



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO  
CIENTÍFICA

# Aplicação de Formas Diferenciáveis à Eletrodinâmica de Meios Anisotrópicos

Igor Leite Freire

Dissertação de Mestrado orientada pelo  
Prof. Dr. Márcio Antonio de Faria Rosa

# Aplicação de Formas Diferenciáveis à Eletrodinâmica de Meios Anisotrópicos

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação de mestrado devidamente corrigida e defendida por Igor Leite Freire e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 02 de setembro de 2004 .

---

Márcio Antonio de Faria Rosa

## **Banca Examinadora:**

1. Dr. Márcio Antonio de Faria Rosa
2. Dr. Hugo Enrique Hernández Figueroa
3. Dr. Edmundo Capelas de Oliveira

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática Aplicada.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DO IMECC-UNICAMP.

F883a	<p>Freire, Igor Leite</p> <p>Aplicação de formas diferenciáveis à eletrodinâmica de meios anisotrópicos / Igor Leite Freire – Campinas, SP:[s.n.], 2004.</p> <p>Orientador: Márcio Antonio de Faria Rosa</p> <p>Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica</p> <p>1. Formas diferenciais. 2. Maxwell, Equações de. 3. Green, Funções de. 4. Ondas eletromagnéticas.</p> <p>I. Rosa, Márcio Antonio de Faria</p> <p>II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.</p> <p>III. Título</p>
-------	--

Dissertação de Mestrado defendida por **Igor Leite Freire** e aprovada em **02 de Setembro** de **2004** pela Banca Examinadora constituída pelos professores:

---

**Dr. Márcio Antonio de Faria Rosa**

---

**Dr. Hugo Enrique Hernández Figueroa**

---

**Dr. Edmundo Capelas de Oliveira**

Maxwell's equations are  
of more importance for the  
history of mankind than  
the French revolution.

*Richard Feynman*

# Resumo

A presente dissertação é dedicada ao estudo de fenômenos eletromagnéticos em meios materiais via formas diferenciáveis. Formas diferenciáveis são tensores covariantes antissimétricos, que encontram diversas aplicações na física-matemática.

No primeiro capítulo apresentamos o *background* necessário para formalizarmos a teoria. No capítulo seguinte, passamos as equações vetoriais de Maxwell para formas. No terceiro capítulo, utilizamos dois novos operadores estrelas, chamados operadores estrela magnético e operador estrela elétrico, para podermos montar as funções diádicas de Green. No quarto capítulo calculamos as relações entre os campos e a forma de onda para uma onda plana num meio anisotrópico, bem como a *forma de Poynting* e as densidades de energia. Finalmente, no quinto capítulo aplicamos os resultados teóricos obtidos em trabalho para meios anisotrópicos, e por fim, mostramos que os potenciais de Hertz também podem ser escritos via formas diferenciáveis.

# Abstract

This work is dedicated to the study of electromagnetic phenomena in material medias through differential forms. Differential forms are antissymmetric, covariant tensors that have many applications in mathematical physics.

In the first chapter, we introduce the necessary *background* to perform the theory. In the next chapter, we transform the vectorial Maxwell equations in forms. In the third chapter, we use two new star operators, labeled magnetic star operator and electric star operator, to be able to work with dyadic Green functions. In the fourth chapter, we find the relationships between fields and the wave form to plane waves in anisotropic media. We also find the Poynting's form and we find the energy densities. Finally, in the fifth chapter, we apply our theoretical results in anisotropic medias and we show that Hertz potentials can be also written through differential forms.

*Aos meus pais,  
Antonio Fernando (in memoriam)  
e Vera Lúcia,  
meus avós, Joaquim e Vita,  
à Édina, ao pequeno Victor Hugo,  
e ao Júnior, com amor, dedico.*

# Agradecimentos

*O Senhor é meu Pastor, nada me faltará.*

Salmo 23, 1.

É..., hora de agradecer...

Talvez seja este o momento mais difícil da dissertação. Não esquecer pessoas que nos foram importantes, muitas das quais sem a ajuda e o apoio seria impossível findar o presente trabalho.

Enquanto escrevo estas linhas, vêm ao coração o aperto do medo e a angústia de esquecer alguém. Cheguei mesmo a pensar em não escrever o agradecimento, pois assim não haveria como magoar alguém, acidentalmente. Contudo, prefiro correr este risco. Peço, antecipadamente, desculpas àqueles que eventualmente esqueça de relacionar.

Primeiramente começo agradecendo ao Pai Deus. Por tudo. Principalmente pelas dificuldades. Nelas pude encontrá-Lo, e assim, o Senhor guiou-me para portos seguros. Em várias ocasiões foi doloroso e tortuoso o caminho. Muitas vezes por minha teimosia. Mas ao fim, o Senhor preparou-me para enfrentar o mundo. E vencê-lo, quando necessário.

Aos meus pais, Antonio Fernando (*in memoriam*) e Vera Lúcia. Vocês são os melhores pais do mundo. O que hoje sou, quase tudo devo a vocês.

Ao Iury, o Júnior e o pequeno Fernando, pelo que representam para mim.

Aos meus avós Vita e Joaquim.

À Édina, pelo amor, carinho e companheirismo ao longo dos últimos seis anos. Ao nosso pequeno Victor Hugo, que acabou fazendo com que me tornasse mais responsável.

Ao grande amigo Flávio Cardoso Reis.

Ao pessoal do Caetano Machado: em especial ao Montovane, a Fátima, os professores...

À Jesuína e à Teresa Maria, pela ajuda, apoio e incentivo.

Ao meu primo Luciano Macedo Freire, por gentilmente haver-me acolhido em seu apartamento por duas semanas, que se tornaram um semestre!

Ao pessoal que me ajudou com o latex: Jorge Agreli, Bianca Amoras, Marcos Valle e Carlos Grossi.

Ao Roldão e o Dr. Ricardo Mosna, pelas valiosas discussões e sugestões.

À Adriana, pela indispensável e primorosa correção ortográfica. Os eventuais erros que remanesceram são de inteira responsabilidade minha.

Ao Alemão, vulgarmente apelidado de Daniel Onusic, e o Alex, pelas horas de estudos juntos e por me fazerem rir um pouco durante minha graduação.

Às irmãs Carmelitas, de Passos, pelo apoio espiritual.

Aos funcionários da universidade e de todas as escolas onde estudei: desde o pessoal da limpeza, manutenção, bibliotecas..., muito obrigado por proporcionarem-me um local em que pudesse estudar. Ao pessoal da Unicamp, agradeço também pelo excelente ambiente de trabalho que me foi disponível desde 1998. Em particular, registro meu especial agradecimento ao pessoal da secretaria de graduação do Imecc, Alice, Ester e Júlio; e da secretaria de pós, Cidinha, Ednaldo e Tânia.

Ao Dr. Antonio C. Gilli e Dra. Sueli Costa, pelo apoio no pior momento do meu mestrado.

Ao Dr. Waldyr Rodrigues, pela leitura do texto do presente trabalho, pelas sugestões e por mostrar-me quão bela é a física.

Ao Dr. Yuri Bozhkov, pela amizade, compreensão, por ter aceitado ser membro da minha banca de qualificação e pelas valiosas sugestões e correções.

Aos Drs. Edmundo C. de Oliveira, Hugo E. H. Figueroa e Márcio J. Menon, por aceitarem ser minha banca de defesa e pelas valiosas correções e sugestões que fizeram por ocasião do meu exame de qualificação.

Às pessoas que o destino me fez ter aulas, agradeço a todos: aos que de fato foram Professores, por me ensinarem como devo ser. Ao resto, como **não** devo ser.

Ao maior físico-matemático do Imecc, o Dr. Márcio A. F. Rosa. Agradeço pela primorosa orientação, apoio, paciência, confiança e compreensão. Seu imenso conhecimento me fascinou muito ao longo dos últimos 5 anos. Muito obrigado por me ensinar mais do que matemática e física.

Ao povo sofrido do Brasil, meu agradecimento e minha promessa de fazer ciência para procurar sempre o engrandecimento e bem-estar do gênero humano, e em especial, para o desenvolvimento de nosso país.

Finalmente à CAPES, pelo suporte financeiro, sem o qual este trabalho não poderia ser feito.

# Conteúdo

<b>Resumo</b>	<b>ii</b>
<b>Abstract</b>	<b>iii</b>
<b>Agradecimentos</b>	<b>v</b>
<b>Prefácio</b>	<b>ix</b>
<b>1 Variedades, formas, Teorema de Stokes</b>	<b>1</b>
1.1 Espaços topológicos . . . . .	1
1.2 Variedades diferenciáveis . . . . .	2
1.2.1 Cartas e atlas . . . . .	2
1.2.2 Definição de variedades diferenciáveis . . . . .	3
1.3 Aplicações diferenciáveis . . . . .	3
1.4 Formas diferenciáveis . . . . .	4
1.4.1 Definição de formas diferenciáveis . . . . .	4
1.5 O operador $\star$ de Hodge . . . . .	8
1.6 O operador $d$ . . . . .	9
1.7 Integração em variedades e Teorema de Stokes . . . . .	11
1.7.1 Integração de $n$ -formas em $\mathbb{R}^n$ . . . . .	12
1.7.2 Integração em cadeias . . . . .	12
1.7.3 Integração sobre cadeias . . . . .	14
1.8 Integração em variedades orientadas . . . . .	14
<b>2 Eletromagnetismo e formas diferenciáveis</b>	<b>17</b>
2.1 Um pouco de história da Física . . . . .	17
2.2 Equações de Maxwell escritas através de formas . . . . .	19
2.2.1 1-formas . . . . .	19
2.2.2 2-formas . . . . .	20
2.2.3 3-formas . . . . .	20

2.2.4	Equações de Maxwell . . . . .	21
2.2.5	Passagem para as equações com formas . . . . .	21
2.3	O tensor de Faraday . . . . .	24
2.3.1	Construção do tensor de Faraday . . . . .	24
<b>3</b>	<b>Eletromagnetismo em meios não-homogêneos</b>	<b>27</b>
3.1	O operador $\star$ de Hodge para um meio anisotrópico . . . . .	27
3.2	As formas de Green para o campo elétrico . . . . .	31
3.3	Condições de contorno . . . . .	33
3.4	Simetrias e condições para os operadores $L$ e $\tilde{L}$ serem auto-adjuntos . . . . .	35
3.5	Formas de Green para a equação de Helmholtz anisotrópica . . . . .	37
3.5.1	Relações integrais entre $G$ e $\tilde{g}$ . . . . .	40
3.5.2	Tensores de permeabilidade simétricos . . . . .	41
3.5.3	Correspondência com resultados de espaços livres . . . . .	42
3.6	Meios eletricamente não-homogêneos . . . . .	43
3.7	Meios homogêneos . . . . .	45
3.7.1	Soluções exatas para a forma de Green-Helmholtz . . . . .	47
<b>4</b>	<b>Ondas planas num meio não-condutor e Teorema de Poynting</b>	<b>50</b>
4.1	Preliminares matemáticos . . . . .	50
4.2	Ondas planas eletromagnéticas . . . . .	56
4.3	A forma de Poynting . . . . .	57
4.3.1	O Teorema de Poynting . . . . .	58
<b>5</b>	<b>Aplicações</b>	<b>60</b>
5.1	Meios materiais . . . . .	60
5.2	Meios eletricamente anisotrópicos . . . . .	61
5.2.1	Ondas planas . . . . .	63
5.2.2	Equações de Fresnel . . . . .	64
5.3	Ferritas . . . . .	65
5.3.1	Ondas planas . . . . .	68
5.3.2	Rotações de Faraday . . . . .	69
5.4	Potenciais de Hertz . . . . .	71
5.4.1	Potenciais de Hertz vetoriais . . . . .	72
5.4.2	Potenciais de Hertz em formas diferenciáveis . . . . .	72
	<b>Bibliografia</b>	<b>77</b>

# Prefácio

O presente trabalho tem suas raízes no ano de 2001. Naquela época, lembro-me que pedi ao Dr. Márcio Rosa, então meu orientador de iniciação científica, que escolhesse um projeto visando não somente um trabalho de iniciação científica, mas que objetivasse uma dissertação de mestrado.

Algum tempo depois, o Prof. Márcio entregou-me um artigo, intitulado *Green Forms for Anisotropic, Inhomogeneous Media*, artigo este que desde então estudamos, e que diversos seminários deu origem ao longo desses anos.

Com o tempo, o senhor Roldão Júnior passou a fazer parte de nossos seminários, o que muito nos enriqueceu, não só com suas valiosas discussões, mas com diversos artigos que gentilmente nos cedeu.

Por fim, nos últimos meses, além do senhor Roldão, o Dr. Ricardo Mosna também passou a participar conosco, enriquecendo não só matematicamente, mas física e filosoficamente nossos seminários.

Este trabalho tem como partida inicial o artigo supracitado. Com pequenas generalizações ou correções que fizemos, ele é o capítulo 3 desta dissertação. Tal artigo é consequência da tese doutoral de *K. F. Warnick*, que vários outros artigos escreveu, na mesma área, como bem pode ser visto nas referências deste trabalho. Além desse artigo, há uma forte, apesar de sutil, influência de Obukhov [9].

Esta dissertação pode ser dividida em 3 grandes partes:

1. Formalização: Nesta parte, damos as bases matemáticas do trabalho. Compreende o Capítulo 1. É puramente o conjunto de resultados que precisamos para elaborar a dissertação. É bem árido.
2. Desenvolvimento: Neste ponto, passamos as equações de Maxwell para a linguagem de formas (Capítulo 2), obtemos a diádica de Green para meios anisotrópicos (Capítulo 3), provamos identidades com o operador estrela de Hodge e obtivemos as relações clássicas que os campos magnético e elétrico e a forma de onda devem satisfazer para uma onda

plana (Capítulo 4). Este trecho da dissertação é essencialmente um trabalho de física-matemática.

3. Aplicações: Neste ponto, aplicamos os resultados anteriores a sistemas de interesse da(s) engenharia(s). Por exemplo, obtivemos a expressão da diádica para *ferritas*, as equações de *Fresnel* para meios elétrica ou magneticamente girotrópicos. É uma parte que podemos classificar como matemática aplicada a problemas de engenharia.

# Capítulo 1

## Variedades, formas, Teorema de Stokes

Neste capítulo, apresentaremos brevemente o aparato matemático a ser utilizado ao longo da presente dissertação. Não nos deteremos em demonstrações de resultados neste capítulo, visto que nosso objetivo aqui é apenas dar as bases necessárias para nossas aplicações. O que nos interessa de fato é fornecer resultados acerca das formas diferenciáveis, do operador estrela de *Hodge* e apresentar o *Teorema de Stokes generalizado*.

Iniciaremos o capítulo com uma breve explicação de espaços topológicos, para logo em seguida, trabalharmos com variedades diferenciáveis. Detivemos-nos em tais variedades pois elas descrevem os eventos físicos. Basta lembrar que a *Mecânica Analítica de Lagrange* necessita de uma variedade diferenciável  $2n$  dimensional, ou então, que a teoria da *Relatividade Restrita de Einstein* faz uso de uma variedade diferenciável quadri-dimensional, a saber, o espaço-tempo de *Minkowsky*.

O tópico seguinte é sobre aplicações ou funções diferenciáveis, onde talvez os resultados mais importantes sejam a *Regra da Cadeia* e o *pullback*. Posteriormente veremos as formas diferenciáveis, sua correlação com a métrica do sistema e o produto entre as formas, chamado também de produto cunha, denotado por  $\wedge$ . Depois trabalharemos com o operador  $\star$  de Hodge. Continuando a seqüência, encontraremos o operador de derivação exterior  $d$  para, finalmente, chegarmos à teoria de integração com formas, culminando no já mencionado *Teorema de Stokes*.

### 1.1 Espaços topológicos

Um espaço topológico é um conjunto  $E$  com uma família de subconjuntos  $\mathcal{E} = \{U_i, i \in I\}$ , onde  $U_i \subseteq E$ ,  $I$  é um conjunto de índices, satisfazendo:

1.  $E \in \mathcal{E}$ ,  $\emptyset \in \mathcal{E}$ ,
2. Se  $J \subseteq I$  é um conjunto finito, então  $\bigcap_{i \in J} U_i \in \mathcal{E}$ ,

3.  $J \subseteq I$ , então  $\bigcup_{i \in J} U_i \in \mathcal{E}$ .

Os elementos de  $\mathcal{E}$  são chamados conjuntos  $E$  – abertos, e o par  $(E, \mathcal{E})$  é dito espaço topológico.

Um subconjunto  $A \subseteq E$  é fechado se seu complementar  $E \setminus A$  é aberto.

Seja agora  $\bar{\mathcal{E}} = \{A_i, i \in \mathbb{N}; A_i \text{ é fechado}\}$ . Então  $\bar{\mathcal{E}}$  satisfaz as seguintes condições:

1.  $E$  e  $\emptyset$  são conjuntos fechados, isto é,  $E \in \bar{\mathcal{E}}$  e  $\emptyset \in \bar{\mathcal{E}}$ ,
2. Se  $J \subset I$  é finito, então  $\bigcup_{j \in J} A_j \in \bar{\mathcal{E}}$ , onde  $A_i \in \bar{\mathcal{E}}, \forall i$ ,
3.  $J \subseteq I$ , então  $\bigcap_{j \in J} A_j \in \bar{\mathcal{E}}$ .

## 1.2 Variedades diferenciáveis

Em várias situações da Física, como por exemplo na Mecânica Analítica ou na Relatividade Geral, os objetos de estudos são variedades.

A idéia básica de uma variedade diferenciável é a de objetos localmente diferenciáveis, onde podemos definir funções diferenciáveis, formas diferenciáveis e, mais geralmente, tensores. Antes de definir uma variedade, precisamos de uma pequena base. Resumiremos a seguir o absolutamente necessário:

### 1.2.1 Cartas e atlas

**Definição 1.** *Seja  $M$  um espaço topológico. Uma carta  $c$  em  $M$  é uma tripla  $c = (U, \varphi, n)$  tal que:*

1.  $U \subseteq M$  é aberto,
2.  $\varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$  é aberta e  $\varphi$  é um homeomorfismo,
3.  $n \in \mathbb{N}$  é a dimensão de  $c$ .

**Definição 2.** *As funções coordenadas de uma carta  $c$  são funções reais  $x^i = \pi^i \circ \varphi$ , onde  $\pi^i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , definidas por  $\pi^i(a^1, \dots, a^n) = a^i, 1 \leq i \leq n$ , é a projeção da  $i$ -ésima coordenada.*

**Definição 3.** *Seja  $c_1 = (U_1, \varphi_1, n_1)$  e  $c_2 = (U_2, \varphi_2, n_2)$  duas cartas em  $M$ . Então  $c_1$  e  $c_2$  são ditas  $C^k$ -compatíveis se  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$  ou  $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$  e as aplicações*

$$\begin{aligned} \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} : \varphi_2(U_1 \cap U_2) &\rightarrow \varphi_1(U_1 \cap U_2) \\ &e \\ \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) &\rightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_2) \end{aligned} \tag{1.1}$$

são de classe  $C^k$ .

Se  $c_1$  e  $c_2$  são  $C^k$ -compatíveis, então, para qualquer  $x \in \varphi_1(U_1 \cap U_2)$ , a derivada  $(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})'(x)$  é uma bijeção linear, e além disso,  $n_1 = n_2$ .

**Definição 4.** Um atlas  $C^k$   $\mathcal{U}$  num espaço topológico  $M$  é uma família de cartas  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in I}$  que cobre  $M$ , ou seja,  $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha = M$ , tal que as cartas da família são mutuamente  $C^k$ -compatíveis.

Note que o conjunto  $I$  é um conjunto de índices.

Dois atlas  $C^k$   $\mathcal{U}$  e  $\mathcal{U}'$  são ditos  $C^k$ -compatíveis se equivalentemente:

1.  $\mathcal{U} \cup \mathcal{U}'$  é um atlas  $C^k$ ,
2. Se  $c \in \mathcal{U}$  e  $c' \in \mathcal{U}'$ , então  $c$  e  $c'$  são  $C^k$ -compatíveis.

**Teorema 1.** A  $C^k$  – compatibilidade de atlas é uma relação de equivalência.

*Demonstração.* Consulte Westenholtz [1]. □

### 1.2.2 Definição de variedades diferenciáveis

Considere  $M$  um espaço topológico.

**Definição 5.** Uma variedade diferenciável de classe  $C^k$ ,  $1 \leq k \leq \infty$  em  $M$  é uma classe de equivalência de atlas  $C^k$ -compatíveis em  $M$ .

Do Teorema 1 segue que a união de todos os atlas de cada classe de equivalência em  $M$  define um atlas maximal. Desde que cada classe de equivalência de atlas em  $M$  contém exatamente um atlas maximal, nós temos a seguinte definição alternativa de uma variedade  $C^k$ :

**Definição 6.** Uma variedade de classe  $C^k$  em  $M$  é a escolha de um atlas maximal  $C^k$  em  $M$ .

## 1.3 Aplicações diferenciáveis

**Definição 7.** Seja  $(M, \mathcal{U})$  uma variedade  $C^\infty$   $n$ -dimensional. Uma função  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função  $C^k$  se para toda carta  $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{U}$

$$f_\alpha = f \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha) \rightarrow \mathbb{R} \tag{1.2}$$

é de classe  $C^k$  num conjunto aberto  $\varphi_\alpha(U_\alpha)$  de  $\mathbb{R}^n$ .

**Teorema 2.** A Definição 7 é independente da escolha de um atlas compatível.

*Demonstração.* Consulte Westenholtz [1]. □

Consideremos agora duas variedades  $M$  e  $N$ , e uma função contínua  $\phi$  entre essas duas variedades. Seja ainda  $V(\phi(x)) \subseteq N$  uma vizinhança do ponto  $\phi(x)$ . Pela continuidade da função  $\phi$ , existe um aberto  $U(x) \subseteq M$ , vizinhança de  $x$ , de tal sorte que temos  $\phi(U) \subseteq V$ . Se  $f$  é uma função  $C^\infty$  em  $V$ , definimos a função  $\phi^*f$  em  $U$  como sendo:

$$(\phi^*f)(y) = f(\phi(y)), \forall y \in U, \quad (1.3)$$

ou seja, simplesmente temos:

$$\phi^*f = f \circ \phi. \quad (1.4)$$

Desta maneira, dizemos que  $\phi$  é diferenciável em  $x$  se  $\phi^*f$  é de classe  $C^\infty$  em  $U(x)$ , para toda aplicação  $f \in C^\infty$ .

**Definição 8.** A aplicação  $\phi : M \rightarrow N$  é dita diferenciável se para toda  $f \in C(N, \mathbb{R})$  a função  $\phi^*f$  dada por  $(\phi^*f)(x) = (f \circ \phi)(x)$ ,  $x \in M$  é de classe  $C^k$

**Teorema 3.** Se  $\phi_1 : M_1 \rightarrow M_2$  e  $\phi_2 : M_2 \rightarrow M_3$  são diferenciáveis, então a composta  $\phi_3 = \phi_2 \circ \phi_1 : M_1 \rightarrow M_3$  também é diferenciável.

*Demonstração.* Consulte Westenholtz [1]. □

## 1.4 Formas diferenciáveis

Nesta seção, começaremos o estudo das formas diferenciáveis ou diferenciais, que nos acompanharão até o final da presente dissertação.

Falando descompromissadamente, uma forma diferenciável é uma quantidade que pode ser integrada. Mais precisamente, uma forma diferenciável é um tensor covariante antissimétrico.

O cálculo com estas grandezas foi desenvolvido a partir das álgebras exteriores de Grassman por Cartan, Poincaré e outros matemáticos e físicos do final do século *XIX* e início do século passado. Tais tensores são utilizados nas diversas áreas da Física, como por exemplo, a Relatividade Geral, a Termodinâmica, a Teoria de Campos e o Eletromagnetismo.

### 1.4.1 Definição de formas diferenciáveis

Seja  $M$  uma variedade diferenciável  $n$  – dimensional. Considere  $\mathcal{U} = (U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in I}$  e o par  $(M, \mathcal{U})$ . Denotemos por  $I_x \subseteq I$  o conjunto de índices de todas as cartas em  $x \in M$ . Um vetor tangente  $X$ , em  $x \in M$ , é uma classe de equivalência de vetores de  $\mathbb{R}^n$  tais que, para quaisquer dois elementos  $\xi_\alpha \in X$  e  $\eta_\beta \in X$ , temos:  $\eta_\beta = \varphi'_{\beta\alpha}(x_\alpha)\xi_\alpha$ , onde a derivada, denotada pela linha, é uma transformação linear de  $\mathbb{R}^n$  em si mesmo e  $\varphi_{\beta\alpha} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ . Se  $\xi_\alpha$  denota uma

representação de  $X = (\xi_\alpha)_\alpha \in I_x$  com respeito à carta  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ , escrevemos  $(\xi, \alpha)$  para  $\xi_\alpha$ , onde  $(\xi, \alpha)$  é um elemento do conjunto

$$\mathbb{R}^n \times I_x = \{(\xi, \alpha) \text{ tq } \xi \in \mathbb{R}^n, \alpha \in I_x\}. \quad (1.5)$$

A relação de equivalência  $R$  que define um vetor tangente  $X$ , em  $x$ , é dado em  $\mathbb{R}^n \times I_x$ , por

$$(\eta, \beta)R(\xi, \alpha) \iff \eta_\beta = \varphi'_{\beta\alpha}(x_\alpha)\xi_\alpha. \quad (1.6)$$

**Definição 9.** *Seja  $X = (\xi_\alpha)_{\alpha \in I_x}$  e  $Y = (\eta_\alpha)_{\alpha \in I_x}$ ,  $x \in M$ . O espaço tangente a  $x \in M$ , denotado por  $T_x(M)$ , é o espaço linear definido por todos os vetores tangentes satisfazendo as operações abaixo:*

$$\begin{aligned} X + Y &= (\xi_\alpha + \eta_\alpha)_{\alpha \in I_x}, \\ \lambda X &= (\lambda \xi_\alpha)_{\alpha \in I_x}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Analogamente, define-se o dual do espaço tangente, denotado por  $T_x^*(M)$ , chamado de espaço cotangente.

Considere agora um vetor  $v$ , um ponto  $P_0$  e o ponto  $P(t) = P_0 + tv$ , com o parâmetro  $t$  percorrendo um subconjunto da reta. Com isso em mente, segue-se a seguinte definição:

**Definição 10.** *Seja  $v$  um vetor. Suponha que o ponto  $P(t)$  esteja no domínio de  $f$ , para todo  $t$ . Definimos o operador*

$$\partial_v = \frac{\partial}{\partial v} = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0, \text{ ao longo da reta } P(t) = P_0 + tv} \quad (1.8)$$

que é chamado operador derivação direcional ao longo do vetor  $v$ .

**Definição 11.** *As derivadas parciais de uma função  $f$*

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} \quad (1.9)$$

nada mais são que derivadas direcionais ao longo do vetor  $e_i$ .

**Teorema 4.** *Se  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$  e  $(U_\beta, \varphi_\beta)$  são duas cartas em  $(M, \mathcal{U})$ ,  $\varphi_\alpha = (x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n)$ ,  $\varphi_\beta = (x_\beta^1, \dots, x_\beta^n)$  e  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função diferenciável em  $M$ . Então, em  $U_\alpha \cap U_\beta$ , vale a Regra da Cadeia*

$$\frac{\partial f}{\partial x_\alpha^i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_\beta^j} \frac{\partial x_\beta^j}{\partial x_\alpha^i} \quad (1.10)$$

onde  $x_\alpha = \varphi_\alpha(x)$  e  $x_\beta = \varphi_\beta(x)$ .

*Demonstração.* Consulte Westenholtz [1], Warner [2], Guillemin [3] ou Spivack [4]. □

**Definição 12.** Os fibrados tangente e cotangente são definidos, respectivamente, pelas uniões:

$$T(M) = \bigcup_{x \in M} T_x(M) \quad (1.11)$$

$$T^*(M) = \bigcup_{x \in M} T_x^*(M).$$

Definimos o  $p$ -ésimo fibrado exterior sobre a variedade  $M$ , denotado por  $\Lambda^p(M)$ , como sendo

$$\Lambda^p(M) = \bigcup_{x \in M} \Lambda^p(T_x^*(M)) = \{(x, \omega_x) \text{ tq } x \in M, \omega_x \in \Lambda^p(T_x^*(M))\}. \quad (1.12)$$

**Definição 13.** Uma forma diferenciável de grau  $p$  é uma aplicação diferenciável

$$\begin{aligned} \omega : M &\rightarrow \Lambda^p(M) \\ x &\longmapsto (x, \omega_x) \end{aligned} \quad (1.13)$$

com  $\omega_x = \omega(x) \in \Lambda^p(T_x^*(M))$ ,  $\pi \circ \omega = Id_M$ , onde  $\pi$  é a projeção canônica no fibrado.

Denotaremos o conjunto de todas as  $p$ -formas diferenciáveis em  $M$  por  $F^p(M)$ , onde  $1 \leq p \leq n$ . Este conjunto torna-se um espaço vetorial se definirmos as operações a seguir, onde  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\omega, \eta \in F^p(M)$ :

$$\lambda\omega : x \longmapsto (\lambda\omega)(x) = \lambda\omega(x) \quad (1.14)$$

$$\omega + \eta : x \longmapsto (\omega + \eta)(x) = \omega(x) + \eta(x).$$

Além disso, se  $f \in C^\infty(M)$  e  $\omega \in F^p(M)$ , definimos a  $p$ -forma  $f\omega$  como sendo:

$$f\omega : x \longmapsto (f\omega)(x) = f(x)\omega(x), x \in M \quad (1.15)$$

**Definição 14.** Definimos um novo produto, chamado produto cunha e denotado por  $\wedge$ , definido como:

$$\wedge : F^p(M) \times F^q(M) \longrightarrow F^{p+q}(M) \quad (1.16)$$

$$\wedge(\omega, \eta)(x) = \omega(x) \wedge \eta(x)$$

Além disso, para  $\omega_x \in \Lambda^p(M)$  e  $\eta_x \in \Lambda^q(M)$ , o produto exterior dessas formas está definido como sendo o elemento  $\omega_x \wedge \eta_x \in \Lambda^{p+q}(M)$ , dado, para cada  $X_i \in T_x(M)$ , com  $i = 1, \dots, p+q$ , por:

$$(\omega_x \wedge \eta_x)(X_1, \dots, X_{p+q}) = \sum_{\pi \in S_{p+q}} \text{sign}(\pi) \omega_x(X_{\pi(1)}, \dots, X_{\pi(p)}) \eta_x(X_{\pi(p+1)}, \dots, X_{\pi(p+q)}) \quad (1.17)$$

onde  $S_{p+q}$  é um elemento do grupo de permutações  $S_{p+q}$ , que satisfaz a desigualdade  $\pi(i) < \pi(j)$ , se  $i < j$ .

Note-se que esta é a antissimetrização do produto tensorial usual

$$\omega \otimes \eta(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q) = \omega(x_1, \dots, x_p) \cdot \eta(y_1, \dots, y_q). \quad (1.18)$$

Supondo  $\omega \in F^p(M)$ ,  $\eta, \gamma \in F^q(M)$  e  $\theta \in F^l(M)$ , valem as propriedades listadas a seguir:

1.  $\omega \wedge \eta = (-1)^{pq} \eta \wedge \omega$ ,
2.  $(\omega \wedge \eta) \wedge \theta = \omega \wedge (\eta \wedge \theta)$ ,
3.  $(\eta + \gamma) \wedge \omega = \eta \wedge \omega + \gamma \wedge \omega$ ,
4. Se  $f$  é uma função,  $f(\omega \wedge \eta) = (f\omega) \wedge \eta = \omega \wedge (f\eta)$ .

Se  $l(M)$  denota os campos vetoriais diferenciáveis em  $M$  módulo  $C^\infty$ , então

$$\omega : \underbrace{l(M) \times \dots \times l(M)}_{p\text{-cópias}} \rightarrow C^\infty(M) \quad (1.19)$$

é uma aplicação multilinear, isto é:

$$\omega(X_1, \dots, X_{i-1}, fX + gY, X_{i+1}, \dots, X_p) = \quad (1.20)$$

$$f\omega(X_1, \dots, X_{i-1}, X, X_{i+1}, \dots, X_p) + g\omega(X_1, \dots, X_{i-1}, Y, X_{i+1}, \dots, X_p)$$

onde  $f, g \in C^\infty$ .

Utilizaremos daqui para frente que toda  $p$ -forma pode ser escrita como a soma do produto exterior de 1-formas,

$$\omega = \sum_{i_k} \omega_{i_1} \wedge \dots \wedge \omega_{i_p} \quad (1.21)$$

onde  $\omega_{i_k} \in F^1(M)$ .

**Definição 15.** Se  $f \in C^\infty$ , a diferencial de  $f$ ,  $df$ , é uma aplicação diferenciável de  $T(M)$  em  $\mathbb{R}$ , que é linear em cada espaço tangente. Então,  $df$  pode ser considerada como uma 1-forma. Esta 1-forma é chamada de derivada exterior da 0-forma  $f$ .

O operador  $d$  é estendido a formas de grau maior, como mostra o teorema seguinte.

**Teorema 5.** Existe um único operador  $d : F^p(M) \rightarrow F^{p+1}(M)$  tal que:

1.  $d$  é nilpotente, valendo  $d^2 = 0$ ,
2. Se  $f \in C^\infty$ ,  $df$  é a diferencial de  $f$ ,
3.  $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^{gr\ \omega} \omega \wedge d\eta$ , para quaisquer que sejam  $\omega \in F^p$  e  $\eta \in F^q$ .

*Demonstração.* Consulte Westenholtz [1], Warner [2], Guillemin [3], Spivack [4], Flanders [5] ou Feres [6].  $\square$

Ainda mais: Seja  $(U, \varphi)$ ,  $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$  uma carta local de  $M$ . Para cada  $i, 1 \leq i \leq n$ ,  $dx^i \in C^\infty(U, T^*(U))$ . Além disso,  $\{dx^1, \dots, dx^n\}$  é, em cada ponto, a base dual de  $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\}$ , pois

$$dx^j \frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i}(x^j) = \delta_i^j. \quad (1.22)$$

O conjunto  $\{dx^{i_1}, \dots, dx^{i_p}; i_1 < \dots < i_p\}$  constitui uma base para  $\Lambda^p(M)$ , a qualquer  $x \in U$ . Por isso,  $\dim \Lambda^p(M) = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ , para  $0 \leq p \leq n = \dim M$ . Em particular, temos:

$$\dim \Lambda^0 = \dim \Lambda^n = 1$$

$$\dim \Lambda^1 = n \quad (1.23)$$

$$\dim \Lambda^{n+r} = 0, r > 0.$$

## 1.5 O operador $\star$ de Hodge

Nesta seção apresentaremos o operador  $\star$  de *Hodge*, que é uma transformação linear bijetiva entre os espaços  $\Lambda^p(M)$  e  $\Lambda^{n-p}(M)$ , onde  $n = \dim M$  e  $0 \leq p \leq n$ .

**Definição 16.** *Uma variedade  $n$ -dimensional  $M$  é dita orientável se existe uma forma de volume em  $M$ , isto é, uma  $n$ -forma  $\omega \in F^n(M)$  que seja não-nula em todo ponto da variedade.*

Assim, se tal forma existe, ela atribui uma orientação em cada fibra do espaço tangente. Suponha agora que  $M$  seja uma variedade (pseudo-)Riemanniana. Então, em cada espaço tangente  $T_x(M)$ , há uma associação de um produto interno  $g_x(X, Y) = \langle X, Y \rangle$ , tal que qualquer que seja o sistema de coordenadas  $(U, \varphi)$ , temos:

$$g_x = \sum g_{ij} dx^i \otimes dx^j. \quad (1.24)$$

As funções  $g_{ij}(x)$  determinam uma métrica (pseudo-)Riemanniana, e o elemento de volume  $\eta$  em  $M$ , determinado por ela, é dado nas coordenadas locais  $(x^1, \dots, x^n)$  por:

$$\eta = \sqrt{|g|} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n. \quad (1.25)$$

A forma  $\eta$  é chamada de forma de volume e  $g = \det(g_{ij})$ .

Denotaremos por  $\star$  o isomorfismo entre os espaços vetoriais  $\Lambda^p(M)$  e  $\Lambda^{n-p}(M)$ . Esta aplicação induz uma outra função, entre os espaços  $F^p(M)$  e  $F^{n-p}(M)$ , tal que

$$\begin{aligned} \star : F^p(M) &\rightarrow F^{n-p}(M) \\ \omega &\mapsto \star\omega. \end{aligned} \quad (1.26)$$

**Definição 17.** A  $(n - p) -$  forma

$$\star\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_n} (\star a_{j_1, \dots, j_{n-p}}) dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_{n-p}} \quad (1.27)$$

onde

$$\star a_{j_1, \dots, j_{n-p}} = \sum_{i_1 < \dots < i_p} \eta_{i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_{n-p}} a^{i_1, \dots, i_p} \quad (1.28)$$

é chamada a adjunta ou dual da  $p$ -forma  $\omega = \sum a_{i_1, \dots, i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$ .

**Teorema 6.** Seja  $\omega = \sum a_{i_1, \dots, i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$ . A composição do operador  $\star$  consigo mesmo aplicado na forma  $\omega$  é:

$$\star\star\omega = (-1)^{p(n-p) + \frac{n-t}{2}} \omega \quad (1.29)$$

onde  $t$  denota a assinatura da métrica e  $(n - t) \equiv 0 \pmod{2}$ .

*Demonstração.* Consulte Flanders [5]. □

**Teorema 7.** Seja  $\alpha$  e  $\beta$  duas formas de mesmo grau. Então, vale a igualdade

$$\alpha \wedge \star\beta = (-1)^{\frac{n-t}{2}} \star^{-1} \alpha \wedge \beta. \quad (1.30)$$

*Demonstração.* Consulte Flanders [5]. □

## 1.6 O operador $d$

Como vimos anteriormente, o operador  $\star$  correlaciona formas de grau  $p$  com as do espaço  $n - p$ . Contudo, não é este o único operador entre formas de grau diferentes.

Nesta seção, concentraremos-nos na derivada exterior de uma forma, que leva formas de grau  $p$  em formas de grau  $p + 1$ .

Inicialmente, considere uma 0-forma  $\omega \in F^0(M)$ . A esta função, temos associada sua derivada,

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \quad (1.31)$$

que é uma 1-forma.

Note que neste caso, a derivação da função a levou a uma forma de grau imediatamente superior.

Agora, estenderemos o operador  $d$  para formas arbitrárias, através do

**Teorema 8.** *Seja  $M$  uma variedade diferenciável. Existe um único operador*

$$d : F^p(M) \rightarrow F^{p+1}(M) \quad (1.32)$$

onde  $p$  está compreendido entre 0 e  $n$ , chamado derivada exterior, que satisfaz as propriedades:

1.  $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^{\text{grau } \omega} \omega \wedge d\eta$ , para formas  $\omega \in F^p$  e  $\eta \in F^q$  arbitrárias.
2. Se  $f \in F^0$ ,  $d(f) = df$  é sua derivada ordinária, velha conhecida.
3.  $d$  é um operador nilpotente, valendo a igualdade  $d^2 = d \circ d = dd = 0$ .

*Demonstração.* Consulte Westenholtz [1], Warner [2], Flanders [5] ou Feres [6]. □

**Definição 18.** *Seja  $f : X \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow Y \subseteq \mathbb{R}^m$  diferenciável e  $\omega$  uma  $k$ -forma em  $Y$ . Definimos a forma  $f^*\omega$  em  $X$  como sendo*

$$f^*\omega(x) = f'(x)^t \omega(f(x)) \quad (1.33)$$

onde  $f'(x) : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$  é a jacobiana de  $f$  em  $x$  e o índice superior  $t$  na equação anterior indica a transposição da matriz jacobiana.

Se  $g : Y \rightarrow Z \subseteq \mathbb{R}^k$  e  $\omega$  e  $\eta$  são  $k$ -formas, então valem as seguintes propriedades:

1.  $f^*(dx_i) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx^j$
2.  $f^*(\omega + \eta) = f^*(\omega) + f^*(\eta)$
3.  $f^*(g.\omega) = (g \circ f)f^*(\omega)$
4.  $f^*(\omega \wedge \eta) = f^*(\omega) \wedge f^*(\eta)$
5.  $f^*(gdx^1 \wedge \dots \wedge dx^n) = (g \circ f)(\det f'(x))dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ .

## 1.7 Integração em variedades e Teorema de Stokes

Quando realizamos a integração de formas em variedades diferenciáveis, torna-se indispensável a noção de orientação. Por exemplo, na Física, o sinal do trabalho feito através de uma curva sob influência de uma força, depende do sentido ao qual a partícula em questão percorre a curva.

Outro exemplo: quando estamos no plano, num movimento circular, utilizamos como orientação o sentido horário ou anti-horário, e a cada um deles atribuímos um sinal + ou -.

Num espaço vetorial  $V$  de dimensão finita  $n$ , considere o conjunto  $A$  formado por todas as bases deste espaço. Tomando duas bases ordenadas de  $V$ ,  $\Upsilon = \{e_1, \dots, e_n\}$  e  $\Gamma = \{f_1, \dots, f_n\}$ , seja  $B$  a matriz mudança de base tal que

$$B\Upsilon = \Gamma \quad (1.34)$$

onde a equação acima significa que  $Be_i = f_i$ . Dizemos que essas bases têm a mesma orientação se  $\det B > 0$ .

Por exemplo, em  $\mathbb{R}$ , considere o número  $e > 0$  e os conjuntos  $\{\alpha e/\alpha > 0\}$  e  $\{\beta e/\beta < 0\}$ , onde  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Esses conjuntos definem duas orientações na reta.

Relembrando uma antiga definição:

**Definição 19.** *Uma forma de volume numa variedade  $M$  é uma  $n$ -forma  $\omega \in F^n(M)$  não nula em todo ponto da variedade.  $M$  é chamada variedade orientada se e só se existir uma forma com tal propriedade.*

**Definição 20.** *Uma orientação em  $M$  é dada por uma classe de equivalência de formas de volume*

$$\begin{aligned} \omega \sim \omega' &\iff \omega(x) = f(x)\omega'(x) \\ f(x) &> 0, f \in C^\infty(M), x \in M \end{aligned} \quad (1.35)$$

**Teorema 9.** *Seja  $M$  uma variedade  $n$ -dimensional. As seguintes proposições são equivalentes:*

1.  $M$  é orientável, isto é, existe uma forma  $\omega$  não nula em todo ponto da variedade.
2. Existe um atlas  $\mathcal{U} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$  em  $M$  tal que em  $U_j \cap U_k \neq \emptyset$

$$dx_k^1 \wedge \dots \wedge dx_k^n = J dx_j^1 \wedge \dots \wedge dx_j^n \quad (1.36)$$

onde

$$J = \det \left( \frac{\partial x_k^i}{\partial x_j^m} \right) > 0 \quad (1.37)$$

quando as coordenadas com sub-índice  $k$  e  $j$  são as coordenadas locais de  $U_k$  e  $U_j$ , respectivamente.

*Demonstração.* Consulte Westenholtz [1]. □

### 1.7.1 Integração de $n$ -formas em $\mathbb{R}^n$

**Definição 21.** Um difeomorfismo  $C^k$ ,  $k > 0$  é uma função com inversa também  $C^k$ .

**Definição 22.** Seja  $U$  um conjunto aberto  $n$ -dimensional e  $k \leq n$ . Dada uma  $k$ -forma  $\omega$  definida em  $U$

$$\omega = \omega_0(x) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$$

com  $\omega_0(x) \in \mathbb{R}$ , existe uma única função  $f$  com mesma imagem e domínio que  $\omega_0$  tq.  $f(x) = \omega_0(x)$  e

$$\int_U \omega = \int_U f = \int_U \omega_0(x) dx^1 \dots dx^n. \quad (1.38)$$

**Teorema 10. (Mudança de Variável)**

Seja  $\varphi$  um difeomorfismo  $C^\infty$  de um aberto  $K \subseteq U$  em  $U' \subseteq \mathbb{R}^n$  e  $\omega \in F^n(U')$ . Então

$$\int_{\varphi(K)} \omega = \varepsilon \int_K \varphi^* \omega \quad (1.39)$$

onde  $\varepsilon = +1$ , se  $\varphi$  preserva orientação e caso contrário,  $-1$ .

*Demonstração.* Consulte Westenholtz [1]. □

### 1.7.2 Integração em cadeias

O objetivo deste parágrafo é fazer um rápido apanhado sobre cadeias, de forma a possuímos um aparato conciso e suficiente para conseguirmos chegar ao *Teorema de Stokes*.

Com tal intuito, trataremos brevemente de simplexes.

**Definição 23.** Denotaremos por  $s_p$  o  $p$ -simplexo standard em  $\mathbb{R}^p$ , definido por:

$$s_p = \{(x^1, \dots, x^p) \in \mathbb{R}^p \text{ tq } \sum_{i=1}^p x^i \leq 1, \forall i\} \quad (1.40)$$

A título de curiosidade, mencionaremos os 3 primeiros simplexos:

$s_0 = \{0\}$  é um ponto.

$s_1 = [0, 1]$  é o intervalo compacto unitário.

$s_2 = (A_0, A_1, A_2)$  é o triângulo de vértices  $A_0 = (0, 0)$ ,  $A_1 = (1, 0)$  e  $A_2 = (0, 1)$ .

**Definição 24.** Um  $p$ -simplexo singular diferenciável  $\sigma_p$  numa variedade diferenciável  $M$  é dado por uma aplicação  $C^\infty$  de um  $p$ -simplexo standard  $s_p$  em  $\mathbb{R}^p$  em  $M$ ,  $\varphi : s_p \rightarrow M$ , que pode ser estendido a uma aplicação  $C^\infty$  numa vizinhança  $U \subseteq \mathbb{R}^p$  de  $s_p$  em  $M$ . Ele é denotado por  $\sigma = (s_p, U, \varphi)$ . Uma  $p$ -cadeia  $c_p$  em  $M$ , com coeficientes reais, é uma combinação linear formal finita

$$c_p = \sum \lambda_i \sigma_i^p \quad (1.41)$$

onde os coeficientes  $\lambda_i$  são inteiros e os  $\sigma_i^p$  são  $p$ -simplexos. Uma  $p$ -cadeia diferenciável infinita é uma soma formal infinita de  $p$ -simplexos.

Daqui para frente, salvo menção em contrário, trabalharemos com  $p$ -cadeias finitas.

Consideremos agora o conjunto formado por todas as  $p$ -cadeias. Pela Eq. (1.43), tal conjunto forma um espaço vetorial que chamaremos  $C_p$ . Neste espaço, podemos introduzir um operador linear que chamaremos o bordo de um  $p$ -simplexo, como sendo a  $(p-1)$ -cadeia

$$\partial \sigma_p = \sum_{i=0}^p (-1)^i \sigma_{p-1}^i \quad (1.42)$$

onde o  $(p-1)$ -simplexo  $\sigma_{p-1}^i$  é a  $i$ -ésima face de  $\sigma_p$ . Explicitamente, se  $\sigma_p = \{\varphi : s_p \rightarrow M\}$ , onde  $s_p = \{A_0, \dots, A_p\}$ , o bordo do simplexo  $s_p$  é a soma formal dos simplexos de dimensão imediatamente inferior a ele com coeficientes inteiros:

$$\partial s_p = \partial(A_0, \dots, A_p) = \sum_{i=0}^p (-1)^i (A_0, \dots, A_{i-1}, A_{i+1}, \dots, A_p) = \sum_{i=0}^p (-1)^i s_{p-1}^i.$$

O termo  $s_{p-1}^i$ , com  $i=0, \dots, p$  é uma das faces do simplexo  $s_p$ .

O operador de bordo definido anteriormente pode ser estendido linearmente para cadeias em virtude de:

$$\begin{aligned} \partial : C_p(M) &\rightarrow C_{p-1}(M) \\ &\text{definido por} \\ \partial c_p &= \partial(\sum \lambda_i \sigma^i) = \sum \lambda_i \partial \sigma^i \end{aligned} \quad (1.43)$$

**Teorema 11.** O operador de bordo  $\partial$  satisfaz as seguintes propriedades:

1.  $\partial$  é linear,

2.  $\partial$  é um operador nilpotente, valendo a igualdade  $\partial^2 = \partial \circ \partial = 0$ ,
3. Seja  $\phi$  uma aplicação diferenciável entre duas variedades  $C^\infty M$  e  $M'$ , respectivamente, e seja  $\phi_* : C_p(M) \rightarrow C_p(M')$  a aplicação induzida de  $p$ -cadeias em  $M$

$$\begin{aligned} \phi_* \sigma_p &= \{\phi \circ \varphi : s_p \rightarrow M'\} \text{ para } \sigma_p = \{\varphi : s_p \rightarrow M\} \\ &\text{e então} \\ \phi_*(\partial c_p) &= \partial(\phi_* c_p). \end{aligned} \tag{1.44}$$

*Demonstração.* Consulte Westenholtz [1] ou Spivack [4]. □

### 1.7.3 Integração sobre cadeias

As integrais sobre cadeias podem ser introduzidas como segue:

**Definição 25.** *Seja  $\sigma_p = (s_p, U, \varphi)$  um  $p$ -simplexo e  $\omega^p$  uma  $p$ -forma em  $M$ . A forma  $\varphi^* \omega^p = \sum a_{i_1, \dots, i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$ , onde  $x^1, \dots, x^n$  são as coordenadas standard em  $\mathbb{R}^n$ , é definida numa vizinhança  $U$  do  $p$ -simplexo standard  $s_p$ . Então, definimos:*

$$\int_{\sigma_p} \omega^p = \sum_{i_1 < \dots < i_p} \int \underbrace{\dots}_{(p-2)\text{vezes}} \int a_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \dots dx^{i_p}. \tag{1.45}$$

A soma acima é estendida por linearidade a qualquer  $p$ -cadeia finita.

**Definição 26.** *A integral da forma  $\omega^p$  sobre a cadeia  $c_p$  é definida por*

$$\int_{c_p} \omega^p = \sum_i \lambda_i \int_{\sigma_i} \omega \tag{1.46}$$

**Teorema 12. Teorema de Stokes (versão para cadeias)**

*Seja  $M$  uma variedade diferenciável. Para toda  $p$ -cadeia  $c_p \in C_p(M)$  ( $p \leq 1$ ) e uma  $(p-1)$ -forma diferenciável  $\omega$ , vale:*

$$\int_{\partial c} \omega = \int_c d\omega. \tag{1.47}$$

*Demonstração.* Consulte Westenholtz [1], Guillemin [3] ou Spivack [4]. □

## 1.8 Integração em variedades orientadas

Denotaremos por  $F_c^p(M)$  o conjunto das  $p$ -formas com suporte compacto, onde o suporte de uma forma  $\omega$  é definido como sendo

$$\text{supp } \omega = \overline{\{x \in M \text{ tq } \omega(x) \neq 0\}}. \tag{1.48}$$

**Teorema 13.** *Seja  $M$  uma variedade orientada  $n$ -dimensional. Existe uma única aplicação*

$$\int : F_c^n(M) \rightarrow \mathbb{R} \quad (1.49)$$

*satisfazendo:*

1. *Linearidade*

$$\int \omega_1 + \omega_2 = \int \omega_1 + \int \omega_2,$$

$$\int \lambda \omega_1 = \lambda \int \omega_1,$$

*onde  $\omega_1, \omega_2 \in F_c^n$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$*

2. *Suponha que  $\text{supp } \omega \subseteq U$  para alguma carta  $(U, x^1, \dots, x^n)$ , i.e,  $dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n > 0$  e localmente  $\omega = a dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ , então*

$$\int_M \omega = \int_{\mathbb{R}^n} a dx^1 \dots dx^n. \quad (1.50)$$

*Demonstração.* Consulte Westenholtz [1] ou Warner [2]. □

**Teorema 14.** *Sejam  $M$  e  $N$  duas variedades orientadas de mesma dimensão  $n$ . Se a aplicação  $\varphi : M \rightarrow N$  é um difeomorfismo e  $\text{supp } \omega$  é compacto, onde  $\omega \in F^n(M)$ , então:*

$$\int_{\varphi(M)} \omega = \varepsilon \int_M \varphi^* \omega \quad (1.51)$$

*onde  $\varepsilon$  é  $+1$  se o difeomorfismo preserva a orientação e caso contrário,  $-1$ .*

*Demonstração.* Consulte Westenholtz [1]. □

Se  $M$  é uma variedade diferenciável de dimensão  $n$ , um subconjunto  $D$  de  $M$  é dito domínio regular se para todo ponto do fecho de  $D$ , tivermos:

1. Há uma carta local  $(U, \varphi)$  de  $M$ ,  $x \in U$ , tal que  $\varphi(\overline{D} \cap U)$  é um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^n$ .
2. Existe uma carta local  $(U, \varphi)$  de  $M$ ,  $x \in U$  tal que  $\varphi(\overline{D} \cap U)$  é um subconjunto aberto do espaço definido por

$$H^n = \{(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n \text{ tq } x^n \geq 0\} \quad (1.52)$$

Os pontos  $x \in D$  com a primeira propriedade são ditos pontos interiores, e os outros, satisfazendo a segunda propriedade, são chamados pontos da fronteira. Assim, a fronteira ou bordo de  $D$  é definido por:

$$\partial D = \{x \in \bar{D} \text{ tq } x^n = 0\}. \quad (1.53)$$

Com isso, podemos enunciar os seguintes teoremas:

**Teorema 15.** *Seja  $M$  uma variedade orientável  $n$ -dimensional e seja  $D$  um domínio regular de  $M$ . Então o bordo  $\partial D$  é uma subvariedade orientável de dimensão  $(n-1)$ .*

*Demonstração.* Consulte Westenholtz [1]. □

**Teorema 16.** *Seja  $M$  uma variedade orientada de dimensão  $n$ , e seja sua orientação dada por  $dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n > 0$ . A orientação induzida em  $\partial D$  por  $M$  é definida por uma  $(n-1)$ -forma, tal que*

$$\omega = (-1)^n dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n. \quad (1.54)$$

*Demonstração.* Consulte Westenholtz [1]. □

Finalmente, chegamos agora ao resultado central deste capítulo, que será utilizado nos capítulos vindouros, que é o *Teorema de Stokes* para uma variedade orientada de dimensão  $n$ .

**Teorema 17. Teorema de Stokes Generalizado**

*Seja  $M$  uma variedade orientada  $n$ -dimensional e seja  $D$  um domínio regular de  $M$ . Seja  $\omega$  uma  $(n-1)$ -forma diferencial de suporte compacto. Então, vale a igualdade:*

$$\int_D d\omega = \int_{\partial D} i^* \omega \quad (1.55)$$

*onde o bordo  $\partial D$  é considerado como uma subvariedade com a orientação induzida pela de  $M$  e  $i : \partial D \rightarrow M$  é a injeção canônica.*

*Demonstração.* Consulte Westenholtz [1], Warner [2], Guillemin [3], Spivack [4], Flanders [5] ou Feres [6]. □

## Capítulo 2

# Eletrromagnetismo e formas diferenciáveis

Neste capítulo apresentaremos as equações de Maxwell na forma clássica e discutiremos um pouco mais detalhadamente as 0, 1, 2 e 3-formas e o operador estrela de Hodge. Em seqüência, passaremos as equações básicas da eletrodinâmica para a linguagem das formas, para depois, mostrarmos o tensor de *Faraday* no vácuo e a sua relação com as equações de Maxwell. Antes, contudo, façamos uma digressão histórica.

### 2.1 Um pouco de história da Física

O eletromagnetismo tem suas origens em tempos anteriores à Era Cristã. Os antigos gregos haviam notado que o âmbar, uma resina de determinadas árvores, possuía propriedades elétricas. Ao longo do tempo, propriedades magnéticas, não só de materiais, mas também do próprio planeta, foram sendo descobertas. Um exemplo disso são as bússolas, que se orientam em relação ao campo de indução magnética que a Terra possui. Como consequência deste progresso, temos o período das grandes navegações, que culmina com o descobrimento, questionável, da América ( aqui refiro-me ao continente americano, compreendido desde o Alaska até a Terra do Fogo, não aos norte-americanos ). Outro fato interessante advindo dos estudos magnéticos é o livro *De Magnete*, escrito por *William Gilbert* em 1600. Aliás, foi este médico, formado na *Universidade de Cambridge* em 1569, quem criou o termo *elétrico*, que vem do grego, *elektron*=âmbar. Todavia, até meados do século XVIII, fenômenos magnéticos e elétricos ainda eram desvinculados.

Em 1807, o físico dinamarquês *Hans Christian Oersted* (1755-1851) tentou, sem êxito, realizar experiências com as quais procurava descobrir relações entre eletricidade e magnetismo.

Em 1813, nos *Commentationes societatis scientiarum Gottingensis recentiores 2*, o físico-matemático alemão *Johann Friedrich Karl Gauss (1777-1855)* publicou um trabalho no qual demonstrou um teorema envolvendo integrais de superfície e de volume. Segundo este trabalho, em nossa linguagem atual, o fluxo de um vetor através de uma superfície que envolve um determinado volume pode ser calculado através da integral de volume da divergência do campo vetorial em questão. Este é o famoso *Teorema da Divergência de Gauss*, e é um caso particular do nosso *Teorema de Stokes*. Gauss chegou a este resultado estudando a atração gravitacional entre os corpos.

No inverno europeu de *1819-1820*, Oersted ministrou um curso na *Universidade de Copenhague* sobre *Eletricidade, Galvanismo e Magnetismo*. Durante esse curso, Oersted realizou experiências nas quais procurou encontrar uma relação entre eletricidade e magnetismo, examinando o que acontecia com uma agulha magnética ao ser colocada perpendicularmente ao fio condutor do circuito galvânico utilizado. Todavia, não registrou nenhum movimento perceptível na agulha.

Porém, ao término de uma aula noturna, no começo de abril de 1820, teve a idéia de colocar o fio condutor paralelamente à direção da agulha; aí então, percebeu uma razoável deflexão da mesma. Assim, a procurada relação entre o magnetismo e o galvanismo estava finalmente descoberta.

O físico e químico inglês *Michael Faraday (1791-1867)* tomou conhecimento das descobertas de Oersted através de uma carta escrita pelo físico holandês *Christopher Hansteen (1784-1873)*, então assistente de Oersted.

Vale ressaltar que no início do século *XIX*, era comum distinguir o estudo entre **eletricidade estática** e a pesquisa de correntes elétricas. Os primeiros estudos do movimento de cargas elétricas foram feitos pelo fisiologista italiano *Luigi Galvani (1737-1798)*. Por isso o também italiano, mas físico, *Alessandro Giuseppe Volta (1745-1827)* denominou **galvanismo** ao estudo da eletricidade dinâmica.

Em 18 e 25 de setembro de 1820, o físico francês *André Marie Ampère (1775-1836)* comunicou à *Academia Francesa de Ciências* os resultados de suas experiências sobre os efeitos magnéticos da corrente elétrica que haviam sido observados por Oersted. Essas experiências foram publicadas nos *Annales de Chimie et Physique 15(2)*, de 1820. Ampère denominou de **eletrostática e eletrodinâmica** o estudo das cargas em repouso e movimento, respectivamente.

Em 30 de outubro do mesmo ano, os também franceses *Jean Baptiste Biot (1774-1862)* e *Félix Savart (1791-1841)* comunicaram à Academia Francesa de Ciências a descoberta experimental que fizeram acerca da lei que recebe seus nomes.

Em 21 de outubro de 1821, no *Quarterly Journal of Science*, Faraday publicou um artigo

introduzindo o conceito de **linhas de força**. Posteriormente, em 1822, lançou a idéia do magnetismo natural ser conseqüência de que a substância magnética seja, em seu interior, composta de uma infinidade de correntes elétricas circulares diminutas. Tais correntes ficaram conhecidas como *correntes amperianas*.

Diversos outros físicos contribuíram ainda com resultados e idéias em relação ao nascente ramo da eletrodinâmica, por exemplo, *Poisson, Fresnel, Brewster, Ohm*, entre outros. Surge então o gigante do eletromagnetismo do *séc. XIX*: *James Clerck Maxwell*.

Maxwell nasceu em 13 de junho de 1831 em Edinburgh, Escócia, e faleceu em 5 de novembro de 1879 em Cambridge, Inglaterra. Já aos 14 anos escreveu um artigo sobre a teoria de curvas. Nessa época conheceu *P. Tait*, que foi um grande amigo e colaborador, sendo um dos principais defensores de suas idéias posteriores relacionadas com os fenômenos eletromagnéticos, assim como do uso dos *quatérnions* de *Hamilton*, que aparecerão posteriormente em alguns dos trabalhos de Maxwell. Graduou-se em Matemática pelo Trinity College em 1854. Em 1857 ganhou o **Adams Prize** junto com Tait, com um trabalho sobre o movimento dos anéis de Saturno. Este trabalho foi elogiado por ser *uma das mais belas aplicações da Matemática em Física jamais vista*. Em torno de 1862 Maxwell passou a estudar a velocidade de propagação de uma onda eletromagnética, concluindo que ela deveria ser aproximadamente igual à velocidade da luz. Estava assim germinando uma das mais importantes teorias da Ciência: a teoria eletromagnética de Maxwell. Foi no ano da graça de 1873, que as atuais *Equações de Maxwell* apareceram em seu livro *A Treatise on Electricity and Magnetism*, mostrando de forma definitiva que a luz é um fenômeno eletromagnético, unificando a descrição antes isolada dos fenômenos elétricos, magnéticos e ópticos ( para maiores detalhes, vide [7] e [8]).

## 2.2 Equações de Maxwell escritas através de formas

No primeiro capítulo fizemos a teoria de formas de maneira geral e sucinta, como bem avisamos que seria. Agora, façamos uma explanação um pouco mais específica acerca das formas que nos acompanharão até o final de nosso trabalho. No que segue, consideraremos formas em  $\mathbb{R}^3$  ( para maiores detalhes, consulte [12] ).

### 2.2.1 1-formas

As 1-formas são formas integradas sobre caminhos, e são representadas graficamente por superfícies, como na Figura 2.1a.

As superfícies de uma 1-forma têm uma orientação associada ao sentido do vetor dual da forma. A 1-forma geral é  $adx + bdy + cdz$ , cujo vetor dual é  $ae_1 + be_2 + ce_3$ .

### 2.2.2 2-formas

As 2-formas são integradas sobre superfícies. Uma base para as 2-formas é  $dy \wedge dz$ ,  $dz \wedge dx$ ,  $dx \wedge dy$ , com vetores duais  $e_1, e_2, e_3$ . Note que da anti-simetria,  $dy \wedge dz = -dz \wedge dy$ , etc, decorre que  $dx \wedge dx = dy \wedge dy = dz \wedge dz = 0$ .

Graficamente, 2-formas são tubos, como mostra a Figura 2.1b.

Os tubos são orientados no sentido do vetor dual associado.

### 2.2.3 3-formas

Uma 3-forma é um elemento de volume, representado por caixas, além de ser também, o dual de seu coeficiente.

Finalmente, uma 0-forma é uma função contínua,  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ .

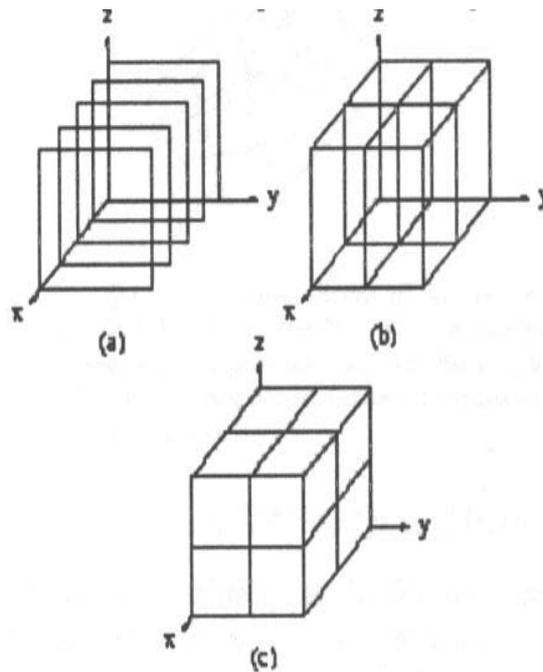


Figura 2.1: (a) A 1-forma  $dx$ . (b) A 2-forma  $dy \wedge dx$ . Os tubos na direção  $x$  são formados pela superposição de superfícies no plano  $yz$ . (c) A 3-forma  $dx \wedge dy \wedge dz$ .

## 2.2.4 Equações de Maxwell

As equações básicas do eletromagnetismo são as equações de Maxwell. Fazendo uma pequena modificação nas expressões dadas por Heald [10], elas são escritas, na forma diferencial, como:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho, \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (2.2)$$

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{J}. \quad (2.4)$$

onde  $\vec{D}$  é o deslocamento elétrico,  $\vec{B}$  é o vetor indução magnética,  $\vec{E}$  é o campo elétrico,  $\vec{H}$  é o campo magnético e  $\rho$  e  $\vec{J}$  são, respectivamente, as densidades de cargas e corrente livres.

Além das equações acima, há também outra, de grande importância, a chamada equação da continuidade, a saber:

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (2.5)$$

Estas equações, juntamente com as relações constitutivas, nos dizem tudo sobre os fenômenos eletromagnéticos. Informam-nos desde a velocidade da luz num meio, o índice de refração, até mesmo a *cor* da luz que vemos.

## 2.2.5 Passagem para as equações com formas

Vejamos agora como podemos utilizar as formas no eletromagnetismo.

Escrevendo as leis de Maxwell na sua forma integral, temos:

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho dV, \quad (2.6)$$

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0, \quad (2.7)$$

$$\oint_\Gamma \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}, \quad (2.8)$$

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \frac{d}{dt} \int_S \vec{D} \cdot d\vec{S} + \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}. \quad (2.9)$$

onde  $S$  é a superfície onde se efetua a integração,  $\Gamma$  é o caminho e  $V$  é o volume da região em questão.

Além disso, a forma integral da equação da continuidade é:

$$\int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} + \frac{d}{dt} \int_V \rho dV = 0. \quad (2.10)$$

Aos integrandos das integrais de linha, superfície e volume, associamos, respectivamente, 1-formas, 2-formas e 3-formas.

Aos campos elétrico e magnético  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$  associamos as 1-formas  $E$  e  $H$ , ao passo que aos campos deslocamento elétrico e indução magnética associamos as 2-formas  $D$  e  $B$ . Às fontes  $\vec{J}$  e  $\rho$ , associamos, respectivamente, a 2-forma  $J$  e a 3-forma  $\rho$ .

Assim, em formas, a Eq. (2.10) torna-se

$$\int_{\partial V} J + \frac{d}{dt} \int_V \rho = 0.$$

Utilizando o Teorema de Stokes, podemos reescrever a equação anterior como

$$\int_V \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + dJ \right) = 0. \quad (2.11)$$

Como o domínio é arbitrário, concluímos que:

$$dJ + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (2.12)$$

Desde que a densidade de carga é uma 3-forma, sua derivada exterior anula-se. Obukhov [9], afirma que podemos derivar  $\rho$  de um potencial. Assim, o deslocamento elétrico  $D$  é uma 2-forma de maneira que:

$$d\rho = 0 \implies \rho = dD. \quad (2.13)$$

Substituindo a Eq. (2.13) acima na equação da continuidade Eq. (2.12) e utilizando o mesmo raciocínio com o qual derivamos a expressão anterior definimos um outro potencial para a densidade de corrente. A tal potencial chamamos de campo  $H$ , que é uma 1-forma. Assim:

$$d\left(J + \frac{\partial D}{\partial t}\right) = 0 \implies J + \frac{\partial D}{\partial t} = dH. \quad (2.14)$$

Os campos  $(D, H)$  são potenciais das fontes  $(\rho, J)$ .

Com isso, nós obtivemos as equações de Maxwell não-homogêneas, isto é, as leis de Gauss e Oersted-Ampère:

$$\begin{aligned} dD &= \rho, \\ dH - \frac{\partial D}{\partial t} &= J. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Pelas considerações que fizemos anteriormente, e associando aos vetores  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  a 1-forma  $E$  e a 2-forma  $B$ , respectivamente, a Eq. (2.8) torna-se

$$\int_{\partial S} E + \frac{\partial}{\partial t} \int_S B = 0 \tag{2.16}$$

onde  $\partial S = \Gamma$  é o bordo ou fronteira de  $S$ .

Pelo Teorema de Stokes, podemos reescrever a primeira parcela desta equação como sendo  $\int_{\partial S} E = \int_S dE$ . Desde que a superfície em questão é arbitrária, redescobrimos a equação de Faraday:

$$dE + \frac{\partial B}{\partial t} = 0. \tag{2.17}$$

Como os operadores  $\frac{\partial}{\partial t}$  e  $d$  agem em espaços diferentes, segue que eles comutam. Assim, aplicando o operador  $d$  na equação anterior, obtemos:

$$dB = 0. \tag{2.18}$$

Novamente, podemos utilizar o raciocínio que gerou as Eqs. (2.13) e (2.14), para escrevermos  $B$  como a derivada exterior de um potencial, i.é:

$$B = dA. \tag{2.19}$$

Utilizando o fato que o operador  $d$  é nilpotente, *i.e.*,  $d^2 = 0$  e se fizermos  $A \longrightarrow A + d\xi$ , para alguma 0-forma  $\xi$ , temos:

$$d(A + d\xi) = dA + d^2\xi = dA = B. \tag{2.20}$$

Esta propriedade é chamada um *invariante de calibre* do eletromagnetismo. Um outro pode ser obtido notando que  $d(E + d\phi) = dE$ , para qualquer 0-forma  $\phi$ .

Nos cursos introdutórios de eletrodinâmica, os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{D}$  são relacionados pela equação  $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ , e os campos  $\vec{H}$  e  $\vec{B}$  por  $\vec{H} = \mu \vec{B}$ . Aqui, estas relações são generalizadas, pois  $\vec{D}$  e  $\vec{B}$  são integrados em superfícies, logo são 2-formas, ao passo que  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$  são integrados num

caminho, sendo assim 1-formas. A correlação entre as formas  $(E,D)$  e  $(B,H)$  serão dadas no próximo capítulo.

Posto isso, associamos, respectivamente aos vetores campo elétrico, campo magnético, deslocamento elétrico, indução magnética e a densidade de carga, as formas:

$$E = E_1 dx + E_2 dy + E_3 dz,$$

$$H = H_1 dx + H_2 dy + H_3 dz,$$

$$D = D_1 dy \wedge dz + D_2 dz \wedge dx + D_3 dx \wedge dy,$$

$$B = B_1 dy \wedge dz + B_2 dz \wedge dx + B_3 dx \wedge dy,$$

$$\rho = \rho dx \wedge dy \wedge dz. \quad (2.21)$$

## 2.3 O tensor de Faraday

O tensor de Faraday é uma espécie de unificação das equações de Maxwell. Através dele, as Eqs. (2.1)-(2.4) são dadas por duas únicas: uma correspondente a (2.2) e (2.3), que são as equações homogêneas, e a outra, refere-se as não-homogêneas, dadas por (2.1) e (2.4). Em Heald [10] podemos ver como é construído tal tensor, pensando no eletromagnetismo do ponto de vista vetorial. Aqui, faremos com o formalismo das formas. Misner [11] mostra maiores detalhes de alguns passos que abaixo faremos, bem como uma bonita explicação da aplicabilidade das formas no eletromagnetismo.

### 2.3.1 Construção do tensor de Faraday

Consideremos uma 2-forma diferencial no vácuo, denotada por  $F$ , construída a partir das componentes dos campos  $E = (E_1, E_2, E_3)$  e  $B = (B_1, B_2, B_3)$ , onde consideramos  $(E_i, B_i) = (E_i(x, y, z, t), B_i(x, y, z, t))$ ,  $1 \leq i \leq 3$ , dada por

$$F = E_1 dx \wedge dt + E_2 dy \wedge dt + E_3 dz \wedge dt + B_1 dy \wedge dz + B_2 dz \wedge dx + B_3 dx \wedge dy. \quad (2.22)$$

Suporemos que nosso sistema de unidades seja tal que  $\varepsilon_0 = \mu_0 = 1$ . Aplicando o operador  $d$  a  $F$ , obtemos:

$$\begin{aligned}
dF &= d(E_1 dx \wedge dt + E_2 dy \wedge dt + E_3 dz \wedge dt + B_1 dy \wedge dz + B_2 dz \wedge dx + B_3 dx \wedge dy) = \\
&= \left( \frac{\partial B_1}{\partial x} + \frac{\partial B_2}{\partial y} + \frac{\partial B_3}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz + \left( \frac{\partial B_2}{\partial t} + \frac{\partial E_1}{\partial z} - \frac{\partial E_3}{\partial x} \right) dt \wedge dz \wedge dx + \\
&+ \left( \frac{\partial B_2}{\partial t} + \frac{\partial E_1}{\partial z} - \frac{\partial E_3}{\partial x} \right) dt \wedge dz \wedge dx + \left( \frac{\partial B_3}{\partial t} + \frac{\partial E_2}{\partial x} - \frac{\partial E_1}{\partial y} \right) dt \wedge dx \wedge dy. \quad (2.23)
\end{aligned}$$

Comparando com as expressões clássicas das equações de Maxwell, temos:

$$\begin{aligned}
dF &= (\nabla \cdot \vec{B}) dx \wedge dy \wedge dz + \\
&+ \left( \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)_1 dt \wedge dy \wedge dz + \\
&+ \left( \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)_2 dt \wedge dz \wedge dx + \\
&+ \left( \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)_3 dt \wedge dx \wedge dy. \quad (2.24)
\end{aligned}$$

Invocando as Eqs. (2.2) e (2.3), temos:

$$dF = 0. \quad (2.25)$$

Considere agora  $\star F$ . Utilizando a definição de  $\star$  e notando que a ordem é  $(x, y, z, t)$ , temos:  $\star(dt \wedge dx) = dy \wedge dz$ ,  $\star(dt \wedge dy) = dz \wedge dx$ , ... Então:

$$\star F = E_1 dy \wedge dz + E_2 dz \wedge dx + E_3 dx \wedge dy + B_1 dx \wedge dt + B_2 dy \wedge dt + B_3 dz \wedge dt. \quad (2.26)$$

Com isso, aplicando  $d$  na equação acima, temos:

$$\begin{aligned}
d\star F &= \left( \frac{\partial E_1}{\partial x} + \frac{\partial E_2}{\partial y} + \frac{\partial E_3}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz + \\
&+ \left( \frac{\partial E_1}{\partial t} - \frac{\partial B_2}{\partial z} + \frac{\partial B_3}{\partial y} \right) dy \wedge dz \wedge dt + \\
&+ \left( \frac{\partial E_2}{\partial t} + \frac{\partial B_3}{\partial x} - \frac{\partial B_1}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dt +
\end{aligned}$$

$$+\left(\frac{\partial E_3}{\partial t} - \frac{\partial B_1}{\partial y} + \frac{\partial B_1}{\partial x}\right)dx \wedge dz \wedge dt. \quad (2.27)$$

Rearranjando os termos, temos:

$$\begin{aligned} d \star F &= (\nabla \cdot \vec{E})dx \wedge dy \wedge dz + \\ &+ \left(\nabla \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)_1 dy \wedge dz \wedge dt + \\ &+ \left(\nabla \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)_2 dx \wedge dz \wedge dt + \\ &+ \left(\nabla \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)_3 dx \wedge dy \wedge dt. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Se considerarmos a quadricorrente

$$\star j = \rho dx \wedge dy \wedge dz - j_1 dt \wedge dy \wedge dz - j_2 dt \wedge dz \wedge dx - j_3 dt \wedge dx \wedge dy \quad (2.29)$$

e utilizarmos as Eqs. (2.1) e (2.4), chegamos a:

$$d \star F = \star j. \quad (2.30)$$

As Eqs. (2.25) e (2.30) são duais uma da outra. Elas são a síntese das equações de Maxwell.

## Capítulo 3

# Eletromagnetismo em meios não-homogêneos

Neste capítulo apresentaremos a função tensorial de Green para um meio anisotrópico em termos de simples funções de Green, as quais podem ser obtidas exatamente, generalizando o método de construção standard para tal função no espaço livre.

A estratégia que utilizaremos aqui é a mesma adotada por Warnick em [13] e [14], que consiste em representar o tensor de Green como uma dupla forma diferenciável. Isto quer dizer que trabalharemos em dois espaços de iguais dimensões, sendo que um é o espaço de observação e o outro é o espaço *fonte*.

No caso geral, as propriedades materiais do meio, como por exemplo, os tensores de permissividade e a permeabilidade serão embutidos no operador  $\star$  de Hodge, dando origem a um novo operador. Posteriormente apresentaremos as formas de Green para o campo elétrico e redescobriremos antigos resultados, como a *fórmula de Stratton-Chu*, para radiação de antenas, a *equação de Fredholm de segunda espécie* e a *equação de Fresnel*.

As reformulações da função tensorial de Green e o uso do operador  $\star$  de Hodge expressam as relações constitutivas do meio com vantagens para a generalização da equação de Helmholtz para um meio anisotrópico.

Este capítulo nada mais é que o artigo de Warnick que motivou esta dissertação [14] e uma parte da sua tese de doutoramento [13], salvo uma ou outra hipótese que foi reformulada, ou então, demonstrações que foram refeitas ou melhor justificadas à luz do Capítulo 1.

### 3.1 O operador $\star$ de Hodge para um meio anisotrópico

No capítulo anterior utilizamos o operador  $\star$  para expressar as relações constitutivas do espaço livre. Todavia, este operador depende da métrica do espaço que estamos trabalhando.

No caso supra-mencionado, nossa métrica é a usual de  $\mathbb{R}^3$ , *i.e.*, os elementos ou entradas da matriz de métrica são dados por  $(g) = (\delta_{ij})$ . Se esta métrica é relacionada de algum modo com a permissividade e a permeabilidade (em nosso caso, tensores), as relações constitutivas do espaço livre podem ser generalizadas para o caso de um meio anisotrópico.

A definição mais comumente utilizada para definição do operador de Hodge é dada por Flanders [5] e Warnick [13] e [14].

$$\lambda \wedge \nu = \langle \star \lambda, \nu \rangle \sigma \quad (3.1)$$

onde  $\nu$  é uma  $p$ -forma,  $\lambda$  é uma  $(n-p)$ -forma e  $\sigma$  é o elemento de volume  $\star 1 \equiv \sqrt{|g|} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$  e  $\langle, \rangle$  denota o produto interno das  $p$ -formas induzido pelo tensor métrico  $(g_{ij})$ .

Para nossos propósitos, uma definição explícita do operador estrela em termos de uma métrica é dada abaixo. Para uma única  $p$ -forma, temos:

$$\star dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} = g^{i_1 j_1} \dots g^{i_p j_p} \epsilon_{j_1 \dots j_n} \frac{\sqrt{|g|}}{(n-p)!} dx^{j_{p+1}} \wedge \dots \wedge dx^{j_n} \quad (3.2)$$

onde  $\epsilon$  é o tensor de Levi-Civita,  $g$  é o determinante do tensor de métrica,  $n$  é a dimensão do espaço e  $g^{ij}$  são os elementos da matriz inversa da métrica.

Nesta dissertação, entenderemos por operador estrela euclidiano ou canônico, o operador  $\star$  dado pela Eq. (3.2) com métrica  $g^{ij} = \delta_{ij}$ .

Contudo, em diversas ocasiões, trabalharemos com operadores estrelas não-canônicos, cujas componentes são relacionados com componentes de matrizes hermitianas.

**Definição 27.** *Uma matriz hermitiana  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  é dita definida positiva se para todo  $0 \neq x \in \mathbb{C}^n$ , vale a igualdade*

$$x^* A x > 0.$$

Em sua tese doutoral [13] e em [14], Warnick introduz as definições de operadores estrela elétrico e magnético com matrizes simétricas, definidas positivas. Aqui, nós generalizaremos estas definições para matrizes hermitianas definidas positivas. No Capítulo 4 provaremos resultados gerais para tais operadores. Por enquanto, para nossos propósitos, somente as definições que se seguem são suficientes.

Para tensores de permissividade e permeabilidade hermitianos, positivamente definidos, introduzimos, utilizando a Eq. (3.2) e com o auxílio dos elementos da matriz inversa da métrica  $g^{ij} = \frac{\epsilon_{ji}}{\det(\epsilon_{ij})}$ , um novo operador denotado por  $\star_\epsilon$ , que chamaremos de operador estrela elétrico, bem como um segundo operador,  $\star_h$ , por sua vez chamado operador estrela magnético, invocando a mesma equação e o fato de  $g^{ij} = \frac{\mu_{ji}}{\det(\mu_{ij})}$ , de forma que as relações constitutivas possam ser escritas como:

$$D = \star_\varepsilon E \quad (3.3)$$

$$B = \star_h H. \quad (3.4)$$

Em coordenadas retangulares, o operador  $\star_\varepsilon$  age sobre uma 1-forma arbitrária de maneira óbvia, *i.e.*:

$$\begin{aligned} \star_\varepsilon(E_1 dx + E_2 dy + E_3 dz) &= (\varepsilon_{11} E_1 + \varepsilon_{12} E_2 + \varepsilon_{13} E_3) dy \wedge dz + \\ &+ (\varepsilon_{21} E_1 + \varepsilon_{22} E_2 + \varepsilon_{23} E_3) dz \wedge dx + \\ &+ (\varepsilon_{31} E_1 + \varepsilon_{32} E_2 + \varepsilon_{33} E_3) dx \wedge dy. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Se aplicarmos o mesmo operador a uma 2-forma, obteremos:

$$\begin{aligned} \star_\varepsilon(D_1 dy \wedge dz + D_2 dz \wedge dx + D_3 dx \wedge dy) &= (\varepsilon^{11} D_1 + \varepsilon^{21} D_2 + \varepsilon^{31} D_3) dx + \\ &+ (\varepsilon^{12} D_1 + \varepsilon^{22} D_2 + \varepsilon^{32} D_3) dy + \\ &+ (\varepsilon^{13} D_1 + \varepsilon^{23} D_2 + \varepsilon^{33} D_3) dz \end{aligned} \quad (3.6)$$

onde  $\varepsilon^{ij}$  são as componentes da matriz  $\varepsilon^{-1}$ , e  $\varepsilon = (\varepsilon_{ij})$  matriz dos coeficientes do tensor de permissividade.

Sobre 1-formas e 3-formas, o operador estrela elétrico resulta em:

$$\star_\varepsilon 1 = (\det \varepsilon) dx \wedge dy \wedge dz. \quad (3.7)$$

O operador estrela magnético  $\star_h$  comporta-se similarmente.

Os operadores estrela elétrico e magnéticos são seus próprios inversos num meio em que os tensores de permissividade e permeabilidade são hermitianos. Todavia, este não é o caso geral. Denotaremos o inverso de tais operadores por:  $\tilde{\star}_\varepsilon$ , para o caso elétrico e por  $\tilde{\star}_h$  para o caso magnético.

Warner [2] define esse inverso como sendo  $\star^{-1} = (-1)^{p(n-p)} \star$ . Por sua vez, Flanders [5] o define como sendo  $\star^{-1} = (-1)^{p(n-p) + \frac{(n-t)}{2}} \star$ , que é o mesmo resultado que temos no Teorema 6. A diferença entre as duas fórmulas é que Warner [2] faz sua teoria pensando em variedades riemannianas, ao passo que Flanders [5] trabalha com variedades um pouco mais gerais.

Daqui para frente, salvo menção em contrário, trabalharemos com a definição de Warnick [13] e [14], que trabalha com operadores  $\star$  não simétricos, com assinatura da métrica  $t = n$ .

**Teorema 18.** *Seja  $\omega \in F^p(M)$ . Então:*

$$\star^{-1} \omega = (-1)^{p(n-p)} \tilde{\star} \omega \quad (3.8)$$

*Demonstração.* Por comodidade, suporemos  $\omega = dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$ . O caso geral é feito por linearidade. Para simplificar a notação, utilizaremos a seguinte convenção:

$$dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} = dx^{i_1 \dots i_p}.$$

Aplicando o operador  $\tilde{\star}$  na Eq. (3.2), temos:

$$\begin{aligned} \tilde{\star} \star dx^{i_1 \dots i_p} &= g^{i_1 j_1} \dots g^{i_p j_p} \epsilon_{j_1 \dots j_n} \frac{\sqrt{|g|}}{(n-p)!} \tilde{\star} (dx^{j_{p+1}} \wedge \dots \wedge dx^{j_n}) = \\ &= \frac{g}{p!(n-p)!} g^{k_{p+1} j_{p+1}} \dots g^{k_n j_n} g^{i_1 j_1} \dots g^{i_p j_p} \epsilon_{k_{p+1} \dots k_n k_1 \dots k_p} \epsilon_{j_1 \dots j_n} dx^{k_1 \dots k_p}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Contraindo-se os índices de  $\epsilon_{j_1 \dots j_n}$  e utilizando-se a igualdade  $\delta_{j_1 \dots j_n}^{i_1 \dots i_n} = \epsilon_{j_1 \dots j_n} \epsilon^{i_1 \dots i_n}$ , temos:

$$\tilde{\star} \star dx^{i_1 \dots i_p} = \frac{g}{p!(n-p)!} \delta_{l_{p+1}}^{k_{p+1}} \dots \delta_{l_n}^{k_n} (-1)^{p(n-p)} \delta_{k_1 \dots k_p}^{i_1 \dots i_p l_{p+1} \dots l_n} dx^{k_1 \dots k_p}. \quad (3.10)$$

Somando sobre os índices  $l_1, \dots, l_n$  e utilizando a igualdade  $\delta_{k_{p+1} \dots k_n}^{k_{p+1} \dots k_n} = 1$ , chegamos a:

$$\tilde{\star} \star dx^{i_1 \dots i_p} = \frac{g}{p!(n-p)!} (-1)^{p(n-p)} \frac{(n-p)!}{g} \delta_{k_1 \dots k_p}^{i_1 \dots i_p} dx^{i_1 \dots i_p}. \quad (3.11)$$

Devido à anti-simetria de  $dx^{k_1 \dots k_p}$ , o membro da direita da equação anterior consiste em  $p!$  cópias de  $\frac{1}{p!} (-1)^{p(n-p)} dx^{k_1 \dots k_p}$ , e assim, concluímos que

$$\tilde{\star} \star dx^{i_1 \dots i_p} = (-1)^{p(n-p)} dx^{i_1 \dots i_p}. \quad (3.12)$$

Com isso, podemos escrever:

$$\star^{-1} = (-1)^{p(n-p)} \tilde{\star} \quad (3.13)$$

□

Desde que para todo  $p$  inteiro, ou  $p \equiv 0 \pmod{2}$  ou  $p \equiv 1 \pmod{2}$ , segue que  $p(3-p) \equiv 0 \pmod{2}$ , e então,  $\tilde{\star} = \star$  em  $\mathbb{R}^3$ .

Para finalizar esta seção, apresentaremos a generalização do *operador de Laplace*. Warnick [13] e [14] modifica as definições já existentes, e apresenta a generalização do *operador laplaciano* como sendo

$$\nabla^2 \alpha = (-1)^{n(p+1)} [(-1)^n \star d\tilde{\star}d + d\tilde{\star}d\star] \alpha \quad (\star)$$

onde  $\alpha$  é uma  $p$ -forma. Outras generalizações podem encontradas em Warner [2] e Feres [6].

Note que para uma métrica constante, a equação  $(\star)$  é conduzida a

$$\nabla^2 (\omega dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}) = g^{ij} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^i \partial x^j} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}.$$

Por sua vez, a expressão anterior reduz-se à forma canônica do *laplaciano* se a métrica é dada por  $g^{ij} = \delta_{ij}$ .

## 3.2 As formas de Green para o campo elétrico

No que segue, assumiremos que nossos campos são monocromáticos e periódicos no tempo. Ao invés de escrevermos explicitamente a dependência temporal como uma função trigonométrica, por motivos de praticidade, escreveremo-la como uma exponencial complexa  $e^{-i\omega t}$ . Com estas hipóteses, as equações de Maxwell são:

$$dE = i\omega B, \quad (3.14)$$

$$dH = -i\omega D + J, \quad (3.15)$$

$$dD = \rho, \quad (3.16)$$

$$dB = 0. \quad (3.17)$$

Aplicando o operador  $\star_h d\tilde{\star}_h$  na expressão da lei de Faraday e utilizando a lei de Ampère, temos:

$$\star_h d\tilde{\star}_h(dE) = i\omega \star_h d\tilde{\star}_h B = i\omega \star_h (-i\omega D + J).$$

Utilizando a relação constitutiva entre o campo e o deslocamento elétrico, podemos isolar a densidade de corrente, de forma que obtemos

$$(-\star_h d\tilde{\star}_h d + \omega^2 \star_h \star_\epsilon)E = -i\omega \star_h J \quad (3.18)$$

onde aqui calculamos tanto os campos como os operadores estrela magnético e elétrico no mesmo ponto.

A dupla 1-forma de *Green* para este sistema de *Equações Diferenciais Parciais* deverá obedecer a mesma equação, mas com o termo  $i\omega J$  trocado por uma *função delta de Dirac* na fonte, *i.e.*:

$$(-\star_h d\tilde{\star}_h d + \omega^2 \star_h \star_\epsilon)G(r_1, r_2) = -\star_h \delta(r_1 - r_2)I \quad (3.19)$$

onde  $I$  é a  $2 \otimes 1$ -forma  $dy_1 \wedge dz_1 \otimes dx_2 + dz_1 \wedge dx_1 \otimes dy_2 + dx_1 \wedge dy_1 \otimes dz_2$ .

Note que os operadores agem nas coordenadas  $r_1$ . Em coordenadas retangulares, a forma de Green  $G$  é expressa por:

$$\begin{aligned} G(r_1, r_2) = & G_{11}dx_1 \otimes dx_2 + G_{12}dx_1 \otimes dy_2 + G_{13}dx_1 \otimes dz_2 + \\ & + G_{21}dy_1 \otimes dx_2 + G_{22}dy_1 \otimes dy_2 + G_{23}dy_1 \otimes dz_2 + \\ & + G_{31}dz_1 \otimes dx_2 + G_{32}dz_1 \otimes dy_2 + G_{33}dx_1 \otimes dz_2 \end{aligned} \quad (3.20)$$

onde os coeficientes  $G_{ij}$  são funções de  $r_1$  e  $r_2$ .

Para um meio isotrópico, os tensores de permissividade e permeabilidade nada mais são que  $\varepsilon I$  e  $\mu I$ , respectivamente, onde  $I$  é a matriz identidade. Assim,

$$\star_\varepsilon = \varepsilon \star \implies \tilde{\star}_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} \star$$

e

$$\star_h = \mu \star \implies \tilde{\star}_h = \frac{1}{\mu} \star$$

e a definição de  $G$  torna-se:

$$\left(-\frac{1}{\mu} \star d \frac{1}{\mu} \star d + \frac{\omega^2 \varepsilon}{\mu}\right) G(r_1, r_2) = -\frac{1}{\mu} \delta(r_1 - r_2) I \quad (3.21)$$

onde  $I = dx_1 \otimes dx_2 + dy_1 \otimes dy_2 + dz_1 \otimes dz_2$

Em [13] e [14], Warnick chama de transposta formal de  $G$  a função  $\tilde{G}$ , definida como sendo a dupla  $1 \otimes 1$ -forma satisfazendo:

$$(-\tilde{\star}_h d \star_h d + \omega^2 \tilde{\star}_h \tilde{\star}_\varepsilon) \tilde{G}(r_1, r_2) = -\tilde{\star}_h \delta(r_1 - r_2) I. \quad (3.22)$$

Definamos agora dois novos operadores,  $L$  e  $\tilde{L}$ , dados por

$$L = -\star_h d \tilde{\star}_h d + \omega^2 \star_h \star_\varepsilon \quad (3.23)$$

$$\tilde{L} = -\tilde{\star}_h d \star_h d + \omega^2 \tilde{\star}_h \tilde{\star}_\varepsilon. \quad (3.24)$$

Ainda segundo Warnick [14], os operadores acima escritos se relacionam da seguinte maneira, de forma a obtermos a expressão do campo elétrico em função de  $\tilde{G}$ ,

$$E_1 \wedge (\tilde{\star}_h L E_2) - E_2 \wedge (\star_h \tilde{L} E_1) = dP \quad (3.25)$$

onde  $E_1$  e  $E_2$  são campos arbitrários.

Aplicando o operador  $d$  à expressão  $E_1 \wedge \tilde{\star}_h d E_2 + \star_h d E_1 \wedge E_2$  e utilizando-se a Eq. (1.32), concluímos que

$$d(E_1 \wedge \tilde{\star}_h dE_2 + \star_h dE_1 \wedge E_2) = d \star_h dE_1 \wedge E_2 - E_1 \wedge d\tilde{\star}_h dE_2. \quad (3.26)$$

A partir da identidade anterior e a definição dos operadores  $L$  e  $\tilde{L}$ , obtemos:

$$\begin{aligned} dP &= d(E_1 \wedge \tilde{\star}_h dE_2 + \star_h dE_1 \wedge E_2) \\ &\Downarrow \\ P &= E_1 \wedge \tilde{\star}_h dE_2 + \star_h dE_1 \wedge E_2. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Utilizando o *Teorema de Stokes*, e integrando a Eq. (3.25) sobre um volume  $V_1$ , obteremos uma generalização do *Teorema de Green* para os operadores  $L$  e  $\tilde{L}$ , *i.e.*,

$$\int_{V_1} E_1 \wedge (\tilde{\star}_h L E_2) - \int_{V_1} E_2 \wedge (\star_h \tilde{L} E_1) = \int_{\partial V_1} P. \quad (3.28)$$

Se definirmos um produto interno como sendo

$$\langle E_1, E_2 \rangle = \int_V E_1 \wedge \tilde{\star}_h E_2 \quad (3.29)$$

então a Eq. (3.28) mostra que  $\tilde{L}$  é a transposta de  $L$  com relação ao produto interno acima definido.

Se o termo de superfície da Eq. (3.28) anula-se, então esta equação torna-se a definição do operador transposto com respeito ao produto interno dado na Eq. (3.29).

Formalmente,  $L$  e  $\tilde{L}$  podem ter diferentes domínios, os espaços de funções que elas agem pode, por exemplo, satisfazer condições de contorno distintas.

Trocando-se agora  $E(r_1)$  com  $\tilde{G}(r_1, r_2)$  na Eq. (3.28) e utilizando a Eq. (3.22), resulta que

$$E(r_2) = i\omega \int_{V_1} \tilde{G}(r_1, r_2) \wedge J(r_1) + \int_{\partial V_1} [\tilde{G}(r_1, r_2) \wedge \tilde{\star}_h dE(r_1) + \star_h d\tilde{G}(r_1, r_2) \wedge E(r_1)] \quad (3.30)$$

Esta equação representa o princípio de *Huygens* para um meio anisotrópico e não-homogêneo.

### 3.3 Condições de contorno

Nesta seção determinaremos as condições de contorno para os campos  $E_1$ ,  $E_2$  e para as formas de Green. Analisaremos os casos em que o membro direito da Eq. (3.28) se anula. Daqui para frente, consideraremos que a diádica  $\tilde{G}(r_1, r_2)$  como função de  $r_1$  satisfaz as mesmas condições de contorno que o campo  $E_1(r_1)$ , ao passo que a função  $G(r_1, r_2)$  satisfaz as

mesmas condições de contorno que  $E_2(r_1)$ . Falando de uma maneira mais simples, fixado cada ponto  $r_2 = r$ , as condições de contorno de  $\tilde{G}(r_1, r)$  e  $G(r_1, r)$  são as mesmas que  $E_1$  e  $E_2$ , respectivamente.

Supondo que o termo de superfície da Eq. (3.28) seja nulo, e substituindo  $\tilde{G}(r_1, r_2)$  no lugar de  $E_1(r_1)$  e  $G(r_1, r_3)$  em  $E_2(r_2)$ , temos:

$$\begin{aligned} \int_{V_1} \tilde{G}(r_1, r_2) \wedge (\tilde{\star}_h L G(r_1, r_3)) - \int_{V_1} G(r_1, r_3) \wedge (\star_h \tilde{L} \tilde{G}(r_1, r_2)) &= 0 \\ \int_{V_1} \tilde{G}(r_1, r_2) \wedge (-\delta(r_1 - r_3)I) - \int_{V_1} G(r_1, r_3) \wedge (-\delta(r_1 - r_2)I) &= 0 \\ \Downarrow & \\ \tilde{G}(r_1, r_2) - G(r_2, r_3) &= 0 \\ \Updownarrow & \\ \tilde{G}(r_3, r_2) &= G(r_2, r_3). \end{aligned} \tag{3.31}$$

Então, o campo elétrico dado pela Eq. (3.30) satisfará as mesmas condições de contorno que  $\tilde{G}(r_1, r_2)$  como função de  $r_2$ . Todavia, em virtude da Eq. (3.31), o mesmo campo também terá as condições de contorno que  $G(r_1, r_2)$ , considerando-se a dependência de  $r_1$ .

Condições de contorno para as quais as contribuições de superfície se anulam incluem *radiação*, *Neumann* e *Dirichlet*.

Suponhamos que os nossos campos tenham comportamento assintótico

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r [dE - ikdr \wedge E] = 0, \tag{3.32}$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r (\star_h dr) \wedge E_2 = 0, \tag{3.33}$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r |E| \leq C. \tag{3.34}$$

onde  $C$  é uma constante positiva e  $k$  é uma função limitada de  $r$ .

Seja  $V$  uma esfera com raio  $r$ . A integral de superfície Eq. (3.28) torna-se:

$$\int_{\partial V} P = \int_{\partial V} [E_1 \wedge (ik\tilde{\star}_h dr \wedge E_2) + \star_h dE_1 \wedge E_2]. \tag{3.35}$$

Desde que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r A = 0 \Rightarrow \lim_{r \rightarrow \infty} r \star A = 0$$

onde a função  $A$  e o operador estrela são limitados, podemos rearranjar os termos do integrando da Eq. (3.34) para chegarmos a

$$\int_{\partial V} P = \int_{\partial V} \star_h[-ikdr \wedge E_1 + dE_1] \wedge E_2. \quad (3.36)$$

Decorre então, das hipóteses que fizemos acerca do comportamento assintótico dos campos, que a integral de superfície acima é nula.

### 3.4 Simetrias e condições para os operadores $L$ e $\tilde{L}$ serem auto-adjuntos

Sejam  $E$  um campo e  $J$  uma fonte, ambos arbitrários. Warnick [13] e [14] define a reação do campo e da fonte como sendo:

$$\langle E, J \rangle_R = \int_V E \wedge J \quad (3.37)$$

onde  $E$  é uma 1-forma e  $J$  é uma 2-forma.

Se supusermos que  $\tilde{\star}_h = \star_h$  e  $\tilde{\star}_\varepsilon = \star_\varepsilon$ , e utilizando-se as Eqs. (3.28) e (3.29), teremos:

$$\int_{V_1} E_1 \wedge (\star_h L E_2) - \int_{V_1} E_2 \wedge (\star_h L E_1) = \int_{\partial V_1} E_1 \wedge \star_h dE_2 + \star_h dE_1 \wedge E_2.$$

Utilizando-se as definições dos operadores  $L$  e  $\tilde{L}$ , as Eqs. (3.14) e (3.18) e ainda invocando o fato que  $\star_h B = H$ , temos:

$$\int_{V_1} E_2 \wedge J_1 - \int_{V_1} E_1 \wedge J_2 = \int_{\partial V_1} E_1 \wedge H_2 + H_1 \wedge E_2.$$

Finalmente, pela definição de reação do campo à fonte, a equação acima pode ser reescrita como sendo

$$\langle E_2, J_1 \rangle_R - \langle E_1, J_2 \rangle_R = \int_{\partial V_1} E_1 \wedge H_2 + H_1 \wedge E_2. \quad (3.38)$$

A equação acima nada mais é que o *Teorema da Reciprocidade de Lorentz* (ver Apêndice).

Se as nossas ondas são esféricas, o integrando do segundo termo da Eq. (3.38) se anula para pontos distantes da origem (dito de outro modo, o integrando tende a zero quando  $r \rightarrow \infty$ ), e então, ela reduz-se então a definição de reciprocidade, ou seja:

$$\langle E_2, J_1 \rangle_R = \langle E_1, J_2 \rangle_R. \quad (3.39)$$

Sendo assim, redescobrimos que um meio é recíproco se os operadores estrela elétrico e magnético são simétricos e os campos satisfazem condições de contorno tais que a contribuição de superfície da Eq. (3.39) é nula.

Se utilizarmos novamente a Eq. (3.19), da definição de reciprocidade, podemos concluir que:

$$\int_{V_1} E_1 \wedge (\star_h L E_2) = \int_{V_1} E_2 \wedge (\star_h L E_1). \quad (3.40)$$

A equação anterior mostra-nos que o operador  $L$  é simétrico com respeito à nossa definição de produto interno dada pela Eq. (3.29).

Trocando-se  $E_1$  com  $G(r_1, r_2)$  e  $E_2$  com  $G(r_1, r_3)$  na Eq. (3.40), obtemos

$$\int_{V_1} G(r_1, r_2) \wedge (\star_h L G(r_1, r_3)) = \int_{V_1} G(r_1, r_3) \wedge (\star_h L G(r_1, r_2)).$$

Levando-se em conta o resultado da Eq. (3.40), concluimos que

$$G(r_3, r_2) = G(r_2, r_3) \quad (3.41)$$

para um meio com tensores permissividade e permeabilidade simétricos.

A energia fornecida para o campo  $E$  pela fonte  $J$  é dada por

$$\langle E, J \rangle_E = \int_V E^* \wedge J \quad (3.42)$$

onde, nesta equação, o símbolo superior  $*$  denota o complexo conjugado.

Em [13] e [14], Warnick afirma que modificando a Eq. (3.28), e fazendo-se as hipóteses que  $\star_\epsilon = \tilde{\star}_\epsilon^*$  e  $\star_h = \tilde{\star}_h^*$ , então

$$\langle E_1, J_2 \rangle_E + \langle E_2, J_1 \rangle_E^* = \int_{\partial V} (H_1^* \wedge E_2 - E_1^* \wedge H_2). \quad (3.43)$$

Novamente aqui o símbolo superior  $*$  indica a conjugação dos complexos e, para os operadores estrelas, eles significam que conjugamos os coeficientes dos tensores de permissividade e permeabilidade nas respectivas definições dos operadores estrela elétrico e magnético.

Para uma fonte  $J$  com campo associado  $E$ , e considerando, na Eq. (3.42),  $J_1 = J_2 = J$  e  $E_1 = E_2 = E$ , obtemos por resultado:

$$Re \langle E, J \rangle_E = -Re \int_{\partial V} E \wedge H^* \quad (3.44)$$

onde  $Re$  significa parte real.

Esta equação representa o balanço entre a energia conferida ao campo pela fonte  $J$  e a potência através da fronteira da região  $V$ .

Se além das hipóteses de condições de contorno acrescentarmos a suposição que o termo de superfície da Eq. (3.43) se anula, teremos concluído que:

$$\langle E_1, J_2 \rangle_E = - \langle E_2, J_1 \rangle_E^* . \quad (3.45)$$

Condições de contorno como as expressas pela equação acima podem ser tomadas como definição de *baixa perda*, da mesma maneira que  $\langle E_2, J_1 \rangle_R = \langle E_1, J_2 \rangle_R$  é definição de reciprocidade.

O campo elétrico  $E$  associado a fonte  $J$  não é univocamente definido pela Eq. (3.18). Para  $J = J_1 = J_2$ ,  $E_1 = E$  e  $E_2 = E + E_0$ , onde o campo  $E_0$  satisfaz a equação supramencionada, a Eq. (3.45) nos conduz ao fato que  $2\text{Re} \langle E, J \rangle = - \langle E_0, J \rangle^*$ . Todavia, na Eq. (3.45), se  $E_1 = E_2 = E$ , chegamos a  $\text{Re} \langle E, J \rangle = 0$ , e então, combinando estes dois resultados, decorre que  $\langle E_0, J \rangle = 0$ .

Utilizando agora na Eq. (3.45) a definição do operador  $L$ , obtemos

$$\int_V E_1^* \wedge (\tilde{\star}_h L E_2) = \left[ \int_V E_2^* (\tilde{\star}_h L E_1) \right]^* . \quad (3.46)$$

Daí, conclui-se que  $L$  é auto-adjunto com respeito ao produto interno

$$\langle E_1, E_2 \rangle = \int_V E_1^* \wedge \tilde{\star}_h E_2 . \quad (3.47)$$

Substituindo  $G(r_1, r_2)$  em lugar de  $E_1$  e  $G(r_1, r_3)$  e vez de  $E_2$  na Eq. (3.45), obtemos uma nova relação entre as funções de Green, a saber

$$G^*(r_3, r_2) = G(r_2, r_3) . \quad (3.48)$$

Assim, a forma de Green para um meio com maior perda é hermitiana se ela satisfaz condições de contorno tais que a contribuição do termo de fronteira ( ou de área ) se anula na Eq. (3.42).

### 3.5 Formas de Green para a equação de Helmholtz anisotrópica

Consideremos novamente a Eq. (3.18). Adicionemos a ambos os membros o termo  $d\tilde{\star}_h d\star_h E$ :

$$(-\star_h d\tilde{\star}_h d + d\tilde{\star}_h d\star_h + \omega^2 \star_h \star_\epsilon)E = -i\omega \star_h J + d\tilde{\star}_h d\star_h E . \quad (3.49)$$

Definindo o operador de onda  $\nabla_h^2$  como sendo as duas primeiras parcelas entre parênteses do lado esquerdo da equação anterior podemos reescrevê-la como:

$$(\nabla_h^2 + \omega^2 \star_h \star_\varepsilon)E = -i\omega \star_h J + d\tilde{\star}_h d \star_h E. \quad (3.50)$$

Para tensores de permeabilidade constantes, o operador  $\nabla_h^2$  é diagonal. A Eq. (3.50) é chamada *equação de Helmholtz anisotrópica*.

A correspondente  $1 \otimes 1$ -forma de Green satisfaz

$$(\nabla_h^2 + \omega^2 \star_h \star_\varepsilon)g(r_1, r_2) = -\delta(r_1 - r_2)I \quad (3.51)$$

onde os operadores agem nas coordenadas com índice 1 e  $I$  é a  $1 \otimes 1$ -forma.

No espaço livre,  $g = \mu_0^2 g_0 I$ , onde  $g_0 = \frac{e^{ik_0 r}}{4\pi r}$  é a função de Green usual.

Analogamente ao que fizemos para obter  $\tilde{G}$ , definimos a transposta formal de  $g$  como sendo a  $2 \otimes 1$  forma de Green que satisfaz

$$(\nabla_h^2 + \omega^2 \tilde{\star}_\varepsilon \tilde{\star}_h)\tilde{g}(r_1, r_2) = -\delta(r_1 - r_2)I \quad (3.52)$$

onde  $I$  agora é uma  $2 \otimes 1$  forma.

Continuando as analogias, considere os operadores  $M$  e  $\tilde{M}$ :

$$M = \nabla_h^2 + \omega^2 \star_h \star_\varepsilon, \quad (3.53)$$

$$\tilde{M} = \nabla_h^2 + \omega^2 \tilde{\star}_\varepsilon \tilde{\star}_h. \quad (3.54)$$

Com estes operadores, procuraremos obter relações entre eles do tipo

$$C_1 \wedge M E_2 - E_2 \wedge \tilde{M} C_1 = dQ \quad (3.55)$$

onde  $E_2$  é uma 1-forma arbitrária, bem como também o é a 2-forma  $C_1$ .

Podemos expressar  $Q$  como sendo

$$Q = \tilde{\star}_h C_1 \wedge \tilde{\star}_h d E_2 + \star_h d \tilde{\star}_h C_1 \wedge E_2 + C_1 \wedge \tilde{\star}_h d \star_h E_2 - \star_h d C_1 \wedge \star_h E_2. \quad (3.56)$$

Integrando a Eq. (3.55) sobre um volume  $V$  e aplicando o Teorema 16, chegamos a:

$$\int_V C_1 \wedge M E_2 - \int_V E_2 \wedge \tilde{M} C_1 = \int_{\partial V} Q. \quad (3.57)$$

Trocando-se  $C_1(r)$  por  $\tilde{g}(r_1, r_2)$  e utilizando as Eqs. (3.50) e (3.52), temos

$$E(r_2) = i\omega \int_{V_1} \tilde{g}(r_1, r_2) \wedge \star_h J(r_1) - \int_{V_1} \tilde{g}(r_1, r_2) \wedge d\tilde{\star}_h d \star_h E(r_1) + \int_{\partial V_1} R \quad (3.58)$$

onde o termo  $R$  é dada pela expressão

$$R = \tilde{\star}_h \tilde{g}(r_1, r_2) \wedge \tilde{\star}_h dE(r_1) + \star_h d\tilde{\star}_h \tilde{g}(r_1, r_2) \wedge E(r_1) + \tilde{g}(r_1, r_2) \wedge \tilde{\star}_h d \star_h E(r_1) - \star_h d\tilde{g}(r_1, r_2) \wedge \star_h E(r_1). \quad (3.59)$$

Consideremos o segundo termo da Eq. (3.58). Notemos que ele pode ser reescrito como sendo

$$\tilde{g}(r_1, r_2) \wedge d\tilde{\star}_h d \star_h E(r_1) = d[\tilde{g}(r_1, r_2) \wedge \tilde{\star}_h d \star_h E(r_1)] - d\tilde{g}(r_1, r_2) \wedge \tilde{\star}_h d \star_h E(r_1), \quad (\alpha)$$

por outro lado

$$d\tilde{g}(r_1, r_2) \tilde{\star}_h d \star_h E(r_1) = \star_h d\tilde{g}(r_1, r_2) \wedge d \star_h E(r_1) = d \star_h E(r_1) \wedge \star_h d\tilde{g}(r_1, r_2) \quad (\beta)$$

de onde chegamos a:

$$d \star_h E(r_1) \wedge \star_h d\tilde{g}(r_1, r_2) = d[\star_h E(r_1) \wedge \star_h d\tilde{g}(r_1, r_2)] - \star_h E(r_1) \wedge d \star_h d\tilde{g}(r_1, r_2). \quad (\gamma)$$

Inserindo  $(\gamma)$  em  $(\beta)$ , e em seguida, substituindo o resultado em  $(\alpha)$ , obtemos

$$\begin{aligned} \tilde{g}(r_1, r_2) \wedge d\tilde{\star}_h d \star_h E(r_1) &= d[\tilde{g}(r_1, r_2) \wedge \tilde{\star}_h d \star_h E(r_1)] - \\ &- d[\star_h E(r_1) \wedge d\tilde{g}(r_1, r_2)] + \star_h E(r_1) \wedge d \star_h d\tilde{g}(r_1, r_2). \end{aligned}$$

Integrando a expressão acima e invocando o Teorema de Stokes, obtemos:

$$\begin{aligned} \int_{V_1} \tilde{g}(r_1, r_2) \wedge d\tilde{\star}_h d \star_h E(r_1) &= \int_{\partial V_1} \tilde{g}(r_1, r_2) \wedge \tilde{\star}_h d \star_h E(r_1) - \\ &- \int_{\partial V_1} \star_h E(r_1) \wedge \star_h d\tilde{g}(r_1, r_2) + \int_{V_1} \star_h E(r_1) \wedge d \star_h d\tilde{g}(r_1, r_2). \end{aligned}$$

Substituindo esta expressão na Eq. (3.58) concluímos que

$$E(r_2) = i\omega \int_{V_1} \tilde{g}(r_1, r_2) \wedge \star_h J(r_1) - \int_{V_1} \tilde{\star}_h d \star_h d\tilde{g}(r_1, r_2) \wedge E(r_1) + \int_{\partial V_1} R_1 \quad (3.60)$$

onde:

$$R_1 = \tilde{\star}_h \tilde{g}(r_1, r_2) \wedge \tilde{\star}_h dE(r_1) + \star_h d\tilde{\star}_h \tilde{g}(r_1, r_2) \wedge E(r_1). \quad (3.61)$$

A equação integral resultante para o campo elétrico em termos das fontes, valores de contorno e a forma de Green é:

$$E = i\omega \int_{V_1} \tilde{g} \wedge \star_h J - \int_{V_1} \tilde{\star}_h d \star_h d\tilde{g} \wedge E + \int_{\partial V} (\tilde{\star}_h \tilde{g} \wedge \tilde{\star}_h dE + \star_h d\tilde{\star}_h \tilde{g} \wedge E) \quad (3.62)$$

que é válida para meios arbitrariamente anisotrópicos e não-homogêneos.

Se as condições de contorno que  $\tilde{g}$  e  $E$  satisfazem são tais que a integral de superfície pode ser desprezada, então temos:

$$E(r_2) = i\omega \int_{V_1} \tilde{g}(r_1, r_2) \wedge \star_h J(r_1) - \int_{V_1} \tilde{\star}_h d \star_h d\tilde{g}(r_1, r_2) \wedge E(r_1), \quad (3.63)$$

que é a *equação integral de Fredholm de segunda espécie*.

Consideremos agora a 2-forma  $\star_h d\tilde{g} \wedge \star_h E$ . Aplicando o operador  $d$ , obtemos:

$$d \star_h d\tilde{g} \wedge \star_h E = (d \star_h d\tilde{g}) \wedge \star_h E + \star_h d\tilde{g} \wedge d \star_h E.$$

Dos Teoremas 7 e 17 decorre que a equação acima pode ser reescrita como sendo:

$$\int_V \tilde{\star}_h d \star_h d\tilde{g} \wedge E = - \int_V \star_h d\tilde{g} \wedge d \star_h E + \int_{\partial V} \star_h d\tilde{g} \wedge \star_h E. \quad (3.64)$$

Inserindo este resultado na Eq. (3.62), podemos escrever:

$$E = i\omega \int_V \tilde{\star}_h \tilde{g} \wedge J + \int_V \star_h d\tilde{g} \wedge d \star_h E + \int_{\partial V} [\tilde{\star}_h \tilde{g} \wedge \tilde{h} dE + \star_h d\tilde{h} \tilde{g} \wedge E - (\star_h d\tilde{g} \wedge \star_h E)]. \quad (3.65)$$

No espaço livre, a *Lei de Gauss* nos fornece  $d \star_h E = \mu_0 \rho / \varepsilon_0$ . Então, para uma região que não contenha fontes, a integral de volume se anula e esta expressão se torna a *fórmula de Stratton-Chu* (conf. Warnick [13] e [14]).

### 3.5.1 Relações integrais entre $G$ e $\tilde{g}$

Substituindo-se  $\tilde{g}(r_1, r_2)$  por  $C_1$  e  $G(r_1, r_3)$  por  $E_2$  na Eq. (3.57) e procedendo de maneira análoga à derivação da Eq. (3.63), chegamos a

$$G(r_1, r_2) = \tilde{\star}_h \tilde{g}(r_2, r_1) - \int_{V_3} \tilde{\star}_h d \star_h d\tilde{g}(r_3, r_1) \wedge G(r_3, r_2) \quad (3.66)$$

onde a derivação age nas coordenadas com sub-índice 3 e os termos de superfície foram desprezados.

Esta expressão generaliza, para um meio anisotrópico, as relações entre a função escalar de Green e forma de Green para um meio homogêneo isotrópico.

Repetindo a substituição na Eq. (3.66), obtemos uma solução em série de integrais para  $G$ , dada por:

$$G = \tilde{\star}_h \tilde{g} - \int \tilde{\star}_h d \star_h d \tilde{g} \wedge \tilde{g} + \int \int \tilde{\star}_h d \star_h d \tilde{g} \wedge \tilde{\star}_h d \star_h d \tilde{g} \wedge \tilde{\star}_h \tilde{g} - \dots \quad (3.67)$$

Retiramos as coordenadas, na equação acima, por comodidade, para não carregar muito a notação.

### 3.5.2 Tensores de permeabilidade simétricos

Para um meio com tensores de permeabilidade simétricos, podemos simplificar as Eqs. (3.63) e (3.66) absorvendo o operador estrela na definição de  $\tilde{g}$ .

De fato, Warnick [13] e [14] afirma que para tensores de permeabilidade simétricos, o operador  $\star_h$  é seu próprio inverso. Aliás, não só o operador estrela magnético tem esta propriedade, mas também o estrela elétrico. Nestas condições, Thirring [16] garante que:

$$\star_h \nabla_h^2 = -\nabla_h^2 \star_h .$$

O sinal negativo é esperado. De fato, o operador estrela do lado direito do laplaciano quer dizer que o grau da forma a ser aplicado no segundo membro da equação anterior é diferente do grau da forma a ser aplicado no lado esquerdo.

Desta forma, absorvendo o operador  $\star_h$  em  $\tilde{g}$ , e levando-se em conta as duas observações precedentes, podemos obter novas equações para  $g$  e  $\tilde{g}$ , a saber:

$$(\nabla_h^2 + \omega^2 \star_h \star_\varepsilon)g = -\star_h \delta I \quad (3.68)$$

e

$$(\nabla_h^2 + \omega^2 \star_h \tilde{\star}_\varepsilon)\tilde{g} = -\star_h \delta I \quad (3.69)$$

onde ambas,  $g$  e  $\tilde{g}$ , são  $1 \otimes 1$ -formas e  $I$  é a  $2 \otimes 1$ -forma unitária.

Agora podemos obter uma nova identidade, utilizando um raciocínio análogo ao da Eq. (3.55), *i.e.*

$$E_1 \wedge \star_h M' E_2 - E_2 \wedge \star_h \tilde{M}' E_1 = dQ' \quad (3.70)$$

com isso, a expressão (3.63) resulta em

$$E(r_2) = i\omega \int_{V_1} \tilde{g}(r_1, r_2) \wedge J(r_1) - \int_{V_1} \star_h d \star_h d \star_h \tilde{g}(r_1, r_2) \wedge E(r_1). \quad (3.71)$$

A expressão integral (3.66) pode ser escrita como

$$\tilde{G}(r_1, r_2) = \tilde{g}(r_1, r_2) - \int_{V_3} \star_h d \star_h d \star_h \tilde{g}(r_3, r_2) \wedge \tilde{G}(r_1, r_3). \quad (3.72)$$

### 3.5.3 Correspondência com resultados de espaços livres

A Eq. (3.62) é similar, na forma, ao resultado padrão para o campo elétrico utilizando, a função escalar de Green para o espaço livre

$$E = i\omega\mu_0 \int_V g_0 I \wedge J - \frac{1}{i\omega\varepsilon} \int_V d \star d \star g_0 I \wedge J, \quad (3.73)$$

onde  $g_0$  é a função de Green escalar usual. Na expressão acima, negligenciamos os termos de fronteira.

Contudo, a relação entre (3.62) e (3.73) é mais simples.

De fato, para um meio isotrópico e homogêneo, a definição da *forma de Green-Helmholtz* pode ser simplificada multiplicando-se o lado esquerdo da Eq. (3.50) por  $\mu_0^2$ , e então, ela se torna

$$(\nabla^2 + k_0^2)g(r_1, r_2) = -\delta(r_1 - r_2)I \quad (3.74)$$

onde  $I$  é a  $1 \otimes 1$  forma unitária e  $k_0^2 = \omega^2\varepsilon_0\mu_0$ .

Com tais definições, a forma de Green  $g$  é igual a  $g_0 I$ .

Desta maneira, o campo elétrico dado pela Eq. (3.62) pode ser escrito na forma:

$$E = i\omega\mu_0 \int_V g \wedge J - \int_V \star d \star d \star g \wedge E + \int_{\partial V} [g \wedge \star dE + \star dg \wedge E] \quad (3.75)$$

onde o operador estrela nas expressões acima é o canônico.

Integrando o segundo termo da equação precedente por partes e lembrando a relação

$$i\omega\varepsilon d \star E = dJ$$

chegamos a:

$$E = i\omega\mu_0 \int_V g \wedge J + \frac{1}{i\omega\varepsilon} \int_V (\star d \star g) dJ + \int_{\partial V} [g \wedge \star dE + \star dg \wedge E - (\star d \star g) \star E]. \quad (3.76)$$

Integrando o segundo termo por partes e invocando a Lei de Ampère, temos:

$$E = i\omega\mu_0 \int_V g \wedge J - \frac{1}{i\omega\varepsilon} \int_V d \star d \star g \wedge J + \int_{\partial V} [g \wedge \star dE + \star dg \wedge E + \frac{1}{i\omega\varepsilon} (\star d \star g) dH]. \quad (3.77)$$

No vácuo, a integração no volume da expressão acima pode ser reescrita como

$$i\omega\mu_0 \int_V g \wedge J - \frac{1}{i\omega\varepsilon} \int_V d \star d \star g \wedge J = i\omega\mu_0 \left( \int_V g \wedge J + \frac{1}{\omega^2\varepsilon_0\mu_0} d \star d \star g \wedge J \right)$$

ou ainda, simplesmente como

$$i\omega\mu_0 \left[ \int_V \left( 1 + \frac{1}{k_0^2} d \star d \star \right) g \wedge J \right]$$

donde a forma de Green para o campo elétrico pode ser escrita como

$$G_0 = \left( 1 + \frac{1}{k_0^2} d \star d \star \right) g \quad (3.78)$$

que é o resultado usual para um meio isotrópico e homogêneo.

### 3.6 Meios eletricamente não-homogêneos

A representação da forma de Green ( Eq.(3.66) ), bem como a equação integral (3.62), fazem a conexão entre o espalhamento de um meio isotrópico, magneticamente homogêneo e eletricamente não-homogêneo, com o problema de espalhamento elétrico para o mesmo meio.

A definição dada pela Eq. (3.51) se reduz à determinação da função de Green escalar  $g_s$  para a equação de Helmholtz

$$[\nabla^2 + k^2]g_s(r_1, r_2) = -\delta(r_1 - r_2) \quad (3.79)$$

onde  $k^2 = k^2(r) = \omega^2\mu\varepsilon(r)$ .

A função de Green escalar pode ser calculada analiticamente para certos tipos de meios não-homogêneos. Em [13], Warnick cita dois exemplos de meios onde podemos calculá-la analiticamente: quando  $k^2(r) = k_0^2(1 + az)$  e  $k^2(r) = k_0^2(1 + ar^2)$ .

Utilizando os resultados da Seção 3.5, e levando-se em conta que estamos considerando um meio magneticamente homogêneo, podemos expressar o campo elétrico como

$$\begin{aligned} E &= i\omega\mu_0 \int_V g \wedge J - \int_V g \wedge \star d \star d \star E + \\ &+ \int_{\partial V} [g \wedge \star dE + \star dg \wedge E + (\star d \star g) \star E - \star g(\star d \star)E] \end{aligned} \quad (3.80)$$

onde  $g = g_s I$ , com  $I$  sendo a nossa velha conhecida  $1 \otimes 1$ -forma.

Novamente, integrando por partes o segundo termo do membro direito da equação acima, podemos escrever:

$$E = i\omega\mu_0 \int_V g \wedge J + \int_V (\star d \star g) d \star E + \int_{\partial V} [g \wedge \star dE + \star dg \wedge E - (\star d \star g) \star E]. \quad (3.81)$$

Pela Lei de Gauss e novamente integrando por partes, a expressão anterior pode ser reescrita como

$$E = i\omega\mu_0 \int_V g \wedge J' + \int_V (\star d \star g) \left( \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} \wedge \star E \right) + \int_{\partial V} [g \wedge \star dE + \star dg \wedge E - (\star d \star g) \star E + (\star g) \star \frac{\rho}{\varepsilon}] \quad (3.82)$$

onde  $J' = J - \star d \star \frac{\rho}{i\omega\mu_0\varepsilon}$ .

Warnick [14] afirma que os dois primeiros termos de superfície são nulos para condições de contorno de condução magnética ou elétrica. Supondo ser este o caso, ele afirma que o terceiro termo anula-se para um meio variando lentamente, pois  $d \star g = d \star E \simeq \frac{d}{\varepsilon}$  e a densidade de carga é nula na fronteira, e então, o quarto termo se anula totalmente nesta região.

Também o terceiro e quarto termos não contribuem para radiação, já que também a densidade de carga é nula no infinito ( ou, melhor dizendo, para pontos muito distantes do nosso referencial ).

Se os termos de superfície se anulam, obtemos a seguinte expressão integral para o campo elétrico:

$$E = i\omega\mu_0 \int_V g \wedge J' + \int_V (\star d \star g) \left( \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} \wedge \star E \right) \quad (3.83)$$

onde  $J' = J + \star d \star \frac{dJ}{k^2(r)}$ .

Se o comprimento de onda é muito menor que a escala espacial do meio, então o campo elétrico é dado aproximadamente pelo primeiro termo do segundo membro da Eq. (3.83).

O segundo termo da Eq. (3.83) nos fornece uma pequena correção para o campo total  $E$ . Segundo Warnick [14], o campo elétrico do segundo termo do lado direito da Eq. (3.83) pode ser calculado a partir da fonte  $J$ , através da inversão do operador integral. A solução em série para a equação integral pode convergir rapidamente.

A forma de Green para o espaço livre  $G_0$  não contém informações acerca da variação da permissividade do meio. Por isto, a Eq. (3.83) pode ser mais conveniente que os métodos usuais para dielétricos variando fortemente, admitindo uma solução exata para a função de Green escalar.

### 3.7 Meios homogêneos

Para meios homogêneos, a simetria espacial das componentes de  $g$  são funções invariantes por deslocamento:  $g_{ij}(r_1 - r_2)$ . Desta forma, a integral Eq. (3.66) torna-se uma convolução. Então, a transformada de Fourier da integral é o produto das transformadas de  $\tilde{\star}_h d \star_h d\tilde{g}$  e  $G$ .

As seguintes transformações podem ser utilizadas para obtermos representações de autovetores de  $\tilde{\star}_h d \star_h d\tilde{g}$ . Se  $f(r_1, r_2)$  e  $g(r_1, r_2)$  são, respectivamente,  $2 \otimes 1$ -formas e  $1 \otimes 1$ - formas, então

$$df(r_1, r_2) \longleftrightarrow ik^t f(k)$$

e

$$\tilde{\star}_h g(r_1, r_2) \longleftrightarrow \mu^t g(k)$$

onde  $\vec{k}$  é o vetor de onda e as derivadas agem nas coordenadas com índice 1, e o índice superior  $t$  denota a transposição de matrizes. Aliás, durante esta seção, as transformadas de Fourier de duplas formas diferenciáveis serão convenientemente representadas por matrizes.

A transformada de Fourier de  $\tilde{\star}_h d \star_h d\tilde{g}$  se torna  $-\frac{1}{\det\mu}\mu^t k k^t \tilde{g}$ . Como o produto exterior deste termo com  $G$  age no primeiro argumento antes do segundo, a matriz pode ser transposta para obtermos a transformada do produto. A transformada na variável espacial da Eq. (3.66) fica:

$$G = \tilde{g}^t \mu^{-1} + \frac{1}{\det\mu} \tilde{g}^t k k^t \mu G. \quad (3.84)$$

Resolvendo para  $G$ , obtemos

$$G = \left[ \mu \tilde{g}^{-t} - \frac{1}{\det\mu} \mu k k^t \mu \right]^{-1} \quad (3.85)$$

onde  $-t$  significa uma inversão seguida de transposição.

Analogamente, para a Eq. (3.52), a transformada de Fourier é:

$$\tilde{g} = \left[ \frac{1}{\det\mu} k^t \mu k I - \omega^2 \varepsilon^t \mu^{-t} \right]^{-1}. \quad (3.86)$$

Na expressão acima,  $I$  denota a matriz identidade. A Eq. (3.19) nos dá uma fórmula alternativa para  $G$

$$G = \left[ -\Gamma \mu^{-t} \Gamma - \omega^2 \varepsilon \right]^{-1}, \quad (3.87)$$

onde a matriz  $\Gamma$  é dada por

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & -k_z & k_y \\ k_z & 0 & -k_x \\ -k_y & k_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.88)$$

Utilizando as Eqs. (3.86) e (3.85), temos

$$G = \left[ \mu \frac{1}{\det \mu} (k^t \mu k I - \omega^2 \mu^{-1} \varepsilon) - \frac{1}{\det \mu} \mu k k^t \mu \right]^{-1}$$

que podemos colocar na forma:

$$G = \left[ -\frac{1}{\det \mu} \mu k k^t \mu + \frac{1}{\det \mu} (k^t \mu k) \mu - \omega^2 \varepsilon \right]^{-1}. \quad (3.89)$$

Os pólos de  $G$  na representação de vetores de onda representam soluções de onda plana para a Eq. (3.18), então

$$\det \left[ -\frac{1}{\det \mu} k k^t \mu + \frac{1}{\det \mu} (k^t \mu k) I - \omega^2 \mu^{-1} \varepsilon \right] = 0 \quad (3.90)$$

que é a *equação de Fresnel* para um meio homogêneo arbitrário.

A definição ( $\star$ ), no final da Seção (3.1), do operador de onda para um meio homogêneo resulta na identidade

$$-\frac{1}{\det \mu} k^t \mu k I = \mu^{-1} \Gamma \mu^{-t} \Gamma - \frac{1}{\det \mu} k k^t \mu, \quad (3.91)$$

na representação de vetor de onda. Esta expressão mostra explicitamente que o operador  $\nabla_h^2$  é diagonal para um tensor de permeabilidade constante qualquer.

A representação de vetor de onda da solução de séries para a função de Green dada pela Eq. (3.66) pode ser resumida guiada por outra representação para a forma de Green para o campo elétrico, dada pela Eq. (3.67). Com tal procedimento, a Eq. (3.84) pode ser reescrita como:

$$G = \tilde{g}^t \mu^{-1} + \frac{1}{\det \mu} \tilde{g}^t k k^t \mu \tilde{g}^t \mu^{-1} + \frac{1}{\det \mu} \tilde{g}^t k k^t \mu \frac{1}{\det \mu} \tilde{g} k k^t \mu \tilde{g}^t \mu^{-1} + \dots \quad (3.92)$$

Rearranjando a equação acima, podemos obter a série

$$G = \tilde{g}^t \mu^{-1} \frac{\tilde{g}^t k}{\det \mu} \underbrace{\left( 1 + \frac{1}{\det \mu} k^t \mu \tilde{g}^t k + \left( \frac{1}{\det \mu} k^t \mu \tilde{g}^t k \right)^2 + \dots \right)}_{\sum_{j=0}^{\infty} \left( \frac{1}{\det \mu} k^t \mu \tilde{g}^t k \right)^j} k^t \mu \tilde{g}^t \mu^{-1}.$$

Supondo que a série convirja, sua soma é dada por:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left( \frac{1}{\det \mu} k^t \mu \tilde{g}^t k \right)^j = \frac{1}{1 - \frac{1}{\det \mu} k^t \mu \tilde{g}^t k} \quad (\delta).$$

Assim, a Eq. (3.92) pode ser reescrita como

$$G = \tilde{g}^t \mu^{-1} + \frac{1}{\det \mu} \frac{\tilde{g}^t}{1 - \frac{1}{\det \mu} k^t \mu \tilde{g}^t k} k k^t \mu \tilde{g}^t \mu^{-1}. \quad (3.93)$$

No espaço livre, o termo  $\tilde{g}^t \sum_{j=0}^{\infty} \left( \frac{1}{\det \mu} k^t \mu \tilde{g}^t k \right)^j = \frac{\mu_0^2 I}{k_0^2}$ , e então, esta expressão no espaço livre se reduz, a menos do fator  $\mu_0$ , à Eq. (3.77) para a forma de Green do campo elétrico.

A série ( $\delta$ ) é singular para valores de  $k$  que representam ondas planas, e então

$$\frac{1}{\det \mu} k^t \mu \tilde{g}^t k = 1 \quad (3.94)$$

é equivalente à equação de *Fresnel* (3.90).

### 3.7.1 Soluções exatas para a forma de Green-Helmholtz

Se a matriz de permeabilidade é diagonalizável por uma rotação, então a transformada inversa de  $\tilde{g}(k)$  pode ser obtida numa forma fechada. Neste caso, o núcleo da equação integral para o campo elétrico dado na Eq. (3.62) e a forma integral da Eq. (3.66) são conhecidas exatamente. Da Eq. (3.86), obtemos:

$$\tilde{g}(r_1, r_2) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \left[ \frac{1}{\det \mu} (k^t \mu k) I - \omega^2 \varepsilon^t \mu^{-t} \right]^{-1} e^{i \vec{k} \cdot \vec{r}} d \vec{k} \quad (3.95)$$

onde  $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ . Por rotação através do sistema de coordenadas em que a matriz de permeabilidade é diagonalizável e fazendo uma mudança de variável adicional tal que  $k'^2 = k^t \mu k / (\det \mu)$ , podemos escrever

$$\tilde{g}(r_1, r_2) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \left[ k'^2 I - \omega^2 \varepsilon^t \mu^{-t} \right]^{-1} e^{i \vec{k}' \cdot \vec{r}} d \vec{k}' \quad (3.96)$$

onde  $\vec{r} = \sqrt{\det \mu} (x e_1 / \sqrt{\mu_1} + y e_2 / \sqrt{\mu_2} + z e_3 / \sqrt{\mu_3})$ . Aqui os elementos  $x$ ,  $y$  e  $z$  são os componentes do vetor  $\vec{r}$  e  $\mu_i$   $i=1,2,3$  são os autovalores da matriz  $\mu$ . Por conveniência, suporemos que tais autovalores são reais positivos.

Rotacionando  $k'$  de forma que ele esteja alinhado na direção do eixo  $z$ , temos

$$\tilde{g}(r_1, r_2) = \frac{\det \mu}{(2\pi)^3} \int k'^2 \sin \theta e^{i k' \tilde{r} \cos \theta} \left[ k'^2 I - \omega^2 \varepsilon^t \mu^{-t} \right]^{-1} dk' d\theta d\phi \quad (3.97)$$

onde  $\theta$  e  $\phi$  são ângulos associados com  $k'$ . Pela integração das partes angulares, temos

$$\tilde{g}(r_1, r_2) = \frac{\det \mu}{4i\pi^2 \tilde{r}} \int k' (e^{ik'\tilde{r}} - e^{-ik'\tilde{r}}) [k'^2 I - \omega^2 \varepsilon^t \mu^{-t}]^{-1} dk' \quad (3.98)$$

A integração restante em  $k'$  pode ser calculada a partir da raiz de  $\varepsilon^t \mu^{-t}$ .

A matriz  $\varepsilon^t \mu^{-t}$  geralmente não é diagonalizável, mas possui uma *decomposição de Jordan* na forma  $SJS^{-1}$  (consulte Lima [15]).

Considere um bloco de Jordan da matriz  $J$ , correspondente ao autovalor  $ae^{ib}$ , onde as constantes  $a$  e  $b$  são números positivos. Para este bloco, sua raiz é dada por

$$\begin{pmatrix} ae^{ib} & 1 & & & \\ & \cdot & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & 1 \\ & & & & ae^{ib} \end{pmatrix}^{\frac{1}{2}} = \pm \begin{pmatrix} \sqrt{ae^{i\frac{b}{2}}} & \frac{1}{2\sqrt{ae^{ib}}} & & & \\ & \cdot & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & \frac{1}{2\sqrt{ae^{i\frac{b}{2}}}} \\ & & & & \sqrt{ae^{i\frac{b}{2}}} \end{pmatrix} \quad (3.99)$$

o segundo membro da equação acima existe, pois por hipótese,  $\varepsilon$  e  $\mu$  têm posto de mesma dimensão, e ambos são completos; o sinal é tomado de modo que  $Re\{\pm\sqrt{ae^{i\frac{b}{2}}}\}$  seja positivo. Warnick [14] afirma que quando a matriz  $\varepsilon^t \mu^{-t}$  é diagonalizável, as outras raízes podem ser descartadas.

Procedendo da mesma maneira para cada bloco de  $J$ , podemos construir as matrizes  $J^{\frac{1}{2}}$ , e então

$$K = \omega S J^{\frac{1}{2}} S^{-1} \quad (3.100)$$

é uma raiz quadrada para o termo  $\omega^2 \varepsilon^t \mu^{-t}$ .

Com tudo isso exposto acima, a Eq. (3.98) torna-se:

$$\tilde{g}(r_1, r_2) = \frac{\det \mu}{4\pi^2 \tilde{r}} \int_0^\infty dk' \operatorname{sen}(k'\tilde{r}) [(k'I - K)^{-1} + (k'I + K)^{-1}]. \quad (3.101)$$

Alterando os limites de integração, a expressão precedente é dada por:

$$\tilde{g}(r_1, r_2) = \frac{\det \mu}{8i\pi^2 \tilde{r}} \int_{-\infty}^\infty e^{ik'\tilde{r}} [(k'I - K)^{-1} + (k'I + k)^{-1}] dk' \quad (3.102)$$

Como a parte real dos autovalores de  $K$  é positiva, se o segundo termo puder ser desprezado, como consequência teremos:

$$\tilde{g}(r_1, r_2) = \det \mu \frac{e^{iK\tilde{r}}}{4\pi \tilde{r}} \quad (3.103)$$

para a transposta da forma de Green-Helmholtz com condições de contorno de radiação. Tal fator pode ser visto como a generalização da função de Green para o espaço livre  $\frac{e^{ikr}}{4\pi r}$ .

A exponencial de matrizes da Eq. (3.103) pode ser calculada de maneira exata a partir da forma normal de Jordan de  $K$ ; então,  $\tilde{g}$  pode ser obtida explicitamente. Há três casos possíveis para a forma normal  $J$ , dependendo do número de autovalores unívocos.

Se há somente um único autovalor  $ae^{ib}$ , então  $J^{\frac{1}{2}}$  pode ser expresso por

$$J^{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} m & \frac{1}{2m} & \\ & m & \frac{1}{2m} \\ & & m \end{pmatrix} \quad (3.104)$$

onde  $m = \pm\sqrt{ae^{ib}}$ , com sinal convenientemente escolhido de modo que  $Re\ m > 0$ .

Como componentes, a transposta da forma de Green-Helmholtz é:

$$\tilde{g} = \det\mu \frac{e^{im\tilde{r}}}{4\pi\tilde{r}} S \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2m} & \frac{1}{8m^2} \\ & 1 & \frac{1}{2m} \\ & & 1 \end{pmatrix} S^{-1}. \quad (3.105)$$

Se  $\varepsilon^t\mu^{-t}$  tem dois autovalores distintos,  $a_1e^{ib_1}$  e  $a_2e^{ib_2}$ , cada um, respectivamente, com multiplicidades 2 e 1, então a matriz  $J^{\frac{1}{2}}$  é dada por:

$$J^{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} m_1 & \frac{1}{2m_1} & \\ & m_1 & \\ & & m_2 \end{pmatrix}. \quad (3.106)$$

onde  $m_1$  e  $m_2$  são definidos analogamente como  $m$ , de onde segue-se que  $\tilde{g}$  é:

$$\tilde{g} = \det\mu \frac{1}{4\pi\tilde{r}} S \begin{pmatrix} e^{im_1\tilde{r}} & \frac{e^{im_1\tilde{r}}}{2m_1} & \\ & e^{im_1\tilde{r}} & \\ & & e^{im_2\tilde{r}} \end{pmatrix} S^{-1}. \quad (3.107)$$

Finalmente, quando a matriz  $\varepsilon^t\mu^{-t}$  possui três autovalores distintos, é possível encontrar um sistema de coordenadas que diagonaliza a matriz. Então, a expressão para  $\tilde{g}$  é

$$\tilde{g} = \det\mu \frac{1}{4\pi\tilde{r}} \begin{pmatrix} e^{im_1\tilde{r}} & & \\ & e^{im_2\tilde{r}} & \\ & & e^{im_3\tilde{r}} \end{pmatrix} \quad (3.108)$$

onde  $m_1$ ,  $m_2$  e  $m_3$  são as raízes dos autovalores com partes reais positivas.

Como já vimos antes, se  $\varepsilon^t\mu^{-t}$  é diagonal, então  $\tilde{g}$  também o é. Para tensores  $\varepsilon$  e  $\mu$  hermitianos, isto equivale à diagonalização simultânea de  $\varepsilon$  e  $\mu$ .

## Capítulo 4

# Ondas planas num meio não-condutor e Teorema de Poynting

Neste capítulo estudaremos a propagação de uma onda plana num meio físico. Obteremos a versão para formas do *Teorema de Poynting*, bem como calcularemos as condições de propagação às quais os campos devem satisfazer. Para tanto, precisaremos de algumas definições e resultados, que serão apresentados na próxima seção. Daqui para frente trabalharemos em  $\mathbb{R}^3$ .

### 4.1 Preliminares matemáticos

Nas demonstrações que seguem,  $A$  e  $B$  são duas matrizes  $3 \times 3$  hermitianas definidas positivas, cujas respectivas entradas são  $a_{ij}$  e  $b_{ij}$ ,  $U \subseteq \mathbb{R}^3$  é um aberto fixado. Por conveniência, chamaremos indistintamente de vetor a todo elemento de um espaço vetorial tridimensional, quer sejam vetores ou campos vetoriais em  $\mathbb{R}^3$ , ou elementos de  $F^1(U)$  ou  $F^2(U)$ . Como o conjunto  $U$  é fixo, se  $\omega$  é um campo de 1-formas em  $U$ , diremos apenas  $\omega \in F^1$ . A mesma convenção será adotada para um campo de 2-formas. Denotaremos por  $(Av)_i$  a  $i$ -ésima linha do vetor  $Av$ , onde  $v$  é um elemento de um espaço vetorial tridimensional. Segundo nossas convenções,  $Av$  denotará o vetor  $Av = ((Av)_1, (Av)_2, (Av)_3)$ .

**Definição 28.** *Definimos o operador  $\star_A$  como sendo o operador dado pela Eq. (3.2) com os elementos  $g^{ij} = \frac{a_{ji}}{\det A}$ .*

A definição acima não é nenhuma novidade. Na verdade, ela já é uma velha conhecida, pois os operadores estrela elétrico e magnético nada mais são do que escolhas da matriz  $A$  como sendo  $\varepsilon$  ou  $\mu$ , respectivamente. Contudo, como queremos resultados um pouco mais gerais, optamos por fazer uma definição independente de uma matriz particular.

**Lema 1.** *Seja  $\omega = \omega_1 dx + \omega_2 dy + \omega_3 dz \in F^1$ ,  $\Gamma = \{dx, dy, dz\}$  a base canônica das 1-formas,  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  a representação vetorial de  $\omega$  com relação a  $\Gamma$ . Então,  $\star_A$  equivale à*

multiplicação da matriz  $A$  no vetor  $\omega$  seguida da ação do operador  $\star$  canônico, i.e.,

$$\star_A = \star\tilde{\omega}. \quad (4.1)$$

onde  $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_1 dx + \tilde{\omega}_2 dy + \tilde{\omega}_3 dz$  e

$$\begin{pmatrix} \tilde{\omega}_1 \\ \tilde{\omega}_2 \\ \tilde{\omega}_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}.$$

*Demonstração.* Note que

$$(A\omega)_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij}\omega_j. \quad (4.2)$$

Defina a 1-forma

$$\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_1 dx + \tilde{\omega}_2 dy + \tilde{\omega}_3 dz.$$

Então, aplicando o operador  $\star$ , obtemos:

$$\star\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_1 dy \wedge dz + \tilde{\omega}_2 dz \wedge dx + \tilde{\omega}_3 dx \wedge dy. \quad (4.3)$$

Substituindo a Eq. (4.2) na Eq. (4.3), podemos escrever:

$$\star\tilde{\omega} = \left( \sum_{j=1}^3 a_{1j}\omega_j \right) dy \wedge dz + \left( \sum_{j=1}^3 a_{2j}\omega_j \right) dz \wedge dx + \left( \sum_{j=1}^3 a_{3j}\omega_j \right) dx \wedge dy = \star_A \omega. \quad (4.4)$$

□

**Lema 2.** *Seja  $\eta = \eta_1 dy \wedge dz + \eta_2 dz \wedge dx + \eta_3 dx \wedge dy \in F^2$ ,  $\Omega = \{dy \wedge dz, dz \wedge dx, dx \wedge dy\}$  a base canônica das 2-formas,  $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$  a representação vetorial de  $\eta$  com relação a  $\Omega$ . Então,  $\star_A$  equivale à multiplicação da matriz  $A^{-1}$  no vetor  $\eta$  seguida da ação do operador  $\star$  canônico.*

*Demonstração.* Pela Eq. (3.6) podemos escrever:

$$\begin{aligned} \star_A &= (A^{-1}\omega)_1 \star dy \wedge dz + (A^{-1}\omega)_2 \star dz \wedge dx + (A^{-1}\omega)_3 \star dx \wedge dy = \\ &= \star \left[ (A^{-1}\omega)_1 dy \wedge dz + (A^{-1}\omega)_2 dz \wedge dx + (A^{-1}\omega)_3 dx \wedge dy \right] = \star A^{-1}\omega \end{aligned} \quad (4.5)$$

□

**Teorema 19.**  $\star_A$  é um isomorfismo entre  $F^1$  e  $F^2$ .

*Demonstração.* Pelo Lema 1, podemos escrever  $\star_A = \star \circ A$ . Desde que  $\star$  e  $A$  são isomorfismos, segue, pelo Teorema 3, que sua composição também o é. □

**Corolário 1.** *Vale a igualdade: Se  $\alpha \in F^1$  e  $\beta \in F^2$ , então:*

$$\star_A^{-1}\alpha = A^{-1} \star \alpha, \quad (4.6)$$

$$\star_A^{-1}\beta = A \star \beta. \quad (4.7)$$

*Demonstração.* Pelo Teorema 19 existe  $\omega \in F^2$  tal que

$$\omega = \star A\alpha \implies \alpha = A^{-1} \star \omega = A^{-1} \star \star_A \alpha$$

de onde concluímos facilmente que

$$\star_A^{-1}\alpha = A^{-1} \star \alpha.$$

A segunda igualdade é provada de maneira análoga.  $\square$

**Lema 3.** *Se  $\alpha \in F^1$  e  $\beta \in F^2$ , então*

$$\star_A \alpha = \star A\alpha = A \star \alpha, \quad (4.8)$$

$$\star_A \beta = \star A^{-1}\beta = A^{-1} \star \beta, \quad (4.9)$$

$$\star_A^{-1}\alpha = \star A^{-1}\alpha = A^{-1} \star \alpha, \quad (4.10)$$

$$\star_A^{-1}\beta = \star A\beta = A \star \beta, \quad (4.11)$$

$$\star_A \star_B \alpha = A^{-1}B\alpha. \quad (4.12)$$

*Demonstração.* A demonstração das quatro primeiras igualdades são análogas. Por isto, provaremos a primeira e a última.

No primeiro caso, seja  $\alpha \in F^1$ . Então

$$\begin{aligned} \star_A \alpha &= (\star A)\alpha = \star(A\alpha) = \\ &= \star \left[ (A\alpha)_1 dx + (A\alpha)_2 dy + (A\alpha)_3 dz \right] = \\ &= \left[ (A\alpha)_1 \star dx + (A\alpha)_2 \star dy + (A\alpha)_3 \star dz \right] \\ &= A(\star \alpha) = (A\star)(\alpha). \end{aligned} \quad (4.13)$$

de onde concluímos que  $\star A = A\star$ .

Para a Eq. (4.12), utilizando que em  $\mathbb{R}^3$   $\star$  é seu próprio inverso, invocando os Lemas 1 e 2 e utilizando as Eqs. (4.7) e (4.8), temos:

$$\star_A \star_B \alpha = (\star A^{-1})(\star B)\alpha = A^{-1}B\alpha. \quad (4.14)$$

$\square$

Daqui para frente, quando nos for conveniente, escreveremos  $\star_A = \star A$  e  $\star_A^{-1} = \star A^{-1}$ .

**Corolário 2.** *Se as matrizes  $A$  e  $B$  comutam e  $\alpha \in F^1$ , então*

$$\star_A \star_B \alpha = \star_B^{-1} \star_A^{-1} \alpha. \quad (4.15)$$

*Demonstração.* É conseqüência do Corolário 1 e do Lema 3. De fato, utilizando as Eqs. (4.6), (4.7), (4.8) e (4.9) e o fato de  $\star = \star^{-1}$ , podemos escrever:

$$\star_A \star_B \alpha = A^{-1} B \alpha = B A^{-1} \alpha = \star_B^{-1} \star_A^{-1} \alpha. \quad (4.16)$$

□

**Corolário 3.** *Se  $A$  e  $B$  comutam,  $\alpha \in F^1$  e  $\beta \in F^2$ , vale as igualdades:*

$$\star_A \star_B^{-1} = \star_B \star_A^{-1} \alpha, \quad (4.17)$$

$$\star_A^{-1} \star_B \alpha = \star_B^{-1} \star_A \alpha, \quad (4.18)$$

$$\star_A \star_B^{-1} \beta = \star_B \star_A^{-1} \beta, \quad (4.19)$$

$$\star_A^{-1} \star_B \alpha = \star_B^{-1} \star_A \alpha, \quad (4.20)$$

$$\star_A^{-1} \star_B^{-1} \beta = \star_B \star_A \beta. \quad (4.21)$$

$$\star_A^{-1} \star_B^{-1} \alpha = \star_B \star_A \alpha. \quad (4.22)$$

*Demonstração.* Ambas decorrem do Corolário 1 e as demonstrações são análogas. Assim, demonstraremos apenas a primeira

$$\star_A \star_B^{-1} \alpha = A^{-1} B \alpha = B^{-1} A^{-1} \alpha = \star_B \star_A^{-1} \alpha.$$

□

**Teorema 20.** *Vale a igualdade:*

$$\star_A^{-1} = \star_{A^{-1}}. \quad (4.23)$$

*Demonstração.* Seja  $\alpha \in F^1$ . Então, pelo Corolário 1 e o Lema 1, temos:

$$\star_A^{-1} \alpha = \star A^{-1} \alpha = \star_{A^{-1}} \alpha.$$

Seja agora  $\beta \in F^2$ . Pelo Corolário 1 e o Lema 2, segue que

$$\star_A^{-1} \beta = \star A \beta = \star (A^{-1})^{-1} \beta = \star_{A^{-1}} \beta.$$

□

**Definição 29.** O produto interior entre  $\alpha \in F^p$  e  $\beta \in F^q$  é dado por

$$\alpha \lrcorner \beta = \star((\star\beta) \wedge \alpha). \quad (4.24)$$

Geometricamente, a ação de uma 1-forma numa  $k$ -forma é uma projeção, que simplesmente remove o eixo correspondente à 1-forma na  $k$ -forma.

**Lema 4.** Suponhamos que os índices  $i, j, k$  não sejam repetidos e estejam em ordem cíclica. Escrevamos  $(dx, dy, dz) = (dx^1, dx^2, dx^3)$ . Então valem as seguintes igualdades:

$$dx^i \lrcorner dx^i = 1, \quad (4.25)$$

$$dx^i \lrcorner dx^j = 0, \quad (4.26)$$

$$dx^i \lrcorner (dx^i \wedge dx^k) = dx^k, \quad (4.27)$$

$$dx^i \lrcorner (dx^k \wedge dx^i) = -dx^k, \quad (4.28)$$

*Demonstração.* A quarta igualdade decorre da terceira pelo fato do produto cunha ser antissimétrico. Para provar a primeira, note que  $\star dx^i = dx^j \wedge dx^k$ , e assim

$$dx^i \lrcorner dx^i = \star(dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k) = 1. \quad (4.29)$$

Para a segunda igualdade, observe que  $\star dx^j = dx^k \wedge dx^i$ , e então:

$$dx^i \lrcorner dx^j = \star(dx^k \wedge dx^i \wedge dx^i) = 0. \quad (4.30)$$

Finalmente, para a terceira, notando que  $\star(dx^j \wedge dx^k) = dx^i$  e aplicando a definição de produto interior na Eq. (4.27), obtemos:

$$dx^i \lrcorner (dx^i \wedge dx^k) = \star(\star(dx^i \wedge dx^k) \wedge dx^i) = \star(dx^i \wedge dx^j) = dx^k. \quad (4.31)$$

□

**Teorema 21.** Sejam  $\alpha, \beta$  e  $\gamma \in F^1$ . Então

$$\alpha \lrcorner (\beta \wedge \gamma) = (\alpha \lrcorner \beta)\gamma - (\alpha \lrcorner \gamma)\beta, \quad (4.32)$$

$$(\beta \wedge \gamma) \lrcorner \alpha = (\beta \lrcorner \gamma)\alpha - (\beta \lrcorner \alpha)\gamma. \quad (4.33)$$

*Demonstração.* Por comodidade, escrevamos  $(dx, dy, dz) = (dx^1, dx^2, dx^3)$  e ponhamos

$$\begin{aligned}\alpha &= \sum_{i=1}^3 \alpha_i dx^i, \\ \beta &= \sum_{i=1}^3 \beta_i dx^i. \\ \gamma &= \sum_{i=1}^3 \gamma_i dx^i\end{aligned}\tag{4.34}$$

então

$$\beta \wedge \gamma = \sum_{ij} \beta_i \gamma_j dx^i \wedge dx^j.$$

Efetuada o produto interior e invocando os resultados do Lema 4, podemos escrever:

$$\begin{aligned}\alpha \lrcorner (\beta \wedge \gamma) &= \sum_{ijk} \alpha_i \beta_j \gamma_k (dx^k \lrcorner dx^i \wedge dx^j) = \\ &= \sum_{ij} \alpha_i \beta_i \gamma_j dx^j - \sum_{ij} \alpha_j \gamma_j \beta_i dx^i = \\ &= (\alpha \lrcorner \beta) \gamma - (\alpha \lrcorner \gamma) \beta.\end{aligned}\tag{4.35}$$

Quanto à segunda igualdade, basta utilizar a definição de produto interior, o resultado do Teorema 7 e Eq. (4.32). De fato,

$$\begin{aligned}(\beta \wedge \gamma) \lrcorner \alpha &= \star((\star \alpha) \wedge (\beta \wedge \gamma)) = \\ &= -\star(\star \beta \wedge (\alpha \wedge \gamma)) = -\beta \lrcorner (\alpha \wedge \gamma) = \\ &= (\beta \lrcorner \gamma) \alpha - (\beta \lrcorner \alpha) \gamma.\end{aligned}\tag{4.36}$$

□

**Teorema 22.** *Sejam  $\alpha, \beta$  e  $\gamma \in F^1$ ,  $\sigma \in F^2$ ,  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  e  $\vec{d}$  os campos vetoriais duais associados a cada uma dessas formas, respectivamente. Então, valem as seguintes igualdades:*

$$\alpha \lrcorner \beta = \vec{a} \cdot \vec{b},\tag{4.37}$$

$$\alpha \lrcorner \sigma = -(\vec{d} \times \vec{a})_1 dx - (\vec{d} \times \vec{a})_2 dy - (\vec{d} \times \vec{a})_3 dz,\tag{4.38}$$

$$\alpha \lrcorner (\beta \wedge \gamma) = (\vec{a} \cdot \vec{b}) \gamma - (\vec{a} \cdot \vec{c}) \beta,\tag{4.39}$$

$$\alpha \wedge \sigma = \vec{a} \cdot \vec{d} dx \wedge dy \wedge dz,\tag{4.40}$$

$$(\star\beta) \wedge \alpha = \vec{a} \cdot \vec{b} dx \wedge dy \wedge dz, \quad (4.41)$$

$$\alpha \wedge \beta = (\vec{a} \times \vec{b})_1 dy \wedge dz + (\vec{a} \times \vec{b})_2 dz \wedge dx + (\vec{a} \times \vec{b})_3 dx \wedge dy. \quad (4.42)$$

*Demonstração.* A prova é trivial, embora tediosa. As duas primeiras igualdades decorrem do Lema 4. Para a primeira, basta levar em conta as Eqs. (4.25) e (4.26). A segunda é consequência das Eqs. (4.27), (4.28) e do fato do produto cunha ser anti-comutativo. A Eq. (4.39) decorre das Eqs. (4.27), (4.28) e (4.37). A quarta igualdade é imediata e a quinta é suficiente notar que  $(\star\beta) \wedge \alpha = \star\alpha \lrcorner \beta$  e utilizar a Eq. (4.37). A última é decorrente da própria definição de produto cunha.  $\square$

Da mesma maneira que no Capítulo 3, a cada vetor associamos uma forma com o mesmo símbolo, daqui em diante, salvo menção contrária, se  $\omega$  é uma forma,  $\vec{\omega}$  será seu vetor dual.

## 4.2 Ondas planas eletromagnéticas

Uma onda plana é uma função da forma  $e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$ . Nesta seção suporemos que estamos num meio não-condutor com tensores de permissividade e permeabilidade  $\varepsilon$  e  $\mu$ , respectivamente, e que os campos serão todos da forma  $Ae^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$ .

Suponhamos que nosso meio seja infinito, ausente de fontes e não-condutor. Fazendo uma pequena modificação nas equações (3.14)-(3.17), as equações de Maxwell são (conf. Born [20]):

$$dD = 0, \quad (4.43)$$

$$dB = 0, \quad (4.44)$$

$$dE = -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t}, \quad (4.45)$$

$$dH = \frac{1}{c} \frac{\partial D}{\partial t}. \quad (4.46)$$

Por comodidade, definamos um vetor unitário, na direção de  $\vec{k}$ , de modo que tenhamos  $\vec{k} = k \vec{s}$ . Com estas hipóteses, temos as seguintes equivalências:

$$dAe^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} = ik \vec{s} \wedge Ae^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}, \quad (4.47)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} Ae^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} = -i\omega Ae^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}. \quad (4.48)$$

Suponhamos que

$$E = E_0 e^{i(k \vec{s} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

onde  $E_0$  é uma 1-forma constante. Pelo resultado da Eq. (4.47), a Eq. (4.43) nos diz que:

$$s \wedge (\star \varepsilon E_0) = 0, \quad (4.49)$$

onde  $s$  é uma 1-forma.

Pelo Teorema 22, a condição da Eq. (4.49) é equivalente a:

$$(\varepsilon \vec{E}_0) \cdot \vec{s} = 0. \quad (4.50)$$

ou seja,  $\varepsilon \vec{E}_0 \perp \vec{s}$ .

Pela Eq. (4.45), temos:

$$B = s \wedge E_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}. \quad (4.51)$$

Chamando  $B_0 = E_0 \wedge s$ , a Eq. (4.44) implica em:

$$B_0 \wedge s = 0. \quad (4.52)$$

A equação anterior é óbvia, pois o Teorema 22 nos garante que o vetor  $\vec{B}_0$  é perpendicular a  $\vec{s}$ .

### 4.3 A forma de Poynting

Quando uma onda plana se propaga num meio, a direção de propagação é dada por um vetor simultaneamente perpendicular aos campos elétrico e magnético. Tal grandeza é chamada vetor de *Poynting*. Aqui, definiremos a forma de Poynting, e obteremos a versão para formas do *Teorema de Poynting*.

**Definição 30.** *A forma de Poynting é definida por:*

$$S = \frac{c}{8\pi} E \wedge H^*. \quad (4.53)$$

Decorre da Eq. (3.4) e do Lema 3 que

$$H = \star(\mu^{-1} B_0) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}. \quad (4.54)$$

Substituindo a Eq. (4.54) na definição de forma de Poynting e utilizando o fato que  $B_0 = E_0 \wedge s$ , podemos escrever:

$$S = \frac{c}{8\pi} E_0 \wedge (\mu^{-1} s \wedge E_0) \quad (4.55)$$

que pode ser expressa como

$$S = \frac{c}{8\pi} \star E_0 \lrcorner (\mu^{-1} (s \wedge E_0)). \quad (4.56)$$

**Definição 31.** *As densidades de energia elétrica, magnética e total são dadas, respectivamente, por:*

$$u_e = \frac{1}{16\pi} D \wedge E^*, \quad (4.57)$$

$$u_m = \frac{1}{16\pi} H \wedge B^*, \quad (4.58)$$

$$u = u_e + u_m. \quad (4.59)$$

Pela Eqs. (3.3) e (3.4), a identidade  $\star\star = 1$  e o Teorema 22, podemos escrever as Eqs. (4.57) e (4.58) como:

$$u_e = \frac{1}{16\pi} (\varepsilon \vec{E}_0) \cdot \vec{E}_0 dx \wedge dy \wedge dz, \quad (4.60)$$

$$u_m = \frac{1}{16\pi} (\mu^{-1} \vec{B}_0) \cdot \vec{B}_0 dx \wedge dy \wedge dz. \quad (4.61)$$

Somando estes dois resultados, obtemos a densidade de energia total de nosso sistema

$$u = \frac{1}{16\pi} [(\varepsilon \vec{E}_0) \cdot \vec{E}_0 + (\mu^{-1} \vec{B}_0) \cdot \vec{B}_0] dx \wedge dy \wedge dz. \quad (4.62)$$

### 4.3.1 O Teorema de Poynting

Tomando o produto cunha de  $E$  com o conjugado complexo da Eq. (4.46), de  $H^*$  com a Eq. (4.45) e subtraindo uma equação da outra, temos:

$$E \wedge dH^* - H^* \wedge dE = \frac{1}{c} \left[ E \wedge \frac{\partial}{\partial t} \star \varepsilon E^* + \star \mu^{-1} B \wedge \frac{\partial}{\partial t} B^* \right]. \quad (4.63)$$

Pelos Teoremas 7 e 22 e com uma ligeira modificação, a expressão anterior se torna

$$c(E \wedge dH^* - H^* \wedge dE) = \left[ E \lrcorner \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon E^* + (\mu^{-1} B) \lrcorner \frac{\partial}{\partial t} B^* \right]. \quad (4.64)$$

Pelo resultado do Teorema 5 decorre que:

$$-dS = \frac{c}{8\pi}(H^* \wedge dE - E \wedge dH^*). \quad (4.65)$$

Dividindo por  $8\pi$  e utilizando o Teorema 22, o segundo membro da Eq. (4.64) pode ser reescrito como

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{8\pi} E_0 \lrcorner \varepsilon E_0 + \frac{1}{8\pi} B_0 \lrcorner (\mu^{-1} B_0) \right) dx \wedge dy \wedge dz.$$

Pelo resultado da equação anterior e pelas Eqs. (4.62) e (4.65), podemos concluir

$$-cdS = \frac{du}{dt}. \quad (4.66)$$

que é o *Teorema de Poynting*.

# Capítulo 5

## Aplicações

Nos capítulos anteriores apresentamos todo um aparato teórico para a eletrodinâmica em meios materiais. Neste capítulo, discutiremos aplicações da teoria que apresentamos a partir de alguns sistemas físicos de interesse, como por exemplo, as *ferritas*. Depois das aplicações a sistemas anisotrópicos, quer magnéticos, quer elétricos, faremos uma última aplicação das formas na eletrodinâmica, que são os *potenciais de Hertz*. Com isso, automaticamente conectamos nossa teoria ao modelo teórico de Albuquerque [17], que parte dos referidos potenciais para construir seu modelo num estudo de sistemas ferrimagnéticos.

### 5.1 Meios materiais

Nos capítulos precedentes discutimos meios isotrópicos, anisotrópicos, biaxiais, etc. Aqui explicaremos um pouco mais o significado de tais termos, bem como apresentaremos melhor as ferritas. Então faremos aplicações dos resultados obtidos no Capítulo 3.

Um meio é completamente isotrópico quando os tensores de permeabilidade e permissividade podem ser expressos, respectivamente, como

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \mu_1 & \\ & & \mu_1 \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

e

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & \\ & \varepsilon_1 & \\ & & \varepsilon_1 \end{pmatrix}. \quad (5.2)$$

Um meio é anisotrópico quando seus tensores de permissividade e permeabilidade não admitem uma representação como a anterior. Todavia, há meios que são *mistos*, isto é, são isotrópicos

magneticamente e anisotrópicos eletricamente, ou vice-versa. No primeiro caso dizemos que o meio é *eletricamente anisotrópico*, ao passo que no segundo, *magneticamente anisotrópico*.

Se os elementos dos tensores, num meio anisotrópico, forem hermitianos, tal meio é chamado *eletricamente girotrópico ou magneticamente girotrópico*, conforme qual tensor seja. Se forem ambos, dizemos simplesmente *girotrópico*.

Como exemplo de meio eletricamente girotrópico, citamos um plasma com campo magnético estático segundo o eixo  $z$ , cuja representação matricial é (consulte Souza [18])

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & -i\varepsilon_p & \\ i\varepsilon_p & \varepsilon_1 & \\ & & \varepsilon_z \end{pmatrix}. \quad (5.3)$$

Para um meio magneticamente girotrópico, citamos as *ferritas*, cujo tensor de permeabilidade é (consulte Albuquerque [17] ou Souza [18])

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 & -i\mu_2 & \\ i\mu_2 & \mu_1 & \\ & & \mu_z \end{pmatrix}. \quad (5.4)$$

O *Teorema de Decomposição Espectral* (consulte Lima [15] ou Trefthen [19]) afirma que dada uma matriz hermitiana, definida positiva, ela admite um sistema de coordenadas tal que, relativo a este sistema, a matriz é diagonal.

Supondo que a matriz (5.3) satisfaça estas hipóteses, então

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & \\ & \varepsilon_2 & \\ & & \varepsilon_3 \end{pmatrix}. \quad (5.5)$$

Um tal sistema de eixos é dito *eixos principais*.

Se os elementos da diagonal da matriz (5.5) são todos iguais, voltamos ao caso de um sistema eletricamente isotrópico. Se  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ , por exemplo, o meio é dito *uniaxial*, e o eixo  $z$  é chamado *eixo óptico*. Se todos os elementos da diagonal são dois a dois distintos, chamamos o meio de *biaxial*. Cabe o mesmo raciocínio ao tensor  $\mu$ .

## 5.2 Meios eletricamente anisotrópicos

Suponhamos que num determinado material os tensores  $\varepsilon$  e  $\mu$  sejam

$$\mu = \mu_1 \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & \\ & \varepsilon_2 & \\ & & \varepsilon_3 \end{pmatrix}, \quad (5.7)$$

ou seja, estamos num meio eletricamente biaxial e magneticamente isotrópico.

Com isso,  $\tilde{r} = \mu_1 r$ ,  $\det \mu = \mu_1^3$ , de onde temos

$$\varepsilon \mu^{-t} = \frac{1}{\mu_1} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & \\ & \varepsilon_2 & \\ & & \varepsilon_3 \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

e a Eq. (3.85) fornece:

$$g_{jj}(k) = \left[ \frac{k^2}{\mu_1^2} - \omega^2 \frac{\varepsilon_j}{\mu_1} \right]^{-1}.$$

que pode ser reescrita como

$$g_{jj}(k) = \frac{\mu_1^2}{k^2 - \omega^2 \varepsilon_j \mu_1}. \quad (5.9)$$

Fisicamente, a solução para este problema é dada pela Eq. (3.108), onde  $m_i = \omega \sqrt{\frac{\varepsilon_i}{\mu_1}}$ . Assim

$$\tilde{g} = \mu_1^2 \frac{1}{4\pi r} \begin{pmatrix} e^{i\omega\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}r} & & \\ & e^{i\omega\sqrt{\varepsilon_2\mu_1}r} & \\ & & e^{i\omega\sqrt{\varepsilon_3\mu_1}r} \end{pmatrix}. \quad (5.10)$$

A forma de diádica é, então,

$$g(r_1, r_2) = \frac{\mu_1^2}{4\pi r} \left( e^{i\omega\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}r} dx_1 \otimes dx_2 + e^{i\omega\sqrt{\varepsilon_2\mu_1}r} dy_1 \otimes dy_2 + e^{i\omega\sqrt{\varepsilon_3\mu_1}r} dz_1 \otimes dz_2 \right) \quad (5.11)$$

onde  $r = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$ .

O resultado obtido na Eq. (5.11) é o mesmo obtido por Warnick em [14].

Suponhamos agora que o meio seja uniaxial, com  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$  e  $\varepsilon_3 = \varepsilon_z$ . Utilizando a equação acima, decorre imediatamente que

$$g = \frac{\mu_1^2}{4\pi r} \begin{pmatrix} e^{i\omega\sqrt{\varepsilon\mu_1}r} & & \\ & e^{i\omega\sqrt{\varepsilon\mu_1}r} & \\ & & e^{i\omega\sqrt{\varepsilon_z\mu_1}r} \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

cuja solução é:

$$g(r_1, r_2) = \frac{\mu_1^2}{4\pi r} \left( e^{i\omega\sqrt{\varepsilon\mu_1}r} dx_1 \otimes dx_2 + e^{i\omega\sqrt{\varepsilon\mu_1}r} dy_1 \otimes dy_2 + e^{i\omega\sqrt{\varepsilon_z\mu_1}r} dz_1 \otimes dz_2 \right). \quad (5.13)$$

Se  $\varepsilon_z = \varepsilon$ , as Eqs. (5.11) e (5.12) tornam-se, respectivamente

$$g = \frac{\mu_1^2}{4\pi r} \begin{pmatrix} e^{i\omega\sqrt{\varepsilon\mu_1}r} & & \\ & e^{i\omega\sqrt{\varepsilon\mu_1}r} & \\ & & e^{i\omega\sqrt{\varepsilon\mu_1}r} \end{pmatrix} \quad (5.14)$$

e

$$g(r_1, r_2) = \frac{e^{i\omega\sqrt{\varepsilon\mu_1}r}}{4\pi r} dx_1 \otimes dx_2 + \frac{e^{i\omega\sqrt{\varepsilon\mu_1}r}}{4\pi r} dy_1 \otimes dy_2 + \frac{e^{i\omega\sqrt{\varepsilon\mu_1}r}}{4\pi r} dz_1 \otimes dz_2 \quad (5.15)$$

que é o resultado esperado para um meio material isotrópico. Para recuperarmos os resultados no vácuo, basta substituímos  $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0$  e  $\mu \rightarrow \mu_0$  nas duas expressões anteriores. Assim, a forma matricial é reduzida a

$$g = \frac{\mu_0^2}{4\pi r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.16)$$

### 5.2.1 Ondas planas

Suponha que uma onda plana, monocromática, propaga-se na direção de uma forma unitária  $s$  com relação à norma

$$|s| = \sqrt{s \lrcorner s} \quad (5.17)$$

e que o campo elétrico seja

$$E = E_0 e^{i(k \vec{s} \cdot \vec{r} - \omega t)}. \quad (5.18)$$

Definindo

$$n = \frac{kc}{\omega}$$

as Eqs. (3.14) e (3.15) nos fornecem

$$D = -\frac{n}{c}H \wedge s \quad (5.19)$$

e

$$B = \frac{n}{c}E \wedge s \quad (5.20)$$

Utilizando a relação constitutiva  $B = \star_h H$  e eliminado  $H$  nas duas equações anteriores, obtemos:

$$D = \frac{n^2}{c^2\mu} \star (s \wedge E) \wedge s \quad (5.21)$$

que, pelo Teorema 21, pode ser reescrita como

$$D = \frac{n^2}{c^2\mu} \star [E - s(s \lrcorner E)]. \quad (5.22)$$

Definindo  $E_\perp$  como sendo a forma perpendicular a  $s$  no plano formado pelas formas  $E$  e  $s$ , a Eq. (5.21) torna-se

$$D = \frac{n^2}{c^2\mu} E_\perp. \quad (5.23)$$

### 5.2.2 Equações de Fresnel

Suponhamos que o tensor de permissividade possua autovalores  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  e  $\varepsilon_3$  e nosso sistema de eixos seja o principal. Decorre da Eq. (5.21) que

$$E_i = \frac{n^2 s_i}{n^2 - c^2 \mu \varepsilon_i} E_\perp s, \quad i=1,2,3. \quad (5.24)$$

Multiplicando a equação anterior por  $s_j$  e somando os índices, e dividindo por  $n^2$ , obtemos

$$\frac{s_1^2}{n^2 - c^2 \mu \varepsilon_1} E_\perp s + \frac{s_2^2}{n^2 - c^2 \mu \varepsilon_2} E_\perp s + \frac{s_3^2}{n^2 - c^2 \mu \varepsilon_3} E_\perp s = \frac{1}{n^2} E_\perp s$$

que pode ser espessa como

$$\sum_{i=1}^3 \frac{s_i^2}{n^2 - c^2 \mu \varepsilon_i} = \frac{1}{n^2}. \quad (5.25)$$

Desde que a forma  $s$  é unitária, o Teorema 22 implica que

$$\sum_{i=1}^3 s_i^2 = 1.$$

Multiplicando a Eq. (5.25) por  $n^2$ , subtraindo a expressão acima e finalmente dividindo o resultado final por  $-n^2$ , podemos escrever

$$\sum_{i=1}^3 \frac{s_i^2}{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{c^2 \mu \varepsilon_i}} = 0. \quad (5.26)$$

**Definição 32.** *As velocidades de propagação principais são definidas como*

$$v_i = \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon_i}}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (5.27)$$

As velocidades acima não são componentes de um vetor. São definidas apenas como referência aos eixos principais.

Com estas definições e chamando  $n = \frac{c}{v}$ , a Eq. (5.26) se torna

$$\frac{s_1^2}{v^2 - v_1^2} + \frac{s_2^2}{v^2 - v_2^2} + \frac{s_3^2}{v^2 - v_3^2} = 0. \quad (5.28)$$

As Eqs. (5.25), (5.26) e (5.28) são chamadas *Equações de onda normais de Fresnel*. Tais equações são as mesmas dadas por *Born* [20].

### 5.3 Ferritas

No que segue, faremos uma breve explicação sobre ferritas. Para maiores detalhes, consultar Albuquerque [17] ou Souza [18].

Ferritas são óxidos magnéticos de ferro. Contém em geral outros materiais ou terras raras, formando um material ferrimagnético do tipo *cerâmico, duro e quebradiço*, com propriedades magnéticas e alta resistência elétrica. Geralmente este tipo de material é feito a partir dos óxidos constituintes em forma de pó, que são misturados e pressionados para obtenção da forma geométrica adequada e em seguida, cozidos.

As estruturas cristalinas básicas mais comum das ferritas são:

1. Estrutura do espinélio ( $MgOAl_2O_3$ ): A composição química é da forma  $MOFe_2O_3$ , onde  $M$  é um metal divalente ou uma mistura de tais materiais. Tais cristais possuem simetria cúbica e são utilizados desde baixas frequências até microondas.
2. Estrutura da granada de ferro ( $X_3Fe_5O_{12}$ ): Na fórmula,  $X$  representa um elemento de terras raras. A granada de ferro é muito empregada em microondas por suas baixas perdas.

3. Estrutura Hexagonal: Quando o íon  $M$  do item 1 possui diâmetro muito maior que o dos átomos de ferro. Tal cristal possui uma estrutura diagonal de alta anisotropia.

A permissividade relativa da ferrita é elevada ( $\geq 1000$ ) em baixa frequência, caindo para aproximadamente 10 a 20 em altas frequências.

Em sua tese de doutoramento, Albuquerque [17] estuda as características de propagação de linhas de *microfita* e de linhas de lâminas bilaterais sobre substratos ferrimagnéticos magnetizados. Em particular, é estudado o problema em ferritas.

Como foi dito anteriormente, o tensor de permeabilidade numa ferrita é

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 & -i\mu_2 & \\ i\mu_2 & \mu_1 & \\ & & \mu_z \end{pmatrix}. \quad (5.29)$$

Matematicamente, se  $\mu_2 \ll \mu_1$ , podemos encarar a matriz que representa a ferrita como sendo uma perturbação da matriz diagonal

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \mu_1 & \\ & & \mu_z \end{pmatrix} \quad (5.30)$$

cuja matriz perturbadora é

$$\delta_\mu = \begin{pmatrix} & -i\mu_2 & \\ i\mu_2 & & \\ & & \end{pmatrix}. \quad (5.31)$$

Fisicamente, valores maiores ou menores de  $\mu_1$  fazem as componentes dos campos sofrerem uma rotação no plano  $xy$ , cujo ângulo é maior ou menor conforme forem os valores da perturbação. Este fenômeno será mais discutido na Seção 5.3.2.

Para facilitar nossos cálculos, reescreveremos a matriz de permeabilidade como sendo

$$\mu = \mu_0 \begin{pmatrix} \alpha & -i\beta & \\ i\beta & \alpha & \\ & & \gamma \end{pmatrix} = \mu_0 \mu_r \quad (5.32)$$

onde os elementos da matriz  $\mu_r$  são adimensionais.

No que segue, consideraremos que  $\beta < \alpha$ .

Assim, o determinante de  $\mu$  é dado por  $\det\mu = \mu_0^3(\alpha^2 - \beta^2)\gamma$ , os autovalores de  $\mu_r$  são  $\alpha + \beta$ ,  $\alpha - \beta$ ,  $\gamma$  e

$$\vec{r} = [(\alpha^2 - \beta^2)^{\frac{1}{2}} \gamma^{\frac{1}{2}}] \mu_0 \left( \frac{x}{\sqrt{\alpha + \beta}}, \frac{y}{\sqrt{\alpha - \beta}}, \frac{z}{\sqrt{\gamma}} \right)$$

cujo módulo é

$$\tilde{r} = \mu_0 (\alpha^2 - \beta^2)^{\frac{1}{2}} \gamma^{\frac{1}{2}} \left( \frac{x^2}{\alpha + \beta} + \frac{y^2}{\alpha - \beta} + \frac{z^2}{\gamma} \right). \quad (5.33)$$

As raízes dos autovalores de  $\omega^2 \varepsilon \mu^{-t}$  são

$$\begin{aligned} m_1 &= \omega \sqrt{\frac{\varepsilon}{(\alpha + \beta) \mu_0}} \\ m_2 &= \omega \sqrt{\frac{\varepsilon}{(\alpha - \beta) \mu_0}} \\ m_3 &= \omega \sqrt{\frac{\varepsilon}{\gamma \mu_0}} \end{aligned} \quad (5.34)$$

onde  $\varepsilon$  é o elemento da diagonal da matriz de permissividade da ferrita.

Finalmente, a expressão para  $g$  é

$$g = \frac{\mu_0^2 (\alpha^2 - \beta^2)^{\frac{1}{2}} \gamma^{\frac{1}{2}}}{4\pi r'} \begin{pmatrix} e^{i\omega \sqrt{\varepsilon \mu_0 (\alpha - \beta)} r'} & & \\ & e^{i\omega \sqrt{\varepsilon \mu_0 (\alpha + \beta)} r'} & \\ & & e^{i\omega \sqrt{\varepsilon \mu_0 (\alpha^2 - \beta^2)} r'} \end{pmatrix} \quad (5.35)$$

onde  $\vec{r} = \sqrt{(\alpha^2 - \beta^2) \gamma \mu_0} \vec{r}'$ , e  $\vec{r}' = \left( \frac{x}{\sqrt{\alpha + \beta}}, \frac{y}{\sqrt{\alpha - \beta}}, \frac{z}{\sqrt{\gamma}} \right)$  que na linguagem das diádicas torna-se

$$g(r_1, r_2) = g_0 \left( e^{i\omega \sqrt{(\alpha - \beta) \gamma \varepsilon \mu_0} r'} dx^1 \otimes dx^2 + e^{i\omega \sqrt{(\alpha + \beta) \gamma \varepsilon \mu_0} r'} dy^1 \otimes dy^2 + e^{i\omega \sqrt{(\alpha^2 - \beta^2) \varepsilon \mu_0} r'} dz^1 \otimes dz^2 \right) \quad (5.36)$$

onde  $g_0 = \frac{\mu_0^2 (\alpha^2 - \beta^2)^{\frac{1}{2}} \gamma^{\frac{1}{2}}}{4\pi r'}$  e  $r' = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$ , e os  $\vec{r}_i$  são definidos analogamente como o vetor  $\vec{r}$ .

Se a matriz perturbativa se anula, ou equivalentemente,  $\beta = 0$  na Eq. (5.31), temos

$$g = \frac{\mu_0^2 \alpha \gamma^{\frac{1}{2}}}{4\pi r'} \begin{pmatrix} e^{i\omega \sqrt{\varepsilon \mu_0 \alpha} r'} & & \\ & e^{i\omega \sqrt{\varepsilon \mu_0 \alpha} r'} & \\ & & e^{i\omega \alpha \sqrt{\varepsilon \mu_0} r'} \end{pmatrix} \quad (5.37)$$

onde  $\vec{r}' = \left( \frac{x}{\sqrt{\alpha}}, \frac{y}{\sqrt{\alpha}}, \frac{z}{\sqrt{\gamma}} \right)$ .

A expressão anterior é a forma matricial da diádica para um meio magneticamente uniaxial.

Finalmente, se  $\alpha = \gamma$ , temos

$$g = \frac{(\mu_0 \alpha)^2}{4\pi r} \begin{pmatrix} e^{i\omega\sqrt{\varepsilon\mu_0\alpha}r} & & \\ & e^{i\omega\sqrt{\varepsilon\mu_0\alpha}r} & \\ & & e^{i\omega\sqrt{\varepsilon\mu_0\alpha}r} \end{pmatrix} \quad (5.38)$$

onde  $r = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$  e  $r_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2}$ .

Chamando  $\mu = \alpha\mu_0$ , a Eq. 5.38 se torna

$$g = \frac{\mu^2}{4\pi r} \begin{pmatrix} e^{i\omega\sqrt{\varepsilon\mu}r} & & \\ & e^{i\omega\sqrt{\varepsilon\mu}r} & \\ & & e^{i\omega\sqrt{\varepsilon\mu}r} \end{pmatrix} \quad (5.39)$$

que é a expressão da diádica para um meio material isotrópico. Note que se  $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0$ ,  $\mu \rightarrow \mu_0$ , voltamos ao resultado da Eq. (5.16).

### 5.3.1 Ondas planas

Faremos na presente seção o mesmo estudo que fizemos na Seção 5.2.1 e, portanto, nossas hipóteses são as mesmas.

Utilizando que  $D = \varepsilon^{-1} \star E$  e resolvendo as Eqs. (5.19) e (5.20) para a forma  $B$ , temos:

$$B = \frac{n^2}{c^2\varepsilon} \star [H - (s_{\perp}H)s] = \frac{n^2}{\varepsilon c^2} \star H_{\perp}, \quad (5.40)$$

onde  $H_{\perp}$  é definido analogamente como  $E_{\perp}$ .

Em componentes, a Eq. (5.40) pode ser expressa como

$$B_i = \frac{n^2\mu_i}{n^2 - c^2\varepsilon\mu_i} (s_{\perp}H)_i s_i. \quad (5.41)$$

Multiplicando a equação anterior por  $s_i$ , dividindo por  $\mu_i$ , somando os índices e dividindo o resultado final por  $n^2$ , obtemos:

$$\sum_{i=1}^3 \frac{s_i^2}{n^2 - c^2\varepsilon\mu_i} = \frac{1}{n^2}. \quad (5.42)$$

Matematicamente a Eq. (5.42) é equivalente à Eq. (5.25), donde decorre que podemos reescrevê-la nas maneiras alternativas:

$$\sum_{i=1}^3 \frac{s_i^2}{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{c^2\varepsilon\mu_i}} = 0 \quad (5.43)$$

e definindo velocidades principais análogas às da Definição 30, segue que:

$$\sum_{i=1}^3 \frac{s_i^2}{v^2 - v_i^2} = 0. \quad (5.44)$$

As Eqs. (5.42), (5.43) e (5.44) são as *Equações de onda normais de Fresnel para ferritas*.

### 5.3.2 Rotações de Faraday

Suponhamos que uma onda plana, monocromática atravessa uma ferrita e que a região onde analisaremos seja tal que não precisemos nos preocupar com efeitos de bordo. Por comodidade, suponhamos que a onda propaga-se em relação a direção  $dz$ .

As Eqs. (3.15), (3.3) e o Lema 3 nos fornecem

$$dH = -i\omega\varepsilon \star E \quad (5.45)$$

que pode ser reescrita alternativamente como:

$$-i\omega\varepsilon E = \star dH. \quad (5.46)$$

Aplicando o operador  $d$  na equação anterior, utilizando a Eqs. (3.14) e (3.4), obtemos:

$$\omega^2\varepsilon \star_h H = d \star dH. \quad (5.47)$$

Aplicando o operador estrela canônico na equação anterior e utilizando o resultado do Teorema 19, segue que:

$$\star d \star dH = \omega^2\varepsilon\mu H. \quad (5.48)$$

A Eq. (5.41) nos garante que a componente na direção  $dz$  do campo  $H$  é nula. Então, supondo

$$H = (H_1 dx + H_2 dy) e^{i(kz - \omega t)}$$

e utilizando duas vezes a Eq. (4.47), as componentes da Eq. (5.48) nos fornecem

$$\omega^2\varepsilon\mu_0(\alpha H_1 - i\beta H_2) = k^2 H_1, \quad (5.49)$$

$$\omega^2\varepsilon\mu_0(i\beta H_1 - \alpha H_2) = k^2 H_2. \quad (5.50)$$

que é equivalente à seguinte equação matricial

$$\omega^2 \varepsilon \mu_0 \begin{pmatrix} \alpha & -i\beta \\ i\beta & \alpha \end{pmatrix} = k^2 \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \end{pmatrix} \quad (5.51)$$

ou seja, uma equação de autovalores para  $k^2$ . Resolvendo, obtemos as seguintes soluções:

$$k_+^2 = \omega^2 \varepsilon \mu_0 (\alpha + \beta), \quad (5.52)$$

$$k_-^2 = \omega^2 \varepsilon \mu_0 (\alpha - \beta). \quad (5.53)$$

Isto significa que a solução consiste de duas ondas planas circularmente polarizadas girando em sentidos opostos.

Substituindo as Eqs. (5.52) e (5.53) na Eq. (5.51), obtemos, respectivamente:

$$H_1 = -ih, \quad (5.54)$$

$$H_1 = ih. \quad (5.55)$$

onde consideramos  $H_2 = h$ .

A solução geral do sistema é:

$$H = \left[ -ic_1 h e^{ik_+ z} + ic_2 h e^{ik_- z} \right] e^{-i\omega t} dx + \left[ -c_1 h e^{ik_- z} + c_2 h e^{ik_+ z} \right] e^{-i\omega t} dy. \quad (5.56)$$

Escolhendo

$$c_1 = -c_2 = \frac{i}{2}$$

e chamando  $H_1(z)$  e  $H_2(z)$  as componentes na direção de  $dx$  e  $dy$  independentes do tempo, temos:

$$H_1(z) = \frac{h}{2} e^{ik_+ z} + \frac{h}{2} e^{ik_- z}, \quad (5.57)$$

$$H_2(z) = i \frac{h}{2} e^{ik_+ z} - i \frac{h}{2} e^{ik_- z}. \quad (5.58)$$

As Eqs.(5.57) e (5.58) podem ser reescritas como

$$H_1(z) = h \cos\left(\frac{k_+ - k_-}{2} z\right) e^{-i \frac{k_+ + k_-}{2} z}, \quad (5.59)$$

$$H_2(z) = h \operatorname{sen}\left(\frac{k_+ - k_-}{2} z\right) e^{-i \frac{k_+ + k_-}{2} z}. \quad (5.60)$$

Definindo  $\theta$  como sendo o ângulo tal que

$$tg\theta = \frac{H_2(z)}{H_1(z)} = tg\left(\frac{k_+ - k_-}{2}z\right), \quad (5.61)$$

cuja solução é

$$\theta_n = \left(\frac{k_+ - k_-}{2}z\right) + 2n\pi, \quad n \text{ inteiro}. \quad (5.62)$$

Escolhendo  $n = 0$ , temos:

$$\theta_0 = \frac{1}{2}z\omega\sqrt{\varepsilon\mu_0\alpha}\left[\sqrt{1 + \frac{\beta}{\alpha}} - \sqrt{1 - \frac{\beta}{\alpha}}\right]. \quad (5.63)$$

A Eq. (5.63) nos diz que uma onda percorrendo uma certa distância numa direção é rotacionada através de um ângulo  $\theta_0$  com respeito a direção do campo. Quando a onda é refletida e retorna ao ponto inicial, ela sofre uma nova rotação de  $\theta_0$ , de modo que ela sofre uma rotação total de  $2\theta_0$ .

Supondo que termos de ordem cúbica ou superiores podem ser desprezados, uma ligeira modificação das Eqs. (5.52) e (5.53) nos dá:

$$k_{\pm} = \omega\varepsilon\mu_0\left[1 \pm \frac{\alpha}{2\beta} + \frac{1}{8}\frac{\alpha^2}{\beta^2}\right]. \quad (5.64)$$

Substituindo o resultado anterior na Eq. (5.63), obtemos:

$$\theta_0 = \frac{\beta}{2\alpha}z\omega\sqrt{\alpha\mu_0\varepsilon}. \quad (5.65)$$

Como  $\theta_0 \neq 0$ , segue que a ferrita é um meio não-recíproco. Pela Eq. (5.65) vemos que este fenômeno é devido à matriz dada na Eq. (5.31). De fato, se  $\beta \rightarrow 0$ , segue que  $\theta_0 \rightarrow 0$ , que é equivalente a não ter a perturbação.

Os resultados desta seção são os mesmos obtido por *Helszajn* [21] via equações de Maxwell na forma diferencial e vetorial.

## 5.4 Potenciais de Hertz

Em sua tese doutoral, Albuquerque [17] parte, como base de seu modelo teórico para o estudo do comportamento dispersivo dos modos guiados em linhas de microfita e linhas de lâminas bilaterais sobre substratos ferrimagnéticos magnetizados, dos *Potenciais de Hertz*.

Nesta seção apresentaremos tais potenciais na forma vetorial, tais como estão em Albuquerque [17], para em seguida, utilizarmos os resultados dos Capítulos 1 e 2 para a passagem dos mesmos para a linguagem de formas.

Aqui usaremos que as equações de Maxwell são dadas pelas expressões (3.14), (3.15), (3.16) e (3.17), com as fontes nulas.

### 5.4.1 Potenciais de Hertz vetoriais

Nesta parte, consideraremos a matriz do tensor de permeabilidade da ferrita como sendo dada pela matriz (5.32), e o tensor de permissividade como sendo  $\varepsilon I$ , onde  $I$  é a matriz identidade. Neste caso, Albuquerque [17] define os potenciais de Hertz elétrico e magnético, respectivamente, como sendo

$$\vec{B} = i\omega\mu_0\gamma\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2}\varepsilon\nabla \times \vec{\Pi}_e \quad (5.66)$$

e

$$\vec{E} = -i\omega\mu\nabla \times \vec{\Pi}_h \quad (5.67)$$

com os respectivos *calibres*

$$\phi_e = \frac{\gamma}{\alpha}\nabla \cdot \vec{\Pi}_e \quad (5.68)$$

e

$$\phi_h = \nabla \cdot \vec{\Pi}_h. \quad (5.69)$$

A solução completa dos campos é uma superposição dos modos *TE* e *TM*, sendo dada por

$$\vec{E} = -i\omega\mu\nabla \times \vec{\Pi}_h + \omega^2\gamma\mu_0\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2}\varepsilon\vec{\Pi}_e + \frac{\gamma}{\alpha}\nabla\nabla \cdot \vec{\Pi}_e \quad (5.70)$$

$$\vec{H} = i\omega\gamma\mu_0\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2}\mu^{-1}\varepsilon\nabla \times \vec{\Pi}_e + \omega^2\mu\varepsilon\vec{\Pi}_h + \nabla\nabla \cdot \vec{\Pi}_h. \quad (5.71)$$

### 5.4.2 Potenciais de Hertz em formas diferenciáveis

Daqui em diante, efetuaremos um raciocínio análogo ao da Seção 2.1.2, quando partimos das equações de Maxwell na forma vetorial e as passamos para as formas diferenciáveis. Sendo assim, não repetiremos os argumentos, mas nos deteremos em detalhes que julgamos importantes para chegarmos às Eqs. (5.70) e (5.71) escritas em formas.

Com tal intuito, a equação (5.66) torna-se

$$B = i\omega\gamma\mu_0\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2}\varepsilon d\Pi_e. \quad (5.72)$$

Inserindo a equação anterior na Eq. (3.14), temos

$$dE = \omega^2 \gamma \mu_0 \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2} \varepsilon d\Pi_e, \quad (5.73)$$

que nos fornece uma solução

$$E = \omega^2 \gamma \mu_0 \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2} \varepsilon \Pi_e + d\phi_e \quad (5.74)$$

onde imporemos a condição de *condição de calibre*

$$\phi_e = \frac{\gamma}{\alpha} \star d \star \Pi_e. \quad (5.75)$$

Substituindo a Eq. (5.75) na Eq. (5.74), obtemos a expressão para o campo elétrico

$$E = \omega^2 \gamma \mu_0 \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2} \varepsilon \Pi_e + \frac{\gamma}{\alpha} d \star d \star \Pi_e. \quad (5.76)$$

Para o campo magnético, considerando que  $H = \star_h^{-1} B$  e a Eq. (5.72) temos

$$H = i\omega \mu_0 \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2} \varepsilon \star_h^{-1} d\Pi_e \quad (5.77)$$

Usando as formas diferenciais, a expressão (5.67) torna-se

$$E = -i\omega \star_h d\Pi_h. \quad (5.78)$$

Desde que o tensor de permissividade seja um múltiplo da matriz identidade, então  $\star_\varepsilon = \varepsilon \star$ . Levando-se em conta a relação constitutiva  $D = \star_\varepsilon E$ , a Eq. (3.15) e o Lema 3, concluímos que

$$dH = \omega^2 \varepsilon \mu d\Pi_h \quad (5.79)$$

cuja solução geral é

$$H = \omega^2 \varepsilon \mu \Pi_h + d\phi_h. \quad (5.80)$$

Impondo a *condição de calibre*

$$\phi_h = \star d \star \Pi_h \quad (5.81)$$

e substituindo (5.81) em (5.80), temos

$$H = \omega^2 \varepsilon \mu \Pi_h + d \star d \star \Pi_h. \quad (5.82)$$

As equações (5.75) e (5.81) são as expressões (5.68) e (5.69) expressas em formas diferenciáveis, respectivamente.

A solução geral é dada por:

$$E = -i\omega \star_h d\Pi_h + \omega^2 \gamma \mu_0 \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2} \varepsilon \Pi_e + \frac{\gamma}{\alpha} \star d \star \Pi_e \quad (5.83)$$

e

$$H = i\omega \gamma \mu_0 \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2} \star_h^{-1} \varepsilon d\Pi_e + \omega^2 \varepsilon \mu \Pi_h + d \star d \star \Pi_h \quad (5.84)$$

As duas equações acima são equivalentes às obtidas em (5.70) e (5.71), respectivamente.

# Conclusão

Neste trabalho, vimos como os métodos da moderna geometria nos ajudam a reescrever as equações da eletrodinâmica. As formas diferenciáveis mostraram ser boa ferramenta no estudo dos problemas de física e engenharia abordados.

Operacionalmente o enfoque apresenta vantagens, já que as formas são até muito mais simples de serem manipuladas do que muitas equações do cálculo vetorial ordinário. Em particular, ao menos na opinião do autor, é muito mais fácil calcular a expressão do rotacional de um campo vetorial via formas do que calcular um determinante 3 por 3.

Com um tal formalismo, além de obtermos as equações clássicas da eletrodinâmica, surgiram, nestes estudos, equações que permeiam o eletromagnetismo, a óptica, a radiação de antenas... tais como a *fórmula de Stratton-Chu*, a *equação de Fredholm de segunda espécie*, as *equações de Fresnel* e o teorema de *Reciprocidade de Lorentz*, por exemplo.

Creemos que os resultados mais importantes da dissertação sejam a fórmula para a diádica de Green, expressão esta que é razoavelmente simples para os casos estudados, as condições de propagação do campo eletromagnético num meio anisotrópico escritas em formas e a previsão da rotação de *Faraday*, que demonstra a consistência do formalismo que utilizamos.

De fato, para tensores hermitianos, a expressão da diádica de Green é obtida completamente, como mostra o cálculo efetuado no Capítulo 4. Acredito que tal forma diferenciável tenha grande aplicabilidade para o cálculo dos campos em sistemas de interesse na engenharia, bem como em algumas situações físicas, relacionadas com a matéria. Existem possibilidades de se encontrar aplicações à Física do Estado Sólido que trata com meios anisotrópicos.

Quanto às condições de propagação dos campos para ondas planas e a rotação de Faraday, são importantes para demonstrar a consistência do formalismo. De fato, as formas são a generalização do cálculo vetorial do espaço euclidiano tridimensional para dimensões arbitrárias. Assim tudo feito em  $\mathbb{R}^3$  com vetores deve possuir um análogo em formas. A recíproca também é verdadeira, como está demonstrado nos teoremas mostrados no Capítulo 4.

# Apêndice

## Teorema de Reciprocidade de Lorentz

Considere um volume  $V$ , limitado por uma superfície  $S$ . Suponha que neste volume existam dois pares de fontes  $(\vec{J}_1, \vec{M}_1)$  e  $(\vec{J}_2, \vec{M}_2)$ , cujos campos associados são, respectivamente,  $(\vec{E}_1, \vec{H}_1)$  e  $(\vec{E}_2, \vec{H}_2)$ .

Então podemos escrever as seguintes equações:

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{E}_1 &= -i\omega\mu\vec{H}_1 - \vec{M}_1 \\ \nabla \times \vec{H}_1 &= -i\omega\varepsilon\vec{E}_1 + \vec{J}_1\end{aligned}\quad (1)$$

e

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{E}_2 &= -i\omega\mu\vec{H}_2 - \vec{M}_2 \\ \nabla \times \vec{H}_2 &= -i\omega\varepsilon\vec{E}_2 + \vec{J}_2\end{aligned}\quad (2)$$

Utilizando-se a identidade vetorial

$$\nabla \cdot (\vec{E}_1 \times \vec{H}_2 - \vec{E}_2 \times \vec{H}_1) = -\vec{E}_1 \cdot \vec{J}_2 + \vec{H}_1 \cdot \vec{M}_2 + \vec{E}_2 \cdot \vec{J}_1 - \vec{H}_2 \cdot \vec{M}_1\quad (3)$$

A forma integral da equação anterior é:

$$\oint_S (\vec{E}_1 \times \vec{H}_2 - \vec{E}_2 \times \vec{H}_1) \cdot d\vec{S} = \int_V (-\vec{E}_1 \cdot \vec{J}_2 + \vec{H}_1 \cdot \vec{M}_2 + \vec{E}_2 \cdot \vec{J}_1 - \vec{H}_2 \cdot \vec{M}_1) dV\quad (4)$$

As equações (3) e (4) são as formas diferenciais e integrais do *Teorema de Reciprocidade de Lorentz*, respectivamente.

Tal teorema é muito importante quando trabalhamos, por exemplo, em teorias de antenas, a saber, em problemas não-limitados. Para maiores detalhes, consulte Collin [22].

# Bibliografia

- [1] Westenholz, C. von, *Differential Forms in Mathematical Physics*. Amsterdam, Holanda: North-Holland Publishing Company, 1978.
- [2] Warner, F. W., *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*. New York: Springer, 1983.
- [3] Guillemin, V. and Pollack, A., *Differential Topology*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall, 1974.
- [4] Spivack, M., *Calculus on Manifolds*. New York: Benjamin, 1965.
- [5] Flanders, H., *Differential Forms with Applications on Physical Sciences*. New York, New York: Dover, 1963.
- [6] Feres, R., *O teorema de Hodge e o espectro do operador de Laplace-Beltrami em Variedades Riemannianas*, Dissertação de Mestrado defendida no Departamento de Matemática, IMECC-Unicamp, Campinas: 1985.
- [7] Bassalo, J. M. F., *Nascimentos da Física*, Revista Brasileira de Ensino de Física, vol. 20, num. 4, 1998.
- [8] Vaz Jr., J., <http://www.ime.unicamp.br/~vaz>.
- [9] Obukhov, Y. N. and Hehl, F. W., *A gentle introduction to the foundations of classical electrodynamics: The meaning of the excitations  $(D, H)$  and the field strengths  $(E, B)$* . E-print: physics/0005084.
- [10] Heald, M. A and Marion, J. B, *Classical Electromagnetic Radiation*. New York, 3 ed., Saunders College Publishing, 1995.
- [11] Misner, C. W., Thorne, K. S. and Wheeler, J. A.; *Gravitation*. San Francisco: W. H Freeman and Company, 1973.

- [12] Warnick, K. F., Selfridge, R. H. and Arnold, D. V.; *Teaching Electromagnetic Field Theory Using Differential Forms*, IEEE Trans. Educ., Vol. 40, pp 53-68, 1997.
- [13] Warnick, K. F., *A Differential Forms Approach to Electromagnetics in Anisotropic Media*, Tese de doutorado em engenharia elétrica, Departamento de Engenharia Elétrica e Computação, Brigham Young University, 1997.
- [14] Warnick, K. F. and Arnold, D. V., *Green Forms for Anisotropic, Inhomogeneous Media*, *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, Vol. 11, pp. 1145-1164, 1997.
- [15] Lima, E. L., *Álgebra Linear*. Rio de Janeiro: Coleção Matemática Universitária, Impa, 5<sup>a</sup> ed., 2001.
- [16] Thirring, W., *A Course in Mathematical Physics 2-Classical Field Theory*. New York: Springer-Verlag, 1979.
- [17] Albuquerque, M. R. M. L. de, *Análise Dinâmica de Linhas de Microfita e de Linhas de Lâminas Sobre Substratos Ferrimagnéticos Magnetizados*, Tese de Doutorado, Faculdade de Engenharia Elétrica e Computação. Campinas: Unicamp, 1993.
- [18] Souza, R. F., *Notas de Aula de Curso sobre Ferritas*, Faculdade de Engenharia Elétrica. Campinas: Unicamp, 1994.
- [19] Trefethen, L. N. and Bau III, D., *Numerical Linear Algebra*. Philadelphia: Siam, 1997.
- [20] Born, M. and Wolf, E., *Principles of Optics*. Cambridge: Cambridge University Press, 6<sup>a</sup> ed., 1980.
- [21] Helszajn, J., *Principles of Microwave Ferrite Engineering*. Londres: Wiley-Interscience, 1969.
- [22] Collin, E. R. *Engenharia de Microondas*. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1979.