MÉTODO DAS VARIAÇÕES LOCAIS EM PROBLEMAS DE APROXIMAÇÃO

João Frederico da Costa Azevedo Meyer

Orientador: Prof. Dr. Ubiratan D'Ambrósio

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação da Universidade Estadual de Campinas, para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Campinas, S.P. - 1973

gratidão

minha gratidão aos companheiros do grupo de Cálculo de Variações: Bordin, Ivam, Otília, Rodney; e ao membro distante, Seiji, aquele abraço retributivo;

minha gratidão ao Dicésar e ao Katsaras, que me ouviram as dúvidas;

yoroshiku, Tadao-san, que comigo ganhou cabelos brancos nos terminais do P.D.P. - e que é contra agradecimentos formais e escritos;

agradeço a Ubiratan D'Ambrósio, meu orientador e incentivador;

à Nê, que me anima, minha gratidão; e, sobretudo minha gratidão a Deus.

INTRODUÇÃO

Dado um espaço de Banach real reflexivo V e um funcional estritamente convexo em tal espaço, quer-se aproximar a solução $u \in V$ para o problema

$$J(u) = \operatorname*{Inf}_{v \in V} J(v)$$

i.e.: deseja-se obter por aproximação o elemento do espaço que minimize o funcional. Obviamente, outros problemas são transformados neste, na medida em que a solução não seja de obtenção nem muito difícil, nem muito custosa (em termos de computação), como por exemplo:

Dado em V um operador A, e um elemento f nesse espaço de Banach real reflexivo, achar $u \in V$ tal que

$$A.u = f ,$$

que se transforma na procura do elemento ótimo de V, tal que seja minimizado o funcional

$$J(v) = \|A.v - f\|_V^2$$

sendo o operador A não necessàriamente linear.

Como o mesmo intuito, mas sob diferentes condições impostas sobre os diversos aspectos do problema, há outros trabalhos. No capítulo 1 se apresenta uma descrição básica do processo das Variações Locais ora em dois passos (método 1), ora em um passo (método 2), processo que, sob as condições apresentadas, visa, resolver o problema proposto, com a prova da convergência dos métodos e algumas aplicações. Em [3] , [4] , [5] , [6] , [7] , [8] ,

[9] , [14] , [15] , [22] , [23] , [24] , outras aplicações são estudadas com algum detalhe. No final deste capítulo uma principal variante é abordada dentre diversas que existem, a do "passo ótimo", que preserva a característica local do processo. As que não conservam esta característica, são denominadas de métodos "vizinhos" por LORIDAN em [14].

A minimização de alguns funcionais não convexos faz parte do 2º capítulo, usando os métodos vistos com mais cuidado no primeiro. Na obtenção do elemento ótimo de um funcional não convexo mas "bem comportado", é usado um outro funcional estritamente convexo auxiliar - uma função de penalização. Esta idéia continua até o fim do capítulo, passando do caso de tais funcionais não-convexos para o problema com vínculos, i.e.: achar $u \in K \subset V$, sendo K um convexo do espaço V, tal que

$$J(u) = \operatorname*{Inf}_{v \in K} J(v)$$

ver [3] e [15].

Este mesmo problema é visto no terceiro capítulo, sem a utilização de funções de penalização, mas com um processo que se presta à aproximação da solução quando esta estiver na fronteira do convexo em questão - ver [7].

Como se pode ver desde o capítulo 1, fazendo variar as hipóteses, são obtidas diversas situações de convergência, ora forte, ora fraca, e este aspecto se preserva até o fim do trabalho. O uso de funções de penalização apropriadas a cada caso é estudado em [15] , [3] e [5] e, em [22] , [23] e [24] , sendo aí estendido até incluir a aproximação de distribuições nas teses de NISSEN e DUPUY, ou até a procura de pontos de sela, como na tese de SCIARRINO - MORGAN.

Por outro lado, e tendo em mente novas possibilidades que surgem, aspectos diferentes de métodos derivados do das variações locais podem ser mesclados para a resolução de problemas do tipo daquele apresentado no início desta terceira parte, como os de equações integrais lineares ou não-lineares, equações a derivadas parciais e problemas de otimização, como em [5] e [8] .

No capítulo 0 se apresentam rapidamente alguns conceitos essenciais a que se fará referência ao longo do texto.

No apêndice são apresentados os dois programas que forneceram os melhores resultados de acordo com os processos descritos nos capítulos I e III, nessa ordem. A falta de tempo impediu que o primeiro se igualasse em precisão aos resultados indicados no final do capítulo I, embora o segundo, cujos resultados figuram no final do capítulo III, tenha sido bem mais satisfatório.

Em suma, aquilo que é apresentado não se propõe a resolver numericamente (em termos de computadores) problemas quaisquer. O propósito é o de preparar o caminho para trabalho futuro com a utilização destes conceitos, adaptando-os e modificando-os para obter soluções significativas em problemas afins.

Capítulo 0

Com o intuito de esclarecer a notação a ser usada naquilo que se segue, algumas definições e alguns resultados são apresentados neste capítulo preliminar.

Dentre os espaços vetoriais, os que interessam são aqueles construidos sobre o corpo dos reais e, portanto, esta denominação de real será apenas subentendida.

Dado um espaço de Banach ou de Hilbert, V, seja A um operador cujo domínio é V e cuja imagem esteja em outro espaço W, ele será dito um operador em V se $V = W$. Se $W = \mathbb{R}$, o operador é um funcional.

0.1 Definições:

Uma sequência $\{x_n\}_n$ em V, um espaço de Banach, é dita fracamente convergente (ou convergente na topologia fraca de V) se, para todo funcional linear ℓ definido em V se tiver

$$\ell . x_n \to \ell . x \quad \text{em} \quad \mathbb{R} \quad \text{quando} \quad n \to \infty$$

Um funcional f de domínio V é dito fracamente contínuo se, para toda sequência $\{x_n\}_n$ que converge fracamente para um $x_o \in V$, se tiver que $f(x_n) \to f(x_o)$ em $\mathbb{R}$ quando $n \to \infty$.

Um operador A é fortemente contínuo em $x_o \in V$ se, para qualquer sequência $\{x_n\}$ que converge fracamente para x_o, a sequência $\{A.x_n\}$ convergir para $A.x_o$ i.e.:

$$\lim_{n\to\infty} \|A.x_n - A.x_o\|_V = 0$$

Um operador A será dito fracamente contínuo em $x_o \in V$ se, para toda sequência que converge fracamente para x_o (o que se indicará por $x_n \rightharpoonup x_o$), se tiver a sequência $\{A.x_n\}_n$ convergindo fracamente para $A.x_o$.

0.2 Definições:

Um subconjunto K de um espaço de Banach V é fracamente fechado se contiver todos os seus pontos-limite fracos: para toda sequência $\{x_n\}_n$ em K fracamente convergente para x_o, $x_o \in K$ Num espaço de Banach, uma esfera é fracamente fechada sendo convexa e fechada na topologia da norma de V, cf. Cotlar, Cignoli [10].

Um subconjunto K do V é dito fracamente compacto se toda sequência $\{x_n\}_n$ em K tiver uma subsequência $\{x_{n_k}\}_k$ que convirja fracamente para um elemento $x_o \in K$. A esfera é fracamente compacta se todo subconjunto infinito da esfera for fracamente compacto.

Um operador A de V em W é dito compacto em $H \subset V$ se levar subconjuntos limitados de H em subconjuntos limitados de W. Se, alem de compacto, for contínuo, é dito completamente contínuo em H.

Um espaço de Banach V é dito reflexivo (ou regular) se coincidir com o espaço conjugado de seu conjugado i.e.: se V for homeomorfo a $(V')'$. Em outras palavras se, para todo $\ell^* \in (V')'$, houver $v \in V$ tal que

$$\langle \ell^* , z \rangle = \langle z , v \rangle \quad \forall z \in V'$$

Observa-se que todo espaço de Hilbert é reflexivo sendo auto-adjunto; os espaços L^p, $1<p<\infty$ são reflexivos.

0.3 Teorema: Uma condição necessária e suficiente para que um espaço seja reflexivo é que a esfera unitária seja fracamente compacta.

ver [21]

0.4 Definições: Um funcional J definido em V, um espaço de Banach (que é linear se (i) $\forall u,v \in V$, $J(u + v) = J(u) + J(v)$; e (ii) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $J(\alpha u) = \alpha J(u)$) é convexo (estritamente convexo) se, para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$ dado, com $0<\alpha<1$ e para dois distintos elementos de V valer a desigualdade (respectivamente, a desigualdade estrita):

$$J(\alpha u + (1-\alpha) \leq \alpha J(u) + (1-\alpha)\, J(v)$$

(respectivamente $J(\alpha u + (1-\alpha)v) < \alpha J(u)+(1-\alpha)\, J(v)$).

Se a relação valer apenas para $u,v \in H \subset V$, J é convexo em H. Um subconjunto K do espaço V é convexo se para quaisquer $x,y \in K$ contiver também $\alpha x + (1-\alpha)y$ para $\forall \alpha$, $0\leq\alpha\leq 1$.

Indica-se por $[J,H]$ o seguinte conjunto:

$\{(r,v) \in \mathbb{R} \times H: J(v) \leq r\}$ onde J é o funcional definido em $H \subset V$. Segue que o funcional J será convexo em H, se e só se o conjunto $[J,H]$ for convexo em $\mathbb{R} \times V$

ver [16] Luenberger

0.5 Uma propriedade de funções convexas em $\mathbb{R}^n$ é que G é uma função de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$ (um funcional em $\mathbb{R}^n$) convexa no subconjunto convexo K de $\mathbb{R}^n$ se e só se para todo $x \in S$ existir uma função linear $\varphi_x(\xi) = [a_i \xi^i]_{i=1}^{n} + b$ em S tal que

(i) $\varphi_x(x) = G(x)$

(ii) $G(\xi) \geq \varphi_x(\xi)$ para $\forall\ \xi \in S$

Se G for de classe C^1 em S esta condição equivale a

$$G(\xi) - G(x) - \left[(\xi^i - x^i)\ \frac{\partial G}{\partial x^i}(x)\right]_{i=1}^{n} \geq 0,\ \forall x,\xi \in S$$

E se G for de classe C^2 em S a condição equivale a

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x_i \partial x_j}(\xi) \cdot x^i \cdot x^j \geq 0 \quad \forall \xi, x \in S$$

cf. [17] Morrey.

<u>0.6 Lema</u>: Se J é um funcional estritamente convexo, contínuo na topologia (da norma) de um espaço vetorial normado E, é semi-contínuo inferiormente na topologia fraca de E.

$\square$

$\forall \varepsilon > 0$, $\forall \nu_o \in E$, existe uma vizinhança V de ν_o para a qual vale:

$\forall \nu \in V, \quad J(\nu) \geq J(\nu_o) - \varepsilon$

Seja $V = \left[J^{-1}(-\infty, J(\nu_o) - \varepsilon]\right]^C$. Sendo J contínuo e convexo o conjunto $J^{-1}(-\infty, J(\nu_o) - \varepsilon]$ é um fechado e convexo em E sendo a imagem inversa de um intervalo fechado de $\mathbb{R}$. Então é fechado na topologia fraca de V, contendo todos os seus pontos-limite. Seu complementar, V é aberto na topologia fraca de E, contem ν_o e, para todo $\nu \in V$,

$J(\nu) \geq J(\nu_o) - \varepsilon$

$\square$

cf. [10] Cotler e Cignoli

<u>0.7 Lema</u>: Se, alem disso, E for um espaço de Banach reflexivo, dada em E uma sequência $\{u_n\}_n$ com $\|u_n\| \leq C$, constante, $\forall n$, que possui uma subsequência fracamente convergente a um elemento $u \in E$, e se $\{J(u_n)\}_n$ converge para $J(u)$ em $\mathbb{R}$, a própria

sequência u_n converge para u em E, na topologia fraca de E, sendo u tal que $J(u) = \operatorname{Inf}_{v\in E} J(v)$.

$\square$

$\|u_n\| \leq C \quad \forall n$, são limitados os conjuntos $F_n=\{u_k : k\geq n\}$. Seja $\bar{F}_n$ o fecho na topologia fraca. Para todo N, $\bigcap_{n=1}^{N} \bar{F}_n \neq \phi$;

e, como o espaço E é reflexivo, o conjunto $\|u_n\| \leq C$ é fracamente compacto, então

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{F}_n \neq \phi$$

como há uma subsequência $\{u_{n_k}\}_k$ que converge fracamente para u, então

$$u \in F = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{F}_n$$

Se u é único em F, $u_n \rightharpoonup u$ na topologia fraca. Supondo, no entanto, que há em F outro elemento ν.

Então há outra subsequência $\{u'_n\}_n$ de $\{u_n\}_n$ que converge fracamente para ν.

Da semi-continuidade inferior de J na topologia fraca de E, segue que

$$J(\nu) \leq \liminf J(u'_n) = J(u).$$

sendo u tal que $J(u) = \operatorname{Inf}_{v\in E} J(\nu)$, tem-se que $\nu = u$.

$\square$

<u>0.8 Definição</u>: Dado um operador A definido em um espaço de Banach V, este é dito diferenciável em $x_0 \in V$, no sentido de Fréchet, se, para todo $h \in V$ se tiver

$$A(x_o + h) - A(x_o) = (\Delta A)_{x_o}(h) = F(x_o).h + w(x_o-h) \quad ,$$

onde $F(x_o).h$ é um operador linear em h, e $w(x_o,h)$ é tal que

$$\lim_{\|h\|\to 0} \frac{\|w(x_o,h)\|}{\|h\|} = 0$$

O mesmo é feito com relação a um funcional definido num espaço de Banach V, que é dito diferenciável em $x_o \in V$ no sentido de Fréchet se

$$J(x_o + h) - J(x_o) = (\Delta J)_{x_o}(h) = (\delta J)_{x_o}(h) + \varepsilon(x_o,h)$$

onde $(\delta J)_{x_o}(h)$ é um funcional linear em h e $\lim\limits_{\|h\|\to 0} \dfrac{\|\varepsilon(x_o,h)\|}{\|h\|} = 0$.

cf. [12] Gelfand e Fomin

[11] D'Ambrosio

[21] Vainberg.

1. Hipóteses, descrição do método 1

Sejam: Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$, e V um espaço de Banach reflexivo de funções definidas em Ω, (como $L^p(\Omega)$, $1<p<\infty$, por exemplo), e ainda J, um funcional contínuo, não linear estritamente convexo, que satisfaz:

$$(1.1) \qquad \lim_{\|v\|\to\infty} J(v) = +\infty$$

1.1 Teorema: Existe um único elemento $u \in V$ tal que $J(u) = \operatorname{Inf}_{v\in V_N} J(v)$ onde V_N é qualquer subespaço de V.

$\square$ (i) existência: como $\lim_{\|v\|\to\infty} J(v) = \infty$, para todo $M > 0$, $\exists\ K > 0$ tal que $\forall v \in V_N$ com $\|v\| > K \Rightarrow J(v) > M$. O conjunto $A = \{v \in V_N : J(v) \leq M\}$ é fechado na topologia da norma de V, é convexo e, portanto, é fracamente fechado em V, contendo todos seus pontos-limite fraco.

É limitado porque se não o fosse não valeria que $\forall v \in A$, $J(v) \leq M$ e, da semi-continuidade inferior do funcional J na topologia fraca de V, segue a existência de um elemento $u \in A \subset V_N$ que minimize o funcional J em A.

No entanto este elemento minimiza o funcional J em todo o V_N porque $\forall v \in V_N = A \cup A^c$, tem-se:

$$J(u) \leq J(v) \quad \text{se} \quad v \in A$$

$$J(u) \leq M < J(v) \quad \text{se} \quad v \in A^c \ ;$$

isto é:

$$J(u) = \operatorname{Inf}_{v\in V_N} J(v)$$

(ii) unicidade

supondo que há 2 elementos u_1 e u_2 em V_N tais que

$$u_1 \neq u_2 \quad \text{e}$$

$$j = J(u_1) = J(u_2) = \operatorname*{Inf}_{v \in V_N} J(v)$$

sendo V_N um espaço vetorial e J estritamente convexo,

$\therefore$ se $w = \dfrac{u_1 + u_2}{2}$

$$J(w) = J\left(\frac{u_1 + u_2}{2}\right) < \frac{1}{2} J(u_1) + \frac{1}{2} J(u_2) = j = \operatorname*{Inf}_{v \in V_N} J(v) \ ,$$

o que é absurdo.

Então $u_1 = u_2$

$\square$

1.2 Observações

1) Sendo V um espaço de Banach (reflexivo), a bola unitária (e, portanto, todo subconjunto infinito e limitado de V) é fracamente compacta em V

i.e:

$\forall \{x_n\}_n$ em K infinito e limitado, esta sequência admite uma subsequência $\{x_{n_k}\}_k$ fracamente convergente a um elemento $x_o \in K$.

2) Seja a sequência $\{V_N\}_N$ de subespaços de V

V_j de dimensão finita j tal que

(1.2) $V_j \subset V_{j+1} \subset V \ \forall_j$ e $\bigcup\limits_j V_j$ seja densa em V;

sejam ainda: $\{e_1, \ldots, e_N\}$ uma base de V_N, e um $\rho > o$ arbitrário com

$$V_N^\rho = \{u \in V_N : u = \sum_{i=1}^{N} m_i \rho e_i \ , \ m_i \in \mathbb{Z}\} \ .$$

3) Será adotada a seguinte notação, para simplificar o que segue:

(1.3)
$$\begin{cases} j = J(u) = \operatorname*{Inf}\limits_{v \in V} J(v) \\[2ex] j_N = J(u_N) = \operatorname*{Inf}\limits_{v \in V_N} J(v) \\[2ex] j_N^\rho = J(u_N^\rho) = \operatorname*{Inf}\limits_{v \in V_N^\rho} J(v) \end{cases}$$

1.3 Proposição:

i) $j_N \to j$ quando $N \to \infty$

ii) $J_N^{\rho} \to j_N$ quando $\rho \to 0^+$

iii) $u_N \to u$ fracamente quando $N \to \infty$

iv) $u_N^{\rho} \to u$ fracamente quando $\rho \to 0^+$

☐ (i) $\forall\ \varepsilon > o$, da continuidade do funcional se obtem $\delta = \delta_\varepsilon(u) > 0$ tal que se $w \in V$ e $\|w - u\|_V < \delta$

$\Longrightarrow |J(w) - J(u)| < \varepsilon$.

Dado este δ, como $\bigcup_n V_n$ é densa em V, há um $v \in \bigcup_n V_n$ com $\|u - v\|_V < \delta$; i.e:

$\exists\ N_o \mid \exists\ v \in V_{N_o} \subset V_m$, $\forall m \geq N_o$ com

$J(v) - J(u) < \varepsilon$; e, então,

$j_{N_o} \leq J(v) < j + \varepsilon$.

Como $V_{N_o} \subset V_m$, $\forall m \geq N_o \therefore j \leq j_m \leq j_{N_o} < j + \varepsilon$, $\forall m \geq N_o$,

então: $\lim\limits_{m\to\infty} j_m = j$

(ii) De modo semelhante se prova que

$j_N^{\rho} \to j$ quando $\rho \to 0^+$.

(iii) Para mostrar que $u_N \rightharpoonup u$ fracamente quando $N \to \infty$ verifica-se primeiro que $j_N \leq K$, onde K é uma constante que independe do índice N, porque $j_N \to j$, e se pode concluir que $\|u_N\|_V \leq C$, outra constante que independe do N, pois se $\|u_N\|_V \to \infty$ então $j_N = J(u_N) \to +\infty$

Tem-se portanto, a sequência $\{u_N\}_N$ limitada em V, espaço de Banach reflexivo. Há uma subsequência $\{u_{N_k}\}_k$ que converge fracamente para algum $w \in V$.

Nesta topologia (0.6) o funcional J é semi-contínuo inferiormente e então:

$J(w) \leq \lim\limits_{k\to\infty} \inf J(u_{N_k}) = \lim\limits_{N\to\infty} j_N = j = J(u)$

e $J(w) \leq J(u) \Rightarrow w = u$

Nestas condições (0.7) a própria sequência $\{u_N\}_N$ converge fracamente para u.

De modo semelhante se prova (iv).

$\square$

1.4 Observações: (i) supondo que $V \subset L^p(\Omega)$ com $1<p<\infty$, sendo Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ (de modo mais preciso, seja $V \subset W^{m,p}(\Omega)$ V fechado, com $W^{m,p}(\Omega) = \{\varphi: D^\alpha\varphi \in L^p(\Omega)\ |\alpha| \leq m\}$),

(ii) sejam $h \in \mathbb{R}^n$, $h = (h_1, \dots, h_n)$ com $h_i > 0$ para $i = 1,2,\dots,n$ e V_h um subespaço de V de dimensão finita $N(h)$. $N(h)$ é o número de pontos de u'a malha discreta $\Omega_h \subset \Omega$. Seja ainda $\rho = \rho(h)$, com ρ diminuindo a zero quando o faz h (em parágrafos seguintes torna-se claro o interesse em não ter ρ e h independentes).

(iii) Como foi visto, $V_h^{\rho(h)}$ denota o subconjunto de V_h cujos elementos são da forma $\sum_{i=1}^{N(h)} m_i \rho e_i$ em que $m_i \in \mathbb{Z}$, $\rho = \rho(h)$ e $\{e_1, \dots, e_{N(h)}\}$ é uma base de V_h .

Considere-se, a título de exemplo o espaço $L^p(\Omega) = V$, sendo Ω aberto limitado do $\mathbb{R}^n$, e $1<p<\infty$. Dado $h \in \mathbb{R}^n$, constrói-se a malha $\Omega_h \subset \Omega$ com $N(h)$ pontos, obtidos das interseções das retas $x_i = \ell h_i$ $i = 1,\dots,n$ e $\ell \in \mathbb{Z}$, contidas no Ω . Em torno de cada vértice p^i da malha Ω_h constrói-se um paralelepípido Ω_i^h :

$$\Omega_i^h = \{x \in \Omega:\ p_j^i - \frac{h_j}{2} \leq x_j < p_j^i + \frac{h_j}{2}\} \subset \Omega.$$

Usando funções características: $\chi_{\Omega_i^h}(x) = \begin{cases} 1 & x \in \Omega_i^h \\ 0 & x \notin \Omega_i^h \end{cases}$,

obtem-se $V_h = \{u \in V:\ u = \sum_{i=1}^{N(h)} \alpha_i\, \chi_{\Omega_i^h}(x)\}$ onde uma base de V_h é obviamente, $\{\chi_{\Omega_i^h}\ ,\ i = 1,\dots, N(h)\}$ e $\alpha_i \in \mathbb{R}$.

assim, uma aproximação de u em V_h seria $u_h = \sum_{i=1}^{N(h)} u(p^i)\, \chi_{\Omega_i^h}$, aproximação esta que pode, dependendo da malha, estar tão pró xima quanto se quiser ([13] , [19]) .

(iv) Sendo V_h um espaço de dimensão finita $N(h)$, a terna $\{V_h, p_h, r_h\}$, com $p_h \in \mathcal{L}(V_h, V)$ e $r_h \in \mathcal{L}(V, V_h)$, é dita aproximação "estável" de V se o erro de truncamento $\|p_h\ r_h\ u - u\|_V \to 0$ quando $|h| \to 0$.

No exemplo acima $r_h\ u = \sum_{i=1}^{N(h)} u(p_i)\ \chi_{\Omega_i^h}$ é o operador restrição; e $p_h: V_h \to V$, o operador prolongamento, será simplesmente a identidade, Ver [2] [9] e [25].

Demonstra-se que

$$(1.3) \quad \|p_h\ v_h\|_V \leq s(h)\|p_h\ v_h\|_{L^p}$$

onde $s(h)$ é a constante de estabilidade e $\lim_{|h|\to 0} s(h) = +\infty$, ver [2] Aubin, e [9] Cherruault.

Em caso de ser $V = W^{m,p}(\Omega)$ como no que se trata aqui, $s(h) = \dfrac{C}{|h|^m}$, onde C é constante, independendo de h.

<u>1.5 Teorema</u>: Se $\lim_{|h|\to 0} S(h)\ \rho(h) = 0$ então

(i) $j_h^\rho = J(p_h\ u_h^\rho) = \inf_{v \in V_h^\rho} J(v) \to j$ quando $|h| \to 0$

(ii) $p_h\ u_h^\rho \to u$ fracamente quando $|h| \to 0$

□

Tem-se $\inf_{v_h \in V_h^{\rho(h)}} J(p_h\ v_h) \geq \inf_{v \in V} J(v) = j$

Seja $u \in V$ tal que $J(u) = j$. Se ficar provado que, para todo $\varepsilon > 0$, existe h_ε em $\mathbb{R}^n$ para o qual

$$\forall h \quad \text{com} \quad |h| \leq |h_\varepsilon| \Rightarrow j_h^{\rho(h)} \leq j + \varepsilon ,$$

resultará que $\limsup_{|h|\to 0} j_h^{\rho(h)} \leq j + \varepsilon$; e como

$\liminf_{|h|\to 0} j_h^{\rho(h)} \geq j$, resultará a parte (i), i.e.:

$\lim_{|h|\to 0} j_h^{\rho(h)} = j$. Para tanto, há que escolher um elemento

$h = (h^1, h^2, \ldots, h^n) \in \mathbb{R}^n$ tal que, dado $\varepsilon > 0$, seja obtido da continuidade do funcional J, um valor $\eta > 0$ para o qual

$$\| p_h \, r_h \, u - u \|_V \le \eta \Rightarrow | J(p_h \, r_h \, u) - J(u) | < \varepsilon/2$$

ou $J(p_h \, r_h \, u) < j + \varepsilon/2$. cf. [2], [9], [14] e [25].

Denominando de u_h o elemento $r_h . u \in V_h$, pode-se encontrar $u_h^{\rho(h)} \in V_h^{\rho(h)}$ que esteja "perto" de u_h visto que

$$u_h = \sum_{i=1}^{N(h)} \alpha_i \, \chi_{\Omega_i^h}$$

onde $\Omega_i^h = \{ x \in \Omega : - \frac{h^j}{2} + x_i^j \le x^j \le x_i^j + \frac{h^j}{2} \}$ é um paralelepípido construido em torno do vértice x_i da malha Ω_h ; e $\chi_{\Omega_i^h}$ é a função característica de $\chi_{\Omega_i^h}$; e $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{N(h)})$ são as componentes de $u_h \in V_h$,

$u_h^{\rho(h)} \in V_h^{\rho(h)}$ é $u_h^{\rho(h)} = \sum_{i=1}^{N(h)} m_i \, \rho(h) \, \chi_{\Omega_i^h}$ com $m_i \in \mathbb{Z}$ e, fazendo variar h, de modo que $|h| \to 0$ e, em consequência, diminuir $\rho(h)$, os α_i podem ser aproximados satisfatoriamente pelos $m_i \rho(h)$:

$|m_i \rho(h) - \alpha_i| < \rho(h)$ em qualquer Ω_i^h da malha Ω_h . Usando a desigualdade citada anteriormente, onde figura a constante de estabilidade $S(h)$ (1.3), tem-se:

$$\| p_h (u_h - u_h^{\rho(h)}) \|_V \le S(h) \, \| p_h (u_h - u_h^{\rho(h)}) \|_{L^p}$$

e $$\| p_h (u_h - u_h^{\rho(h)}) \|_{L^p}^p = \int_\Omega | p_h (u_h - u_h^{\rho(h)}) |^p \, dx \le$$

$$\le C . \sum_{i=1}^{N(h)} \int_{\Omega_i^h} | p_h (u_h - u_h^{\rho(h)}) |^p \, dx \le C . \sum_{i=1}^{N(h)} \int_{\Omega_i^h} | \alpha_i - m_i \rho(h) |^p \, dx \le$$

$$\le C . \, \rho(h)^p \sum_{i=1}^{N(h)} \int_{\Omega_i^h} dx = C (\text{vol } \Omega) . [\rho(h)]^p \; .$$

Indicando por K^p, constante finita, o produto $C . \, \mu(\Omega)$ e, vol tando à desigualdade desejada, tem-se:

$$\| p_h(u_h - u_h^{\rho(h)}) \|_V \leq S(h).\ \{K^p(\rho(h))^p\}^{1/p} = K.\ S(h).\ \rho(h)\ ;$$

como, por hipótese, $\lim\limits_{|h|\to 0} S(h)\ \rho(h) = 0$ e K é constante ,

$\exists\ h_o \in \mathbb{R}^n$ tal que se $|h| \leq |h_o|$, então

$\| p_h\ u_h^{\rho(h)} - p_h\ u_h \| < \eta$.

Então $J(p_h\ u_h^{\rho(h)}) \leq J(p_h\ u_h) + \varepsilon/2$

e $j_h^{\rho(h)} \leq J(p_h\ u_h^{\rho(h)}) \leq J(p_h\ u_h) + \varepsilon/2 < j + 2\varepsilon/2$

Em face do comentário no início da demonstração, está provada a parte (i).

(ii) Há um único $u_h^\rho \in V_h^{\rho(h)}$ tal que $J(p_h\ u_h^\rho) = j_h^\rho$

como $j_h^\rho \to j$ quando $|h| \to 0$, tem-se que $j_h^\rho \leq C$, C constante, o que implica na limitação de $\| p_h\ u_h \|_V$ em decorrência de (1.1), portanto:

$$\| p_h\ u_h \|_V \leq K .$$

Sendo $\{p_h\ u_h\}_h$ limitada, admite uma subsequência convergente fracamente para algum $w \in V$.

Indicando ainda por $\{p_h\ u_h\}$ a subsequência em questão, a semi-continuidade inferior do funcional J na topologia fraca implica em

$$\lim_{|h|\to 0} \inf\ J(p_h\ u_h) \geq J(w)$$

mas $\lim\limits_{|h|\to 0} \inf\ j_h = j$, e, então $u = w$.

como a subsequência $\{p_h\ u_h\}_h$ converge para u quando $|h| \to 0$ na topologia fraca, e nas condições do teorema conclui-se que a própria sequência converge fracamente i.e.: $p_h\ u_h \longrightarrow u$ fracamente quando $|h| \to 0$ (ver 0.7).

$\square$

1.6 Observação: Sendo o problema principal proposto minimisar o funcional J sobre o espaço V, sabendo que, sob determinadas condições, essa solução é obtenível por aproximações em sub-espaços de dimensão finita V_h, procede-se praticamente como descrito no que se segue, constituindo-se o método naquele denominado das Variações Locais.

Como $u_h = \sum_{i=1}^{N(h)} x_i \, \chi_{\Omega_i^h}$, faz-se

$K(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{N(h)}) = J(\sum_{i=1}^{N(h)} \alpha_i \, \chi_{\Omega_i^h})$, transformando o problema no de minimisar a função

$$K : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad \text{i.e.:}$$

$$\operatorname*{Inf}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{N(h)}} K(\alpha_1, \ldots, \alpha_{N(h)}) = \operatorname*{Inf}_{v \in V_{N(h)}} J(v)$$

O processo se inicia com um valor inicial escolhido $(\alpha_1^o, \alpha_2^o, \ldots, \alpha_{N(h)}^o)$ e com outro, também escolhido, ρ. Usando, onde não houver possibilidade de dúvida, N no lugar de $N(h)$, definem-se

$$\left.\begin{aligned} \nabla_i &= K(\alpha_1^o, \ldots, \alpha_{i-1}^o, \alpha_i^o, \alpha_{i+1}^o, \ldots, \alpha_N^o) \\ \nabla_i^+ &= K(\alpha_i^o, \ldots, \alpha_{i-1}^o, \alpha_i^o + \rho, \alpha_{i+1}^o, \ldots, \alpha_N^o) \\ \nabla_i^- &= K(\alpha_i^o, \ldots, \alpha_{i-1}^o, \alpha_i^o - \rho, \alpha_{i+1}^o, \ldots, \alpha_N^o) \end{aligned}\right\} \quad i = 1, 2, \ldots, N.$$

Seja α_1^ρ escolhido dentre as primeiras coordenadas $\{\alpha_1^o, \alpha_1^o + \rho, \alpha_1^o - \rho\}$ de modo a minimizar o conjunto $\{\nabla_1, \nabla_1^+, \nabla_1^-\}$; substituido α_1^o por esse novo valor, obtem-se de modo análogo $\nabla_2, \nabla_2^+, \nabla_2^-$ em que ρ é somado ou subtraído na segunda componente. Semelhantemente, seja α_2^ρ o ponto de $\{\alpha_2^o, \alpha_2^o + \rho, \alpha_2^o - \rho\}$ para o qual se obtem o mínimo do conjunto $\{\nabla_2, \nabla_2^+, \nabla_2^-\}$. Substituindo α_2^o por α_2^ρ, o valor inicial, anteriormente $(\alpha_1^o, \alpha_2^o, \ldots, \alpha_N^o)$ passa a ser

$$(\alpha_1^\rho, \alpha_2^\rho, \alpha_3^o, \ldots, \alpha_N^o),$$

com o qual se repete o processo para a obtenção de ∇_3, ∇_3^+ e

∇_3^- , e também α_3^ρ ; sucessivamente usando este raciocínio até a obtenção de α_N^ρ , chega-se a um novo vetor

$$(\alpha_1^\rho , \alpha_2^\rho,\ldots,\alpha_N^\rho)$$

que passa a ser o valor inicial e com o qual o processo todo é repetido até se chegar a um vetor estacionário, i.e.: até se obter um vetor

$$(\alpha_1^\rho, \alpha_2^\rho,\ldots,\alpha_N^\rho) \quad \text{tal que}$$

$$(1.4)\begin{cases} \left.\begin{matrix}\nabla_1 \leq \nabla_1^+ \\ \nabla_1 \leq \nabla_1^-\end{matrix}\right\} K(\alpha_1^\rho,\ldots,\alpha_N^\rho) \leq K(\alpha_1^\rho \pm \rho, \alpha_2^\rho,\ldots,\alpha_N^\rho) \\ \left.\begin{matrix}\nabla_2 \leq \nabla_2^+ \\ \nabla_2 \leq \nabla_2^-\end{matrix}\right\} K(\alpha_1^\rho,\alpha_2^\rho,\ldots,\alpha_N^\rho) \leq K(\alpha_1^\rho, \alpha_2^\rho \pm \rho, \alpha_3^\rho,\ldots,\alpha_N^\rho) \\ \vdots \\ \left.\begin{matrix}\nabla_N \leq \nabla_N^+ \\ \nabla_N \leq \nabla_N^-\end{matrix}\right\} K(\alpha_1^\rho,\ldots,\alpha_N^\rho) \leq K(\alpha_1^\rho,\ldots,\alpha_{N-1}^\rho, \alpha_N^\rho \pm \rho). \end{cases}$$

O processo leva de fato, a um ponto estacionário, depois de um número finito de variações, o que se justifica pelo seguinte

<u>1.7 Lema</u>: Fixados N e ρ, após um número finito de variações o método descrito (método 1) conduz à existência de um vetor $(\alpha_1^\rho , \alpha_2^\rho,\ldots,\alpha_N^\rho)$ que verifique 1.4.

□

Sejam os pontos v_N^ρ no subconjunto V_N^ρ do subespaço V_N , cujas componentes são $\alpha_1^\rho , \alpha_2^\rho,\ldots,\alpha_N^\rho$ i.e.:
$v_N^\rho = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i^\rho e_i$ onde $\{e_1, e_2,\ldots,e_N\}$ é uma base de V_N, sendo os α_i^ρ aqueles que aparecem na descrição do método 1.

Dado que $\lim_{\|v\|\to+\infty} J(v) = +\infty$, tem-se que $\|v_N^\rho\| \leq C$ sendo C uma constante que independe de N. Então $\forall i=1,\ldots,N\ |\alpha_i^\rho| \leq K$ e, ao fim de no máximo N.R variações, o processo pára, onde R é o maior inteiro contido em $(K+i)/_{\varrho}$.

$\square$

<u>1.8 Observação</u>: Uma vez atingida a estacionaridade, o processo todo se repete com $\rho/2$ no lugar de ρ, procedimento este cuja convergência será vista no que se segue.

2. Um teorema de convergência

Denota-se o ponto obtido pelo método 1 e verificando (1.4), por $u_N^{*\rho} = (\alpha_1^\rho, \ldots, \alpha_N^\rho)$. Sejam ainda $j_N^\rho = J(u_N^{*\rho})$ e, supondo a existência de derivadas parciais contínuas da função $K = K(\alpha_1,\ldots,\alpha_N) = J(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i e_i)$ onde $\{e_1,\ldots,e_N\}$ é uma base de V_N. Esta imposição não é restritiva em termos práticos, ver §6, [4] e [5] . Demonstra-se então:

<u>2.1 Teorema</u>: (i) $j_N^{*\rho} \to j_N$ quando $\rho \to 0^+$, e

(ii) $u_N^{*\rho} \to u_N$ fortemente quando $\rho \to 0^+$.

$\square$

a prova independe de N. Com o intuito de simplificá-la, será feita com N = 2. Considera-se o problema de minimizar $K(\alpha_1,\alpha_2)$:

$$\operatorname*{Inf}_{\alpha_1,\alpha_2} K(\alpha_1,\alpha_2)$$

O método 1, já descrito, fornece um ponto $(\alpha_1^\rho,\alpha_2^\rho)$ que satisfaz (1.4) :

(2.1) $0 \le K(\alpha_1^\rho + \rho, \alpha_2^\rho) - K(\alpha_1,\alpha_2) = \rho \cdot K_1(\alpha_1^\rho + \Theta_1\rho, \alpha_2^\rho)$,

com $0 < \Theta_1 = \Theta_1(\rho) < 1$ e $K_1 \equiv \dfrac{\partial K}{\partial \alpha_1}$.

Então $K_1(\alpha_1^\rho + \Theta_1\rho , \alpha_2^\rho) \ge 0$ (2.2);

a desigualdade 2.1 continua valendo se $+\rho$ for substituido por $-\rho$ ($\rho > 0$ sempre) e Θ_1 for substituido por $\Theta_1' = \Theta_1'(\rho)$ com

$0 < \theta_1' < 1$, donde

(2.3) $K_1(\alpha_1^\rho - \theta_1' , \alpha_2^\rho) = \dfrac{\partial K}{\partial \alpha_1} (\alpha_1^\rho - \theta_1' , \alpha_2^\rho) \leq 0$

O mesmo raciocínio é seguido com relação à 2ª variável, partindo de

(2.4)

$$0 \leq K(\alpha_1^\rho , \alpha_2^\rho + \rho) - K(\alpha_1^\rho , \alpha_2^\rho) = \rho K_2(\alpha_1^\rho , \alpha_2^\rho + \theta_2 \rho)$$

donde (2.5) $\begin{cases} K_2(\alpha_1^\rho , \alpha_2^\rho + \theta_2\rho) \geq 0 \\ \qquad 0 < \theta_2 = \theta_2(\rho) < 1 \\ K_2(\alpha_1^\rho , \alpha_2^\rho - \theta_2'\rho) \leq 0 \\ \qquad 0 < \theta_2' = \theta_2'(\rho) < 1 \end{cases}$

com referências ao método 1 descrito, escolhido um ρ_o inicial, ρ vai a zero por sucessivas divisões por 2, $\rho_n = \dfrac{\rho_o}{2^n}$ e $\rho_n \to 0^+$ com $n \to +\infty$, logo

$V_N^{\rho_n} \subset V_N^{\rho_k}$ para todo $k \geq n$ e, então $J(u_N^{*\rho})$ é decrescente e, portanto, com o raciocínio do lema 1.7, tem-se

(2.6) $\|u_N^{*\rho}\| \leq C$ sendo C uma constante que independe de ρ, resulta que

(2.7) $\quad |\alpha_1^\rho| \leq C_1$

$\qquad\quad |\alpha_2^\rho| \leq C_2$

desigualdades em que as constantes C_1 e C_2 independem de ρ.

Das 2 sequências numéricas limitadas $\{\alpha_1^\rho\}$, $\{\alpha_2^\rho\}$ podem ser extraídas sub sequências convergentes, indicadas ainda por $\{\alpha_1^\rho\}$ e $\{\alpha_2^\rho\}$, que tendem respectivamente a β_1 e β_2 :

$$\left.\begin{matrix} \alpha_1^\rho \to \beta_1 \\ \alpha_2^\rho \to \beta_2 \end{matrix}\right\} \text{com } \rho \text{ (ou, como no método 1, } \rho_n) \to 0^+ .$$

Faz-se uso da continuidade das derivadas parciais da função K para obter:

$$(2.8)\quad \begin{cases} K_1(\alpha_1^{\rho} + \theta_1\,\rho\,,\ \alpha_2^{\rho}) \to K_1(\beta_1,\beta_2) \\ K_1(\alpha_1^{\rho} - \theta_1'\,\rho\,,\ \alpha_2^{\rho}) \to K_1(\beta_1,\beta_2) \\ K_2(\alpha_1^{\rho}\,,\ \alpha_2^{\rho} + \theta_2\rho) \to K_2(\beta_1,\beta_2) \\ K_2(\alpha_1^{\rho}\,,\ \alpha_2^{\rho} - \theta_2'\rho) \to K_2(\beta_1,\beta_2) \end{cases}$$

quando $\rho \to 0^+$.

Usando as desigualdades (2.2), (2.3) e (2.5) obtem-se

$$(2.9)\quad \begin{cases} K_1(\beta_1,\beta_2) = \dfrac{\partial K}{\partial \alpha_1}(\beta_1,\beta_2) = 0 \\ K_2(\beta_1,\beta_2) = \dfrac{\partial K}{\partial \alpha_2}(\beta_1,\beta_2) = 0 \end{cases}.$$

Como J, o funcional, admite um único ponto crítico, um mínimo, $(\beta_1,\beta_2) = u_N$ é o elemento de V_N tal que $J(u_N) = \operatorname*{Inf}_{v\in V_N} J(v)$

Então a própria sequência $(\alpha_1^{\rho}\,,\ \alpha_2^{\rho})$ converge para (β_1,β_2) i.e.:

$u_N^{*\rho} \to u_N$ quando $\rho \to 0^+$ e, sendo J funcional contínuo,

$J(u_N^{*\rho}) = j_N^{*\rho} \to j_N = J(u_N)$ quando $\rho \to 0^+$

$\square$

3. Método 2 ; teorema de convergência

O Método anterior dá a aproximação do problema

$$(3.1)\quad \operatorname*{Inf}_{v\in V} J(v) \quad \text{em 2 passos.}$$

Num 1º estágio, o problema proposto, (3.1), é substituido por

$$(3.2)\quad \operatorname*{Inf}_{v\in V_N} J(v) = J(u_N)$$

e, numa 2ª etapa, o método 1 fornece uma aproximação de $u_N \in V_N$.

A resolução de (3.1) pode ser proposta diretamente onde em vez de:

(i) fixar N, e fazer $\rho \to 0^+$ para esse N ;

(ii) escolhe-se $\rho = \rho(N)$, o que se constitui no método 2.

Supõe-se que o funcional J verifica as hipóteses apresentadas no parágrafo 1 , i.e.:

(0) J é um funcional não-linear, contínuo, estritamente convexo tal que $\lim_{\|v\|\to\infty} J(v) = +\infty$; e que verifica, além destas, as seguintes

(i) J tem derivada de Fréchet $F(x) = (\text{grad } J)(x)$ onde $\left.\begin{array}{l} F: V \to V' \\ \quad x \mapsto F(x) \end{array}\right\} V'$ é o dual de V

tem-se então $J(x + u) - J(x) = F(x).u + w(x,u)$ com w satisfazendo:

(3.3) $|w(x,u)| \leq k(x).\, \|u\|_V^{\alpha}$ desigualdade em que $\alpha > 1$, e $k(x)$ é função que independe de u e que leva sequências limitadas em conjuntos limitados; [21] Vainberg.

(ii) Se v_n tende fracamente a v no espaço V, e se u_n tende (fortemente) a u, tambem em V, então $F(v_n).\,u_n \to F(v).u$ em $\mathbb{R}$ quando $n \to \infty$;

(iii) para calcular $u_N^{*\rho(N)}$ pelo método 1, é usado como valor inicial, o $u_{N-1}^{*\rho(N-1)}$.

Tem-se então o

<u>3.1 Teorema</u>: Se $\alpha(N) = \sup\{ \|e_i\|_V \ , \ i = 1,2,\ldots,N\}$, se J verifica as propriedades [(0), (i),(ii) e (iii)] e, ainda,

(3.4) $\lim_{N\to\infty} N.[\rho(N)]^{\alpha-1} [\alpha(N)]^{\alpha} = 0$, então o método 2 converge.

De maneira mais precisa, e com a notação usual, tem-se : 1) $\lim_{N\to\infty} u_N^{*\rho(N)} = u$ na topologia fraca de V ; e

2) Se J é fracamente contínuo, então

$$\lim_{N\to\infty} j_N^{*\rho(N)} = j \ .$$

<u>3.2 Observação</u>:

De acordo com a hipótese (iii) a sequência $\{j_N^{*\rho(N)}\}_N$ é decrescente, é minorada inferiormente e, portanto, admite um limite ℓ .

$\lim_{N\to\infty} J(u_N^{*\rho(N)}) = \ell$. Com a semicontinuidade inferior de J em u

na topologia fraca de V, decorre que, como $\lim_{N\to\infty} u_N^{*\rho(N)} = u$ na topologia fraca de V,

$$\ell = \lim_{N\to\infty} j_N^{*\rho(N)} \geq j = J(u)$$

que é o único resultado obtenível se não for suposta a continuidade fraca de J. No entanto, se J for fracamente contínuo, então $\lim_{N\to\infty} u_N^{*\rho(N)} = u$ (na topol. fraca) $\Rightarrow \lim_{N\to\infty} J(u_N^{*\rho(N)}) = J(u) = j$ e a afirmação 2) vem a ser decorrência direta da 1).

□

Novamente se usa um raciocínio já utilizado, concluindo da limitação de $J(u_N^{*\rho(N)}) = j_N^{*\rho(N)}$, que

(3.5) $\|u_N^{*\rho(N)}\|_V \leq C$, onde C é uma constante que independe de N.

Pode ser extraída, da sequência $\{u_N^{*\rho(N)}\}_N$ uma sub sequência, indicada por $\{u^{*\rho(N)}\}_N$ que converge fracamente para um elemento $v \in V$, reflexivo.

Como foi visto em §2, tem-se:

$$(3.6)\quad \begin{cases} 0 \leq J(u^{*\rho(N)} + \rho e_i) - J(u^{*\rho(N)}) \quad , \quad \text{e} \\ 0 \leq J(u^{*\rho(N)} - \rho e_i) - J(u^{*\rho(N)}) \end{cases}$$

para qualquer i, $i = 1,2,\ldots,N$,

onde $\{e_1,e_2,\ldots,e_N\}$ é uma base de V_N e de onde se obtêm:

$$(3.7)\quad \begin{aligned} 0 &\leq J(u^{*\rho(N)} + \rho e_i) - J(u^{*\rho(N)}) = \rho F(u^{*\rho(N)}) \cdot e_i + \\ &\qquad + w(u_N^{*\rho(N)}, \rho e_i) \\ 0 &\leq J(u^{*\rho(N)} - \rho e_i) - J(u^{*\rho(N)}) = -\rho F(u^{*\rho(N)}) \cdot e_i + \\ &\qquad + w(u^{*\rho(N)}, -\rho e_i) \end{aligned}$$

segue: $\begin{cases} -w(u^{*\rho(N)}, \rho\, e_i) \leq \rho\, F(u^{*\rho(N)}).\ e_i \\ -w(u^{*\rho(N)}, -\rho e_i) \leq -\rho F(u^{*\rho(N)}).\ e_i \end{cases}$

e (3.8) $$\frac{-w(u^{*\rho(N)}, \rho\, e_i)}{\rho} \leq F(u^{*\rho(N)}).\ e_i \leq \frac{w(u^{*\rho(N)}, -\rho\, e_i)}{\rho} ;$$

como $|w(x,u)| \leq k(x)\ \|u\|_V^{\alpha}$ com $\alpha > 1$, então

$$|F(u^{*\rho(N)}).\ e_i| \leq \frac{k(u^{*\rho(N)}).\ \|\rho . e_i\|^{\alpha}}{|\rho|} =$$

(3.9)

$$= k(u^{*\rho(N)}).\ |\rho|^{\alpha-1}\ \|e_i\|^{\alpha}$$

mas $\|u^{*\rho(N)}\| \leq C$ e, dadas as hipóteses sobre o funcional J e portanto sobre k, conclui-se que

$k(u^{*\rho(N)}) \leq C_1$, com C e C_1 constantes que independem de N. Como $\alpha(N) = \sup\ \{\|e_i\|_V\ ,\ i = 1,2,\ldots,N\}$, da desigualdade (3.9) decorre que

(3.10) $$|F(u^{*\rho(N)} .\ e_i| \leq C_1\ \rho^{\alpha-1}\ [\alpha(N)]^{\alpha} \quad , \quad \text{para } i = 1,2,\ldots,N.$$

Fazendo uso da afirmação: $\forall v \in V$, $\exists \{\bar{C}_i\}_i$ tal que $|\bar{C}_i| \leq C_o$, constante que independe do índice i, e

$\lim\limits_{N\to\infty} \|v - \sum\limits_{i=1}^{N} \bar{C}_i\ e_i\|_V = 0$; chega-se a:

(3.11) $$|F(u^{*\rho(N)}).\ v\ | = |\ F(u^{*\rho(N)}).(\sum_{i=1}^{N} \bar{C}_i e_i + v - \sum_{i=1}^{N} \bar{C}_i e_i)|$$

o que pode ser majorado, usando a linearidade de F, por

$$\sum_{i=1}^{N} |\bar{C}_i| . |F(u^{*\rho(N)}).\ e_i\ | + |F(u^{*\rho(N)}).(v - \sum_{i=1}^{N} \bar{C}_i e_i)| \leq$$

$$\leq N.C_o\ C_1\ \rho^{\alpha-1}\ [\alpha(N)]^{\alpha} + |F(u^{*\rho(N)}).(v - \sum_{i=1}^{N} \bar{C}_i e_i|\quad ;$$

tendo sido utilizada a desigualdade (3.10) e a majoração por C_o das primeiras N coordenadas de v.

Como a subsequência $u^{*\rho(N)}$ converge fracamente para $s \in V$, e $v - \sum_{i=1}^{N} \bar{C}_i e_i$ tende (fortemente) para o elemento nulo do espaço V,

$$\lim_{N\to\infty} |F(u^{*\rho(N)}).(v - \sum_{i=1}^{N} \bar{C}_i e_i)| = |F(s).\ 0|.$$

Voltando à desigualdade (3.11) e passando ao limite com $N \to \infty$ obtem-se:

$$\lim_{N\to\infty} |F(u^{*\rho(N)}).v| \leq C_o.C_1 \lim_{N\to\infty} N.\rho^{\alpha-1} [\alpha(N)]^{\alpha} +$$

$$+ \lim_{N\to\infty} |F(u^{*\rho(N)}).(v - \sum_{i=1}^{N} \bar{C}_i e_i)|\ ;$$

como $\lim_{N\to\infty} N[\rho(N)]^{\alpha-1} [\alpha(N)]^{\alpha} = 0$, conclui-se que

(3.12) $\lim_{N\to\infty} |F(u^{*\rho(N)}).\ v| = 0$ o que vale para todo elemento $v \in V$. Por outro lado $\lim_{N\to\infty} F(u^{*\rho(N)}).\ v = F(s).\ v = 0$, $\forall v \in V$.

Então $F(s) \equiv 0$ i.e.: F(s) é a função nula de V', donde se conclui que s é ponto crítico de J, que tem um único ponto crítico u, onde atinge seu mínimo. Logo, s = u.

Pode ser concluido que a própria sequência $\{u_N^{*\rho(N)}\}_N$, e não só a subsequência, converge fracamente para u, demonstrando 1). Da observação 3.2 vê-se que a continuidade fraca de J leva a concluir que $\lim_{N\to\infty} j_N^{*\rho(N)} = j$, terminando a prova.

$\square$

3.3 Observação: Os teoremas 2.1 e 3.1 continuam valendo se ao espaço V se associa um espaço V_h de dimensão finita $N(h)$ e uma $p_h \in \mathcal{L}(V_h, V)$ tais que $\bigcup_h p_h V_h$ seja densa em V.

(i) No caso do teorema 2.1 é-se levado à consideração de funções de $N(h)$ variáveis definidas por

$K(\alpha_1^h, \ldots, \alpha_{N(h)}^h) = J(p_h v_h)$ em que $v_h \in V_h$ e tem $\alpha_1^h, \ldots, \alpha_{N(h)}^h$ como suas componentes ; a demonstração segue idêntica.

(ii) O teorema 3.1 continua válido, desde que o funcional J verifique as hipóteses assinaladas (as do §1 e (i),(ii),(iii)) e se

$$\lim_{|h| \to 0} N(h) \ [\rho(h)]^{\alpha - 1} \ [S(h)]^{\alpha} = 0$$

4. - Variantes dos métodos ; aplicações

Há variações que podem ser introduzidas no método 1. Em particular, os teoremas de convergência continuam valendo se aplicados a variantes como a que se segue:

Dado o ponto inicial $(\alpha_1^o, \alpha_2^o, \ldots, \alpha_N^o)$, ajunta-se $\pm \rho$ à 1ª componente, obtem-se α_1^{ρ} , e novamente se acrescenta $\pm \rho$ à 1ª componente, até ser obtida a estacionaridade. Em seguida passa-se à 2ª coordenada, e assim sucessivamente até a completa estacionaridade indicada em (1.4). Tomando $\rho' = \rho/2$ no lugar de ρ o processo pode ser continuado, ou os dois podem ser mesclados usando-se o método 1 com um determinado valor de ρ e a variante apresentada para o ρ' seguinte.

Com relação ao método 2, usa-se N, a dimensão dos subespaços V_N "maior possível" de modo que seja calculado $u_N^{*\rho(N)}$ com essa maior dimensão possível. Atingido tal limite, faz-se ρ tender a zero começando de $\rho(N)$.

Há que manter em consideração o fato de que nestes métodos, o computador é de primordial importância, sendo o "N maior possível" aquele alem do qual faltaria memória, ou área de trabalho à máquina. Alem disso, como o tempo utilizado para cálculos com grandes valores de N seria muito extenso, pode ser útil encarar a possibilidade de se fazer o método 1 por blocos i.e.: se $N = k.p$, faz-se a variação de $\pm \rho$ a n blocos de p componentes cada, cf. [4] Cherruault .

4.1 Aplicações à resolução da equação <u>Au = f</u> com H um espaço de Hilbert, $A \in \mathcal{L}(H,H)$, i.e.: A é um operador linear em H; A^{-1} é contínuo ; toma-se, uma vez apresentado o problema

(4.1) $Au = f$,

(4.2) $J(v) = \|Av - f\|_H^2$.

Pode ser verificado que se está nas condições do primeiro parágrafo, visto que:

(i) o funcional J é contínuo, sendo-o o operador e a aplicação que a um qualquer elemento v do espaço H, associa $\|Av - f\|_H^2$ em $\mathbb{R}$;

(ii) J é estritamente convexo ; e

(iii) $\lim\limits_{\|v\| \to \infty} J(v) = +\infty$.

Então o problema está nas condições do parágrafo 2. Entretanto , vale também o teorema de convergência do parágrafo 3, o teorema 3.1. A verificação destas afirmações está no que se segue:

(ii) J é estritamente convexo.

Sejam $u,v \in V = H$ e μ e λ reais positivos tais que $\mu + \lambda = 1$. Quer-se provar que $J(\mu v + \lambda u) < \mu J(v) + \lambda J(u)$.

De fato:

$$J(\mu v + \lambda u) = \langle A(\mu v + \lambda u) - f \, , \, A(\mu v + \lambda u) - f\rangle =$$

$$= \langle \mu Av + \lambda Au - (\mu + \lambda)f, \, \mu Av + \lambda Au - (\mu + \lambda)f\rangle =$$

$= <\mu(Av - f) + \lambda(Au - f), \mu(Av - f) + \lambda(Au - f)> =$

$= \mu^2 \|Av - f\|_H^2 + \lambda^2\|Au - f\|_H^2 + 2\mu\lambda <Au - f, Av - f> \leq$

$\leq \mu^2 \|Av - f\|^2 + \lambda^2 \|Au - f\|^2 + 2\lambda\mu\|Au - f\| . \|Av - f\|$

indicando por p a norma $\|Av - f\|_H$ e q a norma $\|Au - f\|_H$ o que se deseja verificar é que

$$\lambda^2 q^2 + \mu p^2 + 2\lambda\mu q . p < \lambda q^2 + \mu p^2 \quad \text{equivalente a:}$$

$$p^2(\mu - \mu^2) + q^2(\lambda - \lambda^2) - 2\mu\lambda p q > 0$$

como $\lambda + \mu = 1$, então

$\mu - \mu^2 = \mu(1 - \mu) = \mu\lambda$ e $\lambda - \lambda^2 = \lambda\mu$ e a desigualdade acima equivale a

$$\mu\lambda(p^2 + q^2 - 2p q) > 0 \quad (*)$$

$\mu\lambda > 0$ e $(p-q)^2 \geq 0$, valendo a igualdade só se $p=q$. Se esta igualdade valer, vale, no lugar da desigualdade

$<Av - f, Au - f> \leq \|Av - f\| . \|Au - f\|$, a igualdade.

Mas se isto acontecer, então:

$\|Av - f\| = \|Au - f\|$ e $Av - f$ e $Au - f$ são tais que $\exists$ $r \geq 0$ com $Av - f = r(Au - f)$

$$\Rightarrow \|Av - f\| = r. \|Au - f\|$$

e $r = 1 \Rightarrow Au = Av$. Da existência de A^{-1} decorre a biunivocidade do operador A, donde $u = v$, se não valer a desigualdade estrita em (*); e a estrita convexidade do funcional J.

(iii) $J(v) = \|Av - f\|^2 = <Av - f, Av - f>_H \geq$

$\geq M. \|v\|^2 + \|f\|^2 - 2 <Av,f> \geq$

$\geq M. \|v\|^2 + \|f\|^2 - 2\|Av\| . \|f\| =$

$$= \|v\|^2 \left(M + \left(\frac{\|f\|}{\|v\|}\right)^2 - 2 \left\|A. \frac{v}{\|v\|}\right\| . \frac{\|f\|}{\|v\|}\right),$$

desigualdade em que se fez uso do fato de que se o operador A é inversível (e é) então $\exists\ \alpha$ real positivo tal que $\|A\cdot v\| > \alpha\ \|v\|$ ([13] Halmos); $M = \alpha^2$ e se usou também a desigualdade

$$<Av, f> \ \leq \ \|Av\| \cdot \|f\|$$

$$- <Av, f> \ \geq - \|Av\| \cdot \|f\|$$

mas $$\lim_{\|v\|\to\infty} \|v\|^2 \left[M + \frac{\|f\|}{\|v\|} \left(\frac{\|f\|}{\|v\|} - 2\left\|A \frac{v}{\|v\|}\right\| \right)\right] =$$

$$= +\infty \ \therefore \ \lim_{\|v\|\to\infty} J(v) = \infty \ .$$

Quanto às hipóteses do §3,

(i) J admite derivada de Fréchet: $F(x).\ u = 2 <Ax-f, Au>_H$ porque

$$J(x+u) - J(x) = <Ax + Au - f, Ax + Au - f> -$$

$$- <Ax - f, Ax - f> =$$

$$= \|Ax - f\|^2 - \|Ax - f\|^2 + 2 <Ax - f, Au> + \|Au\|^2 =$$

$$= 2 <Ax - f, Au> + \|Au\|^2$$

onde $2 <Ax - f, Au>$ é linear em u e

$$\lim_{\|u\|\to o} \frac{\|Au\|^2}{\|u\|} \leq \lim_{\|u\|\to o} \|A\|^2 \ \|u\| = 0$$

cf [13] Halmos
[10] Cotlar ;

(ii) tem-se $w(x,u) = \|Au\|^2 \leq \|A\|^2 . \|u\|^2$

onde $\left\{\begin{array}{ll} k(x) = \|A\|^2 & \text{constante} \\ \alpha = 2 > 1 & \end{array}\right\}$ sendo satisfeita a condição (3.3)

(iii) a condição b do §3 também é verificada porque se

$\left.\begin{array}{ll} x_n \rightharpoonup x & \text{fracamente} \\ u_n \longrightarrow u & \text{(fortemente)} \end{array}\right\}$ em H, dadas as definições de A e do diferencial de Fréchet de J tem-se:

$\frac{1}{2} F(x_n) . u_n = \frac{2}{2} < Ax_n - f, Au_n > =$

$$= < Ax_n \; Au_n > - < f, A\, u_n >$$

como o operador A é contínuo Au_n converge para Au, em H e, portanto $<f, A\, u_n> \to <f, Au>$ em $\mathbb{R}$, quando $n\to\infty$. Resta então mostrar que $<Ax_n, Au_n> \to <Ax,Au>$ em $\mathbb{R}$, quando $n\to\infty$

De fato:

$$<Ax_n, Au_n> = <Ax_n, Au> + <Ax_n, A(u_n-u)>$$

e a aplicação de H em $\mathbb{R}$ que a cada $v\in H$ associa o real $<x,A^*(Au)>$ é funcional linear contínuo $\Longrightarrow$ $<Ax_n, Au> = <x_n, A^* Au>$ que tende a $<x, A^* Au> = <Ax , Au>$ em $\mathbb{R}$, dada a convergência fraca de x_n a x em H. Por outro lado,

$| < Ax_n, A(u_n - u) >| \leq M \|A\| . \|u_n - u\|$, que tende a zero em $\mathbb{R}$ sendo $\|x_n\| \leq M$ para M independente do índice n, por causa da convergência fraca de x_n em H, i.e.:

$x_n \rightharpoonup x$ (fraca) $\therefore\ \forall \ell\in H'$, tem-se: $\ell x_n \to \ell x$ em $\mathbb{R}$ $\Rightarrow \|x_n\| \leq M$. Então:

4.2 Lema: O método 2 se aplica à resolução de Au = f com o uso do funcional proposto, sendo $A\in \mathcal{L}(H,H)$, A^{-1} contínuo, H um espaço de Hilbert.

4.3 Resolução de Au = f , sendo A um operador não-linear em H,H espaço de Hilbert. Dado o problema de resolver

$$(4.3) \qquad Au = f \quad ,$$

define-se (4.4) $J(v) = \|Av - f\|_H^2$; sendo A, o operador em H suposto tal que J seja estritamente convexo e tal que:

$$(4.5) \quad \lim_{\|v\|\to\infty} \|Av\|^2 = +\infty \quad , \quad \text{então}$$

4.4 Lema: o método 1, aplicado ao problema citado, converge: as hipóteses são facilmente verificadas.

Se, alem disto, se supuser que

(i) A é fracamente contínuo e, em

$$\circledast \quad A(v+u) = Av + F(v).\ u + w(v,u) \ ([21])$$

se tenha $w(v,u) \Big|$ (4.6) $\|w\ (v,u)\| \leq C\ \|u\|^2$ (embora o expoente 2 pudesse ser substituido por α com $\alpha > 1$), então:

<u>4.5 Lema</u>: Ao problema (4.4) pode ser aplicado o método 2. Basta verificar que estão satisfeitas as hipóteses do §3: (i) J admite diferencial de Fréchet.

$$J(v+u) - J(v) = \|A(v+u) - f\|^2 - \|Av - f\|^2 =$$

$$= (\text{por } \circledast) = \|Av + F(v).\ u + w(v,u) - f\|^2 - \|Av - f\|^2 =$$

$$(4.7) \quad = \begin{cases} \|Av - f\|^2 + \|F(v).u\|^2 + \|w(v,u)\|^2 + \\ + 2 \langle Av - f, F(v).u\rangle + 2\langle Av - f\ , w(v,u)\rangle + \\ + 2 \langle F(v).u\ , w(v,u)\rangle - \|Av - f\|^2 , \end{cases}$$

se $\Omega(v,u) = \|F(v).u\|^2 + \|w(v,u)\|^2 +$

$$+ 2 \langle Av - f, w(v,u)\rangle + 2 \langle F(v).u, w(v,u)\rangle$$

então:

$$\|\Omega\ (v,u)\| \leq \|F(v)\|^2 . \|u\|^2 + \|w(v,u)\|^2 +$$

$$+ 2 \|Av - f\| . \|w(v,u)\| +$$

$$(4.8) \quad + 2 \|F(v).\ u\| . \|w(v,u)\|$$

$$\Rightarrow \|\Omega\ (v,u)\| \leq \|u\|^2 \Big\{ \|F(v)\|^2 + C^2 \|u\|^2 +$$

$$+ 2C \|Av - f\| + 2C\ \|F(v)\| . \|u\| \Big\}$$

e $\displaystyle \lim_{\|u\| \to 0} \frac{\|\Omega(v,u)\|}{\|u\|} = 0$.

$$\Rightarrow (\text{grad } J)(v).\ u = G(v).\ u = 2 \langle Av - f, F(v).\ u\rangle$$

onde $F(v).\ u = A(v+u) - A(v) - w(v,u)$.

(ii) Com a continuidade fraca do operador A e a continuidade de F (forte), tem-se que quando

$$\left.\begin{array}{l} v_n \longrightarrow v \text{ fracamente} \\ u_n \longrightarrow u \text{ (fortemente)} \end{array}\right\} \text{ então } G(v_n).\ u_n =$$

$$= 2 < Av_n - f,\ F(v_n).\ u_n > \to 2 < Av - f,\ F(v).u>$$

i.e.: $G(v_n).\ u_n \to G(v).\ u.$

Finalmente: de (4.8) se tem que

$$\|\Omega(v,u)\| \leq \|u\|^2 \ (K_o + C^2 \ \|u\|^2 + K_1\|u\|)$$

fazendo $v = u_N^{*\rho(N)}$ e tomando $R \geq 2$,

prova-se que $\|\Omega(v,u)\| \leq K.\ \|u\|^R$. De fato, das condições impostas, se obtem que F é fortemente contínuo e compacto e portanto, $\{F(u_N^{*\rho(N)})\}_N$ é limitado ; bem como o é

$\{\|Au_N^{*\rho(N)}\|\}_N$, senão $\{j_N^{*\rho(N)}\}_N$ não seria limitado.

Segue, de (4.8), que $\|\Omega(v,u)\|$ é limitado por uma expressão $C_o\ \|u\|^r$ com $r \geq 2$ e vale a desigualdade proposta.

5 - Uma variação do método de variações locais

(com o intuito de acelerar o processo numérico de convergência).

No lugar do costumeiro e fixo passo ρ, procura-se um passo ótimo em cada uma das direções de variações escolhidas.

Como o intuito é realmente o de acelerar a aproximação de $u \in V$ tal que

$$J(u) = \inf_{v \in V} J(v)$$

onde se está nas condições de desejadas. O processo é estudado no intuito de melhorar a obtenção do ínfimo de

$J: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, partindo de um $u_o = (x_1, \ldots, x_n)$ em que J assume um determinado valor, passando-se ao ponto $u_o + \rho\, v$ em que:

(i) $v \in \mathbb{R}^N$, um vetor em cuja direção se faz a variação de passo ρ, $v = (v_1, \ldots, v_N)$

(ii) $\rho \in \mathbb{R}$, um escalar, de modo a obter

$$J(u_o + \rho\, v) < J(u_o)$$

ρ pode ser escolhido de modo que se tenha o menor valor possível de $J(u_o + \rho\, v)$

usando o desenvolvimento de Taylor em torno do ponto u_o até termos de 2º ordem, obtem-se:

$$(5.1) \qquad J(u_o + \rho\, v) = J(u_o) + \rho \sum_{j=1}^{N} v_j \frac{\partial J(u_o)}{\partial x_j} +$$

$$+ \frac{\rho^2}{2!} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} v_i v_j \frac{\partial J(u_o)}{\partial x_i \partial x_j}$$

obtendo $J(u_o + \rho\, v)$ como função de ρ também, à qual se impõe a condição de que

$$\frac{\partial J}{\partial \rho} = 0$$

obtendo: $$(5.2) \qquad \frac{\partial J}{\partial \rho}(u_o + \rho\, v) = \sum_{j=1}^{N} v_j \frac{\partial J(u_o)}{\partial x_j} +$$

$$+ \rho \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} v_i v_j \frac{\partial^2 J(u_o)}{\partial x_i \partial x_j} = 0$$

ou $$\rho = - \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{N} v_j \frac{\partial K}{\partial x_j}(u_o)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} v_i v_j \frac{\partial^2 J}{\partial x_i \partial x_j}(u_o)}$$

Não tendo sido feitas muitas hipóteses adicionais sobre o funcional J , em tais condições o valor do ρ obtido pode também corresponder a uma máxima variação de J em relação a ρ.

Escolhendo o vetor indicador de direção v sucessivamente como cada um dos vetores unitários dos eixos coordenados e_i, $i = 1,2,\ldots,N$, obtem-se como o passo ótimo ρ que dá o maior decréscimo do funcional J, de (5.2):

$$(5.3) \qquad \rho = - \frac{\dfrac{\partial J(u_o)}{\partial x_k}}{\dfrac{\partial^2 J(u_o)}{\partial x_k^2}} \quad , \quad \text{o passo ótimo na direção } e_k$$

É este valor de ρ o que se usa na variação do método direto de variações locais, na direção de e_k.

Em geral, o funcional utilizado para aproximar a solução u é da forma

$$J = \sum_{i=1}^{N} s_i^2$$

ver [3].

Portanto, para um funcional assim, tem-se

$\dfrac{\partial^2 J}{\partial x_k^2}$ = constante, $k = 1,2,\ldots,N$ e, neste caso a fórmula (5.3) vale e o uso de ρ ótimo apressa consideravelmente o método de variações locais. Valem como exemplos os casos apresentados em §6, analisados em [5].

O desenvolvimento em série, porém, pode não terminar nos membros de 2º ordem, tendo-se, em tal situação:

$$(5.4) \quad J(u_o + \rho e_k) = J(u_o) + \rho \frac{\partial J(u_o)}{\partial x_k} + \frac{\rho^2}{2} \frac{\partial^2 J(u_o)}{\partial x_k^2} + \frac{\rho^3}{6} \frac{\partial^3 J(u_o)}{\partial x_k^3} + \ldots$$

É evidente que nestas condições a determinação do passo ρ ótimo é bem mais difícil, podendo ser anulada toda a vantagem que advem de se usar o ρ ótimo no método de variações locais se for necessário obter o mínimo do polinômio em ρ:

$$\rho \frac{\partial J}{\partial x_k}(u_o) + \frac{\rho^2}{2} \frac{\partial^2 J(u_o)}{\partial x_k^2} + \frac{\rho^3}{6} \frac{\partial^3 K(u_o)}{\partial x_k^2} + \ldots$$

Mas ainda neste caso é possível introduzir uma variação do método para que acelerado, seja "eficiente" em termos práticos do uso do computador:

em vez de se calcular, em cada passagem, o funcional $J(u_o, \rho e_k)$ pela fórmula que é geralmente dada por

$$\sum_{i=1}^{N} s_i^2$$

que é "custosa" em termos de exigir muitos cálculos e, portanto, tempo, recalculam-se os termos que não foram afetados pela mudança de u_o para $u_o + \rho e_k$ isto é, na fórmula (5.4) do desenvolvimento de Taylor interrompido no termo de ordem m tal que

$\frac{\partial^m J}{\partial x_k^m}(u_o) = C$, constante - obtendo o valor de $J(u_o + \rho e_k)$ a partir dos valores de $J(u_o)$, $\frac{\partial J}{\partial x_k}(u_o)$, $\ldots$, $\frac{\partial^m J}{\partial x_k^m}(u_o)$. O fato de evitar a somatória no cálculo alivia o tempo do processo, mas este caso é particular porque, se por um lado as derivadas parciais podem ser de cálculo bastante difícil, por outro lado o desenvolvimento (5.4) pode ter infinitos termos. Nestes casos, onde se exige o cáculo de derivadas parciais, o método perde a característica de um método direto, mas ganha em eficiência prática.

Num exemplo que se considera no parágrafo 6, se teria o ρ ótimo em cada direção dado aqui:

quer-se u tal $u(x) + \int_{-1}^{1} \frac{u(t)}{x-t}\, dt = f(x)$, e, para isso,

dado $Au = f$, faz-se

$$J(v) = \|Av - f\|^2_{L^2} \quad \text{aproximado por}$$

$$J_h(v) = h \sum_{i=-N+1}^{N-1} \left| u(ih) + \sum_{j=-N+1}^{N-1} \left[u(jh).\log\left|1 + \frac{1}{j-i-1/2}\right|\right] - f(ih)\right|^2$$

e o ρ ótimo na "direção e_k" é

$$\rho = - \frac{\frac{\partial J(u_o)}{\partial x_k}}{\frac{\partial^2 J(u_o)}{\partial x_k^2}} =$$

$$= - \left(u_o(hk) + \sum_{j=-N+1}^{N-1} u_o(h_j).\log\left|1. + \frac{1}{j-k-\frac{1}{2}}\right| - f(hk)\right)$$

onde $\frac{\partial^2 J}{\partial x_k^2}(u_o) = 2h > 0$.

Neste caso, o elemento da base e_k é a função característica do intervalo $\left[(-\frac{1}{2})h, (k + \frac{1}{2})h\right]$ com $k = -N+1, -N+2, \ldots, N-2, N-1$ sendo o conjunto de funções características sobre tais intervalos a base do espaço de dimensão $2N-1$ com o qual se aproxima o próprio $L^2((-1,1))$. cf [3] Chervault e [4] .

Em [14] são apresentados outros processos de modo a acelerar o método, embora alguns não possuam a característica local.

6 - Resultados Numéricos

6.1 Resolução da equação integral singular

$$u(x) + \text{v.p.} \int_{-1}^{1} \frac{u(t)}{x-t}\, dt = f(x) \quad , \text{ com } f \in L^2(-1,1)$$

e a função u, então, tambem em $L^2(-1,1)$. Define-se

$$J(u) = \int_{-1}^{1} \left| u(x) + \text{v.p.} \int_{-1}^{1} \frac{u(t)}{x-t}\, dt - f(x) \right|^2 dx$$

e, usando um $h > 0$ é-se levado à discretização do problema, aproximando $J(v)$ por $J_h(v_h)$ com $v_h \in V_h$ de dimensão finita $N(h)$ e J_h dado por:

$$J_h(v_h) = h. \sum_{i=-N+1}^{N-1} \left\{ v_i + \sum_{j=-N+1}^{N-1} \left[v_j . \log \left| 1 + \frac{1}{j-i-1/2} \right| \right] - f(ih) \right\}^2$$

sendo os v_i's as componentes de v_h no espaço V_h (com $N = N(h)$ nos símbolos de somatória), componentes que dão o valor da função escada em cada intervalo $[(j-1/2)h, (j+\frac{1}{2})h)$. Para resultados numéricos e estimativa de erro ver Cherruault [4], Loridan [14] e [3].

Embora este problema proposto tenha sido abordado com o auxílio de companheiros do departamento de computação, o aparecimento de problemas na execução e a exiguidade de tempo impediram a obtençaõ de resultados tão significativos quanto os de Cherruault, Loridan.

6.2 Resolução da equação integral não-linear

$$u(x) + \int_{0}^{1} (x-y)(1 + e^{u(y)} \sin^2 y)\, dy = 0$$

Seguindo o mesmo caminho que em 5.1, obtem-se o problema discretizado como descrito aqui:

$$J_h(v_h) = \sum_{j=1}^{N-1} \{u_j + jh.S_1 - S_2\}^2 \quad , \quad \text{com}$$

$$S_1 = 1 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N-1} e^{uj}(h - \sin h \cos 2jh)$$

$$S_2 = \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{N-1} e^{uj}(\frac{jh^2}{2} - \frac{h}{4}(2\, j \sin h \cos 2\, jh + \sin 2jh.\, \cos h) +$$

$$+ \frac{1}{4} \sin h.\, \sin 2jh)$$

Novamente se refere ao trabalho de CHERRUAULT [4] para resultados numéricos sendo esclarecido que, como em 6.1 :

(i) se 90% das componentes do vetor u_h^ρ permanecem estacionárias considerou-se no programa que foi obtido o ponto u_h^ρ do método 1.

(ii) fixado o h, interrompe-se a sucessiva divisão de ρ por 2 quando a diferença entre dois valores sucessivos do funcional (i.e.: em $u_h^{\rho_o}$ e em $u_h^{\rho_o/2}$) for não maior que 10^{-8} .

(iii) Nos trabalhos mencionados, a precisão foi da ordem de

6.1 : com 64 pontos, <u>erro de 10^{-4}</u>
com 256 pontos, <u>erro de 10^{-5}</u>

6.2 : com 128 pontos, <u>erro de 2.10^{-6}</u>

6.3 Resolução da equação a derivadas parciais.

$$\begin{cases} u(x)^m - \Delta u(x) = f(x) & \text{sobre} \quad \Omega = (-1,1)\times(-1,1) \\ u|_{\partial\Omega} = 0 & \text{com} \quad m \ \text{ímpar} \end{cases}$$

e $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$; onde o operador Δ é aproximado por

$D_{i,j}$:

$$\frac{1}{h^2}\left[u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1} - 4u_{i,j}\right]$$

sendo $u_{i,j}$ a aproximação, do tipo desejado, de $u(ih,jh)$. Assim, este problema é levado à minimização do funcional

$$J_h(u) = h^2 \sum_{i,j} \{u^m_{i,j} - D_{i,j} - f_{i,j}\}^2$$

com $f_{i,j}$ indicando $f(ih,jh)$. Neste caso, o trabalho de Cherruault [4] indica os seguintes resultados, fazendo

(i) $m = 1$,

$f(x) = (x^2-1)(y^2-1) - 2(y^2+x^2-2)$, e

usando 225 pontos em Ω.

o erro é da ordem de $\begin{cases} \underline{8\times10^{-4}} & \text{para } \rho = 1/64 \\ \underline{5\times10^{-6}} & \text{para } \rho = 1/8192 \end{cases}$

(ii) $m = 3$

$f(x) = (x^2-1)^3.(y^2-1)^3 - 2(y^2 + x^2 - 2)$, e

usando 225 pontos em Ω.

o erro é da ordem de $\begin{cases} \underline{7\times10^{-4}} & \text{para } \rho = 1/256 \\ \underline{2\times10^{-5}} & \text{para } \rho = 1/16384 \end{cases}$

==================

CAPÍTULO II

§1 - Hipóteses

Ate aqui foram vistos processos para a minimisação de funcionais estritamente convexos fazendo uso do método de variações locais. No entanto, este método também pode ser usado no caso de funcionais não convexos, e não lineares.

Quer-se resolver o problema de minimisar um funcional não-convexo J num espaço de Banach (reflexivo):

(1.1) $\operatorname*{Inf}_{v \in V} J(v)$,

obtendo em V um elemento u tal que

(1.2) $J(u) = \operatorname*{Inf}_{v \in V} J(v)$.

a solução $u \in V$ pode ser aproximada, discretizando-se, tanto o funcional, J, como o espaço V, transformando o problema (1.1) em

(1.3) $\operatorname*{Inf}_{v \in V_h} J_h(v)$ com h escolhido de modo que suas componentes sejam todas positivas e o "destino" de h é o de tender ao zero, fazendo, com que, em um certo sentido, J_h e V_h se aproximem de J e de V, respectivamente. Na prática $V_h = \mathbb{R}^{N(h)}$ (ver §1, cap. 1).

Mostra-se que a solução $u_h \in V_h$ de (1.3), i.e.:

$u_h \in V_h$ tal que $J_h(u_h) = \operatorname*{Inf}_{v \in V_h} J_h(v)$, tende forte ou fracamente para u, solução de (1.1 - 1.2) quando $h \to 0$. ver cap. 1, e [6] .

O problema se constitui em achar um método convergente que resolva (1.3). No que se segue o índice h será suprimido para aliviar a notação. O tipo de problema apresentado é da mesma linha de pensamento do §1 do capítulo 1, e, por isso, identifica-se V (que até há pouco era V_h) com $\mathbb{R}^{N(h)}$, i.e.: $\mathbb{R}^N$ e J é um funcional de $\mathbb{R}^N$ em $\mathbb{R}$:

$$(1.3)' \quad \operatorname*{Inf}_{v \in V = \mathbb{R}^N} J(v)$$

Se J fosse um funcional convexo, o método direto de variações locais (ou alguma de suas variantes) permitiria resolver (1.3)', mas se J, sendo não convexo e tendo, possivelmente, mínimos locais, for abordado pelo referido processo, este, sendo local, falha.

Propõe-se associar ao problema (1.3)' uma sequência finita de problemas do mesmo tipo, que serão indicados por $(1.3)_i$ com $i = 1,2,\ldots,n$. Na obtenção do ínfimo do problema $(1.3)_k$ será usado aquele obtido em $(1.3)_{k-1}$ seguindo-se o processo de modo que o ótimo de $(1.3)_n$ seja o desejado de (1.3)'. Serão necessárias outras hipóteses, como, por exemplo, afirmar que J atinge seu ótimo em um <u>único</u> ponto.

§2 - Descrição do método

Considera-se o funcional G definido em $V = \mathbb{R}^N$, de modo que $G \in C^2(V, \mathbb{R})$ e que G seja, ainda, estritamente convexo em V.

Então $G''(v)$ é uma matriz simétrica sendo

$$G'(v) = \left(\frac{\partial G}{\partial x_1}(v), \ldots, \frac{\partial G}{\partial x_2}(v)\right)$$

e $$G''(v) = \left[\frac{\partial^2 G}{\partial x_i \partial x_j}(v)\right]_{i,j}, \quad \text{com } G \in C^2(V, \mathbb{R})$$

Define-se a seguinte notação: $G''(v,h) = \langle G''(v).h, h \rangle_V$ com $h \in \mathbb{R}^n$, e

a convexidade estrita de G equivale à desigualdade

(2.1) $G''(v,h) > 0 \quad \forall v, \forall h \neq 0,$ cf [17] e (0.5).

Supõe-se ainda que G admite um único mínimo absoluto a distância finita da origem, e, além disso:

(2.2) $<G''(v).h\ , h> \geq \rho > 0$

$$\forall v \in V\ , \forall h \in V \quad \text{com } |h| = 1$$

onde $|h|$ indica o norma de h em $V = \mathbb{R}^N$.

<u>2.1 Observação</u>: esta escolha de G sempre é possível. Neste caso, basta escolher G como um parabolóide.

Ao problema (1.3)' se associa, então, o seguinte: fazendo $H_\alpha(v) = J(v) + \alpha\, G(v)$

(2.3) —— $\inf\limits_{v \in V} H_\alpha(v) = \inf\limits_{v \in V} \left[J(v) + \alpha\, G(v)\right]$, com α um real positivo, variando num intervalo a ser determinado. Para tanto, o funcional J também é suposto ser tal que

$$J \in C^2(V, \mathbb{R})$$

verificando: $<J''(v).h, h> \geq -K \quad (K > 0)$

$$\forall v \in V \quad e \quad \forall h \in V, |h| = 1$$

<u>2.2 Lema</u>: a função

(2.4) $H_\alpha(v) = J(v) + \alpha\, G(v)$ é estritamente convexa para todo $\alpha > \alpha_o$.

□

$H''_\alpha(v) = J''(v) + \alpha\, G''(v)$

e, se $\alpha > \alpha_o = \dfrac{K}{\rho} \Longrightarrow <H''_\alpha(v).h, h> > o$

para $\forall v \in V, \forall h \in V, |h| = 1$

o que dá a estrita convexidade de H_α , $\forall \alpha > \alpha_o$

□

<u>2.4 Observação</u> : Se G for escolhido ainda de maneira que

$\lim\limits_{\|v\| \to \infty} G(v) = \infty$, pode ser mostrado simplesmente que $H_\alpha(v)$ verifica a mesma propriedade.

Para $\alpha > \alpha_o$, sendo H_α estritamente convexo, contínuo, e como $\lim_{\|v\| \to \infty} H_\alpha(v) = \infty$, o método de variações locais pode ser aplicado a este funcional obtendo-se o ótimo de H_α em V, i.e.: $u_\alpha \in V = \mathbb{R}^N$ tal que

$$H_\alpha(u_\alpha) = \operatorname*{Inf}_{v \in V} H_\alpha(v)$$

A partir deste u_α, o ínfimo de H_α, sendo $\alpha > \alpha_o$, e sob determinadas condições pode-se fazer α decrescer a zero e obter assim com o auxílio de um processo convergente o ótimo de $H_o = J + 0, G$ i.e.: o mínimo de J em V

$$H_o(u) = \operatorname*{Inf}_{v \in V} H_o(v) = \operatorname*{Inf}_{v \in V} J(v) .$$

Seja $\alpha_1 > \alpha_o$ tão perto de α_o quanto se desejar e $\lambda_o, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ uma partição do intervalo $[0, \alpha_1]$, com passo k e $\lambda_o = 0$, $\lambda_n = \alpha_1$, $\lambda_j = jk = j\frac{(\alpha_1 - 0)}{n}$

Procura-se o ótimo de H_{λ_n} usando o método de variações locais (método este que converge sendo H_{λ_n} nas condições desejadas). A partir desse $u_{\lambda_n} = u_{\alpha_1}$ tal que

$H_{\lambda_n}(u_{\lambda_n}) = \operatorname*{Inf}_{v \in V} H_{\lambda_n}(v)$, e usando o método já citado, obtem-se $u_{\lambda_{n-1}}$ o ótimo de $H_{\lambda_{n-1}}$ i.e.:

$$H_{\lambda_{n-1}}(u_{\lambda_{n-1}}) = \operatorname*{Inf}_{v \in V} H_{\lambda_{n-1}}(v) ,$$

e assim, sucessivamente até se obter $u_{\lambda_o} = u$, o ótimo de $H_o = J$. Este processo, sob as condições a que se referiu (por exemplo, k, o passo, não deve ser muito "grande") conduz, após um número finito de operações ao ótimo global do funcional J.

§3 - Convergência do método

Serão necessárias as hipóteses:

(3.1) $\forall \alpha \in [0, \alpha_1]$, H_α admite um único mínimo global; e

(3.2) $J \in C^2(V, \mathbb{R})$; sob as quais tem-se

3.1 Lema : se $\alpha \to a$, então H_α converge uniformemente para Ha (respectivamente, H''_α tende uniformemente para H''_a) sobre todo subconjunto limitado de V.

3.2 Lema: $\inf_{v \in V} H_\alpha(v) \to \inf_{v \in V} H_a(v)$ quando $\alpha \to a$.

$\square$

Sejam u_α e u_a tais que $H_\alpha(u_\alpha) = \inf_{v \in V} H_\alpha(v)$ e $H_a(u_a) = \inf_{v \in V} H_a(v)$.

Avaliando-se $H_\alpha(u_\alpha) - H_a(u_a)$ usando propriedades inerentes ao ínfimo obtem-se a desigualdade:

$$H_\alpha(u_\alpha) - H_a(u_\alpha) \leq H_\alpha(u_\alpha) - H_a(u_a) \leq H_\alpha(u_a) - H_a(u_a) \ ;$$

ora os u_α estão todos contidos em um subconjunto limitado de V, e a convergência uniforme de H_α para H_a leva a:

(i) $|H_\alpha(u_\alpha) - H_a(u_\alpha)| \to 0$ quando $\alpha \to a$

porque:

$$|H_\alpha(u_\alpha) - H_a(u_\alpha)| \leq |H_\alpha(u_\alpha) - H_\alpha(u_a)| + |H_\alpha(u_a) - H_a(u_a)| + \\ + |H_a(u_a) - H_a(u_\alpha)|.$$

como cada um dos 3 termos do lado direito da desigualdade se anula quando $\alpha \to a$, fá-lo também $|H_\alpha(u_\alpha) - H_a(u_\alpha)|$, e

(ii) $|H_\alpha(u_a) - H_a(u_a)| \to 0$ quando $\alpha \to a$,

$\Rightarrow$ $H_\alpha(u_\alpha) \to H_a(u_a)$ quando $\alpha \to a$,

$\square$

<u>3.3 Lema:</u> u_α, o ponto onde H_α atinge seu mínimo absoluto depende continuamente de α, com $\alpha \in [0,\alpha_1]$.

□

Por absurdo, seja $a \in [0,\alpha_1]$, $\varepsilon_o > 0$ tal que existe uma sequência $\{\lambda_i\}$ com $\lambda_i \to a$ com $i \to \infty$ de modo que

(3.3) $|u_{\lambda_i} - u_a| \geq \varepsilon_o$, $|.|$ indica a norma usual em $V = \mathbb{R}^N$;

tem-se que (3.4) $|H_a(u_a) - H_{\lambda_i}(u_{\lambda_i})| \geq$

$\geq |H_a(u_a) - H_a(u_{\lambda_i})| - |H_a(u_{\lambda_i}) - H_{\lambda_i}(u_{\lambda_i})|$

mas de (3.3) e sendo u_α o ponto único em que H_α atinge seu mínimo absoluto,

$|H_a(u_a) - H_a(u_{\lambda_i})| \geq \beta_o > 0$; β_o independ. de i,

de onde $H_a(u_a) - H_{\lambda_i}(u_{\lambda_i}) \geq \gamma_o > 0$, para γ_o independendo de λ_i. Por outro lado, quando $\lambda_i \to a$ $|H_a(u_a) - H_{\lambda_i}(u_{\lambda_i})| \to 0$, surgendo aí a contradição.

Portanto, para toda sequência $\{\lambda_i\}$ em $[0,\alpha_1]$ com $\lambda_i \to a$, tem-se que

$$u_{\lambda_i} \to u_a$$

□

Observe-se que sendo H de classe C^2 num aberto de $V = \mathbb{R}^N$ então é convexo numa vizinhança não vazia de cada um de seus mínimos - isto vale então para cada H_α nalguma vizinhança de seu mínimo absoluto u_α, que existem todas num limitado contido em $V = \mathbb{R}^N$, cf [11].

Seja r_α o maior raio para o qual a função H_α é sempre convexa na bola $B(u_\alpha, r_\alpha)$.

<u>3.4 Lema</u> : $r_\alpha \geq r > o$ para todo α em $[0, \alpha_1]$

$\square$

Supõe-se que $H''_\alpha(v) > 0$ numa vizinhança de cada um de seus mínimos. Mais adiante, vê-se que esta hipótese pode ser satisfeita sempre.

(i) demonstra-se primeiro o lema para N=1, $\mathbb{R}^N = \mathbb{R}$, supondo, por absurdo, que há em $[0, \alpha_1]$ uma sequência $\{\alpha_i\}_i$ com $\alpha_i \to \alpha$ de modo que, em decorrência, $r_{\lambda_i} \to o$. Pela suposição do início , tem-se $H''_\alpha(u_\alpha) > 0$ e $B(u_\alpha, r_\alpha)$ tal que $\forall v \in B(u_\alpha, r_\alpha)$,

$$, H''_\alpha(v) > \beta_\alpha > 0 .$$

Por outro lado, pelo lema 3.1 , H''_{α_i} tende uniformemente a H''_α quando $\alpha_i \to 0$ sobre qualquer subconjunto limitado de $\mathbb{R}$ e, por isso,

$$\exists\, \eta \;\Big|\; |\alpha_i - \alpha| < \eta \implies |H''_{\alpha_i}(v) - H''_\alpha(v)| < \frac{\beta_\alpha}{4}$$

para $\forall v \in B(u_\alpha, r_\alpha)$, ou:

$$-\frac{\beta_\alpha}{4} + H''_\alpha(v) < H''_{\alpha_i}(v) < \frac{\beta_\alpha}{4} + H''_\alpha(v) \quad \text{e, então}$$

$0 < \frac{3}{4}\beta_\alpha < H''_{\alpha_i}(v)$ para $\forall v \in B(u_\alpha, r_\alpha)$ e $\forall \alpha_i$ tal que $|\alpha_i - \alpha| < \eta$

como $u_{\alpha_i} \to u_\alpha$ quando $\alpha_i \to \alpha$ então $\exists\, \eta_1 > 0$ tal que

$$|\alpha_i - \alpha| < \eta_1 \implies |u_{\alpha_i} - u_\alpha| < \frac{r_\alpha}{4}$$

então, fazendo $\eta_2 = \inf(\eta, \eta_1)$ e tomando α_i tal que $|\alpha_i - \alpha| < \eta_2$, em torno de cada u_{α_i} há uma bola aberta de raio $\frac{r_\alpha}{4}$ contida em $B(u_\alpha, r_\alpha)$ onde H_{α_i} é estritamente positiva isto é, onde H_{α_i} é, de fato, convexo, contrariando a hipótese imposta de $r_{\alpha_i} \to 0$.

(ii) No caso mais geral de N variáveis, segue-se o mesmo esquema, supondo que há uma sequência de α_i's convergindo para α de modo que

$$r_{\alpha_i} \to 0$$

Tem-se que se H_α é estritamente convexo, então

$$H''_\alpha(v,h) = \langle H''_\alpha(v).h,h\rangle > 0 \quad \text{para } \forall v \in \mathbb{R}^N \text{ e } \forall h \text{ com } |h| = 1$$

i.e.: $\langle H''_\alpha(v).h,h\rangle$ é contínua, estritamente positiva no compacto

$$[\alpha - a, \alpha + a] \times \{u_\alpha\} \times \{h \in V: |h| = 1\} \quad \text{onde } V = \mathbb{R}^N \quad \text{e}$$

então há vizinhanças $V_\alpha \in v(\alpha)$

$$W_{u_\alpha} \in v(u_\alpha)$$

tais que $H''_\beta(v) > 0$ $\begin{cases} \forall \beta \in V_\alpha \\ \forall v \in W_{u_\alpha} \end{cases}$

onde se indicaram os conjunto de vizinhanças do índice α e do mínimo u_α por $v(\alpha)$ e $v(u_\alpha)$ respectivamente.

Alem disso, $\exists\ \eta > 0$ tal que $|\alpha_i - \alpha| < \eta$

então:

$$\alpha_i \in V_\alpha \quad \text{e} \quad u_{\alpha_i} \in \overset{o}{W}(u_\alpha)$$

implicando na existência de bolas abertas de centro u_{α_i} e raio fixo onde H_{α_i} é convexo para $\forall \alpha_i$ tal que $|\alpha_i - \alpha_i| < \eta$ sendo $H''_{\alpha_i}(u_{\alpha_i})$ estritamente positivo, contradizendo a imposição de

$r_{\alpha_i} \to 0$ quando $\alpha \to \alpha_i$.

$\square$

3.5 Observação: Se a condição $H''_\alpha(u_\alpha) > 0$ não for verificada para $\forall \alpha \in [0,\alpha_1]$ e $H_\alpha(u_\alpha) = \operatorname{Inf}_{v\in V} H_\alpha(v)$, podem ser consideradas funções $H_{\alpha,\varepsilon} = J + \alpha G + \varepsilon F$

onde F é um funcional estritamente convexo e ε um real positivo que deve tender a zero.

$H_{\alpha,\varepsilon}$ verifica facilmente a condição desejada:

$H''_{\alpha,\varepsilon}(v) > 0$ numa vizinhança do ponto ótimo $u_{\alpha,\varepsilon}$ do funcional $H_{\alpha,\varepsilon}$.

Também é simples ver que os mínimos $u_{\alpha,\varepsilon}$ tendem ao u_α , mínimo de H_α , quando $\varepsilon \to 0^+$

3.6 Teorema: O método, como foi descrito, converge, isto é: existe uma subdivisão de $[0,\alpha_1]$, de passo k, indicada por $\lambda_0 = 0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n = \alpha_1$ tal que o mínimo u_{λ_i} do funcional $H_{\lambda_i} = J + \lambda_i G$ é obtido por um método direto a partir do ponto inicial $u_{\lambda_{i+1}}$, o "anterior" .

$\square$

A aplicação que a cada $\lambda \in [0,\alpha_1]$ associa o mínimo u_λ de H_λ é contínua, uniformemente, aliás. Seja $k > 0$ tal que, se

$|\lambda - \lambda'| \leq k$ então $|u_\lambda - u_{\lambda'}| <$, sendo o r obtido do lema 3.4 i.e.: $\forall \alpha \in [0,\alpha_1]$, $r_\alpha \geq r > 0$; e k é o "passo" da parti ção de $[0,\alpha_1]$:

$$\lambda_o = 0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n = \alpha_1$$

Numa bola aberta de centro u_{λ_i} e raio r, que conterá $u_{\lambda_{i+1}}$, o funcional H_{λ_i} é convexo. Usando $u_{\lambda_{i+1}}$ como aproximação inicial num método local como o de variações locais descrito no capítulo 1, este conduz ao mínimo de H_{λ_i}, u_{λ_i}.

A repetição do processo até a obtenção de u_{λ_o}, o mínimo de $H_o = J + 0.G$ é feita com a sucessiva obtenção dos ótimos dos H_{λ_i}'s, terminando com $u = u_o$ tal que

$$J(u) = \operatorname*{Inf}_{v \in V} J(v)$$

$\square$

<u>3.7 Observação</u>: O processo converge depois de um número finito de grupos de operações, sem que haja necessidade de se ter o passo da partição de $[0,\alpha_1]$, o k, tendendo a zero.

Na prática, e do ponto de vista do uso de computadores, pode-se começar com um passo $k = k_o$ e considerar sucessivamente $k_{o/2}$, $k_{o/4}$, $k_{o/8}$,... até que o valor final encontrado se mantenha dentro de uma pré-determinada faixa de variação i.e.: até que o processo estacione.

Até aqui se procurou estudar a minimisação de funcionais, sem a consideração de vínculos. O parágrafo seguinte os aceita como parte do problema proposto, cf. [6] .

§4 - Problema com Restrições - Penalisação

4.1 Considere-se o problema

(4.1) $\operatorname*{Inf}_{v \in K} J(v) = J(u)$ onde K é o convexo fechado definido por:

(4.2) $K = \{v \in V : G(v) \leq 0\}$ sendo G um funcional estritamente convexo de classe C^2.

Supõe-se ainda que $\overset{o}{K} \neq \emptyset$ usando a notação de $\overset{o}{K}$ para o interior do convexo K. Este problema pode ser levado a um do tipo sem vínculos e, então, se usa o método descrito no que precede. Para tanto seja:

$$H_\alpha(v) = \begin{cases} J(v) & \text{se} \quad v \in K = \{v \in V : G(v) \leq 0\} \\ J(v) + \alpha G(v) & \text{se} \quad v \notin K \end{cases}$$

4.2 Lema: $H_\alpha(v)$ é contínuo em todo o espaço V se o forem J e G.

□

Seja $\bar{G}(v) = \begin{cases} G(v) & v \notin K \\ 0 & v \in K \end{cases}$

vê-se facilmente que $\bar{G}$ é contínuo em V sendo que G se anula em ∂K, a fronteira do K, que é convexo dada a característica de convexidade do funcional. Então $H_\alpha = J + \alpha\bar{G}$, que, sendo a soma de funcionais contínuos, é-o também.

□

É fácil verificar também que um funcional construído como H_α não é necessariamente diferenciável ainda que o sejam tanto G como J .

<u>4.3 Obeservação</u>: Em geral se consideram prolongamentos do funcional J que sejam mais regulares, como quando se usa

$$H_\alpha(v) = J(v) + \alpha\, G^n(v) \quad , \quad \text{com} \quad n \geq 2 \quad ,$$

mas embora esta regularidade seja obtida, para a obtenção do mínimo de J, tem-se que α vá a zero obrigatòriamente, ao passo que fazendo

$$H_\alpha(v) = J(v) + \alpha\, G(v) \quad ,$$

pode ser provado que há um valor finito α_o tal que

$\forall\alpha$, $\alpha \geq \alpha_o$ $H_\alpha(v)$ atinge seu mínimo no mesmo elemento $u \in V$ que J .

<u>4.4 Teorema</u>: Sejam os funcionais J,G de classe C^1 em V. Se $H_\alpha = J + \alpha\, G$, então existe α_o tal que para todo $\alpha \geq \alpha_o$ funções H_α e J atingem seus mínimos globais no mesmo ponto. Observe-se que ainda continuam supostos os funcionais J e H_α para $\forall\, \alpha > 0$, tais que J tem um único mínimo absoluto em K e os H_α têm único mínimo absoluto em V para todo $\alpha > 0$.

$\square$

G admite único ponto crítico (min) que está em $\overset{o}{K} \Rightarrow$

$$\left|\frac{\partial G}{\partial v_i}(v)\right| > M_i > 0 \quad \text{com} \quad i = 1,2,\ldots,N \quad \text{e} \quad v \in V \sim K \ .$$

Por outro lado, J verifica

$\left|\frac{\partial J}{\partial v_i}(v)\right| \leq K_i$ com $i = 1,2,\ldots,N$ para $\forall v \in W$ onde W é a interseção do complementar do convexo K com um compacto que contem o inf do J, o inf do H_α e que contem ainda o K.

Fixado um i, podem ser encontradas 2 situações:

(i) $\frac{\partial G}{\partial v_i}(v) > M_i$ que leva a

$$\frac{\partial H_\alpha}{\partial v_i}(v) = \frac{\partial J}{\partial v_i}(v) + \alpha \frac{\partial G}{\partial v_i}(v) > - K_i + \alpha M_i$$

se α for escolhido de modo que $\alpha \geq \frac{K_i}{M_i}$, decorre que $\frac{\partial H_\alpha}{\partial v_i}(v) > 0$

para $\forall v \in W$.

(ii) $\frac{\partial G}{\partial v_i}(v) < M_i \quad \therefore \quad \frac{\partial H_\alpha}{\partial v_i}(v) < K_i - \alpha M_i$ e, tomando

$$\alpha \geq \frac{K_i}{M_i}, \text{ tem-se } \frac{\partial H_\alpha}{\partial v_i}(v) < 0 \quad \forall v \in W$$

$\Rightarrow \forall v \in W \quad \frac{\partial H_\alpha}{\partial v_i}(v) \neq 0$ para $\forall_i = 1,2,\ldots,N$

desde que se tenha $\alpha \geq \sup_{i=1,\ldots,N} \{\frac{K_i}{M_i}\} = \alpha_o$.

Nestas condições, então, tem-se grad $H_\alpha(v) \neq 0$ para $\forall v \in V \sim K$.

O mínimo de H_α tem que estar, portanto, em K, onde $\bar{G}$ se anula e, então,

$\forall v \in K$, $H_\alpha(v) = J(v)$ i.e.: o mínimo de H_α é atingido no mínimo global de J para todo $\alpha \geq \alpha_o$.

$\square$

Para resultados numéricos, ver [3], [5] e [15]

==================

CAPÍTULO III

§1 - Hipóteses

Continua a ser considerado o funcional J, definido sobre um espaço de Banach reflexivo (indicado por V). J é contínuo e não linear, e, em V, se considera um subconjunto, denotado por K, que é fechado, limitado e convexo, em V. Deseja-se um método que, como o das variações locais, aproxime a solução de

$$\operatorname*{Inf}_{v \in K} J(v) = J(u) .$$

Seja um aberto limitado $\mathbb{R}^n$: Ω ; e V o espaço de Banach reflexivo composto de funções definidas sobre Ω. Seja ainda J um funcional contínuo, não-linear, aplicação de V em $\mathbb{R}$, estritamente convexo que verifique a condição .

$$(1.1) \qquad \lim_{\|v\| \to +\infty} J(v) = +\infty \quad .$$

Com tais condições impostas tanto sobre J, como sobre $K \subset V$, prova-se:

<u>1.1 Lema:</u> Existe único elemento $u \in K$ tal que J, o funcional, atinja aí seu mínimo i.e.: tal que

$$J(u) = \operatorname*{Inf}_{v \in K} J(v), \quad (1.2)$$

A demonstração é inteiramente análoga àquela do teorema 1.1 do capítulo 1, em que se prova a existência e a unicidade de um tal elemento u, para todo o espaço V, e não somente para um subconjunto convexo, fechado e limitado K de V.

Este problema, o de minimisar J sobre K i.e.: achar $u \in K$ tal que $J(u) = \inf_{v \in K} J(v)$, é o que se busca resolver no que se segue sem fazer uso de funções de penalisação - que transformam o problema em um outro, sem vínculos.

Ao problema apresentado se associa outro

$$(1.3) \qquad \inf_{v \in V_h \cap K} J(v) = J(u_h)$$

onde V_h é um subespaço de V, de dimensão finita $N(h)$ de modo que se tenha: (como no capítulo 1)

$\bigcup_h V_h$ densa em V. É evidente que $V_h \cap K$ é um subconjunto convexo de V_h. Transforma-se o problema, com esta associação, no de minimisar uma função de $N(h)$ variáveis sobre um conjunto convexo, fechado e limitado de $\mathbb{R}^{N(h)}$.

$\forall\, w \in V_h \cap K$, $w = \sum_{i=1}^{N(h)} \alpha_i e_i$, sendo $\{e_1, \ldots, e_{N(h)}\}$ uma base de V_h.

Demonstra-se que as soluções u_h do problema (1.3) convergem para o u, solução de (1.2), na topologia inicial de V.

Segue-se um método numérico fornecendo uma aproximação do mínimo de uma função de N variáveis sobre um convexo de $\mathbb{R}^N$, resolvendo assim o problema (1.3), ver [19], [5].

§2 - Método de Aproximação

O método das variações locais, descrito anteriormente, leva a bons resultados em problemas sem vínculos, podendo entretanto, levar a resultados indesejáveis quando aparecem restrições. De fato, é desejado o ponto P_0 situado no convexo K, fechado em $\mathbb{R}^2$ formado pelo semiplano à direita da reta r, indicados na figura, de modo que seja mínima a distância de P a P_o, que na verdade é a distância de P ao convexo K.

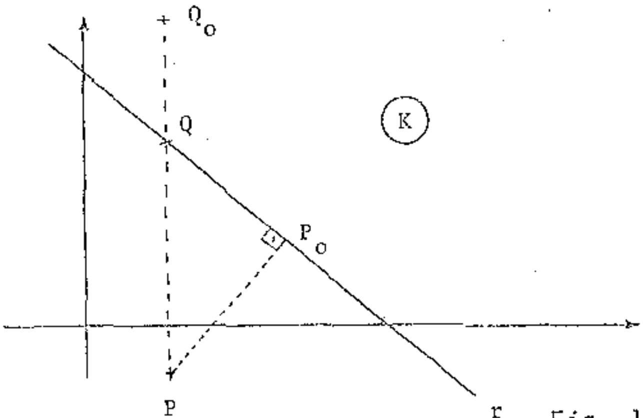

Fig. 1

Se o ponto inicial do método das variações locais for Q_o, o método leva ao ponto Q, na fronteira do convexo K (representada por ∂K), ponto esse que não é o P_o desejado. De modo análogo se Q_o, o ponto com o qual o processo é iniciado, estivesse na horizontal (ou, melhor, na direção de um dos elementos da base do $\mathbb{R}^2$), o método chegaria a Q', igualmente indesejável, sendo o P_o indicado na figura 1.

A solução do problema geral é obtenível se:

(i) o problema (1.3) é transformado num problema de minimisação sem vínculos (métodos de penalisação, de Fiacco, de Mc Cormick e similares — cf. [14]).

(ii) ou se for convervado o problema (1.3) usando uma "variação" do método de variações locais, modificando-o sempre que se chegar a um ponto na fronteira.

É esta segunda possibilidade que se considera aqui. Com o intuito de simplificar a notação, analisa-se o caso com $N(h) = 2$: quer-se minimisar uma função de 2 variáveis sobre um convexo fechado e limitado de $\mathbb{R}^2$, o subconjunto K.

2.1 Descrição do método: (i) O método de varições locais é aplicado até a obtenção de um ponto estacionário s_o, cuja existência é garantida desde que o funcional J satisfaça as condições do parágrafo 1.

(ii) Um ponto vizinho de s_o é definido como aquele que está situado à distância ρ de s_o na direção dos eixos coordenados em ambos sentidos. Se todos os pontos vizinhos do s_o estão contidos no K, o processo se repete como indicado em (i) substituindo-se ρ por $\rho/2$ (ou por $\rho.2^{-k_o}$ com $k_o \in \mathbb{N}$), e usando-se esse novo valor como o acréscimo. No entanto, se houver pontos vizinhos de s_o fora do K então:

(1º) se $s_o \notin \partial K$ (i.e.: s_o está no interior do K), em lugar dos pontos vizinhos exteriores ao K, são utilizados os pontos obtidos pela interseção dos eixos aos quais pertencem os pontos exteriores com a fronteira ∂K — obtendo novos pontos situados logicamente no segmento que une s_o aos pontos vizinhos fora do K. Como ilustrado na figura 2, onde s_1, s_2, s_3, s_4 designam os pontos vizinhos de s_o, todos exteriores à exceção de s_4. São substituidos por s_1', s_2', s_3' na determinação daquele no qual se tem o menor valor do funcional J.

Se o ponto em que J atinge seu mínimo ainda for s_o, o processo é reiniciado a partir (i) com $\rho/2$ (ou $\rho/2^{k_o}$) no lugar de ρ, como acréscimo. Porem se o ponto que dê o menor valor para o funcional mudar para algum dos outros o processo é reiniciado em (i) com o mesmo passo ρ.

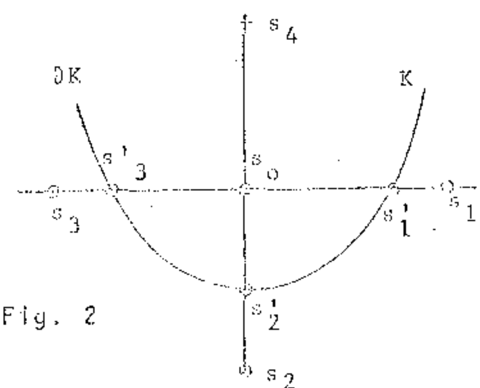

Fig. 2

(2º) se $s_o \in \partial K$, são considerados os "quadrantes" formados pelos segmentos ortogonais que ligam s_o a seus pontos vizinhos. Para o método, interessam apenas as regiões nas quais pelo menos um dos tais segmentos está todo contido em K e pelo menos um dos restantes está totalmente fora do K, exceção feita ao $s_o \in \partial K$. No exemplo com N=2 (figura 3) os quartos de plano se indicam por a , b , c , d e interessam apenas as regiões b , d.

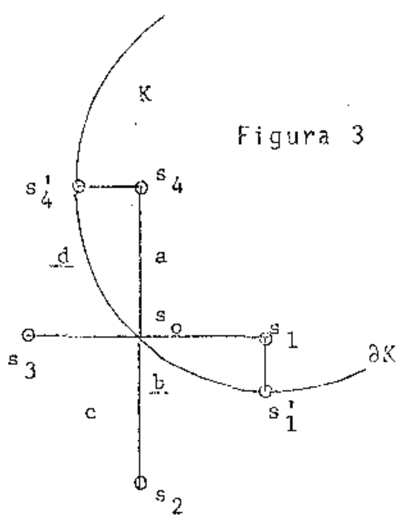

Figura 3

Nestas regiões, a partir do ponto vizinho interno ao K e na direção do eixo que contem o segmento unindo o s_o ao ponto vizinho fora do K, é obtido outro ponto na fronteira do convexo K pela interseção com ∂K da reta que contem o ponto vizinho citado, na direção indicada. Na figura, no caso da região b, partindo de s_1 e na direção da reta que une s_o e s_2 , é obtido em ∂K o ponto s_1' .

Analogamente, na região d se obtem s_4' , como indicado. Como nos passos anteriores, procura-se, dentre os pontos assim obtidos na fronteira do K mais o s_o , aquele em que J assume o menor valor. Se este for o próprio s_o o processo é reiniciado a partir de (i) com $\rho/2$ (ou $2^{-k_o}\rho$) no lugar do ρ. Se for outro ponto que não o s_o , volta-se simplesmente a (i) com o mesmo valor de ρ.

Para um valor fixo de ρ , a estacionaridade é atingida após um número finito de iterações, como visto no capítulo 1. O último passo do exemplo citado é descrito novamente, sem tanta referência aos aspectos geométricos.

$s_o = (x_i, y_i) \in \partial K$. Seus ponto vizinhos são $(x_i + \rho, y_i)$, $(x_i - \rho, y_i)$, $(x_i, y_i + \rho)$, e $(x_i, y_i - \rho)$. Como se vê na figura, $s_4 = (x_i, y_i + \rho)$ e $s_1 = (x_i + \rho, y_i)$ são internos ao K, e os outros dois são externos ao convexo K. A partir dos internos obtêm-se, em ∂K s_1' e s_4' com μ, ν $\mathbb{R}$ tais que

$$s_4' = (x_i - \mu, y_i + \rho) \in \partial K \ , \quad \text{e}$$
$$s_1' = (x_i + \rho, y_i - \nu) \in \partial K \ .$$

Um teorema que garante a convergência do método é apresentado no parágrafo seguinte, cf [7] e [5].

§3 - Um teorema de convergência

3.1 Hipóteses:

Seja o funcional $J: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ e suponha-se:

(i) que o funcional J é contínuo, convexo, verificando (1.1), i.e.: $\lim\limits_{\|v\| \to \infty} J(v) = +\infty$ e admite derivadas parciais de $1^{\underline{a}}$ ordem contínuas;

(ii) que o convexo K, limitado e fechado sobre o qual se deseja minimisar J, admite um hiperplano tangente em qualquer ponto de ∂K. Então:

3.2 Teorema: Se $\rho \to 0^+$, o método apresentado no §2 converge, i.e.: se u_ρ indica o ponto de estacionaridade de J para um passo ρ, pelo método indicado, então,

(i) $u_\rho \to u$ quando $\rho \to 0$ sendo $u \in K$ tal que

$$j = J(u) = \operatorname*{Inf}_{v \in K} J(v);$$

(ii) $J(u_\rho) = j_\rho \to j = J(u)$, quando $\rho \to 0$.

$\square$

Os vetores u_ρ estão contidos num subconjunto limitado de $\mathbb{R}^N$. De $\{u_\rho\}_\rho$ se pode extrair uma subsequência convergente, indicada ainda por $\{u_\rho\}$ que converge para algum $w \in \mathbb{R}^N$.

Sendo $K \subset \mathbb{R}^N$ um fechado e $\forall \rho$, $u_\rho \in K$ $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ $w \in K$. Mais ainda, pode ser suposto que $w \in \partial K$ porque se não o problema pode ser encarado como desprovido do vínculo K. Então:

(i) ou a subsequência dos u_ρ apontada antes tem um número finito de elementos em ∂K e, portanto uma infinidade deles no interior de K — e vê-se que também neste caso w, o limite de tal subsequência está no interior do K, e o funcional atinge seu ótimo como no caso sem vínculos;

(ii) ou a subsequência convergente a $w \in K$ tem uma infinidade de elementos $u_\rho \in \partial K$.

É neste último caso descrito que se mostra que a restrição dos elementos da subsequência que pertencem à fronteira do K leva a um ponto limite em ∂K, ponto este onde o funcional J atinge seu ótimo em K.

De fato: os pontos em que se obtem a estacionaridade do funcional J, fixado o "passo" ρ para a obtenção desse mesmo ponto pelo processo descrito no parágrafo anterior são aqueles encontrados em ∂K através do método descrito em (ii), 2º.

Indicando por u^i_ρ os diversos pontos vizinhos de u_ρ , tem-se

$$J(u_\rho) < J(u_\rho^i) \quad \forall i\,,\ i \in I$$

sendo I o conjunto de índices relativos aos pontos vizinhos. Na figura 4 um exemplo, ainda no caso de N=2 e $s_o = u_\rho \in \partial K$, onde se tem:

$$J(s_o) < \begin{cases} J(A) \\ J(B) \\ J(A') \\ J(B') \end{cases}$$

(3.1)

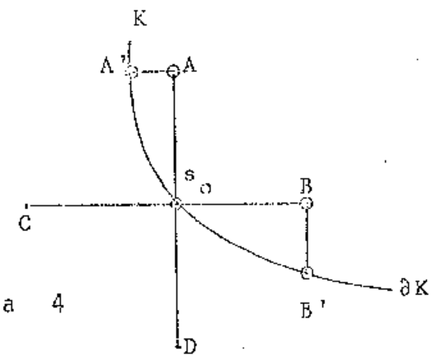

Figura 4

Neste caso particular tem-se, por exemplo $J(A')-J(s_o) = J(s_o+\rho e_2+\mu e_1) - J(s_o)$ e, então

$J(s_o + \rho e_1 + \mu e_1) - J(s_o) > 0$ com $0 \leq -\mu \leq \rho$ e

$(\mu^2 + \rho^2)\ \nabla_{v_1} J(s_o) > 0$ onde $\nabla_{v_1} J(s_o)$ é a derivada direcional do funcional J em s_o na direção de v_1, vetor unitário na direção $\overline{s_o A'}$. Mas de $\rho \to 0^+ \Rightarrow \mu \to 0$ e v_1 passará a ser versor na direção da tangente ao conjunto K em s_o. No caso particular o vetor v_1 passaria a ser o versor tangente a K na direção indicada e no sentido direita esquerda, com:

$$\nabla_{v_1} J(s_o) \geq 0.$$

Procedendo de modo análogo com $B' \in \partial K$, obtem-se

$$\nabla_{v_2} J(s_o) \geq 0 \quad \text{de} \quad J(B') - J(s_o) \geq 0$$

sendo v_2 o oposto a v_1

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \nabla_{v_1} J(s_o) \geq 0 \\ \\ \nabla_{v_2} J(s_o) = \nabla_{-v_1} J(s_o) \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \nabla_{v_1} J(s_o) = 0$$

Com um raciocínio semelhante no caso geral, obtem-se que:

$\nabla_{\delta_i} J(w) = 0$ onde $\nabla_{\delta_i} J(w)$ indica as derivadas direcionais do funcional J calculadas em w na direção δ_i sendo

$\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{N-1}$ (3.2) N-1 vetores unitários na direção de retas independentes em $\mathbb{R}^N$ tangentes ao K em $w \in \partial K$ gerando aí um hiperplano tangente ao K em w.

Além disso, tem-se que $\nabla_{\delta_o} J(w) \geq 0$

(3.3)

onde δ_o é um versor na direção de um eixo coordenado interior ao K.

Isto porque existe uma vizinhança de w na qual todos os u_ρ têm pontos vizinhos interiores a K na direção fixa δ_o de algum eixo interior ao convexo K, e se v_o é o versor do eixo de direção δ_o no sentido fora-dentro,

$J(u_\rho + \rho v_o) - J(u_\rho) > 0$

então $\rho . \nabla_{v_o} J(u_\rho) > 0$

e $\nabla_{v_o} J(u_\rho) > 0$ e, com $\rho \to 0^+$,

$$\nabla_{v_o} J(w) \geq 0 .$$

Também se δ é uma semi-reta qualquer pertencente ao hiperplano tangente ao K passando por w tem-se:

(3.4) $\nabla_\delta J(w) = 0$,

podendo ser concluido ainda que, qualquer que seja a semi-reta h saindo de w e contendo pontos de K diferentes do próprio w, vale:

(3.5) $\nabla_h J(w) \geq 0$

De fato, se N é a reta saindo de w, normal ao K e "voltada" para o interior do K, então

(3.6) $\nabla_N J(w) \geq 0$, porque

$$(3.7) \qquad \nabla_{\delta_o} J(w) = \alpha_N \nabla_N J(w) + \sum_{j=1}^{N-1} \alpha_j \nabla_{\delta_j} J(w) \quad e,$$

dada a orientação da reta N, $\alpha_N \geq 0$ e ainda, que $\nabla_{\delta_o} J(w) \geq 0$ e todos os termos da somatória são nulos, conclui-se que $\nabla_n J(w) \geq 0$.

Reescrevendo (3.7) com $\nabla_h J(w)$ no lugar de $\nabla_{\delta_o} J(w)$, como h representa a reta saindo de w para o interior do K, como

$$\alpha_N \geq 0 \quad e \quad \nabla_N J(w) \geq 0 \implies$$

$$\implies \nabla_h J(w) \geq 0 \ ,$$

onde h é uma semi-reta qualquer saindo de w e "entrando" em K.

Ora isto significa que w é o elemento do K no qual o funcional J atinge seu mínimo, i.e.: $w = u$ e a subsequência $\{u_\rho\}$ tende a $u \in K$ quando $\rho \to 0$, fazendo-o também a própria sequência dos u_ρ's .

Da continuidade do funcional J segue que $J(u_\rho) \to J(u)$ quando $\rho \to 0^+$.

$\square$

§4 - Aplicações Numéricas

$$(4.1) \quad \text{Minimisar } J(\chi) = \sum_{i=1}^{n} (\chi_i - a_i)^2 \quad \text{com}$$

$\chi = (\chi_1, \ldots, \chi_n)$, e $a = (a_1, \ldots, a_n)$ dado, sobre o convexo $K \subset \mathbb{R}^n$ sendo

$$K = \{\chi \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} \chi_i^2 \leq 1\}$$

Este problema foi abordado e os resultados que se apresentam foram obtidos no P.D.P - 10 do Centro de Computação da UNICAMP, em precisão estendida.

Considerou-se:

(i) a dimensão $n = 2$;

(ii) o processo é interrompido quando o passo ρ deixa de ser maior que ε dado de antemão: $\varepsilon = 1. \times 10^{-11}$

Foram obtidos os resultados indicados no que se segue

$a = (-3., -4.)$

solução obtida $X_1 = -0.600000000011641$

$X_2 = -0.799999999991268$

solução correta $X_1 = -0.6$

$X_2 = -0.8$

Se, com o mesmo modo de interromper o processo, e usando a dimensão $n = 3$, foram obtidos:

$a = (3.,4.,5.)$

solução correta: $X_1 = .424264068711928$

$X_2 = .565685424949238$

$X_3 = .707106781186547$

solução obtida $X_1 = .424174197279188$

$X_2 = .565658870643772$

$X_3 = .707181937286698$

Para outros exemplos, alguns com a comparação deste método com aqueles em que variantes são utilizadas com o propósito de acelerar a convergência, ver [3] e [5] .

Com a dimensão $n = 4$, e $a = (5., 5., 5., 5.)$

solução correta: $X_1 = 0.5$

$X_2 = 0.5$

$X_3 = 0.5$

$X_4 = 0.5$

solução obtida: X_1 = .500003686150759

X_2 = .499999872137090

X_3 = .499973552819410

X_4 = .500022887655837

===================

```
*
*
***   MINIMISACAO  DE  FUNCIONAIS
***   METODO  DAS  VARIACOES  LOCAIS
*
*

        DIMENSION ALPHA(-1000/1000),SOMA1(-500/500),BETA(-500/500)
*** LEITURA DE DADOS
*
        TYPE 10
10      FORMAT(//10X, 'ENTRE COM N EM FORMATO I',
       1//10X, 'E COM (2N -1) VALORES DE ALPHA,EM FORMATO F,
       2QUATRO POR LINHA',//)
        ACCEPT 20, N, (ALPHA(I), I= -N+1,N-1)
20      FORMAT(I,/(4F))

35      TYPE 31
31      FORMAT(///,5X,'*****************************************')
*
* *
** DEFINICAO DE PARAMETROS
*
        RO = 1./N
        H = RO
        EPS = H/20
        FUNC1 = 0
        DO 41 K1 = -N+1,N-1
        X=K1*H
        FXH=X-2./3.
        SOMA1(K1)=0
        DO 42 K2 = -N+1,N-1
        SOMA1(K1)=SOMA1(K1)+ALPHA(K2)*(H**2)*(K1-K2)
42      CONTINUE
        FUNC1 = FUNC1 +(ALPHA(K1)+SOMA1(K1)-FXH)**2
41      CONTINUE
50      TYPE 40, N, H, RO, EPS
40      FORMAT(/1X, 'N=',I5,10X,'H=',E,/10X, 'RO=', E,
       110X, 'EPS =', E/)

        IF(RO.GE.EPS) GO TO 90
        IF(H.LT.10.**(-2)) GO TO 1000
*
**  DOBRAMOS O VALOR DE N E REDEFINIMOS OS PARAMETROS
*
        NS = 2*N
        IF(NS.GE.1000) GO TO 70
        TYPE 60
60      FORMAT(//10X,'***** ESTOUROU DIMENSAO ')
        GO TO 1000
*
70      RX=0.
        DO 212 KRR=-N+1,N-1
        BETA(KRR) = KRR*H
212     RX= RX + (ALPHA(KRR) - BETA(KRR))**2
        RX = SQRT( RX )
        TYPE 766,RX,(KP,ALPHA(KP),KP,BETA(KP),KP=-N+1,N-1)
766     FORMAT(//,'  COM TAIS PARAMETROS, TEM-SE:',//'   APROXIM. =
       7 ',E,//,('  ALPHA ( ',I4,' )  =',F,4X,'BETA ( ',I4,' )  =',F))
        DO 30 J = N - 1,1,-1
```

```
        K5 = (-2)*J
        ALPHA(K5) = ALPHA(-J)
        K5 = (-2)*J + 1
        ALPHA(K5) = ALPHA(-J)
        K5 = 2*J
        ALPHA(K5) = ALPHA(J)
        K5 = 2*J - 1
        ALPHA(K5) = ALPHA(J)
80      CONTINUE
        N = 2*N
        ALPHA(-N+1) = ALPHA(-N+2)
        ALPHA(N-1) = ALPHA(N-2)
        GO TO 35
*
**  TESTE DOS ALPHA'S ATUAIS
*
90      K = 0
        ISG = 1
        DO 100 K5 = -N+1,N-1
        ICONT = 1
95      XIS = ALPHA(K5)
        ALPHA(K5) = ALPHA(K5) + ISG*R0
        FUNCTEST = 0
        DO 130 K6 =-N+1,N-1
        X = K6*H
        FKH=X-2./3.
        SOMA1(K6)=SOMA1(K6)+(ALPHA(K5)-XIS)*(H**2)*(K6-K5)
        FUNCTEST = FUNCTEST + (ALPHA(K6)+SOMA1(K6)-FKH)**2
130     CONTINUE
        IF(FUNCL.GT.FUNCTEST) GO TO 110
**
***NAO HA TROCA DE PONTOS
**
        DO 132 J1 = -N+1,N-1
132     SOMA1(J1) = SOMA1(J1) -(ALPHA(K5) - XIS)*(H**2)*(J1-K5)
        ALPHA(K5)= XIS
        IF(ICONT.NE.1) GO TO 100
        ISG = ISG*(-1)
        ICONT = 0
        GO TO 95
**
*** TROCA DE PONTOS EFETIVADA
**
110     FUNCL = FUNCTEST
        K = K+1
100     CONTINUE
*
        TYPE 101,K
101     FORMAT(1X,I7,'   TROCAS')
        IF(K.GT.0) GO TO 90
*
**  ESTACIONARIO  -     TROCAR O VALOR DE R0 E  VOLTAR
*                       A DEFINIR PARAMETROS
*
        R0 = R0/2
        GO TO 50
*
** FIM DO PROCESSAMENTO
*
1000    TYPE 120,(I,ALPHA(I), I=-N +1, N -1)
```

```
120     FORMAT(//10X,'FIM DE PROCESSAMENTO',///,
       1('   ALFA (',I4,') =',E))
        CALL EXIT
        END
```

```
*
*
***       MINIMIZACAO DE FUNCIONAIS COM VINCULO
***       METODO DAS VARIACOES LOCAIS
*
*

          DOUBLE PRECISION FUNCTION FUNCIN(N,U,S)
          DOUBLE PRECISION S(12),U(12),A
          A = 0
          DO 1 I = 1,N
1         A = A + (U(I) - S(I))**2
          FUNCIN = DSQRT(A)
          RETURN
          END

          DIMENSION IND(20),ISIGN(11)
          DOUBLE PRECISION S0(11),S1(11),S3(11),D(11),
          1R0,EPS,G,TH1,TH2,TH3,TH4,DS,E(12,11),H(11),F(12,11)
*
****** ETAPA 1 - DEFINICAO DO PROBLEMA
*
*
*         E -- BASE
*         S0 -- PONTO INICIAL
*         D -- PONTO EXTERNO
100       TYPE 110
110       FORMAT(//10X,'ENTRE COM RO E EPS, EM FORMATO G, E COM N EM
          1FORMATO I',/)
          ACCEPT 4,RO,EPS,N
4         FORMAT(20,I)
120       TYPE 130
130       FORMAT(//10X,'ENTRE COM BASE, PONTO INICIAL E O PONTO EXTERNO,
          1EM FORMATO BD')
          ACCEPT 140,((E(I,J),J=1,N),I=1,N),(S0(I),I =1,N),
          1(D(I),I=1,N)
140       FORMAT(BD)
          TYPE 150
150       FORMAT(//10X,'DADOS RECEBIDOS',6X,'BASE')
          TYPE 152,R0,(S0(I),I=1,N)
152       FORMAT(//10X, 'R0 =',G,/10X, 'PONTO ATUAL',/,(10X,G))
          NN = 2*N
*
*
****** ETAPA 2 - ROTINA PARA ATINGIR A CASCA DO CONVEXO A MENOS DE RO
*
*         L = 0 SIGNIFICA NAO TER HAVIDO TROCA DE PONTO
*
*         K = 0 SIGNIFICA QUE NAO HA PONTOS FORA DO CONVEXO
*
          TYPE 163
163       FORMAT(//,' * * * * * * * * * * ',//10X,'ETAPA DOIS',/)
165       L = 0
          K = 0
170       DO 220 J = 1,NN
          ISG = (-1)**J
          INT =(J+1)/2 + ID
          IF(INT.GT.N) INT = INT - N
          S = 0
          DO 180 I = 1,N
```

```
        S1(J) = S0(J) + ISG*DIRES(IDI,J)
160     S = S + S1(J)**2
        IF(S.LE.(1.)) GO TO 210
*
**CAIU FORA DO CONVEXO
*       - GUARDAR DIRECAO, SINAL E O PONTO
        K = K + 1
        IND(K) = IDI
        ISIGN(K) = ISG
        DO 190 J1 = 1,N
190     P(K,J1) = S1(J1)
        GO TO 220
*
**  PONTO AINDA DENTRO DO CONVEXO OU NA CASCA
*       - VER SE SEU FUNCIONAL E MENOR QUE O DO ATUAL S0
*
210     IF(FUNCIN(N,B,S0).GT.(FUNCIN(N,B,S1) )) GO TO 230
*
220     CONTINUE
        IF(K.GT.N) GO TO 260
*
** S0 E ESTACIONARIO PARA ESTE R0 E NAO HA PONTOS EXTERNOS
*
        TYPE 222,R0,(S0(K),K=1,N)
222     FORMAT(//10X,'ESTACIONARIO PARA R0 =',F,'S0 =',/,(10X,F))
        R0 = R0/2
        GO TO 165
*
*** NOVO PONTO - ATUALIZAR S0
*
230     DO 240 J1 = 1,N
240     S0(J1) = S1(J1)
        ID = MOD(IDI,N)
        K = 0
        GO TO 170
*
*
***** ETAPA 3  - S0 ESTA A MENOS DE R0 DA CASCA
*
*       DETERMINAR PONTOS NA CASCA, NA DIRECAO DOS EIXOS
*       E TESTAR SEU FUNCIONAL EM RELACAO AO DE S0
260     TYPE 262
262     FORMAT(//,' * * * * * * * * * * ',//10X,'ETAPA TRES',/)
        DO 270 K1 = 1,N
270     S1(K1) = S0(K1)
        DO 310 IJ = 1,K
        S = 0
        DO 280 I = 1,N
280     S = S + S0(I)**2
        TH1 = -S0(IND(IJ))*ISIGN(IJ) - DSQRT(S0(IND(IJ))**2 - S + 1)

        TH2 = - S0(IND(IJ))*ISIGN(IJ) + DSQRT(S0(IND(IJ))**2 - S + 1)

        IF(DABS(TH1).GT.DABS(TH2)) TH1 = TH2
        DO 290 IL = 1,N
290     S1(IL) = S0(IL) + TH1*D(IND(IJ),IL)*ISIGN(IJ)
        IF(FUNCIN(N,B,S0).GE.(FUNCIN(N,B,S1))) GO TO 310
*
**  O PONTO NA CASCA TEM FUNCIONAL MENOR
*       - TROCA DE PONTOS
```

```
          DO 300 LI = 1,N
300       S1(LI) = S(LI)
*
310       CONTINUE
*
*
******    ETAPA 4 - PONTO S1 [illegible] CASCA [illegible]
*
*         PROCURAR [illegible] PONTO [illegible] CASCA
*         COM FUNCAO [illegible] MENOR, SE POSSIVEL

          TYPE 314
314       FORMAT(//,' * * * * * * * * * * ',//10X,'ETAPA QUATRO',/)
          DO 315 K4 = 1,N
315       S3(K4) = S1(K4)
316       DO 317 K[illegible] = 1,[illegible]
317       S2(K[illegible]) = S3(K[illegible])
          DO 350 L = 1,[illegible]
          ISG = (-1)**L
          JJL = (L+1)/2
          S = 0
          DO 320 J = 1,N
          S1(J) = S[illegible](J) + ISG*[illegible](JJL,J)
320       S = S + S1(J)**2
          IF(S.GE.([illegible])) GO TO 350
*
** ACHADO UM PONTO EXTERNO
*
*         - PROCURAR UM INTERNO ADJACENTE
          DO 340 K1 = 1,[illegible]
          ISGI= (-1)**K1
          JJI1 = (K1 + 1)/2
          IF(JJI1.EQ.JJL) GO TO 340
          S = 0
          DO 345 J1 = 1,N
          S(J1) = S2(J1) + ISGI*[illegible](JJI1,J1)
345       S = S + S(J1)**2
          IF(S.GT.(1.)) GO TO 3[illegible]
*
** ENCONTRADO UM INTERNO
*

          QS = 0
          DO 348 J2 = 1,N
348       QS = QS + S(J2)**2
          [illegible]
          [illegible]
          [illegible]
          DO 349 K2 = 1,[illegible]
349       [illegible]
          [illegible]
*
** [illegible] PONTO [illegible] ANTERIOR
          DO 3499 K3 = 1,[illegible]
3499      S3(K3) = S(K3)
340       CONTINUE
350       CONTINUE
          R0 = [illegible]/2
          IF(R0.GT.[illegible]) GO TO 3[illegible]
*
```

```
*
****** FIM DO PROGRAMA
*
*
        TYPE 410,RO,EPS,(SJ(J),J=1,N)
410     FORMAT(//10X,'RO =',D,/10X,'EPS =',D,/10X,'PONTO FINAL =',/,
        1(10X,'III',D))
*
        TYPE 776
776     FORMAT(///,10X,'BATA 0 PARA TERMINAR, 1 PARA CONTINUAR
        1 MUDANDO TODOS OS PARAMETROS, E 2 PARA SEGUIR COM OS
        2 MESMOS RO, EPS E N, MUDANDO A BASE E O PONTO
        3 INICIAL.'//)
        ACCEPT 777,KEY
777     FORMAT(I)
        IF(KEY-1)1001,100,120
1001    CALL EXIT
        END
```

B I B L I O G R A F I A

[1] AUBIN, J.P. Approximation des espaces de distributions et des operateurs differentiels. Thèse. Memoires de la Societe Mathématique de France, Paris, 12, 1967.

[2] ______ Approximation of elliptic boundary value problems. Toronto, Wiley, 1972. 360p.

[3] BERDOT, P; CHERRUALT, Y; KOROBELNIK, C; LORIDAN, P; NISSEN, G & TONNELIER, F. Contribution à la resolution de problèmes d' optimisation par des méthodes directes. Montrouge, U.E.R. de Montrouge, 1969. 68p. (Contract D.G.R.S.T. Nº 6801452, compte-rendu de fin d'année, decembre 1969).

[4] CHERRUAULT, Y. Une méthode directe de minimisation et applications Revue Francaise D'informatique et de Recherche Operationnelle, Paris, 10:31-52, 1968.

[5] ______; DESCROIX, H; HASCOET, D; KOROBELNIK, G; LAI, C. T; LORIDAN, P. & TONNELIER, F. Résolution d'équations par des méthodes d'optimisation. Montrouge, U.E.R. de Montrouge, 1970. v.2. 111p.

[6] ______. Minimisation de fonctionelles non convexes. Rendiconti di Matematica, serie IV, 3(4), 1970.

[7] ______. Une méthode d'optimisation appliquée aux problémes avec contrainte. Lille, Faculté des Sciences de Lille publ, 1968. 11p.

[8] ______. Sur la determination et l'approximation d'operateurs linéaires et non-linéaires. Rendiconti di matematica, serie IV, 4(2), 1970.

[9] ______. Approximation d'operateurs linéaires et applications. Paris, Dunod, 1968. 198p.

[10] COTLAR, M. & CIGNOLI, R. Nociones de espacios normados. Buenos Aires, Editorial Universitaria de Buenos Aires / c1967/ 361p.

[11] D'AMBRÓSIO, U. Cálculo de variações. São Paulo, U.S.P, 1969. 69p. (Notas de Aula).

[12] GELFAND, J. M. & FOMIN, S. V. Calculus of variations. Englewood Cliffs, Prentice-Hall / c1963/ 232p.

[13] HALMOS, P. Introduction to Hilbert space. New York, Van-Nostrand /c1957/ 114p.

[14] LORIDAN. P. Méthodes mixtes et estimations d'erreur en optimisation convexe. Paris, L'université de Paris VI, 1973. 287p. Thèse (Doctorat D'etat es Sciences Mathématiques) - L'Université de Paris VI.

[15] ______. Sur un procède d'optimisation utilisant simultanement les méthodes de penalisation et des variations locales, Pt. 1-2. Sian Journal on Control, 11(1):159-172; 173-184, 1973.

[16] LUENBERGER, D. Optimisation by vector space methods. New York, J. Wiley / c1969/ 326p.

[17] MORREY, C. Multiple integrals in the calculus of variations. New York, Springer-Verlag, 1966. 506p.

[18] ROYDEN, H. L. Real analysis. 2ª ed. /New York, Macmillan /1971/ 349p.

[19] RUDIN, W. Real and complex analysis. New York, McGraw-Hill/ c1966/ 412p.

BC

[20] SAGAN, H. Introduction to the calculus of variations. New York, McGraw-Hill /c1969/ 449p.

[21] VAINBERG, M. Variational methods for the study of non-linear operators. San Francisco, Holden-Day, 1964. 323p.

[22] DUPUY, M. Une méthode d'approximations de distributions. Dijon, L'université de Dijon, 1973. 99p. Thèse (Docteur de 3.e cycle) - L'Université de Dijon.

[23] SCIARRINO - MORGAN, J. Méthodes de recherche de points de selle. Paris, L'université de Paris VI, 1973. 71p. Thèse (Docteur de 3.e cycle) - L'Université de Paris VI.

[24] NISSEN, G. Sur quelques méthodes d'approximations des distributions Paris, Faculté des Sciences de Paris, 1968. 29p. Thèse (Doctorat 3.e cycle) - Faculté des sciences de Paris.

[25] TEMAM, R. Analyse numérique. Paris, Presses Universitaires de France, 1970. 118p.

====================