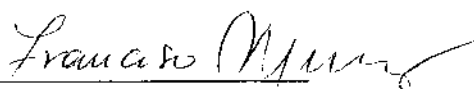


GEOMETRIA DAS SUBVARIEDADES DO GRUPO DE HEISENBERG

Este exemplar corresponde a redação final da tese devidamente corrigida e defendida pelo Sr. Christiam Bernardo Figueroa Serrudo e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 27 de Fevereiro de 1996



Prof. Dr. Francesco Mercuri

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de DOUTOR em Matemática.

Tese de Doutorado defendida e aprovada em 01 de fevereiro de 1996
pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Francesco Mercuri

Prof (a). Dr (a). FRANCESCO MERCURI

Luiz A. B. San Martin

Prof (a). Dr (a). LUIZ ANTONIO BARRERA SAN MARTIN

Caio José Coletti Negreiros

Prof (a). Dr (a). CAIO JOSÉ COLETTI NEGREIROS

Manfredo Perdigão do Carmo

Prof (a). Dr (a). MANFREDO PERDIGÃO DO CARMO

Luquesio Petrola de Melo Jorge

Prof (a). Dr (a). LUQUESIO PETROLA DE MELO JORGE

Agradecimentos

Agradeço a todos que, direta ou indiretamente, participaram na realização dessa tese.

Ao Prof. Dr. Francesco Mercuri, pelo assunto proposto, orientação e sugestões no decorrer do trabalho.

Ao Prof. Dr. Renato H. Pedrosa, que sem sua colaboração não teria sido possível a realização deste trabalho.

Aos companheiros da turma de Geometria.

À CNPQ, por ter financiado meu trabalho.

Christiam Bernardo Figueroa Serrudo

Conteúdo

1	Geometria Riemanniana de $\mathcal{H}_{2n+1}$	1
1.1	Introdução	1
1.2	A geometria do grupo de Heisenberg	3
1.2.1	Isometrias de $\mathcal{H}_{2n+1}$	6
1.2.2	Curvaturas em $\mathcal{H}_{2n+1}$	11
1.2.3	Geodésicas em $\mathcal{H}_{2n+1}$	11
2	Superfícies invariantes por grupos de isometrias	14
2.1	Geometria Equivariante	14
2.2	Superfícies invariantes em $\mathcal{H}_3$	24
2.2.1	Superfícies invariantes por translações à esquerda	26
2.2.2	Superfícies invariantes por translações e rotações (helicoidais)	34
3	Superfícies em $\mathcal{H}_3$	46
3.1	Aplicação normal de Gauss	48
3.2	Superfícies mínimas em $\mathcal{H}_3$	53
4	Hipersuperfícies de rotação em $\mathcal{H}_{2n+1}$	67

Resumo

Neste trabalho, estudamos a Geometria Riemanniana do grupo de Heisenberg H_{2n+1} , calculando as métricas invariantes à esquerda e a base dos campos invariantes à esquerda. Calculamos, também a álgebra do grupo de isometrias de H_{2n+1} , dando uma descrição total do grupo de isometrias para o caso de H_3 . Concluimos esta parte determinando as geodésicas de H_{2n+1} .

Em seguida, classificamos as superfícies de curvatura média constante de H_3 que são invariantes por grupos de isometrias.

Depois estudamos a aplicação normal de Gauss para superfícies em H_3 , o que nós permite mostrar a não existencia de superfícies umbílicas. Estudamos, ainda, a equação dos gráficos de curvatura média constante, mostrando que não existem superfícies mínimas compactas nem gráficos completos de curvatura média constante não nula. Posteriormente damos uma classificação parcial das superfícies mínimas segundo o posto da aplicação normal de Gauss.

Terminamos o trabalho apresentando as hipersuperfícies de rotação em H_{2n+1} .

Introdução

O clássico grupo de Heisenberg $\mathcal{H}_3$ é um subgrupo de $GL(3, \mathbb{R})$ formado pelas matrizes da forma

$$\begin{bmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

O grupo $\mathcal{H}_3$ é uma generalização natural do $\mathbb{R}^3$ por vários motivos, entre eles podemos mencionar:

1. Do ponto de vista algébrico ele é um grupo de Lie 2-nilpotente (ou quase-abeliano), que é o mais próximo da condição de ser abeliano.
2. Para toda métrica invariante à esquerda, o grupo de isometria é de dimensão quatro, que é o máximo possível para uma variedade riemanniana 3-dimensional com curvatura seccional não constante.

Por outro lado devemos mencionar que o grupo $\mathcal{H}_3$ aparece como as horoesferas do espaço complexo hiperbólico 2-dimensional (ver [25]). Mais explicitamente, se $\mathcal{CH}$ denota o espaço hiperbólico complexo, $G = I_0(\mathcal{CH})$ a componente conexa do grupo de isometrias de $\mathcal{CH}$ que contém a identidade e $G = KAN$ a decomposição de Iwasawa de G , então N é o grupo de Heisenberg $\mathcal{H}_3$. Geometricamente AN atua transitivamente em $\mathcal{CH}$ e fixa um único ponto x no bordo da esfera $\mathcal{CH}(\infty)$. O grupo N atua transitivamente em cada horoesfera de x . Também mencionaremos que tal grupo aparece naturalmente como espaço modelo para a geometria sub-riemanniana (o análogo do espaço euclidiano para a geometria riemanniana).

É natural portanto estudar a geometria riemanniana e a geometria das sub-variedades do grupo de Heisenberg $\mathcal{H}_3$. Esta tarefa foi iniciada em uma série de trabalhos. Por exemplo: [1], [10], [2], [13], [25], [21], [7]. Em nosso trabalho estudamos alguns problemas nesta direção.

Começamos nosso trabalho do ponto de vista algébrico, isto é, olharemos o grupo de Heisenberg de ordem n , como o grupo de Lie simplesmente conexo associado a uma álgebra de Lie tipo H cujo centro é de dimensão 1. Como neste tipo de álgebras a aplicação exponencial é um difeomorfismo global poderemos identificar $\mathcal{H}_{2n+1}$ com $\mathbb{R}^{2n+1}$ munida de uma certa operação. Uma vez feito isto passaremos a calcular as métricas invariantes à esquerda, os campos invariantes à esquerda, curvaturas, geodésicas, campos de Killing e a álgebra do grupo de isometrias, dando uma descrição total do grupo de isometrias no caso de $\mathcal{H}_3$.

No segundo capítulo estudaremos as superfícies de curvatura média constante (em particular as superfícies mínimas) em $\mathcal{H}_3$ que são invariantes por grupos a 1-parâmetro de isometrias. Para isto, começamos este capítulo com alguns conceitos e resultados da geometria equivariante aplicados às imersões isométricas equivariantes. Em seguida, utilizamos estas técnicas para poder reduzir as equações das superfícies de curvatura média constante para um sistema de equações ordinárias no espaço de órbitas. Isto nos permitirá dar uma classificação em $\mathcal{H}_3$ destes tipos de superfícies.

No capítulo 3 estudaremos os gráficos mínimos em $\mathcal{H}_3$, visando o que seria o teorema de Bernstein para o caso de $\mathcal{H}_3$. Trabalharemos com superfícies parametrizadas como gráficos de uma função diferenciável f . Posteriormente estudaremos a aplicação de Gauss para gráficos em $\mathcal{H}_3$ e, a partir dela, poderemos concluir, entre outras coisas, que não existem superfícies umbílicas. Veremos também que a partir da elipticidade da equação dos gráficos de curvatura média constante se podera concluir que não existem superfícies mínimas compactas nem gráficos completos de curvatura média constante. Também classificaremos todas as superfícies mínimas em $\mathcal{H}_3$ tais que o posto da sua aplicação de Gauss seja 0 ou 1.

Finalmente no capítulo 4 descreveremos as hipersuperfícies de "rotação" de curvatura média constante no grupo de Heisenberg de dimensão $2n+1$, encontrando muita semelhança ao caso euclidiano.

Capítulo 1

Geometria Riemanniana de $\mathcal{H}_{2n+1}$

1.1 Introdução

Neste capítulo apresentaremos o grupo de Heisenberg $\mathcal{H}_{2n+1}$ e estudaremos a sua geometria. Para isto determinaremos uma métrica invariante à esquerda e a conexão riemanniana a ela associada, obtendo como consequência as curvaturas, o grupo de isometrias e as geodésicas deste grupo.

Sejam U, V dois espaços vetoriais reais com produto interno de dimensões m e n respectivamente, e uma aplicação linear

$$j : U \longrightarrow \text{End}(V)$$

que satisfaz às seguintes propriedades:

1. $|j(a)x| = |a||x|$
2. $j^2(a) = -|a|^2 \text{Id}$ onde $a \in U, x \in V$.

Então a aplicação bilinear $[\cdot, \cdot] : V \times V \longrightarrow U$, definida por:

$$\langle a, [x, y] \rangle = \langle j(a)x, y \rangle \quad (1.1)$$

é anti-simétrica. Isto nos permite definir o seguinte colchete no espaço vetorial

$$\tilde{n} = U \oplus V,$$

$$[a + x, b + y] = [x, y]$$

onde $a, b \in U$ e $x, y \in V$.

Notemos que $(\tilde{n}, [,])$ é uma álgebra nilpotente de ordem 2, cujo centro é U . Tal álgebra é chamada de álgebra de Lie de tipo H . Estas álgebras possuem um produto interno herdado dos espaços U e V , dado por

$$\ll a + x, b + y \gg = \langle a, b \rangle + \langle x, y \rangle$$

Exemplo 1.1.1 A álgebra de Heisenberg, $\tilde{h}_{2n+1}$.

Seja $\{X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n\}$ uma base ortonormal do espaço vetorial real V , e seja $\{Z\}$ a base unitária do espaço U . Definimos a aplicação bilinear $[,]$ para os elementos das bases de U e V , da seguinte maneira

$$\begin{cases} [X_i, Y_i] = -[Y_i, X_i] = Z \\ 0 & \text{outros casos} \end{cases}$$

Não é difícil mostrar que

$$j(Z) = \begin{pmatrix} 0 & -Id_{n \times n} \\ Id_{n \times n} & 0 \end{pmatrix}$$

e portanto $j^2(Z) = -Id$.

Na verdade a álgebra de Heisenberg é a única álgebra de Lie de tipo H cujo centro é de dimensão 1. A seguinte proposição prova este fato (ver [7])

Proposição 1.1.2 Se $\tilde{n}$ é uma álgebra de Lie tipo H de dimensão $(2n + 1)$ cujo centro é de dimensão 1, então ela é isométrica e isomorfa à álgebra de Heisenberg $\tilde{h}_{2n+1}$.

Demonstração: Seja $\bar{Z} \in U$, tal que $|\bar{Z}| = 1$ então, pela propriedade 2 e a definição do colchete dada por (1.1), temos que a transformação linear

$j(\bar{Z}) : V \rightarrow V$ é não-singular e antisimétrica. Isto permite decompor o espaço vetorial V numa soma ortogonal direta $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_n$, onde $\dim V_i = 2$ e $j(\bar{Z})V_i = V_i$ para todo i . Agora, se $\bar{X}_i$ é um vetor unitário em V_i então $\bar{Y}_i = j(\bar{Z})\bar{X}_i$ é um vetor unitário de V_i que é ortogonal a $\bar{X}_i$ pois $j(\bar{Z})^2 = -Id$. Logo $\{\bar{X}_1, \bar{Y}_1, \dots, \bar{X}_n, \bar{Y}_n, \bar{Z}\}$ é uma base ortonormal para $\tilde{n}$. Finalmente o isomorfismo linear entre $\tilde{n}$ e $\tilde{h}_{2n+1}$, que leva $\bar{X}_i \mapsto X_i, \bar{Y}_i \mapsto Y_i, \bar{Z} \mapsto Z$, é uma isometria e um isomorfismo de álgebras. $\square$

Uma representação natural da álgebra de Heisenberg $\tilde{h}_{2n+1}$ é dada via isomorfismo com uma subálgebra da álgebra das matrizes triangulares $(2n+1) \times (2n+1)$ com zeros na diagonal, munido do colchete das matrizes i.e. $[A, B] = AB - BA$. O isomorfismo é dado por:

$$\begin{aligned} X_i &\mapsto (a_{ij}), \text{ onde } a_{1i+1} = 1, \text{ e } 0 \text{ no resto} \\ Y_i &\mapsto (a_{ij}), \text{ onde } a_{i+1(2n+1)} = 1, \text{ e } 0 \text{ no resto} \\ Z &\mapsto (a_{ij}), \text{ onde } a_{1(2n+1)} = 1, \text{ e } 0 \text{ no resto} \end{aligned}$$

Finalmente o grupo de Lie simplesmente conexo associado à álgebra de Heisenberg $\tilde{h}_{2n+1}$, que denotaremos por $\mathcal{H}_{2n+1}$, tem representação associada em $Gl(2n+1, \mathbb{R})$:

$$\mathcal{H}_{2n+1} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_n & z \\ & \ddots & & \bigcirc & y_1 \\ & & \ddots & \vdots & \\ & \bigcirc & & 1 & y_n \\ & & & & 1 \end{pmatrix} ; x_i, y_i \in \mathbb{R} \right\}$$

Tal grupo será chamado de grupo de Heisenberg de ordem n .

1.2 A geometria do grupo de Heisenberg

Pelo visto na seção anterior podemos considerar a álgebra de Lie $\tilde{h}_{2n+1}$ isomorfa a $\mathbb{R}^{2n+1}$ junto com o produto de Lie dado por:

$$\begin{cases} [e_i, e_{n+i}] = -[e_{n+i}, e_i] = e_{2n+1} & i = 1, \dots, n \\ 0 & \text{outros casos} \end{cases} \quad (1.2)$$

onde $\{e_i\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^{2n+1}$.

Por outro lado, a aplicação exponencial, $\exp : \tilde{\mathcal{H}}_{2n+1} \longrightarrow \mathcal{H}_{2n+1}$ dada por

$$\exp(X) = I + X + \frac{1}{2}X^2$$

é um difeomorfismo global que induz em $\tilde{\mathcal{H}}_{2n+1}$, usando a fórmula de Campbell-Hausdorff, a estrutura de grupo de $\mathcal{H}_{2n+1}$:

$$X * Y = X + Y + \frac{1}{2}[X, Y]$$

onde $X, Y \in \tilde{\mathcal{H}}_{2n+1}$. Portanto consideraremos $\mathcal{H}_{2n+1}$ como $\mathbb{R}^{2n+1}$ com o produto $*$ definido acima ou seja, se $p = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z)$ e $q = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n, \bar{z})$, então

$$p * q = \left(x_1 + \bar{x}_1, \dots, x_n + \bar{x}_n, y_1 + \bar{y}_1, \dots, y_n + \bar{y}_n, z + \bar{z} + \frac{1}{2} \sum x_i \bar{y}_i - \bar{x}_i y_i \right)$$

onde o elemento identidade é o 0, e $p^{-1} = (-x_1, \dots, -x_n, -y_1, \dots, -y_n, -z)$.

Agora podemos definir as translações à esquerda como transformações

$L_p : \mathcal{H}_{2n+1} \longrightarrow \mathcal{H}_{2n+1}$, tais que,

$$L_p(q) = p * q \quad (1.3)$$

e calcular o diferencial das translações

$$dL_p = \begin{bmatrix} Id_{2n \times 2n} & 0 \\ \frac{-y_1}{2} & \dots & \frac{-y_n}{2} & \frac{x_1}{2} & \dots & \frac{x_n}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

onde $p = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z)$.

Logo a base dos campos invariantes à esquerda, induzida pela base canônica de $\mathbb{R}^{2n+1}$, é dada por:

$$\begin{cases} X_i &= \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{y_i}{2} \frac{\partial}{\partial z} \\ Y_i &= \frac{\partial}{\partial y_i} + \frac{x_i}{2} \frac{\partial}{\partial z} \\ Z &= \frac{\partial}{\partial z} \end{cases} \quad i = 1, \dots, n \quad (1.4)$$

A métrica invariante à esquerda induzida pela métrica euclidiana em $\mathbb{R}^{2n+1} \approx \tilde{\mathcal{H}}_{2n+1}$ é dada por:

$$ds^2 = \sum_{i=1}^n dx_i^2 + \sum_{i=1}^n dy_i^2 + \left(dz + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n y_i dx_i - x_i dy_i \right)^2$$

Por definição da métrica invariante à esquerda, os elementos da base dos campos invariantes à esquerda $\{X_i, Y_i, Z\}$ são ortonormais na métrica ds^2 e as translações à esquerda são isometrias. O seguinte teorema fornece uma classificação para as métricas invariantes à esquerda.

Teorema 1.2.1 *Toda métrica invariante à esquerda sobre $\mathcal{H}_{2n+1}$ é equivalente, a menos de automorfismos da álgebra $\tilde{\mathcal{H}}_{2n+1}$, a uma das seguintes métricas*

$$g_{\lambda_1, \dots, \lambda_n} = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 [(dx_i)^2 + (dy_i)^2] + \left(dz + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n y_i dx_i - x_i dy_i \right)^2$$

onde $\lambda_i \in \mathbb{R} - \{0\}$

Demonstração: Ver [10]. □

A conexão de Levi-Civita associada à métrica ds^2 pode ser calculada a partir da seguinte identidade para campos invariantes à esquerda,

$$\langle \nabla_X Y, Z \rangle = \frac{1}{2} \{ \langle [X, Y], Z \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle + \langle [Z, X], Y \rangle \}$$

onde X, Y, Z são campos invariantes à esquerda. Então usando a base dos campos invariantes à esquerda dada em (1.4) podemos determinar completamente a conexão de $\mathcal{H}_{2n+1}$. Assim,

$$\begin{cases} \nabla_{X_i} X_j = \nabla_{Y_i} Y_j = \nabla_Z Z = 0 \\ \nabla_{X_i} Y_j = -\frac{1}{2} Z = -\nabla_{Y_j} X_i \\ \nabla_{X_i} Z = \frac{1}{2} Y_i = \nabla_Z X_i \\ \nabla_{Y_i} Z = -\frac{1}{2} X_i = \nabla_Z Y_i \end{cases}$$

1.2.1 Isometrias de $\mathcal{H}_{2n+1}$

Seja $\tilde{n}$ uma álgebra de Lie tipo H e N o grupo de Lie simplesmente conexo cuja álgebra é $\tilde{n}$. Como já vimos $\tilde{n}$ possui um produto interno natural que induz em N , via translações, uma métrica invariante à esquerda. Seja agora $A(N)$ o grupo de automorfismos de N que preservam o produto interno em $\tilde{n}$. Observamos que $A(N)$ coincide com o grupo de automorfismos de $\tilde{n}$, ver [8].

Teorema 1.2.2 *O grupo de isometrias de N coincide com o produto semidireto $A(N) \ltimes N$ (com N agindo via translações).*

Demonstração: Ver [13] □

Baseado neste teorema determinaremos a álgebra do grupo de automorfismos de $\mathcal{H}_{2n+1}$, que preservam o produto interno em $\tilde{h}_{2n+1}$ e que denotaremos por $\tilde{a}(\mathcal{H}_{2n+1})$. Seja $\Phi : \mathcal{H}_{2n+1} \rightarrow \mathcal{H}_{2n+1}$ uma isometria tal que $\Phi(0) = p$, então $\Psi = L_{p^{-1}} \circ \Phi$ é uma isometria que deixa fixo o elemento identidade 0. Portanto $d\Psi_0 : \tilde{h}_{2n+1} \rightarrow \tilde{h}_{2n+1}$ é uma transformação linear que preserva o produto interno em $\tilde{h}_{2n+1}$ e ainda, é um automorfismo de $\tilde{h}_{2n+1}$ ou seja $d\Psi_0[X, Y] = [d\Psi_0(X), d\Psi_0(Y)] \quad \forall X, Y \in \tilde{h}_{2n+1}$. Por outro lado temos que a álgebra do grupo dos automorfismos de $\tilde{h}_{2n+1}$ é igual a álgebra das derivações de $\tilde{h}_{2n+1}$, i.e.

$$\begin{aligned} \text{aut}(\tilde{h}_{2n+1}) &= \text{der}(\tilde{h}_{2n+1}) \\ &= \left\{ f \in \text{end}(\tilde{h}_{2n+1}) : f([X, Y]) = [f(X), Y] + [X, f(Y)] \right\} \end{aligned}$$

onde $X, Y \in \tilde{h}_{2n+1}$. Logo, usando a base canônica de $\tilde{h}_{2n+1}$ podemos encontrar explicitamente estes automorfismos.

$$\text{aut}(\tilde{\mathcal{H}}_{2n+1}) = \left\{ \begin{pmatrix} A & C & 0 \\ B & -A^t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & aI_{n \times n} & 0 \\ \rho & \mu & a \end{pmatrix} : a, \rho, \mu \in \mathbb{R} \right\} \quad (1.5)$$

onde B, C são matrizes simétricas (ver [21])

De (1.5) temos que $\text{aut}(\tilde{\mathcal{H}}_{2n+1})$ é isomorfa a $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}^{2n+1}$. Mas, como vimos acima, $d\Psi_0$ preserva o produto interno, portanto a álgebra de $A(\mathcal{H}_{2n+1})$ é dada por:

$$\tilde{a}(\mathcal{H}_{2n+1}) = \mathfrak{sp}(n, \mathbb{R}) \cap \mathfrak{so}(2n)$$

ou em forma explícita

$$\tilde{a}(\mathcal{H}_{2n+1}) = \left\{ \begin{pmatrix} A & -B^t & 0 \\ B & -A^t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; A + A^t = 0, B^t = B \right\},$$

que é uma álgebra de Lie de dimensão n^2 . Notemos que a álgebra $\tilde{a}(\mathcal{H}_{2n+1})$ é isomorfa a álgebra compacta $\mathfrak{u}(n)$ que é a álgebra maximal de $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$. Como consequência temos o seguinte

Teorema 1.2.3 *A álgebra dos campos de Killing de $\mathcal{H}_{2n+1}$ é de dimensão $n^2 + 2n + 1$ e admite a seguinte base, expressada em função dos campos invariantes à esquerda*

$$\begin{cases} \xi_i &= X_i + y_i Z; & \eta_i &= Y_i - x_i Z; & Z \\ S_{ij} &= x_i X_j - x_j X_i + y_i Y_j - y_j Y_i + (x_i y_j - x_j y_i) Z & , & i, j = 1, \dots, n \\ R_{ij} &= -y_j X_i + x_i Y_j - y_i X_j + x_j Y_i + (-x_i x_j - y_i y_j) Z \end{cases}$$

Demonstração: Começaremos definindo uma base para $\tilde{a}(\mathcal{H}_{2n+1})$. Vejamos

$$\begin{aligned}(s_{ij}) &= \begin{pmatrix} (E_{ij}) & 0 \\ 0 & -(E_{ij})^t \end{pmatrix} \\ (r_{ij}) &= \begin{pmatrix} 0 & -(\bar{E}_{ij})^t \\ (\bar{E}_{ij})^t & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

onde $\{(E_{ij})\}$, $\{(\bar{E}_{ij})\}$ são as bases canônicas das matrizes anti-simétricas e simétricas, respectivamente. Calcularemos agora os grupos a 1-parâmetro associados a cada um dos elementos da base anterior,

$$\begin{aligned}\sigma_t^{ij} &= \exp(t(s_{ij})) \\ \rho_t^{ij} &= \exp(t(r_{ij}))\end{aligned}$$

Finalmente calculamos os campos de Killing gerados pelos grupos de isometrias σ_t^{ij} e ρ_t^{ij} .

$$\begin{aligned}S_{ij}(\bar{x}, \bar{y}, z) &= \left. \frac{d}{dt} \sigma_t^{ij}(\bar{x}, \bar{y}, z) \right|_{t=0} \\ &= -x_n \frac{\partial}{\partial x_i} + x_i \frac{\partial}{\partial x_n} - y_n \frac{\partial}{\partial y_i} + y_i \frac{\partial}{\partial y_n} \\ R_{ij}(\bar{x}, \bar{y}, z) &= \left. \frac{d}{dt} \rho_t^{ij}(\bar{x}, \bar{y}, z) \right|_{t=0} \\ &= y_n \frac{\partial}{\partial x_i} + y_i \frac{\partial}{\partial x_n} - x_n \frac{\partial}{\partial y_i} - x_i \frac{\partial}{\partial y_n}\end{aligned}$$

Mas, por outro lado, sabemos que em um grupo de Lie com métrica invariante á esquerda, todo campo invariante á direita é de Killing. Daí segue-se o resultado. $\square$

A seguir mostraremos explicitamente o grupo de isometrias de $\mathcal{H}_3$. Para isto usaremos os seguintes lemas:

Lema 1.2.4 *Se f_1 e f_2 são duas isometrias numa variedade riemanniana M , conexa tal que $f_1(p) = f_2(p)$ e $df_1|_p = df_2|_p$, então $f_1 = f_2$.*

Demonstração: Ver [6], p.84. $\square$

Lema 1.2.5 *Se G é um grupo de Lie com uma métrica invariante á esquerda, então todo automorfismo do grupo G cujo diferencial na identidade preserva o*

produto interno, é uma isometria.

Lema 1.2.6 Se $\Psi : \mathcal{H}_3 \rightarrow \mathcal{H}_3$ é uma isometria tal que $\Psi(0) = 0$, então

$$\Psi(x, y, z) = \begin{cases} (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta, z) \\ \text{ou} \\ (x \cos \theta + y \sin \theta, x \sin \theta - y \cos \theta, -z) \end{cases}$$

Demonstração: Seja $\{e_1, e_2, e_3\}$ a base de $\tilde{\mathcal{H}}_3$ definida em (1.2), e

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

a matriz que representa a $d\Psi_0 : \tilde{\mathcal{H}}_3 \rightarrow \tilde{\mathcal{H}}_3$ nessa base. Como $d\Psi_0$ é um automorfismo da álgebra $\tilde{\mathcal{H}}_3$, então

$$d\Psi_0(e_3) = [d\Psi_0(e_1), d\Psi_0(e_2)]$$

Isto implica que $a_{13}e_1 + a_{23}e_2 + a_{33}e_3 = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})e_3$. Ou seja,

$$\begin{aligned} a_{13} &= 0 \\ a_{23} &= 0 \\ a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} &= a_{33} \end{aligned} \tag{1.6}$$

mas $d\Psi_0$ preserva o produto interno em $\tilde{\mathcal{H}}_3$, i.e. $AA^t = I$. Desta igualdade e (1.6), obteremos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} = 0 \\ a_{11}^2 + a_{12}^2 = 1 \\ a_{21}^2 + a_{22}^2 = 1 \\ a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \pm 1 \end{cases}$$

Então vamos ter os seguintes dois casos que nos permitirão encontrar as duas componentes conexas do grupo de isometrias de $\mathcal{H}_3$.

i) Se $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 1$, com $a_{11} \neq 0$, temos que, $a_{33} = 1$ e $a_{11} = a_{22}$, logo $a_{12} = -a_{21}$, portanto

$$A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Agora a aplicação $\Psi(x, y, z) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta, z)$ é um automorfismo de $\mathcal{H}_3$ tal que $\Psi(0) = 0$ e $d\Psi_0 = A$ então, pelos lemas (1.2.4) e (1.2.5), Ψ é a única isometria com tais propriedades. Notemos que Ψ é uma rotação ao redor do eixo z .

ii) Se $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = -1$, com $a_{11} \neq 0$, temos que $a_{33} = -1$ e $a_{11} = -a_{22}$, logo $a_{12} = a_{21}$, portanto

$$A = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & -\cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Como no caso anterior a aplicação $\Psi(x, y, z) = (x \cos \theta + y \sin \theta, x \sin \theta - y \cos \theta, -z)$ é um automorfismo de $\mathcal{H}_3$ tal que $\Psi(0) = 0$ e $d\Psi_0 = A$ logo, pelos lemas (1.2.4) e (1.2.5), Ψ é a única isometria com essas propriedades. $\square$

Portanto toda isometria de $\mathcal{H}_3$ pode ser obtida, de uma única forma, como composta de uma translação à esquerda e uma isometria dada pelo lema anterior. Em particular temos o seguinte

Teorema 1.2.7 *A componente conexa do grupo de isometrias de $\mathcal{H}_3$ que contém a identidade é isomorfo ao produto semi-direto de $\mathcal{H}_3$ com $SO(2)$, com $\mathcal{H}_3$ agindo por translações à esquerda. E nas coordenadas exponenciais, $SO(2)$ age por rotações ao redor do eixo z .*

Observações:

1. Note que $O(2)$ não age por isometrias em $\mathcal{H}_3$.
2. Nas coordenadas exponenciais, consideraremos o eixo z uma direção privilegiada pelo fato de que $SO(2)$ age por rotações ao redor dela.

1.2.2 Curvaturas em $\mathcal{H}_{2n+1}$

Em relação às curvaturas seccionais de $\mathcal{H}_{2n+1}$, é suficiente calcular as curvaturas na identidade 0 pois, via translações, podemos determinar a curvatura em qualquer outro ponto de $\mathcal{H}_{2n+1}$. Para isto usaremos a fórmula do tensor curvatura dada por:

$$R(X, Y) = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X, Y]}$$

Então usando a base dos campos invariantes à esquerda, temos que

$$\begin{cases} K(X_i, Y_j) &= -\frac{3}{4} \\ K(X_i, Z) &= K(Y_i, Z) = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Em relação ao tensor de Ricci

$$r(X, Y) = \text{tr}(Z \mapsto R(Z, X)Y)$$

usaremos novamente a base dos campos invariantes à esquerda. Assim,

$$\begin{aligned} \text{Ric}(X_i) &= -\frac{1}{2} \\ \text{Ric}(Y_i) &= -\frac{1}{2} \\ \text{Ric}(Z) &= \frac{n}{2} \end{aligned}$$

Finalmente a curvatura escalar é dada por:

$$\text{tr}(r) = -\frac{n}{2}.$$

1.2.3 Geodésicas em $\mathcal{H}_{2n+1}$

Seja $\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t), y_1(t), \dots, y_n, z(t))$ uma geodésica em $\mathcal{H}_{2n+1}$ tal que $\gamma(0) = 0$, $\dot{\gamma}(0) = (\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$. Então a partir da condição de geodésica dada por $\frac{D}{dt}(\dot{\gamma}) = 0$, obtemos o seguinte sistema de equações que caracteriza as geodésicas do grupo de Heisenberg que passam por 0, ver [13]:

$$\begin{cases} \ddot{x}_i + \dot{y}_i \left(\dot{z} + \frac{1}{2} (\dot{x}_i y_i - x_i \dot{y}_i) \right) = 0 \\ \ddot{y}_i - \dot{x}_i \left(\dot{z} + \frac{1}{2} (\dot{x}_i y_i - x_i \dot{y}_i) \right) = 0 \\ \ddot{z} + \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n \ddot{x}_i y_i - x_i \ddot{y}_i \right) = 0 \end{cases}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Resolvendo este sistema obtemos as seguintes soluções,

1. Se $\dot{z}_0 = 0$, a geodésica é uma reta contida no hiperplano $z = 0$ cuja equação é a seguinte:

$$\begin{cases} x_i(t) = \dot{x}_{i0} t \\ y_i(t) = \dot{y}_{i0} t \\ z(t) = 0 \end{cases}$$

2. Se $\dot{z}_0 \neq 0$, a geodésica tem a seguinte forma,

$$\begin{cases} x_i(t) = \frac{\dot{y}_{i0}}{\dot{z}_0} (\cos \dot{z}_0 t - 1) + \frac{\dot{x}_{i0}}{\dot{z}_0} \sin \dot{z}_0 t \\ y_i(t) = \frac{\dot{x}_{i0}}{\dot{z}_0} (1 - \cos \dot{z}_0 t) + \frac{\dot{y}_{i0}}{\dot{z}_0} \sin \dot{z}_0 t \\ z(t) = \left(\dot{z}_0 + \frac{1}{2\dot{z}_0} (|\dot{x}_0|^2 + |\dot{y}_0|^2) \right) t - \frac{1}{2\dot{z}_0} (|\dot{x}_0|^2 + |\dot{y}_0|^2) \sin \dot{z}_0 t \end{cases}$$

Notemos que se $|\dot{x}_0|^2 + |\dot{y}_0|^2 = 0$, a geodésica é o eixo Z . Em qualquer outro caso as geodésicas tem um comportamento do tipo espiral.

A figura (1-1) mostra as geodésicas que passam pela identidade 0 para o caso particular de $\mathcal{H}_3$.

Finalmente em [21] é mostrado que para toda métrica invariante à esquerda em $\mathcal{H}_{2n+1}$ não existem hipersuperfícies totalmente geodésicas. Mais ainda, se $\mathcal{D}$ é uma distribuição integrável e totalmente geodésica em $(\mathcal{H}_{2n+1}, g)$ então $\text{codim}(\mathcal{D}) \geq 2$. Devemos observar que existem distribuições integráveis e totalmente geodésicas de $\text{codim} 2$. Por exemplo a distribuição gerada por $\{Z, X_2, Y_2, \dots, X_n, Y_n\}$.

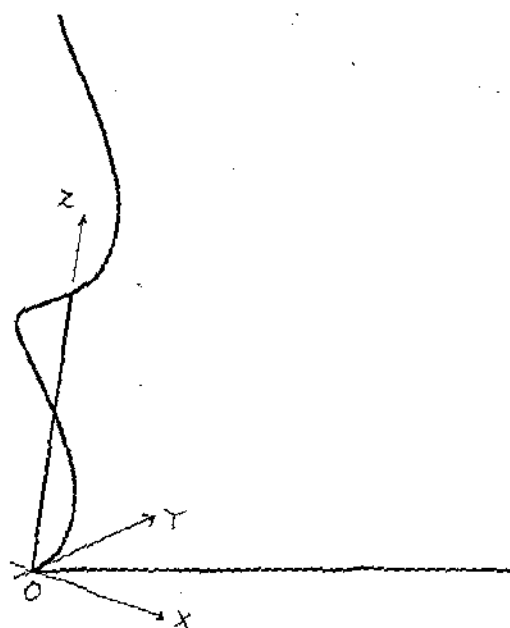


Figura 1-1: Geodesicas em $\mathcal{H}_3$

Capítulo 2

Superfícies invariantes por grupos de isometrias

Na primeira secção descreveremos uma aplicação das idéias da teoria do grupo de transformações ao estudo da geometria das subvariedades.

Na segunda secção determinaremos as superfícies de curvatura média constante de $\mathcal{H}_3$ que sejam invariantes por subgrupos a 1-parâmetro de isometrias, aplicando os conceitos apresentados na primeira secção.

2.1 Geometria Equivalente

Para estudar as superfícies invariantes por algum grupo de isometria usaremos a Geometria Equivalente que é, basicamente, o uso das técnicas da teoria de grupos de transformações para estudar a geometria das variedades riemannianas nas quais estes grupos agem por isometrias.

A seguir apresentamos as notações, conceitos e resultados a serem utilizados neste capítulo. Estes podem ser encontrados em Palais-Terng [20].

Consideraremos uma G -variedade riemanniana, que denotaremos por (G, M) , como uma variedade riemanniana M com um grupo fechado de isometrias G , agindo sobre ela. Recordemos que uma *órbita* $G(x)$, $x \in M$, é o conjunto $\{gx \in M : g \in G\}$. O *subgrupo de isotropia* G_x de $x \in M$ é $\{g \in G : gx = x\}$ ou seja o subgrupo que deixa fixo x . Observamos $G(x)$ é difeomorfa a G/G_x .

Por outro lado diremos que duas órbitas são do *mesmo tipo* se G_x e G_y são conjugados em G . Então os tipos de órbitas de M são as classes de conjugação dos grupos de isotropia $\{G_x : x \in M\}$. Podemos ordená-los parcialmente da seguinte forma:

$$(H) \geq (K) \text{ se } K \supset gHg^{-1} \text{ para algum } g \in G$$

Teorema 2.1.1 *Seja G um grupo de Lie atuando numa variedade M por meio de difeomorfismos e suponhamos que M/G é conexo. Então*

1. *Existe um único tipo de órbita principal, (H) , e que é maximal em relação a $\preceq$, i.e.. para todo $x \in M$, H é conjugado a um subgrupo de G_x*
2. *A parte regular de M , ou seja a união de todas as órbitas principais $M_r = \{x \in M : G_x \in (H)\}$, é aberto e denso em M .*
3. *O espaço quociente $M_r^* = M_r/G$ é uma variedade diferenciável e conexa e a aplicação quociente $\pi : M_r \rightarrow M_r/G$ é uma submersão.*

Demonstração: Ver [20]

□

De agora em diante nos restringiremos à parte regular de M , ou seja consideraremos a G -variedade (G, M_r) . Neste caso é possível encontrar $(n - d)$ funções invariantes $(f(x) = f(g \cdot x), \forall g \in G)$ que fornecem um sistema de coordenadas locais para M_r/G . Olver [18] nos apresenta técnicas para a construção destas funções invariantes utilizando os geradores da álgebra $\tilde{g}$. Em primeiro lugar devemos determinar quantas funções invariantes possui o grupo de transformações G . Notemos que se $f^1, \dots, f^k$ são funções invariantes do grupo de transformações G e $F(x^1, \dots, x^k)$ é uma função diferenciável qualquer, então $f(x) = F(f^1(x), \dots, f^k(x))$ também é uma função invariante. Isto motiva a seguinte

Definição 2.1.2 *Sejam $f^1(x), \dots, f^k(x)$ k funções diferenciáveis definidas numa variedade M . Então*

1. $f^1(x), \dots, f^k(x)$ são funcionalmente dependentes se para cada $x \in M$ existe uma vizinhança U de x e uma função diferenciável $F(x^1, \dots, x^k)$, não identicamente nula, em qualquer aberto de $\mathbb{R}^k$, tal que

$$F(f^1(x), \dots, f^k(x)) = 0$$

para todo $x \in U$.

2. $f^1(x), \dots, f^k(x)$ são funcionalmente independentes se não forem funcionalmente dependentes, ao restringir-se a qualquer aberto $U \subset M$.

O teorema, de caracter local, que nos fornece o número de funções invariantes e funcionalmente independentes é o seguinte

Teorema 2.1.3 *Seja G um grupo de transformações agindo numa variedade M , de dimensão m , tal que suas órbitas são de dimensão s . Se $x_0 \in M$, então existem $(m - s)$ funções invariantes que são funcionalmente independentes definidas numa vizinhança de x_0 .*

Demonstração: Ver [18], p. 87

□

A seguir descreveremos o método para encontrar tais funções quando $\dim(G) =$

1. Seja G o grupo de isometrias agindo em M_r , tal que sua álgebra é gerada por $\nu = \zeta^1(x) \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \zeta^m(x) \frac{\partial}{\partial x_m}$. Um invariante local de ν é a solução da seguinte equação parcial de 1ª ordem

$$\nu(f) = 0. \quad (2.1)$$

Então pelo teorema (2.1.3) existem $(m - 1)$ soluções invariantes e funcionalmente independentes. A teoria clássica mostra que pode-se encontrar a solução geral de (2.1) integrando o correspondente sistema característico dado por:

$$\frac{dx^1}{\zeta^1(x)} = \dots = \frac{dx^n}{\zeta^n(x)}. \quad (2.2)$$

As soluções de (2.2) são da forma $f^1(x^1, \dots, x^m) = c_1, \dots, f^{m-1}(x^1, \dots, x^m) =$

c_{m-1} , onde os c_j são constantes de integração e f^j são funções invariantes que independem dos c_j .

A seguir veremos que as funções invariantes acima calculadas permitem determinar a métrica orbital em M_r/G , ou seja, a métrica que faz da aplicação π uma submersão riemanniana.

Teorema 2.1.4 *Sejam $\{f^i\}_{i=1,\dots,m-1}$ as $(m-1)$ funções invariantes, funcionalmente independentes que satisfazem (2.1), então a métrica orbital em M_r/G é dada por:*

$$ds^2 = \sum_{i,j}^{m-1} c^{ij} df_i \otimes df_j \quad (2.3)$$

onde $c_{ij} = \langle \text{grad}(f_i), \text{grad}(f_j) \rangle$ e $(c^{ij}) = (c_{ij})^{-1}$.

Demonstração: Ver [3]. □

A seguir descreveremos a técnica, fornecido pela Geometria Equivariante, que nos permitirá "reduzir" as equações diferenciáveis de uma subvariedade de curvatura média constante que é invariante por um grupo de isometria. Seguiremos de perto o trabalho desenvolvido por A. Back, M. do Carmo e W.Y. Hsiang, [3].

Recordemos que se $\pi : E \rightarrow B$ é uma submersão Riemanniana, os tensores de O'Neill $\mathcal{A}$ e $\mathcal{T}$ de π são definidos como:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(X, Y) &= (\nabla_{X^h} Y^h)^v + (\nabla_{X^h} Y^v)^h \\ \mathcal{T}(X, Y) &= (\nabla_{X^v} Y^h)^v + (\nabla_{X^v} Y^v)^h \end{aligned}$$

onde h e v denotam a projeção *horizontal* e *vertical*, respectivamente. Vertical significa ao longo da fibra $\pi^{-1}(b)$, $b \in B$, e horizontal significa o complemento ortogonal à fibra. Denotaremos as distribuições verticais e horizontais por $\mathcal{V}$ e $\mathcal{D}$, respectivamente. O campo vetorial X é chamado de *projetável* se é horizontal e, se $x, y \in \pi^{-1}(b)$, $d\pi_x(X(x)) = d\pi_y(X(y))$. No caso em que a aplicação π é a aplicação quociente dada por uma ação Riemanniana (na parte regular), projetável significa que é horizontal e *invariante*. O seguinte lema será importante

importante nos cálculos posteriores.

Lema 2.1.5 *Sejam X um campo vertical e Y projetável. Então*

1. $[X, Y]$ é vertical.
2. Se X é Killing, então $[X, Y] = 0$.

Demonstração: Para o primeiro item, notemos que $d\pi[X, Y] = [d\pi(X), d\pi(Y)] = 0$, pois X é vertical. Para o segundo item, o cálculo da derivada de Lie envolve a diferença de Y e a sua translação via o fluxo de X , que é uma isometria local, resultando que o numerador seja zero. $\square$

As propriedades básicas de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{T}$ são:

Lema 2.1.6 1. $\mathcal{A}$ e $\mathcal{T}$ são 2-tensores:

2. Eles intercambiam os espaços verticais e horizontais em cada ponto.
3. $\mathcal{A}_X = \mathcal{A}(X, \cdot)$ e $\mathcal{T}_X = \mathcal{T}(X, \cdot)$ são operadores anti-simétricos em $T_x E$ em relação ao produto interno Riemanniano.
4. Se X, Y são projetáveis, então $\mathcal{A}(X, Y) = -\mathcal{A}(Y, X)$.
5. Se X, Y são verticais, então $\mathcal{T}(X, Y) = \mathcal{T}(Y, X)$.

Demonstração: As provas são diretas e só mostraremos as duas últimas. Para 4., notemos que se X, Y são projetáveis então, para qualquer campo vertical Z , $Z \cdot \langle X, Y \rangle = 0$, pois ao longo de uma curva vertical o produto interno $\langle X, Y \rangle$ é constante. Agora $\mathcal{A}(X, Y)$ é vertical para X, Y horizontais, então devemos somente calcular $\langle \mathcal{A}(X, Y), Z \rangle$ com Z vertical, para determinar seu valor. Assim

$$\begin{aligned}
 \langle \nabla_X Y, Z \rangle &= -\langle Y, \nabla_X Z \rangle \\
 &= -\langle Y, \nabla_Z X \rangle \\
 &= \langle \nabla_Z Y, X \rangle \\
 &= -\langle \nabla_Y Z, X \rangle
 \end{aligned}$$

onde foi usado o lema (2.1.5) duas vezes para obter a segunda e quarta igualdades.

Para 5., notemos que $[X, Y]$ é vertical para X, Y verticais, pois as fibras são subvariedades de E e $\mathcal{T}(X, Y)$ é horizontal. $\square$

Seja G um grupo atuando por isometrias em M , $\dim M = m$, e seja $H_1, \dots, H_d$ uma base ortonormal para a parte horizontal da submersão $\pi : M_r \rightarrow M_r/G$, em alguma vizinhança G -invariante. Sejam também $V_1, \dots, V_c$, $c = m - d$ uma base local de campos de Killing para a parte vertical e definiremos $a_{ij} = \langle V_i, V_j \rangle$. A seguinte proposição determina os tensores de O'Neill em termos das bases dadas:

Proposição 2.1.7 1. $\mathcal{A}(H_i, H_j) = \frac{1}{2}[H_i, H_j]^v$.

2. $\langle \mathcal{T}(V_i, V_j), H_k \rangle = -\frac{1}{2}H_k \langle V_i, V_j \rangle = -\frac{1}{2}H_k(a_{ij})$.

Demonstração: Para 1.,

$$\mathcal{A}(H_i, H_j) = (\nabla_{H_i} H_j)^v$$

e

$$\nabla_{H_i} H_j - \nabla_{H_j} H_i = [H_i, H_j],$$

e lembrando do lema (2.1.6), que

$$\mathcal{A}(H_i, H_j) = -\mathcal{A}(H_j, H_i)$$

segue-se o resultado.

Para 2., usamos o lema (2.1.5) e calculamos,

$$\begin{aligned} H_k \langle V_i, V_j \rangle &= \langle \nabla_{H_k} V_i, V_j \rangle + \langle V_i, \nabla_{H_k} V_j \rangle \\ &= \langle \nabla_{V_i} H_k, V_j \rangle + \langle V_i, \nabla_{V_j} H_k \rangle \\ &= -\langle H_k, \nabla_{V_i} V_j + \nabla_{V_j} V_i \rangle \\ &= -2 \langle H_k, \nabla_{V_i} V_j \rangle \end{aligned}$$

onde foi usado o lema (2.1.6) para a última igualdade. Mas esta é justamente a componente H_k de $T(V_i, V_j)$. $\square$

Observações:

1. Notemos que a prova da propriedade 1. não depende de que os V_i 's sejam de Killing, sendo válida para qualquer submersão Riemanniana. Também mostra que $\mathcal{A}$ fornece um critério para a integrabilidade da distribuição horizontal. De fato, $\mathcal{D}$ é integrável se e $\mathcal{A} \equiv 0$.
2. A segunda propriedade mostra que a segunda forma fundamental de uma órbita está relacionada com a derivada normal da métrica induzida.

A seguir daremos as relações entre as conexões ∇ de M , ∇^v das órbitas, ∇^h de M_r/G e os tensores de O'Neill, em termos das bases especiais usadas acima. Também identificaremos os campos horizontais com suas projeções.

Proposição 2.1.8 1. $\nabla_{V_i} V_j = T(V_i, V_j) + \nabla_{V_i}^v V_j$.

$$2. \nabla_{V_i} H_j = \nabla_{H_j} V_i = T(V_i, H_j) + \mathcal{A}(V_i, V_j)$$

$$3. \nabla_{H_i} H_j = \mathcal{A}(H_i, H_j) + \nabla_{H_i}^h H_j.$$

Demonstração: Estas equações seguem das definições e usando que $[V_i, H_j] = 0$ para a segunda equação. $\square$

Agora aplicaremos estas equações ao caso de uma imersão isométrica G -equivariante $\varphi : N \rightarrow M$, $\dim N = n$. Seja $\pi : N_r \rightarrow N_r/G$ e $\pi' : M_r \rightarrow M_r/G$ as submersões da parte regular. Vamos supor que G é um subgrupo fechado do grupo das isometrias de M e N , e que o tipo de órbita principal é o mesmo para ambas ações. Isto implica que φ induz uma imersão isométrica

$$\bar{\varphi} : N_r/G \rightarrow M_r/G,$$

se N_r/G e M_r/G possuem a métrica da submersão. No que segue nos restringiremos à parte regular, ou seja M_r e N_r .

Denotaremos por II e $\widetilde{II}$ a segunda forma fundamental de φ e $\tilde{\varphi}$, respectivamente. Denotaremos por:

- $\mathcal{A}, \mathcal{T}$, os tensores de O'Neill para π
- $\mathcal{A}', \mathcal{T}'$, os tensores de O'Neill para π' ;
- ∇ , a conexão de N ;
- ∇' , a conexão de M ;
- $\tilde{\nabla}$, a conexão de N_r/G ;
- $\tilde{\nabla}'$, a conexão de M_r/G .

Também, denotaremos por $X^\top$ e $X^\perp$ as projeções tangentes e ortogonais ao longo das duas imersões. Uma boa forma de escrever os tensores da segunda forma fundamental é:

$$\begin{aligned} II(X, Y) &= \left(\nabla'_{X^\top} Y^\top \right)^\perp + \left(\nabla'_{X^\top} Y^\perp \right)^\top \\ \widetilde{II}(X, Y) &= \left(\tilde{\nabla}'_{X^\top} Y^\top \right)^\perp + \left(\tilde{\nabla}'_{X^\top} Y^\perp \right)^\top \end{aligned}$$

onde X, Y são campos vetoriais ao longo de N_r para a primeira equação, e ao longo de N_r/G para a segunda equação. Notemos que quando X, Y são tangentes às subvariedades obtemos a forma usual da segunda forma fundamental. Na figura (2 – 1) especificamos a base a ser usada. Como antes, usaremos os campos de Killing $\{V_1, \dots, V_c\}$ como campos verticais, e serão os mesmos para as duas ações, pois ambas possuem o mesmo tipo de órbita. Os campos horizontais serão decompostos em dois conjuntos. Os primeiros e campos ortonormais $H_1, \dots, H_e$, serão tangentes à subvariedade N_r sendo que $e + c = n$, onde $n = \dim N$. Notemos que as projeções de $H_1, \dots, H_e$ também serão tangentes a $N_r/G \subset M_r/G$. O resto dos campos $H_{e+1}, \dots, H_d$, completam a parte horizontal, sendo ortogonais a N_r (e a N_r/G).

A seguinte proposição relaciona a segunda forma fundamental com os tensores de O'Neill.

Proposição 2.1.9 1. Para $1 \leq i, j \leq e$, $\mathcal{A}(H_i, H_j) = \mathcal{A}'(H_i, H_j)$.

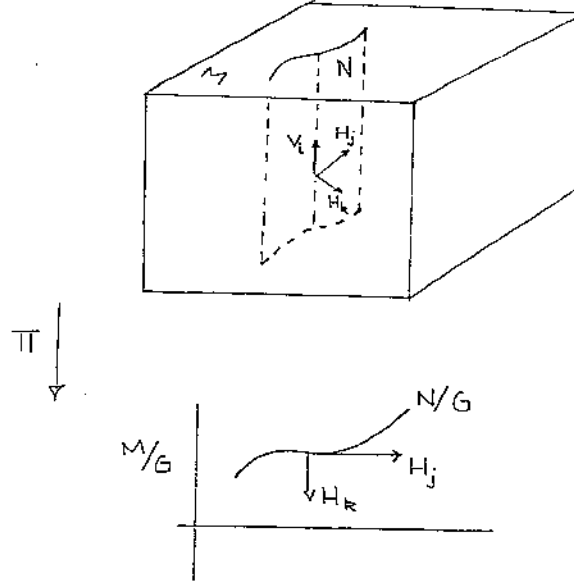


Figura 2-1: Base especial

2. Para $1 \leq i, j \leq c$, $II(V_i, V_j) = T'(V_i, V_j) - T(V_i, V_j)$.
3. Para $1 \leq i, j \leq e$, $II(H_i, H_j) = \widetilde{II}(H_i, H_j)$.
4. Para $1 \leq i \leq e$, $1 \leq j \leq c$, $II(H_i, V_j) = II(V_j, H_i) = \mathcal{A}'(H_i, V_j) - \mathcal{A}(H_i, V_j)$

Demonstração:

1. Temos que $\mathcal{A}(H_i, H_j) = \frac{1}{2}[H_i, H_j]^v$, e como a parte vertical é a mesma, devemos ter que $\mathcal{A}'(H_i, H_j) = \frac{1}{2}[H_i, H_j]^v$.
2. Calculando

$$\begin{aligned}
 II(V_i, V_j) &= (\nabla'_{V_i} V_j)^\perp \\
 &= \nabla'_{V_i} V_j - \nabla_{V_i} V_j \\
 &= T'(V_i, V_j) + \nabla_{V_i}^v V_j - T(V_i, V_j) - \nabla_{V_i}^v V_j \\
 &= T'(V_i, V_j) - T(V_i, V_j)
 \end{aligned}$$

3. Segue-se do fato de que $d\pi$ é uma isometria quando é restrita à distribuição horizontal e os tensores da segunda forma fundamental são horizontais e normais para campos horizontais e tangentes às subvariedades.

4. Calculamos

$$\begin{aligned}
II(H_i, V_j) &= (\nabla'_{H_i} V_j)^\perp \\
&= \nabla'_{H_i} V_j - \nabla_{H_i} V_j \\
&= T'(V_j, H_i) + \mathcal{A}'(H_i, V_j) - T(V_j, H_i) - \mathcal{A}(H_i, V_j) \\
&= \mathcal{A}'(H_i, V_j) - \mathcal{A}(H_i, V_j).
\end{aligned}$$

Para a terceira igualdade usamos a proposição (2.1.8). Já para a última igualdade, notemos que $T(V_j, H_i)$ e $T'(V_j, H_i)$ são verticais, e que

$$\begin{aligned}
\langle T(V_j, H_i), V_k \rangle &= -\langle H_i, T(V_j, V_k) \rangle \\
\langle T'(V_j, H_i), V_k \rangle &= -\langle H_i, T'(V_j, V_k) \rangle.
\end{aligned}$$

Mas T e T' representam os tensores da segunda forma fundamental das órbitas, em N e em M , respectivamente. Como H_i é tangente a N , então eles coincidem.

□

Agora podemos provar o seguinte teorema fundamental de [3], que será usado posteriormente.

Teorema 2.1.10 *Seja $\omega(p)$, $p \in M_r$, o elemento de volume da órbita $G(p)$. Então*

$$H = \tilde{H} - \text{grad}(\ln \omega(p)) \quad (2.4)$$

onde H e $\tilde{H}$ são os vetores curvaturas médias de $N_r \subset M_r$ e $N_r/G \subset M_r/G$, respectivamente.

Demonstração: Seja $\{X_1, \dots, X_c\}$ uma base local vertical. Então temos que

$$\text{tr} II = \sum_{i=1}^c II(X_i, X_i) + \sum_{i=1}^e II(H_i, H_i), \quad (2.5)$$

onde $\{H_i\}$ é a base horizontal descrita antes. Pela proposição (2.1.7) o segundo termo do lado direito da equação (2.5) é justamente $\text{tr} \tilde{II}$, logo resta calcular

o primeiro termo. Para isto notemos que os tensores da segunda forma fundamental são normais às subvariedades, quando calculados nos campos tangentes. Assim, é suficiente calcular a projeção de $\sum_{i=1}^c II(X_i, X_i)$ na direção H_k com $k > c$. Considerando $V_i = \sum_{s=1}^c \alpha_{is} X_s$, temos que

$$\sum_{i=1}^c II(X_i, X_i) = \sum_{i,j,r=1}^c \alpha^{ij} \alpha^{ir} II(V_j, V_r)$$

onde $(\alpha^{ij}) = (\alpha_{ij})^{-1}$. Além disso, definindo (a_{ij}) como a matriz com componentes

$a_{ij} = \langle V_i, V_j \rangle$, vamos ter que $a_{ij} = \sum_{s=1}^c \alpha_{is} \alpha_{js}$. Logo pela proposição (2.1.7) obtemos que:

$$\begin{aligned} \left\langle \sum_{i=1}^c II(X_i, X_i), H_k \right\rangle &= \sum_{i,j,r=1}^c \alpha^{ij} \alpha^{ir} \langle II(V_j, V_r), H_k \rangle \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{i,j,r=1}^c \alpha^{ij} \alpha^{ir} H_k \langle V_j, V_r \rangle \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{j,r=1}^c H_k a_{jr} \sum_{i=1}^c \alpha^{ij} \alpha^{ir} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{j,r=1}^c a^{jr} H_k a_{jr} \\ &= -\frac{1}{2} H_k (\ln \det(a_{ij})) \\ &= \langle -grad \ln(\sqrt{\det(a_{ij})}), H_k \rangle. \end{aligned}$$

Observamos que o elemento de volume da órbita $G(p)$ pode ser determinado por meio dos campos de Killing, pois eles são gerados pela álgebra $\tilde{\mathfrak{g}}$, o que obriga a que os campos de Killing sejam tangentes às órbitas principais, ver [15]. Portanto, $\sum_{i=1}^c II(X_i, X_i) = -grad \ln(\omega)$. $\square$

2.2 Superfícies invariantes em $\mathcal{H}_3$

Nesta seção estudaremos as superfícies de $\mathcal{H}_3$ de curvatura média constante que sejam invariantes por algum subgrupo de isometrias de $Iso(\mathcal{H}_3)$. Para isto precisaremos dos resultados da seção anterior e da geometria de $\mathcal{H}_3$, que foi descrita no primeiro capítulo. Recordemos que a base dos campos invariantes

à esquerda é dada por:

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2} \frac{\partial}{\partial z} \\ E_2 &= \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2} \frac{\partial}{\partial z} \\ E_3 &= \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned}$$

e a métrica invariante à esquerda é

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + \left(\frac{y}{2} dx - \frac{x}{2} dy + dz \right)^2$$

Consideraremos ainda a componente conexa de $Iso(\mathcal{H}_3)$ que contém a identidade, que como já vimos no capítulo anterior, é dada pelo produto semidireto $\mathcal{H}_3 \propto SO(2)$ com $\mathcal{H}_3$ agindo por translações e $SO(2)$, nas coordenadas exponenciais, agindo por rotações ao redor do eixo z . Logo a base dos campos de Killing é dada por:

$$\begin{aligned} X_1 &= y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} \\ X_2 &= \frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{2} \frac{\partial}{\partial z} \\ X_3 &= \frac{\partial}{\partial y} - \frac{x}{2} \frac{\partial}{\partial z} \\ X_4 &= \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned}$$

A seguir estudaremos as superfícies de curvatura média constante S que sejam invariantes pelo grupo das translações à esquerda do tipo $L_{(bt,0,0)}$ ou pelo grupo das translações à esquerda compostas com rotações, do tipo $L_{(bt,0,dt)} \circ \mathcal{R}_{at}$, onde $\mathcal{R}_{at}$ representam as rotações ao redor do eixo z . Notemos que estes grupos agem livremente (sem ponto fixo) em $\mathcal{H}_3$, portanto podemos considerar a parte regular M_r igual a $\mathcal{H}_3$, logo M_r/G é uma variedade de dimensão 2 que como vimos na seção anterior, pode ser parametrizada por duas funções invariantes que denotaremos por u e v . Dentro do contexto do teorema (2.1.10) temos que a subvariedade $S/G \subset M_r/G$ é uma curva que denotaremos por γ e que será parametrizada pelo comprimento de arco. Por outro lado a curvatura média $\tilde{H}$ de γ pode ser descrita pela curvatura geodésica

$$k_g = \frac{1}{2\sqrt{EG}}\{G_u\dot{v} - E_v\dot{u}\} + \dot{\sigma} \quad (2.6)$$

onde $E = ds^2(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u})$; $F = 0$; $G = ds^2(\frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v})$ e σ é o ângulo que γ faz com a direção $\frac{\partial}{\partial u}$, ver [5]. Finalmente, para calcular o elemento de volume da órbita usaremos os campos de Killing que, como já vimos na seção anterior, são tangentes à órbita.

2.2.1 Superfícies invariantes por translações à esquerda

Seja $\bar{g}$ a álgebra gerada por X_2 cujo grupo de isometrias é formado pelas translações à esquerda da forma $G = \{L_{(t,0,0)}\}_{t \in \mathbb{R}}$.

Agora consideremos o espaço quociente $\mathcal{H}_3/G$ que, como já vimos, pode ser parametrizado pelas funções G -invariantes. Estas funções satisfazem a seguinte equação de primeira ordem,

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{y}{2} \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0$$

cujo sistema característico é dado por,

$$\frac{y dx}{2} = dz.$$

Portanto as funções G -invariantes são:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \frac{xy}{2} - z \\ v(x, y, z) &= y \end{aligned} \quad (2.7)$$

Logo, o espaço quociente é:

$$\mathcal{H}_3/G = \mathbb{R}^2$$

Teorema 2.2.1 *As superfícies de $\mathcal{H}_3$ de curvatura média constante, invariantes por G , são as seguintes:*

1. $H \equiv 0$ (superfícies mínimas)

(a) As superfícies de equação:

$$z = \frac{xy}{2} - \frac{r}{2} \left[y\sqrt{1+y^2} + \ln \left(y + \sqrt{1+y^2} \right) \right], \quad r \in \mathbb{R}$$

(b) Os planos verticais.

2. $H \neq 0$

A superfície de equação:

$$z = \frac{xy}{2} + \frac{1}{2H} \left[\sqrt{1+y^2} \sqrt{1-H^2y^2} + \left(\frac{1+H^2}{H} \right) \arcsin \sqrt{\frac{1-H^2y^2}{1+H^2}} \right],$$

onde $-\frac{1}{H} \leq y \leq \frac{1}{H}$.

Demonstração: Para encontrar a métrica orbital calculamos os gradientes das funções invariantes u e v . Os campos gradientes serão expressados em função dos campos invariantes à esquerda. Assim,

$$\text{grad}(u) = uE_1 - E_3$$

$$\text{grad}(v) = E_2$$

Então a métrica orbital, segundo (2.3), é dada por

$$ds^2 = \left(\frac{1}{1+v^2} \right) du^2 + dv^2$$

Como já foi estabelecido, $\gamma(s) = (u(s), v(s))$ é uma curva em $\mathcal{H}_3/G$ que gera a superfície e que é parametrizada pelo comprimento de arco. Se σ é o ângulo que γ faz com a direção $\frac{\partial}{\partial u}$ então,

$$\dot{\gamma}(s) = \dot{u}(s) \frac{\partial}{\partial u} + \dot{v}(s) \frac{\partial}{\partial v}$$

Como γ está normalizada, temos que,

$$\begin{aligned} \dot{u}(s) &= \sqrt{1+v^2} \cos \sigma \\ \dot{v}(s) &= \sin \sigma \end{aligned} \tag{2.8}$$

Então substituímos (2.8) na fórmula (2.6) para obter a curvatura geodésica.

Assim,

$$k_g(s) = \dot{\sigma} + \frac{v \cos \sigma}{1 + v^2}$$

Por outro lado o subgrupo de isometrias $G = \{L_{(bt,0,0)}\}_{t \in \mathbb{R}}$, é gerado pelo campo de Killing bX_2 , que é tangente à órbita logo, o elemento de volume da órbita é dado por:

$$\begin{aligned} \omega &= \langle X_2, X_2 \rangle^{1/2} \\ &= \langle E_1 + yE_3, E_1 + yE_3 \rangle^{1/2} \\ &= \sqrt{1 + v^2} \end{aligned}$$

Como $\eta = -\sqrt{1 + v^2} \sin \sigma \frac{\partial}{\partial u} + \cos \sigma \frac{\partial}{\partial v}$ é a normal unitária a γ , positivamente orientada, então

$$\frac{\partial(\ln \omega)}{\partial \eta} = \frac{v \cos \sigma}{1 + v^2}$$

Substituindo em (2.4), obtemos que $H = \dot{\sigma}$.

Resumindo o exposto acima, o sistema de equações diferenciais que determinam γ é:

$$\begin{cases} \dot{u}(s) &= \sqrt{1 + v^2} \cos \sigma \\ \dot{v}(s) &= \sin \sigma \\ \dot{\sigma}(s) &= H \end{cases} \quad (2.9)$$

Distinguiremos dois casos, $H \equiv 0$ e $H \neq 0$:

1. $H \equiv 0$

Da terceira equação do sistema (2.9) obtemos que $\dot{\sigma}(s) = 0$, ou seja $\sigma(s) = k$.

Substituindo nas outras duas equações do mesmo sistema temos que:

$$\begin{aligned} \dot{u}(s) &= \sqrt{1 + v^2} \cos k \\ \dot{v}(s) &= \sin k \end{aligned} \quad (2.10)$$

Agora analisaremos dois sub-casos:

(a) $k \neq 0, \pi$

De (2.10) obtemos a seguinte equação diferencial

$$du = \cot k \sqrt{1+v^2} dv$$

Integrando

$$u = \cot k \left(v \sqrt{1+v^2} + \ln(v + \sqrt{1+v^2}) \right) + cte.$$

Usando as funções invariantes (2.7) e recordando que as translações ao longo do eixo z são isometrias segue-se o resultado. Devemos mencionar que esta mesma superfície foi obtida por M. Bekkar [1] analisando algumas soluções da equação dos gráficos mínimos em $\mathcal{H}_3$. Mais explicitamente, analisando soluções do tipo Sherck: $f(x, y) = u(x) + v(y) + \frac{xy}{2}$. Por outro lado M. Bekkar e T. Sari [2] obtiveram esta mesma superfície ao estudar as superfícies mínimas regradas em $\mathcal{H}_3$.

Em particular, para $\cot k = 1$ o gráfico da curva geradora γ é mostrado pela figura (2-2).

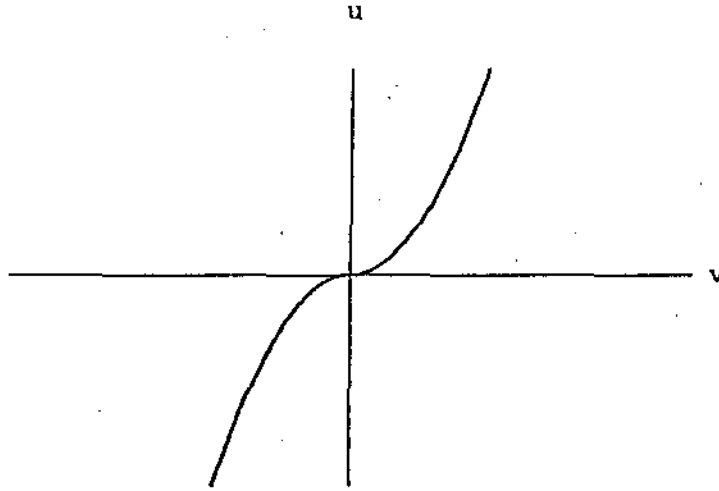


Figura 2-2: Curva geradora ($r=1$)

E a figura (2-3) mostra a superfície gerada por γ .

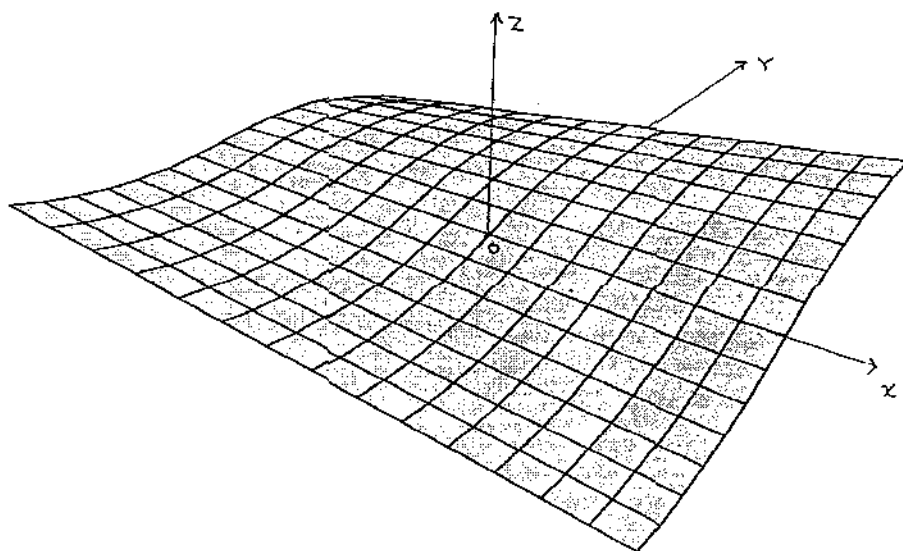


Figura 2-3: Superfície gerada ($r=1$)

(b) $k = 0$ ou π ,

Da segunda equação de (2.10) obtemos que $\dot{v}(s) = 0$, então $v(s) = cte$. De (2.7) temos que $y = cte$. Isto implica, neste caso, que as superfícies mínimas correspondentes são os planos verticais.

2. $H \neq 0$

Da terceira equação do sistema (2.9) obtemos que $\sigma(s) = Hs + b$. Substituindo na segunda equação do mesmo sistema temos que $v(s) = -\frac{1}{H} \cos(Hs + b)$. Logo

$$\begin{aligned}\cos \sigma &= -Hv \\ \sin \sigma &= -\sqrt{1 - H^2 v^2}\end{aligned}$$

Substituindo em (2.9), obtemos a seguinte equação ordinária:

$$du = Hv \sqrt{\frac{1 + v^2}{1 - H^2 v^2}} dv$$

Integrando,

$$u = \frac{1}{2H} [\sqrt{(1+v^2)(1-H^2v^2)} + \left(\frac{1+H^2}{H}\right) \arcsin \sqrt{\frac{1-H^2v^2}{1+H^2}}] + cte.$$

onde $-\frac{1}{H} \leq v \leq \frac{1}{H}$. Finalmente, substituindo as funções invariantes dadas em (2.7) na equação de acima segue-se o resultado. Em particular, para $H = 1$ a figura (2-4) mostra o gráfico da curva geradora γ .

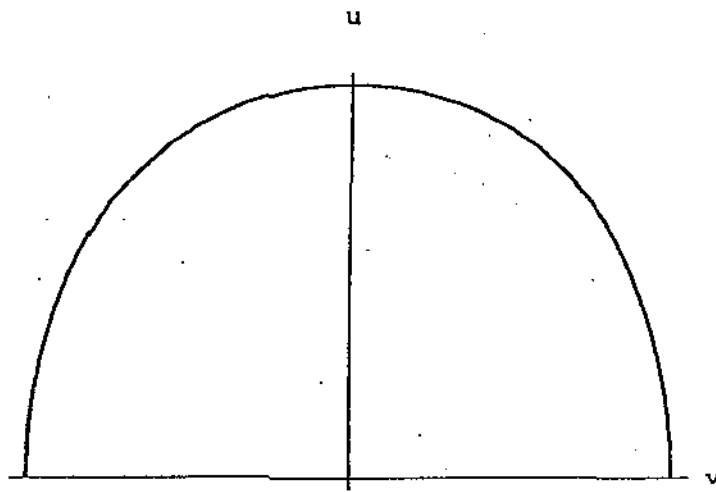


Figura 2-4: Curva geradora (H=1)

E a figura (2-5) mostra a superfície gerada por γ .

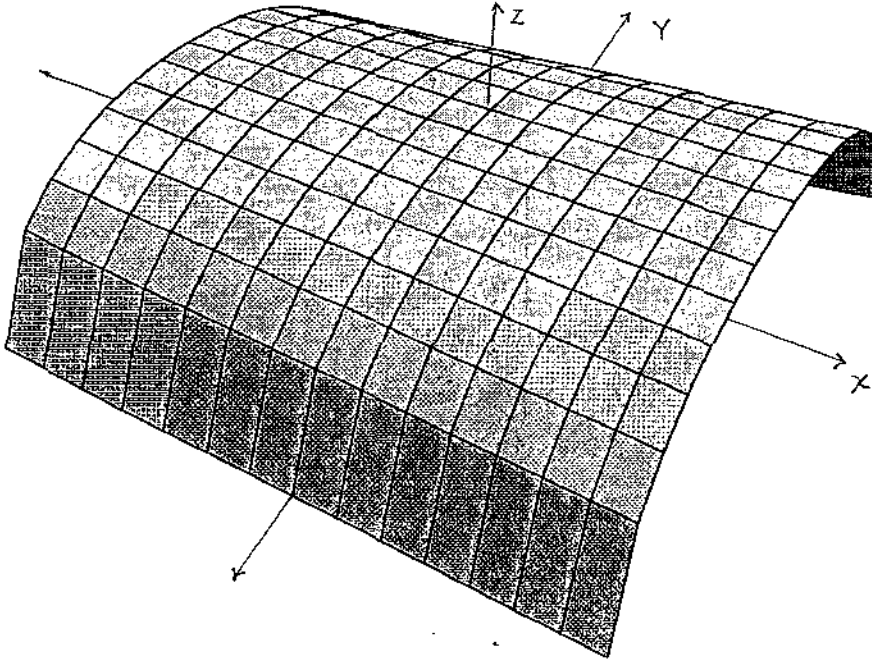


Figura 2-5: Superfície gerada ($H=1$)

□

Proposição 2.2.2 *Toda superfície que é invariante por translações de tipo $L_{(b,c,0)}$ ou do tipo $L_{(b,c,d)}$ é isométrica a alguma superfície invariante por translações de tipo $L_{(b,0,0)}$.*

Demonstração: Primeiro mostraremos que uma superfície invariante por $L_{(b,c,0)}$ é isométrica a uma superfície invariante por $L_{(b,0,0)}$. Para isto bastará provar que suas órbitas respectivas são isométricas. Seja $\mathcal{R}_\theta$ uma rotação ao redor do eixo Z , então

$$L_{(bt \cos \theta, bt \sin \theta, 0)} = \mathcal{R}_\theta \circ L_{(bt, 0, 0)} \circ \mathcal{R}_\theta^{-1}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Com efeito,

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_\theta \circ L_{(bt,0,0)} \circ \mathcal{R}_\theta^{-1}(x, y, z) &= \left(bt \cos \theta + x, bt \sin \theta + y, z + \frac{1}{2}(bty \cos \theta - btx \sin \theta) \right) \\ &= L_{(bt \cos \theta, bt \sin \theta, 0)}(x, y, z)\end{aligned}$$

Agora mostraremos que a superfície que é invariante por translações de tipo $L_{(b,c,0)}$ é isométrica à superfície que é invariante por $L_{(b,c,d)}$. Como acima, mostraremos que suas órbitas respectivas são isométricas.

Seja $\varphi = L_{(d/2c, -d/2b, 0)}$ uma translação a esquerda, com $b, c \neq 0$, então

$$L_{(bt, ct, dt)} = \varphi \circ L_{(bt, ct, 0)} \circ \varphi^{-1}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Com efeito,

$$\begin{aligned}\varphi \circ L_{(bt, ct, 0)} \circ \varphi^{-1}(x, y, z) &= (bt + x, ct + y, z + dt + \frac{bt}{2}y - \frac{ct}{2}x) \\ &= L_{(bt, ct, dt)}(x, y, z)\end{aligned}$$

□

Como consequência temos o seguinte

Teorema 2.2.3 *As superfícies de curvatura média constante invariantes por translações à esquerda do tipo $L_{(b,c,0)}$ ou do tipo $L_{(b,c,d)}$ são, a menos de isometrias, as descritas no teorema (2.2.1).*

Para completar a classificação das superfícies de curvatura média constante que são invariantes por translações à esquerda precisamos do seguinte

Teorema 2.2.4 *As superfícies de curvatura média constante invariantes por translações à esquerda do tipo $L_{(0,0,t)}$ são as superfícies parametrizadas por*

$$X(t, s) = (t, a(t), s)$$

onde $a(t)$ satisfaz a seguinte equação diferencial

$$\ddot{a} + 2H(1 + \dot{a}^2)^{3/2} = 0$$

Demonstração: Notemos que toda superfície que é invariante por translações do tipo $L_{(0,0,t)}$ têm que ser vertical, portanto ela pode ser parametrizada por

$$X(t, s) = (t, a(t), s)$$

Calculamos os coeficientes da 1ª forma fundamental

$$E = 1 + \dot{a}^2 + \frac{1}{4}(a - t\dot{a})^2$$

$$F = \frac{1}{2}(a - t\dot{a})$$

$$G = 1$$

os coeficientes da 2ª forma fundamental

$$L = \frac{(a - t\dot{a})(1 + \dot{a}^2) - 2\ddot{a}}{2\sqrt{1 + \dot{a}^2}}$$

$$M = \frac{\sqrt{1 + \dot{a}^2}}{2}$$

$$N = 0$$

e substituímos na fórmula da curvatura média para obter o resultado desejado.

□

2.2.2 Superfícies invariantes por translações e rotações (helicoidais)

Seja $\tilde{g}$ a álgebra gerada por $X_1 + bX_2 + dX_4$, onde seu grupo de isometria correspondente é $G = \{L_{(bt,0,dt)} \circ \mathcal{R}_t\}_{t \in \mathbb{R}}$.

Como na sub-seção anterior, parametrizaremos o espaço quociente $\mathcal{H}_3/G$ pelas funções G -invariantes. Neste caso, estas funções satisfazem a seguinte equação diferencial de primeira ordem

$$(y + b) \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} + \left(\frac{by}{2} + d\right) \frac{\partial}{\partial z} = 0$$

cujo sistema característico é dado por:

$$\frac{dx}{y + b} = \frac{dy}{-x} = \frac{dz}{\left(\frac{by}{2} + d\right)} \quad (2.11)$$

Da primeira igualdade obtemos a primeira função G -invariante, $r = \sqrt{x^2 + (y+b)^2}$.
 Fazendo $x = \sqrt{r^2 - (y+b)^2}$, e substituindo na segunda igualdade de (2.11) obtemos a seguinte equação diferencial:

$$\frac{dy}{-\sqrt{r^2 - (y+b)^2}} = \frac{dz}{\frac{by}{2} + d}$$

Integrando,

$$- \left[-\frac{b}{2} \sqrt{r^2 - (y+b)^2} + \left(d - \frac{b^2}{2}\right) \arcsin \left(\frac{y+b}{\sqrt{x^2 + (y+b)^2}} \right) \right] = z + cte.$$

Portanto, as duas funções G -invariantes são:

$$\begin{aligned} t(x, y, z) &= z - \frac{b}{2}x + \left(d - \frac{b^2}{2}\right) \arctan \left(\frac{y+b}{x} \right) \\ r(x, y, z) &= \sqrt{x^2 + (y+b)^2}. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Logo, o espaço quociente é:

$$\mathcal{H}_3/G = \{(t, r) \in \mathbb{R}^2 : r \geq 0\}$$

Teorema 2.2.5 *Seja $\gamma(s) = (r(s), t(s))$ uma curva em $\mathcal{H}_3/G$, parametrizada pelo comprimento de arco, e seja $\sigma(s)$ o ângulo entre $\frac{\partial}{\partial r}$ e o vetor tangente $\dot{\gamma}(s)$. Então a superfície $\pi^{-1}(\gamma)$ é de curvatura média constante H se:*

$$\begin{cases} \dot{t}(s) &= \frac{\sqrt{4r^2 + (r^2 + 2d - b^2)^2}}{2r} \sin \sigma \\ \dot{r}(s) &= \cos \sigma \\ \dot{\sigma}(s) &= H - \frac{\sin \sigma}{r} \end{cases} \quad (2.13)$$

Demonstração: Os campos gradientes das funções invariantes t e r serão expressados em função dos campos invariantes à esquerda. Assim,

$$\begin{aligned} \text{grad}(t) &= -\frac{1}{2}(y+b)\left(1 + \frac{2d-b^2}{r^2}\right)E_1 + \frac{x}{2}\left(1 + \frac{2d-b^2}{r^2}\right)E_2 + E_3 \\ \text{grad}(r) &= \frac{x}{r}E_1 + \left(\frac{y+b}{r}\right)E_2 \end{aligned}$$

Então a métrica orbital é dada por,

$$ds^2 = dr^2 + \frac{4r^2}{4r^2 + (r^2 + 2d - b^2)^2} dt^2$$

Como σ é o ângulo que γ faz com a direção $\frac{\partial}{\partial r}$ e

$$\dot{\gamma}(s) = \dot{r}(s) \frac{\partial}{\partial r} + \dot{t}(s) \frac{\partial}{\partial t}$$

então, sendo γ normalizada, temos que

$$\begin{aligned} \dot{t}(s) &= \frac{\sqrt{4r^2 + (r^2 + 2d - b^2)^2}}{2r} \sin \sigma \\ \dot{r}(s) &= \cos \sigma \end{aligned} \quad (2.14)$$

Agora, substituindo na formula da curvatura geodésica (2.6) obtemos

$$k_g = \dot{\sigma} - \frac{r^4 - (2d - b^2)^2}{r(4r^2 + (r^2 + 2d - b^2)^2)} \sin \sigma.$$

Por outro lado o subgrupo de isometrias $G = \{L_{(bt, 0, dt)} \circ \mathfrak{R}_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ é gerado pelo campo de Killing $X_1 + bX_2 + dX_4$, que é tangente à órbita logo, o elemento

de volume da órbita é dado por:

$$\begin{aligned}\omega &= \langle X_1 + bX_2 + dX_4, X_1 + bX_2 + dX_4 \rangle^{1/2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{4r^2 + (r^2 + 2d - b^2)^2}\end{aligned}$$

Se $\eta = -\sin \sigma \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \sigma}{\|\frac{\partial}{\partial t}\|} \frac{\partial}{\partial t}$ é a normal unitária a γ , positivamente orientada, então

$$\frac{d}{d\eta}(\ln \omega) = -2r \left(\frac{2 + (r^2 + 2d - b^2)}{4r^2 + (r^2 + 2d - b^2)^2} \right) \sin \sigma$$

Logo, substituindo em (2.4) temos que $H = \dot{\sigma} + \frac{1}{r} \sin \sigma$.

Notemos que na primeira equação de (2.13) podemos considerar, sem perda de generalidade, que $b = 0$. Isto implica que basta estudar as superfícies que são invariantes por isometrias de tipo $L_{(0,0,d)} \circ \mathbb{R}_\theta$. Portanto serão superfícies de rotação ou de tipo helicoidal. $\square$

Antes de analisar as soluções do sistema (2.13) apresentaremos alguns resultados básicos.

Proposição 2.2.6 1. Toda translação da curva solução de (2.13) ao longo da direção t é também solução de (2.13).

2. Toda reflexão da curva solução de (2.13) em relação à reta $t = c$ é também solução de (2.13)

Proposição 2.2.7 Se $J(s) = r \sin \sigma - \frac{H}{2} r^2$, então J é constante ao longo de qualquer curva solução de (2.13), i.e. J é uma primeira integral da equação (2.13).

Demonstração:

$$\begin{aligned}\dot{J}(s) &= \dot{r} \sin \sigma + r \dot{\sigma} \cos \sigma - H r \dot{r} \\ &= H r \cos \sigma \left(\frac{\sin \sigma}{r} + \dot{\sigma} - H \right) \\ &= 0\end{aligned}$$

$\square$

Portanto, as curvas soluções do sistema (2.13) se caracterizam pela equação

$$r \sin \sigma - \frac{H}{2} r^2 = k. \quad (2.15)$$

onde k é uma constante. Como no caso anterior distinguiremos dois casos

Teorema 2.2.8 *As superfícies de $\mathcal{H}_3$ de curvatura média constante, invariantes por G , são as seguintes:*

1. $H \equiv 0$ (*superfícies mínimas*)

(a) $k = 0$, *os helicoides*

(b) $k \neq 0$, *As superfícies geradas por curvas do tipo catenária*

2. $H > 0$

(a) $k = 0$,

(b) $k \neq 0$

i. *O cilindro reto de raio $\frac{1}{H}$*

ii. *As superfícies geradas por curvas do tipo ondulóide e do tipo nodal*

Demonstração: 1. $H \equiv 0$

De (2.15) temos que $r \sin \sigma = k$. Agora analisamos dois sub-casos

(a) $k = 0$.

Neste caso $\sigma = 0$ e $\frac{dt}{dr} = 0$, logo $t = cte$. Então das funções invariantes (2.12), obtemos a seguinte família de helicóides a 1-parâmetro que, localmente, pode ser parametrizada pela seguinte equação:

$$z = d \arctan\left(\frac{y}{x}\right), \quad d \in \mathbb{R}$$

Assim por exemplo para $d = 0.5$, a figura (2-6) mostra o gráfico:

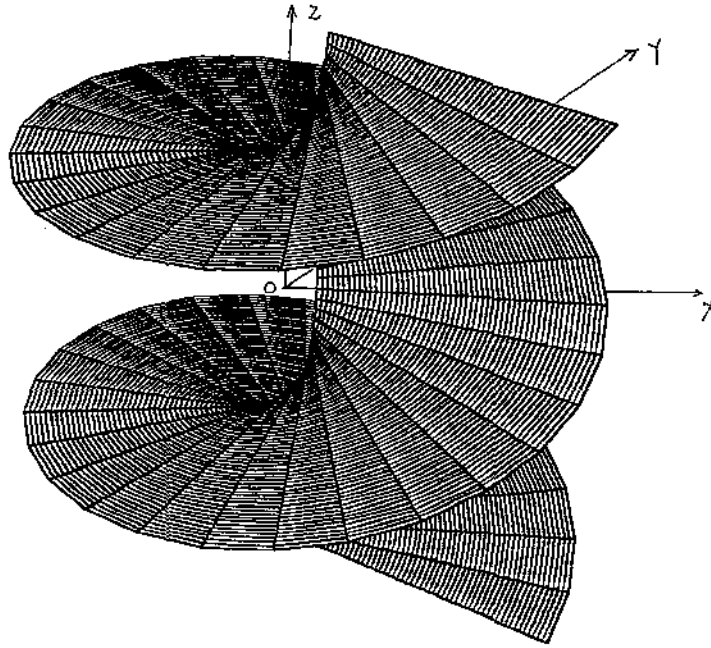


Figura 2-6: Helicoide

(b) $k > 0$.

Neste caso temos que $\sin \sigma = \frac{k}{r}$; $\cos \sigma = \frac{\sqrt{r^2 - k^2}}{r}$. Substituindo em (2.13) obtemos a seguinte equação diferencial,

$$\frac{dt}{dr} = \frac{k}{2r} \sqrt{\frac{4r^2 + (r^2 + 2d)^2}{r^2 - k^2}}, \quad r > k. \quad (2.16)$$

Notemos que:

- Esta equação é, em geral, do tipo elíptico, portanto sem integral explícita.
- Esta equação é ainda válida se $r = k$, pois isto significa que $\sigma = \frac{\pi}{2}$ ou seja γ é perpendicular à direção $\frac{\partial}{\partial r}$.
- $\frac{dt}{dr} > 0$, ou seja $t(r)$ é uma função crescente.
- $\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{dt}{dr} = \frac{k}{2}$ e $\lim_{r \rightarrow +\infty} \sigma = 0$.

Portanto, segundo a proposição (2.2.6), podemos considerar que γ passa por $t = 0$; $r = k$ e que é simétrica em relação à reta $t = 0$. A figura (2-7) mostra um esboço da curva γ .

Para certos valores do parâmetro d , podemos integrar explicitamente a

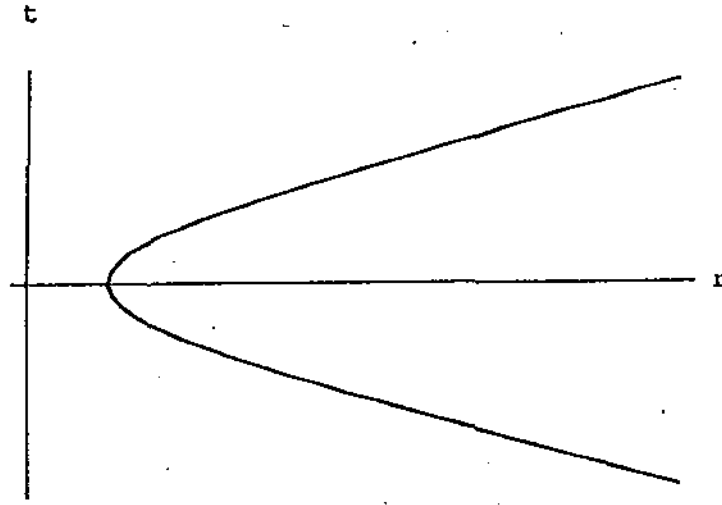


Figura 2-7:

equação (2.16). Assim, se $d = -0.5$, temos que a solução de (2.16) é

$$t(r) = -\frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{k}{r}\right) + \frac{k}{2} \sqrt{r^2 - k^2}, \quad r \geq k.$$

Substituindo as funções invariantes dadas em (2.12) na equação de acima obtemos a seguinte família de superfícies mínimas:

$$z = -\frac{1}{2} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) + \frac{k}{2} \sqrt{x^2 + y^2 - k^2}$$

onde $\sqrt{x^2 + y^2} \geq k$. A figura (2-8) mostra o gráfico para o caso particular em que $k = 1$,

2. $H > 0$

(a) $k = 0$. De (2.15) temos que $r \sin \sigma - \frac{H}{2} r^2 = 0$. Logo.

$$\begin{aligned} \sin \sigma &= \frac{H}{2} r \\ \cos \sigma &= \frac{1}{2} \sqrt{4 - H^2 r^2} \end{aligned}$$

Substituindo em (2.13),

$$\frac{dt}{dr} = \frac{H}{2} \sqrt{\frac{4r^2 + (r^2 + 2d)^2}{4 - H^2 r^2}}, \quad r \in [0, \frac{2}{H}). \quad (2.17)$$

Notemos que:

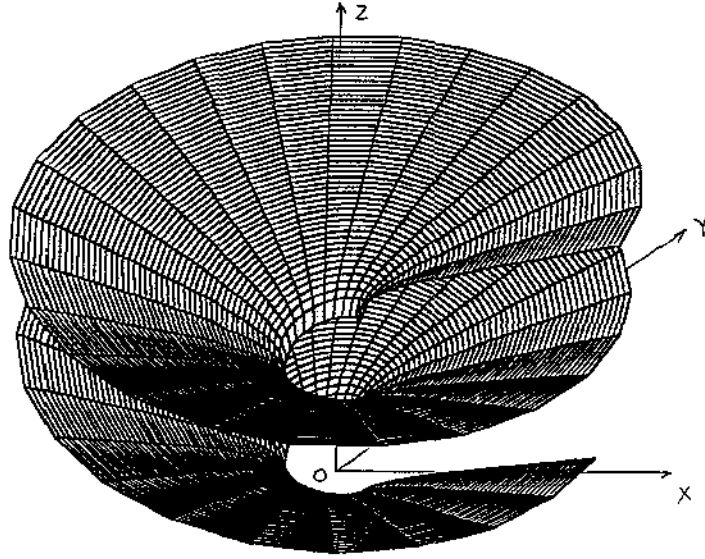


Figura 2-8: $k=1$

- Novamente obtemos uma equação, em geral, do tipo elíptica.
- Esta equação ainda é válida se $r = \frac{2}{H}$, pois isto significa que $\sigma = \frac{\pi}{2}$. Ou seja γ é perpendicular à direção $\frac{\partial}{\partial r}$.
- Se $r = 0$ temos que $\sigma = 0$, i.e. γ é paralelo à direção $\frac{\partial}{\partial r}$.
- $\frac{dt}{dr} > 0$, ou seja $t(r)$ é crescente.

Portanto, segundo a proposição (2.2.6), podemos considerar que a curva solução γ passa por $r = 0, t = t_0 < 0$; $r = \frac{2}{H}, t = 0$. Ver figura (2-9).

Para alguns valores do parâmetro d , podemos encontrar explicitamente a equação da superfície. Vejamos

a.1) Se $d = 0$, a curva que gera a *superfície de rotação* é caracterizada pela seguinte equação diferencial:

$$\frac{dt}{dr} = \frac{Hr}{2} \sqrt{\frac{4+r^2}{4-H^2r^2}}$$

Integrando,

$$t(r) = \frac{1}{8H} \sqrt{(4+r^2)(4-H^2r^2)} + \frac{1+H^2}{2H^2} \arcsin \sqrt{\frac{4-H^2r^2}{4+r^2}}$$

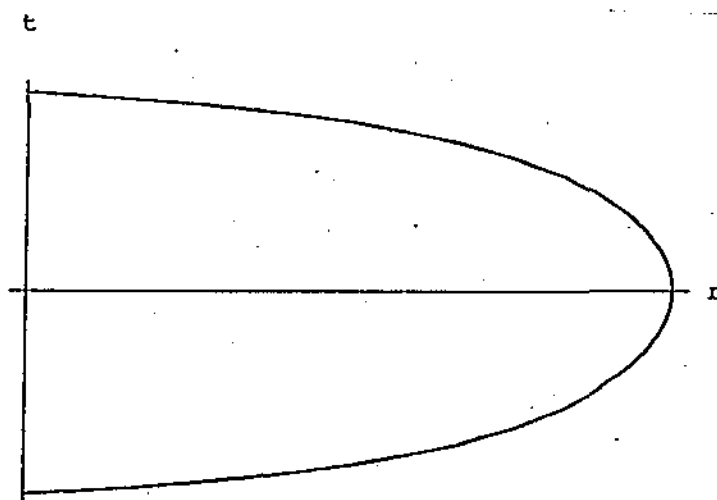


Figura 2-9:

Observamos que γ gera uma superfície compacta de curvatura média constante igual a H rodando ao redor do eixo z . No caso em que $H = 1$, a figura (2-10) mostra a superfície gerada por γ .

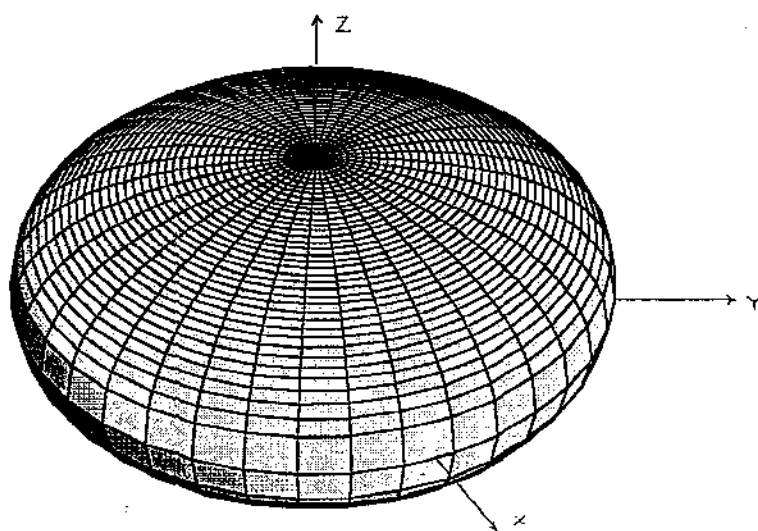


Figura 2-10: Superfície compacta com $H=1$

a.2) Se $d = -0.5$ a superfície é de tipo helicoidal cuja curva geradora γ é caracterizada pela seguinte equação diferencial:

$$\frac{dt}{dr} = \frac{H}{2} \left(\frac{1+r^2}{\sqrt{4-H^2r^2}} \right)$$

Integrando,

$$t(r) = \frac{2+H^2}{2H^2} \arcsin \frac{Hr}{2} - \frac{r\sqrt{4-H^2r^2}}{4H}, \quad r \in \left[0, \frac{2}{H}\right]$$

A figura (2-11) mostra a superfície gerada por γ .

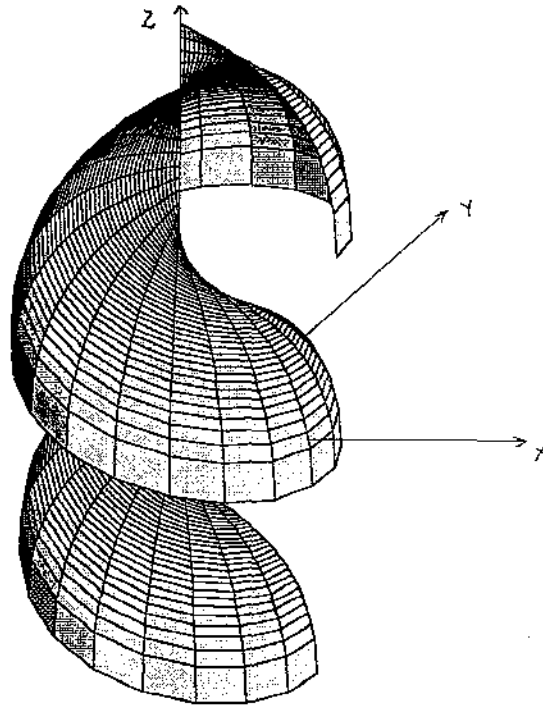


Figura 2-11: $H=1$

(b) $k \neq 0$,

De (2.15) obtemos a seguinte igualdade:

$$r = \frac{1}{H} \left(\sin \sigma \pm \sqrt{\sin^2 \sigma - 2kH} \right)$$

Isto obriga a que $k \leq \frac{1}{2H}$. Logo

i. Se $k = \frac{1}{2H}$, substituímos em (2.15) para obter que $\sigma \equiv \frac{\pi}{2}$. Logo, da terceira equação de (2.13), temos que $r \equiv \frac{1}{H}$. Portanto a superfície, neste caso, é um cilindro de raio $r = \frac{1}{H}$. Ver figura (2-12).

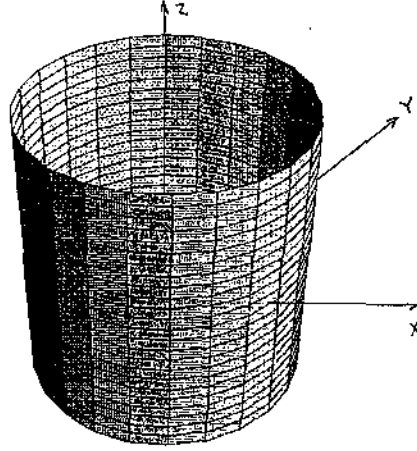


Figura 2-12: Cilindro

ii. Para o caso em que $k < \frac{1}{2H}$, podemos repetir a análise feito por P. Tomter em [25]. Assim a curva geradora γ pode ter as seguintes duas formas:

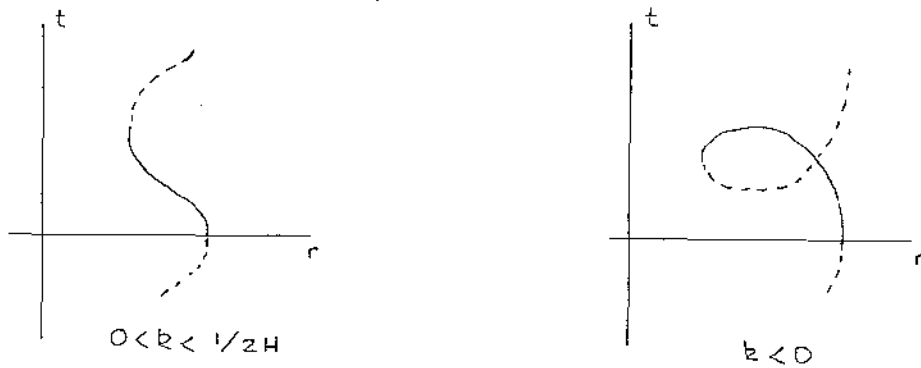


Figura 2-13: $k < 1/2H$

□

Proposição 2.2.9 *Toda superfície invariante por isometrias do tipo $L_{(b,c,d)} \circ \mathcal{R}_\theta$ é isométrico a alguma superfície invariante por isometrias do tipo $L_{(b,0,d)} \circ \mathcal{R}_\theta$.*

Demonstração: Baseado na proposição (2.2.2) temos que

$$\begin{aligned} L_{(bt,ct,dt)} \circ \mathcal{R}_{at} &= \mathcal{R}_\theta \circ L_{(bt,0,dt)} \circ \mathcal{R}_\theta^{-1} \circ \mathcal{R}_{at} \\ &= \mathcal{R}_\theta \circ L_{(bt,0,dt)} \circ \mathcal{R}_{at} \circ \mathcal{R}_\theta^{-1}. \end{aligned}$$

Portanto, as órbitas do grupo $\{L_{(bt,ct,dt)} \circ \mathcal{R}_{at}\}_{t \in IR}$ são isométricas às órbitas do grupo $\{L_{(bt,0,dt)} \circ \mathcal{R}_{at}\}_{t \in IR}$. □

Capítulo 3

Superfícies em $\mathcal{H}_3$

Neste capítulo vamos investigar as propriedades geométricas das superfícies no grupo de Heisenberg $\mathcal{H}_3$.

Na primeira seção estudaremos a aplicação normal de Gauss e sua relação com a geometria extrínseca das superfícies em $\mathcal{H}_3$, para isto usaremos um resultado de J. Ripoll, ver [23], que generaliza o caso Euclidiano. Por meio desse resultado demonstraremos que não existem superfícies umbílicas em $\mathcal{H}_3$.

Na seção 3.2 apresentaremos alguns resultados interessantes sobre as superfícies mínimas em $\mathcal{H}_3$. Primeiramente demonstraremos que não existem superfícies mínimas compactas e a seguir daremos uma classificação parcial das superfícies mínimas considerando o posto da aplicação normal de Gauss a elas associado.

Como vimos no primeiro capítulo, podemos considerar o grupo de Heisenberg, $\mathcal{H}_3$ como $\mathbb{R}^3$ com o produto dado por

$$(x, y, z) * (x', y', z') = \left(x + x', y + y', z + z' + \frac{xy'}{2} - \frac{x'y}{2} \right)$$

onde a métrica invariante à esquerda está dada por:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + \left(\frac{y}{2}dx - \frac{x}{2}dy + dz \right)^2$$

e a base dos campos invariantes à esquerda, ver (1.4), é:

$$\begin{aligned}
E_1 &= \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2} \frac{\partial}{\partial z} \\
E_2 &= \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2} \frac{\partial}{\partial z} \\
E_3 &= \frac{\partial}{\partial z}
\end{aligned}$$

Como já vimos no capítulo 1, o eixo z é uma direção privilegiada pelo fato de que o grupo de isometrias $SO(2)$ age, nas coordenadas exponenciais, por rotações ao redor de z , portanto para estudar as superfícies em $\mathcal{H}_3$ achamos conveniente considerar superfícies S dadas como gráfico de uma função diferenciável $z = f(x, y)$, onde $(x, y) \in U \subseteq \mathbb{R}^2$. Então parametrizamos estas superfícies como

$$X(x, y) = (x, y, f(x, y)), \quad (x, y) \in U \quad (3.1)$$

A base do espaço tangente $T_p S$ associada a esta parametrização é dada por:

$$\begin{aligned}
X_x &= (1, 0, f_x) = E_1 + (f_x + \frac{y}{2})E_3 \\
X_y &= (0, 1, f_y) = E_2 + (f_y - \frac{x}{2})E_3
\end{aligned} \quad (3.2)$$

Então

$$\eta(x, y) = -\left(\frac{f_x + \frac{y}{2}}{w}\right)E_1 - \left(\frac{f_y - \frac{x}{2}}{w}\right)E_2 + \frac{1}{w}E_3 \quad (3.3)$$

onde $w = \sqrt{1 + (f_x + \frac{y}{2})^2 + (f_y - \frac{x}{2})^2}$, é o campo normal unitário à superfície. Logo a métrica induzida por ds^2 em S é dada por:

$$\begin{aligned}
E &= \langle X_x, X_x \rangle = 1 + (f_x + \frac{y}{2})^2 \\
F &= \langle X_y, X_x \rangle = (f_x + \frac{y}{2})(f_y - \frac{x}{2}) \\
G &= \langle X_y, X_y \rangle = 1 + (f_y - \frac{x}{2})^2
\end{aligned} \quad (3.4)$$

Se ∇ é a conexão riemanniana de $(\mathcal{H}_3, ds^2)$, então pela fórmula de Weingarten para hipersuperfícies temos que,

$$A_\eta Z = -\nabla_Z \eta, \quad Z \in T_p S$$

E a segunda forma fundamental de S em p é:

$$II_\eta(Z) = \langle A_\eta Z, Z \rangle = -\langle \nabla_Z \eta, Z \rangle, \quad Z \in T_p S.$$

Logo, os coeficientes da segunda forma fundamental são:

$$\begin{aligned} L &= -\langle \nabla_{X_x} \eta, X_x \rangle = \frac{f_{xx} + (f_y - \frac{x}{2})(f_x + \frac{y}{2})}{\sqrt{1 + (f_y - \frac{x}{2})^2 + (f_x + \frac{y}{2})^2}} \\ M &= -\langle \nabla_{X_x} \eta, X_y \rangle = \frac{f_{xy} + \frac{1}{2}(f_y - \frac{x}{2})^2 - \frac{1}{2}(f_x + \frac{y}{2})^2}{\sqrt{1 + (f_y - \frac{x}{2})^2 + (f_x + \frac{y}{2})^2}} \\ N &= -\langle \nabla_{X_y} \eta, X_y \rangle = \frac{f_{yy} - (f_y - \frac{x}{2})(f_x + \frac{y}{2})}{\sqrt{1 + (f_y - \frac{x}{2})^2 + (f_x + \frac{y}{2})^2}} \end{aligned} \quad (3.5)$$

3.1 Aplicação normal de Gauss

Como no caso Euclidiano definimos a aplicação normal de Gauss como uma aplicação que faz corresponder a cada ponto da superfície S sua normal unitária. Para isto levamos cada normal à origem mediante as translações à esquerda definidas em (1.3). Tal aplicação será denotada por, $\gamma : S \longrightarrow S^2 = \{v \in \tilde{h}_3; |v| = 1\}$, onde

$$\gamma(p) = dL_{p^{-1}} \circ \eta(p)$$

Notemos que

$$\begin{aligned}
d\gamma(T_p S) &\subseteq T_{\gamma(p)} S^2 \\
&= \{\gamma(p)\}^\perp \\
&= dL_p^{-1}(T_p S)
\end{aligned}$$

Portanto $dL_p \circ d\gamma(T_p S) \subseteq T_p S$.

Sabemos que no caso euclidiano a diferencial da aplicação de Gauss é justamente a segunda forma fundamental de uma hipersuperfície imersa em $\mathbb{R}^{n+1}$. Isto pode ser generalizado para hipersuperfícies em um grupo de Lie qualquer. O seguinte teorema (ver [23]) explica a relação entre a aplicação de Gauss e a geometria extrínica de S .

Teorema 3.1.1 *Seja S uma hipersuperfície do grupo de Lie G , então*

$$dL_p \circ d\gamma_p(v) = -(A_\eta(v) + \alpha_{\bar{\eta}}(v)), \quad v \in T_p S$$

onde A_η é a aplicação de Weingarten e $\alpha_{\bar{\eta}}(v) = \nabla_v \bar{\eta}$, sendo $\bar{\eta}$ um campo invariante à esquerda tal que $\eta(p) = \bar{\eta}(p)$.

Demonstração: Seja $\eta = \sum_i \alpha_i E_i$ um campo unitário normal a S , $\{E_i\}$ uma base ortonormal de campos invariantes à esquerda e $v \in T_p S$ então,

$$\begin{aligned}
d\gamma_p(v) &= \sum_i v(\alpha_i) E_i(p) \\
dL_p \circ d\gamma_p(v) &= \sum_i v(\alpha_i) E_i(p)
\end{aligned}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned}
\nabla_v \eta|_p &= \sum_i v(\alpha_i) E_i(p) + \alpha_i(p) \nabla_v E_i|_p \\
&= \sum_i v(\alpha_i) E_i(p) + \nabla_v \sum_i \alpha_i(p) E_i|_p \\
&= dL_p \circ d\gamma_p(v) + \nabla_v \bar{\eta}|_p.
\end{aligned}$$

O que prova o teorema □

No caso das superfícies em $\mathcal{H}_3$, podemos determinar a matrizes que representam aos operadores $dL_p \circ d\gamma_p$ e $\alpha_{\bar{\eta}}$ quando S é o gráfico de uma função f . Assim

a aplicação normal de Gauss γ terá a seguinte representação na parametrização dada por (3.1)

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\gamma} & S^2 \\ \phi \uparrow & & \downarrow \varphi \\ U & \xrightarrow{\varphi \circ \gamma \circ \phi} & V \end{array}$$

onde ϕ é a representação de S dada pelo gráfico e φ é simplesmente a projeção da normal sobre o plano XY . Logo a representação da aplicação de Gauss é dada por,

$$\varphi \circ \gamma \circ \phi(x, y) = - \left(\frac{f_x + \frac{y}{2}}{w}, \frac{f_y - \frac{x}{2}}{w} \right) \quad (3.6)$$

A matriz que representa o operador $dL_p \circ d\gamma_p$ na base $\{X_x, X_y\}$ é

$$dL_p \circ d\gamma_p = \begin{pmatrix} - \left(\frac{f_x + \frac{y}{2}}{w} \right)_x & - \left(\frac{f_x + \frac{y}{2}}{w} \right)_y \\ - \left(\frac{f_y - \frac{x}{2}}{w} \right)_x & - \left(\frac{f_y - \frac{x}{2}}{w} \right)_y \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

E seu determinante é dado por:

$$\det(dL_p \circ d\gamma(x, y)) = \left(\frac{f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 + \frac{1}{4}}{w^2} \right) \quad (3.8)$$

Finalmente a matriz que representa a $\alpha_{\bar{\eta}}$, na base dada em (3.2) é

$$\alpha_{\bar{\eta}}(x, y) = \frac{1}{2w} \begin{pmatrix} - (f_x + \frac{y}{2})(f_y - \frac{x}{2}) & (1 - (f_y - \frac{x}{2})^2) \\ - (1 - (f_x + \frac{y}{2})^2) & (f_x + \frac{y}{2})(f_y - \frac{x}{2}) \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

onde w é como em (3.3).

Teorema 3.1.2 *As únicas superfícies conexas de $\mathcal{H}_3$ cuja aplicação de Gauss é de posto 0 são os planos verticais.*

Demonstração: Seja S uma superfície de $\mathcal{H}_3$ localmente parametrizada como gráfico de uma função $f(x, y)$. Como já vimos, a base do espaço tangente de S

associada a esta parametrização é dada por:

$$\begin{aligned} X_x &= E_1 + (f_x + \frac{y}{2})E_3 \\ X_y &= E_2 + (f_y - \frac{x}{2})E_3 \end{aligned}$$

Agora se $\exists p \in S$ tal que $(d\gamma)_p \equiv 0$ então $dL_p^{-1}(T_p S)$ é uma subálgebra de $\bar{h}_3$, ver [23]. Mas $[dL_p^{-1}(X_x), dL_p^{-1}(X_y)] = e_3 \notin dL_p^{-1}(T_p S)$. O que nos leva a uma contradição

No caso em que a superfície S fosse vertical podemos considerá-la como uma superfície regradada por retas verticais, que são geodésicas em $\mathcal{H}_3$. Isto nos permite parametrizá-la da seguinte forma

$$X(t, s) = (t, a(t), s), \quad (t, s) \in U \subseteq \mathbb{R}^2 \quad (3.10)$$

A base do espaço tangente $T_p S$ associada a esta parametrização é dada por

$$\begin{aligned} X_t &= E_1 + a'E_2 + \frac{1}{2}(a - ta')E_3 \\ X_s &= E_3 \end{aligned}$$

Então

$$\eta = \frac{a'}{\sqrt{1 + (a')^2}}E_1 - \frac{1}{\sqrt{1 + (a')^2}}E_2$$

é a normal unitária à superfície S . Notemos que η é constante se $a'(t) = cte$.

Ou seja $a(t)$ é linear. $\square$

Embora já fosse mostrado que não existem hipersuperfícies totalmente geodésicas em $\mathcal{H}_{2n+1}$, apresentaremos aqui um resultado mais geral para o caso de $\mathcal{H}_3$.

Teorema 3.1.3 *Não existem superfícies umbílicas em $\mathcal{H}_3$*

Demonstração: Seja S uma superfície umbílica e que ainda é parametrizada como gráfico de uma função diferenciável f . Então

$$\begin{aligned} A_\eta(X_x) &= \lambda X_x \\ A_\eta(X_y) &= \lambda X_y \end{aligned}$$

A equação de Codazzi (no caso umbílico) se escreve:

$$R(X_x, X_y)\eta = X_y(\lambda)X_x - X_x(\lambda)X_y \quad (3.11)$$

Substituindo (3.2) e (3.3) em (3.11) obtemos o seguinte sistema de equações diferenciais

$$\begin{aligned} \lambda_x &= -\left(\frac{f_x + \frac{y}{2}}{w}\right) \\ \lambda_y &= -\left(\frac{f_y - \frac{x}{2}}{w}\right) \end{aligned}$$

Mas isto implica que $dL_p \circ d\gamma_p$ é uma matriz simétrica na base dada por (3.2).

O que implica, usando o teorema (3.1.1), que $\alpha_{\bar{\eta}}$ é simétrica. Portanto, de (3.9)

$$w = \sqrt{3}$$

Mas isto junto com o fato de que $\lambda_{xy} = \lambda_{yx}$, nos leva à contradição

$$\left(f_x + \frac{y}{2}\right)_y = \left(f_y - \frac{x}{2}\right)_x$$

Se a superfície for vertical, poderíamos considerá-la como uma superfície regrada por retas verticais, que são geodésicas em $\mathcal{H}_3$. Isto nos permite parametrizá-la da seguinte forma.

$$X(t, s) = (t, a(t), s), \quad (t, s) \in U \subseteq \mathbb{R}^2 \quad (3.12)$$

Logo os coeficientes da primeira forma fundamental são:

$$\begin{aligned} E &= 1 + (a')^2 + \frac{1}{4}(a - ta')^2 \\ F &= \frac{1}{2}(a - ta') \\ G &= 1 \end{aligned}$$

E os coeficientes da segunda forma fundamental,

$$\begin{aligned} L &= \frac{(a-ta')(1+(a')^2)-2a''}{2\sqrt{1+(a')^2}} \\ M &= \frac{\sqrt{1+(a')^2}}{2} \\ N &= 0 \end{aligned}$$

Como a superfície é umbílica, então as entradas 12 e 21 da matriz de Weingarten A_η são nulas em qualquer base, em particular na base dada pela parametrização (3.12). Isto implica que $GM = 0$, o que é absurdo. $\square$

3.2 Superfícies mínimas em $\mathcal{H}_3$

Começaremos estudando os gráficos mínimos em $\mathcal{H}_3$. Primeiramente recordemos a fórmula da curvatura média em função dos coeficientes da primeira e segunda forma fundamental:

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{EN + GL - 2FM}{EG - F^2} \right) \quad (3.13)$$

Substituindo (3.4) e (3.5) em (3.13) obtemos a equação dos gráficos mínimos em $\mathcal{H}_3$.

$$\left(1 + \left(f_y - \frac{x}{2}\right)^2\right) f_{xx} - 2\left(f_y - \frac{x}{2}\right)\left(f_x + \frac{y}{2}\right) f_{xy} + \left(1 + \left(f_x + \frac{y}{2}\right)^2\right) f_{yy} = 0 \quad (3.14)$$

Antes de dar algumas consequências da equação (3.14), vejamos alguns exemplos de gráficos mínimos e calculemos o posto da sua aplicação de Gauss por meio da fórmula (3.8).

Exemplo 3.2.1 *Como no caso euclidiano IE^3 , os planos $f(x, y) = ax + by + c$ também satisfazem a equação dos gráficos mínimos. O posto da aplicação de Gauss destes planos é 2.*

Exemplo 3.2.2 *As superfícies tipo sela, $f(x, y) = \frac{xy}{2} + k[\ln(y + \sqrt{1+y^2}) + y\sqrt{1+y^2}]$, $k \in \mathbb{R}$. Como já vimos no capítulo 2 estas superfícies são regradas*

por retas, não necessariamente geodésicas e invariantes por translações à esquerda. Além disso, temos que o posto da aplicação de Gauss destas superfícies é 1.

Observamos que as superfícies do exemplo (3.2.2) estão definidas para todo (x, y) , portanto o teorema de Bernstein para gráficos mínimos em IE^3 não tem validade em $\mathcal{H}_3$.

Notemos que a equação dos gráficos mínimos (3.14) é uma equação elíptica não linear cujas soluções são reais analíticas. Além disso, este tipo de equação nos permite usar um princípio do máximo dado pelo seguinte

Teorema 3.2.3 *Seja $u(x, y)$ solução da equação elíptica não-linear*

$$\begin{cases} F(x, y, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = f(x, y) & \text{em } \Omega \\ u(x, y) = g(x, y) & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

Sejam z e Z duas funções satisfazendo as desigualdades

$$\begin{aligned} F(x, y, Z_x, Z_y, Z_{xx}, Z_{xy}, Z_{yy}) &\leq f(x, y) \leq F(x, y, z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}), & \text{em } \Omega \\ z(x, y) &\leq g(x, y) \leq Z(x, y) & \text{em } \partial\Omega \end{aligned}$$

E se $\forall \theta \in [0, 1]$, F é elíptico em relação a $u + \theta(z - u)$ e $u + \theta(Z - u)$ em Ω , e $\frac{\partial F}{\partial u} \leq 0$ em Ω . Então

$$z(x, y) \leq u(x, y) \leq Z(x, y), \quad \text{em } \Omega$$

Demonstração: Ver [22].

□

Baseado neste princípio do máximo demonstraremos o seguinte

Teorema 3.2.4 *Não existem superfícies mínimas compactas em $\mathcal{H}_3$.*

Demonstração: Vamos supor que existe tal superfície. Então existe um plano $\pi : z = k$ e um ponto na superfície tal que numa vizinhança Ω_p desse ponto, ela pode ser parametrizada como gráfico de uma função f que satisfaz a equação

dos gráficos mínimos (3.14) e $\partial\Omega_p \subset \pi$. Logo

$$f(x, y) = k, \quad (x, y) \in \partial\Omega_p$$

Então pelo Teorema (3.2.3), temos que $f(x, y) = k$, em Ω_p . $\square$

Analogamente, usando o fato de que existem superfícies S_H compactas de curvatura média constante H , $\forall H \neq 0$, (ver cap. 2), é possível mostrar o seguinte

Teorema 3.2.5 *Não existem gráficos completos de curvatura média constante não nula*

Demonstração: A partir da fórmula da curvatura média dada em (3.13) teremos que a equação dos gráficos de curvatura média H é dada por:

$$\left(1 + \left(f_y - \frac{x}{2}\right)^2\right) f_{xx} - 2\left(f_y - \frac{x}{2}\right)\left(f_x + \frac{y}{2}\right) f_{xy} + \left(1 + \left(f_x + \frac{y}{2}\right)^2\right) f_{yy} = 2Hw^2$$

onde $w = \sqrt{1 + \left(f_x + \frac{y}{2}\right)^2 + \left(f_y - \frac{x}{2}\right)^2}$. Notemos que se trata de uma equação elíptica não linear que satisfaz as condições do teorema (3.2.3). Suponhamos agora que existe um gráfico completo de curvatura média constante igual a $H \neq 0$. Traduzindo S_H ao longo de eixo Z , podemos supor que S_H não toca o gráfico. Depois voltamos com S_H até ela tocar o gráfico num ponto. Aplicando o princípio do máximo teríamos que S_H coincide com o gráfico, o que contradiz a compacidade de S_H . $\square$

A seguir vamos estudar a estabilidade dos gráficos mínimos, para isto devemos considerar estas superfícies como solução de um problema variacional. Mais precisamente,

Proposição 3.2.6 *Todo gráfico mínimo em $\mathcal{H}_3$ é estável.*

Demonstração: Seja S uma superfície definida como gráfico de uma função

$f(x, y)$ em um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Seja w como em (3.3), então consideraremos a seguinte variação de S :

$$S_t(x, y) = (x, y, f(x, y) + th(x, y)), \quad (x, y) \in \Omega$$

onde $h \in C^1$ e $h|_{\partial\Omega} = 0$. Logo a área de S_t sobre $\tilde{\Omega}$, está dada por :

$$A(t) = \iint_{\tilde{\Omega}} w(t) dx dy$$

Portanto, se S minimiza a área, ela deve ser ponto crítico de $A(t)$, i.e. $A'(0) = 0$. Então, derivando em relação a t .

$$A'(t) = \iint_{\tilde{\Omega}} w^{-1/2} [(f_x + th_x + \frac{y}{2})h_x + (f_y + th_y - \frac{x}{2})h_y] dx dy \quad (3.15)$$

Avaliando em $t = 0$, integrando por partes e usando o fato de que $h|_{\partial\Omega} = 0$, temos que

$$- \iint_{\tilde{\Omega}} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f_x + \frac{y}{2}}{w} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f_y - \frac{x}{2}}{w} \right) \right] h dx dy = 0.$$

Como h é arbitrário, vamos ter que,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f_x + \frac{y}{2}}{w} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f_y - \frac{x}{2}}{w} \right) = 0$$

Se efetuamos estas derivadas vamos reobter a equação dos gráficos mínimos (3.14). Agora, para saber se um gráfico mínimo é estável basta saber se $A''(0)$ é positivo. Então derivando (3.15) e avaliando em $t = 0$ vamos ter:

$$A''(0) = \iint_{\tilde{\Omega}} \frac{h_x^2 + h_y^2 + ((f_y - \frac{x}{2})h_x - (f_x + \frac{y}{2})h_y)^2}{w^2} \geq 0.$$

Observamos que $A''(0) = 0$ se $h_x = h_y = 0$. Isto implica que $h = 0$, pois $h|_{\partial\Omega} = 0$, portanto fica demonstrada a proposição. $\square$

A seguir classificaremos as superfícies mínimas de $\mathcal{H}_3$ tais que o posto de suas aplicações de Gauss seja 0 ou 1.

Teorema 3.2.7 *As únicas superfícies mínimas cuja aplicação de Gauss é de posto 0 são os planos verticais.*

Demonstração: Como vimos no teorema (3.1.2), o plano vertical é a única superfície tal que sua aplicação de Gauss é de posto 0. Então só resta verificar que ele é mínimo. Para isto, simplesmente parametrizamos o plano vertical como

$$X(t, s) = (t, at, s)$$

calculamos os coeficientes da primeira e segunda forma fundamental

$$\begin{aligned} E &= 1 + a^2 + \frac{a^2 t^2}{4}, \quad F = -\frac{at}{2}, \quad G = 1 \\ L &= \frac{-at\sqrt{1+a^2}}{2}, \quad M = \frac{\sqrt{1+a^2}}{2}, \quad N = 0 \end{aligned}$$

Para finalmente substituir na fórmula da curvatura média (3.13) obtendo $H = 0$.

□

Agora estudaremos os gráficos mínimos cuja aplicação de Gauss é de posto 1. Ou seja,

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 + \frac{1}{4} = 0. \quad (3.16)$$

Lema 3.2.8 *Seja $(x, y, f(x, y))$ um gráfico mínimo passando pela origem tal que sua normal seja $\eta(0) = \frac{1}{\sqrt{1+4k^2}}(0, -2k, 1)$ e o posto da aplicação de Gauss seja 1. Além disso, suponhamos que $f_{yy}(0) = 0$. Então,*

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{2} + k[\ln(y + \sqrt{1+y^2}) + y\sqrt{1+y^2}] \\ \text{ou} \\ 2ky - \frac{xy}{2} \end{cases}$$

Demonstração: Como a normal unitária na origem é $\eta = \frac{1}{\sqrt{1+4k^2}}(0, -2k, 1)$ então de (3.3) obtemos que $f_x(0) = 0$, $f_y(0) = 2k$.

Por outro lado a aplicação de Gauss tem posto 1, então de (3.16),

$$f_{xx}(0)f_{yy}(0) - f_{xy}^2(0) + \frac{1}{4} = 0 \quad (3.17)$$

Mas a f também satisfaz a equação dos gráficos mínimos (3.14). Em particular na origem temos que

$$(1 + 4k^2)f_{xx}(0) + f_{yy}(0) = 0.$$

Substituindo em (3.17), $(1 + 4k^2)f_{xx}^2(0) + f_{xy}^2(0) = \frac{1}{4}$. Mas por hipótese $f_{yy}(0) = 0$, então $f_{xy}(0) = \pm \frac{1}{2}$ e $f_{xx}(0) = 0$. Logo como f é analítica, podemos escrever seu desenvolvimento de Taylor da seguinte forma, $f(x, y) = 2ky \pm \frac{xy}{2} + \Psi(x, y)$. Substituindo em (3.16) obtemos que,

$$\Psi_{xx}\Psi_{yy} - \Psi_{xy}^2 = \pm \Psi_{xy}.$$

Seja n a menor ordem de $\Psi(x, y)$. Se os termos de menor ordem de Ψ aparecem misturados, então a menor ordem de Ψ_{xy} é igual a $(n - 2)$ e a menor ordem de $\Psi_{xx}\Psi_{yy} - \Psi_{xy}^2$ é maior ou igual que $2(n - 2)$, o que é absurdo.

Agora calculamos as terceiras derivadas de f na origem. Para isto derivamos em relação a x e y a equação dos gráficos mínimos (3.14) e a equação do posto da aplicação de Gauss (3.16) e avaliemos na origem. Assim, vamos obter os seguintes dois casos:

1. Se $f_{xy}(0) = \frac{1}{2}$, vamos ter que $f_{yyy}(0) = 2k$ e as outras terceiras derivadas de f são nulas. Então neste caso a f tem a seguinte forma,

$$f(x, y) = 2ky + \frac{xy}{2} + \psi(y) + ax^n + by^n + \tilde{\Psi}(x, y),$$

onde ψ é um polinômio em y de ordem mínima 3 e ordem máxima $(n - 1)$ com

$n \geq 4$. Logo,

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{y}{2} + anx^{n-1} + \tilde{\Psi}_x, \\ f_y &= 2k + \frac{x}{2} + \psi_y + bny^{n-1} + \tilde{\Psi}_y, \\ f_{xx} &= an(n-1)x^{n-2} + \tilde{\Psi}_{xx}, \\ f_{xy} &= \frac{1}{2} + \tilde{\Psi}_{xy}, \\ f_{yy} &= \psi_{yy} + bn(n-1)y^{n-2} + \tilde{\Psi}_{yy}. \end{aligned}$$

Substituindo em (3.14),

$$\begin{aligned} &(an(n-1)x^{n-2} + \tilde{\Psi}_{xx})[1 + (2k + \psi_y + bny^{n-1} + \tilde{\Psi}_y)^2] \\ &- 2(\frac{1}{2} + \tilde{\Psi}_{xy})(2k + \psi_y + bny^{n-1} + \tilde{\Psi}_y)(y + anx^{n-1} + \tilde{\Psi}_x) \\ &+ (\psi_{yy} + bn(n-1)y^{n-2} + \tilde{\Psi}_{yy})[1 + (y + anx^{n-1} + \tilde{\Psi}_x)^2] = 0. \end{aligned}$$

Analisando o coeficiente do termo x^{n-2} temos que,

$$(1 + 4k^2)an(n-1)x^{n-2} = 0.$$

Portanto $a = 0$. Ou seja, podemos escrever $f(x, y) = \frac{xy}{2} + g(y)$. Mas isto implica que a superfície é invariante por translações do tipo $L_{(b,0,0)}$, pois $L_{(b,0,0)}(x, y, \frac{xy}{2} + g(y)) = (x + b, y, \frac{(x+b)y}{2} + g(y))$. Então,

$$f(x, y) = \frac{xy}{2} + k[\ln(y + \sqrt{1+y^2}) + y\sqrt{1+y^2}].$$

2. Se $f_{xy}(0) = -\frac{1}{2}$, temos que as terceiras derivadas da f avaliadas na origem são todas nulas. Então podemos escrever a f como $f(x, y) = 2ky - \frac{xy}{2} + ax^n + by^n + \tilde{\Psi}(x, y)$, onde $n \geq 4$. Logo,

$$\begin{aligned} f_x &= -\frac{y}{2} + anx^{n-1} + \tilde{\Psi}_x, \\ f_y &= 2k - \frac{x}{2} + bny^{n-1} + \tilde{\Psi}_y, \\ f_{xx} &= an(n-1)x^{n-2} + \tilde{\Psi}_{xx}, \\ f_{xy} &= \tilde{\Psi}_{xy} - \frac{1}{2}, \\ f_{yy} &= bn(n-1)y^{n-2} + \tilde{\Psi}_{yy}. \end{aligned}$$

Substituindo em (3.14) temos a seguinte igualdade,

$$\begin{aligned}
& (an(n-1)x^{n-2} + \tilde{\Psi}_{xx})[1 + (2k - x + bny^{n-1} + \tilde{\Psi}_y)^2] \\
& - 2(\tilde{\Psi}_{xy} - \frac{1}{2})(2k - x + bny^{n-1} + \tilde{\Psi}_y)(anx^{n-1} + \tilde{\Psi}_x) \\
& + (bn(n-1)y^{n-2} + \tilde{\Psi}_{yy})[1 + (anx^{n-1} + \tilde{\Psi}_x)^2] = 0.
\end{aligned}$$

Agora se analisamos os coeficientes de x^{n-2} e y^{n-2} concluímos que, $a = b = 0$. Então, $f(x, y) = 2ky - \frac{xy}{2}$. $\square$

A seguir mostraremos que toda superfície mínima, cuja aplicação de Gauss tem posto 1, é regrada. Seja S uma superfície mínima de posto 1 tal que localmente é parametrizada como gráfico de uma função $f(x, y)$. Podemos supor que $f(0, 0) = 0$. Como S é de posto 1 então existe uma curva que passa pela origem tal que a normal da superfície ao longo desta curva é constante. Denotaremos essa curva por Γ , onde

$$\Gamma(t) : \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \alpha(t) \\ z(t) = f(t, \alpha(t)) \end{cases}, \quad t \in (-\epsilon, \epsilon).$$

Agora se a normal na origem é da forma $\eta(0) = \frac{1}{\sqrt{1+4k^2}}(0, -2k, 1)$ então ao longo da curva $\Gamma(t)$, ver (3.3), vamos ter que: ⁽¹⁾

$$\begin{aligned}
f_x(t) + \frac{\alpha(t)}{2} &= 0 \\
f_y(t) - \frac{t}{2} &= 2k
\end{aligned}, \quad t \in (-\epsilon, \epsilon). \quad (3.18)$$

Logo, derivando em relação a t estas duas igualdades obtemos que

$$\begin{aligned}
f_{xx}(t) + \alpha' f_{xy}(t) + \frac{\alpha'(t)}{2} &= 0 \\
f_{yx}(t) + \alpha' f_{yy}(t) - \frac{1}{2} &= 0
\end{aligned} \quad (3.19)$$

Também precisamos as segundas e terceiras derivadas de f avaliadas ao longo da curva Γ . Do sistema (3.18) e das equações (3.14) e (3.16) obtemos que,

¹As derivadas parciais da f ao longo da curva Γ serão escritas da seguinte forma: $f_x(t, \alpha(t)) \equiv f_x(t)$, $f_y(t, \alpha(t)) \equiv f_y(t)$; ..., etc.

$$\begin{aligned}
f_{xx}(t) &= \frac{\sin \theta}{2\sqrt{1+4k^2}} \\
f_{xy}(t) &= \frac{\cos \theta}{2} \\
f_{yy}(t) &= -\frac{\sqrt{1+4k^2} \sin \theta}{2}
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Derivando em relação a x e y as equações (3.14) e (3.16) e avaliando em $(t, \alpha(t))$ obtemos o seguinte sistema

$$\begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{1+4k^2} \sin \theta}{2} & -\cos \theta & \frac{\sin \theta}{2\sqrt{1+4k^2}} & 0 \\ 0 & \frac{-\sqrt{1+4k^2} \sin \theta}{2} & -\cos \theta & \frac{\sin \theta}{2\sqrt{1+4k^2}} \\ (1+4k^2) & 0 & 1 & 0 \\ 0 & (1+4k^2) & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{xxx}(t) \\ f_{xxy}(t) \\ f_{xyy}(t) \\ f_{yyy}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{k \sin \theta}{\sqrt{1+4k^2}} \\ k(1+\cos \theta) \end{pmatrix}$$

Resolvendo este sistema temos que

$$\begin{aligned}
f_{xxx}(t) &= \frac{k \sin \theta (1 - \cos \theta)}{2(1+4k^2)^{3/2}} \\
f_{xxy}(t) &= \frac{k \sin^2 \theta}{2(1+4k^2)} \\
f_{yyy}(t) &= \frac{k(1+\cos \theta)^2}{2} \\
f_{yyx}(t) &= \frac{k \sin \theta (1 + \cos \theta)}{2\sqrt{1+4k^2}}.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

A seguir mostraremos que toda superfície mínima de $\mathcal{H}_3$ cuja aplicação de Gauss é de posto 1 tem que ser regrada. Mais precisamente,

Teorema 3.2.9 *Se $(x, y, f(x, y))$ é um gráfico mínimo tal que sua normal na origem é $\eta(0) = \frac{1}{\sqrt{1+4k^2}}(0, -2k, 1)$ e o posto da sua aplicação de Gauss é 1, então ela é regrada.*

Demonstração: Vamos mostrar que a curva Γ definida anteriormente é uma reta. Para isto derivamos a terceira componente da curva Γ , ou seja

$$\frac{dz}{dt} = f_x(t) + \alpha' f_y(t) \quad (3.22)$$

De (3.19) temos que $\frac{d^2z}{dt^2} = \alpha'' f_y(t)$. Agora derivamos a segunda equação de (3.19) em relação a t , para obter a seguinte igualdade

$$f_{yxx}(t) + 2\alpha' f_{yxx}(t) + (\alpha')^2 f_{yyy}(t) + \alpha'' f_{yy}(t) = 0. \quad (3.23)$$

Então temos dois casos,

1. Se $f_{yy}(0) = 0$, bastará usar a proposição (3.2.8) para obter que a superfície é regrada.

2. Se $f_{yy}(0) \neq 0$, então $f_{yy}(t) \neq 0$, $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Portanto, se substituirmos (3.21) e a segunda equação de (3.19) em (3.23), obtemos $\alpha'' f_{yy}(t) = 0$, $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Isto implica que $\alpha(t) = bt$ e, portanto, de (3.18) concluímos que $\frac{dz}{dt} = 2kb$ e $f(t, bt) = 2kbt$. O que implica que a superfície é regrada. $\square$

A classificação das superfícies mínimas regradas é dada pelo seguinte teorema, ver [2] :

Teorema 3.2.10 *As superfícies mínimas de $\mathcal{H}_3$ regradas por retas, a menos de isometrias, são:*

1. *Os planos*
2. *O parabolóide hiperbólico $z = \frac{xy}{2}$.*
3. *O helicóide parametrizado por*

$$\begin{cases} x(t, s) = s \sin t \\ y(t, s) = s \cos t, & \rho \in \mathbb{R} - \{0\}. \\ z(t, s) = \rho t \end{cases}$$

4. *As superfícies de equação:*

$$z = \frac{xy}{2} - \frac{\lambda}{2} \left[y \sqrt{1+y^2} + \log \left(y + \sqrt{1+y^2} \right) \right], \quad \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

5. As superfícies que localmente são gráficos da função $z = \frac{1}{2}y(R(x) + x)$ onde R é solução da equação

$$R''(4 + R^2) - 2R(R' + 1)(R' + 2) = 0.$$

6. As superfícies que localmente são parametrizadas por

$$\begin{cases} x(t, s) = t + su(t) \\ y(t, s) = s \\ z(t, s) = a(t) - \frac{st}{2} \end{cases}$$

onde u e a são soluções do seguinte sistema

$$\begin{cases} (1 + u^2 + t^2)u'' - (1 + 2u'a')tu' = 0 \\ (1 + u^2 + t^2)a'' - (1 + 2u'a')(ta' - u) = 0 \end{cases} \quad (3.24)$$

Então, para classificar as superfícies mínimas cuja aplicação de Gauss é de posto 1 bastará determinar entre as superfícies descritas acima qual delas tem posto 1. Para isto usaremos a representação do posto da aplicação de Gauss dada por (3.8). Não é difícil notar que as superfícies descritas nos itens 1 e 3 do teorema (3.2.10) tem posto diferente de 1. Já as superfícies dos itens 2 e 4 tem posto 1. Bastará portanto, analisar as superfícies restantes.

Para as superfícies do tipo 5 temos que $f(x, y) = \frac{y}{2}(R(x) + x)$ então,

$$f_{xx} = R''; \quad f_{xy} = \frac{1}{2}(R' + 1); \quad f_{yy} = 0.$$

Substituindo em (3.16) temos $(R' + 1)^2 = 1$. Isto nos dá a seguinte solução:

$$f(x, y) = \frac{y}{2}(a - x)$$

A isometria $L_{(a,0,0)}$ leva esta superfícies para o hiperboloide parabólico $z = \frac{xy}{2}$.

A respeito das superfícies de tipo 6, temos que localmente podemos escrever tais superfícies como gráficos $z = f(x, y)$ com,

$$f(x, y) = a(t(x, y)) + \frac{1}{2}yt(x, y)$$

Então a partir das definições das funções $t(x, y)$ e $f(x, y)$, obtemos

$$\begin{cases} t_x = \frac{1}{1+yu'}; & t_y = \frac{-u}{1+yu'} \\ f_{xx} = a''t_x^2 + \left(a' + \frac{y}{2}\right)t_{xx} \\ f_{xy} = \frac{1}{2}t_x + a''t_xt_y + \left(a' + \frac{y}{2}\right)t_{xy} \\ f_{yy} = a''t_y^2 + t_y + \left(a' + \frac{y}{2}\right)t_{yy} \end{cases}$$

Substituindo em (3.16), obtemos $t_x^2 \left[\frac{1}{2} - \left(a' + \frac{y}{2}\right)u't_x \right]^2 = \frac{1}{4}$. Decorre daí que

$$(u')^2 y^2 + 2u'y + 2u'a' = 0.$$

Notemos que o primeiro membro é um polinômio de ordem 2 em y , então seus coeficientes se anulam. Ou seja, $u' = 0$. Logo u é constante. Mas mediante uma rotação ao redor do eixo z podemos considerar que $u = 0$. De (3.24) obtemos a seguinte equação diferencial

$$(1+t^2)a'' - ta' = 0$$

cujas solução é dada por

$$a(t) = \frac{\lambda}{2} \left[t\sqrt{1+t^2} + \log \left(t + \sqrt{1+t^2} \right) \right] + \mu.$$

onde $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Esta superfície mínima pode ser escrita como gráfico da função,

$$f(x, y) = \frac{xy}{2} - \frac{\lambda}{2} \left[y\sqrt{1+y^2} + \log \left(y + \sqrt{1+y^2} \right) \right]$$

Portanto, podemos dar a seguinte classificação das superfícies mínimas,

Teorema 3.2.11 *Toda superfície mínima cuja aplicação de Gauss é de posto 1 é, localmente um pedaço das superfícies descritas no teorema (3.2.9).*

Para finalizar este capítulo daremos alguns resultados sobre os gráficos mínimos completos i.e. $f(x, y)$ está definida para todo (x, y) . Primeiramente

apresentamos uma consequência direta da equação dos gráficos mínimos (3.14):

Proposição 3.2.12 *Se $f(x, y)$ é uma função que satisfaz (3.14) então*

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 \leq 0, \quad \forall (x, y)$$

Demonstração: Seja $a = 1 + (f_x + \frac{y}{2})^2$; $b = (f_x + \frac{y}{2})(f_y - \frac{x}{2})$; $c = 1 + (f_y - \frac{x}{2})^2$, então a partir da equação (3.14) vamos ter que:

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = -\frac{1}{a} \left(af_{xy}^2 + 2bf_{yy}f_{xy} + cf_{yy}^2 \right) \leq 0$$

$$\text{pois, } ac - b^2 = 1 + (f_x + \frac{y}{2})^2 + (f_y - \frac{x}{2})^2 > 0. \quad \square$$

Agora recordemos o seguinte teorema de Bernstein,

Teorema 3.2.13 *Seja $f(x, y)$ uma função real que satisfaz as seguintes condições:*

1. $f(x, y) \in C^2(\mathbb{R}^2)$.
2. $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 \leq 0$, $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 \neq 0$.

Então $f(x, y)$ não é limitada.

Demonstração: Ver [12] e [17]. $\square$

Segue-se deste teorema que todo gráfico mínimo completo em $\mathcal{H}_3$ não pode ser limitado. Mais precisamente,

Proposição 3.2.14 *Seja $(x, y, f(x, y))$ um gráfico mínimo definido para todo (x, y) tal que $|f(x, y)| \leq h$, $\forall (x, y)$. Então f é constante.*

Demonstração: Como f é limitada, vamos ter, pelo teorema de Bernstein que

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 \equiv 0$$

Mas, pela proposição (3.2.12) isto implica que

$$af_{xy}^2 + 2bf_{yy}f_{xy} + cf_{yy}^2 = 0$$

onde a, b e c são como na proposição. Logo $f_{yy} = f_{xy} = 0$, e da equação dos gráficos mínimos (3.14), temos que $f_{xx} = 0$. Ou seja f é constante $\square$

Por último o seguinte teorema nos fornece uma estimativa da "altura" da imagem da aplicação normal de Gauss de um gráfico mínimo completo, onde altura significa a terceira componente da normal $\eta(x, y)$ i.e, $\frac{1}{w}$. Ver (3.3).

Teorema 3.2.15 *Seja $(x, y, f(x, y))$ um gráfico mínimo completo então w não pode ser limitada.*

Demonstração: Suponhamos que w fosse limitado, ou seja existe $k > 0$ tal que $1 \leq w(x, y) < k \quad \forall (x, y)$.

Da equação dos gráficos mínimos (3.14) decorre que as funções $v_1 = (f_x + \frac{y}{2})$ e $v_2 = (f_y - \frac{x}{2})$ satisfazem a equação

$$\sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_j} \right) = 0 \quad (3.25)$$

com

$$(a_{ij}) = \frac{1}{w^3} \begin{pmatrix} 1 + (f_y - \frac{x}{2})^2 & -(f_x + \frac{y}{2})(f_y - \frac{x}{2}) \\ -(f_x + \frac{y}{2})(f_y - \frac{x}{2}) & 1 + (f_x + \frac{y}{2})^2 \end{pmatrix}$$

Como w é limitado, temos que

$$\frac{1}{k^3}(\xi_1^2 + \xi_2^2) \leq \sum a_{ij} \xi_i \xi_j, \quad \forall (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Portanto a equação (3.25) é uniformemente elíptica. Mas v_α é limitada, então pelo teorema de Liuville para este tipo de equações (ver [9]), temos que v_α é constante. O que implica que a aplicação de Gauss é constante. Mas isto é uma contradição. $\square$

Capítulo 4

Hipersuperfícies de rotação em $\mathcal{H}_{2n+1}$

No capítulo 2 estudamos as superfícies de curvatura média constante em $\mathcal{H}_3$ que eram invariantes pelo grupo de isometrias $SO(2)$ que, nas coordenadas exponenciais, atua por meio de rotações ao redor do eixo z . Podemos generalizar esta situação para hipersuperfícies em $\mathcal{H}_{2n+1}$. Mostraremos que as hipersuperfícies de rotação de curvatura média constante em $\mathcal{H}_{2n+1}$ são análogas às do $\mathcal{H}_3$. Mais especificamente, as mínimas são todas de tipo catenoidal e as de curvatura média constante diferente de zero são do tipo esférico ou Delaunay. Para isto consideraremos o grupo G gerado, via exponencial, pela seguinte álgebra:

$$\bar{g} = \text{aut}(\mathcal{H}_{2n+1}) \cap \mathfrak{so}(2n).$$

Como tínhamos visto no capítulo 1, esta álgebra é isomorfa a álgebra compacta $\mathfrak{u}(n)$.

Definição 4.0.16 *Uma hipersuperfície $\Sigma \subset \mathcal{H}_{2n+1}$ é de rotação se ela é invariante pelo grupo de isometrias G e $\dim \Sigma/G = 1$.*

Agora consideremos o espaço de órbitas M_r/G que pode ser parametrizado pelas seguintes funções G – invariantes :

$$\begin{aligned} t(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z) &= z \\ r(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z) &= \sum_{i=1}^n x_i^2 + y_i^2 \end{aligned}$$

Então o espaço de orbitas é:

$$\mathcal{H}_{2n+1}/G = \{(t, r) \in \mathbb{R}^2 : t \in \mathbb{R}, r \geq 0\}$$

Teorema 4.0.17 *Seja $\gamma(s) = (t(s), r(s))$ uma curva em $\mathcal{H}_{2n+1}/G$, parametrizada pelo comprimento de arco, e seja $\sigma(s)$ o ângulo entre $\frac{\partial}{\partial t}$ e o vetor tangente $\dot{\gamma}(s)$. Então a hipersuperfície $\Sigma : \pi^{-1}(\gamma)$ é de curvatura média constante H se:*

$$\begin{cases} \frac{dt}{ds} = \frac{1}{2}\sqrt{4+r^2} \cos \sigma \\ \frac{dr}{ds} = \sin(\sigma) \\ \frac{d\sigma}{ds} = H + \frac{2n-1}{r} \cos \sigma \end{cases} \quad (4.1)$$

Demonstração: A métrica orbital é dada por:

$$ds^2 = \frac{4}{4+r^2} dt^2 + dr^2$$

Como $\sigma(s)$ é o ângulo que $\gamma'(s)$ faz com $\frac{\partial}{\partial t}$, então a curvatura geodésica de γ é dada por (ver capítulo 2):

$$k_g = \sigma' + \frac{2r}{(4+r^2)^{3/2}} t'$$

Seja G/H o tipo de órbita principal de $(G, \mathcal{H}_{2n+1})$, onde H é o subgrupo de isotropia. Notemos que $\dim G/H = (2n-1)$, logo $\dim H = (n-1)^2$. Portanto, podemos tomar H como o grupo gerado, via exponencial, pela seguinte subálgebra de $\bar{g}$

$$\tilde{h} = \text{aut}(\tilde{h}_{2n-1}) \cap \text{so}(2(n-1))$$

Seja $\tilde{p}$ o complemento ortogonal de $\tilde{h}$ em $\bar{g}$ em relação a um produto interno fixo. Por exemplo,

$$\langle X, Y \rangle = \frac{1}{2} \text{tr} XY^t, \quad X, Y \in \tilde{g}. \quad (4.2)$$

Observamos que $\dim G/H = \dim \tilde{p}$, então tomamos uma base ortonormal em $\tilde{p}$, em relação à métrica dada por (4.2), e mediante o exponencial temos $(2n-1)$ subgrupos a 1-parâmetro de isometrias atuando na órbita. Logo, estes subgrupos vão gerar $(2n-1)$ campos de Killing que formarão uma base do espaço tangente da órbita. O que, finalmente, nos permitirá calcular o elemento de volume da órbita. Assim, a base ortonormal para $\tilde{p}$ é formada por:

$$\tilde{p} = \left\{ \begin{pmatrix} \circ & -a^t & \circ & b^t \\ a & 0 & b & c \\ \circ & -b^t & \circ & -a^t \\ -b & c & a & 0 \end{pmatrix} ; \quad a, b \in \mathbb{R}^{n-1}, c \in \mathbb{R} \right\}$$

que vão gerar os seguintes $(2n-1)$ campos de Killing tangentes à órbita principal,

$$\begin{aligned} S_{in} &= x_i X_n - x_n X_i + y_i Y_n - y_n Y_i + (x_i y_n - x_n y_i) Z, & 1 \leq i < n \\ R_{in} &= -y_n X_i + x_i Y_n - y_i X_n + x_n Y_i - (x_i x_n + y_i y_n) Z, & 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Como a órbita é um espaço homogêneo podemos calcular o elemento de volume num ponto qualquer. Portanto escolhemos $q = (0, \dots, x_n, 0, \dots, y_n, 0)$, logo

$$\begin{aligned} S_{in}(q) &= -x_n X_i - y_n Y_n \\ R_{in}(q) &= -y_n X_i + x_n Y_i, & 1 \leq i < n, \\ R_{nn}(q) &= -y_n X_n + x_n Y_n - \left(\frac{y_n^2 + x_n^2}{2}\right) Z \end{aligned}$$

e o elemento de volume da órbita $G(q)$, é dado por:

$$\omega(q) = r^{2n-1} \sqrt{1 + \frac{r^2}{4}} \quad (4.3)$$

onde $r = x_n^2 + y_n^2$.

Agora calcularemos a curvatura média da hipersuperfície Σ . Para isto precisamos achar os campos tangente e normal à curva γ . Assim

$$\begin{aligned}\gamma' &= \left(\frac{\sqrt{4+r^2}}{2} \cos \sigma, \sin \sigma \right) \\ \eta &= \left(-\frac{\sqrt{4+r^2}}{2} \sin \sigma, \cos \sigma \right)\end{aligned}\tag{4.4}$$

Logo, usando (4.4) e a proposição (2.1.10), temos que a curvatura média da hipersuperfície Σ é dada por:

$$\begin{aligned}H &= \sigma' + \frac{2r}{(4+r^2)^{3/2}} t' - \langle \text{grad} \log(\omega), \eta \rangle \\ &= \sigma' - \frac{2n-1}{r} \cos \sigma\end{aligned}$$

□

Antes de analisarmos as curvas soluções de (4.1), faremos algumas observações:

Proposição 4.0.18 1. *Toda translação da curva solução de (4.1) ao longo da direção t é também solução de (4.1).*

2. *Toda reflexão da curva solução de (4.1) em relação à reta $t = c$ é também solução de (4.1)*

Proposição 4.0.19 *A função*

$$J(s) = r^{2n-1} \cos \sigma + \frac{H}{2n} r^{2n}\tag{4.5}$$

é constante ao longo de γ , i.e. J é uma primeira integral do sistema (4.1) e as soluções são caracterizadas por $J(s) = c$.

Demonstração: Derivando $J(s)$, obtemos

$$\begin{aligned}J'(s) &= (2n-1)r^{2n-2}r' \cos \sigma - r^{2n-1} \sin \sigma \sigma' + Hr^{2n-1} \sin \sigma \\ &= r^{2n-1} \sin \sigma \left(\frac{2n-1}{r} \cos \sigma - \sigma' + H \right) \\ &= 0\end{aligned}$$

□

A classificação das hipersuperfícies de rotação em $\mathcal{H}_{2n+1}$, de curvatura média constante, é dada pelo seguinte:

Teorema 4.0.20 1. $H \equiv 0$ (hipersuperfícies mínimas)

a) Os hiperplanos

b) As hipersuperfícies do tipo catenóide

2. $H \neq 0$

a) As esferas de equação:

$$t(r) = t_0 - \left(\frac{n^2 + H^2}{H^2} \right) \left[\arctan(H\phi(r)) - \arctan\left(\frac{H}{n}\right) \right] + \frac{1}{H} \left[\frac{\phi(r)(4 - H^2 r^2)}{4} - 1 \right]$$

onde

$$\phi(r) = \sqrt{\frac{4 + r^2}{4 - H^2 r^2}}, \quad r \in \left[0, \frac{2}{H} \right].$$

b) As hipersuperfícies tipo Delaunay.

Demonstração: 1. $H \equiv 0$. Distinguiremos dois sub-casos

a) $J(s) = r^{2n-1} \cos \sigma = 0$

Neste caso $\cos \sigma = 0$, para todo $s \in \mathbb{R}$, então as hipersuperfícies invariantes são os hiperplanos $z = cte$.

b) $J(s) = c \neq 0$

Neste caso temos que $\cos \sigma = \frac{c}{r^{2n-1}}$. Substituindo em (4.1), obtemos a seguinte equação diferencial que caracteriza a curva γ

$$\frac{dt}{dr} = \frac{c}{2} \sqrt{\frac{4 + r^2}{r^{4n-2} - c^2}}, \quad r \in [c^{1/2n-1}, +\infty[.$$

Observamos que esta equação ainda é válida para $r = c^{1/2n-1}$, pois isto significa que $\sigma = 0$, ou seja a curva γ será perpendicular à direção $\frac{\partial}{\partial r}$. Finalmente, como

$$\frac{d^2 t}{dr^2} = \frac{c(4(1-n)r^{4n-1} - 2c^2 r - 4(4n-2)r^{4n-3})}{4\sqrt{4 + r^2}(r^{4n-2} - c^2)^{3/2}} \leq 0$$

obtemos o seguinte esboço do traço da curva γ

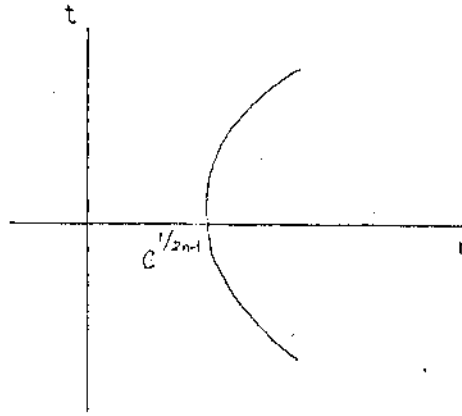


Figura 4-1: Tipo Catenoide

2. $H \neq 0$. Distinguiremos dois sub-casos:

a) $J(s) = c = 0$, para $s \in \mathbb{R}$. Então de (4.5), temos que $\cos \sigma = -\frac{Hr}{2n}$.

Substituindo em (4.1) obtemos a seguinte equação diferencial:

$$\frac{dt}{dr} = -\frac{2}{Hr} \sqrt{\frac{4n^2 - r^2 H^2}{4 + r^2}}, \quad r \in [0, \frac{2n}{H}]. \quad (4.6)$$

Observamos que a equação ainda é válida quando $r = 0$, pois isto significa que $\sigma = \frac{\pi}{2}$, ou seja a curva γ é perpendicular à direção $\frac{\partial}{\partial t}$.

Integrando a equação (4.6) obtemos a expressão desejada. Gráficamente, a curva γ é a seguinte:

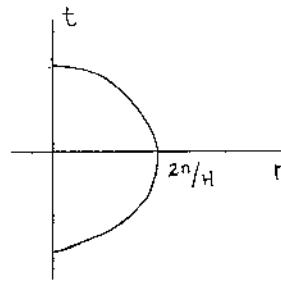


Figura 4-2: $H=1$

b) $c \neq 0$. Analisaremos dois sub-casos:

I) $c < 0$. Para fazer uma análise qualitativa das soluções de (4.1), começamos definindo a seguinte função

$$f(r) = \frac{H}{2p} r^{2n} - r^{2n-1}$$

Notamos que $f(0) = f\left(\frac{2n}{H}\right) = 0$; $f(y)$ é negativa no intervalo $\left(0, \frac{2n}{H}\right)$ e atinge seu mínimo em $\bar{r} = \frac{2n-1}{H}$ e que

$$J = r^{2n-1} \cos \sigma + \frac{H}{2n} r^{2n} \geq f(r) \quad (4.7)$$

Um esboço do traço de f é dada pela figura (4-3)

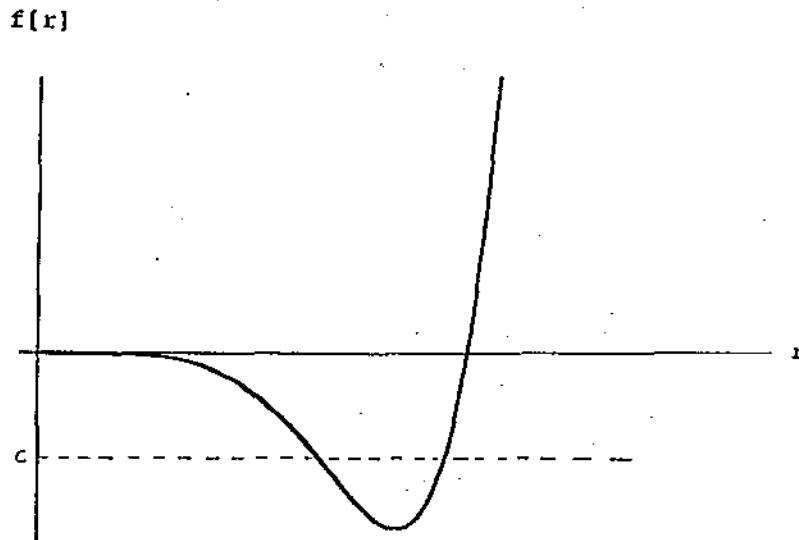


Figura 4-3:

Como $J \geq f(r) \geq f(\bar{r})$ e $J \equiv c$ ao longo da curva γ , teremos que $f(\bar{r}) \leq c < 0$. Logo existirão exatamente dois pontos $m_c < M_c$ tal que $f(m_c) = f(M_c) = c$ e da desigualdade (4.7) obtemos

$$m_c \leq r \leq M_c$$

Agora consideremos a única solução γ do sistema (4.1) determinado pelas seguintes condições iniciais:

$$t(0) = t_0, \quad r(0) = M_c, \quad \sigma(0) = \pi \quad (4.8)$$

Como $J(0) = f(r(0)) = c$, temos que $J \equiv c$ ao longo de γ . Por outro lado a partir das condições iniciais (4.8), da terceira equação de (4.1) e de que $M_c > \bar{r}$, ver figura (4-3), temos que

$$\sigma'(0) = H - \frac{2n-1}{M_c} > 0$$

Isto implica:

i) Existe $s_1 > 0$ tal que $\sigma'(s_1) = 0$. Se não fosse assim teríamos que $r < m_c$ devido ao fato de que $t(s)$ é sempre decrescente y $\sigma(s)$ crescente.

ii) Da terceira equação de (4.1) e de (4.5) teremos que $r(s_1) = \sqrt[2n]{-\frac{2n(2n-1)c}{H}}$.

iii) No ponto crítico teremos que $\sigma''(s_1) = -(2n-1) \frac{\cos \sigma \sin \sigma}{r^2}$. Como $\sigma \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$, teremos que $\sigma(s_1)$ é um ponto máximo

iv) Existe $s_2 > s_1$ tal que $\sigma(s_2) = \pi$. Se não fosse assim teríamos

$\lim_{s \rightarrow +\infty} \sigma = \pi$ (i.e. σ possui uma assíntota) $\lim_{s \rightarrow +\infty} r(s) = r_0 < r(s_1)$, então

$\lim_{s \rightarrow +\infty} \sigma' < 0$. Mas isto contradiz o fato de que σ tenha assíntota.

v) $J(s_2) = -r(s_2) + \frac{H}{2n} r^{2n} = c$, logo $r(s_2) = m_c$, $r'(s_2) = 0$, $t'(s_2) = \frac{1}{2} \sqrt{4 + m_c^2}$

Como a solução global de (4.1) é obtida refletindo sucessivamente em relação as retas $t = kt(s_2)$, teremos que o gráfico da curva γ é dada pela figura (4-4).

II) $c > 0$. Analogamente ao caso anterior, começaremos definindo a seguinte função

$$f(r) = r^{2n-1} + \frac{H}{2p} r^{2n}$$

Notamos que $f(0) = f\left(\frac{2n}{H}\right) = 0$; $f(y)$ é positiva no intervalo $\left(0, \frac{2n}{H}\right)$ e atinge seu máximo em $\bar{r} = \frac{2n-1}{H}$ e que

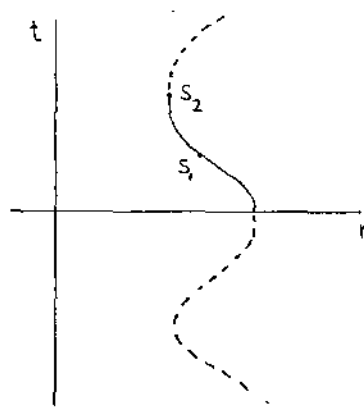


Figura 4-4: $c < 0$

$$J = r^{2n-1} \cos \sigma + \frac{H}{2n} r^{2n} \leq f(r) \quad (4.9)$$

Um esboço do traço de f é dada pela figura (4-5)

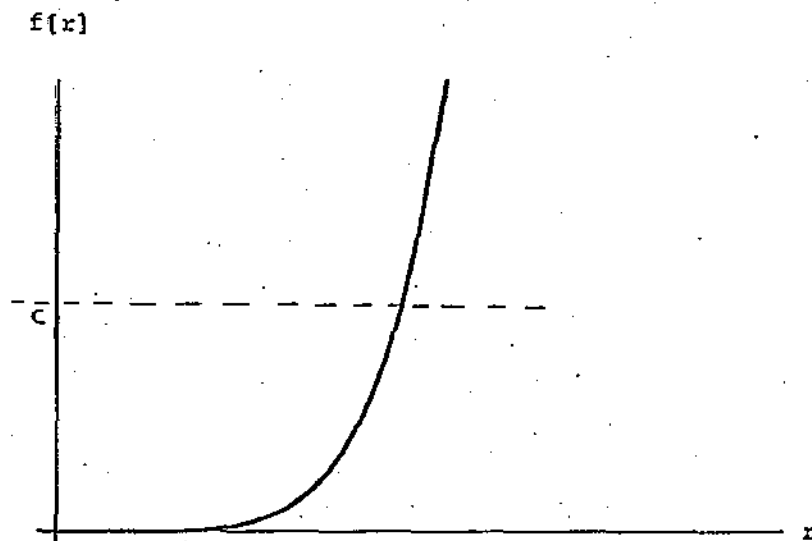


Figura 4-5:

Como $J \leq f(r) \leq f(\bar{r})$ e $J \equiv c$ ao longo da curva γ , teremos que $f(\bar{r}) \geq c > 0$. Logo existirão exatamente dois pontos $m_c < M_c$ tal que $f(m_c) = f(M_c) = c$ e da desigualdade (4.9) obtemos

$$m_c \leq r \leq M_c$$

Agora consideremos a única solução γ do sistema (4.1) determinado pelas seguintes condições iniciais:

$$t(0) = t_0, \quad r(0) = M_c, \quad \sigma(0) = \pi \quad (4.10)$$

Como $J(0) = f(r(0)) = c$, temos que $J \equiv c$ ao longo de γ . Então podemos fazer as seguintes observações:

i) $r^{2n-1}(\cos \sigma + \frac{H}{2n}r) = c > 0$, então $\cos \sigma > -\frac{H}{2n}r$. Substituindo na terceira equação de (4.1) teremos que

$$\sigma' = H + \frac{2n-1}{r} \cos \sigma > 0$$

Ou seja σ é crescente ao longo de γ .

ii) Existe $s_1 > 0$ tal que $\sigma(s_1) = \frac{3\pi}{2}$. Substituindo na primeira equação de (4.1) obtemos que $t'(s_1) = 0$ e $t''(s_1) = \frac{1}{2}\sqrt{4 + r^2(s_1)} > 0$. Ou seja $t(s_1)$ é um mínimo local.

iii) Existe $s_2 > s_1$ tal que $\sigma(s_2) = 2\pi$. Como $J(s_2) = f = c$, temos que $r(s_2) = m_c$.

iv) $t(0) > t(s_2)$

Como a solução global de (4.1) é obtida refletindo sucessivamente em relação as retas $t = kt(s_2)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ então o gráfico da curva γ é dado por: $\square$

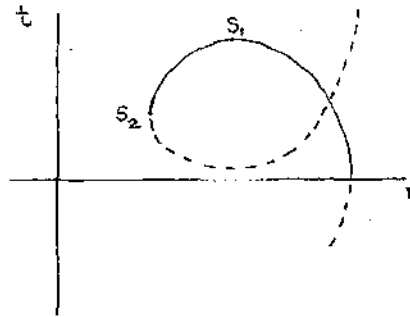


Figura 4-6: $c > 0$

Referências

- [1] Bekkar, M.-*Exemples de surfaces minimales dans l'espace de Heisenberg H_3* , Rend. Sem. Scienze Università di Cagliari **61**, 2 (1991).
- [2] Bekkar, M. & Sari, T.- *Surfaces minimales reglees dans l'espace de Heisenberg H_3* , Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino, vol. **50**, 3 (1992)
- [3] Back, A., DoCarmo, M. and Hsiang, W.Y.- *On some fundamental equations of equivariant riemannian geometry*, Preprint.
- [4] Caddeo, R., Piu, P. & Ratto, A.- *$SO(2)$ -invariant minimal and constant mean curvature surfaces in 3-dimensional homogeneous spaces*. Manuscripta Math. **87**, 1-12 (1995).
- [5] do Carmo, M.- Differential Geometry of Curves and Surfaces, Prentice-Hall, Inc.
- [6] do Carmo, M.- Geometria Riemannian, Projeto Euclides.
- [7] Eberlein, P.-*Geometry of 2-step nilpotent groups with a left invariant metric*. Pre-print.
- [8] Folland, G.- Harmonic Analysis in Phase Espace, The Annals of mathematics studies; 122
- [9] Giusti, E.- Minimal Surfaces and Functions of Bounded Variation. Monographs in Mathematics Vol. 80.

- [10] Goze, M. & Piu, P.- *Classification des métriques invariantes à gauche sur le groupe de Heisenberg*. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Serie II, Tomo XXXIX (1990).
- [11] Gordon, C.- *Naturally reductive homogeneous riemannian manifolds*. Can. J. Math. Vol. XXXVII, No. 3 (1985), pp. 467-487.
- [12] Hopf E.- *On S. Bernstein's theorem on surfaces $z(x, y)$ of nonpositive curvature*. Proc. of the Am. Math. Society, vol. 1, numb. 1, Feb., 1950.
- [13] Kaplan, A.- *Riemannian Nilmanifolds attached to Clifford Modules*. Geometria Dedicata 11 (1981).
- [14] Kaplan, A.- *On the geometry of groups of Heisenberg type*. Bull. London Math. Soc., 15 (1983), 35-42.
- [15] Kobayashi, S. and Nomizu, K.- *Foundations of differential geometry, I, II*, Interscience (1963).
- [16] Korányi, A.- *Geometric properties of Heisenberg-type groups*. Advances in Mathematics 56, 28-38 (1985).
- [17] Mickle, E.- *A remark on a theorem of S. Bernstein*. Proc. of the Am. Math. Society, vol. 1, numb. 1, Feb., 1950.
- [18] Olver, P.- *Applications of Lie Groups to differential equations*. Springer-Verlag New York Inc.
- [19] O'Neill B.- *The fundamental equations of a submersion*, Michigan Math. J., 13 (1966), 459-469.
- [20] Palais, R. and Terng, Ch.- *Critical Point Theory and Submanifold Theory*, Lectures Notes of Math. 1353, Springer, 1988.
- [21] Piu, P. & Goze, M.- *Distributions totalement géodésiques pour des métriques nilpotentes*. Rendiconti Sem. Fac. Scienze Università di Cagliari, Supplemto al vol. 58 (1988).

- [22] Protter, Murray H.- Maximum Principles in differential equations, Prentice-Hall, Inc.
- [23] Ripoll, J.- *On Hypersurfaces of Lie group*. Illinois Journal of Mathematics, vol. **35**, 1 (1991).
- [24] Schoen, R.- *Uniqueness, symmetry, and Embeddedness of minimal surfaces*. J. Differential Geometry **18** (1983) pp. 791-809.
- [25] Tomter, P.- *Constant mean curvature surfaces in the Heisenberg group*. Procc. of Symposia in Pure Mathematics, vol 54 (1993), Part 1.