

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E
COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

Involuções cujo conjunto de pontos fixos possui duas
componentes

Fábio Gomes Figueira

Tese de Doutorado orientada pelo
Prof. Dr. Pedro L. Q. Pergher

Campinas - SP
2004

Involuções cujo conjunto de pontos fixos possui duas componentes

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por Fábio Gomes Figueira e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 8 de Novembro de 2004.

Orientador: Prof. Dr. Pedro Luiz Queiroz Pergher

Co-orientadora: Profa. Dra. Claudina Izepe Rodrigues

Banca Examinadora:

1. Prof. Dr. Pedro Luiz Queiroz Pergher (Orientador)
2. Prof. Dr. Caio José Colletti Negreiros
3. Prof. Dr. Carlos Biasi
4. Prof. Dr. Daciberg Lima Gonçalves
5. Profa. Dra. Ketty Abaroa de Rezende

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de Doutor em Matemática.

Tese de Doutorado defendida por Fábio Gomes Figueira e aprovada em 8 de Novembro de 2004 pela Banca Examinadora constituída pelos doutores:

Orientador: Prof. Dr. Pedro Luiz Queiroz Pergher

Prof. Dr. Caio José Colletti Negreiros

Prof. Dr. Carlos Biasi

Prof. Dr. Daciberg Lima Gonçalves

Profa. Dra. Ketty Abaroa de Rezende

À minha esposa *Renata*
e aos meus pais
Cândido e M. Cândida

AGRADECIMENTOS

À Deus por guiar meus passos.

Ao Professor Pedro L. Q. Pergher, não só por ter proposto os problemas os quais deram como fruto esta tese, mas também pela orientação precisa e segura. Gostaria de agradecer, em particular, à amizade, à dedicação e ao incentivo, guiando meu crescimento tanto profissional quanto pessoal.

Ao Professor Robert E. Stong, da Virginia Universty - Charlottesville - Virginia, pelas inúmeras sugestões, algumas cruciais no que se refere à obtenção dos resultados desse trabalho. Podemos afirmar, sem nenhum exagero, que este trabalho é um fruto direto do intercâmbio científico que o Prof. P. Pergher mantém com o Professor Stong.

À Professora Claudina I. Rodrigues co-orientadora desta tese, pela gentileza e orientação nos primeiros anos deste projeto.

A todos os professores os quais contribuíram para minha formação.

Aos professores e colegas do Departamento de Matemática da Universidade Federal de São Carlos.

Aos amigos, que tornaram mais fácil suportar as longas horas de estudos e a distância da família.

Ao PICD-CAPES e DM-UFSCar pelo apoio financeiro para realizar o doutorado.

ABSTRACT

Let M^m be a closed and smooth manifold and $T : M^m \mapsto M^m$ be a smooth involution. The fixed point set F of T , $F = \{x \in M^m \mid T(x) = x\}$, consists of a disjoint union of closed submanifolds of different dimensions. We denote $F = \cup_{i=0}^n F^i$, $n \leq m$, where F^i means the union of i -dimensional components of F .

Suppose that F is of the form $F^n \cup F^j$, $0 \leq j < n$, and that $F^n \cup F^j$ does not bound. By a result of *J. Boardman*, one then has that $m \leq \frac{5}{2}n$. Our interest in this work is the determination of the upper bound for m , for each n . Specifically, we will determine this upper bound for $j = 2$ and $j = n - 1$. Results of this nature have previously been obtained by *R. E. Stong and P. Pergher* ($j = 0$) and *S. Kelton* ($j = 1$). When $j = 2$, the upper bound is $\max\{2n, m(n - 2) + 4\}$, where $m(n)$ is the upper bound of *Stong and Pergher* for the case $j = 0$. When $j = n - 1$, the upper bound is $2n$.

RESUMO

Sejam M^m uma variedade fechada, suave e $T : M^m \mapsto M^m$ uma involução suave. O conjunto de pontos fixos F de T , dado por $F = \{x \in M^m \mid T(x) = x\}$, consiste de uma união disjunta de subvariedades fechadas de diferentes dimensões. Denotemos por $F = \cup_{i=0}^n F^i$, $n \leq m$, onde F^i significa a união disjunta das componentes i -dimensionais de F .

Suponha que F tem a forma $F^n \cup F^j$, $0 \leq j < n$, e que $F^n \cup F^j$ não borda. Por um resultado de *J. Boardman*, temos que $m \leq \frac{5}{2}n$. Nosso interesse neste trabalho, é determinar o limite superior de m , para cada n . Especificamente, iremos determinar este limite superior para $j = 2$ e $j = n - 1$. Resultados desta natureza, foram obtidos por *R. E. Stong and P. Pergher* ($j = 0$) e *S. Kelton* ($j = 1$). Quando $j = 2$, o limite superior é $\max\{2n, m(n - 2) + 4\}$, onde $m(n)$ é o limitante de *Stong and Pergher* para o caso $j = 0$. Quando $j = n - 1$, o limite superior é $2n$.

Sumário

Introdução	x
1 Preliminares	1
1.1 Introdução	1
1.2 Bordismo de variedades	1
1.3 Bordismo de aplicações	3
1.4 Bordismo de fibrados	4
1.5 Bordismo de ações de grupos	6
1.6 O grupo de $\mathbb{Z}_2$ -bordismo principal	7
1.7 O <i>Splitting Principle</i>	9
1.8 Sequência exata de <i>Conner e Floyd</i>	12
1.9 Involuções e a característica de <i>Euler</i> módulo 2	15
1.10 Uma involução especial	16
1.11 O limitante $m(n)$ de <i>Stong e Pergher</i>	16
1.12 A fórmula de <i>Conner</i>	17
1.13 A classe de <i>Wu</i>	18
1.14 Funções simétricas	19
1.15 Teorema de <i>Lucas</i>	21
2 Involuções Fixando $F^n \cup F^{n-1}$	23
2.1 Introdução	23
2.2 Classes características especiais	25
2.3 Prova do Teorema 2.1	28
3 Involuções Fixando $F^n \cup F^2$	33
3.1 Introdução	33
3.2 Classes de bordismo estáveis de fibrados sobre variedades fechadas F^2 .	36
3.3 Prova do Teorema 3.1	40
4 Limitantes Específicos	59
4.1 Introdução	59

4.2	$\varphi(n, \beta)$ para n ímpar	60
4.3	$\varphi(n, \beta)$ para n par	66

Introdução

Na década de 60, *P. E. Conner* e *E. E. Floyd* escreveram um monumental trabalho, *Differentiable Periodic Maps* [4], no qual introduziram a noção de *bordismo singular*. Esta noção estendeu o importante trabalho de *R. Thom* da década de 50, *Quelques propriétés globales des variétés différentiables* [14], no qual havia sido mostrado que o bordismo de uma variedade é completamente determinado por certos invariantes algébricos denominados *números de Stiefel-Whitney* ou *números característicos*.

No bordismo singular introduzido por *Conner e Floyd*, o objeto de estudo era a classe de bordismo de um objeto dado por um par (M, f) , onde M é uma variedade suave fechada e f é uma função contínua com domínio em M e com valores em um pré-fixado espaço topológico X . No caso em que $X = \{\text{ponto}\}$, o bordismo singular de *Conner e Floyd* reduzia-se ao bordismo usual de *R. Thom*, e semelhantemente a este último *Conner e Floyd* mostraram que o bordismo singular (para CW-complexos X) era completamente determinado por números característicos (os quais adicionalmente envolviam a cohomologia de X).

Neste contexto, um detalhe importante é que, quando G é um grupo de *Lie* compacto e $X = B(G)$, onde $B(G)$ é o espaço classificante para G -fibrados principais, então o bordismo singular de X reduz-se ao bordismo das ações suaves e livres de G em variedades fechadas (ou bordismo G -equivariante). Isso deu origem à original estratégia de se estudar ações de grupos através de técnicas de bordismo (mais especificamente, através de números característicos); em particular, um amplo estudo sobre involuções sob este ponto de vista foi levado a cabo por *Conner e Floyd*, com enfoque especial para as propriedades concernentes ao conjunto de pontos fixos das mesmas. Especificamente, se M é uma variedade suave e fechada e $T : M \mapsto M$ é uma involução suave, então o conjunto de pontos fixos de T , F , é uma subvariedade fechada de M , a qual pode ser escrita como $F = \cup F^i$, onde F^i denota a união (disjunta) das componentes i -dimensionais de F . O fibrado normal $\eta \mapsto F$ de F em M (o qual é uma união disjunta dos fibrados sobre as diversas componentes) é chamado o *fixed-data* da involução (M, T) . Um dos resultados mais importantes de *Conner e Floyd* foi mostrar que o bordismo do *fixed-data* determina completamente o bordismo (equivariante) do par (M, T) . Em outras palavras, se (M, T) e (N, S) são duas involuções com *fixed-data* $\eta \mapsto F$ e $\nu \mapsto V$, então foi mostrado que (M, T) e (N, S) são equivariantemente

cobordantes se, e somente se, $\eta \mapsto F$ e $\nu \mapsto V$ são cobordantes como fibrados.

A conveniência deste resultado é que o bordismo de fibrados é completamente determinado por números característicos (por ser o bordismo singular dos espaços classificantes); em outras palavras, a classe de bordismo de um fibrado $\eta \mapsto F$ pode ser vista como a classe de bordismo do par (F, g) , onde g é uma função classificante para η , enquanto que o bordismo de involuções sem restrições não é determinado por números característicos (a não ser no caso especial em que as involuções em jogo sejam livres de pontos fixos; esse caso se reduz ao bordismo singular do espaço classificante $BO(1)$, que é determinado por números característicos).

Um fenômeno observado por *Conner e Floyd* foi o fato que, se uma involução suave T atua em uma variedade m -dimensional M de tal sorte que o conjunto de pontos fixos F não borda (o que significa dizer que alguma F^i não borda), então m não pode ser muito grande relativamente a n , onde n é a dimensão da componente de F com maior dimensão (isto não ocorre caso F borde). O resultado de *Conner e Floyd* que trouxe à luz tal fenômeno foi o seguinte: para cada natural $n \geq 1$, existe um natural $\varphi(n) > n$ com a seguinte propriedade: se uma involução (M^m, T) fixa F de tal sorte que a dimensão da componente de F com maior dimensão é n , e se $m > \varphi(n)$, então (M^m, T) borda equivariantemente (o que em particular implica que F borda). Em outras palavras, com tal resultado *Conner e Floyd* mostraram a existência, para cada $n > 0$, de um patamar $\varphi(n)$ funcionando como um limitante superior para as possíveis dimensões de variedades M admitindo involuções $T : M \mapsto M$ cujo conjunto de pontos fixos, F , não borda e é tal que a dimensão de sua componente maximal é n .

A prova do resultado acima concernente à existência de $\varphi(n)$ tinha caráter apenas existencial, ou seja, o valor exato, para cada n , de $\varphi(n)$, não foi determinado explicitamente por *Conner e Floyd*. Posteriormente, isso foi completamente desvendado por *J. Boardman*, através de seu do famoso 5/2-Teorema de [1] (Bulletin of the American Math. Soc. - 1967). *Boardman* mostrou que, se uma involução (M^m, T) não borda equivariantemente e se o conjunto de pontos fixos F é tal que sua componente maximal tem dimensão n , então $m \leq 5/2n$. Em particular, isso significa que, se partimos de uma F que não borda e cuja componente maximal tenha dimensão n , e se desejamos tornar F o conjunto de pontos fixos de alguma involução (M^m, T) , então o máximo que eventualmente m pode atingir é $5/2n$. Adicionalmente, e através de exemplos explícitos, *Boardman* mostrou que a estimativa em questão não pode ser melhorada (ou seja, diminuída) nas condições gerais segundo as quais a mesma foi formulada.

Essa generalidade do resultado de *Boardman* independe de n e abrange a possibilidade de F possuir componentes com todas as dimensões possíveis, de 0 a n ; por causa dessa generalidade, este antigo resultado de *Boardman* possuía embutido em si uma classe atraente de problemas, a qual vem à luz mediante a observação simultânea de dois resultados posteriores da literatura, contidos em artigos diferentes, e nos quais a preocupação não era a obtenção de resultados tipo *Boardman*.

O primeiro desses é o seguinte resultado de *C. Kosniowski e R. Stong*: se (M^m, T)

fixa F o qual tem dimensão constante igual a n , e se $m > 2n$, então (M, T) borda equivariantemente ([5]; Topology, 1978). Isso implica que o *fixed-data* de (M, T) borda, e em particular F borda. Isso significa que, caso F não borde, então $m \leq 2n$. Por causa do exemplo dado pela involução “twist” $((F \times F, t), t(x, y) = (y, x))$, esta estimativa é a melhor possível, o que significa um limitante para m melhor que o de *Boardman* na situação especial em que F possui dimensão constante igual a n .

O segundo resultado é um teorema de *Royster* contido em [13] (Indiana Math. J.-1980; o objetivo desse artigo era classificar involuções fixando a união de dois espaços projetivos reais), segundo o qual, se (M, T) é uma involução fixando a união de um ponto com uma variedade F de dimensão ímpar n , então (M, T) é equivariantemente cobordante a uma específica involução definida em $\mathbb{RP}^{n+1}$, onde $\mathbb{RP}^{n+1}$ denota o espaço projetivo real de dimensão $n + 1$. Em particular, $m = \text{dimensão}(M) \leq n + 1$ (na verdade é igual a $n + 1$), e por causa da involução em $\mathbb{RP}^{n+1}$ acima, essa estimativa é a melhor possível. Evidentemente, isso é também um limitante para m muito melhor que o de *Boardman* na situação especial em que F possui, além da componente maximal n -dimensional (com n ímpar), componentes 0-dimensionais (quando componentes 0-dimensionais efetivamente ocorrem, então a quantidade das mesmas precisa ser ímpar, o que pode ser reduzido, via bordismo, a um único ponto).

Juntando os fatos acima, surge naturalmente o problema de se estabelecer um limitante para m (em termos de n) melhor que o de *Boardman*, quando alguma restrição sobre n (a dimensão da componente maximal de F) é imposta, ou quando adicionalmente algumas dimensões envolvidas em F (que em princípio seriam de 0 a n) são a priori omitidas (o resultado de *Boardman* e o resultado acima de *Kosniowski e Stong* seriam os *extremos* desse problema geral quando nenhuma condição é imposta sobre n). Tal problema pode ser formulado segundo a seguinte forma mais precisa: para cada número natural n , e para cada conjunto de naturais $X = \{p_1, p_2, \dots, p_r\}$, onde $0 \leq p_1 < p_2 < \dots < p_r < n$ e $0 \leq r$, definimos $m(n; X)$ como sendo o seguinte número natural:

$$m(n; X) = \max\{m \mid \text{existe involução } (M^m, T) \text{ fixando alguma } F \text{ que não borda e cuja componente maximal é } n\text{-dimensional, e tal que } F \text{ não possui componentes com dimensões diferentes de } n \text{ e daquelas especificadas na lista } X\}.$$

Com tal formulação, o Teorema 5/2 de *Boardman* estabelece simplesmente que $m(n; X) \leq 5/2n$ para qualquer $(n; X)$. O teorema acima citado de *Kosniowski e Stong* diz que, se X é a lista vazia, então $m(n; X) = 2n$ para todo n ; por outro lado, o resultado de *Royster* diz que $m(n; (0)) = n + 1$ quando n é ímpar.

É importante frisar que o valor de $m(n; X)$ independe da quantidade de componentes de F com alguma dimensão específica $p_j \in X$; em outras palavras, $m(n; X)$ não pode ser melhorado (diminuído) se alguma restrição sobre a quantidade de componentes de F com dimensão p_j é imposta. Isso decorre do seguinte fato, que será detalhado no

Capítulo 1, Seção 1.8, Teorema 1.8.5: suponha que uma involução (M^m, T) fixa F , e seja F^i a união disjunta das componentes de F com dimensão i . Então existe uma involução (N^m, S) (a qual é equivariantemente cobordante a (M^m, T)) fixando $B = (F - F^i) \cup V^i$, onde V^i é uma subvariedade conexa i -dimensional de N^m . Em outras palavras, toda involução é equivariantemente cobordante a uma involução cuja parte i -dimensional F^i de seu conjunto de pontos fixos é conexa, para cada $0 \leq i \leq n$. Desta forma, $m(n; X)$ é de fato uma função exclusivamente de n e de X (Corolário 1.8.6, Capítulo 1).

Uma vez que $m(n; X) = 2n$ está estabelecido para a lista vazia X e para qualquer n , o passo seguinte é a análise de $m(n; X)$ quando X é unitário, ou seja, quando F possui duas componentes com dimensões distintas F^n e F^j , $j < n$. Como acima citado, o caso $j = 0$ e n ímpar foi resolvido por *Royster*, a saber $m(n; \{0\}) = n + 1$. Nesta direção, *P. Pergher* iniciou em ([9], 1997) o estudo do caso $m(n; \{0\})$ para n par. Especificamente, *P. Pergher* mostrou que $m(2n; \{0\}) \leq 3n + 3$ quando n é ímpar. Esse resultado foi obtido com uma sofisticação da técnica de *Royster*. Posteriormente, *R. Stong* e *P. Pergher* completaram em ([12], 2001) a análise de $m(n; \{0\})$ para qualquer n par. *Stong* e *Pergher* chamaram $m(n; \{0\})$ de $m(n)$ e determinaram seu valor exato para cada n . A técnica utilizada consistiu inicialmente em mostrar que, se (M^m, T) fixa $F^n \cup \{\text{ponto}\}$, então $m \leq m(n)$, e isso foi obtido com a utilização de certas classes características especiais e a teoria de *Conner e Floyd*. A seguir, um exemplo $(M^{m(n)}, T)$ com F sendo do tipo $F^n \cup \{\text{ponto}\}$ foi construído para cada n . Pormenores sobre o valor de $m(n)$ (o qual é expresso em termos de p e q , onde $n = 2^p q$ com q ímpar) serão vistos na Seção 1.14 do Capítulo 1.

O objetivo deste trabalho é continuar o estudo do caso $F = F^n \cup F^j$, $j < n$. Especificamente, mostraremos que $m(n; \{n-1\}) = 2n$ (Capítulo 2) e mostraremos também que $m(n; \{2\}) = \max\{2n, m(n-2) + 4\}$, onde $m(n-2)$ é o número de *Stong e Pergher* acima citado (Capítulo 3). Com respeito a $m(n; \{1\})$, em sua tese de doutorado “Involutions fixing $\mathbb{RP}^j \cup F^n$ ”, defendida na University of Virginia-U.S.A em 2001 sob a orientação do *Prof. Stong, Suzanne M. Kelton* analisou limitantes para as dimensões de variedades com involução cujo conjunto de pontos fixos possui duas componentes, sendo que uma de tais componentes é um espaço projetivo real $\mathbb{RP}^j$. Isso seria uma linha de generalização para o caso $F = F^n \cup \{\text{ponto}\}$, uma vez que $\{\text{ponto}\} = \mathbb{RP}^0$. Entre os resultados obtidos, *S. Kelton* mostrou que se (M^m, T) fixa $F = F^n \cup \mathbb{RP}^1$, então $m \leq m(n-1) + 1$ se n é ímpar, $m \leq m(n-1) + 2$ se n é par, e tais estimativas são as melhores possíveis. Ocorre que uma variedade conexa F^1 é uma cópia de S^1 , a qual é homeomorfa a $\mathbb{RP}^1$; em outras palavras, tais resultados de *S. Kelton* mostram que $m(n; \{1\}) = m(n-1) + 1$ se n é ímpar, e $m(n; \{1\}) = m(n-1) + 2$ se n é par, o que encerra o estudo deste caso.

Os casos $m(n; \{n-1\})$ e $m(n; \{2\})$ são, em essência, diferentes. O primeiro pode ser considerado como uma extensão do resultado de *Kosniowski e Stong* acima citado: se (M^m, T) fixa F o qual tem dimensão constante igual a n , e se $m > 2n$, então (M, T) borda equivariantemente ([5]; Topology, 1978). De fato, e isto será levado a

cabo no Capítulo 2, provaremos que este resultado de *Kosniowski e Stong* continua verdadeiro se, além da componente F^n , outra componente F^{n-1} faz parte de F . A técnica consistirá em, usando certas classes características especiais, mostrar que se $m > 2n$ então o fibrado normal sobre a componente F^n borda como fibrado; então, através de cirurgia equivariante, tal fibrado pode ser removido de F , e como consequência obtém-se nova involução (N^m, S) , cobordante à original, fixando $F - F^n = F^{n-1}$. Usando-se o resultado de *Kosniowski e Stong*, conclui-se que (N^m, S) (e portanto (M^m, T)) borda equivariantemente. Conforme já explicado acima, isso implicará que $m(n; \{n-1\}) = 2n$.

O caso $m(n; \{2\})$ (levado a cabo no Capítulo 3) segue a filosofia do caso $m(n; \{0\})$ (o que pode ser intuído pela natureza do resultado). Em linhas gerais, a classe de bordismo de um fibrado $\nu \mapsto F$ dá origem à classe de bordismo equivariante de uma involução sem pontos fixos dada pela involução A que atua como antipodal nas fibras do fibrado em esferas $S(\nu)$. Segundo *Conner e Floyd*, caso $\nu \mapsto F$ seja o *fixed-data* de alguma involução, então $(S(\nu), A)$ borda como elemento do grupo de bordismo de involuções livres de pontos fixos. Ocorre que tal grupo de bordismo pode ser identificado ao grupo de bordismo singular de $X = BO(1)$, o qual consiste das classes de bordismo de fibrados unidimensionais. Essa identificação é obtida associando-se $(S(\nu), A)$ ao fibrado-linha canônico $\lambda \mapsto S(\nu)/A$. Por outro lado, as classes de bordismo de fibrados unidimensionais são completamente determinadas por números característicos, conforme já citado anteriormente. Tomando-se em particular a situação na qual uma involução possui *fixed-data* do tipo $\nu \mapsto F = \eta \mapsto F^n \cup \mu \mapsto F^j$, $j < n$, isso dará origem a uma coleção de equações, obtidas por se igualar cada número característico de $\lambda \mapsto S(\eta)/A$ ao correspondente número característico de $\lambda \mapsto S(\mu)/A$. Quando $j=0$, $\mu \mapsto F^0$ é sempre o fibrado trivial sobre um ponto e $\lambda \mapsto S(\mu)/A$ é o fibrado linha canônico sobre $\mathbb{RP}^{m-1}$, cujos números característicos são explicitamente conhecidos.

Manipulando-se adequadamente as equações acima mencionadas com o suporte de certas classes características especiais e com o conhecimento explícito dos números de $\lambda \mapsto \mathbb{RP}^{m-1}$, obtém-se os limitantes do caso $F = F^n \cup F^0$. A abordagem do caso $F = F^n \cup F^2$ possuirá mesma natureza, sendo que a diferença crucial residirá no fato que, enquanto só existe uma possibilidade para classes de bordismo estáveis sobre o ponto (e esta é muito simples, dada pelos fibrados triviais), o mesmo não ocorre quando se considera todas as possíveis classes de bordismo de fibrados estáveis sobre variedades bidimensionais. De fato, este é um dos pontos cruciais na análise de $m(n; \{2\})$, o qual foi contornado através do Teorema 3.2.4, Capítulo 3. Neste teorema, mostramos que existem sete tais possíveis classes não nulas, e exibimos explicitamente um modelo para cada uma destas sete classes. Isto foi obtido com auxílio das classes de *Wu*, de um teorema de *Borel-Hirzebruch* e a estrutura de $\mathcal{N}_*$ (vide Capítulo 1). Desta forma, na utilização da técnica acima descrita no caso $F = F^n \cup F^2$, a possibilidade de ocorrência de qualquer uma das sete classes $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6, \beta_7$ sobre a componente F^2 é levada em conta.

Na prova do caso $F = F^n \cup F^2$, o limitante $m(n - 2) + 4$ é mostrado ser efetivo para qualquer n e qualquer das classes β_i acima mencionadas. Neste contexto, surge naturalmente a questão sobre se o referido limitante pode ou não ser melhorado para específicos n e específicas classes β_i . Mais precisamente, tal questão dá origem à definição do número natural

$\varphi(n, \beta_i) = \max \{ m \mid \text{existe involução } (M^m, T) \text{ fixando } F \text{ do tipo } F = F^n \cup F^2, \text{ tal que a classe de bordismo estável sobre } F^2 \text{ é } \beta_i \}.$

O Capítulo 4 é dedicado a este problema, e de fato mostramos que em várias situações o limitante $m(n - 2) + 4$ pode ser melhorado. O número $\varphi(n, \beta_i)$ é calculado para uma ampla gama de pares (n, β_i) , incluindo neste contexto os pares com n ímpar e qualquer β_i . No entanto, este problema continua em aberto para muitos tais pares.

Nosso trabalho é constituído ainda pelo Capítulo 1, o qual é devotado aos pré-requisitos necessários para o desenvolvimento dos capítulos subsequentes. Em tais pré-requisitos está incluída uma coletânea de alguns tópicos fundamentais da teoria de bordismo equivariante desenvolvida por *Conner e Floyd*.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Introdução

Neste capítulo apresentaremos as ferramentas e resultados da literatura necessárias para o entendimento dos nossos resultados, incluindo neste particular, noções básicas da teoria de bordismo equivariante, conforme desenvolvida por *Conner e Floyd* em [4]. Admitiremos que o leitor tenha noções de homologia, cohomologia, teoria de fibrados e classes de *Stiefel-Whitney*.

Seja M^n uma variedade n -dimensional fechada C^∞ ; uma involução $T : M^n \mapsto M^n$ é uma aplicação C^∞ satisfazendo $T^2 = Id$. As variedades e involuções envolvidas neste trabalho serão supostas de classe C^∞ .

Dada uma involução $T : M^n \mapsto M^n$, o conjunto $F_T = \{x \in M^n \mid T(x) = x\}$ é chamado o conjunto de pontos fixos da involução; se $F_T = \emptyset$, dizemos que T é uma involução sem pontos fixos.

1.2 Bordismo de variedades

Dada uma variedade compacta W denotaremos por ∂W o bordo de W , o qual sabemos ser uma variedade fechada, isto é, compacta e sem bordo.

Definição 1.2.1 Dizemos que uma variedade n -dimensional fechada M^n borda se existe uma variedade compacta com bordo W^{n+1} tal que $\partial W^{n+1} = M^n$.

Definição 1.2.2 Dizemos que duas variedades fechadas M^n e V^n são cobordantes se a união disjunta $M^n \cup V^n$ borda.

É conhecido o fato que tal relação (de bordismo) é uma relação de equivalência no conjunto das variedades n -dimensionais fechadas.

Denotaremos por $[M^n]$ a classe de equivalência a qual M^n pertence segundo tal relação, denominada *classe de bordismo de M^n* . Seja $\mathcal{N}_n$ o conjunto de tais classes e denote $\mathcal{N}_* = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{N}_n$. Em $\mathcal{N}_*$ pode-se introduzir as seguintes operações:

- $\mathcal{N}_* \times \mathcal{N}_* \xrightarrow{+} \mathcal{N}_* : [M^n] + [N^n] = [M^n \cup N^n]$ (união disjunta),
- $\mathcal{N}_* \times \mathcal{N}_* \xrightarrow{\bullet} \mathcal{N}_* : [M^n] \cdot [V^m] = [M^n \times V^m]$ (produto cartesiano).

Mostra-se que tais operações são bem definidas e $\mathcal{N}_*$ é graduado por dimensão: se $\mathcal{N}_n \subset \mathcal{N}_*$ consiste das classes representadas por variedades n -dimensionais, então $+$ e $\bullet$ satisfazem

$$\mathcal{N}_n \times \mathcal{N}_n \xrightarrow{+} \mathcal{N}_n \quad \text{e} \quad \mathcal{N}_n \times \mathcal{N}_m \xrightarrow{\bullet} \mathcal{N}_{n+m}.$$

$\mathcal{N}_*$ é um anel graduado comutativo com unidade, com respeito às operações acima [4, pg. 8]; tal anel é denominado o *anel de bordismo não orientado de Thom*. O grupo aditivo $\mathcal{N}_*$ pode se escrever então como $\mathcal{N}_* = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{N}_n$; em cada $\mathcal{N}_n$, o elemento neutro é a classe das variedades n -dimensionais que são bordos.

Para manipular elementos de $\mathcal{N}_*$ necessitamos dos números de *Stiefel-Whitney* : fixada uma variedade fechada M^n , existe uma única “*classe fundamental de homologia módulo 2*” $[M^n]_2 \in H_n(M^n, \mathbb{Z}_2)$. Portanto, para qualquer classe de cohomologia $\vartheta \in H^n(M^n, \mathbb{Z}_2)$ está definido o *índice de Kronecker* $\vartheta[M^n]_2 \in \mathbb{Z}_2$.

Seja $\tau \mapsto M^n$ o fibrado tangente à M^n (eventualmente denotaremos τ por $T(M^n)$). Seja $\mathbb{W}(M^n) = 1 + w_1 + w_2 + \cdots + w_n$ a classe de *Stiefel-Whitney* de M^n ; em outras palavras, $\mathbb{W}(M^n)$ é a classe de *Stiefel-Whitney* de $\tau \mapsto M^n$. Sejam $r_1, r_2, \dots, r_n$ inteiros não negativos com $r_1 + 2r_2 + \cdots + nr_n = n$. Podemos então formar o monômio $w_1(\tau)^{r_1} \cdot w_2(\tau)^{r_2} \cdots w_n(\tau)^{r_n}$ o qual é uma classe de cohomologia em $H^n(M^n, \mathbb{Z}_2)$.

Definição 1.2.3 O inteiro módulo 2, $w_1(\tau)^{r_1} \cdot w_2(\tau)^{r_2} \cdots w_n(\tau)^{r_n} [M^n]_2$, ou resumidamente $w_1^{r_1} \cdot w_2^{r_2} \cdots w_n^{r_n} [M^n]_2$, é chamado o *número de Stiefel-Whitney* de M^n associado ao monômio $w_1^{r_1} \cdot w_2^{r_2} \cdots w_n^{r_n}$.

Assim, associada a uma variedade fechada M^n , existe uma coleção de inteiros módulo 2, obtida ao considerarmos todos os possíveis monômios $w_1^{r_1} \cdot w_2^{r_2} \cdots w_n^{r_n}$. Dizemos que as variedades M^n, V^n possuem os mesmos números de *Stiefel-Whitney* se $w_1^{r_1} \cdot w_2^{r_2} \cdots w_n^{r_n} [M^n]_2 = w_1^{r_1} \cdot w_2^{r_2} \cdots w_n^{r_n} [V^n]_2$ para todos os monômios $w_1^{r_1} \cdot w_2^{r_2} \cdots w_n^{r_n}$ como acima.

A relação entre os números acima e os elementos de $\mathcal{N}_*$ é dada pelo seguinte

Teorema 1.2.4 (Thom) *Se M^n é uma variedade fechada, então $[M^n] = 0$ (isto é, M^n borda) se, e somente se, todos os números de Stiefel-Whitney de M^n são nulos.* [4, pg. 45, 17.1] $\square$

O resultado acima implica no importante

Corolário 1.2.5 *As variedades C^∞ fechadas n -dimensionais M^n e V^n pertencem à mesma classe de bordismo se, e somente se, possuem os mesmos números de Stiefel-Whitney.* $\square$

Em outras palavras, um elemento de $\mathcal{N}_*$ é completamente caracterizado pelos números de *Stiefel-Whitney* de qualquer um de seus representantes. Os números de *Stiefel-Whitney* são também chamados de *números característicos* de M^n .

Usando esta informação e lembrando que $\mathbb{W}(\mathbb{RP}^n) = (1 + \alpha)^{n+1}$, onde α é o gerador de $H^1(\mathbb{RP}^n, \mathbb{Z}_2)$, é possível verificar o seguinte

Exemplo: $\mathbb{RP}^n$ borda se, e somente se, n é ímpar.

A estrutura de $\mathcal{N}_*$ foi completamente determinada por *Thom* em [14]; tal estrutura é dada pelo seguinte

Teorema 1.2.6 *$\mathcal{N}_*$ é uma álgebra polinomial graduada sobre $\mathbb{Z}_2$ com um gerador em cada dimensão $n \neq 2^j - 1 (n \geq 0)$.* [14] $\square$

1.3 Bordismo de aplicações

Para os fatos abaixo, vide [4].

Seja X um espaço topológico. Uma *variedade singular* em X é um par (M^n, f) , consistindo de uma variedade fechada M^n e uma função contínua $f : M^n \mapsto X$.

Definição 1.3.1 Dizemos que uma variedade singular (M^n, f) borda se existe uma variedade compacta V^{n+1} e uma função contínua $F : V^{n+1} \mapsto X$ tal que $\partial V^{n+1} = M^n$ e $F|_{M^n} = f$.

Definição 1.3.2 Dizemos que duas variedades singulares (M_1^n, f_1) e (M_2^n, f_2) são cobordantes se a união disjunta $(M_1^n \cup M_2^n, f_1 \cup f_2)$ borda (onde $(f_1 \cup f_2)|_{M_i} = f_i$, $i = 1, 2$).

A relação de bordismo entre variedades singulares é uma relação de equivalência na coleção de todos tais objetos.

Dada a variedade singular (M^n, f) , denotaremos por $[M^n, f]$ a sua classe de equivalência, denominada *classe de bordismo* de (M^n, f) . Seja $\mathcal{N}_n(X)$ o conjunto das classes de bordismo de variedades singulares (M^n, f) em X e $\mathcal{N}_*(X) = \cup_{n=0}^\infty \mathcal{N}_n(X)$. Em $\mathcal{N}_*(X)$ pode-se introduzir a seguinte operação:

$$\mathcal{N}_*(X) \times \mathcal{N}_*(X) \xrightarrow{+} \mathcal{N}_*(X) : [M^n, f] + [N^n, g] = [M^n \cup N^n, f \cup g],$$

onde $f \cup g|_{M^n} = f$ e $f \cup g|_{N^n} = g$. Esta operação está bem definida e satisfaz

$$\mathcal{N}_n(X) \times \mathcal{N}_n(X) \xrightarrow{+} \mathcal{N}_n(X),$$

com tal operação, cada $\mathcal{N}_n(X)$ é um grupo abeliano no qual todo elemento tem ordem 2. Referimo-nos a $\mathcal{N}_n(X)$ como o *grupo de bordismo n -dimensional não orientado de X* . O grupo aditivo $\mathcal{N}_*(X)$ pode se escrever então como $\mathcal{N}_*(X) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{N}_n(X)$; em cada $\mathcal{N}_n(X)$, o elemento neutro é a classe das variedades singulares n -dimensionais que são bordos.

Se (M^n, f) é variedade singular em X e V^m é uma variedade fechada, podemos construir a variedade singular em X $(M^n \times V^m, g)$, onde $g(x, y) = f(x)$. Temos que $[M^n \times V^m, g]$ depende somente de $[M^n, f]$ e de $[V^m]$, e portanto temos a operação

$$\mathcal{N}_* \times \mathcal{N}_*(X) \xrightarrow{\bullet} \mathcal{N}_*(X) \text{ satisfazendo } \mathcal{N}_m \times \mathcal{N}_n(X) \xrightarrow{\bullet} \mathcal{N}_{m+n}(X).$$

Isto define em $\mathcal{N}_*(X)$ uma estrutura de $\mathcal{N}_*$ -módulo graduado. Note que, se $X = \{\text{ponto}\}$, então existe um isomorfismo natural de $\mathcal{N}_*$ -módulo $\mathcal{N}_*(\{\text{ponto}\}) \cong \mathcal{N}_*$.

Podemos associar a uma variedade singular (M^n, f) em X certos números módulo 2 de maneira a estender naturalmente o que foi feito para elementos de $\mathcal{N}_*$: para cada classe de cohomologia $h \in H^m(X, \mathbb{Z}_2)$ e cada partição $i_1 + i_2 + \dots + i_r = n - m$, temos o inteiro módulo 2

$$w_{i_1}(\tau)w_{i_2}(\tau) \cdots w_{i_r}(\tau)f^*(h)[M^n]_2$$

ou resumidamente $w_{i_1}w_{i_2} \cdots w_{i_r}f^*(h)[M^n]_2$. Tais números são denominados *números de Whitney de f associados à classe de cohomologia h* , e se reduzem aos números de *Stiefel-Whitney* usuais de M^n se colocamos $h = 1 \in H^0(X, \mathbb{Z}_2)$. Conforme citado na introdução, a classe de bordismo de (M^n, f) é completamente caracterizada por tais números sob certa condição sobre X , conforme o

Teorema 1.3.3 (Conner e Floyd) *Sejam X um CW-complexo finito em cada dimensão e $f : M^n \mapsto X$ variedade singular em X . Então $[M^n, f] = 0$ em $\mathcal{N}_n(X)$ se, e somente se, todos os números de Whitney de f se anulam. [4, pg. 47, 17.2] $\square$*

Corolário 1.3.4 *Duas variedades singulares são cobordantes se, e somente se, possuem os mesmos números de Whitney.*

1.4 Bordismo de fibrados

Sejam $\xi^k \mapsto M^n$, $\eta^k \mapsto V^n$ fibrados vetoriais k -dimensionais, onde os espaços base M^n e V^n são variedades fechadas n -dimensionais.

Definição 1.4.1 Dizemos que um fibrado vetorial $\xi^k \mapsto M^n$ borda se existe um fibrado $\zeta^k \mapsto W^{n+1}$, onde W^{n+1} é uma variedade compacta com $\partial W^{n+1} = M^n$ e tal que $\zeta^k|_{M^n} = \xi^k$.

Obs: Note que se $\xi^k \mapsto M^n$ borda, então M^n borda.

Definição 1.4.2 Dizemos que dois fibrados vetoriais $\xi^k \mapsto M^n$ e $\eta^k \mapsto V^n$ são cobordantes se a união disjunta $\xi^k \mapsto M^n \cup \eta^k \mapsto V^n$ borda.

Isto estabelece uma relação de equivalência na coleção dos fibrados como acima. A classe de bordismo de $\xi^k \mapsto M^n$ é denotada por $[\xi^k \mapsto M^n]$, ou as vezes simplesmente por $[\xi^k]$. A coleção formada por tais classes torna-se um grupo abeliano através da união disjunta (no qual todo elemento tem ordem 2) e torna-se um $\mathcal{N}_*$ -módulo através da operação

$$[V^m] \bullet [\xi^k \mapsto M^n] = [p^*(\xi^k) \mapsto V^m \times M^n], \text{ onde } p : V^m \times M^n \mapsto M^n \text{ é } p(x, y) = y,$$

e $p^*(\xi^k)$ significa o *pullback* de ξ^k através de p .

O $\mathcal{N}_*$ -módulo em questão nada mais é que $\mathcal{N}_*(BO(k))$, onde $BO(k)$ é o espaço universal classificante para fibrados vetoriais k -dimensionais. Com efeito, denotemos por $\mu^k = E(O(k)) \mapsto BO(k)$ o fibrado universal. A identificação nos dois sentidos é feita da seguinte maneira:

- ($\Rightarrow$) Dado $\xi^k \mapsto M^n$, escolhemos função classificante $f : M^n \mapsto BO(k)$ para ξ^k . Isto determina a variedade singular (M^n, f) em $BO(k)$.
- ($\Leftarrow$) Dada variedade singular (M^n, f) em $BO(k)$, associamos à mesma o *pullback* $f^*(\mu^k) \mapsto M^n$.

A associação assim estabelecida é bem definida. Mais ainda, tal associação preserva a soma e a estrutura de $\mathcal{N}_*$ -módulos, além de ser uma bijeção. Desta forma, o $\mathcal{N}_*$ -módulo de classes de bordismo de fibrados com base n -dimensional e fibra k -dimensional pode ser visto como o $\mathcal{N}_*$ -módulo de bordismo singular $\mathcal{N}_n(BO(k))$.

Como exemplo de um fibrado vetorial que borda, tome N uma variedade que borda e $\mathbb{R}^n \mapsto N$ é o fibrado trivial n -dimensional.

Fixemos agora $[\xi^k \mapsto M^n] \in \mathcal{N}_n(BO(k))$, e tomemos seu correspondente $[M^n, f]$. Segundo o Corolário 1.3.4, o que determina $[M^n, f]$ são seus números de *Whitney*,

$$w_{i_1} w_{i_2} \cdots w_{i_r} f^*(h) [M^n]_2$$

onde $h \in H^m(BO(k), \mathbb{Z}_2)$ e $i_1 + i_2 + \cdots + i_n = n - m$. Ocorre que $H^*(BO(k), \mathbb{Z}_2)$ é a álgebra polinomial $\mathbb{Z}_2[w_1, w_2, \dots, w_k]$, onde $w_i \in H^i(BO(k), \mathbb{Z}_2)$, $1 \leq i \leq k$, é a i -ésima classe de *Stiefel-Whitney* do fibrado universal $\mu^k \mapsto BO(k)$. Assim, um monômio básico $h \in H^m(BO(k), \mathbb{Z}_2)$ pode ser escrito como $h = w_{j_1} w_{j_2} \cdots w_{j_s}$, $j_1 + j_2 + \cdots + j_s = m$, e pela naturalidade das classes características, $f^*(w_{j_1} w_{j_2} \cdots w_{j_s}) = v_{j_1} v_{j_2} \cdots v_{j_s}$, onde $v_j = w_j(\xi^k)$ é a j -ésima classe característica de ξ^k . Segue que

$$w_{i_1} w_{i_2} \cdots w_{i_r} f^*(h) [M^n]_2 = w_{i_1} w_{i_2} \cdots w_{i_r} v_{j_1} v_{j_2} \cdots v_{j_s} [M^n]_2,$$

e portanto, os números de *Whitney* do fibrado $\xi^k \mapsto M^n$ são dados por

$$w_{i_1} w_{i_2} \cdots w_{i_r} v_{j_1} v_{j_2} \cdots v_{j_s} [M^n]_2,$$

onde $i_1 + i_2 + \cdots + i_r + j_1 + j_2 + \cdots + j_s = n$, $v_j = w_j(\xi^k)$ e $w_{i_r} = w_{i_r}(\tau)$.

Desta forma, um fibrado borda se, e somente se, todos os números acima descritos se anulam.

Exemplo: Considere o fibrado linha canônico $\lambda_1^1 \mapsto S^1$. Temos $v_1 = w_1(\lambda_1^1) = \alpha$, o gerador de $H^1(S^1, \mathbb{Z}_2)$, portanto o número de *Whitney* $w_1(\lambda_1^1)[S^1]_2$ de λ_1^1 é não nulo. Segue que λ_1^1 não borda (embora S^1 borde).

1.5 Bordismo de ações de grupos

Como referência para os fatos abaixo, vide [4].

Sejam G um grupo de *Lie* compacto e M^n uma variedade fechada. Consideremos uma ação C^∞ $\psi : G \times M^n \mapsto M^n$, que denotaremos por (M^n, ψ) .

Definição 1.5.1 Dizemos que a ação (M^n, ψ) borda se existe ação C^∞ ,

$$\Psi : G \times W^{n+1} \mapsto W^{n+1},$$

com $\partial(W^{n+1}) = M^n$ e $\Psi|_{M^n} = \psi$.

Definição 1.5.2 Dizemos que as ações (M_1^n, ψ_1) e (M_2^n, ψ_2) são cobordantes quando a união disjunta $(M_1^n, \psi_1) \cup (M_2^n, \psi_2) = (M_1^n \cup M_2^n, \psi_1 \cup \psi_2)$ borda.

A relação de bordismo assim introduzida é uma relação de equivalência. Não é difícil mostrar a reflexividade e a simetria, enquanto a transitividade necessita do teorema do colar equivariante para garantir a suavidade da ação.

Denotamos por $[M^n, \psi]$ a classe de bordismo de (M^n, ψ) , e por $I_*(G)$ a coleção das classes de bordismo das ações (M^n, ψ) . Definimos a operação de soma usando novamente a união disjunta de ações:

$$\bullet \quad I_*(G) \times I_*(G) \xrightarrow{+} I_*(G) : [M^n, \psi] + [N^n, \phi] = [M^n \cup N^n, \psi \cup \phi].$$

Tal operação depende somente das classes $[M^n, \psi]$ e $[N^n, \phi]$. Portanto a soma está bem definida e satisfaz $I_n(G) \times I_n(G) \xrightarrow{+} I_n(G)$, onde $I_n(G)$ é constituído pelas classes representadas por variedades n -dimensionais. Temos que $+$ torna $I_n(G)$ um grupo abeliano no qual todo elemento tem ordem 2. Referimo-nos a $I_n(G)$ como o *grupo de G -bordismo n -dimensional irrestrito*. A razão do nome “irrestrito” é que podemos obter outros tipos de grupos de G -bordismo ao impormos restrições às ações consideradas.

Nesta linha surge o importante *grupo de G -bordismo principal*, o qual é obtido impondo-se que todas as ações consideradas sejam *livres*. Tais grupos são denotados por $\mathcal{N}_n(G)$.

Podemos introduzir em $I_*(G)$ (e em $\mathcal{N}_*(G)$) uma estrutura de $\mathcal{N}_*$ -módulo graduado como segue: dados $[M^n, \psi] \in I_n(G)$ e $[V^m] \in \mathcal{N}_m$, considere a ação

$$\Psi : G \times V^m \times M^n \mapsto V^m \times M^n \text{ dada por } \Psi(g, (v, m)) = (v, \psi(g, m)).$$

Verifica-se que $[V^m \times M^n, \Psi] \in I_{n+m}(G)$ depende somente das classes $[M^n, \psi]$ e de $[V^m]$, o que determina a estrutura pretendida.

1.6 O grupo de $\mathbb{Z}_2$ -bordismo principal

Particularizaremos as considerações anteriores para o caso em que $G = \mathbb{Z}_2$, e neste caso estaremos trabalhando com $\mathcal{N}_*(\mathbb{Z}_2)$ (o grupo de $\mathbb{Z}_2$ -bordismo principal), ou seja, o grupo abeliano formado pelas classes de bordismo $[M^n, \psi]$, onde M^n é uma variedade fechada e $\psi : \mathbb{Z}_2 \times M^n \mapsto M^n$ é uma ação livre C^∞ . Dar uma tal ação é equivalente a dar uma aplicação $T : M^n \mapsto M^n$ com $T \circ T = Id$, ou seja, uma *involução*. O fato de ψ ser livre significa que T não tem pontos fixos. Usaremos então a notação $[M^n, T] \in \mathcal{N}_n(\mathbb{Z}_2)$ no lugar de $[M^n, \psi]$.

Dada uma involução sem pontos fixos (M^n, T) , temos o espaço de órbitas $\frac{M^n}{T}$, o qual ainda é uma variedade fechada, e a projeção $p : M^n \mapsto \frac{M^n}{T}$. Isto é um recobrimento a duas folhas de $\frac{M^n}{T}$.

Definição 1.6.1 Dada uma involução sem pontos fixos (M^n, T) , definimos o *fibrado linha associado a T* como sendo $\gamma \mapsto \frac{M^n}{T}$, onde o espaço total de γ é o espaço quociente $\frac{M^n \times \mathbb{R}}{(m, r) \sim (T(m), -r)}$.

Um exemplo desta situação é o fibrado linha canônico $\lambda_n^1 \mapsto \mathbb{R}P^n$, o qual é o fibrado linha associado à involução antipodal (S^n, A) . Observemos que o fibrado em esferas $S(\gamma) \mapsto \frac{M^n}{T}$ associado a γ é naturalmente identificado ao recobrimento $M^n \mapsto \frac{M^n}{T}$.

Teorema 1.6.2 A associação $[M^n, T] \mapsto [\gamma \mapsto \frac{M^n}{T}]$ define um isomorfismo de $\mathcal{N}_*$ -módulos entre $\mathcal{N}_*(\mathbb{Z}_2)$ e $\mathcal{N}_*(BO(1))$. [3, pg 71, 20.4] $\square$

Podemos então reconhecer um elemento $[M^n, T]$ através dos números de *Whitney* do seu correspondente $[\frac{M^n}{T}, f] \in \mathcal{N}_n(BO(1))$. Lembramos que $H^*(BO(1), \mathbb{Z}_2)$ é a álgebra polinomial $\mathbb{Z}_2[c]$, onde $c \in H^1(BO(1), \mathbb{Z}_2)$. Colocando $f^*(c) = c \in H^1(\frac{M^n}{T}, \mathbb{Z}_2)$, tal elemento é denominado *classe característica* da involução (M^n, T) , e é na realidade a primeira classe de *Whitney* do fibrado linha $\gamma \mapsto \frac{M^n}{T}$ associado a (M^n, T) .

Definição 1.6.3 Dada uma involução sem pontos fixos (M^n, T) , definimos os *números de involução* de (M^n, T) como sendo os números de *Whitney* do seu correspondente $\gamma \mapsto \frac{M^n}{T}$. Ou seja, tais números são da forma $w_{i_1} \cdot w_{i_2} \cdots w_{i_r} c^k \left[\frac{M^n}{T} \right]_2$, onde os w_{i_j} são classes tangenciais de $\frac{M^n}{T}$.

Portanto, temos que $[M^n, T] = 0$ em $\mathcal{N}_n(\mathbb{Z}_2)$ se, e somente se, todos seus números de involução são nulos. Temos, portanto, o

Corolário 1.6.4 *Duas involuções sem pontos fixos são cobordantes se, e somente se, possuem os mesmos números de involução.*

De suma importância para nós serão as involuções sem pontos fixos dadas pelos *fibrados involução*, descritas a seguir. Considere um fibrado vetorial $\xi^k \xrightarrow{P} V^n$ k -dimensional com grupo $O(k)$ (grupo ortogonal), onde V^n é uma variedade fechada. Existe o fibrado em esferas associado $S(\xi^k) \xrightarrow{P} V^n$ com fibra S^{k-1} , cujo espaço total é uma variedade fechada C^∞ $(n + k - 1)$ -dimensional. Existe uma involução sem pontos fixos,

$$T : S(\xi^k) \mapsto S(\xi^k),$$

atuando como a antipodal em cada fibra; isto decorre do fato que a involução antipodal $A : S^{k-1} \mapsto S^{k-1}$ comuta com todos os elementos do grupo ortogonal $O(k)$. Referimo-nos ao par $(S(\xi^k), T)$ como o *fibrado involução* associado a ξ^k . Considere o *fibrado projetivo* associado a ξ^k dado por $\mathbb{RP}(\xi^k) \xrightarrow{P} V^n$, com projeção p , fibra $\mathbb{RP}^{k-1}$ e espaço total $\mathbb{RP}(\xi^k) = \frac{S(\xi^k)}{T}$; temos então a classe característica $c \in H^1(\mathbb{RP}(\xi^k), \mathbb{Z}_2)$ da involução $(S(\xi^k), T)$. A estrutura de $H^*(\mathbb{RP}(\xi^k), \mathbb{Z}_2)$ pode ser obtida através do

Teorema 1.6.5 (Leray-Hirsch) *Seja $E \xrightarrow{P} X$ um fibrado, onde X é um CW-complexo, e seja Λ um anel comutativo com unidade. Suponha que existam elementos homogêneos $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r \in H^*(E, \Lambda)$ tal que, para cada $x \in X$, o Λ -módulo $H^*(E_x, \Lambda)$ seja livre com base $\{j_x^*(\alpha_1), j_x^*(\alpha_2), \dots, j_x^*(\alpha_r)\}$, onde $E_x = p^{-1}(x)$ é a fibra sobre x e $j_x : E_x \mapsto E$ é a inclusão. Então o $H^*(X, \Lambda)$ -módulo $H^*(E, \Lambda)$ (via $p^* : H^*(X) \mapsto H^*(E)$) é livre com base $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r\}$. [8] $\square$*

De fato, voltando para o fibrado projetivo $\mathbb{RP}(\xi^k) \xrightarrow{P} V^n$, notamos por construção que se $\mathbb{RP}^{k-1} \subset \mathbb{RP}(\xi^k)$ é uma fibra típica, então o fibrado linha $\gamma \mapsto \mathbb{RP}(\xi^k)$ é tal que $\gamma|_{\mathbb{RP}^{k-1}} \mapsto \mathbb{RP}^{k-1}$ é o fibrado linha canônico usual. Pela naturalidade das classes de *Stiefel-Whitney*, segue que $i^*(c) = \alpha \in H^1(\mathbb{RP}^{k-1}, \mathbb{Z}_2)$ é o gerador, onde $i : \mathbb{RP}^{k-1} \mapsto \mathbb{RP}(\xi^k)$ é a inclusão. Agora, $H^*(\mathbb{RP}^{k-1}, \mathbb{Z}_2)$ é um $\mathbb{Z}_2$ -módulo livre com base $1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{k-1}$. Pelo teorema acima segue que $H^*(\mathbb{RP}(\xi^k), \mathbb{Z}_2)$ é um $H^*(V^n, \mathbb{Z}_2)$ -módulo livre graduado com base $1, c, c^2, \dots, c^{k-1}$.

Denotemos por

$$\begin{array}{ccc} \tau(\mathbb{RP}(\xi^k)) & , & \tau(V^n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{RP}(\xi^k) & & V^n \end{array}$$

os fibrados tangentes. Baseado no fato que fibrados são localmente triviais, vale que $\tau(\mathbb{RP}(\xi^k))$ é a soma de *Whitney* $\tau_1 \oplus \tau_2$, onde τ_1 é o *pullback* $p^*(\tau(V^n))$ e τ_2 é o fibrado dos vetores tangentes paralelos às fibras. Coloquemos

$$\mathbb{W}(\tau(V^n)) = 1 + w_1 + w_2 + \cdots + w_n \quad \text{e} \quad \mathbb{W}(\xi^k) = 1 + v_1 + v_2 + \cdots + v_k,$$

as respectivas classes de *Stiefel-Whitney*. Pela naturalidade, temos que

$$\mathbb{W}(\tau_1) = 1 + p^*(w_1) + p^*(w_2) + \cdots + p^*(w_n)$$

A classe total de τ_2 é dada pelo

Teorema 1.6.6 (*Borel-Hirzebruch*)

$$\mathbb{W}(\tau_2) = (1 + c)^k + (1 + c)^{k-1}p^*(v_1) + (1 + c)^{k-2}p^*(v_2) + \cdots + p^*(v_k).$$

[4, pg 61, 23.3]

□

Como τ_2 é um fibrado $(k - 1)$ -dimensional, em particular vale a relação

$$c^k + c^{k-1}p^*(v_1) + c^{k-2}p^*(v_2) + \cdots + p^*(v_k) = 0.$$

Juntando os fatos acima, e omitindo-se, para simplificar a notação, o símbolo p^* (daqui por diante estaremos sempre omitindo p^*), concluímos que

Corolário 1.6.7 *A classe de Stiefel-Whitney do espaço total do fibrado projetivo associado a ξ^k é*

$$\mathbb{W}(\mathbb{RP}(\xi^k)) = (1 + w_1 + w_2 + \cdots + w_n) \cdot ((1 + c)^k + v_1(1 + c)^{k-1} + v_2(1 + c)^{k-2} + \cdots + v_k).$$

1.7 O *Splitting Principle*

Para os fatos abaixo, vide [8].

Em geral, um fibrado vetorial $\eta^r \mapsto V^n$ r -dimensional sobre uma variedade fechada n -dimensional não necessariamente se decompõe em uma soma de *Whitney* de fibrados

unidimensionais $\lambda_1 \oplus \lambda_2 \oplus \cdots \oplus \lambda_r \mapsto V^n$. Se isso ocorresse, a classe de *Stiefel-Whitney* $\mathbb{W}(\eta^r) = 1 + v_1 + v_2 + \cdots + v_r$ se decomporia em fatores lineares

$$\mathbb{W}(\eta^r) = \prod_{i=1}^r \mathbb{W}(\lambda_i) = \prod_{i=1}^r (1 + v_1(\lambda_i)).$$

No entanto, em argumentos que se baseiam em classes características e números de *Stiefel-Whitney*, em geral pode-se supor que a classe de *Stiefel-Whitney* de qualquer fibrado vetorial pode ser fatorada em fatores lineares. Isso decorre do seguinte resultado [8, seção 5]: dado qualquer $\eta^r \mapsto V^n$, existe uma variedade fechada W e uma função $f : W \mapsto V^n$ tal que o *pullback* $f^*(\eta^r) \mapsto W$ se decompõe como $\lambda \oplus \mu^{r-1} \mapsto W$, onde λ é um fibrado unidimensional; adicionalmente a induzida em cohomologia

$$f^* : H^*(V^n) \mapsto H^*(W)$$

é um monomorfismo. Iterando o resultado acima com $\mu^{r-1} \mapsto W$ no lugar de $\eta^r \mapsto V^n$ (e assim sucessivamente), e levando-se em conta que:

- i) *pullback* de soma de *Whitney* é a soma de *Whitney* dos *pullbacks*;
- ii) o *pullback* $(g \circ f)^*(\eta)$ é igual a $f^*(g^*(\eta))$;
- iii) composta de monomorfismos é monomorfismo;

conclui-se o seguinte:

Teorema 1.7.1 (*Splitting Principle*) *Seja $\eta^r \mapsto V^n$ fibrado vetorial r -dimensional sobre a variedade fechada n -dimensional V^n . Então existe uma variedade fechada W e uma função $f : W \mapsto V^n$ tal que:*

- i) *o pullback $f^*(\eta^r) \mapsto W$ se decompõe em uma soma de Whitney de fibrados unidimensionais $\lambda_1 \oplus \lambda_2 \oplus \cdots \oplus \lambda_r \mapsto W$;*
- ii) *$f^* : H^*(V^n, \mathbb{Z}_2) \mapsto H^*(W, \mathbb{Z}_2)$ é um monomorfismo;*

Como consequência, teremos pela naturalidade que

$$\begin{aligned} \mathbb{W}(\lambda_1 \oplus \lambda_2 \oplus \cdots \oplus \lambda_r) &= (1 + x_1)(1 + x_2) \cdots (1 + x_r) = \\ &= f^*(1 + v_1 + v_2 + \cdots + v_r) = 1 + f^*(v_1) + f^*(v_2) + \cdots + f^*(v_r) \end{aligned}$$

onde $v_i \in H^i(V^n, \mathbb{Z}_2)$ é a i -ésima classe de η^r e $x_i \in H^1(W, \mathbb{Z}_2)$ é a primeira (e única) classe de λ_i .

Como f^* é homomorfismo de anéis, em argumentos utilizando classes características e números de *Stiefel-Whitney* (que envolvem monômios nas classes características), o

objeto $1 + v_1 + v_2 + \cdots + v_r$, que mora em $H^*(V^n, \mathbb{Z}_2)$, pode ser substituído pelo objeto $1 + f^*(v_1) + f^*(v_2) + \cdots + f^*(v_r)$, que mora em $f^*(H^*(V^n, \mathbb{Z}_2))$, o qual é uma cópia isomorfa (como anel) de $H^*(V^n)$ dentro de $H^*(W)$, e $1 + f^*(v_1) + f^*(v_2) + \cdots + f^*(v_r)$ se fatora em termos lineares conforme acima.

Quando se usa o *splitting principle*, por abuso de notação escreve-se:

$$\mathbb{W}(\eta^r) = 1 + v_1 + \cdots + v_r \quad \text{se fatora como} \quad \mathbb{W}(\eta^r) = (1 + x_1)(1 + x_2) \cdots (1 + x_r),$$

sem mencionar a variedade W e os fibrados unidimensionais $\lambda_i \mapsto W$ (embora rigorosamente $1 + f^*(v_1) + \cdots + f^*(v_r)$ e não $1 + v_1 + \cdots + v_r$, seja igual a $\prod_{i=1}^r (1 + x_i)$).

Por exemplo, suponhamos $\xi^k \mapsto V^n$ fibrado k -dimensional sobre a variedade fechada V^n com $\mathbb{W}(V^n) = 1 + w_1 + w_2 + \cdots + w_n$, $\mathbb{W}(\xi^k) = 1 + v_1 + v_2 + \cdots + v_k$. Já vimos que

$$\mathbb{W}(\mathbb{RP}(\xi^k)) = (1 + w_1 + \cdots + w_n) \left(\sum_{j=0}^k (1 + c)^j v_{k-j} \right).$$

Suponhamos que $\mathbb{W}(V^n)$ e $\mathbb{W}(\xi^k)$ se factorem através do *splitting principle* como:

$$\mathbb{W}(V^n) = (1 + x_1)(1 + x_2) \cdots (1 + x_n), \quad \mathbb{W}(\xi^k) = (1 + y_1)(1 + y_2) \cdots (1 + y_k);$$

temos então o

Teorema 1.7.2 *A forma fatorada de $\mathbb{W}(\mathbb{RP}(\xi^k))$ é*

$$\mathbb{W}(\mathbb{RP}(\xi^k)) = (1 + x_1)(1 + x_2) \cdots (1 + x_n)(1 + c + y_1)(1 + c + y_2) \cdots (1 + c + y_k).$$

Tal fatoração é mencionada no artigo [5], mas sem prova. Tal fatoração pode ser justificada em um contexto puramente algébrico: sejam $c, y_1, y_2, \dots, y_k$ indeterminadas de grau 1, e escreva $(1 + y_1)(1 + y_2) \cdots (1 + y_k) = 1 + v_1 + v_2 + \cdots + v_k$, onde v_i é a i -ésima função simétrica elementar nas variáveis $y_1, \dots, y_k$. Então

$$(1 + c + y_1)(1 + c + y_2) \cdots (1 + c + y_k) = (1 + c)^k + (1 + c)^{k-1}v_1 + \cdots + (1 + c)v_{k-1} + v_k.$$

Tal fato é trivialmente verdadeiro para $k = 1$. Indutivamente, suponha o mesmo válido para $k - 1$. Escreva

$$(1 + c + y_1)(1 + c + y_2) \cdots (1 + c + y_{k-1}) = \frac{1 + v_1 + v_2 + \cdots + v_k}{1 + y_k} = 1 + v'_1 + v'_2 + \cdots + v'_{k-1}$$

Então, $v_1 = v'_1 + y_k$, $v_j = v'_j + v'_{j-1}y_k$ se $2 \leq j \leq k - 1$ e $v_k = v'_{k-1}y_k$. Pela hipótese de indução, temos

$$(1 + c + y_1) \cdots (1 + c + y_{k-1}) = ((1 + c)^{k-1} + (1 + c)^{k-2}v'_1 + \cdots + (1 + c)v'_{k-2} + v'_{k-1})$$

Então

$$\begin{aligned} (1 + c + y_1) \cdots (1 + c + y_{k-1})(1 + c + y_k) &= ((1 + c)^{k-1} + \cdots + (1 + c)v'_{k-2} + v'_{k-1})(1 + c + y_k) = \\ &= (1 + c)^k + (1 + c)^{k-1}v'_1 + \cdots + (1 + c)v'_{k-1} + ((1 + c)^{k-1}y_k + (1 + c)^{k-2}v'_1y_k + \cdots + v'_{k-1}y_k) = \\ &= (1 + c)^k + (1 + c)^{k-1}[v'_1 + y_k] + \cdots + (1 + c)[v'_{k-1} + v'_{k-2}y_k] + v'_{k-1}y_k = \\ &= (1 + c)^k + (1 + c)^{k-1}v_1 + (1 + c)^{k-2}v_2 + \cdots + (1 + c)v_{k-1} + v_k \end{aligned} \quad \square$$

1.8 Sequência exata de *Conner e Floyd*

Vimos na Seção 1.6 que o que caracteriza a classe de bordismo de uma involução sem pontos fixos (M^n, T) em $\mathcal{N}_n(\mathbb{Z}_2)$ são seus números de involução (que são números de *Whitney* do fibrado linha usual $\gamma \mapsto \frac{M^n}{T}$). Infelizmente, não existe a priori um tal critério para involuções (M^n, T) com $F_T \neq \emptyset$ (por exemplo, nem mesmo $\frac{M^n}{T}$ é em geral variedade fechada: tome $M = S^1 \subset \mathbb{R}^2$ e T a reflexão em uma coordenada; $\frac{M}{T}$ é o disco D^1). A *sequência exata de Conner e Floyd* de [4, pg 73, 28.1] contorna tal ponto; na realidade, tal sequência estabelece quando duas involuções são cobordantes e, adicionalmente, quando um determinado fibrado pode ser caracterizado como o *fixed-data* de alguma involução.

Seja então (M^n, T) involução suave na variedade fechada e n -dimensional M^n . Conforme dito na introdução, o conjunto de pontos fixos $F = F_T$ de T é uma subvariedade fechada de M^n , a qual pode ser escrita como $F = \cup F^i$, onde F^i denota a união (dis-junta) das componentes i -dimensionais de F , $0 \leq i \leq n$; desta forma, cada F^i é uma subvariedade fechada i -dimensional de M^n , eventualmente desconexa, eventualmente vazia. O fibrado normal $\eta \mapsto F = \cup_{i=0}^n (\eta^{n-i} \mapsto F^i)$ é o *fixed-data* de (M^n, T) . F^n consiste das componentes de M^n restrita às quais T é a identidade. Desta forma, $\eta^0 \mapsto F^n$ é o fibrado 0-dimensional.

Conforme visto anteriormente, $I_n(\mathbb{Z}_2)$ denota o grupo de bordismo irrestrito de variedades n -dimensionais com involução, e $\mathcal{N}_r(BO(k))$ é o grupo de bordismo de fibrados k -dimensionais sobre variedades r -dimensionais. Portanto, no contexto acima, (M^n, T) representa uma classe em $I_n(\mathbb{Z}_2)$, enquanto cada $\eta^{n-i} \mapsto F^i$ representa uma classe em $\mathcal{N}_i(BO(n-i))$, $0 \leq i \leq n$. Denotando

$$\mathcal{M}_n = \bigoplus_{k=0}^n \mathcal{N}_k(BO(n-k)),$$

temos então que (M^n, T) determina o elemento

$$[\eta \mapsto F] = \left[\bigcup_{i=0}^n \eta^{n-i} \mapsto F^i \right] = \sum_{i=0}^n [\eta^{n-i} \mapsto F^i] \in \mathcal{M}_n.$$

Conforme [4], tal elemento não depende da escolha do particular representante (M^n, T) de $[M^n, T] \in I_n(\mathbb{Z}_2)$. Mais ainda, e segundo [4], a aplicação

$$j_* : I_n(\mathbb{Z}_2) \mapsto \mathcal{M}_n \quad \text{dada por} \quad j_*[M^n, T] = \sum_{i=0}^n [\eta^{n-i} \mapsto F^i]$$

é um homomorfismo de $\mathcal{N}_*$ -módulos.

Por outro lado, conforme visto na seção 1.6, se $\xi^k \mapsto V^r$ é qualquer fibrado vetorial k -dimensional sobre uma variedade fechada r -dimensional, temos o fibrado em esferas

associado $S(\xi^k)$ e a involução livre de pontos fixos dada pela antipodal nas fibras de ξ^k , $(S(\xi^k), T)$ (o *fibrado involução associado a ξ^k*). Em outras palavras, $(S(\xi^k), T)$ representa uma classe em $\mathcal{N}_{n+k-1}(\mathbb{Z}_2)$. Em particular, um elemento

$$\alpha = \sum_{i=0}^n [\xi^{n-i} \mapsto V^i] \in \mathcal{M}_n \quad \text{dá origem ao elemento} \quad \sum_{i=0}^n [(S(\xi^{n-i}), T)] \in \mathcal{N}_{n-1}(\mathbb{Z}_2).$$

Conforme [4], esta associação é bem definida a nível de bordismo e estabelece um homomorfismo de $\mathcal{N}_*$ -módulos

$$\partial : \mathcal{M}_n \mapsto \mathcal{N}_{n-1}(\mathbb{Z}_2).$$

(para $i = n$, convencionase-se que $\partial : \mathcal{N}_n(BO(0)) \mapsto \mathcal{N}_{n-1}(\mathbb{Z}_2)$ é o homomorfismo nulo). Temos então o

Teorema 1.8.1 (Sequência de Conner-Floyd) *A sequência*

$$0 \rightarrow I_n(\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{j_*} \mathcal{M}_n \xrightarrow{\partial} \mathcal{N}_{n-1}(\mathbb{Z}_2) \rightarrow 0$$

é exata. [4, pg 73, 28.1] □

Uma das consequências do teorema acima é que duas involuções (M^n, T) e (V^n, T') são cobordantes se e somente se seus *fixed-data* $\eta \mapsto F_T$, $\eta' \mapsto F_{T'}$ forem cobordantes. Em outras palavras, embora (M^n, T) não possua números característicos, a classe de (M^n, T) em $I_n(\mathbb{Z}_2)$ é indiretamente determinada por números característicos, a saber os números de $\eta \mapsto F_T$.

Outra consequência do teorema é que, se um fibrado $\eta \mapsto F = \cup_{i=0}^n (\eta^{n-i} \mapsto F^i)$ é tal que $\partial[\eta] = 0$, então $[\eta] = j_*[M^n, T]$ para alguma (M^n, T) . Em outras palavras, se $\partial[\eta] = 0$, então η é cobordante a um fibrado μ que pode ser realizado como o *fixed-data* de uma involução. Na realidade, a demonstração do teorema acima diz algo mais forte que isso. A prova mostra que, de fato, o próprio η pode ser realizado como o *fixed-data* de uma involução. Isto significa que se η é cobordante a μ , então η é um *fixed-data* se e somente se μ o for.

Temos então um critério preciso para decidir se ou não um determinado fibrado $\eta \mapsto F$ é um *fixed-data*: $\partial([\eta]) = [S(\eta), T] \in \mathcal{N}_{n-1}(\mathbb{Z} - 2)$, e conforme vimos a classe de $(S(\eta), T)$ em $\mathcal{N}_{n-1}(\mathbb{Z}_2)$ é determinada pelos números de *Whitney* da correspondente classe do fibrado linha $\lambda \mapsto \frac{S(\eta)}{T} = \mathbb{RP}(\eta)$ em $\mathcal{N}_{n-1}(BO(1))$. Assim, η é um *fixed-data* se e somente se todos os números de *Whitney* de $\lambda \mapsto \mathbb{RP}(\eta)$ forem nulos. Um exemplo interessante é o seguinte bem conhecido fenômeno: uma involução (M^n, T) ($n > 0$) não pode possuir um único ponto fixo $p \in M^n$. De fato, nesse caso o fibrado normal η seria o fibrado trivial n -dimensional $\mathbb{R}^n \mapsto p$, e portanto $\lambda \mapsto \mathbb{RP}(\eta)$ neste caso coincide com o fibrado linha canônico $\lambda \mapsto \mathbb{RP}^{n-1}$. A primeira classe característica de λ é o gerador

$\alpha \in H^1(\mathbb{RP}^{n-1}, \mathbb{Z}_2)$, e portanto $\alpha^{n-1}[\mathbb{RP}^{n-1}]_2 \neq 0$ é um número característico de λ , o que nos dá a contradição.

Conforme acima, se (M^n, T) tem *fixed-data* $\eta \mapsto F$, então todos os números de Whitney de $\lambda \mapsto \mathbb{RP}(\eta)$ são nulos. Em particular, de suma importância para nós (e isto será exaustivamente usado nos Capítulos 2 e 3) é a seguinte consequência dos fatos acima:

Teorema 1.8.2 *Seja (M^n, T) involução tal que F_T é da forma $F^j \cup F^p$, $j < p < n$; ou seja, o conjunto de pontos fixos de T só possui componentes j -dimensionais e p -dimensionais, $j < p$. Seja $\eta^{n-j} \mapsto F^j$, $\mu^{n-p} \mapsto F^p$ os respectivos fibrados normais. Então os fibrados-linha usuais $\lambda \mapsto \mathbb{RP}(\eta^{n-j})$, $\lambda' \mapsto \mathbb{RP}(\mu^{n-p})$ possuem os mesmos números de Whitney.* $\square$

Outra consequência dos fatos acima é o seguinte

Teorema 1.8.3 *Seja (M^n, T) involução com *fixed-data* $\eta \mapsto F$, e suponha $\eta \mapsto F = (\eta_1 \mapsto F_1) \cup (\eta_2 \mapsto F_2)$. Suponha $\eta_1 \mapsto F_1$ cobordante a um certo fibrado $\mu \mapsto G$ (F_1 e G podem significar várias componentes com diferentes dimensões, e o cobordismo nesse caso é componente a componente). Então existe involução (W^n, T') cobordante a (M^n, T) , cujo *fixed-data* é $(\mu \mapsto G) \cup (\eta_2 \mapsto F_2)$.*

Prova: Temos

$$\partial([\mu] + [\eta_2]) = \partial([\mu] + [\eta_1] + [\eta_1] + [\eta_2]) = \partial([\eta_1] + [\eta_2]) = 0$$

Portanto existe involução (W^n, T') com *fixed-data* $\mu \cup \eta_2$. Adicionalmente, como $\mu \cup \eta_2$ é cobordante a $\eta_1 \cup \eta_2$, (W^n, T') é cobordante a (M^n, T) . $\square$

Na mesma direção temos o

Teorema 1.8.4 *Se o *fixed-data* de (M^n, T) é $\eta \mapsto F = (\eta_1 \mapsto F_1) \cup (\eta_2 \mapsto F_2)$ e $(\eta_1 \mapsto F_1)$ borda. Então existe involução (W^n, T') cobordante a (M^n, T) , com *fixed-data* $(\eta_2 \mapsto F_2)$*

Prova: $0 = \partial([\eta_1] + [\eta_2]) = \partial([\eta_2])$. $\square$

Finalmente, será de interesse para nós o fato segundo o qual toda involução pode ser suposta, para alguns efeitos, possuir a parte i -dimensional do seu conjunto de pontos fixos conexa para cada $0 \leq i \leq n$. (Vide comentário a respeito na introdução, quando introduzimos o número $m(n; X)$). De fato e mais precisamente, temos o seguinte

Teorema 1.8.5 *Seja (M^n, T) , uma involução suave sobre uma variedade n -dimensional, com *fixed-data* $\eta \mapsto F = \cup_{i=0}^n (\eta^{n-i} \mapsto F^i)$. Então (M^n, T) é cobordante a uma involução (W^n, T') cujo *fixed-data* $\mu \mapsto G = \cup_{i=0}^n (\mu^{n-i} \mapsto G^i)$ é tal que cada G^i é conexa.*

O teorema anterior decorre das seguintes considerações: se $\xi^r \mapsto V^n$ e $\theta^r \mapsto W^n$ são fibrados r -dimensionais sobre variedades fechadas n -dimensionais, então é conhecido o fato que a soma conexa

$$W^n \# V^n = \frac{(W^n - D_1) \cup (V^n - D_2)}{\sim},$$

onde D_1 e D_2 significam discos abertos n -dimensionais em torno de pontos pré-escolhidos $p \in W^n$ e $q \in V^n$, e $\sim$ significa identificar os bordos $\partial(D_1) \cong \partial(D_2) \cong S^{n-1}$ através de algum difeomorfismo C^∞ , é cobordante à união disjunta $W^n \cup V^n$.

Como $\xi^r|_{\overline{D}_1}$ e $\theta^r|_{\overline{D}_2}$ são fibrados triviais, a construção $W^n \# V^n$ pode ser estendida aos fibrados, e temos a *soma conexa dos fibrados* ξ^r e θ^r , $\xi^r \# \theta^r \mapsto W^n \# V^n$, o qual é um fibrado r -dimensional sobre a variedade fechada $W^n \# V^n$. Também é conhecido o fato que o cobordismo entre $W^n \# V^n$ e $W^n \cup V^n$ se estende aos fibrados, ou seja, $\xi^r \# \theta^r \mapsto W^n \# V^n$ é cobordante a $(\xi^r \mapsto V^n) \cup (\theta^r \mapsto W^n)$.

Voltando a involução (M^n, T) com *fixed-data* $\eta \mapsto F = \bigcup_{i=0}^n (\eta^{n-i} \mapsto F^i)$, podemos aplicar o argumento acima iteradamente nas componentes de F^i para trocar F^i por G^i conexa com a utilização do Teorema 1.8.3, e a seguir iteradamente em cada dimensão $0 \leq i \leq n$ para obter o teorema acima. $\square$

Corolário 1.8.6 *O número $m(n; X)$ introduzido na página xii, Introdução, não depende da quantidade de componentes do conjunto de pontos fixos da involução com alguma dimensão específica fixada.* $\square$

1.9 Involuções e a característica de *Euler* módulo 2

Se X é um CW -complexo finito, definimos

Definição 1.9.1 *A característica de Euler de X mod 2 é o número*

$$\chi(X) = \sum (-1)^i \dim H_i(X, \mathbb{Z}_2) = \sum (-1)^i \dim H^i(X, \mathbb{Z}_2)$$

reduzido módulo 2.

Tal número relaciona-se com involuções através do seguinte

Teorema 1.9.2 *Se (M^n, T) é uma involução com conjunto de pontos fixos F , então*

$$\chi(M^n) \equiv \chi(F) \pmod{2}.$$

[4, pg 70, 27.2] $\square$

É interessante destacar também que $\chi(M^n) \pmod{2}$ é um invariante de bordismo. Isto decorre do seguinte

Teorema 1.9.3 *Seja M^n uma variedade fechada n -dimensional. Então $\chi(M^n) \pmod{2}$ coincide com o número de Stiefel-Whitney $w_n[M^n]_2$. [7, pg 130, 11.12] $\square$*

Lembramos finalmente que, se M^n é uma variedade fechada e n é ímpar, então decorre da dualidade de Poincaré que $\chi(M^n) = 0$.

1.10 Uma involução especial

Seja $\eta^r \mapsto F^i$ qualquer fibrado vetorial r -dimensional sobre uma variedade fechada i -dimensional. Então, embora já saibamos que η^r pode não ser o *fixed-data* de alguma involução, η^r faz parte do *fixed-data* de uma certa involução, de tal sorte que além de η^r tal *fixed-data* contém somente mais uma componente, a qual é do tipo $\eta^1 \mapsto F^{r+i-1}$. Com efeito, considere $M^{r+i} = \mathbb{RP}(\eta^r \oplus \mathbb{R})$, onde $\mathbb{R} \mapsto F^i$ é o fibrado trivial unidimensional. Em M^{r+i} , considere a involução

$$[v, r] \xrightarrow{T} [v, -r].$$

O conjunto de pontos fixos de tal involução é $\mathbb{RP}(\eta)$ (correspondente aos elementos $[v, 0]$), com fibrado normal $\lambda \mapsto \mathbb{RP}(\eta^r)$ sendo o fibrado linha usual, unido com $\mathbb{RP}(\mathbb{R}) \cong F^i$ (correspondente aos elementos $[0, r]$) com fibrado normal $\eta^r \mapsto F^i$. Vide [3]. Sumarizando, temos:

Teorema 1.10.1 *Seja $\eta^r \mapsto F^i$ fibrado vetorial real r -dimensional sobre uma variedade fechada i -dimensional F^i . Então existe uma involução (M^{r+i}, T) com conjunto de pontos fixos dado por $F_T = F^i \cup \mathbb{RP}(\eta)$ com fibrados normais $\eta^r \mapsto F^i$ e $\lambda \mapsto \mathbb{RP}(\eta)$ onde λ é o fibrado linha usual sobre $\mathbb{RP}(\eta)$.*

1.11 O limitante $m(n)$ de Stong e Pergher

Na introdução, comentamos a respeito do fato que, para cada $n \in \mathbb{N}$, Stong e Pergher construíram, em [12], uma involução (M, T) , de tal sorte que a dimensão de M é um específico número natural $m(n) > n$, com conjunto de pontos fixos da forma $\{pto\} \cup F^n$, e maximal com respeito a esta propriedade de possuir conjunto de pontos fixos da forma $\{pto\} \cup F^n$. Em outras palavras, se (N^r, T) possui conjunto de pontos fixos da forma $\{pto\} \cup F^n$, então $r \leq m(n)$. A seguir detalhamos $m(n)$. Escreva $n = 2^p q$, onde $p \geq 0$ e $q \geq 1$, com q ímpar. Então

$$m(n) = \begin{cases} 2n + p + 1 - q & , \text{se } q \geq p \\ 2n + 2^{p-q} & , \text{se } q < p. \end{cases}$$

Note em particular:

- a) se n é ímpar, $n = 2^0q$ ($q \geq 1$) e portanto $m(n) = 2n+1-q = 2q+1-q = q+1 = n+1$, que é o resultado de *Royster* [13];
- b) se $n = 2q$, com q ímpar, então $m(n) = 2n+1+1-q = 4q+2-q = 3q+2 = \frac{3}{2}n+2$. Neste caso, este valor (maximal) melhora o resultado de *Pergher* [9], o qual mostra que um limitante é $\frac{3}{2}n+3$;
- c) se $n = 2^p$, $p \geq 1$, então

$$m(n) = \begin{cases} 5 = \frac{5}{2}2, & \text{se } p = 1, \\ 2n + 2^{p-q} = 2^{p+1} + 2^{p-1} = 2^{p-1}(4+1) = 5 \cdot 2^{p-1} = \frac{5}{2}2^p = \frac{5}{2}n, & \text{se } p > 1. \end{cases}$$

Em outras palavras, se $n = 2^p$ com $p \geq 1$, os exemplos $(M^{m(n)}, T)$ de *Stong* e *Pergher* atingem o limite $\frac{5}{2}n$ de *Boardman*.

A seguir, enunciaremos o teorema de *Stong* e *Pergher* no formato em que o mesmo aparece em [12], com $m(n)$ sendo escrito de forma um pouco diferente, a qual é mais adequada em alguns contextos.

Teorema 1.11.1 *Seja (M^m, T) uma involução diferenciável sobre uma variedade fechada, tal que $F_T = \{pto\} \cup F^n$, onde F^n é uma subvariedade fechada de dimensão $0 < n < m$. Se $n = 2^p(2q+1)$, então $m \leq m(n)$ onde*

$$m(n) = \begin{cases} (2^{p+1}-1)(2q+1) + (p+1) & \text{se } p \leq 2q+2 \\ (2^{p+1}-2^{p-(2q+1)})(2q+1) + 2^{p-(2q+1)}(2q+2) & \text{se } p \geq 2q+1. \end{cases}$$

Adicionalmente, para cada n existe uma involução $(M^{m(n)}, T)$ com F_T sendo da forma $\{pto\} \cup F^n$.

1.12 A fórmula de *Conner*

Seja $\eta^r \mapsto F^n$ um fibrado r -dimensional sobre uma variedade fechada n -dimensional F^n . Suponha

$$\mathbb{W}(F^n) = 1 + w_1 + \cdots + w_n \quad \text{e} \quad \mathbb{W}(\eta^r) = 1 + v_1 + \cdots + v_r.$$

O teorema de *Borel-Hirzebruch* 1.6.6 da página 9 nos diz que

$$\mathbb{W}(\mathbb{RP}(\eta^r)) = (1 + w_1 + \cdots + w_n) \{ (1+c)^r + v_1(1+c)^{r-1} + \cdots + v_r \}$$

e por 1.6.5 da página 8 sabemos que $H^*(\mathbb{RP}(\eta^r), \mathbb{Z}_2)$ é um $H^*(F^n, \mathbb{Z}_2)$ -módulo livre graduado gerado por $1, c, c^2, \dots, c^{r-1}$ e sujeito à relação $c^r = v_1c^{r-1} + v_2c^{r-2} + \cdots + v_r$.

Então, se $a_n \in H^n(F^n, \mathbb{Z}_2)$ e $a_n c^{n-1} = 0$, necessariamente $a_n = 0$. Note que $H^n(F^n, \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$ e $H^{n+r-1}(\mathbb{RP}(\eta^r), \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$. Segue que

$$a_n[F^n]_2 = a_n c^{r-1}[\mathbb{RP}(\eta^r)]_2.$$

Se $a_s \in H^s(F^n, \mathbb{Z}_2)$ com $s > n$, então $a_s c^{n+r-1-s}[\mathbb{RP}(\eta^r)]_2 = 0$ pois $a_s = 0$. Por outro lado, se $s < n$, então $a_s c^{n+r-1-s}[\mathbb{RP}(\eta^r)]_2$ pode ser calculado com o uso iterativo da relação $c^r = v_1 c^{r-1} + v_2 c^{r-2} + \dots + v_r$. Isto é feito mais preciso através da *Fórmula de Conner* (vide [2]), a qual nos diz que se $p(c, w_i, v_j)$ é uma função polinomial de grau $n + r - 1$ nas classes c, w_i, v_j , então

$$p(c, w_i, v_j)[\mathbb{RP}(\eta^r)]_2 = \left\langle \frac{p(1, w_i, v_j)}{(1 + v_1 + \dots + v_r)} \right\rangle [F^n]_2$$

onde $\left\langle \frac{p(1, w_i, v_j)}{(1 + v_1 + \dots + v_r)} \right\rangle$ é o termo de dimensão n de $\frac{p(1, w_i, v_j)}{(1 + v_1 + \dots + v_r)}$. Assim, se

$$a_{n-i} \in H^{n-i}(F^n, \mathbb{Z}_2), \quad \text{temos que} \quad a_{n-i} c^{r-1+i}[\mathbb{RP}(\eta^r)]_2 = a_{n-i} \bar{v}_i [F^n]_2,$$

onde $\bar{v}_i$ é a *classe dual* de v_i , definida por

$$(1 + v_1 + v_2 + \dots + v_r)(1 + \bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \dots + \bar{v}_r) = 1.$$

1.13 A classe de Wu

Para definirmos a classe de Wu , precisaremos de algumas propriedades das operações cohomológicas Sq^i , conhecidas como *quadrados de Steenrod*. Tais operações são certos homomorfismos aditivos $Sq^i : H^n(X, \mathbb{Z}_2) \mapsto H^{n+i}(X, \mathbb{Z}_2)$, os quais satisfazem as seguintes propriedades (vide [7]):

1. Naturalidade. Se $f : X \mapsto Y$ é qualquer aplicação contínua, então $Sq^i \circ f^* = f^* \circ Sq^i$.
2. Se $a \in H^n(X, \mathbb{Z}_2)$, então $Sq^0(a) = a$, $Sq^n(a) = a \cup a$ e $Sq^i(a) = 0$ para $i > n$.
3. A *formula de Cartan*:

$$Sq^k(a \cup b) = \sum_{i+j=k} Sq^i(a) \cup Sq^j(b),$$

onde $\cup$ denota o produto *cup*.

Temos ainda a operação *quadrado total* dada por

$$Sq(a) = a + Sq^1(a) + Sq^2(a) + \cdots + Sq^n(a), \text{ onde } a \in H^n(X, \mathbb{Z}_2).$$

Note então que a formula de *Cartan* pode ser expressa como $Sq(a \cup b) = Sq(a) \cup Sq(b)$.

O seguinte fato é verdadeiro (vide [7]): se M^n é uma variedade conexa, fechada e n -dimensional e $0 \leq k \leq n$, existe uma e somente uma classe de cohomologia $v_k \in H^k(M^n, \mathbb{Z}_2)$ tal que, para qualquer $x \in H^{n-k}(M^n, \mathbb{Z}_2)$, vale que $v_k \cup x = Sq^k(x)$. Tal classe é chamada a *k-ésima classe de Wu de M^n* , e $V = 1 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n$ é chamada a *classe de Wu de M^n* . Observe que pela caracterização de V e pela propriedade 2 acima temos que $v_k = 0$ se $k > n - k$. Então V assume a forma $V = 1 + v_1 + v_2 + \cdots + v_{[n/2]}$, onde $[n/2]$ denota o maior inteiro menor que $n/2$.

A classe de *Wu* de M^n se relaciona com a classe de *Stiefel-Whitney* de M^n através do seguinte

Teorema 1.13.1 (Wu) Se $\mathbb{W}(M^n) = 1 + w_1 + w_2 + \cdots + w_n$ e $V(M^n) = 1 + v_1 + v_2 + \cdots + v_{[n/2]}$ denotam, respectivamente, as classes de *Stiefel-Whitney* e de *Wu* de M^n , então $Sq(V(M^n)) = \mathbb{W}(M^n)$.

Por exemplo,

$$\begin{aligned} Sq(1 + v_1 + v_2 + \cdots) &= 1 + v_1 + v_1^2 + v_2 + Sq^1(v_2) + v_2^2 + \text{termos com grau} \geq 3 \\ &= 1 + v_1 + v_1^2 + v_2 + v_1 v_2 + v_2^2 + \text{termos com grau} \geq 3. \end{aligned}$$

e em particular $v_1 = w_1$ e $v_2 = v_1^2 + w_2 = w_1^2 + w_2$. Em outras palavras, cada v_k pode ser explícita e recursivamente calculado em termos dos $w_{i's}$.

1.14 Funções simétricas

Para os fatos abaixo, vide por exemplo [7].

Sejam $t_1, t_2, \dots, t_n$ indeterminadas, às quais atribuímos grau 1, e considere o anel polinomial $\mathcal{F} = \mathbb{Z}_2[t_1, t_2, \dots, t_n]$. Um polinômio $p(t_1, t_2, \dots, t_n)$ de $\mathcal{F}$ é dito ser uma *função simétrica* se $p(t_1, t_2, \dots, t_n) = p(t_{\sigma(1)}, t_{\sigma(2)}, \dots, t_{\sigma(n)})$ para toda permutação $\sigma : \{1, 2, \dots, n\} \mapsto \{1, 2, \dots, n\}$. A coleção $\mathcal{C}$ formada por todas as funções simétricas é um subanel de $\mathcal{F}$. Considere o polinômio $(1 + t_1)(1 + t_2) \cdots (1 + t_n) \in \mathcal{C}$. Tal polinômio contém termos com grau r onde $0 \leq r \leq n$. Podemos então escrever

$$(1 + t_1)(1 + t_2) \cdots (1 + t_n) = 1 + \sigma_1 + \sigma_2 + \cdots + \sigma_n$$

onde σ_i é a soma de todos os monômios de grau i . Cada σ_i (o qual pertence a $\mathcal{C}$) é chamada *i-ésima função simétrica elementar*, e é conhecido o fato que $\mathcal{C}$ é também um anel polinomial nos n geradores independentes $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$; ou seja,

$\mathcal{C} = \mathbb{Z}_2[\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n]$. Note que $\sigma_1 = t_1 + t_2 + \dots + t_n$, $\sigma_2 = \sum_{i < j} t_i t_j$, e, em geral,

$$\sigma_i = \sum_{j_1 < j_2 < \dots < j_i} t_{j_1} t_{j_2} \dots t_{j_i}. \text{ Em particular } \sigma_n = t_1 t_2 \dots t_n.$$

Tome agora qualquer natural $n > 0$, e seja $\mathcal{C}_m$ o grupo aditivo formado por todas as funções simétricas de grau m . Considere o conjunto $\mathcal{L} = \{(i_1, i_2, \dots, i_r)\}$ formado por todas as partições $(i_1, i_2, \dots, i_r)$ de m (ou seja, $i_1 + i_2 + \dots + i_r = m$) com $i_t \leq n, \forall t, 1 \leq t \leq r$. Cada $(i_1, i_2, \dots, i_r) \in \mathcal{L}$ da origem então à função simétrica $\sigma_{i_1} \sigma_{i_2} \dots \sigma_{i_r}$. Decorre do fato acima citado que uma base para o grupo aditivo $\mathcal{C}_m$ é portanto $\{\sigma_{i_1} \cdot \sigma_{i_2} \dots \sigma_{i_r}, (i_1, i_2, \dots, i_r) \in \mathcal{L}\}$.

De particular importância para nós serão certas funções simétricas especiais, as quais descreveremos a seguir. Fixe um natural k (o qual pode ser $\leq n$ ou $> n$), e seja ω uma partição $(i_1, i_2, \dots, i_r)$ de k tal que $r \leq n$. Então cada tal ω dá origem a uma função simétrica de grau k , denotada por S_ω , descrita por

$$S_\omega = \sum_{\substack{j_1 < j_2 < \dots < j_r \\ 1 \leq j_i \leq n}} \sum_{\sigma \in S_r} t_{j_{\sigma(1)}}^{i_1} t_{j_{\sigma(2)}}^{i_2} \dots t_{j_{\sigma(r)}}^{i_r}.$$

Temos então que S_ω pode ser expressa em termos das funções simétricas elementares $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$, e em especial, se $k \leq n$, então S_ω pode ser expressa em termos de $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k$. Mais ainda, se $k \leq n$, é conhecido o fato que a expressão de S_ω como polinomial em termos de $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k$ não depende de n com $n \geq k$.

Por exemplo, se $n \geq 2$, então $S_2(\sigma_1, \sigma_2) = \sigma_1^2$, $S_{1,1}(\sigma_1, \sigma_2) = \sigma_2$. Se $n \geq 3$, então $S_3(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sigma_1^3 + \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_3$, $S_{1,2}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_3$, $S_{1,1,1}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sigma_3$ (vide [7]).

O *splitting principle*, detalhado na Seção 1.7, permite estabelecer uma conexão entre funções simétricas e classes características. De fato se $\eta^r \mapsto V^n$ é um fibrado r -dimensional sobre uma variedade fechada n -dimensional, e se

$$\mathbb{W}(\eta^r) = 1 + v_1 + v_2 + \dots + v_r$$

é sua classe de *Stiefel-Whitney*, então o *splitting principle* nos diz que $\mathbb{W}(\eta^r)$ pode ser considerado na forma fatorada

$$\mathbb{W}(\eta^r) = 1 + v_1 + v_2 + \dots + v_r = (1 + x_1)(1 + x_2) \dots (1 + x_r).$$

Em particular, cada v_i , $1 \leq i \leq r$, é a função simétrica elementar $\sigma_i(x_1, x_2, \dots, x_r)$ (rigorosamente, $f^*(v_i) = \sigma_i(x_1, x_2, \dots, x_r)$, onde f^* é o monomorfismo em cohomologia do *splitting principle*; também aqui o grau algébrico é dado pelo grau cohomológico).

Desta forma, e em sentido contrário, dada qualquer função simétrica

$$p(t_1, t_2, \dots, t_r) \in \mathcal{C} \subset \mathcal{F},$$

sabemos que $p(t_1, t_2, \dots, t_r)$ é uma polinomial nas funções simétricas elementares $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$, digamos, $q(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r)$. Portanto $p(t_1, t_2, \dots, t_r)$ dá origem à polinomial nas classes características $q(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r)$.

Por exemplo, se $p(t_1, t_2, \dots, t_r)$ é um polinômio simétrico e homogêneo de grau n , então $p(t_1, t_2, \dots, t_r) = q(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) = q(v_1, v_2, \dots, v_n)$ é uma soma de monômios nos v_i 's cada qual tendo grau n ; em particular, se $\tau^n \mapsto V^n$ é o fibrado tangente a V^n , cada tal monômio dá origem a um número de *Stiefel-Whitney* de V^n . Portanto se V^n e M^n são variedades fechadas n -dimensionais cobordantes, faz sentido a identidade

$$p(t_1, t_2, \dots, t_r)[V^n]_2 = p(t_1, t_2, \dots, t_r)[M^n]_2,$$

o que rigorosamente significa dizer que

$$q(w_1(V^n), w_2(V^n), \dots, w_n(V^n)) = q(w_1(M^n), w_2(M^n), \dots, w_n(M^n)).$$

Particularmente, se $I = (i_1, i_2, \dots, i_r)$ é uma partição de n , então $S_I[V^n]_2$ é uma soma de números de *Stiefel-Whitney* de V^n , e portanto um invariante de cobordismo. Exemplo: $S_{1,2}[M^3]_2 = (w_1 w_2 + w_3)[M^3]_2$.

1.15 Teorema de Lucas

Em computações envolvendo números característicos, tem bastante importância técnica determinar a paridade de coeficientes binomiais $\binom{a}{b}$. Neste contexto, o *teorema de Lucas*, o qual descreveremos a seguir, é muito útil.

Definição 1.15.1 Seja p um número natural primo. Dado um natural n , definimos a notação p -ádica de n como sendo:

$$n = n_k n_{k-1} \dots n_2 n_1 n_0 = n_k p^k + n_{k-1} p^{k-1} + \dots + n_2 p^2 + n_1 p + n_0, \quad (0 \leq n_i < p).$$

Obs: Quando $p = 2$, temos a notação *diádica* (2-ádica) de n dada por:

$$n = n_k n_{k-1} \dots n_2 n_1 n_0 = n_k 2^k + n_{k-1} 2^{k-1} + \dots + n_2 2^2 + n_1 2 + n_0, \quad (0 \leq n_i < 2).$$

que é equivalente a representar n na base 2 (forma binária). Como cada $n_i = 0$ ou 1, temos que n é dado por uma soma de potências distintas de 2.

Teorema 1.15.2 (Teorema de Lucas) *Seja p um número primo e tome r e c em notação p -ádica:*

$$r = r_k r_{k-1} \dots r_2 r_1 r_0 = r_k p^k + r_{k-1} p^{k-1} + \dots + r_2 p^2 + r_1 p + r_0, \quad (0 \leq r_i < p),$$

$$c = c_k c_{k-1} \dots c_2 c_1 c_0 = c_k p^k + c_{k-1} p^{k-1} + \dots + c_2 p^2 + c_1 p + c_0, \quad (0 \leq c_i < p).$$

Então $\binom{r}{c} \equiv \binom{r_0}{c_0} \binom{r_1}{c_1} \binom{r_2}{c_2} \dots \binom{r_k}{c_k} \pmod{p}$, convencionando-se que $\binom{r}{c} = 0$ se $c > r$. [6] □

Em nossas computações envolvendo números característicos, de fundamental importância será então o

Corolário 1.15.3 *Tome r e c em notação diádica:*

$$r = r_k 2^k + r_{k-1} 2^{k-1} + \cdots + r_2 2^2 + r_1 2 + r_0,$$

$$c = c_k 2^k + c_{k-1} 2^{k-1} + \cdots + c_2 2^2 + c_1 2 + c_0, \quad r_i, c_i = 0 \text{ ou } 1.$$

Sejam $R = \{i \mid r_i = 1\}$ e $C = \{i \mid c_i = 1\}$. Então

$$\binom{r}{c} \equiv 1 \pmod{2} \text{ se, e somente se, } C \subset R.$$

Prova: Basta aplicar o Teorema de *Lucas* observando que

$$\binom{0}{0} \equiv \binom{1}{0} \equiv \binom{1}{1} \equiv 1 \pmod{2} \text{ e } \binom{0}{1} \equiv 0 \pmod{2}.$$

□

Capítulo 2

Involuções Fixando $F^n \cup F^{n-1}$

2.1 Introdução

O objetivo deste capítulo é determinar o valor de $m(n; \{n-1\})$. Conforme anunciado na introdução, mostraremos que $m(n; \{n-1\}) = 2n$. Recordemos que

$$m(n; \{n-1\}) = \max\{m \mid \text{existe involução } (M^m, T) \text{ fixando alguma } F \text{ que não borda e cuja componente maximal é } n\text{-dimensional, e tal que } F \text{ não possui componentes com dimensão } < n-1 \}.$$

Em outras palavras, F é da forma $F^n \cup F^{n-1}$ ou F^n (e sabemos que, pelo Teorema 1.8.5, F^n e F^{n-1} podem ser assumidos conexos), e ainda com F^n ou F^{n-1} não bordante.

Note que a involução $T : \mathbb{RP}^{2n} \mapsto \mathbb{RP}^{2n}$ dada por

$$T[x_0, x_1, \dots, x_{2n}] = [-x_0, -x_1, \dots, -x_n, x_{n+1}, \dots, x_{2n}]$$

fixa $\mathbb{RP}^n \cup \mathbb{RP}^{n-1}$, $\forall n \geq 1$, e ou n é par ou $n-1$ é par, portanto ou $\mathbb{RP}^n$ não borda ou $\mathbb{RP}^{n-1}$ não borda. Este exemplo mostra que, para qualquer $n \geq 1$, $m(n; \{n-1\}) \geq 2n$. Portanto $m(n; \{n-1\}) = 2n$ decorrerá do seguinte:

Teorema 2.1 *Se (M^m, T) é uma involução cujo conjunto de pontos fixos F é da forma $F = F^n \cup F^{n-1}$, e se $m > 2n$, então (M^m, T) borda equivariantemente.*

Com efeito, se (M^m, T) fixa $F = F^n \cup F^{n-1}$, não bordante, então o *fixed-data* de (M^m, T) não borda, e da sequência de *Conner-Floyd* 1.8.1 temos então que (M^m, T) não borda equivariantemente; pelo teorema acima, necessariamente $m \leq 2n$. Então $m(n; \{n-1\}) \leq 2n$, e daí $m(n; \{n-1\}) = 2n$.

Observe ainda que o Teorema 2.1 é, conforme já comentado na introdução, uma extensão do teorema de *Kosniowski-Stong* de [5], o qual diz que se (M^m, T) fixa $F = F^n$

e se $m > 2n$ então (M^m, T) borda equivariantemente; ou seja, mostraremos que tal fato continua verdadeiro se, além de F^n , F possui componentes $(n-1)$ -dimensionais. Nossa estratégia se respaldará na seguinte abordagem: suponha

$$(M^m, T) \quad \text{fixando} \quad F = F^n \cup F^{n-1}, \quad \text{e sejam} \quad \eta \mapsto F^n, \quad \mu \mapsto F^{n-1},$$

os respectivos fibrados normais em M^m . Note que η é $(m-n)$ -dimensional e μ é $(m-n+1)$ -dimensional. Pelo Teorema 1.8.2, temos que os números de *Whitney* dos fibrados-linha

$$\lambda \mapsto \mathbb{RP}(\eta), \quad \xi \mapsto \mathbb{RP}(\mu)$$

são iguais. Genericamente, tais números assumem a forma

$$W_{i_1} W_{i_2} \cdots W_{i_r} c^t [A]_2,$$

onde $i_1 + i_2 + \cdots + i_r + t = m-1$, c é a classe de *Stiefel-Whitney* de λ (ou ξ), W_{i_i} são classes de *Stiefel-Whitney* de $\mathbb{RP}(\eta)$ (ou $\mathbb{RP}(\mu)$), e $A = \mathbb{RP}(\eta)$ (ou $A = \mathbb{RP}(\mu)$), sendo que estas classes são fornecidas pelo Teorema de *Borel-Hirzebruch* (1.6.6). A manipulação das mesmas é viabilizada pelo conhecimento da estrutura do anel de cohomologia $H^*(\mathbb{RP}(\eta), \mathbb{Z}_2)$, detalhada na Seção 1.6. Em particular, se $p(c, W_1, W_2, \dots, W_{m-1})$ é uma polinomial qualquer homogênea de grau $m-1$ nas classes $W_{i's}$ e c , temos que

$$p(c, W_1, W_2, \dots, W_{m-1})[\mathbb{RP}(\eta)]_2 = p(c, W_1, W_2, \dots, W_{m-1})[\mathbb{RP}(\mu)]_2,$$

onde no lado esquerdo as classes correspondem a $\mathbb{RP}(\eta)$ e no lado direito a $\mathbb{RP}(\mu)$. O que faremos então é utilizar certas polinomiais adequadas (e especiais) $p(c, W_1, \dots, W_{m-1})$ na equação acima de tal sorte que $p(c, W_1, W_2, \dots, W_{m-1})[\mathbb{RP}(\mu)]_2$ seja zero (por razões dimensionais), enquanto que $p(c, W_1, W_2, \dots, W_{m-1})[\mathbb{RP}(\eta)]_2$ reproduza um número genérico de *Whitney* de $\eta \mapsto F^n$. Isto acarretará que todos os números de *Whitney* de η são nulos, e então η borda como fibrado. O Teorema 1.8.4 nos dirá então que (M^m, T) é cobordante a uma involução (W^m, T) fixando somente $\mu \mapsto F^{n-1}$. Como $m > 2n > 2(n-1)$, o teorema de *Kosniowski-Stong* concluirá que (W^m, T) (e portanto (M^m, T)) borda equivariantemente.

As polinomiais acima citadas serão obtidas com o auxílio de certas polinomiais básicas nos $W_{i's}$ e c , denotadas por $W[r]_i$, as quais foram introduzidas por *Stong e Pergher* em [12]; tais polinomiais foram também crucialmente utilizadas em [11] e [10].

Na Seção 2.2, descreveremos as polinomiais $W[r]_i$, e na Seção 2.3 demonstraremos o Teorema 2.1.

2.2 Classes características especiais

Seja $\eta^k \mapsto F^n$ fibrado vetorial k -dimensional sobre a variedade fechada n -dimensional F^n , e seja $\lambda \mapsto \mathbb{RP}(\eta^k)$ o fibrado linha usual. Denotemos as classes de *Stiefel-Whitney*:

$$\begin{aligned}\mathbb{W}(F^n) &= 1 + w_1 + w_2 + \cdots + w_n \\ \mathbb{W}(\eta^k) &= 1 + v_1 + v_2 + \cdots + v_k \\ \mathbb{W}(\lambda) &= 1 + c\end{aligned}$$

Vimos em 1.6.6 que

$$\begin{aligned}\mathbb{W}(\mathbb{RP}(\eta^k)) &= 1 + W_1 + W_2 + \cdots + W_{n+k-1} = \\ &= (1 + w_1 + \cdots + w_n) \{ (1 + c)^k + (1 + c)^{k-1}v_1 + \cdots + (1 + c)v_{k-1} + v_k \}.\end{aligned}$$

Note que cada W_i é uma polinomial homogênea de grau i nos $w_{j's}, v_{t's}$ e c , obtida coletando-se a parte de grau i em

$$\left(\sum_{j=1}^n w_j \right) \left(\sum_{i=0}^k (1 + c)^{k-i} v_i \right).$$

Agora, temos que $1 + c$ tem inverso multiplicativo em $H^*(\mathbb{RP}(\eta^k), \mathbb{Z}_2)$, e

$$\frac{1}{1 + c} = 1 + c + c^2 + \cdots + c^{n+k-1},$$

uma vez que $c^l = 0$, se $l > n + k - 1 = \text{dimensão}(\mathbb{RP}(\eta^k))$.

Então, para qualquer $d \in \mathbb{Z}$, temos que $(1 + c)^d$ é da forma

$$1 + \varepsilon_1 c + \varepsilon_2 c^2 + \cdots + \varepsilon_{n+k-1} c^{n+k-1},$$

onde $\varepsilon_i = 0$ ou 1 . Segue que, para qualquer $d \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}(1 + c)^d \mathbb{W}(\mathbb{RP}(\eta^k)) &= \left(\sum_{j=1}^n w_j \right) \left(\sum_{i=0}^k (1 + c)^{k-i+d} v_i \right) = \\ &= (1 + \varepsilon_1 c + \varepsilon_2 c^2 + \cdots + \varepsilon_{n+k-1} c^{n+k-1}) (1 + W_1 + W_2 + \cdots + W_{n+k-1})\end{aligned}$$

é tal que sua parte de grau i consiste em uma polinomial

$$p(c, W_1, \dots, W_{n+k-1})$$

homogênea de grau i nos $W_{i's}$ e c . Em particular denotando-se

$$(1 + c)^d \mathbb{W}(\mathbb{RP}(\eta^k)) = 1 + U_1 + U_2 + \cdots + U_{n+k-1},$$

onde U_i é a parte homogênea de grau i , temos que se $t + i_1 + i_2 + \cdots + i_q = n + k - 1$, então

$$c^t U_{i_1} U_{i_2} \cdots U_{i_q} [\mathbb{RP}(\eta^k)]_2$$

é um número característico de $\lambda \mapsto \mathbb{RP}(\eta^k)$ (ou seja, um invariante de bordismo de $\lambda \mapsto \mathbb{RP}(\eta^k)$), observando que

$$c^t U_{i_1} U_{i_2} \cdots U_{i_q}$$

é uma polinomial de grau $(n + k - 1)$ nos $W_{j's}$ e c .

Por exemplo, se $d = -2$, então

$$\frac{1}{(1+c)^2} \mathbb{W}(\mathbb{RP}(\eta^k)) = (1 + c + c^2 + c^4 + \cdots)(1 + W_1 + W_2 + W_3 + \cdots),$$

portanto

$$\begin{aligned} U_1 &= W_1, & U_2 &= c^2 + W_2, & U_3 &= W_3 + c^2 W_1, \\ U_4 &= W_4 + c^2 W_2 + c^4, & U_5 &= W_5 + c^2 W_3 + c^4 W_1. \end{aligned}$$

Neste contexto, *Stong e Pergher* introduziram em [12] as classes $W[r]$, $r \geq 0$. Especificamente

$$W[r] = (1 + c)^{r-k} \mathbb{W}(\mathbb{RP}(\eta^k)) = \frac{1}{(1+c)^{k-r}} \mathbb{W}(\mathbb{RP}(\eta^k)).$$

A parte de grau i de $W[r]$ foi denotada por $W[r]_i$, ou seja,

$$W[r] = 1 + W[r]_1 + W[r]_2 + \cdots + W[r]_{n+k-1}.$$

Em outras palavras, $W[r]_i$ é obtida coletando-se os termos de grau i em

$$\begin{aligned} W[r] &= (1 + w_1 + \cdots + w_n) \left((1+c)^r + (1+c)^{r-1} v_1 + \cdots + (1+c) v_{r-1} + v_r + \frac{v_{r+1}}{1+c} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{v_{r+2}}{(1+c)^2} + \cdots + \frac{v_{r+i}}{(1+c)^i} + \cdots + \frac{v_k}{(1+c)^{k-r}} \right), \end{aligned}$$

e cada tal $W[r]_i$ é portanto uma polinomial homogênea de grau i nas classes $W_{j's}$ e c .

Em particular, sejam $\eta^k \mapsto F^n$ e $\mu^l \mapsto V^m$ fibrados k e l -dimensionais, respectivamente, sobre as variedades fechadas F^n e V^m , com $k+n = l+m$ e tal que os respectivos fibrados linhas $\lambda \mapsto \mathbb{RP}(\eta^k)$ e $\xi \mapsto \mathbb{RP}(\mu^l)$ sejam cobordantes.

Seja $t + i_1 + i_2 + \cdots + i_q = k + n - 1 = l + m - 1$ partição de $k + n - 1 = l + m - 1$. Tome números $0 \leq r_1, r_2, \dots, r_q$. Para cada r_j , considere $s_j = l + r_j - k$. Então $k - r_j = l - s_j = d_j$, e portanto, se

$$\mathbb{W}(\mathbb{RP}(\eta^k)) = 1 + W_1 + \cdots + W_{n+k-1} \quad \text{e} \quad \mathbb{W}(\mathbb{RP}(\mu^l)) = 1 + W'_1 + \cdots + W'_{n+k-1},$$

e $W[r_j]_{i_j}$ (coletada em $\frac{\mathbb{W}(\mathbb{RP}(\eta^k))}{(1+c)^{k-r_j}}$) é a polinomial $p(c, W_1, \dots, W_{n+k-1})$, então $W[s_j]_{i_j}$ (coletada em $\frac{\mathbb{W}(\mathbb{RP}(\mu^l))}{(1+c)^{l-s_j}}$) é a mesma polinomial $p(c, W'_1, \dots, W'_{n+k-1})$.

Portanto temos que

$$c^t W[r_1]_{i_1} W[r_2]_{i_2} \cdots W[r_q]_{i_q} [\mathbb{RP}(\eta^k)]_2 = c^t W[s_1]_{i_1} W[s_2]_{i_2} \cdots W[s_q]_{i_q} [\mathbb{RP}(\mu^l)]_2.$$

Em nossas computações, papel fundamental será desempenhado por algumas $W[r]_i$ especiais, especificamente $W[r]_{2r-1}, W[r]_{2r}, W[r]_{2r+1}, W[r]_{2r+2}$. A razão por trás disso é que tais classes satisfazem propriedades especiais, as quais simplificam certas computações. Tais propriedades são:

- 1) $W[r]_{2r-1} = w_{r-1}c^r + \text{termos envolvendo } c^x \text{ onde } x < r.$
- 2) $W[r]_{2r} = w_rc^r + \text{termos envolvendo } c^x \text{ onde } x < r.$
- 3) $W[r]_{2r+1} = (w_{r+1} + v_{r+1})c^r + \text{termos envolvendo } c^x \text{ onde } x < r.$
- 4) $W[r]_{2r+2} = v_{r+1}c^{r+1} + \text{termos envolvendo } c^x \text{ onde } x < r + 1.$

Justifiquemos a propriedade 1). Sabemos que $W[r]_{2r-1}$ é obtida coletando-se a parte de grau $2r - 1$ em $W[r]$, e que tal parte consiste de monômios os quais tem a forma $U^j c^x$, onde $j + x = 2r - 1$ e U^j é uma classe de cohomologia proveniente de $H^j(F^n, \mathbb{Z}_2)$. Note que a parte de $W[r]$ dada por $(1+c)^{r-1}v_1 + (1+c)^{r-2}v_2 + \cdots + v_r$ somente contribui na formação de monômios $U^j c^x$ onde $x < r$. Por outro lado cada termo

$$\frac{v_{r+i}}{(1+c)^i} \quad (1 \leq i \leq k-r) \quad \text{de} \quad W[r]$$

tem todos os seus monômios divisíveis por v_{r+i} ; desta forma, tal termo contribui na formação de monômios $U^j c^x$ de tal sorte que v_{r+i} sempre divide U^j . Ou seja, $j \geq r + i \geq r + 1$, e como $j + x = 2r - 1$, segue que $x < r$. Em outras palavras, monômios $U^j c^x$ de $W[r]_{2r-1}$ com $x \geq r$ só podem ser coletados em

$$(1 + w_1 + w_2 + \cdots + w_n)(1+c)^r$$

Agora em $(1+c)^r$, o único termo c^x com $x \geq r$ é c^r . Segue que o único monômio $U^j c^x$ em $W[r]_{2r-1}$ com $x \geq r$ é $w_{r-1}c^r$.

Os mesmos argumentos fornecem a propriedade 2).

Quanto a propriedade 3), note inicialmente que novamente $(1+c)^{r-1}v_1 + \cdots + v_r$ somente contribui com termos envolvendo c^x com $x < r$. Por outro lado, se $i \geq 2$, o termo $\frac{v_{r+i}}{(1+c)^i}$ tem todos os seus monômios divisíveis por v_{r+i} , e portanto os monômios $U^j c^x$ provenientes do mesmo são tais que v_{r+i} divide U^j . Então $j \geq r + 2$, e como

$j + x = 2r + 1$, segue que $x < r$. Portanto os monômios $U^j c^x$ de $W[r]_{2r+1}$ com $x \geq r$ devem ser obtidos em

$$(1 + w_1 + w_2 + \cdots + w_n) \left((1 + c)^r + \frac{v_{r+1}}{1 + c} \right).$$

Como antes, o único tal monômio proveniente de

$$(1 + w_1 + w_2 + \cdots + w_n)(1 + c)^r$$

é $w_{r+1} c^r$. Por outro lado, termos da forma $U^j c^x$ com $U^j = w_l v_{r+1}$ e $l \geq 1$ têm necessariamente $x < r$. Segue que o único monômio $U^j c^x$ com $x \geq r$ proveniente de

$$(1 + w_1 + w_2 + \cdots + w_n) \left(\frac{v_{r+1}}{1 + c} \right)$$

é $v_{r+1} c^r$.

A propriedade 4) é justificada usando os mesmos argumentos.

2.3 Prova do Teorema 2.1

Temos então involução (M^m, T) fixando $F = F^n \cup F^{n-1}$ com $m > 2n$, e desejamos mostrar que (M^m, T) borda equivariantemente. Conforme estratégia descrita na introdução deste capítulo, se $(\eta \mapsto F^n) \cup (\mu \mapsto F^{n-1})$ é o *fixed-data*, bastará então provar que $\eta \mapsto F^n$ borda como fibrado, o que é equivalente a mostrar que um número genérico de *Whitney*

$$w_{i_1} w_{i_2} \cdots w_{i_t} v_{j_1} v_{j_2} \cdots v_{j_s} [F^n]_2$$

é zero, onde $i_1 + i_2 + \cdots + i_t + j_1 + j_2 + \cdots + j_s = n$,

$$\mathbb{W}(F^n) = 1 + w_1 + w_2 + \cdots + w_n, \quad \mathbb{W}(\eta) = 1 + v_1 + v_2 + \cdots + v_{m-n}$$

são as classes de *Stiefel-Whitney*.

Ainda conforme descrito na introdução, isto será obtido considerando polinomiais adequadas $p(c, W_1, \dots, W_{m-1})$ na equação

$$p(c, W_1, \dots, W_{m-1})[\mathbb{RP}(\eta)]_2 = p(c, W_1, \dots, W_{m-1})[\mathbb{RP}(\mu)]_2,$$

de tal maneira que

$$p(c, W_1, \dots, W_{m-1})[\mathbb{RP}(\eta)]_2 = w_{i_1} w_{i_2} \cdots w_{i_t} v_{j_1} v_{j_2} \cdots v_{j_s} [F^n]_2$$

e $p(c, W_1, \dots, W_{m-1})[\mathbb{RP}(\mu)]_2$ seja zero por razões dimensionais.

Conforme descrito na seção anterior, uma classe $W[r]_i$ associada ao fibrado-linha $\xi \mapsto \mathbb{RP}(\mu)$ produz a mesma polinomial nos $W_{i's}$ e c que a classe $W[r-1]_i$ associada ao fibrado-linha $\lambda \mapsto \mathbb{RP}(\eta)$; de fato, com a notação da seção anterior,

$$s_j = l + r_j - k \Rightarrow s_j = (m - n) + r - (m - n + 1) = r - 1.$$

Com esse principio em mãos introduzimos as classes

$$\widetilde{W}_{2r} = W[r]_{2r} + W[r]_{2r-1}W[2]_1 \quad \text{considerada sobre } \xi \mapsto \mathbb{RP}(\mu) \text{ e}$$

$$\overline{W}_{2r} = W[r-1]_{2r} + W[r-1]_{2r-1}W[1]_1 \quad \text{considerada sobre } \lambda \mapsto \mathbb{RP}(\eta).$$

Então $\widetilde{W}_{2r}$ e $\overline{W}_{2r}$ produzem as mesmas polinomiais, e portanto a polinomial $p(c, W_1, \dots, W_{m-1})$ dada por

$$c^{m-2n-1} \widetilde{W}_{2i_1} \widetilde{W}_{2i_2} \cdots \widetilde{W}_{2i_t} W[j_1]_{2j_1} W[j_2]_{2j_2} \cdots W[j_s]_{2j_s}$$

considerada sobre $\xi \mapsto \mathbb{RP}(\mu)$, coincide com a polinomial dada por

$$c^{m-2n-1} \overline{W}_{2i_1} \overline{W}_{2i_2} \cdots \overline{W}_{2i_t} W[j_1-1]_{2j_1} W[j_2-1]_{2j_2} \cdots W[j_s-1]_{2j_s}$$

considerada sobre $\lambda \mapsto \mathbb{RP}(\eta)$. Portanto nossa tarefa consistirá em mostrar os dois fatos abaixo:

- i) $p(c, W_1, \dots, W_{m-1})[\mathbb{RP}(\eta)]_2 = w_{i_1} w_{i_2} \cdots w_{i_t} v_{j_1} v_{j_2} \cdots v_{j_s} [F^n]_2$;
- ii) $p(c, W_1, \dots, W_{m-1})[\mathbb{RP}(\mu)]_2 = 0$.

Denotemos por

$$\mathbb{W}(F^{n-1}) = 1 + \theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_{n-1}, \quad \mathbb{W}(\mu) = 1 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{m-n+1}$$

as classes de *Stiefel-Whitney*. Então

$$\mathbb{W}(\mathbb{RP}(\eta)) = (1 + w_1 + \cdots + w_n) \{ (1 + c)^{m-n} + (1 + c)^{m-n-1} v_1 + \cdots + v_{m-n} \} \text{ e}$$

$$\mathbb{W}(\mathbb{RP}(\mu)) = (1 + \theta_1 + \cdots + \theta_{n-1}) \{ (1 + c)^{m-n-1} + (1 + c)^{m-n-2} u_1 + \cdots + u_{m-n+1} \}.$$

Então $W[2]_1$, sobre $\xi \mapsto \mathbb{RP}(\mu)$ é coletado em

$$\frac{1}{(1+c)^{(m-n+1)-2}} \mathbb{W}(\mathbb{RP}(\mu)) = (1 + \theta_1 + \cdots + \theta_{n-1}) \{ (1+c)^2 + (1+c)u_1 + u_2 + \frac{u_3}{1+c} + \cdots \}$$

e portanto $W[2]_1 = \theta_1 + u_1$; enquanto que $W[1]_1$ sobre $\lambda \mapsto \mathbb{RP}(\eta)$ é coletado em

$$\frac{1}{(1+c)^{m-n-1}} \mathbb{W}(\mathbb{RP}(\eta)) = (1 + w_1 + \cdots + w_n) \{ (1+c) + v_1 + \frac{v_2}{1+c} + \cdots \},$$

ou seja, $W[1]_1 = c + w_1 + v_1$. Agora, pela Propriedade 2 da seção anterior, $W[r]_{2r}$ sobre ξ é dada por

$$W[r]_{2r} = \theta_r c^r + \text{termos envolvendo } c^x \text{ com } x < r,$$

enquanto pela Propriedade 1, $W[r]_{2r-1}$ sobre ξ é

$$W[r]_{2r-1} = \theta_{r-1} c^r + \text{termos envolvendo } c^x \text{ com } x < r.$$

Segue que

$$\begin{aligned} \widetilde{W}_{2r} &= W[r]_{2r} + W[r]_{2r-1}W[2]_1 = \\ &= (\theta_r c^r + \text{termos com } c^{x < r}) + (\theta_{r-1} c^r + \text{termos com } c^{x < r})(\theta_1 + u_1) = \\ &= [\theta_r + \theta_{r-1}(\theta_1 + u_1)]c^r + \text{termos com } c^{x < r}. \end{aligned}$$

Agora, pela Propriedade 4 da seção anterior, $W[r-1]_{2r}$ sobre λ é dada por

$$W[r-1]_{2r} = v_r c^r + \text{termos envolvendo } c^x \text{ com } x < r,$$

enquanto pela Propriedade 3, $W[r-1]_{2r-1}$ sobre λ é

$$W[r-1]_{2r-1} = (w_r + v_r)c^{r-1} + \text{termos envolvendo } c^x \text{ com } x < r-1.$$

Segue que

$$\begin{aligned} \overline{W}_{2r} &= W[r-1]_{2r} + W[r-1]_{2r-1}W[1]_1 = \\ &= (v_r c^r + \text{termos com } c^{x < r}) + \\ &+ ((w_r + v_r)c^{r-1} + \text{termos com } c^{x < r-1})(c + w_1 + v_1) = \\ &= [v_r + w_r + v_r]c^r + \text{termos com } c^{x < r} = \\ &= w_r c^r + \text{termos com } c^{x < r}. \end{aligned}$$

Logo, $p(c, W_1, \dots, W_{m-1})$ sobre $\xi \mapsto \mathbb{RP}(\mu)$, que é dado por:

$$c^{m-2n-1} \widetilde{W}_{2i_1} \widetilde{W}_{2i_2} \cdots \widetilde{W}_{2i_t} W[j_1]_{2j_1} W[j_2]_{2j_2} \cdots W[j_s]_{2j_s}$$

tem a forma (usando novamente a Propriedade 2 nos $W[j_i]_{2j_i}$)

$$\begin{aligned} c^{m-2n-1} &\cdot [(\theta_{i_1} + \theta_{i_1-1}(\theta_1 + u_1))c^{i_1} + \text{termos com potências em } c \text{ menores que } i_1] \cdot \\ &\cdot [(\theta_{i_2} + \theta_{i_2-1}(\theta_1 + u_1))c^{i_2} + \text{termos com potências em } c \text{ menores que } i_2] \cdot \\ &\cdots \\ &\cdot [(\theta_{i_t} + \theta_{i_t-1}(\theta_1 + u_1))c^{i_t} + \text{termos com potências em } c \text{ menores que } i_t] \cdot \\ &\cdot (\theta_{j_1} c^{j_1} + \text{termos com potências em } c \text{ menores que } j_1) \cdot \\ &\cdot (\theta_{j_2} c^{j_2} + \text{termos com potências em } c \text{ menores que } j_2) \cdot \\ &\cdots \\ &\cdot (\theta_{j_s} c^{j_s} + \text{termos com potências em } c \text{ menores que } j_s). \end{aligned}$$

Note que cada monômio na expressão acima (excluindo o termo c^{m-2n-1} que multiplica tudo) tem a forma $A_p c^t$, onde A_p provem do grupo de cohomologia $H^p(F^{n-1}, \mathbb{Z}_2)$ e $p+t=2n$ (pois $p(c, W_1, \dots, W_{m-1})$ tem grau $m-1$, e $(m-1)-(m-2n-1)=2n$). Além disso o monômio $A_p c^t$ com t máximo é claramente

$$\begin{aligned} & (\theta_{i_1} + \theta_{i_1-1}(\theta_1 + u_1))c^{i_1} \cdots (\theta_{i_t} + \theta_{i_t-1}(\theta_1 + u_1))c^{i_t} \cdot \theta_{j_1}c^{j_1} \cdots \theta_{j_s}c^{j_s} = \\ &= [\theta_{i_1-1}(\theta_1 + u_1)] \cdots [\theta_{i_t-1}(\theta_1 + u_1)] \cdot \theta_{j_1} \cdot \theta_{j_2} \cdots \theta_{j_s} \cdot c^{i_1+\cdots+i_t+j_1+\cdots+j_s} = \\ &= [\theta_{i_1-1}(\theta_1 + u_1)] \cdots [\theta_{i_t-1}(\theta_1 + u_1)] \cdot \theta_{j_1} \cdot \theta_{j_2} \cdots \theta_{j_s} \cdot c^n = \\ &= A_n c^n \end{aligned}$$

Portanto, a expressão acima é dada por

$$\begin{aligned} & c^{m-2n-1} \cdot (A_n c^n + \text{monômios } A_p c^t \text{ com } t < n) = \\ &= A_n c^{m-n-1} + (\text{monômios } A_p c^{m-2n-1+t} \text{ com } t < n). \end{aligned}$$

Agora em cada monômio $A_p c^{m-2n-1+t}$ com $t < n$, temos $p + (m-2n-1) + t = m-1$, logo $p = 2n-t$; ou seja, $p > n$. Como A_n e cada tal A_p provêm de $H^*(F^{n-1}, \mathbb{Z}_2)$, por razões dimensionais, $A_n = 0$ e $A_p = 0$. Portanto

$$p(c, W_1, \dots, W_{m-1})[\mathbb{RP}(\mu)]_2 = 0.$$

Provemos agora que

$$p(c, W_1, \dots, W_{m-1})[\mathbb{RP}(\eta)]_2 = w_{i_1} w_{i_2} \cdots w_{i_t} v_{j_1} v_{j_2} \cdots v_{j_s} [F^n]_2,$$

o que encerrará a demonstração.

Temos que $p(c, W_1, \dots, W_{m-1})$ sobre $\lambda \mapsto \mathbb{RP}(\eta)$, que é dado por:

$$c^{m-2n-1} \overline{W}_{2i_1} \overline{W}_{2i_2} \cdots \overline{W}_{2i_t} W[j_1-1]_{2j_1} W[j_2-1]_{2j_2} \cdots W[j_s-1]_{2j_s}$$

tem a forma (usando novamente a Propriedade 4 nos $W[j_i-1]_{2j_i}$)

$$\begin{aligned} & c^{m-2n-1} \cdot [(w_{i_1} c^{i_1} + \text{termos com potências em } c \text{ menores que } i_1) \cdot \\ & \cdot [(w_{i_2} c^{i_2} + \text{termos com potências em } c \text{ menores que } i_2) \cdot \\ & \cdot \cdots \\ & \cdot [w_{i_t} c^{i_t} + \text{termos com potências em } c \text{ menores que } i_t) \cdot \\ & \cdot (v_{j_1} c^{j_1} + \text{termos com potências em } c \text{ menores que } j_1) \cdot \\ & \cdot (v_{j_2} c^{j_2} + \text{termos com potências em } c \text{ menores que } j_2) \cdot \\ & \cdot \cdots \\ & \cdot (v_{j_s} c^{j_s} + \text{termos com potências em } c \text{ menores que } j_s). \end{aligned}$$

Usando a mesma argumentação anterior, cada monômio na expressão acima (excluindo o termo c^{m-2n-1}) tem a forma $A_p c^t$, onde A_p provem do grupo de cohomologia $H^p(F^{n-1}, \mathbb{Z}_2)$ e $p+t=2n$. Neste caso, o monômio $A_p c^t$ com t máximo é

$$\begin{aligned}
(w_{i_1}c^{i_1}) \cdots (w_{i_t}c^{i_t}) \cdot (v_{j_1}c^{j_1}) \cdots v_{j_s}c^{j_s} &= w_{i_1} \cdots w_{i_t}v_{j_1} \cdot v_{j_2} \cdots v_{j_s} \cdot c^{i_1+\cdots+i_t+j_1+\cdots+j_s} \\
&= w_{i_1} \cdots w_{i_t}v_{j_1} \cdot v_{j_2} \cdots v_{j_s} \cdot c^n \\
&= A_n c^n.
\end{aligned}$$

Portanto, os monômios restantes $A_p c^t$ são tais que $t < n$; como $p + t = 2n$, segue que $p > n$. Por razões dimensionais, segue que cada tal $A_p = 0$. Concluimos que

$$\begin{aligned}
p(c, W_1, \dots, W_{m-1}) &= c^{m-2n-1}(w_{i_1} \cdots w_{i_t}v_{j_1} \cdots v_{j_s}c^n) = \\
&= w_{i_1} \cdots w_{i_t}v_{j_1} \cdots v_{j_s}c^{m-n-1} \in H^{m-1}(\mathbb{RP}(\eta), \mathbb{Z}_2).
\end{aligned}$$

Lembrando que $H^*(\mathbb{RP}(\eta), \mathbb{Z}_2)$ é um $H^*(F^n, \mathbb{Z}_2)$ -módulo livre gerado por

$$1, c, c^2, \dots, c^{m-n-1}, \quad \text{temos que} \quad w_{i_1} \cdots w_{i_t}v_{j_1} \cdots v_{j_s}c^{m-n-1}$$

é zero (em $H^{m-1}(\mathbb{RP}(\eta), \mathbb{Z}_2)$) se e somente se $w_{i_1} \cdots w_{i_t}v_{j_1} \cdots v_{j_s}$ é zero (em $H^n(F^n, \mathbb{Z}_2)$). Como estamos assumindo F^n conexo, $\mathbb{RP}(\eta)$ também é conexo, e portanto

$$H^n(F^n, \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2 \quad \text{e} \quad H^{m-1}(\mathbb{RP}(\eta), \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2.$$

Concluimos que

$$w_{i_1} \cdots w_{i_t}v_{j_1} \cdots v_{j_s}c^{m-n-1}[\mathbb{RP}(\eta)]_2 = w_{i_1} \cdots w_{i_t}v_{j_1} \cdots v_{j_s}[F^n]_2$$

e portanto

$$p(c, W_1, \dots, W_{m-1})[\mathbb{RP}(\eta)]_2 = w_{i_1} \cdots w_{i_t}v_{j_1} \cdots v_{j_s}[F^n]_2$$

□

Capítulo 3

Involuções Fixando $F^n \cup F^2$

3.1 Introdução

O objetivo deste capítulo é mostrar que $m(n; \{2\}) = \max\{2n, m(n-2) + 4\}$, onde $m(n-2)$ é o limitante de *Stong e Pergher* detalhado na Seção 11 do Capítulo 1. Lembremos que

$$m(n; \{2\}) = \max\{m \mid \text{existe involução } (M^m, T) \text{ fixando alguma } F \text{ que não borda, e tal que } F \text{ não possui componentes com dimensões diferentes de 2 e de } n\}.$$

Em outras palavras, F é da forma $F^n \cup F^2$ ou F^n , com F não bordante, e novamente sabemos que F^n e F^2 podem ser assumidos conexos. O caso $n = 3$ será descartado, uma vez que $F^3 \cup F^2$ é um caso particular do capítulo anterior, ou seja, $m(3; \{2\}) = 6$ (note que nesse caso $m(n-2) + 4 = 2n$). Desta forma, suporemos daqui para frente que $n > 3$.

É interessante observar que, dependendo de n , podemos ter: $2n < m(n-2) + 4$, $2n > m(n-2) + 4$ ou $2n = m(n-2) + 4$. De fato, se denotamos $n = 2^p q$, onde $p \geq 0$ e $q \geq 1$, com q ímpar, temos $2n = m(n-2) + 4$ se $q = p + 1$, $2n < m(n-2) + 4$ se $p \geq q$ e $2n > m(n-2) + 4$ se $p < q - 1$ (vide Seção 11 do Capítulo 1).

Seja agora $n > 3$, fixo. Notemos inicialmente que existe involução (M^m, T) fixando F da forma $F^n \cup F^2$ não bordante para $m = 2n$ e $m = m(n-2) + 4$. De fato, como $n > 3$ podemos tomar F^n não bordante, lembrando que somente para $n = 1$ e 3 qualquer F^n borda. Considere $(F^n \times F^n, T)$, $T(x, y) = (y, x)$, a qual tem *fixed-data* $\tau \mapsto F^n$, onde τ é o fibrado tangente a F^n . Tome agora qualquer F^2 que borda (por exemplo, a esfera S^2) e seja $\mathbb{R}^{2n-2} \mapsto F^2$ o fibrado trivial $(2n-2)$ -dimensional sobre F^2 , o qual borda. Então um argumento idêntico ao do Teorema 1.8.4 (usando a sequência de *Conner e Floyd*) mostra que existe involução (W^{2n}, S) , cobordante a $(F^n \times F^n, T)$, cujo *fixed-data* é $(\tau \mapsto F^n) \cup (\mathbb{R}^{2n-2} \mapsto F^2)$. Isto exhibe o exemplo para $m = 2n$.

Por outro lado, em [12], conforme mencionado no Capítulo 1, Seção 11, foi construído um exemplo maximal $(M^{m(n-2)}, T)$ cujo conjunto de pontos fixos F é da forma $F = F^{n-2} \cup \{p\}$, p =ponto. Considere em $M^{m(n-2)} \times \mathbb{RP}^2 \times \mathbb{RP}^2$ a involução

$$S(m, x, y) = (T(m), y, x).$$

Então S fixa $(F^{n-2} \cup \{p\}) \times \mathbb{RP}^2 = (F^{n-2} \times \mathbb{RP}^2) \cup (\{p\} \times \mathbb{RP}^2)$, que é da forma $F^n \cup F^2$ com $F^2 = \mathbb{RP}^2$ não bordante. Isto exhibe o exemplo para $m = m(n-2) + 4$.

Os exemplos acima mostram que para provar nosso resultado é suficiente provar o seguinte fato: para qualquer $n > 3$, se (M^m, T) é involução fixando $F = F^n \cup F^2$ não bordante, então ou $m \leq 2n$ ou $m \leq m(n-2) + 4$. Agora, denote por

$$(\mu \mapsto F^n) \cup (\eta \mapsto F^2)$$

o *fixed-data* de (M^m, T) , e suponha que $\eta \mapsto F^2$ borda como fibrado; em particular, F^2 borda e portanto F^n não borda. Então o Teorema 1.8.4 nos diz que (M^m, T) é equivariantemente cobordante a uma involução (W^m, S) cujo *fixed-data* é $\mu \mapsto F^n$. Como F^n não borda, $\mu \mapsto F^n$ não borda e portanto (M^m, T) não borda. Pelo teorema de Kosniowski e Stong de [5], segue que $m \leq 2n$. Em outras palavras, podemos supor a partir daqui que $\eta \mapsto F^2$ não borda. Nosso resultado ficará então completamente estabelecido após provarmos o seguinte

Teorema 3.1 *Seja (M^m, T) involução fixando $F = F^n \cup F^2$ (não necessariamente não bordante), e suponha que o fibrado normal $\eta \mapsto F^2$ não borda. Então $m \leq m(n-2) + 4$.*

Nota: Observe que o teorema acima prova um pouco mais do que de fato necessitamos, uma vez que não é necessário supor $F^n \cup F^2$ não bordante (embora isto esteja também contemplado no teorema), mas apenas $\eta \mapsto F^2$ não bordante. Ou seja, o resultado também é verdadeiro quando $F^n \cup F^2$ borda, mas $\eta \mapsto F^2$ não borda.

Esse teorema segue a filosofia do resultado de Stong e Pergher de [12]: se (M^m, T) fixa $F^n \cup \{p\}$, p =ponto, então $m \leq m(n)$. Com efeito, neste caso, como p não borda, o fibrado normal $\eta \mapsto \{p\}$ automaticamente não borda. Conforme citado anteriormente, a técnica de Stong e Pergher consistiu em trabalhar com equações do tipo

$$p(c, W_1, \dots, W_{m-1})[\mathbb{RP}(\eta)]_2 = p(c, W_1, \dots, W_{m-1})[\mathbb{RP}(\mu)]_2.$$

Ocorre que $\eta \mapsto \{p\}$ é trivial, portanto $\mathbb{RP}(\eta)$ neste caso é $\mathbb{RP}^{m-1}$, e o fibrado-linha usual $\lambda \mapsto \mathbb{RP}(\eta)$ se reduz neste caso ao fibrado-linha canônico $\lambda \mapsto \mathbb{RP}^{m-1}$, cujos números característicos são explicitamente conhecidos. Se $\mu \mapsto F^n$ é o fibrado normal e se $\mathbb{W}(\mu) = 1 + v_1 + \dots + v_{m-n}$, $\mathbb{W}(F^n) = 1 + w_1 + \dots + w_n$, então $p(c, W_1, \dots, W_{m-1})[\mathbb{RP}(\mu)]_2$

produzem polinomiais avaliadas em $[\mathbb{RP}(\mu)]_2$ nas incógnitas $c, w_{i's}, v_{j's}$. *Stong e Pergher* consideraram então polinomiais especiais $p(c, W_1, \dots, W_{m-1})$ de modo que

$$p(c, W_1, \dots, W_{m-1})[\mathbb{RP}(\eta)]_2 = 1,$$

o que produziu equações do tipo

$$F(c, w_1, \dots, w_n, v_1, \dots, v_{m-n})[\mathbb{RP}(\mu)]_2 = 1$$

e após reduções, equações do tipo

$$G(w_1, \dots, w_n, v_1, \dots, v_{m-n})[F^n]_2 = 1.$$

Isto acarreta a ocorrência de classes de cohomologia não nulas na expressão $G(w_1, \dots, w_n, v_1, \dots, v_{m-n})$, o que juntando com o fato que classes $v_{j's}$ não nulas só podem ocorrer em dimensões $\leq n = \dim(F^n)$, produz a desigualdade desejada (isto é um *sketch* geral da abordagem, a qual é extremamente técnica).

Em nosso caso com $F = F^n \cup F^2$, como $\eta \mapsto F^2$ não borda, a idéia é usar essa mesma técnica geral. A diferença crucial é que, enquanto $\eta \mapsto \{p\}$ só tem uma possibilidade (sendo o modelo simples $\mathbb{R}^m \mapsto \{p\}$), $\eta \mapsto F^2$ não bordante admite em princípio várias possibilidades. De fato, e esta será nossa primeira (e importante) tarefa, na seção 3.2 mostraremos que existem, a menos de bordismo, sete possibilidades, as quais serão denotadas por $\beta_1, \dots, \beta_7$, para tais $\eta \mapsto F^2$; mais ainda, exibiremos um modelo explícito para cada uma dessas possibilidades. Ou seja, para cada tal β_i , $1 \leq i \leq 7$, exibiremos um fibrado $\eta_i \mapsto F_i^2$ com $\beta_i = [\eta_i \mapsto F_i^2]$, e de tal sorte que os números característicos do fibrado-linha $\lambda \mapsto \mathbb{RP}(\eta_i)$ são explicitamente conhecidos; desta forma, quando fizermos a suposição que (M^m, T) tem *fixed-data* $(\mu \mapsto F^n) \cup (\eta \mapsto F^2)$, com $\eta \mapsto F^2$ não bordante, usando o Teorema 1.8.3, poderemos admitir então, sem perda de generalidade, que $\eta \mapsto F^2 = \eta_i \mapsto F_i^2$ para algum $1 \leq i \leq 7$.

Na Seção 3.3, provaremos o Teorema 3.1, observando então que as sete possibilidades para $\eta \mapsto F^2$ deverão ser levadas em conta nesta prova. Conforme será visto, primeiro será efetuada uma espécie de redução do problema através de dois importantes lemas, especificamente os Lemas 3.3.1 e 3.3.2. Esta redução eliminará de uma só vez as possibilidades $\beta_1, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6$ e β_7 , restando a partir daí somente a possibilidade β_2 . Em outras palavras, após o estabelecimento dos Lemas 3.3.1 e 3.3.2, no Teorema 3.1 o fibrado $\eta \mapsto F^2$ poderá ser assumido sem perdas ser $\eta_2 \mapsto F^2$, e a prova se baseará então em abordagem com natureza semelhante à aquela utilizada por *Stong e Pergher* em [12] (aqui $\eta_2 \mapsto F^2$ fazendo o papel desempenhado por $\mathbb{R}^m \mapsto \{\text{ponto}\}$ em [12]).

3.2 Classes de bordismo estáveis de fibrados sobre variedades fechadas F^2

No Capítulo 1, Seção 1.4, introduzimos os grupos de bordismo de fibrados vetoriais k -dimensionais sobre variedades fechadas n -dimensionais, $\mathcal{N}_n(BO(k))$, os quais vimos terem fortes conexões com os grupos de bordismo de involuções. Também vimos que uma classe $[\eta^k \mapsto F^n] \in \mathcal{N}_n(BO(k))$ é completamente determinada pelos números de *Whitney* de $\eta^k \mapsto F^n$.

Nesta seção, nosso objetivo é determinar $\mathcal{N}_2(BO(k))$ para qualquer $k \geq 2$. Mostraremos que

$$\mathcal{N}_2(BO(k)) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$$

e exibiremos um representante explícito para cada um dos sete elementos não nulos de $\mathcal{N}_2(BO(k))$. Se $\eta^k \mapsto F^n$ é qualquer fibrado vetorial e se $\mathbb{R}^t \mapsto F^n$ é o fibrado trivial t -dimensional, temos o fibrado $\eta^k \oplus \mathbb{R}^t \mapsto F^n$. É fácil ver que, se

$$\eta^k \mapsto F^n \quad \text{é cobordante a} \quad \mu^k \mapsto G^n,$$

então

$$\eta^k \oplus \mathbb{R}^t \mapsto F^n \quad \text{é cobordante a} \quad \mu^k \oplus \mathbb{R}^t \mapsto G^n.$$

Então existe uma função bem definida

$$\Gamma^t : \mathcal{N}_n(BO(k)) \mapsto \mathcal{N}_n(BO(k+t)), \quad \text{dada por} \quad \Gamma^t[\eta^k] = [\eta^k \oplus \mathbb{R}^t].$$

Também é simples verificar que Γ^t é homomorfismo de $\mathcal{N}_*$ -módulos.

Lema 3.2.1 $\Gamma^t : \mathcal{N}_n(BO(n)) \mapsto \mathcal{N}_n(BO(n+t))$ é um isomorfismo, para qualquer $t \geq 1$.

Prova: Como $\mathbb{W}(\eta^k \oplus \mathbb{R}^t) = \mathbb{W}(\eta^k)$ (axioma da soma para classes características), temos que qualquer número característico de $\eta^k \oplus \mathbb{R}^t$ se reduz a um número característico de η^k . Segue que, se $\eta^k \oplus \mathbb{R}^t$ borda, então η^k borda, mostrando a injetividade de Γ^t . Por outro lado, um resultado bem conhecido da teoria de fibrados (por exemplo, vide [8]) nos diz que, se X é um CW-complexo de dimensão n e $\eta \mapsto X$ um fibrado vetorial k -dimensional com $k > n$, então η é equivalente a um fibrado $\nu \oplus \mathbb{R}^{k-n} \mapsto X$, onde ν é n -dimensional e $\mathbb{R}^{k-n} \mapsto X$ é o fibrado trivial $(k-n)$ -dimensional sobre X . Como variedades n -dimensionais são CW-complexos n -dimensionais, concluímos que Γ^t é sobrejetora. $\square$

O lema acima nos diz que, para determinar $\mathcal{N}_n(BO(k))$, $k > n$, é suficiente determinar $\mathcal{N}_n(BO(n))$; mais ainda dado o fibrado $\eta^k \mapsto F^n$, com $k > n$, escrevendo-se $\eta^k = \nu^n \oplus \mathbb{R}^{k-n} \mapsto F^n$, temos que a classe de bordismo de η^k é completamente determinada pela classe de bordismo de $\nu^n \mapsto F^n$. Por essa razão, a classe de bordismo

$[\nu^n \mapsto F^n]$ é também conhecida como *classe de bordismo estável*, indicando isso sua invariância por soma de fatores triviais.

Conforme mencionamos acima, nosso interesse é obter $\mathcal{N}_2(BO(k))$, qualquer $k \geq 2$, e portanto é suficiente analisar $\mathcal{N}_2(BO(2))$. Começamos então com um fibrado vetorial bidimensional $\eta^2 \mapsto F^2$ sobre a variedade fechada F^2 . Temos então que $[\eta^2 \mapsto F^2]$ é completamente determinada pelos seus números de *Whitney*. Sejam

$$\mathbb{W}(F^2) = 1 + w_1 + w_2, \quad \mathbb{W}(\eta^2) = 1 + v_1 + v_2,$$

as classes de *Stiefel-Whitney*. Os possíveis números de *Whitney* de $\eta^2 \mapsto F^2$ são:

$$w_2[F^2], w_1^2[F^2], v_2[F^2], w_1v_1[F^2], v_1^2[F^2].$$

Uma classe de bordismo $[\eta^2 \mapsto F^2]$ não nula corresponde então a uma lista de valores 0 ou 1 atribuídos a cada um dos objetos acima listados, sendo que pelo menos um dos objetos deve ter valor 1. O total de possibilidades para tais listas é portanto 31 listas. O teorema abaixo reduzirá este total para 7 listas.

Teorema 3.2.2 $w_1^2 = w_2$ e $v_1^2 = w_1v_1$ é verdadeiro para classes de *Stiefel-Whitney* associadas a fibrados bidimensionais sobre variedades bidimensionais.

Prova: Conforme mencionado na Seção 1.2, Capítulo 1, o grupo de bordismo não orientado $\mathcal{N}_2$ é isomorfo a $\mathbb{Z}_2$; também é conhecido o fato que $\mathbb{RP}^2$ representa a classe de bordismo não nula de $\mathcal{N}_2$. Segue que ou F^2 borda ou F^2 é cobordante a $\mathbb{RP}^2$. No primeiro caso,

$$w_1^2[F^2]_2 = 0 = w_2[F^2]_2.$$

No segundo caso

$$w_1^2[F^2]_2 = w_1^2[\mathbb{RP}^2]_2 \quad \text{e} \quad w_2[F^2]_2 = w_2[\mathbb{RP}^2]_2.$$

Agora, sabemos que, se $\alpha \in H^1(\mathbb{RP}^2, \mathbb{Z}_2)$ é o gerador, então

$$\mathbb{W}(\mathbb{RP}^2) = (1 + \alpha)^3 = 1 + \alpha + \alpha^2.$$

Portanto,

$$w_1(\mathbb{RP}^2) = \alpha \quad \text{e} \quad w_2(\mathbb{RP}^2) = \alpha^2 = w_1^2(\mathbb{RP}^2).$$

Segue que

$$w_1^2(F^2) = w_2(F^2). \quad \text{Em qualquer situação} \quad w_1^2 = w_2.$$

Seja agora $V(F^2) = 1 + u_1$, a classe de Wu de F^2 . Conforme vimos na Seção 1.13, $u_1 = w_1$. Pela caracterização da classe de Wu , temos $Sq^1(v_1) = u_1v_1 = w_1v_1$. Como também $Sq^1(v_1) = v_1^2$, segue o resultado. $\square$

O teorema acima nos diz que $\mathcal{N}_2(BO(2))$ possui no máximo sete classes não nulas. Mais ainda, qualquer classe $[\eta^2 \mapsto F^2] \in \mathcal{N}_2(BO(2))$ é completamente determinada pelos três números característicos

$$w_2[F^2]_2 = w_1^2[F^2]_2, \quad v_2[F^2]_2, \quad v_1^2[F^2]_2 = w_1 v_1[F^2]_2.$$

As possibilidades para a lista de números associada a $\eta^2 \mapsto F^2$ são, portanto:

- 1) $w_1^2 \neq 0, v_1^2 = 0, v_2 = 0$
- 2) $w_1^2 \neq 0, v_1^2 \neq 0, v_2 = 0$
- 3) $w_1^2 \neq 0, v_1^2 = 0, v_2 \neq 0$
- 4) $w_1^2 \neq 0, v_1^2 \neq 0, v_2 \neq 0$
- 5) $w_1^2 = 0, v_1^2 \neq 0, v_2 = 0$
- 6) $w_1^2 = 0, v_1^2 = 0, v_2 \neq 0$
- 7) $w_1^2 = 0, v_1^2 \neq 0, v_2 \neq 0$

Em princípio nada nos garante, porem, que todas tais listas são realizáveis por classes de bordismo concretas, isto é, nada nos garante em princípio que existam de fato fibrados $\eta^2 \mapsto F^2$ com números característicos realizando todas as 7 possibilidades acima listadas. Nossa tarefa será concluída, portanto, ao exibirmos um modelo explícito de $\eta^2 \mapsto F^2$ para cada uma de tais listas.

Tome inicialmente $F^2 = \mathbb{RP}^2$, e já sabemos que $w_1^2[\mathbb{RP}^2]_2 = \alpha^2[\mathbb{RP}^2]_2 = 1$. Seja $\lambda \mapsto \mathbb{RP}^2$ o fibrado linha canônico, com $\mathbb{W}(\lambda) = 1 + \alpha$. Sobre $\mathbb{RP}^2$, podemos considerar então os seguintes fibrados bidimensionais:

- 1) $\eta_1 = \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{RP}^2$ o fibrado trivial. Nesse caso $v_1^2 = 0, v_2 = 0$.
- 2) $\eta_2 = \lambda \oplus \mathbb{R} \mapsto \mathbb{RP}^2$, $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{RP}^2$ o fibrado trivial unidimensional. Nesse caso $v_1 = \alpha$ e $v_2 = 0$. Portanto $v_1^2 = \alpha^2 \neq 0$.
- 3) $\eta_3 = \lambda \oplus \lambda \mapsto \mathbb{RP}^2$. Temos $\mathbb{W}(\eta_3) = (1 + \alpha)^2 = 1 + \alpha^2$, ou seja, $v_1^2 = 0, v_2 \neq 0$.
- 4) $\eta_4 = \tau \mapsto \mathbb{RP}^2$, o fibrado tangente sobre $\mathbb{RP}^2$, o qual satisfaz $\mathbb{W}(\eta_4) = (1 + \alpha)^3 = 1 + \alpha + \alpha^2$. Ou seja, nesse caso $v_1^2 = \alpha^2 \neq 0$ e $v_2 = \alpha^2 \neq 0$.

Portanto, as quatro primeiras listas estão realizadas.

Para as três listas restantes, considere inicialmente o fibrado $\xi \oplus \mathbb{R} \mapsto \mathbb{RP}^1$, onde ξ é o fibrado linha canônico e $\mathbb{R}$ é o fibrado trivial unidimensional sobre $\mathbb{RP}^1$. Temos então o fibrado projetivo associado $\mathbb{RP}(\xi \oplus \mathbb{R})$, o qual é uma variedade fechada bidimensional; coloquemos $K^2 = \mathbb{RP}(\xi \oplus \mathbb{R})$. Sejam $\nu \mapsto K^2$ o fibrado linha usual, e suponha $\mathbb{W}(\nu) = 1 + c$, $c \in H^1(K^2, \mathbb{Z}_2)$. Seja $\alpha \in H^1(\mathbb{RP}^1, \mathbb{Z}_2)$ o gerador; sabemos que $\mathbb{W}(\xi \oplus \mathbb{R}) = 1 + \alpha$. Pelo Corolário 1.6.7, temos que

$$\begin{aligned} \mathbb{W}(K^2) &= \mathbb{W}(\mathbb{RP}^1)((1+c)^2 + (1+c)w_1(\xi \oplus \mathbb{R}) + w_2(\xi \oplus \mathbb{R})) = \\ &= (1+\alpha)^2(1+c^2 + (1+c)\alpha) = \\ &= (1+\alpha^2)(1+c^2 + \alpha + \alpha c) = \\ &= 1 + c^2 + \alpha + \alpha c, \end{aligned}$$

uma vez que $\alpha^2 = 0$.

Como em $H^*(K^2, \mathbb{Z}_2)$ vale a relação $c^2 = cw_1(\xi \oplus \mathbb{R}) + w_2(\xi \oplus \mathbb{R}) = c\alpha$ segue que $\mathbb{W}(K^2) = 1 + \alpha$, ou seja, $w_1(K^2) = \alpha$. Como $\alpha^2 = 0$, temos $w_1^2 = 0$, e portanto K^2 é uma variedade bidimensional que serve como base para possíveis fibrados que realizariam as listas 5, 6 e 7. Sobre K^2 , podemos obter fibrados fazendo-se somas de *Whitney* do fibrado linha $\nu \mapsto K^2$ (módulo estabilidade). Isto nos fornecerá os modelos 5, 6 e 7 restantes. De fato, temos:

- 5) $\eta_5 = \nu \oplus \mathbb{R} \mapsto K^2$, $\mathbb{R}$ é o fibrado trivial unidimensional sobre K^2 . Nesse caso, $v_1 = c$, $v_2 = 0$. Como $H^*(K^2, \mathbb{Z}_2)$ é um $H^*(\mathbb{RP}^1, \mathbb{Z}_2)$ -módulo livre gerado por 1 e c , temos que $c\alpha$ é o elemento não nulo de $H^2(K^2, \mathbb{Z}_2)$. Como $c^2 = \alpha c$, segue que $v_1^2 = c^2 \neq 0$. Portanto $\nu \oplus \mathbb{R} \mapsto K^2$ é um modelo que realiza a Lista 5.
- 6) $\eta_6 = \nu \oplus \nu \mapsto K^2$. Nesse caso $\mathbb{W}(\eta_6) = (1+c)^2 = 1 + c^2$, portanto $v_1 = 0$, $v_2 = c^2$. Então $v_1^2 = 0$, $v_2 \neq 0$, realizando a Lista 6.
- 7) Sabemos que existe fibrado bidimensional $\eta_7 \mapsto K^2$, tal que $\eta_7 \oplus \mathbb{R} \mapsto K^2$ é equivalente a $\nu \oplus \nu \oplus \nu \mapsto K^2$. Então $\mathbb{W}(\eta_7) = \mathbb{W}(\eta_7 \oplus \mathbb{R}) = \mathbb{W}(\nu \oplus \nu \oplus \nu) = (1+c)^3 = 1 + c + c^2$. Portanto, nesse caso $v_1^2 = c^2 = v_2 \neq 0$, e η_7 realiza a Lista 7.

Observação 3.2.3 Uma análise geométrica da construção do fibrado projetivo e a definição do fibrado $\xi \oplus \mathbb{R} \mapsto \mathbb{RP}^1$ nos mostra que de fato K^2 é a *garrafa de Klein*.

Também podemos notar que um modelo alternativo que realiza a Lista 6 é dado por $\nu \mapsto \mathbb{CP}^1$, onde $\mathbb{CP}^1$ é o espaço projetivo complexo unidimensional (que é homeomorfo a S^2) e ν é o fibrado-linha complexo de *Hopf* (com dimensão complexa 1). Nesse caso, $\mathbb{W}(\mathbb{CP}^1) = 1$ e $\mathbb{W}(\nu) = 1 + \alpha$, onde $\alpha \in H^2(\mathbb{CP}^2, \mathbb{Z}_2)$ é o gerador. Ou seja, $\nu \mapsto \mathbb{CP}^1$ é cobordante a $\eta_6 \mapsto K^2$.

Sumarizando, o seguinte teorema foi provado

Teorema 3.2.4 *Para qualquer $k \geq 2$, $\mathcal{N}_2(BO(k))$ possui exatamente sete classes não nulas, as quais podem ser explicitamente descritas como:*

- 1) $\beta_1 = [\eta_1 \oplus \mathbb{R}^{k-2} \mapsto \mathbb{RP}^2]$, com $w_1^2 \neq 0, v_1^2 = 0, v_2 = 0$;
- 2) $\beta_2 = [\eta_2 \oplus \mathbb{R}^{k-2} \mapsto \mathbb{RP}^2]$, com $w_1^2 \neq 0, v_1^2 \neq 0, v_2 = 0$;
- 3) $\beta_3 = [\eta_3 \oplus \mathbb{R}^{k-2} \mapsto \mathbb{RP}^2]$, com $w_1^2 \neq 0, v_1^2 = 0, v_2 \neq 0$;
- 4) $\beta_4 = [\eta_4 \oplus \mathbb{R}^{k-2} \mapsto \mathbb{RP}^2]$, com $w_1^2 \neq 0, v_1^2 \neq 0, v_2 \neq 0$;
- 5) $\beta_5 = [\eta_5 \oplus \mathbb{R}^{k-2} \mapsto K^2]$, com $w_1^2 = 0, v_1^2 \neq 0, v_2 = 0$;
- 6) $\beta_6 = [\eta_6 \oplus \mathbb{R}^{k-2} \mapsto K^2]$, com $w_1^2 = 0, v_1^2 = 0, v_2 \neq 0$;
- 7) $\beta_7 = [\eta_7 \oplus \mathbb{R}^{k-2} \mapsto K^2]$, com $w_1^2 = 0, v_1^2 \neq 0, v_2 \neq 0$.

Observação 3.2.5 A estrutura de grupo de $\mathcal{N}_2(BO(k))$ pode ser facilmente descrita se lembrarmos que a soma de classes de bordismo de fibrados é compatível com a soma módulo 2 das correspondentes listas de números de *Whitney*. Desta forma, temos que

$$\begin{aligned} \beta_1 + \beta_2 &= \beta_5 &= \beta_3 + \beta_4 \\ \beta_1 + \beta_3 &= \beta_6 &= \beta_2 + \beta_4 \\ \beta_1 + \beta_4 &= \beta_7 &= \beta_2 + \beta_3 \end{aligned}$$

Observação 3.2.6 Conforme já mencionado, se (M^m, T) é uma involução fixando $F^n \cup F^2$, com *fixed-data* $(\mu \mapsto F^n) \cup (\eta \mapsto F^2)$ e com $\eta \mapsto F^2$ não bordante, então o Teorema 1.8.3 nos diz que podemos admitir sem perdas que $\eta \mapsto F^2$ é exatamente um dos modelos explícitos descritos no Teorema 3.2.4; isto será tacitamente utilizado na seção seguinte.

3.3 Prova do Teorema 3.1

Conforme vimos na introdução deste capítulo, para mostrar que

$$m(n; \{2\}) = \max\{2n, m(n-2) + 4\},$$

é suficiente provar o Teorema 3.1, o qual estabelece que, se (M^m, T) é involução fixando $F^n \cup F^2$ tal que o fibrado normal $\eta \mapsto F^2$ não borda, então $m \leq m(n-2) + 4$. Pela seção anterior, sabemos que $\eta \mapsto F^2$ pode ser assumido como sendo exatamente um dos sete modelos explícitos lá descritos. Seja $\mu \mapsto F^n$ o fibrado normal sobre F^n . A dimensão de

η é $m-2$, e a dimensão de μ é $m-n$. Por facilidade de notação, coloquemos $m-n = k$. Usando a mesma notação da seção anterior, seja

$$\mathbb{W}(\eta) = 1 + v_1 + v_2, \quad \mathbb{W}(F^2) = 1 + w_1 + w_2,$$

e conforme lá visto, o que determina qual modelo explícito é $\eta \mapsto F^2$ é a lista de números $w_1^2[F^2]_2$, $v_1^2[F^2]_2$, $v_2[F^2]_2$. Conforme mencionado na Seção 3.1, a estratégia consistirá inicialmente em promover uma redução do problema, de tal sorte que, após tal redução, o único modelo a ser considerado será β_2 . Tal redução se dará através do

Lema 3.3.1 *Se $m > m(n-2) + 4$, então necessariamente $v_2 = 0$ e $w_1^2 = v_1^2$.*

Observando os sete modelos possíveis para $\eta \mapsto F^2$, vemos que o único que satisfaz $v_2 = 0$ e $w_1^2 = v_1^2$ é $\eta_2 \oplus \mathbb{R}^{m-4} \mapsto \mathbb{R}P^2$. Portanto, o lema acima prova o Teorema 3.1 para todas as possibilidades de $\eta \mapsto F^2$, com exceção do modelo acima especificado. Uma vez feito isso, focaremos então a seguir nossa análise neste particular modelo, e conforme já anteriormente mencionado, a prova para este particular modelo é inspirada na abordagem efetuada por *Stong e Pergher* em [12], onde o *fixed-data* era do tipo $(\mu^{m-n} \mapsto F^n) \cup (\mathbb{R}^m \mapsto \{\text{ponto}\})$.

Para provar o lema acima, usaremos o fato já fartamente utilizado antes, que

$$p(c, W_1, \dots, W_{m-1})[\mathbb{R}P(\eta)]_2 = p(c, W_1, \dots, W_{m-1})[\mathbb{R}P(\mu)]_2$$

para qualquer polinomial p nas classes características dos fibrados-linha usuais sobre $\mathbb{R}P(\eta)$ e $\mathbb{R}P(\mu)$. A estratégia agora será mostrar que, se $m > m(n-2) + 4$, então é possível escolher polinomiais p especiais de tal sorte que $p(c, W_1, \dots, W_{m-1})[\mathbb{R}P(\mu)]_2 = 0$ (por razões dimensionais), enquanto que $p(c, W_1, \dots, W_{m-1})[\mathbb{R}P(\eta)]_2$ reproduza os números $V_1^2[F^2]_2$ e $V_2[F^2]_2$, onde $V = 1 + V_1 + V_2 + V_3 + V_4$ é a classe de *Stiefel-Whitney* do fibrado $\eta \oplus \tau \mapsto F^2$, onde $\tau \mapsto F^2$ é o fibrado tangente sobre F^2 . Em outras palavras, será provado o seguinte

Lema 3.3.2 *Se $m > m(n-2) + 4$, então $V_2[F^2]_2 = 0$ e $V_1^2[F^2]_2 = 0$, onde V_1 e V_2 são classes de *Stiefel-Whitney* do fibrado $\eta \oplus \tau$.*

Vejamos que o Lema 3.3.2 acarreta o Lema 3.3.1. De fato, temos

$$\begin{aligned} \mathbb{W}(\eta \oplus \tau) &= \mathbb{W}(\eta)\mathbb{W}(\tau) = (1 + v_1 + v_2)(1 + w_1 + w_2) = \\ &= 1 + (w_1 + v_1) + (w_2 + w_1v_1 + v_2) + (w_2v_1 + w_1v_2) + w_2v_2. \end{aligned}$$

Portanto $V_1 = w_1 + v_1$ e $V_2 = w_2 + w_1v_1 + v_2$. Então

$$0 = V_1^2[F^2]_2 = (w_1 + v_1)^2[F^2]_2 = (w_1^2 + v_1^2)[F^2]_2$$

e portanto $w_1^2 = v_1^2$. Também,

$$0 = V_2[F^2]_2 = (w_2 + w_1v_1 + v_2)[F^2]_2.$$

Mas sabemos, pelo Teorema 3.2.2, que $w_1v_1 = v_1^2$ (e acabamos de mostrar que $v_1^2 = w_1^2$); portanto

$$0 = w_2 + w_1v_1 + v_2 = w_2 + v_1^2 + v_2 = w_2 + w_1^2 + v_2.$$

Ainda pelo Teorema 3.2.2, temos $w_1^2 = w_2$, portanto $v_2 = 0$, o que prova o Lema 3.3.1. $\square$

A escolha das polinomiais necessárias para provar o Lema 3.3.2 é bastante técnica, e terá como componente crucial uma polinomial especial usada por *Stong e Pergher* em [12] (lá chamada *classe X*), a qual envolve classes do tipo $W[r]_i$ com r 's especiais descritos em [12]. Outra componente será dada por certas funções polinomiais simétricas especiais, denominadas f_ω , associadas a fibrados-linha $\lambda \mapsto B^n$, quando se considera o princípio *splitting* sobre o fibrado tangente a B^n e sobre λ .

Tais f_ω terão conexões com as funções simétricas S_ω detalhadas na Seção 1.14 (ω = partições). Isto será estratégico, uma vez que, se $\omega = (1, 1)$, então $S_\omega = V_2$, e se $\omega = (2)$, então $S_\omega = V_1^2$. Ou seja, formalmente nossas polinomiais serão do tipo

$$f_\omega X c^{\text{potência}}.$$

Seja $\mathbb{W}(F^n) = 1 + \theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n$, $\mathbb{W}(\mu) = 1 + u_1 + u_2 + \cdots + u_k$. Temos, conforme Corolário 1.6.7 da página 9,

$$\mathbb{W}(\mathbb{RP}(\mu)) = (1 + \theta_1 + \cdots + \theta_n) \{ (1 + c)^k + (1 + c)^{k-1}u_1 + \cdots + u_k \}$$

e as classes $W[r]$ vistas no Capítulo 2 dadas por

$$\begin{aligned} W[r] &= \frac{1}{(1 + c)^{k-r}} \mathbb{W}(\mathbb{RP}(\mu)) = \\ &= (1 + \theta_1 + \cdots + \theta_n) \{ (1 + c)^r + u_1(1 + c)^{r-1} + \cdots + u_r + u_{r+1}(1 + c)^{-1} + \cdots + u_k(1 + c)^{r-k} \}. \end{aligned}$$

Já vimos as propriedades:

$$W[r]_{2r} = \theta_r c^r + \text{termos com } c^x, \text{ onde } x < r \text{ e}$$

$$W[r]_{2r+1} = (\theta_{r+1} + u_{r+1})c^r + \text{termos com } c^x, \text{ onde } x < r.$$

A classe X acima mencionada, introduzida por *Stong e Pergher* em [12], tem a forma

$$X = w[r_1]_{2r_1} \cdots w[r_h]_{2r_h} w[s_1]_{2s_1+1} \cdots w[s_t]_{2s_t+1}.$$

Note que a dimensão de X é

$$\dim(X) = 2(r_1 + \cdots + r_h) + 2(s_1 + \cdots + s_t) + t.$$

Além disso, por causa das propriedades acima, temos que

$$\begin{aligned} X &= (\theta_{r_1} c^{r_1} + \text{termos com } c^x, \text{ onde } x < r_1) + \\ &+ (\theta_{r_2} c^{r_2} + \text{termos com } c^x, \text{ onde } x < r_2) + \\ &+ \cdots \\ &+ (\theta_{r_h} c^{r_h} + \text{termos com } c^x, \text{ onde } x < r_h) + \\ &+ (\theta_{s_1+1} + u_{s_1+1}) c^{s_1} + \text{termos com } c^x, \text{ onde } x < s_1 + \\ &+ (\theta_{s_2+1} + u_{s_2+1}) c^{s_2} + \text{termos com } c^x, \text{ onde } x < s_2 + \\ &+ \cdots \\ &+ (\theta_{s_t+1} + u_{s_t+1}) c^{s_t} + \text{termos com } c^x, \text{ onde } x < s_t. \end{aligned}$$

Usando argumento análogo ao da página 30, temos

$$X = \theta_{r_1} \cdots \theta_{r_h} (\theta_{s_1+1} + u_{s_1+1}) \cdots (\theta_{s_t+1} + u_{s_t+1}) c^{|r|+|s|} + \text{termos com } c^x, \text{ onde } x < |r|+|s|,$$

$$|r| = r_1 + \cdots + r_h \text{ e } |s| = s_1 + \cdots + s_t.$$

Escreva $n - 2 = 2^p q$, com q ímpar. Em [12], a classe X é construída com uma escolha muito especial dos valores $r_1, r_2, \dots, r_h, s_1, \dots, s_t$, expressos em termos de p e q . O que se pretende com tal X (em termos desta lista de valores $r_{i's}$ e $s_{j's}$) é que as seguintes propriedades técnicas sejam satisfeitas:

- 1) $\dim(X) = 2(r_1 + \cdots + r_h) + 2(s_1 + \cdots + s_t) + t = m(n - 2)$
- 2) $|r| + |s| + t = r_1 + \cdots + r_h + s_1 + \cdots + s_t + t > n - 2,$

lembrando que, com $n - 2 = 2^p q$,

$$m(n - 2) = \begin{cases} (2^{p+1} - 1)q + p + 1 & \text{se } p \leq q + 1 \\ (2^{p+1} - 2^{p-q})q + 2^{p-q}(q + 1) & \text{se } p \geq q. \end{cases}$$

A lista dos valores $r_{i's}$ e $s_{j's}$ acima mencionada é assim descrita:

- i) se $p \leq q + 1$, $r_1 = 2^p - 2^{p-1}$, $r_2 = 2^p - 2^{p-2}, \dots, r_i = 2^p - 2^{p-i}, \dots, r_p = 2^p - 2^{p-p} = 2^p - 1$ e $s_j = 2^p - 1$, onde $1 \leq j \leq q + 1 - p$ (notando que se $p = q + 1$, os $s_{j's}$ não ocorrem);
- ii) se $p \geq q + 1$, $r_1 = 2^p - 2^{p-1}$, $r_2 = 2^p - 2^{p-2}, \dots, r_i = 2^p - 2^{p-i}, \dots, r_{q+1} = 2^p - 2^{p-q-1}$, e nesse caso os $s_{j's}$ não ocorrem.

Com tais valores, em [12] é demonstrado que as propriedades 1 e 2 acima são satisfeitas. Note ainda que, como $c^{|r|+|s|}$ é a potência máxima de c que ocorre na classe X , a Propriedade 2 diz que cada monômio de X tem portanto um termo proveniente de $H^*(F^n, \mathbb{Z}_2)$ com dimensão $> n - 2$. As polinomiais f_ω que construiremos adiante terão dimensão 4, e serão tais que cada um de seus monômios possuirá termo c^x , com $x \leq 2$, o que significa que a dimensão mínima do termo de cada tal monômio que provem da cohomologia de F^n será 2. Segue que, se $m > m(n-2) + 4$, então $m-1 \geq m(n-2) + 4$ e poderemos então considerar a polinomial

$$f_\omega X c^{(m-1)-(m(n-2)+4)}$$

a qual terá dimensão $m-1$, podendo portanto ser avaliada em $\mathbb{RP}(\mu)$. Agora, seja $c^x A$ um monômio de f_ω , onde conforme dito acima $\dim(c^x A) = 4$, $x \leq 2$ (e portanto $\dim(A) \geq 2$) e A provem de $H^*(F^2, \mathbb{Z}_2)$. Pelo visto acima, cada monômio de $f_\omega X$ terá um termo proveniente de $H^*(F^n, \mathbb{Z}_2)$ com dimensão $> n$. Segue que

$$f_\omega X c^{(m-1)-(m(n-2)+4)}[\mathbb{RP}(\mu)]_2 = 0$$

por razões dimensionais.

Para computar a polinomial $f_\omega X c^{(m-1)-(m(n-2)+4)}$ sobre $\mathbb{RP}(\eta)$, analisemos inicialmente como X se comporta sobre $\mathbb{RP}(\eta)$. Temos

$$\mathbb{W}(\mathbb{RP}(\eta)) = (1 + w_1 + w_2)\{(1 + c)^{m-2} + v_1(1 + c)^{m-3} + v_2(1 + c)^{m-4}\}$$

A classe X é um produto de $W[r's]_i$, e vimos em 2.2 que $W[r]$ sobre $\mathbb{RP}(\mu)$ produz a mesma polinomial que $W[l]$ sobre $\mathbb{RP}(\eta)$, onde $m-2-l = m-n-r$, ou seja, $l = n+r-2$. Tal $W[l]$ sobre $\mathbb{RP}(\eta)$ é

$$W[l] = \frac{\mathbb{W}(\mathbb{RP}(\eta))}{(1+c)^{m-n-r}} = (1+w_1+w_2)\{(1+c)^{n+r-2} + (1+c)^{n+r-3}v_1 + (1+c)^{n+r-4}v_2\}.$$

Ou seja,

$$W[l] = (1+c)^{n+r-2} + (1+c)^{n+r-3}v_1 + (1+c)^{n+r-4}v_2 + (1+c)^{n+r-2}w_1 + \dots + (1+c)^{n+r-4}v_2w_2.$$

Conforme acima descrito, as polinomiais f_ω que construiremos são formadas por monômios $c^x A$, onde $\dim(A) \geq 2$ e A provem de $H^*(F^2, \mathbb{Z}_2)$; portanto, $\dim(A)$ só pode ser 2 neste caso. Observando $W[l]$, o produto de $c^x A$ por cada termo da mesma sempre tem portanto um termo que provem daqueles provindos de $H^i(F^2, \mathbb{Z}_2)$ onde $i \geq 3$ (o qual é nulo por razões dimensionais), com exceção de $(1+c)^{n+r-2}$. Segue que, com exceção de $(1+c)^{n+r-2}$, todos os termos restantes de $W[l]$ nada contribuem em $f_\omega X c^{\text{potência}}$. Portanto, podemos considerar $W[l]$ módulo termos de dimensão positiva provenientes de $H^*(F^2, \mathbb{Z}_2)$ em nossas computações. Isto é, vamos analisar

$$W[l] \equiv (1+c)^{n+r-2},$$

para os valores de r_i 's e s_j 's considerados para a obtenção da classe X , ou seja, $r_i = 2^p - 2^{p-i}$ e $s_j = 2^p - 1$. Lembramos que $n - 2 = 2^p q$, ou seja, $n = 2^p q + 2$. Para cada r_i e s_j considere seus correspondentes l_i e l_j ; temos então

$$W[l_i] \equiv (1 + c)^{n+r_i-2}.$$

Portanto, como $r_i = 2^p - 2^{p-i}$ e $n = 2^p q + 2$,

$$w[l_i]_{2r_i} = \binom{n+r_i-2}{2r_i} c^{2r_i} = \binom{\dots + 2^{p+1} - 2^{p-i}}{2^{p+1} - 2^{p+1-i}} c^{2r_i}$$

e pelo teorema de *Lucas*, 1.15.2 da página 21, segue que $w[l_i]_{2r_i} = c^{2r_i}$, uma vez que

$$\binom{\dots + 2^{p+1} - 2^{p-i}}{2^{p+1} - 2^{p+1-i}} = 1, \text{ pois } \begin{cases} 2^{p+1} - 2^{p-i} = 2^p + 2^{p-1} + \dots + 2^{p-i+1} + 2^{p-i} \\ 2^{p+1} - 2^{p+1-i} = 2^p + 2^{p-1} + \dots + 2^{p-i+1}. \end{cases}$$

Agora,

$$W[l_j] \equiv (1 + c)^{n+s_j-2},$$

e assim, como $s_j = 2^p - 1$ e $n = 2^p q + 2$,

$$w[l_j]_{2s_j+1} = \binom{n+s_j-2}{2s_j+1} c^{2s_j+1} = \binom{\dots + 2^{p+1} - 1}{2^{p+1} - 1} c^{2s_j+1}.$$

Portanto, segue que $w[l_j]_{2s_j+1} = c^{2s_j+1}$, uma vez que

$$\binom{\dots + 2^{p+1} - 1}{2^{p+1} - 1} = 1, \text{ pelo teorema de } Lucas.$$

Assim, a classe X sobre $\mathbb{RP}(\eta)$ é dada por

$$\begin{aligned} X &= c^{2r_1+2r_2+\dots+2r_h+(2s_1+1)+\dots+(2s_t+1)} + \\ &+ (\text{termos contendo elementos com dimensão positiva provenientes de } H^*(F^2, \mathbb{Z}_2)) = \\ &= c^{m(n-2)} + \\ &+ (\text{termos contendo elementos com dimensão positiva provenientes de } H^*(F^2, \mathbb{Z}_2)). \end{aligned}$$

Passemos agora a descrever as polinomiais f_ω atrás mencionadas. Em linhas gerais, tais polinomiais provêm de certas funções simétricas que podem ser associadas a fibrados-linha genéricos $\gamma \mapsto V^n$, V^n variedade fechada n -dimensional (e em particular aos nossos fibrados-linha usuais associados a fibrados projetivos), quando se leva em consideração o princípio *splitting*. Seja então, levando em conta tal princípio (vide Seção 1.7),

$$\mathbb{W}(V^n) = 1 + w_1 + \dots + w_n = (1 + x_1)(1 + x_2) \dots (1 + x_n),$$

e

$$\mathbb{W}(\gamma) = 1 + c.$$

Considere l um natural e seja $\omega = (i_1, i_2, \dots, i_r)$ partição de l tal que $r \leq n$. Temos então a função simétrica de grau $2l$ dada por

$$f_\omega = \sum_{\substack{j_1 < j_2 < \dots < j_r \\ 1 \leq j_i \leq n}} \sum_{\sigma \in S_r} x_{j_{\sigma(1)}}^{i_1} (c + x_{j_{\sigma(1)}})^{i_1} x_{j_{\sigma(2)}}^{i_2} (c + x_{j_{\sigma(2)}})^{i_2} \dots x_{j_{\sigma(r)}}^{i_r} (c + x_{j_{\sigma(r)}})^{i_r},$$

onde S_r é o grupo de permutações de r elementos (compare com os S_ω da Seção 1.14, página 20).

Como tal função é simétrica, ela pode ser expressa em uma polinomial nos $w_{i's}$ e c .

Para obter nossas específicas f_ω , particularizemos as mesmas para o caso em que $l = 2$ e $\gamma \mapsto V^n$ é o fibrado-linha usual associado ao fibrado projetivo $\mathbb{RP}(\zeta^k)$, $\lambda \mapsto \mathbb{RP}(\zeta^k)$, onde $\zeta^k \mapsto B^n$ é um fibrado k -dimensional sobre uma variedade fechada B^n . Nesse caso, temos as partições $\omega = (1, 1)$ e $\omega = (2)$, e a dimensão de f_ω será 4. O próximo lema relacionará tais f_ω com as S_ω da Seção 1.14 associadas ao fibrado $\tau^n \oplus \zeta^k \mapsto B^n$, onde τ^n é o fibrado tangente a B^n .

Lema 3.3.3 *Para $\omega = (1, 1)$ ou $\omega = (2)$, vale que*

$$f_\omega(\lambda \mapsto \mathbb{RP}(\zeta^k)) = S_\omega(\tau^n \oplus \zeta^k)c^2 + \text{termos com } c^x, \quad x < 2.$$

Prova: Seja, pelo princípio *splitting*,

$$\mathbb{W}(B^n) = (1 + x_1) \cdots (1 + x_n), \quad \mathbb{W}(\zeta^k) = (1 + y_1) \cdots (1 + y_k).$$

Então, pelo Teorema 1.7.2

$$\mathbb{W}(\mathbb{RP}(\zeta^k)) = (1 + z_1) \cdots (1 + z_n)(1 + z_{n+1}) \cdots (1 + z_{n+k})$$

onde $z_i = x_i$ se $1 \leq i \leq n$ e $z_j = c + y_{j-n}$ se $n < j \leq n + k$. Primeiro analisemos $\omega = (1, 1)$. Lembremos que S_ω neste caso é composto por monômios que são produtos de duas variáveis distintas de grau 1, ambas com potência 1. Como, pelo princípio *splitting*,

$$\mathbb{W}(\tau^n \oplus \zeta^k) = (1 + x_1) \cdots (1 + x_n)(1 + y_1) \cdots (1 + y_k),$$

temos que

$$S_\omega(\tau^n \oplus \zeta^k) = \sum_{i < j} x_i x_j + \sum_{i, j} x_i y_j + \sum_{i < j} y_i y_j.$$

Por outro lado, se $\gamma \mapsto V^n$ é qualquer fibrado-linha com

$$\mathbb{W}(\gamma) = 1 + c, \quad \mathbb{W}(V^n) = (1 + x_1)(1 + x_2) \cdots (1 + x_n),$$

então f_ω é formado por todos os possíveis termos dos tipo

$$x_i(c + x_i)x_j(c + x_j)$$

com $i < j$. Em particular, $f_\omega(\mathbb{RP}(\zeta^k))$ tem o formato

$$\sum_{i < j} z_i(c + z_i)z_j(c + z_j).$$

Tais termos provêm portanto de três fontes:

i) da parte $(1 + z_1) \cdots (1 + z_n) = (1 + x_1) \cdots (1 + x_n)$, a qual contribui com

$$\sum_{i < j} x_i(c + x_i)x_j(c + x_j)$$

ii) da parte $(1 + z_{n+1}) \cdots (1 + z_{n+k}) = (1 + c + y_1) \cdots (1 + c + y_k)$, a qual contribui com

$$\sum_{i < j} (c + y_i)(c + c + y_i)(c + y_j)(c + c + y_j) = \sum_{i < j} y_i(c + y_i)y_j(c + y_j)$$

iii) da mistura das variáveis de ambas as partes acima, o que contribui com

$$\sum_{i, j} x_i(c + x_i)(c + y_j)(c + c + y_j) = \sum_{i < j} x_i(c + x_i)y_j(c + y_j)$$

Na parte i), em cada termo

$$x_i(c + x_i)x_j(c + x_j)$$

o monômio com maior potência de c é

$$x_i x_j c^2.$$

Portanto,

$$x_i(c + x_i)x_j(c + x_j) = x_i x_j c^2 + \text{termos com } c^x, \ x < 2.$$

Analogamente, na parte ii), temos

$$y_i(c + y_i)y_j(c + y_j) = y_i y_j c^2 + \text{termos com } c^x, \ x < 2.$$

Na parte iii), temos

$$x_i(c + x_i)y_j(c + y_j) = x_i y_j c^2 + \text{termos com } c^x, \ x < 2.$$

Juntando tais fatos, concluimos que

$$\begin{aligned}
 f_\omega(\mathbb{RP}(\zeta^k)) &= ((\sum_{i < j} x_i x_j) c^2 + \text{termos com } c^x, \text{ onde } x < 2) + \\
 &\quad + ((\sum_{i < j} y_i y_j) c^2 + \text{termos com } c^x, \text{ onde } x < 2) + \\
 &\quad + ((\sum_{i, j} x_i y_j) c^2 + \text{termos com } c^x, \text{ onde } x < 2) = \\
 &= ((\sum_{i < j} x_i x_j) + (\sum_{i, j} x_i y_j) + (\sum_{i < j} y_i y_j)) c^2 + \\
 &\quad + (\text{termos com } c^x, \text{ onde } x < 2) = \\
 &= S_\omega(\tau \oplus \zeta^k) c^2 + \text{termos com } c^x, \text{ onde } x < 2).
 \end{aligned}$$

O que prova o resultado para $\omega = (1, 1)$. Analisemos agora $\omega = (2)$. Neste caso, S_ω é composto por monômios constituídos por uma única variável com potência 2. Segue que

$$S_2(\tau^n \oplus \zeta^k) = \sum_i x_i^2 + \sum_i y_i^2.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
 f_\omega(\mathbb{RP}(\zeta^k)) &= \sum_i x_i^2 (c + x_i)^2 + \sum_j (c + y_j)^2 (c + c + y_j)^2 = \\
 &= \sum_i x_i^2 (c + x_i)^2 + \sum_j y_j^2 (c + y_j)^2 = \\
 &= \sum_i x_i^2 (c^2 + x_i^2) + \sum_j y_j^2 (c^2 + y_j^2) = \\
 &= ((\sum_i x_i^2) c^2 + \sum_i x_i^4) + (\sum_j y_j^2) c^2 + \sum_j y_j^4 = \\
 &= (\sum_i x_i^2 + \sum_j y_j^2) c^2 + (\text{termos com } c^x, \text{ onde } x < 2) = \\
 &= S_\omega(\tau \oplus \zeta^k) c^2 + \text{termos com } c^x, \text{ onde } x < 2),
 \end{aligned}$$

encerrando a demonstração. $\square$

Estamos agora em condições de provar o Lema 3.3.2, que era o nosso primeiro grande objetivo. Ou seja, provaremos que, se $m > m(n-2)+4$, então $V_2[F^2]_2 = 0$ e $V_1^2[F^2]_2 = 0$, onde V_1 e V_2 são as classes de *Stiefel-Whitney* do fibrado $\eta \oplus \tau$. Conforme explicado anteriormente, consideremos a polinomial $f_\omega X c^y$, onde $y = (m-1) - (m(n-2)+4)$, avaliada em $\mathbb{RP}(\mu)$ e $\mathbb{RP}(\eta)$.

Para que tal polinomial se anule sobre $\mathbb{RP}(\mu)$ (por razões dimensionais) vimos que o argumento era exibir f_ω com dimensão 4 e tal que cada um de seus monômios seja da forma $c^x A$, A proveniente de $H^*(F^n, \mathbb{Z}_2)$ e $\dim(A) \geq 2$. Pelo Lema 3.3.3, temos que

$$f_\omega(\mathbb{RP}(\mu)) = S_\omega(\tau^n \oplus \mu) c^2 + \text{termos com } c^x, \ x < 2,$$

onde τ^n é o fibrado tangente a F^n , e $\omega = (1, 1)$ ou $\omega = (2)$. Como $S_\omega(\tau^n \oplus \mu)$ se expressa nas classes características de $\tau^n \oplus \mu$ (as quais provêm da cohomologia de F^n), temos que para tais ω

$$f_\omega X c^y [\mathbb{RP}(\mu)]_2 = 0.$$

Por outro lado, se $\omega = (1, 1)$, τ^2 é o fibrado tangente a F^2 , e

$$\mathbb{W}(\tau^2) = (1 + x_1)(1 + x_2), \quad \mathbb{W}(\eta) = (1 + y_1)(1 + y_2),$$

então

$$S_\omega(\tau^2 \oplus \eta) = x_1x_2 + y_1y_2 + x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2 = V_2(\tau^2 \oplus \eta)$$

e se $\omega = (2)$,

$$S_\omega(\tau^2 \oplus \eta) = x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 = V_1^2(\tau^2 \oplus \eta).$$

Segue, usando o Lema 3.3.3 e o cálculo anterior da classe X para $\mathbb{RP}(\eta)$, que

$$\begin{aligned} f_\omega X c^y [\mathbb{RP}(\eta)]_2 &= S_\omega(\tau \oplus \eta) c^2 + (\text{termos com } c^x, \text{ onde } x < 2) \cdot \\ &\quad \cdot (c^{m(n-2)} + \text{termos contendo elementos com dimensão positiva} \\ &\quad \text{provenientes de } H^*(F^2, \mathbb{Z}_2)) c^y [\mathbb{RP}(\eta)]_2. \end{aligned}$$

Agora, cada termo envolvendo elementos de dimensão positiva proveniente de $H^*(F^n, \mathbb{Z}_2)$ multiplicado por $S_\omega(\tau \oplus \eta)$ dá zero, uma vez que $S_\omega(\tau \oplus \eta) \in H^2(F^2, \mathbb{Z}_2)$. Segue que

$$f_\omega X c^y [\mathbb{RP}(\eta)]_2 = S_\omega(\tau \oplus \eta) c^{m(n-2)+2+y} + (\text{termos com } c^x, \text{ onde } x < m(n-2) + 2 + y).$$

Note agora que cada termo envolvendo c^x com $x < m(n-2) + 2 + y$ necessariamente terá termo proveniente de $H^*(F^2, \mathbb{Z}_2)$ com dimensão > 2 , o que é zero. Portanto

$$\begin{aligned} f_\omega X c^y [\mathbb{RP}(\eta)]_2 &= S_\omega(\tau \oplus \eta) c^{m(n-2)+2+y} [\mathbb{RP}(\eta)]_2 = \\ &= S_\omega(\tau \oplus \eta) c^{m-3} [\mathbb{RP}(\eta)]_2 = \begin{cases} V_2 c^{m-3} [\mathbb{RP}(\eta)]_2 & \text{se } \omega = (1, 1), \\ V_1^2 c^{m-3} [\mathbb{RP}(\eta)]_2 & \text{se } \omega = (2). \end{cases} \end{aligned}$$

Lembrando finalmente que $H^*(\mathbb{RP}(\eta), \mathbb{Z}_2)$ é um $H^*(F^2, \mathbb{Z}_2)$ -módulo livre gerado por

$$1, c, c^2, \dots, c^{m-3},$$

e usando argumento completamente semelhante ao da página 31, concluímos que

$$S_\omega(\tau \oplus \eta) c^{m-3} [\mathbb{RP}(\eta)]_2 = S_\omega(\tau \oplus \eta) [F^2]_2$$

ou seja,

$$f_\omega X c^y [\mathbb{RP}(\eta)]_2 = \begin{cases} V_2 [F^2]_2 & \text{se } \omega = (1, 1), \\ V_1^2 [F^2]_2 & \text{se } \omega = (2). \end{cases}$$

Isto encerra a prova do Lema 3.3.2 (e conseqüentemente do Lema 3.3.1). $\square$

A tarefa acima encerrada reduz nosso trabalho, conforme já explicado, a provar o seguinte fato: se (M^m, T) é involução com *fixed-data* $(\mu \mapsto F^n) \cup (\eta_2 \oplus \mathbb{R}^{m-4} \mapsto \mathbb{RP}^2)$, onde $\eta_2 = \lambda \oplus \mathbb{R}$ e λ é o fibrado-linha canônico sobre $\mathbb{RP}^2$, então $m \leq m(n-2) + 4$. Para facilitar nossa tarefa, estabeleceremos algumas notações que serão válidas até o final do capítulo. Manteremos a notação já estabelecida

$$\mathbb{W}(F^n) = 1 + \theta_1 + \cdots + \theta_n, \quad \mathbb{W}(\mu) = 1 + u_1 + \cdots + u_k, \quad k = m - n.$$

Doravante, portanto, (M^m, T) será sempre uma involução com o *fixed-data* acima. Denotemos por $\alpha \in H^1(\mathbb{RP}^2, \mathbb{Z}_2)$ o gerador, e o fibrado

$$\eta_2 \oplus \mathbb{R}^{m-4} \mapsto \mathbb{RP}^2 = \lambda \oplus \mathbb{R}^{m-3} \mapsto \mathbb{RP}^2,$$

será denotado simplesmente por $\eta \mapsto \mathbb{RP}^2$. Sabemos que $\mathbb{W}(\eta) = 1 + \alpha$. A letra c será designada para denotar simultaneamente as primeiras classes de *Whitney* dos fibrados-linha usuais sobre $\mathbb{RP}(\eta)$ e $\mathbb{RP}(\mu)$, dependendo do contexto. Nossa estratégia consistirá em mostrar que, caso $m > m(n-2) + 4$, então é possível escolher polinomiais especiais $p(c, w_1, \dots, w_{m-1})$ com dimensão $m-1$ de tal sorte que

$$p(c, w_1, \dots, w_{m-1})[\mathbb{RP}(\eta)]_2 = 1$$

(o que é viável, uma vez que os números característicos do fibrado-linha sobre $\mathbb{RP}(\eta)$ são explicitamente conhecidos) e

$$p(c, w_1, \dots, w_{m-1})[\mathbb{RP}(\mu)]_2 = 0$$

(por razões dimensionais), o que nos dará a contradição. Tais polinomiais não serão únicas para todos os valores de n , sendo diferentes nos casos n par e n ímpar. Novamente, e particularmente para n par, a construção de tais polinomiais dependerá crucialmente da classe X de *Stong e Pergher* anteriormente usada.

Lema 3.3.4 *Em $H^*(\mathbb{RP}(\eta), \mathbb{Z}_2)$, temos que $c^{m-1} = \alpha c^{m-2} = \alpha^2 c^{m-3}$, o qual é o gerador de $H^{m-1}(\mathbb{RP}(\eta), \mathbb{Z}_2)$.*

Prova: Por 1.6.5 do Capítulo 1, sabemos que $H^*(\mathbb{RP}(\eta), \mathbb{Z}_2)$ é um $H^*(\mathbb{RP}^2, \mathbb{Z}_2)$ -módulo livre gerado por $1, c, c^2, \dots, c^{m-3}$. Segue que $\alpha^2 c^{m-3}$ é o gerador na dimensão *top*, ou seja, de $H^{m-1}(\mathbb{RP}(\eta), \mathbb{Z}_2)$. Agora, em $H^*(\mathbb{RP}(\eta), \mathbb{Z}_2)$ vale a relação

$$c^{m-2} = c^{m-3}w_1(\eta) + c^{m-4}w_2(\eta) + \cdots + w_{m-2}(\eta)$$

e como $w_1(\eta) = \alpha$ e $w_i(\eta) = 0$ para $i > 1$, temos

$$c^{m-2} = c^{m-3}\alpha.$$

Multiplicando por α e a seguir por c , temos

$$c^{m-2}\alpha = c^{m-3}\alpha^2, \quad \text{e} \quad c^{m-1} = c^{m-2}\alpha$$

resultando em

$$c^{m-1} = c^{m-2}\alpha = c^{m-3}\alpha^2.$$

□

Nosso primeiro passo será mostrar o resultado para n ímpar, o qual é o caso mais simples. Se n é ímpar, $n - 2$ é ímpar, e portanto $m(n - 2) + 4 = (n - 1) + 4 = n + 3$. Mostraremos nesse caso um fato mais forte do que aquele que está sendo proposto ($m \leq n + 3$). De fato, mostraremos que nesse caso $m \leq n + 1$. Mais ainda, no Capítulo 4, veremos que esse caso particular tem por trás de si um fato ainda mais forte, o qual se constitui em um teorema de classificação: veremos que nesse caso (M^m, T) é equivariantemente cobordante à involução especial mencionada em 1.10.

Temos que

$$\mathbb{W}(\mathbb{RP}(\mu)) = (1 + \theta_1 + \cdots + \theta_n)\{(1 + c)^k + (1 + c)^{k-1}u_1 + \cdots + u_k\}$$

e

$$\mathbb{W}(\mathbb{RP}(\eta)) = (1 + \alpha + \alpha^2)\{(1 + c)^{m-2} + (1 + c)^{m-3}\alpha\}.$$

A polinomial adequada nesse caso será oriunda de $W[0]$ associada a μ , o que obriga a considerar $W[l]$ associada a η , onde $l = n - 2$.

Em outras palavras, consideraremos as classes

$$\frac{1}{(1 + c)^k} \mathbb{W}(\mathbb{RP}(\mu)) = (1 + \theta_1 + \cdots + \theta_n) \left\{ 1 + \frac{u_1}{(1 + c)} + \cdots + \frac{u_k}{(1 + c)^k} \right\},$$

$$\frac{1}{(1 + c)^k} \mathbb{W}(\mathbb{RP}(\eta)) = (1 + \alpha + \alpha^2) \{(1 + c)^{n-2} + (1 + c)^{n-3}\alpha\}.$$

Se $m > n + 1$, $m - 1 \geq n + 1$, e então podemos considerar a polinomial $W[0]_1^{n+1} c^{m-1-(n+1)}$ associada a μ , a qual tem dimensão $m - 1$ e é idêntica à polinomial $W[l]_1^{n+1} c^{m-1-(n+1)}$ associada a η . Temos que $W[0]_1$ sobre $\mathbb{RP}(\mu)$ é

$$W[0]_1 = \theta_1 + u_1,$$

enquanto $W[l]_1$ sobre $\mathbb{RP}(\eta)$ é

$$W[l]_1 = \binom{n-2}{1} c + \alpha + \alpha = \binom{n-2}{1} c = c,$$

uma vez que, sendo $n - 2$ ímpar, $\binom{n-2}{1} \equiv 1 \pmod{2}$.

Então, sobre $\mathbb{RP}(\mu)$,

$$W[0]_1^{n+1} c^{m-1-(n+1)} = (\theta_1 + u_1)^{n+1} c^{m-1-(n+1)}$$

o que é zero uma vez que $(\theta_1 + u_1)^{n+1}$ provem de $H^{n+1}(F^n)$. Por outro lado, sobre $\mathbb{RP}(\eta)$,

$$W[l]_1^{n+1} c^{m-1-(n+1)} = c^{n+1} \cdot c^{m-n-2} = c^{m-1},$$

o qual pelo Lema 3.3.4 é o gerador de $H^{m-1}(\mathbb{RP}(\eta))$. Isto encerra a prova no caso n ímpar.

Iniciaremos então a abordagem do caso em que n é par. Considere portanto a partir de agora n par, e portanto $n - 2$ também é par. Escreva $n - 2 = 2^p q$, onde q é ímpar e $p > 0$. A escolha da polinomiais nesse caso não é tão simples como no caso n ímpar, demandando o uso da classe X . Conforme vimos, tal classe sobre $\mathbb{RP}(\mu)$ assume o aspecto geral

$$X = W[r_1]_{2r_1} W[r_2]_{2r_2} \cdots W[r_h]_{2r_h} W[s_1]_{2s_1+1} W[s_2]_{2s_2+1} \cdots W[s_t]_{2s_t+1},$$

e a mesma é usada com valores especiais dos $r_{i's}$ e $s_{i's}$ (do tipo $2^p - 2^i$) e levando em conta as propriedades especiais das classes do tipo $W[r]_{2r}$ e $W[r]_{2r+1}$. Ao utilizar tal tipo de classe para produzir polinomiais sobre $\mathbb{RP}(\mu)$, devemos levar em conta que as mesmas polinomiais deverão ser consideradas sobre $\mathbb{RP}(\eta)$, e portanto os pedaços $W[l]_{2r}$, $W[l]_{2r+1}$ sobre $\mathbb{RP}(\eta)$, onde $l = n + r - 2$, devem ser utilizados, respectivamente, no lugar de $W[r]_{2r}$ e $W[r]_{2r+1}$. Nossa primeira tarefa será, portanto, computar os pedaços, $W[l]_{2r}$ e $W[l]_{2r+1}$ sobre $\mathbb{RP}(\eta)$.

Temos

$$\begin{aligned} W[l] &= \frac{1}{(1+c)^{m-2-l}} \mathbb{W}(\mathbb{RP}(\eta)) = \frac{1}{(1+c)^{k-r}} \mathbb{W}(\mathbb{RP}(\eta)) = \\ &= (1 + \alpha + \alpha^2) \{ (1+c)^{n+r-2} + (1+c)^{n+r-3} \}. \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} W[l]_{2r} &= \binom{n+r-2}{2r} c^{2r} + \binom{n+r-3}{2r-1} \alpha c^{2r-1} + \binom{n+r-2}{2r-1} \alpha c^{2r-1} \\ &+ \binom{n+r-3}{2r-2} \alpha^2 c^{2r-2} + \binom{n+r-2}{2r-2} \alpha^2 c^{2r-2} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} W[l]_{2r+1} &= \binom{n+r-2}{2r+1} c^{2r+1} + \binom{n+r-3}{2r} \alpha c^{2r} + \binom{n+r-2}{2r} \alpha c^{2r} \\ &+ \binom{n+r-3}{2r-1} \alpha^2 c^{2r-1} + \binom{n+r-2}{2r-1} \alpha^2 c^{2r-1}. \end{aligned}$$

Computemos então $W[l]_{2r}$ para $r = 2^p - 2^i$, onde $i = 0, 1, \dots, p-1$. Lembremos que $n - 2 = 2^p q$, portanto $n = 2^p q + 2$. Para facilitar a notação escreveremos as vezes $2r = 2^{p+1} - 2^{i+1} = y$. Temos para $r = 2^p - 2^i$ que

$$\begin{aligned}
 W[l]_{2^{p+1}-2^{i+1}} &= \binom{2^p q + 2^p - 2^i}{2^{p+1} - 2^{i+1}} c^y && + \binom{2^p q + 2^p - 2^i - 1}{2^{p+1} - 2^{i+1} - 1} \alpha c^{y-1} \\
 &+ \binom{2^p q + 2^p - 2^i}{2^{p+1} - 2^{i+1} - 1} \alpha c^{y-1} && + \binom{2^p q + 2^p - 2^i - 1}{2^{p+1} - 2^{i+1} - 2} \alpha^2 c^{y-2} \\
 &+ \binom{2^p q + 2^p - 2^i}{2^{p+1} - 2^{i+1} - 2} \alpha^2 c^{y-2} && = \binom{\dots + 2^{p+1} - 2^i}{2^{p+1} - 2^{i+1}} c^y \\
 &+ \binom{\dots + 2^{p+1} - 2^i - 1}{2^{p+1} - 2^{i+1} - 1} \alpha c^{y-1} && + \binom{\dots + 2^{p+1} - 2^i}{2^{p+1} - 2^{i+1} - 1} \alpha c^{y-1} \\
 &+ \binom{\dots + 2^{p+1} - 2^i - 1}{2^{p+1} - 2^{i+1} - 2} \alpha^2 c^{y-2} && + \binom{\dots + 2^{p+1} - 2^i}{2^{p+1} - 2^{i+1} - 2} \alpha^2 c^{y-2}.
 \end{aligned}$$

Pelo teorema de *Lucas*, o coeficiente binomial $\binom{a}{b}$ é não nulo módulo 2 se, e somente se, a expansão diádica de b estiver contida na expansão diádica de a . Usando este princípio, podemos decidir a paridade dos cinco termos acima; temos

$$\text{i) } \binom{\dots + 2^{p+1} - 2^i}{2^{p+1} - 2^{i+1}} = 1 \text{ , pois } \begin{cases} 2^{p+1} - 2^i = 2^p + 2^{p-1} + \dots + 2^{i+1} + 2^i & \text{e} \\ 2^{p+1} - 2^{i+1} = 2^p + 2^{p-1} + \dots + 2^{i+1} \end{cases}$$

$$\text{ii) } \binom{\dots + 2^{p+1} - 2^i - 1}{2^{p+1} - 2^{i+1} - 1} = 0, \text{ pois}$$

$$\begin{cases} 2^{p+1} - 2^i - 1 = 2^p + \dots + 2^{i+1} + \underline{0} + 2^{i-1} + \dots + 1 & \text{e} \\ 2^{p+1} - 2^{i+1} - 1 = 2^p + \dots + 2^{i+2} + 0 + \underline{2^i} + \dots + 1 \end{cases}$$

$$\text{iii) } \binom{\dots + 2^{p+1} - 2^i}{2^{p+1} - 2^{i+1} - 1} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = 0 \\ 0 & \text{se } i \geq 1 \end{cases}, \text{ pois}$$

$$\text{se } i = 0 \begin{cases} 2^{p+1} - 1 = 2^p + 2^{p-1} + \dots + 2 + 1 & \text{e} \\ 2^{p+1} - 2 - 1 = 2^p + 2^{p-1} + \dots + 2^2 + 0 + 1 \end{cases}$$

$$\text{se } i \geq 1 \begin{cases} 2^{p+1} - 2^i = 2^p + 2^{p-1} + \dots + 2^i + 0 + \dots + 0 & \text{e} \\ 2^{p+1} - 2^{i+1} - 1 = 2^p + 2^{p-1} + \dots + 2^{i+1} + 0 + 2^{i-1} + \dots + 1 \end{cases}$$

$$\text{iv)} \quad \binom{\dots + 2^{p+1} - 2^i - 1}{2^{p+1} - 2^{i+1} - 2} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = 0 \\ 0 & \text{se } i \geq 1 \end{cases}, \text{ pois}$$

$$\text{se } i = 0 \begin{cases} 2^{p+1} - 2 = 2^p + 2^{p-1} + \dots + 2 + 0 & \text{e} \\ 2^{p+1} - 4 = 2^p + 2^{p-1} + \dots + 2^2 + 0 + 0 \end{cases}$$

$$\text{se } i \geq 1 \begin{cases} 2^{p+1} - 2^i - 1 = 2^p + 2^{p-1} + \dots + 2^{i+1} + \underline{0} + 2^{i-1} + \dots + 1 & \text{e} \\ 2^{p+1} - 2^{i+1} - 2 = 2^p + 2^{p-1} + \dots + 2^{i+2} + 0 + \underline{2^i} + \dots + 2 + 0 \end{cases}$$

e finalmente

$$\text{v)} \quad \binom{\dots + 2^{p+1} - 2^i}{2^{p+1} - 2^{i+1} - 2} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = 0 \text{ ou } 1 \\ 0 & \text{se } i \geq 2 \end{cases}, \text{ pois}$$

$$\text{se } i = 0 \begin{cases} 2^{p+1} - 1 = 2^p + 2^{p-1} + \dots + 2 + 1 & \text{e} \\ 2^{p+1} - 4 = 2^p + 2^{p-1} + \dots + 2^2 + 0 + 0 \end{cases}$$

$$\text{se } i = 1 \begin{cases} 2^{p+1} - 2 = 2^p + 2^{p-1} + \dots + 2 + 0 & \text{e} \\ 2^{p+1} - 6 = 2^p + 2^{p-1} + \dots + 2^3 + 0 + 2 + 0 \end{cases}$$

$$\text{se } i = 2 \begin{cases} 2^{p+1} - 2^2 = 2^p + 2^{p-1} + \dots + 2^2 + \underline{0} + 0 & \text{e} \\ 2^{p+1} - 2^3 - 2 = 2^p + 2^{p-1} + \dots + 2^4 + 0 + 2^2 + \underline{2} + 0 \end{cases}$$

$$\text{se } i > 2 \begin{cases} 2^{p+1} - 2^i = 2^p + 2^{p-1} + \dots + 2^i + 0 + \dots + 0 & \text{e} \\ 2^{p+1} - 2^{i+1} - 2 = 2^p + 2^{p-1} + \dots + 2^{i+2} + 0 + 2^i + \dots + 2 + 0 \end{cases}$$

Logo $W[l]_{2^{p+1}-2^{i+1}}$ para $r = 2^p - 2^i$ é dado por:

$$W[l]_{2^{p+1}-2^{i+1}} = \begin{cases} c^{y_0} + \alpha c^{y_0-1} & \text{se } i = 0 \quad (y_0 = 2^{p+1} - 2) \\ c^{y_1} + \alpha^2 c^{y_1-2} & \text{se } i = 1 \quad (y_1 = 2^{p+1} - 4) \\ c^{y_i} & \text{se } i \geq 2 \quad (y_i = 2^{p+1} - 2^{i+1}) \end{cases}$$

Ou seja,

$w[l]_{2^{p+1}-2}$	$=$	$c^{y_0} + \alpha c^{y_0-1}$	$\text{se } r = 2^p - 1$	
$w[l]_{2^{p+1}-4}$	$=$	$c^{y_1} + \alpha^2 c^{y_1-2}$	$\text{se } r = 2^p - 2$	
$w[l]_{2^{p+1}-2^{i+1}}$	$=$	c^{y_i}	$\text{se } r = 2^p - 2^i$	$\text{e } i \geq 2$

onde $y_i = 2^{p+1} - 2^{i+1}$.

Agora considere a classe $w[l]_{2^{p+1}-1}$ para $r = 2^p - 1$. Temos

$$\begin{aligned}
W[l]_{2^{p+1}-1} &= \binom{2^p q + 2^p - 1}{2^{p+1} - 1} c^{2^{p+1}-1} + \binom{2^p q + 2^p - 2}{2^{p+1} - 2} \alpha c^{2^{p+1}-2} \\
&+ \binom{2^p q + 2^p - 1}{2^{p+1} - 2} \alpha c^{2^{p+1}-2} + \binom{2^p q + 2^p - 2}{2^{p+1} - 3} \alpha^2 c^{2^{p+1}-3} \\
&+ \binom{2^p q + 2^p - 1}{2^{p+1} - 3} \alpha^2 c^{2^{p+1}-3} = \binom{\dots + 2^{p+1} - 1}{2^{p+1} - 1} c^{2^{p+1}-1} \\
&+ \binom{\dots + 2^{p+1} - 2}{2^{p+1} - 2} \alpha c^{2^{p+1}-2} + \binom{\dots + 2^{p+1} - 1}{2^{p+1} - 2} \alpha c^{2^{p+1}-2} \\
&+ \binom{\dots + 2^{p+1} - 2}{2^{p+1} - 3} \alpha^2 c^{2^{p+1}-3} + \binom{\dots + 2^{p+1} - 1}{2^{p+1} - 3} \alpha^2 c^{2^{p+1}-3}.
\end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned}
\binom{\dots + 2^{p+1} - 1}{2^{p+1} - 1} &= 1; & \binom{\dots + 2^{p+1} - 2}{2^{p+1} - 2} &= 1; & \binom{\dots + 2^{p+1} - 1}{2^{p+1} - 2} &= 1; \\
\binom{\dots + 2^{p+1} - 2}{2^{p+1} - 3} &= 0; & \binom{\dots + 2^{p+1} - 1}{2^{p+1} - 3} &= 1.
\end{aligned}$$

Assim

$$W[l]_{2^{p+1}-1} = c^{2^{p+1}-1} + \alpha^2 c^{2^{p+1}-3}, \text{ para } r = 2^p - 1$$

Suponhamos agora $p \leq q + 1$ e considere a classe X dada por:

$$X = W[l_0]_{2^{p+1}-1}^{q+1-p} W[l_{p-1}]_{2^{p+1}-2^p} W[l_{p-2}]_{2^{p+1}-2^{p-1}} \cdots W[l_{p-i}]_{2^{p+1}-2^{i+1}} \cdots W[l_0]_{2^{p+1}-2},$$

onde cada l_i é obtido fazendo-se $r_i = 2^p - 2^i$, $i = 0, 1, \dots, p-1$.

Conforme mencionado na página 43, para tais valores dos $r_{i's}$ temos que a dimensão da classe X é $m(n-2)$. Substituindo os valores determinados acima temos:

$$X = (c^{2^{p+1}-1} + \alpha^2 c^{2^{p+1}-3})^{q+1-p} \cdot c^{2^{p+1}-2^p} \cdots c^{2^{p+1}-2^3} \cdot (c^{y_1} + \alpha^2 c^{y_1-2})(c^{y_0} + \alpha c^{y_0-1})$$

onde $y_1 = 2^{p+1} - 2^2$ e $y_0 = 2^{p+1} - 2$.

Analisemos as parcelas acima com mais cuidado, fazendo $y = y_1$ e $z = y_0$. Note que

$$(c^y + \alpha^2 c^{y-2})(c^z + \alpha c^{z-1}) = c^{y+z} + \alpha c^{y+z-1} + \alpha^2 c^{y+z-2},$$

e com relação à primeira parcela

$$(c^{2^{p+1}-1} + \alpha^2 c^{2^{p+1}-3})^{q+1-p} = \sum_{i=0}^{q+1-p} \binom{q+1-p}{i} c^{(2^{p+1}-1)(q+1-p-i)} (\alpha^2 c^{2^{p+1}-3})^i =$$

$$= [c^{(2^{p+1}-1)(q+1-p)} + (q+1-p)c^{(2^{p+1}-1)(q-p)+2^{p+1}-3}\alpha^2].$$

Então multiplicando tais parcelas

$$[c^{(2^{p+1}-1)(q+1-p)} + (q+1-p)\alpha^2 c^{(2^{p+1}-1)(q-p)+2^{p+1}-3}](c^{y+z} + \alpha c^{y+z-1} + \alpha^2 c^{y+z-2}) =$$

$$= c^{(2^{p+1}-1)(q+1-p)+y+z} + \alpha c^{(2^{p+1}-1)(q+1-p)+y+z-1} + \alpha^2 c^{(2^{p+1}-1)(q+1-p)+y+z-2} +$$

$$+ (q+1-p)\alpha^2 c^{(2^{p+1}-1)(q-p)+2^{p+1}-3+y+z}.$$

Levando em conta o fato que q é ímpar temos:

$$(q+1-p) \equiv \begin{cases} 0 \pmod{2} & \text{se } p \text{ é par} \\ 1 \pmod{2} & \text{se } p \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Inserindo os fatos acima coletados na classe X , obtemos que

$$X = \begin{cases} c^t + \alpha c^{t-1} + \alpha^2 c^{t-2} & \text{se } p \text{ é par} \\ c^t + \alpha c^{t-1} & \text{se } p \text{ é ímpar,} \end{cases}$$

onde $t = m(n-2)$.

Seja agora, $p > q+1$ e escreva $p = q+s$. Considere então a classe X dada por:

$$X = W[l_{p-1}]_{2^{p+1}-2^p} \cdots W[l_s]_{2^{p+1}-2^{s+1}},$$

com l_{i^s} sendo obtidos fazendo-se $r_i = 2^p - 2^i$, $i = s, \dots, p-1$.

Aqui também a dimensão da classe X é $m(n-2)$. Note que $s \geq 2$, portanto

$$W[l_i]_{2^{p+1}-2^{i+1}} = c^{2^{p+1}-2^{i+1}}$$

para $s \leq i \leq p-1$.

Segue que $X = c^t$ onde $t = m(n-2)$.

Estamos agora em condições de exibir as polinomiais $p(c, W_1, \dots, W_{m-1})$ que produzem números característicos nulos sobre $\mathbb{RP}(\mu)$ e não nulos sobre $\mathbb{RP}(\eta)$, como pretendíamos, no caso em que n é par. Tais polinomiais envolverão as classes X acima descritas para $p \leq q+1$ e $p > q+1$, lembrando que quando consideradas sobre $\mathbb{RP}(\mu)$ cada termo $W[l_i]_t$ deve ser substituído pelo correspondente $W[r_i]_t$, $l_i = n + r_i - 2$. Suponha então $m > m(n-2) + 4$, ou seja, $m-1 \geq m(n-2) + 4$, e considere inicialmente $p > 1$. Seja a classe $W[0]_2$ sobre $\mathbb{RP}(\mu)$. Temos

$$W[0]_2 = \theta_2 + \theta_1 u_1 + u_1 c + u_2$$

e portanto

$$W[0]_2^2 = \theta_2^2 + \theta_1^2 u_1^2 + u_1^2 c^2 + u_2^2$$

é tal que todos seus termos possui classe que provem de $H^*(F^n)$ com dimensão no mínimo 2. Por outro lado, vimos na página 43 que as classes X acima descritas possuem dimensão $m(n-2)$ e são tais que todos os seus termos contêm elementos providos de $H^*(F^n)$ com dimensão $> n-2$. Segue que

$$W[0]_2^2 X$$

é tal que todos seus termos contêm elementos providos de $H^*(F^n)$ com dimensão $> n$, ou seja,

$$W[0]_2^2 X = 0.$$

Observe que

$$\dim(W[0]_2^2 X) = m(n-2) + 4;$$

como $(m-1) - (m(n-2) + 4) \geq 0$, podemos considerar a polinomial

$$W[0]_2^2 X c^{m-1-(m(n-2)+4)}$$

a qual tem dimensão $m-1$ e obviamente também é nula. Nossa tarefa estará portanto completada, quando $p > 1$, se provarmos que sobre $\mathbb{RP}(\eta)$ a polinomial acima produz número característico não nulo. Note que, sobre $\mathbb{RP}(\eta)$, $W[0]_2$ deve ser substituída por $W[n-2]_2$, e neste caso

$$\begin{aligned} W[n-2]_2 &= \binom{2^p q + 2 - 2}{2} c^2 + \binom{n-2}{1} c\alpha + \binom{n-3}{1} c\alpha \\ &= \binom{2^p q}{2} c^2 + c\alpha \end{aligned}$$

uma vez que $\binom{n-2}{1}$ e $\binom{n-3}{1}$ são 1 e 0 (ou 0 e 1) mod 2. Por outro lado, como $p > 1$ e q é ímpar, 2 não comparece na partição diádica de $2^p q$. Pelo Teorema de *Lucas*, segue que

$$W[n-2]_2 = c\alpha$$

e portanto

$$W[n-2]_2^2 = c^2 \alpha^2.$$

Agora, nossas computações anteriores da classe X sobre $\mathbb{RP}(\eta)$ mostraram que os possíveis valores de X são do tipo:

$$X = c^t + \alpha c^{t-1} + \alpha^2 c^{t-2}, \quad X = c^t + \alpha c^{t-1}, \quad X = c^t.$$

Como $\alpha^j = 0$ se $j \geq 3$, segue que para quaisquer desses casos temos

$$W[n-2]_2^2 X = \alpha^2 c^{t-2}.$$

Multiplicando por $c^{m-1-(m(n-2)+4)}$, concluímos que a polinomial correspondente sobre $\mathbb{RP}(\eta)$ origina a classe $\alpha^2 c^{m-3} \in H^{m-1}(\mathbb{RP}(\eta))$, a qual pelo Lema 3.3.4 é o gerador. Segue o resultado.

Suponhamos agora $p = 1$, ou seja, $n = 2q + 2$ com q ímpar. Note inicialmente que o cálculo acima

$$W[0]_2 = \theta_2 + \theta_1 u_1 + u_1 c + u_2,$$

também é válido neste caso. Portanto, as considerações acima se repetem, bastando argumentar porque nesse caso $W[n-2]_2^2 X$ origina o gerador de $H^{m-1}(\mathbb{RP}(\eta))$. Temos que

$$W[n-2] = (1 + \alpha + \alpha^2)\{(1+c)^{2q} + (1+c)^{2q-1}\alpha\},$$

portanto

$$\begin{aligned} W[n-2]_2 &= \binom{2q}{2} c^2 + \binom{2q-1}{1} c\alpha + \binom{2q}{1} c\alpha + \alpha^2 + \alpha^2 \\ &= c^2 + c\alpha. \end{aligned}$$

Segue que

$$W[n-2]_2^2 = c^4 + c^2 \alpha^2.$$

Agora, vimos atrás que se $p = 1$ então $X = c^t + \alpha c^{t-1}$. Segue que

$$\begin{aligned} W[n-2]_2^2 X &= (c^4 + c^2 \alpha^2)(c^t + \alpha c^{t-1}) = c^{4+t} + c^{3+t} \alpha + c^{2+t} \alpha^2 + c^{1+t} \alpha^3 = \\ &= c^{4+t} + c^{3+t} \alpha + c^{2+t} \alpha^2. \end{aligned}$$

Como cada tal termo, após multiplicação pela conveniente potência de c , reproduzirá o gerador de $H^{m-1}(\mathbb{RP}(\eta))$, módulo 2 um de tais termos sobrevive, o que encerra a prova e o capítulo. $\square$

Capítulo 4

Limitantes Específicos

4.1 Introdução

Conforme vimos no Capítulo 3, se (M^m, T) é involução fixando $F = F^2 \cup F^n$ não bordante, então $m \leq \max\{2n, m(n-2) + 4\}$. Mais especificamente, e esta é a parte sutil do resultado, vimos que, se $\eta \mapsto F^2$ é o fibrado normal e este não borda, então $m \leq m(n-2) + 4$ (na realidade, vimos que, se $\eta \mapsto F^2$ borda, então a menos de bordismo ele pode ser removido do *fixed-data*, o que significa que de fato estaríamos considerando o caso já conhecido $Fix(T) = F^n$). Fixemos então nossa atenção no caso em que $\eta \mapsto F^2$ não borda, ou seja, no limitante $m \leq m(n-2) + 4$. Conforme visto, tal limitante independe de qual das sete classes de cobordismo estável $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_7$ o fibrado η é um representante. No entanto, observemos que na página 50 mostramos que, quando n é ímpar (neste caso, $m(n-2) + 4 = n-1 + 4 = n+3$) e $\eta \in \beta_2$, então o limitante em questão pode ser melhorado para $m \leq n+1 = m(n-2) + 2$. Por causa dos exemplos especiais vistos na Seção 1.10 claramente este resultado é o melhor possível e pode ser concretamente realizado. Isto sugere o seguinte problema: fixados n um natural e $\beta \in \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_7\}$, é possível melhorar o limitante $m \leq m(n-2) + 4$ para tais valores específicos de n e β ? Em outras palavras e mais especificamente, definamos o número:

$$\varphi(n, \beta) = \text{máximo } \{m \mid \exists \text{ involução } (M^m, T) \text{ com } \textit{fixed-data } (\mu \mapsto F^n) \cup (\eta \mapsto F^2) \\ \text{tal que } \eta \in \beta\}.$$

Claramente pelo capítulo anterior temos

$$\varphi(n, \beta) \leq m(n-2) + 4 \quad \text{para qualquer } n \text{ e qualquer } \beta.$$

Também conforme o comentário acima temos que

$$\varphi(n, \beta_2) = m(n-2) + 2 \quad \text{quando } n \text{ é ímpar.}$$

Para provar que $m(n; \{2\}) = \max\{2n, m(n-2) + 4\}$, foi necessário exibir exemplos nas dimensões *top*; especificamente, recordemos o exemplo considerado na dimensão $m(n-2) + 4$ (vide página 34): se $(M^{m(n-2)}, T)$ é a involução maximal de [12] fixando $\{\text{ponto}\} \cup F^{n-2}$, então a involução considerada foi

$$(M^{m(n-2)} \times \mathbb{RP}^2 \times \mathbb{RP}^2, T \times \text{twist}).$$

Nesse caso, como o fibrado normal da diagonal $\mathbb{RP}^2 \subset \mathbb{RP}^2 \times \mathbb{RP}^2$ em $\mathbb{RP}^2 \times \mathbb{RP}^2$ é o fibrado tangente $\tau \mapsto \mathbb{RP}^2$, temos que o fibrado normal de $\mathbb{RP}^2$ em $M^{m(n-2)} \times \mathbb{RP}^2 \times \mathbb{RP}^2$ é $\tau \oplus \mathbb{R}^{m(n-2)} \mapsto \mathbb{RP}^2$, ou seja, ele representa a classe β_4 . Em outras palavras, temos que $\varphi(n, \beta_4) = m(n-2) + 4$ para qualquer n . Note então a lista de resultados:

- i) $\varphi(n, \beta) \leq m(n-2) + 4, \forall n, \forall \beta$;
- ii) $\varphi(n, \beta_2) = m(n-2) + 2$, se n é ímpar;
- iii) $\varphi(n, \beta_4) = m(n-2) + 4, \forall n$.

Nosso objetivo neste capítulo será a obtenção de outros resultados concernentes a tais limitantes específicos. Veremos que em várias situações o limitante geral

$$\varphi(n, \beta) \leq m(n-2) + 4$$

pode ser melhorado.

4.2 $\varphi(n, \beta)$ para n ímpar

Nesta seção consideraremos sempre n ímpar. Conforme visto, o limitante geral nesse caso é $\varphi(n, \beta) \leq m(n-2) + 4 = n + 3$. Para simplificar a redação, adotaremos as mesmas notações estabelecidas no Capítulo 3; isto quer dizer que (M^m, T) sempre significará uma involução fixando $(\mu \mapsto F^n) \cup (\eta \mapsto F^2)$, com

$$\mathbb{W}(F^n) = 1 + \theta_1 + \cdots + \theta_n, \quad \mathbb{W}(\mu) = 1 + u_1 + \cdots + u_k, \quad k = m - n,$$

$$\mathbb{W}(F^2) = 1 + w_1 + w_2, \quad \mathbb{W}(\eta) = 1 + v_1 + v_2, \quad \text{e} \quad \eta \mapsto F^2$$

não bordante.

Lema 4.2.1 *Se $m \geq n + 2$, então $\left(\binom{j}{2}(w_1 + v_1)^2 + v_2 + v_1^2\right) = 0$.*

Prova: Temos que $m - 1 \geq n + 1$, portanto podemos considerar a polinomial

$$w[0]_1^{n+1} c^{m-1-(n+1)} \quad \text{sobre} \quad \mathbb{RP}(\mu),$$

a qual corresponde à polinomial

$$w[n-2]_1^{n+1} c^{m-1-(n+1)} \quad \text{sobre} \quad \mathbb{RP}(\eta).$$

Temos

$$w[0]_1 = \theta_1 + u_1 \quad \text{e} \quad w[n-2]_1 = \binom{n-2}{1} c + w_1 + v_1 = c + w_1 + v_1$$

porque $n-2$ é ímpar. Portanto

$$w[0]_1^{n+1} c^{m-1-(n+1)} = (\theta_1 + u_1)^{n+1} c^{m-1-(n+1)}$$

é zero em $H^*(\mathbb{RP}(\mu))$, uma vez que $(\theta_1 + u_1)^{n+1}$ provem de $H^{n+1}(F^n)$.

Recordemos agora o fato decorrente da *fórmula de Conner* da Seção 12, Capítulo 1: se $\nu^k \mapsto W^n$ é um fibrado vetorial sobre uma variedade fechada n -dimensional com $\mathbb{W}(\nu^k) = 1 + v_1 + \cdots + v_k$, e se $w \in H^t(W^n)$ com $t \leq n$ e $t + l = n + k - 1$, então

$$w c^l [\mathbb{RP}(\nu^k)]_2 = w \overline{v_{n-t}} [W^n]_2,$$

onde $\overline{\mathbb{W}(\nu^k)} = 1 + \overline{v_1} + \overline{v_2} + \cdots$ é a *classe dual* de $\mathbb{W}(\nu^k)$, caracterizada por

$$\mathbb{W}(\nu^k) \overline{\mathbb{W}(\nu^k)} = 1.$$

Usaremos este fato para computar a polinomial sobre $\mathbb{RP}(\eta)$. Em particular, temos que

$$c^{m-1} [\mathbb{RP}(\eta)]_2 = \overline{v_2} [F^2]_2 = (v_2 + v_1^2) [F^2]_2.$$

Então,

$$\begin{aligned} (c + w_1 + v_1)^{n+1} &= \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} (w_1 + v_1)^i c^{n+1-i} = \\ &= c^{n+1} + \binom{n+1}{1} (w_1 + v_1) c^n + \binom{n+1}{2} (w_1 + v_1)^2 c^{n-1} = \\ &= c^{n+1} + \binom{n+1}{2} (w_1 + v_1)^2 c^{n-1}, \end{aligned}$$

uma vez que $n+1$ é par e $(w_1 + v_1)^i = 0$ se $i > 2$. Segue que

$$\begin{aligned} W[n-2]_1^{n+1} c^{m-1-(n+1)} [\mathbb{RP}(\eta)]_2 &= (c + w_1 + v_1)^{n+1} c^{m-1-(n+1)} [\mathbb{RP}(\eta)]_2 = \\ &= \left(c^{m-1} + \binom{n+1}{2} (w_1 + v_1)^2 c^{m-3} \right) [\mathbb{RP}(\eta)]_2 = \\ &= \left(\binom{n+1}{2} (w_1 + v_1)^2 + v_2 + v_1^2 \right) [F^2]_2, \end{aligned}$$

o que encerra a prova. $\square$

O Lema acima, nos dá imediatamente a

Proposição 4.2.2 *Se $n \equiv 3 \pmod{4}$ e β é igual a $\beta_2, \beta_3, \beta_5$ ou β_6 então $\varphi(n, \beta) \leq n+1$.*

Prova: De fato, suponha que $\varphi(n, \beta) > n+1$. Então existe involução (M^m, T) com $\eta \mapsto F^2 \in \beta$ tal que $m \geq n+2$, e pelo lema

$$\binom{n+1}{2}(w_1 + v_1)^2 + v_2 + v_1^2 = 0.$$

Agora $n \equiv 3 \pmod{4}$ significa que 2 está na partição diádica do ímpar n , e portanto 2 não está na partição diádica do par $n+1$. Pelo Teorema de *Lucas* 1.15.3, segue que

$$\binom{n+1}{2} \equiv 0 \pmod{2}, \quad \text{portanto} \quad v_2 = v_1^2.$$

Como para β igual a $\beta_2, \beta_3, \beta_5$ ou β_6 é válido que $v_2 \neq v_1^2$, segue o resultado. $\square$

Por causa das involuções especiais da Seção 1.10, temos então o seguinte novo resultado na direção proposta:

Teorema 4.2.3 *Se $n \equiv 3 \pmod{4}$ e β é igual a $\beta_2, \beta_3, \beta_5$ ou β_6 , então $\varphi(n, \beta) = n+1$.*

Esse limitante específico ($\varphi(n, \beta) = n+1$) tem por trás de si um fato mais forte, que é um teorema de classificação. Se (M^m, T) é involução com *fixed-data*

$$(\mu \mapsto F^n) \cup (\eta \mapsto F^2), \text{ onde } \eta \in \beta_i, \ i = 2, 3, 5 \text{ ou } 6, \text{ e } n \equiv 3 \pmod{4},$$

então $m \leq n+1$ significa na realidade $m = n+1$ e já sabemos através da construção de 1.10 que existe uma involução especial (M_i^{n+1}, T_i) , $i = 2, 3, 5$ e 6 , com o referido *fixed-data*. Temos a seguinte

Proposição 4.2.4 *Se (M^m, T) tem *fixed-data* $(\mu \mapsto F^n) \cup (\eta \mapsto F^2)$, onde $\eta \in \beta_i$, $i = 2, 3, 5$ ou 6 , e $n \equiv 3 \pmod{4}$, então (M^m, T) é equivariantemente cobordante à involução especial (M_i^{n+1}, T_i) .*

Prova: Denotemos por $\mu_i \mapsto G_i^n$ o fibrado normal sobre a componente n -dimensional do conjunto de pontos fixos de (M_i^{n+1}, T_i) , $i = 2, 3, 5$ ou 6 . Pela sequência de *Conner e Floyd*, temos que

$$\begin{aligned} \partial J_*([M^m, T] + [M_i^{n+1}, T_i]) &= \partial([\mu \mapsto F^n] + \beta_i + [\mu_i \mapsto G_i^n] + \beta_i) = \\ &= \partial([\mu \mapsto F^n] + [\mu_i \mapsto G_i^n]) = 0, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\partial[\mu \mapsto F^n] = \partial[\mu_i \mapsto G_i^n].$$

Agora, o homomorfismo ∂ da sequência de *Conner e Floyd* leva $\mathcal{N}_{n-1}(BO(1))$ isomorficamente sobre $\mathcal{N}_{n-1}(\mathbb{Z}_2) \cong \mathcal{N}_{n-1}(BO(1))$. Como μ e μ_i são fibrados unidimensionais, concluímos que

$$[\mu] = [\mu_i]. \quad \text{Então} \quad [\mu] + [\beta_i] = [\mu_i] + [\beta_i], \quad \text{ou seja,} \quad [\mu + \beta_i] = [\mu_i + \beta_i];$$

o que significa que (M^m, T) e (M_i^{n+1}, T_i) possuem *fixed-data* cobordantes. Segue o resultado. $\square$

Na mesma direção, temos o

Teorema 4.2.5 *Se $n \equiv 1 \pmod{4}$ e β é igual a $\beta_1, \beta_2, \beta_6$ ou β_7 então $\varphi(n, \beta) = n + 1$.*

Prova: A argumentação nesse caso é completamente similar. Se $\varphi(n, \beta) > n + 1$, existe (M^m, T) com $\eta \mapsto F^2 \in \beta$ tal que $m \geq n + 2$, pelo lema

$$\binom{n+1}{2} (w_1 + v_1)^2 + v_2 + v_1^2 = 0.$$

Agora $n \equiv 1 \pmod{4}$ significa que 2 não está na partição diádica do ímpar n , portanto 2 está na partição diádica do par $n + 1$. Segue que

$$\binom{n+1}{2} \equiv 1 \pmod{2},$$

portanto

$$(w_1 + v_1)^2 + v_2 + v_1^2 = w_1^2 + v_1^2 + v_2 + v_1^2 = w_1^2 + v_2 = 0,$$

ou seja, $w_1^2 = v_2$. Como para β é igual a $\beta_1, \beta_2, \beta_6$ e β_7 é válido que $w_1^2 \neq v_2$, concluímos que $\varphi(n, \beta) \leq n + 1$ para tais β 's. Novamente as involuções especiais de 1.10 mostram então que $\varphi(n, \beta) = n + 1$ para tais β 's. $\square$

Com prova completamente idêntica à da Proposição 4.2.4, temos na mesma direção a

Proposição 4.2.6 *Se (M^m, T) tem *fixed-data* $(\mu \mapsto F^n) \cup (\eta \mapsto F^2)$, onde $\eta \in \beta_i$ para $i = 1, 2, 6$ ou 7 , e se $n \equiv 1 \pmod{4}$, então (M^m, T) é equivariantemente cobordante à involução especial de 1.10, obtida a partir de $\eta \mapsto F^2$.*

$\square$

Juntando os Teoremas 4.2.3 e 4.2.5, temos o

Teorema 4.2.7 *Se n é ímpar e β é igual a β_2 ou β_6 , então $\varphi(n, \beta) = n + 1$.*

Desta forma, a questão de se computar $\varphi(n, \beta)$ está completamente resolvida se n é ímpar e β é igual a β_2, β_4 ou β_6 .

Observação: Considere o caso n ímpar e $\beta = \beta_4$, quando vimos que $\varphi(n, \beta) = n + 3$. Isto significa que os possíveis valores de m para os quais existe

(M^m, T) com *fixed-data* $(\mu \mapsto F^n) \cup (\eta \mapsto F^2)$, onde $\eta \mapsto F^2 \in \beta_4$ e n é ímpar,

são $m = n + 3, n + 2$ e $n + 1$. Para $m = n + 3$ existe tal (M^m, T) , e a construção de 1.10 feita a partir de η mostra que (M^m, T) também existe para $m = n + 1$. É curioso observar que $m + n + 2$ não pode ser realizado. De fato, se existe tal (M^{n+2}, T) , então por 1.9 temos que

$$\chi(m^{n+2}) \equiv \chi(F^n) + \chi(F^2) \pmod{2},$$

onde χ é a característica de *Euler* módulo 2. Como n é ímpar, $n + 2$ é ímpar, portanto

$$\chi(F^n) \equiv 0 \quad \text{e} \quad \chi(M^{n+2}) \equiv 0. \quad \text{Segue que } \chi(F^2) \equiv 0.$$

O representante explícito da classe β_4 por nós obtido tem base $\mathbb{RP}^2$, portanto

$$\chi(\mathbb{RP}^2) \equiv 0, \quad \text{o que é falso.}$$

Juntando os fatos acima, notamos que se n é ímpar então $\varphi(n, \beta)$ está computado com exceção dos casos:

- i) $\varphi(n, \beta)$ se $n \equiv 3 \pmod{4}$ e β é igual a β_1 ou β_7 ;
- ii) $\varphi(n, \beta)$ se $n \equiv 1 \pmod{4}$ e β é igual a β_3 ou β_5 .

Os teoremas 4.2.8 e 4.2.9 computarão esses valores restantes de $\varphi(n, \beta)$.

Teorema 4.2.8 *Se $n \equiv 3 \pmod{4}$, então $\varphi(n, \beta_1) = n + 3$. Se $n \equiv 1 \pmod{4}$, então $\varphi(n, \beta_3) = n + 3$.*

Prova: Sabemos que, se $n \equiv 3 \pmod{4}$, então $\varphi(n, \beta) \leq n + 3$ para qualquer β . Portanto a prova consistirá simplesmente em exibir involução na dimensão *top* $m = n + 3$ nas situações acima consideradas. Seja a involução $(\mathbb{RP}^{n+3}, T)$ onde T é dada em coordenadas homogêneas por

$$T[x_0, x_1, \dots, x_{n+3}] = [-x_0, -x_1, -x_2, x_3, \dots, x_{n+3}].$$

Denotando por $\lambda_i \mapsto \mathbb{RP}^i$ o fibrado-linha canônico e por $n\lambda_i$ a soma de *Whitney* de n cópias de λ_i , temos que o *fixed-data* de T é

$$(3\lambda_n \mapsto \mathbb{RP}^n) \cup ((n+1)\lambda_2 \mapsto \mathbb{RP}^2).$$

Suponhamos primeiro $n \equiv 3(\text{mod } 4)$, ou seja, $n = 4x + 3$ para algum $x \geq 0$. Então $n + 1 = 4x + 4$, e

$$\mathbb{W}((n+1)\lambda_2) = (1 + \alpha)^{n+1} = (1 + \alpha)^{4x+4} = (1 + \alpha^4)^{x+1} = 1,$$

onde $\alpha \in H^1(\mathbb{RP}^2)$ é o gerador (e $\alpha^4 = 0$). Segue que $(n+1)\lambda_2 \mapsto \mathbb{RP}^2$ é cobordante ao fibrado trivial $(n+1)$ -dimensional sobre $\mathbb{RP}^2$, o qual é um representante explícito da classe β_1 . Segue que

$$\varphi(n, \beta_1) = n + 3 \quad \text{se} \quad n \equiv 3(\text{mod } 4).$$

Por outro lado, se $n \equiv 1(\text{mod } 4)$, então $n + 1 = 4x + 2$ para algum $x \geq 0$. Segue que

$$\mathbb{W}((n+1)\lambda_2) = (1 + \alpha)^{n+1} = (1 + \alpha)^{4x+2} = (1 + \alpha^4)^x(1 + \alpha^2) = 1 + \alpha^2.$$

Portanto, $(n+1)\lambda_2 \mapsto \mathbb{RP}^2$ tem a mesma classe de *Stiefel-Whitney* de

$$(2\lambda_2) \oplus \mathbb{R}^{n-1} \mapsto \mathbb{RP}^2$$

e então é cobordante a este fibrado, o qual é um representante de classe β_3 . Segue que

$$\varphi(n, \beta_3) = n + 3 \quad \text{se} \quad n \equiv 1(\text{mod } 4).$$

□

Restam portanto os casos $\varphi(n, \beta_4)$ se $n \equiv 3(\text{mod } 4)$, e $\varphi(n, \beta_5)$ se $n \equiv 1(\text{mod } 4)$. Tais casos finais serão objetos do

Teorema 4.2.9 *Se $n \equiv 3(\text{mod } 4)$, $\varphi(n, \beta_7) = n + 3$, e se $n \equiv 1(\text{mod } 4)$, então $\varphi(n, \beta_5) = n + 3$.*

Prova: Como no Teorema 4.2.8, novamente aqui a prova se resume em exibir exemplos de involuções na dimensão $m = n + 3$ nas situações em jogo. Suponha primeiro $n \equiv 3(\text{mod } 4)$. Lembremos inicialmente que, para qualquer n ímpar, $\varphi(n, \beta_4) = n + 3$. Tome então involução (M^{n+3}, T) realizando isto, ou seja, com

$$\eta \mapsto F^2 \in \beta_4.$$

Agora, no Teorema 4.2.8 exibimos, para $n \equiv 3(\text{mod } 4)$, uma involução

$$(W^{n+3}, S) \quad \text{com} \quad \eta' \mapsto F^{2'} \in \beta_1.$$

Pela Observação 3.2.5 (página 40), sabemos que $\beta_1 + \beta_4 = \beta_7$, ou seja,

$$(\eta \mapsto F^2) \cup (\eta' \mapsto F^{2'})$$

é cobordante a um fibrado $\nu^2 \mapsto G^2$ que realiza a classe β_7 . Segue que a involução

$$(M^{n+3} \cup W^{n+3}, T \cup S)$$

tem *fixed-data* do tipo $(\mu \mapsto F^n) \cup (\eta \mapsto F^2)$, onde $\eta \mapsto F^2$ representa a classe β_7

A prova que $\varphi(n, \beta_5) = n + 3$ se $n \equiv 1 \pmod{4}$ é completamente similar, bastando tomar a involução (M^{n+3}, T) com $\eta \mapsto F^2 \in \beta_4$ (como acima), a involução (W^{n+3}, S) do Teorema 4.2.8 para $n \equiv 1 \pmod{4}$ e com $\eta \mapsto F^2 \in \beta_3$, e lembrar que $\beta_3 + \beta_4 = \beta_5$. $\square$

Portanto conhecemos $\varphi(n, \beta)$ para qualquer n ímpar e qualquer β . O quadro abaixo fornece a tabela para tais valores:

β_i	n	$\varphi(n, \beta_i)$
β_1	$n \equiv 1 \pmod{4}$	$n + 1$
	$n \equiv 3 \pmod{4}$	$n + 3$
β_2	$\forall n$ ímpar	$n + 1$
β_3	$n \equiv 1 \pmod{4}$	$n + 3$
	$n \equiv 3 \pmod{4}$	$n + 1$
β_4	$\forall n$ ímpar	$n + 3$
β_5	$n \equiv 1 \pmod{4}$	$n + 3$
	$n \equiv 3 \pmod{4}$	$n + 1$
β_6	$\forall n$ ímpar	$n + 1$
β_7	$n \equiv 1 \pmod{4}$	$n + 1$
	$n \equiv 3 \pmod{4}$	$n + 3$

4.3 $\varphi(n, \beta)$ para n par

Para n par, o que sabemos até o momento é que $\varphi(n, \beta_4) = m(n - 2) + 4$ e que $\varphi(n, \beta) \leq m(n - 2) + 4$, $\forall \beta$. Para avançar mais precisaremos do

Lema 4.3.1 *Se $m > m(n - 2) + 2$, então $w_1^2 = v_1^2$.*

Prova: Considere a classe X associada a $\mathbb{RP}(\mu)$ vista no Capítulo 3. Tal classe tem dimensão $m(n - 2)$ e é tal que todos seus termos contêm elementos providos de $H^*(F^n)$ com dimensão maior que $n - 2$. Considere também a classe $W[0]_1$ associada a μ , a qual é dada por

$$W[0]_1 = \theta_1 + u_1.$$

Então $W[0]_1^2 X = (\theta_1 + u_1)^2 X$ tem dimensão $m(n-2) + 2$ e é tal que todos seus termos contêm elementos providos de $H^*(F^n)$ com dimensão maior do que n , portanto $W[0]_1^2 X = 0$. Como $m > m(n-2) + 2$, $m-1 \geq m(n-2) + 2$, portanto podemos considerar a polinomial

$$W[0]_1^2 X c^{m-1-(m(n-2)+2)} \quad \text{sobre} \quad \mathbb{RP}(\mu),$$

a qual tem dimensão $m-1$ e obviamente produz número característico nulo quando avaliada sobre $[\mathbb{RP}(\mu)]_2$. Devemos então analisar a polinomial correspondente

$$W[n-2]_1^2 X c^{m-1-(m(n-2)+2)} \quad \text{sobre} \quad \mathbb{RP}(\eta).$$

Primeiro observamos que

$$W[n-2]_1 = w_1 + v_1, \quad \text{portanto} \quad W[n-2]_1^2 = w_1^2 + v_1^2,$$

e $w_1^2 + v_1^2$ provem de $H^2(F^2)$. Segue, por razões dimensionais, que qualquer termo de X contendo elementos providos de $H^*(F^n)$ com dimensão maior que zero não contribui com a polinomial acima, uma vez que tal termo multiplicado por $w_1^2 + v_1^2$ dá automaticamente zero. Portanto a classe X sobre $\mathbb{RP}(\eta)$ deve ser analisada módulo o ideal de $H^*(\mathbb{RP}(\eta))$ gerado por $H^1(F^2) \oplus H^2(F^2)$. Em outras palavras, só nos interessa os termos da classe X do tipo $c^{\text{potência}}$. Agora, a classe X sobre $\mathbb{RP}(\mu)$ envolve classes do tipo $W[r]_{2r}$ para $r = 2^p - 2^i$, $i = 0, 1, \dots, p-1$, onde como antes estamos considerando $n-2 = 2^p q$, q ímpar, $p \geq 1$, e $W[r]_{2r+1}$ para $r = 2^p - 1$. Para cada tal r , consideramos $W[l]$ sobre $\mathbb{RP}(\eta)$, onde $l = n + r - 2$.

Temos que

$$W[l] = (1 + w_1 + w_2) \{ (1 + c)^{n+r-2} + (1 + c)^{n+r-3} v_1 + (1 + c)^{n+r-4} v_2 \}.$$

Então

$$W[l] \equiv (1 + c)^{n+r-2} \quad \text{módulo o ideal gerado por } H^1(F^2) \oplus H^2(F^2).$$

Para $r = 2^p - 2^i$, $i = 0, 1, \dots, p-1$, $p \geq 1$, e $n = 2^p q + 2$, temos então

$$W[l]_{2r} = W[l]_{2^p-2^i} \equiv \binom{n+r-2}{2^{p+1}-2^{i+1}} c^{2^{p+1}-2^{i+1}} \quad (\text{módulo } \langle H^1(F^2) \oplus H^2(F^2) \rangle),$$

onde $\langle H^1(F^2) \oplus H^2(F^2) \rangle$ denota o ideal gerado por $H^1(F^2) \oplus H^2(F^2)$. Agora,

$$\binom{n+r-2}{2^{p+1}-2^{i+1}} = \binom{2^p q + 2^p - 2^i}{2^{p+1}-2^{i+1}}.$$

Como q é ímpar, $2^p q = 2^p +$ (potências do tipo 2^x , $x > p$). Assim, para algum $y \geq p+1$, temos que

$$\begin{aligned} 2^p q + 2^p - 2^i &= (2^y + \text{potências do tipo } 2^x, x > y) - 2^i = \\ &= 2^i + 2^{i+1} + \dots + 2^{y-1} + (\text{potências do tipo } 2^x, x > y). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$2^{p+1} - 2^{i+1} = 2^{i+1} + 2^{i+2} + \dots + 2^p.$$

Pelo Teorema de *Lucas*, segue que o coeficiente binomial acima é $\equiv 1 \pmod{2}$, e assim

$$W[l]_{2r} = c^{2r} \quad (\text{módulo } \langle H^1(F^2) \oplus H^2(F^2) \rangle),$$

para tais valores de r .

Agora, para $r = 2^p - 1$, temos que

$$W[l]_{2^{p+1}} = W[l]_{2^{p+1}-1} \equiv \binom{2^p q + 2^p - 1}{2^{p+1} - 1} c^{2^{p+1}-1} \quad (\text{módulo } \langle H^1(F^2) \oplus H^2(F^2) \rangle).$$

Temos que

$$\begin{aligned} 2^p q + 2^p - 1 &= (2^p + \text{potências do tipo } 2^x, x > p) + 2^p - 1 = \\ &= (2^y + \text{potências do tipo } 2^x, x > y, \text{ onde } y \geq p+1) - 1 = \\ &= 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{y-1} + (\text{potências do tipo } 2^x, x > y). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$2^{p+1} - 1 = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^p.$$

O Teorema de *Lucas* nos garante então que o coeficiente binomial acima é $\equiv 1 \pmod{2}$, e assim

$$W[l]_{2^{p+1}} = c^{2^{p+1}} \quad (\text{módulo } \langle H^1(F^2) \oplus H^2(F^2) \rangle),$$

A conclusão é que, sobre $\mathbb{RP}(\eta)$, vale que

$$X \equiv c^{m(n-2)} \quad (\text{módulo } \langle H^1(F^2) \oplus H^2(F^2) \rangle).$$

Segue que

$$\begin{aligned} W[n-2]_1^2 X c^{m-1-(m(n-2)+2)} [\mathbb{RP}(\eta)]_2 &= (w_1^2 + v_1^2) c^{m-3} [\mathbb{RP}(\eta)]_2 \\ &= (w_1^2 + v_1^2) [F^2]_2, \end{aligned}$$

o que encerra a demonstração. $\square$

Corolário 4.3.2 *Seja (M^m, T) involução com fixed-data $(\mu \mapsto F^n) \cup (\eta \mapsto F^2)$, onde n é par e $\eta \in \beta_1, \beta_3, \beta_5$ ou β_7 . Então $m \leq m(n-2) + 2$.*

Prova: Basta observar que, para as classes $\beta_1, \beta_3, \beta_5$ e β_7 , temos $w_1^2 \neq v_1^2$. $\square$

Com o corolário acima em mãos, estamos agora em condições de computar $\varphi(n, \beta_1)$ para qualquer n par.

Teorema 4.3.3 *Se n é par, $\varphi(n, \beta_1) = m(n - 2) + 2$.*

Prova: O corolário acima nos diz que $\varphi(n, \beta_1) \leq m(n - 2) + 2$. Assim, é suficiente exibir um exemplo adequado na dimensão $m(n - 2) + 2$. Considere a involução maximal $(M^{m(n-2)}, T)$ de [12], a qual tem conjunto de pontos fixos do tipo $F^{n-2} \cup \{\text{ponto}\}$. Em $\mathbb{RP}^2 \times M^{m(n-2)}$, considere a involução

$$(x, y) \longmapsto (x, T(y)).$$

O conjunto de pontos fixos dessa involução é

$$(\mathbb{RP}^2 \times F^{n-2}) \cup (\mathbb{RP}^2 \times \{\text{ponto}\}),$$

que é do tipo $F^n \cup \mathbb{RP}^2$. O fibrado normal de $\mathbb{RP}^2$ em $\mathbb{RP}^2 \times M^{m(n-2)}$ é o fibrado trivial $m(n - 2)$ -dimensional, o qual representa a classe β_1 . Segue o resultado. $\square$

Nossas próximas computações de $\varphi(n, \beta)$ para n par envolverão pares (n, β) bem mais específicos. Se $n \in \mathbb{N}$, escreva $n - 2 = 2^p(2q + 1)$. Isto dá origem à função

$$a(n) = p - 2q.$$

Lema 4.3.4 *Com a notação acima, suponha $p \leq 2q + 2$. Seja $\alpha \in H^1(\mathbb{RP}^2)$ o gerador. Então existe involução $(M^{m(n-2)+2}, T)$ fixando $F = \mathbb{RP}^2 \cup F^n$, e tal que o fibrado normal $\eta \mapsto \mathbb{RP}^2$ satisfaz*

$$\mathbb{W}(\eta) = (1 + \alpha)^{a(n)}.$$

Prova: Como anteriormente, considere a involução maximal $(M^{m(n-2)}, T)$ de [12], fixando $F^{n-2} \cup \{\text{ponto}\}$. Considere na esfera S^2 a involução antipodal $A : S^2 \mapsto S^2$. A involução produto $A \times T$ definida em $S^2 \times M^{m(n-2)}$ é livre de pontos fixos, portanto

$$V = \frac{S^2 \times M^{m(n-2)}}{A \times T}$$

é uma variedade fechada $(m(n - 2) + 2)$ -dimensional. Em V considere a involução

$$[x, y] \longmapsto [x, T(y)].$$

É fácil verificar que tal involução não depende do representante da classe $[x, y]$. Além disso, pode-se mostrar que o conjunto de pontos fixos dessa involução é

$$\left(\frac{S^2 \times \{\text{ponto}\}}{A \times T} = \mathbb{RP}^2 \right) \cup \left(\frac{S^2 \times F^{n-2}}{A \times T} = \mathbb{RP}^2 \times F^{n-2} \right).$$

É conhecido o fato que o fibrado normal η de $\mathbb{RP}^2$ em V é $(m(n-2))\lambda \mapsto \mathbb{RP}^2$, onde λ é o fibrado-linha canônico sobre $\mathbb{RP}^2$ (a argumentação para tal fato é decorrente do material da Seção 33 (páginas 114–117) de [3]. Segue que $\mathbb{W}(\eta) = (1+\alpha)^{m(n-2)}$. Como $p \leq 2q+2$, sabemos pelo Teorema 1.11.1 da página 17 que

$$m(n-2) = (2^{p+1} - 1)(2q+1) + p+1 = 2^{p+2}q + 2^{p+1} - 2q - 1 + p+1 \equiv p-2q \pmod{4},$$

uma vez que $p \geq 1$. Segue que

$$m(n-2) - (p-2q) = m(n-2) - a(n) = 4t,$$

para algum $t \geq 0$, e portanto

$$\mathbb{W}(\eta) = (1+\alpha)^{m(n-2)} = (1+\alpha)^{a(n)+4t} = (1+\alpha)^{a(n)}(1+\alpha^4)^t = (1+\alpha)^{a(n)},$$

como queríamos. □

Obs: Note que, se $p > 2q+2$, então $m(n-2)$ é dado por

$$(2^{p+1} - 2^{p-(2g+1)})(2g+1) + 2^{p-(2g+1)}(2g+2) = 2^{p+2}g + 2^{p+1} + 2^{p-(2g+1)} \equiv 0 \pmod{4},$$

e neste caso $\eta \mapsto \mathbb{RP}^2$ é portanto um representante da classe β_1 , para a qual já temos exemplos de involuções com $m = m(n-2) + 2$ para todo n par; em outras palavras, a consideração de $p > 2q+2$ não nos traz nada de novo.

O Corolário 4.3.2 nos fornece vários valores novos de $\varphi(n, \beta)$.

Teorema 4.3.5 *Se $n \in \mathbb{N}$ é um natural par tal que $a(n) \equiv 1 \pmod{4}$ e $p \leq 2q+2$ (onde $n-2 = 2^p(2q+1)$), então $\varphi(n, \beta_5) = m(n-2) + 2$.*

Prova: O Corolário 4.3.2 nos diz que $\varphi(n, \beta_5) \leq m(n-2) + 2$, portanto devemos exibir um exemplo adequado na dimensão $m = m(n-2) + 2$. O Lema 4.3.4 nos fornece um exemplo (M^m, T) com $m = m(n-2) + 2$ e com conjunto de pontos fixos do tipo $F_T = F^n \cup \mathbb{RP}^2$, tal que o fibrado normal $\eta \mapsto \mathbb{RP}^2$ satisfaz $\mathbb{W}(\eta) = (1+\alpha)^{a(n)} = 1+\alpha$, uma vez que $a(n) \equiv 1 \pmod{4}$. Portanto η representa β_2 . Por outro lado, temos o exemplo (W^m, S) considerado no Teorema 4.3.3, onde $m = m(n-2) + 2$, $F_S = F^n \cup \mathbb{RP}^2$ e o fibrado normal $\nu \mapsto \mathbb{RP}^2$ representa a classe β_1 . Como $\beta_1 + \beta_2 = \beta_5$, temos que a involução $(W^m, S) \cup (M^m, T)$ providencia o exemplo desejado. □

Obs: Os naturais da forma $2^y y$, onde y é qualquer número ímpar, satisfazem as condições exigidas pelo Teorema 4.3.5.

Teorema 4.3.6 *Se $n \in \mathbb{N}$ é um natural par tal que $a(n) \equiv 2 \pmod{4}$ e $p \leq 2q+2$ (onde $n-2 = 2^p(2q+1)$), então $\varphi(n, \beta_3) = m(n-2) + 2$.*

Prova: Novamente o Corolário 4.3.2 nos diz que basta exibir um exemplo adequado. O Lema 4.3.4 fornece um exemplo (M^m, T) com $m = m(n - 2) + 2$, $\text{Fix}(T) = F^n \cup \mathbb{RP}^2$ e com $\eta \mapsto \mathbb{RP}^2$ satisfazendo $\mathbb{W}(\eta) = (1 + \alpha)^{a(n)} = (1 + \alpha)^2$, uma vez que $a(n) \equiv 2 \pmod{4}$. Portanto η representa β_3 . $\square$

Obs: Os naturais da forma $2^{y+1}y$, onde y é qualquer número ímpar, fornecem uma família de exemplos de naturais satisfazendo as condições impostas pelo Teorema 4.3.6.

Teorema 4.3.7 *Se $n \in \mathbb{N}$ é um natural par tal que $a(n) \equiv 3 \pmod{4}$ e $p \leq 2q + 2$, então $\varphi(n, \beta_7) = m(n - 2) + 2$.*

Prova: Pelo Corolário 4.3.2, é suficiente exibir um exemplo na dimensão em questão. A construção deste exemplo segue os mesmos passos efetuados para a obtenção do exemplo do Teorema 4.3.5. Primeiro, o Lema 4.3.4 fornece um exemplo (M^m, T) com $m = m(n - 2) + 2$, com $F_T = F^n \cup \mathbb{RP}^2$ e com $\eta \mapsto \mathbb{RP}^2$ satisfazendo $\mathbb{W}(\eta) = (1 + \alpha)^{a(n)} = (1 + \alpha)^3$, uma vez que $a(n) \equiv 3 \pmod{4}$. Portanto η representa β_4 . Por outro lado, temos o exemplo (W^m, S) considerado no Teorema 4.3.3, onde $m = m(n - 2) + 2$ e $F_S = F^n \cup \mathbb{RP}^2$, e tal que $\nu \mapsto \mathbb{RP}^2$ representa β_1 . Como $\beta_1 + \beta_4 = \beta_7$, temos que a involução $(M^m, T) \cup (W^m, S)$ fornece o exemplo procurado. $\square$

Obs: Os naturais da forma $2^{y+2-4x}y$, onde $x \geq 1$ e y é qualquer número ímpar com $y \geq 3$, contituem exemplos satisfazendo as condições do Teorema 4.3.7.

Nosso próximo e final objetivo, concernente ao cálculo de $\varphi(n, \beta)$ com n par, será mostrar que $\varphi(n, \beta_2) = \varphi(n, \beta_6) = m(n - 2) + 4$ quando n é múltiplo de 4. Especificamente, escreveremos daqui até o final $n = 4(j + 1) = 4j + 4$ para $j = 0, 1, 2, \dots$. Sumarizando, obteremos o

Teorema 4.3.8 $\varphi(n, \beta_2) = \varphi(n, \beta_6) = m(n - 2) + 4$ para $n = 4(j + 1) = 4j + 4$, onde $j = 0, 1, 2, \dots$

Prova: Temos os seguintes fatos em mãos:

- i) $\varphi(n, \beta) \leq m(n - 2) + 4$, $\forall n, \forall \beta$;
- ii) existe exemplo (M^m, T) fixando $F^n \cup F^2$ onde $(\eta \mapsto F^2) \in \beta_4$, com $m = m(n - 2) + 4$, para qualquer natural n ;
- iii) $\beta_2 + \beta_4 = \beta_6$.

Juntando tais fatos, vemos então que é suficiente apresentar exemplos (M^m, T) com $m = m(n - 2) + 4$, $n = 4(j + 1)$ e $(\eta \mapsto F^2) \in \beta_2$. Tais exemplos, os quais descreveremos a seguir, nos foram fornecidos pelo Prof. R. E. Stong.

Dado $n = 4j + 4$, considere a variedade de *Dold*

$$M^m = P(2j + 5, 2j + 2) = \frac{S^{2j+5} \times \mathbb{CP}^{2j+2}}{A \times C},$$

onde $A : S^{2j+5} \mapsto S^{2j+5}$ é a aplicação antipodal e $C : \mathbb{CP}^{2j+2} \mapsto \mathbb{CP}^{2j+2}$ é a conjugação, isto é, a aplicação que a cada número complexo z associa o complexo conjugado $\bar{z}$. Em M^m , considere a involução induzida por $U \times L$, onde

$$U(x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{2j+5}) = (x_0, x_1, x_2, -x_3, \dots, -x_{2j+5})$$

$$L[z_0, z_1, z_2, \dots, z_{2j+2}] = [z_0, -z_1, -z_2, \dots, -z_{2j+2}].$$

O conjunto de pontos fixos da involução $(U \times L)$, é formado pelos pontos $[x, z]$ tais que $(U \times L)[x, z] = [x, z]$; como $[x, z] = [-x, \bar{z}]$, isto é equivalente aos pontos $[x, z]$ tais que $(U(x), L[z]) = (x, [z])$ ou $(U(x), L[z]) = (-x, [\bar{z}])$.

Para $(U(x), L[z]) = (x, [z])$ temos:

$$U(x) = x \iff x = (x_0, x_1, x_2, 0, \dots, 0), \quad \text{isto é,} \quad x \in S^2 \subset S^{2j+5}, \quad \text{e}$$

$$L[z] = [z] \iff z = (z_0, 0, \dots, 0) \text{ ou } z = (0, z_1, z_2, \dots, z_{2j+2}), \text{ isto é, } z \in (\mathbb{CP}^0 \cup \mathbb{CP}^{2j+1}).$$

Logo o conjunto de pontos fixos neste caso é da forma:

$$\frac{S^2 \times (\mathbb{CP}^0 \cup \mathbb{CP}^{2j+1})}{A \times C} = \mathbb{RP}^2 \cup P(2, 2j + 1) = \mathbb{RP}^2 \cup F_1^{4j+4}.$$

Para $(U(x), L[z]) = (-x, [\bar{z}])$ temos:

$$U(x) = -x \iff x = (0, 0, 0, x_3, \dots, x_{2j+5}), \quad \text{isto é,} \quad x \in S^{2j+2} \subset S^{2j+5}, \quad \text{e}$$

$$L[z] = [\bar{z}] \iff (z_0, -z_1, \dots, -z_{2j+2}) = (\bar{z}_0, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots, \bar{z}_{2j+2}),$$

isto é, $z_0 = r_0$ real e $z_j = ir_j$ imaginário puro se $j = 1, 2, \dots, 2j + 2$, ou seja,

$$(z_0, -z_1, \dots, -z_{2j+2}) = (r_0, ir_1, \dots, ir_{2j+2}).$$

Agora, em $\mathbb{CP}^{2j+2}$, temos que

$$(r_0, ir_1, \dots, ir_{2j+2}) \sim (-r_0, -ir_1, \dots, -ir_{2j+2}) \sim (ir_0, -r_1, \dots) \sim (-ir_0, r_1, \dots).$$

Então, considerando os elementos da forma $(r_0, ir_1, \dots, ir_{2j+2})$, temos que

$$(r_0, ir_1, \dots, ir_{2j+2}) \sim (-r_0, -ir_1, \dots, -ir_{2j+2}),$$

o que nos dá uma identificação com $\mathbb{RP}^{2j+2}$. Assim, o conjunto de pontos fixos é

$$F_2^{4j+4} = \frac{S^{2j+2} \times \mathbb{RP}^{2j+2}}{A \times C}.$$

Note que, como $n = 4j + 4$, e tomando

$$M^m = P(2j + 5, 2j + 2) = \frac{S^{2j+5} \times \mathbb{CP}^{2j+2}}{A \times C}$$

com involução T induzida pela involução $(U \times L)$, temos

$$m = 2j + 5 + 4j + 4 = 6j + 9 = 6j + 5 + 4 = m(4j + 2) + 4 = m(n - 2) + 4,$$

pois para $n - 2 = 4j + 2 = 2(2j + 1)$ temos

$$m(2(2j + 1)) = 3(2j + 1) + 2 = 6j + 5.$$

Isto nos dá uma involução (M^m, T) tal que $F_T = \mathbb{RP}^2 \cup F^n$, com $n = 4j + 4$, $m = m(n - 2) + 4$ e $F^n = F_1 \cup F_2$.

A respeito do fibrado normal sobre a componente $\mathbb{RP}^2$, necessitamos de alguns fatos gerais sobre as variedades de *Dold*

$$P(l, s) = \frac{S^l \times \mathbb{CP}^s}{A \times C}.$$

É conhecido o fato que existem dois fibrados canônicos sobre $P(l, s)$: um fibrado unidimensional $\lambda \mapsto P(l, s)$ (herdado do fibrado linha canônico real $\lambda \mapsto \mathbb{RP}^l$) e um fibrado bidimensional $\nu \mapsto P(l, s)$ (herdado do fibrado linha canônico complexo $\nu \mapsto \mathbb{CP}^s$). Mais ainda, se $0 \leq i \leq l$ e $0 \leq t \leq s$, e $S^i \hookrightarrow S^l$ e $\mathbb{CP}^t \hookrightarrow \mathbb{CP}^s$ são as inclusões canônicas (completando com zeros as coordenadas restantes), então sabe-se que

$$\frac{S^i \times \mathbb{CP}^t}{A \times C} = P(i, t)$$

é subvariedade de $P(l, s)$ com fibrado normal

$$(l - i)\lambda \oplus (s - t)\nu \mapsto P(i, t),$$

onde λ, ν significam as restrições sobre $P(i, t)$ dos prévios λ, ν . Na particular situação em que $t = 0$, temos que

$$P(i, t) = \frac{S^i \times \mathbb{CP}^0}{A \times C} \cong \mathbb{RP}^i,$$

e nesse caso sabe-se também que $\nu \mapsto P(i, 0)$ reduz-se à $\lambda \oplus \mathbb{R} \mapsto \mathbb{RP}^i$ (isso ocorre devido ao fato que em uma fibra $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ sobre tal $\mathbb{RP}^i$, quocientada pela conjugação,

o eixo O_x é identificado com ele mesmo, produzindo a parcela $\mathbb{R}$, enquanto o eixo O_y é quocientado via $x \mapsto -x$, produzindo a parcela λ).

Usando as considerações acima, note que no exemplo em questão a componente $\mathbb{RP}^2$ é na verdade

$$\frac{S^2 \times \mathbb{CP}^0}{A \times C},$$

e portanto o fibrado normal de $\mathbb{RP}^2$ em M^m é

$$(2j+3)\lambda \oplus (2j+2)\nu = (2j+3)\lambda \oplus (2j+2)(\lambda \oplus \mathbb{R}) =$$

$$= (2j+3)\lambda \oplus (2j+2)\lambda \oplus (2j+2)\mathbb{R} = (4j+5)\lambda \oplus (2j+2)\mathbb{R},$$

e como $4j+5 \equiv 1 \pmod{4}$, tal fibrado é cobordante a $\lambda \oplus (m-3)\mathbb{R} \mapsto \mathbb{RP}^2$. Em outras palavras, $\eta \mapsto F^2$ representa β_2 como queríamos. $\square$

No quadro abaixo sumarizamos os valores de $\varphi(n, \beta)$ obtidos para n par:

β_i	n par	$\varphi(n, \beta_i)$
β_1	$\forall n$ par	$m(n-2) + 2$
β_2	$n = 4p, p \geq 1$	$m(n-2) + 4$
β_3	$a(n) \equiv 2 \pmod{4}$	$m(n-2) + 2$
β_4	$\forall n$ par	$m(n-2) + 4$
β_5	$a(n) \equiv 1 \pmod{4}$	$m(n-2) + 2$
β_6	$n = 4p, p \geq 1$	$m(n-2) + 4$
β_7	$a(n) \equiv 3 \pmod{4}$	$m(n-2) + 2$

Referências Bibliográficas

- [1] J. M. Boardman, *On manifolds with involution*, Bull. Am. Math. Soc. **73** (1967), no. 2, 136–138.
- [2] P. E. Conner, *Diffeomorphisms of period two*, Michigan Math. Journal (1963), no. 10, 341–352.
- [3] ———, *Differentiable periodic maps*, second ed., Springer–Verlag, 1979.
- [4] P. E. Conner and E. E. Floyd, *Differentiable periodic maps*, Springer–Verlag, 1964.
- [5] Czes Kosniowski and R. E. Stong, *Involutions and characteristic numbers*, Topology **17** (1978), no. 4, 309–330.
- [6] E. Lucas, *Théorie des nombres, 1878; reprint*, Librairie Blanchard, Paris (1961).
- [7] J. W. Milnor and J. D. Stasheff, *Characteristic classes*, Princeton University Press, 1974.
- [8] Howard Osborn, *Vector bundles*, Academic Press, Inc, 1982.
- [9] Pedro L. Q. Pergher, *Upper bounds of the dimension of manifolds with certain $\mathbb{Z}_2$ fixed sets*, Matemática Contemporânea (1997), no. 13, 269–275.
- [10] ———, *$\mathbb{Z}_2^k$ actions fixing $\{\text{point}\} \cup v^n$* , Fund. Mathem. (2002), no. 171, 83–97.
- [11] ———, *on $\mathbb{Z}_2^k$ actions*, Topology Appl (2002), no. 117, 105–112.
- [12] Pedro L. Q. Pergher and R. E. Stong, *Involutions fixing $(\text{point}) \cup F^n$* , Transformation Groups (2001), no. 6, 79–86.
- [13] David C. Royster, *Involutions fixing the disjoint union of two projective spaces*, Indiana University Mathematics Journal **29** (1980), no. 2, 267–276.
- [14] R. Thom, *Quelques propriétés globales des variété différentiables*, Comment. Math. Helvet. **28** (1954), 18–188.