Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

O Produto Cruzado por Endomorfismo Parcial

Danilo Royer†
Doutorado em Matemática - Campinas - SP

Orientador: Prof. Dr. Ruy Exel Filho

†Este trabalho teve apoio financeiro do CNPQ.

O Produto Cruzado por Endomorfismo Parcial

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por **Danilo Royer** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 06 de dezembro de 2004.

Prof. Dr. **Ruy Exel Filho**.
Orientador

Prof. Dr. **Jorge Tulio Mujica Ascui**.
Co-Orientador

Banca examinadora:

Prof. Dr. Ruy Exel Filho (Orientador, MTM - UFSC)

Prof. Dr. Antonio Roberto da Silva (IM - UFRJ)

Prof. Dr. Carlos Eduardo Duran Fernandez (IMECC - UNICAMP)

Prof. Dr. Luiz Antonio Barrera San Martin (IMECC - UNICAMP))

Prof. Dr. Severino Toscano do Rego Melo (IME - USP)

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do título de **Doutor em Matemática**.

Aos meus pais

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a minha família, que sempre acreditou no meu trabalho.

Aos meus amigos Dirceu e Rogério, com os quais tive o prazer de formar "república" em Campinas.

Também agradeço aos meus colegas de pós-graduação da UNICAMP, pela agradável companhia.

Meus agradecimentos a Cidinha, Ednaldo e Tânia, por todos os esclarecimentos.

Agradeço ao IMECC e aos professores que contribuíram na minha formação.

Agradeço também ao Departamento de Matemática da UFSC, pela acolhida durante o meu trabalho de tese.

Aos amigos da Pós-Graduação da UFSC, pela ótima convivência.

Ao grupo do seminário de Álgebra de Operadores do Departamento de Matemática da UFSC, pelas proveitosas discussões e pela paciência.

Agradeço ao CNPq, pelo suporte financeiro.

A minha namorada Marlise, pelo companheirismo e compreensão.

Agradeço ao meu orientador de programa e também co-orientador de tese Jorge Mujica, pela orientação quando do meu ingresso no programa de Doutorado.

Os meus mais sinceros agradecimentos ao meu orientador de tese Ruy Exel, que muito mais do que um competente e atencioso orientador, é um grande amigo. Ressalto aqui que tive o privilégio de ser aluno e orientando de mestrado do Ruy, de modo que Ruy pacientemente vem-me acompanhando a pelo menos 4 anos.

Resumo

Dados um ideal fechado I de uma C^*-álgebra A, um ideal J (não necessariamente fechado) de I, um *-homomorfismo $\alpha : A \to M(I)$, que chamamos de endomorfismo parcial, e uma função $L : J \to A$ com algumas propriedades, que serão descritas no primeiro capítulo, baseado em [12] e [7] construímos uma álgebra que chamaremos de Produto Cruzado por Endomorfismo Parcial e a denotaremos por $\mathcal{O}(A, \alpha, L)$. Considerando a ação de gauge de S^1 nesta álgebra obtemos a esperança condicional E e a álgebra dos pontos fixos K desta ação. Mostramos ainda no primeiro capítulo que todo ideal gauge invariante não nulo de $\mathcal{O}(A, \alpha, L)$ tem intersecção não nula com K.

No segundo capítulo introduzimos o Produto Cruzado por Endomorfismo Parcial, denotado por $\mathcal{O}(X, \alpha, L)$, induzido por um homeomorfismo local $\sigma : U \to X$ onde X é um espaço compacto e Hausdorff e U é um subconjunto aberto de X. Na segunda seção deste capítulo descrevemos alguns resultados básicos sobre a estrutura de $\mathcal{O}(X, \alpha, L)$ e o resultado mais importante desta seção é de que todo ideal não nulo gauge invariante de $\mathcal{O}(X, \alpha, L)$ tem intersecção não nula com $C(X)$. Na última seção mostraremos o exemplo de produto cruzado por endomorfismo parcial que motivou este trabalho, que é a álgebra de Cuntz-Krieger para matrizes infinitas (ver [3]).

O terceiro capítulo trata de uma bijeção entre os ideais gauge invariantes da álgebra $\mathcal{O}(X, \alpha, L)$ e os conjuntos abertos de X que são σ, σ^{-1}-invariantes.

O último capítulo é dedicado ao estudo de $\mathcal{O}(X, \alpha, L)$ no caso em que o par (X, σ) tem uma propriedade extra, que chamamos de topologicamente livre. Mostramos que neste caso qualquer ideal não nulo de $\mathcal{O}(X, \alpha, L)$ tem intersecção não nula com $C(X)$. Se além disso (X, σ) tiver a propriedade de que $(X', \sigma_{|_{X'}})$ é topologicamente livre para qualquer subconjunto fechado σ, σ^{-1}-invariante X' de X então obtemos uma bijeção entre todos os ideais de $\mathcal{O}(X, \alpha, L)$ e os conjuntos abertos σ, σ^{-1}-invariantes de X. Finalizamos este capítulo mostrando um critério de simplicidade para as álgebras de Cuntz-Krieger para matrizes infinitas.

No apêndice mostramos que o Produto Cruzado por Endomorfismo definido em [4] em alguns casos pode ser visto como um Produto Cruzado por Endomorfismo Parcial.

Abstract

Given a closed ideal I in a C^*-algebra A, an ideal J (not necessarily closed) in I, a *-homomorphism $\alpha : A \to M(I)$ and a map $L : J \to A$ with some properties, based on [12] and [7] we define a C^*-algebra $\mathcal{O}(A, \alpha, L)$ which we call the Crossed Product by a Partial Endomorphism and we denote it by $\mathcal{O}(A, \alpha, L)$. Considering the gauge action from S^1 in this algebra we obtain the conditional expectation E and the fixed point algebra K of this action. We show also in the first chapter that every nonzero gauge invariant ideal of $\mathcal{O}(A, \alpha, L)$ has nonzero intersection with K.

In the second chapter we introduce the Crossed Product by a Partial Endomorphism $\mathcal{O}(X, \alpha, L)$ induced by a local homeomorphism $\sigma : U \to X$ where X is a compact Hausdorff space and U is an open subset of X. In the second section of this chapter we describe some basic results about the structure of $\mathcal{O}(X, \alpha, L)$ and the main result of this section is that every nonzero gauge invariant ideal of $\mathcal{O}(X, \alpha, L)$ has nonzero intersection with $C(X)$. We present the example which motivated this work, the Cuntz-Krieger algebra for infinite matrices (see [3]).

We show in the third chapter a bijection between the gauge invariant ideals of $\mathcal{O}(X, \alpha, L)$ and the σ, σ^{-1}-invariant open subsets of X.

The last chapter is dedicated to the study of $\mathcal{O}(X, \alpha, L)$ in the case where the pair (X, σ) has an extra property, wich we call topological freeness. We prove that in this case every nonzero ideal of $\mathcal{O}(X, \alpha, L)$ has nonzero intersection with $C(X)$. If moreover (X, σ) has the property that $(X', \sigma_{|_{X'}})$ is topologically free for each closed σ, σ^{-1}-invariant subset X' of X then we obtain a bijection between the ideals of $\mathcal{O}(X, \alpha, L)$ and the open σ, σ^{-1}-invariant subsets of X. We conclude this section by showing a simplicity criteria for the Cuntz-Krieger algebras for infinite matrices.

In the Appendix we show that the Crossed Product by an Endomorphism defined in [4] in some cases may be seen as a Crossed Product by a Partial Endomorphism.

Contents

Introdução

O conceito de Produto Cruzado por Endomorfismo foi introduzido por diversos autores, entre eles J. Cuntz em [1], P. J. Stacey em [13] e G. J. Murphy em [10]. Estas construções são feitas a partir de uma C*-álgebra unitária A e de um *-endomorfismo $\alpha : A \to A$.

Em [4] foi introduzido por R. Exel o conceito de produto cruzado por endomorfismo, baseado num C*-sistema dinâmico (A, α, L). Nesta construção, além de um endomorfismo $\alpha : A \to A$, supõe-se dado um operador de transferência $L : A \to A$, isto é, L é linear, contínua e positiva e $L(\alpha(a)b) = aL(b)$ para cada $a, b \in A$. Neste artigo foi mostrado que a álgebra de Cuntz-Krieger é um exemplo de produto cruzado por endomorfismo. O C*-sistema dinâmico associado a este exemplo é induzido pelo subshift de Markov (Ω_A, σ), ou seja, o endomorfismo α é dado por

$$\begin{array}{rcl} \alpha : C(\Omega_A) & \to & C(\Omega_A) \\ f & \mapsto & f \circ \sigma \end{array}$$

e $L : C(\Omega_A) \to C(\Omega_A)$ é dado por $L(f)(x) = \frac{1}{\#\sigma^{-1}(x)} \sum\limits_{y \in \sigma^{-1}(x)} f(y)$ para cada $x \in X$ e para cada $f \in C(\Omega_A)$.

Em [3] foi definida por R. Exel e M. Laca a álgebra de Cuntz-Krieger para matrizes infinitas. Foi associada a esta álgebra um espaço topológico compacto e Hausdorff $\widetilde{\Omega_A}$, como pode ser visto em [3:4-7]. A diferença deste caso para o anterior é de que o shift σ não pode ser definido em todo o espaço $\widetilde{\Omega_A}$, mas apenas num subconjunto aberto U de $\widetilde{\Omega_A}$. Então o homeomorfismo local

$$\sigma : U \to \widetilde{\Omega_A}$$

induz o endomorfismo parcial

$$\begin{array}{rcl} \alpha : C(\widetilde{\Omega_A}) & \to & C^b(U) \ (\simeq M(C_0(U))) \\ f & \mapsto & f \circ \sigma \end{array}.$$

Além disso, como $\#\sigma^{-1}(x)$ pode ser infinito para algum $x \in \widetilde{\Omega_A}$ a convergência de $\sum\limits_{y \in \sigma^{-1}(x)} f(y)$ não pode ser garantida e portanto não podemos definir $L(f)$ para cada $x \in X$ por $L(f)(x) = \sum\limits_{y \in \sigma^{-1}(x)} f(y)$ para cada $f \in C(\widetilde{\Omega_A})$. Porém, mostraremos que se $f \in C_c(U)$ então podemos definir $L(f)(x) = \sum\limits_{y \in \sigma^{-1}(x)} f(y)$ para cada $x \in \widetilde{\Omega_A}$ e assim $L(f)$ é um elemento de $C(\widetilde{\Omega_A})$. Desta forma obtemos uma função

$$L : C_c(U) \to C(\widetilde{\Omega_A}).$$

Pelos fatos de que α não é um endomorfismo em $C(\widetilde{\Omega_A})$ e o domínio de L não é toda a álgebra $C(\widetilde{\Omega_A})$, a tripla (A, α, L) (que também chamaremos de C*-sistema dinâmico) não é um C*-sistema dinâmico como em [4] e portanto aqui não se aplica a construção de produto cruzado por endomorfismo feita em [4].

Neste trabalho definiremos, usando partes das construções de T. Katsura ([7]) e M. Pimsner ([12]), o produto cruzado por endomorfismo parcial. Mostraremos que esta construção se aplica à situação descrita no parágrafo anterior. Estudaremos especialmente o caso em que o produto cruzado por endomorfismo parcial, que denotaremos por $\mathcal{O}(X, \alpha, L)$, provém de um homeomorfismo local

$$\sigma : U \to X,$$

onde U é um subconjunto aberto de um espaço topológico compacto Hausdorff X. Mais especificamente, mostraremos que existe uma bijeção entre os ideais gauge invariantes de $\mathcal{O}(X, \alpha, L)$ e os abertos σ, σ^{-1} invariantes de X. Além disso, se (X, σ) tiver a propriedade adicional de que todo subconjunto fechado σ, σ^{-1}-invariante de X' é tal que $(X', \sigma_{|_{X'}})$ é topologicamente livre então existe uma bijeção entre todos os ideais de $\mathcal{O}(X, \alpha, L)$ e todos os abertos σ, σ^{-1}-invariantes de X. Finalmente daremos um critério de simplicidade para as álgebras de Cuntz-Krieger para matrizes infinitas.

No apêndice mostraremos que algumas álgebras que são produtos cruzados por endomorfismo como definido em [4] podem ser vistas como produtos cruzados por endomorfismo parcial, como definido no primeiro capítulo deste trabalho.

A escolha do nome produto cruzado por endomorfismo parcial para a álgebra que construímos neste trabalho foi motivada pelo homeomorfismo local $\sigma : U \to X$ onde U é um subconjunto aberto de X.

Chapter 1

O Produto Cruzado por Endomorfismo Parcial

Definiremos neste capítulo o Produto Cruzado por Endomorfismo Parcial e apresentaremos alguns resultados sobre a estrutura deste. Também tratamos aqui da ação de gauge neste produto cruzado e de ideais gauge invariantes.

1.1 Definições e resultados básicos

Seja A uma C*-álgebra, I um ideal bilateral fechado de A.

Definição 1.1 *Um endomorfismo parcial é um *-homomorfismo* $\alpha : A \to M(I)$ *onde* $M(I)$ *é a C*-álgebra dos multiplicadores de* I.

Seja J um ideal bilateral idempotente auto-adjunto (não necessariamente fechado) de I. Suponha dadas funções

$$\alpha : A \to M(I)$$

e

$$L : J \to A.$$

Esta situação será denotada por (A, α, L).

Definição 1.2 *Dizemos que* (A, α, L) *é um C*-sistema dinâmico se:*

- α *é um endomorfismo parcial,*
- L *é linear, positiva e preserva a involução *,*

- $L(\alpha(a)x) = aL(x)$ *para cada* a *em* A *e* x *em* J.

A definição acima requer alguns esclarecimentos. A função L é positiva no sentido de $L(x^*x)$ é um elemento positivo de A para cada $x \in J$. Além disso estamos identificando os elementos $x \in J$ com os elementos $T(x) \in T(I)$ através do *-homomorfismo injetor

$$\begin{array}{rcl} T : I & \rightarrow & M(I) \\ x & \mapsto & (L_x, R_x) \end{array}$$

onde $L_x, R_x : I \rightarrow I$ são dadas por $L_x(y) = xy$ e $R_x(y) = yx$ para cada $y \in I$. Desta forma $\alpha(a)x$ é uma notação para o elemento $T^{-1}(\alpha(a)T(x))$. Dados $a \in A$, $\alpha(a) = (L', R')$, e $x, y \in J$, segue que $L'(x) \in I$ e portanto $L'(x)y \in J$. Como

$$\alpha(a)T(x)T(y) = (L', R')(L_x, R_x)(L_y, R_y) = (L_{L'(x)y}, R_{L'(x)y}),$$

segue de fato que $\alpha(a)xy = L'(x)y \in J$. Como J é idempotente temos que em geral, dados $a \in A$ e $x \in J$, $\alpha(a)x \in J$. Portanto $\alpha(a)x$ está no domínio de L. Da mesma forma, denotando $T^{-1}(T(x)\alpha(a))$ por $x\alpha(a)$ temos que $x\alpha(a) \in J$. O elemento $\alpha(a)x$ tem a propriedade de que $(\alpha(a)x)^* = x^*\alpha(a^*)$. De fato,

$$(\alpha(a)x)^* = T^{-1}(\alpha(a)T(x))^* = T^{-1}(T(x^*)\alpha(a^*)) = x^*\alpha(a^*).$$

Da mesma forma vale que $(x\alpha(a))^* = \alpha(a^*)x^*$.

Proposição 1.3 *Se* (A, α, L) *é um* C*-*sistema dinâmico então* $L(x\alpha(a)) = L(x)a$ *para cada* $a \in A$ *e* $x \in J$.

Demonstração.
Dados $a \in A$ e $x \in J$, como $a^* \in A$ e $x^* \in J$ temos que $L(\alpha(a^*)x^*) = a^*L(x^*)$. Portanto

$$L(x\alpha(a)) = L((x\alpha(a))^*)^* = L(\alpha(a^*)x^*)^* = (a^*L(x^*))^* = L(x)a.$$

$\square$

O objetivo próximo é definir um A-bi-módulo a partir do C*-sistema dinâmico (A, α, L) com estrutura de módulo de Hilbert à direita de A. Para tanto, definindo a operação

$$\begin{array}{rcl} . : J \times A & \rightarrow & J \\ (x, a) & \mapsto & x\alpha(a) \end{array}$$

temos que:

Proposição 1.4 *A operação é bilinear e associativa.*

Demonstração.
Sejam $x, y \in J$ e $a, b \in A$. A linearidade na primeira variável segue de

$$(x+y).a = T^{-1}(T(x+y)\alpha(a)) = T^{-1}(T(x)\alpha(a) + T(y)\alpha(a)) =$$

$$= T^{-1}(T(x)\alpha(a)) + T^{-1}(T(y)\alpha(a)) = x.a + y.a.$$

A linearidade na segunda variável segue de forma análoga. Para ver que é associativa note que

$$(x.a).b = (x\alpha(a)).b = (x\alpha(a))\alpha(b) =$$

$$= T^{-1}[T(x\alpha(a))\alpha(b)] = T^{-1}[T(T^{-1}[T(x)\alpha(a)])\alpha(b)] =$$

$$= T^{-1}(T(x)\alpha(a)\alpha(b)) = T^{-1}(T(x)\alpha(ab)) = x.(ab).$$

□

Desta forma J é um A-módulo à direita. Definindo

$$\begin{array}{rcl} \langle , \rangle : J \times J & \to & A \\ (x, y) & \mapsto & L(x^* y) \end{array}$$

temos:

Proposição 1.5 $\langle , \rangle$ *é um produto interno, possivelmente degenerado.*

Demonstração.
Dados $x, y \in J$ e $a \in A$, segue que

$$\langle x, y.a \rangle = \langle x, y\alpha(a) \rangle = L(x^* y \alpha(a)) = L(x^* y)a = \langle x, y \rangle a.$$

As outras propriedades de produto interno seguem do fato de L ser linear, positiva e preservar $*$.

□

Tomando o quociente de J pelo sub módulo $N_0 = \{x \in J : \langle x, x \rangle = 0\}$ e denotando os elementos x de J em J/N_0 por $\widetilde{x}$ obtemos um produto interno de J/N_0 em A definido por $\langle \widetilde{x}\,, \widetilde{y}\,\rangle = \langle x, y\rangle$. Desta forma a função

$$\begin{array}{rcl} \|\,\| : J/N_0 & \rightarrow & \mathbb{R}^+ \\ \widetilde{x} & \mapsto & \sqrt{\|\langle \widetilde{x}\,, \widetilde{x}\,\rangle\|} \end{array}$$

define uma norma em J/N_0. Denotamos por M o completamento de J/N_0 por esta norma que é um modulo de Hilbert à direita de A.

Teremos duas notações para os elementos x de J em M. Uma delas, que já foi usada no parágrafo acima, é $\widetilde{x}$. A outra notação é $(x)\widetilde{}$.

Definiremos uma estrutura de A-modulo à esquerda para M. Dados $a \in A$ e $x \in J$, como J é ideal de A (segue do fato de J ser ideal idempotente de I e I ser ideal de A) temos que $x^*a^*ax, \|a\|^2x^*x \in J$. Como o elemento $\|a\|^2x^*x - x^*a^*ax = x^*(\|a\|^* - a^*a)x$ pode ser escrito na forma $(bx)^*(bx)$ com $bx \in J$ segue que $L(\|a\|^2x^*x - x^*a^*ax) \geq 0$ e portanto $L(x^*a^*ax) \leq \|a\|^2L(x^*x)$ donde $\|L(x^*a^*ax)\| \leq \|a\|^2\|L(x^*x)\|$. Portanto, considerando o elemento ax de J,

$$\|\widetilde{ax}\,\|^2 = \|\langle \widetilde{ax}\,, \widetilde{ax}\,\rangle\| = \|L(x^*a^*ax)\| \leq$$

$$\leq \|a\|^2\|L(x^*x)\| = \|a\|^2\|\langle \widetilde{x}\,, \widetilde{x}\,\rangle\| = \|a\|^2\|\widetilde{x}\,\|^2,$$

ou seja, $\|\widetilde{ax}\,\| \leq \|a\|\|\widetilde{x}\,\|$. Com isso podemos definir a operação

$$\begin{array}{rcl} . : A \times M & \rightarrow & M \\ (a, m) & \mapsto & a.m \end{array}$$

tal que $a.\widetilde{x} = \widetilde{ax}$ para cada $x \in J$, que é bilinear e associativa, e com esta M torna-se um A-módulo à esquerda. Esta operação origina um homomorfismo de C*-álgebras de A em $L(M)$, a álgebra dos operadores adjuntáveis de M. De fato, definindo

$$\begin{array}{rcl} \varphi : A & \rightarrow & L(M) \\ a & \mapsto & \varphi(a) \end{array}$$

por $\varphi(a)m = am$ temos:

Proposição 1.6 *φ é um *-homomorfismo.*

Demonstração.
Para cada $a \in A$,

$$\begin{array}{rcl} \varphi(a) : M & \rightarrow & M \\ m & \mapsto & am \end{array}$$

é uma função linear contínua. Além disso, dados $x, y \in J$,

$$\langle \varphi(a)\widetilde{x}\,, \widetilde{y}\,\rangle = \langle \widetilde{ax}\,, \widetilde{y}\,\rangle = L((ax)^*y) = L(x^*a^*y) = \langle \widetilde{x}\,, \widetilde{a^*y}\,\rangle = \langle \widetilde{x}\,, \varphi(a^*)\widetilde{y}\,\rangle,$$

e como J/N_0 é denso em M segue que $\langle \varphi(a)m, n\rangle = \langle m, \varphi(a^*)n\rangle$ para cada $m, n \in M$. Isto prova que $\varphi(a)$ é adjuntável e $\varphi(a)^* = \varphi(a^*)$. Além disso, φ é claramente linear e multiplicativa.

□

Definição 1.7 *A álgebra de Toeplitz $\mathcal{T}(A, \alpha, L)$ associada ao C*-sistema dinâmico (A, α, L) é a álgebra universal gerada por $A \cup M$, onde M é o módulo de Hilbert construído a partir do C*-sistema dinâmico (A, α, L), com as relações de A, de M, os produtos de bi-módulo e $m^*n = \langle m, n\rangle$ para cada $m, n \in M$.*

Note que de fato podemos falar da C*-álgebra universal, pelo fato de as relações serem admissíveis.

Denotamos por $\widehat{K_1}$ a sub álgebra fechada de $\mathcal{T}(A, \alpha, L)$ gerada por elementos da forma mn^*, para $m, n \in M$.

Definição 1.8 *Uma redundância em $\mathcal{T}(A, \alpha, L)$ é um par (a, k) onde $a \in A$, $k \in \widehat{K_1}$ e $am = km$ para cada $m \in M$.*

Considerando o *-homomorfismo $\varphi : A \to L(M)$, o conjunto

$$\ker(\varphi)^\perp = \{a \in A : ab = 0 = ba \ \forall\ b \in \ker(\varphi)\}$$

é um ideal de A. Como $K(M)$, que é o conjunto dos operadores compactos de $L(M)$, é um ideal de $L(M)$, segue que $\varphi^{-1}(K(M))$ é ideal de A. Denotamos por I_0 o ideal

$$I_0 = \ker(\varphi)^\perp \cap \varphi^{-1}(K(M)).$$

Definição 1.9 *O Produto Cruzado por Endomorfismo Parcial associado ao C*-sistema dinâmico (A, α, L) é o quociente de $\mathcal{T}(A, \alpha, L)$ pelo ideal gerado pelos elementos da forma $a - k$ para todas as redundâncias (a, k) tal que $a \in I_0$ e será denotado por $\mathcal{O}(A, \alpha, L)$.*

Em [7] foi mostrado que $A \ni a \to a \in \mathcal{O}(A, \alpha, L)$ é injetor. Apresentaremos algumas conseqüências deste fato na proposição a seguir. Denotaremos provisoriamente por $\widehat{a}$ e $\widehat{m}$ os elementos de A e M em $\mathcal{T}(A, \alpha, L)$. Defina

$$\widehat{K_n} = \overline{\text{span}}\{\widehat{m_1} \cdots \widehat{m_n} \widehat{l_1}^* \cdots \widehat{l_n}^* :\ m_i, l_i \in M\}$$

e

$$q : \mathcal{T}(A, \alpha, L) \to \mathcal{O}(A, \alpha, L)$$

o homomorfismo quociente.

Proposição 1.10 *a)* $A \ni a \mapsto q(\widehat{a}) \in \mathcal{O}(A, \alpha, L)$ *é um homomorfismo injetor.*

b) $A \ni a \mapsto \widehat{a} \in \mathcal{T}(A, \alpha, L)$ *é um *-homomorfismo injetor e* $q_{|_{\widehat{A}}}$ *é injetor.*

c) $M \ni m \mapsto \widehat{m} \in \mathcal{T}(A, \alpha, L)$ *é uma isometria.*

d) $q_{|_{\widehat{M}}}$ *é isometria.*

e) $M \ni m \mapsto q(\widehat{m}) \in \mathcal{O}(A, \alpha, L)$ *é uma isometria.*

f) $q_{|_{\widehat{K_n}}}$ *é um *-homomorfismo injetor.*

Demonstração.
a) É suficiente apresentar uma representação de A em $\mathcal{O}(A, \alpha, L)$ que seja injetiva. Esta representação pode ser vista em [9] e é feita usando espaços de Fock. A injetividade desta representaçao segue de [9 : 2.21].
b) Segue de a).
c) Dado $m \in M$, temos que

$$\|\widehat{m}\|^2_{\mathcal{T}(A,\alpha,L)} = \|\widehat{m}^*\widehat{m}\|_{\mathcal{T}(A,\alpha,L)} = \|\widehat{\langle m, m\rangle}\|_{\mathcal{T}(A,\alpha,L)}.$$

Como $\langle m, m\rangle \in A$, por b) segue que $\|\widehat{\langle m, m\rangle}\|_{\mathcal{T}(A,\alpha,L)} = \|\langle m, m\rangle\|_A$. Além disso temos que $\|m\|^2_M = \|\langle m, m\rangle\|_A$. Então

$$\|\widehat{m}\|^2_{\mathcal{T}(A,\alpha,L)} = \|\langle m, m\rangle\|_A = \|m\|^2_M,$$

provando c).
d) Dado $\widehat{m} \in \widehat{M}$ segue que $\widehat{m}^*\widehat{m} \in \widehat{A}$. Pela parte a), $q_{|_{\widehat{A}}}$ é injetora e portanto isometria. Então

$$\|q(\widehat{m})\|^2 = \|q(\widehat{m}^*\widehat{m})\| = \|\widehat{m}^*\widehat{m}\| = \|\widehat{m}\|^2.$$

e) Segue de c) e d).
f) Seja $k \in \widehat{K_n}$. Suponha $q(k) = 0$. Então $q((\widehat{M^*})^n k \widehat{M^n}) = 0$. Como $(\widehat{M^*})^n k \widehat{M^n} \subseteq \widehat{A}$ seque por b) que $(\widehat{M^*})^n k \widehat{M^n} = 0$. Então $\widehat{K_n} k \widehat{K_n} = 0$ donde $k = 0$.

$\square$

Denotamos definitivamente os elementos a de A por a em $\mathcal{T}(A,\alpha,L)$ e também por a em $\mathcal{O}(A,\alpha,L)$. Esta notação não deverá causar confusão por a) e b) da proposição anterior. Da mesma maneira, justificado por c) e e) denotaremos por m os elementos de M tanto em $\mathcal{T}(A,\alpha,L)$ quanto em $\mathcal{O}(A,\alpha,L)$. Com estas notações, para $n \geq 1$ temos

$$\widehat{K_n} = \overline{\operatorname{span}}\{m_1 \cdots m_n l_1^* \cdots l_n^* : \ m_i, l_i \in M\} \subseteq \mathcal{T}(A,\alpha,L).$$

Defina

$$K_n = \overline{\operatorname{span}}\{m_1 \cdots m_n l_1^* \cdots l_n^* : \ m_i, l_i \in M\} \subseteq \mathcal{O}(A,\alpha,L)$$

e note que $q(\widehat{K_n}) = K_n$. Se $(a,k) \in A \times \widehat{K_1}$ é redundância e $a \in I_0$ então $q(a) = q(k)$. Como estamos identificando a com $q(a)$ segue que $a = q(k)$, em $\mathcal{O}(A,\alpha,L)$.

Os espaços K_n e $\widehat{K_n}$ são claramente fechados pela soma e são auto-adjuntos. Na verdade são sub C*-álgebras. O fato de serem fechados pelo produto segue da seguinte proposição:

Proposição 1.11 *a)* $\widehat{K_n}\widehat{K_m} \subseteq \widehat{K_{max\{n,m\}}}$ *e também* $K_n K_m \subseteq K_{max\{n,m\}}$.
b) $A\widehat{K_n} \subseteq \widehat{K_n}$, $\widehat{K_n}A \subseteq \widehat{K_n}$ *e também* $AK_n \subseteq K_n$ *e* $K_n A \subseteq K_n$.

Demonstração.
Como $K_n = q(\widehat{K_n})$ é suficiente mostrar o resultado no nível da álgebra $\mathcal{T}(A,\alpha,L)$.
a) Suponha $n \leq m$. Dados elementos $l_1...l_n t_1^*...t_n^* \in \widehat{K_n}$ e $p_1...p_m q_1^*...q_m^* \in \widehat{K_m}$, como $a = t_1^*...t_n^* p_1...p_n \in A$ segue que $l_n a \in M$. Portanto

$$l_1...l_n t_1^*...t_n^* p_1...p_m q_1^*...q_m^* = l_1...l_n a p_{n+1}...p_m q_1^*...q_m^* \in \widehat{K_m}.$$

Isto é o suficiente pois tais elementos geram os $\widehat{K_n}$. Se $n > m$, pelo que fizemos acima, $\widehat{K_m}\widehat{K_n} \subseteq \widehat{K_{\max\{n,m\}}}$ e como $\widehat{K_{\max\{n,m\}}}$ é uma sub-C*-álgebra, e portanto auto-adjunta, segue que $\widehat{K_n}\widehat{K_m} = (\widehat{K_m}\widehat{K_n})^* \subseteq \widehat{K_{\max\{n,m\}}}$.
b) Segue do fato de que $am \in M$ para cada $a \in A$ e $m \in M$.

□

Denotamos por $m \otimes n$ o elemento de $K(M)$ dado por $m \otimes n(\xi) = m\langle n, \xi\rangle$ para cada $\xi \in M$.

Proposição 1.12 *Existe um *-isomorfismo*

$$\begin{array}{rccc} S: & \widehat{K_1} & \to & K(M) \\ & mn^* & \mapsto & m \otimes n \end{array}.$$

Demonstração.
Dado $k \in \widehat{K_1}$ e $m \in M$ segue que $km \in M$, pelo fato de M ser fechado em $\mathcal{T}(A, \alpha, L)$ pela proposição 1.10 c). Como $km, k^*m \in M$ para cada $m \in M$ segue que em $\mathcal{T}(A, \alpha, L)$

$$\langle km, n\rangle = (km)^*n = m^*(k^*n) = \langle m, k^*n\rangle.$$

Assim $\langle km, n\rangle = \langle m, k^*n\rangle$ em $\mathcal{T}(A, \alpha, L)$ e por 1.10 b), $\langle km, n\rangle = \langle m, k^*n\rangle$ em A. Defina

$$\begin{array}{rcl} S(k) : M & \rightarrow & M \\ m & \mapsto & km \end{array}.$$

Então para cada $k \in \widehat{K_1}$, $\langle S(k)(m), n\rangle = \langle m, S(k^*)n\rangle$, o que mostra que $S(k)$ é adjuntável e também que $S(k)^* = S(k^*)$. Defina

$$\begin{array}{rcl} S : \widehat{K_1} & \rightarrow & L(M) \\ k & \mapsto & S(k) \end{array}$$

que é linear e multiplicativa, e juntamente com o fato de que $S(k^*) = S(k)^*$ segue que S é um *-homomorfismo. É fácil ver que $S(mn^*) = m \otimes n$, e portanto $S(k) \in K(M)$ para cada $k \in \widehat{K_1}$. Além disso $S(\widehat{K_1})$ é um sub conjunto denso de $K(M)$ e assim $S(\widehat{K_1}) = K(M)$. Para ver que S é injetor, suponha que $S(k) = 0$, o que significa que $kM = 0$ donde $kMM^* = 0$ e portanto $k\widehat{K_1} = 0$. Como $k \in \widehat{K_1}$ segue que $k = 0$.

□

Proposição 1.13 *Se (a, k) é redundância de $\mathcal{T}(A, \alpha, L)$ então $a \in \varphi^{-1}(K(M))$.*

Demonstração.
Se (a, k) é redundância então $am = km$ para cada $m \in M$, donde $\varphi(a)(m) = S(k)(m)$ para cada $m \in M$. Como $S(k) \in K(M)$, segue o resultado.

□

Por esta proposição, a álgebra $\mathcal{O}(A, \alpha, L)$ coincide com o quociente de $\mathcal{T}(A, \alpha, L)$ pelo ideal gerado pelos elementos $(a - k)$ onde (a, k) é redundância e $a \in \ker(\varphi)^{\perp}$.

Dado um C*-sistema dinâmico (A, α, L) e um ideal fechado N de A tal que $J \subseteq N \subseteq I$, podemos considerar um novo C*-sistema dinâmico (A, β, L) onde o endomorfismo parcial $\beta : A \rightarrow M(N)$ é dado por $\beta(a) = (L^a_{|_N}, R^a_{|_N})$, considerando que $\alpha(a) = (L^a, R^a)$. Como $x\beta(a) = x\alpha(a)$ para cada $x \in J$ e $a \in A$ segue que $\mathcal{O}(A, \alpha, L) = \mathcal{O}(A, \beta, L)$. Por este motivo podemos supor que J é um ideal denso de I. Esta situação ocorre no segundo capítulo.

1.2 A ação de gauge

O objetivo desta seção é mostrar que todo ideal gauge invariante de $\mathcal{O}(A,\alpha,L)$ tem intersecção não nula com a álgebra dos pontos fixos da ação de gauge nesta álgebra.

Da propriedade universal de $\mathcal{T}(A,\alpha,L)$ segue que para cada $\lambda \in S^1$ existe um *-homomorfismo

$$\begin{array}{rcl} \theta_\lambda : \mathcal{T}(A,\alpha,L) & \to & \mathcal{T}(A,\alpha,L) \\ a & \mapsto & a \\ m & \mapsto & \lambda m \end{array}.$$

Se (a,k) é redundância, como $\theta_\lambda(a) = a$ e $\theta_\lambda(k) = k$ segue que $(\theta_\lambda(a), \theta_\lambda(k))$ também é redundância, e portanto podemos considerar

$$\theta_\lambda : \mathcal{O}(A,\alpha,L) \to \mathcal{O}(A,\alpha,L).$$

Note que $\theta_{\lambda_1}\theta_{\lambda_2} = \theta_{\lambda_1\lambda_2}$ donde segue que θ_λ na verdade é um automorfismo, com inverso $\theta_{\overline{\lambda}}$. Além disso, dado $r \in \mathcal{O}(A,\alpha,L)$ a função

$$S^1 \ni \lambda \mapsto \theta_\lambda(r) \in \mathcal{O}(A,\alpha,L)$$

é continua. Podemos então considerar

$$\begin{array}{rcl} E : \mathcal{O}(A,\alpha,L) & \to & \mathcal{O}(A,\alpha,L) \\ r & \mapsto & \int\limits_{S^1} \theta_\lambda(r) d\lambda \end{array}.$$

Proposição 1.14 *A álgebra dos pontos fixos da ação θ é $K = \overline{span}\{A, K_n; n \in \mathbb{N}\}$ e E é uma esperança condicional fiel sobre K, isto é, E é uma função linear, positiva, unitária tal que $E(rE(s)) = E(r)E(s)$, para cada $r, s \in \mathcal{O}(A,\alpha,L)$ e $E(r^*r) = 0$ se e somente se $r = 0$.*

Demonstração.
Não é difícil mostrar que E é esperança condicional fiel sobre a álgebra dos pontos fixos. Portanto basta provar que $\mathrm{Im}(E) = K$. Para tanto note que

$$E(am_1 \cdots m_k n_1^* \cdots n_l^* b) = \begin{cases} am_1 \cdots m_k n_1^* \cdots n_l^* b & \text{se } k = l \\ 0 & \text{se } k \neq l \end{cases}$$

onde $m_i, n_i \in M$ e $a, b \in A$. Por construção de $\mathcal{O}(A,\alpha,L)$ o espaço gerado pelos elementos da forma $am_1 \cdots m_i n_1^* \cdots m_j^* b$ é denso em $\mathcal{O}(A,\alpha,L)$, e portanto $\mathrm{Im}(E) \subseteq K$. Para cada $r \in \mathrm{span}\{A, K_n : n \in \mathbb{N}\}$ vale que $E(r) = r$ e portanto $E(r) = r$ para cada $r \in K$. Isto mostra que $K \subseteq \mathrm{Im}(E)$. Segue que $\mathrm{Im}(E) = K$.

$\square$

Definição 1.15 *Um ideal* $I \trianglelefteq \mathcal{O}(A, \alpha, L)$ *é gauge invariante se* $\theta_\lambda(I) \subseteq I$ *para cada* $\lambda \in S_1$.

Se I é gauge invariante, a ação de gauge em $\mathcal{O}(A, \alpha, L)/I$ é dada por

$$\begin{array}{rcl} \beta_\lambda : \mathcal{O}(A, \alpha, L)/I & \to & \mathcal{O}(A, \alpha, L)/I \\ \pi(r) & \mapsto & \pi(\theta_\lambda(r)) \end{array},$$

onde π é a projeção no quociente. Neste caso π é covariante pelas ações de gauge das álgebras $\mathcal{O}(A, \alpha, L)$ e $\mathcal{O}(A, \alpha, L)/I$, ou seja, $\pi(\theta_\lambda(r)) = \beta_\lambda(\pi(r))$ para cada elemento $r \in \mathcal{O}(A, \alpha, L)$ e para cada $\lambda \in S^1$. Além disso a álgebra dos pontos fixos de β é $\pi(K)$. De fato, denotando por F a esperança condicional em $\mathcal{O}(A, \alpha, L)/I$ induzida por β temos que para cada $\pi(r) \in \mathcal{O}(A, \alpha, L)/I$,

$$F(\pi(r)) = \int_{S^1} \beta_\lambda(\pi(r)) d\lambda = \int_{S^1} \pi(\theta_\lambda(r)) d\lambda = \pi\left(\int_{S^1} \theta_\lambda(r) d\lambda\right) = \pi(E(r)).$$

A álgebra dos pontos fixos de β é $\mathrm{Im}(F)$ e note que

$$\mathrm{Im}(F) = \mathrm{Im}(\pi \circ E) = \pi\left(\mathrm{Im}(E)\right) = \pi(K).$$

Proposição 1.16 *Se* $0 \neq I \trianglelefteq \mathcal{O}(A, \alpha, L)$ *é gauge invariante então* $I \cap K \neq 0$.

Demonstração.
Como $\theta_\lambda(I) \subseteq I$ para cada $\lambda \in S^1$ segue que

$$E(r) = \int_{S^1} \theta_\lambda(r) d\lambda \in I$$

para cada $r \in I$. Tome $0 \neq r \in I$. Como $r^*r \in I$ segue que $E(r^*r) \in I$ e pelo fato de L ser fiel segue que $E(r^*r) \neq 0$. Portanto $0 \neq E(r^*r) \in I \cap K$.

$\square$

Definindo $L_0 = A$ e $L_n = A + K_1 + \cdots + K_n$ para $n \geq 1$ segue que

$$L_0 \subseteq L_1 \subseteq L_2 \subseteq \cdots$$

e

$$K = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} L_n}.$$

Note que para cada n, L_n é fechado pela soma, e também é auto-adjunto. Além disso, pela proposição 1.11 L_n é fechado pelo produto. Portanto, para cada n, L_n na verdade é uma sub álgebra com involução. Esta forma de ver a álgebra K é muito útil em algumas situações que se apresentam no decorrer deste trabalho. Em algumas desta situações usaremos o fato, dado pela proposição seguinte, de que as álgebras L_n são fechadas para cada $n \in N$, e portanto são sub C*-álgebras.

Proposição 1.17 *Para cada $n \in \mathbb{N}$ as álgebras L_n são fechadas.*

Demonstração.
O caso L_0 segue da proposição 1.10 a). Por indução suponha L_n fechado. Note que $K_{n+1} \trianglelefteq \overline{L_{n+1}}$ e que L_n é sub álgebra fechada de $\overline{L_{n+1}}$. Por [11: 1.5.8] $L_n + K_{n+1}$ é uma sub álgebra fechada de $\overline{L_{n+1}}$. Portanto

$$L_{n+1} = L_n + K_{n+1} = \overline{L_n + K_{n+1}} = \overline{L_{n+1}}.$$

□

Chapter 2

O Produto Cruzado por Endomorfismo Parcial induzido por um homeomorfismo local

Dados um espaço topológico compacto e Hausdorff X e um homeomorfismo local em X, $\sigma : X \to X$, fica definido um C*-sistema dinâmico pondo-se

$$\begin{array}{rcl} \alpha : C(X) & \to & C(X) \\ f & \mapsto & f \circ \sigma \end{array}$$

e

$$L : C(X) \to C(X)$$

onde $L(f)(x) = \sum\limits_{y \in \sigma^{-1}(x)} f(y)$ para cada $x \in X$ e $f \in C(X)$. Esta situação ocorre na álgebra de Cuntz-Krieger, e pode ser vista em [4]. Uma situação mais geral consiste em considerar um conjunto aberto $U \subseteq X$ e $\sigma : U \to X$ um homeomorfismo local. Neste caso, α deixa de ser um endomorfismo em $C(X)$. De fato, definindo α como acima segue que para cada $f \in C(X)$, $\alpha(f)$ é um elemento de $C^b(U)$, onde $C^b(U)$ é o conjunto das funções contínuas e limitadas em U. Como $C^b(U)$ e $M(C_0(U))$ são C*-álgebras isomorfas obtemos um endomorfismo parcial $\widetilde{\alpha} : C(X) \to M(C_0(U))$. Pelo fato de que $\#\sigma^{-1}(x)$ pode não ser finita para algum $x \in X$ não podemos definir L como acima. Contudo, tomando uma função $f \in C_c(U)$, isto é, $f \in C(X)$ tal que $\text{supp}(f) = \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}} \subseteq U$, mostraremos que para cada $x \in X$, $\sum\limits_{y \in \sigma^{-1}(x)} f(y)$ envolve apenas uma quantidade finita de termos não nulos. Mostraremos também que, para cada $f \in C_c(U)$, $L(f)$ definido por $L(f)(x) = \sum\limits_{y \in \sigma^{-1}(x)} f(y)$ é um elemento de $C(X)$, e assim podemos definir a função

$L : C_c(U) \to C(X)$.

Na primeira seção mostraremos que $(C(X), \widetilde{\alpha}, L)$ é um C*-sistema dinâmico, que nos fornecerá o produto cruzado $\mathcal{O}(X, \alpha, L)$.

A segunda seção trata de alguns resultados básicos sobre a estrutura de $\mathcal{O}(X, \alpha, L)$, e o resultado mais importante desta seção é que todo ideal de $\mathcal{O}(X, \alpha, L)$ que tem intersecção não nula com K (a álgebra dos pontos fixos da ação de gauge) tem intersecção não nula com $C(X)$.

Na última seção mostraremos que a álgebra de Cuntz-Krieger para matrizes infinitas (ver [3]) é um produto cruzado por endomorfismo parcial. Este exemplo motivou o trabalho.

A escolha do nome produto cruzado por endomorfismo parcial para a álgebra $\mathcal{O}(A, \alpha, L)$ foi motivada pelo homeomorfismo local σ.

2.1 A álgebra $\mathcal{O}(X, \alpha, L)$

Seja X um espaço topológico compacto e Hausdorf, $U \subseteq X$ um subconjunto aberto e $\sigma : U \to X$ um homeomorfismo local. Defina

$$\begin{aligned} \alpha : C(X) &\to C^b(U) \\ f &\mapsto f \circ \sigma \end{aligned}$$

que é um *-homomorfismo. Para cada $f \in C_c(U)$ defina para cada $x \in X$

$$L(f)(x) = \begin{cases} \sum\limits_{\substack{y \in U \\ \sigma(y) = x}} f(y) & \text{se } \sigma^{-1}(x) \neq \emptyset \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Obs.: Se $K \subseteq U$ é compacto, tomando uma cobertura aberta $U_1, \cdots, U_n$ de K em U tal que $\sigma_{|_{U_i}}$ é homeomorfismo, para cada $x \in X$ existe no máximo um elemento x_i em cada $\sigma^{-1}(x) \cap U_i$. Portanto existem no máximo n elementos em $\sigma^{-1}(x) \cap K$. Segue então que a soma que define $L(f)(x)$ envolve uma quantidade finita de termos para cada $x \in X$, e portanto $L(f)(x)$ de fato pode ser definido como acima.

Lema 2.1 *Para cada $f \in C_c(U)$, $L(f)$ é um elemento de $C(X)$*

Demonstração.
Seja $f \in C_c(U)$ e $K = \text{supp}(f)$. Mostraremos que $L(f) \in C(X)$. Dado $x \in X \setminus \sigma(K)$, como $X \setminus \sigma(K)$ é aberto e $L(f)(y) = 0$ para cada $y \in X \setminus \sigma(K)$, segue que $L(f)$ é contínua

em x. Falta mostrar que $L(f)$ é contínua nos pontos de $\sigma(K)$. Seja x um elemento de $\sigma(K)$, $\{x_1, \cdots, x_k\} = \sigma^{-1}(x) \cap K$, e U_j vizinhanças disjuntas de x_j tais que $\sigma_{|U_j}$ é homeomorfismo. Estes U_j podem ser tomados tais que $\sigma(U_j)$ é aberto, pelo fato de σ ser homeomorfismo local.

Afirmação: Existe um aberto $V \ni x$ tal que $\sigma^{-1}(V) \cap \left(K \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{k} U_j\right)\right) = \emptyset$.

Suponha que $\sigma^{-1}(V) \cap \left(K \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{k} U_j\right)\right) \neq \emptyset$ para cada aberto V que contém x. Para cada aberto $W \ni x$ defina

$$F_W = \sigma^{-1}(\overline{W}) \cap \left(K \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{k} U_j\right)\right).$$

Como $\sigma^{-1}(\overline{W})$ é fechado em U e $K \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{k} U_j\right) \subseteq U$ é compacto, segue que F_W é compacto, e portanto fechado em X. Além disso F_W é não vazio pois

$$\emptyset \neq \sigma^{-1}(W) \cap \left(K \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{k} U_j\right)\right) \subseteq F_W.$$

Dadas $W_1, ..., W_m$ vizinhanças de x, temos que $F_{\bigcap_{j=1}^{m} W_j} \subseteq F_{W_j}$ para cada j donde

$$F_{\bigcap_{j=1}^{m} W_j} \subseteq \bigcap_{j=1}^{m} F_{W_j},$$

e portanto $\bigcap_{j=1}^{m} F_{W_j} \neq \emptyset$ para cada coleção finita de vizinhanças $W_1, ..., W_m$ de x. Como X é compacto segue que existe $y \in X$ tal que

$$y \in \bigcap_{W \text{viz. de } x} F_W.$$

Como

$$\bigcap_{W \text{viz. de } x} F_W \subseteq K \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{k} U_j\right)$$

segue que $\sigma(y) \neq x$. Tome um aberto $W_x \ni x$ tal que $\sigma(y) \notin \overline{W_x}$. Então $y \notin F_{W_x}$, absurdo. Isso prova a afirmação.

Seja $V_0 \ni x$ um aberto conforme a afirmação acima e defina

$$V = V_0 \bigcap \left(\bigcap_{j=1}^{k} \sigma(U_j) \right).$$

Seja $(y_i)_i$ um net tal que $y_i \to x$. Podemos supor que $(y_i)_i \subseteq V$, e portanto

$$\sigma^{-1}(y_i) = \{y_{1,i}, ..., y_{k,i}\}$$

onde $y_{j,i} \in U_j$. Como $\sigma_{|U_j}$ é homeomorfismo segue que $y_{j,i} \overset{i\to\infty}{\longrightarrow} x_j$ para cada j, e portanto

$$L(f)(y_i) = \sum_{\substack{z \in U \\ \sigma(z)=y_i}} f(z) = \sum_{j=1}^{k} f(y_{j,i}) \overset{i\to\infty}{\longrightarrow} \sum_{j=1}^{k} f(x_j) = \sum_{\substack{y \in U \\ \sigma(y)=x}} f(y) = L(f)(x).$$

Isto mostra que $L(f)$ é contínua nos pontos de $\sigma(K)$, concluindo o lema.

$\square$

Estamos na situação em que $C_c(U)$ é um ideal idempotente auto-adjunto de $C_0(U)$, que é um ideal de $C(X)$, e pelo lema acima $L : C_c(U) \to C(X)$ é uma função. Além disso, compondo α com o isomorfismo

$$C^b(U) \ni g \mapsto (L_g, R_g) \in M(C_0(U))$$

obtemos o endomorfismo parcial $\widetilde{\alpha} : C(X) \to M(C_0(U))$.

Proposição 2.2 *$(C(X), \widetilde{\alpha}, L)$ é um C^*-sistema dinâmico.*

Demonstração.
Claramente L é linear, positiva e preserva *. Falta mostrar que $L(\widetilde{\alpha}(f)g) = fL(g)$ para cada $f \in C(X)$ e $g \in C_c(U)$. Note que

$$\widetilde{\alpha}(f)g = T^{-1}(\widetilde{\alpha}(f)T(g)) = T^{-1}((L_{\alpha(f)}, R_{\alpha(f)})(L_g, R_g)) =$$

$$= T^{-1}(L_{\alpha(f)g}, R_{\alpha(f)g}) = \alpha(f)g.$$

Então para cada $x \in X$

$$L(\widetilde{\alpha}(f)g)(x) = L(\alpha(f)g)(x) = \sum_{y \in \sigma^{-1}(x)} (\alpha(f)g)(y) =$$

$$= \sum_{y\in\sigma^{-1}(x)} f(\sigma(y))g(y) = f(x)\sum_{y\in\sigma^{-1}(x)} g(y) = (fL(g))(x).$$

Portanto $L(\widetilde{\alpha}(f)g) = fL(g)$.

$\square$

Fica então definido a álgebra de Toeplitz $\mathcal{T}(C(X), \widetilde{\alpha}, L)$ e o produto cruzado por endomorfismo parcial $\mathcal{O}(C(X), \widetilde{\alpha}, L)$. Como $\widetilde{\alpha}$ é dado essencialmente por α denotaremos o C*-sistema dinâmico $(C(X), \widetilde{\alpha}, L)$ por $(C(X), \alpha, L)$. Além disso como $g\widetilde{\alpha}(f) = g\alpha(f)$ para cada $g \in C_c(U)$ e $f \in C(X)$, não faremos mais nenhuma referência a $\widetilde{\alpha}$. Para simplificar a notação denotaremos a álgebra de Toeplitz $\mathcal{T}(C(X), \widetilde{\alpha}, L)$ por $\mathcal{T}(X, \alpha, L)$ e o produto cruzado $\mathcal{O}(C(X), \widetilde{\alpha}, L)$ por $\mathcal{O}(X, \alpha, L)$.

2.2 Resultados básicos

Nesta seção veremos alguns resultados básicos sobre o produto cruzado por endomorfismo parcial em questão.

Lema 2.3 *Dada $f \in C_c(U)$, temos que:*
a)$\widetilde{f} = 0$ se e somente se $f = 0$.
b)se $\sigma_{|supp(f)}$ é homeomorfismo então $\|f\|_\infty = \|\widetilde{f}\|$.

Demonstração.
a) Dada $f \in C_c(U)$ e $x \in U$ tal que $f(x) \neq 0$ então

$$L(f^*f)(\sigma(x)) = \sum_{\sigma(y)=\sigma(x)} f^*(y)f(y) = |f(x)|^2 + \sum_{\substack{y\neq x\\ \sigma(y)=\sigma(x)}} |f(y)|^2 > 0.$$

Isto mostra que L é fiel, e portanto $\widetilde{f} = 0$ se e somente se $f = 0$.
b) Como $\|\widetilde{f}\|^2 = \|L(f^*f)\|_\infty$ basta mostrar que $\|L(f^*f)\|_\infty = \|f\|_\infty^2$. Para tanto note que

$$L(f^*f)(x) = \begin{cases} |f(\sigma^{-1}(x))|^2 & \text{se } x \in \sigma(\text{supp}(f)) \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Daí segue que $\|L(f^*f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty^2$. Por outro lado, tome $x \in U$ tal que $|f(x)| = \|f\|_\infty$, e note que

$$L(f^*f)(\sigma(x)) = (f^*f)(x),$$

o que prova que $\|L(f^*f)\|_\infty \geq \|f\|_\infty^2$.

$\square$

Considere o homomorfismo dado pelo produto à esquerda de A por M

$$\begin{array}{rcl}\varphi : C(X) & \to & L(M) \\ f & \mapsto & \varphi(f)_{|m} = fm\end{array}.$$

Note que $f \in \ker(\varphi)$ se e somente se $fm = 0$ para cada $m \in M$, o que ocorre se e somente se $\widetilde{fg} = f\widetilde{g} = 0$ para cada $g \in C_c(U)$. Pela parte a) do lema anterior $\widetilde{fg} = 0$ se e somente se $fg = 0$. Portanto $f \in \ker(\varphi)$ se e somente se $fg = 0$ para cada $g \in C_c(U)$, ou seja, $fg = 0$ para cada $g \in C_0(U)$. Assim, dada $g \in C_0(U)$ temos que $fg = 0$ para cada $f \in \ker(\varphi)$. Isto significa que $C_0(U) \subseteq \ker(\varphi)^{\perp}$.

Lema 2.4 *a) Se $f, g \in C_c(U)$ e $\sigma_{|_{supp(f)\cup supp(g)}}$ é homeomorfismo então $(fg^*, \widetilde{f}\,\widetilde{g}^*)$ é redundância de $\mathcal{T}(X, \alpha, L)$ e $fg^* = \widetilde{f}\,\widetilde{g}^*$ em $\mathcal{O}(X, \alpha, L)$.*
b) $C_0(U) \subseteq \varphi^{-1}(K(M))$.
c) $C_0(U) \subseteq I_0$ $(= \ker(\varphi)^{\perp} \cap \varphi^{-1}(K(M)))$.
d) $C_0(U) \subseteq K_1$.

Demonstração.
a) Sejam $f, g \in C_c(U)$ tal que $\sigma_{|_{\mathrm{supp}(f)\cup \mathrm{supp}(g)}}$ é homeomorfismo e $h \in C_c(U)$. Note que $\widetilde{f}\,\widetilde{g}^*\widetilde{h} = (f\alpha(L(g^*h)))\widetilde{\ }$. Para cada $x \in \mathrm{supp}(f)$,

$$f\alpha(L(g^*h))(x) = f(x)L(g^*h)(\sigma(x)) = f(x) \sum_{\substack{y\in U \\ \sigma(y)=\sigma(x)}} (g^*h)(y) = ...$$

...pelo fato de $\sigma_{|_{\mathrm{supp}(f)\cup \mathrm{supp}(g)}}$ ser homeomorfismo...

$$... = f(x)g^*(x)h(x) = (fg^*h)(x).$$

Se $x \notin \mathrm{supp}(f)$ então $(f\alpha(L(g^*h)))(x) = 0 = (fg^*h)(x)$. Então $f\alpha(L(g^*h)) = fg^*h$ e portanto

$$\widetilde{f}\,\widetilde{g}^*\widetilde{h} = (f\alpha(L(g^*h)))\widetilde{\ } = \widetilde{fg^*h} = fg^*\widetilde{h}$$

para cada $h \in C_c(U)$, donde $\widetilde{f}\,\widetilde{g}^*m = fg^*m$ para cada $m \in M$. Segue que $(fg^*, \widetilde{f}\,\widetilde{g}^*)$ é redundância. Como $fg^* \in C_0(U) \subseteq \ker(\varphi)^{\perp}$ segue que $fg^* = \widetilde{f}\,\widetilde{g}^*$ em $\mathcal{O}(X, \alpha, L)$.
b) É suficiente mostrar que $C_c(U) \subseteq \varphi^{-1}(K(M))$. Dada $f \in C_c(U)$, tome cobertura $V_1, \cdots, V_n$ de $\mathrm{supp}(f)$ tal que $\sigma_{|_{V_i}}$ é homeomorfismo. Seja ξ_i'' partição da unidade subordinada a esta cobertura. Defina $\xi_i = f\sqrt{\xi_i''}$ e $\xi_i' = \sqrt{\xi_i''}$. Então $f = \sum_{i=1}^n \xi_i\xi_i'^*$. Pela parte a), $(\xi_i\xi_i'^*, \widetilde{\xi_i}\,\widetilde{\xi_i'}^*)$ é redundância donde (f, k) é redundância onde $k = \sum_{i=1}^{n} \widetilde{\xi_i}\,\widetilde{\xi_i'}^*$. Assim

$fm = km$ para cada $m \in M$ e portanto

$$\varphi(f)(m) = fm = km = S(k)(m)$$

para cada $m \in M$, onde S é o *-isomorfismo da proposição 1.12. Então $\varphi(f) = S(k)$, e assim $f \in \varphi^{-1}(K(M))$. Portanto $C_c(U) \subseteq \varphi^{-1}(K(M))$.
c) Segue de b) e do fato de que $C_0(U) \subseteq \ker(\varphi)^{\perp}$.
d) Dada $f \in C_c(U)$, pela parte b) segue que (f, k) é redundância para algum $k \in \widehat{K_1}$. Como $f \in C_0(U) \subseteq I_0$ segue que $f = q(f) = q(k) \in K_1$. Portanto $C_c(U) \subseteq K_1$ donde $C_0(U) \subseteq K_1$.

$\square$

O lema seguinte será usado várias vezes no decorrer deste trabalho.

Lema 2.5 *Se $(k_0, k_1, \cdots, k_n) \in C(X) \times K_1 \times \cdots \times K_n$ tal que $g \sum_{i=0}^{n} k_i = 0$ para cada $g \in C_0(U)$ então:*
a) $k_{0|_{\partial(U)}} = 0$, $k_0 = f_1 + f_2$ onde $f_1 \in C_0(U)$ e $f_2 \in C_0(X \setminus \overline{U})$.
b) $\sum_{i=0}^{n} k_i = f_2$.

Demonstração.
Fixe $\varepsilon > 0$. Para cada $1 \leq i \leq n$ tome

$$k_i' = \sum_{j=1}^{N_i} m_{j,1}^i \cdots m_{j,i}^i (l_{j,1}^i)^* \cdots (l_{j,i}^i)^* \in K_i$$

tal que $m_{j,k}^i = \widetilde{f_{j,k}^i}$ com $f_{j,k}^i \in C_c(U)$ e

$$\|k_i - k_i'\| \leq \frac{\varepsilon}{n}.$$

Defina

$$k_\varepsilon = k_1' + \cdots + k_n'$$

e

$$K_\varepsilon = \bigcup_{i,j,k} \operatorname{supp}(f_{j,k}^i) \subseteq U$$

que é compacto. Dado $x \in U \setminus K_\varepsilon$ tome $f_x \in C_0(U)$ tal que $f_x(x) = 1$, $0 \leq f \leq 1$ e $f_{x|_{K_\varepsilon}} = 0$. Então $f_x k_\varepsilon = 0$ pela escolha de f_x e $f_x k_0 = -f_x \sum_{i=1}^{n} k_i$ por hipótese. Segue que

$$\|f_x k_0\| = \| - f_x \sum_{i=1}^{n} k_i + f_x k_\varepsilon\| = \|f_x(- \sum_{i=1}^{n} k_i + k_\varepsilon)\| = \|f_x \sum_{i=1}^{n}(k_i' - k_i)\| \leq \varepsilon$$

donde $|k_0(x)| \leq \varepsilon$. Desta forma mostra-se que $|k_0(x)| \leq \varepsilon$ para cada $x \in U \setminus K_\varepsilon$. Dado $y \in \partial(U)$, tome um net $(x_l)_l \subseteq U$ tal que $x_l \to y$. Como $y \notin K_\varepsilon$ e $U \setminus K_\varepsilon$ é aberto podemos supor $(x_l)_l \subseteq U \setminus K_\varepsilon$ donde $|k_0(x_l)| \leq \varepsilon$ para cada l. Pela continuidade de k_0, $|k_0(y)| \leq \varepsilon$. Isso mostra (tomando-se ε suficientemente pequeno) que $k_{0|_{\partial(U)}} = 0$. Definindo $f_1 = k_0 1_U$ e $f_2 = k_0 1_{U^c}$, obtemos a parte a).
Provaremos a parte b). Para cada $\varepsilon > 0$ tome $g_\varepsilon \in C_0(U)$ tal que $0 \leq g_\varepsilon \leq 1$ e $g_{\varepsilon|_{K_\varepsilon}} = 1$. Defina $h_\varepsilon = g_\varepsilon k_0$. Assim obtemos uma seqüência de funções $(h_\varepsilon)_\varepsilon \subseteq C_0(U)$.

Afirmação: $\lim_{\varepsilon \to 0} h_\varepsilon = f_1$

Para cada ε, dado $x \in X$,

$$|(h_\varepsilon - f_1)(x)| = |(g_\varepsilon - 1_U)(x) k_0(x)| = \begin{cases} |g_\varepsilon(x) - 1||k_0(x)| & \text{se } x \in U \setminus K_\varepsilon \\ 0 & x \in K_\varepsilon \cup U^c \end{cases}$$

Se $x \in U \setminus K_\varepsilon$ então $|k_0(x)| \leq \varepsilon$ e portanto para tais x, $|g_\varepsilon(x) - 1||k_0(x)| \leq 2\varepsilon$. Assim $\|h_\varepsilon - f_1\| \leq 2\varepsilon$. Isto prova a afirmação.

Além disso $g_\varepsilon k_\varepsilon = k_\varepsilon$ e

$$h_\varepsilon + (k_1 + \cdots + k_n) = h_\varepsilon + k_\varepsilon - k_\varepsilon + (k_1 + \cdots + k_n) = ...$$

...usando o fato de que $h_\varepsilon = g_\varepsilon k_0 = -g_\varepsilon(k_1 + \cdots + k_n)$ pois $g_\varepsilon \in C_0(U)$...

$$... = -g_\varepsilon(k_1 + \cdots + k_n) + k_\varepsilon - k_\varepsilon + (k_1 + \cdots + k_n) =$$

$$= -g_\varepsilon(k_1 + \cdots + k_n - k_\varepsilon) - k_\varepsilon + (k_1 + \cdots + k_n).$$

Então

$$\|h_\varepsilon + (k_1 + \cdots + k_n)\| = \|g_\varepsilon(-(k_1 + \cdots + k_n) + k_\varepsilon) + ((k_1 + \cdots + k_n) - k_\varepsilon)\| \leq$$

$$\leq \|g_\varepsilon(-(k_1 + \cdots + k_n) + k_\varepsilon)\| + \|(k_1 + \cdots + k_n) - k_\varepsilon\| \leq 2\varepsilon.$$

Isto prova que $\lim_{\varepsilon \to 0} h_\varepsilon = -(k_1 + \cdots + k_n)$. Pela afirmação temos que $\lim_{\varepsilon \to 0} h_\varepsilon = f_1$, portanto $f_1 = -(k_1 + \cdots + k_n)$, ou seja, $f_1 + k_1 + \ldots + k_n = 0$. Desta forma

$$\sum_{i=0}^{n} k_i = f_1 + f_2 + k_1 + \cdots + k_n = f_2,$$

provando b).

□

Corolário 2.6 $K_1 \cap C(X) = C_0(U)$

Demonstração.
Seja $r \in K_1 \cap C(X)$. Então $r = f = k_1$ para $f \in C(X)$ e $k_1 \in K_1$. Então $f - k_1 = 0$ e em particular $g(f - k_1) = 0$ para cada $g \in C_0(U)$, e pelo lema 2.5, $f = f_1 + f_2$ com $f_1 \in C_0(U)$, $f_2 \in C_0(X \setminus \overline{U})$ e $f - k_1 = f_2$. Como $f - k_1 = 0$ segue que $f_2 = 0$. Portanto $f = f_1$, o que prova que $r = f_1 \in C_0(U)$. Desta forma $K_1 \cap C(X) \subseteq C_0(U)$. A outra inclusão segue de 2.4 d).

□

Na construção do Produto Cruzado por Endomorfismo Parcial $\mathcal{O}(X, \alpha, L)$ foi considerado o ideal $I_0 = \varphi^{-1}(K(M)) \cap \ker(\varphi)^\perp$. O corolário acima nos permite identificar este ideal.

Corolário 2.7 $I_0 = C_0(U)$

Demonstração.
Dada $f \in I_0$ então $\varphi(f) = k \in K(M)$. Tome $k' \in \widehat{K_1}$ tal que $S(k') = k$ onde S é o isomorfismo da proposição 1.12. Então

$$fm = \varphi(f)(m) = k(m) = S(k')(m) = k'm$$

para cada $m \in M$. Portanto (f, k') é redundância de $\mathcal{T}(X, \alpha, L)$. Como $f \in I_0$ segue que $f = q(k') \in K_1$ em $\mathcal{O}(X, \alpha, L)$. Segue pelo corolário acima que $f \in C_0(U)$. Portanto $I_0 \subseteq C_0(U)$. A outra inclusão é o lema 2.4 c).

□

Lembramos que K é a álgebra dos pontos fixos da ação de gauge, e que

$$K = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} L_n}$$

onde $L_n = C(X) + K_1 + \cdots + K_n$ para $n \geq 1$ e $L_0 = C(X)$.

Proposição 2.8 *Todo ideal de $\mathcal{O}(X, \alpha, L)$ que tem intersecção não nula com K tem intersecção não nula com $C(X)$.*

Demonstração.
Seja I ideal de $\mathcal{O}(X, \alpha, L)$ tal que $I \cap K \neq 0$. Por [2: III.4.1] existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $I \cap L_n \neq 0$. Seja $n_0 = \min\{n \in \mathbb{N} : I \cap L_n \neq 0\}$ e tome $0 \neq k \in I \cap L_{n_0}$. Suponha $n_0 \neq 0$. Supondo que $m^*kk^*l = 0$ para cada $m, l \in M$ teremos que $m^*k = 0$ para cada $m \in M$. Assim $K_1 k = 0$ e como $C_0(U) \subseteq K_1$ segue que $fk = 0$ para cada $f \in C_0(U)$. Pelo lema 2.5, $k \in C(X) = L_0$, o que é absurdo pois estamos supondo $n_0 \neq 0$. Portanto existe $m, l \in M$ tal que $m^*kk^*l \neq 0$. Note que $m^*kk^*l \in I \cap L_{n_0-1}$ o que novamente nos leva a um absurdo pois $n_0 = \min\{n \in \mathbb{N} : I \cap L_n \neq 0\}$. Portanto $n_0 = 0$, ou seja, $k \in L_0 = C(X)$.

□

Desta proposição e da proposição 1.16 segue o corolário:

Corolário 2.9 *Todo ideal gauge invariante não nulo de $\mathcal{O}(X, \alpha, L)$ tem intersecção não nula com $C(X)$.*

2.3 A álgebra de Cuntz-Krieger para Matrizes Infinitas

Nesta seção mostraremos que a álgebra de Cuntz-Krieger para matrizes infinitas, introduzida em [3], é um exemplo de Produto Cruzado por Endomorfismo Parcial. Iniciaremos esta seção fazendo um resumo da construção desta álgebra.

Seja G um conjunto e $A = A(i,j)_{i,j \in G}$ uma matriz onde $A(i,j) \in \{0, 1\}$. A partir da matriz A define-se a C*-álgebra universal $\widetilde{O_A}$ gerada por uma familia de isometrias parciais $\{S_x\}_{x \in G}$ com as seguintes relações:

1. $S_i^* S_i$ e $S_j^* S_j$ comutam,

2. $S_i^* S_j = 0$ para cada $i \neq j$,

3. $S_i^* S_i S_j = A(i,j) S_j$,

4. $\prod_{x \in X} S_x^* S_x \prod_{y \in Y} (1 - S_y^* S_y) = \sum_{j \in G} A(X, Y, j) S_j S_j^*$, sempre que $X, Y \subseteq G$ são finitos tais que $A(X, Y, j) := \prod_{x \in X} A(x,j) (\prod_{y \in Y} 1 - A(y,j)) \neq 0$ apenas para uma quantidade finita de $j \in G$.

A álgebra de Cuntz-Krieger para matrizes infinitas foi definida em [3] como a subálgebra O_A de $\widetilde{O_A}$ gerada pelos S_x.

Seja $\mathbb{F}$ o grupo livre gerado por G e seja $\{0,1\}^{\mathbb{F}}$ o espaço topológico (com a topologia produto), também visto como o conjunto dos subconjuntos de $\mathbb{F}$. Em $\{0,1\}^{\mathbb{F}}$ onsidere o conjunto $\Omega_e = \{\xi \subseteq \mathbb{F}; e \in \xi\}$. Para cada $t \in \mathbb{F}$ defina $\Delta'_t = \{\xi \in \Omega_e; t \in \xi\}$ que é um subconjunto aberto e fechado de Ω_e. Denotando por 1_t a função característica de Δ'_t considere o conjunto $R_A \subseteq C(\Omega_e)$ formado pelas seguintes funções:

1. $1_x 1_y$ para cada $x \neq y$, $x, y \in G$,

2. $1_{x^{-1}} 1_y - A(x,y) 1_y$ para cada $x, y \in G$,

3. $1_{ts} 1_t - 1_{ts}$ para $t, s \in \mathbb{F}$ tal que $|ts| = |t| + |s|$ (onde $|r|$ é o número de geradores da representação reduzida de r),

4. $\prod\limits_{x \in X} 1_{x^{-1}} \prod\limits_{y \in Y} (1 - 1_{y^{-1}}) - \sum\limits_{j \in G} A(X,Y,j) 1_j$ onde X, Y são subconjuntos finitos de G tais que $A(X,Y,j) \neq 0$ apenas para um numero finito de $j \in G$.

Em Ω_e considere o conjunto fechado

$$\widetilde{\Omega_A} = \{\xi \in \Omega_e; f(t^{-1}\xi) = 0 \ \forall \ t \in \xi, f \in R_A\}.$$

Em [3:7.3] foi mostrado que $\widetilde{\Omega_A}$ é o fecho em $\Omega_A^{\mathcal{T}}$ dos elementos cujo tronco (ver [3:5.5]) é infinito, onde

$$\Omega_A^{\mathcal{T}} = \left\{ \begin{array}{ll} \xi \in \Omega_e : & e \in \xi, \xi \text{ é convexo} \\ & \text{se } t \in \xi \text{ existe no máximo um } y \in G \text{ tal que } ty \in \xi \\ & \text{se } t \in \xi, y \in G \text{ e } ty \in \xi \text{ então } tx^{-1} \in \xi \Leftrightarrow A(x,y) = 1 \end{array} \right\}$$

Os homeomorfismos

$$\begin{array}{rcl} h_t : \Delta'_{t^{-1}} & \rightarrow & \Delta'_t \\ \xi & \mapsto & t\xi \end{array}$$

induzem uma ação parcial $(\{D_t\}_{t \in \mathbb{F}}, \{\theta_t\})$ de $\mathbb{F}$ em $C(\widetilde{\Omega_A})$ (ver [5] e [8]) onde D_t é definido por $D_t = C(\Delta_t)$, $\Delta_t = \Delta'_t \cap \widetilde{\Omega_A}$ e

$$\begin{array}{rcl} \theta_t : D_{t^{-1}} & \rightarrow & D_t \\ f & \mapsto & f h_{t^{-1}} \end{array},$$

e portanto fica definido o produto cruzado parcial $C(\widetilde{\Omega_A}) \rtimes_\theta \mathbb{F}$ (ver [5] e [8]).

Foi mostrado em [3:7.10] que existe um *-isomorfismo

$$\Phi : \widetilde{O_A} \to C(\widetilde{\Omega_A}) \rtimes_\theta \mathbb{F}$$

tal que $\Phi(S_x) = 1_x \delta_x$.

Baseado nestas informações daremos um exemplo de produto cruzado por endomorfismo.

Seja $U \subseteq \widetilde{\Omega_A}$, $U = \bigcup_{x \in G} \Delta_x$. Como cada Δ_x é aberto segue que U é aberto. Além disso, U é denso em $\widetilde{\Omega_A}$, pois U contém todas os elementos de $\Omega_A^{\mathcal{T}}$ cujo tronco é infinito, e estes elementos formam um conjunto denso em $\widetilde{\Omega_A}$. Como cada elemento $\xi \in U$ contém um único $x \in G$, podemos definir a função contínua

$$\sigma : U \to \widetilde{\Omega_A}$$

dado por $\sigma(\xi) = x^{-1}\xi$ onde x é o único elemento de G que está em ξ. Esta função é um homeomorfismo local (de fato, $\sigma_{|\Delta_x} : \Delta_x \to \Delta_{x^{-1}}$ é homeomorfismo). Definindo

$$\begin{array}{rcl} \alpha : C(\widetilde{\Omega_A}) & \to & C^b(U) \\ f & \mapsto & f \circ \sigma \end{array}$$

e

$$L : C_c(U) \to C(\widetilde{\Omega_A})$$

por $L(f)(\xi) = \sum_{\substack{\eta \in U \\ \sigma(\eta) = \xi}} f(\eta)$, pela proposição 2.2 (e pelo parágrafo posterior a esta proposição) segue que $(C(\widetilde{\Omega_A}), \alpha, L)$ é um C*-sistema dinâmico, e portanto fica definida a álgebra $\mathcal{O}(\widetilde{\Omega_A}, \alpha, L)$.

Concentremos os esforços no sentido de mostrar que $\mathcal{O}(\widetilde{\Omega_A}, \alpha, L)$ e $\widetilde{O_A}$ são C*-álgebras isomorfas.

Lema 2.10 *a)* $L(1_x) = 1_{x^{-1}}$ *para cada* $x \in G$
b)$f 1_x \alpha L(1_x g) = 1_x f g$ *para cada* $x \in G$ *e* $f, g \in C(\widetilde{\Omega_A})$.

Demonstração.
Note que $\sigma^{-1}(\xi) = \{x\xi : x^{-1} \in \xi\}$. De fato, se $x^{-1} \in \xi$ então $x\xi \in U$ e $\sigma(x\xi) = \xi$. Por outro lado, se $\nu \in \sigma^{-1}(\xi)$ então $y^{-1}\nu = \sigma(\nu) = \xi$. Como $e \in \nu$ então $y^{-1} \in \xi$, e é claro que $\nu = y\xi$.

a) Para cada $\xi \in \widetilde{\Omega_A}$

$$L(1_x)(\xi) = \sum_{\nu \in \sigma^{-1}(\xi)} 1_x(\nu) = \sum_{\substack{y \in G: \\ y^{-1} \in \xi}} 1_x(y\xi) = \begin{cases} 1 & x^{-1} \in \xi \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} = 1_{x^{-1}}(\xi).$$

b) Se $x \notin \xi$ então $(1_x f \alpha L(1_x g))(\xi) = 0 = (1_x fg)(\xi)$. Se $x \in \xi$,

$$(1_x f \alpha L(1_x g))(\xi) = f(\xi)L(1_x g)\sigma(\xi) = f(\xi)g(\xi) = (1_x fg)(\xi).$$

$\square$

Proposição 2.11 *Existe um *-homomorfismo unitário*

$$\begin{array}{rcl} \psi : \widetilde{O_A} & \to & \mathcal{O}(\widetilde{\Omega_A}, \alpha, L) \\ S_x & \mapsto & \widetilde{1_x} \end{array}.$$

Demonstração.
Mostraremos que ψ preserva as relações 1-4 que definem $\widetilde{O_A}$. A primeira relação segue do fato de que $\psi(S_x)^*\psi(S_x) = \widetilde{1_x}^*\widetilde{1_x} \in C(\widetilde{\Omega}_A)$. Para verificar a segunda relação note que $1_x 1_y = 0$ para $x, y \in G$ e $x \neq y$, donde segue que

$$\psi(S_x)^*\psi(S_y) = \widetilde{1_x}^*\widetilde{1_y} = L(1_x 1_y) = 0.$$

A terceira relação segue do lema 2.10 a) e do fato de que $1_{x^{-1}}1_y = A(x, y)1_y$ em $\widetilde{\Omega_A}$. De fato,

$$\psi(S_x)^*\psi(S_x)\psi(S_y) = \widetilde{1_x}^*\widetilde{1_x}\,\widetilde{1_y} = L(1_x)\widetilde{1_y} = 1_{x^{-1}}\widetilde{1_y} =$$
$$= \widetilde{1_{x^{-1}}1_y} = A(x, y)\widetilde{1_y} = A(x, y)\psi(S_y).$$

Verificaremos a quarta relação. Por 2.4 a), $1_x = \widetilde{1_x}\,\widetilde{1_x}^*$ em $\mathcal{O}(\widetilde{\Omega_A}, \alpha, L)$. Portanto, também $\sum_{i=1}^{n} 1_{x_i} = \sum_{i=1}^{n} \widetilde{1_{x_i}}\,\widetilde{1_{x_i}}^*$ em $\mathcal{O}(\widetilde{\Omega_A}, \alpha, L)$. Sejam $X, Y \subseteq G$ finitos tais que $A(X, Y, x_i) \neq 0$ apenas para $i = 1, \cdots, n$. Então

$$\prod_{x \in X} 1_x^{-1} \prod_{y \in Y} (1 - 1_y^{-1}) = \sum_{i=1}^{n} 1_{x_i}$$

em $\widetilde{\Omega}_A$. Pela parte a) do lema 2.10, $\psi(S_x)^*\psi(S_x) = 1_{x^{-1}}$, e assim

$$\prod_{x\in X}\psi(S_x)^*\psi(S_x)\prod_{y\in Y}(1-\psi(S_y)^*\psi(S_y)) = \prod_{x\in X}1_x^{-1}\prod_{y\in Y}(1-1_y^{-1}) = \sum_{i=1}^{n}1_{x_i} = ...$$

...pelo fato de $\sum\limits_{i=1}^{n}1_{x_i} = \sum\limits_{i=1}^{n}\widetilde{1_{x_i}}\,\widetilde{1_{x_i}}^*$ em $\mathcal{O}(\widetilde{\Omega_A}, \alpha, L)$...

$$... = \sum_{i=1}^{n}\widetilde{1_{x_i}}\,\widetilde{1_{x_i}}^* = \sum_{i=1}^{n}\psi(S_{x_i})\psi(S_{x_i})^* = \sum_{x\in G}A(X,Y,x)\psi(S_x)\psi(S_x)^*.$$

□

Queremos mostrar que o *-homomorfismo definido nesta proposição é um *-isomorfismo. O seguinte lema será útil para mostrar a sobrejetividade deste homomorfismo.

Lema 2.12 *A álgebra fechada B gerada pelos $\widetilde{1_x} : x \in G$ em $\mathcal{O}(\widetilde{\Omega_A}, \alpha, L)$ contém todos os elementos de $C(\widetilde{\Omega_A})$ da forma $1_r : e \neq r \in \mathbb{F}$ e além disso B coincide com a álgebra gerada por M.*

Demonstração.
Pela proposição 2.10 a), $\widetilde{1_x}^*\widetilde{1_x} = 1_{x^{-1}}$. Dado $b = x_n^{-1}\cdots x_1^{-1} \in \mathbb{F}$ com $x_i \in G$, por indução

$$\widetilde{1_{x_n}}^*\cdots\widetilde{1_{x_1}}^*\widetilde{1_{x_1}}\cdots\widetilde{1_{x_n}} = \widetilde{1_{x_n}}^*1_{x_{n-1}^{-1}\cdots x_1^{-1}}\widetilde{1_{x_n}} = L(1_{x_n}1_{x_{n-1}^{-1}\cdots x_1^{-1}}) = 1_{x_n^{-1}\cdots x_1^{-1}} = 1_b.$$

Se $b = yr^{-1}$ com $r = x_1\cdots x_n$ e $x_i, y \in G$ então

$$\widetilde{1_y}\,\widetilde{1_{x_n}}^*\cdots\widetilde{1_{x_1}}^*\widetilde{1_{x_1}}\cdots\widetilde{1_{x_n}}\,\widetilde{1_y}^* = \widetilde{1_y}\,1_{r^{-1}}\widetilde{1_y}^* = (1_y\alpha(1_{r^{-1}}))^{\widetilde{}}\,\widetilde{1_y}^* = ...$$

...pelo lema 2.4 a)...

$$... = 1_y\alpha(1_{r^{-1}}).$$

Além disso, $1_y\alpha(1_{r^{-1}}) = 1_{yr^{-1}}$. Portanto $1_{yr^{-1}} \in B$ para cada $y \in G$ e $r = x_1\cdots x_n$ com $x_i \in G$. O caso em que $\beta = sr^{-1}$, onde $s = x_1\cdots x_n$, $r = y_1\cdots y_m$ e $x_i, y_i \in G$ segue por indução. Se $t \in \mathbb{F}$ e t não é da forma $\beta = sr^{-1}$ como acima, então $1_t = 0$ em $\widetilde{\Omega_A}$ por [3:5.8]. Assim $1_t \in B$ para cada $e \neq t \in \mathbb{F}$. Provaremos que B é a álgebra gerada por M. Para cada $x \in G$, span$\{1_x\prod\limits_s 1_s\}$ é denso em D_x e pelo lema 2.3 b), como $\sigma_{|\Delta_x}$ é homeomorfismo, segue que span$\{(1_x\prod\limits_s 1_s)^{\widetilde{}}\}$ é denso em $\widetilde{D_x}$. Como $(1_x\prod\limits_s 1_s)^{\widetilde{}} = 1_x\prod\limits_s 1_s\widetilde{1_x} \in B$ temos que $\widetilde{D_x} \subseteq B$, pois B é fechado. Portanto $\widetilde{C_c(U)} \subseteq B$ e como B é fechado segue que $M \subseteq B$.

Isto prova que a álgebra gerada por M está contida em B. Por outro lado, como $\widetilde{1_x} \in M$ para cada $x \in G$, é claro que B está contido na álgebra gerada por M, e isto conclui a demonstração.

$\square$

Proposição 2.13 *Existe um *-homomorfismo*

$$\begin{array}{rcl} \phi : \mathcal{O}(\widetilde{\Omega_A}, \alpha, L) & \to & C(\widetilde{\Omega_A}) \rtimes_\theta \mathbb{F} \\ C(\widetilde{\Omega_A}) \ni f & \mapsto & f\delta_e \\ \widetilde{D_x} \ni \widetilde{f_x} & \mapsto & f_x\delta_x \end{array}$$

Demonstração.
Definiremos primeiro um homomorfismo da álgebra de Toeplitz $\mathcal{T}(\widetilde{\Omega_A}, \alpha, L)$ para a álgebra $C(\widetilde{\Omega_A}) \rtimes_\theta \mathbb{F}$. Para tanto defina

$$\begin{array}{rcl} \phi' : C(\widetilde{\Omega_A}) & \to & C(\widetilde{\Omega_A}) \rtimes_\theta \mathbb{F} \\ f & \mapsto & f\delta_e \end{array}$$

e

$$\phi'' : \widetilde{C_c(U)} \to C(\widetilde{\Omega_A}) \rtimes_\theta \mathbb{F}$$

dado por $\phi''(\widetilde{f_x}) = f_x\delta_x$ para cada $f_x \in D_x$. Claramente ϕ' é *-homomorfismo. Pelo lema 2.3 a) ϕ'' está bem definida. Além disso ϕ'' é linear e dados $g = \sum g_x$ e $f = \sum f_x$ em $C_c(U)$ temos que

$$\phi''(\widetilde{g})^*\phi''(\widetilde{f}) = (\sum g_x\delta_x)^*(\sum f_y\delta_y) = (\sum \theta_{x^{-1}}(g_x^*)\delta_{x^{-1}})(\sum f_y\delta_y) =$$

$$= \sum_{x,y} \theta_{x^{-1}}(g_x^*)\delta_{x^{-1}} f_y\delta_y = \sum_{x,y} \theta_{x^{-1}}(g_x^* f_y)\delta_{x^{-1}y} =$$

$$= \sum_x \theta_{x^{-1}}(g_x^* f_x)\delta_e.$$

Afirmação: $L(g^*f) = \sum \theta_{x^{-1}}(g_x^* f_x)$

Basta provar que $L(g_x^* f_x) = \theta_x^{-1}(g_x^* f_x)$ pois $g_x^* f_y = 0$ para $x \neq y$. Para tanto note que $L(g_x^* f_x)(\xi) = 0 = \theta_x^{-1}(g_x^* f_x)(\xi)$ se $x^{-1} \notin \xi$. Se $x^{-1} \in \xi$ então

$$L(g_x^* f_x)(\xi) = (g_x^* f_x)(x\xi) = (g_x^* f_x)(h_x(\xi)) = \theta_x^{-1}(g_x^* f_x)(\xi).$$

Está provada a afirmação.

Então

$$\sum_x \theta_{x^{-1}}(g_x^* f_x)\delta_e = \phi'(L(g^* f)) = \phi'(\langle \widetilde{g}\,, \widetilde{f}\,\rangle),$$

e assim,

$$\phi''(\widetilde{g}\,)^* \phi''(\widetilde{f}\,) = \phi'(\langle \widetilde{g}\,, \widetilde{f}\,\rangle).$$

Portanto

$$\|\phi''(\widetilde{f}\,)\|^2 = \|\phi''(\widetilde{f}\,)^* \phi''(\widetilde{f}\,)\| = \|\phi'(\langle \widetilde{f}\,, \widetilde{f}\,\rangle)\| \leq \|\langle \widetilde{f}\,, \widetilde{f}\,\rangle\| = \|\widetilde{f}\,\|_M^2$$

donde ϕ'' se estende a M. Desta forma obtemos uma função

$$\phi : C(\widetilde{\Omega_A}\,) \cup M \to C(\widetilde{\Omega_A}\,) \rtimes_\theta \mathbb{F}$$

definida por $\phi(f) = \phi'(f)$ se $f \in C(\widetilde{\Omega_A}\,)$ e $\phi(m) = \phi''(m)$ para $m \in M$.

Afirmação: ϕ satisfaz as relações que definem $\mathcal{T}(\widetilde{\Omega_A}\,, \alpha, L)$.

Por densidade de $\widetilde{C_c(U)}$ em M e pela forma como definimos ϕ em M basta verificar se ϕ satisfaz as relações para $\widetilde{f}\, = \sum \widetilde{f}_x\,, \widetilde{g}\, = \sum \widetilde{g}_y\, \in \widetilde{C_c(U)}$ e $h \in C(\widetilde{\Omega_A}\,)$. Já sabemos que ϕ preserva as relações de $C(\widetilde{\Omega_A}\,)$, de M e que $\phi(\widetilde{f}\,)^*\phi(\widetilde{g}\,) = \phi(\langle \widetilde{f}\,, \widetilde{g}\,\rangle)$. Além disso,

$$\phi(h)\phi(\widetilde{f}\,) = h\delta_e \sum f_x\delta_x = \sum hf_x\delta_x = \phi(\widetilde{hf}\,) = \phi(h\widetilde{f}\,)$$

e

$$\phi(\widetilde{f}\,)\phi(h) = (\sum f_x\delta_x)h\delta_e = \sum \theta_x(\theta_x^{-1}(f_x)h)\delta_x = ...$$

...pelo fato de que $\theta_x(\theta_x^{-1}(f_x)h) = f_x\alpha(h)$...

$$... = \sum f_x\alpha(h)\delta_x = \phi(\sum \widetilde{f_x\alpha(h)}\,) = \phi(\widetilde{f\alpha(h)}\,) = \phi(\widetilde{f}\,h).$$

Isto prova a afirmação.

Portanto ϕ se estende a $\mathcal{T}(\widetilde{\Omega_A}\,, \alpha, L)$. Mostraremos que se (a, k) é redundância então $\phi(a) = \phi(k)$. Para cada $f_x \in D_x$,

$$\phi(\widetilde{f_x}\,\widetilde{1_x}^{\,*}) = f_x\delta_x 1_{x^{-1}}\delta_{x^{-1}} = f_x\delta_e = \phi(f_x)$$

e portanto se $f = \sum_x f_x$ com $f_x \in D_x$ então $\phi(f) = \sum_x \phi(\widetilde{f_x}\, \widetilde{1_x}^{\,*})$. Dada (f,k) redundância com $f \in I_0$, e portanto $f \in C_0(U)$ pelo corolário 2.7, tome $(f_n)_n \subseteq C_c(U)$ tal que $f_n \to f$, e $(k_n)_n \subseteq \widehat{K_1}$ tal que $k_n \to k$ e $k_n = \sum_{i=1}^{t_n} m_{i,n} r_{i,n}^*$ com $m_{i,n}, r_{i,n} \in M$. Como $f_n \in C_c(U)$ para cada n, temos que $f_n = \sum_{i=1}^{l_n} f_{x_{i,n}}$ e portanto $\phi(f_n) = \sum_{i=1}^{l_n} \phi(\widetilde{f_{x_{i,n}}}\, \widetilde{1_{x_{i,n}}}^{\,*})$. Pelo fato de (f,k) ser redundância, $(f-k)m = 0$ para cada $m \in M$. Portanto

$$(f-k)\Big(\sum_{i=1}^{l_n} \widetilde{1_{x_{i,n}}}\, \widetilde{f_{x_{i,n}}}^{\,*} - \sum_{i=1}^{t_n} r_{i,n} m_{i,n}^*\Big) = 0.$$

Então

$$\phi(f-k)\phi(f-k)^* = \phi(f-k)\lim_n \phi(f_n - k_n)^* = \phi(f-k)\lim_n \phi(f_n^* - k_n^*) =$$

$$\lim_n \phi(f-k)\phi(f_n^* - k_n^*) = \lim_n \phi(f-k)(\phi(f_n)^* - \phi(k_n^*)) = ...$$

...pelo fato de que $\phi(f_n)^* = \phi(\sum_{i=1}^{l_n} \widetilde{1_{x_{i,n}}}\, \widetilde{f_{x_{i,n}}}^{\,*})$...

$$... = \lim_n \phi(f-k)\Big(\phi\Big(\sum_{i=1}^{l_n} \widetilde{1_{x_{i,n}}}\, \widetilde{f_{x_{i,n}}}^{\,*}\Big) - \phi\Big(\sum_{i=1}^{n_i} r_{i,n} m_{i,n}^*\Big)\Big) =$$

$$= \lim_n \phi\Big((f-k)\Big(\sum_{i=1}^{l_n} \widetilde{1_{x_{i,n}}}\, \widetilde{f_{x_{i,n}}}^{\,*} - \sum_{i=1}^{n_i} r_{i,n} m_{i,n}^*\Big)\Big) = 0.$$

Isto prova que $\phi(f) = \phi(k)$.

□

Proposição 2.14 *O *-homomorfismo $\psi : \widetilde{O_A} \to \mathcal{O}(\widetilde{\Omega_A}, \alpha, L)$ definido na proposição* 2.11 *é um *-isomorfismo.*

Demonstração.
Para provar que ψ é sobrejetora basta provar que $M \cup C(\widetilde{\Omega_A}) \subseteq \mathrm{Im}(\psi)$. Pelo lema 2.12, $M \subseteq \mathrm{Im}(\psi)$. Pelo mesmo lema, os elementos da forma $1_r : e \neq r \in \mathbb{F}$ estão na imagem de ψ e além disso, $\psi(1) = 1 = 1_e$. A álgebra gerada pelos elementos $\{1_r : r \in F\}$ é auto-adjunta, contém as funções constantes e separa pontos, e portanto é densa em $C(\widetilde{\Omega_A})$. Segue que $C(\widetilde{\Omega_A}) \subseteq \mathrm{Im}(\psi)$. Para ver que ψ é injetora, note que $\Phi^{-1}\phi\psi = Id_{\widetilde{O}_A}$ onde ϕ é o *-homomorfismo da proposição 2.13 e Φ é o *-isomorfismo entre $\widetilde{O_A}$ e $C(\widetilde{\Omega_A}) \rtimes_\theta \mathbb{F}$ tal que $\Phi(S_x) = 1_x\delta_x$.

□

Por esta proposição e pelo lema 2.12 segue que a subálgebra O_A de $\widetilde{O_A}$ gerada pelos S_x é isomorfa à álgebra B, gerada por M. Note que a álgebra gerada por M coincide com o ideal $\langle M \rangle$ de $\mathcal{O}(\widetilde{\Omega_A}, \alpha, L)$.

Chapter 3

Relação entre os ideais gauge invariantes de $\mathcal{O}(X, \alpha, L)$ e abertos de X

Neste capítulo mostraremos que existe uma bijeção entre o os ideais gauge invariantes de $\mathcal{O}(X, \alpha, L)$ e os abertos σ, σ^{-1}-invariantes de X. Em particular mostraremos que qualquer ideal gauge invariante de $\mathcal{O}(X, \alpha, L)$ é gerado pelo conjunto $C_0(V)$ para algum $V \subseteq X$ com a propriedade de ser σ, σ^{-1}-invariante.

Definição 3.1 *a) Um conjunto $V \subseteq X$ é σ-invariante se $\sigma(V \cap U) \subseteq V$.*
b) Um conjunto $V \subseteq X$ é σ^{-1}-invariante se $\sigma^{-1}(V) \subseteq V$.
c) Um conjunto $V \subseteq X$ é σ, σ^{-1}-invariante se é σ-invariante e σ^{-1}-invariante.

Dado um aberto $V \subseteq X$ dizemos que o ideal $C_0(V)$ de $C(X)$ é L-invariante se $L(C_0(V) \cap C_c(U)) \subseteq C_0(V)$.

Proposição 3.2 *a)Um aberto $V \subseteq X$ é σ-invariante se e somente se $C_0(V)$ é L-invariante.*
b) Um aberto $V \subseteq X$ é σ^{-1} -invariante se e somente se $f\alpha(g) \in C_0(V)$ para cada $f \in C_c(U)$ e $g \in C_0(V)$.

Demonstração.
a) Note que sempre que $U \cap V = \emptyset$ então V é σ-invariante e também $C_0(V)$ é L-invariante. Seja portanto $U \cap V \neq \emptyset$. Suponha V σ-invariante. Dada $f \in C_0(V) \cap C_c(U)$, tome $x \notin V$ e $y \in \sigma^{-1}(x)$. Supondo $y \in V$ teremos que $x = \sigma(y) \in V$ pois V é σ-invariante. Portanto $y \notin V$ donde decorre que $L(f)(x) = \sum_{y \in \sigma^{-1}(x)} f(y) = 0$. Isto mostra que $L(f) \in C_0(V)$. Por outro lado, seja $C_0(V)$ L-invariante. Tome $x \in U \cap V$ e $f_x \in C_c(U) \cap C_0(V)$ tal que

$f_x(x) = 1$ e $\sigma_{|_{\mathrm{supp}(f_x)}}$ é homeomorfismo. Então $L(f_x) \in C_0(V)$ e além disso $L(f_x)(\sigma(x)) = f_x(x) = 1$, o que mostra que $\sigma(x) \in V$.
b) Se $\sigma^{-1}(V) = \emptyset$ então é claro que V é σ^{-1}-invariante e como $f\alpha(g) = 0$ para cada $f \in C_c(U)$ e $g \in C_0(V)$ então $f\alpha(g) \in C_0(V)$. Suponha portanto $\sigma^{-1}(V) \neq \emptyset$. Seja V σ^{-1}-invariante. Então, para cada $x \in U \setminus V$, $\sigma(x) \notin V$. Portanto, dada $f \in C_c(U)$ e $g \in C_0(V)$ segue que $(f\alpha(g))(x) = 0$ para cada $x \in U \setminus V$ e como $f\alpha(g) \in C_c(U)$ segue que $(f\alpha(g))(x) = 0$ para cada $x \notin V$. Portanto $f\alpha(g) \in C_0(V)$. Por outro lado, dado $x \in \sigma^{-1}(V)$, tome $f \in C_c(U)$ tal que $f(x) \neq 0$ e $g \in C_0(V)$ tal que $g(\sigma(x)) \neq 0$. Então como $f\alpha(g) \in C_0(V)$ e $f\alpha(g)(x) \neq 0$ segue que $x \in V$.

□

Se $V \subseteq X$ é um subconjunto aberto σ, σ^{-1}-invariante então $X' = X \setminus V$ também é σ, σ^{-1}-invariante. Defina $U' = U \cap X' \ \ (= U \setminus V)$,

$$\begin{array}{rcl} \sigma' : U' & \rightarrow & X' \\ x & \mapsto & \sigma(x) \end{array}$$

que é um homeomorfismo local. De fato, dado $x \in U'$ tome $x \in W \subseteq U$ um aberto tal que $\sigma(W)$ é aberto e $\sigma_{|W} : W \rightarrow \sigma(W)$ é homeomorfismo. Definindo $W' = X' \cap W$ segue pelo fato de X' ser σ, σ^{-1}-invariante que $\sigma(W') = \sigma(W) \cap X'$ e portanto $\sigma(W')$ é aberto. Como $\sigma_{|W'} : W' \rightarrow \sigma(W')$ é um homeomorfismo segue que σ' é um homeomorfismo local. Considere o C*-sistema dinâmico $(C(X'), \alpha', L')$ onde

$$\begin{array}{rcl} \alpha' : C(X') & \rightarrow & C_b(U') \\ f & \mapsto & f \circ \sigma' \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcl} L' : C_c(U') & \rightarrow & C(X') \\ f & \mapsto & L'(f) \end{array}$$

onde L' é definido da mesma forma como definimos L. Denotamos por M' o módulo de Hilbert gerado por $C_c(U')$ (onde $C_c(U')$ é o conjunto das funções contínuas de suporte compacto em U'), por $\langle C_0(V) \rangle$ o ideal gerado por $C_0(V)$ em $\mathcal{O}(X, \alpha, L)$ e por $\overline{\overline{b}}$ a imagem dos elementos $b \in \mathcal{O}(X, \alpha, L)$ pela aplicação quociente de $\mathcal{O}(X, \alpha, L)$ em $\mathcal{O}(X, \alpha, L)/\langle C_0(V) \rangle$.

Teorema 3.3 *Existe um *-isomorfismo*

$$\Psi : \mathcal{O}(X, \alpha, L)/\langle C_0(V) \rangle \rightarrow \mathcal{O}(X', \alpha', L')$$

tal que $\Psi(\overline{\overline{f}}) = f_{|_{X'}}$ *para cada* $f \in C(X)$.

Demonstração.
Dada $f \in C(X)$ denotamos por f' a restrição $f_{|_{X'}}$ e desta forma $f' \in C(X')$. Defina

$$\begin{array}{rcl}\Psi_1 : C(X) & \to & C(X') \\ f & \mapsto & f'\end{array}$$

que é um *-homomorfismo e é sobrejetor, pelo teorema de Tietze. Além disso, para cada $\widetilde{f} \in \widetilde{C_c(U)} \subseteq M$ defina

$$\Psi_2(\widetilde{f}\,) = \widetilde{f'}\,,$$

que é uma função linear contrativa de $\widetilde{C_c(U)} \subseteq M$ em M' e portanto se estende a M. Podemos então definir de maneira óbvia

$$\Psi_3 : C(X) \cup M \to \mathcal{T}(X', \alpha', L').$$

É rotineiro verificar que Ψ_3 satisfaz as relações que definem $\mathcal{T}(X, \alpha, L)$ e portanto Ψ_3 se estende a $\mathcal{T}(X, \alpha, L)$, e chamaremos esta extensão também de Ψ_3. Mostraremos que Ψ_3 é sobrejetora. Dado $h \in C_c(U')$, tome $g \in C_c(U)$ tal que $g_{|_{\mathrm{supp}(h)}} = 1$ e $f \in C(X)$ tal que $\Psi_3(f) = h$. Então $fg \in C_c(U)$ e $\Psi_3(f)\Psi_3(\widetilde{g}\,) = h\widetilde{g'} = \widetilde{hg'} = \widetilde{h}\,$. Isso mostra que $\Psi_3(M)$ é denso em M', e juntamente com o fato de que $C(X') \subseteq \mathrm{Im}(\Psi_3)$, segue que Ψ_3 é sobrejetora.

Afirmação: Se (f, k) é redundância de $\mathcal{T}(X, \alpha, L)$ e $f \in I_0$ então $(\Psi_3(f), \Psi_3(k))$ é redundância de $\mathcal{T}(X', \alpha', L')$ e $\Psi_3(f) \in I_0'$.

Seja (f, k) redundância em $\mathcal{T}(X, \alpha, L)$ com $f \in I_0$. Então $fm = km$, e portanto $\Psi_3(f)\Psi_3(m) = \Psi_3(k)\Psi_3(m)$. Como $\Psi_3(f) \in C(X')$ e $\Psi_3(k) \in \widehat{K_1'}$ e além disso $\Psi_3(M)$ é denso em M' segue que $(\Psi_3(f), \Psi_3(k))$ é redundância. Como $f \in I_0$, e $I_0 = C_0(U)$ pelo corolário 2.7, segue que $f \in C_0(U)$ e portanto $\Psi_3(f) = f_{|_{X'}} \in C_0(U') = I_0'$.

Sendo q a projeção de $\mathcal{T}(X', \alpha', L')$ em $\mathcal{O}(X', \alpha', L')$ temos que a composição $q \circ \Psi_3$ é um *-homomorfismo de $\mathcal{T}(X, \alpha, L)$ em $\mathcal{O}(X', \alpha', L')$ que pela afirmação acima se anula nas redundâncias de $\mathcal{T}(X, \alpha, L)$. Portanto $q \circ \Psi_3$ se fatora a $\mathcal{O}(X, \alpha, L)$. Obtemos assim um *-homomorfismo de $\mathcal{O}(X, \alpha, L)$ para $\mathcal{O}(X', \alpha', L')$ que chamaremos de Ψ_0. Ainda, dado $f \in C_0(V)$ note que $\Psi_0(f) = f_{|'_X} = 0$, o que mostra que Ψ_0 se fatora a $\mathcal{O}(X, \alpha, L)/\langle C_0(V)\rangle$, e este novo *-homomorfismo chamaremos de Ψ. Mostraremos que Ψ é injetora, e isto concluirá a demonstração do teorema. Note que $\langle C_0(V)\rangle$ é gauge invariante. Considere a ação de gauge em $\mathcal{O}(X,\alpha,L)/\langle C_0(V)\rangle$, cuja álgebra dos pontos fixos é $\overline{\overline{K}} = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{\overline{L_n}}}$ (veja parágrafo seguinte à definição 1.15), e a ação de gauge em $\mathcal{O}(X',\alpha',L')$. Como Ψ é covariante por estas ações, por [5: 2.9] basta mostrar que Ψ restrita a $\overline{\overline{K}}$ é injetora. Para tanto mostraremos que Ψ restrita a $\overline{\overline{L_n}}$ é injetora para cada $n \in \mathbb{N}$.

Afirmação 1: Seja $\overline{\overline{k_0}} + \overline{\overline{k_1}} + \cdots + \overline{\overline{k_n}} \in \overline{\overline{L_n}}$. Se $\phi(\overline{\overline{k_0}} + \overline{\overline{k_1}} + \cdots + \overline{\overline{k_n}}) = 0$ então $\overline{\overline{k_0}} \in \overline{\overline{K_1}}$.

Seja $k'_0 = \Psi(\overline{\overline{k_0}}) = k_{0|_{X'}}$, $k'_i = \Psi(\overline{\overline{k_i}})$ para $i \geq 1$ e note que $k'_i \in K'_i$ para cada $i \geq 1$. Então $k'_0 + k'_1 + \cdots + k'_n = 0$ e portanto $g(k'_0 + k'_1 \cdots + k'_n) = 0$ para cada $g \in C_0(U')$. Pelo lema 2.5 segue que $k'_0 = f_1 + f_2$ onde $f_1 \in C_0(U')$ e $k'_0 + k'_1 \cdots + k'_n = f_2$ donde $f_2 = 0$. Então $k'_0 \in C_0(U')$ e portanto $k_0 \in C_0(U \cup V)$ donde

$$\overline{\overline{k_0}} \in \overline{\overline{C_0(U \cup V)}} \subseteq \overline{\overline{K_1}}.$$

Obs.: A última inclusão segue do fato de que $C_0(U \cup V) = C_0(U) + C_0(V)$.

Afirmação 2: Ψ restrita a $\overline{\overline{C(X)}}$ é fiel, e também Ψ restrita a $\overline{\overline{K_n}}$ é fiel.

Se $f \in C(X)$ e $f_{|_{X'}} = \Psi(\overline{\overline{f}}) = 0$ segue que $f \in C_0(V)$ e portanto $\overline{\overline{f}} = 0$. Isso mostra a primeira parte. Para provar a segunda parte seja $\overline{\overline{k_n}} \in \overline{\overline{K_n}}$ e suponha que $\Psi(\overline{\overline{k_n}}) = 0$. Então

$$\Psi(\overline{\overline{M}}^{*n}\overline{\overline{k_n}}\,\overline{\overline{M}}^{n}) = 0$$

e como

$$\overline{\overline{M}}^{*n}\overline{\overline{k_n}}\,\overline{\overline{M}}^{n} \subseteq \overline{\overline{C(X)}}$$

e Ψ restrita a $\overline{\overline{C(X)}}$ é fiel segue que

$$\overline{\overline{M}}^{*n}\overline{\overline{k_n}}\,\overline{\overline{M}}^{n} = 0$$

donde

$$\overline{\overline{K_n}}\,\overline{\overline{k_n}}\,\overline{\overline{K_n}} = 0$$

e portanto $\overline{\overline{k_n}} = 0$.

Provaremos agora a seguinte afirmação, que conclui a demonstração do teorema.

Afirmação 3: Para cada $n \in \mathbb{N}$, Ψ restrita a $\overline{\overline{L_n}}$ é fiel

Pela afirmação 2, Ψ restrita a $\overline{\overline{L_0}}$ é fiel. Por indução, suponha que Ψ restrita a $\overline{\overline{L_n}}$ é fiel, tome

$$k = \overline{\overline{k_0}} + \overline{\overline{k_1}} + \cdots + \overline{\overline{k_{n+1}}} \in \overline{\overline{L_{n+1}}}$$

e suponha que $\Psi(k) = 0$. Então $\Psi(\overline{\overline{M}}^* k^* k\overline{\overline{M}}) = 0$ e pela hipótese de indução, $\overline{\overline{M}}^* k^* k\overline{\overline{M}} = 0$, donde $k\overline{\overline{M}} = 0$ e portanto $k(\overline{\overline{K_1}} + \cdots + \overline{\overline{K_{n+1}}}) = 0$. Pela afirmação 1, $\overline{\overline{k_0}} \in \overline{\overline{K_1}}$, donde

$$k = \overline{\overline{k_0}} + \overline{\overline{k_1}} + \cdots + \overline{\overline{k_{n+1}}} \in (\overline{\overline{K_1}} + \cdots + \overline{\overline{K_{n+1}}})$$

e portanto $k = 0$.

□

Dado um ideal $I \trianglelefteq \mathcal{O}(X, \alpha, L)$ o conjunto $I \cap C(X)$ é um ideal de $C(X)$ e portanto é da forma $C_0(V)$ para algum aberto $V \subseteq X$. A seguinte proposição mostra uma característica destes abertos.

Proposição 3.4 *Seja I um ideal de $\mathcal{O}(X, \alpha, L)$ e V o subconjunto aberto de X tal que $I \cap C(X) = C_0(V)$. Então V é σ, σ^{-1}-invariante.*

Demonstração.
Provaremos que V é σ-invariante. Se $V \cap U = \emptyset$ então nada temos a provar. Seja portanto $x \in V \cap U$. Tome $f_x \in C_c(U) \cap C_0(V)$ tal que $f_x(x) = 1$ e $\sigma_{|_{\mathrm{supp}(f_x)}}$ é homeomorfismo. Então $f_x \in I$ e portanto $f_x \widetilde{f_x} = \widetilde{f_x^2} \in M \cap I$. Segue que o elemento $\widetilde{f_x^2}^* \widetilde{f_x^2} \in I \cap C(X) = C_0(V)$, e note que

$$\widetilde{f_x^2}^* \widetilde{f_x^2}(\sigma(x)) = L(f_x^{*2} f_x^2)(\sigma(x)) = f_x^4(x) = 1,$$

o que prova que $\sigma(x) \in V$. Mostraremos que V é σ^{-1}-invariante. Sejam $x \in V$ e tome $y \in \sigma^{-1}(x)$. Tome $f_x \in C_0(V)$ tal que $f_x(x) = 1$ e $f_y \in C_c(U)$ tal que $f_y(y) = 1$ e $\sigma_{|_{\mathrm{supp}(f_y)}}$ é homeomorfismo. Então $(f_y \alpha(f_x))\widetilde{\ } = \widetilde{f_y}\, f_x \in I \cap M$ e portanto $(f_y \alpha(f_x))\widetilde{\ }\, \widetilde{f_y}^* \in I$. Pelo lema 2.4 a), $f_y \alpha(f_x) f_y^* = (f_y \alpha(f_x))\widetilde{\ }\, \widetilde{f_y}^*$ e portanto $f_y \alpha(f_x) f_y^* \in I \cap C(X) = C_0(V)$. Note que

$$(f_y \alpha(f_x) f_y^*)(y) = |f_y|^2(y) f_x(\sigma(y)) = |f_y(y)|^2 f_x(x) = 1,$$

o que mostra que $y \in V$.

□

Esta proposição mostra que existe uma função

$$\Phi : \{\text{ideais de } \mathcal{O}(X, \alpha, L)\} \to \{\text{abertos } \sigma, \sigma^{-1} - \text{invariantes de } X\}$$

dada por $\Phi(I) = V$ onde V é o aberto de X tal que $I \cap C(X) = C_0(V)$. A próxima proposição mostra que Φ é sobrejetora. Para demonstrar esta proposição usaremos alguns lemas.

Lema 3.5 *Se $V \subseteq X$ é σ-invariante e $f_1, \cdots, f_n, g_1, \cdots, g_n \in C_c(U)$ tal que $f_i \in C_0(V)$ ou $g_i \in C_0(V)$ para algum i então $\widetilde{f_n}^* \cdots \widetilde{f_1}^* \widetilde{g_1} \cdots \widetilde{g_n} \in C_0(V)$.*

Demonstração.
Suponha $f_i \in C_0(V)$ e defina $h_j = \widetilde{f_j}^* \cdots \widetilde{f_1}^* \widetilde{g_1} \cdots \widetilde{g_j}$ para $j \geq 1$ e $h_0 = 1$. Como $h_j \in C(X)$ para cada j segue que $f_i^* h_{i-1} g_i \in C_0(V)$, e assim

$$h_i = \widetilde{f_i}^* h_{i-1} \widetilde{g_i} = L(f_i^* h_{i-1} g_i) \in C_0(V),$$

pois $C_0(V)$ é L-invariante pela proposição 3.2. Mostraremos que $h_{i+1} \in C_0(V)$. Note que $f_{i+1}^* h_i g_{i+1} \in C_0(V)$ e portanto

$$h_{i+1} = \widetilde{f_{i+1}}^* h_i \widetilde{g_{i+1}} = L(f_{i+1}^* h_i g_{i+1}) \in C_0(V).$$

Assim, por indução mostra-se que $h_n \in C_0(V)$. No caso em que $g_i \in C_0(V)$ a demonstração é análoga.

$\square$

Para mostrar que a função Φ é sobrejetora mostraremos que se V é um aberto σ, σ^{-1}-invariante então $\langle C_0(V) \rangle \cap C(X) = C_0(V)$. Os argumentos seguintes nos preparam para demonstrar este fato. Dado $f \in \langle C_0(V) \rangle \cap C(X)$ e $\varepsilon > 0$ então existem $a_i, b_i \in \mathcal{O}(X, \alpha, L)$, $h_i \in C_0(V)$ tais que

$$\|f - \sum_{i=1}^{N} a_i h_i b_i\| \leq \varepsilon$$

onde cada a_i é da forma $a_i = m_1 \cdots m_{r_i} n_1^* \cdots n_{s_i}^*$ ou $a_i \in C(X)$ e cada b_i é da forma $b_i = p_1 \cdots p_{t_i} q_1^* \cdots q_{l_i}^*$ ou $b_i \in C(X)$. Ainda podemos supor que $m_j = \widetilde{z_j}$, $n_j = \widetilde{w_j}$, $p_j = \widetilde{u_j}$, $q_j = \widetilde{v_j}$ para cada m_j, n_j, p_j, e q_j. Considerando a esperança condicional E induzida pela ação de gauge e que

$$\|f - \sum_{i=1}^{N} E(a_i h_i b_i)\| = \|E(f - \sum_{i=1}^{N} a_i h_i b_i)\| \leq \varepsilon,$$

podemos supor que $r_i + t_i = s_i + l_i$, pois

$$E(a_ih_ib_i) = \begin{cases} a_ih_ib_i & \text{se } r_i + t_i = s_i + l_i \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Lema 3.6 *Se $V \subseteq X$ é um subconjunto aberto σ, σ^{-1}-invariante então $a_ih_ib_i \in C_0(V)$, ou $a_ih_ib_i = \widetilde{f_1} \cdots \widetilde{f_n}\, \widetilde{g_n}^* \cdots \widetilde{g_1}^*$ onde $f_j \in C_0(V)$ para algum j ou $g_j \in C_0(V)$ para algum j.*

Demonstração.
Lembramos que $a_i = \widetilde{z_1} \cdots \widetilde{z_{r_i}}\, \widetilde{w_1}^* \cdots \widetilde{w_{s_i}}^*$ ou $a_i \in C(X)$, $b_i = \widetilde{u_1} \cdots \widetilde{u_{t_i}}\, \widetilde{v_1}^* \cdots \widetilde{v_{l_i}}^*$ ou $b_i \in C(X)$ e $r_i + t_i = s_i + l_i$.

Suponha $s_i \leq t_i$. Pelo lema 3.5 $w = \widetilde{w_1}^* \cdots \widetilde{w_{s_i}}^* h_i \widetilde{u_1} \cdots \widetilde{u_{s_i}} \in C_0(V)$ (se $s_i = 0$ então $w = h_i$). Se $t_i \neq s_i$ então escreva

$$a_ih_ib_i = \widetilde{z_1} \cdots \widetilde{z_{r_i}}\, \widetilde{wu_{s_i+1}} \cdots \widetilde{u_{t_i}}\, \widetilde{v_1}^* \cdots \widetilde{v_{l_i}}^*,$$

e note que $wu_{s_i+1} \in C_0(V)$ e portanto $a_ih_ib_i$ é da forma desejada. Se $t_i = s_i$ então $r_i = l_i$. Se $r_i = 0$ (e portanto $l_i = 0$) então $a_ih_ib_i = w \in C_0(V)$. Se $r_i \neq 0$ escreva

$$a_ih_ib_i = \widetilde{z_1} \cdots \widetilde{z_{r_i}\alpha(w)}\, \widetilde{u_{s_i+1}} \cdots \widetilde{u_{t_i}}\, \widetilde{v_1}^* \cdots \widetilde{v_{l_i}}^*,$$

e neste caso $z_{r_i}\alpha(w) \in C_0(V)$ pelo fato de V se σ^{-1}-invariante, e portanto $a_ih_ib_i$ é da forma desejada.

Supondo $s_i > t_i$ considere o elemento $(a_ih_ib_i)^*$ que é da forma desejada no enunciado pelo que foi feito acima, e portanto $a_ih_ib_i$ também o é.

□

O seguinte lema é apenas um resumo do que foi feito do lema 3.5 ao lema 3.6.

Lema 3.7 *Se V é um aberto σ, σ^{-1}-invariante então dado $f \in \langle C_0(V) \rangle \cap C(X)$ e $\varepsilon > 0$, existem $d_0 \in C_0(V)$ e $d_i = \widetilde{f_1^i} \cdots \widetilde{f_{n_i}^i}\, \widetilde{g_{n_i}^i}^* \cdots \widetilde{g_1^i}^*$, com $f_j^i \in C_0(V)$ ou $g_j^i \in C_0(V)$ para algum j, $i = 1, \cdots, N$, tal que*

$$\|f - (d_0 + \sum_{i=1}^{N} d_i)\| \leq \varepsilon.$$

Faremos agora a proposição que mostra que a função Φ é sobrejetora.

Proposição 3.8 *Se V é um subconjunto aberto de X que é σ, σ^{-1}-invariante então vale que $\langle C_0(V) \rangle \cap C(X) = C_0(V)$.*

Demonstração.

É claro que $C_0(V) \subseteq \langle C_0(V)\rangle \cap C(X)$. Mostraremos que se $f \in \langle C_0(V)\rangle \cap C(X)$, para cada $\varepsilon > 0$ vale que $|f(x)| \leq \varepsilon$ para cada $x \notin V$. Isto prova que $\langle C_0(V)\rangle \cap C(X) \subseteq C_0(V)$.

Dada $f \in \langle C_0(V)\rangle \cap C(X)$ e $\varepsilon > 0$, pelo lema 3.7 podemos considerar

$$\|f - (d_0 + \sum_{i=1}^{N} d_i)\| \leq \varepsilon$$

com $d_0 \in C_0(V)$, $d_i = \widetilde{f_1^i} \cdots \widetilde{f_{n_i}^i}\, \widetilde{g_{n_i}^i}^* \cdots \widetilde{g_1^i}^*$ onde $f_j^i \in C_0(V)$ para algum j ou $g_j^i \in C_0(V)$ para algum j. Defina

$$K = \bigcup_{i=1}^{N} \bigcup_{j=1}^{n_i} (\mathrm{supp}(f_j^i) \cup \mathrm{supp}(g_j^i))$$

que é um subconjunto compacto de U.

Afirmação 1: Se $x \notin V$ e $x \notin U$ então $|f(x)| \leq \varepsilon$

Se $x \notin U$, tome $h \in C(X)$, $0 \leq h \leq 1$, tal que $h(x) = 1$ e $h_{|_K} = 0$. Então $hd_i = 0$ para $i \geq 1$ e portanto

$$\|h(f - d_0)\| = \|h(f - d_0 + \sum_{i=1}^{N} d_i)\| \leq \varepsilon$$

donde $|f(x) - d_0(x)| = |(h(f - d_0))(x)| \leq \varepsilon$. Como $x \notin V$ segue que $d_0(x) = 0$ e portanto $|f(x)| \leq \varepsilon$.

Estudaremos o caso $x \notin V$ e $x \in U$. Seja $N_0 = \max\{n_1, \cdots, n_N\}$. Supondo $N_0 = 0$, ou seja, $d_i = 0$ para cada $i \geq 1$, temos que $|f(x)| = |f(x) - d_0(x)| \leq \varepsilon$. Suponha portanto que $N_0 \geq 1$. Analisaremo o caso em que $\sigma^{N_0 - 1}(x) \in U$. Defina $x_j = \sigma^j(x)$ para $j \in \{0, \cdots, N_0\}$. Para cada $j \in \{0, \cdots, N_0 - 1\}$ tome $h_j \in C_c(U)$ tal que $h_j(x_j) = 1$, $0 \leq h_j \leq 1$ e $\sigma_{\mathrm{supp}(h_j)}$ é homeomorfismo.

Afirmação 2: Para cada $i \in \{0, \cdots, N\}$, definindo h_i' por

$$h_i' = \widetilde{h_{N_0-1}}^* \cdots \widetilde{h_0}^* d_i \widetilde{h_0} \cdots \widetilde{h_{N_0-1}}\,,$$

obtemos que $h_i' \in C_0(V)$.

Para $i \geq 1$, como $f_j^i \in C_0(V)$ ou $g_j^i \in C_0(V)$ para algum j, pelo lema 3.5 segue que

$$u = \widetilde{h_{n_i-1}}^* \cdots \widetilde{h_0}^* \widetilde{f_1^i} \cdots \widetilde{f_{n_i}^i} \in C_0(V)$$

ou

$$v = \widetilde{g^i_{n_i}}^* \cdots \widetilde{g^i_1}^* \widetilde{h_0} \cdots \widetilde{h_{n_i-1}} \in C_0(V).$$

Então $uv \in C_0(V)$. Se $N_0 = n_i$ então $h'_i = uv$ e a afirmação está provada. Se $N_0 > n_i$, como $uvh_{n_i} \in C_0(V)$, pelo lema 3.5 segue que

$$h'_i = \widetilde{h_{N_0-1}}^* \cdots \widetilde{h_0}^* d_i \widetilde{h_0} \cdots \widetilde{h_{N_0-1}} = \widetilde{h_{N_0-1}}^* \cdots \widetilde{h_{n_i}}^* \widetilde{uvh_{n_i}} \cdots \widetilde{h_{N_0-1}} \in C_0(V).$$

Para $i = 0$, como $d_0 h_0 \in C_0(V)$, novamente pelo lema 3.5 obtemos que

$$h'_0 = \widetilde{h_{N_0-1}}^* \cdots \widetilde{h_0}^* d_0 \widetilde{h_0} \cdots \widetilde{h_{N_0-1}} \in C_0(V).$$

Isto prova a afirmação.

Defina $f' = \widetilde{h_{N_0-1}}^* \cdots \widetilde{h_0}^* f \widetilde{h_0} \cdots \widetilde{h_{N_0-1}}$ e note que calculando $f'(x_{N_0})$ usando o fato de que $\sigma_{|_{\mathrm{supp}(h_j)}}$ é homeomorfismo para cada j obtemos que $f'(x_{N_0}) = f(x)$. Além disso, como $x_{N_0} \notin V$, pelo fato de V ser σ^{-1}-invariante e $x \notin V$, segue que $h'_i(x_{N_0}) = 0$ para cada i. Como $f', h'_i \in C(X)$ segue que

$$\|f' - (h'_0 + \sum_{i=1}^{n} h'_i)\|_\infty = \|\widetilde{h_{N_0-1}}^* \cdots \widetilde{h_0}^* (f - (d_0 + \sum_{i=1}^{N} d_i)) \widetilde{h_0} \cdots \widetilde{h_{N_0-1}}\| \leq$$

$$\leq \|f - (d_0 + \sum_{i=1}^{N} d_i)\| < \varepsilon,$$

donde $|f(x)| = |(f' - (h'_0 + \sum\limits_{i=1}^{n} h'_i))(x_{N_0})| < \varepsilon$.

Falta analisar o caso em que $x \notin V$, $x \in U$ mas $\sigma^n(x) \notin U$ para algum $n \leq N_0 - 1$. Para cada $i \in \{0, \cdots .n-2\}$ defina h_j como acima, ou seja, $h_j \in C_c(U)$ tal que $h_j(x_1) = 1$, $0 \leq h_j \leq 1$ e $\sigma_{|_{\mathrm{supp}(h_j)}}$ homeomorfismo. Para x_{n-1} tome $h_{n-1} \in C_c(U)$ com as propriedades $0 \leq h_{n-1} \leq 1$, $h_{n-1}(x_{n-1}) = 1$, $\sigma_{|_{\mathrm{supp}(h_{n-1})}}$ homeomorfismo e $\sigma(\mathrm{supp}(h_{n-1})) \subseteq X \setminus K$. É possível tomar h_{n-1} desta forma pois

$$\sigma(x_{n-1}) = \sigma^n(x) \in X \setminus U \subseteq X \setminus K.$$

Afirmação 3: Para $n_i \geq n+1$, $\widetilde{h_{n-1}}^* \cdots \widetilde{h_0}^* d_i \widetilde{h_0} \cdots \widetilde{h_{n-1}} = 0$.

Denote por u o elemento $\widetilde{h_{n-2}}^* \cdots \widetilde{h_0}^* \widetilde{f_1^i} \cdots \widetilde{f_{n-1}^i}$ que é um elemento de $C(X)$. Então

$$\widetilde{h_{n-1}}^* \cdots \widetilde{h_0}^* \widetilde{f_1^i} \cdots \widetilde{f_{n+1}^i} = \widetilde{h_{n-1}}^* \widetilde{uf_n^i}\, \widetilde{f_{n+1}^i} = (L(h_{n-1}^* u f_n^i) f_{n+1}^i)\widetilde{\ }.$$

Mostraremos que $L(h_{n-1}^* u f_n^i) f_{n+1}^i = 0$. Se $x \notin \mathrm{supp}(f_{n+1}^i)$ então claramente

$$(L(h_{n-1}^* u f_n^i) f_{n+1}^i)(x) = 0.$$

Para $x \in \mathrm{supp}(f_{n+1}^i) \subseteq K$, se $\sigma^{-1}(x) = \emptyset$ então $(L(h_{n-1}^* u f_n^i) f_{n+1}^i)(x) = 0$ pela definição de L. Suponha $y \in \sigma^{-1}(x)$. Supondo $y \in \sigma^{-1}(x) \cap \mathrm{supp}(h_{n-1})$ teríamos que

$$x = \sigma(y) \in \sigma(\mathrm{supp}(h_{n-1})) \subseteq X \setminus K,$$

o que é absurdo pois $x \in K$. Portanto se $y \in \sigma^{-1}(x)$ então $y \notin \mathrm{supp}(h_{n-1})$, e portanto

$$L(h_{n-1}^* u f_n^i)(x) = \sum_{y \in \sigma^{-1}(x)} (h_{n-1}^* u f_n^i)(y) = 0.$$

Portanto $L(h_{n-1}^* u f_n^i) f_{n+1}^i = 0$ e a afirmação está provada.

Afirmação 4: Para $n_i \leq n$, $h_i' = \widetilde{h_{n-1}}^* \cdots \widetilde{h_0}^* d_i \widetilde{h_0} \cdots \widetilde{h_{n-1}} \in C_0(V)$.

A demonstração neste caso é análoga a demonstração da afirmação 2.

Novamente $\widetilde{h_{n-1}}^* \cdots \widetilde{h_0}^* f \widetilde{h_0} \cdots \widetilde{h_{n-1}} = f'$ com $f'(x_n) = f(x)$. Além disso, como $x_n \notin V$ segue que $h_i'(x_n) = 0$ para cada i. Como

$$\|f' - h_0' - \sum_{n_i \leq n} h_i'\| = \|\widetilde{h_{n-1}}^* \cdots \widetilde{h_0}^* (f - (d_0 + \sum_{i=1}^{N} d_i)) \widetilde{h_0} \cdots \widetilde{h_{n-1}}\| < \varepsilon$$

então

$$|f(x)| = |(f' - h_0' - \sum_{n_i \leq n} h_i')(x_n)| < \varepsilon.$$

Resumindo, dado $\varepsilon > 0$ e $x \notin V$, mostramos que $|f(x)| \leq \varepsilon$. Portanto $f \in C_0(V)$.

□

Apresentaremos agora o principal resultado desta seção.

Teorema 3.9 *Existe uma bijeção entre os ideais gauge invariantes de $\mathcal{O}(X, \alpha, L)$ e os abertos σ, σ^{-1}-invariantes de X.*

Demonstração.
O que temos a fazer é mostrar que função

$$\Phi : \{\text{ideais gauge inv. de } \mathcal{O}(X,\alpha,L)\} \to \{\text{abertos } \sigma,\sigma^{-1}\text{-invariantes de } X\},$$

dada por $\Phi(I) = V$ onde V é o aberto de X tal que $I \cap C(X) = C_0(V)$ é bijetora. Pela proposição acima Φ é sobrejetora. Falta mostrar que é injetora. Para tanto, dado I ideal gauge invariante de $\mathcal{O}(X,\alpha,L)$, seja $V \subseteq X$ o aberto σ,σ^{-1}-invariante tal que $I \cap C(X) = C_0(V)$. Mostraremos que $\langle C_0(V)\rangle = I$. É claro que $\langle C_0(V)\rangle \subseteq I$. Pelo teorema 3.3 existe um *-isomorfismo

$$\Psi : \frac{\mathcal{O}(X,\alpha,L)}{\langle C_0(V)\rangle} \to \mathcal{O}(X',\alpha',L')$$

onde $X' = X \setminus V$. Seja $\overline{\overline{I}}$ a imagem de I pelo *-homomorfismo quociente de $\mathcal{O}(X,\alpha,L)$ em $\mathcal{O}(X,\alpha,L)/\langle C_0(V)\rangle$. Como $\overline{\overline{I}}$ é gauge invariante e Ψ é covariante pelas ações de gauge segue que $\Psi(\overline{\overline{I}})$ é gauge invariante. Supondo $\overline{\overline{I}} \neq 0$, e portanto $\Psi(\overline{\overline{I}}) \neq 0$, teremos que $\Psi(\overline{\overline{I}}) \cap C(X') = C_0(V') \neq 0$ pelo corolário 2.9. Seja $0 \neq g \in C_0(V')$. Então $g = \Psi(\overline{\overline{f}})$ para algum $f \in C(X)$ pois $\Psi(\overline{\overline{C(X)}}) = C(X')$, e $g = \Psi(\overline{\overline{a}})$ com $a \in I$ pois $g \in \Psi(\overline{\overline{I}})$. Portanto $\Psi(\overline{\overline{f}}) = g = \Psi(\overline{\overline{a}})$ donde $\overline{\overline{f}} = \overline{\overline{a}}$. Desta forma, $f - a \in \langle C_0(V)\rangle \subseteq I$ e portanto $f \in I$. Segue que $f \in I \cap C(X) = C_0(V)$, ou seja, $g = \Psi(\overline{\overline{f}}) = 0$, o que é absurdo. Portanto $\overline{\overline{I}} = 0$ o que mostra que $I = \langle C_0(V)\rangle$.

□

Em particular mostramos que todo ideal gauge invariante I de $\mathcal{O}(X,\alpha,L)$ é da forma $\langle C_0(V)\rangle$ onde $V \subseteq X$ é o aberto σ,σ^{-1}-invariante tal que $C_0(V) = I \cap C(X)$. Segue deste teorema um critério de não simplicidade de $\mathcal{O}(X,\alpha,L)$, que é o seguinte

Corolário 3.10 *Se U é não vazio e $U \cup \sigma(U)$ não é denso em X então $\mathcal{O}(X,\alpha,L)$ tem pelo menos um ideal gauge invariante não trivial.*

Demonstração.
Se $U \cup \sigma(U) \subseteq X$ não é denso então $V = X \setminus \overline{U \cup \sigma(U)}$ é um aberto não vazio σ,σ^{-1}-invariante. Então $0 \neq \langle C_0(V)\rangle$ é um ideal gauge invariante de $\mathcal{O}(X,\alpha,L)$. Pelo teorema acima, supondo $\langle C_0(V)\rangle = \mathcal{O}(X,\alpha,L)$ teríamos que $C_0(V) = C(X)$, o que é absurdo, pois $V \neq X$, pelo fato de U ser não vazio.

□

Chapter 4

Transformações Topologicamente Livres

Neste capítulo mostraremos que sob certas hipóteses sobre X, todo ideal da álgebra $\mathcal{O}(X, \alpha, L)$ tem intersecção não nula com $C(X)$ e baseado neste fato mostraremos uma relação entre os ideais de $\mathcal{O}(X, \alpha, L)$ e os abertos σ, σ^{-1}-invariantes de X. Além disso daremos um critério de simplicidade para as álgebras de Cuntz-Krieger para matrizes infinitas.

4.1 O teorema da Intersecção de ideais de $\mathcal{O}(X, \alpha, L)$ com $C(X)$

Iniciaremos esta seção com o seguinte lema:

Lema 4.1 *a)Para cada $f \in C_c(U)$, $supp(L(f)) \subseteq \sigma(supp(f))$.*
b) Se $h, f_1, \cdots, f_n, g_1, \cdots, g_n \in C_c(U)$ e h tem a propriedade de que $\sigma^{n-1}(supp(h)) \subseteq U$ então $supp(\widetilde{f_k}^* \cdots \widetilde{f_1}^* h \widetilde{g_1} \cdots \widetilde{g_k}) \subseteq \sigma^k(supp(h))$ para cada $k \in \{0, \cdots, n\}$.

Demonstração.
a) A demonstração deste fato é idêntica a demonstração dada em [6:8.7], embora o nosso contexto seja um pouco diferente. Seja $x \in X$ com $L(f)(x) \neq 0$. Suponha $x \notin \sigma(\text{supp}(f))$. Tome $g \in C(X)$ tal que $g(x) = 1$ e $g_{|_{\sigma(\text{supp}(f))}} = 0$. Se $y \in \text{supp}(f)$ então $\sigma(y) \in \sigma(\text{supp}(f))$, e portanto $\alpha(g)(y) = g(\sigma(y)) = 0$. Isto mostra que $f\alpha(g) = 0$. Temos então que

$$0 \neq L(f)(x) = L(f)(x)g(x) = (L(f)g)(x) = L(f\alpha(g))(x) = 0,$$

o que é absurdo. Portanto $x \in \sigma(\mathrm{supp}(f))$.
b) Pela parte a) e do fato de que $\widetilde{f_1}^* h\widetilde{g_1} = L(f_1^* h g_1)$ segue que

$$\mathrm{supp}(\widetilde{f_1}^* h\widetilde{g_1}) = \mathrm{supp}(L(f_1^* h g_1)) \subseteq \sigma(\mathrm{supp}(f_1^* h g_1)),$$

e é claro que $\sigma(\mathrm{supp}(f_1^* h g_1)) \subseteq \sigma(\mathrm{supp}(h))$. Suponha que

$$\mathrm{supp}(\widetilde{f_{k-1}}^* \cdots \widetilde{f_1}^* h\widetilde{g_1} \cdots \widetilde{g_{k-1}}) \subseteq \sigma^{k-1}(\mathrm{supp}(h))$$

para $2 \leq k \leq n$. Então, pondo-se $g = \widetilde{f_{k-1}}^* \cdots \widetilde{f_1}^* h\widetilde{g_1} \cdots \widetilde{g_{k-1}}$, pela parte a) temos que

$$\mathrm{supp}(\widetilde{f_k}^* g\widetilde{g_k}) = \mathrm{supp}(L(f_k^* g g_k)) \subseteq \sigma(\mathrm{supp}(f_k^* g g_k)).$$

Como $\mathrm{supp}(f_k^* g g_k) \subseteq \mathrm{supp}(g)$, e por hipótese de indução

$$\mathrm{supp}(g) \subseteq \sigma^{k-1}(\mathrm{supp}(h)),$$

segue que $\mathrm{supp}(f_k^* g g_k) \subseteq \sigma^{k-1}(\mathrm{supp}(h))$. Por hipótese $\sigma^{k-1}(\mathrm{supp}(h)) \subseteq U$ e portanto $\sigma(\mathrm{supp}(f_k^* g g_k)) \subseteq \sigma^k(\mathrm{supp}(h))$. Isto prova a parte b).

□

Para cada $i \neq j$ em $\mathbb{N}$ defina

$$V^{i,j} = \{x \in X : \sigma^i(x) = \sigma^j(x)\}.$$

Note que para que $x \in X$ seja um elemento de $V^{i,j}$ é necessário que $x \in \mathrm{dom}(\sigma^i) \cap \mathrm{dom}(\sigma^j)$.

Lema 4.2 *Se $f_1, \cdots f_i, g_1, \cdots, g_j \in C_c(U)$ com $i \neq j$ então para cada $x \notin V^{i,j}$ existe $h \in C(X)$ tal que:*

- $0 \leq h \leq 1$,
- $h(x) = 1$,
- $h\widetilde{f_1} \cdots \widetilde{f_i}\, \widetilde{g_j}^* \cdots \widetilde{g_1}^* h = 0$.

Demonstração.
Tomando adjunto podemos supor que $i > j$, e portanto $i > 0$. Seja

$$K = \left(\bigcup_{r=1}^{i} \mathrm{supp}(f_r)\right) \bigcup \left(\bigcup_{s=1}^{j} \mathrm{supp}(g_s)\right)$$

que é um sub conjunto compacto de U. Se $x \notin U$, tome $h \in C(X)$, $0 \leq h \leq 1$, $h(x) = 1$ e $h_{|_K} = 0$. Então $hf_1 = 0$, o que prova o lema neste caso. Podemos então supor que $x \in U$. Faremos a demonstração em dois casos: um quando $x \notin \mathrm{dom}(\sigma^i)$ e outro quando $x \in \mathrm{dom}(\sigma^i)$. Suponha $x \notin \mathrm{dom}(\sigma^i)$. Então existe $1 \leq k \leq i-1$ tal que $\sigma^k(x) \notin U$ (note que $i \geq 2$ pois $x \in U = \mathrm{dom}(\sigma)$). Portanto $\sigma^k(x) \notin K$. Tome $V_0 \subseteq X$ aberto com $\sigma^k(x) \in V_0$ e $V_0 \cap K = \emptyset$. Então $V = \sigma^{-k}(V_0) \ni x$ é um aberto em U. Tome $h \in C_c(U)$ com $\mathrm{supp}(h) \subseteq V$, $0 \leq h \leq 1$ e $h(x) = 1$. Então, como $\sigma^{k-1}(\mathrm{supp}(h^2)) \subseteq \sigma^{k-1}(V) \subseteq U$, pelo lema 4.1 parte b),

$$\mathrm{supp}(\widetilde{f_k}^* \cdots \widetilde{f_1}^* h^2 \widetilde{f_1} \cdots \widetilde{f_k}) \subseteq \sigma^k(\mathrm{supp}(h^2)) \subseteq \sigma^k(V) \subseteq V_0.$$

Como $V_0 \cap K = \emptyset$ e $\mathrm{supp}(f_{k+1}) \subseteq K$ temos que

$$(\widetilde{f_k}^* \cdots \widetilde{f_1}^* h^2 \widetilde{f_1} \cdots \widetilde{f_k})\widetilde{f_{k+1}} = 0$$

donde $h\widetilde{f_1} \cdots \widetilde{f_{k+1}} \cdots \widetilde{f_i} = 0$. Portanto $h\widetilde{f_1} \cdots \widetilde{f_i}\, \widetilde{g_j}^* \cdots \widetilde{g_1}^* h = 0$. Falta demonstrar o caso $x \in \mathrm{dom}(\sigma^i)$. Como $i > j$, segue que $x \in \mathrm{dom}(\sigma^j)$. Portanto, como $x \notin V^{i,j}$ temos que $\sigma^i(x) \neq \sigma^j(x)$. Sejam $V_i \ni \sigma^i(x)$ e $V_j \ni \sigma^j(x)$ abertos tais que $V_i \cap V_j = \emptyset$. Seja $V = \sigma^{-i}(V_i) \cap \sigma^{-j}(V_j)$ e note que V é um aberto que contém x. Tome $h \in C_c(U)$ com $0 \leq h \leq 1$, $h(x) = 1$ e $\mathrm{supp}(h) \subseteq V$. Então, como $\sigma^{i-1}(V) \subseteq U$ e $\sigma^{j-1}(V) \subseteq U$, pelo lema 4.1 parte b) temos que

$$\mathrm{supp}(\widetilde{f_i}^* \cdots \widetilde{f_1}^* h^2 \widetilde{f_1} \cdots \widetilde{f_i}) \subseteq \sigma^i(\mathrm{supp}(h^2)) \subseteq V_i$$

e

$$\mathrm{supp}(\widetilde{g_j}^* \cdots \widetilde{g_1}^* h^2 \widetilde{g_1} \cdots \widetilde{g_j}) \subseteq \sigma^j(\mathrm{supp}(h^2)) \subseteq V_j.$$

Como V_i e V_j são disjuntos segue que

$$(\widetilde{f_i}^* \cdots \widetilde{f_1}^* h^2 \widetilde{f_1} \cdots \widetilde{f_i})(\widetilde{g_j}^* \cdots \widetilde{g_1}^* h^2 \widetilde{g_1} \cdots \widetilde{g_j}) = 0.$$

Portanto

$$(h\widetilde{f_1} \cdots \widetilde{f_i}\, \widetilde{g_j}^* \cdots \widetilde{g_1}^* h)^*(h\widetilde{f_1} \cdots \widetilde{f_i}\, \widetilde{g_j}^* \cdots \widetilde{g_1}^* h)(h\widetilde{f_1} \cdots \widetilde{f_i}\, \widetilde{g_j}^* \cdots \widetilde{g_1}^* h)^* = 0$$

donde

$$h\widetilde{f_1} \cdots \widetilde{f_i}\, \widetilde{g_j}^* \cdots \widetilde{g_1}^* h = 0.$$

$\square$

Definição 4.3 *O par (X, σ) é dito topologicamente livre se para cada $V^{i,j}$, o fecho $\overline{V^{i,j}}$ em X tem interior vazio.*

Equivalentemente, (X, σ) é topologicamente livre se para cada $V^{i,j}$ o fecho $\overline{V^{i,j}}^U$ em U tem interior vazio. Isto segue do fato de que $\overline{V^{i,j}}^U$ tem interior vazio se e somente se $\overline{V^{i,j}}$ tem interior vazio. De fato, supondo $x \in \overline{V^{i,j}}^U$ ponto interior, tome aberto W em U, $x \in W \subseteq \overline{V^{i,j}}^U$, e note que W é aberto em X e $W \subseteq \overline{V^{i,j}}$. Por outro lado, suponha $x \in \overline{V^{i,j}}$ ponto interior e $x \in W \subseteq \overline{V^{i,j}}$ onde W é aberto em X. Como $V = W \cap U \neq \emptyset$ e $V \subseteq \overline{V^{i,j}}^U$ é aberto em U segue que $\overline{V^{i,j}}$ tem interior não vazio.

Pelo teorema de Baire, (X, σ) é topologicamente livre se $\bigcup_{i,j \in \mathbb{N}} \overline{V^{i,j}}$ tem interior vazio. Desta forma, $Y = X \setminus \bigcup_{i,j \in \mathbb{N}} \overline{V^{i,j}}$ é denso em X.

Seja S o sub conjunto dos funcionais lineares positivos de $\mathcal{O}(X, \alpha, L)$ dado por

$$S = \{\varphi : \varphi \text{ é funcional linear positivo e } \varphi_{|_{C(X)}} = \delta_y \text{ para algum } y \in Y\}$$

onde $\delta_y(f) = f(y)$ para cada $f \in C(X)$. Não conhecemos as características dos funcionais desta forma, porém para $a \in \mathcal{O}(X, \alpha, L)$ e $f \in C(X)$ vale a seguinte relação:

Lema 4.4 *Se φ é um funcional linear positivo de $\mathcal{O}(X, \alpha, L)$ satisfazendo $\varphi_{|_{C(X)}} = \delta_x$ para algum $x \in X$ então para cada $f \in C(X)$ e $a \in \mathcal{O}(X, \alpha, L)$ valem as relações $\varphi(fa) = \varphi(f)\varphi(a)$ e $\varphi(af) = \varphi(a)\varphi(f)$.*

Demonstração.
Basta demonstrar o caso $\varphi(af) = \varphi(a)\varphi(f)$. De fato, supondo demonstrado este caso, dados $a \in \mathcal{O}(X, \alpha, L)$ e $f \in C(X)$, temos que

$$\varphi(fa) = \varphi(a^* f^*)^* = (\varphi(a^*)\varphi(f^*))^* = \varphi(f)\varphi(a).$$

Mostraremos que $\varphi(af) = \varphi(a)\varphi(f)$.

Para cada $b \in \mathcal{O}(X, \alpha, L)$ vale

$$(b - \varphi(b))^*(b - \varphi(b)) \geq 0.$$

Portanto

$$\varphi(b^* b) - \varphi(b^*)\varphi(b) = \varphi((b - \varphi(b))^*(b - \varphi(b))) \geq 0,$$

donde $\varphi(b)^*\varphi(b) \leq \varphi(b^*b)$. Como $f^*a^*af \leq f^*f\|a\|^2$ então $\varphi(f^*a^*af) \leq \varphi(f^*f)\|a\|^2$ pois φ é positivo . Pondo-se $b = af$ segue que

$$0 \leq \varphi(af)^*\varphi(af) \leq \varphi(f^*a^*af) \leq \varphi(f^*f)\|a\|^2 = \|a\|^2|f(x)|^2,$$

onde x é tal que $\varphi_{|_{C(X)}} = \delta_x$. Isto mostra que $\varphi(ag) = 0$ para cada $g \in C(X)$ tal que $g(x) = 0$. Dada $f \in C(X)$ defina $g = f - f(x)$. Então $g(x) = 0$ e portanto $\varphi(ag) = 0$. Assim

$$\varphi(af) - \varphi(a)\varphi(f) = \varphi(af) - \varphi(a)f(x) =$$

$$= \varphi(af) - \varphi(af(x)) = \varphi(a(f - f(x))) = \varphi(ag) = 0$$

o que prova o lema.

□

Para cada $a \in \mathcal{O}(X, \alpha, L)$ defina

$$|||a||| = \sup\{|\varphi(a)| : \varphi \in S\}$$

que é uma semi norma para $\mathcal{O}(X, \alpha, L)$.

Não conseguimos mostrar que $|||\ |||$ é não degenerada em $\mathcal{O}(X, \alpha, L)$, porém $|||\ |||$ tem a propriedade, dada pelo seguinte lema, de não se anular nos elementos positivos não nulos de L_n, lembrando que $L_n = C(X) + K_1 + \cdots + K_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Lema 4.5 *Seja (X, σ) topologicamente livre. Para cada $r \in L_n$ com $r \geq 0$ e $r \neq 0$ vale que $|||r||| \neq 0$.*

Demonstração.

Afirmação 1: Se $0 \neq r \in L_n$, r positivo e $r \notin C(X)$ então existe $g \in C_c(U)$ com $\sigma_{|_{supp(g)}}$ homeomorfismo e $\widetilde{g}^*r\widetilde{g} \neq 0$.

Como $r \geq 0$ podemos escrever $r = b^*b$ com $b \in L_n$. Suponha que para cada $g \in C_c(U)$ tal que $\sigma_{|_{\mathrm{supp}(g)}}$ homeomorfismo tem-se $\widetilde{g}^*r\widetilde{g} = 0$, e portanto $\widetilde{g}^*b^* = 0$. Então (usando partição da unidade podemos escrever cada elemento $f \in C_c(U)$ como soma de g como acima) temos que $\widetilde{f}^*b^* = 0$ para cada $f \in C_c(U)$ e portanto $M^*b^* = 0$ donde $K_1b^* = 0$. Por 2.4 d) $C_0(U) \subseteq K_1$, e portanto $C_0(U)b^* = 0$. Pelo lema 2.5 b), $b^* \in C(X)$ donde $r = b^*b \in C(X)$, o que contradiz a hipótese. Isto prova a afirmação.

Afirmação 2: Se $r \in L_n$ é um elemento positivo não nulo e $r \notin C(X)$ então existem $g_1, \cdots, g_i \in C_c(U)$ tal que $\sigma_{|_{supp(g_j)}}$ é homeomorfismo para cada j e

$$0 \neq \widetilde{g_i}^* \cdots \widetilde{g_1}^* r \widetilde{g_1} \cdots \widetilde{g_i} \in C(X).$$

Pela afirmação 1 existe $g_1 \in C_c(U)$ tal que $\sigma_{|_{\mathrm{supp}(g_1)}}$ é homeomorfismo e $0 \neq \widetilde{g_1}^* r \widetilde{g_1}$. Note que $\widetilde{g_1}^* r \widetilde{g_1} \in L_{n-1}$. Por indução suponha que $0 \neq \widetilde{g_l}^* \cdots \widetilde{g_1}^* r \widetilde{g_1} \cdots \widetilde{g_l} \in L_1$ onde $g_j \in C_c(U)$ e $\sigma_{|_{\mathrm{supp}(g_j)}}$ é homeomorfismo para cada j. Então, pela afirmação 1, ou $\widetilde{g_l}^* \cdots \widetilde{g_1}^* r \widetilde{g_1} \cdots \widetilde{g_l} \in C(X)$ ou existe $g_{l+1} \in C_c(U)$ com $\sigma_{|_{\mathrm{supp}(g_{l+1})}}$ homeomorfismo e

$$0 \neq \widetilde{g_{l+1}}^* \widetilde{g_l}^* \cdots \widetilde{g_1}^* r \widetilde{g_1} \cdots \widetilde{g_l}\, \widetilde{g_{l+1}}.$$

Como

$$\widetilde{g_{l+1}}^* \widetilde{g_l}^* \cdots \widetilde{g_1}^* r \widetilde{g_1} \cdots \widetilde{g_l}\, \widetilde{g_{l+1}} \in C(X)$$

está provada a afirmação.

Demonstraremos o lema. Seja $r \in L_n$, r positivo e não nulo. Basta mostrar que existe $\varphi \in S$ tal que $\varphi(r) \neq 0$. Como (X, σ) é topologicamente livre então o conjunto Y $(= X \setminus \bigcup_{i,j} \overline{V^{i,j}})$ é denso em X. Portanto, se $r \in C(X)$ existe $y \in Y$ tal que $r(y) > 0$. Tome φ que estende δ_y, e portanto $\varphi(r) \neq 0$. Suponha $r \notin C(X)$. Tome $g_1, \cdots, g_i \in C_c(U)$ como na afirmação 2. Então

$$0 \neq h = \widetilde{g_i}^* \cdots \widetilde{g_1}^* r \widetilde{g_1} \cdots \widetilde{g_i} \in C(X).$$

Como

$$h^* h h^* = \widetilde{g_i}^* \cdots \widetilde{g_1}^* r^* \widetilde{g_1} \cdots \widetilde{g_i}\, h \widetilde{g_i}^* \cdots \widetilde{g_1}^* r^* \widetilde{g_1} \cdots \widetilde{g_i} \neq 0$$

segue que

$$f = \widetilde{g_1} \cdots \widetilde{g_i}\, h \widetilde{g_i}^* \cdots \widetilde{g_1}^* \neq 0.$$

Como $\sigma_{|_{\mathrm{supp}(g_i)}}$ é homeomorfismo segue pelo lema 2.4 a) que

$$\widetilde{g_i}\, h \widetilde{g_i}^* \in C(X).$$

Usando estes argumentos sucessivamente prova-se que

$$f = \widetilde{g_1} \cdots \widetilde{g_i}\, h \widetilde{g_i}^* \cdots \widetilde{g_1}^* \in C(X).$$

Pelos mesmos argumentos segue que

$$u = \widetilde{g_1} \cdots \widetilde{g_i}\, \widetilde{g_i}^* \cdots \widetilde{g_1}^* \in C(X).$$

Como $f \neq 0$ existe $y \in Y$ tal que $f(y) \neq 0$. Tome $\varphi \in S$ que estende δ_y. Temos então que $\varphi(f) = f(y) \neq 0$. Pelo lema 4.4, como $f = uru$,

$$\varphi(f) = \varphi(uru) = \varphi(u)\varphi(r)\varphi(u)$$

e portanto $\varphi(r) \neq 0$.

$\square$

Agora estamos em condições de demonstrar o principal resultado deste capítulo.

Teorema 4.6 *Se (X, σ) é topologicamente livre então todo ideal não nulo de $\mathcal{O}(X, \alpha, L)$ tem intersecção não nula com $C(X)$.*

Demonstração.
Pela proposição 2.8 basta provar que todo ideal não nulo de $\mathcal{O}(X, \alpha, L)$ tem intersecção não nula com K. Seja $0 \neq I \trianglelefteq \mathcal{O}(X, \alpha, L)$. Suponha $I \cap K = 0$. Então o *-homomorfismo quociente

$$\pi : \mathcal{O}(X, \alpha, L) \to \mathcal{O}(X, \alpha, L)/I$$

é tal que $\pi_{|_K}$ é uma isometria.

Afirmação: Para cada $b \in \mathcal{O}(X, \alpha, L)$ vale que

$$|||E(b)||| \leq \|\pi(b)\|$$

onde E é a esperança condicional definida na seção 1.2 .

Seja a da forma

$$a = \sum_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq m}} a_{i,j}$$

com $a_{0,0} \in C(X)$ e $a_{i,j} \in M^i M^{j*}$ para $i \neq 0$ ou $j \neq 0$, $a_{i,j} = \sum_{1 \leq k \leq n_{i,j}} a_{i,j}^k$,

$$a_{i,j}^k = \widetilde{f_{i,j,1}^k} \cdots \widetilde{f_{i,j,i}^k}\, \widetilde{g_{i,j,1}^k}^{\,*} \cdots \widetilde{g_{i,j,j}^k}^{\,*}$$

onde $f_{i,j,l}^k, g_{i,j,t}^k \in C_c(U)$ para cada i, j, k, l e t. Dado $\varepsilon > 0$ existe $\varphi \in S$ que estende δ_y para algum $y \in Y$ tal que

$$|||E(a)||| - \varepsilon \leq |\varphi(E(a))|.$$

Note que $y \notin V^{i,j}$ para $i \neq j$. Então, para cada $a_{i,j}^k$ com $i \neq j$, pelo lema 4.2 existe $h_{i,j}^k \in C(X)$, $0 \leq h_{i,j}^k \leq 1$, tal que $h_{i,j}^k(y) = 1$ e $ha_{i,j}^k h = 0$. Defina

$$h = \prod_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq m \\ i \neq j \\ 1 \leq k \leq n_{i,j}}} h_{i,j}^k.$$

Então $ha_{i,j}h = 0$ para cada $i \neq j$ donde $hah = hE(a)h$, e além disso $h(y) = 1$. Pelo lema 4.4

$$\varphi(hE(a)h) = \varphi(h)\varphi(E(a))\varphi(h) = h(y)\varphi(E(a))h(y) = \varphi(E(a)),$$

e portanto

$$\varphi(E(a)) = \varphi(hE(a)h) = \varphi(hah).$$

Como $hah = hE(a)h \in K$ e $\pi_{|K}$ é isometria segue que $\|hah\| = \|\pi(aha)\|$. Então

$$|||E(a)||| - \varepsilon \leq |\varphi(E(a))| = |\varphi(hah)| \leq \|hah\| = \|\pi(hah)\| \leq \|\pi(a)\|.$$

Como ε é arbitrário segue que

$$|||E(a)||| \leq \|\pi(a)\|$$

para a desta forma. Dado $b \in \mathcal{O}(X, \alpha, L)$, para cada $\varepsilon > 0$ tome $a \in \mathcal{O}(X, \alpha, L)$ como acima tal que $\|a - b\| \leq \varepsilon$. Então

$$|||E(b)||| \leq |||E(b-a)||| + |||E(a)||| \leq |||E(a)||| + \varepsilon \leq$$

$$\leq \|\pi(a)\| + \varepsilon \leq \|\pi(a-b)\| + \|\pi(b)\| + \varepsilon \leq \|\pi(b)\| + 2\varepsilon.$$

Novamente, como ε é arbitrário segue que $|||E(b)||| \leq \|\pi(b)\|$, o que prova a afirmação.

Note que $\overline{E(I)}$ é ideal fechado de K. Também, $\overline{E(I)}$ é não nulo, pois dado $0 \neq x \in I$, como $0 \neq x^*x \in I$ e E é fiel segue que $0 \neq E(x^*x) \in E(I)$. Então $\overline{E(I)} \cap L_n \neq 0$ para algum n (ver [2: III.4.1]). Seja $0 \neq c \in \overline{E(I)} \cap L_n$. Então, como $c^*c \in L_n$ e c^*c é positivo não nulo segue pelo lema 4.5 que $|||c^*c||| \neq 0$. Mostraremos que $|||c^*c||| = 0$, e isso será um absurdo. Para cada $a = E(b) \in E(I)$ com $b \in I$ temos que

$$|||a^*a||| = |||E(b^*)E(b)||| = |||E(b^*E(b))||| \leq \|\pi(b^*E(b))\|.$$

Como $b^*E(b) \in I$ segue que $\pi(b^*(E(b))) = 0$ e portanto $|||a^*a||| = 0$. Isto mostra que $|||a^*a||| = 0$ para cada $a \in E(I)$. Dado $\varepsilon > 0$, tome $a \in E(I)$ tal que $\|a^*a - c^*c\| \leq \varepsilon$. Então

$$|||c^*c||| \leq |||c^*c - a^*a||| + |||a^*a||| = |||c^*c - a^*a||| \leq \|c^*c - a^*a\| \leq \varepsilon.$$

Assim $|||c^*c||| \leq \varepsilon$ para cada $\varepsilon > 0$ donde $|||c^*c||| = 0$, o que é absurdo. Portanto $I \cap K \neq 0$, e o teorema está provado.

□

4.2 Relação entre os ideais de $\mathcal{O}(X, \alpha, L)$ e os abertos σ, σ^{-1}-invariantes de X

Nesta seção obtemos uma relação entre todos os ideais de $\mathcal{O}(X, \alpha, L)$ e todos os abertos σ, σ^{-1}-invariantes de X sob uma hipótese adicional sobre X, que é a de que todo sub conjunto fechado X' σ, σ^{-1}-invariante de X é tal que $(X', \sigma_{|X'})$ é topologicamente livre.

Proposição 4.7 *Seja I um ideal não nulo de $\mathcal{O}(X, \alpha, L)$ e $V \subseteq X$ o aberto tal que $I \cap C(X) = C_0(V)$. Se $(X', \sigma_{|X'})$ é topologicamente livre (onde $X' = X \setminus V$) então $I = \langle C_0(V) \rangle$.*

Demonstração.
Pela proposição 3.4 V é σ, σ^{-1}-invariante, donde $X' = X \setminus V$ também o é. Pelo teorema 3.3 existe um isomorfismo

$$\Psi : \frac{\mathcal{O}(X, \alpha, L)}{\langle C_0(V) \rangle} \to \mathcal{O}(X', \alpha', L')$$

tal que $\Psi(\overline{\overline{f}}) = f_{|X'}$ para cada $f \in C(X)$ e além disso $\Psi(\overline{\overline{C(X)}}) = C(X')$. Obviamente $\langle C_0(V) \rangle \subseteq I$. Suponha $I \neq \langle C_0(V) \rangle$. Então $\overline{\overline{I}} \neq 0$ e portanto $\Psi(\overline{\overline{I}}) \neq 0$. Pelo teorema 4.6, como $\Psi(\overline{\overline{I}})$ é ideal não nulo de $\mathcal{O}(X', \alpha', L')$ segue que $\Psi(\overline{\overline{I}}) \cap C(X') \neq 0$. Seja $0 \neq g \in \Psi(\overline{\overline{I}}) \cap C(X')$. Então, como $\Psi(\overline{\overline{C(X)}}) = C(X')$ segue que $g = \Psi(\overline{\overline{f}})$ com $f \in C(X)$. Além disso, $g = \Psi(\overline{\overline{a}})$ com $a \in I$. Portanto $\Psi(\overline{\overline{a}}) = \Psi(\overline{\overline{f}})$ donde $\overline{\overline{a}} = \overline{\overline{f}}$ e portanto $f - a \in \langle C_0(V) \rangle \subseteq I$, ou seja, $f \in I$. Desta forma $f \in I \cap C(X) = C_0(V)$ e portanto $\overline{\overline{f}} = 0$ donde $g = \Psi(\overline{\overline{f}}) = 0$, o que é absurdo. Concluímos então que $I = \langle C_0(V) \rangle$.

$\square$

Proposição 4.8 *Se (X, σ) é tal que $(X', \sigma_{|_{X'}})$ é topologicamente livre para cada sub conjunto fechado X' σ, σ^{-1}-invariante então todo ideal de $\mathcal{O}(X, \alpha, L)$ é da forma $\langle C_0(V) \rangle$ para algum aberto $V \subseteq X$.*

Demonstração.
Seja $I \trianglelefteq \mathcal{O}(X, \alpha, L)$, e $C_0(V) = I \cap C(X)$. Pela proposição 3.4 V é σ, σ^{-1}-invariante, donde $X' = X \setminus V$ também o é. Por hipótese $(X', \sigma_{|_{X'}})$ é topologicamente livre. Pelo teorema 4.7, $I = \langle C_0(V) \rangle$.

$\square$

Concluiremos esta seção com a seguinte relação entre ideais de $\mathcal{O}(X, \alpha, L)$ e os abertos σ, σ^{-1}-invariantes de X:

Teorema 4.9 *Se (X, σ) é tal que $(X', \sigma_{|_{X'}})$ é topologicamente livre para cada sub conjunto fechado σ, σ^{-1}-invariante X' de X então existe uma bijeção entre os ideais de $\mathcal{O}(X, \alpha, L)$ e os abertos σ, σ^{-1}-invariantes de X.*

Demonstração.
Pelo teorema 3.9 basta mostrar que todo ideal de $\mathcal{O}(X, \alpha, L)$ é gauge invariante. Isto decorre da proposição 4.8.

$\square$

4.3 Um critério de simplicidade para a álgebra de Cuntz-Krieger para Matrizes Infinitas

Apresentaremos nesta seção um critério de simplicidade para as álgebras de Cuntz-Krieger para matrizes infinitas baseado no grafo de A, denotado por $G_R(A)$.

Entendemos por $G_R(A)$ o grafo orientado cujos vértices são os elementos de G tal que dados $x, y \in G$ existe uma aresta orientada de x para y se $A(x, y) = 1$. Um caminho de x para y é uma seqüência finita $x_1 \cdots x_n$ tal que $x_1 = x$, $x_n = y$ e $A(x_i, x_{i+1}) = 1$ para cada i. Dizemos que $G_R(A)$ é transitivo se para cada $x, y \in G$ existe um caminho de x para y.

A próxima proposição caracteriza os abertos σ, σ^{-1}-invariantes de $\widetilde{\Omega_A}$.

Proposição 4.10 *Se $G_R(A)$ é transitivo, os únicos abertos σ-invariantes não vazios de $\widetilde{\Omega_A}$ são $\widetilde{\Omega_A} \setminus \emptyset$ e o próprio $\widetilde{\Omega_A}$.*

Demonstração.
Seja V um aberto σ-invariante de $\widetilde{\Omega_A}$. Seja $\xi \in V$ um elemento cujo tronco é infinito. (tais elementos formam um conjunto denso em $\widetilde{\Omega_A}$). Tome V_n vizinhança de ξ em V,

$$V_n = \{\nu \in \widetilde{\Omega_A}; w(\nu)_{|n} = w(\xi)_{|n}\}$$

onde $w(\nu)$ é o tronco de ν. Seja $\mu \in \widetilde{\Omega_A}$ tal que $|w(\mu)| \geq 1$ e seja $x \in G$, de forma que $x \in \mu$. Como $G_R(A)$ é transitivo existe um caminho $x_1 \cdots x_m$ de $w(\xi)_n$ para x, e portanto $w(\xi)_{|n} x_2 \cdots x_{m-1}\mu \in V_n \subseteq V$. Como V é σ-invariante segue que

$$\mu = \sigma^{n+m-2}(w(\xi)_{|n} x_2 \cdots x_{m-1}\mu) \in V.$$

Segue que $U \subseteq V$. Se $\emptyset \neq \xi \in \widetilde{\Omega_A} \setminus U$ então existe $x \in G$ tal que $x^{-1} \in \xi$. Como $x\xi \in U \subseteq V$ e $\sigma(x\xi) = \xi$ segue que $\xi \in V$. Isto mostra que $\widetilde{\Omega_A} \setminus \emptyset \subseteq V$, donde segue o resultado.

$\square$

Como $\widetilde{\Omega_A}$ e $\widetilde{\Omega_A} \setminus \emptyset$ são σ^{-1}-invariantes segue pela proposição acima que os únicos abertos σ, σ^{-1}-invariantes não vazios de $\widetilde{\Omega_A}$ são o próprio $\widetilde{\Omega_A}$ e $\widetilde{\Omega_A} \setminus \emptyset$.

Dado $\xi \in \mathrm{dom}(\sigma^i)$ com $w(\xi) = x_1 x_2 \cdots$ temos que $w(\sigma^i(\xi)) = x_{i+1}x_{i+2}\cdots$. Isto mostra que se $\xi \in V^{i,j}$ então $w(\xi)$ é infinito, pois caso contrário, supondo $|w(\xi)| = n$, teríamos que $n - i = |w(\sigma^i(\xi))| = |w(\sigma^j(\xi))| = n - j$ donde $i = j$, o que é absurdo.

A seguinte proposição mostra uma relação entre $Gr(A)$ e $\widetilde{\Omega_A}$.

Proposição 4.11 *Se $Gr(A)$ é transitivo então $(\widetilde{\Omega_A}, \sigma)$ é topologicamente livre.*

Demonstração.
Suponha $i > j$, $i = j + k$ e que $\overline{V^{i,j}}$ tem interior não vazio. Seja ν ponto interior de $\overline{V^{i,j}}$ e $V_\nu \subseteq \overline{V^{i,j}}$ um aberto que contém ν. Então existe $\xi \in V_\nu \cap V^{i,j}$. Como $\sigma^i(\xi) = \sigma^j(\xi)$ temos que

$$x_{i+1}x_{i+2}\cdots = w(\sigma^i(\xi)) = w(\sigma^j(\xi)) = x_{j+1}x_{j+2}\cdots,$$

donde $x_{i+r} = x_{j+r}$ para cada $r \geq 1$. Como $i = j + k$ segue que $x_{i+k} = x_{j+k} = x_i$, e também que

$$x_{i+(k+r)} = x_{j+(k+r)} = x_{(j+k)+r} = x_{i+r}$$

para cada $r \geq 1$. Aplicando a última igualdade repetidas vezes segue que $x_{i+nk+r} = x_{i+r}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ e $r \geq 1$. Isto mostra que

$$w(\xi) = x_1 \cdots x_{i-1} sss \cdots,$$

onde $s = x_i x_{i+1} \cdots x_{i+(k-1)}$. Como $w(\xi)$ é infinito, existe um aberto $V_n \subseteq V_\nu$, $V_n \ni \xi$,

$$V_n = \{\eta \in \widetilde{\Omega_A} : w(\eta)_{|n} = x_1 \cdots x_n = w(\xi)_{|n}\}$$

com $n \geq i$.

Afirmação: $V_n = \{\xi\}$

Supondo $\eta \in V_n \cap V^{i,j}$, com os mesmos argumentos usados acima prova-se que

$$w(\eta) = x_1 x_2 \cdots x_{i-1} sss \cdots,$$

donde $w(\eta) = w(\xi)$, e como η, ξ tem troncos infinitos segue que $\eta = \xi$. Seja $\nu \in V_n$. Então, como $V_n \subseteq \overline{V^{i,j}}$ existe uma seqüência $(\nu_l)_l \subseteq V^{i,j}$ tal que $\nu_l \to \nu$. Como $\nu \in V_n$ e V_n é aberto podemos supor $(\nu_l)_l \subseteq V_n$. Portanto $\nu_l = \xi$ para cada l e portanto $\nu = \xi$. Isto prova a afirmação.

Seja $y \in G \setminus \{x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{i+(k-1)}\}$. Como $Gr(A)$ é transitivo existe um caminho $y_1 \cdots y_r$ onde $y_1 = x_{n+1}$ e $y_r = y$ e outro caminho $z_1 \cdots z_t$ tal que $z_1 = y$ e $z_t = x_1$. Desta forma podemos considerar a palavra infinita admissível

$$x_1 \cdots x_n y_1 \cdots y_r z_2 \cdots z_{t-1} w(\xi)$$

que é o tronco de um elemento $\mu \in \widetilde{\Omega_A}$. Note que $\mu \in V_n$ por definição de V_n e que $\mu \neq \xi$, pois seus troncos são distintos. Isto contradiz a afirmação. Portanto, $\overline{V^{i,j}}$ tem interior vazio, o que significa que $\widetilde{\Omega_A}$ é topologicamente livre.

$\square$

Provaremos agora o resultado principal desta seção.

Proposição 4.12 *Se $Gr(A)$ é transitivo então os únicos ideais de $\widetilde{O_A}$ são o ideal nulo, O_A e o próprio $\widetilde{O_A}$.*

Demonstração.
Pela proposição 4.10 os únicos fechados σ, σ^{-1}-invariantes de $\widetilde{\Omega_A}$ são $\widetilde{\Omega_A}$, o conjunto $\{\emptyset\}$

(se $\emptyset \in \widetilde{\Omega_A}$, ou seja, se $O_A \neq \widetilde{O_A}$ por [3: 8.5]) e o conjunto vazio. Como estes fechados são topologicamente livres, pelo teorema 4.9 os ideais de $\mathcal{O}(\widetilde{\Omega_A}, \alpha, L)$ são precisamente o ideal nulo, $\langle C_0(\widetilde{\Omega_A} \setminus \emptyset)\rangle$ e $\mathcal{O}(\widetilde{\Omega_A}, \alpha, L)$. Portanto se $\emptyset \notin \widetilde{\Omega_A}$ (ou seja, se $O_A = \widetilde{O_A}$) então $\mathcal{O}(\widetilde{\Omega_A}, \alpha, L)$ não tem ideais não triviais e a proposição está provada neste caso. Se $\emptyset \in \widetilde{\Omega_A}$ então por 4.9 $\mathcal{O}(\widetilde{\Omega_A}, \alpha, L)$ tem exatamente um ideal não trivial, que é $\langle C_0(\widetilde{\Omega_A} \setminus \emptyset)\rangle$. Portanto $\widetilde{O_A}$ também tem exatamente um ideal não trivial. Por [3: 8.5] $O_A \neq \widetilde{O_A}$ e como $0 \neq O_A \trianglelefteq \widetilde{O_A}$ segue que O_A é um ideal não trivial de $\widetilde{O_A}$, e portanto é o único.

$\square$

Uma conseqüência imediata desta proposição é que se $G_R(A)$ é transitivo então O_A é simples.

Apêndice

O Produto Cruzado por Endomorfismo e o Produto Cruzado por Endomorfismo Parcial

Mostraremos aqui algumas relações entre o produto cruzado por endomorfismo definido em [4] o produto cruzado por endomorfismo parcial definido neste trabalho.

Sejam A uma C*-álgebra com unidade, $\alpha : A \to A$ um *-homomorfismo e L um operador de transferência, isto é, $L : A \to A$ é um operador linear contínuo positivo e $L(\alpha(a)b) = aL(b)$ para cada $a, b \in A$. Denotando por $\widetilde{\alpha}$ a composição de α com o *-isomorfismo $A \ni a \mapsto (L_a, R_a) \in M(A)$ temos:

Proposição A.1 *$(A, \widetilde{\alpha}, L)$ é um C^*-sistema dinâmico.*

Demonstração.
Claro que $\widetilde{\alpha}$ é um endomorfismo parcial. Além disso, por hipótese L é uma função linear e positiva. Note que

$$\widetilde{\alpha}(a)b = T^{-1}(\widetilde{\alpha}(a)T(b)) = T^{-1}((L_{\alpha(a)}, R_{\alpha(a)})(L_b, R_b)) =$$

$$= T^{-1}(L_{\alpha(a)b}, R_{\alpha(a)b}) = \alpha(a)b.$$

Além disso, como $L(\alpha(a)b) = aL(b)$ por hipótese, segue que

$$L(\widetilde{\alpha}(a)b) = L(\alpha(a)b) = aL(b).$$

$\square$

Denotamos por (A, α, L) o C*-sistema dinâmico $(A, \widetilde{\alpha}, L)$. Além disso, como vale a relação $b\widetilde{\alpha}(a) = b\alpha(a)$ para cada $a, b \in A$ não faremos mais referência à $\widetilde{\alpha}$. Fica então definida a álgebra de Toeplitz $\mathcal{T}(A, \alpha, L)$ e o produto cruzado por endomorfismo parcial $\mathcal{O}(A, \alpha, L)$.

Em [4], $\tau(A, \alpha, L)$ foi definido como a C*-álgebra universal gerada por $A \cup S$ com as relações de A, $S^* a S = L(a)$ e $Sa = \alpha(a)S$.

Proposição A.2 *Existe um *-isomorfismo*

$$\begin{array}{rcl} \psi : \tau(A, \alpha, L) & \to & \mathcal{T}(A, \alpha, L) \\ a & \mapsto & a \\ S & \mapsto & \widetilde{1_A} \end{array}.$$

Demonstração.
Defina

$$\begin{array}{rcl} \psi : A \cup \{S\} & \to & \mathcal{T}(A, \alpha, L) \\ a & \mapsto & a \\ S & \mapsto & \widetilde{1_A} \end{array}$$

e note que $\varphi_{|_A}$ é *-homomorfismo. Além disso, para cada $a \in A$,

$$\psi(S)\psi(a) = \widetilde{1_A}\, a = \widetilde{\alpha(a)} = \alpha(a)\widetilde{1_A} = \psi(\alpha(a))\psi(S)$$

e

$$\psi(S)^*\psi(a)\psi(S) = \widetilde{1_A}^{\,*} a \widetilde{1_A} = \widetilde{1_A}^{\,*}\widetilde{a} = L(a) = \psi(L(a)),$$

e portanto ψ se estende à $\tau(A, \alpha, L)$ pela propriedade universal. Por outro lado, note que

$$\|\widetilde{a}\,\|^2 = \|\widetilde{a}^{\,*}\widetilde{a}\,\| = \|L(a^*a)\| = \|S^* a^* a S\| = \|aS\|^2,$$

e portanto podemos definir

$$\begin{array}{rrcl} \varphi : & M & \to & \tau(A, \alpha, L) \\ & \widetilde{A} \ni \widetilde{a} & \mapsto & aS \end{array}.$$

Definimos então uma função que continuaremos chamando de φ,

$$\begin{array}{rcl} \varphi : A \cup M & \to & \tau(A, \alpha, L) \\ a & \mapsto & a \\ m & \mapsto & \varphi(m) \end{array}.$$

Claro que $\varphi_{|A}$ é *-homomorfismo. Além disso, para cada $a \in A$ e $\widetilde{b}, \widetilde{c} \in \widetilde{A}$ temos que

$$\varphi(a)\varphi(\widetilde{b}) = a(bS) = (ab)S = \varphi(a\widetilde{b}),$$

$$\varphi(\widetilde{b})\varphi(a) = bSa = b\alpha(a)S = \varphi(\widetilde{b}a)$$

e

$$\varphi(\widetilde{b})^*\varphi(\widetilde{c}) = S^*b^*cS = L(b^*c) = \varphi(L(b^*c)) = \varphi(\langle\widetilde{b}, \widetilde{c}\rangle).$$

Pela forma como foi definida φ em M e pela densidade de $\widetilde{A}$ em M segue que as relações acima valem para $a \in A$ e $m, n \in M$. Portanto, pela propriedade universal, φ se estende à $\mathcal{T}(A, \alpha, L)$. Claramente ψ e φ são inversas.

□

Uma redundância em $\tau(A, \alpha, L)$ é um par (a, l) onde $a \in A$ e $l \in ASS^*A$ tal que $abS = lbS$ para cada $b \in A$, enquanto que uma redundância em $\mathcal{T}(A, \alpha, L)$ é um par (a, k) onde $a \in A$, $k \in \widehat{K_1}$ tal que $am = km$ para cada $m \in M$. A seguinte proposição mostra uma relação entre estas redundâncias.

Proposição A.3 *Existe uma bijeção* $(a, l) \longleftrightarrow (\psi(a), \psi(l)) = (a, \psi(l))$ *entre as redundâncias de* $\tau(A, \alpha, L)$ *e as de* $\mathcal{T}(A, \alpha, L)$.

Demonstração.
Note inicialmente que $\psi(ASS^*A) = \widehat{K_1}$ e, portanto se $(a, l) \in A \times ASS^*A$, então temos que $(\psi(a), \psi(l)) \in A \times \widehat{K_1}$. Se $abS = lbS$ para cada $b \in B$, segue que $\psi(a)\widetilde{b} = \psi(l)\widetilde{b}$ para $\widetilde{b}$ em um conjunto denso de M. Portanto $\psi(a)m = \psi(l)m$ para cada $m \in M$. Por outro lado uma redundância (a, k) de $\mathcal{T}(A, \alpha, L)$ é imagem da redundância $(\psi^{-1}(a), \psi^{-1}(k))$ pela função acima. A função do enunciado é injetora pois ψ o é.

□

A álgebra $A \rtimes_{\alpha,L} \mathbb{N}$, o produto cruzado por endomorfismo definido em [4], é o quociente de $\tau(A, \alpha, L)$ pelo ideal gerado pelas elementos da forma $a - l$ onde (a, l) são redundâncias de $\tau(A, \alpha, L)$ e $a \in \langle\alpha(A)\rangle$ (o ideal de A gerado por $\alpha(a)$). Denote por C o quociente de $\mathcal{T}(A, \alpha, L)$ pelo ideal gerado pelos elementos da forma $a - k$ onde (a, k) são redundâncias de $\mathcal{T}(A, \alpha, L)$ e $a \in \varphi^{-1}K(M) \cap \langle\alpha(A)\rangle$, onde $\varphi : A \to L(M)$ é o *-homomorfismo dado pelo produto à esquerda de A por M.

Corolário A.4 *As álgebras* $A \rtimes_{\alpha,L} \mathbb{N}$ *e* C *são isomorfas.*

Demonstração.
Pelas proposições $A.2$ e $A.3$, $A \rtimes_{\alpha,L} \mathbb{N}$ é isomorfa a C' onde C' é o quociente de $\mathcal{T}(A, \alpha, L)$

pelo ideal gerado pelos elementos $(a-k)$ onde (a,k) é redundância e $a \in \langle \alpha(a) \rangle$. Pela proposição 1.13, se (a,k) é redundância de $\mathcal{T}(A,\alpha,L)$ então $a \in \varphi^{-1}(K(M))$ donde segue que $C' = C$.

$\square$

Corolário A.5 *Se* $\ker(\varphi)^{\perp} \cap \varphi^{-1}(K(M)) = \langle \alpha(A) \rangle \cap \varphi^{-1}(K(M))$ *então* $A \rtimes_{\alpha,L} \mathbb{N}$ *e* $\mathcal{O}(A,\alpha,L)$ *são C*-álgebras isomorfas.*

Demonstração.
Pelas definições de $\mathcal{O}(A,\alpha,L)$ e de C segue que $\mathcal{O}(A,\alpha,L)$ e C são isomorfas. Pelo corolário acima segue o resultado.

$\square$

A.1 Caso L fiel

Seja (A,α,L) um C*-sistema dinâmico com $\langle \alpha(A) \rangle = A$ e L fiel, no sentido de que se $L(a^*a) = 0$ então $a = 0$.

Proposição A.6 *As álgebras* $A \rtimes_{\alpha,L} \mathbb{N}$ *e* $\mathcal{O}(A,\alpha,L)$ *são isomorfas.*

Demonstração.
Como $\langle \alpha(A) \rangle = A$ segue que

$$\langle \alpha(A) \rangle \cap \varphi^{-1}(K(M)) = \varphi^{-1}(K(M)).$$

Além disso, como L é fiel segue que φ é injetora, e portanto

$$\ker(\varphi)^{\perp} \cap \varphi^{-1}(K(M)) = \varphi^{-1}(K(M)).$$

O resultado segue pelo corolário $A.5$.

$\square$

Obs.: A álgebra de Cuntz-Krieger, que pode ser visto em [4:6], é um exemplo onde L é fiel e $\langle \alpha(A) \rangle = A$.

A.2 O produto cruzado de Paschke e o produto cruzado proposto por Cuntz

Seja $\alpha : A \to A$ um *-homomorfismo injetor, $\alpha(A) = pAp$ onde $p = \alpha(1)$. Considere a esperança condicional

$$\begin{array}{rcl} E : A & \to & \alpha(A) \\ a & \mapsto & pap \end{array}$$

e defina o operador de transferência $L : A \to A$ por $L = \alpha^{-1}E$. Então (A, α, L) é um C*-sistema dinâmico. Em [4] foi mostrado que o produto cruzado de Paschke e o produto cruzado por endomorfismo proposto por Cuntz podem ser vistos como $A \rtimes_{\alpha,L} \mathbb{N}$ com endomorfismos e operadores de transferência da forma acima.

Proposição A.7 *Para o C*-sistema dinâmico definido acima,* $\mathcal{O}(A, \alpha, L)$ *e* $A \rtimes_{\alpha,L} \mathbb{N}$ *são C*-álgebras isomorfas.*

Demonstração.
Por A.5 basta mostrar que

$$\varphi^{-1}(K(M)) \cap \langle \alpha(A) \rangle = \varphi^{-1}(K(M)) \cap \ker(\varphi)^{\perp}.$$

Afirmação 1: $\langle \alpha(A) \rangle \subseteq \ker(\varphi)^{\perp}$

Dados $a \in A$ temos que $a \in \ker(\varphi)$ se e somente se para cada $x \in A$,

$$a\widetilde{x} = 0 \Longleftrightarrow L((ax)^*(ax)) = 0 \Longleftrightarrow \alpha^{-1}E(x^*a^*ax) = 0 \Longleftrightarrow E(x^*a^*ax) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \alpha(1)x^*a^*ax\alpha(1) = 0 \Longleftrightarrow ax\alpha(1) = 0.$$

Então $a \in \ker(\varphi)$ se e somente se $ax\alpha(1) = 0$ para cada $x \in A$. Tome $x \in \alpha(A)$, $x = \alpha(1)y\alpha(1)$. Então para cada $a \in \ker(\varphi)$ vale que $ax = ax\alpha(1) = 0$. Da mesma forma, como $a^* \in \ker(\varphi)$ se $a \in \ker(\varphi)$, segue que $a^*x^* = 0$. Portanto $ax = 0 = xa$ para cada $a \in \ker(\varphi)$, ou seja, $x \in \ker(\varphi)^{\perp}$. Desta forma $\alpha(A) \subseteq \ker(\varphi)^{\perp}$ e como $\ker(\varphi)^{\perp}$ é ideal, segue a afirmação.

Isto mostra que $\varphi^{-1}(K(M)) \cap \langle \alpha(A) \rangle \subseteq \varphi^{-1}(K(M)) \cap \ker(\varphi)^{\perp}$.

Afirmação 2: $\varphi|_{\varphi^{-1}(K(M)) \cap \langle \alpha(A) \rangle}$ *é um isomorfismo sobre* $K(M)$

Desenvolvendo $L((a - a\alpha(1))^*(a - a\alpha(1))$ vemos que $\widetilde{a} = \widetilde{a\alpha(1)}$. Então

$$\widetilde{a} \otimes \widetilde{b}(\widetilde{c}) = \widetilde{a}\langle \widetilde{b}, \widetilde{c}\rangle = (a\alpha(L(b^*c)))\widetilde{\ } = (a\alpha(1)b^*c\alpha(1))\widetilde{\ } =$$

$$= a\alpha(1)b^*\widetilde{c\alpha(1)} = \varphi(a\alpha(1)b^*)(\widetilde{c\alpha(1)}) = \varphi(a\alpha(1)b^*)(\widetilde{c}).$$

Isto mostra que $\varphi(a\alpha(1)b^*) = \widetilde{a} \otimes \widetilde{b}$. Como $a\alpha(1)b^* \in \varphi^{-1}(K(M)) \cap \langle\alpha(A)\rangle$ segue que $\varphi|_{\varphi^{-1}(K(M))\cap\langle\alpha(A)\rangle}$ é sobrejetora. Como $\varphi|_{\ker(\varphi)^\perp}$ é injetora segue que $\varphi|_{\varphi^{-1}(K(M))\cap\langle\alpha(A)\rangle}$ também é injetora, pois

$$\varphi^{-1}(K(M)) \cap \langle\alpha(A)\rangle \subseteq \ker(\varphi)^\perp,$$

pela afirmação 1, provando a afirmação.

Dado $x \in \ker(\varphi)^\perp \cap \varphi^{-1}(K(M))$ temos que $\varphi(x) \in K(M)$ e pela afirmação acima, $\varphi(x) = \varphi(y)$ para algum $y \in \varphi^{-1}(K(M)) \cap \langle\alpha(A)\rangle$. Como $\varphi|_{\ker(\varphi)^\perp}$ é injetora segue que $x = y$, donde $x \in \varphi^{-1}(K(M)) \cap \langle\alpha(A)\rangle$. Portanto

$$\ker(\varphi)^\perp \cap \varphi^{-1}(K(M)) \subseteq \varphi^{-1}(K(M)) \cap \langle\alpha(A)\rangle.$$

Isto prova a proposição.

$\square$

Bibliography

[1] J. Cuntz, *The internal structure of simple C^*-algebras*, Operator algebras and applications, Proc. Symp. Pure Math. **38** (1982), 85-115.

[2] K. R. Davidson, *C^*-Algebras by Example*, Fields Institute Monographs, (1996).

[3] R. Exel and M. Laca, *Cuntz-Krieger Algebras for Infinite Matrices*, J. reine angew. Math. **521** (1999), 119-172.

[4] R. Exel, *A New Look at The Crossed-Product of a C^*-algebra by an Endomorphism*, Ergodic Theory Dynam. Systems, to appear.

[5] R. Exel, *Circle actions on C^*-algebras, partial automorphisms and a generalized Pimsner-Voiculescu exact sequence*, J. Funct. Anal. **122**, (1994), 361-401.

[6] R. Exel and A. Vershik, *C^*-algebras of Irreversible Dynamical Systems*, http://www.arxiv.org/abs/math.OA/0203185

[7] T. Katsura, *A construction of C^*-algebras from C^*-correspondences*, Advances in Quantum Dynamics, 173-182, Contemp. Math, 335, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (2003).

[8] K. McClanahan, *K-theory for partial actions by discrete groups*, J. Funct. Anal. **130**, (1995), 77-117.

[9] P. S. Muhly, B. Solel, *Tensor algebras over C^*-correspondences: representations, dilations, and C^*-envelopes*, J. Funct. Anal. **158**, (1998), 389-457.

[10] G. J. Murphy *Crossed products of C^*-algebras by endomorphisms*, Integral Equations Oper. Theory **24**, (1996), 298-319.

[11] G. K. Pedersen, *C^*-algebras and Their Automorphism Groups*, Academic Press, (1979).

[12] M. V. Pimsner, *A class of C^*-Algebras generalizing both Cuntz-Krieger Algebras and crossed products by $\mathbb{Z}$*, In Free probability theory (Waterloo, ON, 1995), volume 12 of Fields Inst. Commun., pages 189-212. Amer. Math. Soc., Providence, RI, (1997).

[13] P. J. Stacey, *Crossed products of C^*-algebras by *-endomorphisms*, J. Aust. Math. Soc., Ser A **54** (1993), 204-212.