SUBVARIEDADES COM VETOR CURVATURA MÉDIA PARALELO

IRWEN VALLE GUADALUPE

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação da Universidade Estadual de Campinas, como requesito parcial para a obtenção do título de Doutor em Matemática .

Orientador : Prof . Dr . CHI CHENG CHEN

Outubro - 78

À Valderez , Janaina e Juliana .

A G R A D E C I M E N T O S

Ao Prof . Dr . Chi Cheng Chen , pela atenção que dedicou na orientação deste trabalho , o qual , é fruto dos seminários : Subvariedades Mínimas , que participei no IME da USP .

Ao Prof . Dr . Antonio Conde , que orientou o meu programa de Doutoramento no Imecc .

Ao Prof . Dr . Alcibiades Rigas , por toda ajuda dispensada para poder concluir este trabalho .

Ao Prof . Dr . Francesco Mercuri que por muitas vezes , pacientemente ouviu nossas exposições .

Finalmente , ao Prof . Dr . Manfredo P . Do Carmo , por múltiples conversações e sugestões .

I N D I C E

I N T R O D U Ç Ã O

Seja M^n uma subvariedade (conexa) isométricamente imersa numa variedade de riemanniana $\tilde{M}^{n+p}(c)$, de curvatura seccional constante c . Sejam , B a *segunda forma fundamental* e H o *vetor curvatura média* dessa subvariedade M^n . Denotemos por S o quadrado do comprimento de B . Se M^n é uma subvariedade mínima e compacta da esfera unitária S^{n+p} , então Simons [12] , obtém a seguinte desigualdade :

$$\int_{M^n} \{ (2 - \frac{1}{p}) S^2 - n S \} d v \geq 0$$

onde $d v$ denota o elemento de volumen de M^n . Como consequência , segue , que se M^n não é totalmente geodésica e $S \leq n / (2 - \frac{1}{p})$ sobre todo M^n então $S = n / (2 - \frac{1}{p})$ sobre M^n . Utilizando o método do referencial móvel ; Chern , Do Carmo e Kobayashi [6] , obtiveram a mesma desigualdade de Simons e como aplicação , determinam todas as subvariedades mínimas e compactas M^n da esfera unitária S^{n+p} tal que $S = n / (2 - \frac{1}{p})$. Braidi S . e Hsiung C. C. [1] , estendem os resultados de Chern , Do Carmo e Kobayashi , determinando todas as subvariedades compactas M^n da esfera unitária S^{n+p} e tal que verificam uma condição mais geral que $S = n/ (2 - \frac{1}{p})$

Utilizando as idéias e as técnicas de [6] , o objetivo do presente trabalho , é o problema de determinar todas as subvariedades M^n , do espaço euclidiano R^{n+p} (logo $c = 0$) e do espaço hiperbólico $H^{n+p}(1)$ (logo $c = -1$) , com vetor curvatura média paralelo (para a definição veja pág . 4) não nulo , com S constante e tal que a condição

$$\left(2-\frac{1}{p}\right) S^2 + c\,\|H\|^2 = n\,c\,S + \sigma_q \qquad (*)$$

é verificada , onde $\sigma_q = \sum_{\alpha,i} \langle B(H_\alpha^2(e_i), e_i), H\rangle$ é um invariante intrínsico (veja prova da proposição 2.1) com $i = 1,2,\ldots, n$ $\alpha = n+1,\ldots,n+p$ e para cada , H_α é a matriz simétrica h_{ij}^{α} (para as funções h_{ij}^{α} , veja a definição de B pág . 4) . As hipóteses do problema proposto , aparecem naturalmente (veja corolário 2.1 págs. 17 - 18) ; a hipótese S constante , é verificada quando M^n é compacta (veja prova do corolário 3.1) . O fato de estarmos interessados em subvariedades que não sejam totalmente geodésicas (pois H não nulo implica M^n não totalmente geodésica) , é porque estas ja são soluções imediatas .

O presente trabalho consta de 3 capítulos e o conteúdo de cada um deles é o seguinte :

CAPÍTULO I .- SUBVARIEDADES DE UMA VARIEDADE RIEMANNIANA .

Nesse capítulo foram colocadas as noções preliminares e notações , como as equações locais para uma subvariedade que serão utilizadas nos capítulos seguintes . Tudo isto é feito pelo método do referencial móvel . Nos referimos também para esse capítulo a [6] Pág. 62 .

CAPÍTULO II.- DESIGUALDADES INTEGRAIS

No capítulo II obtemos primeiro , o laplaciano de uma subvariedade M^n com vetor curvatura média paralelo , de uma variedade riemanniana $\tilde{M}^{n+p}(c)$

de curvatura seccional constante c , veja proposição 2.1 . Utilizando esse laplaciano , obtem-se uma desigualdade integral que chamamos de *desigualdade de tipo Simons* (Teorema 2.1) . Como consequência dessa desigualdade , segue o corolário 2.1 , que motiva o problema proposto .

CAPÍTULO III .- SUBVARIEDADES COM VETOR CURVATURA MÉDIA PARALELO

Esse capítulo contém os resultados do trabalho . Primeiro , obtemos dois lema : lema 3.1 e lema 3.2 , que conjuntamente com o lema 3.3 e lema 3.4 respectivamente , nos permitem obter os resultados . Estabelecemos os resultados em forma global , supondo que M^n seja completa , porém esses resultados são essencialmente de natureza local .

Antes de apresentar cada resultado , damos exemplos de subvariedades que verificam as hipóteses do problema .

Se $x = (x_1 ,\dots, x_{n+1})$ é um elemento de R^{n+1} , consideremos a família de hipersuperficies :

$$S^k(r) \times R^{n-k} = \{ x \in R^{n+1} / x_1^2 + \dots + x_{k+1}^2 = r^2 \}$$

onde $r > 0$ e $1 \leq k \leq n-1$ (veja também pág. 29) . Para :

a) .- $k = n$, $S^n(r) \times R^o$ é uma *esfera* $S^n(r)$.

b) .- $1 \leq k \leq n-1$, $S^k(r) \times R^{n-k}$ chamaremos de *hipersuperficie tipo cilindro* .

A segunda forma fundamental H_{n+1} dessa familia de hipersuperficies tem autovalores $1 / r$ de multiplicidade k e 0 de multiplicidade $n-k$ (veja prova do teorema 3.1) . Para essa familia de hipersuperficies temos : $\| H \| = S = k / r^2$ e $S^2 = \sigma_q = k^2 / r^4$.

O primeiro resultado que obtemos é o seguinte :

Teorema 3.1 .- Seja M^n uma subvariedade de um espaço euclidiano R^{n+p}, com vetor curvatura média paralelo não nulo tal que S é constante e a condição (*) é verificada . Se M^n é completa , então M^n é uma hipersuperficie que pode ser uma esfera $S^n(r)$ ou um produto $S^k(r) \times R^{n-k}$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Exceto para $k = 1$, a imersão é um mergulho .

Como consequência desse teorema , segue o

Corolário 3.1 .- Se M^n é uma hipersuperficie compacta de R^{n+1} , com vetor curvatura média paralelo não nulo tal que a condição (*) é verificada, então M^n é uma esfera $S^n(r)$ e a imersão é um mergulho .

Quando $p = 1$, o teorema 3.1 , foi obtido também por Nomizu e Smyth em [11] , substituindo a condição (*) pelo fato de M^n ter curvatura seccional $K \geqslant 0$. Porém , essa hipótese é diferente da nossa , conforme observação 6 . Nosso método utilizado , é um complemento ao de Nomizu e Smyth , pois pelo teorema 3.2 , obtemos conclusões sobre hipersuperficies de curvatura seccional negativa (veja também observação 7) .

Agora , se $x = (x_1, \ldots, x_{n+1})$ e $y = (y_1, \ldots, y_{n+1})$ são dois elementos de R^{n+1} , definimos o seguinte produto interno (que não é positivo definido)

$$(x, y) = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n - x_{n+1} y_{n+1}$$

que chamamos de *métrica de Lorentz* de R^{n+1} (veja também pág. 42) . A variedade riemanniana completa (na métrica induzida) , de curvatura seccional constante igual a $c = -1/\tilde{c}^2$, e definida por :

$$H^n(\tilde{c}) = \{ (x_1,\dots,x_{n+1}) \in R^{n+1} \ / \ x_1^2 + \dots + x_n^2 - x_{n+1}^2 = -\tilde{c}^2 ,\ x_{n+1} > 0 \}$$

onde $\tilde{c} > 0$, chamamos de *espaço hiperbólico* . Vamos supor $\tilde{c} = 1$, então :

a) .- Se $x = (x_1, \dots, x_{n+1}, x_{n+2}) \in H^{n+1}(1)$, definimos a hipersuperficie " flat "

$$F^n = \{ x \in H^{n+1}(1) \ / \ x_{n+2} = x_{n+1} \}$$

que chamamos de *horoesfera* (parábola) . A segunda forma fundamental H_{n+1} dessa hipersuperficie , tem auto valores igual a 1 de multiplicidade n (veja pág. 47) . Para essa hipersuperficie temos :

$$\|H\| = S = n \quad e \quad S^2 + nS = \|H\|^2 + \sigma_q = 2n^2$$

b) .- Se $x = (x_1, \dots, x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_{n+2})$ é um elemento de $H^{n+1}(1)$, consideremos a familia de hipersuperficies :

$$S^k(r) \times H^{n-k}(\sqrt{1+r^2}) = \{ x \in H^{n+1}(r) \ / \ x_1^2 + \dots + x_{k+1}^2 = r^2 \}$$

onde $r > 0$ e $0 \leqslant k \leqslant n$ (veja também pág. 47) . Então , para

b_1) .- $k = n$, $S^k(r) \times H^0$ chamamos de *esfera geodésica* (elipse) .

b_2) .- $k = 0$, uma componente de $S^0(r) \times H^n(\sqrt{1+r^2})$ chamamos de *hipersuperficie equidistante* (hipérbola) .

b_3) .- $1 \leqslant k \leqslant n-1$, $S^k(r) \times H^{n-k}(\sqrt{1+r^2})$ chamamos de *hipersuperficie tipo cilindro* .

A segunda forma fundamental H_{n+1} dessa familia de hipersuperficies tem auto valores $\sqrt{1+r^2}/r$ de multiplicidade k e $r/\sqrt{1+r^2}$ de multpi - plicidade $n-k$ (veja prova do teorema 3.2) . para essa família de hiper - superficies , temos :

$$\|H\| = k\sqrt{1+r^2}/r + (n-k)\,r/\sqrt{1+r^2}$$

$$S = k(1+r^2)/r^2 + (n-k)\,r^2/(1+r^2)$$

$$S^2 + nS = \|H\|^2 + \sigma_q = k^2(1+r^2)/r^4 + 2k(n-k)$$

$$+ (n-k)^2 r^4/(1+r^2)^2 + nk(1+r^2)/r^2$$

$$+ n(n-k)\,r^2/(1+r^2)$$

O segundo resultado que obtemos é o seguinte

Teorema 3.2 .- Seja M^n uma subvariedade de um espaço hiperbólico $H^{n+1}(1)$, com vetor curvatura média paralelo não nulo tal que S é constante e a condição (*) é verificada . Se M^n é completa , então M^n é uma hipersu - perficie que poder ser uma horoesfera ou uma esfera geodésica ou uma hiper - superficie equidistante ou um produto $S^k(r) \times H^{n-k}(\sqrt{1+r^2})$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Exceto para $k = 1$, a imersão é um mergulho .

Como consequência desse teorema , segue o :

Corolário 3.3 .- Se M^n é uma hipersuperficie compacta de $H^{n+1}(1)$, com vetor curvatura média paralelo não nulo tal que a condição (*) é ve - rificada , então M^n é uma esfera geodésica e a imersão é um mergulho .

CAPITULO I

SUBVARIEDADES DE UMA VARIEDADE RIEMANIANA

Doravante, indicaremos por M^n e $\tilde{M}^{n+p}$ duas variedades riemanianas (conexas) de classe C^∞ e dimensões n e $n+p$, respectivamente. Diremos que uma imersão $f : M^n \to \tilde{M}^{n+p}$ é uma *imersão isométrica* se

$$< v , w >_q = < df(v) , df(w) >_{f(q)}$$

para todo q de M^n e todo par de vetores tangentes v , w de $T_q M^n$. Em outras palabras, f é uma imersão isométrica se a métrica induzida coincide com a métrica original. Se além disso, f for um difeomorfismo injetor de M^n sobre $f(M^n)$ f é chamada um *mergulho* de M^n em $\tilde{M}^{n+p}$.

Quando $f : M^n \to \tilde{M}^{n+p}$ seja uma imersão isométrica, diremos que M^n é uma *subvariedade* de $\tilde{M}^{n+p}$. No caso de $p = 1$, diremos que M^n é uma *hipersuperficie* de $\tilde{M}^{n+1}$.

1.- *EQUAÇÕES LOCAIS PARA UMA SUBVARIEDADE*

Seja $f : M^n \to \tilde{M}^{n+p}$ uma imersão isométrica. Dado um ponto q de M^n, escolheremos uma vizinhança U M^n de q de tal modo que f restrita a U seja injetora. Seja $V \subset \tilde{M}^{n+p}$ uma vizinhança de $f(q)$ tal que $V \supset f(U)$ e que em V seja possível definir um referencial adaptado $e_1, \ldots, e_{n+p}$ tal que, restritos a $f(U)$, os vetores $e_1, \ldots, e_{n+p}$ são tangentes a $f(U)$.

Convencionaremos não em tanto(como para as equações locais em V), dizendo que escolhemos um referencial adaptado $e_1, \ldots, e_{n+p}$ de $\tilde{M}^{n+p}$ tal que, restritos a M^n ($f(U)$), os vetores $e_1, \ldots, e_n$ sejam tangentes a M^n.

Usaremos a seguinte convenção de índices:

$$1 \leqslant A, B, C, \ldots, \leqslant n + p$$

$$1 \leqslant i, j, k, \ldots, \leqslant n$$

$$n + 1 \leqslant \alpha, \beta, \gamma, \ldots, \leqslant n + p$$

Com respeito ao referencial $e_1, \ldots, e_{n+p}$, seja $\omega^1, \ldots, \omega^{n+p}$ as formas duais. Então as equações de estrutura de $\tilde{M}^{n+p}$ (veja também [6]Págs. 61 - 62) são dadas por

$$d\omega^A = - \sum_B \omega^A_B \wedge \omega^B$$

$$\omega^A_B + \omega^B_A = 0 \tag{1.1}$$

$$d\omega^A_B = - \sum_C \omega^A_C \wedge \omega^C_B + \Phi^A_B$$

$$\Phi^A_B = \frac{1}{2} \sum_{C,D} K^A_{BCD} \; \omega^C \wedge \omega^D \tag{1.2}$$

$$K^A_{BCD} + K^A_{BDC} = 0$$

Quando restringimos estas formas a M^n, temos

$$\omega^{\alpha} = 0 \tag{1.3}$$

Como

$$0 = d\omega^{\alpha} = -\sum_i \omega_i^{\alpha} \wedge \omega^i$$

Pelo lema de Cartan segue

$$\omega_i^{\alpha} = \sum_j h_{ij}^{\alpha} \omega^j \ , \quad h_{ij}^{\alpha} = h_{ji}^{\alpha} \tag{1.4}$$

Das equações de estrutura de $\bar{M}^{n+p}$, obtemos então as equações de estrutura para M^n, dadas por

$$d\omega^i = -\sum_j \omega_j^i \wedge \omega^j \ , \quad \omega_j^i + \omega_i^j = 0 \tag{1.5}$$

$$\begin{aligned} d\omega_j^i &= -\sum_k \omega_k^i \wedge \omega_j^k + \Omega_j^i \\ \Omega_j^i &= \frac{1}{2} \sum_{k,\ell} R_{jk\ell}^i \omega^k \wedge \omega^{\ell} \end{aligned} \tag{1.6}$$

$$R_{jk\ell}^i = K_{jk\ell}^i + \sum_{\alpha} (h_{ik}^{\alpha} h_{j\ell}^{\alpha} - h_{i\ell}^{\alpha} h_{jk}^{\alpha}) \tag{1.7}$$

$$d\omega_{\beta}^{\alpha} = -\sum_{\gamma} \omega_{\gamma}^{\alpha} \wedge \omega_{\beta}^{\gamma} + \Omega_{\beta}^{\alpha}$$

$$\Omega_{\beta}^{\alpha} = \frac{1}{2} \sum_{k,\ell} R_{\beta k\ell}^{\alpha} \omega^k \wedge \omega^{\ell} \tag{1.8}$$

$$R_{\beta k\ell}^{\alpha} = K_{\beta k\ell}^{\alpha} + \sum_i (h_{ik}^{\alpha} h_{i\ell}^{\beta} - h_{i\ell}^{\alpha} h_{jk}^{\beta}) \tag{1.9}$$

A conexão riemaniana de M^n é definida por (ω^i_j). As formas ω^α_β definem a conexão $\nabla^\perp$ no fibrado normal da imersão (para a definição de $\nabla^\perp$, veja a continuação).

2.- *A SEGUNDA FORMA FUNDAMENTAL E VETOR CURVATURA MÉDIA PARALELO DE UMA SUBVARIEDADE*

Seja M^n uma subvariedade de uma variedade riemaniana $\tilde{M}^{n+p}$. Chamaremos

$$B = \sum_{\alpha,i,j} h^\alpha_{ij}\, \omega^i \omega^j \, e_\alpha$$

a *segunda forma fundamental da subvariedade* M^n, e

$$H = \sum_\alpha \left(\sum_i h^\alpha_{ii} \right) e_\alpha$$

de *vetor curvatura média da subvariedade* M^n.

Se denotamos por $\tilde{\nabla}$ a conexão riemaniana da variedade $\tilde{M}^{n+p}$, e se V é uma secção do fibrado normal $N(M)$ da imersão, então para todo X de $T_q M^n$ temos

$$\tilde{\nabla}_X V = \nabla_X V + \nabla^\perp_X V$$

onde $\nabla_X V$ e $\nabla^\perp_X V$ denotam a componente tangencial e normal, respectivamente. Chamaremos $\nabla^\perp$ a conexão sôbre o fibrado normal $N(M)$.

Diremos que M^n é uma subvariedade de $\tilde{M}^{n+p}$ com *vetor curvatura média paralelo* , se $\tilde{\nabla}_{X_q} H$ é tangente à subvariedade, isto é , se $\nabla^\perp_{X_q} H = 0$ para todo vetor tangente X_q de $T_q M^n$ e todo elemento q de M^n

Observação 1.- Tendo presente que

$$X < H , H > = 2 < \nabla^{\perp}_X H , H >$$

segue

a).- H paralelo implica que $\|H\|$ é constante

b).- Se $H \neq 0$, H é paralelo se e somente se $\|H\|$ é constante e $\frac{H}{\|H\|}$ é paralelo

c).- Se M^n é uma hipersuperficie , então H é paralelo se e somente se $\|H\|$ é constante.

Tomemos a derivada exterior de (1.4) e definimos h^{α}_{ijk} por

$$\sum_k h^{\alpha}_{ijk} \omega^k = d h^{\alpha}_{ij} - \sum_{\ell} h^{\alpha}_{i\ell} \omega^{\ell}_j - \sum_{\ell} h^{\alpha}_{\ell j} \omega^{\ell}_i + \sum_{\beta} h^{\beta}_{ij} \omega^{\alpha}_{\beta} \qquad (1.10)$$

Temos então

$$\sum_{j,k} (h^{\alpha}_{ijk} + \frac{1}{2} K^{\alpha}_{ijk}) \omega^j \wedge \omega^k = 0 \qquad (1.11)$$

$$h^{\alpha}_{ijk} - h^{\alpha}_{ikj} = K^{\alpha}_{ikj} = - K^{\alpha}_{ijk} \qquad (1.12)$$

Tomemos agora a derivada exterior de (1.10) e definimos $h^{\alpha}_{ijk\ell}$ por

$$\sum_{\ell} h^{\alpha}_{ijk\ell} \omega^{\ell} = dh^{\alpha}_{ijk} - \sum_{\ell} h^{\alpha}_{\ell jk} \omega^{\ell}_i - \sum_{\ell} h^{\alpha}_{i\ell k} \omega^{\ell}_j - \sum_{\ell} h^{\alpha}_{ij\ell} \omega^{\ell}_k + \sum_{\beta} h^{\beta}_{ijk} \omega^{\alpha}_{\beta} \qquad (1.13)$$

Temos portanto

$$\sum_{k,\ell} \Big(h^{\alpha}_{ijk\ell} - \frac{1}{2} \sum_m h^{\alpha}_{im} R^{m}_{jk\ell} - \frac{1}{2} \sum_m h^{\alpha}_{mj} R^{m}_{ik\ell}$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_\beta h^{\beta}_{ij} R^{\alpha}_{\beta k\ell} \Big) \omega^k \wedge \omega^\ell = 0 \qquad (1.14)$$

$$h^{\alpha}_{ijk\ell} - h^{\alpha}_{ij\ell k} = \sum_m h^{\alpha}_{im} R^{m}_{jk\ell} + \sum_m h^{\alpha}_{mj} R^{m}_{ik\ell}$$

$$- \sum_\beta h^{\beta}_{ij} R^{\alpha}_{\beta k\ell} \qquad (1.15)$$

Para o significado de h^{α}_{ijk} e $h^{\alpha}_{ijk\ell}$, veja [6] Pág. 62 .

CAPITULO II

DESIGUALDADES INTEGRAIS

1.- *O LAPLACIANO DA SEGUNDA FORMA FUNDAMENTAL*

Seja M^n uma subvariedade isométricamente imersa numa variedade riemaniana $\tilde{M}^{n+p}(c)$, de curvatura constante c. Então

$$K^A_{BCD} = c\,(\delta_{AC}\,\delta_{BC} - \delta_{AD}\,\delta_{BC}) \tag{2.1}$$

O *laplaciano* da segunda forma fundamental h^α_{ij} será por definição

$$\Delta h^\alpha_{ij} = \sum_k h^\alpha_{ijkk} \tag{2.2}$$

Lema 2.1.- Seja M^n uma subvariedade de $\tilde{M}^{n+p}$, com vetor curvatura média paralelo. Então

$$\sum_i h^\alpha_{iij} = 0 \quad ; \ \forall \alpha \ \text{e} \ \forall j \tag{2.3}$$

$$\sum_i h^\alpha_{iijk} = 0 \quad ; \ \forall \alpha \ \text{e} \ \forall j, k \tag{2.4}$$

Prova.-

Seja e_α um referencial ortonormal do fibrado normal $N(M)$ tal que $H = \|H\| \, e_\alpha$ para algum α, Então da definição de H, obtemos

$$\sum_\beta \left(\sum_i h^\beta_{ii} \right) e_\alpha = \|H\| \, e_\alpha$$

Segue então

$$\sum_i h^\beta_{ii} = 0 \qquad \text{se } \beta \neq \alpha \qquad , \text{ e} \tag{2.5}$$

$$\sum_i h^\alpha_{ii} = h \qquad \text{para } \beta = \alpha \tag{2.6}$$

onde $h = \|H\|$

De (1.10) tendo presente (2.6), obtemos para $\alpha = \beta$

$$\begin{aligned} \sum_{i,k} h^\alpha_{iik} \, \omega^k &= d\left(\sum_i h^\alpha_{ii} \right) - \sum_{i,\ell} h^\alpha_{i\ell} \, \omega^\ell_i - \sum_{i,\ell} h^\alpha_{\ell i} \, \omega^\ell_i \\ &\qquad + \sum_{i,\beta} h^\beta_{ii} \, \omega^\alpha_\beta \\ &= dh - 2 \sum_{i,\ell} h^\alpha_{i\ell} \, \omega^\ell_i \\ &= dh - 2 \sum_{i<\ell} h^\alpha_{i\ell} \left(\omega^\ell_i + \omega^i_\ell \right) = dh \end{aligned}$$

Como H é paralelo então $h = \|H\|$ é constante e portanto temos

$$\sum_{i,k} h^\alpha_{iik} \, \omega^k = 0 \quad ; \quad \text{para } \alpha = \beta$$

e portanto

$$\sum_{i} h^{\alpha}_{iik} = 0 \quad ; \quad \alpha = \beta \tag{2.7}$$

Novamente de (1.10) para $\beta \neq \alpha$ e tendo presente (2.5) segue

$$\sum_{i,k} h^{\beta}_{iik}\, \omega^{k} = d\left(\sum_{i} h^{\beta}_{ii} \right) - 2 \sum_{i<\ell} h^{\beta}_{i\ell} \left(\omega^{\ell}_{i} + \omega^{i}_{\ell} \right) + \sum_{i,\alpha} h^{\alpha}_{ii}\, \omega^{\beta}_{\alpha}$$

$$= \sum_{i,\alpha} h^{\alpha}_{ii}\, \omega^{\beta}_{\alpha}$$

$$= h\, \omega^{\beta}_{\alpha} \tag{2.8}$$

Como H é paralelo então pela observação 1 parte b , segue que $e_{\alpha} = \frac{H}{\|H\|}$ é paralelo e portanto $\omega^{\beta}_{\alpha} = 0$, pois $\omega^{\alpha}_{\beta}(X) = \langle \nabla^{\perp}_{X} e_{\alpha} , e_{\beta} \rangle$ para todo X de $T_q M^n$ (veja [7] Pág. 38) . Logo obtemos

$$\sum_{i} h^{\beta}_{iik} = 0 \qquad \text{se} \qquad \beta \neq \alpha \tag{2.9}$$

De (2.7) e (2.9) segue a parte (2.3) do lema.

Para verificar (2.4) de (1.13) e tendo presente (2.3) , obtemos

$$\sum_k \left(\sum_i h^{\alpha}_{iijk} \right) \omega^k = d\left(\sum_i h^{\alpha}_{iij} \right) - \sum_{i,k} h^{\alpha}_{kij}\, \omega^k_i - \sum_{i,k} h^{\alpha}_{ikj}\, \omega^k_i$$

$$- \sum_{i,k} h^{\alpha}_{iik}\, \omega^k_j + \sum_{i,\beta} h^{\beta}_{iij}\, \omega^{\alpha}_{\beta}$$

$$= - 2 \sum_{i,k} h^{\alpha}_{ikj}\, \omega^k_i$$

$$= - 2 \sum_{i<k} h^{\alpha}_{ikj} \left(\omega^k_i + \omega^i_k \right) = 0$$

Segue portanto (2.4) .

Observação 2 .- O lema 2.4 também é válido no caso de $H = 0$. Pois da definição de H

$$\sum_i h^{\alpha}_{ii} = 0$$

Agora, utilizando (1.10) segue que $\sum_i h^{\alpha}_{iij} = 0$ e novamente aplicando (1.13) obtem-se $\sum_i h^{\alpha}_{iijk} = 0$.

Para cada α , seja H_{α} a matríz simétrica (h^{α}_{ij}) , e seja

$$S_{\alpha\beta} = \sum_{i,j} h^{\alpha}_{ij}\, h^{\beta}_{ij} \qquad (2.10)$$

Então a matríz $(S_{\alpha\beta})$ de $(p \times p)$ é simétrica , logo existe uma base ortonormal $e_{n+1}, \ldots, e_{n+p}$ que diagonaliza $(S_{\alpha\beta})$, então seja

$$S_{\alpha} = S_{\alpha\alpha} \tag{2.11}$$

Denotemos por S o quadrado do comprimento da segunda forma fundamental; isto é

$$S = \sum_{\alpha} \left(\sum_{i,j} h_{ij}^{\alpha} h_{ij}^{\alpha} \right) = \sum_{\alpha} S_{\alpha} \tag{2.12}$$

Em geral, para uma matriz $A = (a_{ij})$ denotemos por $N(A)$ o quadrado da norma de A, isto é

$$N(A) = tr(A^{t}A) = \sum_{i,j} (a_{ij})^{2}$$

Proposição 2.1.- Seja M^{n} uma subvariedade com vetor curvatura média paralelo de uma variedade riemaniana $\tilde{M}^{n+p}(c)$ de curvatura seccional constante c. Então

$$\sum_{\alpha,i,j} h_{ij}^{\alpha} \Delta h_{ij}^{\alpha} = - \sum_{\alpha,\beta} N(H_{\alpha}H_{\beta} - H_{\beta}H_{\alpha}) - \sum_{\alpha} S_{\alpha}^{2} + ncS - c\|H\|^{2} + \sigma_{q} \tag{2.13}$$

onde

$$\sigma_q = \sum_{\alpha,i} \langle B (H^2_\alpha (e_i) , e_i) , H \rangle$$

é um invariante intrínsico

Prova .-

Vejamos primeiro que σ_q é um invariante intrínsico . Com efeito , seja $\bar{e}_1 , \ldots , \bar{e}_{n+p}$ um outro referencial . Então

$$\bar{e}_i = \sum_j a_{ij} e_j$$

$$\bar{e}_\alpha = \sum_\gamma b_{\alpha\gamma} e_\gamma$$

Como a matrízes de mudança de base $P = (a_{ij})$ e $\bar{P} = (b_{\alpha\gamma})$ são ortogonais , segue que

$$\sum_{\alpha,i} \langle B (H^2_{\bar\alpha} (\bar{e}_i) , \bar{e}_i) , H \rangle$$

$$= \sum_{\alpha,\gamma,\beta,i,j} a_{ij} a_{ik} b_{\alpha\gamma} b_{\alpha\beta} \langle B(H_\gamma H_\beta (e_j) , e_k) , H \rangle$$

$$= \sum_{\gamma,\beta,j} \delta_{jk} \delta_{\gamma\beta} \langle B (H_\alpha H_\beta (e_j) , e_k) , H \rangle$$

$$= \sum_{\gamma,j} \langle B (H^2_\alpha (e_j) , e_j) , H \rangle$$

Agora de [1] Pág. 239 equação 3.8 , obtemos

$$\sum_{\alpha,i,j} h^{\alpha}_{ij} \Delta h^{\alpha}_{ij}$$

$$= - \sum_{\alpha,\beta} N (H_{\alpha} H_{\beta} - H_{\beta} H_{\alpha}) - \sum_{\alpha} S^{2} + n c S - \sum_{\alpha} c (\operatorname{tr} H_{\alpha})^{2}$$

$$+ \sum_{\alpha,\beta} (\operatorname{tr} H_{\beta}) \operatorname{tr} (H_{\alpha} H_{\beta} H_{\alpha}) + \sum_{\alpha,i,j,k} h^{\alpha}_{ij} h^{\alpha}_{Kkij} \tag{2.14}$$

Por (2.4) do lema (2.1) , obtemos

$$\sum_{\alpha,i,j,k} h^{\alpha}_{ij} h^{\alpha}_{kkij} = 0 \tag{2.15}$$

Tendo presente a definição de H e a simetria de B e , denotando $H^{2}_{\alpha} (e_{i}) = H_{\alpha} H_{\alpha} (e_{i})$, tem-se

$$\sum_{\alpha} c (\operatorname{tr} H_{\alpha})^{2} = c \, \|H\|^{2} \tag{2.16}$$

$$\sum_{\alpha} < B (H^{2}_{\alpha} (e_{i}) , e_{i}) , H >$$

$$= \sum_{\alpha,\beta,i} (\operatorname{tr} H_{\beta}) < B (e_{i} , H^{2}_{\alpha} (e_{i})) , e_{\beta} >$$

$$= \sum_{\alpha,\beta} (\operatorname{tr} H_{\beta}) \operatorname{tr} (H_{\alpha} H_{\alpha} H_{\alpha})$$

$$= \sum_{\alpha,\beta} (\operatorname{tr} H_{\beta}) \operatorname{tr} (H_{\alpha} H_{\beta} H_{\alpha}) \tag{2.17}$$

Levando (2.15) , (2.16) e (2.17) para (2.14) obtemos a proposição .

2.- DESIGUALDADE TIPO SIMONS

Temos o seguinte lema algébrico

Lema 2.2 (Chern , Do Carmo e Kobayashi ; ver [6] Pág. 64 , lema 1).

Sejam A e B duas matrizes simétricas de $n \times n$. Então :

a) .- $N(AB - BA) \leq 2\, N(A)\, N(B)$

b) .- Se $A \neq 0$, $B \neq 0$ então $N(AB - BA) = 2\, N(A)\, N(B)$

se e somente se A e B podem ser transformadas simultâneamente por uma matriz ortogonal como múltiplos escalares de $\tilde{A}$ e $\tilde{B}$, respectivamente , onde

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline & 0 & 0 \end{array} \right) \quad , \quad \tilde{B} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \\ 0 & -1 & 0 \\ \hline & 0 & 0 \end{array} \right)$$

c) .- Além disso , se A_1 , A_2 , A_3 são matrizes simétricas de $n \times n$, e se

$$N(A_\alpha A_\beta - A_\beta A_\alpha) = 2\, N(A_\alpha)\, N(A_\beta) \ , \quad 1 \leq \alpha \quad \beta \leq 3$$

então pelo menos uma das matrizes A_α é nula .

Aplicando o lema 2.2 a (2.13) , obtemos

$$- \sum_{\alpha,i,j} h_{ij}^{\alpha} \Delta h_{ij}^{\alpha}$$

$$\leqslant 2 \sum_{\alpha\neq\beta} N(H_\alpha) N(H_\beta) + \sum_\alpha S_\alpha^2 - n c S + c \|H\|^2 - \sigma_q$$

$$= 2 \sum_{\alpha\neq\beta} S_\alpha S_\beta + \sum_\alpha S_\alpha^2 - n c S + c \|H\|^2 - \sigma_q \qquad (2.18)$$

$$= \left(\sum_\alpha S_\alpha \right)^2 + 2 \sum_{\alpha<\beta} S_\alpha S_\beta - n c S + \sigma_q$$

$$= (p \sigma_1)^2 + p (p - 1) \sigma_2 - n c S + c \|H\|^2 - \sigma_q$$

onde

$$p \sigma_1 = \sum_\alpha S_\alpha = S \quad , \quad \frac{p(p-1)}{2} \sigma_2 = \sum_{\alpha<\beta} S_\alpha S_\beta \qquad (2.19)$$

Além podemos verificar que

$$p^2 (p - 1) (\sigma_1^2 - \sigma_2)$$

$$= \sum_{\alpha<\beta} (S_\alpha - S_\beta)^2 \geqslant 0 \qquad (2.20)$$

Logo de (2.12) e (2.14) , segue

$$- \sum_{\alpha,i,j} h_{ij}^{\alpha} \Delta h_{ij}^{\alpha}$$

$$\leq p^2 \sigma_1^2 + p(p-1)\sigma_2 - ncS + c\|H\|^2 - \sigma_q$$

$$= p(2p-1)\sigma_1^2 - p(p-1)(\sigma_1^2 - \sigma_2) - ncS$$

$$+ c\|H\|^2 - \sigma_q$$

$$\leq p(2p-1)\sigma_1^2 - ncS + c\|H\|^2 - \sigma_q$$

$$= (2 - \frac{1}{p}) S^2 - ncS + c\|H\|^2 - \sigma_q \qquad (2.21)$$

De agora em diante vamos supor que M^n é uma subvariedade de $\tilde{M}^{n+p}$ sem bordo

Teorema 2.1 .- Seja M^n uma subvariedade compacta , orientada , com vetor curvatura média paralelo , de uma variedade riemaniana $\tilde{M}^{n+p}(c)$ de curvatura seccional constante c . Então

$$\int_{M^n} \{ (2 - \frac{1}{p}) S^2 - ncS + c\|H\|^2 - \sigma_q \} \, dV \geq 0 \qquad (2.22)$$

onde dV denota o elemento de volumen de M^n . Chamaremos (2.22) de *desigualdade tipo simons* .

Prova .-

Segue de (2.21) e do seguinte lema

Lema 2.3 .- Seja M^n uma subvariedade compacta , orientada de uma variedade riemaniana $\tilde{M}^{n+p}$. Então

$$\int_{M^n} \Big(\sum_{\alpha,i,j} h^{\alpha}_{ij} \, \Delta h^{\alpha}_{ij} \Big) \, dV = - \int_{M^n} \sum_{\alpha,i,j} (h^{\alpha}_{ijk})^2 \, dv \leq 0$$

Prova do lema 2.3 .-

Temos que

$$\frac{1}{2} \Delta \Big(\sum_{\alpha,i,j} (h^{\alpha}_{ij})^2 \Big)$$

$$= \sum_{\alpha,i,j,k} (h^{\alpha}_{ijk})^2 + \sum_{\alpha,i,j} h^{\alpha}_{ij} \, \Delta h^{\alpha}_{ij} \tag{2.23}$$

integrando (2.17) sôbre M^n e aplicando o teorema de Stokes' ao lado esquerdo , segue que este é nulo e portanto a integral do lado direito também é nulo , logo obtemos o lema .

Corolário 2.1 .- Seja M^n uma subvariedade compacta , orientada , com vetor curvatura média paralelo de uma variedade riemaniana $\tilde{M}^{n+p}(c)$ de curvatura seccional constante c . Se

$$(2 - \frac{1}{p}) S^2 + c \|H\|^2 \leq n c S + \sigma_q$$

sobre todo M^n . Então

$$(2 - \frac{1}{p}) S^2 + c \| H \|^2 = n c S + \sigma_q$$

sôbre todo M^n .

Corolário 2.2 (*Simons J.* , veja [6] Pág. 66) . Seja M^n uma subvariedade mínima , compacta e orientada , de uma variedade riemaniana $\tilde{M}^{n+p}(c)$ de curvatura seccional constante c . Se M^n não é totalmente geodés-ca e se $(2 - \frac{1}{p}) S \leq n c$ sôbre todo M^n , então $S = n c / (2 - \frac{1}{p})$ sôbre todo M^n .

Observação 3 .- H não nulo implica $S > 0$, isto é , M^n não pode ser totalmente geodésica .

Observação 4 .- Em [1] Pág. 241 , Teorema 3.1 , os autores apresentam uma expressão mais geral que a desigualdade (2.22) .

Suponhamos agora que $S = \sum_{\alpha,i,j} (h^{\alpha}_{ij})^2$ é constante sôbre M^n (M^n não necessàriamente compacta) , temos de (2.17)

$$0 = \sum_{\alpha,i,j,k} (h^{\alpha}_{ijk})^2 + \sum_{\alpha,i,j} h^{\alpha}_{ij} \Delta h^{\alpha}_{ij}$$

Combinando esta igualdade com (2.15) , segue que

$$(2 - \frac{1}{p}) S^2 - n c S + c \| H \|^2 - \sigma_q$$

$$\geq \sum_{\alpha,i,j,k} (h^{\alpha}_{ijk})^2$$

Podemos portanto concluir que se

$$(2 - \frac{1}{p}) S^2 + c \| H \|^2 = n c S + \sigma_q$$

sôbre todo M^n , então $h^{\alpha}_{ijk} = 0$, logo de (1.13) $h^{\alpha}_{ijk\ell} = 0 \ \forall\ i,j,k,\ell$

Em particular temos $h^{\alpha}_{ijkk} = 0$ e portanto $\Delta h^{\alpha}_{ij} = \sum_k h^{\alpha}_{ijkk} = 0$; portanto ambos lados de (2.21) são nulos . Segue então que todas as desigualdades em (2.18) , (2.20) e (2.21) são igualdades . Por outro lado , tendo obtido (2.18) de (2.13) utilizando a desigualdade

$$N (H_{\alpha} H_{\beta} - H_{\beta} H_{\alpha}) \leq 2 N (H_{\alpha}) N (H_{\beta})$$

devemos ter

$$N(H_\alpha H_\beta - H_\beta H_\alpha) = 2N(H_\alpha)N(H_\beta) \tag{2.24}$$

De (2.20) obtemos

$$p^2(p-1)(\sigma_1^2 - \sigma_2) = 0 \tag{2.25}$$

CPITULO III

SUBVARIEDADES COM VETOR CURVATURA MÉDIA PARALELO

De agora em diante vamos supor que M^n é uma subvariedade de uma variedade riemaniana $\tilde{M}^{n+p}$, com vetor curvatura média não nulo e, portanto $S > 0$, isto é, M^n não é totalmente geodésica.

Seja M^n uma hipersuperficie de uma variedade riemaniana $\tilde{M}^{n+1}(c)$ de curvatura seccional constante c, e chamemos

$$h_{ij} = h_{ij}^{n+1}$$

Podemos escolher um referencial $e_1, \dots, e_n$ tal que

$$h_{ij} = 0 \, , \quad i \neq j$$

e seja (3.1)

$$h_i = h_{ii}$$

Temos então o seguinte lema

Lema 3.1 .- Se M^n é uma hipersuperficie de uma variedade riemaniana $\bar{M}^{n+1}(c)$; com vetor curvatura média paralelo não nulo , tal que S é constante e a condição

$$S^2 + c\,\|H\|^2 = n\,c\,S + \sigma_q \tag{3.2}$$

é verificada . Então , após de escolher convenientemente os elementos da base $e_1, \ldots, e_n$, temos :

i) .- $h_1 = \ldots = h_n =$ constante

ou

ii) .- $h_1 = \ldots = h_k = \lambda =$ constante

$(1 < k < n)$

$h_{k+1} = \ldots = h_n = \mu =$ constante

$\lambda\mu + c = 0$

$\omega^i_j = 0$ para $1 \leq i \leq k$, $k+1 \leq j \leq n$

Prova .-

Pela parte final do Capítulo II , ja sabemos que do fato de S constante e a condição (3.2) , obtem-se que $h_{ijk} = 0$. Então para $j = i$ de

(1.10) e tendo presente (3.1) , obtemos

$$0 = d\,h_i - \sum_\ell h_{i\ell}\,\omega_i^\ell - \sum_\ell h_{\ell i}\,\omega_i^\ell + h_{ii}\,\omega_{n+1}^{n+1}$$

$$= d\,h_i - 2\sum_\ell h_{i\ell}\,\omega_i^\ell$$

$$= d\,h_i$$

o que prova que h_i , $i = 1, 2, \dots, n$ é constante . Agora escolhendo convenientemente os elementos da base $e_1, \dots, e_n$ segue a parte (i) do lema . Ou se isso não acontece , isto é , se $h_i \neq h_j$ então $\omega_j^i = 0$. Com efeito , do fato de $h_{ijk} = 0$, de (1.10) obtem-se

$$0 = \sum_\ell h_{i\ell}\,\omega_j^\ell + \sum_\ell h_{\ell j}\,\omega_i^\ell$$

$$= (h_i - h_j)\,\omega_j^i$$

Logo por ser $h_i \neq h_j$ segue que $\omega_j^i = 0$. Entaõ pela segunda parte de (1.2) e por (2.1) , temos :

$$0 = d\,\omega_j^i$$

$$= -\sum_k \omega_k^i \wedge \omega_j^k - \omega_{n+1}^i \wedge \omega_j^{n+1} + c\,\omega^i \wedge \omega^j$$

A primeira soma desta equação é nulo , pois $\omega_k^i \neq 0$ e $\omega_j^k \neq 0$ implicariam $h_i = h_k = h_j$, contrariando nossa hipótese de $h_i \neq h_j$.

Portanto temos :

$$0 = -\omega_{n+1}^i \wedge \omega_j^{n+1} + c\,\omega^i \wedge \omega^j$$

$$= \omega_i^{n+1} \wedge \omega_j^{n+1} + c\,\omega^i \wedge \omega^j$$

$$= \sum_{k,\ell} h_{ik}\, h_{j\ell}\, \omega^k \wedge \omega^\ell + c\,\omega^i \wedge \omega^j$$

$$= h_i\, h_j\, \omega^i \wedge \omega^j + c\,\omega^i \wedge \omega^j$$

$$= (h_i h_j + c)\,\omega^i \wedge \omega^j$$

Segue então que como $h_i \neq h_j$ temos $h_i h_j + c = 0$. Seja $\lambda = h_1$ e escolhendo convenientemente os elementos da base $e_1, \ldots, e_n$, temos $h_1 = \ldots = h_k = \lambda$ e $\lambda \neq h_j$ para $j \geq k+1$

obtem-se $h_{k+1} = \ldots . \; h_n = -\frac{c}{\lambda}$. Seja então $\mu = -\frac{c}{\lambda}$, e portanto segue a parte (ii) do lema

Observação 5 .- Se $e_1 , \ldots , e_n$ é uma base ortonormal de $T_q M^n$ tal que $H_{n+1} \, e_i = \lambda_i \, e_i$, $1 \leq i \leq n$, por [11] Págs. 372 - 373 vemos que

$$n\,c\,S - S^2 - c\,\|H\|^2 + \sigma_q = \sum_{i<j} (\lambda_i - \lambda_j)^2 K_{ij}$$

onde K_{ij} é a curvatura seccional dos planos gerados por $e_i \neq e_j$ para $i \neq j$.

Lema 3.2 .- Seja M^n uma subvariedade de uma variedade riemaniana $\tilde{M}^{n+p}(c)$; com vetor curvatura média paralelo não nulo , tal que S é constante e a condição

$$\left(2 - \frac{1}{p}\right) S^2 + c\,\|H\|^2 = n\,c\,S + \sigma_q \qquad (3.3)$$

é verificada . Se $p \geq 2$, então não existem tais subvariedades .

Prova .-

Como $p \geq 2$ então de (2.25) obtem-se

$$\sigma_1^2 = \sigma_2 \qquad (3.4)$$

Já sabemos por (2.18) e pela parte (c) do lema 2.2 , que não máximo duas das matrizes H_α , $\alpha = n+1, \ldots, n+p$ são diferentes de zero . Afirmamos que exatamente duas das matrizes H_α são diferentes de zero . Com efeito , suponhamos que somente H_α seja diferente de zero, temos então de (2.13)

$$\sigma_1 = \frac{1}{p} S_\alpha \quad \text{e} \quad \sigma_2 = 0$$

o que contradiz (3.4) . Portanto utilizando a parte (b) do lema 2.2 , podemos supor que

$$H_{n+1} = \lambda \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & 0 \end{array}\right)$$

$$H_{n+2} = \mu \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \\ 0 & -1 & 0 \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & 0 \end{array}\right) \qquad (3.5)$$

$$H_\alpha = 0 \quad , \qquad \alpha \geq n+3$$

onde λ , μ são não nulos . Portanto de (1.4) obtem-se :

$$\omega_1^{n+1} = \lambda\,\omega^2 \ , \quad \omega_2^{n+1} = \lambda\,\omega^1 \ , \quad \omega_i^{n+1} = 0\ ,\ i = 3\ , \ldots , n$$

$$\omega_1^{n+2} = \mu\,\omega^1 \ , \quad \omega_2^{n+2} = -\mu\,\omega^2 \ , \quad \omega_i^{n+2} = 0\ ,\ i = 3\ , \ldots , n$$

$$\omega_i^{\alpha} = 0 \qquad \text{para} \quad \alpha = n+3\ , \ldots , n+p \ ,\ i = 1\ , \ldots , n$$

Por outro lado , do fato de S ser constante e da condição (3.3) já sabemos que $h_{ijk}^{\alpha} = 0$, então por (1.10) obtemos

$$d\,h_{ij}^{\alpha} = \sum_{\ell} h_{i\ell}^{\alpha}\,\omega_j^{\ell} + \sum_{\ell} h_{\ell j}^{\alpha}\,\omega_i^{\ell} - \sum_{\beta} h_{ij}^{\beta}\,\omega_{\beta}^{\alpha} \tag{3.6}$$

Segue então que para $\alpha = n+1$, $i = 1$ e $j = 2$

$$\begin{aligned} d\,\lambda &= d\,h_{12}^{n+1} \\ &= \sum_k h_{1k}^{n+1}\,\omega_2^k + \sum_k h_{k2}^{n+1}\,\omega_1^k - \sum_{\beta} h_{12}^{\beta}\,\omega_{\beta}^{n+1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Portanto λ é constante . Análogamente de (3.6) , para $\alpha = n+2$ e $i = j$ segue que μ é constante .

De (3.5) obtemos que $\operatorname{tr} H_{n+1} = \operatorname{tr} H_{n+2} = 0$, logo $H = 0$ o que é uma contradição e portanto segue o lema .

1 .- *SUBVARIEDADES DE UM ESPAÇO EUCLIDIANO COM VETOR CURVATURA MÉDIA PARALELO*

Nosso objetivo agora é , determinar todas as subvariedades (conexas) M^n do espaço euclidiano R^{n+p} com vetor curvatura média paralelo não nulo , tal que S é constante e a condição

$$(2 - \frac{1}{p}) \; S^2 = \sigma_q \tag{3.7}$$

é verificada . Antes de apresentar nosso primeiro resultado , daremos exemplos de tais subvariedades .

Seja

$$S^k(r) = \{ x = (x_1 , ... , x_{k+1}) \in R^{k+1} / < x,x >_1 = r^2 \}$$

e denotando por $< , >_2$ a métrica induzida de R^{n-k+1} em R^{n-k} ; identificamos $R^{n+2} = R^{k+1} \times R^{n-k+1}$ com métrica produto

$$< , > = < , >_1 + < , >_2$$

Seja o mergulho

$$X : S^k(r) \times R^{n-k} \longrightarrow R^{n+1} \subset R^{n+2}$$

definido por $X(x, y) = x + y$. Então $S^k(r) \times R^{n-k}$ é uma hipersuperficie isométricamente imersa em R^{n+1}

Se $x = (x_1, \ldots, x_{n+1})$ é um elemento de R^{n+1} , em sistema de coordenadas $S^k(r) \times R^{n-k}$ é definido de seguinte modo :

$$S^k(r) \times R^{n-k} = \{ x \in R^{n+1} / x_1^2 + \ldots + x_{k+1}^2 = r^2 \} \tag{3.8}$$

onde $r > 0$ e $1 \leqslant k \leqslant n$.

Equivalentemente, esta familia de hipersuperficies dadas por (3.8) , pode ser definida do seguinte modo :

$$S^k(r) \times R^{n-k} = \{ x \in R^{n+1} / d(x, R^{n-k}) = r \}$$

(veja Fig. 1)

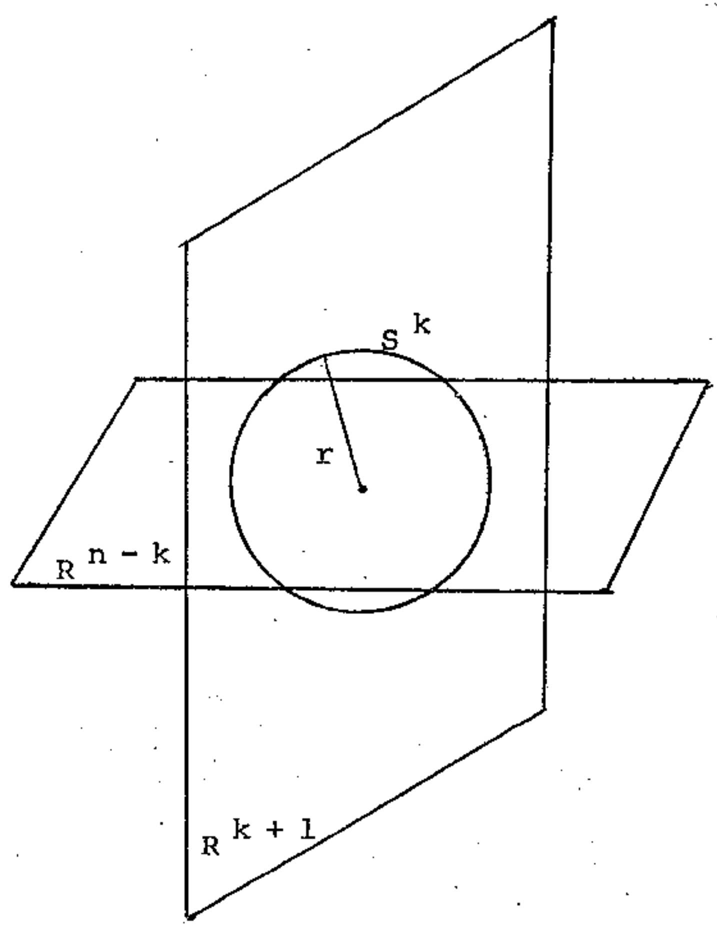

Fig. 1

Temos então para :

a) .- $k = n$, $S^n(r) \times R^o$ é uma *esfera* $S^n(r)$

b) .- $1 \leqslant k \leqslant n-1$, $S^k(r) \times R^{n-k}$ chamaremos de *hipersuperfície tipo cilindro* .

A segunda forma fundamental H_{n+1} desta familia de hipersuperficies tem autovalores $1/r$ de multiplicidade k e 0 de multiplicidade $n-k$.

(veja Prova do Teorema 3.1) . Esta familia de hipersuperficies verifica as hipóteses de nosso problema ; pois temos $\| H \| = S = k / r^2$ e $S^2 = \sigma_q = k^2 / r^4$.

Podemos agora enunciar nosso primeiro resultado , que é o seguinte teorema .

Teorema 3.1 .- Seja M^n uma subvariedade de um espaço euclidiano R^{n+p} com vetor curvatura média paralelo não nulo tal que S é constante e a condição (3.7) é verificada . Se M^n é completa , então M^n é uma hipersuperficie que pode ser uma esfera $S^n(r)$ ou um produto $S^k(r) \times R^{n-k}$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Exceto para $k = 1$ a imersão é um mergulho .

Para provar este teorema , necesitamos do seguinte lema

Lema 3 . 3 .- Seja M^n uma hipersuperficie de um espaço euclidiano R^{n+1} , com vetor curvatura média paralelo não nulo tal que S é constante e a condição (3.7) é verificada . Então M^n é parte de uma esfera $S^n(r)$ ou é localmente um produto riemaniano $M^n \supset U = M_1 \times M_2$, de espaços M_1 e M_2 de curvatura constante , $\dim M_1 = k \geqslant 1$ e $\dim M_2 = n - k \geqslant 1$. No último caso , com respeito a um referencial adaptado , as formas de conexão (ω^A_B) de R^{n+1} , restritas a M^n , é dada por

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|c}
\omega_1^1 & \cdots & \omega_k^1 & & & & -\lambda\,\omega^1 \\
\vdots & & \vdots & & 0 & & \vdots \\
\omega_1^k & \cdots & \omega_k^k & & & & -\lambda\,\omega^k \\
\hline
& & & \omega_{k+1}^{k+1} & \cdots & \omega_n^{k+1} & 0 \\
& 0 & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
& & & \omega_{k+1}^{n} & \cdots & \omega_n^{n} & 0 \\
\hline
\lambda\omega^1 & \cdots & \lambda\omega^k & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{array}\right) \qquad (3.9)$$

onde $\lambda = \frac{h}{k}$ e $h = \| H \|$

Prova do lema 3 . 3

Pela parte (i) do lema 3 . 1 , temos que M^n é parte de uma esfera $S^n(r)$, pois $h_1 = \ldots = h_n$ = constante não nula; ou se ocorre (ii) do lema 3.1 , chamando $A = H_{n+1}$, definimos as distribuições

$$T^1(q) = \{ x \in T_q M^n \,/\, Ax = \lambda x \}$$

e

$$T^2(q) = \{ x \in T_q M^n \,/\, Ax = 0\,x \}$$

de dimensões k e $n-k$, respectivamente . Ambas são diferenciáveis e integráveis . Segue por [9] Vol. I Pág. 182 , que cada ponto de M^n tem uma vizinhança U que é o produto riemaniano $M_1 \times M_2$, onde M_1 e M_2 são variedades integrais de T^1 e T^2 , respectivamente . Tendo presente (1.7) obtem-se que as curvaturas seccionais de M_1 e M_2 são dadas por

$$R^i_{jm\ell} = \lambda^2 (\delta_{im} \delta_{j\ell} - \delta_{i\ell} \delta_{jm}) , \quad 1 \leq i,j,m,\ell \leq k$$

$$R^i_{jm\ell} = 0 (\delta_{im} \delta_{j\ell} - \delta_{i\ell} \delta_{jm}) , \quad k+1 \leq i,j,m,\ell \leq n$$

Portanto , se $k \geq 2$ (respectivamente $n - k \geq 2$) então M_1 (respectivamente M_2) é um espaço de curvatura constante λ^2 (respectivamente 0) . Se $k = 1$ (respectivamente $n - k = 1$) , então a decomposição produto ainda é válido pero a curvatura seccional não está definida .

Como o vetor curvatura média H é paralelo , então

$$h = \| H \| = \sum_{i=1}^{n} h_i$$

é constante , logo

$$h = k\lambda + (n-k) 0$$

Segue portanto que $\lambda = \frac{h}{k}$ e tendo presente a última parte de (ii) do lema 3.1 , vemos que com respeito a um referencial adaptado , as formas de conexão (ω_B^A) de R^{n+1}, restritas a M^n, é dada por (3.9).

Prova do Teorema 3.1 .-

Suponhamos primeiro que M^n seja simplesmente conexa e denotemos por $\Phi : M^n \to R^{n+p}$ a imersão isométrica . Se M^n é completa e $p = 1$, pelo lema 3.3 segue que M^n é uma esfera $S^n(r)$. Agora como M^n é completa , por [9] Vol. I Pág. 176 , Teorema 4.6 , obtem-se que $\Phi : M^n \to \Phi(M^n)$ $(= S^n(r))$ é uma aplicação de recobrimento . Como $\Phi(M^n)$ é simplesmente conexa , segue que Φ é um mergulho .

Pelo lema 3.3 , sabemos também que M^n é localmente um produto riemaniano $U = M_1 \times M_2$ de espaços de curvatura constante . Provaremos agora que U é igual a um aberto do produto riemaniano $S^k(r) \times R^{n-k}$, $1 \leq k \leq n-1$; logo por ser M^n completa segue que $\Phi(M^n)$ é o produto riemaniano $S^k(r) \times R^{n-k}$.

Para verificar que M^n é localmente igual a um aberto do produto riemaniano $S^k(r) \times R^{n-k}$, procedemos do seguinte modo . Considere as hipersuperficies $S^k(r) \times R^{n-k}$ de R^{n+1} definidas por (b), e , provaremos que as formas de conexão de R^{n+1}, restritas a um aberto de $S^k(r) \times R^{n-k}$, são dadas por (3.9) .

Por um lado , temos que a segunda forma fundamental de $S^k(r) \times R^{n-k}$

tem um autovalor λ de multiplicidade k e um autovalor μ de multiplicidade $n - k$, e também $\lambda \mu = 0$. Por outro lado S^k (respectivamente R^{n-k}) tem curvatura seccional constante λ^2 (respectivamente μ^2) o que é igual a $1 / r^2$ (respectivamente 0) e portanto

$$\lambda^2 = 1 / r^2 \quad , \quad \mu^2 = 0$$

Daqui sem perda de generalidade podemos supor

$$\lambda = 1 / r \quad , \quad \mu = 0 \tag{3.10}$$

Além

$$k \lambda = h \quad (\text{ onde } h = \| H \|) \tag{3.11}$$

De (3.10) e (3.11) , obtemos

$$r_o = \frac{k}{h} \tag{3.12}$$

Portanto $S^k (r_o) \times R^{n-k}$ é uma hipersuperficie de R^{n+1} , que verifica as hipóteses de nosso problema .

Agora , seja $r_o f_o = x , f_1 , \ldots , f_k$ um referencial de R^{k+1} tal que f_o é normal a $S^k (r_o)$ e , $\phi^o , \phi^1 , \ldots , \phi^k$ o referencial dual . Para R^{n-k} em R^{n-k+1} , escolhemos um referencial $f_{k+1}, \ldots, f_{n+1}$ tal que f_{n+1} é normal a R^{n-k} e , seja $\phi^{k+1}, \ldots, \phi^{n+1}$ o dual . Seja (ϕ^A_B) , $A, B = 0, 1, \ldots, n+1$ as formas de conexão para R^{n+2} com respeito ao referencial dual (ϕ^A) $A = 0, 1, \ldots, n+1$. Então restringindo (ϕ^A) a um aberto do produto $S^k(r_o) \times R^{n-k}$, temos

$$
\begin{aligned}
&\phi^o = \phi^{n+1} = 0 \\
&\phi^o_i = -\phi^i_o = \frac{1}{r_o}\phi^i , \qquad i = 1, \ldots, k \\
&\phi^j_{n+1} = -\phi^{n+1}_j = 0\,\phi^j , \qquad j = k+1, \ldots, n \\
&\phi^A_B = -\phi^B_A = 0 , \qquad \begin{array}{l} A = 0, 1, \ldots, k \\ B = k+1, \ldots, n+1 \end{array}
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

Seja $e_o, e_1, \ldots, e_{n+1}$ novo referencial de R^{n+2} tal que

$$
\begin{aligned}
&e_o = f_{n+1} \\
&e_i = f_i , \qquad i = 1, \ldots, n \\
&e_{n+1} = f_o
\end{aligned}
$$

Portanto e_o é normal a R^{n+1} e e_{n+1} é tangente a R^{n+1} e normal a $S^k(r_o) \times R^{n-k}$.

Seja $\omega^o, \ldots, \omega^{n+1}$ o campo referencial dual de $e^o, \ldots, e^{n+1}$

Então

$$\omega^o = \phi^{n+1}$$

$$\omega^i = \phi^i \qquad , \quad i = 1, 2, \ldots, n \qquad (3.14)$$

$$\omega^{n+1} = \phi^o$$

Utilizando (3.13) e (3.14) e tendo presente que $\bar{e}_{n+1}$ é normal a $S^k(r_o) \times R^{n-k}$, temos que a segunda forma fundamental H_{n+1} da hipersuperficie $S^k(r_o) \times R^{n-k}$, na direcção do vetor e_{n+1} é dado por

$$H_{n+1} = \langle dX, de_{n+1} \rangle$$

$$= \frac{1}{r_o} \sum_{j=1}^{k} (\omega^j)^2 + 0 \sum_{j=k+1}^{n} (\omega^j)^2$$

Segue então que H_{n+1} tem um autovalor $1/r_o$ de multiplicidade k e um autovalor 0 de multiplicidade $n-k$.

Seja agora (ω_B^A), $A, B = 0, 1, \ldots, n+1$ as formas de R^{n+2} com respeito ao referencial (ω^A) ; então temos

$$
\begin{aligned}
\omega^{o}_{j} &= \phi^{n+1}_{j} && ; j = 1, 2, \ldots, n \\
\omega^{o}_{n+1} &= -\omega^{n+1}_{o} = -\phi^{o}_{n+1} && \\
\omega^{i}_{j} &= \phi^{i}_{j} && ; i, j = 1, 2, \ldots, n \\
\omega^{i}_{n+1} &= -\omega^{n+1}_{i} = \phi^{i}_{o} &&
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

Restringindo as formas (ω^{A}) a um aberto de $S^{k}(r_o) \times R^{n-k}$, de (3.13) e (3.14) obtem-se .

$$
\begin{aligned}
\omega^{o} &= \omega^{n+1} = 0 \\
\omega^{i} &= \phi^{i} \qquad ; i = 1, 2, \ldots, n
\end{aligned}
$$

Por outro lado (ω^{A}), $A = 1, 2, \ldots, n+1$ são as formas duais de e_B, $B = 1, 2, \ldots, n+1$ em R^{n+1} e, (ω^{A}_{B}) $A, B = 1, 2, \ldots, n+1$ são as formas de conexão em R^{n+1}. Restringindo estas formas a um aberto de $S^{k}(r_o) \times R^{n-k}$, por (3.13) e (3.15) temos

$$
\begin{aligned}
\omega^{i}_{j} &= 0 && ; i=1,2,\ldots,k \;,\; j=k+1,\ldots,n \\
\omega^{n+1}_{i} &= -\omega^{i}_{n+1} = \lambda\, \omega^{i} && ; i=1,2,\ldots,k \\
\omega^{n+1}_{j} &= -\omega^{j}_{n+1} = 0\, \omega^{j} && ; j= k+1,\ldots,n
\end{aligned}
$$

Segue então que as formas de conexão (ω^A_B) de R^{n+1}, restritas a um aberto de $S^k(r_o) \times R^{n-k}$ coincidem com as formas dadas por (3.9). Portanto por teorema de unicidade local das formas (ω^A) e (ω^A_B) $A, B = 1, 2, \ldots, n+1$ (veja [7] Pág. 118) obtem-se que U é igual a um aberto do produto riemaniano $S^k(r_o) \times R^{n-k}$.

Agora, aplicando novamente [9] Vol. I Pág. 176 , teorema 4.6 segue que $\Phi: M^n \to \Phi(M^n) = S^k(r_o) \times R^{n-k}$, $1 \leq k \leq n-1$ é uma aplicação de recobrimento . Além , se $k \geq 2$ $\Phi(M^n)$ é simplesmente conexa , logo Φ é um mergulho .

No caso de $k = 1$, seja $M^n = R \times R^{n-1}$ que verifica as hipóteses de nosso teorema e , seja $\Phi : M^n \to \Phi(M^n) = S^1(r_o) \times R^{n-1}$ definida por $\Phi(t, x) = (r_o e^{2\pi i t}, x)$ e vemos que Φ não é um mergulho. Pois se isso é verdade em particular Φ sería homeomorfismo e portanto o grupo fundamental $\Pi_1(R \times R^{n-1}) = 0$ sería isomorfo ao grupo fundamental $\Pi_1(S^1(r_o) \times R^{n-1}) \approx Z$, o que é absurdo .

No caso geral , isto é , se M^n não é simplesmente conexa . Seja $(\tilde{M}^n, \pi)$ o recobrimento universal de M^n. Sabemos que π é isometría local e que $\tilde{M}^n$ é completa e simplesmente conexa . Além $\tilde{M}^n$ e $\tilde{\Phi} = \Phi \circ \pi$ verificam as hipóteses de nosso teorema , portanto $\tilde{\Phi}(\tilde{M}^n) = \Phi(M^n)$ é o produto riemaniano $S^k(r_o) \times R^{n-k}$, $1 \leqslant k \leqslant n$. Se $k \neq 1$, segue que $\tilde{\Phi}$ é um mergulho e portanto Φ é também um mergulho .

Para completar o teorema se , $p \geqslant 2$ então pelo lema 3.2 não existem tais subvariedades .

Corolário 3.1 .- Seja M^n uma hipersuperficie compacta de R^{n+1} , com vetor curvatura média paralelo não nulo tal que a condição (3.7) é verificada , então M^n é uma esfera e a imersão é um mergulho .

Prova .-

Da condição (3.7) e de (2.21) obtem-se

$$\sum_{\alpha,i,j} h_{ij}^{\alpha} \Delta h_{ij}^{\alpha} \geqslant 0 \tag{3.16}$$

De (2.23) e (3.16) segue que

$$\Delta \left(\sum_{\alpha,i,j} (h_{ij}^{\alpha})^2 \right) \geqslant 0$$

Como M^n é compacta , pelo teorema de Hopf (veja [7] Pág. 78) , $S = \sum_{\alpha,i,j} (h_{ij}^{\alpha})^2$ é constante . O corolário segue agora pelo teorema 3.1 .

Corolário 3.2 .- Se M^n é uma hipersuperficie completa de R^{n+1}, com vetor curvatura média paralelo não nulo tal que S é constante e a condição (3.7) é verificada , então M^n tem curvatura seccional constante $K \geqslant 0$.

Observação 6 .- Quando $p = 1$, o teorema 3.1 foi obtido também por Nomizu e Smyth em [11] , Teorema 1 , Pág. 374 , com hipóteses : curvatura média constante , S constante e curvatura seccional K não negativa . Porém da observação 4 , podemos ver que nossa hipótese (3.7) é diferente do fato de M^n ter curvatura seccional K não negativa . Nosso método , neste caso , é um complemento ao do método utilizado pelos autores em [11] , pois o nosso permite tirar conclusões sôbre hipersuperficies de curvatura negativa , conforme o Teorema 3.2 (veja também observação 7) .

2 .- *SUBVARIEDADES DE UM ESPAÇO HIPERBÓLICO COM VETOR CURVATURA MÉDIA PARALELO* .

Este parágrafo , iniciaremos primeiramente definindo o espaço hiperbólico . Nos referimos também a [7] Pág. 121 ou [14] Págs. 2 e 3 .

Consideremos em R^{n+1} a base canônica $a_1 = (1, \ldots, 0)$, ..., $a_n = (0, \ldots, 1, 0)$, $a_{n+1} = (0, \ldots, 0, 1)$ e introduzimos uma forma bilinear simétrica $(\, , \,)$ em R^{n+1} , definida por :

$$(a_i , a_j) = \delta_{ij} , \; (a_{n+1} , a_i) = 0 , \; (a_{n+1} , a_{n+1}) = -1$$

onde $i , j = 1 , 2 , \ldots , n$.

Sejam agora $x = (x_1 , \ldots , x_{n+1})$ e $y = (y_1 , \ldots , y_{n+1})$ elementos de R^{n+1} , então por linearidade definimos o seguinte produto interno (que não é positivo definido)

$$(x , y) = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n - x_{n+1} y_{n+1}$$

e que chamaremos a *métrica de Lorentz* de R^{n+1} .

Seja $U \subset R^{n+1}$ um aberto de R^{n+1} e , $e_1 , \ldots , e_{n+1}$ um conjunto de campos diferenciáveis de vetores em U (referencial móvel em U) satisfazendo as condições

$$(e_i , e_j) = \delta_{ij}$$

$$(e_{n+1} , e_i) = 0 \;, \quad i , j = 1 , 2 , \ldots , n \qquad (3.14)$$

$$(e_{n+1} , e_{n+1}) = -1$$

Sejam $\omega^1 , \ldots , \omega^n , \omega^{n+1}$, formas diferenciais em U que em cada p U forman a base dual da base $e_1 , \ldots , e_n , e_{n+1}$ (isto é $\omega^1 , \ldots , \omega^n , \omega^{n+1}$ são linearmente independentes) . Definimos então formas ω_B^A em U por

$$d\, e_A = \sum_B \omega_B^A \, e_B \;, \quad B = 1 , 2 , \ldots , n+1 \qquad (3.15)$$

observe que a definição dos ω^A é equivalente a escrever

$$d\, x = = \sum_A \omega^A \, e_A \;, \quad A = 1 , 2 , \ldots , n+1 \qquad (3.16)$$

onde $x : R^{n+1} \to R^{n+1}$ é a aplicação identidade .

Derivando exteriormente (3.15) e (3.16) , obtemos as equações de estrutura de R^{n+1} :

$$d\,\omega^A = \sum_B \omega^B \wedge \omega_A^B \qquad (3.17)$$

$$, \quad A,B,C = 1,\ldots, n+1$$

$$d\,\omega_B^A = \sum_C \omega_C^A \wedge \omega_B^C \qquad (3.18)$$

Além da terceira parte de (3.14) e tendo presente (3.15) , temos

$$\begin{aligned} 0 &= 2\,(d\,e_{n+1}, e_{n+1}) \\ &= 2\,(\sum_A \omega_A^{n+1}\, e_A, e_{n+1}) \\ &= -2\,\omega_{n+1}^{n+1} \end{aligned}$$

Logo segue que

$$\omega_{n+1}^{n+1} = 0 \qquad (3.19)$$

Por outro lado da segunda parte de (3.14) e tendo presente (3.15) , temos

$$\begin{aligned} 0 &= (d\,e_i, e_{n+1}) + (e_i, d\,e_{n+1}) \\ &= (\sum_A \omega_A^i\, e_A, e_{n+1}) + (e_i, \sum_A \omega_A^{n+1}\, e_A) \\ &= -\,\omega_{n+1}^i + \omega_i^{n+1} \end{aligned}$$

Daqui obtem-se

$$\omega_i^{n+1} = \omega_{n+1}^i \quad , \quad i = 1, \ldots, n \qquad (3.20)$$

Considere agora o conjunto dos pontos $x \in R^{n+1}$ tais que $(x, x) = -\tilde{c}^2$, onde $\tilde{c} > 0$. Então, se

$$x = x_1 a_1 + \ldots + x_n a_n + x_{n+1} a_{n+1}$$

teremos a hipersuperficie quádrica

$$\{ (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in R^{n+1} / x_1^2 + \ldots + x_n^2 - x_{n+1}^2 = -\tilde{c}^2 \}$$

que é um *hiperbolóide de duas folhas*, cada uma homeomorfa a R^n. A componente conexa deste hiperbolóide correspondente a $x_{n+1} > 0$ será indicado por $H^n(\tilde{c})$, isto é

$$H^n(\tilde{c}) = \{ (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in R^{n+1} / x_1^2 + \ldots + x_n^2 - x_{n+1}^2 = -\tilde{c}^2 , x_{n+1} > 0 \}$$

que com a métrica induzida é uma variedade riemaniana n - dimensional completa, e que chamamos de *espaço hiperbólico*.

Para calcular a curvatura seccional de $H^n(\tilde{c})$ na métrica induzida, procedemos do seguinte modo (veja também [7] Pág. 123 - 124). Seja $(e_1, \ldots, e_{n+1})$ um referencial num aberto U de R^{n+1} que satisfazem (3.14), que são adaptados a $H^n(\tilde{c})$, isto é, restritos a $H^n(\tilde{c})$, $e_1, \ldots, e_n$ são tangentes a $H^n(\tilde{c})$ e ...

$\tilde{c}\, e_{n+1} = x$ descreve $H^n(\tilde{c})$.

Denotando por ω^A e ω^A_B , $A, B = 1, 2, \ldots, n$ as restrições a $H^n(\tilde{c})$ das formas do mesmo nome em R^{n+1} , o que implica que $\omega^{n+1} = 0$. Observando que x é a restrição a $H^n(\tilde{c})$ da aplicação identidade $x : R^{n+1} \to R^{n+1}$, tendo presente (3.16) , teremos

$$d\,x = \sum_{i=1}^{n} \omega^i e_i = \tilde{c}\, d\, e_{n+1} = \tilde{c} \sum_{i=1}^{n} \omega_i^{n+1} e_i$$

Portanto obtemos

$$\omega_i^{n+1} = \frac{1}{\tilde{c}}\, \omega^i \quad , \quad i = 1, \ldots, n \tag{3.21}$$

Tendo presente (3.20) e (3.21) obtem-se

$$\begin{aligned} \Omega^i_j &= d\,\omega^i_j - \sum_{k=1}^{n} \omega^i_k \wedge \omega^k_j \\ &= \omega^i_{n+1} \wedge \omega^{n+1}_j \\ &= \omega^{n+1}_i \wedge \omega^{n+1}_j \\ &= \frac{1}{\tilde{c}^2}\, \omega^i \wedge \omega^j \end{aligned}$$

Segue então que $H^n(\tilde{c})$ tem curvatura seccional constante igual a $-\dfrac{1}{\tilde{c}^2}$.

Vamos supor $\tilde{c} = 1$. Novamente , nosso objetivo agora é , determinar todas as subvariedades (conexas) M^n do espaço hiperbólico $H^{n+p}(1)$, com vetor curvatura média paralelo não nulo , tal que S é constante e a condição

$$(2 - \frac{1}{p}) S^2 + nS = \|H\|^2 + \sigma_q \tag{3.22}$$

é verificada . Antes de apresentar nosso segundo resultado , daremos exemplos de tais subvariedades :

a) .- Seja $x = (x_1, \ldots, x_{n+1}, x_{n+2}) \in H^{n+1}(1)$, definimos a hipersuperficie " flat "

$$F^n = \{ x \in H^{n+1}(1) \; / \; x_{n+2} = x_{n+1} \}$$

que chamaremos de *horoesfera* (parábola) . Utilizando a equação de Gauss (veja 14 Pág. 116) , vemos que a segunda forma fundamental H_{n+1} desta hipersuperficie tem autovalores $h_1 = \ldots = h_n = 1$. Para esta hipersuperficie temos :

$$\|H\| = S = n \quad \text{e} \quad S^2 + nS = \|H\|^2 + \sigma_q = 2n^2$$

Seja agora

$$S^k(r) = \{ x \in R^{k+1} \ / \ \langle x , x \rangle_1 = r^2 \}$$

e

$$H^{n-k}(\sqrt{1+r^2}) = \{ y \in R^{n-k+1} \ / \ \langle y , y \rangle_2 = -(1+r^2) \}$$

onde $\langle \, , \rangle_1$ é métrica euclidiana e $\langle \, , \rangle_2$ é a métrica de Lorentz . Além , seja $R^{n+2} = R^{k+1} \times R^{n-k+1}$ com métrica produto $(\, ,) = \langle \, , \rangle_1 + \langle \, , \rangle_2$. Se $r > 0$ e $0 \leqslant k \leqslant n$, seja o mergulho

b) .- $X : S^k(r) \times H^{n-k}(\sqrt{1+r^2}) \to H^{n+1}(1) \subset R^{n+2}$

definido por

$$X(x, y) = x + y \tag{3.23}$$

então $S^k(r) \times H^{n-k}(\sqrt{1+r^2})$ é uma hipersuperfície isometricamente imersa em $H^{n+1}(1)$.

Se $x = (x_1, \ldots, x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_{n+2}) \in H^{n+1}(1)$, em sistema de coordenadas , temos

$$S^k(r) \times H^{n-k}(\sqrt{1+r^2}) = \{ x \in H^{n+1}(1) \ / \ x_1^2 + \ldots + x_{k+1}^2 = r^2 \}$$

Então quando

b_1) .- $k = n$, $S^k(r) \times H^o$ chamaremos de *esfera geodésica* (elipse)

b_2) .- $k = 0$, uma componente de $S^o(r) \times H^n(\sqrt{1+r^2})$ chamaremos de *hipersuperficie equidistante* (hipérbola) .

b_3) .- $1 \leq k \leq n-1$, $S^k(r) \times H^{n-k}(\sqrt{1+r^2})$ chamaremos de *hipersuperficie tipo cilindro* .

Nas figuras 2 e 3 mostramos estas hipersuperficies .

A segunda forma fundamental H_{n+1} desta familia de hipersuperficies tem autovalores $\sqrt{1+r^2}/r$ de multiplicidade k e $r/\sqrt{1+r^2}$ de multiplicidade $n-k$ (veja prova do Teorema 3.2) . Para esta familia de hipersuperficies temos :

$$\|H\| = k\sqrt{1+r^2}/r + (n-k)\, r/\sqrt{1+r^2}$$

$$S = k(1+r^2)/r^2 + (n-k)\, r^2/(1+r^2)$$

$$S^2 + nS = \|H\|^2 + \sigma_q = k^2(1+r^2)/r^4 + 2k(n-k)$$
$$+ (n-k)^2 r^4/(1+r^2)^2 + nk(1+r^2)/r^2$$
$$+ n(n-k)\, r^2/(1+r^2)$$

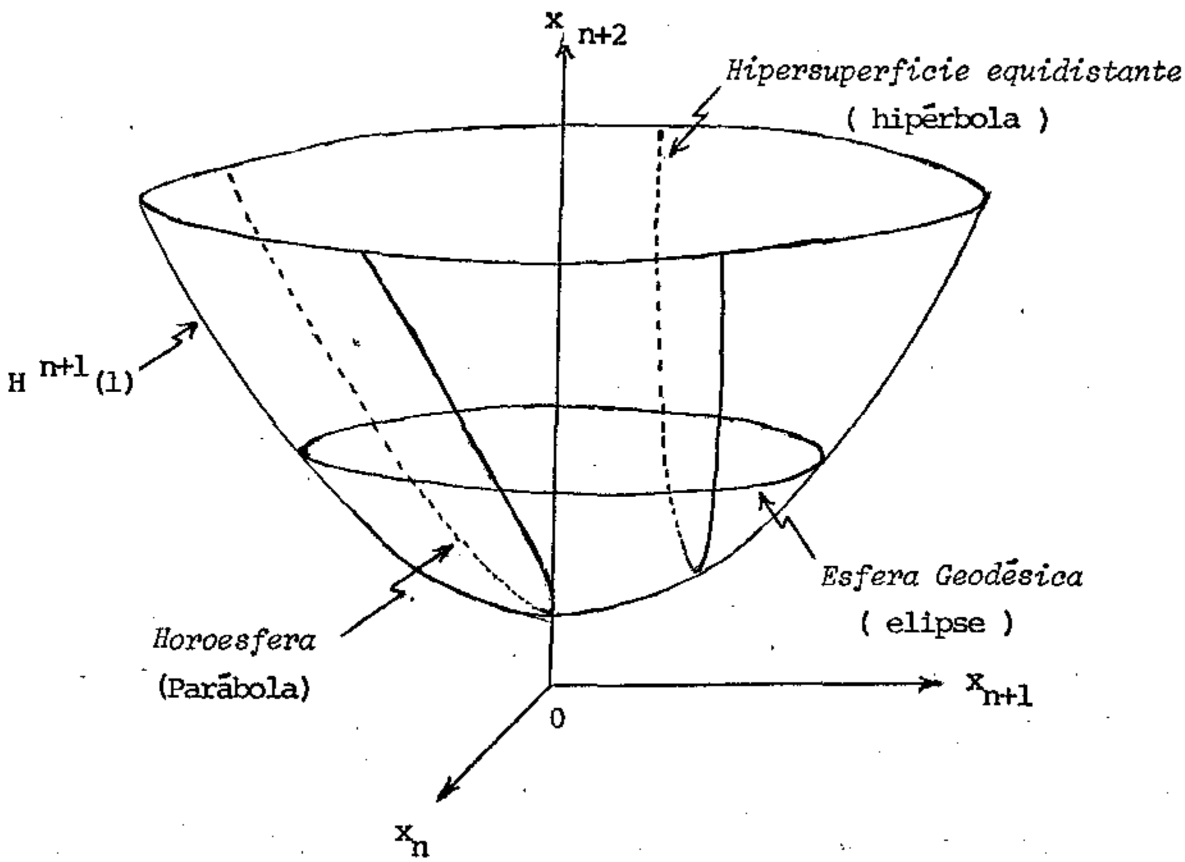
x_{n+2}
Hipersuperficie equidistante
(hipérbola)
$H^{n+1}(1)$
Esfera Geodésica
(elipse)
Horoesfera
(Parábola)
x_{n+1}
0
x_n

Fig. 2

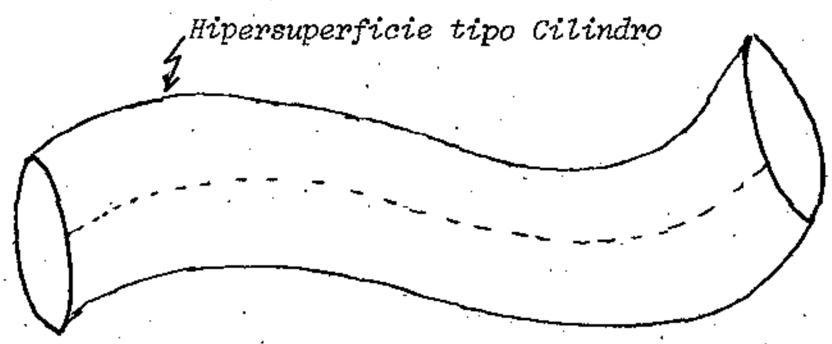
Hipersuperficie tipo Cilindro

Fig. 3

Podemos agora enunciar nosso segundo resultado , que é o seguinte teo - rema .

Teorema 3.2 .- Seja M^n uma subvariedade de um espaço hiperbólico $H^{n+p}(1)$, com vetor curvatura média paralelo não nulo tal que S é constante e a condição (3.22) é verificada . Se M^n é completa , então M^n é uma hipersuperficie que pode ser uma horoesfera ou uma esfera geodésica ou uma hipersuperficie equidistante ou um produto $S^k(r) x H^{n-k}(\sqrt{1+r^2})$ $1 \leq k \leq n-1$. Exceto para $k = 1$ a imersão é um mergulho .

Para provar este teorema , necesitamos do seguinte lema

Lema 3.4 .- Seja M^n uma hipersuperficie de um espaço hiperbólico $H^{n+1}(1)$, com vetor curvatura média paralelo não nulo tal que S é constante e a condição (3.22) é verificada . Então M^n é parte de uma horoesfera ou é parte de uma esfera geodésica ou é parte de uma hipersuperficie equidistante ou é localmente um produto riemaniano $M^n \supset U = M_1 \times M_2$ de espaços M_1 e M_2 de curvatura constante , dim $M_1 = k \geqslant 1$ e dim $M_2 = n-k \geqslant 1$ No último caso , com respeito a um referencial adaptado as formas de co - nexão (ω^A_B) de $H^{n+1}(1)$, restritas a M^n , é dada por :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|c}
\omega_1^1 & \cdots & \omega_k^1 & & & & -\lambda\,\omega^1 \\
 & \cdots & & & 0 & & \vdots \\
\omega_1^k & \cdots & \omega_k^k & & & & -\lambda\,\omega^k \\
\hline
 & & & \omega_{k+1}^{k+1} & \cdots & \omega_n^{k+1} & -\mu\,\omega^{k+1} \\
 & 0 & & & \cdots & & \vdots \\
 & & & \omega_{k+1}^n & \cdots & \omega_n^n & -\mu\,\omega^n \\
\hline
\lambda\omega^1 & \cdots & \lambda\omega^k & \mu\omega^{k+1} & \cdots & \mu\omega^n & 0
\end{array}\right) \qquad (3.24)$$

onde

$$\lambda = \frac{h + \sqrt{h^2 - 4k(n-k)}}{2k}\ , \quad \mu = \frac{h - \sqrt{h^2 - 4k(n-k)}}{2(n-k)}$$

e $h = \| H \|$

Prova do lema 3.4 .-

Pela parte (i) do lema 3.1 temos que todos os pontos de M^n são umbilicos , segue por [14] , Teorema 29 , Pág. 114 , que M^n é parte de uma horoesfera ($h_1 = \ldots = h_n = 1$) ou é parte de uma esfera geodésica ($h_1 = \ldots = h_n = \sqrt{1+r^2}\,/\,r$) ou é parte de uma hipersuperficie equidistante ($h_1 = \ldots = h_n = r\,/\sqrt{1+r^2}$) .

Se ocorre (ii) do lema 3.1 , chamando $A = H_{n+1}$, definimos as distribuições

$$T^1(q) = \{ x \in T_q M^n \ / \ Ax = \lambda x \}$$

e

$$T^2(q) = \{ x \in T_q M^n \ / \ Ax = \mu x \}$$

de dimensões k e $n-k$, respectivamente . Ambas são diferenciáveis e integráveis . Segue por [9] Vol . I Pág. 182 , que cada ponto de M^n tem uma vizinhança U que é o produto riemaniano $M_1 \times M_2$, onde M_1 e M_2 são variedades integrais de T^1 e T^2 , respectivamente . Tendo presente (1.7) obtem-se que as curvaturas seccionais de M_1 e M_2 são dadas por

$$R^i_{jm\ell} = (\lambda^2 - 1)(\delta_{im}\delta_{j\ell} - \delta_{i\ell}\delta_{jm}) , \quad 1 \leq i,j,m,\ell \leq k$$

$$R^i_{jm\ell} = (\mu^2 - 1)(\delta_{im}\delta_{j\ell} - \delta_{i\ell}\delta_{jm}) , \quad k+1 \leq i,j,m,\ell \leq n$$

Portanto , se $k \geq 2$ (respectivamente $n - k \geq 2$) então M_1 (respectivamente M_2) é um espaço de curvatura constante $\lambda^2 - 1$ (respectivamente $\mu^2 - 1$) . Se $k = 1$ (respectivamente $n - k = 1$) , então a decomposição produto ainda é válido pero a curvatura seccional não está definida .

Como o vetor curvatura média H é paralelo , então :

$$h = \| H \|^2 = \sum_{i=1}^{n} h_i$$

é constante , logo

$$h = k\lambda + (n-k)\mu \tag{3.25}$$

Por (ii) do lema (3.1) temos

$$\lambda\mu = 1 \tag{3.26}$$

De (3.25) e (3.26) obtem-se

$$\lambda = \frac{h + \sqrt{h^2 - 4k(n-k)}}{2k} , \quad \mu = \frac{h - \sqrt{h^2 - 4k(n-k)}}{2(n-k)} \tag{3.27}$$

ou

$$\lambda = \frac{h - \sqrt{h^2 - 4k(n-k)}}{2k} \qquad \mu = \frac{h + \sqrt{h^2 - 4k(n-k)}}{2(n-k)}$$

Substituindo e_{n+1} por $- e_{n+1}$ se necessário , podemos supor que λ e μ são dados por (3.27) . Tendo presente agora a última parte de (ii) do lema 3.1 , vemos que com respeito a um referencial adaptado , as formas de conexão (ω^A_B) de $H^{n+1}(1)$, restritas a M^n, é dada por (3.24) .

Prova do Teorema 3.2 .-

Suponhamos primeiro que M^n seja simplesmente conexa e denotemos por $\Phi : M^n \to H^{n+p}(1)$ a imersão isométrica . Se M^n é completa e $p = 1$, pelo lema 3.4 segue que M^n é uma horoesfera ou uma esfera geodésica ou uma hipersuperficie equidistante . Agora como M^n é completa , por [9] Vol. I Pág. 176 , Teorema 4.6 , obtem-se que $\Phi : M^n \to \Phi(M^n)$ (= horoesfera ou uma esfera geodésica ou uma hipersuperficie equidistante) é uma aplicação de recobrimento . Como $\Phi(M^n)$ é simplesmente conexa , segue que Φ é um mergulho .

Pelo lema 3.4 , sabemos também que M^n é localmente um produto riemaniano $U = M_1 \times M_2$ de espaços de curvatura constante . Provaremos agora que U é igual a um aberto do produto riemaniano $S^k(r) \times H^{n-k}(\sqrt{1+r^2})$ $1 \leq k \leq n-1$; logo por ser M^n completa segue que $\Phi(M^n)$ é o produto riemaniano $S^k(r) \times H^{n-k}(\sqrt{1+r^2})$.

Para verificar que M^n é localmente igual a um aberto do produto riemaniano $S^k(r) \times H^{n-k}(\sqrt{1+r^2})$, procedemos do seguinte modo . Consideremos as hipersuperficies $S^k(r) \times H^{n-k}(\sqrt{1+r^2})$ de $H^{n+1}(1)$, definidas por (b_3) , e provaremos que as formas de conexão de $H^{n+1}(1)$, restritas a um aberto de $S^k(r) \times H^{n-k}(\sqrt{1+r^2})$, são dadas por (3.24) .

Por um lado , temos que a segunda forma fundamental da hipersuperficie $S^k(r) \times H^{n-k}(\sqrt{1+r^2})$ tem um autovalor λ de multiplicidade k , e um autovalor μ de multiplicidade $n-k$, e também (3.26) . Por outro lado $S^k(r)$ (respectivamente $H^{n-k}(\sqrt{1+r^2})$) tem curvatura seccional constante $\lambda^2 - 1$ (respectivamente $\mu^2 - 1$) o que é igual a $1/r^2$ (respectivamente $-1/(1+r^2)$) e portanto

$$\lambda^2 - 1 = \frac{1}{r^2} \quad , \quad \mu^2 - 1 = -\frac{1}{1+r^2} \tag{3.28}$$

De (3.26) e (3.28) , sem perda de generalidade podemos supor

$$\lambda = \sqrt{1+r^2}/r \quad , \quad \mu = r/\sqrt{1+r^2} \tag{3.29}$$

Segue imediatamente que

$$k(\sqrt{1+r^2}/r) + (n-k)(r/\sqrt{1+r^2}) = h \tag{3.30}$$

onde $h = \|H\|$, H é o vetor curvatura média de $S^k(r) \times H^{n-k}(\sqrt{1+r^2})$.

Resolvendo (3.30) , sem perda de generalidade obtemos :

$$r^2 = \frac{h^2 - 2nk - h\sqrt{h^2 - 4n(n-k)}}{2(n^2 - h^2)} \qquad (3.31)$$

Por simplicidade denotemos por r_o o valor de r dado por (3.31) . Portanto $S^k(r_o) \times H^{n-k}(\sqrt{1+r_o^2})$ é uma hipersuperficie que verifica as hipóteses do problema .

Agora , seja $f_o, f_1, \ldots, f_k$ um referencial num aberto de R^{k+1} , tal que : $r_o f_o = x$, logo f_o é normal a $S^k(r_o)$; que são adaptados a $S^k(r_o)$, isto é , restritos a $S^k(r_o)$ $f_1 \ldots, f_k$ são tangentes . Para $H^{n-k}(\sqrt{1+r_o^2})$ em R^{n-k+1} , escolhemos um referencial $f_{k+1}, \ldots, f_{n+1}$ num aberto de R^{n-k+1} tal que (veja também [7] Pág. 123) :

$$\begin{aligned} &\langle f_i , f_j \rangle_2 = \delta_{ij} \\ &\langle f_{n+1} , f_i \rangle_2 = 0 \quad , \quad i , j = k+1 , \ldots , n \qquad (3.32) \\ &\langle f_{n+1} , f_{n+1} \rangle_2 = -1 \end{aligned}$$

que são adaptados a $H^{n-k}(\sqrt{1+r_o^2})$, isto é restritos à hipersuper -

ficie $H^{n-k}(\sqrt{1+r_o^2})$, $f_{k+1}, \ldots, f_n$ são tangentes ; e $\sqrt{1+r_o^2}\, f_{n+1} = y$ descreve $H^{n-k}(\sqrt{1+r_o^2})$, logo f_{n+1} é normal a $H^{n-k}(\sqrt{1+r_o^2})$.

Sejam $\phi^o, \phi^1, \ldots, \phi^{k+1}$ o dual de $f_o, f_1, \ldots, f_{k+1}$ e $\phi^{k+1}, \ldots, \phi^{n+1}$ o dual de $f_{k+1}, \ldots, f_{n+1}$. Lembremos que a definição dos $\phi^o, \phi^1, \ldots, \phi^{k+1}, \ldots, \phi^{n+1}$ (veja também [7] Pág. 122) é equivalente a escrever

$$\begin{aligned} d\tilde{x} &= \sum_i \phi^i f_i , \quad i = 0, 1, \ldots, k \\ d\tilde{y} &= \sum_j \phi^j f_j , \quad j = k+1, \ldots, n+1 \end{aligned} \tag{3.33}$$

onde $\tilde{x} : R^{k+1} \to R^{k+1}$ e $\tilde{y} : R^{n-k+1} \to R^{n-k+1}$ é a aplicação identi - dade , respectivamente . Por outro lado

$$x = \tilde{x}\,\big|_{S^k(r_o)} \qquad e \qquad y = \tilde{y}\,\big|_{H^{n-k}(\sqrt{1+r_o^2})}$$

Então $f_o, f_1, \ldots, f_k, f_{k+1}, \ldots, f_{n+1}$ é um referen - cial num aberto de R^{n+2} e $\phi^o, \ldots, \phi^{n+1}$ o dual . Sejam (ϕ^A_B) , $A, B = 0, 1, \ldots, n+1$ formas num aberto de R^{n+2}

definidas por

$$d f_A = \Sigma \phi^A_B f_B \tag{3.34}$$

Então restringindo (ϕ^A) , $A = 0 , 1 , \ldots , n+1$ a um aberto do produto $S^k(r_o) \times H^{n-k}(\sqrt{1+r_o^2})$, temos

$$\phi^o = \phi^{n+1} = 0$$

$$\phi^o_i = -\phi^i_o = \frac{1}{r_o}\phi^i \quad , \quad i = 1 , 2 , \ldots , k \tag{3.35}$$

$$\phi^A_B = -\phi^B_A = 0 \quad , \quad \begin{array}{l} A = 0, 1 , \ldots , k \\ B = k+1 , \ldots , n+1 \end{array}$$

Como $y = \tilde{y}\Big|_{H^{n-k}(\sqrt{1+r_o^2})}$, tendo presente (3.33) e (3.34) obtem-se

$$d y = \sum_{j=k+1}^{n} \phi^j f_j = \sqrt{1+r_o^2}\, d f_{n+1}$$

$$= \sum_{j=k+1}^{n} (\sqrt{1+r_o^2}\ \phi^{n+1}_j) f_j$$

Logo

$$\phi^j = \sqrt{1+r_o^2}\ \phi^{n+1}_j \quad , \quad j = k+1 , \ldots , n \tag{3.36}$$

Em forma análoga a (3.20) também obtemos

$$\phi^{j}_{n+1} = \phi^{n+1}_{j} \tag{3.37}$$

Resumindo (3.35) , (3.36) e (3.37) temos

$$\begin{aligned}
&\phi^{o} = \phi^{n+1} = 0 \\
&\phi^{o}_{i} = -\phi^{i}_{o} = \frac{1}{r_o}\,\phi^{i} \ , \quad i = 1, 2 , \ldots , k \\
&\phi^{j}_{n+1} = \phi^{n+1}_{j} = \frac{1}{\sqrt{1+r_o^{\,2}}}\,\phi^{j} \ , \quad j = k+1 , \ldots , n \\
&\phi^{A}_{B} = -\phi^{B}_{A} = 0 \qquad \begin{array}{l} A = 0 , 1 , \ldots , k \\ B = k+1 , \ldots , n+1 \end{array}
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Como a imagem do mergulho $S^{k}(r_o) \times H^{n-k}(\sqrt{1+r_o^{\,2}})$ está no espaço hiperbólico $H^{n+1}(1)$. Seja o novo referencial $e_o , e_1 , \ldots , e_{n+1}$ num aberto de R^{n+2} , definido por :

$$\begin{aligned}
e_o &= r_o f_o + \sqrt{1+r_o^{\,2}}\, f_{n+1} \\
e_i &= f_i \ , \qquad i = 1 , 2 , \ldots , n \\
e_{n+1} &= \sqrt{1+r_o^{\,2}}\, f_o + r_o f_{n+1}
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Seja $\tilde{X} = (\tilde{x} , \tilde{y}) : R^{n+2} \to R^{n+2}$ a aplicação identidade , o referencial $e_o , \dots , e_{n+1}$ tem as seguintes propriedades :

$$(e_o , e_i) = 0$$

$$(e_i , e_j) = \delta_{ij} \quad , \quad i , j = 1 , 2 , \dots , n+1 \tag{3.40}$$

$$(e_o , e_o) = - 1$$

São adaptados a $H^{n+1} (1)$, isto é , restritos a $H^{n+1} (1)$, $e_1 , \dots , e_{n+1}$ são tangentes ; $e_o = \tilde{X}$ descreve $H^{n+1} (1)$ e portanto e_o é normal a $H^{n+1} (1)$. Além temos que e_{n+1} é normal a $S^k (r_o) \times H^{n-k} (\sqrt{1+r_o^2})$.

Seja $\omega^o , \dots , \omega^{n+1}$ o dual de $e_o , \dots , e_{n+1}$, então

$$d \tilde{X} = \sum_A \omega^A e_A \quad , \quad A = 0 , 1 , \dots , n+1 \tag{3.41}$$

De (3.41) , tendo presente (3.33) e a terceira parte de (3.40) , obtemos :

$$\begin{aligned} \omega^o &= - r_o < \sum_{i=0}^{k} \phi^i f_i , f_o >_1 - \sqrt{1+r_o^2} < \sum_{j=k+1}^{n+1} \phi^j f_j , f_{n+1} >_2 \\ &= - r_o \phi^o < f_o , f_o >_1 - \sqrt{1+r_o^2} \phi^{n+1} < f_{n+1} , f_{n+1} >_2 \\ &= - r_o \phi^o + \sqrt{1+r_o^2} \phi^{n+1} \end{aligned} \tag{3.42}$$

Também de (3.41) segue que

$$\omega^{i} = \phi^{i} \quad , \quad i = 1 , 2 , \ldots , n \tag{3.43}$$

Anàlogamente de (3.41) e tendo presente (3.33) obtemos

$$\begin{aligned}\omega^{n+1} &= -\sqrt{1+r_o^{\,2}} < \sum_{i=0}^{k} \phi^{i} f_i , f_o >_1 + r_o < \sum_{j=k+1}^{n+1} \phi^{j} f_j , f_{n+1} >_2 \\ &= \sqrt{1+r_o^{\,2}}\, \phi^{o} < f_o , f_o >_1 + r_o \phi^{n+1} < f_{n+1} , f_{n+1} >_2 \\ &= \sqrt{1+r_o^{\,2}}\, \phi^{o} - r_o \phi^{n+1}\end{aligned} \tag{3.44}$$

Resumindo (3.42) , (3.43) e (3.44) , obtem-se :

$$\begin{aligned}\omega^{o} &= - r_o \phi^{o} + \sqrt{1+r_o^{\,2}}\, \phi^{n+1} \\ \omega^{i} &= \phi^{i} \qquad , \quad i = 1 , 2 , \ldots , n \\ \omega^{n+1} &= \sqrt{1+r_o^{\,2}}\, \phi^{o} - r_o \phi^{n+1}\end{aligned} \tag{3.45}$$

Tendo presente (3.38) , (3.39) e (3.45) , podemos ver que a segunda forma fundamental H_{n+1} da hipersuperficie dada por $S^{k}(r_o) \times H^{n-k}(\sqrt{1+r_o^{\,2}})$, na direcção do campo normal unitário e_{n+1} , é dado pela seguinte expressão :

$$H_{n+1} = (d X , d e_{n+1})$$

$$= (r_o d f_o + \sqrt{1+r_o^2} d f_{n+1} , \sqrt{1+r_o^2} d f_o + r_o d f_{n+1})$$

$$= r_o \sqrt{1+r_o^2} (< d f_o , d f_o >_1 + < d f_{n+1} , d f_{n+1} >_2)$$

$$= \frac{\sqrt{1+r_o^2}}{r_o} \sum_{j=1}^{k} (\omega^j)^2 + \frac{r_o}{\sqrt{1+r_o^2}} \sum_{j=k+1}^{n} (\omega^j)^2$$

Portanto H_{n+1} tem um auto valor $\sqrt{1+r_o^2} / r_o$ de multiplicidade k e um auto valor $r_o / \sqrt{1+r_o^2}$ de multiplicidade $n-k$.

Sejam (ω_B^A) , $A , B = 0 , 1 , \ldots , n+1$ as formas num aberto de R^{n+2} definidas por

$$d e_A = \sum_B \omega_B^A e_B , \quad A , B = 0 , 1 , \ldots , n+1 \tag{3.46}$$

Por (3.45) e utilizando a equação de estrutura dada por (3.17) , temos

$$d \omega^o = - r_o d \phi^o + \sqrt{1+r_o^2} d \phi^{n+1}$$

$$= - r_o \sum_{B=0}^{n+1} \phi^B \wedge \phi_o^B + \sqrt{1+r_o^2} \sum_{B=0}^{n+1} \phi^B \wedge \phi_{n+1}^B$$

$$= \sum_{B=0}^{n+1} \phi^B \wedge (- r_o \phi_o^B + \sqrt{1+r_o^2} \phi_{n+1}^B) \tag{3.47}$$

Por outro lado também de (3.17) temos

$$d\,\omega^{o} = \sum_{B=0}^{n+1} \omega^{B} \wedge \omega_{o}^{B} \tag{3.48}$$

Igualando (3.47) a (3.48) e tendo presente que $\omega_{o}^{o} = \phi_{o}^{o} = \phi_{n+1}^{n+1} = 0$

obtem-se

$$- \sum_{j=1}^{n} \omega_{o}^{j} \wedge \omega^{j} - \omega_{o}^{n+1} \wedge \omega^{n+1}$$

$$= - \sum_{j=1}^{n} (- r_{o}\, \phi_{o}^{j} + \sqrt{1+r_{o}^{2}}\, \phi_{n+1}^{j}) \wedge \omega^{j} - \phi_{n+1}^{o} \wedge (\sqrt{1+r_{o}^{2}}\, \phi^{o} - r_{o}\, \phi^{n+1})$$

$$= - \sum_{j=1}^{n} (- r_{o}\, \phi_{o}^{j} + \sqrt{1+r_{o}^{2}}\, \phi_{n+1}^{j}) \wedge \omega^{j} - \phi_{n+1}^{o} \wedge \omega^{n+1} \tag{3.49}$$

Lembrando agora que

$$\omega_{j}^{o} = \omega_{o}^{j} \;, \quad j = 1 , \ldots , n+1$$

e

$$\omega_{n+1}^{o} = \omega_{o}^{n+1}$$

Segue de (3.49) que

$$\omega_{j}^{o} = \omega_{o}^{j} = - r_{o}\, \phi_{o}^{j} + \sqrt{1+r_{o}^{2}}\, \phi_{n+1}^{j} \;,\; j = 1,\ldots,n+1 \tag{3.50}$$

$$\omega_{n+1}^{o} = \omega_{o}^{n+1} = \phi_{n+1}^{o} \tag{3.51}$$

Da segunda parte de (3.45) obtemos

$$\omega_j^i = \phi_j^i \quad , \quad i , j = 1, 2 , \ldots , n \tag{3.52}$$

Por outro lado utilizando a equação (3.17) , segue que

$$\begin{aligned} d\,\omega^i &= \sum_{B=0}^{n+1} \omega^B \wedge \omega_i^B \\ &= -\,\omega_i^o \wedge \omega^o - \sum_{j=1}^{n} \omega_i^j \wedge \omega^j - \omega_i^{n+1} \wedge \omega^{n+1} \end{aligned} \tag{3.53}$$

e

$$\begin{aligned} d\,\phi^i &= \sum_{B=0}^{n+1} \phi^B \wedge \phi_i^B \\ &= -\,\phi_i^o \wedge \phi^o - \sum_{j=1}^{n} \phi_i^j \wedge \phi^j - \phi_i^{n+1} \wedge \phi^{n+1} \end{aligned} \tag{3.54}$$

Com pela segunda parte de (3.45) $\omega^i = \phi^i$, i= 1 , 2 , . . . , n , então $d\,\omega^i = d\,\phi^i$, e portanto (3.53) ē igual a (3.54) , então segue que

$$\omega_i^o \wedge \omega^o + \omega_i^{n+1} \wedge \omega^{n+1} = \phi_i^o \wedge \phi^o + \phi_i^{n+1} \wedge \phi^{n+1} \tag{3.55}$$

De (3.45) também obtemos

$$\begin{aligned} \phi^o &= r_o\,\omega^o + \sqrt{1+r_o^2}\,\omega^{n+1} \\ \phi^{n+1} &= \sqrt{1+r_o^2}\,\omega^o + r_o\,\omega^{n+1} \end{aligned} \tag{3.56}$$

Levando (3.56) para (3.55) tem-se

$$\omega_i^o \wedge \omega^o + \omega_i^{n+1} \wedge \omega^{n+1}$$

$$= \phi_i^o \wedge (r_o \omega^o + \sqrt{1+r_o^2}\, \omega^{n+1}) + \phi_i^{n+1} \quad (\sqrt{1+r_o^2}\, \omega^o + r_o \omega^{n+1})$$

$$= (r_o \phi_i^o + \sqrt{1+r_o^2}\, \phi_i^{n+1}) \wedge \omega^o + (\sqrt{1+r_o^2}\, \phi_i^o + r_o \phi_i^{n+1}) \wedge \omega^{n+1}$$

Daqui segue que

$$\omega_i^{n+1} = \sqrt{1+r_o^2}\, \phi_i^o + r_o \phi_i^{n+1} , \quad i = 1 , 2 , \ldots , n \qquad (3.57)$$

Agora de $(e_{n+1} , e_i) = 0$, $i = 1 , 2 , \ldots , n$ e tendo presente

(3.46) , obtem-se

$$(d e_{n+1} , e_i) + (e_{n+1} , d e_i) = 0$$

$$(\sum_B \omega_B^{n+1} e_B , e_i) = - (e_{n+1} , \sum_B \omega_B^i e_B) \; ; \; B=0,\ldots,n+1$$

$$\omega_i^{n+1} = - \omega_{n+1}^i , \quad i= 1 , 2 , \ldots , n \qquad (3.58)$$

Resumindo (3.51) , (3.52) , (3.57) e (3.58) temos

$$\begin{aligned}
\omega_j^o &= \omega_o^j = - r_o \phi_o^j + \sqrt{1+r_o^2}\, \phi_{n+1}^j , && j=1,2,\ldots,n \\
\omega_{n+1}^o &= \omega_o^{n+1} = \phi_{n+1}^o && \\
\omega_j^i &= \phi_j^i && , i , j = 1,2,\ldots,n \\
\omega_i^{n+1} &= - \omega_{n+1}^i = \sqrt{1+r_o^2}\, \phi_i^o + r_o \phi_i^{n+1} && , i=1,2,\ldots,n
\end{aligned} \qquad (3.59)$$

Restringindo as formas (ω^A) a um aberto de $S^k(r_o) \times H^{n-k}(\sqrt{1+r_o^2})$ por (3.35) e (3.45), temos

$$\omega^o = \omega^{n+1} = 0$$

$$\omega^i = \phi^i \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

Por outro lado (ω^A), $A = 1, 2, \ldots, n+1$ são as formas duais de e_B, $B = 1, 2, \ldots, n+1$ em $H^{n+1}(1)$, e (ω^A_B), $A, B = 1, 2, \ldots, n+1$ são as formas de conexão em $H^{n+1}(1)$. Restringindo essas formas a um aberto de $S^k(r_o) \times H^{n-k}(\sqrt{1+r_o^2})$, de (3.35), (3.45) e (3.59) obtem-se :

$$\omega^i_j = 0 \quad , i = 1, 2, \ldots, k \quad , \quad j = k+1, \ldots, n$$

$$\omega^{n+1}_i = -\omega^i_{n+1} = \lambda\,\omega^i \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, k$$

$$\omega^{n+i}_j = -\omega^j_{n+1} = \mu\,\omega^j \quad , \quad j = k+1, \ldots, n$$

Segue então que as formas de conexão (ω^A_B) de $H^{n+1}(1)$, restritas a um aberto de $S^k(r_o) \times H^{n-k}(\sqrt{1+r_o^2})$ coincidem com as formas dadas por (3.24). Portanto por teorema de unicidade local das formas

(ω^A) e (ω^A_B) , $A, B = 1, 2, \ldots, n+1$ (veja [7], Pág. 128) obtem-se que U é igual a um aberto do produto riemaniano $S^k(r_o) \times H^{n-k}(\sqrt{1+r_o^2})$.

Agora , aplicando novamente [9] Vol. I Pág. 176 ,teorema 4.6 , segue que $\Phi: M^n \to \Phi(M^n) = S^k(r_o) \times H^{n-k}(\sqrt{1+r_o^2})$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$ é uma aplicação de recobrimento . Além , se $k \geqslant 2$ $\Phi(M^n)$ é simplesmente conexa , logo é um mergulho .

No caso de $k = 1$, seja $M^n = R \times H^{n-1}(\sqrt{1+r_o^2})$ que verifica as hipóteses do teorema , e seja $\Phi : M^n \to \Phi(M^n) = S^1(r_o) \times H^{n-1}(\sqrt{1+r_o^2})$ definida por $\Phi(t, x) = (r\, e^{2\pi i t}, x)$ e vemos que Φ não é mergulho .

No caso geral , isto é , se M^n não é simplesmente conexa . Seja $(\tilde{M}^n, \pi)$ o recobrimento universal de M^n . Sabemos que π é isometria local e que $\tilde{M}^n$ é completa e simplesmente conexa . Além $\tilde{M}^n$ e $\tilde{\Phi} = \Phi \circ \pi$ verificam as hipóteses do teorema , portanto $\tilde{\Phi}(\tilde{M}^n) = \Phi(M^n)$ é o produto riemaniano $S^k(r_o) \times H^{n-k}(\sqrt{1+r_o^2})$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$.

Se $k \neq 1$, segue que $\tilde{\Phi}$ é um mergulho e portanto Φ é também um mergulho .

Para completar o teorema , se $p \geqslant 2$ então pelo lema 3.2 não existem tais subvariedades .

Corolário 3.3 .- Seja M^n uma hipersuperficie compacta de $H^{n+1}(1)$, com vetor curvatura média paralelo não nulo tal que a condição (3.22) é verificada, então M^n é uma esfera geodécia e a imersão é um mergulho.

Prova .-

Da condição (3.22) e de (2.21) obtem-se

$$\sum_{\alpha,i,j} h_{ij}^{\alpha} \, \Delta h_{ij}^{\alpha} \geqslant 0 \tag{3.60}$$

De (2.23) e (3.60) segue que

$$\Delta \left(\sum_{\alpha,i,j} (h_{ij})^2 \right) \geqslant 0$$

Como M^n é compacta, pelo teorema de Hopf (veja [7] Pág. 78), $S = \sum_{\alpha,i,j} (h_{ij}^{\alpha})^2$ é constante. O corolário segue agora pelo teorema 3.2 .

Observação 7 . - Vemos que $H^n (\sqrt{1+r_o^2})$ tem curvatura seccional constante $c = -1 / (1+r_o^2)$.

BIBLIOGRAFIA

[1] - Braidi S. and Hsiung C.C. : Submanifolds of Spheres ; Math . Z. 115 (1970) 235 - 251 .

[2] - Cheeger J . and Ebin G.D. : Comparison Theorems in Riemannian Geo_ metry ; North - Holland Mathematical Library (1975) .

[3] - Cheeger J . and Gromoll D . : On The Struture of complete Manifo_ lds of Nonnegative Curvature ; Ann. of Math . 96 (1972) 413-443 .

[4] - Chen B . Y . : Geometry of Submanifolds ; Marcel Deccker Inc . New York (1973) .

[5] - Chern S. S. : Minimal Submanifolds in a Riemannian Manifold ; Mi- meographed Lecture Notes , Uni. of Kansas (1968) .

[6] - Chern S. S. , Do Carmo M . and Kobayashi S . : Minimal Submani - folds of a Sphere With Second Fundamental Form of Constant Lenght; Functional Analysis and related Fields , Proc . Conf . in Honor of Marshall Stone , Springer , Berlin (1970) 57 - 75 .

[7] - Do Carmo M . : O Método do Referencial Móvel ; III Escola Lati - no Americana de Matemática , Impa (1976) .

[8] - Hoffman D . : Surfaces of Constant Mean Curvature ; J . Diffe . Geometry Vol . 8 Nº 1 (1973) 161 - 166 .

[9] - Kobayashi S . and Nomizu K . : Foundations od Differential Geo_ metry , Vol . I (1963) e Vol . II (1969) ; Interscience , New York .

[10] - Lawson B . : Lectures on Minimal Submanifolds ; Vol . , Im - pa (1970) .

[11] - Nomizu K . and Smyth B . : A Formula of Simons' Type and Hiper - surfaces With Constant Mean Curvature ; J . Diffe . Geometry 3 (1969) 367 - 377 .

[12] - Simons J . : Minimal Varieties in Riemannian Manifolds ; Ann . of Mathe . 88 (1968) 62 - 105 .

[13] - Smyth B . : Submanifolds of Constant Mean Curvature ; Math . Ann . 205 (1973) 265 - 280 .

[14] - Spivak M . : A comprehensive Introduction to Differential Geome - try ; Vol . IV , Publish Inc .

[15] - Yano K . and Isihara S . : Submanifolds With Parallel Mean Curva- ture Vector ; J . Diffe . Geometry 6 (1971) 95 - 118 .

[16] - Yau S . T . : Submanifolds With Constant Mean Curvature I ; Ame - rican Journal of Math . 96 (1974) 346 - 366 .

[17] - Yau S . T . : Submanifolds With Constant Mean Curvature II ; Ame rican Journal of Math . 97 (1975) 76 - 100 .