

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Dissertação de Mestrado

Famílias Genéricas a 1-parâmetro de Campos Vetoriais Reversíveis

Autor: Maurício Firmino Silva Lima

Orientador: Prof. Dr. Marco Antonio Teixeira

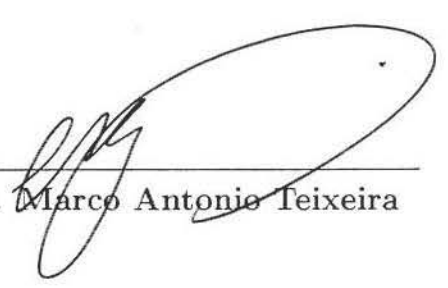
11 de março de 2002

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

Famílias Genéricas a 1-parâmetro de Campos Vetoriais Reversíveis

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por **Maurício Firmino Silva Lima** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 11 de março de 2002.



Prof. Dr. Marco Antonio Teixeira

Banca examinadora:

Prof. Dr. Marco Antonio Teixeira-
IMECC/UNICAMP.

Prof. Dr. Alberto Vazquez Saa-
IMECC/UNICAMP.

Prof. Dr. Daniel Cantergiani Panazzolo-
IME/USP.

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica, UNICAMP como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE

0022-2360

UNIDADE 30
Nº CHAMADA UNICAMP
L628f
V _____ EX _____
TOMBO BC/ 49123
PROC 16-837100
C _____ D~~X~~ _____
PREÇO R\$ 11,00
DATA _____
Nº CPD _____

CMQ0167684-7

BIB ID 240589

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Lima, Maurício Firmino Silva

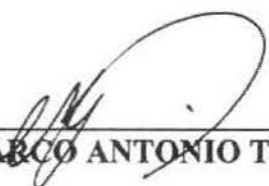
L628f Familias genéricas a 1-parâmetro de campos vetoriais reversíveis /
Mauricio Firmino Silva Lima -- Campinas, [S.P. :s.n.]. 2002.

Orientador : Marco Antonio Teixeira

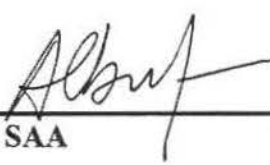
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas,
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Campos vetoriais. 2. Singularidades (Matemática). 3. Sistemas
dinâmicos. I. Teixeira, Marco Antonio. II. Universidade Estadual de
Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação
Científica. III. Título.

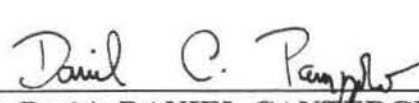
Dissertação de Mestrado defendida em 11 de março de 2002 e aprovada pela Banca
Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof (a). Dr (a). MARCO ANTONIO TEIXEIRA



Prof (a). Dr (a). ALBERTO VAZQUEZ SAA



Prof (a). Dr (a). DANIEL CANTERGIANI PANAZZOLO

Agradecimentos

A Deus por mais um sonho que se realiza.

À minha família pelo incentivo e por acreditarem em mim, em especial aos meus pais Raimundo e Lizete.

Ao prof. Dr. Marco Antonio Teixeira pelos dois anos de orientação, por estar sempre a disposição quando preciso, pela paciência e confiança.

Aos professores do IMECC/UNICAMP por colaborarem em minha formação.

Aos funcionários do IMECC/UNICAMP em especial a Cidinha, Edinaldo e Tânia.

À turma do programa de Pós-graduação pela amizade e companheirismo.

Aos precursores de minha formação acadêmica: os professores do Departamento de Matemática da UFV em especial aos professores Olímpio Hiroshi pelo incentivo e Paulo Tadeu pelos valiosos anos de orientação em iniciação científica.

À turma de matemática da UFV/96 sem dúvida grandes amigos para toda a vida.

À FAPESP pelo apoio financeiro, sem o qual este trabalho não seria possível.

Conteúdo

Agradecimentos	i
Resumo	iv
Abstract	v
Introdução	vi
1 Simetrias	1
1.1 Simetria e Anti-simetria em Sistemas Dinâmicos	1
1.2 Órbitas Simétricas	6
1.3 Órbitas Homoclínicas Simétricas	11
2 Formas Normais C^∞ de Campos Vetoriais Locais	14
2.1 Introdução	14
2.2 Campos Vetoriais na Reta	17
2.3 Aplicação Formal e Campos Vetoriais	20
2.4 Linearização	23
2.5 Forma Normal Ressonante	26
2.6 Equação da forma normal. Teorema principal	42
2.7 ω -definição de Campos Vetoriais Locais	46
3 Órbitas Homoclínicas em Sistemas Reversíveis	49
3.1 Uma equação de ordem quatro canônica; bifurcação local.	50
3.1.1 A equação	50
3.1.2 Linearização e Formas Normais	50
3.1.3 Região 1 - O Caso Sela-Foco:	62

3.1.4	Região 2 - O Caso Sela:	79
3.1.5	Região 3 - O Caso Sela-Centro:	87

Bibliografia	102
--------------	-----

Índice Alfabético	105
-------------------	-----

Resumo

Neste trabalho é desenvolvido um estudo sobre Sistemas Dinâmicos Reversíveis em $\mathbb{R}^4$.

O objetivo deste trabalho é analisar as propriedades de tais sistemas e classificar as singularidades simétricas de campos reversíveis através de sua parte linear utilizando formas normais convenientes. Além disso, centramos atenção ao estudo de famílias a 1-parâmetro de campos reversíveis, dando ênfase à existência de órbitas homoclínicas.

As formas normais utilizadas serão importantes na última parte do trabalho, onde dedicamos atenção especial à procura de órbitas homoclínicas para os sistemas acima citados, além da persistência dessas órbitas em sistemas perturbados. Além disso, discutimos a consequência dinâmica que a presença de certas órbitas homoclínicas causam ao fluxo de sistemas cuja linearização pertencem às referidas regiões.

Abstract

In this work a geometric approach of Reversible Dynamical Systems is done.

Our main purpose is to classify the symmetric properties of Reversible vector fields by means of the exhibition of efficient normal forms. Moreover, a study of occurrence of homoclinic orbits is also performed.

Introdução

Os Sistemas Dinâmicos Reversíveis constituem uma área emergente na física-matemática e tem sido alvo de estudo, nas últimas décadas, por inúmeros matemáticos e físicos. Tais sistemas são caracterizados por possuírem uma simetria reversa, isto é, se $X(x)$ é um campo vetorial definido sobre uma variedade n -dimensional M então X é reversível se existe uma aplicação $R : M \rightarrow M$ que satisfaz:

$$dR_x X(x) = -X(Rx)$$

Nos casos que trataremos aqui iremos supor que R é uma involução, ou seja, $R^2 = Id$.

O estudo de tais sistemas é de grande importância devido ao seu aparecimento em problemas práticos como por exemplo, aqueles que possuem simetrias espaciais, ou ainda, em problemas que são reversíveis em relação ao tempo como é o caso da oscilação do pêndulo simples sem atrito. Em [20] encontramos um número enorme de exemplos de sistemas reversíveis. Também em [16] encontramos uma resenha com uma abordagem de resultados recentes sobre Sistemas Reversíveis e uma farta bibliografia.

O objetivo principal deste trabalho é classificar as singularidades simétricas de Campos Reversíveis em $\mathbb{R}^4$ através de sua parte linear onde utilizamos uma forma normal apropriada. Além disso, estudamos famílias a 1-parâmetro X_λ de campos reversíveis dando ênfase a existência de órbitas homocínicas.

Este trabalho está distribuído da seguinte forma: no Capítulo 1 definimos Sistemas Reversíveis e Equivariantes e destacamos algumas propriedades importantes do fluxo de tais sistemas.

No Capítulo 2 obtemos formas normais eficientes para campos definidos em uma variedade n -dimensional M , em torno de um ponto crítico, a qual será de fundamental importância para o estudo da dinâmica no próximo capítulo.

No Capítulo 3 restringimos nosso estudo a um Sistema Reversível em $\mathbb{R}^4$, com singularidade na origem, e a partir de sua linearização na origem distinguimos regiões e curvas particulares no plano (a,b) dos parâmetros do sistema mencionado. As curvas constituem as fronteiras das referidas regiões. Tais curvas e regiões, em geral, correspondem a dinâmicas topologicamente distintas. A partir daí, o nosso objetivo será obter condições para a existência e persistência de órbitas homoclínicas para os sistemas cuja linearização pertence a uma das curvas C_i , $i = 0, 1, 2$. Além disso, com respeito as regiões R_j , $j = 1, 2, 3$ analisamos a consequência dinâmica que a presença de certas órbitas homoclínicas causam ao fluxo de sistemas cuja linearização pertencem às referidas regiões.

A presença de órbitas homoclínicas é importante em aplicações por várias razões; por exemplo, sob certas condições, podemos detectar a existência de comportamento caótico nas proximidades de tal órbita (isto é, dinâmica “shift” associada com o difeomorfismo ferradura e fenômenos de Shil’nikov), usando as propriedades de Sistemas Reversíveis.

Algumas questões naturais que podem ser consideradas a partir do exposto neste trabalho:

- Quando (localmente) Sistemas Reversíveis e Hamiltonianos são “equivalentes”?
Quanto a esse fato sabemos que existem exemplos de Reversíveis que não são Hamiltonianos. No entanto, em geral, é difícil detectar quando um sistema é Reversível. Localmente, isto pode ser respondido através da teoria de formas normais.
- Considerando uma família a um parâmetro X_λ de campos reversíveis transversal a C_1 , onde os autovalores são $\pm i\eta$ e 0 (duplo), verificar o surgimento de órbitas homoclínicas.
- Considerando em $\mathbb{R}^4$ um campo vetorial X R-reversível satisfazendo:

- $\mathcal{S} = \text{Fix } R$ é uma variedade diferenciável 2-dimensional;
- $X(p_1) = 0$, $p_1 \neq \mathcal{S}$, e $DX(p_1)$ possui autovalores $\lambda = \pm a \pm ib$. Desta forma $X(R(p_1)) = X(p_2) = 0$ e os autovalores de $dX(p_2)$ são $\mp a \pm ib$;
- $W^u(p_1) \pitchfork W^s(p_2)$ em $z_o \in \mathcal{S}$ e $W^s(p_1) \pitchfork W^u(p_2)$ em $z_1 \in \mathcal{S}$ o que dá origem a um ciclo heteroclínico simétrico.

Com essas hipóteses fazer uma análise da existência de órbitas homoclínicas numa vizinhança tubular da órbita heteroclínica simétrica tal como no caso Sela-Foco na região 1.

Capítulo 1

Simetrias

Este capítulo é dedicado à introdução dos conceitos referentes a Sistemas Reversíveis e Equivariantes, além de uma descrição de algumas propriedades importantes do fluxo de tais sistemas.

1.1 Simetria e Anti-simetria em Sistemas Dinâmicos

Consideremos dois tipos de sistemas dinâmicos, um com tempo contínuo ($t \in \mathbb{R}$) e outro com tempo discreto ($n \in \mathbb{Z}$) definidos em algum espaço de fase M .

Sistemas com tempo contínuo são tomados em geral como sendo fluxos gerados por campos vetoriais e sistemas com tempo discreto são geralmente tomados como sendo iterados de uma aplicação f . Na maioria das aplicações de interesse M será uma variedade diferenciável, no nosso caso, $M = \mathbb{R}^n$.

No contexto contínuo, consideraremos equações diferenciais ordinárias autônomas da forma

$$\frac{dx}{dt} = F(x), \quad (x \in M) \tag{1.1.1}$$

onde $F : M \rightarrow TM$ é um campo vetorial C^∞ . A dinâmica de (1.1.1) é dada por um *fluxo* do tipo

$$\begin{aligned}\varphi_t : M &\rightarrow M \\ \varphi_t : x(\tau) &\mapsto \varphi_t(x(\tau)) = x(\tau + t)\end{aligned}\tag{1.1.2}$$

tal que

$$\varphi_{t_1} \circ \varphi_{t_2} = \varphi_{t_1+t_2}\tag{1.1.3}$$

Definição 1.1.1 : Dizemos que uma aplicação invertível (C^∞) $R : M \rightarrow M$ é uma simetria reversa (ou anti-simetria) de (1.1.1) quando

$$\frac{dR(x)}{dt} = -F(R(x)),\tag{1.1.4}$$

ou equivalentemente, quando

$$dR|_x F(x) = -F(R(x)),\tag{1.1.5}$$

onde $dR|_x$ denota a derivada de R em x .

Simetrias reversas são tranformações do espaço de fase que aplicam trajetórias em outras trajetórias do mesmo sistema dinâmico revertendo a direção de percurso em relação ao tempo.

Em termos do fluxo φ_t , (1.1.4) e (1.1.5) implicam

$$R \circ \varphi_t = \varphi_{-t} \circ R, \quad \forall t \in \mathbb{R}\tag{1.1.6}$$

Isso segue do fato de que $R \circ \varphi_t$ e $\varphi_{-t} \circ R$ são soluções de $\dot{x} = -F(x)$ que passam por $R(x)$ quando $t = 0$.

No contexto da mecânica clássica, onde as equações diferenciais ordinárias são derivadas de Hamiltonianas $H(q, p)$, a simetria reversa convencional é dada por

$$R(q, p) = (q, -p) \quad (1.1.7)$$

onde a função Hamiltoniana satisfaz $H(q, p) = H(q, -p)$.

Definição 1.1.2 : Uma aplicação diferenciável $h : U \subset \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$, onde U é um subconjunto aberto, é dita *simplética* se

$$[Dh(x)]^T \cdot S \cdot Dh(x) = S \quad \text{onde} \quad S = \begin{pmatrix} 0_{n \times n} & -I_{n \times n} \\ I_{n \times n} & 0_{n \times n} \end{pmatrix}$$

Note que no exemplo anterior R é uma involução (i.é, $R^2 = id$), e R é anti-simplética, como abaixo descrito.

$$\text{De fato, note que } R(p, q) = (q, -p) \Rightarrow DR(q, p) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}.$$

Daí,

$$[DR(q, p)]^T \cdot S \cdot DR(q, p) = -S$$

Note que, no caso de um sistema Hamiltoniano, $R(q, p) = (q, -p)$ é uma simetria reversa, desde que a função Hamiltoniana $H(q, p)$ satisfaça $H(q, p) = H(q, -p)$

O sistema dinâmico associado à função Hamiltoniana é dado por:

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \end{cases}$$

$$\text{Daí, } F(q, p) = \left(\frac{\partial H}{\partial p}(q, p), -\frac{\partial H}{\partial q}(q, p) \right)^T$$

E portanto segue que $DR(q, p) \cdot F(q, p) = -F(R(q, p))$

Por analogia ao caso de fluxo, dizemos que uma aplicação invertível $R : M \rightarrow M$ é uma simetria reversa de uma aplicação invertível $f : M \rightarrow M$ quando

$$R \circ f = f^{-1} \circ R \quad (1.1.8)$$

Definição 1.1.3 (Sistema Dinâmico Reversível): *Um sistema dinâmico é dito reversível quando ele possui uma simetria reversa R satisfazendo (1.1.4), ou (1.1.8) para fluxos autônomos ou aplicações, respectivamente.*

Na literatura podemos encontrar uma definição para sistemas reversíveis análoga à definição acima supondo, no entanto, que a simetria reversa R é uma involução, isto é, $R^2 = Id$. Em tais casos um sistema dinâmico que possui difeomorfismo que não satisfaz $R^2 = Id$ é dito um *sistema dinâmico fracamente reversível*.

Vejamos alguns exemplos de sistemas dinâmicos reversíveis.

Exemplo 1.1.1 : *Todos os sistemas Hamiltonianos com Hamiltoniana $H(q, p)$ satisfazendo $H(q, p) = H(q, -p)$ com R da forma (1.1.7).*

Exemplo 1.1.2 : *Todas as equações de oscilação da forma*

$$\frac{d^2 q}{dt^2} = F(q), \quad F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m \quad (1.1.9)$$

De fato, considere o sistema associado

$$\begin{cases} \frac{dq}{dt} = \omega \\ \frac{d\omega}{dt} = F(q) \end{cases}$$

Assim, $G(q, \omega) = (\omega, F(q))$. Tome $R(q, \omega) = (q, -\omega)$

Segue então que $DR(q, \omega) \cdot G(q, \omega) = -G(R(q, \omega))$

Razões pelas quais surgem reversibilidade:

- Reversibilidade no tempo devido à hipótese natural de tempo reversível da equação do movimento.
- Reversibilidade no espaço surgindo devido à hipótese natural de simetria espacial do modelo físico.
- Reversibilidade surgindo devido a estrutura específica do problema matemático em questão.

Existem, em geral, duas perspectivas pelas quais se consideram sistemas dinâmicos reversíveis. Por um lado, eles podem ser tratados por uma perspectiva simétrica, já que sistemas reversíveis são definidos em termos das propriedades simétricas. Por outro lado, historicamente o interesse em sistemas reversíveis tem sido geralmente no contexto dos sistemas Hamiltonianos. Primeiramente, isso é porque vários exemplos de sistemas dinâmicos reversíveis em aplicações são também, na realidade, Hamiltonianos. Em segundo lugar, existe o notável fato de que sistemas reversíveis e Hamiltonianos têm interessantes aspectos dinâmicos em comum.

Outro tipo de simetria que pode ocorrer num sistema dinâmico é dada por uma aplicação $S : M \rightarrow M$ que aplica órbitas do sistema em órbitas do mesmo sistema dinâmico sem reversão da direção de percurso.

Definição 1.1.4 : Dizemos que uma aplicação invertível (C^∞) $S : M \rightarrow M$ é uma simetria de (1.1.1) quando

$$\frac{dS(x)}{dt} = F(S(x)), \quad (1.1.10)$$

ou equivalentemente, quando

$$dS|_x \cdot F(x) = F(S(x)), \quad (1.1.11)$$

onde $dS|_x$ denota a derivada de S em x .

Em termos do fluxo φ_t , (1.1.10) e (1.1.11) implicam

$$S \circ \varphi_t = \varphi_t \circ S, \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (1.1.12)$$

Tal noção de simetria para sistemas dinâmicos, sendo aquelas transformações do espaço de fase que comutam com o operador evolução, corresponde à noção de *equivariância*.

Exemplo 1.1.3 : *Considere o sistema*

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases}$$

e a rotação de 90° no plano dada por $S(x, y) = (-y, x)$

Temos que: $F(x, y) = (y, -x)$. Daí,

$$DS|_{(x,y)} \cdot F(x, y) = F(S(x, y))$$

Portanto S é uma simetria para o sistema

Geometricamente temos que o espaço de fase do sistema acima é dado por circunferências concêntricas com centro na origem. É claro que rotações de 90° aplicam trajetórias em trajetórias sem reverter o sentido de percurso.

1.2 Órbitas Simétricas

Considere um sistema dinâmico invertível definido num espaço de fase M .

Definição 1.2.1 : *Para cada $x_o \in M$ definimos a órbita por x_o como:*

$$O(x_o) = \{x \in M / x = \varphi_t(x_o); t \in \mathbb{R}\}$$

para o caso contínuo. Neste caso, as órbitas são curvas contínuas ou pontos isolados (no caso de um ponto de equilíbrio)

ou ainda,

$$O(x_o) = \{x \in M / x = f^n(x_o); n \in \mathbb{Z}\}$$

para o caso discreto, onde f é uma aplicação definida em M . Neste caso, as órbitas são conjuntos discretos.

Definição 1.2.2 : Dizemos que uma órbita de um sistema dinâmico é simétrica com relação a uma simetria (ou simetria reversa) T se T aplica a órbita nela mesma, isto é, $O(x_o)$ é simétrica se $T(O(x_o)) = O(x_o)$.

Segue da definição que se uma órbita é simétrica com relação a uma simetria (ou simetria reversa) T , então todo ponto dessa órbita é aplicado por T na mesma órbita, isto é, $T(x) = \varphi_\tau(x)$ para algum $\tau \in \mathbb{R}$ (no caso contínuo) ou $T(x) = f^n(x)$ para algum $n \in \mathbb{Z}$ (no caso discreto). Daí segue que $x \in \text{Fix}[(\varphi_\tau^{-1}) \circ T]$ ou $x \in \text{Fix}[(f^{-n}) \circ T]$, onde

$$\text{Fix}(A) = \{x \in M / Ax = x\}$$

é o conjunto dos pontos fixados por A .

Definição 1.2.3 (Ponto de equilíbrio Simétrico): Dizemos que um ponto de equilíbrio para um sistema reversível é simétrico se ele pertence ao conjunto $\text{Fix}(R)$ onde R é a simetria reversa para o referido sistema.

Lema 1.2.1 : $\text{Fix}(A \circ R \circ A^{-1}) = A \cdot \text{Fix}(R)$

Prova: $x \in \text{Fix}(A \circ R \circ A^{-1}) \Leftrightarrow A \circ R \circ A^{-1}(x) = x \Leftrightarrow R \circ A^{-1}(x) = A^{-1}(x) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow A^{-1}(x) \in \text{Fix}(R) \Leftrightarrow x \in A \cdot \text{Fix}(R)$

■

Proposição 1.2.1 : Considere um campo vetorial autônomo com uma simetria reversa R , então a órbita $O(x_o)$ é simétrica com relação a R se, e somente se, existe um ponto $x \in O(x_o)$ tal que $x \in \text{Fix}(R)$. Mais ainda, uma órbita periódica $O(x_o)$ tem período T se, e somente se, $x \in \varphi_{\frac{T}{2}} \text{Fix}(R)$.

Prova:

$$R(x_o) = \varphi_\tau(x_o) \Leftrightarrow \varphi_{-\tau} \circ R(x_o) = \varphi_{-\tau} \circ \varphi_\tau(x_o) \Leftrightarrow R \circ \varphi_{\frac{\tau}{2}} = \varphi_{\frac{\tau}{2}}(x_o) \Leftrightarrow \varphi_{\frac{\tau}{2}}(x_o) \in \text{Fix}(R)$$

Mais ainda,

$$x = \varphi_T(x) = R(x) \Leftrightarrow (\varphi_{\frac{T}{2}} \circ \varphi_T)(x) = (\varphi_{\frac{T}{2}} \circ R)(x) = R \circ \varphi_{-\frac{T}{2}}(x) \Leftrightarrow x = \varphi_T(x) = \varphi_{2T}(x) =$$

$$\varphi_{\frac{T}{2}} \circ R \circ \varphi_{-\frac{T}{2}} \Leftrightarrow x = \varphi_{\frac{T}{2}} \circ R \circ \varphi_{-\frac{T}{2}}.$$

Daí, segue do lema (1.2.1), que $x \in \varphi_{\frac{T}{2}}(\text{Fix}(R))$.

■

Para o caso discreto temos:

Lema 1.2.2 : *Seja f uma aplicação possuindo uma simetria reversa R então:*

$$Fix(f^p \circ R) = \begin{cases} f^{\frac{p}{2}} Fix(R), & \text{se } p \text{ é par} \\ f^{\frac{p-1}{2}} Fix(f \circ R), & \text{se } p \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Prova: De fato.

Suponha p par:

$$x \in Fix(f \circ R) \Leftrightarrow (f^p \circ R)(x) = x \Leftrightarrow (f^{\frac{p}{2}} \circ f^{\frac{p}{2}} \circ R)(x) = x$$

ou seja,

$$x = f^{\frac{p}{2}}((f^{\frac{p}{2}} \circ R)(x)) = f^{\frac{p}{2}}(y)$$

e ainda,

$$R(y) = (R \circ f^{\frac{p}{2}} \circ R)(x) = (R \circ f^{\frac{p-1}{2}} \circ f^p \circ R)(x) = (f^{\frac{p}{2}} \circ R)(f^p \circ R(x)) = (f^{\frac{p}{2}} \circ R)(x) = y$$

$$\Rightarrow x \in f^{\frac{p}{2}} Fix(R) \Rightarrow Fix(f^p \circ R) \subseteq f^{\frac{p}{2}} Fix(R).$$

Por outro lado,

$$x \in f^{\frac{p}{2}} Fix(R) \Rightarrow x = f^{\frac{p}{2}}(y), \quad y \in Fix(R)$$

$$(f^p \circ R)(x) = f^p \circ R \circ f^{\frac{p}{2}}(y) = f^p \circ f^{-\frac{p}{2}} \circ R(y) = f^{\frac{p}{2}}(y) = x \Rightarrow x \in Fix(f^p \circ R)$$

Portanto,

$$Fix(f^p \circ R) = f^{\frac{p}{2}} Fix(R), \text{ se } p \text{ é par.}$$

Suponha p ímpar:

$$x \in f^{\frac{p-1}{2}} Fix(f \circ R) \Rightarrow x = f^{\frac{p-1}{2}}(y), \quad y \in Fix(f \circ R)$$

$$\begin{aligned} (f^p \circ R)(x) &= f^p \circ R \circ f^{\frac{p-1}{2}}(y) = f^p \circ f^{\frac{1-p}{2}} \circ R(y) = f^p \circ f^{-\frac{p-1}{2}} \circ f \circ R(y) = \\ &= f^p \circ f^{\frac{-p-1}{2}}(y) = f^{\frac{p-1}{2}}(y) = x \Rightarrow x \in Fix(f^p \circ R). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$x \in Fix(f^p \circ R) \Rightarrow (f^p \circ R)(x) = x \Rightarrow f^{\frac{p-1}{2}} \circ f^{\frac{p+1}{2}} \circ R(x) = x$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow x = f^{\frac{p-1}{2}}(f^{\frac{p+1}{2}} \circ R(x)) = f^{\frac{p-1}{2}}(y) \\
f \circ R(y) &= (f \circ R \circ f^{\frac{p+1}{2}} \circ R)(x) = R \circ f^{-1} \circ f^{\frac{p+1}{2}} \circ R(x) = R \circ f^{\frac{p-1}{2}} \circ R(x) = \\
&= R \circ f^{-\frac{(p+1)}{2}} \circ f^p \circ R(x) = (f^{\frac{p+1}{2}} \circ R)(f^p \circ R(x)) = (f^{\frac{p+1}{2}} \circ R)(x) = y \\
&\Rightarrow y \in \text{Fix}(f \circ R)
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\text{Fix}(f^p \circ R) = f^{\frac{p-1}{2}} \text{Fix}(f \circ R), \text{ se } p \text{ é par.} \quad \blacksquare$$

Proposição 1.2.2 : *Seja f uma aplicação possuindo uma simetria reversa R , então a órbita $O(x_o)$ é simétrica com relação a R se, e somente se, existe um ponto $x \in O(x_o)$ tal que $x \in \text{Fix}(R) \cup \text{Fix}(f \circ R)$. Mais ainda,*

i) *Se $O(x_o)$ tem período ímpar p então ela tem um ponto em $\text{Fix}(R) \cap f^{\frac{(p-1)}{2}} \text{Fix}(f \circ R)$;*

ii) *Se $O(x_o)$ tem período par p então ela tem um ponto em $\text{Fix}(R) \cap f^{\frac{p}{2}} \text{Fix}(R)$, ou um ponto em $\text{Fix}(f \circ R) \cap f^{\frac{p}{2}} \text{Fix}(f \circ R)$.*

Prova: Se um ponto x_o pertence a uma órbita simétrica, então existe um $m \in \mathbb{Z}$ tal que $R(x_o) = f^m(x_o)$.

Daí, se m é par temos:

$$f^{-\frac{m}{2}} \circ R(x_o) = f^{-\frac{m}{2}} f^m(x_o) \Rightarrow R \circ (f^{\frac{m}{2}}(x_o)) = f^{\frac{m}{2}}(x_o),$$

isto é,

$$f^{\frac{m}{2}}(x_o) \in \text{Fix}(R) \text{ se } m \text{ é par.}$$

Se m é ímpar temos:

$$\begin{aligned}
R(x_o) &= f^m(x_o) \Rightarrow f \circ R(x_o) = f^{m+1}(x_o) \Rightarrow R \circ f^{-1}(x_o) = f^{m+1}(x_o) \\
&\Rightarrow f^{-\frac{m+1}{2}}(R \circ f^{-1})(x_o) = f^{\frac{m+1}{2}}(x_o) \Rightarrow (R \circ f^{\frac{m+1}{2}} \circ f^{-1})(x_o) = f^{\frac{m+1}{2}}(x_o) \\
&\Rightarrow (f \circ R)(f^{\frac{m+1}{2}}(x_o)) = f^{\frac{m+1}{2}}(x_o),
\end{aligned}$$

isto é,

$$f^{\frac{m+1}{2}} \in \text{Fix}(f \circ R) \text{ se } m \text{ é ímpar}$$

Portanto, existe x na órbita simétrica tal que $x \in \text{Fix}(R) \cup \text{Fix}(f \circ R)$.

Suponha $x \in \text{Fix}(R)$.

$$R(x) = x \Leftrightarrow R \circ f^n(n) = f^{-n}(x), \quad \forall \in \mathbb{Z}.$$

Se a órbita tem período par segue que $y = f^{\frac{p}{2}}(x) \in \text{Fix}(R)$ já que

$$R \circ f^{\frac{p}{2}} = f^{-\frac{p}{2}}(x) = f^{\frac{p}{2}}(x)$$

Logo, $O(x_o)$ tem um ponto $x \in \text{Fix}(R)$ tal que

$$\begin{aligned} y = f^{\frac{p}{2}}(x) &\in \text{Fix}(R) \\ y = f^{\frac{p}{2}}(x) &\in \text{Fix}(f^p) \Rightarrow y \in \text{Fix}(f^p \circ R) = f^{\frac{p}{2}}\text{Fix}(R) \end{aligned}$$

Portanto

$$y \in \text{Fix}(R) \cap f^{\frac{p}{2}}\text{Fix}(R)$$

Analogamente, se p é ímpar temos:

$$\begin{aligned} x &\in \text{Fix}(R) \\ x &\in \text{Fix}(f^p) \Rightarrow x \in \text{Fix}(f^p \circ R) = f^{\frac{p-1}{2}}\text{Fix}(f \circ R) \end{aligned}$$

Portanto,

$$x \in \text{Fix}(R) \cap f^{\frac{p-1}{2}}\text{Fix}(f \circ R).$$

Suponha agora que $x \in \text{Fix}(f \circ R)$.

$$(f \circ R)(x) = x \Rightarrow (f \circ R)(f^n(x)) = f^{-n}(x), \quad \forall \in \mathbb{Z}$$

Se a órbita tem período par segue que $y = f^{\frac{p}{2}}(x) \in \text{Fix}(f \circ R)$.

Dai,

$$\begin{aligned} y &\in \text{Fix}(f \circ R) \\ y &\in \text{Fix}(f^p) \Rightarrow y \in \text{Fix}(f^{p+1} \circ R) = f^{\frac{p}{2}}\text{Fix}(f \circ R) \end{aligned}$$

Portanto,

$$y \in \text{Fix}(f \circ R) \cap f^{\frac{p}{2}}\text{Fix}(f \circ R).$$

Se a órbita por x tem período ímpar e $(f \circ R)(x) = x$ então:

$$R \circ f^{-1}(x) = x \Rightarrow R \circ f^{n-1}(x) = f^{-n}(x)$$

Fazendo $n = \frac{p+1}{2}$ temos:

$$\begin{aligned} R \circ f^{\frac{p-1}{2}}(x) &= f^{-\frac{p+1}{2}}(x) = f^{\frac{p-1}{2}}(x) \Rightarrow \\ \Rightarrow z = f^{\frac{p-1}{2}}(x) &\in \text{Fix}(R) \Rightarrow z \in \text{Fix}(f^p \circ R) = f^{\frac{p-1}{2}} \text{Fix}(f \circ R) \\ z = f^{\frac{p-1}{2}}(x) &\in \text{Fix}(f^p) \end{aligned}$$

Portanto,

$$z \in \text{Fix}(R) \cap f^{\frac{p-1}{2}} \text{Fix}(f \circ R) \quad \blacksquare$$

1.3 Órbitas Homoclínicas Simétricas

Considere um sistema dinâmico reversível com simetria reversa R .

Seja x_o um ponto de equilíbrio do sistema e sejam

$$W^s(x_o) = \{x \in M / \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_t(x) = x_o\}$$

$$W^u(x_o) = \{x \in M / \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi_t(x) = x_o\}$$

as variedades estável e instável, respectivamente, em x_o , onde $t \in \mathbb{R}$.

Para o caso tempo discreto definimos

$$W^s(x_o) = \{x \in M / \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = x_o\}$$

$$W^u(x_o) = \{x \in M / \lim_{n \rightarrow -\infty} f^n(x) = x_o\}$$

como sendo as variedades estável e instável, respectivamente, em x_o .

Um ponto $x \in W^s(x_o) \cap W^u(x_o)$ é chamado um *ponto homoclínico* para x_o e a órbita por x é chamada de *órbita homoclínica*. A ocorrência de órbitas homoclínicas são características importantes na dinâmica de um sistema. Por exemplo, quando um sistema possui um ponto homoclínico transversal (quando $W^s(x_o)$ e $W^u(x_o)$ se interceptam transversalmente), ocorrem fenômenos caóticos que podem ser descritos como uma aplicação tipo ferradura.

Proposição 1.3.1 : *Seja S uma simetria de um sistema dinâmico tendo x_o como ponto de equilíbrio, então*

$$S(W^{s(u)}(x_o)) = W^{s(u)}(x_o) \Leftrightarrow x_o \in \text{Fix}(S)$$

Prova: Suponha $S(W^{s(u)}(x_o)) = W^{s(u)}(x_o)$

$$x_o \in W^s(x_o) \Rightarrow S(x_o) \in W^s(x_o) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_t(S(x_o)) = x_o$$

Daí,

$$\begin{aligned} x_o &= \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_t(S(x_o)) \lim_{t \rightarrow \infty} S(\varphi_t(x_o)) = S(x_o) \\ \therefore S(x_o) &= x_o \end{aligned}$$

Reciprocamente suponha $S(x_o) = x_o$.

Seja $x \in W^s(x_o)$. Mostremos que $S(x) \in W^s(x_o)$.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_t(S(x)) = \lim_{t \rightarrow \infty} S(\varphi_t(x)) = S(x_o) = x_o.$$

Logo $S(W^s(x_o)) \subset W^s(x_o)$. Como $\dim W^s(x_o) = S(W^s(x_o))$ segue que

$$S(W^{s(u)}(x_o)) = W^{s(u)}(x_o).$$

A prova para $W^u(x_o)$ é análoga. Também segue com o mesmo raciocínio a prova para sistemas dinâmicos discretos. ■

Proposição 1.3.2 : *Seja R uma simetria reversa para um sistema dinâmico que tem x_o como ponto de equilíbrio, então*

$$W^s(x_o) \cap \text{Fix}(R) \subset W^u(R(x_o)),$$

$$W^u(x_o) \cap \text{Fix}(R) \subset W^s(R(x_o)).$$

Prova: Se $x \in W^s(x_o) \cap \text{Fix}(R)$, então $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_t(x) = x_o$ e

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi_t(x) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi_t(R(x)) = \lim_{t \rightarrow -\infty} R(\varphi_t(x)) = R(x_o).$$

Portanto, $x \in W^u(R(x_o))$, isto é, $W^s(x_o) \cap \text{Fix}(R) \subset W^u(R(x_o))$.

O outro caso é análogo. ■

Proposição 1.3.3 : *Seja R uma simetria reversa para um sistema dinâmico que tem x_o como ponto de equilíbrio, então*

$$R(W^{s(u)}(x_o)) = W^{u(s)}(x_o) \Leftrightarrow x_o \in \text{Fix}(R)$$

Observação 1.3.1 : *Se R é uma simetria reversa para um sistema dinâmico e $x_o \in \text{Fix}(R)$ é um ponto de equilíbrio para o sistema, então interseções de variedades estável (instável) com $\text{Fix}(R)$ implicam na existência de órbitas homoclínicas simétricas com relação à simetria reversa R . Assim, a proposição (1.3.2) fornece um critério para persistência de órbitas homoclínicas que são simétricas com relação à simetria reversa, a saber, quando a interseção $W^u(x_o) \cap \text{Fix}(R)$ for transversal.*

Capítulo 2

Formas Normais C^∞ de Campos Vetoriais Locais

O objetivo deste capítulo é obter formas normais eficientes para campos vetoriais, não necessariamente reversíveis, definidos em uma variedade n -dimensional M em torno de um ponto crítico.

2.1 Introdução

Um campo vetorial em uma variedade C^∞ , M , é uma aplicação

$$v : M \rightarrow TM \tag{2.1.1}$$

no fibrado tangente de M . Em coordenadas locais, $v(x) = (x, \sum v_i(x) \frac{\partial}{\partial x^i})$, onde $\frac{\partial}{\partial x^i}$ é uma base em $T_x M$.

Dado um campo vetorial v defina a equação diferencial

$$\frac{dx}{dt} = v(x). \tag{2.1.2}$$

Sua solução (ou trajetória de v) é uma curva $x : \mathbb{R} \rightarrow M$ satisfazendo a equação, isto é,

$$\frac{dx}{dt} = v(x(t)).$$

O problema principal consiste em uma investigação dessas soluções.

Um difeomorfismo $\phi : M \rightarrow M$ leva o campo vetorial v ao campo vetorial

$$(\phi_* v)(x) = (\phi'(x))^{-1} v(\phi(x)), \quad x \in M$$

onde $\phi'(x)$ é a matriz Jacibiana da aplicação $\phi(x)$.

Definição 2.1.1 : *Dois campos vetoriais v e $\tilde{v}$ são ditos conjugados se existe uma transformação ϕ tal que*

$$\tilde{v} = \phi_* v$$

A idéia natural é levar o campo vetorial v , por uma transformação, a uma forma “normal” simples a qual é mais conveniente para o estudo. Em outras palavras, surge o problema de classificar os campos vetoriais por conjugação. Esse é um problema complicado e não são conhecidos muitos resultados gerais.

Uma parte desse problema “global” é seu aspecto local.

Definição 2.1.2 : *Dois campos vetoriais v e $\tilde{v}$ são ditos localmente conjugados em uma vizinhança de um ponto $x_o \in M$ se existe uma transformação local*

$$\phi : (U, x_o) \rightarrow (V, x_o)$$

de uma vizinhança U em uma vizinhança V tal que

$$\tilde{v}(x) = (\phi_* v)(x), \quad x \in U.$$

No contexto local, podemos identificar uma vizinhança U e o espaço tangente $T_x U$, $x \in U$ com o $\mathbb{R}^n$. Com essa identificação, um campo vetorial local $v = (x, \sum_i v_i(x) \frac{\partial}{\partial x^i})$ pode ser identificado com a aplicação $v : (\mathbb{R}^n, x_o) \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Exemplo 2.1.1 : *Seja $v(x_o) = e \neq 0$. Então pelo teorema do fluxo tubular o campo vetorial v pode ser localmente “retificado”, isto é, ele é localmente conjugado ao campo vetorial constante*

$$(\phi_* v)(x) = e, \quad x \in U$$

É claro que, as trajetórias do campo vetorial constante são retas

$$x(t) = te + x$$

A classe da transformação ϕ no exemplo (2.1.1) é a mesma classe da aplicação v .

No que se segue consideraremos campos vetoriais C^∞ e transformações ϕ de classe C^∞ . A invertibilidade de ϕ numa vizinhança de x_o é equivalente à invertibilidade da matriz Jacobiana $\phi'(x_o)$.

Um ponto $x_o \in M$ tal que $v(x_o) \neq 0$ é chamado *não-singular* para o campo vetorial v . O teorema mencionado acima nos dá uma estrutura de um campo vetorial numa vizinhança de um ponto não-singular.

Exemplo 2.1.2 : *Seja*

$$v(x) = \lambda x + h(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad h(0) = h'(0) = 0$$

um campo vetorial C^∞ sobre $\mathbb{R}$. A origem é um ponto singular. Se $\lambda \neq 0$, então v é localmente, em torno de 0, C^∞ -conjugado ao campo vetorial linear $\tilde{v}(x) = \lambda x$.

De fato, procuremos uma transformação da forma

$$\phi(x) = x + x\varphi(x), \quad \varphi(0) = 0.$$

tal que

$$\phi_*(v(x)) = \tilde{v}(x).$$

Daí, temos que:

$$[\phi'(x)]^{-1} v(\phi(x)) = \tilde{v}(x), \text{ isto é,}$$

$$(1 + \varphi(x) + x\varphi'(x))^{-1} (\lambda x + \lambda x\varphi(x) + h(x + x\varphi(x))) = \lambda x$$

$$\Rightarrow (\lambda x + \lambda x\varphi(x) + h(x + x\varphi(x))) = (1 + \varphi(x) + x\varphi'(x)) \lambda x$$

E daí,

$$\varphi'(x) = \frac{h(x + x\varphi(x))}{\lambda x^2}$$

Como $h(0) = h'(0) = 0$, a função h pode ser reescrita na forma

$$h(x) = x^2 g(x),$$

onde g também é uma função C^∞ na vizinhança de zero.

Assim, chegamos ao problema de Cauchy

$$\begin{cases} \phi'(x) = (1 + \varphi(x))^2 \frac{g(x + \varphi(x))}{\lambda}, \\ \varphi(0) = 0 \end{cases}$$

Pelo teorema de existência, ele tem uma solução local de classe C^∞ .

Note que as trajetórias do campo vetorial linear $\tilde{v}(x) = \lambda x$ têm a forma

$$x(t) = e^{\lambda t} x.$$

2.2 Campos Vetoriais na Reta

Ainda considerando o exemplo (2.1.2) vejamos o que ocorre quando temos uma degeneração adicional de v , isto é, quando $\lambda = 0$. Assuma que

$$v(x) = \alpha x^r + h(x), \quad \alpha \neq 0, \quad h(0) = \cdots = h^{(r)}(0) = 0, \quad r \geq 2.$$

Teorema 2.1 : *Existe uma transformação local C^∞ , $\phi(x)$, levando v à forma normal*

$$\tilde{v}(x) = \pm x^r + dx^{2r-1}.$$

O sinal $\pm$ depende de r : se r é par então o sinal é $+$. Caso contrário o sinal é dado pelo sinal de α , isto é, $\pm = \text{sign}(\alpha)$.

A prova deste teorema dependo do seguinte lema:

Lema 2.2.1 : *Se*

$$\omega(x) = \tilde{v}(x) + x^{2r} g(x) \tag{2.2.1}$$

onde g é uma função C^∞ local então ω e $\tilde{v}$ são localmente conjugados.

Prova: Tomando $\phi(x) = x + x^r \varphi(x)$, com $\varphi(0) = 0$ e supondo que ϕ é uma conjugação entre ω e $\tilde{v}$ temos:

$$(\phi_* \omega)(x) = \tilde{v}(x),$$

ou seja,

$$\omega(\phi(x)) = \phi'(x) \tilde{v}(x) \Rightarrow \omega(x + x^r \varphi(x)) = (1 + x^r \varphi'(x) + r x^{r-1} \varphi(x)) \tilde{v}(x)$$

e daí segue que:

$$(1 + x^r \varphi'(x) + rx^{r-1} \varphi(x)) \tilde{v}(x) = \tilde{v}(\phi(x)) + (\phi(x))^{2r} g(\phi(x)).$$

Podemos reescrever a igualdade acima como

$$\varphi'(x) = h(x, \varphi(x))$$

onde $h(x, y)$ é uma função C^∞ . Pelo teorema de existência, existe uma solução C^∞ local φ , $\varphi(0) = 0$. ■

Assim, para completar a prova do teorema 2.1 devemos checar que v pode ser transformado na forma (2.2.1).

Para isso, assuma que

$$v(x) = \alpha x^r + ax^q + o(x^{q+1})$$

com $q \in \{r+1, \dots, 2r-2\}$ e mostremos que por uma transformação polinomial da forma

$$\phi(x) = x + cx^{q-r+1}$$

podemos eliminar o termo ax^q

De fato,

$$\begin{aligned} (\phi_* v)(x) &= (1 + (q-r+1)cx^{q-r})^{-1} [\alpha (x + cx^{q-r+1})^r + a (x + cx^{q-r+1})^q + o(x^{q+1})] = \\ &= (1 - c(q-r+1)x^{q-r} + o(x^{q-r+1})) [\alpha (x + cx^{q-r+1})^r + a (x + cx^{q-r+1})^q + o(x^{q+1})] = \\ &= \alpha x^r + \alpha r c x^q + ax^q - \alpha c(q-r+1)x^q + o(x^{q+1}) = \alpha x^r + [\alpha c(2r-q-1) + a]x^q + o(x^{q+1}). \end{aligned}$$

Assim, tomando $c = \frac{a}{\alpha(q-2r+1)}$, onde $q \in \{r+1, \dots, 2r-2\}$ temos

$$(\phi_* v)(x) = \alpha x^r + o(x^{q+1}).$$

Segue portanto que a transformação

$$\phi(x) = \phi_1 \circ \dots \circ \phi_{r-2}$$

com

$$\phi_i(x) = x + c_i x^{i+1}, \quad i \in 1, \dots, r-2$$

leva o campo v à forma

$$u(x) = (\phi_* v)(x) = \alpha x^r + ax^{2r-1} + x^{2r}k(x).$$

Considere agora a transformação linear

$$\psi(x) = tx, \quad t \neq 0$$

Temos que:

$$\begin{aligned} (\psi_* u)(x) &= [\psi'(x)]^{-1} u(\psi(x)) = \frac{1}{t} [\alpha t^r x^r + at^{2r-1} x^{2r-1} + t^{2r} x^{2r} k(tx)] = \\ &= \alpha t^{r-1} x^r + bx^{2r-1} + x^{2r} \tilde{k}(x) \end{aligned}$$

Se r é ímpar então $r-1$ é par e tomando $t = \frac{1}{r-1\sqrt{|a|}}$ temos:

$$(\psi_* u)(x) = \text{sign}(\alpha)x^r + bx^{2r-1} + x^{2r} \tilde{k}(x)$$

Se r é par então $r-1$ é ímpar e tomando $t = \frac{1}{r-1\sqrt{a}}$ temos:

$$(\psi_* u)(x) = x^r + bx^{2r-1} + x^{2r} \tilde{k}(x)$$

■

Note que o coeficiente d na forma normal obtida no teorema 2.1 é invariante: se duas formas normais são conjugadas então elas coincidem.

De fato, suponha que $v_1(x) = x^r + d_1 x^{2r-1}$ e $v_2(x) = x^r + d_2 x^{2r-1}$ são conjugados. Então existe uma transformação C^∞

$$\phi(x) = x + xh(x), \quad h(0) = 0$$

tal que:

$$(\phi_* v_1)(x) = v_2(x),$$

ou seja,

$$\begin{aligned} v_1(\phi(x)) &= \phi'(x)v_2(x) \Rightarrow v_1(x + xh(x)) = (1 + h(x) + xh'(x))v_2(x) \\ &\Rightarrow (x + xh(x))^r + d_1 (x + xh(x))^{2r-1} = (1 + h(x) + xh'(x)) (x^r + d_2 x^{2r-1}) \end{aligned}$$

Igualando os termos de mesmo grau na igualdade acima obtemos que $\phi(x) = x + cx^r$ para os termos de grau $r.s$ onde s é o índice de menor grau em h . E, considerando tal função h , ainda obtemos na igualdade anterior que $d_1 = d_2$ e desta forma, $c = 0$, isto é, $\phi(x) = x$.

O teorema 2.1 nos dá uma lista completa das formas normais de campos vetoriais “não totalmente degenerados”, isto é, onde existe $r \geq 0$ tal que $v^{(r)}(0) \neq 0$.

Um campo vetorial com

$$v^{(r)}(0) = 0, \quad \forall r = 1, 2, \dots$$

é chamado “flat”.

2.3 Aplicação Formal e Campos Vetoriais

Sejam ω e v campos vetoriais C^∞ , localmente C^∞ -conjugados numa vizinhança da origem,

$$\omega(x) = (\phi_* v)(x), \quad \phi : (U, 0) \rightarrow (V, 0).$$

Denote por $\hat{\omega}(x)$, $\hat{v}(x)$ e $\hat{\phi}(x)$ as séries de Taylor formais em zero das aplicações ω , v e ϕ , respectivamente.

Então

$$\hat{\omega}(x) = (\hat{\phi}'(x))^{-1} \hat{v}(\hat{\phi}(x)).$$

Isso significa que a conjugação local C^∞ implica em conjugação formal.

Mais precisamente, uma aplicação formal

$$F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

é definida como sendo uma série formal

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} F^{(k)}(x)$$

onde $F^{(k)} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma aplicação polinomial homogênea de grau k . Em particular, $F^{(0)}(x) = cte \in \mathbb{R}^m$ é o termo independente de F . Usualmente consideramos uma aplicação formal sem termo independente, isto é, $\phi^{(0)}(x) = 0$.

Em coordenadas

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

a aplicação formal pode ser escrita como uma série

$$F(x) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|I|=k} F_I^j x^I \right)_{j=1}^m$$

onde $I = (I_1, \dots, I_n)$ é um inteiro multi-índice e

$$|I| = I_1 + \dots + I_n, \quad x^I = x_1^{I_1} \dots x_n^{I_n}.$$

O conjunto de todas as aplicações formais será denotado por $\mathbb{R}[n, m]$. Esse conjunto é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ com relação a adição.

O conjunto $\mathbb{R}[n, 1]$ de séries formais $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tem uma estrutura de álgebra sobre $\mathbb{R}$. De maneira óbvia definimos o produto $f.F$ onde $f \in \mathbb{R}[n, 1]$ e $F \in \mathbb{R}[n, m]$. Isso implica que $\mathbb{R}[n, m]$ tem uma estrutura de $\mathbb{R}[n, 1]$ -módulo.

Se $F \in \mathbb{R}[n, m]$ é uma aplicação com $F^{(0)} = 0$ e $\phi \in \mathbb{R}[m, l]$ é arbitrária então definimos a *composição* $\phi \circ F \in \mathbb{R}[n, l]$ (substituição de uma série em uma série).

Seja $\mathbb{R}_o[n, m]$ o espaço das aplicações formais com termos livres nulos. O subgrupo de aplicações invertíveis consiste dos elementos

$$\phi(x) = Ax + \sum_{k \geq 2} \phi_{(k)}(x)$$

com parte linear A não-singular, isto é, $\det A \neq 0$. Chamamos tais tipos de aplicações de *difeomorfismos formais*.

Dada $F \in \mathbb{R}[n, m]$ podemos definir as derivadas parciais

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \sum_k \frac{\partial F^{(k)}(x)}{\partial x_i}$$

e a *matriz Jacobiana* (sobre o anel $\mathbb{R}[n, 1]$, isto é, com elementos do anel):

$$F'(x) = \left(\frac{\partial F^j}{\partial x_i} \right)$$

onde

$$F^j(x) = \sum_{|I|=0}^{\infty} F_I^j x^I, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Com uma aplicação- C^∞ local $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ podemos associar a aplicação formal

$$\hat{\phi} := \sum_{k=0}^{\infty} \phi^{(k)}$$

onde

$$\phi^{(k)}(x) = \sum_{|I|=k} \frac{1}{I_1! \cdots I_n!} \frac{\partial^k \phi(0)}{\partial x_I} x^I.$$

Essa aplicação é chamada a *série de Taylor* de ϕ na origem.

Lema 2.3.1 (Lema de Borel):-[13] *Para cada aplicação formal $F \in \mathbb{R}[n, m]$ existe uma aplicação C^∞ , $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, tal que $\hat{\phi} = F$.*

Em outras palavras, a correspondência $\phi \mapsto \hat{\phi}$ é sobrejetora. É claro que não é injetora; seu núcleo consiste das aplicações “flat”, isto é,

$$\frac{\partial \phi(0)}{\partial x^I} = 0, \quad |I| = k, \quad k = 0, 1, \dots$$

Podemos interpretar uma aplicação formal $\hat{v} \in \mathbb{R}_0[n, n]$ como um campo vetorial formal obtendo assim um sistema formal

$$\frac{dx}{dt} = \hat{v}(x)$$

A transformação formal $x \mapsto \hat{\phi}(x)$ leva o sistema em

$$\frac{dx}{dt} = \hat{\omega}(x)$$

com $\hat{\omega}(x) = [\hat{\phi}'(x)]^{-1} \hat{v}(\hat{\phi}(x))$. Dessa forma, os campos vetoriais formais $\hat{v}$ e $\hat{\omega}$, são ditos *conjugados*.

Definição 2.3.1 : *Dois campos vetoriais C^∞ , v e ω , são ditos formalmente conjugados se as correspondentes séries de Taylor formais, $\hat{v}$ e $\hat{\omega}$, são conjugadas como campos vetoriais formais.*

Com base nessa definição e no lema de Borel, podemos dizer que dois campos vetoriais v e ω são formalmente conjugados se existe uma transformação local C^∞ , ϕ , tal que a diferença $\tau = \omega - \phi_* v$ é “flat” na origem.

Assim, dado um campo vetorial local C^∞ , v , o problema de encontrar sua forma normal possui duas partes: uma parte “algébrica”, que consiste em procurar formas normais de $\hat{v}$ e uma “funcional” que consiste na possibilidade de eliminar “flat” residuais τ .

2.4 Linearização

Os campos vetoriais com uma singularidade na origem mais simples é o campo linear $\omega(x) = Ax$.

Suas trajetórias têm a forma

$$x(t) = \exp(At)x$$

e podem ser facilmente investigadas. Dessa forma, uma idéia interessante é analisar quando é possível linearizar um campo vetorial.

Tendo esta idéia em mente, comecemos com o problema formal correspondente.

Seja $\hat{v}(x) = Ax + \sum_{k \geq 2} v^{(k)}(x)$ um campo vetorial formal com parte linear $v^{(1)}(x) = Ax$.

Procuremos uma transformação formal

$$\hat{\phi}(x) = x + \sum_{k \geq 2} \phi^{(k)}(x)$$

que leva $\hat{v}$ na sua parte linear $\omega(x) = Ax$, ou seja,

$$(\hat{\phi}'(x))^{-1} A \hat{\phi}(x) = \hat{v}(x),$$

ou

$$A \hat{\phi}(x) = \hat{\phi}'(x) \hat{v}(x)$$

Donde segue que:

$$\begin{aligned} A \left[x + \sum_{k \geq 2} \phi^{(k)}(x) \right] &= \left[I + \sum_{k \geq 2} (\phi^{(k)}(x))' \right] \hat{v}(x) \Rightarrow \\ \Rightarrow Ax + \sum_{k \geq 2} A \phi^{(k)}(x) &= \hat{v}(x) + \sum_{k \geq 2} (\phi^{(k)}(x))' \left[Ax + \sum_{k \geq 2} v^{(k)}(x) \right] \end{aligned}$$

Se considerarmos os termos homogêneos de ordem k na igualdade anterior obtemos:

$$A \phi^{(k)}(x) = (\phi^{(k)}(x))' Ax + v^{(k)}(x) + \sum_{s=2}^{k-1} (\phi^{(s)}(x))' v^{(k-s+1)}(x)$$

Dessa forma, se para todo $k \geq 2$, pudermos encontrar $\phi^{(k)}(x)$ tal que

$$A \phi^{(k)}(x) - (\phi^{(k)}(x))' Ax = v^{(k)}(x) + \sum_{s=2}^{k-1} (\phi^{(s)}(x))' v^{(k-s+1)}(x) \quad (2.4.1)$$

então $\hat{v}(x)$ é conjugado a Ax .

O sistema (2.4.1) pode ser resolvido se o operador linear definido por

$$(L_A \phi^{(k)})(x) := A\phi^{(k)}(x) - (\phi^{(k)}(x))' Ax \quad (2.4.2)$$

que age no espaço das aplicações homogêneas de grau k , $\phi^{(k)} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, é invertível. Denotemos tal espaço por H^k .

Afim de verificar a condição de invertibilidade de L_A encontremos seus autovalores. Suponhamos que A é diagonalizável.

Sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ autovalores de A e $z_1, \dots, z_n$ os correspondentes autovetores. Considere os funcionais lineares $f_1, \dots, f_n$ dual de $\{z_1, \dots, z_n\}$ então segue que,

$$f_i(Ax) = \lambda_i f_i(x), \quad i \in \{1, \dots, n\}.$$

Note ainda que

$$f_i(e^{tA}x) = e^{t\lambda_i} f_i(x), \quad t \in \mathbb{R}.$$

De fato,

$$f_i(e^{tA}x) = f_i\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} x\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} f_i(A^k x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \lambda_i^k f_i(x) = e^{t\lambda_i} f_i(x)$$

Dado um multi-índice $I = (I_1, \dots, I_n)$, $|I| = k$ seja

$$\phi(x) = f_1^{I_1}(x) \cdots f_n^{I_n}(x) z_i \quad (2.4.3)$$

Então $\phi(x)$ é uma aplicação homogênea com $\partial\phi = |I| = k$, e

$$\phi(e^{tA}x) = f_1^{I_1}(e^{tA}x) \cdots f_n^{I_n}(e^{tA}x) z_i = e^{t\lambda_1 I_1} f_1^{I_1}(x) \cdots e^{t\lambda_n I_n} f_n^{I_n}(x) z_i = e^{t(\lambda, I)} \phi(x),$$

isto é,

$$\phi(e^{tA}x) = e^{t(\lambda, I)} \phi(x), \quad (2.4.4)$$

e ainda,

$$A\phi(x) = \lambda_i \phi(x),$$

onde $(\lambda, I) = \sum_{j=1}^n \lambda_j I_j$. Consequentemente,

$$\left. \frac{d\phi(e^{tA}x)}{dt} \right|_{t=0} = \phi'(e^{tA}x) A e^{tA}x|_{t=0} = \phi'(x) Ax$$

Por outro lado, segue de (2.4.4) que

$$\left. \frac{d\phi(e^{tA}x)}{dt} \right|_{t=0} = (\lambda, I)\phi(x)$$

Logo,

$$\phi'(x)Ax = (\lambda, I)\phi(x)$$

E assim,

$$(L_A\phi)(x) = A\phi(x) - \phi'(x)Ax = \lambda_i\phi(x) - (\lambda, I)\phi(x) = [\lambda_i - (\lambda, I)]\phi(x).$$

Portanto,

$$\mu_{I,i} = \lambda_i - (\lambda, I) \quad (2.4.5)$$

são autovalores do operador L_A . Como $\dim H^k = nk + n$ e a igualdade acima fornece $nk + n$ autovalores para L_A associados aos $nk + n$ autovetores em (2.4.3) segue que eles são todos os autovalores possíveis do operador. Dessa forma, se todos os autovalores forem não nulos, então o operador L_A é invertível para todo $k \geq 2$, e portanto, o sistema (2.4.1) pode ser resolvido com relação a $\phi^{(k)}$, $k = 2, 3, \dots$

No caso em que A não é invertível ainda temos que os autovalores do operador L_A são da forma (2.4.5) e assim temos o seguinte:

Teorema 2.2 (Poincaré): *Se*

$$\lambda_i \neq \sum_j \lambda_j I_j, \quad |I| = k, \quad k = 2, 3, \dots$$

então o campo vetorial $v(x) = Ax + \dots$ é formalmente conjugado a sua parte linear $\omega(x) = Ax$.

Definição 2.4.1 : *A igualdade*

$$\lambda_i = \sum_j \lambda_j I_j, \quad |I| = k$$

entre os autovalores de um operador A é chamada ressonância de ordem k .

Um outro resultado, devido a S. Sternberg, diz que: um campo vetorial C^∞ sem termos ressonantes é localmente C^∞ -conjugado à sua parte linear.

Definição 2.4.2 : *Um campo vetorial $v(x) = Ax + o(x^2)$ é dito hiperbólico em um ponto singular $x_o = 0$ se A não possui autovalores imaginários puros, isto é, $\text{Re } \lambda_i \neq 0$.*

Teorema 2.3 (S. Sternberg-Chen)-[22],[8]: *Se dois campos vetoriais C^∞ hiperbólicos são formalmente conjugados no ponto singular $x_o = 0$ então eles são localmente C^∞ -conjugados.*

Esse teorema foi provado no caso não-ressonante por S. Sternberg em [22] e o caso hiperbólico geral foi provado por K. Chen em [8].

É claro que a hiperbolicidade no teorema (2.3) é essencial.

Considere, por exemplo, o campo vetorial nulo $v(x) = 0$ que é obviamente formalmente conjugado a um campo “flat” $\tau(x)$. Qualquer difeomorfismo local ϕ pode ser tomado como uma conjugação. No entanto, o campo nulo não é C^∞ -conjugado a um campo $\tau \neq 0$.

2.5 Forma Normal Ressonante

Em geral, a linearização não é possível quando o campo vetorial possui termos ressonantes, mas podemos encontrar uma forma que simplifique o campo.

Dado um campo vetorial formal

$$\hat{v}(x) = Ax + \sum_{k \geq 2} v^{(k)}(x)$$

procuremos uma forma “simples” para o campo vetorial formal $\hat{\omega} = \hat{\phi}_* \hat{v}$ com uma transformação formal

$$\hat{\phi}(x) = x + \sum_{k=2}^{\infty} \phi^{(k)}(x).$$

Escrevendo $\hat{\omega}$ na forma

$$\hat{\omega}(x) = Ax + \sum_{k \geq 2} \omega^{(k)}(x)$$

e considerando a equação $\hat{\omega} = \hat{\phi}_* \hat{v}$ obtemos:

$$\hat{\omega}(x) = Ax + \sum_{k \geq 2} \omega^{(k)}(x) = (\hat{\phi}(x))^{-1} \hat{v}(\hat{\phi}(x))$$

Donde

$$\hat{\phi}'(x) \left(Ax + \sum_{k \geq 2} \omega^{(k)}(x) \right) = \hat{v}(\hat{\phi}(x)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(I + \sum_{k \geq 2} (\phi^{(k)}(x))' \right) \left(Ax + \sum_{k \geq 2} \omega^{(k)}(x) \right) = A\hat{\phi}(x) + \sum_{k \geq 2} v^{(k)}(\hat{\phi}(x))$$

E daí,

$$\begin{aligned} & \left(I + \sum_{k \geq 2} (\phi^{(k)}(x))' \right) \left(Ax + \sum_{k \geq 2} \omega^{(k)}(x) \right) = \\ & = Ax + \sum_{k \geq 2} A\phi^{(k)}(x) + \sum_{k \geq 2} v^{(k)} \left(x + \sum_{k \geq 2} \phi^{(k)}(x) \right) \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} & Ax + \sum_{k \geq 2} \omega^{(k)}(x) + \sum_{k \geq 2} (\phi^{(k)}(x))' Ax + \left(\sum_{k \geq 2} (\phi^{(k)}(x))' \right) \left(\sum_{k \geq 2} \omega^{(k)}(x) \right) = \\ & = Ax + \sum_{k \geq 2} A\phi^{(k)}(x) + \sum_{k \geq 2} v^{(k)} \left(x + \sum_{k \geq 2} \phi^{(k)}(x) \right) \end{aligned}$$

Tomando os termos de ordem k na igualdade acima segue que

$$\omega^{(k)} = L_A \phi^{(k)}(x) + v^{(k)}(x) + R_k, \quad k = 2, 3, \dots \quad (2.5.1)$$

onde R_k é uma expressão que depende de termos de grau $\leq k-1$.

$$R_k = R_k(v^{(2)}, \dots, v^{(k-1)}, \omega^{(2)}, \dots, \omega^{(k-1)}, \phi^{(2)}, \dots, \phi^{(k-1)}).$$

Em particular, $R_2 = 0$ e, desta forma, para $k = 2$ temos a equação

$$\omega^{(2)}(x) = L_A \phi^{(2)}(x) + v^{(2)}(x).$$

O operador L_A foi definido anteriormente, mas na presença de ressonância ele não é invertível, e assim, provavelmente não teremos $\omega^{(k)} = 0$.

Para construirmos uma forma normal fixemos no $\mathbb{R}^n$ a base canônica $e_1, \dots, e_n$. Seja $A = (a_{ij})$ a matriz da parte linear nessa base.

Teorema 2.4 : *Dado um campo vetorial formal $\hat{v}(x) = Ax + \sum_{k \geq 2} v^{(k)}(x)$, existe uma transformação formal $\hat{\phi}(x) = x + \dots$ que leva $\hat{v}$ à forma $(\hat{\phi}_* \hat{v})(x) = Ax + h(x)$ onde h é um campo vetorial formal, com parte linear nula, comutando com A^T , isto é,*

$$A^T h(x) = h'(x) A^T x, \quad (2.5.2)$$

onde A^T é a matriz transposta de A .

A prova do teorema (2.4) é baseada no lema seguinte.

Seja $L : \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_2$ um operador linear entre espaços Euclidianos $\mathcal{E}_1$ e $\mathcal{E}_2$. Defina

$$\mathcal{A} : \mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2 \rightarrow \mathcal{E}_2 \quad \text{por}$$

$$\mathcal{A}(u, z) = u.z = z + L(u) \quad (2.5.3)$$

$\mathcal{A}$ é uma ação do grupo aditivo do espaço $\mathcal{E}_1$ no espaço $\mathcal{E}_2$. De fato,

$$\text{i) } \mathcal{A}(0, z) = 0.z = z + L(0) = z$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } \mathcal{A}(u_1 + u_2, z) &= z + L(u_1 + u_2) = z + L(u_1) + L(u_2) = (z + L(u_2)) + L(u_1) = \\ &= \mathcal{A}(u_1, z + L(u_2)) = \mathcal{A}(u_1, \mathcal{A}(u_2, z)) \end{aligned}$$

Lema 2.5.1 : *Dado um elemento $z \in \mathcal{E}_2$ existe um único elemento $\omega \in \mathcal{E}_2$ equivalente a z no sentido de (2.5.3) e satisfazendo $L^*\omega = 0$, onde L^* é o operador dual.*

Prova: Como $L : \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_2$ temos a decomposição direta.

$$\mathcal{E}_2 = \text{Im } L \oplus \text{Ker } L^*$$

Dado $z \in \mathcal{E}_2$, podemos decompor de forma única

$$z = v + \omega, \quad v \in \text{Im } L, \quad \omega \in \text{Ker } L^*$$

Existe $u \in \mathcal{E}_1$ tal que $v = -L(u)$. Então

$$\mathcal{A}(u, z) = u.z = z + L(u) = v + \omega - v = \omega.$$

■

Observação 2.5.1 : *De fato temos a decomposição direta afirmada no lema anterior.*

Seja $L : \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_2$ linear onde $\mathcal{E}_1$ e $\mathcal{E}_2$ são espaços vetoriais de dimensão finita com produto interno.

Fixado $v \in \mathcal{E}_2$, defina $f : \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$f(u) = (L(u), v).$$

f é linear e pelo teorema de representação de funcionais lineares segue que

$$f(u) = (u, \tilde{v}) = (L(u), v),$$

onde $\tilde{v}$ é unicamente determinado.

Defina $L^* : \mathcal{E}_2 \rightarrow \mathcal{E}_1$ por

$$L^*(v) = \tilde{v}.$$

L^* é linear e está bem definida.

Mais ainda, se A é a matriz de L nas bases $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ então A^T é a matriz de L^* em $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$.

Além disso L^* satisfaz $(L(u), v) = (u, L^*(v))$.

Mostremos agora que $\mathcal{E}_2 = \text{Im } L \oplus \text{Ker } L^*$

$$\text{De fato, tome } v \in \text{Im } L \cap \text{Ker } L^* \Rightarrow \begin{cases} v = L(u) \\ L^*(v) = 0 \end{cases}$$

$$\|u\|^2 = (u, u) = (L(u), v) = (u, L^*(v)) = 0 \Rightarrow v = 0$$

$$\therefore \text{Im } L \cap \text{Ker } L^* = \{0\}$$

Por outro lado, $\dim \text{Im } L = \text{posto } A = \text{posto } A^T = \dim \text{Im } L^*$

$$\dim \mathcal{E}_2 = \dim \text{Im } L^* + \dim \text{Ker } L^* = \dim \text{Im } L + \dim \text{Ker } L^*$$

como $\text{Im } L + \text{ker } L^* \subseteq \mathcal{E}_2$

$$\dim \text{Im } L + \dim \text{Ker } L^* = \dim \mathcal{E}_2$$

segue que

$$\mathcal{E}_2 = \text{im } L \oplus \text{ker } L^*.$$

■

Prova do teorema 2.4: Denote por $\mathcal{E}^{(k)}$ o espaço de todas as aplicações polinomiais homogêneas

$$\psi(x) = \left(\sum_{|I|=k} \psi_I^j x^I \right)_{j=1}^n, \quad \psi_I^j \in \mathbb{R}$$

de grau k . Defina em $\mathcal{E}^{(k)}$ o produto interno dado por

$$(\phi, \psi) = \sum_{j, I} I! \phi_I^j \psi_I^j, \quad I! = I_1! \cdots I_n! \quad (2.5.4)$$

Assim $\mathcal{E}^{(k)}$ adquire estrutura de um espaço Euclidiano. Do lema 2.5.1, escolha $\phi^{(2)} \in \mathcal{E}^{(2)}$ tal que $\omega^{(2)} \in \text{Ker } L_A^*$.

Note que nesse caso particular temos:

$$\mathcal{A} : \mathcal{E}^{(2)} \times \mathcal{E}^{(2)} \rightarrow \mathcal{E}^{(2)}$$

dada por:

$$\mathcal{A}(\phi^{(2)}(x), v^{(2)}(x)) = v^{(2)} + L_A \phi^{(2)}(x) = \omega^{(2)}(x)$$

Logo, pelo lema 2.5.1, dado $v^{(2)}(x) \in \mathcal{E}^{(2)}$, $\exists!$ $\omega^{(2)}(x)$ equivalente a $v^{(2)}(x)$ com $L_A^* \omega^{(2)}(x) = 0$, isto é, $\mathcal{A}(\phi^{(2)}(x), v^{(2)}(x)) = \omega^{(2)}(x)$, onde $\phi^{(2)}$ é tomado de forma que $\omega^{(2)} \in \text{Ker } L_A^*$. Fixado $\phi^{(2)}$ e $\omega^{(2)}$, escolha $\phi^{(3)}$ tal que

$$\omega^{(3)}(x) = L_A \phi^{(3)}(x) + v^{(3)}(x) + R_3(v^{(2)}, \phi^{(2)}, \omega^{(2)})(x)$$

pertence a $\text{Ker } L_A^*$. Desta forma, construímos, por indução, a transformação $\hat{\phi}(x) = x + \sum_{k \geq 2} \phi^{(k)}(x)$ que leva $\hat{v}$ ao campo vetorial $\hat{\omega}$ tal que

$$L_A^* \omega^{(k)}(x) = 0, \quad k = 2, 3, \dots$$

Resta mostrar agora que o operador L_A^* em $\mathcal{E}^{(k)}$ tem a forma

$$L_A^* \omega^{(k)}(x) = A^T \omega^{(k)}(x) - (\omega^{(k)}(x))' A^T x$$

Para isso, basta mostrar que

$$(A\omega(x), \psi(x)) = (\omega(x), A^T \psi(x)) \quad (2.5.5)$$

e

$$((\omega(x))' A x, \psi(x)) = (\omega(x), (\psi(x))' A^T x) \quad (2.5.6)$$

De fato, se vale (2.5.5) e (2.5.6) então:

$$(A\omega(x) - (\omega(x))' A x, \psi(x)) = (\omega(x), A^T \psi(x) - (\psi(x))' A^T x)$$

e daí,

$$(L_A \omega(x), \psi(x)) = (\omega(x), A^T \psi(x) - (\psi(x))' A^T x) = (\omega(x), L_A^* \psi(x))$$

Portanto,

$$(\omega(x), L_A^* \psi(x)) = (\omega(x), A^T \psi(x) - (\psi(x))' A^T x)$$

ou ainda,

$$(\omega(x), L_A^* \psi(x) - [A^T \psi(x) - (\psi(x))' A^T x]) = 0, \quad \forall \omega(x) \in \mathcal{E}^{(k)}$$

Assim,

$$L_A^* \psi(x) = A^T \psi(x) - (\psi(x))' A^T x.$$

É suficiente mostrar (2.5.5) e (2.5.6) para os elementos da base

$$\omega(x) = x^I e_p, \quad \psi(x) = x^J e_q.$$

Tomando

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\text{Temos: } \omega(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ x^I \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e } \psi(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ x^J \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

onde em $\omega(x)$ a posição não nula é a p-ésima coordenada e em ψ a q-ésima coordenada.

$$A\omega(x) = \begin{pmatrix} a_{1p}x^I \\ \vdots \\ a_{qp}x^I \\ \vdots \\ a_{np}x^I \end{pmatrix}$$

Ainda, se $I \neq J$, segue de (2.5.4) que

$$(A\omega, \psi) = 0 \text{ já que para } j=q \text{ temos:}$$

$$\omega_I^q = a_{qp}, \psi_J^q = 0, \omega_J^q = 0, \psi_J^q = 1 \text{ e } \psi_\theta^j = 0, |\theta| = k \text{ e } j \neq q.$$

Nesse caso também temos $(\omega, A^T \psi) = 0$

Por outro lado, se $I = J$ segue que

$$\begin{aligned} (A\omega, \psi) &= I! a_{qp} \\ (\omega, A^T \psi) &= I! a_{qp} \end{aligned} \Rightarrow (A\omega, \psi) = (\omega, A^T \psi)$$

Portanto, (2.5.5) está provado.

Agora, para (2.5.6) temos:

$$\begin{aligned}
 (\omega(x))'Ax &= \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ (I_1 x_1^{I_1-1} \cdots x_n^{I_n}) & \cdots & (I_n x_1^{I_1} \cdots x_n^{I_n-1}) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i} x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{ni} x_i \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ (I_1 x_1^{I_1-1} \cdots x_n^{I_n}) \left(\sum_{i=1}^n a_{1i} x_i \right) + \cdots + (I_n x_1^{I_1} \cdots x_n^{I_n-1}) \left(\sum_{i=1}^n a_{ni} x_i \right) \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

onde a p -ésima coordenada é não nula.

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ x^J \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

com q -ésima coordenada não nula.

Assim:

$$((\omega(x))'Ax, \psi(x)) = \begin{cases} 0 & , J \neq I - e_k + e_j \text{ ou } p \neq q. \\ I! \sum_{k=1}^n a_{kk} I_k & , J = I, p = q. \\ J! a_{kj} I_k & , J = I - e_k + e_j, p = q. \end{cases}$$

onde $1 \leq k, j \leq n$, $k \neq j$.

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
 (\psi(x))' A^T x &= \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (J_1 x_1^{J_1-1} \cdots x_n^{J_n}) & \cdots & (J_n x_1^{J_1} \cdots x_n^{J_n-1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{i1} x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{in} x_i \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ (J_1 x_1^{J_1-1} \cdots x_n^{J_n}) \left(\sum_{i=1}^n a_{i1} x_i \right) + \cdots + (J_n x_1^{J_1} \cdots x_n^{J_n-1}) \left(\sum_{i=1}^n a_{in} x_i \right) \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

onde a q-ésima coordenada é não nula.

$$\omega(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ x^I \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

com p-ésima coordenada não nula.

Daí,

$$(\omega(x), (\psi(x))' A^T x) = \begin{cases} 0 & , I \neq J - e_k + e_j \text{ ou } p \neq q. \\ J! \sum_{k=1}^n a_{kk} J_k & , I = J, p = q. \\ I! a_{jk} J_k & , I = J - e_k + e_j, p = q. \end{cases}$$

Note que se temos a condição $J = I - e_k + e_j$, $p = q$ então $I = J - e_j + e_k$, $p = q$ e daí,

$$(\omega(x), (\psi(x))' A^T x) = I! a_{kj} J_j$$

Mas $(I_1 \cdots I_j \cdots I_k \cdots I_n) = (J_1 \cdots J_j - 1 \cdots J_k + 1 \cdots J_n)$,

ou seja, $J_j = I_j + 1$ e assim,

$$(\omega(x), (\psi(x))' A^T x) = I_1! \cdots I_n! a_{kj} J_j = J_1 \cdots (J_j - 1)! \cdots (J_k + 1)! \cdots J_n! a_{kj} J_j = J! a_{kj} (J_k + 1) = J! a_{kj} I_k$$

e portanto temos a igualdade

$$((\omega(x))' A x, \psi(x)) = (\omega(x), (\psi(x))' A^T x)$$

Note que a igualdade $Bh(x) = h'(x)Bx$ é equivalente a igualdade

$$h(e^{tB}x) = e^{tB}h(x), \quad t \in \mathbb{R} \quad (2.5.7)$$

De fato, seja

$$\gamma(t) = e^{-tB}h(e^{tB}x)$$

Então $\gamma(0) = h(x)$. Ainda,

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= e^{-tB}h'(e^{tB}x)e^{tB}Bx - e^{-tB}Bh(e^{tB}x) = \\ &= e^{-tB}[h'(e^{tB}x)Be^{tB}x - Bh(e^{tB}x)] = 0 \end{aligned}$$

Logo, $\gamma(t) = cte = h(x)$ e assim,

$$e^{-tB}h(e^{tB}x) = h(x) \Rightarrow h(e^{tB}x) = e^{tB}h(x), \quad t \in \mathbb{R}$$

Reciprocamente, diferenciando (2.5.7) em relação a t e tomando $t = 0$, obtemos $Bh(x) = h'(x)Bx$.

Em particular, se A^T triangular

$$A^T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & & \\ & \ddots & & * \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Então, tomando $B = A^T$ obtemos: $B = D + N$, onde

$$N = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \cdots & \alpha_{1n} \\ 0 & 0 & \alpha_{23} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
e^{tB}x &= e^{tN}e^{tD}x = \\
&= \begin{pmatrix} 1 & t\alpha_{12} & t\alpha_{13} + t^2\beta_{13} & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & t\alpha_{23} & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & \ddots & t\alpha_{n-1,n} \\ 0 & & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{t\alpha_1} & & & & 0 \\ & e^{t\alpha_2} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & e^{t\alpha_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & t\alpha_{12}e^{t\lambda_2} & (t\alpha_{13} + t^2\beta_{13})e^{t\lambda_3} & \cdots & (t\alpha_{1n} + t^2\beta_{1n} + \cdots + t^{n-1}\gamma_{1n})e^{t\lambda_n} \\ 0 & e^{t\lambda_2} & t\alpha_{23}e^{t\lambda_3} & \cdots & (t\alpha_{2n} + t^2\beta_{2n} + \cdots + t^{n-1}\eta_{2n})e^{t\lambda_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & e^{t\lambda_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1}x_1 + t\alpha_{12}e^{t\lambda_2}x_2 + (t\alpha_{13} + t^2\beta_{13})e^{t\lambda_3}x_3 + \cdots + (t\alpha_{1n} + t^2\beta_{1n} + \cdots + t^{n-1}\gamma_{1n})e^{t\lambda_n}x_n \\ e^{t\lambda_2}x_2 + t\alpha_{23}e^{t\lambda_3}x_3 + \cdots + (t\alpha_{2n} + t^2\beta_{2n} + \cdots + t^{n-1}\eta_{2n})e^{t\lambda_n}x_n \\ \vdots \\ e^{t\lambda_n}x_n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

E como $h(x) = \left(\sum_I h_I^i x^I \right)_{i=1}^n = \left(\sum_I h_I^i x_1^{I_1} \cdots x_n^{I_n} \right)_{i=1}^n$

segue que:

$$h(e^{tB}x) = \left(\sum_I h_I^i (e^{t\lambda_1}x_1 + \cdots)^{I_1} \cdots (e^{t\lambda_n}x_n)^{I_n} \right)_{i=1}^n$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
e^{tB}h(x) &= e^{tN}e^{tD}h(x) = \\
&= \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} \sum_I h_I^1 x^I + t\alpha_{12}e^{t\lambda_2} \sum_I h_I^2 x^I + \cdots + (t\alpha_{1n} + t^2\beta_{1n} + \cdots + t^{n-1}\gamma_{1n})e^{t\lambda_n} \sum_I h_I^n x^I \\ e^{t\lambda_2} \sum_I h_I^2 x^I + \cdots + (t\alpha_{2n} + t^2\beta_{2n} + \cdots + t^{n-2}\eta_{2n})e^{t\lambda_n} \sum_I h_I^n x^I \\ \vdots \\ e^{t\lambda_n} \sum_I h_I^n x^I \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Da equação (2.5.7) obtemos a igualdade:

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_I h_I^i (e^{t\lambda_1}x_1 + \cdots)^{I_1} \cdots (e^{t\lambda_n}x_n)^{I_n} \right)_{i=1}^n = \\
&= (e^{t\lambda_1} \sum_I h_I^1 x^I + \alpha_{12}t \sum_I h_I^2 x^I + \cdots, e^{t\lambda_2} \sum_I h_I^2 x^I + \alpha_{23}t \sum_I h_I^3 x^I + \cdots, \cdots, e^{t\lambda_n} \sum_I h_I^n x^I)
\end{aligned}$$

Igualando os coeficientes correspondentes aos termos que dependem de t apenas exponencialmente obtemos:

$$h_I^i e^{t\lambda_1 I_1} \dots e^{t\lambda_n I_n} = e^{t\lambda_i} h_I^i \Rightarrow e^{t(I, \lambda)} h_I^i = e^{t\lambda_i} h_I^i$$

Portanto, (2.5.2) implica na condição

$$\lambda_i \neq \sum_{k=1}^n I_k \lambda_k \Rightarrow h_I^i = 0$$

Tal condição, por sua vez, é equivalente a

$$h(e^{tD}x) = e^{tD}h(x), \quad D = \text{diad}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \quad (2.5.8)$$

ou

$$h'(x)Dx = Dh(x).$$

Um campo vetorial satisfazendo essa igualdade é chamado forma normal ressonante ou *forma normal de Poincaré-Dulac*.

Exemplo 2.5.1 : Considere a forma normal (2.5.2) para o caso bi-dimensional. Existem as seguintes possibilidades para os autovalores $\lambda_1, \lambda_2 \in \text{spec } A$

a) $\lambda_1 \neq \lambda_2$ reais.

Nesse caso podemos colocar A na forma diagonal, isto é, $A = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$. Os termos ressonantes são tais que

$\langle I, \lambda \rangle = \lambda_i$, ou seja, se $I = (p, q)$ então

$$p\lambda_1 + q\lambda_2 = \lambda_i$$

e a forma normal (2.5.2) é dada por

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda_1 x + \sum_{p+q \geq 2} h_{pq}^1 x^p y^q \\ \dot{y} = \lambda_2 y + \sum_{p+q \geq 2} h_{pq}^2 x^p y^q \end{cases}$$

onde $h_{pq}^i = 0$ quando $\lambda_i \neq p\lambda_1 + q\lambda_2$.

b) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$.

Nesse caso não existem termos ressonantes, já que

$$p\lambda_1 + q\lambda_2 = p\lambda + q\lambda = (p+q)\lambda \neq \lambda$$

e portanto

$$\langle I, \lambda \rangle \neq \lambda_i$$

Portanto, a forma normal é linear

$$\dot{X} = A.X$$

c) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Nessas condições existem duas possibilidades:

c.1) $A = 0$ e (2.5.2) não nos fornece nada, já que

$$A^T h(X) = h'(X) A^T X, \quad \forall h$$

c.2) A pode ser colocada na forma de Jordan

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Então a forma normal ressonante é vazia, já que $D = 0$ e (2.5.8) segue para todo h . Mas (2.5.2) com $A = J$ implica:

$$h(X) = (h_1(X), h_2(X))^T$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Daí,

$$A^T h(X) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ h_1 \end{pmatrix}$$

$$h'(X) A^T X = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x} & \frac{\partial h_1}{\partial y} \\ \frac{\partial h_2}{\partial x} & \frac{\partial h_2}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial y} x \\ \frac{\partial h_2}{\partial y} x \end{pmatrix}$$

Da igualdade $A^T h(X) = h'(X) A^T X$ segue que:

$$\frac{\partial h_1}{\partial y} x = 0$$

$$\frac{\partial h_2}{\partial y} x = h_1$$

Assim,

$$\frac{\partial h_1}{\partial y} = 0 \Rightarrow h_1 = h_1(x) = x\psi(x)$$

e

$$\frac{\partial h_2}{\partial y} x = h_1(x) \Rightarrow \frac{\partial h_2}{\partial y} = \frac{h_1(x)}{x} \Rightarrow h_2 = y \frac{h_1(x)}{x} = y\psi(x)$$

Portanto, segue que a forma normal é dada por:

$$\begin{cases} \dot{x} = y + x\psi(x) \\ \dot{y} = y\psi(x) \end{cases}$$

onde $\psi(z)$ é uma série formal de uma única variável.

d) $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$ com $\beta \neq 0$

d.1) $\alpha \neq 0$.

$$p\lambda_1 + q\lambda_2 = p(\alpha + i\beta) + q(\alpha - i\beta) = (p+q)\alpha + i(p-q)\beta \neq \lambda_i, \quad i = 1, 2$$

já que $p+q \geq 2$

Portanto não existem termos ressonantes, e daí, a forma normal é linear.

d.2) $\alpha = 0$:

Nesse caso a condição de ressonância nos dá:

$$\begin{aligned} p\lambda_1 + q\lambda_2 &= ip\beta - iq\beta = i\beta(p-q) = \begin{cases} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} i\beta(p-q) = i\beta \\ i\beta(p-q) = -i\beta \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} p-q = 1 \\ p-q = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = q+1 & (\lambda_1) \\ q = p+1 & (\lambda_2) \end{cases} \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{cases} \lambda_1 = (q+1)\lambda_1 + q\lambda_2 \\ \lambda_2 = p\lambda_1 + (p+1)\lambda_2 \end{cases}$$

A matriz A é similar à matriz anti-simétrica

$$S = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix}.$$

Então, como $S^{2k} = \begin{pmatrix} (-1)^k \beta^{2k} & 0 \\ 0 & (-1)^k \beta^{2k} \end{pmatrix}$ e $S^{2k+1} = \begin{pmatrix} 0 & (-1)^k \beta^{2k+1} \\ (-1)^k \beta^{2k+1} & 0 \end{pmatrix}$

segue que

$$e^{tS} = \begin{pmatrix} \cos \beta t & \sin \beta t \\ -\sin \beta t & \cos \beta t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

é uma matriz ortogonal.

Em coordenadas complexas

$$z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy$$

podemos escrever:

$$S_{\mathbb{C}} = M_{\mathbb{C}}^{-1} S M_{\mathbb{C}} = \begin{pmatrix} i\beta & 0 \\ 0 & -i\beta \end{pmatrix}$$

onde $M_{\mathbb{C}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$ sendo suas colunas composta pelos autovetores de S normalizados.

Ainda,

$$e^{tS_{\mathbb{C}}} = \begin{pmatrix} e^{i\beta t} & 0 \\ 0 & e^{-i\beta t} \end{pmatrix} \text{ e portanto}$$

$$e^{tS_{\mathbb{C}}} \begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\beta t} z \\ e^{-i\beta t} \bar{z} \end{pmatrix}.$$

Assim, tomando

$$h(X) = \tilde{h}(z, \bar{z}) = \sum \tilde{h}_{pq} z^p \bar{z}^q, \quad \tilde{h}_{pq} \in \mathbb{C}$$

obtemos de (2.5.7) com $B = S_{\mathbb{C}}$:

$$\tilde{h}(e^{i\beta t} z, e^{-i\beta t} \bar{z}) = e^{i\beta t} \tilde{h}(z, \bar{z}).$$

Mas, por outro lado,

$$\tilde{h}(e^{i\beta t} z, e^{-i\beta t} \bar{z}) = \sum \tilde{h}_{pq} e^{ip\beta t} z^p e^{-iq\beta t} \bar{z}^q = e^{i(p-q)\beta t} \sum \tilde{h}_{pq} z^p \bar{z}^q = e^{i(p-q)\beta t} \tilde{h}(z, \bar{z})$$

Donde, $e^{i\beta t} \tilde{h}(z, \bar{z}) = e^{i(p-q)\beta t} \tilde{h}(z, \bar{z})$ e assim

$$p - q = 1 \Rightarrow p = q + 1$$

o que implica,

$$\tilde{h}(z, \bar{z}) = \sum_{q \geq 1} a_q z^{q+1} \bar{z}^q = z \sum_{q \geq 1} a_q (|z|^2)^q = z g(|z|^2).$$

Assim, a forma normal nesse caso é

$$\dot{z} = i\beta z + z g(|z|^2) \quad (2.5.9)$$

com uma série formal complexa $g(u) = \sum_{k \geq 1} g_k u^k$, $g_k \in \mathbb{C}$.

Consideremos agora $g(u) = \operatorname{Re} g(u) + i \operatorname{Im} g(u) = \alpha(u) + i\gamma(u)$

Daí, podemos escrever (2.5.9) na forma,

$$\dot{z} = i\beta z + z(\alpha(|z|^2) + i\gamma(|z|^2))$$

como $z = x + iy$ segue que:

$$\dot{x} + i\dot{y} = i\beta(x + iy) + (x + iy)(\alpha(x^2 + y^2) + i\gamma(x^2 + y^2))$$

o que implica

$$\dot{x} + i\dot{y} = -\beta y + i\beta x + [\alpha(x^2 + y^2)x - \gamma(x^2 + y^2)y] + i[\alpha(x^2 + y^2)y + \gamma(x^2 + y^2)x]$$

$$\text{Logo, } \begin{cases} \dot{x} = -\beta y + \alpha(x^2 + y^2)x - \gamma(x^2 + y^2)y \\ \dot{y} = \beta x + \alpha(x^2 + y^2)y + \gamma(x^2 + y^2)x \end{cases}$$

Em coordenadas polares obtemos:

$$\dot{r} = \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{r} = \frac{x(-\beta y + \alpha x - \gamma y) + y(\beta x + \alpha y + \gamma x)}{r} = \alpha r$$

$$\dot{\theta} = \frac{y\dot{x} - x\dot{y}}{r^2} = \frac{(\beta x + \alpha y + \gamma x)x - y(-\gamma y + \alpha x - \beta y)}{r^2} = \beta + \gamma$$

onde $\alpha = \alpha(r^2)$ e $\gamma = \gamma(r^2)$.

Daí, segue que:

$$\begin{cases} \dot{r} = \alpha(r^2)r \\ \dot{\theta} = \beta + \gamma(r^2) \end{cases}$$

O caso $\operatorname{Re} g(u) \neq 0$ é equivalente a $\alpha(r^2) \neq 0$; nesse caso o ponto $x = 0$ é chamado *foco*. Quando $\operatorname{Re} g(u) = 0$ temos $\alpha(r^2) = 0$ e o sistema fica na forma

$$\begin{cases} \dot{r} = 0 \\ \dot{\theta} = \beta + \gamma(r^2) \end{cases}$$

onde $x = 0$ corresponde a um *centro*: todas as órbitas são fechadas.

A condição (2.5.2) pode ser introduzida para aplicações C^∞ . Então, surge a seguinte pergunta:

Todo campo vetorial C^∞

$$v(x) = Ax + \dots$$

pode ser reduzido à forma

$$\omega(x) = Ax + h(x), \quad h'(x)A^T x = A^T h(x)$$

por uma transformação C^∞ local ϕ ?

Em princípio, notemos a seguinte generalização do lema de Borel (Lema 2.3.1):

Dada uma aplicação formal $\hat{h}(x)$ satisfazendo (2.5.2) existe uma aplicação local C^∞ $h(x)$ satisfazendo (2.5.2), cuja série de Taylor formal em zero é igual a $\hat{h}(x)$.

Combinando tal resultado com o teorema 2.4 obtemos

Corolário 2.5 : *Dado um campo vetorial C^∞ , $v(x) = Ax + \dots$ existe uma transformação C^∞ , $\phi(x)$, que leva v à forma $(\phi_* v)(x) = Ax + h(x) + \tau(x)$, onde $h(x) = o(x^2)$ satisfaz (2.5.2) e τ é “flat” residual.*

Se v é hiperbólico em zero, $\tau(x)$ pode ser eliminado por uma transformação C^∞ (Teorema de Sternberg-Chen). Veremos, mais adiante, que o mesmo ocorre em alguns casos não hiperbólicos.

Prova do Corolário 2.5:

Dado $v(x) = Ax + \dots$ existe $\hat{\phi}$ tal que

$$(\hat{\phi}_* \hat{v})(x) = Ax + \hat{h}(x), \quad A^T \hat{h}(x) = \hat{h}'(x) A^T x$$

Por outro lado, $\exists h \in C^\infty$ com $A^T h(x) = h'(x) A^T x$ e que tem série formal de Taylor $\hat{h}$. Então $h(x) = \hat{h}(x) + \tilde{\tau}(x)$.

Daí,

$$Ax + h(x) = Ax + \hat{h}(x) + \tilde{\tau}(x) \Rightarrow Ax + \hat{h}(x) = Ax + h(x) + \tau_1(x).$$

Também, $(\phi_* v)(x)$ tem série formal de Taylor $\hat{\phi}_* \hat{v}$, onde $\phi \in C^\infty$.

Assim,

$$(\phi_* v)(x) = (\hat{\phi}_* \hat{v})(x) + \tau_2(x) = Ax + h(x) + \tau_1(x) + \tau_2(x) = Ax + h(x) + \tau(x).$$

$$\therefore (\phi_* v)(x) = Ax + h(x) + \tau(x)$$

onde τ é um “flat”, $\phi \in C^\infty$ e $A^T h(x) = h'(x) A^T x$.

■

2.6 Equação da forma normal. Teorema principal

Note que, se $A = 0$ então todo campo vetorial formal satisfaz (2.5.2). Por isso, é natural tentarmos encontrar formas normais mais exatas.

Para esse fim, introduzimos as seguintes notações:

Dado um polinômio $P(x) = \sum P_I x^I$ denote $P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ o operador diferencial no espaço de séries formais $U(x) = \sum_J U_J x^J$

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)U = \sum_I P_I \frac{\partial^I U}{\partial x_1^{I_1} \cdots \partial x_n^{I_n}}.$$

Da mesma forma, definimos o operador $P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ para uma matriz $P = (P_{ij})$ sobre o anel de polinômios. Relembrando que denotamos por B^T a matriz transposta de $B = (b_{ij}^j)$.

Também, dado um campo vetorial polinomial $P(x) = (P_1(x), \dots, P^n(x))$, denotemos por $\mathcal{L}P$ o operador, agindo no espaço de todos os campos vetoriais formais $\omega = (\omega^1, \dots, \omega^n)$ pela fórmula

$$(\mathcal{L}P)\omega = \left(\sum_{i=1}^n x_i P^i \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \omega^j(x) \right)_{j=1}^n - \left(P' \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^T \right) \omega(x).$$

Exemplo 2.6.1 : Se $n = 1$, então

$$(\mathcal{L}P)\omega = \sum_k \left(P_k \frac{\partial^k \omega(x)}{\partial x^k} x - k P_k \frac{\partial^{k-1} \omega}{\partial x^{k-1}} \right)$$

para $P(x) = \sum P_k x^k$ e uma aplicação formal ω .

De fato,

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\omega = \sum_k P_k \frac{\partial^k \omega(x)}{\partial x^k}, \quad P'(x) = \sum_k k P_k x^{k-1}$$

e daí,

$$P'\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^T \omega = \sum_k k P_k \frac{\partial^{k-1} \omega}{\partial x^{k-1}}$$

Exemplo 2.6.2 : Suponha que $P(x) = Ax$ seja uma aplicação linear em $\mathbb{R}^n$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad P(x) = (a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n, \dots, a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n).$$

$$P'(x) = A$$

$$P_i(x) = \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k.$$

$$P^i \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \omega^j = \sum_{k=1}^n a_{ik} \frac{\partial \omega^j}{\partial x^k}$$

e então

$$(\mathcal{L}P)\omega = \omega'(x)A^T x - A^T \omega(x).$$

Dado um campo vetorial formal $\omega(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \omega^{(j)}(x)$ denotemos por $pr_k \omega$ sua projeção no espaço das aplicações polinomiais de grau $\leq k$, isto é,

$$pr_k \omega = \sum_{j \leq k} \omega^{(j)}(x).$$

Definição 2.6.1 : Um campo vetorial formal $\omega = \sum_{j \geq 1} \omega^{(j)}(x)$ é chamado forma normal se satisfaz as equações

$$(\mathcal{L}pr_{k-1}\omega)\omega^{(k)} = (\mathcal{L}pr_{k-1}\omega)v_{k-1}, \quad k = 2, 3, \dots \quad (2.6.1)$$

onde v_{k-1} são alguns campos vetoriais polinomiais de grau $\leq k-1$.

Chamamos (2.6.1) de equação da forma normal.

Em particular, se ω satisfaz a igualdade

$$(\mathcal{L}pr_{k-1}\omega)\omega^{(k)} = 0 \quad k = 2, 3, \dots \quad (2.6.2)$$

então podemos tomar $v_{k-1} = 0$ em (2.6.1), e assim, ω é uma forma normal.

Exemplo 2.6.3 : Se $\omega(x) = Ax + \omega^{(p)}(x)$, $p \geq 2$ onde $\omega^{(p)}$ satisfaz (2.5.2), então (2.6.2) é válida e ω é uma forma normal.

De fato, $pr_{p-1}\omega = Ax$ e daí,

$$(\mathcal{L}pr_{p-1}\omega)\omega^{(p)} = (\omega^{(p)})'(x)A^T x - A^T \omega^{(p)}(x) = 0$$

onde a última igualdade segue da condição (2.5.2).

Se $k \neq p$ então $\omega^{(k)} = 0$ e assim

$$(\mathcal{L}pr_{k-1}\omega)\omega^{(k)} = 0.$$

No entanto, de maneira geral, uma forma normal não satisfaz (2.6.2). Como

$$\mathcal{L}pr_{k-1}\omega = \sum_{j \leq k-1} \mathcal{L}\omega^{(j)} \quad (2.6.3)$$

podemos reescrever (2.6.1) na forma

$$(\mathcal{L}\omega^{(j)})(\omega^{(k)}) = \sum_{s=1}^{k-1} (\mathcal{L}\omega^{(s)})(v^{k-j+s}) \quad (2.6.4)$$

para $j = 1, \dots, k-1$ e $j-s \geq 1$.

Para isso basta notar que

$$(\mathcal{L}\omega^{(j)})\omega^{(k)} = \left(\sum_{i=1}^n x_i \omega_i^{(j)} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \omega_j^{(x)} \right)^n - \left[(\omega^{(j)})' \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \right]^T \omega^{(k)}(x)$$

é composta por monômios de grau $k-j+1$ e como de (2.6.1) e (2.6.3) temos

$$\sum_{j \leq k-1} (\mathcal{L}\omega^{(j)})\omega^{(k)} = \sum_{j \leq k-1} (\mathcal{L}\omega^{(j)})(v_{k-1}) = \sum_{s \leq k-1} (\mathcal{L}\omega^{(s)}) \left(\sum_{j=1}^{k-1} v^{(j)} \right)$$

basta igualar os termos de ordem $k-j+1$ na igualdade acima e então obtemos (2.6.4). Em particular, suponha que $\omega^{(j)} = 0$, $j \leq p-1$.

Tome $j = p$ em (2.6.4). Então a expressão no lado direito de (2.6.4) satisfaz

$$\sum_{s=p}^{k-1} (\mathcal{L}\omega^{(s)})(v^{k-p+s}) = 0$$

já que $s \geq p$ e ao mesmo tempo $p-s \geq 1$.

Daí, segue que

$$(\mathcal{L}\omega^{(p)})(\omega^{(k)}) = 0, \quad k \geq p+1$$

Portanto, se $\omega = \omega^{(p)} + \dots$ é uma forma normal então

$$(\mathcal{L}\omega^{(p)})(\omega - \omega^{(p)}) = 0 \quad (2.6.5)$$

Exemplo 2.6.4 : Se um campo vetorial $\omega(x) = \pm x^p + \sum_{k \geq p+1} h_k x^k$ na reta é uma forma normal então (2.6.4) nos dá:

$$(\mathcal{L}\omega^{(p)})(\omega - \omega^{(p)}) = (\mathcal{L}x^p) \left(\sum_{k \geq p+1} h_k x^k \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= x \frac{\partial^p}{\partial x^p} \left(\sum_{k \geq p+1} h_k x^k \right) - p \frac{\partial^{p-1}}{\partial x^{p-1}} \left(\sum_{k \geq p+1} h_k x^k \right) = 0 \\
&\Rightarrow x \sum_{k \geq p+1} h_k \frac{\partial^p}{\partial x^p} x^k - p \sum_{k \geq p+1} h_k \frac{\partial^{p-1}}{\partial x^{p-1}} x^k = 0 \\
&\Rightarrow h_k \frac{\partial^p x^k}{\partial x^p} - p h_k \frac{\partial^{p-1} x^k}{\partial x^{p-1}} = 0
\end{aligned}$$

ou ainda,

$$h_k [k(k-1) \dots (k-p+1) - p k(k-1) \dots (k-p+2)] = 0$$

Logo,

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} h_k = 0 \text{ ou} \\ k(k-1) \dots (k-(p-2))(k-(p-1)) - p k(k-1) \dots (k-(p-2)) = 0 \end{cases} \\
&\Rightarrow \begin{cases} h_k = 0 \text{ ou} \\ k(k-1) \dots (k-(p-2))((k-(p-1)) - p) = 0 \end{cases} \\
&\qquad \qquad \qquad \begin{cases} h_k = 0 \text{ ou} \\ k = 2p-1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Donde segue que

$$h_k = 0 \text{ se } k \neq 2p-1$$

Esse resultado coincide com o teorema 2.1.

O principal resultado formal consiste na possibilidade de reduzir qualquer campo vetorial formal à forma normal.

Mais precisamente, denote por G o grupo de todas as transformações formais $\phi(x) = x + \dots$, isto é, $\phi'(0) = I$.

Teorema 2.6 [4]: *Dado um campo vetorial formal $\hat{v}$ existe uma única forma normal $\hat{\omega}$ que é formalmente conjugada a $\hat{v}$ no grupo, isto é,*

$$\hat{\omega} = \hat{\phi}_* \hat{v}, \quad \hat{\phi} \in G.$$

Com base nesse teorema a propriedade (2.6.5) de forma normal nos dá

Corolário 2.7 : *Dado um campo vetorial formal $v = v^{(p)}(x) + \dots$ por uma transformação formal $\phi(x) = x + \dots$ pode ser reduzido a um campo vetorial $\omega = v^{(p)} + \sum_{k \geq p+1} \omega^{(k)}$ satisfazendo a equação*

$$(\mathcal{L}v^{(p)})(\omega - v^{(p)}) = 0.$$

Esse corolário é uma generalização do teorema 2.4 o qual corresponde ao caso $p = 1$ (veja ex.(2.6.2)).

A prova do teorema 2.6 consiste de uma aplicação sequencial do lema 2.5.1 para espaços Euclidianos $\mathcal{E}_k$ de campos vetoriais polinomiais de grau $\leq k$, $k = 2, 3, \dots$ munido do produto interno (2.5.4). Uma prova completa pode ser encontrada em [4].

2.7 ω -definição de Campos Vetoriais Locais

Segue do teorema 2.6 e do lema 2.3.1 **Lema de Borel** que todo campo vetorial local C^∞ pode ser reduzido por uma transformação local C^∞ , ϕ , a um campo vetorial $\omega = \phi_* v$ tal que a série de Taylor $\hat{\omega}$ em zero é a forma normal.

Mais ainda, pelo Teorema 2.3 **Teorema de Sternberg-Chen**, se v_1 e v_2 são dois campos vetoriais hiperbólicos com a mesma forma normal das séries de Taylor $\hat{v}_1$ e $\hat{v}_2$ então eles são C^∞ -conjugados. Em outras palavras, a forma normal formal nos dá uma classificação completa dos campos vetoriais locais hiperbólicos com respeito a transformações C^∞ , $\phi = x + \dots$.

Já no caso não-hiperbólico isso não é verdade: pode acontecer que campos vetoriais v_1 e v_2 tendo a mesma forma normal formal de séries de Taylor $\hat{v}_1$ e $\hat{v}_2$ que não são C^∞ -conjugados. Dessa forma, é importante verificar em quais casos, não hiperbólicos, conjugação formal implica conjugação C^∞ .

Definição 2.7.1 : *Dizemos que um campo vetorial v é ω -definido se qualquer campo vetorial que é formalmente conjugado a v , é C^∞ -conjugado a v .*

Como exemplo, temos que todo campo vetorial hiperbólico é ω -definido (Teorema de Sternberg-Chen).

Se $v(x) = Ax + \dots$ é não-hiperbólico, então existe um subespaço $L_c \subset \mathbb{R}^n$, invariante com relação a A , tal que todos os autovalores da restrição $A|_{L_c}$ estão no eixo imaginário.

Em nosso contexto, sem perda de generalidade, podemos assumir que L_c é invariante com relação a v . De fato, existe uma transformação C^∞ local, ϕ , e um “flat” residual tal que L_c é invariante com relação ao campo vetorial $\omega = \phi_* v + \tau$. Dessa forma $\phi^{-1}(L_c)$ é a variedade centro formalmente invariante para o campo vetorial v .

As investigações posteriores de ω -definição são baseadas no seguinte teorema:

Teorema 2.8 [4]: *Um campo vetorial v com apenas um autovalor nulo simples ou apenas um par de autovalores imaginários puros no eixo imaginário contém um conjunto excepcional N de codimensão infinita, fora do qual todos os campos formalmente conjugados a v são C^∞ -conjugados a v .*

Suponhamos que $\dim L_c \leq 2$, onde o campo vetorial tem um autovalor nulo ($\dim L_c = 1$) ou um par de autovalores imaginários puros ($\dim L_c = 2$).

Para esses caso, defina N como:

Se $\dim L_c = 1$ então N consiste de todos os campos $\hat{v}$ para os quais $\hat{W}_c = 0$, onde $\hat{W}$ é a forma normal ressonante de $\hat{v}$ e $\hat{W}_c = \hat{W}|_{L_c}$. Se $\dim L_c = 2$ então N consiste de todos os campos $\hat{v}$ para os quais $\hat{W}_c$ é tal que $\text{Re}(g)=0$.

Lembremos que nesse caso, $D_c = D|_{L_c}$ é não totalmente degenerado e o campo $\hat{W}_c$ tem a seguinte forma em coordenadas complexas:

$$\dot{z} = z(i\beta + g(|z|^2))$$

onde $\pm i\beta$, $\beta \neq 0$ são os autovalores de D_c e g é uma série formal com valores complexos sem termos livres.

Para o caso 1-dimensional se $\hat{v} \notin N$ então vimos que $\hat{v}$ pode ser reduzido por meio de uma transformação C^∞ , ϕ , à forma normal

$$\dot{x} = \pm x^p + dx^{2p-1}$$

onde p e d são invariantes do campo.

Para o caso 2-dimensional se $v \notin N$ então $\hat{v}$ tem uma aproximação linear do tipo centro e é formalmente conjugada à forma normal dada por

$$\dot{z} = z(i\omega \pm i|z|^{2l} + b_o|z|^{2p} + \dots + b_{l-p}^{4p-2l} + b_p|z|^{4p})$$

onde l e p são inteiros, $1 \leq l \leq p < \infty$, $b_o, \dots, b_p \in \mathbb{R}$, $b_o \neq 0$ e $l, p, b_o, \dots, b_{l-p}$ são invariantes do campo $\hat{v}$.

Essa forma normal foi obtida por M. Zhitomirskii em [24].

Segue do teorema 2.8 que podemos substituir “formalmente conjugado” por “ C^∞ -conjugado”.

Portanto, se v é um campo vetorial tal que $\dim L_c \leq 2$ e $v|_{L_c}$ não é “totalmente degenerado” então v é ω -definido.

Segue do corolário 2.5 e do teorema 2.8 o seguinte:

Corolário 2.9 *Um campo vetorial local C^∞ $v(x) = Ax + \dots \notin N$ pode ser reduzido por uma transformação C^∞ à forma*

$$\omega(x) = Ax + h(x), \quad h'(x)A^T x = A'h(x).$$

Capítulo 3

Órbitas Homoclínicas em Sistemas Reversíveis

Consideraremos, a partir daqui, sistemas dinâmicos de dimensão $2n$ que são reversíveis segundo uma involução linear R tal que $\dim \text{Fix}(R) = n$, isto é,

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^{2n}, \quad Rf(x) = -f(Rx), \quad R^2 = Id, \quad \mathcal{S} = \text{Fix}(R) \simeq \mathbb{R}^n \quad (3.0.1)$$

O subespaço linear $\mathcal{S}$ é chamado *seção simétrica* da reversibilidade.

Vários teoremas para sistemas Hamiltonianos têm similares para sistemas reversíveis. Um exemplo desse fato é o resultado de que trajetórias homoclínicas simétricas sob a reversibilidade são de codimensão zero, isto é, elas persistem sob perturbações genéricas que preservam a reversibilidade [9].

Relembremos que uma órbita homoclínica simétrica para o sistema (3.0.1) é definida como sendo

$$\Gamma = \{\gamma(t) / t \in \mathbb{R}\}$$

onde $\gamma(t)$ é uma solução de (3.0.1) satisfazendo

$$\gamma(t) \rightarrow x^* \text{ quando } t \rightarrow \pm\infty, \quad \gamma(0) \in \mathcal{S}, \quad \text{onde } f(x^*) = 0 \text{ e } x^* \in \mathcal{S}.$$

3.1 Uma equação de ordem quatro canônica; bifurcação local.

3.1.1 A equação

Consideraremos um campo vetorial X em $\mathbb{R}^4$ definido por

$$\dot{X} = AX + F(X), \quad X = (x_1, x_2, x_3, x_4) \quad (3.1.1)$$

que é reversível com relação a uma involução linear R tal que $\dim \text{Fix}(R) = 2$ e $0 \in \text{Fix}(R)$. A função $F(X)$ não possui termos constantes ou parte linear.

A matriz $A = DX(0)$ é, em particular, R -reversível. Daí,

$$AR = -RA$$

Os autovalores da matriz A são obtidos através do seu polinômio característico

$$p(\lambda) = \text{Det}(A - \lambda I) = 0.$$

Das relações $R \circ R = Id$ e $AR = -RA$ obtemos:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \text{Det}((AR - \lambda R)R) = \text{Det}(AR - \lambda R) \text{Det } R \\ &= \text{Det}(-RA - \lambda R) \text{Det } R = (\text{Det } R)^2 \text{Det}(-A - \lambda I) = \text{Det}(A + \lambda I) = p(-\lambda) \end{aligned}$$

Daí o polinômio característico toma a seguinte forma:

$$\lambda^4 - b\lambda^2 + a = 0$$

onde a e b são parâmetros reais.

3.1.2 Linearização e Formas Normais

Com o objetivo de analisar a estrutura dos pontos homoclínicos de (3.1.1) inicialmente consideraremos sua linearização, isto é,

$$\dot{X} = AX.$$

Os autovalores desse problema satisfazem a equação característica

$$\lambda^4 - b\lambda^2 + a = 0,$$

ou seja, $p(\lambda) = \lambda^4 - b\lambda^2 + a = 0$, é o polinômio característico do problema linearizado.

Daí segue que: se λ é autovalor, $-\lambda$ também o é, mais ainda, $\bar{\lambda}$ também é autovalor.

Logo o espectro é simétrico com relação aos eixos real e imaginário. Segue da definição de reversibilidade que essa simetria no espectro ocorre para todo ponto de equilíbrio simétrico.

É claro que a classificação de tais campos de vetores vai depender apenas dos parâmetros a e b . Desta forma, podemos identificar quatro regiões distintas do plano de parâmetros correspondendo a dinâmicas qualitativamente distintas. As quatro regiões são limitadas pelas seguintes curvas de codimensão 1 (no sentido de que perturbações no campo reversível por uma família a um parâmetro de campos de vetores nos dá todos os tipos topológicos distintos).

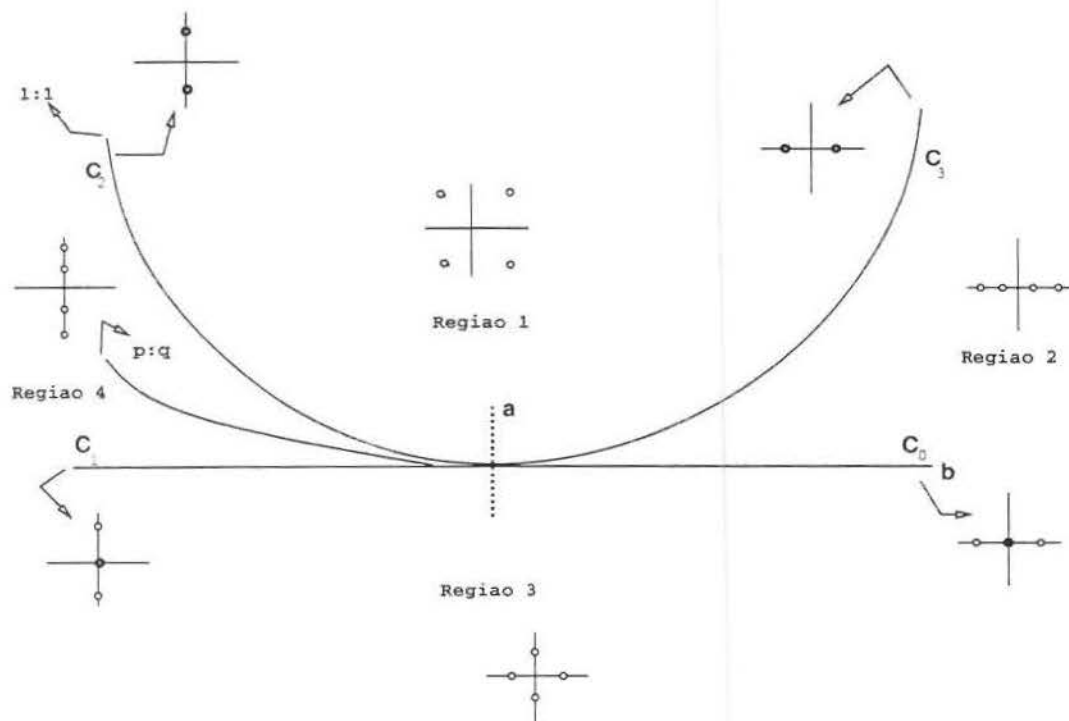


Figura 3.1: Linearização de 3.1.1 na origem.

C_0 : dada por $a = 0$, $b > 0$ na qual o problema linear possui dois autovalores nulos e

dois reais.

$$\lambda_{1,2} = 0, \quad \lambda_{3,4} = \pm\sqrt{b}$$

C_1 : dada por $a = 0$, $b < 0$ na qual o problema linear possui dois autovalores nulos e dois imaginários puros.

$$\lambda_{1,2} = 0, \quad \lambda_{3,4} = \pm i\sqrt{|b|}$$

C_2 : dada por $b = -2\sqrt{a}$, onde existe um par de autovalores imaginários duplos conjugados.

$$\lambda = \pm i\sqrt{\frac{|b|}{2}}$$

C_3 : dada por $b = 2\sqrt{a}$, onde existem dois pares de autovalores reais, simétricos com relação à origem.

$$\lambda = \pm\sqrt{\frac{b}{2}}$$

As quatro curvas se encontram em um ponto de codimensão dois $a = b = 0$ onde a linearização do sistema correspondente a (3.1.1) tem quatro autovalores nulos com multiplicidade geométrica um.

Iooss analisou uma forma normal para um tal ponto de codimensão dois, aparecendo, em geral, um campo vetorial reversível de ordem quatro para o qual a origem é um ponto fixo simétrico persistente.

Faremos um breve comentário sobre as formas normais a um parâmetro nas curvas C_i , $i = 0, 1, 2$ onde podemos identificar a existência ou não de órbitas homoclínicas para o sistema linearizado original.

Note que nas regiões 1 e 2 a origem é hiperbólica. Isso implica que órbitas homoclínicas para a origem são de codimensão zero.

Relembremos que, uma órbita homoclínica simétrica é formada pela interseção da variedade instável da origem $W^u(0)$ e a seção simétrica $\mathcal{S} := \text{Fix}(R)$. Se tal interseção for transversal, então as órbitas homoclínicas persistem sob pequenas perturbações reversíveis.

Próximo a C_0 : Vamos restringir nosso estudo à variedade centro e assim reduzimos o estudo a um sistema planar.

Desta forma, a parte linear é dada por $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ que é reversível com relação a

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Note que $AR = -RA$

Encontremos uma forma normal para o sistema com tal parte linear que satisfaça

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + h(x, y)$$

onde

$$A^T h(x, y) = h'(x, y) A^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

e que seja R-reversível. Tal fato é possível devido a [10].

Assim, a forma normal é dada por

$$\begin{cases} \dot{x} = y + h_1(x, y) \\ \dot{y} = h_2(x, y) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} A^T h(x, y) &= h'(x, y) A^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x} & \frac{\partial h_1}{\partial y} \\ \frac{\partial h_2}{\partial x} & \frac{\partial h_2}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ h_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial y} x \\ \frac{\partial h_2}{\partial y} x \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial h_1}{\partial y} x = 0 \\ \frac{\partial h_2}{\partial y} x = h_1 \end{cases} \Rightarrow h_1(x, y) = h_1(x) \end{aligned}$$

Como $h(x, y) = (h_1(x, y), h_2(x, y))$ deve satisfazer

$$h(R(x, y)) = -R(h(x, y))$$

e daí segue que:

$$h(x, -y) = (h_1(x), h_2(x, -y)) = -(h_1(x), -h_2(x, y)) = (-h_1(x), h_2(x, y)) \Rightarrow h_1(x) = 0.$$

Assim,

$$\frac{\partial h_2}{\partial y} x = h_1(x) = 0 \Rightarrow \frac{\partial h_2}{\partial y} = 0 \Rightarrow h_2(x, y) = h_2(x).$$

Daí a forma normal é dada por:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \sum_{j=1}^{\infty} c_j x^j, \quad c_1 = 0 \end{cases}$$

Consideremos agora o sistema desdobrado por um parâmetro μ da forma

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \sum_{j=1}^{\infty} c_j(\mu)x^j, \quad c_1(\mu) = \mu \end{cases} \quad (3.1.2)$$

que corresponde ao sistema oscilador não-linear com $\mu > 0$ correspondendo a autovalores reais não nulos próximos do zero (região 2).

Consideremos agora, para $\mu \neq 0$, a seguinte mudança de variável:

$$x = \mu X(vt)$$

$$y = \mu v Y(vt)$$

$$\xi = vt$$

$$v = |\mu|^{\frac{1}{2}}$$

Então nas novas variáveis o sistema pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial \xi} &= \frac{\partial X}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \xi} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial x}{\partial t} \frac{1}{v} = \frac{y}{\mu v} = \frac{\mu v Y}{\mu v} = Y \\ \frac{\partial Y}{\partial \xi} &= \frac{\partial Y}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \xi} = \frac{1}{\mu v} \frac{\partial y}{\partial t} \frac{1}{v} = \frac{1}{\mu v^2} \sum_{j=1}^{\infty} c_j(\mu)x^j = \\ &= \frac{1}{\mu v^2} \sum_{j=1}^{\infty} c_j(\mu)\mu^j X^j = \frac{1}{\mu v^2} [\mu^2 X + c_2(\mu)\mu^2 X^2 + o(\mu X)] = \\ &= \frac{1}{v^2} [\mu X + c_2(\mu)\mu X^2 + o(\mu X)] = \text{sign}(\mu)X + \frac{c_2(\mu)}{|\mu|} \mu X^2 + o(\mu X). \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{cases} \frac{\partial X}{\partial \xi} = Y \\ \frac{\partial Y}{\partial \xi} = \text{sign}(\mu)X + c_2(\mu)\text{sign}(\mu)X^2 + o(\mu X). \end{cases}$$

Truncando o sistema acima nos termos de ordem mais baixa temos:

$$\begin{cases} \dot{X} = Y \\ \dot{Y} = \text{sign}(\mu)X + c_2(\mu)\text{sign}(\mu)X^2 = \text{sign}(\mu)X + a_2(\mu)X^2. \end{cases} \quad (3.1.3)$$

Observe que o sistema (3.1.3) é um Hamiltoniano com função Hamiltoniana para $\mu > 0$ dada por

$$H(X, Y) = \frac{Y^2}{2} - \frac{X^2}{2} - c_2(\mu)\text{sign}(\mu)\frac{X^3}{3} = \frac{Y^2}{2} - \frac{X^2}{2} - a_2(\mu)\frac{X^3}{3}.$$

Tal sistema tem pontos de equilíbrio $(0, 0)$ e $\left(-\frac{1}{a_2(\mu)}, 0\right)$, $a_2(\mu) \neq 0$ onde $(0, 0)$ é do tipo sela e $\left(-\frac{1}{a_2(\mu)}, 0\right)$ é do tipo centro.

Desta forma a única solução homoclínica satisfaz a equação

$$\frac{Y^2}{2} - \frac{X^2}{2} - \frac{a_2(\mu)}{3}X^3 = 0, \text{ ou ainda}$$

$$Y^2 = X^2 + \frac{2a_2(\mu)}{3}X^3$$

a qual encontra o eixo- X em $X = 0$ e $X = -\frac{3}{2a_2(\mu)}$, $a_2(\mu) \neq 0$.

Portanto, para tal sistema, temos o seguinte esboço:

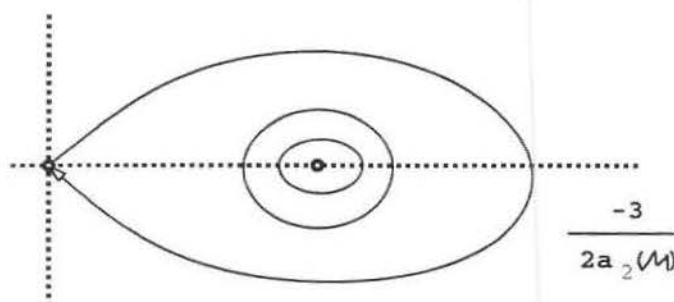


Figura 3.2: $a_2(\mu) < 0$.

Uma reversibilidade da forma $-R$ pode ser admitida quando o lado direito da segunda equação de (3.1.2) é formada apenas por termos de expoente ímpar. Assim, a forma normal truncada pode ser escrita como:

$$\begin{cases} \dot{X} = Y \\ \dot{Y} = \text{sign}(\mu)X - \beta X^3 \end{cases} \quad (3.1.4)$$

Novamente temos um sistema Hamiltoniano agora com função Hamiltoniana para $\mu > 0$ dada por:

$$H(X, Y) = \frac{Y^2}{2} - \frac{X^2}{2} + \beta \frac{X^4}{4}$$

Tal sistema tem pontos de equilíbrio em

$$(0, 0), \left(\sqrt{\frac{1}{\beta}}, 0 \right) \text{ e } \left(-\sqrt{\frac{1}{\beta}}, 0 \right) \text{ quando } \beta > 0.$$

onde $(0, 0)$ é do tipo sela e $\left(\pm \sqrt{\frac{1}{\beta}}, 0 \right)$ do tipo centro.

As soluções homoclínicas satisfazem a equação

$$H(X, Y) = 0,$$

isto é,

$$Y^2 = X^2 - \beta \frac{X^4}{2}$$

que encontra o eixo-X em $X = 0$ e $X = \pm \sqrt{\frac{2}{\beta}}$.

Para este truncamento temos o seguinte esboço:

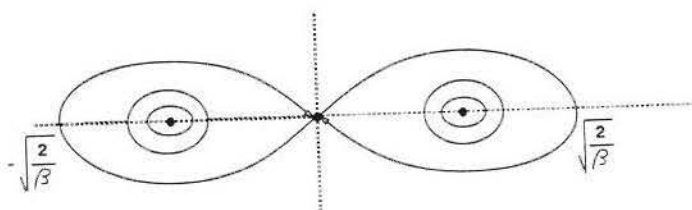


Figura 3.3:

Para $\beta < 0$ não existem soluções homoclínicas para o campo expressado pela forma normal.

De fato, nesse caso temos a função Hamiltoniana:

$$H(X, Y) = \frac{Y^2}{2} - \frac{X^2}{2} + \beta \frac{X^4}{4}$$

Um único ponto de equilíbrio, a saber, a origem $(0, 0)$.

E a equação:

$$Y^2 = X^2 - \beta \frac{X^4}{2}$$

só encontra os eixos X e Y na origem.

Em geral, não é verdade que soluções da forma normal truncada em qualquer ordem persistem sobre uma perturbação que retorna ao sistema original, a menos que possa ser provado que a forma normal truncada seja uma *forma normal topológica* (ou desdobramento versal). Para a forma normal planar (3.1.3) ou (3.1.4) as soluções homoclínicas persistem para $\mu > 0$ já que o equilíbrio é hiperbólico e $W^u(0)$ e $\mathcal{S}$ se interceptam transversalmente.

Próximo a C_1 : Em C_1 a matriz da parte linear A tem autovalores $\{0, \pm iq\}$ onde 0 é duplo e $q = \sqrt{|b|}$.

Dessa forma, A pode ser escrita na forma

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & iq & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -iq \end{pmatrix}$$

e R nessa base toma a forma

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Note que $AR = -RA$

Encontremos a forma normal $\dot{X} = AX + h(X)$ onde $A^T h(X) = h'(X)A^T X$ que seja R -reversível [10].

$$h(X) = (h_1(X), h_2(X), h_3(X), h_4(X)) \text{ onde } X = (x, y, z, \bar{z})$$

Então de $A^T h(X) = h'(X)A^T X$ segue que:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & iq & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -iq \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x} & \frac{\partial h_1}{\partial y} & \frac{\partial h_1}{\partial z} & \frac{\partial h_1}{\partial \bar{z}} \\ \frac{\partial h_2}{\partial x} & \frac{\partial h_2}{\partial y} & \frac{\partial h_2}{\partial z} & \frac{\partial h_2}{\partial \bar{z}} \\ \frac{\partial h_3}{\partial x} & \frac{\partial h_3}{\partial y} & \frac{\partial h_3}{\partial z} & \frac{\partial h_3}{\partial \bar{z}} \\ \frac{\partial h_4}{\partial x} & \frac{\partial h_4}{\partial y} & \frac{\partial h_4}{\partial z} & \frac{\partial h_4}{\partial \bar{z}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ iqz \\ -iq\bar{z} \end{pmatrix}$$

Considerando o operador $D := x \frac{\partial}{\partial y} + iqz \frac{\partial}{\partial z} - iq\bar{z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ segue da igualdade anterior que:

$$\begin{cases} Dh_1 = 0 \\ Dh_2 = h_1 \\ Dh_3 = iqh_3 \\ Dh_4 = -iqh_4 \end{cases}$$

Assim, $h_1 = h_1(x, |z|^2)$.

Mas como $h(R(X)) = -R(h(X))$ temos:

$$h(x, -y, \bar{z}, z) = -R(h_1, h_2, h_3, h_4)$$

Daí,

$$(h_1(x, |z|^2), h_2, h_3, h_4) = -(h_1(x, |z|^2), -h_2, h_4, h_3) \quad (3.1.5)$$

e portanto,

$$h_1(x, |z|^2) = 0$$

Logo, $Dh_2 = 0$ o que implica $h_2 = h_2(x, |z|^2)$ sem qualquer restrição como vemos em (3.1.8).

Para determinar h_3 tome $M_3 = \bar{z}h_3$ então:

$$DM_3 = D(\bar{z}h_3) = -iq\bar{z}h_3 + \bar{z}iqh_3 = 0$$

isto é,

$$DM_3 = 0 \Rightarrow M_3 = M_3(x, |z|^2)$$

Ainda, $M_3 = 0$ para $z = 0$ já que $M_3 = \bar{z}h_3$

daí

$$M_3 = |z|^2 M(x, |z|^2) = \bar{z}z M(x, |z|^2)$$

Portanto, $h_3 = zM(x, |z|^2)$

Similarmente, tome $M_4 = zh_4$. Então:

$$DM_4 = iqzh_4 + zDh_4 = iqzh_4 - iqzh_4 = 0$$

Logo, $M_4 = M_4(x, |z|^2)$ e com cálculos análogos ao anterior conclui-se que $h_4 = \bar{z}N(x, |z|^2)$

Mais ainda, como $\bar{h}_4 = h_3$ segue que $\bar{N} = M$.

Agora temos $h(X) = (0, h_1(x, |z|^2), zM(x, |z|^2), \bar{z}\bar{M}(x, |z|^2))$

e devido a reversibilidade temos:

$$\begin{aligned} h(R(X)) = -R(h(X)) &\Rightarrow h(x, -y, \bar{z}, z) = -R(0, h_1(x, |z|^2), zM(x, |z|^2), \bar{z}\bar{M}(x, |z|^2)) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (0, h_1(x, |z|^2), \bar{z}M(x, |z|^2), z\bar{M}(x, |z|^2)) = (0, h_1(x, |z|^2), -\bar{z}\bar{M}(x, |z|^2), -zM(x, |z|^2)) \\ &\Rightarrow M(x, |z|^2) = -\bar{M}(x, |z|^2) \Rightarrow M = i\psi, \psi \text{ real} \end{aligned}$$

Portanto a forma normal é dada por:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \phi(x, |z|^2) \\ \dot{z} = iz\psi(x, |z|^2) \\ \dot{\bar{z}} = -i\bar{z}\psi(x, |z|^2) \end{cases}$$

onde ϕ e ψ são polinômios de ordem arbitrária em seus argumentos.

Consideremos agora o sistema desdobrado por um parâmetro μ da forma

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \phi(\mu, x, |z|^2) \\ \dot{z} = iz\psi(\mu, x, |z|^2) \\ \dot{\bar{z}} = -i\bar{z}\psi(\mu, x, |z|^2) \end{cases}$$

Tal sistema tem duas integrais primeiras, a saber:

$$K := |z|^2 \quad e \quad H := y^2 - 2 \int_0^x \phi(\mu, s, K) ds.$$

Uma forma normal truncada é obtida tomando

$$\phi(\mu, x, |z|^2) = c_1(\mu)x + c_2(\mu)x^2 + d_2(\mu)|z|^2, \quad c_1(\mu) = \mu$$

$$\psi(\mu, x, |z|^2) = \gamma_0(\mu) + \gamma_1(\mu)x.$$

Soluções homoclínicas surgem apenas no conjunto de nível $K = 0$ da integral primeira. Nesse conjunto de nível, soluções homoclínicas para a origem surgem quando tomamos constantes c_1 e c_2 tais que o sistema correspondente está na região 3. Quando estamos na região 4 não existem soluções homoclínicas para a origem. No entanto, detecta-se uma solução homoclínica para o ponto fixo $\left(-\frac{c_1(\mu)}{c_2(\mu)}, 0\right)$ quando $c_2(\mu) \neq 0$. Em tal caso o

sistema é apenas R-reversível.

De fato, note que no conjunto de nível $K = 0$ o sistema truncado se reduz a

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \mu x + c_2(\mu)x^2 \end{cases} \quad (3.1.6)$$

Suponhamos $c_2(\mu) \neq 0$. Assim o sistema é R-reversível.

Em $z = 0$ temos os pontos críticos: $(0, 0)$ e $\left(-\frac{\mu}{c_2(\mu)}, 0\right)$

Suponha que $\mu > 0$. Daí, $(0, 0)$ é uma sela e $\left(-\frac{\mu}{c_2(\mu)}, 0\right)$ é um centro já que (3.1.6) é reversível.

Analisemos a solução no conjunto de nível $H = 0$, ou seja,

$$y^2 - \mu x^2 - \frac{2}{3}c_2(\mu)x^3 = 0 \Rightarrow y^2 = \mu x^2 + \frac{2}{3}c_2(\mu)x^3 \quad (3.1.7)$$

Note que:

$$y = 0 \Leftrightarrow \mu x^2 + \frac{2}{3}c_2(\mu)x^3 = 0 \Leftrightarrow \mu + \frac{2}{3}c_2(\mu)x = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2} \frac{\mu}{c_2(\mu)}$$

já que $x \neq 0$. Como a curva dada por (3.1.7) toca o eixo de simetria em $(0, 0)$ e $\left(-\frac{3}{2} \frac{\mu}{c_2(\mu)}, 0\right)$ temos uma solução homoclínica dada por (3.1.7).

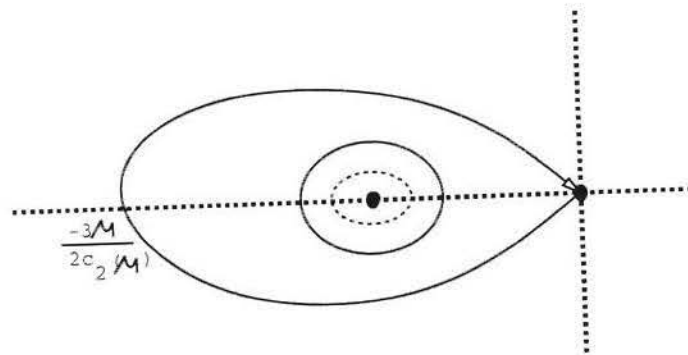


Figura 3.4: $c_2(\mu) > 0$

Supondo $\mu < 0$ temos: $(0, 0)$ centro e $\left(-\frac{\mu}{c_2(\mu)}, 0\right)$ sela. Ainda,

$$H\left(-\frac{\mu}{c_2(\mu)}, 0\right) = -\frac{\mu^3}{3c_2(\mu)^2} > 0.$$

Analisemos a solução que satisfaz

$$H(x, y) = -\frac{\mu^3}{3c_2(\mu)^2}, \text{ isto é, } y^2 = \mu x^2 + \frac{2}{3}c_2(\mu)x^3 - \frac{\mu^3}{3c_2(\mu)^2}.$$

Podemos ainda escrever:

$$y^2 = \left(x + \frac{\mu}{c_2(\mu)}\right)^2 \left(x - \frac{\mu}{2c_2(\mu)}\right)$$

Logo a solução toca o eixo de simetria em $x = \frac{\mu}{2c_2(\mu)}$ e $x = -\frac{\mu}{c_2(\mu)}$ e portanto temos uma solução homoclínica para $\left(-\frac{\mu}{c_2(\mu)}, 0\right)$ da forma:

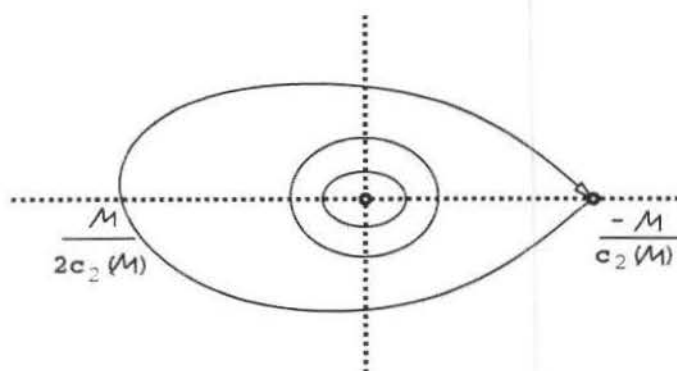
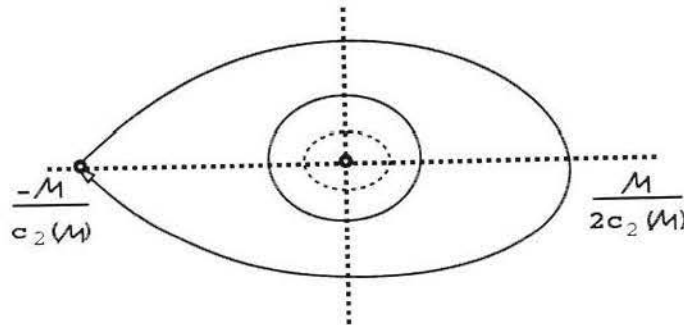


Figura 3.5: (i) $c_2(\mu) > 0$

Figura 3.6: (ii) $c_2(\mu) < 0$

A questão de persistência dessas soluções seguem de maneira análoga ao caso C_o embora o equilíbrio não seja hiperbólico na região 3. Basta lembrar do fato que estamos restritos ao conjunto de nível $K = 0$.

Se tomarmos $\phi(\mu, x, |z|^2) = \mu x + c_3(\mu)x^3$ então o sistema é adicionalmente -R-reversível e sob uma escolha adequada do sinal de $c_3(\mu)$ temos um par de soluções homoclínicas para a origem quando $\mu > 0$.

3.1.3 Região 1 - O Caso Sela-Foco:

Considere o sistema

$$\dot{X} = f(X), \quad X \in \mathbb{R}^4, \quad f \in C^k (k \geq 2) \quad (3.1.8)$$

tal que

- 1) Existe uma reversibilidade R , isto é,

$$f(RX) = -R(f(X))$$

- 2) $f(0)=0$, isto é, a origem é um ponto de equilíbrio simétrico para o sistema;
- 3) O espectro de $Df(0)$ consiste dos autovalores

$$\pm\alpha \pm i\omega, \quad \alpha, \omega > 0.$$

4) Existe uma órbita homoclínica γ satisfazendo

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \gamma(t) = 0$$

5) γ é não-degenerada, isto é, os espaços tangentes das variedades estável e instável satisfazem

$$\dim(T_{\gamma(t)}W^s(0) \cap T_{\gamma(t)}W^u(0)) = 1.$$

ou

5a) se $q := \gamma \cap \text{Fix}(R)$ então a variedade estável $W^s(0)$ e o plano $\text{Fix}(R)$ se interceptam transversalmente em q . E ainda mais, γ não pertence a uma família a um-parâmetro de órbitas homoclínicas.

Definição 3.1.1 : *Uma órbita é dita k -homoclínica, se ela está contida em uma vizinhança tubular da órbita homoclínica γ e se ela corta uma secção transversal de γ exatamente k vezes.*

Analogamente, uma órbita é dita k -periódica se ela está contida numa vizinhança tubular de γ e se ela corta uma secção transversal a γ exatamente k vezes antes de se fechar no $(k+1)$ -retorno

Na definição não assumimos k minimal, dessa forma, uma órbita k -periódica é também nk -periódica para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 3.1 : *Assuma 1-5. Então para cada $n \geq 2$ existe uma infinidade de órbitas n -homoclínicas em uma vizinhança tubular de γ . Mais ainda, para cada órbita n -homoclínica existe uma família a um-parâmetro de órbitas n -periódicas simétricas se acumulando na órbita n -homoclínica.*

Se substituirmos 5 por 5a temos a seguinte versão mais fraca.

Teorema 3.2 : *Assuma 1-4 e 5a. Então existe uma infinidade de órbitas 2-homoclínicas e 3-homoclínicas em uma vizinhança tubular de γ . Tais órbitas ou são todas degeneradas ou existe uma órbita homoclínica não-degenerada para a qual o teorema 3.1 se aplica.*

A Aplicação de Poincaré:

A prova do teorema (3.1) usa uma aplicação de Poincaré ao longo da órbita homoclínica γ . Essa aplicação é dividida numa parte local (próxima a 0) e um difeomorfismo global ao longo de γ .

A Parte Local:

Lema 3.1.1 : (linearização [3]) Se os autovalores de $Df(0)$ satisfazem (3), então o fluxo pode ser C^1 -linearizado próximo da origem.

Assumiremos que a condição de reversibilidade (1) segue para a matriz

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e que o fluxo linear em uma vizinhança U de 0 é gerado pela equação diferencial

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} \alpha & -\omega & 0 & 0 \\ \omega & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha & \omega \\ 0 & 0 & -\omega & -\alpha \end{pmatrix} X$$

Note que nesse caso:

$$W_{loc}^s(0) = \{x_1 = x_2 = 0\}, \quad W_{loc}^u(0) = \{x_3 = x_4 = 0\}, \quad \text{e} \quad Fix(R) = \{x_1 = x_3 \text{ e } x_2 = x_4\}$$

$$\dim Fix(R) = 2$$

Para a construção da aplicação de Poincaré próxima da órbita homoclínica γ é conveniente tomar coordenadas polares em U . Para isso, tome

$$x_1 = \rho_u \cos \varphi_u, \quad x_2 = \rho_u \sin \varphi_u$$

$$x_3 = \rho_s \cos \varphi_s, \quad x_4 = \rho_s \sin \varphi_s$$

com os índices u, s indicando as direções instável e estável respectivamente. As variedades locais estável e instável são dadas então por:

$$W_{loc}^s(0) = \{\rho_u = 0\}, \quad W_{loc}^u(0) = \{\rho_s = 0\}$$

e o plano $Fix(R)$ é dado por

$$Fix(R) = \{\rho_u = \rho_s, \varphi_u = \varphi_s\}.$$

De fato,

$$\left. \begin{aligned} x_1 = x_3 &\Rightarrow \rho_u \cos \varphi_u = \rho_s \cos \varphi_s \Rightarrow \rho_u^2 \cos^2 \varphi_u = \rho_s^2 \cos^2 \varphi_s \\ x_2 = x_4 &\Rightarrow \rho_u \sin \varphi_u = \rho_s \sin \varphi_s \Rightarrow \rho_u^2 \sin^2 \varphi_u = \rho_s^2 \sin^2 \varphi_s \end{aligned} \right\} \Rightarrow \rho_u^2 = \rho_s^2 \Rightarrow \rho_u = \rho_s$$

E daí,

$$\left. \begin{aligned} \cos \varphi_u &= \cos \varphi_s \\ \sin \varphi_u &= \sin \varphi_s \end{aligned} \right\} \Rightarrow \varphi_u = \varphi_s.$$

Vejamos como fica o sistema nas novas coordenadas:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_u &= \frac{x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2}{\rho_u} = \frac{x_1(\alpha x_1 - \omega x_2) + x_2(\omega x_1 + \alpha x_2)}{\rho_u} = \frac{\alpha(x_1^2 + x_2^2)}{\rho_u} = \alpha \rho_u \\ \dot{\varphi}_u &= \frac{x_1 \dot{x}_2 - x_2 \dot{x}_1}{\rho_u^2} = \frac{x_1(\omega x_1 + \alpha x_2) - x_2(\alpha x_1 - \omega x_2)}{\rho_u^2} = \frac{\omega(x_1^2 + x_2^2)}{\rho_u^2} = \omega \\ \dot{\rho}_s &= \frac{x_3 \dot{x}_3 + x_4 \dot{x}_4}{\rho_s} = \frac{x_3(-\alpha x_3 + \omega x_4) + x_4(-\omega x_3 - \alpha x_4)}{\rho_s} = \frac{-\alpha(x_3^2 + x_4^2)}{\rho_s} = -\alpha \rho_s \\ \dot{\varphi}_s &= \frac{x_3 \dot{x}_4 - x_4 \dot{x}_3}{\rho_s^2} = \frac{x_3(-\omega x_3 - \alpha x_4) - x_4(-\alpha x_3 + \omega x_4)}{\rho_s^2} = \frac{-\omega(x_3^2 + x_4^2)}{\rho_s^2} = -\omega \end{aligned}$$

Portanto, nas novas coordenadas, a equação diferencial é dada por:

$$\begin{cases} \dot{\rho}_u = \alpha \rho_u \\ \dot{\rho}_s = -\alpha \rho_s \\ \dot{\varphi}_u = \omega \\ \dot{\varphi}_s = -\omega \end{cases} \quad (3.1.9)$$

A solução explícita dessa equação é:

$$\begin{aligned} \rho_u(t) &= \rho_u(0)e^{\alpha t} & \varphi_u(t) &= \varphi_u(0) + \omega t \\ \rho_s(t) &= \rho_s(0)e^{-\alpha t} & \varphi_s(t) &= \varphi_s(0) - \omega t \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

Em vista da nossa análise subsequente, dividiremos a parte local da aplicação de Poincaré em duas aplicações que são relacionadas pela reversibilidade. Para esse fim, definimos as seções Σ^u , Σ^0 e Σ^s como:

$$\Sigma^u := \{\rho_u = r, \rho_s \leq r\}, \quad \Sigma^s := R(\Sigma^u)$$

e

$$\Sigma^0 := \{\rho_u = \rho_s \leq r\}.$$

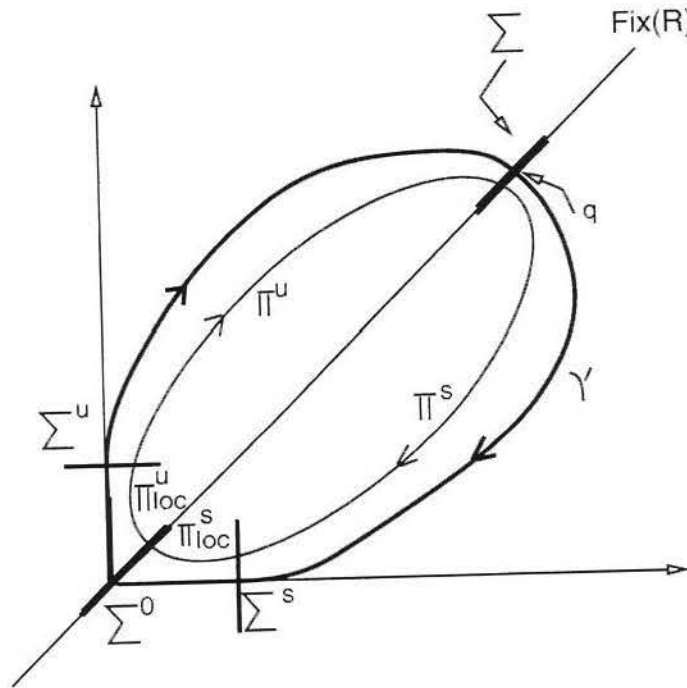


Figura 3.7: (Aplicação de Poincaré ao longo de γ).

Aqui r é escolhido suficientemente pequeno tal que as trajetórias de Σ^s a Σ^u estejam inteiramente em U onde o campo vetorial é linear.

As seções Σ^s e Σ^u são toros sólidos com $W_{loc}^s \cap \Sigma^s$ e $W_{loc}^u \cap \Sigma^u$ sendo seus círculos centrais.

A seção Σ^0 é R -invariante.

De fato, tome $x \in \Sigma^0$. Então $x = (\rho \cos \varphi_u, \rho \sin \varphi_u, \rho \cos \varphi_s, \rho \sin \varphi_s)$, $\rho \leq r$.

$R(x) = R(\rho \cos \varphi_u, \rho \sin \varphi_u, \rho \cos \varphi_s, \rho \sin \varphi_s) = (\rho \cos \varphi_s, \rho \sin \varphi_s, \rho \cos \varphi_u, \rho \sin \varphi_u) \in \Sigma^0$.

Denote por $q^s := \Sigma^s \cap \gamma$ e $q^u := \Sigma^u \cap \gamma$ os pontos onde a órbita homoclínica γ cruza as seções Σ^s e Σ^u .

O fluxo (linear) agora define uma aplicação local de Poincaré

$$\Pi_{loc}^s : \Sigma^s \setminus W_{loc}^s(0) \rightarrow \Sigma^0 \setminus \{0\}$$

que pode ser escrita explicitamente.

A reversibilidade também produz outra aplicação local de Poincaré

$$\Pi_{loc}^u = R \circ (\Pi_{loc}^s)^{-1} \circ R : \Sigma^0 \setminus \{0\} \rightarrow \Sigma^u \setminus W_{loc}^u(0)$$

Juntando as duas aplicações obtemos a aplicação local de Poincaré,

$$\Pi_{loc} := \Pi_{loc}^u \circ \Pi_{loc}^s$$

Descrevemos Π_{loc} na forma

$$\Pi_{loc} : (\rho_u^{in}, \varphi_u^{in}, \varphi_s^{in}) \rightarrow (\varphi_u^{out}, \rho_s^{out}, \varphi_s^{out}) \quad (3.1.11)$$

$$\Pi_{loc} = \Pi_{loc}^u \circ \Pi_{loc}^s : \Sigma^s \setminus W_{loc}^s(0) \rightarrow \Sigma^u \setminus W_{loc}^u(0)$$

O tempo t_f que a trajetória gasta entre $\Sigma^s \setminus W_{loc}^s(0)$ e Σ^u satisfaz a equação

$$\rho_u(t_f) = r,$$

o que nos dá,

$$r = \rho_u^{in} e^{\alpha t_f} \Rightarrow e^{\alpha t_f} = \frac{r}{\rho_u^{in}} \Rightarrow t_f = \alpha^{-1} \ln \frac{r}{\rho_u^{in}} \quad (3.1.12)$$

Substituindo na solução (3.1.10) temos:

$$\begin{aligned} \rho_s^{out} &= r e^{-\alpha t_f} = \rho_u^{in} \\ \varphi_s^{out} &= \varphi_s^{in} - \omega t_f = \varphi_s^{in} - \frac{\omega}{\alpha} \ln \frac{r}{\rho_u^{in}} \\ \varphi_u^{out} &= \varphi_u^{in} + \frac{\omega}{\alpha} \ln \frac{r}{\rho_u^{in}} \end{aligned} \quad (3.1.13)$$

O que nos fornece a expressão da aplicação local de Poincaré Π_{loc} que é dada por:

$$\Pi_{loc}(\rho_u^{in}, \varphi_u^{in}, \varphi_s^{in}) = \left(\varphi_u^{in} + \frac{\omega}{\alpha} \ln \frac{r}{\rho_u^{in}}, \rho_u^{in}, \varphi_s^{in} - \frac{\omega}{\alpha} \ln \frac{r}{\rho_u^{in}} \right) = (\varphi_u^{out}, \rho_s^{out}, \varphi_s^{out})$$

Equações similares podem ser obtidas para as aplicações Π_{loc}^s e Π_{loc}^u .

De fato, para Π_{loc}^s o tempo t_u que a trajetória gasta entre $\Sigma^s \setminus W_{loc}^s(0)$ e $\Sigma^0 \setminus \{0\}$ satisfaz a equação:

$$\rho_u(t_u) = \rho_s(t_u), \text{ isto é, } \rho_u^{in} e^{\alpha t_u} = r e^{-\alpha t_u} \Rightarrow e^{2\alpha t_u} = \frac{r}{\rho_u^{in}} \Rightarrow t_u = \frac{1}{2\alpha} \ln \frac{r}{\rho_u^{in}}$$

onde estamos considerando

$$\Pi_{loc}^s : (\rho_u^{in}, \varphi_u^{in}, \varphi_s^{in}) \rightarrow (\varphi_u^0, \rho_s^0, \varphi_s^0).$$

Logo substituindo na solução (3.1.10) temos:

$$\begin{aligned} \rho_s^0 &= r e^{-\frac{1}{2\alpha} \ln \frac{r}{\rho_u^{in}}} = (r \rho_u^{in})^{\frac{1}{2}} \\ \varphi_s^0 &= \varphi_s^{in} - \frac{\omega}{2\alpha} \ln \frac{r}{\rho_u^{in}} \\ \varphi_u^0 &= \varphi_u^{in} + \frac{\omega}{2\alpha} \ln \frac{r}{\rho_u^{in}} \end{aligned}$$

Daí,

$$\Pi_{loc}^s(\rho_u^{in}, \varphi_u^{in}, \varphi_s^{in}) = (\varphi_u^0, \rho_s^0, \varphi_s^0) = \left(\varphi_u^{in} + \frac{\omega}{2\alpha} \ln \frac{r}{\rho_u^{in}}, (r \rho_u^{in})^{1/2}, \varphi_s^{in} - \frac{\omega}{2\alpha} \ln \frac{r}{\rho_u^{in}} \right)$$

A Aplicação Global:

De forma similar, podemos fazer uso da reversibilidade na construção da aplicação global de Poincaré tomando uma seção R -invariante Σ contendo o ponto $q := \gamma \cap \text{Fix}(R)$.

Um difeomorfismo local Π^s entre Σ e Σ^s é induzido pelo fluxo ao longo de γ . Esse difeomorfismo Π^s aplica uma vizinhança de q em Σ em uma vizinhança de q^s em Σ^s . Analogamente, $\Pi^u : \Sigma^u \rightarrow \Sigma$ é induzido pelo fluxo ao longo de γ . Por reversibilidade $\Pi^u = R \circ (\Pi^s)^{-1} \circ R$ e a aplicação $\Pi : \Sigma \rightarrow \Sigma$ com

$$\Pi = \Pi^u \circ \Pi_{loc} \circ \Pi^s \quad (3.1.14)$$

é uma aplicação de Poincaré seguindo a órbita homoclínica γ . Note que essa aplicação é R -reversível, isto é, $R \circ \Pi \circ R = \Pi^{-1}$

De fato,

$$\begin{aligned} R \circ \Pi \circ R &= R \circ \Pi^u \circ \Pi_{loc} \circ \Pi^s \circ R = (R \circ \Pi^u \circ R) \circ (R \circ \Pi_{loc} \circ R) \circ (R \circ \Pi^s \circ R) = \\ &= (\Pi^s)^{-1} \circ (\Pi_{loc})^{-1} \circ (\Pi^u)^{-1} = \Pi^{-1} \end{aligned}$$

Onde a penúltima igualdade segue de:

$$R \circ \Pi_{loc} \circ R = R \circ \Pi_{loc}^u \circ \Pi_{loc}^s \circ R = (R \circ \Pi_{loc}^u \circ R) \circ (R \circ \Pi_{loc}^s \circ R) = (\Pi_{loc}^s)^{-1} \circ (\Pi_{loc}^u)^{-1} = (\Pi_{loc})^{-1}.$$

Definimos também duas aplicações de Poincaré que seguem apenas um lado de γ da seguinte forma:

$$\Pi_{\frac{1}{2}}^s := \Pi_{loc}^s \circ \Pi^s \quad \text{e} \quad \Pi_{\frac{1}{2}}^u := \Pi^u \circ \Pi_{loc}^u.$$

Essas aplicações nos habilita encontrar órbitas periódicas simétricas próximas a γ . Como as órbitas contidas na vizinhança tubular de γ podem interceptar $\text{Fix}(R)$ apenas em Σ ou em Σ^0 , existem três diferentes possibilidades de como os dois pontos simétricos de uma órbita periódica simétrica podem estar contidos em Σ ou em Σ^0 . Tais casos são descritos pelo seguinte lema cujas hipóteses seguem a notação acima:

Lema 3.1.2 : *i) Se $x \in \text{Fix}(R) \cap \Pi^n(\text{Fix}(R))$, então $x \in \Sigma$ é um ponto fixo de Π^{2n} . A trajetória de (3.1.8) passando por x é simétrica e $2n$ -periódica.*

ii) Se $x \in \text{Fix}(R) \cap \left(\Pi_{\frac{1}{2}}^s \circ \Pi^{n-1} \circ \Pi_{\frac{1}{2}}^u \right)(\text{Fix}(R))$, então $x \in \Sigma^0$ é tal que a trajetória de (3.1.8) passando por x é simétrica e $2n$ -periódica.

iii) Se $x \in \text{Fix}(R) \cap \left(\Pi^n \circ \Pi_{\frac{1}{2}}^u \right)(\text{Fix}(R))$, então $x \in \Sigma$ é um ponto fixo de Π^{2n+1} . A trajetória de (3.1.8) passando por x é simétrica e $(2n+1)$ -periódica.

Prova: i) Por hipótese $x = \Pi^n(y)$ para algum $y \in \text{Fix}(R) \cap \Sigma$.

Assim,

$$\Pi^{-n}(y) = R \circ \Pi^n(Ry) = R \circ \Pi^n(y) = Rx = x \Rightarrow \Pi^{2n}(x) = x$$

e x está contido em uma órbita $2n$ -periódica.

ii) Por hipótese $x \in \text{Fix}(R) \cap \left(\Pi_{\frac{1}{2}}^s \circ \Pi^{n-1} \circ \Pi_{\frac{1}{2}}^u \right) (\text{Fix}(R))$

Logo,

$$\begin{aligned} x &= \left(\Pi_{\frac{1}{2}}^s \circ \Pi^{n-1} \circ \Pi_{\frac{1}{2}}^u \right) (y), \quad y \in \text{Fix}(R) \cap \Sigma^0. \\ \left(\Pi_{\frac{1}{2}}^s \circ \Pi^{n-1} \circ \Pi_{\frac{1}{2}}^u \right)^{-1} (y) &= \left(\Pi_{\frac{1}{2}}^u \right)^{-1} \circ (\Pi^{n-1})^{-1} \circ \left(\Pi_{\frac{1}{2}}^s \right)^{-1} (y) = \\ &= \left(R \circ \Pi_{\frac{1}{2}}^s \circ R \right) \circ (\Pi^{n-1})^{-1} \circ \left(R \circ \Pi_{\frac{1}{2}}^u \circ R \right) (y) = \\ &= R \circ \Pi_{\frac{1}{2}}^s \circ \Pi^{n-1} \circ \Pi_{\frac{1}{2}}^u \circ R(y) = R \left(\Pi_{\frac{1}{2}}^s \circ \Pi^{n-1} \circ \Pi_{\frac{1}{2}}^u y \right) = R(x) = x \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} x &= \left(\Pi_{\frac{1}{2}}^s \circ \Pi^{n-1} \circ \Pi_{\frac{1}{2}}^u \right) (y) = \left(\Pi_{\frac{1}{2}}^s \circ \Pi^{n-1} \circ \Pi_{\frac{1}{2}}^u \right)^2 \left(\Pi_{\frac{1}{2}}^s \circ \Pi^{n-1} \circ \Pi_{\frac{1}{2}}^u \right)^{-1} (y) = \\ &= \left(\Pi_{\frac{1}{2}}^s \circ \Pi^{n-1} \circ \Pi_{\frac{1}{2}}^u \right)^2 (x) = \left(\Pi_{\frac{1}{2}}^s \circ \Pi^{n-1} \circ \Pi_{\frac{1}{2}}^u \circ \Pi_{\frac{1}{2}}^s \circ \Pi^{n-1} \circ \Pi_{\frac{1}{2}}^u \right) (x) = \\ &= \left(\Pi_{\frac{1}{2}}^s \circ \Pi^{n-1} \circ \Pi \circ \Pi^{n-1} \circ \Pi_{\frac{1}{2}}^u \right) (x) = \left(\Pi_{\frac{1}{2}}^s \circ \Pi^{2n-1} \circ \Pi_{\frac{1}{2}}^u \right) (x) \end{aligned}$$

iii) Por hipótese $x \in \text{Fix}(R) \cap \left(\Pi^n \circ \Pi_{\frac{1}{2}}^u \right) (\text{Fix}(R))$.

Logo,

$$\begin{aligned} x &= R(x) = \left(R \circ \Pi^n \circ \Pi_{\frac{1}{2}}^u \right) (y) = \left(R \circ \Pi^n \circ \Pi_{\frac{1}{2}}^u \circ R \right) (y) \\ \Rightarrow y &= \left(R \circ \Pi^n \circ \Pi_{\frac{1}{2}}^u \circ R \right)^{-1} (x) = R \circ \left(\Pi_{\frac{1}{2}}^u \right)^{-1} \circ \Pi^{-n} \circ R(x) \\ \Rightarrow y &= \left(R \circ \left(\Pi_{\frac{1}{2}}^u \right)^{-1} \circ R \right) \circ (R \circ \Pi^{-n} \circ R) (x) = \Pi_{\frac{1}{2}}^s \circ \Pi^n(x). \end{aligned}$$

Assim,

$$\Pi^{2n+1}(x) = \left(\Pi^n \circ \Pi_{\frac{1}{2}}^u \circ \Pi_{\frac{1}{2}}^s \circ \Pi^n \right) (x) = \left(\Pi^n \circ \Pi_{\frac{1}{2}}^u \right) (y) = x.$$

■

De modo similar a reversibilidade nos fornece uma ferramenta para detectar órbitas homoclínicas que passam pela vizinhança de γ várias vezes antes de eventualmente entrar numa vizinhança do equilíbrio.

Por reversibilidade temos que $\Pi_{\frac{1}{2}}^u = R \circ \left(\Pi_{\frac{1}{2}}^s \right)^{-1} \circ R$.

Defina $W_q^s := (\Pi^s)^{-1} (W_{loc}^s \cap \Sigma^s)$ como uma componente de $W^s(0) \cap \Sigma$ passando por q .
 Similarmente, $W_q^u := \Pi^u (W_{loc}^u \cap \Sigma^u) = R (W_q^s)$ é a componente de $W^u(0)$ em Σ contendo o ponto q .

Assim, cada órbita começando em W_q^s tende diretamente a 0, isto é, ela não deixa a vizinhança U de 0 uma vez tendo entrado nela.

Aqui distinguimos dois casos: órbitas homoclínicas que são $(2n+1)$ -homoclínicas tem seu ponto simétrico em Σ e as órbitas $2n$ -homoclínicas interceptam $Fix(R)$ em Σ^0 .

Lema 3.1.3 : *i) Se $x \in W_q^s \cap \Pi^n (Fix(R))$ então a órbita por x é uma órbita $(2n+1)$ -homoclínica simétrica.
 ii) Se $x \in W_q^s \cap (\Pi^n \circ \Pi_{\frac{1}{2}}^u) (Fix(R))$ então a órbita por x é uma órbita $(2n+2)$ -homoclínica simétrica.*

Prova: i) Temos que $\Pi^{-n}(x) \in Fix(R)$.

Também,

$$\begin{aligned} x \in W_q^s &\Rightarrow \Pi^{-n}(x) \in \Pi^{-n}(W_q^s) \Rightarrow \Pi^{-n}(x) = R(\Pi^{-n}(x)) \in R \circ \Pi^{-n}(W_q^s) = \\ &= \Pi^n(RW_q^s) = \Pi^n(W_q^u) \end{aligned}$$

Logo, $\Pi^{-n}(x) \in \Pi^n(W_q^u) \Rightarrow \Pi^{-2n}(x) \in W_q^u$, isto é,

$$\Pi^{-2n}(x) \in W_q^u.$$

Dessa forma, toda a órbita por x segue a órbita γ exatamente $2n$ vezes de Σ para Σ e as outras duas metades do tempo de Σ para 0.

ii) Aqui a órbita por x segue γ exatamente $n + \frac{1}{2}$ vezes antes de cortar W_q^s e tende para 0 após meia revolução. Completando a órbita para trás por reversibilidade produzindo uma órbita $(2n+2)$ -homoclínica. ■

Espirais e Rolos:

Para descrever o efeito da aplicação de Poincaré Π em $Fix(R)$ introduzimos a noção de espirais e rolos.

Definição 3.1.2 : Uma C^1 -curva k em uma variedade 2-dimensional M é chamada *espiral (logarítmica)* em M se existe um $\beta \neq 0$, uma vizinhança $W \subseteq \mathbb{R}^2$ de 0 e um difeomorfismo local $\psi : M \supseteq V \rightarrow W$ tal que a imagem $\psi(k \cap V)$ é a parte de uma espiral logarítmica S_β em W . Essa espiral S_β é dada em coordenadas polares pela parametrização

$$r(\tau) = e^{\beta\tau}, \quad \varphi(\tau) = \tau, \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

$\psi^{-1}(0)$ é chamado *ponto base da espiral*.

Uma variedade imersa 2-dimensional $N \subseteq \mathbb{R}^3$ é chamada *um rolo (logarítmico)* se existe uma espiral como acima, S_β , vizinhanças $V_o \subseteq \mathbb{R}^3$, $W_o \subseteq \mathbb{R}^2$ de zero e um difeomorfismo $\psi_o : V_o \rightarrow [0, 1] \times W_o$ tal que a imagem $\psi_o(N \cap V_o)$ é $[0, 1] \times (S_\beta \cap W_o)$.

A pré-imagem $\psi_o^{-1}([0, 1] \times \{0\})$ é chamada a *base do rolo*.

Observação 3.1.1 : a) Um C^1 -difeomorfismo $\hat{\psi} : N \rightarrow \hat{N}$ aplica uma espiral em N sobre uma espiral em $\hat{N}$.

b) Se $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é um C^1 -difeomorfismo, então a imagem de um rolo sob ϕ é ainda um rolo.

Lema 3.1.4 : i) Uma C^1 -curva k em uma variedade M passando pelo ponto base p de uma espiral S em M intercepta essa espiral em infinitos pontos, os quais se acumulam em p .

ii) Uma C^1 -curva k em $\mathbb{R}^3$, interceptando a base de um rolo logarítmico em p de tal forma que k e a base não são tangentes em p , intercepta o rolo em infinitos pontos $p_1, p_2, p_3, \dots$ acumulando em p . Mais ainda, existe i_o tal que para todo $i \geq i_o$ a intersecção de k e o rolo é transversal.

iii) Uma C^1 -curva k em $\mathbb{R}^3$, que é tangente à base do rolo logarítmico em p mas não coincide com a base em uma vizinhança de p intercepta o rolo em infinitos pontos $p_1, p_2, p_3, \dots$ acumulando em p .

iii) Se um plano $\mathcal{E}$ intercepta a base de um rolo logarítmico R transversalmente em p , então $\mathcal{E} \cap R$ localmente (isto é, próximo de p) é uma espiral em $\mathcal{E}$ com ponto base p .

Prova: i) Existe um difeomorfismo ψ aplicando uma vizinhança V de p em M em $\mathbb{R}^2$ tal que a imagem $\psi(k \cap V)$ é uma C^1 -curva em $\mathbb{R}^2$ passando por 0. Essa curva intercepta a espiral $S_\beta = \psi(S \cap V)$ em infinitos pontos que se acumulam em 0. A pré-imagem desses pontos em M são exatamente os pontos de intersecção entre k e S .

A prova para (ii) e (iia) segue o mesmo raciocínio.

iii) Sejam ψ_o , V_o , W_o e a espiral logarítmica S_β escolhidas como na definição (3.1.2) tal que $\psi_o(R \cap V_o) = [0, 1] \times (S_\beta \cap W_o)$ e seja W_o suficientemente pequeno tal que a C^1 -variedade $\psi_o(\mathcal{E}) \cap ([0, 1] \times W_o)$ que é transversal a $[0, 1] \times \{0\}$ pode ser escrita como o gráfico sobre $\{0\} \times W_o$.

A projeção $P : \psi_o(\mathcal{E}) \cap ([0, 1] \times W_o) \rightarrow W_o$ é então um difeomorfismo. Portanto $P \circ \psi_o$ é também um difeomorfismo aplicando $R \cap \mathcal{E}$ localmente em uma espiral S_β e 0 sendo o ponto base de tal espiral. Assim, $R \cap \mathcal{E}$ é uma espiral em $\mathcal{E}$ com ponto base p . ■

A principal conexão entre os conceitos geométricos de espirais e rolos e órbitas homoclínicas simétricas é dada pelo lema seguinte. Essencialmente ele diz que uma parte de qualquer superfície que intercepta a curva W_q^s transversalmente em Σ será aplicada em um rolo logarítmico pela aplicação de Poincaré Π .

Lema 3.1.5 : *Seja $\mathcal{F}$ uma C^1 -variedade 2-dimensional em Σ , interceptando W_q^s transversalmente em p . Então para qualquer intervalo fechado $I \subset W_{loc}^u(0) \cap \Sigma^u$ existe um subconjunto $\mathcal{F}_I$ de $\mathcal{F}$ tal que $(\Pi_{loc} \circ \Pi^s)(\mathcal{F}_I)$ é um rolo logarítmico em Σ^u com base I . O ponto p pertence à fronteira de $\mathcal{F}_I$.*

Prova: Como Π^s é um difeomorfismo local aplicando uma vizinhança de p em Σ em Σ^s é suficiente mostrar que se uma C^1 -variedade 2-dimensional $M = \Pi^s(\mathcal{F})$ em Σ^s intercepta W_{loc}^s transversalmente em um ponto $m = \Pi^s(p)$ então existe um subconjunto M_I de M que é aplicado em um rolo logarítmico com base I por Π_{loc} .

Para provar isso, primeiro restringimos a ρ_u -coordenada em Σ^s para $\rho_u \leq \tilde{r}$ com escolha apropriada $0 < \tilde{r} \leq r$. Assim, tomando uma vizinhança M_o de m em M tal que M_o pode ser escrito como o gráfico de uma função C^1 , g :

$$M_o = \{(\varphi_s, \varphi_u, \rho_u) \in \Sigma^s; \varphi_s = g(\rho_u \cos \varphi_u, \rho_u \sin \varphi_u), \rho_u \leq \tilde{r}\}. \quad (3.1.15)$$

Defina $M_I \subseteq M_o$ como sendo os pontos de M_o que são aplicados por Π_{loc} em pontos com φ_u -coordenadas em I . Assim, por (3.1.13)

$$M_I = \{(\varphi_s, \varphi_u, \rho_u) \in M_o; \varphi_u + \frac{\omega}{\alpha} \ln \frac{r}{\rho_u} \in I\} \quad (3.1.16)$$

Agora, a imagem de M_I é

$$\Pi_{loc}(M_I) = \{(\varphi_u, \varphi_s, \rho_s) \in \Sigma^u; \varphi_u \in I, \rho_s \leq \tilde{r} \text{ e } \varphi_s = \tilde{g}(\varphi_u, \rho_s)\}$$

onde

$$\tilde{g}(\varphi_u, \rho_s) := g\left(\rho_s \cos\left(\varphi_u - \frac{\omega}{\alpha} \ln \frac{r}{\rho_s}\right), \rho_s \sin\left(\varphi_u - \frac{\omega}{\alpha} \ln \frac{r}{\rho_s}\right)\right) - \frac{\omega}{\alpha} \ln \frac{r}{\rho_s}.$$

De fato,

$$\Pi_{loc}(\tilde{\varphi}_s, \tilde{\varphi}_u, \tilde{\rho}_u) = \Pi_{loc}(g(\rho_u \cos \varphi_u, \rho_u \sin \varphi_u), \varphi_u, \rho_u) = (\varphi_u, \varphi_s, \rho_s)$$

onde

$$\varphi_u \in I \text{ (por construção),}$$

$$\rho_s = \tilde{\rho}_u \leq \tilde{r} e$$

$$\begin{aligned} \varphi_s &= \tilde{\varphi}_s - \frac{\omega}{\alpha} \ln \frac{r}{\rho_s} = g(\rho_u \cos \tilde{\varphi}_u, \rho_u \sin \tilde{\varphi}_u) - \frac{\omega}{\alpha} \ln \frac{r}{\rho_s} = \\ &= g\left(\rho_s \cos\left(\varphi_u - \frac{\omega}{\alpha} \ln \frac{r}{\rho_s}\right), \rho_s \sin\left(\varphi_u - \frac{\omega}{\alpha} \ln \frac{r}{\rho_s}\right)\right) - \frac{\omega}{\alpha} \ln \frac{r}{\rho_s} \end{aligned}$$

Note que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial \rho_s}(\varphi_u, \rho_s) &= \frac{\partial g}{\partial x} \left[\cos\left(\varphi_u - \frac{\omega}{\alpha} \ln \frac{r}{\rho_s}\right) - \rho_s \sin\left(\varphi_u - \frac{\omega}{\alpha} \ln \frac{r}{\rho_s}\right) \frac{\omega}{\alpha} \frac{\rho_s}{r} \frac{r}{\rho_s^2} \right] + \\ &+ \frac{\partial g}{\partial y} \left[\sin\left(\varphi_u - \frac{\omega}{\alpha} \ln \frac{r}{\rho_s}\right) + \rho_s \cos\left(\varphi_u - \frac{\omega}{\alpha} \ln \frac{r}{\rho_s}\right) \frac{\omega}{\alpha} \frac{\rho_s}{r} \frac{r}{\rho_s^2} \right] + \frac{\omega}{\alpha} \frac{\rho_s}{r} \frac{r}{\rho_s^2} = \\ &= \frac{\partial g}{\partial x} \left[\cos\left(\varphi_u - \frac{\omega}{\alpha} \ln \frac{r}{\rho_s}\right) - \frac{\omega}{\alpha} \sin\left(\varphi_u - \frac{\omega}{\alpha} \ln \frac{r}{\rho_s}\right) \right] + \\ &+ \frac{\partial g}{\partial y} \left[\sin\left(\varphi_u - \frac{\omega}{\alpha} \ln \frac{r}{\rho_s}\right) + \frac{\omega}{\alpha} \cos\left(\varphi_u - \frac{\omega}{\alpha} \ln \frac{r}{\rho_s}\right) \right] + \frac{\omega}{\alpha \rho_s^2}. \end{aligned}$$

Daí,

$$\lim_{\rho_s \rightarrow 0^+} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial \rho_s}(\varphi_u, \rho_s) = +\infty$$

Assim, como $\frac{\partial \tilde{g}}{\partial \rho_s} > 0$ em $(0, \bar{\rho}]$ para algum $\bar{\rho} > 0$ segue que $\tilde{g}(\varphi_u, \cdot)$ é estritamente crescente nesse intervalo.

Observe que $\lim_{\rho_s \rightarrow 0^+} \tilde{g}(\varphi_u, \rho_s) = -\infty$ o que implica que $\tilde{g}(\varphi_u, \cdot)$ cresce de $-\infty$ em $(0, \bar{\rho}]$ para todo $\varphi_u \in I$.

Relembremos que um rolo foi definido como a imagem difeomorfa de um rolo de referência.

Defina a seguinte aplicação:

$$\psi : Z \rightarrow \tilde{Z}$$

entre os cilindros

$$Z := \{(\varphi_u, \varphi_s, \rho_s) \in \Sigma^u; \varphi_u \in I, \rho_s \leq \bar{\rho}\} \text{ e}$$

$$\tilde{Z} := \left\{ (\varphi_u, \varphi_s, \rho_s); \varphi_u \in I, \rho_s \leq \exp\left(\frac{\alpha}{\omega} \tilde{g}(\varphi_u, \rho_s)\right) \right\}.$$

ψ afeta apenas a ρ_s -coordenada, isto é, $\psi(\varphi_u, \varphi_s, \rho_s) := (\varphi_u, \varphi_s, \tilde{\rho}_s)$

onde

$$\tilde{\rho}_s := \begin{cases} \exp\left(\frac{\alpha}{\omega} \tilde{g}(\varphi_u, \rho_s)\right), & \text{para } \rho_s \neq 0 \\ 0, & \text{para } \rho_s = 0 \end{cases}.$$

ψ é 1-1 devido a monotonicidade estabelecida para $\rho_s \in (0, \bar{\rho}]$.

Para verificar a diferenciabilidade de ψ e de sua inversa basta analisar o caso quando $\rho_s = 0$.

$$\begin{aligned} \lim_{\rho_s \rightarrow 0^+} \frac{\psi(\varphi_u, \varphi_s, \rho_s) - \psi(\varphi_u, \varphi_s, 0)}{\rho_s} &= \lim_{\rho_s \rightarrow 0^+} \left(0, 0, \frac{\exp\left(\frac{\alpha}{\omega} \tilde{g}(\varphi_u, \rho_s)\right)}{\rho_s} \right). \\ &= \lim_{\rho_s \rightarrow 0^+} \frac{\exp\left(\frac{\alpha}{\omega} \tilde{g}(\varphi_u, \rho_s)\right)}{\rho_s} = \\ &= \lim_{\rho_s \rightarrow 0^+} \frac{\exp\left(\frac{\alpha}{\omega} \left[g\left(\rho_s \cos\left(\varphi_u - \frac{\omega}{\alpha} \ln \frac{r}{\rho_s}\right), \rho_s \sin\left(\varphi_u - \frac{\omega}{\alpha} \ln \frac{r}{\rho_s}\right)\right) - \frac{\omega}{\alpha} \ln \frac{r}{\rho_s} \right] \right)}{\rho_s} \\ &= \lim_{\rho_s \rightarrow 0^+} \frac{\exp\left(\frac{\alpha}{\omega} g\left(\rho_s \cos\left(\varphi_u - \frac{\omega}{\alpha} \ln \frac{r}{\rho_s}\right), \rho_s \sin\left(\varphi_u - \frac{\omega}{\alpha} \ln \frac{r}{\rho_s}\right)\right)\right) \exp\left(-\ln \frac{r}{\rho_s}\right)}{\rho_s} = \\ &= \lim_{\rho_s \rightarrow 0^+} \frac{\exp\left(\frac{\alpha}{\omega} g\left(\rho_s \cos\left(\varphi_u - \frac{\omega}{\alpha} \ln \frac{r}{\rho_s}\right), \rho_s \sin\left(\varphi_u - \frac{\omega}{\alpha} \ln \frac{r}{\rho_s}\right)\right)\right) \frac{\rho_s}{r}}{\rho_s} \\ &= \lim_{\rho_s \rightarrow 0^+} \frac{\exp\left(\frac{\alpha}{\omega} g\left(\rho_s \cos\left(\varphi_u - \frac{\omega}{\alpha} \ln \frac{r}{\rho_s}\right), \rho_s \sin\left(\varphi_u - \frac{\omega}{\alpha} \ln \frac{r}{\rho_s}\right)\right)\right)}{r} = \exp\left(\frac{\alpha}{\omega} g(0, 0)\right) \end{aligned}$$

Ainda para φ_u temos:

$$\frac{\partial}{\partial \varphi_u} \left[\exp\left(\frac{\alpha}{\omega} \tilde{g}(\varphi_u, \rho_s)\right) \right] = \frac{\alpha}{\omega} \exp\left(\frac{\alpha}{\omega} \tilde{g}(\varphi_u, \rho_s)\right) \frac{\partial \tilde{g}}{\partial \varphi_u}(\varphi_u, \rho_s) \rightarrow 0 \text{ quando } \rho_s \rightarrow 0^+$$

pois

$$\frac{\partial \tilde{g}}{\partial \varphi_u}(\varphi_u, \rho_s) = -\frac{\partial g}{\partial x} \rho_s \sin\left(\varphi_u - \frac{\omega}{\alpha} \ln \frac{r}{\rho_s}\right) + \frac{\partial g}{\partial y} \rho_s \cos\left(\varphi_u - \frac{\omega}{\alpha} \ln \frac{r}{\rho_s}\right) \rightarrow 0$$

quando $\rho_s \rightarrow 0^+$

Portanto ψ é diferenciável.

Agora ψ aplica $\Pi_{loc}(M_I) \cap Z$ em

$$\left\{ (\varphi_u, \varphi_s, \rho_s) \in \tilde{Z}; \varphi_u \in I, \rho_s = \exp(\varphi_s \alpha / \omega) \right\}.$$

ainda podemos considerar uma aplicação afim de $\tilde{Z}$ que leva o intervalo I no intervalo $[0,1]$ transformando o conjunto anterior num rolo de referência $[0,1] \times S_{\alpha/\omega}$.

Portanto segue que $\Pi_{loc}(M_I)$ é um rolo logarítmico.

■

Um resultado análogo segue para a aplicação de Poincaré local Π_{loc}^u .

Lema 3.1.6 : *Para qualquer intervalo fechado $I \subset W_{loc}^u(0) \cap \Sigma^u$ existe um subconjunto de $Fix(R) \cap \Sigma^0$ tal que Π_{loc}^u aplica esse conjunto sob um rolo logarítmico em Σ^u com base I .*

A prova desse lema segue a mesma linha do lema 3.1.5

Infinidade de órbitas homoclínicas e periódicas.

A prova do teorema (3.1) é dividida em várias partes. Depois de recordar um resultado clássico em órbitas 1-periódicas trataremos o caso de soluções n-homoclínicas separadamente para n ímpar e n par.

Uma família de órbitas 1-periódicas:

Aqui veremos que toda órbita homoclínica simétrica é acompanhada por uma família de órbitas periódicas simétricas.

Teorema 3.3 : *(1-periódicas) Assuma (1)-(4) e (5a). Então existe uma espiral logarítmica S em $Fix(R)$ com ponto base $q = \gamma \cap Fix(R)$ tal que as trajetórias associadas de (3.1.8) são órbitas 1-periódicas simétricas. O período tende ao infinito à medida que se aproxima do ponto q pela espiral.*

Prova: Mostraremos a existência de uma espiral em $Fix(R)$ com ponto base q consistindo de pontos em $Fix(R) \cap \Pi_{\frac{1}{2}}^u(Fix(R))$. Assim, de acordo com o lema (3.1.2 iii) as órbitas

associadas são 1-periódicas.

Da hipótese (5a), $Fix(R)$ e $W^s(0)$ se interceptam transversalmente em Σ .

Para usar o lema 3.1.6 tome um intervalo $I \subset W_{loc}^u(0) \cap \Sigma^u$ contendo o ponto q^u em seu interior. Então, de acordo com o lema 3.1.6, um subconjunto de $Fix(R) \cap \Sigma^0$ é aplicado em um rolo logarítmico em Σ^u por Π_{loc}^u .

Por outro lado, Π^u aplica uma vizinhança de q^u em Σ^u difeomorficamente em uma vizinhança de q em Σ . A parte do rolo contido no domínio de Π^u é então aplicada em um rolo logarítmico $\mathcal{R}$ em Σ por Π^u . A base desse rolo é uma vizinhança de q em $W_q^u(W_q^u := \Pi^u(W_{loc}^u \cap \Sigma^u))$.

Dessa forma, um subconjunto de $Fix(R) \cap \Sigma^0$ (tendo 0 em sua fronteira) é aplicado em um rolo logarítmico $\mathcal{R}$ pela aplicação de Poincaré $\Pi_{\frac{1}{2}}^u = \Pi^u \circ \Pi_{loc}^u$. Pelo lema 3.1.4(iii) a intersecção de $\mathcal{R}$ e $Fix(R)$ localmente é uma espiral $\mathcal{S}$ e as órbitas associadas são 1-periódicas pelo lema 3.1.2 (iii com $n=0$)

■

Órbitas $(2n+1)$ -homoclínicas e $(2n+1)$ -periódicas:

O método desenvolvido na seção anterior nos permite mostrar a existência de órbitas n -homoclínicas e n -periódicas para todo $n > 1$. Procedemos da seguinte forma: uma pequena parte do plano $Fix(R)$ é aplicado por um iterado Π^n da aplicação de Poincaré ou por $\Pi^n \circ \Pi_{\frac{1}{2}}^u$ em uma superfície que intercepta a variedade W_q^s transversalmente. Então uma parte dessa superfície torna-se a um rolo logarítmico após uma volta ao longo de γ . Esse rolo logarítmico intercepta $Fix(R)$ em uma espiral (onde os pontos de intersecção dão origem a órbitas periódicas) e, por outro lado, ele tem uma intersecção não vazia com W_q^s (onde os pontos de intersecção dão origem a órbitas homoclínicas). Para a prova nós essencialmente aplicaremos os lemas (3.1.2) e (3.1.3) os quais garantem que, começando em $Fix(R)$, é suficiente construir soluções "semi"-periódicas e homoclínicas que tornam-se soluções periódicas e homoclínicas completas por reversibilidade.

Teorema 3.4 : *((2n+1)-homoclínicas) Assuma (1)-(5). Então para cada $n \geq 1$ existe um número infinito e enumerável de órbitas $(2n+1)$ -homoclínicas simétricas e cada uma dessas órbitas é acompanhada por uma família a um parâmetro de órbitas $(2n+1)$ -periódicas simétricas.*

Prova: Temos que $q \in \text{Fix}(R)$ e ainda W_q^s intercepta $\text{Fix}(R)$ transversalmente em q . Seja U uma vizinhança de q em $\text{Fix}(R)$.

Consideremos um intervalo $I \subset W_{loc}^u(0) \cap \Sigma^u$ que está contido no domínio de Π^u e tal que $q^u \in I$. Como U é uma C^1 -variedade 2-dimensional interceptando a curva $W_q^s = (\Pi^s)^{-1}(W_{loc}^s(0) \cap \Sigma^s)$ transversalmente em q , pelo lema 3.1.5 existe um subconjunto U_I de U , tal que a imagem de U_I sob $(\Pi_{loc} \circ \Pi^s)$ é um rolo logarítmico em Σ^u com base I . A parte do rolo logarítmico no domínio de Π^u é aplicado por Π^u num rolo $\mathcal{R}_I$ com base $\Pi^u(I) \subseteq W_q^u$. $(\Pi^u(W_{loc}^u(0) \cap \Sigma^u) = W_q^u)$

Note que $q = \Pi^u(q^u) \in \Pi^u(I)$. Logo, o plano $\text{Fix}(R)$ e a base do rolo $\mathcal{R}_I$ se interceptam transversalmente em q .

Pelo lema 3.1.4 a intersecção $\mathcal{R}_I \cap \text{Fix}(R)$ é localmente uma espiral em $\text{Fix}(R)$ com ponto base q . Essa espiral está contida em $\text{Fix}(R) \cap \Pi(\text{Fix}(R))$.

De fato, é claro que essa espiral está contida em $\text{Fix}(R)$ pois ela é dada pela intersecção $\mathcal{R}_I \cap \text{Fix}(R)$. Além disso, tal espiral está contida em $\mathcal{R}_I = \Pi^u(\Pi_{loc} \circ \Pi^s)(U_I)$ onde estamos considerando apenas a parte do rolo contido no domínio de Π^u . No entanto, $\Pi^u \circ \Pi_{loc} \circ \Pi^s = \Pi$, ou seja, $\mathcal{R}_I = \Pi(U_I)$.

Portanto, temos que a espiral está contida em $\text{Fix}(R) \cap \Pi(\text{Fix}(R))$ e daí, segue pelo lema 3.1.2(i), que as órbitas associadas são 2-periódicas.

Agora, pelo lema 3.1.4(ii) a intersecção $\mathcal{R}_I \cap W_q^s$ consiste de uma sequência $p_1, p_2, \dots \rightarrow q$ de pontos em $\Pi(\text{Fix}(R)) \cap W_q^s$, e esses pontos dão origem a órbitas 3-homoclínicas pelo lema 3.1.3(i). Além disso, pelo lema 3.1.4(ii) segue que existe um i_o tal que para $i \geq i_o$ a intersecção de $\Pi(U_I)$ e W_q^s em p_i será transversal. Ainda pelo teorema 3.3 para cada órbita 3-homoclínica temos uma família de órbitas 3-periódicas simétricas que se acumulam na órbita 3-homoclínica simétrica.

Para concluirmos a demonstração do teorema basta considerarmos as órbitas 3-homoclínicas obtidas para $i \geq i_o$ como novas órbitas homoclínicas básicas e o resultado segue por indução. ■

Órbitas 2n-homoclínicas e 2n-periódicas:

Para provar a existência de órbitas 2n-homoclínicas aplicamos a segunda parte do lema 3.1.3. Faremos a prova em dois passos mostrando a existência de órbitas 2-

homoclínicas e depois provamos a existência de outras soluções homoclínicas por indução.

Teorema 3.5 : *(2-homoclínicas) Assuma (1)-(5). Então existe uma seqüência $p_1, p_2, \dots \rightarrow 0$ em Σ^0 tal que as trajetórias associadas são órbitas 2-homoclínicas simétricas e para $i \geq i_0$ a intersecção de $W^s(0)$ e $W^u(0)$ em p_i é transversal.*

Prova: A prova segue a mesma linha da prova do teorema 3.4. Um subconjunto de $\text{Fix}(R) \cap \Sigma^0$ é aplicado por $\Pi_{\frac{1}{2}}^u$ em um rolo logarítmico em Σ com base em algum intervalo de W_q^u contendo q (lema 3.1.6). A C^1 -curva W_q^s intercepta esse rolo em infinitos pontos $q_1, q_2, \dots$. Novamente, existe i_0 tal que para $i \geq i_0$ a intersecção do rolo com W_q^s em q_i é transversal (lema 3.1.4(iii)).

Os pontos $p_i := \left(\Pi_{\frac{1}{2}}^u\right)^{-1}(q_i)$ possuem então a propriedade do teorema (lema 3.1.3(ii) com $n=0$).

■

Observação 3.1.2 : *Substituindo (5) por (5a) obtemos infinitas órbitas 2-homoclínicas.*

O teorema 3.5 nos habilita para mostrar indutivamente que existem órbitas homoclínicas seguindo γ um número par de vezes. Esse teorema completa a prova do teorema 3.1.

Teorema 3.6 : *(2n-homoclínicas e 2n-periódicas) Para cada $n \geq 1$ existem infinitas órbitas 2n-homoclínicas simétricas e cada uma delas é acompanhada por uma família de órbitas 2n-periódicas simétricas.*

A intersecção de uma tal família de órbitas periódicas com $\Sigma^0 \cap \text{Fix}(R)$ forma uma espiral logarítmica em $\text{Fix}(R)$ com um ponto base que pertence a uma órbita homoclínica.

Prova: Cada uma das órbitas 2-homoclínicas cuja existência foi garantida no teorema 3.5 com $i \geq i_0$ pode ser considerada como uma nova órbita 1-homoclínica. Usando o teorema 3.3 obtemos uma família de trajetórias 2-periódicas simétricas (com respeito a órbita homoclínicas primária γ).

O teorema 3.4 fornece infinitas órbitas $2(2n+1)$ -homoclínicas e $2(2n+1)$ -periódicas e o teorema 3.5 a existência de infinitas órbitas 4-homoclínicas.

Por indução segue que da existência de trajetórias 2^k -homoclínicas existem órbitas 2^k -periódicas, $2^k(2n+1)$ -homoclínicas, $2^k(2n+1)$ -periódicas e 2^{k+1} -homoclínicas.

Desta forma, concluímos a prova do teorema 3.1: dada a existência de uma órbita homoclínica simétrica simples obtemos imediatamente a existência de infinitas órbitas n -homoclínicas e n -periódicas para todo $n \geq 2$.

3.1.4 Região 2 - O Caso Sela:

Na região 2 da figura 3.1 os autovalores da origem são reais. Aqui, não existe, a priori, nenhuma razão para multiplicidade de soluções homoclínicas como na região 1, já que tal efeito é devido a parte complexa dos autovalores o que aqui não existe. Nesse caso, a dinâmica numa vizinhança da órbita homoclínica é, em contraste com o caso sela-foco, muito simples. Aqui consideraremos um campo de vetores reversível

$$\dot{X} = f(\mu, X)$$

tal que $f(\mu, RX) = -Rf(\mu, X)$ para parâmetros reais $\mu \in \mathbb{R}$ e $X \in \mathbb{R}^4$. Além disso, assumiremos que $0 \in \mathbb{R}^4$ é um equilíbrio hiperbólico com autovalores reais simples, isto é, $\text{spec} = \{\pm 1, \pm \gamma\}$, $\gamma > 1$.

Supomos ainda que, para $\mu = 0$, temos uma órbita homoclínica simétrica para a origem que surge devido a uma tangência quadrática entre $W^u(0)$ e $\text{Fix}(R)$, isto é, estamos supondo que a órbita homoclínica é não-transversal.

Introduzimos coordenadas $X = (x, y, u, v)$ numa vizinhança de 0 tal que o campo vetorial do sistema toma a forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x + \dots, & \dot{u} &= -\gamma u + \dots \\ \dot{y} &= y + \dots, & \dot{v} &= \gamma v + \dots \end{aligned} \quad (3.1.17)$$

onde as reticências indicam termos não-lineares de ordem superior. Dessa forma, os eixos coordenados são as autodireções da matriz de linearização em 0. A variedade instável é tangente ao plano $\{x = 0, u = 0\}$ e a variedade estável é tangente ao plano $\{y = 0, v = 0\}$. Como R aplica eixos coordenados em eixos coordenados correspondentes aos autovalores de sinais opostos, visto que $Rf'(0)R = -f'(0)$, segue que R é dado por

$$R(x, y, u, v) = (y, x, v, u)$$

nessas coordenadas. É claro que $\text{Fix}(R)$ é dado por

$$\text{Fix}(R) = \{x = y, u = v\}$$

Também é claro que os planos afins $\{\frac{x+y}{2} = x_o, \frac{u+v}{2} = u_o\}$ são invariantes com relação a R .

Introduzimos a notação R_M^- para esses planos onde $M = (x_o, y_o, u_o, v_o)$ é o ponto de intersecção do plano com $Fix(R)$. Note que $R_M^- = M + Fix(-R)$.

Supomos que a variedade instável de 0 intercepta $Fix(R)$ em algum ponto M . Devido a reversibilidade, a variedade estável de 0 intercepta $Fix(R)$ no mesmo ponto. Dessa forma, a órbita Γ passando por M é uma órbita homoclínica simétrica para 0.

Faremos as seguintes hipóteses:

1. W^u possui uma tangência com $Fix(R)$ em um ponto M . A tangência é assumida tão simples quanto possível no sentido que
2. a intersecção de $Fix(R)$ com o plano tangente de W^u em M é 1-dimensional (uma reta), e
3. a tangência é quadrática.

Incluimos nosso sistema em uma família a 1-parâmetro $f = f(\mu, X)$ dependendo suavemente de μ (suavemente significa que o campo vetorial é C^r -suave com relação a (μ, x, y, u, v)). Também assumimos que

4. a intersecção de W^u com $Fix(R)$ varia quando μ varia, sendo tangente para $\mu = 0$.

Como a tangência é quadrática, o ponto de tangência desaparece, digamos, para $\mu > 0$. Quando tal tangência é desfeita, tanto W^u quanto sua R -imagem W^s deixam de ser tangentes a $Fix(R)$ simultaneamente. Por outro lado, para $\mu < 0$, dois pontos M_1 e M_2 aparecem, nos quais W^u intercepta $Fix(R)$ transversalmente. Os pontos M_1 e M_2 correspondem a um par de órbitas homoclínicas transversais simétricas Γ_1 e Γ_2 .

Precisamos ainda de algumas hipóteses de não-degenerescência adicionais. Primeiro suponha que:

5. Γ não pertence à variedade instável forte W^{uu} de 0.

W^{uu} é unicamente definida como uma variedade 1-dimensional que é tangente a $\{x = 0, y = 0, u = 0\}$ em 0. Tal variedade corresponde à parte de W^u relacionada ao autovalor positivo de maior módulo, isto é, é uma variedade 1-dimensional tangente ao subespaço gerado pelo autovetor associado ao autovalor $\gamma > 1$. A condição 5 diz que Γ deixa a origem 0 numa direção bem determinada, isto é, tangente ao eixo- y . Sem perda de generalidade podemos assumir que Γ deixa a origem na direção $y > 0$. Devido a reversibilidade do sistema, Γ também retorna a 0 numa direção bem definida, isto é,

tangente ao eixo- x .

Para as outras hipóteses de não degenerescência, consideremos uma secção transversal $\Sigma^+ := \{y = \varepsilon\}$ para Γ , onde $\varepsilon > 0$ é fixado e suficientemente pequeno. Fixe também outra secção transversal Σ a qual contém o ponto M e uma vizinhança local de M em $Fix(R)$.

Note que em uma pequena vizinhança de 0 existe uma (não única) variedade invariante W_{loc}^{ue} (conhecida como variedade instável estendida) a qual é C^1 -suave, tangente ao hiperplano $\{u = 0\}$ em 0, e que contém W_{loc}^u .

Se W^{ue} denota os iterados positivos de W_{loc}^{ue} dentro de uma vizinhança de Γ e fora de uma pequena vizinhança de 0 assumimos que:

6. W^{ue} é transversal a $Fix(R)$ no ponto $M = \Gamma \cap Fix(R)$, e
7. W^{ue} também é transversal ao plano R_M^- .

Note que W^{ue} não é unicamente definida, mas os espaços tangentes de quaisquer duas variedades coincidem em todos os pontos de W^u . Assim as condições de transversalidade 6 e 7 estão bem definidas.

Devemos distinguir duas possibilidades geométricas diferentes de como W^u pode encontrar $Fix(R)$. Em uma pequena vizinhança do ponto $M^* := \Gamma \cap \Sigma^+$ temos um fluxo definindo uma aplicação de Poincaré $\Pi_+ : \Sigma^+ \rightarrow \Sigma$.

Devido a hipótese de que W^u tem uma tangência quadrática com $Fix(R)$, a pré-imagem $\Pi_+^{-1}(Fix(R))$ possui uma tangência quadrática com a curva $W_{loc}^u \cap \Sigma^+ = \{x = 0, u = 0, y = \varepsilon\}$. Como $W_{loc}^u \subset W_{loc}^{ue}$ essa curva pertence à superfície $W_{loc}^{ue} \cap \Sigma^+$ a qual está próxima ao plano $\{u = 0, y = \varepsilon\}$. Na realidade essa superfície é tangente ao plano $\{u = 0, y = \varepsilon\}$ para uma escolha adequada de coordenadas.

Da transversalidade de W^{ue} e $Fix(R)$, segue que a superfície $W_{loc}^{ue} \cap \Sigma^+$ é transversal a $\Pi_+^{-1}(Fix(R))$. Assim, a intersecção é uma curva l a qual possui uma tangência quadrática com a curva $\{x = 0, u = 0, y = \varepsilon\}$.

De fato, $l = (W_{loc}^{ue} \cap \Sigma^+) \cap \Pi_+^{-1}(Fix(R))$ e $\Pi_+^{-1}(Fix(R))$ tem tangência quadrática com a curva $\{x = 0, u = 0, y = \varepsilon\}$ a qual está contida em $W_{loc}^{ue} \cap \Sigma^+$.

Mais ainda, os valores de x não são nulos em todos os pontos de l . Diremos que $Fix(R)$ encontra W^u no lado positivo se a curva l pertence a parte de $W_{loc}^{ue} \cap \Sigma^+$ que corresponde a valores positivos de x , e no lado negativo se $x < 0$ em l . Relembremos que $x > 0$, dentro de W_{loc}^u , é a direção de retorno da órbita homoclínica original Γ para 0.

Seja U uma vizinhança de $\Gamma \cup 0$. O teorema seguinte detecta órbitas 1-periódicas

simétricas em U chamadas principais e também estabelece a inexistência de órbitas k -homoclínicas em U com $k \geq 2$.

Teorema 3.7 : *Seja 0 um equilíbrio hiperbólico simétrico, com autovalores reais simples, de um campo vetorial reversível de dimensão 4 de suavidade C^r , $r \geq 3$. Assuma que 0 possui uma órbita homoclínica simétrica ao longo da qual as condições de tangência e não-degenerescência 2-7 especificadas acima ocorrem. Então, em uma vizinhança suficientemente pequena U da órbita 1-homoclínicas simétrica Γ , e para μ pequeno, não existem órbitas k -homoclínicas, para qualquer $k \geq 2$.*

Para as órbitas periódicas principais em U e para μ pequeno segue que:

Se $Fix(R)$ e W^u encontram-se no lado negativo, então existem órbitas periódicas principais para $\mu \geq 0$. Para $\mu < 0$ fixado existe uma família a 1-parâmetro de órbitas periódicas principais unindo as órbitas homoclínicas Γ_1 e Γ_2 .

Se $Fix(R)$ e W^u encontram-se no lado positivo, então existe uma família a 1-parâmetro de órbitas periódicas principais para $\mu > 0$. Essa família é dividida em dois caminhos contínuos pela órbita homoclínica Γ em $\mu = 0$. Os dois caminhos persistem, separadamente, para $\mu < 0$, um limitado por Γ_1 e o outro por Γ_2 .

Passos da Prova: Consideremos inicialmente as órbitas periódicas simétricas próximas a órbita homoclínica simétrica Γ e por fim analisemos a situação das órbitas k -homoclínicas.

As órbitas periódicas simétricas interceptam o plano $Fix(R)$ em exatamente dois pontos. Reciprocamente, qualquer órbita que intercepta $Fix(R)$ duas vezes é uma órbita periódica simétrica. Como estamos tratando de órbitas periódicas principais em uma vizinhança U de $\Gamma \cup 0$, tais órbitas têm um ponto de intersecção com $Fix(R)$ que pertence a uma pequena vizinhança de 0 e outro que pertence a uma pequena vizinhança do ponto $M = \Gamma \cap Fix(R)$. Além disso, órbitas 1-periódicas em U interceptam uma secção transversal em U precisamente uma vez.

Denote por P , o ponto de intersecção de uma órbita 1-periódica com Σ^+ . Tal ponto está próximo de $M^* = \Gamma \cap \Sigma^+$.

Note que o conjunto de tais pontos P pertence a uma curva $\mathcal{L}$ que é a intersecção de duas superfícies em Σ^+ . A primeira superfície, chamada de conjunto saída, é formada por iterados positivos de uma vizinhança de 0 em $Fix(R)$ pelo fluxo que interceptam Σ^+ . A segunda superfície é o conjunto $\Pi_+^{-1}(Fix(R))$: a intersecção com Σ^+ de iterados negativos de uma vizinhança de M em $Fix(R)$ pelo fluxo.

Usaremos a notação $(Fix(R))^+$ e $(Fix(R))^-$ para essas duas superfícies.

Assim, $\mathcal{L} = (Fix(R))^+ \cap (Fix(R))^-$.

Logo, precisamos descrever algebricamente as superfícies $(Fix(R))^\pm$.

Como por hipótese $W^u(0)$ tem tangência quadrática com $Fix(R)$ em M segue que $(Fix(R))^-$ possui tangência quadrática com $\{x = 0, u = 0, y = \varepsilon\} = W_{loc}^u \cap \Sigma^+$ no ponto $M^* = (x = 0, u = 0, v = v^*) = \Gamma \cap \Sigma^+$ e portanto $(Fix(R))^-$ é dado por

$$a_1x + a_2u = c'(v - v^*)^2 + \dots, \quad (3.1.18)$$

para $\mu = 0$; onde os valores c' e $|a_1| + |a_2|$ são não-nulos e as reticências indicam termos de ordem superior.

Como $(Fix(R))^-$ é transversal ao plano $\{u = 0\}$ segue que $a_1 \neq 0$ e então podemos reescrever (3.1.18) como

$$x = c(v - v^*)^2 + au + \dots \quad (3.1.19)$$

onde o sinal do coeficiente c indica como $Fix(R)$ encontra W^u (positiva ou negativamente).

Para $\mu \neq 0$ temos uma perturbação de (3.1.19) para

$$x = c(\mu + (v - v^*)^2) + au + \dots \quad (3.1.20)$$

onde as reticências indicam termos de ordem superior na extensão de Taylor em $(\mu, v - v^*, u)$.

Por (3.1.20), a superfície $(Fix(R))^-$ não intercepta $W_{loc}^u \cap \Sigma^+ = \{x = 0, u = 0\}$ para $\mu > 0$. Para $\mu < 0$, por outro lado, existem dois pontos de intersecção M_1^* e M_2^* com v -coordenadas

$$v_{1,2} = v^* \pm \sqrt{|\mu|} + o(\sqrt{|\mu|}) \quad (3.1.21)$$

pelos quais passam as órbitas homoclínicas transversais Γ_1 e Γ_2 .

Quanto a $(Fix(R))^+$ pode-se mostrar que esse conjunto é uma C^1 -superfície limitada por $W_{loc}^u \cap \Sigma^+$. Além disso, ela pode ser escrita na forma

$$u = \psi(x, v, \mu), \quad x > 0 \quad (3.1.22)$$

onde a função ψ é C^1 e

$$\psi \equiv 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} \equiv 0 \quad (3.1.23)$$

em $x = 0$. Em particular $\psi = o(x)$. Além disso,

$$\frac{\partial \psi}{\partial(v, u)} = O(x) \quad (3.1.24)$$

Comparando as equações (3.1.22) e (3.1.20) para $(Fix(R))^+$ e $(Fix(R))^-$, respectivamente, segue que $\mathcal{L} = (Fix(R))^+ \cap (Fix(R))^-$ é dada pelo sistema

$$\begin{cases} x = c(\mu + (v - v^*)^2) + \varphi(\mu, v) \\ u = \psi(x, v, \mu) \\ x > 0 \end{cases} \quad (3.1.25)$$

onde

$$\begin{aligned} \varphi &= o(|\mu| + (v - v^*)^2) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} &= o(1) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v} &= o(|\mu|) + o(|v - v^*|) \end{aligned} \quad (3.1.26)$$

De acordo com o sistema (3.1.25) segue que a dependência de x em $(v - v^*)$ é dada pela primeira equação. O gráfico dessa dependência é uma curva do tipo parábola. Como precisamos encontrar valores de $x > 0$ para obtermos órbitas periódicas principais segue que:

- Não existem órbitas periódicas principais para $\mu > 0$ no caso negativo ($c < 0$).
- Os v -valores das órbitas periódicas principais formam um intervalo $v_1(\mu) < v - v^* < v_2(\mu)$, para $\mu < 0$.
Os extremos desse intervalo correspondem a valores homoclínicos $x = 0$. De fato, a segunda equação de (3.1.25) e (3.1.23) implicam $u = 0$. Logo, essas são v -coordenadas de pontos da intersecção de $(Fix(R))^-$ com $W_{loc}^u \cap \Sigma^+ = \{x = 0, u = 0\}$ dados pelos pontos homoclínicos (3.1.21).

Note ainda que:

- $\mathcal{L}$ é vazio para $c < 0, \mu \geq 0$;
- $\mathcal{L}$ consiste de uma componente conexa para $c < 0, \mu < 0$ ou $c > 0, \mu > 0$.
- $\mathcal{L}$ consiste de duas componentes conexas para $c > 0, \mu \leq 0$.

Para obtermos as expressões (3.1.22)-(3.1.24) consideramos o problema de Shil'nikov: para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, para qualquer x_o, u_o, y_τ, v_τ tal que $\|x_o\| \leq \varepsilon, \|u_o\| \leq \varepsilon, \|y_\tau\| \leq \varepsilon, \|v_\tau\| \leq \varepsilon$, e para qualquer $\tau > 0$ existe uma única solução do problema: encontrar uma órbita $x(t), y(t), u(t), v(t)$ inteiramente contida na ε -vizinhança

de 0 e que satisfaz as condições de contorno

$$\begin{aligned} x(0) &= x_o, & u(0) &= u_o \\ y(\tau) &= y_\tau, & v(\tau) &= v_\tau \end{aligned} \quad (3.1.27)$$

Além disso, existem C^r -funções (X, Y, U, V) tais que as órbitas que começam no ponto (x_o, y_o, u_o, v_o) em uma vizinhança de 0 alcançam um ponto $(x_\tau, y_\tau, u_\tau, v_\tau)$ em $t = \tau$ se, e somente se,

$$\begin{aligned} x_\tau &= X(x_o, u_o, y_\tau, v_\tau, \tau), & u_\tau &= U(x_o, u_o, y_\tau, v_\tau, \tau) \\ y_o &= Y(x_o, u_o, y_\tau, v_\tau, \tau), & u_o &= V(x_o, u_o, y_\tau, v_\tau, \tau) \end{aligned} \quad (3.1.28)$$

Consideremos por reversibilidade $\Sigma^- = R(\Sigma^+) := \{x = \varepsilon\}$ e se $(x_o, y_o, u_o, v_o) \in \Sigma^-$ e $(x_\tau, y_\tau, u_\tau, v_\tau) \in \Sigma^+$ segue que $R(x_o, y_o, u_o, v_o) = (x_\tau, y_\tau, u_\tau, v_\tau) \Rightarrow y_o = x_\tau$ e $v_o = u_\tau$ e daí,

$$\begin{aligned} Y(x_o, u_o, y_\tau, v_\tau, \tau) &\equiv X(y_\tau, v_\tau, x_o, u_o, \tau) \\ V(x_o, u_o, y_\tau, v_\tau, \tau) &\equiv U(y_\tau, v_\tau, x_o, u_o, \tau) \end{aligned} \quad (3.1.29)$$

Dáí, o conjunto $(\text{Fix}(R))^+ \subset \Sigma^+ = \{y = \varepsilon\}$ é dado, localmente, pelos pontos $P = (x_\tau, y_\tau, u_\tau, v_\tau)$ para os quais:

$$\begin{aligned} x_\tau &= y_o = Y(x_o, u_o, y_\tau, v_\tau, \tau) \equiv X(y_\tau, v_\tau, x_o, u_o, \tau) = X(\varepsilon, v_\tau, \varepsilon, v_\tau, \tau) \\ u_\tau &= v_o = V(x_o, u_o, y_\tau, v_\tau, \tau) \equiv U(y_\tau, v_\tau, x_o, u_o, \tau) = U(\varepsilon, v_\tau, \varepsilon, v_\tau, \tau) \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{cases} x_\tau = X(\varepsilon, v_\tau, \varepsilon, v_\tau, \tau) \\ u_\tau = U(\varepsilon, v_\tau, \varepsilon, v_\tau, \tau) \end{cases} \quad (3.1.30)$$

onde v_τ pode ser tomado arbitrariamente com valores próximos a v^* e τ tão grande quanto necessário.

Em outras palavras, o ponto P pertence a $(\text{Fix}(R))^+$ se, e somente se, a órbita começando em $R(P) = (x_o = \varepsilon, y_o = x_\tau, u_o = v_\tau, v_o = u_\tau) \in \Sigma^- := \{x = \varepsilon\} = R(\Sigma^+)$ alcança Σ^+ após algum tempo $t = \tau$. De fato, considere a órbita para frente começando em algum ponto de $\text{Fix}(R)$ próximo a 0 e interceptando Σ^+ em P . Então por reversibilidade a órbita para trás intercepta $\Sigma^- = R(\Sigma^+)$ no ponto $R(P)$, após o mesmo tempo. Reciprocamente, qualquer órbita passando por P e $R(P)$ intercepta $\text{Fix}(R)$ entre P e $R(P)$.

Para finalizar precisamos estimar as funções X e U .

Para isso, podemos colocar o sistema na forma de Ovsyannikov-Shil'nikov [19] próximo a 0, ou seja,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x + g_{11}(x, y, v)x + g_{12}(x, y, u, v)u, \\ \dot{u} &= -\gamma u + g_{21}(x, y, v)x + g_{22}(x, y, u, v)u \\ \dot{y} &= y + f_{11}(x, y, u)y + f_{12}(x, y, u, v)v \\ \dot{v} &= \gamma v + f_{21}(x, y, u)y + f_{22}(x, y, u, v)v\end{aligned}\quad (3.1.31)$$

onde g_{ij} e f_{ij} são funções C^{r-1} satisfazendo

$$\begin{aligned}g_{11}(x=0, y, v) &\equiv 0 & g_{21}(x=0, y, v) &\equiv 0 \\ g_{11}(x, y=0, v=0) &\equiv 0 & g_{12}(x, y=0, u, v=0) &\equiv 0\end{aligned}\quad (3.1.32)$$

$$\begin{aligned}f_{11}(x, y=0, u) &\equiv 0 & f_{21}(x, y=0, u) &\equiv 0 \\ f_{11}(x=0, y, u=0) &\equiv 0 & f_{12}(x=0, y, u=0, v) &\equiv 0\end{aligned}\quad (3.1.33)$$

além disso tal mudança pode ser considerada de tal forma que a reversibilidade R continua linear, isto é, $R(x, y, u, v) = (y, x, v, u)$.

Nessas coordenadas as funções X, Y, U, V são dadas por

$$\begin{aligned}X &= e^{-\tau}x_0 + o(e^{-\tau}) \\ Y &= e^{-\tau}y_\tau + o(e^{-\tau}) \\ U &= o(e^{-\tau}) \\ v &= o(e^{-\tau})\end{aligned}\quad (3.1.34)$$

Considerando as estimativas (3.1.34) podemos reescrever as equações (3.1.30) na forma

$$\begin{aligned}x_\tau &= e^\tau \varepsilon + o(e^{-\tau}) \\ u_\tau &= o(e^{-\tau})\end{aligned}\quad (3.1.35)$$

Da primeira equação temos

$$x > 0 \quad (3.1.36)$$

e

$$\tau = -\ln \frac{x}{\varepsilon} + o(1) \quad (3.1.37)$$

onde $o(1)$ é uma função de (x_τ, v_τ, μ) que tende a zero junto com sua primeira derivada para $x_\tau \rightarrow 0^+$.

Quanto as órbitas k -homoclínicas, para $k \geq 2$, considere $W \subseteq \Sigma^+$ dado pelos pontos $z(\tau) \in \Sigma^+$ que pertencem a órbitas por $z(0) \in \Sigma^-$ numa vizinhança U de Γ , e que tendem para 0.

Considerando a imagem de W por Π_+ mostra-se que

$$z_1 - z_0 \in \text{Fix}(-R) \quad \Rightarrow \quad z_1 = z_0 \quad (3.1.38)$$

para quaisquer dois pontos z_0, z_1 no fecho de $\Pi_+(W) \subseteq \Sigma$.

Suponha que $z_0 \in \Sigma \cap W^s$ pertence a uma órbita k -homoclínica, $k \geq 2$, não necessariamente simétrica.

Relembrando que $z_0 \in W^s$ indica que a órbita por z_0 tende imediatamente para 0 quando passa por z_0 . Como z_0 está numa órbita k -homoclínica, sua órbita para trás também tende para 0, assim z_0 pertence a $\Pi_+(W)$. Seja $z_1 := R(z_0) \in \Sigma \cap W^u$. Temos que:

$$-R(z_1 - z_0) = -R(z_1) + R(z_0) = z_1 - z_0 \quad \Rightarrow \quad z_1 - z_0 \in \text{Fix}(-R)$$

e ainda z_1 pertence ao fecho de $\Pi_+(W)$. Daí, de (3.1.38) segue que $z_0 = z_1 = R(z_0) \in \text{Fix}(R)$. Em particular

$$z_0 \in W^s \cap \text{Fix}(R)$$

pertence a uma órbita 1-homoclínica simétrica.

3.1.5 Região 3 - O Caso Sela-Centro:

Nessa região a origem não é hiperbólica devido a um par de autovalores imaginários puros. Dessa forma, a questão de persistência de órbitas homoclínicas é mais sutil. Uma análise completa da existência de órbitas homoclínicas neste caso não é conhecida, mas trataremos aqui um caso particular; quando o sistema reversível é um hamiltoniano.

Consideraremos um problema com dois graus de liberdade cuja função Hamiltoniana é dada por

$$H(q, p) = \frac{\omega}{2}(p_1^2 + q_1^2) + \frac{\lambda}{2}(p_2^2 - q_2^2) + \alpha q_1^3 + \beta q_1^2 q_2 + \gamma q_1 q_2^2 + \delta q_2^3 \quad (3.1.39)$$

onde estamos supondo $\delta \neq 0$ e $\omega\lambda > 0$. Com uma mudança de variável podemos supor $\lambda = 1$ e $\delta = \frac{1}{3}$. O sistema Hamiltoniano associado é dado por:

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{q}_1 = \omega p_1 \\ \dot{q}_2 = \lambda p_2 \\ \dot{p}_1 = -\omega q_1 - 3\alpha q_1^2 - 2\beta q_1 q_2 - \gamma q_2^2 \\ \dot{p}_2 = \lambda q_2 - \beta q_1^2 - 2\gamma q_1 q_2 - 3\delta q_2^2 \end{cases} \quad (3.1.40)$$

ou ainda,

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \\ -\omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + O(2) = A \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} + O(2)$$

Note que os autovalores da parte linear são dados por:

$$|A - xI| = 0 \Rightarrow x^4 + (\omega^2 - \lambda^2)x^2 - \omega^2\lambda^2 = 0 \Rightarrow \begin{aligned} x_{1,2} &= \pm\lambda = \pm 1 \\ x_{3,2} &= \pm i\omega \end{aligned}$$

Portanto a linearização na origem é do tipo sela-centro.

Ainda,

$$H(q, -p) = H(q, p)$$

e portanto o sistema é R-reversível onde

$$R(q, p) = (q, -p)$$

Note que

$$Fix(R) = \{p = 0\} = \{p_1 = p_2 = 0\}.$$

Consideraremos γ como um parâmetro de perturbação.

Para $\gamma = 0$ temos que

$$h(t) = \begin{pmatrix} q(t) \\ p(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3/(1 + \cosh t) \\ 0 \\ -3 \sinh t / (1 + \cosh t)^2 \end{pmatrix} \quad (3.1.41)$$

é uma solução homoclínica R-reversível para o sistema (3.1.40) com ponto simétrico em $(0, 3/2, 0, 0)$.

Nosso objetivo é analisar a estrutura do fluxo com respeito a órbitas homoclínicas numa vizinhança do “loop” $\{h(t), t \in \mathbb{R}\} \cup \{0\}$ para pequenas variações de γ . Restringiremos nossa atenção para as órbitas homoclínicas na superfície de energia $H = 0$. Tal superfície contém o ponto de equilíbrio $(q, p) = 0$ e também toda órbita tendendo a 0 para $t \rightarrow \infty$ ou $t \rightarrow -\infty$.

Como nos outros casos, a principal ferramenta para estudar o fluxo é uma aplicação de Poincaré $\Pi(., \gamma)$ em uma secção 2-dimensional $\Sigma^- \subset \{H = 0\}$ transversal à parte da variedade estável local com $q_2 > 0$. Tal aplicação é composta por uma parte local e uma parte global Π_{loc} e G , respectivamente. A primeira corresponde ao fluxo próximo do equilíbrio.

Redução a uma aplicação de Poincaré 2-dimensional:

Como estamos na superfície de nível $H = 0$ resolvemos tal equação para $p_2 = \dot{q}_2$ obtendo

$$p_2^2 = q_2^2 - \omega(p_1^2 + q_1^2) - 2\alpha q_1^3 - 2\beta q_1^2 q_2 - 2\gamma q_1 q_2^2 - \frac{2}{3} q_2^3 \quad (3.1.42)$$

e o fluxo pode ser visualizado no espaço (q, p_1) .

As equações são dadas por

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{p}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega p_1 \\ -\omega q_1 - 3\alpha q_1^2 - 2\beta q_1 q_2 \\ \pm \sqrt{q_2^2 - \omega(p_1^2 + q_1^2) - 2\alpha q_1^3 - 2\beta q_1^2 q_2 - 2\gamma q_1 q_2^2 - \frac{2}{3} q_2^3} \end{pmatrix} \quad (3.1.43)$$

Note que o sistema é definido apenas no conjunto D dado por

$$D = \{(q, p_1); q_2^2 - \omega(p_1^2 + q_1^2) - 2\alpha q_1^3 - 2\beta q_1^2 q_2 - 2\gamma q_1 q_2^2 - \frac{2}{3} q_2^3 \geq 0\}.$$

A fronteira ∂D de D é dada por

$$\omega p_1^2 = q_2^2 - \frac{2}{3} q_2^3 - \omega q_1^2 - 2\alpha q_1^3 - 2\beta q_1^2 q_2 - 2\gamma q_1 q_2^2 \quad (3.1.44)$$

Para coeficientes gerais ∂D é formada por duas partes as quais são importantes para a análise. Por um lado, temos uma parte cônica ∂D_1 próxima a origem e, por outro lado, uma parte suave ∂D_2 contendo o ponto $(q, p_1) = (0, 3/2, 0)$ o qual pertence a solução homoclínica (3.1.41), (de fato, basta fazer $t = 0$).

A variedade instável local $W_{loc}^u(0)$ é 1-dimensional e tangente ao subespaço gerado por $(0, 1, 0, 1)$ em 0. Portanto, parte dessa variedade tem localmente uma componente q_2 positiva, daí q_2 cresce até encontrar ∂D , já que o sinal da terceira componente de (3.1.43) muda apenas quando encontra ∂D .

Podemos notar também que a variedade estável local $W_{loc}^s(0)$ é tangente ao subespaço gerado por $(0,1,0,-1)$ em 0.

As aplicações local e global:

Considerando as secções transversais

$$\Sigma^\pm = \{H = 0, q_2 = \varepsilon, \pm p_2 = \pm \dot{q}_2 > 0\}$$

desejamos construir uma aplicação local de Poincaré

$$\Pi_{loc} : \Sigma^- \rightarrow \Sigma^+.$$

Note que as secções transversais $\Sigma^\pm$ são 2-dimensionais. As coordenadas de tais secções estão no plano (q_1, p_1) .

Considerando uma mudança de variável

$$(x_1, y_1, x_2, y_2) = M(q, p, \gamma) = (q, p) + O(|(q, p)|^2)$$

é possível obter uma nova função Hamiltoniana

$$\hat{H}(x, y, \gamma) = K(I_1, I_2, \gamma) = \omega I_1 + I_2 + O(I_1^2 + I_2^2)$$

onde $I_1 = (x_1^2 + x_2^2)/2$ e $I_2 = (y_2^2 - y_1^2)/2$.

Nas novas coordenadas o fluxo é dado por

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & \hat{\omega} \\ -\hat{\omega} & 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{y} = \begin{pmatrix} 0 & \hat{\lambda} \\ \hat{\lambda} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.1.45)$$

onde $\hat{\omega}(I, \gamma) = \frac{\partial K}{\partial I_1}(I_1, I_2, \gamma)$ e $\hat{\lambda}(I, \gamma) = \frac{\partial K}{\partial I_2}(I_1, I_2, \gamma)$

De fato,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{\partial K}{\partial x_2} = \frac{\partial K}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial x_2} = \hat{\omega} x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{\partial K}{\partial x_1} = -\frac{\partial K}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial x_1} = \hat{\omega} x_1 \\ \Rightarrow \dot{x} &= \begin{pmatrix} 0 & \hat{\omega} \\ -\hat{\omega} & 0 \end{pmatrix} x \text{ parte não-hiperbólica} \\ \dot{y}_1 &= \frac{\partial K}{\partial y_2} = \frac{\partial K}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial y_2} = \hat{\lambda} y_2 \\ \dot{y}_2 &= -\frac{\partial K}{\partial y_1} = -\frac{\partial K}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial y_1} = \hat{\lambda} y_1 \\ \Rightarrow \dot{y} &= \begin{pmatrix} 0 & \hat{\lambda} \\ \hat{\lambda} & 0 \end{pmatrix} y \text{ parte hiperbólica} \end{aligned}$$

e as secções transversais são agora dadas por:

$$\hat{\Sigma}^{\pm} = \{\hat{H} = 0, y_1 = \varepsilon, \pm y_2 > 0\}$$

Note que o sistema foi decomposto numa parte não-hiperbólica x e outra hiperbólica y .

Nessas coordenadas a aplicação de Poincaré local é dada por

$$x \rightarrow \hat{\Pi}_{loc}(x, \gamma) = \begin{pmatrix} \cos \Omega & \sin \Omega \\ -\sin \Omega & \cos \Omega \end{pmatrix} x \quad (3.1.46)$$

onde

$$\Omega = \Omega(I_1, \gamma) = -\omega \ln I_1 + O(1) \text{ para } I_1 \rightarrow 0 \quad (3.1.47)$$

Para a aplicação global existe uma forma normal dada por

$$\hat{G}(x, \gamma) = \gamma c \begin{pmatrix} b \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ -\frac{1}{b} & 0 \end{pmatrix} x + O(|x|^2 + \gamma^2) \quad (3.1.48)$$

onde $\hat{G}(\cdot, \gamma) : \hat{\Sigma}^+ \rightarrow \hat{\Sigma}^-$. Tal forma normal pode ser encontrada em [18].

Essas aplicações $\hat{\Pi}_{loc}$ e $\hat{G}$ são reversíveis com relação a $\hat{R}^{\pm} : \hat{\Sigma}^{\pm} \rightarrow \hat{\Sigma}^{\mp}$ que são dadas por

$$\hat{R}^{\pm}(x_1, x_2) = (x_1, -x_2)$$

ou seja, valem as relações

$$\hat{\Pi}_{loc}^{-1} = \hat{R}^+ \circ \hat{\Pi}_{loc} \circ \hat{R}^+, \quad \hat{G}^{-1} = \hat{R}^- \circ \hat{G} \circ \hat{R}^-. \quad (3.1.49)$$

Assim, obtemos a aplicação de Poincaré $\hat{\Pi} : \hat{\Sigma}^- \rightarrow \hat{\Sigma}^-$ em torno de (3.1.41) a qual é dada por

$$\hat{\Pi} = \hat{G} \circ \hat{\Pi}_{loc}$$

Por simplicidade, a partir daqui, substituiremos $\hat{\Pi}$ por Π e o mesmo para $\hat{G}$, $\hat{\Pi}_{loc}$, $\hat{R}$ e $\hat{\Sigma}^{\pm}$.

Assim temos:

$$\Pi(x, \gamma) = G(\Pi_{loc}(x, \gamma), \gamma)$$

Como $W_{loc}^s(0) \subset l(0, 1, 0, -1)$ nas novas coordenadas, em Σ^- , $W_{loc}^s(0)$ corresponde a $x = 0$, isto é, $x = 0$ corresponde a intersecção da variedade estável local com Σ^- e

assim órbitas homoclínicas são obtidas sempre que o n -ésimo iterado de 0 se anula, isto é, $\Pi^n(0, \gamma) = 0$.

Se n é o menor inteiro tal que $\Pi^n(0, \gamma) = 0$, a solução correspondente é uma órbita n -homoclínica. O correspondente valor do parâmetro γ é chamado *valor n -homoclínico*.

Soluções Homoclínicas:

Consideraremos aqui a aplicação de Poincaré $\Pi = G \circ \Pi_{loc}$ e a involução $R(x_1, x_2) = (x_1, -x_2)$.

Denotemos o conjunto dos valores de todos os parâmetros γ para os quais o sistema tem uma órbita n -homoclínica por Γ^n , isto é,

$$\Gamma^n = \{\gamma; \Pi^n(0, \gamma) = 0, \Pi^k(0, \gamma) \neq 0 \text{ para } k = 1, \dots, n-1\}.$$

Sabemos que $\Pi = G \circ \Pi_{loc}$ e que G e Π_{loc} satisfazem as relações de reversibilidade (3.1.49): $G^{-1} = R \circ G \circ R$, $\Pi_{loc}^{-1} = R \circ \Pi_{loc} \circ R$. Isso implica que

$$\begin{aligned} \Pi^{-1} &= \Pi_{loc}^{-1} \circ G^{-1} = (R \circ \Pi_{loc} \circ R) \circ (R \circ G \circ R) = R \circ \Pi_{loc} \circ G \circ R = \\ &= (R \circ \Pi_{loc}) \circ (G \circ \Pi_{loc}) \circ (\Pi_{loc}^{-1} \circ R) = (R \circ \Pi_{loc}) \circ \Pi \circ (R \circ \Pi_{loc}) \end{aligned}$$

isto é,

$$\Pi^{-1} = (R \circ \Pi_{loc}) \circ \Pi \circ (R \circ \Pi_{loc}).$$

Lema 3.1.7 : *Seja $n \in \mathbb{N}$. Então $\Pi^{2n}(0, \gamma) = 0 \Leftrightarrow \Pi_{loc} \circ (\Pi^n)(0, \gamma) = R \circ \Pi^n(0, \gamma)$. Similarmente, $\Pi^{2n+1}(0, \gamma) = 0 \Leftrightarrow \Pi^{n+1}(0, \gamma) = G \circ R \circ \Pi^{n+1}(0, \gamma)$.*

Prova: De $\Pi^{-1} = (R \circ \Pi_{loc}) \circ \Pi \circ (R \circ \Pi_{loc})$ e $\Pi^m(0, \gamma) = 0$ obtemos:

$$\Pi^{m-k}(0, \gamma) = \Pi^{-k}(0, \gamma) = R \circ \Pi_{loc} \circ \Pi^k \circ (R \circ \Pi_{loc}(0, \gamma), \gamma) = R \circ \Pi_{loc} \circ \Pi^k(0, \gamma)$$

Já que $(R \circ \Pi_{loc})(0, \gamma) = \Pi_{loc}^{-1}(R(0), \gamma) = \Pi_{loc}^{-1}(0, \gamma) = 0$.

Com $m = 2n$ e $k = n$ obtemos:

$$\Pi^n(0, \gamma) = R \circ \Pi_{loc} \circ \Pi^n(0, \gamma) \Rightarrow R \circ \Pi^n(0, \gamma) = \Pi_{loc} \circ \Pi^n(0, \gamma).$$

Tomando $m = 2n + 1$ e $k = n$ temos:

$$\begin{aligned} \Pi^{n+1}(0, \gamma) &= R \circ \Pi_{loc} \circ \Pi^n(0, \gamma) \doteq R \circ \Pi_{loc} \circ \Pi_{loc}^{-1} \circ G^{-1} \circ \Pi^{n+1}(0, \gamma) = \\ &= R \circ G^{-1} \circ \Pi^{n+1}(0, \gamma) = G \circ R \circ \Pi^{n+1}(0, \gamma) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Pi^{n+1}(0, \gamma) = G \circ R \circ \Pi^{n+1}(0, \gamma.)$$

$$(\doteq) \text{ segue de: } \Pi^{n+1} = G \circ \Pi_{loc} \circ \Pi^n \Rightarrow \Pi^n = \Pi_{loc}^{-1} \circ G^{-1} \circ \Pi^{n+1}.$$

■

Definimos agora conjuntos de pontos em Σ^- tendo as propriedades de simetria do lema 3.1.7.

$$\Sigma_{par}^\gamma = \{x \in \Sigma^-; \Pi_{loc}(x, \gamma) = Rx\}$$

$$\Sigma_{impar}^\gamma = \{x \in \Sigma^-; G(Rx, \gamma) = x\}$$

Para $\Pi^n(0, \gamma) \in \Sigma_{par}^\gamma$ temos uma solução $2n$ -homoclínica e para $\Pi^{n+1}(0, \gamma) \in \Sigma_{impar}^\gamma$ uma solução $(2n+1)$ -homoclínica.

Um fato importante a se observar é que o ponto simétrico para uma órbita $2n$ -homoclínica tem coordenada q_2 próximo de zero e para uma órbita $(2n+1)$ -homoclínica tal ponto tem coordenada q_2 próximo de $3/2$

A partir daqui analisaremos os conjuntos Σ_{par}^γ e Σ_{impar}^γ com maior atenção.

Consideremos inicialmente Σ_{par}^γ em coordenadas polares.

$x = r(\cos \phi, \sin \phi) \in \Sigma_{par}^\gamma$ desde que

$$\Pi_{loc}(x, \gamma) = Rx \Rightarrow \begin{pmatrix} \cos \Omega & \sin \Omega \\ -\sin \Omega & \cos \Omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}$$

Dai,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \cos \Omega & \sin \Omega \\ -\sin \Omega & \cos \Omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \cos \phi \\ r \sin \phi \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} r \cos \phi \\ -r \sin \phi \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} r[\cos \Omega \cos \phi + \sin \Omega \sin \phi] &= r \cos \phi \\ r[-\sin \Omega \cos \phi + \cos \Omega \sin \phi] &= -r \sin \phi \end{cases} \end{aligned}$$

Para $r \neq 0$ temos:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \cos \Omega \cos \phi + \sin \Omega \sin \phi &= \cos \phi \\ -\sin \Omega \cos \phi + \cos \Omega \sin \phi &= -\sin \phi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos(\Omega - \phi) &= \cos \phi \\ \sin(\phi - \Omega) &= -\sin \phi \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} \cos(\Omega - \phi) &= \cos \phi \\ \sin(\Omega - \phi) &= \sin \phi \end{cases} \Rightarrow \Omega - \phi = \phi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \Rightarrow \phi = \frac{1}{2}\Omega + k\pi, \quad k = 0, 1 \end{aligned}$$

Logo,

$$\phi = \frac{1}{2}\Omega(I_1, \gamma) + k\pi = \frac{1}{2}\Omega\left(\frac{1}{2}r^2, \gamma\right) + k\pi, \quad k = 0, 1$$

e portanto,

$$\Sigma_{par}^\gamma = \left\{ x = r(\cos \phi, \sin \phi) \in \Sigma^-; \phi = \frac{1}{2}\Omega\left(\frac{1}{2}r^2, \gamma\right) + k\pi \right\} \quad (3.1.50)$$

onde Ω é definido em (3.1.47). Assim, Σ_{par}^γ é uma espiral logarítmica dupla enrolando infinitamente em torno do ponto $x = 0$.

Quanto a Σ_{impar}^γ temos que:

$$\Sigma_{impar}^\gamma = \{x \in \Sigma^-; G(Rx, \gamma) = x\}$$

mas

$$G(x, \gamma) = \gamma c \begin{pmatrix} b \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ -\frac{1}{b} & 0 \end{pmatrix} x + O(|x|^2 + \gamma^2)$$

Daí,

$$G(Rx, \gamma) = x$$

implica em

$$\begin{aligned} \gamma c \begin{pmatrix} b \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ -\frac{1}{b} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix} + O(|Rx|^2 + \gamma^2) &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} \gamma cb \\ \gamma c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -bx_2 \\ -\frac{x_1}{b} \end{pmatrix} + O(\gamma^2 + |x|^2) &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow x_1 + bx_2 - \gamma cb + O(\gamma^2 + |x|^2) &= 0 \end{aligned}$$

Logo,

$$\Sigma_{impar}^\gamma = \{(x_1, x_2) \in \Sigma^-; \sigma(x_1, x_2, \gamma) = 0\} \quad (3.1.51)$$

onde $\sigma(x, \gamma) = x_1 + bx_2 - \gamma cb + O(\gamma^2 + |x|^2)$ para $(\gamma, x) \rightarrow 0$.

A existência de órbitas n-homoclínicas será agora estabelecida numa série de resultados todos usando a caracterização do lema 3.1.7.

Teorema 3.8 : *Suponha que o parâmetro c na forma normal (3.1.48) é não nulo. Então existe um $\bar{\gamma} > 0$ tal que*

$$\Gamma^2 \cap (-\bar{\gamma}, \bar{\gamma}) = \{\gamma_k^{2,+}, \gamma_k^{2,-}; k \in \mathbb{N}\}$$

onde

$$\gamma_k^{2,-} < \gamma_{k+1}^{2,-} < 0 < \gamma_{k+1}^{2,+} < \gamma_k^{2,+}$$

Mais ainda,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\gamma_{k+1}^{2,+}}{\gamma_k^{2,+}} = e^{-\pi/\omega}$$

tal limite também é válido para $\gamma_k^{2,-}$.

Prova: Para construir Γ^2 devemos resolver $\Pi(0, \gamma) \in \Sigma_{par}^\gamma$. Mas $\Pi(0, \gamma) = \gamma c(b, 1)^T + O(\gamma^2)$ é uma curva suave passando pela origem com velocidade não-nula com relação a γ . Dessa forma encontramos infinitas intersecções com a espiral:

$$\phi = \arctg \frac{1}{b} + O(|\gamma|) + k\pi = \frac{1}{2}\Omega \left(\frac{\gamma^2 c^2}{2}(b^2 + 1) + O(|\gamma|^3), \gamma \right) \quad (3.1.52)$$

onde a primeira igualdade de (3.1.52) segue da expressão de $\Pi(0, \gamma)$ em coordenadas polares da seguinte forma:

$$\begin{aligned} tg\phi &= \frac{x_2}{x_1} = \frac{\gamma c + O(\gamma^2)}{\gamma cb + O(\gamma^2)} = \frac{\gamma c}{\gamma cb} \left(\frac{1 + O(|\gamma|)}{1 + O(|\gamma|)} \right) = \\ &= \frac{1}{b}(1 + O(|\gamma|)) \frac{1}{1 - (-O(|\gamma|))} = \frac{1}{b}(1 + O(|\gamma|)) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (|\gamma|^k) \end{aligned}$$

Daí,

$$tg\phi = \frac{1}{b} + O(|\gamma|)$$

o que implica

$$\phi = \arctg \frac{1}{b} + O(|\gamma|) + k\pi, \quad k \in \mathbb{N}.$$

a segunda igualdade de (3.1.52) equivale aos pontos de intersecção da curva $\Pi(0, \gamma)$ com Σ_{par}^γ dando origem aos pontos $\gamma_k^{2,\pm}$ para $k \in \mathbb{N}$.

Quanto ao limite temos que:

$$\Omega(I_1, \gamma) = -\omega \ln I_1 + O(1), \quad I_1 \rightarrow 0.$$

Daí,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left[-\omega \ln \left(\frac{\gamma_k^2 c^2}{2}(b^2 + 1) \right) + O(1) \right] &= \arctg \frac{1}{b} + O(|\gamma_k|) + k\pi \Rightarrow \\ \Rightarrow -\omega \ln \left(\frac{\gamma_k^2 c^2}{2}(b^2 + 1) \right) &= 2\arctg \frac{1}{b} + O(|\gamma_k|) + 2k\pi \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \gamma_k^2 = \frac{2}{c^2(b^2+1)} \exp \left(-\frac{2}{\omega} \arctg \frac{1}{b} + O(|\gamma_k|) - \frac{2k\pi}{\omega} \right)$$

Logo,

$$\frac{\gamma_{k+1}^2}{\gamma_k^2} = \frac{\frac{2}{c^2(b^2+1)} \exp \left(-\frac{2}{\omega} \arctg \frac{1}{b} + O(|\gamma_{k+1}|) - \frac{2(k+1)\pi}{\omega} \right)}{\frac{2}{c^2(b^2+1)} \exp \left(-\frac{2}{\omega} \arctg \frac{1}{b} + O(|\gamma_k|) - \frac{2k\pi}{\omega} \right)}$$

Assim,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{\gamma_{k+1}}{\gamma_k} \right)^2 = e^{-2\pi/\omega}$$

já que $\gamma_k \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$ e portanto

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\gamma_{k+1}^{2,+}}{\gamma_k^{2,+}} = e^{-\pi/\omega}.$$

■

Observação 3.1.3 : É possível obter um resultado mais geral que o teorema 3.8. Pode-se mostrar que existe $\bar{\gamma} > 0$ tal que

$$\Gamma^3 \cap (-\bar{\gamma}, \bar{\gamma}) = \{\gamma_k^{3,m}; k \in \mathbb{N}, m = 1, 2, 3, 4\}$$

onde

$$\gamma_k^{2,-} < \gamma_k^{3,1} < \gamma_k^{3,2} < \gamma_{k+1}^{2,1} < 0 < \gamma_{k+1}^{2,+} < \gamma_k^{3,3} < \gamma_k^{3,4} < \gamma_k^{2,+}$$

tal fato não será demonstrado aqui mas pode sere encontrado em [18].

Teorema 3.9 : Para cada $n \geq 2$ e $\gamma^* \in \Gamma^n \cap (-\bar{\gamma}, \bar{\gamma})$ existe um $\varepsilon > 0$ tal que o conjunto $\Gamma^{2n} \cap (\gamma^* - \varepsilon, \gamma^* + \varepsilon)$ é da forma $\{\gamma_k^{2n,\pm}, \gamma_k^{2n,-}, k \in \mathbb{N}\}$ com

$$\gamma_k^{2n,-} < \gamma_{k+1}^{2n,-} < \gamma^* < \gamma_{k+1}^{2n,+} < \gamma_k^{2n,+} \text{ e}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\gamma_{k+1}^{2n,\pm} - \gamma^*}{\gamma_k^{2n,\pm} - \gamma^*} = e^{-\pi/(l\omega)}$$

onde $l \in \mathbb{N}$

Prova: Como Γ^{2n} é dado pelas soluções de $\Pi^n(0, \gamma) \in \Sigma_{par}^\gamma$ consideremos a função

$$\begin{aligned} d: (-\bar{\gamma}, \bar{\gamma}) &\rightarrow \Sigma^- \\ \gamma &\mapsto d(\gamma) = \Pi^n(0, \gamma) \end{aligned}$$

Como $\gamma^* \in \Gamma^n$ sabemos que $d(\gamma^*) = 0$ e $\Pi^k(0, \gamma^*) \neq 0$ para $k = 1, 2, \dots, n-1$. Mais ainda, $\Pi(., .)$ é analítica em todos os pontos (x, γ) exceto quando $x = 0$. Assim, $d = d(\gamma) =$

$\Pi^{n-1}(\Pi(0, \gamma), \gamma)$ depende analiticamente de γ em uma vizinhança de γ . Obviamente $d(\gamma)$ não pode ser completamente degenerado, isto é, $d(\gamma) \equiv 0$ já que a existência de órbitas 2-homoclínicas e 3-homoclínicas em $(-\bar{\gamma}, \bar{\gamma})$ impede tal fato, assim existe um inteiro l tal que

$$d(\gamma) = d_l(\gamma - \gamma^*)^l + O(|\gamma - \gamma^*|^{l+1})$$

com $0 \neq d_l \in \mathbb{R}^2$. Para o caso $l = 1$ o resultado segue como no teorema 3.8.

Para $l \geq 2$ a expressão (3.1.52) também é válida, mas Ω é tomado como $\Omega(\frac{1}{2}|d(\gamma)|^2, \gamma)$. Note que a curva $d(\gamma)$ passa por 0 quando $\gamma = \gamma^*$.

De $\Omega = -\omega \ln |\gamma - \gamma^*|^{2l} + O(1)$ para $\gamma \rightarrow \gamma^*$ temos de (3.1.52):

$$\begin{aligned} \arctg \frac{1}{b} + O(|\gamma|) + k\pi &= \frac{1}{2} [-\omega \ln |\gamma - \gamma^*|^{2l} + O(1)] \\ -\omega \ln |\gamma - \gamma^*|^{2l} &= 2\arctg \frac{1}{b} + O(|\gamma|) + 2k\pi + O(1) \\ \ln |\gamma - \gamma^*|^{2l} &= -\frac{2}{\omega} \arctg \frac{1}{b} + O(|\gamma|) - \frac{2k\pi}{\omega} + O(1) \\ |\gamma - \gamma^*|^{2l} &= \exp \left(-\frac{2}{\omega} \arctg \frac{1}{b} + O(|\gamma|) - \frac{2k\pi}{\omega} + O(1) \right) \end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{|\gamma_{k+1} - \gamma^*|^{2l}}{|\gamma_k - \gamma^*|^{2l}} = \frac{\exp \left(-\frac{2}{\omega} \arctg \frac{1}{b} + O(|\gamma|) - \frac{2(k+1)\pi}{\omega} + O(1) \right)}{\exp \left(-\frac{2}{\omega} \arctg \frac{1}{b} + O(|\gamma|) - \frac{2k\pi}{\omega} + O(1) \right)}$$

e portanto,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\gamma_{k+1} - \gamma^*}{\gamma_k - \gamma^*} \right|^{2l} = e^{-2\pi/\omega} \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\gamma_{k+1} - \gamma^*}{\gamma_k - \gamma^*} = e^{-\pi/(l\omega)}.$$

■

Observação 3.1.4 : O teorema 3.8 é um caso especial do teorema 3.9 com $n=1$. Mais ainda, iterando o resultado acima, vemos que em toda vizinhança de γ^* e todo $k \in \mathbb{N}$ existem infinitos pontos γ correspondendo a órbitas $(2^k n)$ -homoclínicas

Analisemos agora a existência de órbitas n -homoclínicas para quaisquer n . Os casos $n = 2^k$ e $n = 3 \cdot 2^k$, $k = 0, 1, \dots$ segue dos resultados anteriores.

De acordo com o lema 3.1.7 e a expressão (3.1.51), temos que checar a condição $\sigma(\Pi^{n+1}(0, \gamma), \gamma) = 0$ para concluir que $\Pi^{2n+1}(0, \gamma) = 0$. No entanto, de $\sigma(0, \gamma) = -\gamma cb + O(\gamma^2)$ e $\sigma(\Pi(0, \gamma), \gamma) = \gamma cb + O(\gamma^2)$, vemos que a função $\sigma(\Pi^{n+1}(0, \gamma), \gamma)$ muda de sinal pelo menos uma vez entre quaisquer dois pontos γ_1 e γ_2 com $\Pi^{n+1}(0, \gamma_1) = 0$ e $\Pi^{n+1}(0, \gamma_2) = \Pi(0, \gamma_2)$.

Daí segue o seguinte:

Lema 3.1.8 : *Suponha $c \neq 0$; então existe um $\bar{\gamma}$ tal que para todo $\gamma_1 \in \Gamma^{n+1} \cap (-\bar{\gamma}, \bar{\gamma})$ e todo $\gamma_2 \in \Gamma^n \cap (-\bar{\gamma}, \bar{\gamma})$, existe um $\gamma^* \in \Gamma^{2n+1}$ entre γ_1 e γ_2 .*

A partir daí obtemos o seguinte teorema:

Teorema 3.10 : *Em toda vizinhança U de $\gamma = 0$ e para todo $n \geq 2$, a intersecção de U e Γ^n contém infinitos pontos. Cada ponto em Γ^n corresponde a um sistema (3.1.40), numa vizinhança de (3.1.40) com $\gamma = 0$, que possui solução n -homoclínica numa vizinhança de $h(t)$.*

Prova: Faremos a prova por indução. O caso $n = 2$ e $n = 3$ já é conhecido. Assuma que o resultado segue para $n = 2, 3, \dots, m$ para algum $m \geq 3$. Se $m + 1$ é par aplicamos o teorema 3.9 com $n = (m + 1)/2$ obtendo infinitos pontos $(m+1)$ -homoclínicos próximos a $\gamma = 0$. Se $m + 1$ é ímpar, isto é $m + 1 = 2l + 1$, então $l \geq 2$.

Assim, existem sequências $(\gamma_k^l) \subset \Gamma^l$ e $(\gamma_k^{l+1}) \subset \Gamma^{l+1}$ com $\gamma_k^l > \gamma_k^{l+1} > \gamma_{k+1}^l \rightarrow 0$. Aplicando o lema 3.1.8 obtemos um $\gamma_k^{2l+1} \in (\gamma_k^{l+1}, \gamma_k^l)$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Dessa forma, $\gamma_k^{2l+1} \rightarrow 0$ para $k \rightarrow \infty$ o que conclue a prova. ■

Apêndice

Ressonância 1:1

Aqui consideraremos a bifurcação em torno de C_2 . No entanto, não fazemos a prova dos resultados aqui mencionados, os quais podem ser encontrados com detalhes em [15].

Próximo a C_2 : Neste caso, podemos considerar uma família a um-parâmetro de campos vetoriais em $\mathbb{R}^4$, com um ponto fixo na origem, e tal que o operador linearizado para $\mu = 0$, tem uma singularidade ressonante do tipo 1 : 1, isto é, existem dois pares de autovalores do tipo $\pm i\omega_0$ com blocos de Jordan bi-dimensionais. Esse procedimento pode ser encontrado em [15].

Mais precisamente, uma equação diferencial da seguinte forma em $\mathbb{C}^2$:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = i\omega_0 z_1 + z_2 + f(\mu, z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2) \\ \dot{z}_2 = i\omega_0 z_2 + g(\mu, z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2) \end{cases} \quad (3.1.53)$$

onde $f, g = o(|\mu|(|z_1| + |z_2|) + |z_1|^2 + |z_2|^2)$.

Assumiremos também que esse sistema é reversível com relação à reversibilidade $R(z_1, z_2) = (\bar{z}_1, -\bar{z}_2)$. Isso implica que as funções f e g satisfazem:

$$\begin{aligned} f(\mu, \bar{z}_1, -\bar{z}_2, -z_2) &= \overline{-f(\mu, z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2)} \\ g(\mu, \bar{z}_1, -\bar{z}_2, -z_2) &= \overline{g(\mu, z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2)} \end{aligned} \quad (3.1.54)$$

Uma forma normal para (3.1.53) obtida por Elphick [10] é dada por:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = i\omega_0 z_1 + z_2 + z_1 \varphi_0[\mu; |z_1|^2, \frac{i}{2}(z_1 \bar{z}_2 - \bar{z}_1 z_2)] \\ \dot{z}_2 = i\omega_0 z_2 + z_2 \varphi_0[\mu; |z_1|^2, \frac{i}{2}(z_1 \bar{z}_2 - \bar{z}_1 z_2)] + z_1 \varphi_1[\mu; |z_1|^2, \frac{i}{2}(z_1 \bar{z}_2 - \bar{z}_1 z_2)] \end{cases} \quad (3.1.55)$$

onde φ_0 e φ_1 são polinômios em seus dois últimos argumentos. Além disso, esse processo de normalização preserva a reversibilidade R . Note que $|z_1|^2$ e $\frac{i}{2}(z_1 \bar{z}_2 - \bar{z}_1 z_2)$ são invariantes

sob R ; portanto, segue de (3.1.54) que φ_o é uma função imaginária pura e que φ_1 é uma função real.

Desta forma, podemos reescrever o sistema (3.1.55) da seguinte forma:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = i\omega_o z_1 + z_2 + iz_1 P[\mu; |z_1|^2, \frac{i}{2}(z_1 \bar{z}_2 - \bar{z}_1 z_2)] \\ \dot{z}_2 = i\omega_o z_2 + iz_2 P[\mu; |z_1|^2, \frac{i}{2}(z_1 \bar{z}_2 - \bar{z}_1 z_2)] + z_1 Q[\mu; |z_1|^2, \frac{i}{2}(z_1 \bar{z}_2 - \bar{z}_1 z_2)] \end{cases} \quad (3.1.56)$$

onde P e Q são polinômios reais em seus dois últimos argumentos, com μ sendo um parâmetro de desdobramento que, por convenção, corresponde a região 1 para $\mu < 0$ e a região 4 caso contrário e ainda $P(0, 0, 0) = 0 = Q(0, 0, 0)$.

O sistema (3.1.56) é integrável:

De fato, $K = z_1 \bar{z}_2 - \bar{z}_1 z_2$ é uma integral primeira. Para dar a expressão da outra integral, defina

$$G(\mu, u, v) = \int_0^u Q(\mu, s, v) ds; \quad (3.1.57)$$

então a outra integral é dada por

$$H = |z_2|^2 - G[\mu, |z_1|^2, v] \quad (3.1.58)$$

onde $v = \frac{i}{2}(z_1 \bar{z}_2 - \bar{z}_1 z_2)$ é a primeira integral básica.

Considere agora a seguinte mudança de variáveis:

$$z_1 = r_o e^{i(\omega_o t + \psi_o)}, \quad z_2 = r_1 e^{i(\omega_o t + \psi_1)}. \quad (3.1.59)$$

Então, o sistema (3.1.56) é agora escrito como:

$$\begin{cases} \dot{r}_o = r_1 \cos(\psi_1 - \psi_o), \\ \dot{r}_1 = r_o \cos(\psi_1 - \psi_o) Q(\mu, r_o^2, K) \\ (\dot{\psi}_1 - \dot{\psi}_o) = -\frac{\sin(\psi_1 - \psi_o)}{r_o r_1} [r_1^2 + r_o^2 Q(\mu, r_o^2, K)], \\ \dot{\psi}_o = \frac{r_1}{r_o} \sin(\psi_1 - \psi_o) + P(\mu, r_o^2, K), \end{cases} \quad (3.1.60)$$

onde as duas integrais são agora dadas por

$$\begin{aligned} K &= r_o r_1 \sin(\psi_1 - \psi_o) \\ H &= r_1^2 - G(\mu, r_o^2, K) \end{aligned} \quad (3.1.61)$$

Tomando $u_o = r_o^2$, $u_1 = r_1^2$ então o sistema (3.1.60) torna-se:

$$\begin{aligned} (\dot{u}_o)^2 &= 4r_o^2 r_1^2 \cos^2(\psi_1 - \psi_o) = 4r_o^2 r_1^2 [1 - \sin^2(\psi_1 - \psi_o)] = 4\{r_o^2 r_1^2 - r_o^2 r_1^2 \sin^2(\psi_1 - \psi_o)\} = \\ &= 4\{u_o [G(\mu, u_o, K) + H] - K^2\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\dot{\psi}_1 - \dot{\psi}_o) &= -\frac{\sin(\psi_1 - \psi_o)}{r_o r_1} [r_1^2 + r_o^2 Q(\mu, r_o^2, K)] = -\frac{r_o r_1 \sin(\psi_1 - \psi_o)}{r_o^2 r_1^2} [r_1^2 + r_o^2 Q(\mu, r_o^2, K)] = \\
&= -K(u_o u_1)^{-1} [u_1 + u_o Q(\mu, u_o, K)] = \\
&= -K(u_o, u_1)^{-1} [u_o Q(\mu, u_o, K) + u_1 + G(\mu, u_o, K) - G(\mu, u_o, K)] = \\
&= -K(u_o u_1)^{-1} [u_o Q(\mu, u_o, K) + G(\mu, u_o, K) + H]
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{cases} (\dot{u}_o)^2 = 4\{u_o[G(\mu, u_o, K) + H] - K^2\} \\ (\dot{\psi}_1 - \dot{\psi}_o) = -K(u_o u_1)^{-1}[u_o Q(\mu, u_o, K) + G(\mu, u_o, K) + H], \end{cases} \quad (3.1.62)$$

Consideremos as partes principais de P e Q :

$$\begin{aligned} P(\mu, u, v) &= p_1 \mu + p_2 u + p_3 v + O(|\mu| + |u| + |v|)^2, \\ Q(\mu, u, v) &= -q_1 \mu + q_2 u + q_3 v + O(|\mu| + |u| + |v|)^2 \end{aligned} \quad (3.1.63)$$

Daí podemos extrair o sistema linear associado a (3.1.56) o qual é dado por

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= i\omega_o z_1 + z_2 + iz_1 P(\mu, 0, 0) \\ \dot{z}_2 &= i\omega_o z_2 + iz_2 P(\mu, 0, 0) + z_1 Q(\mu, 0, 0) \end{aligned}$$

e que possui autovalores

$$i[\omega_o + P(\mu, 0, 0)] \pm \sqrt{Q(\mu, 0, 0)}, \text{ e os complexos conjugados} \quad (3.1.64)$$

Como convencionamos que $\mu > 0$ corresponde à região (4), segue que $Q(\mu, 0, 0) < 0$ para $\mu > 0$. Portanto, temos:

$$q_1 > 0 \quad (3.1.65)$$

A partir daí, considera-se soluções periódicas de (3.1.56) que correspondem a soluções constantes de (3.1.62), isto é, faz-se uma análise dos pontos críticos de (3.1.62).

Para o caso $q_2 > 0$ e $\mu > 0$ Iooss em [15] mostra a existência de uma família a um parâmetro de soluções homoclínicas para (3.1.62). Para o campo vetorial (3.1.56), essas órbitas são homoclínicas para uma mesma solução periódica.

Para $q_2 < 0$ e $\mu < 0$ com $H = K = 0$ existem duas órbitas homoclínicas para a origem de (3.1.56). Tais órbitas são simétricas e formam intersecções transversais entre $W^u(0)$ e $S = \text{Fix}(R)$. Quando $\mu < 0$ estamos numa região de parâmetros onde a origem é hiperbólica e com base nisso Iooss mostra a persistência de tais órbitas para (3.1.53).

Bibliografia

- [1] Arrowsmith D.K. and Place C.M. An Introduction to Dynamical Systems. Cambridge University Press. 1990.
- [2] Belitskii G.R. C^∞ -Normal Forms of Local Vector Fields. Proceedings of SPT 2001. Tutorial papers. World Scientific. Sardinia, may 2001.
- [3] Belitskii G.R. Functional Equations and Conjugacy of Local Diffeomorphisms of a Finite Smoothness Class, *Funct. Anal. Appl.* **Vol 7**. (1973), 268-277.
- [4] Belitskii G.R. Invariant Normal Forms of Formal Series. *Func. Anal. and Appl.* **Vol 13** No. 1 (1979).
- [5] Belitskii G.R. Functional Equations and Conjugacy of Diffeomorphisms. *Dokl. AN SSSR*, **191**, 3 (1970).
- [6] Belitskii G.R. Smooth Equivalence of Germs of Vector Fields which have either simple zero eigenvalue or a pair of imaginary eigenvalue only. *Func. Anal and Appl.* **Vol 20**, No. 4 (1986).
- [7] Champneys A.R. Homoclinic Orbits in Reversible Systems and their Applications in Mechanics, Fluids and Optics. *Physica D*, **Vol. 112**, ed North Holland, (1998) 155-182.
- [8] Chen K. Equivalence and Decomposition of Vector Fields on Elementary Critical Point. *Amer. J. Math* **85** (1963).
- [9] Devaney R.L. Reversible Diffeomorphisms and Flows. *Trans. Amer. Math. Soc.* **218** (1976) 89-113

- [10] Elphich C., Tirapegui E., Brachet M.E., Coullet P., Iooss G. A Simple Global Characterization for Normal Forms of Singular Vector Fields. *Physica D* **Vol 29**, (1987), 95-127.
- [11] Fiedler B., Turaev D. Coalescence of Reversible Homoclinic Orbits Causes Elliptic Resonance. *Int. J. Bifurc. Chaos* **6** (1996) 1007-1027.
- [12] Harterich J. Cascades of Reversible Homoclinic Orbits to a Saddle-focus Equilibrium. *Physica D*, **Vol 112**, ed North Holland.
- [13] Hartman P. *Ordinary Differential Equations* (Wiley: New York). 1964
- [14] Iooss G., Kirchgässner K. Water Waves for Small Surface Tension: an Approach via Normal Form. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*. **Vol 112A**. (1992) 267-299.
- [15] Iooss G., Pérouème M.C. Perturbed Homoclinic Solutions in Reversible 1:1 Resonance Vector Fields. *J. Differential Equation* **Vol 102**, (1993) 62-88.
- [16] Lamb J., Roberts J. Time-reversal Symmetry in Dynamical Systems: A survey. *Physica D* **Vol 122**, (1998) 1-39.
- [17] Lamb J. Reversing symmetries in dynamical systems. Phd Thesis, University of Amsterdam, (1994).
- [18] Mielke A., Holmes P., O'Reilly O. Cascades of Homoclinic Orbits to, and Chaos Near a Hamiltonian Saddle-Center. *J. of Dynamics and Differential Equations* **Vol 4**, No. 1, (1992) 95-126
- [19] Ovsyannikov I.M. and Shil'nikov L.P. Systems with a Homoclinic Curve of a Multi-dimensional Saddle-Focus and Spiral Chaos. *Math USSR Sbornik* **2** (1992), 415-443.
- [20] Roberts, J.A.G. and Quispel, G.R.W. Chaos and Time-reversal Symmetry: order and Chaos in Reversible Dynamical Systems. *Phys. Rep.* **Vol 216**, 63 (1992).
- [21] Samovol V. Equivalence of Systems of Differential Equation in the neighborhood of Singular Point. *Trans. Moscow Math. Soc.* **44** (1982).
- [22] Sternberg S. On the Structure of Local Homeomorphisms of Euclidean n -space. *Amer. J. Math.* **80** (1958).

- [23] Wiggins S. Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos. Springer (1990).
- [24] Zhitomirskii M. Finite Determinacy of Vector Fields, Diffeomorphisms and External Differential 1-forms. Docl. Acad. Nauk Ukr. SSR, Ser. "A". N1 (1987).

Índice

- ω -definido, 46, 48
- órbita, 6
- órbita homoclínica, 11
- órbita homoclínica simétrica, 49
- órbita k -homoclínica, 63
- órbita k -periódica, 63
- órbita simétrica, 7
- anti-simetria, 2
- anti-simplética, 3
- aplicação de Poincaré, 63, 64
- campo linear, 23
- campo vetorial em variedade, 14
- campo vetorial hiperbólico, 26
- campos vetoriais conjugados, 15
- campos vetoriais localmente conjugados, 15
- codimensão, 51
- desdobramento versal, 57
- equações diferenciais autônomas, 1
- equivariância, 6
- espectro, 51, 62
- espiral logarítmica, 71
- flat, 20
- fluxo, 1
- forma normal, 43
- forma normal de Poincaré-Dulac, 36
- forma normal topológica, 57
- formalmente conjugados, 22, 26
- integral primeira, 100
- lema de Borel, 22
- linearização, 23
- loop, 88
- operador diferencial, 42
- planos afins, 80
- ponto de equilíbrio simétrico, 7
- ponto homoclínico, 11
- ressonância, 25
- ressonância 1:1, 99
- rolo logarítmico, 71
- seção simétrica, 49
- sela, 79
- sela-centro, 87
- sela-foco, 62
- simetria, 5
- simetria reversa, 2
- simplética, 3
- sistema dinâmico reversível, 4
- sistemas dinâmicos, 1
- tangência quadrática, 79

teorema de Poincaré, 25

teorema de Sternberg-Chen, 26

variedade estável, 11

variedade instável, 11