F)$. Pela parte (1), para cada $i \in I$ existe uma sequência localmente limitada $(f_n^i) \subset H(\Omega_i, F)$ que converge a $f|_{\Omega_i}$ em $(H(\Omega_i, F), \tau_c)$.

Segue pelo Lema 4.6 que existe uma rede localmente limitada $(f_j)_{j\in J} \subset H(\Omega) \otimes F$ que converge a f em $(H(\Omega, F), \tau_c)$.

$(b) \Rightarrow (c)$

Seja (Ω, p) um domínio de Riemann sobre E.

Como para cada espaço de Banach F e $f \in H(\Omega, F)$ existe uma rede localmente limitada $(f_j)_{j\in J} \subset H(\Omega) \otimes F$ que converge a f em $(H(\Omega, F), \tau_c)$, pela Proposição 3.6 $G(\Omega)$ tem a propriedade de aproximação.

$(c) \Rightarrow (d)$

Seja (Ω, p) um domínio de Riemann sobre E.

Pela Proposição 3.3, se $G(\Omega)$ tem a propriedade de aproximação então $G_0(\Omega)$ tem a propriedade de aproximação.

$(d) \Rightarrow (a)$

Seja U um subconjunto aberto de E. Consideremos $\xi : U \to E$ a inclusão de U em E. Temos que (U, ξ) é um domínio de Riemann sobre E. Como $G_0(U)$ tem a propriedade de aproximação, então pelo Corolário 3.2 E tem a propriedade de aproximação.

$(b) \Rightarrow (e)$

Seja (Ω, p) um domínio de Riemann sobre E. Pelo item (b) e pela Proposição 3.8 o completamento de $(H(\Omega), \tau_c)'_c$ tem a propriedade de aproximação.

$(e) \Rightarrow (f)$

Como o completamento do espaço $(H(\Omega), \tau_c)'_c$ tem a propriedade de aproximação pelo item (e), temos pela Proposição 1.28 que $(H(\Omega), \tau_c)'_c$ também tem a propriedade de aproximação.

$(f) \Rightarrow (g)$

Seja (Ω, p) um domínio de Riemann sobre E. Pela Proposição 1.26 (b) temos que $(H(\Omega), \tau_c)$ também tem a propriedade de aproximação.

$(g) \Rightarrow (h)$

Seja $U \subset E$ um subconjunto aberto. Consideremos $\xi : U \to E$ a inclusão de U em E. Temos que (U, ξ) é um domínio de Riemann sobre E. Suponha que $(H(U), \tau_c)$ tenha a propriedade de aproximação. Como $(P(^nE), \tau_c)$ é um subespaço complementado de $(H(U), \tau_c)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, temos pela Proposição 1.26 (a) que $(P(^nE), \tau_c)$ tem a propriedade de aproximação para cada $n \in \mathbb{N}$.

$(h) \Rightarrow (i)$

Suponha que $(P(^nE), \tau_c)$ tenha a propriedade de aproximação para cada $n \in \mathbb{N}$

Como para $n = 1$ temos $(P(^1E), \tau_c) = E'_c$, segue que E'_c tem a propriedade de aproximação.

$(i) \Rightarrow (a)$

Suponha que E'_c tenha a propriedade de aproximação. Segue da Proposição 1.26 (b) que E tem a propriedade de aproximação.

$(a) \Rightarrow (j)$

Sejam F um espaço de Banach e $P \in P(^nE, F)$. Como P é contínuo existem uma seminorma α e $M > 0$ tais que $||P||_{B_\alpha(1)} = M$. Pela demonstração do Lema da Fatoração ([4], p. 16, Lema 1.13) existe $\widetilde{P} \in P(^nE_\alpha, F)$ tal que $\widetilde{P} \circ \pi_\alpha = P$.

Pelo Teorema 5.2 existem um espaço normado G_i com base de Schauder equicontínua e $C_i \in L(G_i, E_\alpha)$ tais que $C_i \circ \sigma_i = \pi_\alpha$, onde $\sigma_i \in L(E, G_i)$ denota a aplicação canônica.

Pelo Teorema 3.19, para cada espaço de Banach F e $\widetilde{P} \circ C_i \in P(^nG_i, F)$ existe uma sequência localmente limitada $(P_m) \subset P(^nG_i) \otimes F$ que converge a $\widetilde{P} \circ C_i$ em $(P(^nG_i, F), \tau_c)$. Como $\sigma_i \in L(E, G_i)$, temos que $(P_m \circ \sigma_i) \subset P(^nE) \otimes F$ e $(P_m \circ \sigma)$ converge a $\widetilde{P} \circ C_i \circ \sigma_i = \widetilde{P} \circ \pi_\alpha = P$ em $(P(^nE, F), \tau_c)$. Como a sequência (P_m) é localmente limitada e σ_i é uma aplicação linear contínua, obtemos que a sequência $(P_m \circ \sigma_i)$ também é localmente limitada.

$(j) \Rightarrow (l)$

Temos pela Proposição 3.10 que o completamento de $(P(^nE), \tau_c)'_c$ tem a propriedade de aproximação.

$(l) \Rightarrow (m)$

Pela Proposição 1.28 $(P(^nE), \tau_c)'_c$ também tem a propriedade de aproximação.

$(m) \Rightarrow (h)$

Como $(P(^nE), \tau_c)'_c$ tem a propriedade de aproximação, temos pela Proposição 1.26 (b) que $(P(^nE), \tau_c)$ tem a propriedade de aproximação.

$(j) \Rightarrow (n)$

Seja $n \in \mathbb{N}$. Temos pela Proposição 3.9 que $Q(^nE)$ tem a propriedade de aproximação.

$(n) \Leftrightarrow (o)$

Pelo Teorema 3.11, temos que $Q(^nE)$ tem a propriedade de aproximação para todo $n \in \mathbb{N}$ se, e somente se, $G(K)$ tem a propriedade de aproximação para algum (para todo) $K \subset E$ compacto e equilibrado.

$(o) \Rightarrow (a)$

Como $G(K)$ tem a propriedade de aproximação para algum (para todo) $K \subset E$ compacto e equilibrado, segue da Proposição 3.12 que E tem a propriedade de aproximação. $\square$

Bibliografia

[1] R. M. Aron e M. Schottenloher, Compact holomorphic mappings on Banach spaces and the approximation property, J. Funct. Anal. 21 (1976), 7-30.

[2] C. Boyd, Preduals of the Space of Holomorphic Functions on a Fréchet Space, Ph.D. Thesis, University College, Dublin (1992).

[3] E. Çaliskan, The bounded approximation property for spaces of holomorphic mappings on infinite dimensional spaces. Math. Nachr. 279 (2006), 705-715.

[4] S. Dineen, Complex Analysis on Infinite Dimensional Spaces, Springer Monographs in Mathematics, Springer, Berlin, 1999.

[5] S. Dineen e J. Mujica, The approximation property for spaces of holomorphic functions on infinite dimensional spaces I, J. Approx. Theory 126 (2004), 141-156.

[6] S. Dineen e J. Mujica, The approximation property for spaces of holomorphic functions on infinite dimensional spaces. II. J. Funct. Anal. 259 (2010), 545-560.

[7] P. Enflo, A counterexample to the approximation problem in Banach spaces. Acta. Math. 130 (1973), 309-317 .

[8] D. García e J. Mujica, Quasi-normable preduals of spaces of holomorphic functions. J. Math. Anal. Appl. 208 (1997), 171-180.

[9] A. Grothendieck, Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires, Mem. Amer. Math. Soc. 16 (1955).

[10] A. Grothendieck, Sur les espaçes (F) et (DF), Summa Brasil. Math. 3 (1954), 57-122.

[11] J. Horváth, Topological Vector Space and Distributions, vol I, Addison-Wesley, Reading, Mass, 1966.

[12] H. Jarchow, Locally Convex Spaces, B.G. Teubner, Stuttgart, 1981.

[13] G. Köthe, Topological Vector Spaces I, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg, 1969.

[14] P. Mazet, Analytic Sets in Locally Convex Spaces, North-Holland Math. Stud., 89, North-Holland, Amsterdam, 1984.

[15] J. Mujica, Gérmenes Holomorfos y Funciones Holomorfas em Espacios de Fréchet, Publicaciones del Departamento de Teoria de Funciones, Universidade de Santiago de Compostela, 1, 1978.

[16] J. Mujica, Domains of holomorphy in (DFC)-spaces, in: S. Machado (Ed.), Functional Analysis, Holomorphy and Approximation Theory, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 843, Springer, Berlin, (1981), pp. 500-533. (1985), 107-134.

[17] J. Mujica, Complex Analysis in Banach Spaces, North-Holland Math. Stud., 120, North-Holland, Amsterdam, 1986.

[18] J. Mujica e L. Nachbin, Linearization of holomorphic mappings on locally convex spaces. J. Math. Pures Appl. (9) 71 (1992), 543-560.

[19] J. Mujica, Spaces of holomorphic functions and the approximation property, lecture notes, Universidad Complutense de Madrid, 2009.

[20] L. Nachbin, A glimpse at infinite dimensional holomorphy, in: Proceedings on Infinite Dimensional Holomorphy, Lecture Notes in Math. 364, Springer, Berlin, 1974, pp. 69-79.

[21] A. Pelczynski, Any separable Banach space with the bounded approximation property is a complemented subspace of a Banach space with a basis, Studia Math. 40 (1971), 239-243.

[22] M. Schottenloher, ϵ-product and continuation of analytic mappings, in: Analyse Fonctionelle et Applications, Actualités Sci. Indust. Vol. 1367, Hermann, Paris, 1975, pp. 261-270.

[23] L. Schwartz, Produits tensoriels topologiques d'espaces vectoriels topologiques. Espaces vectoriels topologiques nucléaires. Applications, Séminaire Schwartz 1953/1954.

[24] L. Schwartz, Théorie des distributions à valeurs vectoriels I, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 7 (1957), 1-141.

[25] S. Willard, General Topology, Addison-Wesley, 1970.