DISTRIBUIÇÃO EXATA DO PRODUTO DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS INDEPENDENTES QUI

EMERSON LUIS LEMOS MARINHO

Orientador
Prof.Dr. PUSHPA NARAYAN RATHIE

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação da Universidade Estadual de Campinas, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Estatística.

Setembro - 1980.

Aos meus pais e irmãos,
ao meu saudoso irmão e
ã minha amiga de sempre,
Isabel.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Pushpa Narayan Rathie, que me propôs e me orientou em todas as horas de dificuldades.

Ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada da U.F.R.N. pelo apoio dado ã minha pessoa.

Aos amigos Adilson, Cordeiro, Francisco Venâncio, Paulo, Suzana, Nery, Reinaldo, Benini, Sidnei, Eugênia, Heloísa, Dario e Polizelli pelos estímulos.

Ao Departamento de Estatística do IMECC.

Â todos que direta e indiretamente contribuiram para a conclusão deste trabalho.

ÍNDICE

RESUMO

Neste trabalho nós calculamos e apresentamos a função densidade de probabilidade, bem como a função de distribuição acumulada exata do produto de variáveis aleatórias independentes que seguem distribuição qui.

Apresentamos, também, quatro casos particulares e um caso especial do produto de variáveis aleatórias independentes qui. O primeiro caso é apresentado quando as variáveis aleatórias independentes seguem uma distribuição qui, com todas as médias iguais. Em seguida são acrescentados os demais casos particulares com as distribuições de Rayleigh, Maxwell-Boltzman e a de "half-normal".

O último caso apresentado foi considerado especial pela maneira como a função densidade do produto de duas variáveis aleatórias independentes foi apresentada em termo da função de Bessel modificada.

Na última parte deste trabalho são apresentados dois apêndices os quais contêm uma revisão sobre noções de variável complexa e de funções especiais tendo por finalidade justificar certos resultados utilizados no desenvolvimento deste trabalho.

A técnica utilizada em todo o trabalho foi a teoria da transformada de Mellin que em conjunto com a teoria dos Resíduos, nos fornecem caminho para determinar a distribuição exata em todos os casos estudados.

1. INTRODUÇÃO

A necessidade de se conhecer a distribuição exata do produto de variáveis aleatórias, fez com que vários autores publicassem inúmeros trabalhos nessa área, a fim de que fosse possível serem solucionados certos aspectos de problemas.

Um dos primeiros estudiosos a publicar algum artigo nessa área, utilizando a técnica da transformada inversa de Mellin, para determinar a distribuição exata de probabilidade do produto de variáveis aleatórias independentes, foi possivelmente Epstein [5] no ano de 1948.

Muitos trabalhos sobre produto e quociente de variáveis aleatórias, anteriormente à 1948, foram publicados por vários autores, embora não utilizassem a técnica usada por Epstein. Dentre estes autores podemos citar: Aroian [1], Craig [2], Huntington [6] e Kullback [11].

Nos últimos vinte anos, um grande número de autores têm publicado uma variedade rezoável de trabalhos sobre distribuição exata do produto de variáveis aleatórias. Como exemplos podemos citar: Kotz, S. e Sriniuasan, R. [10], Lomnick I.Z. A. [12], Rathie,P.N. [17]. Mais recentemente podemos citar ainda os seguintes: Rathie, P.N. e Kaufman, H. [19], as quais apresentam em seu trabalho muitos resultados sobre a distribuição exata do produto e quociente de variáveis aleatórias independentes; exibindo inclusive em forma de tabela as respectivas funções densidade. Em um outro trabalho sobre o produto de duas variáveis aleatórias independentes, Rathie, P.N. e Roher, H.G. [20], estudam várias distribuições apresentando as funções densidades exatas tabeladas em termos de pontos percentuais.

Na seção 2 desse trabalho nós calculamos a função densidade de probabilidade, bem como a função de distribuição acumulada exatas do produto de variáveis aleatórias independentes que seguem distribuição qui. Essas funções são expressas em termos de séries exatamente computáveis as quais são definidas pelas funções analíticas psi e zeta (Apêndice B).

A técnica utilizada em todo desenvolvimento desse trabalho , foi a teoria da transformada inversa de Mellin, que em conjunto com a teoria dos resíduos nos fornecem caminho para determinar a distribuição exata em todos os casos estudados.

Na seção 3, apresentamos quatro casos particulares e um caso especial do produto de variáveis aleatórias independentes qui. O primeiro caso é apresentado quando as variáveis aleatórias independentes seguindo uma distribuição qui tem todas as médias iguais. Em seguida são apresentados os demais casos particulares com as distribuições de Rayleigh, Maxwell-Boltzman e de "half-normal". O último caso apresentado foi considerado especial pela maneira como a função densidade do produto de duas variáveis aleatórias independentes foi apresentada; em termo da função de Bessel Modificada.

Na última parte desse trabalho são apresentados os apêndices A e B, os quais contém uma revisão sobre noções de variável complexa e de funções especiais respectivamente. Portanto, muitos resultados usados no desenvolvimento desse trabalho são justificados pelos apêndices. Usando, por exemplo, a notação seguinte (A.1.2), a qual representa apêndice A, ítem 1.2, como referência a um determinado resultado utilizado, devendo o leitor verificar o apêndice indicado.

A distribuição Rayleigh e de Maxwell-Boltzman tem muitas aplicações na física-estatística, no que se refere à teoria da radiação dos corpos negros. Então com os resultados obtidos nesse trabalho sobre a distribuição exata do produto de v.a.i. de Rayleigh e de Maxwell-Boltzman, abre-se mais um caminho com a possibilidade de se aplicar estes resultados à teoria da radiação dos corpos negros.

2. DISTRIBUIÇÃO EXATA

Sejam $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_m$ variáveis aleatórias independentes que seguem uma distribuição qui$(n_i; n_i/2\sigma_i^2)$ com parâmetros n_i = inteiro positivo e variança σ_i^2 com $\sigma_i > 0$, $\forall i = 1,2,3,\ldots,m$.

Então X_i tem função densidade dada por

$$(2.1)\quad f(x_i) = \frac{2(n_i/2\sigma_i^2)^{n_i/2}}{\Gamma(n_i/2)}\, x_i^{n_i-1}\, e^{-(n_i/2\sigma_i^2)x_i^2} \;,\; x_i > 0 \;,\; \sigma_i > 0$$

e n_i = inteiro positivo.

Então (s-1)-ésimo momento da variável aleatória X_i é dado por

$$(2.2)\quad E(X_i^{s-1}) = \int_0^\infty x_i^{s-1} \frac{2(n_i/2\sigma_i^2)^{n_i/2}}{\Gamma(n_i/2)} x_i^{n_i-1} e^{-(n_i/2\sigma_i^2)x_i^2} dx_i$$

e fazendo $t = (n_i/2\sigma_i^2)x_i^2$, por definição da função gama (B.1.3) temos que

$$(2.3)\quad E(X_i^{s-1}) = \Gamma(\frac{s+n_i-1}{2}) / [\Gamma(n_i/2)(n_i/2\sigma_i^2)^{\frac{s-1}{2}}] .$$

Seja

$$(2.4)\qquad Y = \prod_{i=1}^{m} X_i$$

onde as variáveis aleatórias X_i's são independentes com função densidade dada em (2.1)

O (s-1)-ésimo momento de $Y = \prod_{i=1}^{m} X_i$ é calculado usando (2.3) que resulta em

$$(2.5)\quad E(Y^{s-1}) = E(\prod_{i=1}^{m} X_i)^{s-1} = \prod_{i=1}^{m} [\Gamma(\frac{s+n_i-1}{2})/[\Gamma(n_i/2)(n_i/2\sigma_i^2)^{\frac{s-1}{2}}]]$$

Usando a transformada inversa de Mellin (A.2.2), a função densidade de probabilidade de $Y = \prod_{i=1}^{m} X_i$ é dada por

$$(2.6)\quad f(y) = (2\pi i)^{-1}\int_L y^{-s} \prod_{i=1}^{m} [\Gamma(\frac{s+n_i-1}{2})/\Gamma(n_i/2)(n_i/2\sigma_i^2)^{\frac{s-1}{2}}]ds , R(s) > 0$$

onde $i = \sqrt{-1}$ e L uma região de contorno apropriada, contendo os polos da função integrando em (2.6).

Sem perda de generalidade, vamos supor que $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_q$ são pares e $n_{q+1}, n_{q+2}, n_{q+3}, \ldots, n_m$ são ímpares tal que, $n_1 \leq n_2 \leq \leq n_3 \leq \ldots \leq n_q$ com $n_i = 2k_i$, $i = 1,2,3,\ldots,q$ e $n_{q+1} \leq n_{q+2} \leq \leq n_{q+3} \leq \ldots \leq n_m$ com $n_i = 2k_i + 1$, $i = q+1, q+2, q+3, \ldots, m$ com k_i inteiro positivo em ambos os casos.

De (2.6) temos que $f(y)$ é dado por

$$(2.7)\quad f(y) = (2\pi i)^{-1} \int_L y^{-s} \prod_{i=1}^{q} [\Gamma(\frac{s+n_i-1}{2}) / (\Gamma(n_i/2)(n_i/2\sigma_i^2)^{\frac{s-1}{2}})]$$

$$\prod_{i=q+1}^{m} [\Gamma(\frac{s+n_i-1}{2}) / (\Gamma(n_i/2)(n_i/2\sigma_i^2)^{\frac{s-1}{2}})] ds \quad , \quad y > 0 \; .$$

Fazendo uma mudança de variável em (2.7) em que $t = s/2$, $dt = = ds/2$ e $n_i = 2k_i$ para $i = 1,2,3,\ldots,q$ e $n_j = 2ki+1$ para $i = q+1, q+2, q+3, \ldots, m$, temos que

$$(2.8)\quad f(y) = (2\pi i)^{-1} \int_{L_1} (y^2)^{-t} \prod_{i=1}^{q} [\Gamma(t + \frac{2k_i-1}{2}) / (\Gamma(k_i)(k_i/\sigma_i^2)^{\frac{2t-1}{2}})]$$

$$\prod_{i=q+1}^{m} [(\Gamma(t+k_i)/\Gamma(\frac{2k_i+1}{2})[(2k_i+1)/2\sigma_i^2]^{\frac{2t-1}{2}})] 2dt \quad , \; y > 0$$

onde L_1 é um novo contorno que contém os polos da função integrando em (2.8).

Portanto, simplificando (2.8) a função densidade $f(y)$ é dada por

$$(2.9)\quad f(y)=(\pi i)^{-1}\prod_{i=1}^{q}\left[\left(\frac{k_i}{\sigma_i^2}\right)^{1/2}/\Gamma(k_i)\right]\prod_{i=q+1}^{m}\left[\left(\frac{2k_i+1}{2\sigma_i^2}\right)^{1/2}/\Gamma\left(\frac{2k_i+1}{2}\right)\right]$$

$$\int_{L_1}\left[y^2\prod_{i=1}^{q}[k_i/\sigma_i^2]^{1/2}\prod_{i=q+1}^{m}[(2k_i+1)/2\sigma_i^2]\right]^{-t}\prod_{i=1}^{q}\Gamma\left(t+\frac{2k_i-1}{2}\right)\prod_{i=q+1}^{m}\Gamma(t+k_i)\,dt\ ,\ y>0$$

Agora vamos achar os polos da função

$$(2.10)\qquad \prod_{i=1}^{q}\Gamma\left(t+\frac{2k_i-1}{2}\right)$$

ou seja, os polos da função (2.10) quando $n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq \ldots \leq n_q$ tal que $n_i = 2k_i$ com k_i = inteiro positivo e $i = 1,2,3,\ldots,q$.

Os polos da função (2.10) são calculados igualando a zero o produto de fatores dados em (2.11) e resolvendo esta equação

$$(2.11)\quad \begin{cases} \left(t+\frac{2k_1-1}{2}\right)\left(t+\frac{2k_1-1}{2}+1\right)\left(t+\frac{2k_1-1}{2}+2\right)\ldots\left(t+\frac{2k_1-1}{2}+j\right)\times \\ \times\left(t+\frac{2k_2-1}{2}\right)\left(t+\frac{2k_2-1}{2}+1\right)\left(t+\frac{2k_2-1}{2}+2\right)\ldots\left(t+\frac{2k_2+1}{2}+j\right)\times \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \times\left(t+\frac{2k_{q-1}-1}{2}\right)\left(t+\frac{2k_{q-1}-1}{2}+1\right)\left(t+\frac{2k_{q-1}-1}{2}+2\right)\ldots\left(t+\frac{2k_{q-1}-1}{2}+j\right)\times \\ \times\left(t+\frac{2k_q-1}{2}\right)\left(t+\frac{2k_q-1}{2}+1\right)\left(t+\frac{2k_q-1}{2}+2\right)\ldots\left(t+\frac{2k_q-1}{2}+j\right)\ \ldots \end{cases}$$

Mas como existem vários fatores que se repetem em (2.11) podemos escrever (2.11) da seguinte maneira

$$
(2.12)\left\{
\begin{array}{l}
(t+\frac{2k_1-1}{2})^1(t+\frac{2k_1-1}{2}+1)^1(t+\frac{2k_1-1}{2}+2)^1\ldots(t+\frac{2k_1-1}{2}+k_2-k_1-1)^1 \\[2ex]
(t+\frac{2k_1-1}{2}+k_2-k_1)^2(t+\frac{2k_1-1}{2}+k_2-k_1+1)^2(t+\frac{2k_1-1}{2}+k_2-k_1+2)^2\ \ldots \\[2ex]
\ldots\ (t+\frac{2k_1-1}{2}+k_3-k_1-1)^2\ \times \\[2ex]
\times\ (t+\frac{2k_1-1}{2}+k_3-k_1)^3(t+\frac{2k_1-1}{2}+k_3-k_1+1)^3(t+\frac{2k_1-1}{2}+k_3-k_1+2)^3\ \ldots \\[2ex]
(t+\frac{2k_1-1}{2}+k_4-k_1-1)^3(t+\frac{2k_1-1}{2}+k_4-k_1)^4(t+\frac{2k_1-1}{2}+k_4-k_1+1)^4 \\[2ex]
(t+\frac{2k_1-1}{2}+k_4-k_1+2)^4\ \ldots\ (t+\frac{2k_1-1}{2}+k_5-k_1-1)^4\ \times \\
\cdot \\
\cdot \\
\cdot \\[2ex]
\times(t+\frac{2k_1-1}{2}+k_{q-1}-k_1)^{q-1}(t+\frac{2k_1-1}{2}+k_{q-1}-k_1+1)^{q-1}(t+\frac{2k_1-1}{2}+k_{q-1}- \\[2ex]
-k_1+2)^{q-1}\ \ldots\ (t+\frac{2k_1-1}{2}+k_q-k_1-1)^{q-1}(t+\frac{2k_1-1}{2}+k_q-k_1)^q \\[2ex]
(t+\frac{2k_1-1}{2}+k_q-k_1+1)^q(t+\frac{2k_1-1}{2}+k_q-k_1+2)^q\ \ldots
\end{array}
\right.
$$

De uma maneira mais geral os polos da função em (2.10) são as soluções de

$$(2.13) \qquad \prod_{i=0}^{j-1} \left(t + \frac{2k_1-1}{2} + j\right)^{\alpha_j} = 0$$

onde

$$(2.14) \quad \alpha_j = \begin{cases} 1, & j = 0,1,2,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, k_2-k_1-1 \\ 2, & j = k_2-k_1,\ k_2-k_1+1,\ k_2-k_1+2,\ldots\ldots\ldots, k_3-k_1-1 \\ 3, & j = k_3-k_1,\ k_3-k_1+1,\ k_3-k_1+2,\ldots\ldots\ldots, k_4-k_1-1 \\ \vdots & \vdots \\ q-1, & j = k_{q-1}-k_1,\ k_{q-1}-k_1+1,\ k_{q-1}-k_1+2,\ldots, k_q-k_1-1 \\ q, & j \geq k_q-k_1 \end{cases}$$

com α_j sendo a ordem do polo.

De uma maneira análoga ao processo anterior vamos achar os polos da função

$$(2.15) \qquad \prod_{i=q+1}^{m} \Gamma(t+k_i)$$

ou sejam quando $n_{q+1} \leq n_{q+2} \leq n_{q+3} \leq \ldots \leq n_m$ com $n_i = 2k_i+2$, k_i = inteiro positivo e $i = q+1,\ q+2,\ q+3,\ldots,m$.

Novamente os polos da função (2.15) são calculados igualando a zero o produto de fatores dados em (2.16) e resolvendo essa mesma equação.

$$
(2.16)\begin{cases}
(t+k_{q+1})(t+k_{q+1}+1)(t+k_{q+1}+2)\ \dots\ (t+k_{q+1}+j)\ \dots\ \times \\
\times\ (t+k_{q+2})(t+k_{q+2}+1)(t+k_{q+2}+2)\dots(t+k_{q+2}+j)\ \dots\ \times \\
\times\ (t+k_{q+3})(t+k_{q+3}+1)(t+k_{q+3}+2)\dots(t+k_{q+3}+j)\ \dots\ \times \\
\quad\vdots \\
\times\ (t+k_{m-1})(t+k_{m-1}+1)(t+k_{m-1}+2)\dots(t+k_{m-1}+j)\dots\ \times \\
\times\ (t+k_m)(t+k_m+1)(t+k_m+2)\dots(t+k_m+j)\ \dots
\end{cases}
$$

Como no caso anterior, existem vários fatores que se repetem em (2.16). Em vista disso a equação em (2.16) pode ser posta na forma

$$
(2.17)\begin{cases}
(t+k_{q+1})^1(t+k_{q+1}+1)^1(t+k_{q+1}+2)^1\dots(t+k_{q+1}+k_{q+2}-k_{q+1}-1)^1 \\
(t+k_{q+1}+k_{q+2}-k_{q+1})^2(t+k_{q+1}+k_{q+2}-k_{q+1}+1)^2(t+k_{q+1}+k_{q+2}-k_{q+1}+2)^2\dots\times \\
\times(t+k_{q+1}+k_{q+3}-k_{q+1}-1)^2\ (t+k_{q+1}+k_{q+3}-k_{q+1})^3(t+k_{q+1}+k_{q+3}-k_{q+1}+1)^3 \\
(t+k_{q+1}+k_{q+3}-k_{q+1}+2)^3\ \dots\ (t+k_{q+1}+k_{q+4}-k_{q+1}-1)^3\ \dots\times \\
\quad\vdots \\
\times(t+k_{q+1}+k_{m-1}-k_{q+1})^{m-q-1}(t+k_{q+1}+k_{m-1}-k_{q+1}+1)^{m-q-1}\ \dots \\
\dots\ (t+k_{q+1}+k_m-k_q-1)^{m-q-1}(t+k_{q+1}+k_m-k_{q+1})^{m-q}\ \dots
\end{cases}
$$

que por sua vez pode ainda ser expressa em uma forma mais geral como

$$(2.18) \qquad \prod_{j=0}^{\infty} (t+k_{q+1}+j)^{\beta_j} = 0$$

onde

$$(2.19)\ \beta_j = \begin{cases} 1, & j = 0,1,2,\ldots\ldots\ldots\ldots,k_{q+2}-k_{q+1}-1 \\ 2, & j = k_{q+2}-k_{q+1},\ k_{q+2}-k_{q+1}+1,\ k_{q+2}-k_{q+1}+2,\ldots,k_{q+3}-k_{q+4}-1 \\ 3, & j = k_{q+3}-k_{q+1},\ k_{q+3}-k_{q+1}+1,\ k_{q+3}-k_{q+1}+2\ ,\ldots,k_{q+4}-k_{q+1}-1 \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ m-q-1, & j = k_m-k_{q+1},\ k_m-k_{q+1}+1, k_m-k_{q+1}+2,\ldots\ldots\ldots,k_m-k_{q+1}-1 \\ m-q\ , & j = j \geq k_m - k_{q+1} \end{cases}$$

com β_j sendo a ordem do polo.

Achados os polos da função em (2.9), podemos agora encontrar os resíduos em cada um desses polos. Logo pela teoria dos resíduos (A.1.7) temos que,

$$(2.20) \quad \int_{L_1} (y^2 C_{mq})^{-t} \prod_{i=1}^{q} \Gamma\left(t+\frac{2k_i-1}{2}\right) \prod_{i=q+1}^{m} \Gamma(t+k_i)\,dt = 2\pi i\left[\sum_{j=0}^{\infty} R_j + \sum_{j=0}^{\infty} R_j'\right]$$

onde

$$(2.21)\ C_{mq} = \prod_{i=1}^{q} (k_i/\sigma_i^2) \prod_{i=q+1}^{m} [(2k_i+1)/2\sigma_i^2)]$$

e R_j é o resíduo da função integrando em (2.20) no polo $t=-(\frac{2k_1-1}{2}+j)$ de ordem α_j e R'_j é o resíduo da função integrando em (2.20) no polo $t=-(k_{q+1}+j)$ de ordem β_j.

O resíduo R_j conforme (A.1.9) é dado por

$$(2.22)\quad R_j = \lim_{t\to-(\frac{2k_1-1}{2}+j)} \frac{\partial^{\alpha_j-1}}{\partial t^{\alpha_j-1}} \Big[(y^2 C_{mq})^{-t} \left(t+\frac{2k_1-1}{2}+j\right)^{\alpha_j}$$

$$\prod_{i=1}^{\alpha_j} \Gamma\left(t+\frac{2k_i-1}{2}\right) \prod_{i=\alpha_j+1}^{q} \Gamma\left(t+\frac{2k_i-1}{2}\right) \prod_{i=q+1}^{m} \Gamma(t+k_i)\Big]$$

Agora multiplicando e dividindo (2.22) pela expressão

$$(2.23)\qquad \prod_{I=0}^{j-1} \left(t+\frac{2k_1-1}{2}+j\right)^{\alpha'_I}$$

onde

$$(2.24)\quad \alpha'_I=\begin{cases} 1, & I=0,1,2,\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,k_2-k_1-1 \\ 2, & I=k_2-k_1,\ k_2-k_1+1,\ k_2-k_1+2,\ldots\ldots\ldots\ldots,k_3-k_1-1 \\ 3, & I=k_3-k_1,\ k_3-k_1+1,\ k_3-k_1+2,\ldots\ldots\ldots\ldots,k_4-k_1-1 \\ & \\ \alpha_j-1, & I=k_{\alpha_j-1}-k_1,\ k_{\alpha_{j-1}}-k_1+1,k_{\alpha_j-1}-k_1+2,\ldots,k_{\alpha_j}-k_1-1 \\ & \\ \alpha_j, & I=k_{\alpha_j}-k_1,\ \ k_{\alpha_j}-k_1+1,\ k_{\alpha_j-1}-k_1+2,\ldots\ldots\ldots,j-1 \end{cases}$$

tem-se que (2.22) é dado por

$$(2.25)\qquad R_j = [1/(\alpha_j-1)!] \lim_{t\to -(\frac{2k_1-1}{2}+j)} \frac{\partial^{\alpha_j-1}}{\partial t^{\alpha_j-1}}\{[(y^2C_{mq})^{-t}$$

$$\Gamma^{\alpha_j}(t+\frac{2k_1-1}{2}+j+1) \prod_{i=1}^{q} \Gamma(t+\frac{2k_i-1}{2}) \prod_{i=q+1}^{m} \Gamma(t+k_i)]/[\prod_{I=0}^{j-1}(t+\frac{2k_1-1}{2}+I)^{\alpha'_I}]\}$$

Aplicando (A.3.3) na expressão (2.25) temos que o resíduo R_j é dado por

$$(2.26)\qquad R_j = [1/(\alpha_j-1)!] \lim_{t\ -(\frac{2k_1-1}{2}+j)} (y^2C_{mq})^{-t}\{\frac{\partial}{\partial t}+[-\ell og_e(y^2C_{mq})]\}^{\alpha_j-1}$$

$$[(\Gamma^{\alpha_j}(t+\frac{2k_1+1}{2}+j+1) \prod_{i=\alpha_j+1}^{q} \Gamma(t+\frac{2k_i-1}{2})) \prod_{i=q+1}^{m} \Gamma(t+k_i)/(\prod_{I=0}^{j-1}(t+\frac{2k_1-1}{2}+I)^{\alpha'_I})]$$

e usando (A.3.4) em (2.26) encontra-se que

$$(2.27)\qquad R_j = \frac{(y^2C_{mq})^{(\frac{2k_1-1}{2}+j)}}{(\alpha_j-1)!} \lim_{t\ -(\frac{2k_1-1}{2}+j)} \sum_{\ell=0}^{\alpha_j-1} \binom{\alpha_j-1}{\ell}(-\ell og_e(y^2C_{mq}))^{\alpha_j-1+\ell} \frac{\partial^\ell}{\partial t^\ell}$$

$$[(\Gamma^{\alpha_j}(t+\frac{2k_1-1}{2}+j+1) \prod_{i=\alpha_j+1}^{q} \Gamma(t+\frac{2k_i-1}{2}+j+1) \prod_{i=q+1}^{m} \Gamma(t+k_i)/\prod_{I=0}^{j-1}(t+\frac{2k_1-1}{2}+I)^{\alpha'_I})]$$

Agora façamos

$$(2.28)\quad A_j = \left[\Gamma\left(t+\frac{2k_1-1}{2}+j+1\right)^{\alpha_j} \prod_{i=\alpha_j+1}^{q} \Gamma\left(t+\frac{2k_i-1}{2}\right) \prod_{i=q+1}^{m} \Gamma(t+k_i)\right] / \left[\prod_{I=0}^{j-1} \left(t+\frac{2k_1-1}{2}+I\right)^{\alpha'_I}\right]$$

e convencionando que $A_{oj} = \lim\limits_{t\to -\left(\frac{2k_1-1}{2}+j\right)} A_j$, temos que

$$(2.29)\quad A_{oj} = \left[\prod_{i=\alpha_j+1}^{q} \Gamma\left[\left(\frac{2k_i-1}{2}-\left(\frac{2k_1-1}{2}+j\right)\right)\right] \prod_{i=q+1}^{m} \Gamma\left[k_i-\left(\frac{2k_1-1}{2}+j\right)\right]\right] / \left[\prod_{I=0}^{j-1} (I-j)^{\alpha'_I}\right]$$

Façamos ainda

$$(2.30)\quad A_j^{(\ell)} = \frac{\partial^\ell}{\partial t^\ell}(A_j) = \frac{\partial^{\ell-1}}{\partial t^{\ell-1}}\left(A_j \cdot \frac{\partial}{\partial t} \log_e A_j\right) = \frac{\partial^{\ell-1}}{\partial t^{\ell-1}}(A_j \cdot B_j)$$

onde

$$(2.31)\quad B_j = \frac{\partial}{\partial t} \log_e A_j \quad \text{com} \quad B_{oj} = \lim_{t\to -\left(\frac{2k_1-1}{2}+j\right)} B_j$$

e

$$(2.32)\quad A_{oj}^{(\ell)} = \lim_{t\to -\left(\frac{2k_1+1}{2}+j\right)} A_j^{(\ell)} \quad \text{com} \quad A_{oj}^{(j)} = A_{oj}$$

onde A_{oj} é definido pela expressão (2.29).

Desenvolvendo a expressão (2.30) por (A.3.2) tem-se que

$$(2.33) \qquad A_j^{(\ell)} = \sum_{v=0}^{\ell-1} \binom{\ell-1}{v} A_j^{(\ell-1-v)} \; B_j^{(v)}$$

onde

$$(2.34) \qquad B_j^{(v)} = \frac{\partial^v}{\partial t^v} (B_j)$$

e

$$(2.35) \qquad B_{oj}^{(v)} = \lim_{t \to -(\frac{2k_1-1}{2} + j)} B_j^{(v)} \quad \text{com} \quad B_{oj}^{(o)} = B_{oj}$$

Desenvolvendo (2.31) temos que

$$(2.36) \; B_j = \frac{\partial}{\partial t} \, \ell og_e \{ [\Gamma(t+\frac{2k_1-1}{2}+j+1)^{\alpha_j} \prod_{i=\alpha_j+1}^{q} \Gamma(t+\frac{2k_i-1}{2}) \prod_{i=q+1}^{m} \Gamma(t+k_i)] /$$

$$[\prod_{I=0}^{j-1} (t + \frac{2k_1-1}{2} + I)^{\alpha'_I}] \}$$

e conforme a definição da função psi (B.3.1) obtemos que

$$(2.37) \quad B_j = \alpha_j \; \psi(t + \frac{2k_1-1}{2} + j+1) + \sum_{i=\alpha_j+1}^{q} \psi(t + \frac{2k_i-1}{2}) +$$

$$+ \sum_{i=q+1}^{m} \psi(t+k_i) - \sum_{I=0}^{j-1} [\alpha'_I / (t + \frac{2k_1-1}{2} + I)]$$

Aplicando (B.6.1) na expressão (2.36) temos que

$$(2.38)\quad B_j^{(v)}=(-1)^{v+1}v!\,\{\alpha_j\xi(v+1;t+\frac{2k_1-1}{2}+j+1)+\sum_{i=\alpha_j+1}^{q}\xi(v+1;t+\frac{2k_i-1}{2}+1)+$$

$$+\sum_{i=q+1}^{m}\xi(v+1;t+k_i)+\sum_{I=0}^{j-1}[\alpha_I'/(t+\frac{2k_1-1}{2}+I)^{(v+1)}]\}$$

Agora passando o limite em (2.33) quando $t\to-(\frac{2k_1-1}{2}+j)$ temos que

$$(2.39)\qquad A_{oj}^{(\ell)}=\sum_{v=0}^{\ell-1}\binom{\ell-1}{v}A_{oj}^{(\ell-1-v)}B_{oj}^{(v)}$$

onde

$$(2.40)\quad B_{oj}^{(v)}=(-1)^{v+1}v!\,\{\alpha_j\xi(v+1;1)+\sum_{i=\alpha_j+1}^{q}\xi(v+1;\frac{2k_i-1}{2}+1-(\frac{2k_1-1}{2}+j))+$$

$$+\sum_{i=q+1}^{m}\xi(v+1;k_i+1-(\frac{2k_1-1}{2}+j))+\sum_{I=0}^{j-1}[\alpha_I'/(I-j)^{v+1}]\}$$

Finalmente passando o limite na expressão em (2.27) quando $t\to-(\frac{2k_1-1}{2}+j)$, por (2.39) o resíduo R_j é dado por

$$(2.41)\quad R_j=[(y^2C_{mq})^{(\frac{2k_1-1}{2}+j)}/(\alpha_j-1)!]\sum_{\ell=0}^{\alpha_j-1}\binom{\alpha_j-1}{\ell}(-\log_e(y^2C_{mq}))^{\alpha_j-1-\ell}A_{oj}^{(\ell)}$$

Agora o resíduo no polo $t=-(k_{q+1}+j)$ de ordem β_j da função integrando em (2.20) é dado por

$$(2.42)\qquad R'_j=[1/(\beta_j-1)!]\ \lim_{t\to-(k_{q+1}+j)}\ \frac{\partial^{\beta_j-1}}{\partial t^{\beta_j-1}}\,[\,(y^2c_{mq})^{-t}$$

$$(t+k_{q+1}+j)^{\beta_j}\ \prod_{i=q+1}^{\beta_j}\Gamma(t+k_i)\ \prod_{i=\beta_j+1}^{m}\Gamma(t+k_i)\ \prod_{i=1}^{q}\Gamma(t+\frac{2k_i-1}{2})\,]$$

Multiplicando e dividindo a expressão (2.42) pela expressão

$$(2.43)\qquad \prod_{I=0}^{j-1}(t+k_{q+1}+I)^{\beta'_I}$$

onde

$$(2.44)\quad \beta'_I=\begin{cases}1, & I=0,1,2,\ \ldots\ldots\ldots,k_{q+2}-k_{q+1}-1.\\ 2, & I=k_{q+2}-k_{q+1},\ k_{q+2}-k_{q+1}+1,\ k_{q+2}-k_{q+1}+2,\ldots,k_{q+3}-k_{q+1}-1.\\ 3, & I=k_{q+3}-k_{q+1},\ k_{q+3}-k_{q+1}+1,k_{q+3}-k_{q+1}+2\ ,\ldots,k_{q+4}-k_{q+1}-1.\\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \beta_j-q-1, & I=k_{\beta_j-1}-k_{q+1},k_{\beta_j-1}-k_{q+1}+1,k_{\beta_j-1}-k_{q+1}+2,\ldots,k_{\beta_j}-k_{q+1}-1.\\ \beta_j-q\ , & I=k_{\beta_j}-k_{q+1},k_{\beta_j}-k_{q+1}+1,\ k_{\beta_j}-k_{q+1}+2,\ldots,j-1.\end{cases}$$

Observamos que a expressão (2.42) é escrita agora da seguinte maneira

$$(2.45)\quad R_j' = [1/(\beta_j-1)!] \lim_{t\to-(k_{q+1}+j)} \frac{\partial^{\beta_j-1}}{\partial t^{\beta_j-1}}\{[(y^2C_{mq})^{-t}\,\Gamma^{\beta_j}(t+k_{q+1}+1+j)$$

$$\prod_{i=\beta_j+1}^{m}\Gamma(t+k_i)\prod_{i=1}^{q}\Gamma(t+\frac{2k_i-1}{2})]/[\prod_{I=0}^{j-1}(t+k_{q+1}+I)^{\beta_I'}]\}$$

Aplicando (A.3.3) na expressão (2.45) temos que

$$(2.46)\quad R_j' = [1/(\beta_j-1)!] \lim_{t\to-(k_{q+1}+j)} (y^2C_{mq})^{-t}\{\frac{\partial}{\partial t}+(-\log_e(y^2C_{mq}))\}^{\beta_j-1}$$

$$[(\Gamma^{\beta_j}(t+k_{q+1}+j+1)\prod_{i=\beta_j+1}^{m}\Gamma(t+k_i)\prod_{i=1}^{q}\Gamma(t+\frac{2k_i-1}{2}))/(\prod_{I=0}^{j-1}(t+k_{q+1}+I)^{\beta_I'})]$$

Agora usando (A.3.4) na expressão (2.45) concluímos que

$$(2.47)\quad R_j' = [(y^2C_{mq})^{(k_{q+1}+j)}/(\beta_j-1)!] \lim_{t\to-(k_{q+1}+j)} \sum_{\ell=0}^{\beta_j-1}\binom{\beta_j-1}{\ell}$$

$$(-\log_e(y^2C_{mq}))^{\beta_j-1-\ell}\frac{\partial^\ell}{\partial t^\ell}\{[\Gamma^{\beta_j}(t+k_{q+1}+j+1)\prod_{i=\beta_j+1}^{m}\Gamma(t+k_i)\prod_{i=1}^{q}$$

$$\Gamma(t+\frac{2k_i-1}{2})]/[\prod_{I=0}^{j-1}(t+k_{q+1}+I)^{\beta_I'}]\}$$

Definindo e convencionando as seguintes expressões, temos que

$$(2.48)\quad P_j = [\overset{\beta_j}{\Gamma}(t+k_{q+1}+j+1)\prod_{i=\beta_j+1}^{m}\Gamma(t+k_i)\prod_{i=1}^{q}\Gamma(t+\frac{2k_i-1}{2})]/[\prod_{I=0}^{j-1}(t+k_{q+1}+I)^{\beta_I'}]$$

e

$$(2.49)\quad P_{oj} = \lim_{t\to-(k_{q+1}+j)} P_j = [\prod_{i=\beta_j+1}^{m}\Gamma(k_i-(k_{q+1}+j))\prod_{i=1}^{q}\Gamma(\frac{2k_i-1}{2}-(k_{q+1}+j))]/[\prod_{I=0}^{j-1}(I-j)^{\beta_I'}]$$

Façamos ainda

$$(2.50)\quad P_j^{(\ell)} = \frac{\partial^\ell}{\partial t^\ell}(P_j) = \frac{\partial^{\ell-1}}{\partial t^{\ell-1}}(P_j\cdot\frac{\partial}{\partial t}\ell og_e P_j) = \frac{\partial^{\ell-1}}{\partial t^{\ell-1}}(P_j\cdot Q_j)$$

onde

$$(2.51)\qquad Q_j = \frac{\partial}{\partial t}\ell og_e P_j$$

e

$$(2.52)\qquad P_{oj}^{(\ell)} = \lim_{t\to-(k_{q+1}+j)} P_j^{(\ell)} \quad \text{com} \quad P_{oj}^{(0)} = P_{oj}$$

onde P_{oj} é definido pela expressão (2.49).

Desenvolvendo (2.50) por (A.3.2), temos que

$$(2.53)\qquad P_j^{(\ell)} = \sum_{v=0}^{\ell-1}\binom{\ell-1}{v}P_j^{(\ell-1-v)}\,Q_j^{(v)}$$

onde

$$(2.54)\qquad Q_j^{(\ell)}\ \frac{\partial^\ell}{\partial t^\ell}\,(Q_j)$$

e

$$(2.55)\qquad Q_{oj}^{(\ell)} = \lim_{t\to-(k_{q+1}+j)} Q_j \qquad \text{com} \qquad Q_{oj}^{(0)} = Q_{oj}$$

Quando desenvolvemos (2.51), obtemos que

$$(2.56)\quad Q_j = \frac{\partial}{\partial t}\,\ell og_e\{\,[\Gamma^{\beta_j}(t+k_{q+1}+j+1)\prod_{i=\beta_j+1}^{m}\Gamma(t+k_i)\prod_{i=1}^{q}\Gamma(t+\frac{2k_i-1}{2})]\,/\,\{\prod_{I=0}^{j-1}(t+k_{q+1}+I)^{\beta_I'}\}\}$$

e de acordo com (B.3.1) temos que

$$(2.57)\quad Q_j = \beta_j\,\psi(t+k_{q+1}+j+1) + \sum_{i=\beta_j+1}^{m}\psi(t+k_i) + \sum_{i=1}^{q}\psi(t+\frac{2k_i-1}{2}) - \sum_{I=0}^{j-1}[\beta_I'/(t+k_{q+1}+I)]$$

Aplicando (B.6.1) na expressão (2.57) obtemos

$$(2.58)\quad Q_j^{(v)} = (-1)^{v+1}v!\{\beta_j\,\xi(v+1;t+k_{q+1}+j+1) + \sum_{i=\beta_j+1}^{m}\xi(v+1;t+k_i) +$$

$$+\sum_{i=1}^{q}\xi(t+\frac{2k_i-1}{2}) + \sum_{I=0}^{j-1}[\beta_I'/(t+k_{q+1}+I)^{v+1}]\}$$

Agora passando o limite em (2.52) quando $t\to-(k_{q+1}+j)$ tem-se que

$$(2.59)\qquad P_{oj}^{(\ell)} = \sum_{v=0}^{\ell-1}\binom{\ell-1}{v} P_{oj}^{(\ell-1-v)}\,Q_{oj}^{(v)}$$

onde $Q_{oj}^{(v)}$ é dado pela expressão

$$(2.60)\quad Q_{oj}^{(v)}=(-1)^{v+1}v!\{\beta_j(v+1;1)+\sum_{i=\beta_j+1}^{m}\xi(v+1;k_i-(k_{q+1}+j))\ +$$

$$+\sum_{i=1}^{q}\xi(v+1;\frac{2k_i-1}{2}-(k_{q+1}+j))\ +\sum_{I=0}^{j-1}[\beta_I'/(I-j)^{v+1}]\}$$

Finalmente passando o limite em (2.47) quando $t\to-(k_{q+1}+j)$, por (2.59) tem-se que o resíduo R_j' é dado por

$$(2.61)\quad R_j'=[(y^2C_{mq})^{(k_{q+1}+j)}/(\beta_j-1)!]\sum_{\ell=0}^{\beta_j-1}\binom{\beta_j-1}{\ell}(-\log_e(y^2C_{mq}))^{\beta_j-1-\ell}\ P_{oj}^{(\ell)}$$

Substituindo a expressão (2.41) e (2.61) na expressão (2.20) obtemos

$$(2.62)\quad \int_{L_1}(y^2C_{mq})\prod_{i=1}^{q}\Gamma(t+\frac{2k_i-1}{2})\prod_{i=q+1}^{m}\Gamma(t+k_i)dt\ =$$

$$=2\pi i\sum_{j=0}^{\infty}\{\frac{(y^2C_{mq})^{\left(\frac{2k_1-1}{2}+j\right)}}{(\alpha_j-1)!}\sum_{\ell=0}^{\alpha_j-1}\binom{\alpha_j-1}{\ell}(-\log_e(y^2C_{mq}))^{\alpha_j-1-\ell}\ A_{oj}^{(\ell)}\ +$$

$$+\frac{(y^2C_{mq})^{(k_{q+1}+j)}}{(\beta_j-1)!}\sum_{\ell=0}^{\beta_j-1}\binom{\beta_j-1}{\ell}(-\log_e(y^2C_{mq}))^{\beta_j-1-\ell}\ P_{oj}^{(\ell)}\}$$

Logo a função densidade de probabilidade de $Y = \prod_{i=1}^{m} X_i$ (produto de variáveis aleatórias independentes qui) será dada substituindo (2.62) na expressão (2.9). Então $f(y)$ é dado por

$$(2.63)\quad f(y)=2A_{mq}\sum_{j=0}^{\infty}\Big[\frac{(y^2C_{mq})^{(\frac{2k_1-1}{2}+j)}}{(\alpha_j-1)!}\sum_{\ell=0}^{\alpha_j-1}\binom{\alpha_j-1}{\ell}(-\log_e(y^2C_{mq}))^{\alpha_j-1-\ell}A_{oj}^{(\ell)}+$$

$$+\frac{(y^2C_{mq})^{k_{q+1}+j)}}{(\beta_j-1)!}\sum_{\ell=0}^{\beta_j-1}\binom{\beta_j-1}{\ell}(-\ell og(y^2C_{mq}))^{\beta_j-1-\ell}P_{oj}^{(\ell)}\Big]\quad,\quad y>0$$

com

$$A_{mq}=\prod_{i=1}^{q}\left[(k_i/\sigma_i^2)^{1/2}/\Gamma(k_i)\right]\prod_{i=q+1}^{m}\left[(2k_i+1)/2\sigma_i^2)^{1/2}/\Gamma(2k_i+1)/2)\right],$$

$$C_{mq}=\prod_{i=1}^{q}[k_i/\sigma_i^2]\prod_{i=q+1}^{m}[(2k_i+1)/2\sigma_i^2]$$

e $A_{oj}^{(\ell)}$ e $P_{oj}^{(\ell)}$ são definidos por (2.38) e (2.58) respectivamente.

A função de distribuição acumulada de $Y = \prod_{i=1}^{m} X_i$ será dada por

$$(2.64)\qquad F(y) = \int_o^Y f(z)\,dz.$$

Portanto aplicando (A.3.1) em (2.64) tem-se que

$$(2.65)\quad F(y)=A_{mq}\sum_{j=1}^{\infty}\left[\frac{(C_{mq})^{(\frac{2k_1-1}{2}+j)}}{(\alpha_j-1)!}\sum_{\ell=0}^{\alpha_j-1}\binom{\alpha_j-1}{\ell}A_{oj}^{(\ell)}\frac{(\alpha_j-1-\ell)!}{(k_1+j)}y^{2(k_1+j)}\right.$$

$$\sum_{k=0}^{\alpha_j-1-\ell}\frac{(-\log_e(y^2C_{mq}))^k}{k!(k_1+j)^{\alpha_j-1-\ell-k}}+\frac{(C_{mq})^{(k_{q+1}+j)}}{(\beta_j-1)!}\sum_{\ell=0}^{\beta_j-1}\binom{\alpha_j-1}{\ell}$$

$$\left.P_{oj}^{(\ell)}\frac{(\beta_j-1-\ell)!}{(k_{q+1}+j+1/2)}y^{2(k_{q+1}+j+1/2)}\sum_{k=0}^{\beta_j-1-\ell}\frac{(-\log_e(y^2C_{mq}))^k}{k!(k_{q+1}+j+1/2)^{\beta_j-1-\ell-k}}\right],\ y>0$$

com

$$A_{mq}=\prod_{i=1}^{q}\left[(k_i/\sigma_i^2)^{1/2}/\Gamma(k_i)\right]\prod_{i=q+1}^{m}\left[(2k_i+1)/2\sigma_i^2)^{1/2}/\Gamma(2k_i+1)/2\right],$$

$$C_{mq}=\prod_{i=1}^{q}\left[k_i/2\sigma_i^2\right]\prod_{i=q+1}^{m}\left[(2k_i+1)/2\sigma_i^2\right]$$

e $A_{oj}^{(\ell)}$ e $P_{oj}^{(\ell)}$ são definidos por (2.38) e (2.58) respectivamente.

3. CASOS PARTICULARES

Nesta secção enfocamos os casos particulares do produto de variáveis aleatórias independentes que seguem uma distribuição qui.

Vamos considerar nesse trabalho quatro casos particulares; o primeiro é apresentado quando supomos que todos os parâmetros n_i's da distribuição qui são todos iguais.

O segundo caso a ser enfocado pode ser pensado como caso particular do primeiro, pois vamos supor que todos os n_i's são iguais a 2. Neste caso, então, nós temos a distribuição do produto de variáveis aleatórias independentes de Rayleigh.

O terceiro caso pode também ser considerado como caso particular do primeiro que é a distribuição do produto de variáveis aleatórias independentes de Maxwell-Boltzman, ou seja, quando supomos que todos os parâmetros n_i's são iguais a 3.

Vale salientar que tanto a distribuição de Rayleigh quanto a distribuição de Maxwell-Boltzman tem grandes aplicações na física como é explicado na introdução deste trabalho.

O quarto caso a ser explorado é distribuição do produto de duas variáveis aleatórias independentes que seguem uma distribuição "half-normal", isto é, quando os parâmetros $n_1=n_2$.

Apresentamos também um caso especial do produto de variáveis aleatórias independentes qui. Esse caso especial acontece quando temos somente 2 variáveis aleatórias independentes seguindo uma distribuição qui. Nesse caso a função densidade do produto dessas 2 variáveis é apresentada em termos da função de Bessel modificada que é bem conhecida e tabelada.

CASO I: Quando $n_1 = n_2 = n_3 = ,\dots, n_m = n$

Sejam $X_1, X_2, X_3, \dots, X_m$ variáveis aleatórias independentes seguindo uma distribuição qui$(n_i;\ ni/2\sigma_i^2)$, $i = 1,2,3,\dots,m$ tal que n = inteiro positivo par ou ímpar e $\sigma_i > 0$. Então função densidade de probabilidade de $Y = \prod_{i=1}^{m} X_i$ será dada substituindo $n_1 = n_2 = n_3, \ldots, n_m = n$ na função densidade do produto $Y = \prod_{i=1}^{m} X_i$ dado em (2.63) no caso geral.

Logo a função densidade de

$$(3.1)\quad f(y) = [(2^{1-\frac{nm}{2}} y^{n-1}(n^{\frac{m}{2}}/\sigma)^n)/\Gamma^m(n/2)] \sum_{j=0}^{\infty} [(y^2\sigma^{-2}/(n/2)^{-m})^j/(m-1)!]$$

$$\sum_{\ell=0}^{n-1} \binom{m-1}{\ell} (-\log_e(y^2\sigma^{-2}/(n/2)^{-m}))^{m-1-\ell} A_{oj}^{(\ell)} \quad , \quad y > 0$$

onde

$$(3.2)\quad A_{oj}^{(\ell)} = \sum_{v=0}^{\ell-1} \binom{\ell-1}{v} A_{oj}^{(\ell-1-v)} B_{oj}^{(v)}$$

com

$$(3.3)\quad A_{oj}^{(0)} - A_{oj} = 1/(-j)^{mj} (j!)$$

e

$$(3.4)\quad B_{oj}^{(v)} = r(-1)^{v+1} v! [\xi(v+1;1) + \sum_{I=0}^{j-1} (j-I)^{-(v+1)}]$$

A função distribuição acumulada de $Y = \prod_{i=1}^{m} X_i$ será calculada substituindo $n_1 = n_2 = n_3 = \ldots = n_m = m$ em (2.65).

$$(3.5)\quad F(y) = \frac{(y\sigma^{-1})^{n}}{\Gamma^{m}(n/2)\,(\frac{n}{2})^{\frac{-nm}{2}}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{[y^2\sigma^{-2}/(n/2)^{-m}]^{j}}{(m-1)!} \sum_{\ell=0}^{m-1} \binom{m-1}{\ell}$$

$$\frac{(n-1-\ell)!}{(j+n/2)} A_{oj}^{(\ell)} \sum_{k=0}^{m-1-\ell} \frac{[-\log_e(y^2\sigma^{-2}/(n/2)^{-m})]^{k}}{k!(j+n/2)^{m-1-\ell-k}}\ , \quad y > 0$$

CASO II: Distribuição do produto de v.a.i. de Rayleigh.

Se X segue uma distribuição de probabilidade de Rayleigh então a função densidade é dada por

$$(3.6)\qquad f(x) = (2/\sigma^2)\ x\ e^{-x^2/\sigma^2}\ , \quad x > 0 \quad e \quad \sigma > 0$$

Então comparando a função dada em (3.6) com a função densidade dada em (2.1), concluimos que a distribuição de probabilidade de Rayleigh é um caso particular da distribuição qui quando $n = 2$ e $\sigma > 0$.

Então, se as variáveis aleatórias independentes $X_1, X_2, \ldots, X_m$ seguem uma distribuição de Rayleigh com parâmetro $\sigma_i > 0$, $i = 1, 2, 3, \ldots, m$, a função densidade do produto $Y = \prod_{i=1}^{m} X_i$ será calculada substituindo todos os n_i's = 2 na expressão (2.63), que é a função densidade do produto $Y = \prod_{i=1}^{m} X_i$ no caso geral

Logo

$$(3.7)\quad f(y) = 2y\sigma^{-2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(y^2\sigma^{-2})}{(m-1)!} \sum_{\ell=0}^{m-1} \binom{m-1}{\ell}$$

$$[-\log_e(y^2\sigma^{-2})]^{m-1-\ell} A_{oj}^{(\ell)} \quad , \quad y > 0$$

onde

A função de distribuição acumulada de $Y = \prod_{i=0}^{m} X_i$ será calculada substituindo $n_i = 2$, para todo $i = 1,2,3,\ldots,m$ em (2.65).

Então

$$(3.8)\quad F(y) = y^2\sigma^{-2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(y^2\sigma^{-2})^j}{(m-1)!} \sum_{\ell=0}^{m-1} \binom{m-1}{\ell} \frac{(m-1-\ell)!}{(j+1)} A_{oj}^{(\ell)}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{[-\log_e(y^2\sigma^{-2})]^k}{k!(j+1)^{m-1-\ell-k}} \quad , \quad y > 0$$

CASO III: Distribuição do produto de v.a.i. de Mawell-Boltzman.

Se X segue uma distribuição de probabilidade de Maxweel-Boltzman com parâmetro $\sigma > 0$, então sua função densidade é dada por

$$(3.9)\quad f(x) = \frac{2(3/2\sigma^2)^{3/2}}{(3/2)} x^2 e^{-(3/2\sigma^2)x^2} \quad , \; x > 0 \quad e \quad \sigma > 0 \; .$$

Da expressão (2.1) nota-se que a distribuição de Maxwell-Boltzman é um caso particular da distribuição qui quando o parâmetro $n = 3$.

Vamos supor que as variáveis aleatórias independentes X_1, X_2, $X_3,\ldots,X_m$ sigam uma distribuição de Maxwell-Boltzman com parâmetro $\sigma_i \geq 0$, $i = 1,2,3,\ldots,m$. Então a função densidade do produto $Y = \prod_{i=1}^{m} X_i$ será calculada substituindo todos os $n_i = 3$ na expressão (2.63).

Então a função densidade de $Y = \prod_{i=1}^{m} X_i$ será dada por

$$(3.10)\quad f(y) = (2^{m+2}\pi^m)^{1/2}\, y^2\sigma^{-3} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{[(3/2)^m (y/\sigma)^2]^j}{(m-1)!}$$

$$\sum_{\ell=0}^{m-1} \binom{m-1}{\ell} (-\log_e[(3/2)^m (y/\sigma)^2])^{m-1-\ell}\, A_{oj}^{(\ell)} \;,\quad y > 0 \,.$$

A distribuição acumulada de probabilidade de $Y = \prod_{i=1}^{m} X_i$ é calculada fazendo $n_i = 3$, para todo $i=1,2,3,\ldots,m$ na expressão (2.65). Então

$$(3.11)\quad F(y) = (2\pi)^{m/2}(y\sigma^{-1})^3 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{[(3/2)^m (y/\sigma)^2]^j}{(m-1)!} \sum_{\ell=0}^{m-1} \binom{m-1}{\ell}$$

$$\frac{(m-1-\ell)!}{(j+3/2)} \sum_{k=0}^{m-1-\ell} \frac{(-\log_e((3/2)^m (y/\sigma)^2)^k}{k!\,(j+3/2)^{m-1-\ell-k}} \;,\quad y > 0$$

CASO IV: Distribuição do produto de v.a.i. "half-normal".

Se uma variável aleatória X segue uma distribuição de probabilidade "half-normal" como parâmetro $\sigma > 0$, sua função densidade é dada por

$$(3.12)\quad f(x) = (2/(\sqrt{2\pi}\,\sigma))\, e^{-x^2/2\sigma^2}, \quad x > 0 \quad e \quad \sigma > 0.$$

Novamente observamos que a distribuição "half-normal" é também um caso particular da distribuição qui que quando n=1.

Então se $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_m$ são variáveis aleatórias independentes seguindo uma distribuição "half-normal" com parâmetro $\sigma_i >$ > 0, $i = 1,2,3,\ldots,m$, a função densidade de $Y = \prod_{i=1}^{m} X_i$ será calculada substituindo todos os n_i's iguais a 1 na expressão (2.63) que representa a função densidade de probabilidade do caso mais geral.

Então a função densidade de $Y = \prod_{i=1}^{m} X_i$ é dada por

$$(3.13)\quad f(y) = (2/[(2\pi)^{m/2}\sigma]) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{[2^{-m}(y/\sigma)^2]^j}{(m-1)!} \sum_{\ell=0}^{m-1} \binom{m-1}{\ell}$$

$$(-\log_e(2^{-m}(y/\sigma)^2))^{m-1-\ell} A_{oj}^{(\ell)}, \quad y > 0$$

A função de distribuição acumulada é calculada substituindo $n_i = 1$, para todo $i = 1,2,3,\ldots,m$ em (2.65). Então

$$(3.14)\quad F(y) = [(2\pi)^{m/2}\sigma]^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{[2^{-m}(y/\sigma)^2]^j}{(m-1)!} \sum_{\ell=0}^{m-1} \binom{m-1}{\ell}$$

$$\frac{(m-1-\ell)!}{(j+1/2)} A_{oj}^{(\ell)} \sum_{k=0}^{m-1-\ell} \frac{[-\log_e(2^{-m}(y/\sigma)^2]^k}{k!(j+1/2)^{m-1-\ell-k}} \quad , \; y > 0 \; .$$

CASO V: Distribuição do Produto de duas v.a.i. qui.

Neste caso, são apresentados somente as funções densidades exatas pelo fato de estas serem expressas em termos da função de Bessel Modificada. Para se calcular as funções de distribuições acumulada exatas basta substituir convinientemente os valores dos parâmetros n_1 e n_2 na expressão (2.65).

Sejam X_1, X_2 duas variáveis aleatórias independentes seguindo uma distribuição qui $(n_i;\ n_i/2\sigma_i^2)$, com $i = 1,2$. A função densidade exata do produto $Y = X_1X_2$ será determinada quando os parâmetros n_1 e n_2 assumem os seguintes valores:

a) Quando $n_1 = n_2 = n$, com $n = 2k$ (par) ou $n = 2k+1$ (impar) e $k =$ = inteiro positivo.

b) Quando $n_1 = 2k_1$ e $n_2 = 2k_2+1$ (impar) com k_1, k_2 inteiros positivos.

c) Quando $n_1 = 2k_1$ (par) e $n_2 = 2k_2$ (par) com $k_1 \neq k_2$ e k_1, k_2 inteiros positivos.

a) Se X_1, X_2 seguem uma distribuição qui $(n;n/2\sigma_i^2)$ com $i = 1,2$, a função densidade de probabilidade exata de $Y = X_1X_2$ será dada substituindo $n_1 = n_2 = n$, com $n = 2k$ ou $n = 2k+1$, na expressão (2.63). Então $f(y)$ é dada por

$$(3.15)\quad f(y) = 2A_{22}(y^2C_{22})^{\frac{n-1}{2}} \sum_{j=0}^{\infty} (y^2C_{22})^j(-\ell og_e(y^2C_{22})A_{oj}^{(0)} + A_{oj}^{(1)}),$$

$y > 0$

com

$$A_{22} = [n/(\Gamma(n/2)2\sigma_1\cdot\sigma_2)]$$

e

$$C_{22} = [n^2/(4\sigma_1^2\sigma_2^2)]$$

As expressões $A_{oj}^{(0)}$ e $A_{oj}^{(1)}$ calculadas por (2.29) e (2.39) respectivamente, resultam em

$$(3.16)\qquad A_{oj}^{(0)} = 1/(j!)^2$$

e

$$(3.17)\qquad A_{oj}^{(1)} = A_{oj}^{(0)} \cdot B_{oj}^{(0)} = A_{oj} \cdot B_{oj}.$$

Passando o limite em (2.37) quando $t \to -(\frac{n-1}{2} + j)$ e aplicando (B.42), temos que B_{oj} é dado por

$$(3.18)\quad B_{oj} = 2\psi(1) - 2\sum_{I=0}^{j-1} \frac{1}{(I-j)} = 2\psi(1+j)$$

Então a expressão em (3.17) é dada por

$$A_{oj}^{(1)} = \frac{2}{(j!)^2}\,\psi(1+j) \tag{3.19}$$

Simplificando e substituindo (3.16) e (3.19) em (3.15) temos que f(y) é dada por

$$f(y) = 4A_{22}(y^2C_{22})^{\frac{n-1}{2}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(y^2C_{22})^j}{(j!)^2}\,[\psi(1+j)-\ell og_e(yC_{22}^{1/2})]\,, \tag{3.20}$$

$$y > 0\ .$$

Comparando (3.20) com (B.7.4) concluímos que

$$f(y) = 4A_{22}(y^2C_{22})^{\frac{n-1}{2}}\,k_o(2yC_{22}^{1/2})\quad ,\qquad y > 0\ . \tag{3.21}$$

Substituindo A_{22} e C_{22} dados em (3.15) na expressão (3.21) temos finalmente que a função densidade exata de $Y = X_1X_2$ é dada por

$$f(y) = \{[(y^{n-1}n^n)/((2\sigma_1\sigma_2)^n\,\Gamma^2(n/2))]\,k_o(yn(\sigma_1\sigma_2)^{-1})\}\,,\quad y > 0 \tag{3.22}$$

onde $k_o(yn(\sigma_1\sigma_2)^{-1})$ é a função de Bessel modificada.

b) Sejam X_1,X_2 duas variáveis aleatórias independentes com distribuição qui $(n_i;n_i/2\sigma_i^2)$ com i = 1,2, tal que $n_1 = 2k_1$ (par) e $n_2 = 2k_1+1$ (ímpar). A função densidade exata de $Y = X_1X_2$ será dada pela expressão (2.63). Então

$$(3.23)\quad f(y) = 2A_{21}[\,(y^2C_{21})^{\frac{n_1-1}{2}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{n_2-n_1}{2}-j)}{(-1)^j\, j!}\,(y^2C_{21})^j +$$

$$+\ (y^2C_{21})^{\frac{n_2-1}{2}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{n_1-n_2}{2}-j)}{(-1)^j\, j!}\,(y^2C_{21})^j] \quad , \quad y > 0$$

Comparando (3.23) com (B.7.5) concluímos que a função densidade de $Y = X_1X_2$ em (3.23) será dada por

$$(3.24)\quad f(y) = 4A_{21}(yC_{21}^{1/2})^{\frac{n_2+n_1-2}{2}}\, k_{\frac{n_2-n_1}{2}}(2yC_{21}^{1/2}) \quad , \quad y > 0$$

onde $k_{\frac{n_2-n_1}{2}}(2yC_{21}^{1/2})$ é a função de Bessel Modificada, com

$A_{21} = [\,(n_1n_2)^{1/2}/((2\sigma_1\sigma_2)\,\Gamma(n_1/2)\Gamma(n_2/2))]$

e

$C_{21} = [\,(n_1n_2)/(4\sigma_1^2\sigma_2^2)]\,.$

c) Sejam X_1,X_2 duas variáveis aleatórias independentes seguindo uma distribuição qui$(n_i;\ n_i/2\sigma_i^2)$ com $i = 1,2$, tal que $n_1 = 2k_1$ e $n_2 = 2k2$ com $n_1 \neq n_2$ e k_1,k_2 inteiros positivos.

A função densidade exata de $Y = X_1X_2$ será dada pela expressão (2.63).

$$(3.25)\quad f(y) = 2A_{22}(y^2C_{22})^{\frac{n_1-1}{2}}\Big\{\sum_{j=0}^{\frac{n_2-n_1}{2}-1}(y^2C_{22})^j A_{oj}^{(0)} +$$

$$+\sum_{j=\frac{n_2-n_1}{2}}^{\infty}(y^2C_{22})^j\,[-\ell og_e(y^2C_{22})A_{oj}^{(0)} + A_{oj}^{(1)}]\Big\}\ ,\quad y > 0$$

onde de acordo com (2.29) e (2.37) temos respectivamente que

$$(3.26)\quad A_{oj}^{(0)} = A_{oj} = \begin{cases} \Gamma(\frac{n_2-n_1}{2} - j)/(-1)^j\ j!\ , & j=0,1,2,\ldots,\frac{n_2-n_1}{2}-1 \\ [1/((-1)^{\frac{n_2-n_1}{2}}\ j!(j-\frac{n_2-n_1}{2})!)], & j \geq \frac{n_2-n_1}{2} \end{cases}$$

e

$$(3.27)\quad B_{oj}^{(0)} = B_{oj} = \psi(1+j) + \psi(1+j-\frac{n_2-n_1}{2})$$

Logo $A_{oj}^{(1)}$ é dada por

$$(3.28)\quad A_{oj}^{(1)} = A_{oj}^{(0)} \,.\, B_{oj}^{(0)} = A_{oj} \,.\, B_{oj} = \frac{1}{(-1)^{\frac{n_2-n_1}{2}} (j!)}$$

$$[\psi(1+j) + \psi(1+j-\frac{n_2-n_1}{2})] \;.$$

Substituindo $A_{oj}^{(0)}$ e $A_{oj}^{(1)}$ e fazendo $k = j - \frac{n_2-n_1}{2}$ nas duas últimas séries em (3.25), temos que

$$(3.29)\quad f(y) = 2A_{22}(y^2C_{22})^{\frac{n_1-1}{2}} \{ \sum_{j=0}^{\frac{n_2-n_1}{2}-1} \frac{(\frac{n_2-n_1}{2}-j-1)!}{(-1)^j (j!)} (y^2C_{22})^j +$$

$$+ (-1)^{\frac{n_2-n_1}{2}+1} \log_e(yC_{22}) \sum_{k=j-\frac{n_2-n_1}{2}}^{\infty} \frac{(y^2C_{22})^k}{k!(k+\frac{n_2-n_1}{2})!} +$$

$$+ (-1)^{\frac{n_2-n_1}{2}} (y^2C_{22})^{\frac{n_2-n_1}{2}} \sum_{k=j-\frac{n_2-n_1}{2}}^{\infty} . \frac{\psi(1+k)+\psi(1+k+\frac{n_2-n_1}{2})}{k!(k+\frac{n_2-n_1}{2})!}$$

$$(y^2C_{22})^k \} \;, \quad y > 0$$

Então multiplicando (3.29) por $2(yC_{22}^{1/2})^{\frac{n_2-n_1}{2}}$ e comparando o lado direito de (3.29) por (B.7.1) temos que

$$(3.30)\quad f(y) = 4A_{22}(yC_{22}^{1/2})^{\frac{n_2-n_1-1}{2}} k_{\frac{n_2-n_1}{2}}(2yC_{22}^{1/2}) \quad , \; y > 0$$

onde

$$A_{22} = [\,(n_1n_2)^{1/2}/(2\sigma_1\sigma_2\Gamma(n_i/2)\Gamma(n_2/2))]$$

e

$$C_{22} = [\,(n_1n_2)/(4\sigma_1^2\sigma_2^2)]$$

De maneira análoga obtemos a mesma função densidade exata do produto $Y = X_1X_2$ para $n_1 = 2k_1+1$ (Ímpar) e $n_2 = 2k_2+1)$ (impar) com $n_1 \neq n_2$.

APÊNDICE A

NOÇÕES DE VARIÁVEIS COMPLEXAS

Neste apêndice apresentamos algumas definições e teoremas sobre funções de variáveis complexas, que compõem a teoria dos Resíduos.

Exibimos também a transformada de Mellin,bem como a transformada inversa de Mellin, que juntamente com a teoria dos Resíduos nos fornecem a técnica para a determinação, em nosso trabalho,das funções densidades e de distribuições acumuladas exatas do produto de variáveis aleatórias independentes qui.

A.1. FUNÇÃO DE UMA VARIÁVEL COMPLEXA.

DEFINIÇÃO I: FUNÇÃO ANALÍTICA.

Seja a função $f(z)$ de uma variável complexa z e ε um número positivo qualquer. Diz-se que $f(z)$ é analítica no ponto z_o, se existem $\ell = f'(z_o)$ (derivada de $f(z)$ em z_o) e δ (δ dependendo de ε) tal que

$$\left|\frac{f(z) - f(z_o)}{z - z_o} - \ell\right| < \varepsilon \quad \text{quando} \quad |z - z_o| < \delta . \tag{A.1.1}$$

Em outras palavras, a função $f(z)$ é analítica em um ponto z_o, se sua derivada $f'(z)$ existe não só em z_o, como também em todo ponto z de uma vizinhança em torno de z_o.

DEFINIÇÃO II: SINGULARIDADE

Um ponto singular ou uma singularidade de uma função de uma variável complexa $f(z)$ é um ponto onde a função deixa de ser analítica.

Se existe uma vizinhança de um ponto singular z_o onde $f(z)$ é analítica, exceto no próprio ponto, então z_o se diz ponto singular isolado de f.

TEOREMA I. (Série de Laurent)

Se $f(z)$ é analítica sobre circulos concêntricos C e C' e na região entre eles, de centro z_o, então em qualquer ponto z entre os circulos, $f(z)$ pode ser expandida na forma

$$f(z) = a_o + a_1(z-z_o) + a_2(z-z_o)^2 + \dots \frac{b_1}{(z-z_o)} + \frac{b_2}{(z-z_o)^2} + \dots \quad \text{(A.1.2)}$$

onde

$$a_n = (2\pi i)^{-1} \int_C \frac{f(t)}{(t-z_o)^{n+1}} dt \ , \ n = 0,1,2,\dots \quad \text{(A.1.3)}$$

e

$$b_n = (2\pi i)^{-1} \int_{C'} (t-z_o)^{n-1} f(t) dt \ , \ n=1,2,3,\dots \quad \text{(A.1.4)}$$

onde $i = \sqrt{-1}$, sendo cada integral calculada no sentido anti-horário. A série em (A.1.2) é chamada série de Laurent.

Quando z_o é um ponto singular isolado, de acordo com (A.1.1), então a função f é representada pela série de Laurent (A.1.2) onde os coeficientes são dados por (A.1.3) e por (A.1.4).

A série de potências negativas de $(z-z_o)$ em (A.1.2), é chamada da parte principal de f(z) em torno do ponto singular z_o, que tem grande influência sobre o comportamento da função na proximidade deste ponto, de acordo com a definição dada a seguir.

Se a parte principal da série em (A.1.2) tem somente um número finito de termos, então existe um inteiro m tal que os coeficientes $b_{m+1}, b_{m+2}, b_{m+3}, \ldots$ são todos nulos e

$$(A.1.5) \quad f(z) = \frac{b_1}{(z-z_o)} + \frac{b_2}{(z-z_o)} + \frac{b_3}{(z-z_o)} + \ldots + \frac{b_m}{(z-z_o)^m} +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_o)^n \qquad \text{quando} \quad |z-z_o| < r \; ,$$

para algum inteiro positivo r, onde $b_m \neq 0$. O ponto singular isolado z_o é, então, chamado polo de ordem m da função f.

Se m = 1, o ponto é chamado de polo simples e quando a parte principal de f em torno de z_o tem uma infinidade de termos, o ponto se diz ponto singular essencial da função f.

DEFINIÇÃO IV: RESÍDUO

O coeficiente b_1 de $(z-z_o)^{-1}$ em (A.1.5) é chamado de Resíduo de f(z) no polo de ordem m e é dado por

$$b_1 = (2\pi i)^{-1} \int_C f(z)dz \tag{A.1.6}$$

onde C é um contorno fechado que inclue z_o, tal que f(z) seja analítica sobre e no interior de C.

TEOREMA II. Resíduos

Seja f(z) analítica sobre e no interior de um contorno C, exceto em um número finito de polos interiores a C. Então

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i \, \Sigma \, R_r \tag{A.1.7}$$

onde ΣR_r é a soma dos resíduos da função f nos seus polos.

Enunciaremos agora um teorema que tem por finalidade de fornecer uma maneira mais simples e prática para determinarmos os polos e resíduos de uma função analítica.

TEOREMA III.

Seja uma função f que satisfaça as seguintes condições; para algum inteiro positivo m existe um valor $\phi(z_o)$, diferente de zero, tal que a função

$$\phi(z) = (z-z_o)^m f(z) \tag{A.1.8}$$

seja analítica em z_o. Então f tem um polo de ordem m em z_o e o resíduo nesse ponto é dado por

$$(A.1.9) \qquad R_{z_o} = \frac{\phi^{(m-1)}(z_o)}{(m-1)!} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to z_o} \frac{\partial^{m-1}}{\partial z^{m-1}} (z-z_o)^m f(z)$$

A.2. A TRANSFORMADA DE MELLIN

DEFINIÇÃO I.

A transformada de Mellin de uma função f quando existe, é definida por

$$(A.2.1) \qquad g(s) = \int_0^\infty z^{s-1} f(z)dz \quad \text{para} \quad R(s) > 0.$$

DEFINIÇÃO II. TRANSFORMADA INVERSA DE MELLIN

Seja s uma variável complexa. A transformada inversa de Mellin f(z) da função g(s), onde g(s) é a trasnformada de Mellin da função f(z), é dada por

$$(A.2.2) \qquad f(z) = (2\pi i)^{-1} \int_L z^{-s} g(s)ds \quad , \quad R(s) > 0$$

onde $i = \sqrt{-1}$ e L é um contorno propriamente escolhido e R(s) é a parte real de s.

Um caso especial surge quando a função f(z) é uma função densidade de probabilidade de uma variável aleatória Z > 0. Neste caso a função g(s) em (A.2.1) passa a ser o (s-1)-ésimo momento da variável aleatória Z, que é dado por

$$(A.2.3) \qquad E(Z^{s-1}) = \;{}_{0}\; z^{s-1} f(z)ds.$$

Logo, comparando (A.2.3) com (A.2.1) concluimos que

$$(A.2.4) \qquad g(s) = E(Z^{s-1}).$$

Então se a função $g(s)$ é conhecida, isto é, o $(s-1)$-ésimo momento da variável aleatória Z, a função densidade de probabilidade é dada pela transformada inversa de Mellin usando (A.2.2)

A.3. OUTROS RESULTADOS

No desenvolvimento dos capítulos anteriores usamos os seguintes resultados:

a) INTEGRAL DE UMA FORMA LOGARITMICA

$$(A.3.1) \qquad \int x^m (\ell og_e x)^n dx = (-1)^n \frac{n!}{(m+1)} x^{m+1} \sum_{r=0}^{n} \frac{(-\ell og_e x)^r}{r!(m+1)^{n-r}}$$

onde $n+1$ é inteiro, $m > 0$ e $0 < x < 1$.

b) DERIVADA n-ÉSIMA DO PRODUTO DE DUAS FUNÇÕES

$$(A.3.2) \qquad \frac{\partial^n}{\partial t^n}[A.B] = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} A^{(i)} B^{(n-i)} \quad , \quad n = 0,1,2,\ldots$$

onde A e B são duas funções de t tal que

$$A^{(i)} = \frac{\partial^i}{\partial t^i} A$$

e

$$B^{(n-i)} = \frac{\partial^{n-i}}{\partial t^{n-i}} B .$$

Usaremos ainda a seguinte propriedade

$$\text{(A.3.3)} \qquad \frac{\partial^n}{\partial z^n} [x^{-z} f(z)] = x^{-z} [\frac{\partial}{\partial z} + (- \ell og_e x)]^{n-1} f(z)$$

e o seguinte operador

$$\text{(A.3.4)} \qquad (\frac{\partial}{\partial z} + c)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} c^k \frac{\partial^{n-k}}{\partial z^{n-k}}$$

APÊNDICE B

FUNÇÕES ESPECIAIS

Neste apêndice são apresentadas definições e propriedades de algumas das principais funções especiais que são empregadas no desenvolvimento deste trabalho.

Além das definições e propriedades, são também, apresentadas algumas relações entre as funções gama, psi, zeta, e de Bessel que são de grande importância na obtenção das funções densidades de probabilidade de alguns casos particulares do produto de variáveis aleatórias independentes que seguem uma distribuição qui.

B.1. FUNÇÃO GAMA

Historicamente a função gama $\Gamma(z)$ foi primeiramente definida por Euler pela expressão (B.1.1) que, então, deu origem a integral de Euler (3.1.3). Uma outra definição apresentada é dada pelo produto de Weierstrass (B.1.2) em que é muitas vezes mais conveniente definir a função gama por este produto.

A notação $\Gamma(z)$ é usada para representar a função gama e foi introduzida por Legendre em 1814.

a) FÓRMULA DE EULER PARA FUNÇÃO GAMA

(B.1.1) $$\Gamma(z) = \frac{1}{z} \prod_{i=1}^{\infty} \{(1+\frac{1}{n})^{z}(1+\frac{z}{n})^{-1}\} , \text{ se } \quad z\neq 0,-1,-2,-3,...$$

b) PRODUTO DE WEIERSTRASS

(B.1.2) $$\Gamma(z) = \frac{1}{ze^{\gamma z} \prod_{i=1}^{\infty} \{(1 + \frac{z}{n})e^{-z/n}\}} \quad , \text{ se } \quad z \neq 0,-1,-2,-3,\ldots$$

e $\gamma = 0,5772156649\ldots$ é a constante de Euler.

c) INTEGRAL DE EULER

(B.1.3) $$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{z-1} dx \quad , \quad R > 0$$

onde $R(z)$ é a parte real de z.

B.2. FÓRMULA DA MULTIPLICAÇÃO DA FUNÇÃO GAMA

(B.2.1) $$\Gamma(mz) = (2\pi)^{(m-1)/2} m^{mz-1/2} \prod_{i=1}^{m-1} \Gamma(z + i/n)$$

B.3. FUNÇÃO PSI

A função psi é denotada por $\psi(z)$ e é definida por

(B.3.1) $$\psi(z) = \frac{d}{dz} \log_e \Gamma(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} \quad , \text{ para } \quad z \neq 0,-1,-2,\ldots$$

Uma definição alternativa da função psi usada foi

$$(B.3.2)\quad \psi(z) = -\gamma - \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} z/[k(z+k)] = -\gamma + (z-1)\sum_{k=0}^{\infty} [(k+1)(z+k)]^{-1},$$

com $z \neq 0,-1,-2,...$ onde é a constante de Euler dado por (B.1.2)

B.4. PROPRIEDADES DA FUNÇÃO PSI

a) Por diferenciações logarítmicas de (B.1.2) e fazendo $z=1$, encontramos que

$$(B.4.1)\qquad \psi(1) = -\gamma$$

b) Dos resultados de $\Gamma(z)$ tem-se que

$$(B.4.2)\qquad \psi(1+n) = 1+1/2+1/3+...+1/n-\gamma\ .$$

B.5. FUNÇÃO ZETA

Seja $z = x+iy$ onde x e y são reais, então, se $\delta > 0$ a série

$$(B.5.1)\qquad \xi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$$

é uma série uniformemente convergente de funções analíticas em qualquer domínio tal que $x \geq 1+\delta$. Logo esta série é uma função analítica em todo o domínio.

A série (B.5.1) é definida como a função zeta.

Uma definição mais geral da função zeta chamada de função zeta generalizada (de Riemman) é dada pela expressão

$$(B.5.2) \qquad \xi(z;a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(a+n)^z} \quad , \quad z \neq 0,-1,-2,...$$

onde a é uma constante.

B.6. RELAÇÃO ENTRE AS FUNÇÕES PSI E ZETA

$$(B.6.1) \qquad \frac{\partial^m}{\partial z^m} \psi(a+z) = (-1)^{m+1} m!\ \xi(m+1;\ a+z)$$

B.7. FUNÇÃO DE BESSEL MODIFICADA

Para n inteiro não negativo podemos definir a função de Bessel modificada por

$$(B.7.1) \ k_n(z) = (-1)^{n+1}[\gamma + \ell og_e(z/2)]\ I_n(z) + \frac{1}{2}(z/2)^{-n}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{(n-k-1)!}{k!} (z^2/4)^k +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\psi(k+1)+\psi(n+k+1)-2\psi(1)}{k!(n+k)!} (z^2/4)^k$$

onde

$$\text{(B.7.2)} \quad I_n(z) = \frac{(z/2)^n}{\Gamma(n+1)} \; {}_0F_1(\;;1+n;\;z^2/4) \quad \text{tal que}$$

$$-\pi/2 \leq \arg z \leq \pi/2$$

e a função hipergeométrica ${}_0F_1$ é definida por

$$\text{(B.7.3)} \quad {}_0F_1(\;;1+n;\;z^2/4) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1)}{k!\,\Gamma(n+1+k)} (z^2/4)^k \;.$$

Para $n = 0$ temos que

$$\text{(B.7.4)} \quad k_o(z) = \sum_{j=0}^{\infty} (z^2/4)^j/(j!)^2[\psi(1+j) - \ell og_e(z/2)]$$

Podemos também definir a função de Bessel modificada por

$$\text{(B.7.5)} \quad k_n(z) = \frac{1}{2}(z/2)^{-n}\Big[\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n-j)}{(-1)^j\, j!}(z^2/4)^j +$$

$$+ (z^2/4)^n \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(-n-j)}{(-1)^j\, j!}(z^2/4)^j\Big]$$

quando $n \neq \pm r$, $r = 0,1,2,3,\ldots$.

BIBLIOGRAFIA

[1] AROIAN, L.A. (1947). The Probability Function of the Product of two Normaly Distributed Variables, *Ann.Math. Statist.*, 12, 265-271.

[2] CRAIG, C.C. (1936). On the Frequency Function to XY, *Ann. Math. Statist.*, 7, 1-15.

[3] CHURCHILL, R.V. (1975). *Variáveis Complexas e Suas Aplicações*, McGraw-Hill.

[4] CORDEIRO, J.A. e RATHIE, P.N. (1979). The exact distribution of the Product of two Normal Variables, *Bulletin AMS*, 8(6), 334.

[5] EPSTEIN, B. (1948). Some Applications of the Mellin Transform in Statistics, *Ann. Math. Statist.*, 19, 370-379.

[6] HUNTINGTON, E.V. (1939). Frequency Distribution of Product and Quotient, *Ann. Math. Statist.*,10., 195-198.

[7] JOHNSON, N.L. e KOTZ, S. (1970). *Distributions in Statistics: Continuous Univariate Distributions I*, John Wiley, New Jersey.

[8] JOHNSON, N.L. e KOTZ, S. (1970a). *Distributions in Statistics: Continuous Univariate Distributions II* ,John Wiley, New Jersey.

[9] JOHNSON, N.L. e KOTZ, S. (1972). *Distributions in Statistics:Continuous Multivariate Distributions*,John Wiley, New York.

[10] KOTZ, S. e SRINIVASAN, R. (1969). Distribution of Product and Quotient of Bessel Function Variates, *Ann. Inst. Math*. 21, 201-210.

[11] KULLBACK, S. (1936). The Distributions laws of the Difference and Quotient of Variables Independently Distributed in Pearson type III law 1, *Ann. Math. Statist.*, 7, 51-53.

[12] LOMNICKI, Z.A. (1967). On the Distribution of Product of Random Variables, *J. Royal Statist.* Soc. B29, 513-524 .

[13] LUKE, Y.L. (1969). *The Especial Functions and their approximations*, Vol.1, Academic Press, New York.

[14] MATHAI, A.M. e SAXENA, R.K. (1973). *Generalized Hypergeo - metric Functions with Applications in Statistics and Physical Sciences*, Springer Verlag, Heidelberge, New York.

[15] PERDEZOLI, G. e RATHIE, P.N. (1979). Distribution of Product and Quotient of Pareto Variates, *Métrica, Aceito para publicação.*

[16] RAGAZZI, S. (1979). *Distribuição Exata do Produto de Variáveis Aleatórias Independentes.* Tese de Mestrado apresentada no IMECC - UNICAMP, Campinas-SP.

[17] RATHIE, P.N. (1975). The Distribution of Products of Generalized Student-t and F-Variables, *20th Brazilian Regional Conference of the International Biometrics Society held at Piracicaba, SP.*, september, 20-26.

[18] RATHIE, P.N. (1976). The Exact Distribution of Product of Independent Random Variables, *28th Annual Meeting of the Brazilian Society for Progress of Science, Brasília* July, 7-14.

[19] RATHIE, P.N. e KAUFMAN, H. (1977). On the Distribution of Products and Quotient of Independent Random Variables, *Metron* 35, 133-148.

[20] RATHIE, P.N. e ROHRER, H.G. (1979). The Exact Distribution of Products of Independent Random Variables, J. *Matemática e Estatística,* - *aceito para publicação.*

[21] RIDER, P.R. (1965). Distribution of Product and Quotient of Cauchy Variables, *Amer. Math. Monthly*, 72, 303-305.

[22] SHAH, M.C. e RATHIE, P.N. (1974). Exact Distribution of Product of Generalized F-Variable, *Canad.J. Statistics*, 2, 13-24.

[23] SPRINGER, M.D. e THOMPSON, W.E. (1966). The Distritution of Products of Independent Random Variables, *SIAM J. Appl. Math.*, 14, 511-526.

[24] SPRINGER, M.D. e THOMPSON, W.E. (1970). The Distribution of Products of Beta, Gamma and Gaussian Random Variables, *SIAM J. Appl. Math*. 18, 721-737.

[25] SELBY, M.S. (1970). *Standard Mathematical Tables*, The Chemical Rubben Co.

[26] TITCHMARSH, E.C. (1951). *The Theory of the Riemann Zeta Function*, Oxford, University Press, Oxford.