

Equações Diferenciais Parciais de tipo Elíptico em Domínios não Suaves

Helder Candido Rodrigues

Prof. Dr. Djairo Guedes de Figueiredo
Orientador

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do título de DOUTOR em MATEMÁTICA.

Campinas
1997

Equações Diferenciais Parciais de tipo Elíptico em Domínios não Suaves

Este exemplar corresponde a redação final da tese devidamente corrigida e defendida pelo Sr. Helder Candido Rodrigues e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 06 de Novembro de 1997



Prof. Dr. Djairo Guedes de Figueiredo
Orientador

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do título de DOUTOR em MATEMÁTICA.

N. CHAMADA: 17/11/1998
V. _____ Ex. _____
TOMBO BC/ 32592
PROC. 395/98
C D
PREÇO R\$ 11,00
DATA 16/10/98
N.º CPD _____

CM-00104558-B

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Rodrigues, Helder Candido

R618e Equações diferenciais parciais de tipo elíptico em domínios não
suaves / Helder Candido Rodrigues -- Campinas, [S.P. :s.n.], 1997.

Orientador : Djairo Guedes de Figueiredo

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas,
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Equações diferenciais elípticas. 2. Problemas de condições de
contorno. 3. Simetria. I. Figueiredo, Djairo Guedes de. II.
Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática,
Estatística e Computação Científica. III. Título.

Tese de Doutorado defendida e aprovada em 06 de novembro de 1997

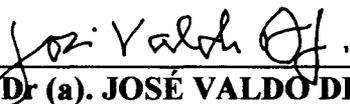
Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof (a). Dr (a). DJAIRO GUEDES DE FIGUEIREDO



Prof (a). Dr (a). BERNHARD HEINRICH RUF



Prof (a). Dr (a). JOSÉ VALDO DE ABREU GONÇALVES



Prof (a). Dr (a). ORLANDO FRANCISCO LOPES



Prof (a). Dr (a). FRANCESCO MERCURI

AGRADECIMENTOS

Direta ou indiretamente, várias pessoas contribuíram para a elaboração desta Tese.

Em primeiro lugar, agradeço ao meu orientador prof. Djairo, que incentivou minha ida para Campinas e, com sua enorme cultura, muito me auxiliou no decorrer deste trabalho. E também aos demais membros da banca examinadora, os professores Orlando, Franco, José Valdo e Bernhard Ruf.

E ainda ao prof. Elves e a meus colegas Daniel, João Marcos, Jesus, Marcelo, Marcos, Sérgio, Carlos Alberto, com os quais tive várias conversas sobre Equações Elípticas.

Além desses, aos amigos encontrados: Rosane, João Carlos, Helvécio, Maurílio, Adonai, Ryuichi, Márcia, Edson, Daniel, Janete, Cláudio, Osmar, João, Cláudia, e tantos outros, que tornaram mais feliz minha estadia nesta terra estranha, que é Campinas.

Também aos colegas do Departamento de Matemática da UFMG, pelo apoio recebido nestes longos anos de Doutorado, em particular a Marília, Grey, Paulo Antônio e Hamilton, sendo que este muito me ajudou na redação desta Tese.

A todos o meu muito obrigado.

J. Plücker orientou F. Klein, que orientou C. Lindemann, que orientou D. Hilbert. De tal modo que, de Plücker até Hilbert foram três orientações.

D. Hilbert orientou E. Schmidt, que orientou E. Hopf, que orientou J. Stoker. De tal modo que, de Hilbert até a 2a. guerra mundial foram três orientações.

J. Stoker orientou L. Nirenberg, que orientou D. Figueiredo que orientou H. Rodrigues. De tal modo que da 2a. guerra mundial até Rodrigues foram três orientações.

Conteúdo

1	Introdução	3
2	Um breve histórico	8
2.1	O Problema de Yamabe	8
2.2	O Problema de Dirichlet	9
2.3	O Problema de Neumann	11
2.4	Propriedades das soluções	13
2.5	Soluções simétricas	15
2.6	Algumas generalizações	16
3	Minimização de funcionais	19
3.1	Introdução	19
3.2	Alguns resultados preliminares	23
3.3	Condições para a existência de mínimos	27
3.4	Calculando $K(\Omega)$	32
3.5	Estimativa de S_λ	44
4	Simetria de soluções minimizantes	65
4.1	Introdução	65
4.2	Soluções simétricas em relação a um $(n - 1)$ -plano	66
4.3	Soluções simétricas em relação a um $(n - 2)$ -plano	71

Resumo

Neste trabalho, estudamos a equação $-\Delta u + \lambda u = u^p$ em Ω , em que $1 \leq p \leq \frac{n+2}{n-2}$, Ω é um domínio aberto em \mathbb{R}^n , com $n \geq 3$. Damos atenção especial ao problema com condição de Neumann na fronteira em domínios lipschitzianos no caso crítico, ou seja, $p = \frac{n+2}{n-2}$. O resultado principal diz respeito à existência de soluções fracas em domínios que satisfazem determinadas condições bastante gerais. Em particular, resolvemos o problema de Neumann na semibola. Na segunda parte do trabalho, estudamos domínios simétricos e encontramos soluções positivas que preservam a simetria do domínio. Também analisamos quando as soluções minimizantes preservam parte da simetria do domínio.

Abstract

In this work, we study the equation $-\Delta u + \lambda u = u^p$ em Ω , where $1 \leq p \leq \frac{n+2}{n-2}$, Ω is an open domain in \mathbb{R}^n , with $n \geq 3$. We give special attention to the critical problem, that is, $p = \frac{n+2}{n-2}$, with Neumann boundary condition in Lipschitzian domains. The main result is on the existence of weak solutions in domains that satisfy some fairly general conditions. In particular, we solve the problem in a semiball. In the second part of the work, we study symmetric domains and find positive solutions that preserve the symmetry of the domain. We investigate, also, if the minimizing solutions preserve some of the symmetry of the domain.

1 Introdução

Neste trabalho, estudamos o problema

$$(P_\lambda) \quad \begin{cases} -\Delta u + \lambda u = u^p & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{em } \Gamma_1 \\ u = 0 & \text{em } \Gamma_0 \\ u > 0 & \text{em } \Omega \end{cases}$$

em que $1 \leq p \leq \frac{n+2}{n-2}$, Ω é um domínio aberto em \mathbb{R}^n , com $n \geq 3$, Γ_0 e Γ_1 são subconjuntos abertos e disjuntos de $\partial\Omega$, com fronteira comum γ .

No caso de condição de Dirichlet na fronteira ($\Gamma_0 = \partial\Omega$), este problema foi estudado por Brezis-Nirenberg [14]. Por outro lado, Adimurthi-Mancini [2] e Wang [52] consideraram (P_λ) para domínios com fronteira C^2 . No Capítulo 2, daremos um pequeno histórico deste problema.

Aqui, damos atenção especial ao caso crítico, $p = \frac{n+2}{n-2}$, e a domínios lipschitzianos, que em geral não têm maior regularidade. Procuramos soluções via mínimos do funcional

$$Q_\lambda(u) = \frac{\|\nabla u\|_2^2 + \lambda \|u\|_2^2}{\|u\|_{p+1}^2}.$$

Para estabelecermos os resultados principais, precisamos de algumas definições.

Definição 1 Seja P um ponto em $\partial\Omega$, de modo que a fronteira numa vizinhança de P é lipschitziana. Uma **carta diferenciável** em P é um difeomorfismo de $B_\rho(P)$ em \mathbb{R}^n

$$\Lambda : B_\rho(P) \cap \Omega \rightarrow C_P,$$

em que C_P é um cone em \mathbb{R}^n (isto é um domínio invariante por homotetia não necessariamente convexo), que leva P em 0, $B_\rho(P) \cap \Omega$ em C_P , e $B_\rho(P) \cap \partial\Omega$ em ∂C_P , e tal que a matriz jacobiana de Λ em P é a identidade.

Definição 2 Dizemos que Ω satisfaz **Hipótese D** se, para cada ponto P em Γ_1 , tivermos uma carta diferenciável Λ como acima.

Definimos funções $C(x')$ e $\Psi(x')$ de \mathbb{R}^{n-1} em \mathbb{R} , com

$$x = (x', x_n) \in C_P \Leftrightarrow x_n > C(x')$$

e

$$x \in \Omega \Leftrightarrow x_n > C(x') + \Psi(x').$$

Como $\Lambda(x)$ é uma carta diferenciável, vemos que $\Psi(x')$ é uma função C^1 .

Definimos as seguintes funções (em que $y = (r, \theta) \in \mathbb{R}^{n-1}$ e $u_0 \in \mathbb{R}^{n-1}$ é uma direção qualquer, em que Ψ apresenta maior crescimento):

$$\begin{aligned} \Psi_1(y) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\Psi(\sqrt{\epsilon}y)}{\Psi(\sqrt{\epsilon}u_0)} \\ \tilde{\Psi}_1(r) &= \int_{S^{n-2}(r)} \frac{\Psi_1\left(\frac{r}{(1+C(1,\theta)^2)^{1/2}}, \theta\right)}{(1+C(1,\theta)^2)^{1/2}} d\theta. \end{aligned}$$

Definição 3 Um ponto $P \in \partial\Omega$ tem **curvatura média generalizada positiva**, se

$$\int_0^\infty \tilde{\Psi}_1(r) \frac{r^{n-2}}{(1+r^2)^n} dr > 0,$$

e

$$\frac{\int_0^\infty \tilde{\Psi}_1(r) \frac{r^n}{(1+r^2)^n} dr}{\int_0^\infty \tilde{\Psi}_1(r) \frac{r^{n-2}}{(1+r^2)^n} dr} > 1.$$

Na próxima definição, utilizamos a notação

$$\text{ord}(\Psi(x)) = f(t), \text{ onde } f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Ela significa que $C_1 f(t) < \Psi(tu_0) < C_2 f(t)$, para determinadas constantes C_1 e C_2 , e qualquer t suficientemente pequeno. Isto significa que

$$|\Psi(x)| = O(f(|x|)), \text{ mas } |\Psi(x)| \neq o(f(|x|)).$$

Diremos que

$$f_1(t) = \text{ord}(\Psi(x)) > \text{ord}(\Phi(x)) = f_2(t),$$

se $f_2(t) = o(f_1(t))$, ou seja $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_2(t)}{f_1(t)} = 0$.

Definição 4 Um ponto P tem **aproximação crítica**, se

$$\begin{aligned} \text{ord}(\Psi) &= t^3, & \text{para } n > 4, \\ \text{ord}(\Psi) &= t^3 |\log(t)|, & \text{para } n = 4, \\ \text{ord}(\Psi) &= t^2, & \text{para } n = 3. \end{aligned}$$

Definição 5

$$\Theta_P := \int_{S^1(0) \cap C_P} dS, \text{ para } P \in \Gamma_1,$$

$$\Theta_P := \omega_n, \text{ para } P \in \bar{\Omega} \setminus \Gamma_1,$$

$$\Theta_\Omega := \inf_{P \in \bar{\Omega}} \Theta_P,$$

em que ω_n é a área da esfera de raio 1 em dimensão n .

Não encontrei tais definições na literatura. A primeira estende a noção de variedades diferenciáveis, com o custo de considerarmos cones no lugar de \mathbb{R}^n . É interessante notar que conseguimos resolver alguns problemas, mesmo trabalhando em condições tão desfavoráveis. A segunda definição é uma definição técnica e apenas define o tipo de domínio que iremos estudar. A terceira definição estende a noção de curvatura média para pontos em que a fronteira não é C^2 . Ela coincide com a definição usual quando a curvatura média é não nula. Isto é, se um ponto tem fronteira C^2 e curvatura média usual positiva, então este ponto também tem curvatura média generalizada positiva. No entanto, quando a curvatura média usual é nula, o ponto pode ter curvatura média generalizada positiva. Isto depende essencialmente do lado do plano tangente para o qual a fronteira se curva. Em geral, chamando C_P o cone tangente, se Ω estiver inteiramente contido num lado do cone tangente, o ponto tem curvatura média generalizada positiva.

A quarta definição é também uma definição técnica, mas me parece que seu uso no Teorema 1 abaixo é necessário. Isto é, se a aproximação for menor que a crítica, não haverá soluções minimizantes. A definição nos dá informação sobre o “tamanho” dos ângulos da fronteira de Ω . No teorema a seguir, a restrição é a existência de $P \in \partial\Omega$ tal que $\Theta_P = \Theta_\Omega$. Isto é trivialmente verdadeiro para os domínios mais comuns. Por um lado não me parece uma restrição forte, mas por outro lado, não me parece necessária. Entretanto, sem esta condição, surgem muitos problemas técnicos, que não consegui superar. Chamaremos de λ_1 , o primeiro autovalor do problema linear correspondente.

O Teorema principal é enunciado a seguir. A constante $K(\Omega)$ será definida logo depois.

Teorema 1 *Seja Ω um domínio aberto e limitado de \mathbb{R}^n com fronteira $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \gamma$, satisfazendo a hipótese D , com C_P um cone convexo para cada ponto de $\Gamma_1 \cup \gamma$. Suponhamos que exista um ponto $P \in \Gamma_1$ tal que $\Theta_P = \Theta_\Omega$ e com curvatura média generalizada positiva e aproximação maior que a crítica. Então, para $\lambda > \lambda_1$, o problema (P_λ) tem uma solução fraca u_λ , que minimiza o funcional Q_λ . Temos ainda que $Q_\lambda(u_\lambda) < \frac{1}{K(\Omega)} = \frac{S}{(\omega_n/\Theta_\Omega)^{2/n}}$.*

A principal novidade deste teorema é relaxar as hipóteses de regularidade sobre os pontos da fronteira em que temos a condição de Neumann. Como exemplo que será usado na sequência, citamos a semibola, ou mais geralmente a metade de um domínio simétrico.

No decorrer do trabalho, obtemos uma generalização da desigualdade de Cherrier, a saber:

Existe uma constante $K(\Omega)$, tal que para qualquer $\epsilon > 0$, existe $B(\epsilon)$, tal que

$$\|v\|_{\frac{2n}{n-2}}^2 \leq (K(\Omega) + \epsilon) \|\nabla v\|_2^2 + B(\epsilon) \|v\|_2^2,$$

para qualquer v em $H^1(\Omega)$.

Cherrier [17] provou a desigualdade acima para domínios C^1 , e obteve o valor de $K(\Omega)$ para estes domínios como sendo

$$K(\Omega) = \frac{2^{2/n}}{S},$$

em que S é a melhor constante de Sobolev.

Aqui, provamos esta desigualdade para a classe mais geral de domínios lipschitzianos. Também damos valores de $K(\Omega)$ para uma ampla classe de domínios.

Na segunda parte do trabalho supomos tanto o domínio quanto os subconjuntos nos quais a fronteira é dividida, simétricos com respeito a um plano e examinamos a simetria das soluções minimizantes. Provamos o seguinte resultado, onde denominamos j -plano, um hiperplano de dimensão j :

Teorema 2 *Se Ω , Γ_0 e Γ_1 são simétricos em relação a um j -plano, então as soluções minimizantes tem um $(j + 1)$ -plano de simetria. Existem soluções simétricas em relação ao j -plano, as quais não são necessariamente soluções minimizantes.*

Também construiremos soluções não minimizantes em domínios com simetria em relação a todos os $(n - 1)$ -planos coordenados, e soluções que trocam de sinal para o problema

$$(\tilde{P}_\lambda) \quad \begin{cases} -\Delta u + \lambda u = |u|^{\frac{4}{n-2}} u & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

2 Um breve histórico

2.1 O Problema de Yamabe

Neste capítulo, usaremos a notação $p^* = \frac{n+2}{n-2}$, notando que $p^* + 1$ é o maior valor de p , para o qual existe a imersão $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, se a fronteira de Ω é lipschitziana.

O primeiro trabalho, que trata de um problema com expoente crítico, usando métodos similares aos utilizados no Capítulo 3, é relacionado ao Problema de Yamabe. Em 1959, Yamabe estudou o problema de deformar continuamente uma variedade riemanniana n -dimensional M , cuja curvatura escalar é $R(x)$, a outra de curvatura escalar constante \bar{R} . A equação relacionada a este problema é

$$-\bar{R}u^{p^*} = -Ru + \frac{4(n-1)}{n-2} \Delta u, \quad (1)$$

onde Δ é o operador de Laplace-Beltrami.

No artigo [56], Yamabe apresentou uma demonstração da existência de soluções do problema para qualquer variedade compacta, conseguindo essas soluções através de limites de soluções de equações do tipo (1), mas com um expoente menor que p^* no primeiro termo. Entretanto, Trudinger [51], em 1968, encontrou uma incorreção na demonstração, originada da perda de compacidade do funcional associado à equação. Tal incorreção não é facilmente contornável. Trudinger mostrou que a existência de soluções para a equação (1) era equivalente a

$$\lambda(M) < \alpha,$$

onde α é uma constante positiva e λ é o ínfimo do seguinte funcional sobre todas as métricas conformes à métrica de M :

$$\lambda(M) = \inf_{\bar{\mu}} \left\{ \frac{\int_M \bar{R} d\bar{\mu}}{(\int_M d\bar{\mu})^{2/p}} \right\}.$$

Deste modo, encontrou soluções de (1) no caso em que $\lambda(M) \leq 0$, em particular no caso de M ter curvatura escalar média não positiva ($\int_M R d\mu \leq 0$).

Nesse mesmo artigo, ele demonstrou que as soluções de uma equação da forma (1) pertencem a $C^\infty(M)$.

Aubin [9], em 1976, mostrou que

$$\alpha = \lambda(S^n),$$

e analisando métricas da forma $\bar{g} = \phi g$, com suporte de ϕ em torno de um ponto P , demonstrou a existência de soluções de (1), quando a dimensão de M é maior que 5 e a variedade M não é localmente conformalmente plana.

Finalmente, em 1984, Schoen [47] completou a demonstração, obtendo soluções de (1) quando a dimensão de M é menor que 6 ou a variedade M é localmente conformalmente plana. Para uma visão mais detalhada do Problema de Yamabe, além das obras citadas, recomendamos o artigo de Lee-Parker [29] ou o livro de Aubin [10], sendo que este não trata da parte feita por Schoen.

2.2 O Problema de Dirichlet

A utilização dos métodos aplicados no Problema de Yamabe, começaram a ser usados para problemas mais gerais pelo problema de Dirichlet.

Primeiramente uma questão de notação que nos acompanhará neste histórico. Quando se trata do problema de Dirichlet, normalmente se usa a equação $-\Delta u - \lambda u = u^p$. A notação que eu usei é a usada para o problema de Neumann: $-\Delta u + \lambda u = u^p$ (não consegui descobrir a razão). Como, neste trabalho, vou tratar principalmente do Problema de Neumann ou misto, resolvi manter a notação também nesta seção. Isso acarretará uma mudança de sinal, com relação às referências, em todos os resultados apresentados.

Pohožaev [43], em 1965, demonstrou que o problema

$$(D_\lambda) \quad \begin{cases} -\Delta u + \lambda u = u^{p^*} & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \Omega \end{cases}$$

não possui soluções positivas para $\lambda \geq 0$ e Ω estritamente estrelado. Já era sabido que o valor p^* era crítico com relação ao método variacional em espaços de Sobolev, mas este resultado mostrava que p^* era um expoente crítico independente do método utilizado. É fácil mostrar que o problema também não possui soluções positivas para $\lambda < \lambda_1$, onde λ_1 é o primeiro

autovalor do problema (pela mesma questão de notação mencionada acima, notar que $\dots \leq \lambda_2 < \lambda_1 < 0$)

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u = 0 & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

Este resultado desestimulou pesquisas no problema com o expoente crítico, até 1983, quando Brezis-Nirenberg [14], utilizando métodos similares aos usados na resolução do problema de Yamabe, demonstraram que o problema tinha soluções positivas quando $\lambda_1 < \lambda < 0$, para $n > 3$. Isso se segue do fato por eles mostrado que existem soluções positivas quando o ínfimo do seguinte funcional é menor que uma determinada constante positiva:

$$Q_\lambda(u) = \frac{\|\nabla u\|_2^2 + \|u\|_2^2}{\|u\|_{p^*+1}^{p^*+1}}.$$

As soluções que minimizam o funcional Q_λ são chamadas soluções minimizantes. Definindo

$$S_\lambda(\Omega) := \inf_{u \in H_0^1(\Omega)} Q_\lambda(u),$$

(D_λ) possui solução quando

$$S_\lambda(\Omega) < S_\lambda(\mathbb{R}^n) = S,$$

onde S é a melhor constante para a imersão de Sobolev. Analisando funções concentradas em pontos interiores a Ω , eles mostraram que isto acontece para $\lambda_1 < \lambda < 0$, se $n > 3$, e para $\lambda_1 < \lambda < \lambda^*$, se $n = 3$, onde λ^* é negativo. Eles encontraram o valor de λ^* para $\Omega = B_n(r)$, uma bola de raio r , e neste caso $\lambda^* = \lambda_1/4$. Um refinamento destas idéias levou Lions [31] [32], em 1984, a desenvolver o método de concentração-compacidade.

Brezis-Nirenberg também provaram que o funcional em $H_0^1(\Omega)$

$$F_\lambda(u) = \frac{1}{2} \|\nabla u\|_2^2 + \frac{1}{2} \lambda \|u\|_2^2 - \frac{1}{p^*+1} \|u\|_{p^*+1}^{p^*+1}$$

satisfaz a condição de Palais-Smale $(PS)_c$, se $c < \frac{S^{n/2}}{n}$. Utilizando o teorema do passo da montanha, puderam também encontrar soluções de (D_λ) . É

fácil mostrar que as soluções achadas nos dois casos são as mesmas, mas este segundo método pode ser generalizado para um segundo membro do tipo $f(x, u)$ no lugar de u^{p^*} .

Posteriormente, em 1984, Struwe [48] demonstrou que os valores c , em que a condição de Palais-Smale $(PS)_c$ não é válida para o funcional $F_\lambda(u)$ em $H_0^1(\Omega)$, são

$$c = c_0 + k \frac{S^{n/2}}{n}, k \in \mathbb{N},$$

onde $c_0 = F_\lambda(u_\lambda)$ com u_λ solução de (D_λ) .

Um outro tipo de resultado foi obtido por Bahri-Coron [11], que, em 1988, obtiveram soluções positivas de (D_λ) com $\lambda = 0$ em domínios com topologia não trivial. Um problema ainda não respondido satisfatoriamente é o de determinar para quais domínios, o problema (D_λ) com $\lambda = 0$ possui uma solução positiva.

2.3 O Problema de Neumann

Em 1991, Adimurthi-Mancini [2] e Wang [52], independentemente, obtiveram soluções positivas do problema de Neumann em domínios C^2 , onde $\lambda > 0$

$$(N_\lambda) \quad \begin{cases} -\Delta u + \lambda u = u^{p^*} & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

Neste caso, vemos facilmente que $u = \lambda^{\frac{1}{p^*-1}}$ é solução, e portanto devemos procurar por soluções não constantes.

Por um lado, Adimurthi-Mancini procuraram por mínimos do funcional em $H^1(\Omega)$

$$Q_\lambda(u) = \frac{\|\nabla u\|_2^2 + \|u\|_2^2}{\|u\|_{p^*+1}^{p^*+1}}$$

e mostraram que existia $u \in H^1(\Omega)$ tal que

$$Q_\lambda(u) < \frac{S}{2^{2/n}}.$$

Já havia sido mostrado por Adimurthi-Yadava [6], em 1990, com um método similar ao utilizado por Brezis-Nirenberg, que, se

$$\inf_{u \in H^1(\Omega)} Q_\lambda(u) < \frac{S}{2^{2/n}},$$

então o ínfimo era atingido e existiam soluções positivas, talvez constantes, de (N_λ) . Um ponto essencial nesta demonstração é a desigualdade de Cherrier [17], provada em 1984:

Seja Ω um domínio C^1 e $u \in H^1(\Omega)$. Então $\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+$, $\exists B(\epsilon)$, tal que

$$\|u\|_{\frac{2n}{n-2}}^2 \leq \left(\frac{S}{2^{2/n}} + \epsilon \right) \|\nabla u\|_2^2 + B(\epsilon) \|u\|_2^2.$$

Por outro lado, Wang, também usando um método similar ao usado por Brezis-Nirenberg, mostrou que o funcional em $H^1(\Omega)$

$$F_\lambda(u) = \frac{1}{2} \|\nabla u\|_2^2 + \frac{1}{2} \lambda \|u\|_2^2 - \frac{1}{p^* + 1} \|u\|_{p^*+1}^{p^*+1}$$

satisfaz a condição de Palais-Smale $(PS)_c$, se $c < \frac{S^{n/2}}{2^n}$. Utilizando o teorema do passo da montanha, também encontrou soluções positivas de (N_λ) . Como no caso do problema de Dirichlet, as soluções encontradas são as mesmas nos dois métodos.

Analisando o valor do respectivo funcional, ambos mostraram, para λ suficientemente grande, que estas soluções não são constantes.

Com respeito a existência de soluções não constantes para λ positivo e suficientemente pequeno, temos dois resultados de natureza oposta. Por um lado, Adimurthi-Yadava [7] e Budd-Knaap-Peletier [15] mostraram que o problema (N_λ) para a bola, com $n = 3, 4, 5$ e 6 , admite soluções radiais não constantes. Isto não era esperado, pois Lin-Ni-Takagi [30] haviam mostrado, para o caso subcrítico, que não havia soluções não constantes, quando λ é pequeno.

Por outro lado, Adimurthi-Yadava [8] mostraram que as soluções minimizantes são constantes para λ pequeno.

Em 1990, Grossi-Pacella [27] demonstraram que os valores c , em que a condição de Palais-Smale $(PS)_c$ não é válida para o funcional $F_\lambda(u)$ em $H^1(\Omega)$, são

$$c = c_0 + k \frac{S^{n/2}}{2n}, k \in \mathbb{N},$$

onde $c_0 = F_\lambda(u_\lambda)$ com u_λ solução de (N_λ) .

Com respeito ao problema misto (supomos $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$)

$$(M_\lambda) \quad \begin{cases} -\Delta u + \lambda u = u^{p^*} & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \Gamma_0 \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{em } \Gamma_1 \end{cases}$$

temos que o resultado de Adimurthi-Mancini pode ser estendido ao caso em que Γ_0 e Γ_1 formam uma separação de $\partial\Omega$, ou seja, ambos são fechados em $\partial\Omega$. Neste caso, procuramos mínimos do funcional Q_λ em

$$V = \{u \in H^1(\Omega); u = 0 \text{ em } \Gamma_0\}.$$

Em 1988, Lions-Pacella-Tricarico [33] provaram que, em um domínio com um número finito de “ângulos convexos”, existem soluções de (M_λ) , se

$$S_\lambda := \inf_{u \in V} Q_\lambda(u) < \tilde{S},$$

onde \tilde{S} é uma constante que depende da constante isoperimétrica de Ω relativo a Γ_1 .

Com respeito a soluções u , tais que $Q_\lambda(u) < \frac{S}{2^{2/n}}$, Grossi [26] provou, em 1995, a existência, em domínios estritamente convexos, de soluções que satisfazem

$$\frac{S}{2^{2/n}} < Q_\lambda(u) < \left(\frac{S^{n/2}}{2} + S_\lambda \right)^{2/n}.$$

Wang [54] também encontrou soluções deste tipo, mas em domínios pares.

2.4 Propriedades das soluções

Ni-Takagi [36], em 1991, observaram que as soluções do problema de Neumann subcrítico se concentram em determinados pontos, se fizermos λ tender a infinito. Mais exatamente as soluções minimizantes u_λ de

$$(N_\lambda) \quad \begin{cases} -\Delta u + \lambda u = u^p & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

com $1 < p < p^*$ e λ suficientemente grandes, possuem apenas um ponto de máximo x_λ , que pertence à fronteira do domínio. Além disso, a solução u_λ , com λ tendendo a infinito, fica arbitrariamente pequena fora de um bola de raio δ em torno de x_λ . Em 1993, eles [37] demonstraram que estes máximos se acumulam, quando λ tende a infinito, em pontos de curvatura média máxima.

Em 1993, Adimurthi-Pacella-Yadava [4] demonstraram resultados análogos para o problema crítico. De fato, demonstraram que, se $n \geq 7$, as soluções u_λ de N_λ , com

$$Q_\lambda(u_\lambda) < \frac{S}{2^{2/n}},$$

possuem apenas um ponto de máximo, para λ grande. Este tipo de solução é chamada de solução de energia baixa. No caso de soluções minimizantes, estes pontos se acumulam em pontos de curvatura média máxima, quando λ tende a infinito. Também encontraram, para qualquer ponto $x_0 \in \partial\Omega$ com curvatura média máxima, soluções minimizantes u_λ , cujos máximos se acumulam em x_0 . Para $n = 5$ e 6 , Wang [53] provou o mesmo resultado. E Pan-Xu [41], em 1996, provaram para $n = 4$.

Adimurthi-Pacella-Yadava [5], em 1995, generalizando o caso anterior, mostraram que os pontos de acumulação de máximos de soluções de energia baixa de (N_λ) estão entre os pontos críticos da função curvatura média. A recíproca foi mostrada ainda em 1995 por Adimurthi-Mancini-Yadava [3]. Eles provaram que, se $x_0 \in \partial\Omega$ é um ponto crítico da função curvatura média, e tem curvatura média positiva, então existem soluções de baixa energia de (N_λ) , cujos máximos se acumulam em x_0 , quando λ tende a infinito.

Outra propriedade, encontrada em 1989 independentemente por Han [28] e Rey [45] [46], é o comportamento assintótico das soluções minimizantes de (D_λ) , para $n \geq 4$, quando λ tende a 0. Eles provaram que

$$u_\epsilon \rightarrow 0 \quad \text{em } C^1(\Omega \setminus x_0),$$

$$|\nabla u_\epsilon|^2 \rightarrow k\delta_{x_0} \quad \text{no sentido de distribuições,} \quad (2)$$

onde x_0 é um ponto crítico da função $\phi(x) = g(x, x)$, e $g(x, y)$ é a parte regular da função de Green correspondente. Ni-Wei [38] provaram um resultado semelhante, mas, em seu artigo, x_0 é um máximo da função distância ao bordo $d(\cdot, \partial\Omega)$. Esta relação entre os pontos críticos da função de Green e da função distância é, em si, um resultado interessante. Rey [46], em 1990, demonstrou que, para cada x_0 , ponto crítico de $\phi(x)$, temos uma sequência de soluções u_λ , que satisfazem 2, para $n \geq 5$. Para o problema de Neumann, o comportamento assintótico das soluções minimizantes, quando λ tende a infinito, foi estudado em [5] e [3].

2.5 Soluções simétricas

Uma linha de pesquisa é a busca de propriedades de simetria de todas ou de parte das soluções, quando se trabalha em domínios com alguma forma de simetria. Em 1979, Gidas-Ni-Nirenberg [25] mostraram que as soluções do problema

$$(F) \quad \begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \Omega \end{cases}$$

são simétricas em relação a um plano, desde que Ω seja simétrico em relação ao mesmo plano, e convexo nas direções ortogonais ao plano. Além da simetria, eles provaram que as soluções são decrescentes ao se afastarem do plano. Em particular, numa bola, as soluções são radiais. Para isso eles utilizaram o método do plano móvel (“moving planes”).

Para o problema de Neumann, foi provado que há ruptura de simetria (“symmetry breaking”), ou seja, existem funções $f(u)$ tal que as soluções do problema de Neumann análogo a (F) não são simétricas.

Em 1991, Ni-Takagi [36], usando propriedades de simetrização, provaram que, quando Ω é uma bola ou um anel, as soluções minimizantes u_λ do problema subcrítico, onde $O(f(u)) < u^p$

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u = f(u) & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

são axialmente simétricas com relação a uma reta que passa pelo ponto de máximo P da solução. Mais ainda, u_λ é decrescente na direção θ a partir de P . Eles exigiram que a função $f(u)$ fosse analítica.

Em 1996, Lopes [34] demonstrou que as funções que minimizam funcionais invariantes por rotação, em um domínio Ω , que seja uma bola ou um anel, são axialmente simétricas. Seu método, que utiliza o princípio da continuação única, evita os problemas de convexidade do domínio e de analiticidade das funções envolvidas. No seu caso, a não-linearidade f também pode depender de x . Além disso, seu método se aplica a sistemas de equações.

Outra linha de pesquisa é a busca de soluções simétricas, quando se trabalha em domínios com alguma forma de simetria. Wang [54] e [55] encontrou soluções simétricas para o problema (N_λ) , supondo que o domínio Ω fosse invariante por um grupo cíclico de isometrias de \mathbb{R}^n e algumas condições técnicas. Em especial em domínios pares, como já citado. Ele utiliza o Princípio da criticalidade simétrica de Palais [39].

Comte e Knaap [20] e [21] encontraram soluções simétricas com relação a um plano, para o problema a seguir, onde Ω é um domínio simétrico com relação ao mesmo plano,

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u = |u|^{p^*-1}u & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Estas soluções não possuem sinal definido em Ω . Em particular, elas acharam uma infinidade de soluções na bola B^n , cada uma com i regiões nodais, $i = 1, 2, \dots$, ou seja, regiões conexas maximais onde a solução possui um sinal definido. Em domínios não simétricos, Comte e Tarantello [22] também encontraram soluções que trocam de sinal.

2.6 Algumas generalizações

Os problemas anteriores foram generalizados em várias direções. A primeira, já citada, foi permitir não linearidades mais gerais, por exemplo,

$$-\Delta u + \lambda u = u^{p^*-1} + f(x, u),$$

com $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x, u)}{u^{p^*-1}} = 0$. Isto foi estudado por Brezis-Nirenberg, no caso do problema de Dirichlet, e por Wang, no caso do problema de Neumann.

Outra possibilidade é considerar condições mais gerais na fronteira. Por exemplo, Pan estudou o problema

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u = u^{p^*-1} & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + tH(x)u = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

onde $H(x)$ é a curvatura média de $x \in \partial\Omega$. Ele mostrou que o parâmetro t tem um valor crítico para $t = (n-2)/2$. Existem soluções minimizantes do problema, se $t < (n-2)/2$, e elas se concentram em pontos de máxima curvatura média. Se $t > (n-2)/2$, só existem soluções minimizantes, se Ω possuir um ponto de curvatura média negativa, e essas soluções se concentram em pontos de curvatura média mínima. Ver [40] e referências aí contidas, para maiores detalhes.

Pode-se também estudar outros operadores, como o p -laplaciano $\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ ou o operador poliharmônico $(-\Delta)^K u$. Uma referência para $\Delta_p u$ é Peral [42] e para $(-\Delta)^K u$ é Pucci-Serrin [44]. Neste artigo, eles definem dimensão crítica como aquela em que não existem soluções do problema para λ próximo de 0. Como dito na Seção 2.2, este fenômeno ocorre em $n = 3$, se o operador é o laplaciano. Para outros operadores, isto ocorre em mais dimensões, como mostrado por eles para o operador poliharmônico, e por Clément-de Figueiredo-Mitidieri [19] para uma classe ampla de operadores.

No caso em que temos $n = 2$, não existe expoente crítico, pois a imersão $H^1 \hookrightarrow L^p$ existe para qualquer p . Mas através de uma desigualdade de Trudinger-Moser, pode-se definir uma noção de criticalidade também neste caso. Ver, por exemplo, de Figueiredo-Ruf [24].

Há ainda, a possibilidade de investigar sistemas de equações. Neste caso, o expoente crítico se transforma numa hipérbole crítica, como mostrado por Clément-de Figueiredo-Mitidieri [18].

Uma sequência interessante é o estudo do problema de Neumann, ou com outro tipo de condição na fronteira, para os operadores citados, particularmente em domínios não suaves. Não conheço trabalhos neste campo.

Quanto ao estudo de problemas em domínios com fronteira não C^1 , temos o trabalho de Marcus-Veron [35], que estudaram o problema

$$\begin{cases} -\Delta u + hu - ku^p = -f & \text{em } \Omega \\ u(x) \rightarrow \infty & \text{se } \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) \rightarrow 0, \end{cases}$$

onde h, k, f são funções contínuas em $\bar{\Omega}$. Eles encontraram este tipo de solução em domínios que satisfazem a propriedade do cone exterior.

3 Minimização de funcionais

3.1 Introdução

Seja Ω um aberto limitado de \mathbb{R}^n tal que

$$\begin{aligned}\partial\Omega &= \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \gamma, \\ \gamma = \partial\Gamma_0 &= \partial\Gamma_1, \\ \Gamma_0 \cap \Gamma_1 &= \emptyset,\end{aligned}$$

com Γ_0 e Γ_1 abertos em $\partial\Omega$. Seja

$$V = \{u \in H^1(\Omega); u \equiv 0 \text{ em } \Gamma_0\}$$

Temos que V é um espaço de Banach com a norma de $H^1(\Omega)$

$$\|u\|_V^2 = \|u\|_2^2 + \|\nabla u\|_2^2.$$

Vamos supor que $V \hookrightarrow L^{p+1}$. Sabemos que isto acontece para uma classe de expoentes p . O maior valor de p , para o qual esta imersão existe é chamado expoente crítico e será denotado neste trabalho por p^* . Os expoentes na faixa $1 < p < p^*$ são chamados subcríticos. Para estes expoentes, a imersão é compacta, como pode ser visto na demonstração dada por Adams [1], Lemma 6.6. Ele trabalha com domínios que satisfazem a propriedade do cone, mas a prova vale no caso de domínios com volume finito. Vamos trabalhar tanto na faixa subcrítica, como no expoente crítico. Para domínios lipschitzianos, isto implica $p \leq \frac{n+2}{n-2}$. Porém para domínios menos suaves, este valor é menor (por exemplo, Adams [1], na pag. 127, cita o domínio em \mathbb{R}^3 ,

$$\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 > 0, x_2^2 < x_1 < 3x_2^2\},$$

para o qual o expoente crítico é 4).

Vamos procurar mínimos, em V , do seguinte funcional, ao qual chamaremos de energia de u :

$$Q_\lambda(u) = \frac{\|\nabla u\|_2^2 + \lambda \|u\|_2^2}{\|u\|_{p+1}^2},$$

em que p é menor ou igual ao expoente crítico.

Como pode ser visto em de Figueiredo [23], este funcional, considerado em $H^1(\Omega)$, é bem definido e C^1 . Igualando sua derivada a zero, temos que um ponto crítico u deste funcional satisfaz, para qualquer $v \in V$, a equação de Euler-Lagrange

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + \lambda \int_{\Omega} uv = \mu \int_{\Omega} u^p v,$$

em que $\mu = Q_{\lambda}(u)$.

Se u tem energia positiva, após reescalonamento, ou seja, substituição de u por $[Q_{\lambda}(u)]^{1/(p-1)}u$, vemos que u é solução fraca do seguinte problema

$$(P_{\lambda}) \quad \begin{cases} -\Delta u + \lambda u = u^p & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{em } \Gamma_1 \\ u = 0 & \text{em } \Gamma_0 \\ u > 0 & \text{em } \Omega. \end{cases}$$

Denotamos

$$S_{\lambda} = \inf_{u \in V} Q_{\lambda} = \inf_{\substack{\|u\|_{p+1}=1 \\ u \in V}} \|\nabla u\|_2^2 + \lambda \|u\|_2^2.$$

e definimos

$$K(\Omega) = \inf \{ A \in \mathbb{R}^+ \mid \exists B = B(A); \forall u \in V \\ \|u\|_{p+1}^2 \leq A \|\nabla u\|_2^2 + B \|u\|_2^2 \} \quad (3)$$

Notamos que o conjunto sobre o qual o ínfimo é tomado não é vazio, pois a imersão $V \hookrightarrow L_{p+1}$ é contínua. Quando não causar ambiguidade, omitiremos Ω e escreveremos simplesmente K .

Vamos agora calcular o valor de $K(\Omega)$ em três situações, usando resultados já conhecidos:

(i) No caso em que a imersão é compacta, temos $K(\Omega) = 0$, pelo lema a seguir.

Lema 3.1.1 *Seja $X \hookrightarrow Y \hookrightarrow Z$ três espaços de Banach, com a primeira imersão compacta. Então, para qualquer ϵ , existe $C(\epsilon)$, tal que, para qualquer $u \in X$, temos*

$$\|u\|_Y < \epsilon \|u\|_X + C(\epsilon) \|u\|_Z.$$

Demonstração: Ver Aubin [10].

No nosso caso, temos $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ e para $1 < p < p^*$, a primeira imersão é compacta.

(ii) Quando estamos no caso em que $\Gamma_0 = \partial\Omega$ (problema de Dirichlet) e o expoente é crítico, $p = \frac{n+2}{n-2}$, então $K(\Omega) = \frac{1}{S}$, pela invariância da melhor constante de Sobolev:

Lema 3.1.2 *Seja Ω domínio de \mathbb{R}^n e $u \in H_0^1(\Omega)$. Então vale*

$$\|u\|_{\frac{2n}{n-2}}^2 \leq \frac{1}{S} \|u\|_2^2.$$

A desigualdade é estrita se $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ contém um aberto.

Demonstração: Ver Struwe [49].

(iii) Se estamos com um domínio com fronteira C^1 e $\Gamma_1 \neq \emptyset$, ainda no caso crítico ($p = \frac{n+2}{n-2}$), então $K(\Omega) = (2^{2/n})/S$, pela desigualdade de Cherrier:

Lema 3.1.3 (Cherrier) *Seja Ω um domínio com fronteira C^1 . Para qualquer $\epsilon > 0$, existe $C(\epsilon)$, tal que, para qualquer $u \in H^1(\Omega)$,*

$$\|u\|_{\frac{2n}{n-2}}^2 \leq \left(\frac{2^{2/n}}{S} + \epsilon \right) \|\nabla u\|_2^2 + C(\epsilon) \|u\|_2^2.$$

Demonstração: Ver Cherrier [17] ou Teorema 3.4.1, na sequência.

Se Γ_1 não é vazio, isto é $V \neq H_0^1$, então esta desigualdade para $u \in V$ é a melhor possível, como se pode ver usando a função

$$u_\epsilon = \frac{\phi(x)}{(\epsilon^2 + |x - x_0|^2)^{\frac{n-2}{2}}},$$

em que

x_0 é um ponto de Γ_1 ,

$\phi(x)$ é uma função com suporte compacto contido em $\Omega \cup \Gamma_1$,

$\phi(x) = 1$ em uma vizinhança de x_0 .

Neste capítulo, um ponto importante é o cálculo de $K(\Omega)$ em situações distintas das descritas acima. Nele também está a demonstração do Teorema 1, enunciado na introdução. Ele será reenunciado como Teorema 3.5.3 e provado na Seção 3.5.

3.2 Alguns resultados preliminares

Seja λ_1 o primeiro autovalor do problema

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u = 0 & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{em } \Gamma_1 \\ u = 0 & \text{em } \Gamma_0 \end{cases}$$

Temos, para qualquer $v \in V(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} |\nabla v|^2 \geq -\lambda_1 \int v^2,$$

com igualdade para $v = \phi_1$, a primeira autofunção. Logo, $Q_{\lambda_1}(v) \geq 0$, e $Q_{\lambda_1}(\phi_1) = 0$. Portanto, $S_{\lambda_1} = 0$.

S_{λ} é uma função contínua de λ e os próximos três lemas mostram propriedades de S_{λ} .

Lema 3.2.1 *Se $\tilde{\lambda} < \lambda$, então*

$$S_{\tilde{\lambda}} \leq S_{\lambda}.$$

Além disso, se S_{λ} é atingido e $\tilde{\lambda} < \lambda$ então $S_{\tilde{\lambda}} < S_{\lambda}$. Em particular, se $\lambda < \lambda_1$, temos $S_{\lambda} < 0$.

Demonstração:

Imediata, pois $\tilde{\lambda} < \lambda$ implica em $Q_{\tilde{\lambda}}(u) < Q_{\lambda}(u)$, para qualquer $u \in V \setminus \{0\}$. Para a segunda parte, utilizamos o fato que Q_{λ} possui um mínimo \tilde{u} , e calculamos $Q_{\tilde{\lambda}}(\tilde{u})$. ■

No caso de $\lambda < \lambda_1$, os mínimos não têm energia positiva. Observar que, neste caso, os mínimos existem, como podemos ver do Teorema 3.3.1. Mas, tendo energia negativa, eles não nos fornecem soluções de P_{λ} já que não é possível fazer o rescalonamento desses mínimos como usualmente. No caso de $\lambda > \lambda_1$, temos $S_{\lambda} > 0$, como veremos na próxima seção.

Lema 3.2.2 $S_{\lambda} \leq \frac{1}{K}$, para qualquer λ , com K definido por (3).

Demonstração:

Pela definição de K , se $A < K$, então temos, para qualquer B , em particular para $B = \lambda A$, a existência de $u \in V$, tal que

$$\|u\|_{p+1}^2 > A \|\nabla u\|_2^2 + \lambda A \|u\|_2^2.$$

Dado ϵ , escolhemos $A \in \mathbb{R}$, tal que $\frac{1}{K} + \epsilon > \frac{1}{A} > \frac{1}{K}$, e escolhemos $B = \lambda A$. Logo,

$$\frac{\|\nabla u\|_2^2 + \lambda \|u\|_2^2}{\|u\|_{p+1}^2} < \frac{1}{A} < \frac{1}{K} + \epsilon.$$

E, portanto,

$$S_\lambda \leq \frac{1}{K} + \epsilon.$$

Como ϵ é qualquer, pois podemos tomar A suficientemente próximo de K , temos o lema. ■

Lema 3.2.3 $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} S_\lambda = \frac{1}{K}$

Demonstração:

Suponhamos que não. Como $S_\lambda \leq \frac{1}{K}$ e S_λ é uma função crescente, temos $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} S_\lambda = \alpha < \frac{1}{K}$.

Tomamos ϵ tal que $\alpha + \epsilon < \frac{1}{K}$. Como $\alpha + \epsilon > \lim_{\lambda \rightarrow \infty} S_\lambda$, pela monotonicidade de S_λ , temos que $S_\lambda < \alpha + \epsilon$. Isto é, para qualquer λ , existe u , tal que

$$\|\nabla u\|_2^2 + \lambda \|u\|_2^2 < (\alpha + \epsilon) \|u\|_{p+1}^2.$$

Logo

$$\|u\|_{p+1}^2 > \frac{1}{\alpha + \epsilon} \|\nabla u\|_2^2 + \frac{\lambda}{\alpha + \epsilon} \|u\|_2^2.$$

Por outro lado, pela definição de $K(\Omega)$, como $\frac{1}{\alpha + \epsilon} > K$, existe B tal que, para todo $u \in V$,

$$\|u\|_{p+1}^2 \leq \frac{1}{\alpha + \epsilon} \|\nabla u\|_2^2 + B \|u\|_2^2,$$

e portanto,

$$\frac{\lambda}{\alpha + \epsilon} \|u\|_2^2 \leq B \|u\|_2^2,$$

o que é impossível, como se vê tomando λ maior que $B(\alpha + \epsilon)$. ■

Na sequência estudamos quando S_λ é igual ao limite $\frac{1}{K}$, para algum λ . Isto acontecerá exatamente quando o ínfimo na definição de K é alcançado. A importância disto, como veremos na próxima seção, está no fato que existem mínimos de S_λ se, e só se, $S_\lambda < \frac{1}{K}$.

Suponhamos que o ínfimo na definição de $K(\Omega)$ seja atingido, ou seja, podemos usar K no lugar de A .

Definimos

$$B_1 = \inf\{B \in \mathbb{R} \mid \forall u \in V, \|u\|_{p+1}^2 \leq K \|\nabla u\|_2^2 + B \|u\|_2^2\}.$$

Lema 3.2.4 *Suponhamos que K seja atingido. Se*

$$\lambda \geq \frac{B_1}{K} \text{ então } S_\lambda = \frac{1}{K}.$$

Se

$$\lambda < \frac{B_1}{K} \text{ então } S_\lambda < \frac{1}{K}.$$

Demonstração:

Se $S_\lambda \neq \frac{1}{K}$ temos, pelo Lema 3.2.2, $S_\lambda < \frac{1}{K}$. Ou seja, existe $u \in V$, tal que $Q_\lambda(u) < \frac{1}{K}$, isto é

$$\|\nabla u\|_2^2 + \lambda \|u\|_2^2 < \frac{1}{K} \|u\|_{p+1}^2.$$

Logo

$$K \|\nabla u\|_2^2 + \lambda K \|u\|_2^2 < \|u\|_{p+1}^2.$$

Mas, pela definição de B_1 , temos

$$K \|\nabla u\|_2^2 + B_1 \|u\|_2^2 \geq \|u\|_{p+1}^2.$$

Assim

$$\lambda K \|u\|_2^2 < B_1 \|u\|_2^2.$$

Tomando $\lambda \geq \frac{B_1}{K}$, chegamos a uma contradição.

Para a segunda parte, como $\lambda K < B_1$, nós temos a existência de u , tal que

$$K \|\nabla u\|_2^2 + \lambda K \|u\|_2^2 < \|u\|_{p+1}^2,$$

o que implica $S_\lambda < \frac{1}{K}$. ■

Corolário 3.2.1 *Suponha que K seja atingido. Se*

$$\lambda > \frac{B_1}{K},$$

então não existem soluções minimizantes.

Demonstração:

Já sabemos, pelo Lema 3.2.1, que S_λ é estritamente decrescente à esquerda, quando o ínfimo é assumido. O corolário segue, pois S_λ é constante para $\lambda > \frac{B_1}{K}$, utilizando o Lema 3.2.4 ■

No caso do problema de Dirichlet ($\Gamma_0 = \partial\Omega$), temos, pela desigualdade de Poincaré, que $B_1 = 0$, e, portanto, o corolário acima nos remete ao resultado de Pohožaev, que, no caso de domínios estrelados, nos mostra muito mais, a saber, a inexistência de soluções para P_λ .

Suponhamos, agora, que o ínfimo na definição de $K(\Omega)$ não seja assumido.

Lema 3.2.5 *Suponhamos que K não seja atingido. Então para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$, temos*

$$S_\lambda < \frac{1}{K}.$$

Demonstração:

Seja $\lambda \in \mathbb{R}$. Como temos, para qualquer $B \in \mathbb{R}$, em particular $B = \lambda K$, a existência de $u \in V$, tal que

$$K \|\nabla u\|_2^2 + \lambda K \|u\|_2^2 < \|u\|_{p+1}^2,$$

então

$$\frac{\|\nabla u\|_2^2 + \lambda \|u\|_2^2}{\|u\|_{p+1}^2} < \frac{1}{K}.$$

■

3.3 Condições para a existência de mínimos

Nesta seção, provamos o seguinte teorema

Teorema 3.3.1 *Se*

$$S_\lambda < \frac{1}{K},$$

então o ínfimo de Q_λ é atingido. Ou seja, se

$$0 \leq S_\lambda < \frac{1}{K},$$

(P_λ) tem soluções minimizantes.

Observação: Para o caso subcrítico, é bastante conhecido o fato que o mínimo é atingido, independente do valor de S_λ . Este resultado pode ser inferido do teorema acima, considerando $\frac{1}{K(\Omega)} = \infty$.

Quando estamos no caso crítico e $\Gamma_0 = \partial\Omega$, o resultado equivalente foi provado por Brezis-Nirenberg [14]. No caso em que $\Gamma_0 \neq \partial\Omega$ e em que o domínio tem fronteira C^1 , por Adimurthi-Yadava [6] e Wang [52]. Mais precisamente, Adimurthi-Yadava provaram no caso em que Γ_0 e Γ_1 são uniões de componentes conexas disjuntas de $\partial\Omega$ (ou seja, $\gamma = \emptyset$) e Wang, para o problema de Neumann ($\Gamma_1 = \partial\Omega$).

No caso de termos domínios com um número finito de “ângulos convexos”, temos um resultado de Lions-Pacella-Tricarico [33], os quais provaram um teorema similar ao Teorema 3.3.1, usando no lugar de $K(\Omega)$, uma constante que depende da constante isoperimétrica de Ω , relativo a Γ_1 . Essa constante é difícil de ser calculada em geral. No presente trabalho, daremos valores específicos para $K(\Omega)$ na Seção 3.4. Uma pergunta interessante é qual a relação existente entre a constante usada por Lions-Pacella-Tricarico e $K(\Omega)$. Como o teorema acima não vale para uma constante maior que $1/K$, a constante deles tem que ser menor ou igual a $1/K$.

O Teorema 3.3.1, além de apresentar uma versão unificada dos resultados enunciados acima, generaliza-os para domínios não C^1 , cobrindo tanto o caso crítico quanto o caso subcrítico.

Demonstração do Teorema 3.3.1:

Seja (u_j) uma sequência minimizante normalizada para Q_λ , isto é,

$$\| \nabla u_j \|_2^2 + \lambda \| u_j \|_2^2 = S_\lambda + o(1) \text{ com } \| u_j \|_{p+1} = 1. \quad (4)$$

Como

$$\| u_j \|_2^2 = \int u_j^2 \leq \left(\int u_j^{p+1} \right)^{\frac{2}{p+1}} |\Omega|^{1 - \frac{2}{p+1}} = |\Omega|^{\frac{p-1}{p+1}},$$

segue da equação (4) que a sequência (u_j) é limitada em $H^1(\Omega)$, e passando a uma subsequência, podemos supor que u_j converge fracamente a $u \in V$.

Seja $v_j = u_j - u$. Logo,

$$v_j \xrightarrow{H^1(\Omega)} 0, \quad v_j \xrightarrow{L_2(\Omega)} 0, \quad v_j \xrightarrow{ae} 0.$$

Então, da equação (4), temos

$$\int_\Omega | \nabla v_j + \nabla u |^2 + \lambda \int_\Omega (v_j + u)^2 = S_\lambda + o(1),$$

e portanto

$$\int_\Omega | \nabla v_j |^2 + 2 \nabla v_j \cdot \nabla u + | \nabla u |^2 + \lambda (v_j^2 + 2v_j u + u^2) = S_\lambda + o(1). \quad (5)$$

Como $v_j \xrightarrow{L_2(\Omega)} 0$, temos que

$$\int_\Omega v_j^2 = o(1).$$

E, como $v_j \xrightarrow{H^1(\Omega)} 0$, temos que

$$\int_\Omega \nabla v_j \cdot \nabla u + \lambda v_j u = o(1).$$

Logo

$$\int_\Omega | \nabla v_j |^2 + | \nabla u |^2 + \lambda u^2 = S_\lambda + o(1). \quad (6)$$

Utilizando o lema de Brezis-Lieb [13], que enunciaremos após a demonstração deste teorema, temos

$$1 = \int_{\Omega} |u + v_j|^{p+1} = \int_{\Omega} |u|^{p+1} + \int_{\Omega} |v_j|^{p+1} + o(1). \quad (7)$$

Suponhamos, primeiramente, $S_\lambda \geq 0$.
Segue da equação (7) que

$$S_\lambda \leq S_\lambda \|u\|_{p+1}^2 + S_\lambda \|v_j\|_{p+1}^2 + o(1).$$

Logo,

$$\int_{\Omega} |\nabla v_j|^2 + |\nabla u|^2 + \lambda u^2 \leq S_\lambda \|u\|_{p+1}^2 + S_\lambda \|v_j\|_{p+1}^2 + o(1). \quad (8)$$

Como, pela definição de S_λ , temos que

$$\|\nabla u\|_2^2 + \lambda \|u\|_2^2 \geq S_\lambda \|u\|_{p+1}^2,$$

obtemos da equação (8) que

$$\|\nabla v_j\|_2^2 \leq S_\lambda \|v_j\|_{p+1}^2 + o(1).$$

Usando a definição de $K(\Omega)$, se $K < 1/S_\lambda$, dado A , tal que $K < A < 1/S_\lambda$, existe B , tal que

$$\|v_j\|_{p+1}^2 \leq A \|\nabla v_j\|_2^2 + B \|v_j\|_2^2.$$

Logo,

$$\|\nabla v_j\|_2^2 \leq AS_\lambda \|\nabla v_j\|_2^2 + BS_\lambda \|v_j\|_2^2 + o(1).$$

Ou seja,

$$(1 - AS_\lambda) \|\nabla v_j\|_2^2 \leq BS_\lambda \|v_j\|_2^2 + o(1). \quad (9)$$

Fazendo j tender a infinito, uma vez que $\|v_j\|_2$ tende a zero, temos

$$\|\nabla v_j\|_2 \rightarrow 0,$$

ou seja,

$$u_j \rightarrow u \text{ em } H^1(\Omega).$$

Como Q_λ é contínuo, concluímos da equação (4) que u é mínimo de Q_λ .
Se $S_\lambda > 0$, após reescalonamento, u é solução de P_λ .

Suponhamos, agora, $S_\lambda < 0$. Como $\|u\|_{p+1}^2 \leq 1$, temos

$$S_\lambda \|u\|_{p+1}^2 \geq S_\lambda.$$

Logo, da equação (6)

$$\|\nabla v_j\|_2^2 + \|\nabla u\|_2^2 + \lambda \|u\|_2^2 = S_\lambda + o(1) \leq S_\lambda \|u\|_{p+1}^2 + o(1). \quad (10)$$

Como

$$\|\nabla u\|_2^2 + \lambda \|u\|_2^2 \geq S_\lambda \|u\|_{p+1}^2,$$

temos, da equação (10)

$$\|\nabla v_j\|_2^2 \leq o(1),$$

e, como acima, $v_j \rightarrow 0$ em V , ou seja, $u_j \rightarrow u$.

Isto termina a prova do Teorema 3.3.1. ■

Lema 3.3.1 (Brezis-Lieb) *Se $u_n \rightharpoonup u$ em quase todo ponto, com u_n uniformemente limitada em L^p , então*

$$\int_{\Omega} |u + v_j|^p = \int_{\Omega} |u|^p + \int_{\Omega} |v_j|^p + o(1).$$

Observação: Da continuidade e monotonicidade de S_λ e do fato que $S_{\lambda_1} = 0$, concluímos que $S_\lambda < 1/K$, se λ suficientemente próximo de λ_1 . Isto implica, para estes valores de λ , a existência de soluções minimizantes e a monotonicidade estrita de S_λ .

Definimos agora

$$\tilde{\lambda}_1 = \sup\{\lambda \in \mathbb{R} \mid S_\lambda < \frac{1}{K}\}.$$

Corolário 3.3.1 *Se $\lambda_1 < \lambda < \tilde{\lambda}_1$, então P_λ tem solução minimizante. Se $\lambda > \tilde{\lambda}_1$, não existe tal solução.*

Demonstração:

A primeira afirmação é imediata: se $\lambda_1 < \lambda < \tilde{\lambda}_1$, pela definição de $\tilde{\lambda}_1$ e pela monotonicidade de Q_λ , temos que $0 < S_\lambda < \frac{1}{K}$. Utilizando o Teorema 3.3.1, P_λ tem solução minimizante.

Fixemos agora, $\tilde{\lambda} > \tilde{\lambda}_1$. Temos, pela monotonicidade, que $S_{\tilde{\lambda}} = \frac{1}{K}$. Como S_λ não é crescente para $\tilde{\lambda}_1 < \lambda < \hat{\lambda}$, não temos soluções minimizantes, conforme o Lema 3.2.1. ■

PERGUNTA: O que acontece se $\lambda = \tilde{\lambda}_1$?

Já sabemos que $\tilde{\lambda}_1 \leq 0$, no caso do problema de Dirichlet. Brezis-Nirenberg provaram que $\tilde{\lambda}_1 = 0$, se $n \geq 4$, e menor que zero, se $n = 3$. Adimurthi-Mancini e Wang provaram que $\tilde{\lambda}_1 = \infty$, no caso do problema de Neumann e fronteira C^2 .

Vamos, então, calcular $K(\Omega)$ para alguns domínios e procurar determinar $\tilde{\lambda}_1$ para eles. No Teorema 3.4.1, calcularemos $K(\Omega)$ para domínios Ω nos quais Γ_1 é lipschitziano, com $p = \frac{n+2}{n-2}$. Usaremos métodos similares aos usados na demonstração do teorema de Cherrier [17]. Para provarmos que $\tilde{\lambda}_1 = \infty$, necessitaremos da hipótese que o domínio Ω tem um ponto na fronteira com “curvatura média positiva”. Isto será feito seguindo argumentos similares aos usados nas demonstrações dos teoremas de Wang [52] e Adimurthi-Mancini [2].

3.4 Calculando $K(\Omega)$

Vamos, nesta seção, calcular $K(\Omega)$ para uma classe de domínios que contém, em particular, interseções não tangenciais de domínios C^1 , ou seja, interseções de domínios cujos planos tangentes não são iguais nos pontos de interseção.

Definição Seja P um ponto na fronteira $\partial\Omega$ e C_P um cone em \mathbb{R}^n (ou seja, um domínio invariante por homotetia). Entendemos por carta diferenciável um difeomorfismo

$$\Lambda : B_\rho(P) \cap \Omega \rightarrow C_P$$

de $B_\rho(P)$ em \mathbb{R}^n que leva P em 0, $B_\rho(P) \cap \Omega$ em C_P , e $B_\rho(P) \cap \partial\Omega$ em ∂C_P , e tal que o Jacobiano em P seja igual a identidade.

Hipótese D Dizemos que Ω satisfaz a hipótese D se, para cada $P \in \Gamma_1 \cup \gamma$, tivermos uma carta diferenciável Λ como acima.

Observação: Uma consequência desta hipótese é o fato de Ω ser um domínio lipschitziano em pontos de $\Gamma_1 \cup \gamma$ e, como $\Gamma_1 \cup \gamma$ é compacto, é um domínio lipschitziano em $\Gamma_1 \cup \gamma$.

Nos pontos de Γ_0 , não precisaremos de cartas especiais, já que as respectivas constantes de Sobolev são independentes dos domínios (lembramos que temos condição de Dirichlet nos pontos de Γ_0).

Vamos supor que estamos no caso crítico, o que, para domínios lipschitzianos, significa $p = \frac{n+2}{n-2}$.

Definimos

$$\Theta_P = \int_{S^1(0) \cap C_P} dS, \text{ para } P \in \Gamma_1,$$

$$\Theta_P = \omega_n, \text{ para } P \in \bar{\Omega} \setminus \Gamma_1,$$

$$\Theta_\Omega = \inf_{P \in \bar{\Omega}} \Theta_P,$$

em que ω_n é a área da esfera de raio 1 em dimensão n . Notamos que Θ_Ω é diferente de 0, pois temos um domínio lipschitziano.

Definimos

$$K_P = \sup_{u \in V(C_P) \setminus \{0\}} \frac{\|u\|_{p+1}^2}{\|\nabla u\|_2^2},$$

em que $V(C_P) = \{u \in H^1(C_P); u = 0 \text{ em } \Lambda(\Gamma_0 \cap B_\rho(P))\}$.

Se $P \in \Gamma_0$, temos $K_P = 1/S$. Veremos que, para $P \in \Gamma_1 \cup \gamma$, se C_P é um cone convexo,

$$K_P = \frac{(\frac{\omega_n}{\Theta_P})^{2/n}}{S}.$$

Exemplos: Seja $x \in \mathbb{R}^n$ denotado por (x_1, \dots, x_n) .

1. Se Ω é C^1 em todo ponto $P \in \Gamma_1 \cup \gamma$, temos que o cone C_P pode ser tomado como sendo o semi-espaço

$$C_P = \{x \in \mathbb{R}^n; x_n \geq 0\}.$$

Deste modo, vemos que $\Theta_P = \omega_n/2$, para todo $P \in \Gamma_1 \cup \gamma$, e portanto

$$\Theta_\Omega = \frac{1}{2}\omega_n.$$

2. Se Ω é uma semi-bola ($\text{bola} \cap \{x_n > 0\}$), os pontos $P \in \Gamma \cup \gamma$, que não são C^1 , são os pontos

$$\{P \in \mathbb{R}^n; P_n = 0 \text{ e } P_1^2 + \dots + P_{n-1}^2 = 1\},$$

e nestes pontos podemos tomar

$$C_P = \{x \in \mathbb{R}^n; x_n \geq 0 \text{ e } x_{n-1} \geq 0\}.$$

Deste modo vemos que, para este tipo de ponto, $\Theta_P = \omega_n/4$. Como os outros pontos de $\Gamma_1 \cup \gamma$ são C^1 , temos que o mínimo é

$$\Theta_\Omega = \frac{1}{4}\omega_n.$$

3. Se Ω é um cubo ou um quarto da bola ($\text{bola} \cap \{x_3, x_2 > 0\}$) em \mathbb{R}^n , temos que os pontos que nos dão os mínimos são

$$\{P \in \mathbb{R}^n; P_n = 0, P_{n-1} = 0 \text{ e } P_1^2 + \dots + P_{n-2}^2\} = 1.$$

Nestes pontos podemos tomar o cone

$$C_P = \{x \in \mathbb{R}^n; x_n \geq 0, x_{n-1} \geq 0 \text{ e } x_{n-2} \geq 0\}.$$

Logo, para este tipo de ponto, temos $\Theta_P = \omega_n/8$. Como os outros pontos de $\Gamma_1 \cup \gamma$ são de tipos já analisados, temos

$$\Theta_\Omega = \frac{1}{8}\omega_n.$$

O mesmo ocorre se Ω é um oitavo da bola ($\text{bola} \cap \{x_1, x_2, x_3 > 0\}$) em \mathbb{R}^3 , sendo que neste caso temos mais alguns pontos em $\Gamma_1 \cup \gamma$, incluindo a origem, onde $\Theta_P = \omega_n/8$.

Teorema 3.4.1 *Suponhamos que Ω satisfaz hipótese D. Então*

$$K(\Omega) = \sup_{P \in \partial\Omega} K_P.$$

Observação: Este resultado foi provado para domínios C^1 em Cherrier [17].

Demonstração:

Primeiramente vamos provar que, dado

$$A > K := \sup_{P \in \partial\Omega} K_P,$$

existe $B(A)$ tal que, para todo $v \in V$, vale

$$\|v\|_{p+1}^2 \leq A \|\nabla v\|_2^2 + B(A) \|v\|_2^2. \quad (11)$$

Isto nos mostrará que $K(\Omega) \leq K$. Posteriormente mostraremos que tal representação não é possível para $A < K$, o que completará a prova.

Por densidade, basta provarmos que (11) é verdadeira para funções C^1 .

Seja $\varepsilon > 0$. Para todo $P \in \overline{\Omega}$, tomamos uma carta Λ_P de B_P em \mathbb{R}^n . Lembramos que, nos pontos de $\Gamma_1 \cup \gamma$, a carta é do tipo descrito na introdução a esta seção. Tomemos uma cobertura finita \mathcal{C} de $\overline{\Omega}$, depois de escolher as

bolas B_P suficientemente pequenas, de tal modo que as bolas com centro em pontos de Γ_0 não interceptem Γ_1 , e para que $\|J(\Lambda_P) - Id\|_\infty < \varepsilon_1$ (escolheremos ε_1 mais à frente), em qualquer ponto de B_P (J representa a matriz jacobiana). Vamos mostrar a seguir, que podemos escolher ε_1 de modo que se tenha

$$\frac{1}{(1 + \varepsilon)} < |\det(J\Lambda_P)| < (1 + \varepsilon),$$

e

$$|J(\Lambda_P)u|^2 \leq (1 + \varepsilon)|u|^2.$$

De fato, denotando por S_n o grupo simétrico de ordem n , temos

$$\begin{aligned} |\det(J\Lambda_P)| &= \left| \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)} \right| > \prod_{i=1}^n |a_{ii}| + \sum_{\sigma \in S_n \setminus \{Id\}} \prod_{i=1}^n |a_{i\sigma(i)}| \\ &> (1 + \varepsilon_1)^n + n!(1 + \varepsilon_1)^{n-2} \varepsilon_1^2 \\ &> 1 + \varepsilon, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} |\det(J\Lambda_P)| &= \left| \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)} \right| > \prod_{i=1}^n |a_{ii}| - \sum_{\sigma \in S_n \setminus \{Id\}} \prod_{i=1}^n |a_{i\sigma(i)}| \\ &> (1 - \varepsilon_1)^n - n!(1 + \varepsilon_1)^{n-2} \varepsilon_1^2 \\ &> \frac{1}{1 + \varepsilon}, \end{aligned}$$

e também

$$|J(\Lambda_P)u|^2 = \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} u_j \right|^2 < [(1 + \varepsilon_1)^2 + (n - 1)\varepsilon_1^2] |u|^2 < (1 + \varepsilon) |u|^2.$$

Escolhemos ε_1 de tal modo que as últimas desigualdades em cada expressão sejam verdadeiras.

Neste caso, usando a fórmula de mudança de variáveis quando $y = \Lambda_P(x)$:

$$\int_{\Lambda_P(\Omega)} f(y) dy = \int_{\Omega} f(\Lambda_P(x)) |\det(J(\Lambda(x)))| dx,$$

temos, para qualquer função v , com suporte em B_P ,

$$\begin{aligned} \int_{\Lambda_P(\Omega)} |v \circ \Lambda^{-1}|^{p+1} &= \int_{\Omega} |v|^{p+1} |\det(J(\Lambda_P))| \geq \\ &\geq \frac{1}{(1+\varepsilon)} \int_{\Omega} |v|^{p+1}. \end{aligned}$$

Temos também

$$\begin{aligned} \int_{\Lambda_P(\Omega)} |\nabla(v \circ \Lambda_P^{-1})|^2 &= \int_{\Lambda_P(\Omega)} (|(\nabla v) \circ \Lambda_P^{-1} \cdot J(\Lambda_P^{-1})|^2) \\ &\leq (1+\varepsilon) \int_{\Lambda_P(\Omega)} |(\nabla v) \circ \Lambda_P^{-1}|^2 \\ &\leq (1+\varepsilon) \int_{\Omega} |\nabla v|^2 |\det(J(\Lambda_P))| \\ &\leq (1+\varepsilon)(1+\varepsilon) \int_{\Omega} |\nabla v|^2 \\ &\leq (1+\varepsilon)^2 \int_{\Omega} |\nabla v|^2. \end{aligned}$$

Tomamos, então, uma partição da unidade Φ_i^2 , subordinada à cobertura \mathcal{C} . Portanto $v = \sum \Phi_i^2 v$.

Logo,

$$\begin{aligned} \|v\|_{p+1}^2 &= \|v^2\|_{\frac{p+1}{2}} = \left\| \sum v^2 \Phi_i^2 \right\|_{\frac{p+1}{2}} \\ &\leq \sum \|v^2 \Phi_i^2\|_{\frac{p+1}{2}} \\ &\leq \sum \|v \Phi_i\|_{p+1}^2 \\ &\leq \sum (1+\varepsilon) \|(v \Phi_i) \circ \Lambda_{P_i}^{-1}\|_{p+1}^2 \\ &\leq \sum (1+\varepsilon) K_P \|\nabla(v \Phi_i \circ \Lambda_{P_i}^{-1})\|_2^2, \\ &\leq \sum (1+\varepsilon) K \|\nabla(v \Phi_i \circ \Lambda_{P_i}^{-1})\|_2^2, \end{aligned}$$

onde as últimas desigualdades vêm da definição de K_P .

Temos, portanto,

$$\|v\|_{p+1}^2 \leq (1+\varepsilon)^3 K \sum \|\nabla(v \Phi_i)\|_2^2,$$

e

$$\begin{aligned}
\sum \|\nabla(v\Phi_i)\|_2^2 &= \sum \int_{B_P} |\nabla(v\Phi_i)|^2 \\
&= \sum \int_{B_P} \Phi_i^2 |\nabla v|^2 + 2\Phi_i |v| |\nabla\Phi_i \cdot \nabla v| + v^2 |\nabla\Phi_i|^2 \leq \\
&\leq \int_{\Omega} |\nabla v|^2 + D \sum \int_{B_P} (|v\nabla v| + v^2) \\
&\leq \int_{\Omega} |\nabla v|^2 + D' \|v\|_2^2 + D \sum \int_{B_P} |v \cdot \nabla v| \\
&\leq (1 + \varepsilon) \|\nabla v\|_2^2 + C \|v\|_2^2,
\end{aligned}$$

onde a última desigualdade é obtido através da relação:

$$xy < \varepsilon x^2 + \tilde{B}(\varepsilon)y^2.$$

Logo vale

$$\|v\|_{p+1}^2 \leq K(1 + \varepsilon)^3 [(1 + \varepsilon) \|\nabla v\|_2^2 + C \|v\|_2^2],$$

para algum C .

Tomando ε suficientemente pequeno, temos que, para qualquer $A > K$, existe $B > 0$ tal que

$$\|v\|_{p+1}^2 \leq A \|\nabla v\|_2^2 + B \|v\|_2^2, \quad (12)$$

para qualquer $v \in V$. Isto mostra que $K(\Omega) \leq K$.

Para vermos que $K(\Omega) = K$, tomamos $A < K$, o que implica a existência de $P \in \Gamma_1 \cup \gamma$ tal que $A < K_P$. Logo existe $u \in V(C_P)$ tal que

$$\|u\|_{p+1} > A \|\nabla u\|_2.$$

Tomando

$$v_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^{n/2}} u\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

na equação(12), chegamos a uma contradição. ■

Na sequência, usamos o seguinte teorema de Lions-Pacella-Tricarico [33]:

Teorema 3.4.2 (LPT) *Se C é um cone convexo, então*

$$\frac{\|u\|_{p+1}}{\|\nabla u\|_2}$$

atinge um máximo K_C para a função

$$u_\epsilon = \frac{1}{(\epsilon + |x|^2)^{n/2}}.$$

Utilizando este teorema, vamos então calcular o valor de K_P , no caso em que C_P é um cone convexo. Primeiramente, para $P \in \Gamma_1$:

Lema 3.4.1 *Seja $P \in \Gamma_1$ em que C_P é um cone convexo. Então*

$$K_P = \frac{\left(\frac{\omega_n}{\Theta_{C_P}}\right)^{\frac{2}{n}}}{S}.$$

Demonstração:

O teorema de Lions-Pacella-Tricarico afirma que o supremo $K_P = K_{C_P}$ é atingido na função radial

$$v = u_\epsilon = \frac{1}{(\epsilon + |x|^2)^{n/2}},$$

definida para $x \in C_P$. Denotando por \tilde{v} a mesma função definida em \mathbb{R}^n vale

$$\begin{aligned} K_P \|\nabla v\|_2^2 &= \|v\|_{p+1}^2 = \left(\frac{\Theta_{C_P}}{\omega_n}\right)^{\frac{2}{p+1}} \|\tilde{v}\|_{p+1}^2 \\ &= \left(\frac{\Theta_{C_P}}{\omega_n}\right)^{\frac{2}{p+1}} \frac{1}{S} \|\nabla \tilde{v}\|_2^2 \\ &= \left(\frac{\Theta_{C_P}}{\omega_n}\right)^{\frac{2}{p+1}-1} \frac{1}{S} \|\nabla v\|_2^2 \\ &= \left(\frac{\Theta_{C_P}}{\omega_n}\right)^{-2/n} \frac{1}{S} \|\nabla v\|_2^2. \end{aligned}$$

Logo,

$$K_P = \frac{\left(\frac{\omega_n}{\Theta_{C_P}}\right)^{\frac{2}{n}}}{S}.$$

Agora, para $P \in \gamma$:

Lema 3.4.2 *Seja $P \in \gamma$ em que C_P é um cone convexo. Então*

$$K_P \leq \frac{\left(\frac{\omega_n}{\Theta_{C_P}}\right)^{\frac{2}{n}}}{S}.$$

Demonstração:

Como $V(C_P) \subset H^1(C_P)$, o lema segue do Lema 3.4.1. Neste caso, não podemos provar igualdade, pois $V(C_P) \neq H^1(C_P)$. Em particular, $u_\epsilon \notin V(C_P)$. Notamos que o valor de K_P só pode melhorar, e podemos tomar o valor deste lema, como uma estimativa conservadora.

Podemos, então calcular K_Ω :

Corolário 3.4.1 *Se C_P é um cone convexo para qualquer $P \in \Gamma_1 \cup \gamma$ então*

$$K(\Omega) = \frac{\left(\frac{\omega_n}{\Theta_\Omega}\right)^{\frac{2}{n}}}{S}.$$

No caso em que temos cones não convexos, uma vez que o teorema de Lions-Pacella-Tricarico não se mantém válido, não conseguimos determinar o valor de K , como no lema acima. Sabemos apenas que no caso geral

$$K(\Omega) \geq \frac{\left(\frac{\omega_n}{\Theta(\Omega)}\right)^{\frac{2}{n}}}{S}.$$

Para vermos que esta desigualdade pode ser estrita, temos os seguintes contra-exemplos:

Contra-exemplo 1:

Seja C um cone com $\theta_C > \frac{\omega_n}{2}$, e com pontos onde a fronteira é C^2 . Usando as funções-teste U_ε , se concentrando em algum destes pontos, verificamos que

$$K(C) \geq \frac{2^{2/n}}{S},$$

valor maior que aquele que aparece no lema, qual seja

$$\frac{\left(\frac{\omega_n}{\Theta_C}\right)^{\frac{2}{n}}}{S} < \frac{2^{2/n}}{S}.$$

Evidentemente, qualquer cone com ângulo sólido maior que a metade da área da esfera não é convexo.

Contra-exemplo 2:

Seja C_m uma sequência de cones, cujas fronteiras passam por um ponto P . Suponhamos que perto de P todos os cones sejam iguais, ou seja, que exista ρ , tal que $C_m \cap B_\rho(P)$ seja independente de m . Como curvatura média é um conceito local, a curvatura média em P também será independente de m , e vamos supor que seja positiva. Suponhamos também que $\Theta_{C_m} \nearrow \frac{\omega_n}{2}$.

Tomando

$$u_\varepsilon(x) = \frac{\phi(x)}{(\varepsilon^2 + |x|^2)^{\frac{n-2}{2}}},$$

com $\phi(x) \equiv 0$, se $|x - P| > \rho$, temos que $u_\varepsilon(x) \in H^1(C_m)$, para qualquer m , e $(\|u_\varepsilon\|_{p+1}^2 / \|\nabla u_\varepsilon\|_2^2)$ é independente de m .

Sabemos que existe ε , tal que

$$\frac{\|u_\varepsilon\|_{p+1}^2}{\|\nabla u_\varepsilon\|_2^2} > \frac{2^{2/n}}{S}, \tag{13}$$

o que implica

$$K_{C_m} \geq \frac{\|u_\varepsilon\|_{p+1}^2}{\|\nabla u_\varepsilon\|_2^2}.$$

Suponhamos que

$$K_{C_m} = \frac{\left(\frac{\Omega_n}{\theta_{C_m}}\right)^{\frac{2}{n}}}{S}$$

para todo m . Logo

$$K_{C_m} \rightarrow \frac{2^{2/n}}{S},$$

e teríamos, de acordo com a desigualdade (13), para m suficientemente grande,

$$K_{C_m} < \frac{\|u_\varepsilon\|_{p+1}^2}{\|\nabla u_\varepsilon\|_2^2},$$

o que é uma contradição com a definição de K_{C_m} .

Neste contra-exemplo, nós temos cones 'pequenos', ou seja, com θ_C menor que a metade do ângulo total. O que ele nos mostra é que um cone, que tenha ângulo sólido próximo de $\omega_n/2$ e um ponto de curvatura média dada, não é convexo, ou equivalentemente um cone convexo com ângulo sólido próximo a $\omega_n/2$ tem que ter apenas pontos de curvatura média pequena. Uma pergunta interessante é a relação entre a curvatura média máxima e o ângulo sólido do cone. (No limite, $\theta_C = \omega_n/2$, o único cone convexo é o semi-espaço, que tem curvatura média nula em todo ponto).

Se um dado ponto P pertence a γ (em nosso problema), o valor correspondente de K_P não é tão grande quanto seria se P pertencesse a Γ_1 (em outro problema), para o mesmo Ω . A análise acima não leva em conta este aspecto, porque calcular seu valor exato é difícil. No entanto, isto pode ser feito em um caso importante, a saber:

Teorema 3.4.3 *Seja C um cone com Γ_1 planar. Então*

$$K_C = \frac{2^{2/n}}{S}.$$

Demonstração:

É suficiente fazer uma reflexão sobre a parte planar. Temos, então um cone \tilde{C} que não tem Γ_1 , isto é, com condição de Dirichlet na fronteira. Neste caso, já sabemos que $K_{\tilde{C}} = \frac{1}{S}$.

Para qualquer $u \in H_1(C)$ com $u|_{\Gamma_0} = 0$, denotando por \tilde{u} sua reflexão, temos

$$\frac{\|u\|_{p+1}^2}{\|\nabla u\|_2^2} = 2^{2/n} \frac{\|\tilde{u}\|_{p+1}^2}{\|\nabla \tilde{u}\|_2^2} \geq \frac{2^{2/n}}{S}.$$

Logo,

$$K(C) \geq \frac{2^{2/n}}{S}.$$

Para vermos que de fato temos igualdade, é suficiente tomarmos

$$u_\epsilon = \frac{\phi(x)}{(\epsilon^2 + |x - P|^2)^{n/2}},$$

em que P é um ponto de Γ_1 . É fácil ver que $(\|u_\epsilon\|_{p+1}^2 / \|\nabla u_\epsilon\|_2^2)$ está arbitrariamente próximo de $(2^{2/n})/S$. ■

Como uma aplicação deste teorema, tomamos

$$\Omega = S_{\theta_0} = \{x \in \mathbb{R}^3; x = (r, \theta, \phi), 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \theta_0\},$$

$$\Gamma_0 = \{x \in \partial S_{\theta_0}; \theta = 0 \text{ ou } \theta = \theta_0\} \setminus \gamma,$$

$$\Gamma_1 = \{x \in \partial S_{\theta_0}; r = 1\} \setminus \gamma$$

$$\gamma = \{x \in \mathbb{R}^3; (\theta = 0 \text{ ou } \theta = \theta_0) \text{ e } r = 1\}.$$

Temos que os pontos de Γ_1 são C^1 , e portanto $\Theta_P = w_n/2$, neste caso. Quanto aos pontos de γ , temos

$$C_P = \{x \in \mathbb{R}^3; x_1 \geq 0 \text{ e } x_2 \geq 0\},$$

o que implica $\Theta_P = w_n/4$. Pelo Teorema 3.4.1, deveríamos ter $K(\Omega) = ((\frac{4\pi}{\theta})^{2/n})/S$. No entanto, como, se $P \in \gamma$, a imagem de Γ_1 no cone C_P é

planar, temos, pelo Teorema 3.4.3, $K_{C_P} = (2^{2/n})/S$. Como isto também vale para $P \in \Gamma_1$, temos que o mínimo $K(\Omega) = (2^{2/n})/S$.

Como veremos na Seção 3.5, isto nos permitirá obter soluções em S_{θ_0} , e como veremos no Capítulo 4, obter soluções na bola com $2n$ regiões nodais, para qualquer n .

3.5 Estimativa de S_λ

Nesta seção, vamos supor $\Gamma_0 \neq \partial\Omega$, ou seja, não estaremos tratando o caso em que só temos condição de Dirichlet na fronteira. Este caso foi estudado no artigo de Brezis-Nirenberg [14]. Por outro lado, o caso em que temos condição de Neumann e uma fronteira de classe C^2 foi abordado independentemente por Adimurthi-Mancini [2] e Wang [52]. Este caso está coberto e é generalizado pelo Teorema 3.5.1 abaixo.

Então seja Ω um domínio satisfazendo a Hipótese D, com um cone C_P convexo em cada ponto. Nós vamos estudar o caso crítico, $p = \frac{n+2}{n-2}$. O caso subcrítico não precisa de estimativas, pois, neste caso, o ínfimo é sempre atingido. Também assumiremos que existe um ponto $P \in \Gamma_1$, tal que $\Theta_P = \Theta_\Omega$.

Como o funcional Q_λ é invariante por translação e rotação, podemos sempre assumir que $P = 0$ e que podemos definir funções $C(x')$ e $\Psi(x')$ de \mathbb{R}^{n-1} em \mathbb{R} , de tal forma que o cone seja definido por

$$x = (x', x_n) \in C_P \Leftrightarrow x_n > C(x')$$

e o domínio Ω por

$$x \in \Omega \Leftrightarrow x_n > C(x') + \Psi(x').$$

Como $\Lambda(x)$ é uma carta diferenciável, vemos que $\Psi(x')$ é uma função C^1 .

Lembramos que

$$K_P = \frac{\left(\frac{\omega_n}{\Theta_P}\right)^{\frac{2}{n}}}{S}.$$

Na sequência, vamos usar a notação $y = (r, \theta) \in \mathbb{R}^{n-1}$. Denotaremos por $u_0 \in \mathbb{R}^{n-1}$ um vetor com norma unitária na direção em que Ψ apresente maior crescimento positivo, ou seja,

$$\Psi(tu_0) > \Psi(ty)$$

para qualquer $y \in \mathbb{R}^{n-1}$ com norma unitária, e $t \in \mathbb{R}$ suficientemente pequeno.

Vamos definir algumas funções auxiliares:

$$\Psi_1 : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\Psi_1(y) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\Psi(\sqrt{\epsilon}y)}{\Psi(\sqrt{\epsilon}u_0)} \quad (14)$$

$$\tilde{\Psi}_1 : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\tilde{\Psi}_1(r) = \int_{S^{n-2}(r)} \frac{\Psi_1\left(\frac{r}{(1+C(1,\theta)^2)^{1/2}}, \theta\right)}{(1+C(1,\theta)^2)^{1/2}} d\Theta. \quad (15)$$

Definição 1: Dizemos que um ponto $P \in \partial\Omega$ tem uma **curvatura média generalizada positiva**, relativamente ao cone C_P , se

$$\int_0^\infty \tilde{\Psi}_1(r) \frac{r^{n-2}}{(1+r^2)^n} dr > 0, \quad (16)$$

e

$$\frac{\int_0^\infty \tilde{\Psi}_1(r) \frac{r^n}{(1+r^2)^n} dr}{\int_0^\infty \tilde{\Psi}_1(r) \frac{r^{n-2}}{(1+r^2)^n} dr} > 1. \quad (17)$$

Na próxima definição, utilizamos a notação

$$\text{ord}(\Psi(x)) = f(t), \text{ onde } f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Ela significa que $C_1 f(t) < \Psi(tu_0) < C_2 f(t)$, para determinadas constantes C_1 e C_2 , e qualquer t suficientemente pequeno. Isto significa que

$$|\Psi(x)| = O(f(|x|)) , \text{ mas } |\Psi(x)| \neq o(f(|x|)).$$

Notamos que só nos interessa a direção u_0 de maior crescimento. Diremos que

$$f_1(t) = \text{ord}(\Psi(x)) > \text{ord}(\Phi(x)) = f_2(t),$$

$$\text{se } f_2(t) = o(f_1(t)), \text{ ou seja } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_2(t)}{f_1(t)} = 0.$$

Definição 2 Um ponto P tem **aproximação crítica**, se

$$\text{ord}(\Psi) = t^3, \quad \text{para } n > 4,$$

$$\text{ord}(\Psi) = t^3 |\log(t)|, \quad \text{para } n = 4,$$

$$\text{ord}(\Psi) = t^2, \quad \text{para } n = 3.$$

No caso de um domínio com fronteira C^2 e um ponto que não tem curvatura média nula, a definição 1 acima coincide com a definição usual, que definimos a seguir. Como pode ser visto em do Carmo [16], pag. 131, a curvatura média H de um ponto p em uma hipersuperfície $M^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ é definida como

$$H = \frac{1}{n-1} \text{traço}(d g_p),$$

onde $g_p : M \rightarrow S^{n-1}$ é a aplicação normal de Gauss, que leva cada ponto de M no vetor normal a M em p . No caso de M ser o bordo de um domínio. convencionou-se que é o vetor normal apontando para o exterior do domínio. Se a hipersuperfície é definida localmente por

$$x \in M \Leftrightarrow f(x) = a,$$

onde a é um valor regular da função $C^2 f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, então pode ser mostrado [16], pag. 141, que

$$H = \frac{1}{n-1} \operatorname{div} \left(\frac{\operatorname{grad} f}{\|\operatorname{grad} f\|} \right). \quad (18)$$

No caso que estamos tratando, se supomos que a fronteira de Ω é C^2 no ponto $P = (0, \dots, 0)$, temos que $f(x)$ pode ser escrita como

$$f(x) = -x_n + \sum_{i=1}^{n-1} a_i |x_i|^2 + o(|x|^2),$$

e, portanto

$$\operatorname{grad} f = (2a_1 x_1, \dots, 2a_{n-1} x_{n-1}, -1) + o(|x|),$$

e

$$\|\operatorname{grad} f\| = 1 + O(|x|).$$

Isto implica em

$$\frac{\operatorname{grad} f}{\|\operatorname{grad} f\|} = (2a_1 x_1, \dots, 2a_{n-1} x_{n-1}, -1) + o(|x|),$$

e

$$\operatorname{div} \left(\frac{\operatorname{grad} f}{\|\operatorname{grad} f\|} \right) = 2 \sum_{i=1}^{n-1} a_i + O(|x|).$$

Então, utilizando a fórmula (18), temos que a curvatura média, no ponto $P = (0, \dots, 0)$, é

$$H = \frac{2}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} a_i.$$

Logo, a curvatura média é positiva, se, e só se,

$$\sum_{i=1}^{n-1} a_i > 0.$$

Veremos a seguir que esta também é uma hipótese suficiente para termos curvatura média generalizada positiva, no caso em que a fronteira é C^2 . Mais geralmente, provamos o seguinte lema, onde vemos que pontos de curvatura média nula, podem ter curvatura média generalizada positiva.

Lema 3.5.1 *Sejam $C(x') = 0$ e*

$$\Psi(x') = \sum_{i=1}^{n-1} a_i |x_i|^\delta + o(|x'|^\delta),$$

com $1 < \delta < n - 1$. Então P tem curvatura média generalizada positiva, se, e só se,

$$\sum_{i=1}^{n-1} a_i > 0.$$

Demonstração:

Seja

$$\Psi(x) = \sum_{i=1}^{n-1} a_i |x_i|^\delta + o(x^\delta).$$

Como, $\sum_{i=1}^{n-1} a_i > 0$, podemos, sem perda de generalidade supor que $a_1 > 0$, e que a direção de maior crescimento é

$$u_o = (1, 0, \dots, 0).$$

Daí decorre facilmente que $a_1 \geq a_j$, para qualquer $j = 2, \dots, n - 1$. Então

$$\Psi_1(y) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i}{a_1} |y_i|^\delta.$$

e

$$\tilde{\Psi}_1(r) = \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i}{a_0} \right) C r^\delta,$$

onde C é uma constante. A primeira parte da definição (1), equação (16), se torna óbvia, visto que estamos tratando do caso em que $\sum_{i=1}^{n-1} a_i > 0$ e $a_0 > 0$. Quanto à segunda parte, equação (17), utilizando integração por partes ($u = r^\delta / (1 + r^2)^{n-1}$ $dv = r^{n-2} dr$), obtemos

$$\int_0^\infty \frac{r^\delta r^{n-2} dr}{(1 + r^2)^{n-1}} = -\frac{1}{n-1} \int_0^\infty \frac{\delta r^{\delta-1} r^{n-1} dr}{(1 + r^2)^{n-1}} + 2 \int_0^\infty \frac{r^\delta r^n dr}{(1 + r^2)^n},$$

ou seja,

$$\left(1 + \frac{\delta}{n-1}\right) \int_0^\infty \frac{r^\delta r^{n-2} dr}{(1+r^2)^{n-1}} = 2 \int_0^\infty \frac{r^\delta r^n dr}{(1+r^2)^n}. \quad (19)$$

Por outro lado, fazendo $r^n = r^{n-2}(1+r^2-1)$, segue que

$$\int_0^\infty \frac{r^\delta r^n dr}{(1+r^2)^n} = \int_0^\infty \frac{r^\delta r^{n-2} dr}{(1+r^2)^{n-1}} - \int_0^\infty \frac{r^\delta r^{n-2} dr}{(1+r^2)^n}. \quad (20)$$

Portanto, levando a equação (19) na equação (20), temos que

$$\int_0^\infty \frac{r^\delta r^n dr}{(1+r^2)^n} = \frac{2}{(1 + (\delta/(n-1)))} \int_0^\infty \frac{r^\delta r^n dr}{(1+r^2)^n} - \int_0^\infty \frac{r^\delta r^{n-2} dr}{(1+r^2)^n},$$

o que implica

$$\left(\frac{2}{1 + (\delta/(n-1))} - 1\right) \int_0^\infty \frac{r^\delta r^n dr}{(1+r^2)^n} = \int_0^\infty \frac{r^\delta r^{n-2} dr}{(1+r^2)^n}.$$

Isto mostra que

$$\frac{\left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i}{a_0}\right) C \int_0^\infty r^\delta \frac{r^n}{(1+r^2)^n} dr}{\left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i}{a_0}\right) C \int_0^\infty r^\delta \frac{r^{n-2}}{(1+r^2)^n} dr} = \frac{1}{\frac{2}{1 + (\delta/(n-1))} - 1} = \frac{n-1+\delta}{n-1-\delta} > 1.$$

Logo, P tem curvatura média generalizada positiva e isto termina a prova do Lema 3.5.1. ■

Em particular, notamos que se $2 < \delta < n-1$, P tem curvatura média nula, o que é trivialmente visto, já que não temos termos de grau 2, e curvatura média generalizada positiva, como demonstrado acima.

Antes de demonstrar o principal resultado desta seção, daremos um resultado sobre a seguinte função definida em \mathbb{R}^n . Seja

$$u_\epsilon(x) = \frac{1}{(\epsilon + |x|^2)^{\frac{n-2}{2}}}. \quad (21)$$

Lema 3.5.2 *Temos*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_\epsilon|^2 = K_1 \epsilon^{-\frac{n-2}{2}}, \quad \text{para } n > 2$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u_\epsilon|^{p+1} = K_2 \epsilon^{-\frac{n}{2}}, \quad \text{para } n > 2$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u_\epsilon|^2 = K_3 \epsilon^{-\frac{n-4}{2}}, \quad \text{para } n > 4.$$

Temos também, para $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ qualquer aberto limitado

$$\int_{\Omega} |u_\epsilon|^2 = \begin{cases} O(1) & , \text{ se } n = 3 \\ O(|\log(\epsilon)|) & , \text{ se } n = 4. \end{cases}$$

Além disso,

$$S = \frac{K_1}{K_2^{\frac{2}{p+1}}}, \quad (22)$$

e

$$\frac{K_1}{K_2} = n(n-2). \quad (23)$$

Demonstração:

Temos, para $n > 4$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |u_\epsilon|^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dx}{(\epsilon + |x|^2)^{n-2}} \\ &= \omega_n \int_0^\infty \frac{r^{n-1} dr}{(\epsilon + r^2)^{n-2}} \\ &= \omega_n \int_0^\infty \frac{\epsilon^{\frac{n-1}{2}} s^{n-1} \epsilon^{\frac{1}{2}} ds}{\epsilon^{n-2} (1 + s^2)^{n-2}} \\ &= \frac{\omega_n}{\epsilon^{\frac{n-4}{2}}} \int_0^\infty \frac{s^{n-1} ds}{(1 + s^2)^{n-2}} \\ &= K_3 \epsilon^{-\frac{n-4}{2}}. \end{aligned} \quad (24)$$

E, para $n > 2$,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_\epsilon|^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(n-2)^2 |x|^2 dx}{(\epsilon + |x|^2)^n} \\
&= (n-2)^2 \omega_n \int_0^\infty \frac{r^{n+1} dr}{(\epsilon + r^2)^n} \\
&= (n-2)^2 \omega_n \int_0^\infty \frac{\epsilon^{\frac{n+1}{2}} s^{n+1} \epsilon^{\frac{1}{2}} ds}{\epsilon^n (1+s^2)^n} \\
&= \frac{(n-2)^2 \omega_n}{\epsilon^{\frac{n-2}{2}}} \int_0^\infty \frac{s^{n+1} ds}{(1+s^2)^n} \\
&= K_1 \epsilon^{-\frac{n-2}{2}}.
\end{aligned} \tag{25}$$

E também

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |u_\epsilon|^{p+1} &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dx}{(\epsilon + |x|^2)^n} \\
&= \omega_n \int_0^\infty \frac{r^{n-1} dr}{(\epsilon + r^2)^n} \\
&= \omega_n \int_0^\infty \frac{\epsilon^{\frac{n-1}{2}} s^{n-1} \epsilon^{\frac{1}{2}} ds}{\epsilon^n (1+s^2)^n} \\
&= \frac{\omega_n}{\epsilon^{\frac{n}{2}}} \int_0^\infty \frac{s^{n-1} ds}{(1+s^2)^n} \\
&= K_2 \epsilon^{-\frac{n}{2}}.
\end{aligned} \tag{26}$$

Notamos que

$$S = \frac{K_1}{K_2^{\frac{2}{p+1}}},$$

pois u_ϵ , a menos de multiplicação por uma constante, é uma solução da equação em \mathbb{R}^n

$$-\Delta u = u^{p^*-1},$$

e sabemos, pelo artigo de Talenti [50], que estas soluções em $H^1(\mathbb{R}^n)$ são mínimos do funcional

$$Q(u) = \frac{\|\nabla u\|_2^2}{\|u\|_{p^*}^2}.$$

A constante S é definida como o valor deste mínimo.

Utilizando integração por partes, como no lema 3.5.1, com $\delta = 1$, vemos que

$$\begin{aligned} \frac{K_1}{K_2} &= \frac{(n-2)^3 \int_0^\infty \frac{s^{n+1} ds}{(1+s^2)^n}}{\int_0^\infty \frac{s^{n-1} ds}{(1+s^2)^n}} \\ &= (n-2)^2 \frac{n-1+1}{n-1-1} \\ &= n(n-2). \end{aligned}$$

As igualdades (25), (26) são válidas para $n > 2$, mas a igualdade (24) é válida apenas para $n > 4$. Nos casos $n = 3$ e 4 , tomamos uma bola B_R tal que $\Omega \subset B_R$. Logo,

$$\begin{aligned} \int_\Omega |u_\epsilon|^2 &< \int_{B_R} |u_\epsilon|^2 \\ &\leq \omega_n \int_0^R \frac{\epsilon^{\frac{n-1}{2}} s^{n-1} \epsilon^{\frac{1}{2}} ds}{\epsilon^{n-2} (1+s^2)^{n-2}} \\ &= \frac{\omega_n}{\epsilon^{\frac{n-4}{2}}} \int_0^{\frac{R}{\epsilon^{1/2}}} \frac{s^{n-1} ds}{(1+s^2)^{n-2}} \tag{27} \\ &= \begin{cases} O(1) & , \text{ se } n = 3 \\ O(|\log(\epsilon)|) & , \text{ se } n = 4. \end{cases} \end{aligned}$$

■

Vamos, então procurar condições que nos garantam que S_λ está em um nível que nos permita descobrir soluções de (P_λ) .

Teorema 3.5.1 Para ϵ suficientemente pequeno, se $\text{ord}(\Psi)$ é menor que t e maior que a aproximação crítica, e se P tem curvatura média generalizada positiva, então existe $v_\epsilon \in V$, tal que

$$Q_\lambda(v_\epsilon) < \frac{1}{K_P},$$

o que implica

$$S_\lambda < \frac{1}{K_P}.$$

Observação: O caso $n = 3$ e $\text{ord}(\Psi) = t^2$ é muito importante, mas não é coberto por este teorema. Em particular este caso é utilizado para resolver o problema em domínios C^2 contidos em \mathbb{R}^3 . Ele pode ser estudado usando o fato que

$$\int_0^\infty \frac{r^5 dr}{(\epsilon + r^2)^3} = O(|\log(\epsilon)|)$$

(ver Adimurthi-Mancini [2] ou Wang [52] para detalhes).

Demonstração: Queremos mostrar que

$$Q_\lambda(v_\epsilon) < \frac{1}{K_P},$$

para alguma função $v_\epsilon \in V = \{u \in H^1(\Omega); u = 0 \text{ em } \Gamma_0\}$. Escolhemos a função dada pela equação (21), a menos de uma pequena perturbação

$$v_\epsilon(x) = \frac{\phi(x)}{(\epsilon + |x|^2)^{\frac{n-2}{2}}},$$

onde $\phi(x)$ é uma função com suporte numa bola de raio δ pequeno em torno da origem, de modo que tal suporte não intercepte Γ_0 , e com $\phi(x) \equiv 1$ na bola de raio $\delta/2$.

Vamos dividir a prova em três passos. No primeiro passo, fazemos algumas definições e cálculos iniciais. Na segunda calculamos $Q_\lambda(v_\epsilon)$. Na terceira, provamos que $Q_\lambda(v_\epsilon) < 1/K_P$.

Vamos, então ao primeiro passo:

Seja

$$\Sigma = \{(x', x_n) \in B_\delta; C(x') < x_n < C(x') + \Psi(x')\},$$

em que B_δ é uma bola de raio δ em torno da origem. Em outras palavras, Σ é a parte do cone que não pertence ao domínio. Suporemos que Ψ foi estendida para o infinito.

No começo da demonstração, chamaremos de $f(x)$ quaisquer das funções abaixo

$$|u_\epsilon|^2, \quad |\nabla u_\epsilon|^2, \quad |u_\epsilon|^{p+1},$$

e de $f_1(x)$ às seguintes

$$|v_\epsilon|^2, \quad |\nabla v_\epsilon|^2, \quad |v_\epsilon|^{p+1}.$$

Primeiramente notamos que

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\delta} f(x) dx \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\delta} f_1(x) dx$$

são uniformemente limitadas com respeito a ϵ (para ver isto, basta estimar $|x|^2 + \epsilon$ por $|x|^2$ nas integrais), e, portanto, podemos somar e subtrair termos do tipo

$$\int_{\Omega \setminus B} f(x) dx \quad \text{e} \quad \int_{\Omega \setminus B} f_1(x) dx,$$

sendo B qualquer domínio limitado, apenas acrescentando $O(1)$, para qualquer um daqueles integrandos.

Logo,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f_1(x) dx &= \int_{\Omega \cap B_\delta} f_1(x) dx + \int_{\Omega \setminus B_\delta} f_1(x) dx \\ &= \int_{C_P \cap B_\delta} f_1(x) dx - \int_{\Sigma \cap B_\delta} f_1(x) dx + O(1) \end{aligned} \tag{28}$$

Supondo que B_δ é a bola de raio $\delta/2$, vemos que $u_\epsilon(x) = v_\epsilon(x)$, e podemos trocar f_1 por f . Portanto,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f_1(x) dx &= \int_{C_P \cap B_\delta} f(x) dx - \int_{\Sigma \cap B_\delta} f(x) dx + O(1) \\ &= \int_{C_P} f(x) dx - \int_{C_P \setminus B_\delta} f(x) dx - \int_{\Sigma} f(x) dx + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\Sigma \setminus B_\delta} f(x) dx + O(1) \\
& = \int_{C_P} f(x) dx - \int_{\Sigma} f(x) dx + O(1) \\
& = \frac{\Theta_P}{\omega_n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx - \int_{\Sigma} f(x) dx + O(1). \tag{29}
\end{aligned}$$

Para obtermos $\int_{\Omega} f_1(x) dx$, como já calculamos $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx$ no lema 3.5.2, basta estimar $\int_{\Sigma} f(x) dx$, onde $f(x)$ é qualquer daqueles integrandos acima. Então, temos,

$$\begin{aligned}
\int_{\Sigma} f(x) dx & = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} dx' \int_{C(x')}^{C(x')+\Psi(x')} f(x) dx_n \\
& = \epsilon^{n/2} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} dy' \int_{\frac{C(y'\sqrt{\epsilon})}{\sqrt{\epsilon}}}^{\frac{C(y'\sqrt{\epsilon})+\Psi(y'\sqrt{\epsilon})}{\sqrt{\epsilon}}} f(\sqrt{\epsilon}y) dy_n.
\end{aligned}$$

Vamos agora ao segundo passo, ou seja vamos calcular o valor dos três integrandos acima e depois calcular $Q_\lambda(v_\epsilon)$:

Começamos calculando

$$\begin{aligned}
I_1(\epsilon) & := \int_{\Sigma} |\nabla u_\epsilon|^2 \\
& = \epsilon^{n/2} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} dy' \int_{\frac{C(y'\sqrt{\epsilon})}{\sqrt{\epsilon}}}^{\frac{C(y'\sqrt{\epsilon})+\Psi(y'\sqrt{\epsilon})}{\sqrt{\epsilon}}} \frac{(n-2)^2 |y|^2 \epsilon dy_n}{\epsilon^n (1+|y|^2)^n} \\
& = \frac{(n-2)^2}{\epsilon^{\frac{n-2}{2}}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} dy' \int_{\frac{C(y'\sqrt{\epsilon})}{\sqrt{\epsilon}}}^{\frac{C(y'\sqrt{\epsilon})+\Psi(y'\sqrt{\epsilon})}{\sqrt{\epsilon}}} \frac{|y|^2 dy_n}{(1+|y|^2)^n} \tag{30} \\
& = \frac{(n-2)^2}{\epsilon^{\frac{n-2}{2}}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} dy' \int_{\frac{C(y'\sqrt{\epsilon})}{\sqrt{\epsilon}}}^{\frac{C(y'\sqrt{\epsilon})+\Psi(y'\sqrt{\epsilon})}{\sqrt{\epsilon}}} \frac{(|y'|^2 + y_n^2) dy_n}{(1+|y'|^2 + y_n^2)^n}.
\end{aligned}$$

Usando u_0 definido no início desta seção, e o fato que, para qualquer função g , vale

$$\int_a^{a+\Delta a} g(x) dx = g(a)\Delta a + o(\Delta a),$$

temos

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon^{\frac{n-1}{2}}}{\Psi(\sqrt{\epsilon}u_0)} I_1(\epsilon) &= \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (n-2)^2 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} dy' \frac{\Psi(\sqrt{\epsilon}y')}{\sqrt{\epsilon}} \frac{\sqrt{\epsilon}}{\Psi(\sqrt{\epsilon}u_0)} \frac{C(y')^2 + |y'|^2}{(1 + C(y')^2 + |y'|^2)^n}. \end{aligned}$$

Como o cone C_P é invariante por homotetia, temos que $C(y') = |y'|^2 C(1, \theta)$, e portanto

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon^{\frac{n-1}{2}}}{\Psi(\sqrt{\epsilon}u_0)} I_1(\epsilon) &= \\ &= (n-2)^2 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} dy' \Psi_1(y') \frac{(1 + C(1, \theta)^2) |y'|^2}{(1 + (1 + C(1, \theta)^2) |y'|^2)^n} \\ &= (n-2)^2 \int_{S^{n-2}} d\theta \int_0^\infty dr \Psi_1(r, \theta) \frac{(1 + C(1, \theta)^2) r^n}{(1 + (1 + C(1, \theta)^2) r^2)^n}, \end{aligned}$$

onde usamos a função $\Psi_1(x')$ definida em (14). Fazendo a mudança de variável $s = (1 + C(1, \theta)^2)^{1/2} r$, temos

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon^{\frac{n-1}{2}}}{\Psi(\sqrt{\epsilon}u_0)} I_1(\epsilon) &= \\ &= \int_{S^{n-2}} d\theta \int_0^\infty \frac{(n-2)^2 ds}{(1 + C(1, \theta)^2)^{1/2}} \Psi_1 \left(\frac{s}{(1 + C(1, \theta)^2)^{1/2}}, \theta \right) \frac{s^n}{(1 + s^2)^n}. \end{aligned}$$

Usando Teorema de Fubini, e a função definida em (15), temos

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon^{\frac{n-1}{2}}}{\Psi(\sqrt{\epsilon}u_0)} I_1(\epsilon) = (n-2)^2 \int_0^\infty \tilde{\Psi}_1(s) \frac{s^n ds}{(1+s^2)^n}.$$

Logo

$$I_1(\epsilon) = O\left(\frac{\Psi(\sqrt{\epsilon}u_0)}{\epsilon^{\frac{n-1}{2}}}\right).$$

Portanto

$$\int_{\Omega} |\nabla v_\epsilon|^2 = \frac{\Theta_P}{\omega_n} K_1 \epsilon^{-\frac{n-2}{2}} - I_1(\epsilon) + O(1). \quad (31)$$

Analogamente obtemos o valor das outras integrais

$$\int_{\Omega} |v_\epsilon|^{p+1} = \frac{\Theta_P}{\omega_n} K_2 \epsilon^{-\frac{n}{2}} - I_2(\epsilon) + O(1), \quad (32)$$

em que

$$I_2(\epsilon) := \int_{\Sigma} |u_\epsilon|^{p+1},$$

tendo como valor

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon^{\frac{n+1}{2}}}{\Psi(\sqrt{\epsilon}u_0)} I_2(\epsilon) = \int_0^\infty ds \tilde{\Psi}_1(s) \frac{s^{n-2}}{(1+s^2)^n},$$

ou seja,

$$I_2(\epsilon) = O\left(\frac{\Psi(\sqrt{\epsilon}u_0)}{\epsilon^{\frac{n+1}{2}}}\right).$$

E, também

$$\int_{\Omega} |v_{\epsilon}|^2 = O\left(\epsilon^{-\frac{n-4}{2}}\right), \quad (33)$$

No que segue, consideraremos apenas o caso $n > 4$. O mesmo raciocínio se aplica aos casos $n = 3$ e 4 , bastando trocar $O(\epsilon^{-\frac{n-4}{2}})$ por $O(1)$, se estamos no caso $n = 3$, e por $O(|\log(\epsilon)|)$, se estamos no caso $n = 4$, como podemos ver da equação (27).

Neste caso, das equações (31), (32), (33) e da definição de Q_{λ} , temos

$$Q_{\lambda}(v_{\epsilon}) = \frac{\frac{\Theta_P}{\omega_n} K_1 \epsilon^{-\frac{n-2}{2}} - I_1(\epsilon) + O(1) + O(\epsilon^{-\frac{n-4}{2}})}{\left[\frac{\Theta_P}{\omega_n} K_2 \epsilon^{-\frac{n}{2}} - I_2(\epsilon) + O(1)\right]^{\frac{2}{p+1}}}.$$

Agora, vamos ao terceiro passo, onde provaremos o teorema:

Resta provar que, com as hipóteses do teorema, temos, para ϵ suficientemente pequeno,

$$Q_{\lambda}(v_{\epsilon}) < \frac{S}{\left(\frac{\omega_n}{\Theta_P}\right)^{2/n}},$$

ou, como $S = \frac{K_1}{K_2^{\frac{2}{p+1}}}$,

$$\begin{aligned} \left[\frac{\Theta_P}{\omega_n} K_1 \epsilon^{-\frac{n-2}{2}} - I_1(\epsilon) + O(\epsilon^{-\frac{n-4}{2}})\right] \left[\frac{\omega_n}{\Theta_P}\right]^{2/n} < \\ < \frac{K_1}{K_2^{\frac{2}{p+1}}} \left[\frac{\Theta_P}{\omega_n} K_2 \epsilon^{-\frac{n}{2}} - I_2(\epsilon) + O(1)\right]^{\frac{2}{p+1}}. \end{aligned}$$

Fazendo a multiplicação indicada no primeiro membro, temos

$$\begin{aligned} \left[\left(\frac{\Theta_P}{\omega_n} \right)^{1-2/n} K_1 \epsilon^{-\frac{n-2}{2}} - \left(\frac{\omega_n}{\Theta_P} \right)^{2/n} I_1(\epsilon) + O(\epsilon^{-\frac{n-4}{2}}) \right] < \\ < \frac{K_1}{K_2^{\frac{2}{p+1}}} \left[\frac{\Theta_P}{\omega_n} K_2 \epsilon^{-\frac{n}{2}} - I_2(\epsilon) \right]^{\frac{2}{p+1}} + O(1). \end{aligned}$$

Dividindo por K_1 ,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Theta_P}{\omega_n} \right)^{1-2/n} \epsilon^{-\frac{n-2}{2}} - \frac{1}{K_1} \left(\frac{\omega_n}{\Theta_P} \right)^{2/n} I_1(\epsilon) + O(\epsilon^{-\frac{n-4}{2}}) < \\ < \left[\frac{\Theta_P}{\omega_n} \epsilon^{-\frac{n}{2}} - \frac{1}{K_2} I_2(\epsilon) \right]^{\frac{2}{p+1}}. \end{aligned}$$

Elevando o segundo membro ao expoente indicado e desprezando os termos de ordem menor, chegamos a

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Theta_P}{\omega_n} \right)^{1-2/n} \epsilon^{-\frac{n-2}{2}} - \frac{1}{K_1} \left(\frac{\omega_n}{\Theta_P} \right)^{2/n} I_1(\epsilon) + O(\epsilon^{-\frac{n-4}{2}}) < \\ < \left(\frac{\Theta_P}{\omega_n} \right)^{\frac{n-2}{n}} \epsilon^{-\frac{n-2}{2}} - \frac{2}{p+1} \frac{1}{K_2} I_2(\epsilon) \left(\frac{\Theta_P}{\omega_n} \right)^{-\frac{2}{n}} \epsilon. \end{aligned}$$

Cancelando termos,

$$-\frac{1}{K_1} \left(\frac{\omega_n}{\Theta_P} \right)^{2/n} I_1(\epsilon) + O(\epsilon^{-\frac{n-4}{2}}) < -\frac{2}{p+1} \frac{1}{K_2} I_2(\epsilon) \left(\frac{\Theta_P}{\omega_n} \right)^{-\frac{2}{n}} \epsilon.$$

O que implica em

$$\begin{aligned} \frac{I_1(\epsilon) + O(\epsilon^{-\frac{n-4}{2}})}{\epsilon I_2(\epsilon)} &> \frac{2}{p+1} \frac{K_1}{K_2} \\ &= \frac{n-2}{n} \frac{K_1}{K_2}. \end{aligned} \quad (34)$$

Neste ponto usamos o fato que P tem curvatura média generalizada positiva. Vemos que $I_1(\epsilon)$ tem o mesmo sinal de $\int_0^\infty \tilde{\Psi}_1(r) \frac{r^{n-2}}{(1+r^2)^n} dr$, que é positivo pela equação (16) na definição (1).

Continuando, para termos algum ϵ em que vale a equação (34), basta termos

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{I_1(\epsilon)}{\epsilon I_2(\epsilon)} > \frac{n-2}{n} \frac{K_1}{K_2} = (n-2)^2,$$

onde usamos a equação (23). Neste ponto usamos o fato de P ter aproximação crítica. Podemos desprezar o termo

$$O(\epsilon^{-\frac{n-4}{2}}),$$

pois estamos considerando o caso em que

$$O(I_i(\epsilon)) > O(\epsilon^{-\frac{n-4}{2}}), \text{ isto é } \quad \text{ord}(\Psi) > t^3,$$

para $n > 4$. Seria equivalente a termos

$$O(I_i(\epsilon)) > O(|\log(\epsilon)|), \text{ isto é } \quad \text{ord}(\Psi) > t^3 |\log(t)|,$$

para $n = 4$, ou

$$O(I_i(\epsilon)) > O(1), \text{ isto é } \quad \text{ord}(\Psi) > t^2,$$

para $n = 3$.

Vamos, então calcular

$$\frac{1}{(n-2)^2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{I_1(\epsilon)}{\epsilon I_2(\epsilon)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\frac{\epsilon^{\frac{n-1}{2}}}{\Psi(\sqrt{\epsilon}u_0)} I_1(\epsilon)}{\frac{\epsilon^{\frac{n+1}{2}}}{\Psi(\sqrt{\epsilon}u_0)} I_2(\epsilon)}$$

$$= \frac{\int_0^\infty \tilde{\Psi}_1(r) \frac{r^n}{(1+r^2)^n} dr}{\int_0^\infty \tilde{\Psi}_1(r) \frac{r^{n-2}}{(1+r^2)^n} dr}.$$

Para obtermos a tese do teorema, ou seja, para termos $Q_\lambda(v_\epsilon) < \frac{1}{k_P}$ com ϵ suficientemente pequeno, basta que o último quociente seja menor que 1. Isto quer dizer pela equação (17) da definição (1) que P tem curvatura média generalizada positiva, que é a nossa hipótese. Isto prova o Teorema 3.5.1. ■

Damos, agora, uma condição suficiente para termos a hipótese do teorema anterior. Vamos supor que $\frac{\partial \Psi}{\partial r}(x) > 0$ numa vizinhança de P e $t^3 < \text{ord}(\Psi) < t$. Eu conjeturo que não teremos soluções minimizantes, no caso em que $t^3 \geq \text{ord}(\Psi)$. Se $\text{ord}(\Psi) > t$, nós estamos utilizando o cone errado, pois não podemos ter a carta C^1 com Jacobiano igual a identidade na origem. Quanto ao fato da derivada ser positiva, é necessário alguma hipótese deste tipo. No caso, estamos dizendo que, localmente, o domínio está localizado dentro do cone tangente. Adimurthi-Mancini e Wang assumem uma hipótese mais forte, qual seja, a existência de um ponto com curvatura média positiva. Lembro que eles podem fazer isso, pois seus domínios são C^2 em todo ponto, e portanto existe um ponto deste tipo.

Teorema 3.5.2 *Se um ponto P tem aproximação maior que a crítica,*

$$\frac{\partial \Psi}{\partial r}(y) \geq 0$$

para y numa vizinhança de P , sendo positiva em tu_0 , para t suficiente pequeno, então P tem curvatura média generalizada positiva.

Demonstração:

Utilizando integração por partes ($u = \Psi(r)/(1+r^2)^{n-1}dv = r^{n-2}dr$), obtemos

$$\int_0^\infty \frac{\Psi(r)r^{n-2} dr}{(1+r^2)^{n-1}} = -\frac{1}{n-1} \int_0^\infty \frac{\Psi'(r)r^{n-1} dr}{(1+r^2)^{n-1}} + 2 \int_0^\infty \frac{\Psi(r)r^n dr}{(1+r^2)^n}. \quad (35)$$

Por outro lado, fazendo $r^n = r^{n-2}(1 + r^2 - 1)$, segue que

$$\int_0^\infty \frac{\Psi(r)r^n dr}{(1+r^2)^n} = \int_0^\infty \frac{\Psi(r)r^{n-2} dr}{(1+r^2)^{n-1}} - \int_0^\infty \frac{\Psi(r)r^{n-2} dr}{(1+r^2)^n}. \quad (36)$$

Portanto, levando a equação (35) na equação (36), temos que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\Psi(r)r^n dr}{(1+r^2)^n} &= -\frac{1}{n-1} \int_0^\infty \frac{\Psi'(r)r^{n-1} dr}{(1+r^2)^{n-1}} + 2 \int_0^\infty \frac{\Psi(r)r^n dr}{(1+r^2)^n} \\ &\quad - \int_0^\infty \frac{\Psi(r)r^{n-2} dr}{(1+r^2)^n}, \end{aligned}$$

o que implica

$$\int_0^\infty \frac{\Psi(r)r^n dr}{(1+r^2)^n} = \int_0^\infty \frac{\Psi(r)r^{n-2} dr}{(1+r^2)^n} + \frac{1}{(n-1)} \int_0^\infty \frac{\Psi'(r)r^{n-1} dr}{(1+r^2)^{n-1}}.$$

Isto mostra que

$$\frac{\int_0^\infty \tilde{\Psi}_1(r) \frac{r^n}{(1+r^2)^n} dr}{\int_0^\infty \tilde{\Psi}_1(r) \frac{r^{n-2}}{(1+r^2)^n} dr} = 1 + \frac{1}{(n-1)} \frac{\int_0^\infty \frac{r^{n-1} \tilde{\Psi}'_1(r) dr}{(1+r^2)^{n-1}}}{\int_0^\infty \tilde{\Psi}_1(r) \frac{r^{n-2}}{(1+r^2)^n} dr}.$$

Então, para o primeiro termo da equação acima ser maior do que 1, é suficiente termos

$$\tilde{\Psi}'_1(r) > 0, \quad \text{ou} \quad \frac{\partial \Psi}{\partial r}(y) \geq 0,$$

sendo positiva em algum ponto. Mas esta é a nossa hipótese. ■

Vamos, então renunciar e demonstrar o Teorema central deste capítulo.

Teorema 3.5.3 *Seja Ω um domínio limitado de \mathbb{R}^n com fronteira $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, satisfazendo a hipótese D, com C_P um cone convexo para cada ponto de Γ_1 . Suponhamos que exista um ponto $P \in \Gamma_1$ tal que $\Theta_P = \Theta_\Omega$,*

com curvatura média generalizada positiva e com aproximação maior que a crítica. Então, para $\lambda > \lambda_1$, o problema

$$(P_\lambda) \quad \begin{cases} -\Delta u + \lambda u = u^p & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{em } \Gamma_1 \\ u = 0 & \text{em } \Gamma_0 \\ u > 0 & \text{em } \Omega \end{cases}$$

possui uma solução fraca u_λ , que minimiza o funcional Q_λ . Temos, também,

$$Q_\lambda(u_\lambda) < \frac{1}{K(\Omega)} = \frac{S}{\left(\frac{\omega_n}{\Theta_\Omega}\right)^{\frac{2}{n}}}.$$

Demonstração:

O Teorema 3.5.1 nos dá uma função $v_\epsilon \in V$, que mostra que

$$S_\lambda = \inf_{u \in V} Q_\lambda(u) < \frac{1}{K_P} = \frac{1}{K(\Omega)}.$$

O Teorema 3.3.1 pode, então, ser aplicado, e terminamos a prova. ■

Diferentemente do caso em que a fronteira é C^1 , existem domínios com fronteira lipschitziana, onde não há pontos com curvatura média generalizada positiva; por exemplo, em um cubo, a curvatura média generalizada é nula em todo ponto. Eu conjecturo, todavia, que se a curvatura média generalizada não é positiva em algum ponto P de Γ_1 com $\Theta_P = \Theta_\Omega$, o ínfimo não é atingido, para λ suficientemente grande.

Agora daremos exemplos de domínios, com fronteira não C^1 , que satisfazem as condições do Teorema 3.5.3.

Tomamos um domínio Ω , com fronteira C^2 , simétrico em relação a um plano H e que contenha um ponto $P \in \partial\Omega \cap H$ com curvatura média positiva, e chamamos de Ω_1 , qualquer dos dois domínios obtidos pelo corte de Ω por H . Os pontos, em que Ω_1 não é C^1 , são os pontos de $\partial\Omega \cap H$, e portanto $\Theta_\Omega = \Theta_P = \omega_n/2$. O ponto P tem aproximação igual a 2 e curvatura média generalizada positiva. Logo, Ω_1 satisfaz as hipóteses do Teorema 3.5.3. Em particular, temos soluções na metade de uma bola. O mesmo argumento se

aplica no caso do domínio ser um setor de um domínio axialmente simétrico, tipo de domínio que nos será muito útil no próximo capítulo.

4 Simetria de soluções minimizantes

4.1 Introdução

Neste capítulo, vamos provar que, se o domínio é simétrico, as soluções minimizantes preservam parte da simetria do domínio. Este resultado é uma espécie de generalização do conhecido teorema de Gidas-Ni-Nirenberg [25], que trata do caso em que temos condição de Dirichlet na fronteira e domínios convexos. Aqui tratamos tanto o caso em que temos condição de Neumann na fronteira, como também condição de Dirichlet em domínios não necessariamente convexos. Restringimos, todavia, a parte não linear da equação e consideramos somente as soluções minimizantes.

Como mudaremos, frequentemente, de domínios, passaremos a usar a notação P_Ω para o problema

$$(P_\Omega) \quad \begin{cases} -\Delta u + \lambda u = u^p & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{em } \Gamma_1 \\ u = 0 & \text{em } \Gamma_0 \\ u > 0 & \text{em } \Omega. \end{cases}$$

De forma similar, denotaremos por Q_Ω e S_Ω , respectivamente o funcional e seu ínfimo, como introduzido anteriormente.

Notamos que o mesmo método se aplica à equação $-\Delta u = f(x, u)$, quando temos soluções minimizantes. Daremos a demonstração apenas no caso em que $\Gamma_0 = \emptyset$, isto é, quando temos condição de Neumann na fronteira.

4.2 Soluções simétricas em relação a um $(n - 1)$ -plano

Seja Ω um domínio C^2 simétrico em relação a um hiperplano $H(\{x_n = 0\})$ e com um ponto com curvatura média positiva em $\partial\Omega \cap H$. A curvatura não sendo nula, vemos que a aproximação do ponto P é 2. Notamos que a hipótese da curvatura ser positiva em algum ponto não é supérflua, pois um domínio em forma de halteres possui simetria em relação a um plano, mas não possui um ponto de curvatura média positiva na interseção de sua fronteira com o plano de simetria. Neste caso, as soluções minimizantes não são simétricas, como mostrado a seguir, e talvez não existam soluções simétricas com energia baixa. Chamaremos de

$$\frac{\Omega}{2} = \Omega \cap \{x_n > 0\}.$$

Estaremos estudando o problema de Neumann

$$(P_{\frac{\Omega}{2}}) \quad \begin{cases} -\Delta u + \lambda u = u^p & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{em } \partial\Omega \\ u > 0 & \text{em } \Omega. \end{cases}$$

Nesta situação, temos

$$\partial\frac{\Omega}{2} = (\partial\Omega \cap \{x_n > 0\}) \cup (\partial\Omega \cap H) \cup (\Omega \cap H).$$

É fácil ver que, para P pertencente ao bordo de $\frac{\Omega}{2}$,

$$\Theta_P = \begin{cases} \frac{\omega_n}{2}, & \text{se } P \in \partial\Omega \cap \{x_n > 0\} \text{ ou } P \in \Omega \cap H \\ \frac{\omega_n}{4}, & \text{se } P \in \partial\Omega \cap H, \end{cases}$$

e, conseqüentemente, usando Corolário 3.4.1, temos

$$\Theta_{\frac{\Omega}{2}} = \frac{\omega_n}{4}$$

e

$$K_{\frac{\Omega}{2}} = \frac{4^{\frac{2}{n}}}{S}.$$

Dada uma função

$$u : \frac{\Omega}{2} \rightarrow \mathbb{R},$$

definimos sua extensão \tilde{u} a Ω por

$$\tilde{u}(x) = u(x', x_n) = \begin{cases} u(x', x_n), & \text{se } x_n \geq 0 \\ u(x', -x_n), & \text{se } x_n < 0. \end{cases}$$

Temos os seguintes lemas

Lema 4.2.1 *Se $u \in H^1(\frac{\Omega}{2})$, então $\tilde{u} \in H^1(\Omega)$ e $Q_\Omega(\tilde{u}) = 2^{\frac{2}{n}} Q_{\frac{\Omega}{2}}(u)$.*

Demonstração: Ver, por exemplo, [12], Lemme IX.2. ■

Lema 4.2.2 *Se u é uma solução fraca de $(P_{\frac{\Omega}{2}})$, então \tilde{u} , como definida acima, é uma solução fraca de P_Ω .*

Demonstração:

Queremos provar que, para qualquer $\phi \in H^1(\Omega)$, temos

$$\int_{\Omega} \nabla \tilde{u} \nabla \phi + \lambda \int_{\Omega} \tilde{u} \phi = \int_{\Omega} \tilde{u}^{p+1} \phi. \quad (37)$$

Chamamos $\Omega' = \Omega \setminus \frac{\Omega}{2}$ e vemos que $\phi|_{\frac{\Omega}{2}} \in H^1(\frac{\Omega}{2})$ e $\phi|_{\Omega'} \in H^1(\Omega')$.

Então como $\tilde{u}|_{\frac{\Omega}{2}} = u$ é uma solução fraca de $(P_{\frac{\Omega}{2}})$ e $\tilde{u}|_{\Omega'}$ é uma solução fraca de $(P_{\Omega'})$, temos que

$$\int_{\frac{\Omega}{2}} \nabla \tilde{u} \nabla \phi + \lambda \int_{\frac{\Omega}{2}} \tilde{u} \phi = \int_{\frac{\Omega}{2}} \tilde{u}^{p+1} \phi$$

e

$$\int_{\Omega'} \nabla \tilde{u} \nabla \phi + \lambda \int_{\Omega'} \tilde{u} \phi = \int_{\Omega'} \tilde{u}^{p+1} \phi.$$

Portanto, temos (37). ■

Teorema 4.2.1 *Se Ω é um domínio C^2 , simétrico em relação a um hiperplano H e com um ponto com curvatura média positiva no plano de simetria, então existe solução \tilde{u} de P_Ω , que é simétrica com relação ao hiperplano H , e que tem um nível de energia $Q_\Omega(\tilde{u}) < \frac{S}{2^{2/n}}$.*

Demonstração:

Como P tem curvatura média positiva em $\partial\Omega$, é fácil ver que ele tem curvatura média generalizada positiva em $\partial\frac{\Omega}{2}$. E, como sua aproximação é 2, temos que $\frac{\Omega}{2}$ satisfaz as hipóteses do Teorema 3.5.3, ou seja, existe uma solução u de $P_{\frac{\Omega}{2}}$, com energia $Q_{\frac{\Omega}{2}}(u) < \frac{S}{4^{2/n}}$ e, portanto, \tilde{u} , como definida acima, é solução de P_{Ω} , com energia $Q_{\Omega}(\tilde{u}) < \frac{S}{2^{2/n}}$. ■

Observamos que Ω também satisfaz o Teorema 3.5.3 e, portanto, tem uma solução u_1 minimizante, com energia $Q_{\Omega}(u_1) < \frac{S}{2^{2/n}}$.

Surge, então, uma questão : estas soluções são iguais ou diferentes? Ou seja, as soluções minimizantes são simétricas ou temos um resultado de multiplicidade? A resposta depende de Ω .

Para um exemplo do segundo caso, lembramos o seguinte teorema de Adimurthi-Pacella-Yadava [4] (vamos usar, momentaneamente, a notação $P_{\lambda,\Omega}$ para o nosso problema e $u_{1,\lambda}$ para a solução minimizante correspondente):

Teorema 4.2.2 (APY) *Seja $n > 4$, Ω um domínio C^2 e u_{λ} solução minimizante de $P_{\lambda,\Omega}$, com $p = \frac{n+2}{n-2}$. Então, para λ suficientemente grande, cada solução $u_{1,\lambda}$ tem apenas um ponto de máximo y_{λ} . Mais ainda, quando λ tende a infinito, os pontos de acumulação do conjunto $\{y_{\lambda}\}$ estão entre os pontos de $\partial\Omega$ em que a curvatura média é máxima.*

Vamos, então dar um exemplo em que as soluções minimizantes não são simétricas.

Teorema 4.2.3 *Seja Ω um domínio C^2 , simétrico em relação a um hiperplano H , cujos pontos de curvatura média máxima não estão localizados em H . Seja também $n > 4$ e $p = \frac{n+2}{n-2}$. Então, para λ suficientemente grande, u_1 e \tilde{u} são diferentes. Ou seja, as soluções minimizantes não são simétricas em relação a H .*

Demonstração:

Suponhamos que exista uma sequência λ_n tendendo a infinito, tal que $u_{1,\lambda_n} \equiv \tilde{u}_{\lambda_n}$, ou seja, uma solução minimizante que é simétrica. Pelo Teorema 4.2.2, para λ suficientemente grande, cada solução u_{1,λ_n} possui apenas um ponto de máximo x_{λ_n} , e pela simetria das soluções, eles têm que estar

localizados em H . Logo os pontos de acumulação do conjunto x_{λ_n} também estão em H , e, pelo teorema de Adimurthi-Pacella-Yadava, têm curvatura média máxima. Mas isso contraria a hipótese. ■

Para um exemplo do primeiro caso, consideramos o caso em que o domínio é simétrico em relação a um $(n - 2)$ -plano. Caso $n = 3$, temos um domínio de revolução. Utilizaremos, para isto, o método do plano rotativo. Usando coordenadas cilíndricas

$$(x', r, \alpha), \text{ com } x' \in \mathbb{R}^{n-2}, \quad r \in \mathbb{R}^+, \quad \alpha \in [0, 2\pi),$$

temos que as correspondentes coordenadas cartesianas são

$$x_1 = r \cos \alpha, \quad x_2 = r \sin \alpha, \quad (x_3, \dots, x_n) = x'.$$

Supomos que $\{r = 0\}$ é o plano de simetria de Ω , isto é,

$$(x'_0, r_0, \alpha_0) \in \Omega \Leftrightarrow (x'_0, r_0, \alpha) \in \Omega \text{ para qualquer } \alpha.$$

Teorema 4.2.4 *Se Ω é um domínio C^2 , simétrico em relação a um $(n - 2)$ -plano e com um ponto com curvatura média positiva no plano de simetria, então as soluções minimizantes são simétricas em relação a um hiperplano.*

Demonstração:

Definimos

$$\Omega_\theta = \{x \in \Omega; \theta < \alpha < \theta + \pi\}$$

Seja u solução minimizante de P_Ω e $u_\theta = u|_{\Omega_\theta}$. Definimos

$$\begin{aligned} f : S^1 &\rightarrow \mathbb{R} \\ \theta &\rightarrow \left\| u_\theta \right\|_{p+1}^{p+1} - \frac{1}{2} \left\| u \right\|_{p+1}^{p+1} \end{aligned}$$

onde as normas são calculadas nos domínios correspondentes.

Temos que

$$\left\| u_\theta \right\|_{p+1}^{p+1} + \left\| u_{\theta+\pi} \right\|_{p+1}^{p+1} = \left\| u \right\|_{p+1}^{p+1},$$

e, portanto,

$$f(\theta) + f(\theta + \pi) = 0.$$

Logo f é uma função real, contínua e ímpar (quer dizer, a função assume valores simétricos em pontos antípodas), definida em S^1 , e, portanto, tem um zero θ_1 . Assim, pela equação acima, também $f(\theta_1 + \pi) = 0$. Escolhemos $\theta_0 := \theta_1$ ou $\theta_0 := \theta_1 + \pi$, aquele que nos fornecer o menor valor para $\|\nabla u_\theta\|_2^2 + \lambda \|u_\theta\|_2^2$.

Neste caso, temos, pela escolha de θ_0 ,

$$\begin{aligned} \|\nabla u_{\theta_0}\|_2^2 + \lambda \|u_{\theta_0}\|_2^2 &\leq \\ &\leq \frac{1}{2}(\|\nabla u_{\theta_0}\|_2^2 + \lambda \|u_{\theta_0}\|_2^2 + \|\nabla u_{\theta_0+\pi}\|_2^2 + \lambda \|u_{\theta_0+\pi}\|_2^2) \\ &= \frac{\|\nabla u\|_2^2 + \lambda \|u\|_2^2}{2}, \end{aligned}$$

e, como $f(\theta_0) = 0$,

$$\|u_{\theta_0}\|_{p+1}^2 = \frac{\|u\|_{p+1}^2}{2^{2/p+1}}.$$

Logo, temos

$$Q_{\Omega_{\theta_0}}(u_{\theta_0}) \leq 2^{2/(p+1)-1} Q_\Omega(u) = \frac{Q_\Omega(u)}{2^{2/n}}.$$

Assim, para \tilde{u}_{θ_0} (a função em Ω , definida a partir de u_{θ_0} por simetria) temos, pelo Lema 4.2.2,

$$Q_\Omega(\tilde{u}_{\theta_0}) = 2^{2/n} Q_{\Omega_{\theta_0}}(u_{\theta_0}) \leq Q_\Omega(u).$$

Como u é solução minimizante para Q_Ω , temos igualdade nas desigualdades acima. Logo \tilde{u}_{θ_0} é, também, solução minimizante de Q_Ω , que coincide com u em Ω_{θ_0} . Pelo princípio da continuação única, temos que $u = u_{\theta_0}$, e, portanto, u é simétrica em relação ao plano $\{\theta = \theta_0\}$. ■

Observação: Na verdade, a prova nos diz que, para cada $(n-2)$ -plano H de simetria de Ω e u_λ solução minimizante de (P_λ) , existe um hiperplano que contém H , que é um hiperplano de simetria de u_λ .

4.3 Soluções simétricas em relação a um $(n - 2)$ -plano

Vamos provar, agora, que, no caso em que o domínio é simétrico em relação a um $(n - 2)$ -plano J , temos uma solução simétrica em relação a J , ou seja, uma solução que não depende de θ , como definido na seção anterior.

Seja Ω um domínio C^2 simétrico em relação a um $(n - 2)$ -plano J com um ponto em $\partial\Omega \cap J$ com curvatura média positiva.

Teorema 4.3.1 *Com as hipóteses acima sobre Ω , existem soluções u de P_Ω , que independem de θ , e tais que $Q_\Omega(u) < \frac{S}{2^{2/n}}$*

Demonstração:

Usaremos coordenadas cilíndricas, como acima.

Seja

$$\Sigma_\theta = \{x \in \Omega; 0 < \alpha < \theta\}.$$

Então

$$\partial\Sigma_\theta = (\{x \in \partial\Omega; 0 \leq \alpha \leq \theta\}) \cup (\{x \in \Omega; \alpha = 0 \text{ ou } \alpha = \theta\}).$$

Temos, então, para $P \in \partial\Sigma_\theta$ ($P = (P', r_P, \alpha_P)$),

$$\Theta_P = \begin{cases} \frac{\omega_n}{2}, & \text{se } (P \in \partial\Omega \text{ e } 0 < \alpha < \theta) \\ & \text{ou } (P \in \Omega, r > 0 \text{ e } (\alpha = 0 \text{ ou } \alpha = \theta)) \\ \frac{\omega_n}{4}, & \text{se } P \in \partial\Omega \text{ e } (\alpha = 0 \text{ ou } \alpha = \theta) \\ \frac{\theta\omega_n}{2\pi}, & \text{se } P \in \Omega \text{ e } r = 0 \\ \frac{\theta\omega_n}{4\pi}, & \text{se } P \in \partial\Omega \text{ e } r = 0. \end{cases}$$

Logo,

$$\Theta_{\Sigma_\theta} = \frac{\theta\omega_n}{4\pi}$$

e

$$K(\Sigma_\theta) = \frac{(4\pi)^{2/n}}{S}.$$

Uma vez que estamos supondo a existência de um ponto em $J \cap \partial\Omega$ com curvatura média positiva, o Teorema 3.5.3 nos dá uma solução minimizante u_θ em Σ_θ . Utilizaremos as soluções $u_i = u_{\theta_i}$, com $\theta_i = \frac{\pi}{2^i}$, $i = 1, 2, 3, \dots$.

Definimos uma solução \tilde{u}_i de P_Ω , por simetria:

$$\tilde{u}_i(x) = \begin{cases} u_{\theta_i}(x), & \text{se } x \in \Sigma_{\theta_i} \\ u_{\theta_i}(x', r, 2\theta_i - \theta_x), & \text{se } x \in \Sigma_{2\theta_i} \setminus \Sigma_{\theta_i} \\ \tilde{u}_{\theta_i}(x', r, \theta_x \bmod 2\theta_i), & \text{se } x \notin \Sigma_{2\theta_i} \end{cases}$$

onde $x = (x', r, \theta)$.

Sabemos que $\tilde{u}_i(x)$ é solução fraca de P_Ω e

$$\begin{aligned} Q_\Omega(\tilde{u}_i) &= (2^{i+1})^{2/n} Q_{\Sigma_{\theta_i}}(u_i) < (2^{i+1})^{2/n} Q_{\Sigma_\theta}(u_\epsilon |_{\Sigma_\theta}) = \\ &< (2^{i+1})^{2/n} \frac{Q_\Omega(u_\epsilon)}{(2^{i+1})^{2/n}} = \\ &< Q_\Omega(u_\epsilon) \\ &< \frac{S}{2^{2/n}}, \end{aligned}$$

em que $u_\epsilon = 1/(\epsilon^2 + |x|^2)^{n/2}$ e ϵ é escolhido convenientemente.

Logo, estas soluções estão em um nível em que vale a condição $(PS)_c$, como está provado em Wang [52]. Assim, as soluções u_i 's convergem fortemente, quando i tende a infinito, a uma solução u , que é simétrica em relação ao $(n-2)$ -plano J , pois a convergência em $H^1(\Omega)$ implica em convergência qtp. Para funções contínuas, isto significa convergência em todo ponto. Como as soluções u_j , com $j \geq i$, são periódicas em θ de período $\frac{\pi}{2^{j-1}}$, u será periódica de período $\frac{\pi}{2^{i-1}}$, para cada i . Logo, será constante em θ . ■

Surge, novamente, a pergunta: Temos uma propriedade da função minimizante ou um resultado de multiplicidade? A resposta é a mesma daquela dada na Seção 4.2. Se os pontos de curvatura média máxima não estiverem em J , esta solução não pode ser minimizante, pelo menos para λ grande, pelo resultado de Adimurthi-Pacella-Yadava já citado. Mas a solução será minimizante, se tivermos mais simetrias, como mostraremos a seguir.

Seja Ω simétrico em relação a um $(n-3)$ -plano, tendo um ponto de curvatura média positiva nele. (Se $n=3$, só temos a bola, pois 0-plano é um ponto).

Usaremos coordenadas esféricas

$$(x', r, \theta, \phi) \quad \text{com} \quad x' \in \mathbb{R}^{n-3}, \quad r \in \mathbb{R}^+, \quad \theta \in [0, 2\pi), \quad \phi \in [0, \pi].$$

As coordenadas cartesianas correspondentes são

$$\begin{aligned}x_1 &= r \cos \theta \sin \phi, \\x_2 &= r \sin \theta \sin \phi, \\x_3 &= r \cos \phi, \\x' &= (x_4, \dots, x_n).\end{aligned}$$

Supomos que $\{r = 0\}$ é o $(n - 3)$ -plano de simetria, isto é

$$x = (x', r, \theta_0, \phi_0) \in \Omega \Leftrightarrow (x', r, \theta, \phi) \in \Omega \forall 0 \leq \theta < 2\pi, 0 \leq \phi < \pi$$

Teorema 4.3.2 *Se Ω é um domínio C^2 , simétrico em relação a um $(n - 3)$ -plano J , com um ponto de curvatura média positiva em $\partial\Omega \cap J$, então as soluções minimizantes são simétricas em relação a um $(n - 2)$ -plano que contém J .*

Demonstração:

Mantendo um ponto fixo P com curvatura média positiva, o $(n - 2)$ -plano que contém P e J é um plano de simetria de Ω e, pelo Teorema 4.2.4, as soluções minimizantes são simétricas em relação a um hiperplano que contém J e P .

Podemos ter duas opções:

A) A solução é simétrica em relação a todo hiperplano de simetria de Ω . Neste caso, a solução é simétrica em relação ao $(n - 3)$ -plano $x' = 0$.

B) A solução não é simétrica em relação a algum hiperplano de simetria de Ω , que vamos denotar por H . Então pela observação que se segue ao Teorema 4.2.4, para cada ponto P em H , existe um hiperplano de simetria da solução, que contém P . Como a interseção de dois hiperplanos é um $(n - 2)$ -plano e um conjunto enumerável de $(n - 2)$ -planos não pode preencher o hiperplano H , nós encontramos um conjunto não enumerável de hiperplanos de simetria da solução.

A demonstração do teorema se completa usando o lema a seguir. ■

Lema 4.3.1 *Uma função, que tenha um conjunto não enumerável de $(n - 1)$ -planos de simetria, possui um $(n - 2)$ -plano de simetria*

Demonstração:

Primeiro, faremos uso da seguinte

Afirmção: Existem dois $(n - 1)$ -planos de simetria da função, que fazem entre si um ângulo múltiplo irracional de π .

Usando a afirmação, terminamos a prova do lema.

Usaremos coordenadas cilíndricas

$$(x', r, \theta), x' \in \mathbb{R}^{n-2}, r \in \mathbb{R}^+, \theta \in [0, 2\pi),$$

de modo que um $(n - 1)$ -plano é $\theta = 0$, e o outro, $\theta = \theta_0$. Então, nós temos

$$u(x', r, \theta) = u(x', r, -\theta) = u(x', r, 2\theta_0 - \theta) = u(x', r, \theta - 2\theta_0),$$

ou seja, $u(., ., \theta)$ tem períodos 2π e $2\theta_0$, racionalmente independentes e, portanto, é constante, isto é, a solução é simétrica em relação à interseção dos hiperplanos, provando o lema.

Demonstração da afirmação: Vamos identificar os $(n - 1)$ -planos com seus vetores normais de norma 1. Seja j a dimensão do espaço E gerado pelos vetores normais correspondentes aos planos de simetria da função, e sejam $u_i, i = 1, \dots, j$, vetores linearmente independentes em E . Cada vetor v , correspondente a um dos planos de simetria da função, satisfaz o sistema

$$u_i \cdot v = \cos(r_i \pi).$$

Sendo $\{u_i\}$ um conjunto linearmente independente, este sistema possui, no máximo, uma solução de norma 1. Isto mostra que a função do conjunto de planos de simetria da função em \mathbb{R}^j , que leva cada plano na n -upla $(\cos^{-1}(u_i \cdot v), i = 1, \dots, j)$, é injetiva. Se $r_i \in \mathbb{Q}$ para todo i e cada plano de simetria de f , isto nos daria uma contradição, pois nos mostraria que o conjunto de planos é enumerável. Logo, $r_i \notin \mathbb{Q}$, para algum i e algum plano de simetria de f . Então os $(n - 1)$ -planos cujas normais são v e u_i são os planos pedidos na afirmação. ■

Generalizando, temos

Lema 4.3.2 *Seja Ω simétrico em relação a um j -plano H , com $j \leq n - 2$, e $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, função com a seguinte propriedade: para cada $n - 2$ -plano J de simetria de Ω , u possui um $n - 1$ -plano de simetria contendo J . Então u é simétrica em relação a um $j + 1$ -plano contendo H .*

Demonstração:

Por indução em $n - j$.

Se $j = n - 2$, a tese é a hipótese.

Se $j = n - 3$, a prova está contida nos teoremas acima.

Então, podemos supor $j < n - 3$ e que o lema é válido para $j + 1$, isto é, para cada $(j + 1)$ -plano de simetria de Ω , existe um $(j + 2)$ -plano de simetria de u .

Tomamos u vetor ortogonal a H , e J_1 um $(j + 2)$ -plano de simetria de f que contém u e H .

Tomamos v vetor ortogonal a H , não contido em J_1 e fazendo um ângulo θ_0 , não múltiplo racional de π , com u . tomamos J_2 um $(n - 1)$ -plano de simetria de f que contém v e H .

Chamamos $J_3 := J_1 \cap J_2$. Tomamos vetores $u_1, u_2, \dots, u_{n-1}, u_n$ ortonormais, tais que $u, v \in \langle u_{j+2}, u_{j+3} \rangle$ e

$$\begin{aligned} H &= \langle u_1, u_2, \dots, u_j \rangle \\ J_1 &= \langle u_1, u_2, \dots, u_j, u_{j+1}, u_{j+2} \rangle \\ J_2 &= \langle u_1, u_2, \dots, u_j, u_{j+1}, v, u_{j+4}, \dots, u_{n-1} \rangle \\ J_3 &= \langle u_1, u_2, \dots, u_j, u_{j+1} \rangle . \end{aligned}$$

Usaremos coordenadas cartesianas, sendo x_i a direção de u_i . No plano $\langle x_{j+2}, x_{j+3} \rangle$ usaremos coordenadas polares (r, θ) , em que $r^2 = x_{j+2}^2 + x_{j+3}^2$ e $\theta = \tan^{-1} \frac{x_{j+3}}{x_{j+2}}$.

Como f é simétrica em relação a J_1 , temos

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_j, x_{j+1}, r, \theta, x_{j+4}, \dots, x_n) = \\ f(x_1, x_2, \dots, x_j, x_{j+1}, r, -\theta, -x_{j+4}, \dots, -x_n). \end{aligned}$$

Como f é simétrica em relação a J_2 , temos

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_j, x_{j+1}, r, \theta, x_{j+4}, \dots, x_n) = \\ f(x_1, x_2, \dots, x_j, x_{j+1}, r, 2\theta_0 - \theta, x_{j+4}, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Com na prova do Lema 4.3.1, temos que f é constante em θ e portanto simétrica em relação ao $(j + 1)$ -plano J_3 . Isto termina a prova da indução e do lema. ■

Teorema 4.3.3 *Se Ω é simétrico em relação a um j -plano, com $j \leq n - 2$, então as soluções minimizantes possuem um $(j + 1)$ -plano de simetria.*

Demonstração:

Basta utilizar o Lema 4.3.2, já que sua hipótese está provada na observação que se segue ao Teorema 4.2.4, que usa o método do plano rotativo. ■

O professor Orlando Lopes, em comunicação pessoal, me mostrou um argumento ad hoc para a demonstração do Teorema 4.3.2. Esta demonstração se baseia no lema a seguir, que substitui o Lema 4.3.1, no caso em que f é mínimo de um funcional.

Lema 4.3.3 *Se um mínimo u de um funcional tem dois hiperplanos de simetria perpendiculares, então u é simétrica em relação à interseção dos hiperplanos.*

Demonstração:

Vamos considerar coordenadas (r, θ, x') , sendo

$(0, 0, x')$ correspondente à interseção dos hiperplanos,

$(r, 0, x')$ correspondente a um dos hiperplanos,

$(r, \pi/2, x')$ correspondente ao segundo hiperplano.

Neste caso,

$$u(r, \theta, x') = u(r, \pi - \theta, x') = u(r, \pi + \theta, x')$$

Tomando, agora, qualquer outro hiperplano H passando pela interseção dos hiperplanos, vemos que para qualquer ponto x , ele e seu simétrico $-x$ estão em lados opostos de H . Isto implica que as integrais que definem o funcional são iguais em cada metade do domínio. Como na prova do Teorema 4.2.4, temos que f é simétrica em relação a H . Isto implica que f é simétrica em relação à interseção dos hiperplanos, como na prova do Lema 4.3.1. ■

Para provar o Teorema 4.3.2, encontramos um hiperplano H_1 de simetria da solução, usando o Teorema 4.2.4. Para encontrarmos H_2 , um hiperplano de simetria ortogonal a H_1 , nós usamos a observação que se segue a este teorema, utilizando, como o $(n - 2)$ -plano, o gerado pelo $(n - 3)$ -plano J e a reta ortogonal a H_1 . Depois, basta utilizar o Lema 4.3.3.

Duas outras construções podem ser feitas seguindo os mesmos argumentos deste capítulo:

A primeira nos dá soluções positivas de P_Ω com a simetria do domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, simétrico com relação aos planos $\{x_i = 0\}, i = 1, \dots, n$. Notamos que isto implica que Ω é um domínio par, ou seja simétrico com relação à origem. Domínios pares foram estudados por Zhi-Qiang Wang [54] e [55]. Nós achamos soluções que têm mais simetrias, com o custo de exigirmos mais simetrias do domínios.

Para isso definimos

$$\Omega' = \{x \in \Omega; x_i > 0, i = 1, \dots, n\}.$$

Vemos que Ω é constituído de 2^n regiões isométricas a Ω' . Tendo encontrado uma solução de $P_{\Omega'}$, seguindo o Teorema 3.5.3, definimos sua extensão \tilde{u} a Ω por

$$\tilde{u}(x) = \tilde{u}(x_1, \dots, x_n) = u(|x_1|, \dots, |x_n|).$$

Como na Seção 4.2, \tilde{u} é uma solução de P_Ω , simétrica com relação aos n planos coordenados. É fácil ver que

$$\Theta_{\Omega'} = \frac{1}{2^n} \omega_n,$$

o que implica

$$K_{\Omega'} = \frac{2^n}{S}.$$

Logo, temos que

$$Q_\lambda(u) < \frac{S}{2^n},$$

e

$$Q_\lambda(\tilde{u}) < 2^n \frac{S}{2^n} = S.$$

Utilizando o Lema 3.2.3, vemos que, variando λ , $Q_\lambda(\tilde{u}_\lambda) \rightarrow S$, ou seja, estas soluções não são minimizantes, e por isso, não podemos usar o Lema 4.3.3 para concluirmos que elas são simétricas com relação a algum $(n-2)$ -plano.

Mas, como na Seção 4.3, o serão, se Ω tiver simetria com relação a um $(n - 3)$ -plano.

A segunda construção nos dá soluções, que trocam de sinal, em domínios que são simétricos com respeito a um plano H , para o problema

$$(\tilde{P}_\lambda) \quad \begin{cases} -\Delta u + \lambda u = |u|^{\frac{4}{n-2}} u & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

É suficiente encontrar uma solução em $\frac{\Omega}{2}$ (condição de Neumann em $\partial\Omega \cap \frac{\Omega}{2}$ e condição de Dirichlet em H), e ao invés de fazer uma simetria em relação a H , estender a solução de uma maneira antisimétrica:

$$\tilde{u}(x) = u(x', x_n) = \begin{cases} u(x', x_n), & \text{se } x_n \geq 0 \\ -u(x', -x_n), & \text{se } x_n < 0. \end{cases}$$

É fácil ver que $\tilde{u} \in H^1(\Omega)$, se $u \in V = \{v \in H^1(\Omega'); v \equiv 0 \text{ em } H \cap \Omega\}$, e que \tilde{u} é solução fraca de \tilde{P}_Ω , se u é solução fraca de $P_{\frac{\Omega}{2}}$. Teremos, então, uma solução de P_Ω com duas regiões nodais. Podemos também achar soluções com n regiões nodais, para qualquer n , se supusermos que o domínio é simétrico em relação a um $(n - 2)$ -plano. Para isto, é suficiente usar os domínios $\Omega_{\frac{\pi}{n}}$ definidos na Seção 4.3. Este tipo de solução foi estudada por Comte e Knaap [20] e [21], usando um método diferente.

Bibliografia

- [1] ADAMS, R. A. **Sobolev Spaces**. New York: Academic Press. 1975.
- [2] ADIMURTHI and MANCINI, G. The Neumann problem for elliptic equations with critical nonlinearity. In: Ambrosetti, A. and A. Marino, editors, **Nonlinear analysis: A Tribute in Honor of G. Prodi**, pages 9–25. Scuola Normale Superiore di Pisa. 1991.
- [3] ADIMURTHI, MANCINI, G. , and YADAVA, S. L. The role of the mean curvature in semilinear Neumann problem involving critical nonlinearity. **Communications in Partial Differential Equations**. **20**(3,4):591–631. 1995.
- [4] ADIMURTHI, PACELLA, F. , and YADAVA, S. L. Interaction between the geometry of the boundary and positive solutions of a semilinear Neumann problem with critical nonlinearity. **Journal of Functional Analysis**. **113**:318–350. 1993.
- [5] ADIMURTHI, PACELLA, F. , and YADAVA, S. L. Characterization of concentration point and L^∞ -estimates for solutions of a semilinear Neumann problem involving critical Sobolev exponent. **Differential and Integral Equations**. **8**(1):41–68. 1995.
- [6] ADIMURTHI and YADAVA, S. L. Critical Sobolev exponent problem in \mathbb{R}^n ($n \geq 4$) with Neumann boundary condition. **Proceedings of the Indian Academy of Sciences**. **100**:275–284. 1990.
- [7] ADIMURTHI and YADAVA, S. L. Existence and nonexistence of positive radial solutions of Neumann problems with critical Sobolev exponents. **Archive of Rational Mechanics and Analysis**. **115**:275–296. 1991.
- [8] ADIMURTHI and YADAVA, S. L. On a conjecture of Lin-Ni for a semilinear Neumann problem. **Transactions of the American Mathematical Society**. **336**(2):631–637. 1993.
- [9] AUBIN, T. Problemes isoperimetriques et espaces de Sobolev. **Journal of Differential Geometry**. **11**:573–598. 1976.

- [10] AUBIN, T. **Nonlinear Analysis on Manifolds.** Springer-Verlag. 1982.
- [11] BAHRI, A. and CORON, J. M. On a nonlinear elliptic equation involving the critical Sobolev exponent: The effect of the topology of the domain. **Communications on Pure and Applied Mathematics.** **XLI**:253–294. 1988.
- [12] BREZIS, H. **Analyse fonctionnelle.** Masson. 1987.
- [13] BREZIS, H. and LIEB, E. A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals. **Proceedings of the American Mathematical Society.** **88**(3):486–490. 1983.
- [14] BREZIS, H. and NIRENBERG, L. Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents. **Communications on Pure and Applied Mathematics.** **XXXVI**:437–477. 1983.
- [15] BUDD, C. , KNAAP, M. C. , and PELETIER, L. A. Asymptotic behaviour of solutions of elliptic equations with critical exponents and Neumann boundary conditions. **Proceedings of the Royal Society of Edinburgh.** **117A**:225–250. 1991.
- [16] do CARMO, M. P. **Geometria Riemanniana.** Impa - Projeto Euclides. 1988.
- [17] CHERRIER, P. Meilleurs constants dans des inégalités relatives aux espaces de Sobolev. **Bulletin des Sciences Mathématiques.** **108**:225–262. 1984.
- [18] CLÉMENT, P. , de FIGUEIREDO, D. G. , and MITIDIERI, E. Positive solutions of semilinear elliptic systems. **Communications in Partial Differential Equations.** **17**(5-6):923–940. 1992.
- [19] CLÉMENT, P. , de FIGUEIREDO, D. G. , and MITIDIERI, E. Quasilinear elliptic equations with critical exponents. **Topological Methods in Nonlinear Analysis - Journal of the Julius Schauder Center.** **7**:133–170. 1996.

- [20] COMTE, M. Solutions of elliptic equations involving critical Sobolev exponents with Neumann boundary condition, $n > 4$. **Thèse de Doctorat de l'Université Paris 6**. . 1990.
- [21] COMTE, M. and KNAAP, M. C. Solutions of elliptic equations involving critical Sobolev exponents with Neumann boundary condition. **Manuscripta Mathematica**. **69**:43–70. 1990.
- [22] COMTE, M. and TARANTELLO, G. A Neumann problem with critical Sobolev exponent. **Houston Journal of Mathematics**. **18**(2):279–294. 1992.
- [23] de FIGUEIREDO, D. G. **Lectures on the Ekeland Variational Principle with Applications and Detours**. Springer-Verlag. 1989.
- [24] de FIGUEIREDO, D. G. and RUF, B. Existence and non-existence of radial solutions for elliptic equations with critical growth in \mathbb{R}^2 . **Communications on pure and applied mathematics**. **XLVIII**(6):639–655. 1995.
- [25] GIDAS, B. , NI, W.-M. , and NIRENBERG, L. Symmetry and related properties via the maximum principle. **Communications of Mathematical Physics**. **68**:209–243. 1979.
- [26] GROSSI, M. A class of solutions for the Neumann problem $-\Delta u + \lambda u = u^{(n+2)/(n-2)}$. **Duke Mathematical Journal**. **79**(2):1–2. 1995.
- [27] GROSSI, M. and PACELLA, F. Positive solutions of nonlinear elliptic equations with critical Sobolev exponent and mixed boundary conditions. **Proceedings of the Royal Society of Edinburgh**. **116A**:23–43. 1990.
- [28] HAN, Z.-C. Asymptotic approach to singular solutions for nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponent. **Annales de l'Institut Henri Poincaré**. **8**(2):159–174. 1991.
- [29] LEE, J. M. and PARKER, T. H. The Yamabe problem. **Journal of Differential Geometry**. **17**(1):37–91. 1987.

- [30] LIN, C.-S. , NI, W.-M. , and TAKAGI, I. Large amplitude stationary solutions to a chemotaxis system. **Journal of Differential Equations**. **72**(1):1–27. 1988.
- [31] LIONS, P.-L. The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case, part 1, 2. **Annales de l'Institut Henri Poincaré**. **1**(1):109–145,223–283. 1984.
- [32] LIONS, P.-L. The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The limit case, part 1, 2. **Revista Matemática Iberoamericana**. **1**(1, 2):145–201, 45–121. 1985.
- [33] LIONS, P.-L. , PACELLA, F. , and TRICARICO, M. Best constants in Sobolev inequalities for functions vanishing on some part of the boundary and related questions. **Indiana University Mathematical Journal**. **37**(2):301–324. 1988.
- [34] LOPES, O. Radial and nonradial minimizers for some radially symmetric functionals. **Electronic Journal of Differential Equations**. **1996**(3):1–14. 1996.
- [35] MARCUS, M. and L.VERON Uniqueness and asymptotic behaviour of solutions with boundary blow-up for a class of nonlinear elliptic equations. **Annales de l'Institut Henri Poincaré**. **14**(2):237–274. 1997.
- [36] NI, W.-M. and TAKAGI, I. On the shape of least-energy solutions to a semilinear Neumann problem. **Communications on Pure and Applied Mathematics**. **XLIV**:814–851. 1991.
- [37] NI, W.-M. and TAKAGI, I. Locating the peaks of least-energy solution to a semilinear Neumann problem. **Duke Mathematical Journal**. **70**(2):247–281. may 1993.
- [38] NI, W.-M. and WEI, J. On the location and profile of spike-layer solutions to singularly perturbed semilinear Dirichlet problems. **Communications on Pure and Applied Mathematics**. **XLVIII**:731–768. 1995.
- [39] PALAIS, R. S. The principle of symmetric criticality. **Communications in Mathematical Physics**. **69**:19–30. 1979.

- [40] PAN, X.-B. Further study on the effect of boundary conditions. **Journal of Differential Equations**. 117:446–468. 1995.
- [41] PAN, X.-B. and XU, X.-W. Least energy solutions of semilinear Neumann problems and asymptotics. **Journal of Mathematical Analysis**. 201:532–554. 1996.
- [42] PERAL, I. Multiplicity of solutions for the p -Laplacian. **Lecture Notes ICTP, Second School on nonlinear functional analysis and applications to differential equations**. . 1997.
- [43] POHOŽAEV, S. I. Eigenfunctions of the equation $\Delta u + \lambda f(u) = 0$. **Soviet Mathematics Doklady**. 6(165):1408–1411. 1965. Translated from Russian Dokl. Akad. Nauk SSSR 165,1965, pp.36-39.
- [44] PUCCI, P. and SERRIN, J. Critical exponents and critical dimensions for polyharmonic operator. **Journal de Mathématiques Pures et Appliquées**. 69:55–83. 1990.
- [45] REY, O. Proof of two conjectures of H. Brezis and L. A. Peletier. **Manuscripta Mathematica**. 65:19–37. 1989.
- [46] REY, O. The role of the Green's function in a non-linear elliptic equation involving the critical Sobolev exponent. **Journal of Functional Analysis**. 89:1–52. 1990.
- [47] SCHOEN, R. Conformal deformation of a Riemannian metric to constant scalar curvature. **Journal of Differential Geometry**. 20:479–495. 1984.
- [48] STRUWE, M. A global compactness result for elliptic boundary value problems involving limiting nonlinearities. **Mathematische Zeitschrift**. 187:511–517. 1984.
- [49] STRUWE, M. **Variational Methods**. Springer-Verlag. 1990.
- [50] TALENTI, G. Best constants in Sobolev inequality. **Annali di Matematica Pura ed Applicata**. XC:353–372. 1976.

- [51] TRUDINGER, N. Remarks concerning the conformal deformation of Riemannian structures on compact manifolds. **Annali Scuola Normale Superiori di Pisa.** **22**:265–274. 1968.
- [52] WANG, X.-J. Neumann problems of semilinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents. **Journal of Differential Equations.** **93**:283–310. 2 1991.
- [53] WANG, Z.-Q. Remarks on a nonlinear Neumann problem with critical exponent. **Houston Journal of Mathematics.** **20**(4):671–684. 1994.
- [54] WANG, Z.-Q. High energy and multi-peaked solutions for a semilinear Neumann problem with critical exponent. **Proceedings of the Royal Society of Edinburgh.** **7**(6):543–556. 1995.
- [55] WANG, Z.-Q. Construction of multi-peaked solutions for a nonlinear Neumann problem with critical exponent in symmetric domains. **Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications.** **27**(11):1281–1306. December 1996.
- [56] YAMABE, H. On a deformation of Riemannian structures on compact manifolds. **Osaka Mathematical Journal.** **12**:21–37. 1960.