IMERSÕES DO ESPAÇO PROJETIVO REAL

DADAS POR APLICAÇÕES BILINEARES NÃO SINGULARES

Vera Lúcia Figueiredo F. Ribeiro

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação da Universidade Estadual de Campinas como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Antonio Conde

CAMPINAS

1975

Meus agradecimentos ao Prof. Dr. Antonio Conde e aos colegas Professores: Antonio Carlos do Patrocinio, Antonio Paques e Suely Rodrigues Costa, pela colaboração recebida.

INTRODUÇÃO

Consideremos $\mathbb{R}^n$ o espaço euclidiano e o seguinte resultado de Whitney: "Uma variedade M^n de dimensão n pode ser imersa em $\mathbb{R}^{2n-1}$, isto é, existe uma aplicação C^∞, $f:M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{2n-1}$, cuja matriz jacobiana tem posto constante igual a n em cada ponto de M.

Substituindo agora M^n por $\mathbb{P}^n$, espaço projetivo real, consideremos a seguinte pergunta: "Dado um inteiro positivo n, qual o menor inteiro k, tal que, $\mathbb{P}^n$ imerge em $\mathbb{R}^k$?" .

Através de aplicações bilineares não singulares conseguimos uma resposta parcial a esta pergunta, obtendo tais imersões para $8 < n \leq 23$ e $n \neq 19$.

Para isto, dividimos o texto em quatro capítulos.

Os capítulos I e II, "Fibrados Vetoriais" e "Álgebras dos Quaternios e Cayley" respectivamente são encarados como pré-requisitos, onde procuramos desenvolver com a máxima clareza os assuntos a serem tratados no decorrer do trabalho em si, que corresponde aos dois capítulos restantes.

O capítulo III, consta das construções das aplicações bilineares não singulares.

Partimos de K, Álgebra de Cayley e das aplicações $f:K^2 \times K^2 \longrightarrow K^3$ dada por K.Y. LAM [7] e $g:K^3 \times K^3 \longrightarrow K^5$ dada por J.ADEM [1].

Usando basicamente as propriedades de K dadas no capítulo II e considerando restrições convenientes de f e g a vá rios subespaços de $K^2 \times K^2$ e $K^3 \times K^3$ respectivamente, conseguimos os resultados desejados para então, no capítulo IV, dar suas aplicações.

Uma delas, relaciona a existência de tais aplicações bilineares não singulares com o número de secções independentes do fibrado $k\xi_n^1$ (k-soma de Whitney de ξ_n^1, fibrado linear canônico sôbre $\mathbb{P}^n$), através do seguinte teorema: "Se existe uma aplicação bilinear não singular $f:\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^k$ então $k\xi_n^1$ admite r-secções independentes".

A outra, responde a nossa pergunta inicial quando provamos o seguinte resultado: "Se existe uma aplicação bilinear não singular $f:\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{k+1}$, $(8 < n < k)$ então $\mathbb{P}^n$ imerge em $\mathbb{R}^k$".

Convém frisar que na demonstração deste teorema, recorremos aos resultados de Hirsch encontrados em [4].

Finalmente, como uma complementação do texto colocamos no final do capítulo IV uma tabela das melhores imersões de $\mathbb{P}^n$ em $\mathbb{R}^k$ para $1 \leq n \leq 23$.

CAPÍTULO I

FIBRADOS VETORIAIS

1.1 - Definição:

Um fibrado vetorial real η sobre um espaço topológico fixo B, consiste do seguinte:

i) Um espaço topológico $E = E(\eta)$ chamado espaço total.

ii) uma aplicação contínua $\pi : E \to B$ chamada projeção.

iii) para cada $b \in B$, $\pi^{-1}(b)$ tem estrutura de espaço vetorial real.

Satisfazendo a seguinte restrição:

Condição de trivialidade local . Para cada ponto de B, existe uma vizinhança $U \subset B$, um inteiro $n \geq 0$ e um homeomorfismo $h : U \times \mathbb{R}^n \to \pi^{-1}(U)$, tal que, para cada $b \in U$, a correspondência $x \mapsto h(b,x)$ define um isomorfismo entre o espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ e o espaço vetorial $\pi^{-1}(b)$.

Tal par (U,h) é chamado carta local para η.

O espaço B é chamado espaço base. Se for possível escolher U como sendo todo espaço base, dizemos que η é um fibrado trivial, portanto η é homeomorfo a $B \times \mathbb{R}^n$, que indicaremos algumas vezes por θ^n.

O espaço vetorial $\pi^{-1}(b)$ é chamado fibra sobre b. Como trabalharemos com B conexo, a dimensão n de $\pi^{-1}(b)$ (que é constante em cada componente conexa de B) será uma função constante de b. Falamos assim de um fibrado vetorial real n-dimensional, que indicaremos por η^n.

O fibrado vetorial η é conhecido também como sendo a terna (E,π,B).

1.1.1 - O fibrado linear canônico sobre $\mathbb{P}^n$

$\mathbb{P}^n$, o espaço projetivo real, pode ser definido como o espaço quociente, S^n por uma relação de equivalência, dada pela identificação dos seus pontos antípodas, i.e:

$\mathbb{P}^n = S^n/_\sim$ onde $x \sim y$ se e somente se $x = \pm y$.

Os pontos de $\mathbb{P}^n$ serão indicados por $\bar{x} = \{x,-x\}$ com $x \in S^n$.

A aplicação canônica $q: S^n \longrightarrow S^n/_\sim$ com $q(x) = \bar{x}$, dá a $\mathbb{P}^n$ a topologia quociente.

ξ_n^1, fibrado linear canônico sobre $\mathbb{P}^n$

Seja $E(\xi_n^1)$ o subconjunto de $\mathbb{P}^n \times \mathbb{R}^{n+1}$, consistindo de todos os pares $(\bar{x}, \lambda x)$, λ real.

Definimos a aplicação projeção $\pi: E(\xi_n^1) \longrightarrow \mathbb{P}^n$ pondo $\pi(\bar{x}, \lambda x) = \bar{x}$. Deste modo, cada fibra pode ser identificada com a reta que passa por x e -x em $\mathbb{R}^{n+1}$, com a estrutura usual de espaço vetorial.

A condição de trivialidade local é verificada, tomando U aberto de S^n que não contem nenhum par de pontos antípodas e tomemos U_1 como a imagem de U em $\mathbb{P}^n$ através de q.

Definindo então $h: U_1 \times \mathbb{R} \longrightarrow \pi^{-1}(U_1)$ por $h(\bar{x},\lambda) = (\bar{x},\lambda x)$ para $(x,\lambda) \in S^n \times \mathbb{R}$ temos o par (U_1,h) como sistema de coordenadas locais para ξ_n^1 .

1.1.2 - Soma de Whitney

Consideremos η_1^n e η_2^m dois fibrados vetoriais sobre uma mesma base B com projeções $\pi_1: E_1 \longrightarrow B$ e $\pi_2: E_2 \longrightarrow B$, respectivamente.

O fibrado $\eta_1 \oplus \eta_2$ sôbre B é definido como tendo espaço total $E_1 \oplus E_2 = \{(x,x') \in E_1 \times E_2$ com $\pi_1(x) = \pi_2(x')\}$ e projeção $\pi: E_1 \oplus E_2 \longrightarrow B$ dada por $\pi(x,x') = \pi_1(x) = \pi_2(x')$.

Para cada $b \in B$, a fibra $\pi^{-1}(b)$ é $\pi_1^{-1}(b) \times \pi_2^{-1}(b) \subset E_1 \times E_2$.

Dado $U \subset B$, se:

$h_1: U \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \pi_1^{-1}(U)$ é carta local de η_1 e

$h_2: U \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \pi_1^{-1}(U)$ é carta local de η_2, então:

$h_1 \oplus h_2: U \times \mathbb{R}^{n+m} \longrightarrow \pi^{-1}(U)$ é carta local de $\eta_1 \oplus \eta_2$ que é chamado de Soma de Whitney de η_1 com η_2.

De modo análogo define-se Soma de Whitney para um número finito de fibrados, e é facil ver que valem a comutatividade e associatividade de $\oplus$.

1.2 - Aplicações entre fibrados

1.2.1 - <u>Definição</u>: Sejam ξ e η fibrados vetoriais com projeções $\pi_E : E \longrightarrow B$ e $\pi_F : F \longrightarrow B$ respectivamente. Um homomorfismo entre fibrados de mesma base $\phi : \xi \longrightarrow \eta$ é uma aplicação contínua $\phi : E \longrightarrow F$ tal que:

i) $\pi_E = \pi_F \circ \phi$

ii) ϕ é linear em cada fibra

A condição i) nos diz que o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "\pi_E"'] & & F \arrow[dl, "\pi_F"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

é comutativo e ainda que $\phi(\pi_E^{-1}(b)) \subset \pi_F^{-1}(b)$ para cada $b \in B$, i.e, ϕ preserva as fibras.

A condição ii) nos diz que para cada $b \in B$, $\phi_b : \pi_E^{-1}(b) \longrightarrow \pi_F^{-1}(b)$ é uma aplicação linear de espaços vetoriais.

Nas condições da definição dada, um homomorfismo $\phi : E \longrightarrow F$ é um monomorfismo (respectivamente epimorfismo) se para cada $b \in B$, $\phi_b : \pi_E^{-1}(b) \longrightarrow \pi_F^{-1}(b)$ é uma aplicação injetora (respectivamente sobrejetora).

Um isomorfismo $\phi : \xi \longrightarrow \eta$ é um homomorfismo injetor e sobrejetor.

1.2.2 - Subfibrada Vetorial

Dados ξ , η dois fibrados vetoriais com projeções $\pi_E: E \longrightarrow B$ e $\pi_F: F \longrightarrow B$ respectivamente, com $E \subset F$, ξ é subfibrado de η ($\xi \subset \eta$) se cada fibra $\pi_E^{-1}(b)$ é um subespaço vetorial da fibra correspondente $\pi_F^{-1}(b)$ para cada $b \in B$.

1.3 - Kernel, Imagem, Cokernel de homomorfismos com posto constante.

1.3.1 - Definição: Um homomorfismo de fibrados $\phi: \xi \longrightarrow \eta$ sobre B como (1.2.1) tem posto constante $\underline{\underline{k}}$ se $\phi_b: \pi_E^{-1}(b) \longrightarrow \pi_F^{-1}(b)$ tem posto constante k para todo $b \in B$

1.3.2 - Teorema: Sejam $\phi: \xi^n \longrightarrow \eta^m$ homomorfismo de fibrados sobre B com posto constante k.

Então:

$\operatorname{Ker}\phi$ é um subfibrado de ξ de dimensão n-k, $\operatorname{Im}\phi$ é um subfibrado de η de dim k e $\operatorname{Coker}\phi$ é um subfibrado de η de dim m-k. ([5], pag 34)

Observamos que o espaço total de $\operatorname{Coker}\phi$ é o espaço quociente de $F(\eta)$ pela seguinte relação: $y, y' \in F(\eta)$ estão relacionados se $\pi_F(y') = \pi_F(y)$ e $y - y' = \phi(x)$ para algum $x \in E(\xi)$.

Decorrem imediatamente do teorema anterior:

1.3.3 - Corolário: Seja $\phi: \xi^n \longrightarrow \eta^m$ um monomorfismo sobre B. Então $\operatorname{Im}\phi$ e $\operatorname{Coker}\phi$ são fibrados ve torias (ϕ tem posto constante m-n)

1.3.4 - Corolário: Seja $\phi:\xi^n \longrightarrow \eta^m$ um epimorfismo sobre B. Então Ker ϕ é fibrado vetorial. (ϕ tem posto constante n-m).

1.4 - Métrica Riemaniana.

Sejam ξ um fibrado vetorial com projeção $\pi:E \longrightarrow B$ e

$$\Delta(\xi) = \{(e,e') \in E\times E \text{ tal que } \pi(e) = \pi(e') = b\} =$$

$$= \bigcup_{b\in B} \pi^{-1}(b) \times \pi^{-1}(b)$$

1.4.1 - Definição: Uma Métrica Riemoniana em ξ e uma aplicação contínua $\langle\ ,\ \rangle: \Delta(\xi) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

1. $\langle e,e\rangle \geq 0$ e $\langle e,e\rangle = 0 \Longleftrightarrow e = 0 \in \pi^{-1}(b)$.
2. $\langle e,e'\rangle = \langle e',e\rangle$
3. $\langle\alpha e_1 + \beta e_2,e'\rangle = \alpha\langle e_1 e'\rangle + \beta\langle e_2,e'\rangle$.

Nosso objetivo será mostrar que todo fibrado vetorial cuja base é paracompacta admite métrica Riemaniana, para isto recordaremos algumas definições e resultados que nos auxiliarão. Para maiores detalhes ver ([8], cap 8 e 9) onde é introduzido uma métrica Riemaniana numa variedade diferenciável.

Seja X espaço topológico.

1.4.2 - Recobrimento localmente finito

Seja $U = (U_\alpha)_{\alpha\in A}$ um recobrimento por abertos do espaço X. Diremos que U é localmente finito se para todo $x \in X$, existir uma vizinhança V_x de x que intersepta sòmente um número finito de elementos de U.

1.4.3 - Suporte de uma função contínua

Seja $f: X \longrightarrow \mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \ ; \ x \geq 0\}$ contínua, definimos suporte de f como o conjunto

$$\sigma(f) = \text{aderência } \{x \in X \ ; \ f(x) > 0\}.$$

1.4.4 - Partição da unidade.

Uma partição da unidade associada a um recobrimento aberto $U = (U_\alpha)_{\alpha \in A}$ localmente finito é uma família de funções contínuas $(\phi_\alpha)_{\alpha \in A}$ onde, para cada $\alpha \in A$, $\phi_\alpha: X \longrightarrow R_+$ é tal que $(\sigma(\phi_\alpha))_{\alpha \in A}$ é um recobrimento localmente finito do espaço X e $\sum_{\alpha \in A} \phi_\alpha(x) = 1 \quad \forall x \in X$ e

$\sigma(\phi_\alpha) \subset U_\alpha \quad \forall \alpha \in A$

1.4.5 - Espaço Paracompacto

Um espaço X é paracompacto se X é Hausdorff e todo recobrimento aberto localmente finito de X, possui uma partição da unidade associada a este recobrimento.

1.4.6 - Lema: Um fibrado vetorial trivial sempre admite métrica Riemaniana.

Demonstração: Seja $E = B \times \mathbb{R}^n$ um fibrado trivial com projeção $\pi: E \longrightarrow B$; logo, existe um homeomorfismo $h: B \times \mathbb{R}^n \longrightarrow E$.

Dado $b \varepsilon B$, sejam e,e' pertencentes a mesma fibra de E, esto é, $e,e' \varepsilon \pi^{-1}(b) \simeq \mathbb{R}^n$.
Temos então $h^{-1}(e) = (b,\bar{e})$ e $h^{-1}(e') = (b,\bar{e}')$
Definindo $\langle e,e' \rangle_h = \langle \bar{e},\bar{e}' \rangle$ temos dado uma métrica no fibrado trivial, de fato:

1. $\langle e,e \rangle_h \geq 0$ e $\langle e,e \rangle_h = 0 \Longleftrightarrow e = e' = 0 \, \varepsilon \, \pi^{-1}(b)$.

2. $\langle e,e' \rangle_h$ é bilinear e simétrica, uma vez que $\langle \bar{e},\bar{e}' \rangle$ o é.

Uma vez que $\langle e,e' \rangle_h = \langle p \circ h^{-1}(e), p \circ h^{-1}(e') \rangle$ onde $p: B \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, segue a continuidade global nas variáveis e, e'.

1.4.7 - Teorema: Um fibrado vetorial com base paracompacta admite métrica Riemaniana.

Demonstração: Seja ξ um fibrado vetorial com projeção $\pi: E \longrightarrow B$. Seja $U = (U_\alpha)_{\alpha \varepsilon A}$ um recobrimento aberto localmente finito de B tal que sobre os abertos deste recobrimento, ξ é trivial.

Pelo lema anterior, sabemos que para cada U_α está definida uma metrica Riemaniana $\langle \, , \, \rangle_\alpha$.
Mas B é paracompacto, logo possui uma partição da unidade $(\phi_\alpha)_{\alpha \varepsilon A}$ tal que $\sigma(\phi_\alpha) \subset U_\alpha$.
Assim poderemos definir globalmente uma métrica Riemaniana em ξ, por:

$$\langle e,e' \rangle = \sum_{\alpha \varepsilon A} \phi_\alpha(b) \langle \bar{e},\bar{e} \rangle_\alpha \text{ onde}$$
$$b = \pi(e) = \pi(e').$$

1.5 - Sequência de Homomorfismos

1.5.1 - Definição: Sejam ξ,η,γ fibrados vetoriais sobre uma mesma base B.

Dizemos que a sequência de homomorfismos de fibrados

$\xi \xrightarrow{u} \eta \xrightarrow{v} \gamma$ é exata em η se a sequência

$\pi_\xi^{-1}(b) \xrightarrow{u_b} \pi_\eta^{-1}(b) \xrightarrow{v_b} \pi_\gamma^{-1}(b)$ for exata

em $\pi_\eta^{-1}(b)$, $\forall b\in B$, i.e, se $\mathrm{Im}\, u_b = \mathrm{Ker}\, v_b$ $\forall b\in B$.

Indicamos este fato por $\mathrm{Im}\, u = \mathrm{Ker}\, v$.

Notação $0 = (B, I_B, B)$

1.5.2 - Teorema.

Seja $0 \longrightarrow \xi \xrightarrow{u} \eta \xrightarrow{v} \gamma \longrightarrow 0$ uma sequência exata curta, i.e, u é monomorfismo, $\mathrm{Im}\, u = \mathrm{Ker}\, v$ e v é epimorfismo. Se η é um fibrado vetorial com métrica Riemaniana, então existe um isomorfismo $w: \xi \oplus \gamma \to \eta$ de modo que o seguinte diagrama seja comutativo

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \xi & \xrightarrow{u} & \eta & \xrightarrow{v} & \gamma & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow I_\xi & & w\uparrow & & \uparrow I_\gamma & & \\
0 & \longrightarrow & \xi & \xrightarrow{i} & \xi\oplus\gamma & \xrightarrow{j} & \gamma & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

o homomorfismo i é a inclusão no 1º fator e j a projeção sobre o 2º fator

Demonstração: Seja $\xi' = \mathrm{Im}\, u$ onde $E(\xi') \subset E(\eta)$. Consideremos

$E(\gamma') = \{x \in E(\eta)$ com $\langle x,x'\rangle = 0 \quad \forall x \in E(\xi)$ com $\pi_\eta(x) = \pi_\eta(x')\}$.

Seja $g\colon E(\eta) \longrightarrow E(\xi')$ a projeção de $\pi_\eta^{-1}(b)$ sobre $\pi_{\xi'}^{-1}(b)$ para cada $b \in B$.

Queremos mostrar que g é contínua.

Para isto podemos supor

$u\colon B \times \mathbb{R}^m \longrightarrow B \times \mathbb{R}^n$ um monomorfismo

e $\langle x,x'\rangle_b$ a métrica em $B \times \mathbb{R}^m$, então

$g\colon B \times \mathbb{R}^m \longrightarrow B \times \mathbb{R}^n$ é dada por

$$g(b,x) = (b, \sum_{i=1}^{n} \langle x,u_b(e_i)\rangle\, e_i) \text{ onde}$$

$e_1 \ldots e_n$ é a base canônica do $\mathbb{R}^n$. e portanto g é contínua.

Desde que g_b é contínua linear e sobre, $g\colon \eta \longrightarrow \xi'$ é um epimorfismo e então Kerg é um subfibrado de η temos que γ' é subfibrado de η pois Kerg $= \gamma'$.

Temos ainda $v_{/\gamma'}\colon \gamma' \longrightarrow \gamma$ é isomorfismo e definimos finalmente $w_{/\xi}$ como sendo o isomorfismo $\mu\colon \xi \longrightarrow \xi' \subset \eta$ e $w_{/\gamma}$ como sendo o isomorfismo $(v_{/\gamma'})^{-1}\colon \gamma \longrightarrow \gamma' \subset \eta$.

1.6 - Apêndice.

Consideremos o fibrado $(n+1)\xi_n^1$ a soma de Whitney de ξ_n^1 por êle mesmo, (n+1) vezes, cujo espaço total é dado por:

$E((n+1)\xi_n^1) = \{(\bar{x},\lambda_1 x,\ldots,\lambda_{n+1}x), x \in S^n, \lambda i \in \mathbb{R},\ 1 \le i \le n+1\}$

1.6.1 - Um isomorfismo entre $(n+1)\xi_n^1$ e $\zeta(\mathbb{P}^n) \oplus \theta^1$.

Denotando por $<x,y>$ o produto interno no $\mathbb{R}^n$, definimos o fibrado tangente a S^n, $\zeta(S^n)$ como sendo a terna (E,π,S^n) onde $E \subset S^n \times \mathbb{R}^{n+1}$ é obtido da relação, $(x,v) \in E$,

se e somente se $<x,v> = 0$ e a projeção $\pi: E \to S^n$ dada por $\pi(x,v) = x$ nos dá as fibras $\pi^{-1}(x)$ como espaços vetoriais de dimensão $\underline{\underline{n}}$.

O par (x,v) é chamado vetor tangente a S^n em x.

A partir de $\zeta(s^n)$, definimos $\zeta(\mathbb{P}^n)$ o fibrado tangente a $\mathbb{P}^n$ pela terna $(E_1, \pi_1, \mathbb{P}^n)$ onde E_1 é obtido de E pela identificação $(x,v) = (-x,-v)$, que indicamos por $\overline{(x,v)}$ com $\pi_1: E_1 \longrightarrow \mathbb{P}^n$ dada por $\pi_1\left[\overline{(x,v)}\right] = \bar{x}$.

É fácil ver que $\zeta(S^n)$ e $\zeta(\mathbb{P}^n)$ satisfazem a condição de trivialidade local.

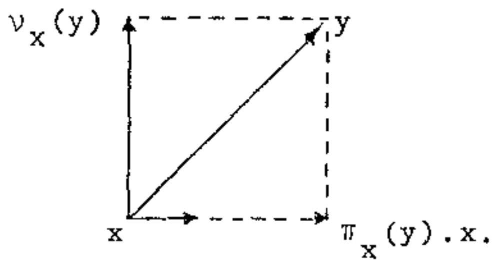
O isomorfismo f sôbre $\mathbb{P}^n$ entre $(n+1)\xi_n^1$ e $\zeta(\mathbb{P}^n) \oplus \theta^1$ é construido da seguinte maneira:

Para cada $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, existem duas funções lineares $\nu_x: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, aplicação normal e $\pi_x: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ a projeção em x, tal que

$$y = \nu_x(y) + \pi_x(y).x \text{ com } \pi_x(y) = \frac{<x,y>}{<x,x>},$$

$$, \nu_x(y) = y - \pi_x(y), x. ,$$

e $<b,\nu_x(y)> = 0$ para todo $y \in \mathbb{R}^n$.



Definimos $f:(n+1)\xi_n^1 \longrightarrow \zeta(\mathbb{P}^n) \oplus \theta^1$ por:

$f(\bar{x},\lambda_1 x,\ldots\lambda_{n+1}x)=(\overline{(x,\nu_x(\lambda_1,\ldots,\lambda_{n+1}))}$,

, $(\bar{x},\pi_x(\lambda_1,\ldots\lambda_{n+1})))$ cuja inversa é dada

por:

$$g(\overline{(x,y)},(\bar{x},k)) = (\bar{x},p_1(y+kx).x,\ldots,p_{n+1}(y+kx).x)$$

onde $p_i: \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$ é a projeção da i-ésima coordenada ([5], pg. 16).

1.6.2 - Outra representação de ξ_n^1 .

Como em (1.1.1) consideremos

$E(\xi_n^1) = \{(\bar{x},\lambda x);\ x \in S^n,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$, espaço total de ξ_n^1 .

Tomemos $E_1(\xi_n^1)$ o espaço obtido de $S^n \times \mathbb{R}$ pela identificação $(x,\lambda) = (-x,-\lambda)$ ou $E_1(\xi_n^1)=S^n \times \mathbb{R}/_T$ onde T é a involução $T(x,\lambda) = (-x,-\lambda)$.

Indicaremos os elementos de $E_1(\xi_n^1)$ por $(\overline{x,\lambda})$

Consideremos a projeção $\pi_{E_1}: E_1 \longrightarrow \mathbb{P}^n$ dada por $\pi_{E_1}(\overline{x,\lambda}) = \bar{x}$.

Nosso objetivo é mostrar que $E(\xi_n^1)$ e $E_1(\xi_n^1)$ são isomorfos.

Para isto, consideremos a aplicação $f: S^n \times \mathbb{R} \to E$ contínua e sobre E, dada por $f(x,\lambda) = (\bar{x}, \lambda x)$ que satisfaz, $f(-x,-\lambda) = (-\bar{x}, (-\lambda).(-x)) = (\bar{x}, \lambda x) = f(x,\lambda)$. Sendo assim, tal aplicação passa ao quociente, isto é, existe uma única $\phi: S^n \times \mathbb{R}/_T \longrightarrow E$ tal que $\phi o q(x,\lambda) = f(x,\lambda)$ onde q é a aplicação quociente.

Como $\phi o q = f: S^n \times \mathbb{R} \longrightarrow E$ é contínua e $S^n \times \mathbb{R}/_T$ tem a topologia co-induzida por q, segue-se que ϕ é contínua.

Além disso, ϕ é injetora e sôbre.

Logo, $\phi: E_1 \longrightarrow E$ dada por $\phi\left[\overline{(x,\lambda)}\right] = (\bar{x}, \lambda x)$ é um isomorfismo de fibrados, pois:

$$\begin{aligned} \phi_{\bar{x}} : \pi_{E_1}^{-1}(\bar{x}) &\longrightarrow \pi_E^{-1}(\bar{x}) \\ (x,\lambda) &\longrightarrow (x,\lambda x) \text{ é linear.} \end{aligned}$$

$\phi_{\bar{x}}[(x,\lambda_1) + (x,\lambda_2)] = \phi_{\bar{x}}(x,\lambda_1+\lambda_2) =$

$= (x,(\lambda_1+\lambda_2)x) = (x,\lambda_1 x) + (x,\lambda_2 x) =$

$= \phi_{\bar{x}}(x,\lambda_1) + \phi_{\bar{x}}(x,\lambda_2)$ e $\phi_{\bar{x}}[\alpha(x,\lambda_1)] =$

$= \phi_{\bar{x}}(x,\alpha\lambda_1) = (x,\alpha\lambda_1 x) = \alpha(x,\lambda_1 x) = \alpha\phi_{\bar{x}}(x,\lambda_1)$

para todo $\alpha, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

* * *

CAPÍTULO II

ÁLGEBRAS DOS QUATERNIOS E CAYLEY

2.1 - Álgebras lineares

2.1.1 - Definição: Seja P um corpo, uma "algebra linear" sobre o corpo P ou simplismente algebra sobre P é um espaço vetorial A sôbre P com uma operação adicional dita multiplicação de vetores, que associa a cada par de vetores a,b$\in$ A um vetor a.b em A dito produto de a por b de maneira que, para quaisquer a,b,c $\in$ A e $\alpha \in$ P tem-se:

i) $a(bc) = (ab)c$.

ii) $a(b+c) = ab + ac$.

iii) $(b+c)a = ba + bc$.

iv) $\alpha(ab) = (\alpha a)b = a(\alpha b)$,

Se existir um elemento e em A tal que $ae = ea = a$ para todo a em A dizemos que A é uma álgebra linear sobre P com elemento unidade. A é comutativa se $ab = ba$ para todo a,b $\in$ A

Observação: 1) Se A é tal que não vale a propriedade i) chamaremos A de álgebra não-associativa.

2) Note que A com estas operações é um anel.

2.1.2 - Definição: Seja (R, +, $\cdot$) um anel.

Definimos centro de R ($C(R)$) como o conjunto dos elementos a de R que permutam com todos os elementos de R, isto é, $ax = xa$ para todo $x \in R$.

2.1.3 - Proposição: Se uma algebra A sobre um corpo P tem elemento unidade $\underline{\underline{e}} \neq 0$, então $C(A)$ contem um subcorpo contendo $\underline{\underline{e}}$, isomorfo a P.

Demonstração: Consideremos P' o conjunto dos elementos da forma αe com $\alpha \in P$.

Seja $\mu : P \longrightarrow P'$ a aplicação definida por $\mu(\alpha) = \alpha e$, que é um morfismo, pois para todo $\alpha, \beta \in P$ tem-se

$(\alpha+\beta)e = \alpha e + \beta e$

$(\alpha\beta)e = (\alpha\beta)(ee) = (\alpha e.\beta)e = \alpha e.\beta e$

Na verdade μ é um isomorfismo, pois μ é sobrejetora e sendo P um corpo, Ker μ é um ideal impróprio de P. Se Ker $\mu = P$, $\mu(1) = 0$ onde 1 é o elemento unidade de P, mas, $\mu(1) = e.1 = e \neq 0$. Logo Ker μ é o ideal zero e portanto μ é um monomorfismo. Finalmente P' está contido no cento de A.

Para quaisquer $x, y \in A$ temos

$(\alpha e)x = \alpha(ex) = \alpha(xe) = x(\alpha e)$.

2.1.4 - Considerações gerais sobre as operações na álgebra A.

Seja A uma álgebra sobre um corpo P. No espaço vetorial desta álgebra, escolhemos uma base X, consistindo dos elementos x_i, tal que i percorre um certo conjunto de índices.

Então todo elemento $a \in A$ pode ser expresso de modo único como,

$$a = \sum_{a_i \in X} x_i \alpha_i \qquad (\alpha_i \in P).$$

Com isto ficam bem determinadas a adição de elementos de A e a multiplicação por elementos de P.

Se x_i, $x_j \in X$, $x_i . x_j \in A$, logo tem uma expressão em termos dos vetores da base

$x_i x_j = \sum_{x_k \in X} x_k \xi_{ij}^k$ onde somomente um número finito de ξ_{ij}^k são diferentes de zero.

O sistema de elementos ξ_{ij}^k do corpo P, determina completamente a multiplicação na álgebra A.

Para elementos $\alpha, \beta \in P$ temos,

$$(x_i \alpha)(x_j \beta) = (x_i x_j)(\alpha\beta) = \sum_{x_k \in X} x_k \; (\xi_{ij}^k \; \alpha\beta)$$

Dados dois elementos de A

$$a = \sum_{x_i \in X} x_i \alpha_i \, , \quad b = \sum_{x_j \in X} x_j \beta_j \tag{2}$$

como somente um número finito dos coeficientes α_i, β_j pode ser diferente de zero e levando em conta as leis distributivas obtemos

$$a.b = \sum_{x_i \varepsilon X} \sum_{x_j \varepsilon X} (x_i \alpha_i)(x_j \beta_j) =$$

$$= \sum_{i,j,k} x_k (\xi_{ij}^k \alpha_i \beta_j). \tag{3}$$

Naturalmente, se escolhemos uma outra base de A, os números ξ_{ij}^k mudam, e então obtemos uma "tábua de multiplicação" diferente de (1). Vale a pena ressaltar que:

Se uma base X de elementos $x_i (i \varepsilon I)$ é escolhida num espaço vetorial V sobre um corpo P e elementos arbitrários ξ_{ij}^k são tomados em $P(i,j,k \varepsilon I)$, então existe uma álgebra sobre P que tem V como espaço vetorial e que é dada na base X pela tábua de multiplicação (1) com estes coeficientes ξ_{ij}^k.

Para isto, basta tomar (3) como definição de produtos de dois elementos $a,b \varepsilon V$ cujas expressões na base X são da forma (2) e é fácil ver que as condições da definição 1.2.1 são satisfeitas.

Uma algebra construida deste modo pode não ser associativa nem comutativa, o seguinte resultado nos ajudará na determinação de tal álgebra.

2.1.5 - <u>Proposição</u>: Se uma base X é escolhida numa álgebra A sobre um corpo P, então a álgebra A será associativa ou comutativa se e somente se, para quaisquer $x_i, x_j, x_k \in X$ $x_i(x_j x_k) = (x_i x_j)x_k$ ou $x_i x_j = x_j x_i$ respectivamente.

Demonstração:

Sejam $a, b, c \in A$, tal que $a = \sum_{x_i \in X} x_i \alpha_i$,

$b = \sum_{x_j \in X} x_i \beta_j$ e $c = \sum_{x_k \in X} x_k \gamma_k$.

i) $(ab)c = a(bc) \Longrightarrow (x_i x_j)x_k = x_i(x_j x_k)$

ii) $ab = ba \Longrightarrow x_i x_j = x_j x_i$

iii) $(x_i x_j)x_k = x_i(x_j x_k)$ para todo $x_i, x_j, x_k \in X \Rightarrow$

$\Longrightarrow (ab)c = a(bc)$

$$(ab)c = (\sum_{x_i \in X} x_i \alpha_i \ . \sum_{x_j \in X} x_k \gamma_k =$$

$$= (\sum_{x_i \in X} \sum_{x_j \in X} (x_i \alpha_i).(x_j \beta_j)) \ . \sum_{x_k \in X} x_k \gamma_k =$$

$$= (\sum_{x_i \in X} \sum_{x_j \in X} (x_i x_j)(\alpha_i \beta_j)) \ . \sum_{x_k \in X} x_k \gamma_k =$$

$$= \sum_{x_i, x_j, x_k \in X} (x_i x_j) x_k . (\alpha_i \beta_j \gamma_k) =$$

$$= \sum_{x_i, x_j, x_k \in X} x_i(x_j x_k).(\alpha_i \beta_j, \gamma_k)$$

$$= \sum_{x_i \in X} x_i \alpha_i \sum_{x_j, x_k \in X} (x_j x_k).(\beta_j \gamma_k) = a.(bc).$$

iv) $x_i x_j = x_j x_i \Longrightarrow ab = ba$.

$$ab = \sum_{x_i \in X} x_i \alpha_i \sum_{x_j \in X} x_j \beta_j = \sum_{x_i \in X} \sum_{x_j \in X} (x_i \alpha_i)(x_j \beta_j) =$$

$$= \sum_{x_i \in X} (x_i x_j) \ . \ (\alpha_i \beta_j) = \sum_{x_j \in X} \sum_{x_i \in X}$$

$$(x_j x_i)\cdot(\beta_j \alpha_i) = \sum_{x_j \in X} (x_j \beta_j) \cdot \sum_{x_i \in X} (x_i \alpha_i) = ba.$$

2.1.6 - Definição

Uma álgebra A sobre um corpo P é de dimensão finita se o espaço vetorial desta álgebra sobre P é de dimensão finita.

2.1.7 - Definição. Seja $\mathbb{R}$ o corpo dos reais

Uma álgebra de divisão real D é um anel de divisão D $[(D,+,.)$ é anel e os elementos não nulos de D formam um grupo com relação a multiplicação$]$ com $\mathbb{R}$ como subanel de tal modo que $xd = dx$ para todo $d \in D$ e $x \in \mathbb{R}$.

Uma algebra D de divisão real é uma álgebra linear sobre $\mathbb{R}$ com elemento unidade, que é o elemento unidade da multiplicação em D.

2.2 - Exemplos de Álgebras

2.2.1 - Corpo dos Complexos:

O corpo C dos complexos é uma álgebra de divisão sobre o corpo dos $\mathbb{R}$eais.

Esta algebra tem dimensão 2 pois 1, i formam uma base para ela.

A tábua de multiplicação nesta base é dada por:

	1	i
1	1	i
i	i	-i

ou $1^2 = 1$

$1i = i\,1 = i$

$i^2 = -1$

2.2.2 - Algebra dos Quaternios

Vamos contruir uma álgebra de divisão de dimensão 4 sobre $\mathbb{R}$.

Consideremos o conjunto $Q = \{(a,b,c,d);\ a,b,c,d \in \mathbb{R}\}$

Se (a,b,c,d) , (a',b',c',d') são elementos de Q, definimos a adição em Q por:

$$(a,b,c,d) + (a',b',c',d') = (a+a',b+b',c+c',d+d')$$

e se $x \in \mathbb{R}$, definimos

$$x(a,b,c,d) = (xa,xb,xc,xd)$$

Q com estas operações é um espaço vetorial real

Tomemos agora os elementos de Q,

$$e = (1,0,0,0)\ ,\ i = (0,1,0,0)\ ,\ j = (0,0,1,0)\ ,$$
$$,\ k = (0,0,0,1)$$

Todo elemento $\alpha \in Q$, $\alpha = (a,b,c,d)$ pode ser escrito como $\alpha = (a,b,c,d) = a(1,0,0,0) +$

$$+ b(0,1,0,0) + c(0,0,1,0) + d(0,0,0,1) =$$
$$= ae + bi + cj + dk$$

Os elementos e,i,j,k formam uma base para Q.

Definimos o produto destes elementos pela seguinte tábua de multiplicação:

	e	i	j	k
e	1	i	j	k
i	i	-1	k	-j
j	j	-k	-1	i
k	k	j	-i	-1

Para encontrar o produto na tábua por exemplo, o produto de j por i, fazemos a intersecção da linha correspondente a j com a coluna corres-

pondente a i, e encontramos $-k$, isto é, $ji = -k$.
Assim fica determinado o produto em Q que passa a ser uma álgebra sobre os reais.

Desta tábua de multiplicação segue que

1) $\underline{\underline{e}}$ é o elemento unidade de Q.

   Observação: Passaremos indicar $\underline{\underline{e}}$ por 1.

   assim se $\alpha = (a,b,c,d) \in Q$, então

   $\alpha = a + bi + cj + dk$

2) Q é uma álgebra não comutativa;

   por exemplo $ij = k$ e $ji = -k$

3) Q é uma álgebra associativa, pois de acordo com (2.1.5) é suficiente verificar as equações:

   $(ii)i = i(ii)$

   $(ii)j = i(ij)$

   $(ij)i = i(ji)$

   $(ji)i = j(ii)$

   $(ij)k = i(jk)$

O centro de Q, isto é os elementos $\beta \in Q$ tal que $\alpha\beta = \beta\alpha$ para todo $\alpha \in Q$, é formado pelos elementos $\beta = (x,0,0,0) = x$ com $x \in \mathbb{R}$.

Se $\alpha = a + bi + cj + dk$ é um elemento de Q, chamamonos $\bar{\alpha} = a - bi - cj - dk$ de conjugado de α.

Verifica-se facilmente que valem as equações

i) $\overline{\alpha + \beta} = \bar{\alpha} + \bar{\beta}$; ii) $\overline{\alpha\beta} = \bar{\beta}\bar{\alpha}$ para todo

$\alpha, \beta, \in Q$. e iii) $\bar{\alpha}\alpha = \bar{\alpha}\alpha = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.

O número real não negativo $N(\alpha) = \alpha\bar{\alpha} = \bar{\alpha}\alpha$ é chamado norma de α.

e $N(\alpha) = 0 \iff \alpha = 0$.

$N(\alpha\beta) = N(\alpha).\ N(\beta) \quad \forall \alpha, \beta \in Q$, de fato

$N(\alpha\beta) = (\alpha\beta)(\overline{\alpha\beta}) = (\alpha\beta)(\bar{\beta}\bar{\alpha}) = \alpha(\beta\bar{\beta})\bar{\alpha} = \alpha N(\beta)\bar{\alpha} =$

$= \alpha\bar{\alpha}\ N(\beta) = N(\alpha)\ N(\beta)$.

Deste modo Q não contém divisores do zero, isto é, se $\alpha\beta = 0$ então $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$

$\alpha\beta = 0 \Longrightarrow N(\alpha\beta) = 0 = N(\alpha)\ N(\beta) \Longrightarrow N(\alpha) = 0$ ou $N(\beta) = 0 \Longrightarrow \alpha = 0$ ou $\beta = 0$.

Se $\alpha \in Q$ é tal que $\alpha \neq 0$ então existe inverso de α, $\alpha^{-1} = \dfrac{\bar{\alpha}}{N(\alpha)}$

Deste modo está construído Q, uma álgebra de divisão real de dimensão 4.

2.2.3 - Álgebra de Cayley.

Vamos construir uma álgebra não associativa de dimensão 8 sobre $\mathbb{R}$, com divisão única e com um elemento unidade.

Consideremos o conjunto $K = \{\alpha + \beta e\ ;\ \alpha, \beta \in Q\}$ onde $\underline{\underline{e}}$ é um novo símbolo.

Definimos em K a adição e multiplicação por um número real a, pelas equações

$$(\alpha + \beta e) + (\gamma + \delta e) = (\alpha + \gamma) + (\beta + \delta)e \qquad (1)$$

$$a(\alpha + \beta e) = a\alpha + (a\beta)e \qquad (2)$$

Obtemos assim um espaço vetorial real de dimensão 8 com base 1,i,j,k,e,ie,je,ke já que um elemento de K é da forma $\alpha + \beta e$ onde $\alpha,\beta \in Q$. Definimos neste espaço, a multiplicação pela equação.

$$(\alpha+\beta e).(\gamma+\delta e)=(\alpha\gamma-\bar{\delta}\beta)+(\delta\alpha+\beta\bar{\gamma})e \qquad (3)$$

É fácil verificar a distributividade desta multiplicação com respeito a adição (2) e ainda a validade das equações

$$a\left[(\alpha+\beta e).(\gamma+\delta e)\right]=\left[a(\alpha+\beta e)\right].(\gamma+\delta e)=(\alpha+\beta e)\left[a(\gamma+\delta e)\right] .$$

Esta álgebra K é chamada, álgebra de Cayley, a tábua de multiplicação nesta álgebra é dada por:

	1	i	j	k	e	ie	ke	je
1	1	i	j	k	e	ie	je	ke
i	i	-1	k	-j	ie	-e	-ke	je
j	j	-k	-1	i	je	ke	-e	-ie
k	k	j	-i	-1	ke	-je	ie	-e
e	e	-ie	-je	-ke	-1	i	j	k
ie	ie	e	ke	je	-i	-1	-k	j
ke	ke	ke	e	-ie	-j	k	-1	-i
je	je	-je	ie	e	-k	-j	i	-1

A álgebra de Cayley não é comutativa nem associativa.

Por exemplo

$(ik)e = -je = -\ je$

$i(ke) = je$.

De (3) concluimos que 1 = 1+0e é o elemento uni dade de K.

Se $\xi = \alpha + \beta e$ é um elemento de K, chamamos

$\overline{\xi} = \overline{\alpha} - \beta e$ (4) o conjugado de ξ.

Verifica-se facilmente que se $\eta = \delta + \gamma e$

i) $\overline{\xi + \eta} = \overline{\xi} + \overline{\eta}$, ii) $\overline{\xi\eta} = \overline{\eta}\,\overline{\xi}$.

De fato

i)

$$\xi + \eta = (\alpha+\gamma)+(\beta+\delta)e \Longrightarrow \overline{\xi+\eta} = (\overline{\alpha+\gamma})-(\beta+\delta)e =$$

$$= \overline{\alpha} + \overline{\gamma} - \beta e - \delta e = (\overline{\alpha} - \beta e)+(\overline{\gamma} - \delta e) = \overline{\xi} + \overline{\eta}$$

ii)

$$\xi \cdot \eta = (\alpha+\beta e).(\gamma+\delta e) \Longrightarrow \overline{\xi\eta} = (\overline{\alpha.\gamma - \overline{\delta}\beta})-(\delta\alpha-\beta\overline{\gamma})e$$

$$= (\overline{\gamma}\ \overline{\alpha} - \overline{\beta}\delta) + (-\delta\alpha - \beta\overline{\gamma})e .$$

Por outro lado

$$\overline{\eta} . \overline{\xi} = (\gamma-\delta e).(\alpha-\beta e) = (\overline{\gamma}\overline{\alpha}-\overline{\beta}\delta)+(-\beta\overline{\gamma}-\delta\alpha)e .$$

Sendo $\xi = \alpha+\beta e$, $\xi\overline{\xi} = (\alpha+\beta e).(\overline{\alpha}-\beta e) = \alpha\overline{\alpha} + \overline{\beta}\beta =$

$N(\alpha) + N(\beta) = \overline{\xi}\xi$

O número real não negativo $N(\xi) = \overline{\xi}\xi = \xi\overline{\xi} =$

$N(\alpha) + N(\beta)$ é chamado norma de ξ.

Se $\xi = \alpha + \beta e$ e $\eta = \gamma + \delta e$ então

$N(\xi\eta) = N(\xi).N(\eta)$

$$N(\xi\eta) = \xi\eta.(\overline{\xi\eta}) = [(\alpha\gamma-\delta\beta)+(\delta\alpha+\beta\overline{\gamma})e].[(\overline{\gamma}\overline{\alpha}-\overline{\beta}\delta)-$$

$$- (\delta\alpha+\beta\overline{\gamma})e] = [(\alpha\gamma-\overline{\delta}\beta).(\overline{\gamma}\overline{\alpha}-\overline{\beta}\delta)+(\overline{\delta\alpha+\beta\overline{\gamma}}).(\delta\alpha+\beta\overline{\gamma})]+$$

$$+ \underbrace{[(-\overline{\delta}\alpha-\beta\overline{\gamma}).(\alpha\gamma-\overline{\delta}\beta)+(\delta\alpha+\beta\overline{\gamma}).(\alpha\gamma-\overline{\delta}\beta)]e}_{\substack{\shortparallel \\ 0}} =$$

$$= \alpha\gamma\overline{\gamma}\overline{\alpha} - \alpha\gamma\overline{\beta}\delta - \overline{\delta}\beta\overline{\gamma}\overline{\alpha} + \overline{\delta}\beta\overline{\beta}\delta + \overline{\alpha}\overline{\delta}\delta\alpha + \overline{\alpha}\overline{\delta}\beta\overline{\gamma} +$$

$$+ \gamma\overline{\beta}\delta\alpha + \gamma\overline{\beta}\beta\overline{\gamma} = N(\alpha).N(\beta) + N(\beta).N(\delta) +$$

$$+ N(\alpha).N(\delta)$$

$+ N(\beta).\ N(\gamma) + a - b$ onde

$a = \gamma\bar{\beta}\delta\alpha + \bar{\alpha}\bar{\delta}\beta\bar{\gamma}$

$b = \alpha\gamma\bar{\beta}\delta + \bar{\delta}\beta\bar{\gamma}\bar{\alpha}$.

desde que $\overline{\gamma\bar{\beta}\delta\alpha} = \bar{\alpha}\bar{\delta}\beta\bar{\gamma}$

$\overline{\alpha\gamma\bar{\beta}\delta} = \bar{\delta}\beta\bar{\gamma}\bar{\alpha}$

Temos a e b são números reais

Se $\alpha = 0$ então $a = b = 0$, logo $a-b = 0$.

Se $\alpha \neq 0$, $N(\alpha) \neq 0$ e desde que a é real

$a.N(\alpha) = \alpha a\bar{\alpha} = \alpha\gamma\bar{\beta}\delta\ N(\alpha) + N(\alpha).\ \bar{\delta}\beta\bar{\gamma}\bar{\alpha} =$

$= (\alpha\gamma\bar{\beta}\delta + \bar{\delta}\beta\bar{\gamma}\bar{\alpha})\ N(\alpha) = b.N(\alpha)$ então $a=b$ e portanto $a-b = 0$.

Deste modo

$$N(\xi.\eta) = N(\alpha).N(\gamma) + N(\beta).N(\delta) + N(\alpha)\ N(\gamma) + N(\beta)\ N(\gamma) =$$

$$= [N(\alpha) + N(\beta)].[N(\gamma) + N(\delta)] = N(\xi).\ N(\eta)\ .$$

Segue daqui que a álgebra de Cayley não tem divisores do zero.

Se $\xi \in K$ é tal que $\xi \neq 0$ então existe o inverso de ξ, $\xi^{-1} = \dfrac{\bar{\xi}}{N(\xi)}$.

Se ξ e η são elementos de K, com $\xi \neq 0$ a equação $\xi\zeta = \eta$ tem uma solução $\zeta = \bar{\xi}\eta\ .\ [N(\xi)]^{-1}$ e é única porque não temos divisores do zero.

Do mesmo modo, a única solução da equação

$\zeta\xi = \eta\ (\xi \neq 0)$ é dada por

$$\zeta = \eta\bar{\xi}\ .\ [N(\xi)]^{-1}$$

2.3 - ÁLGEBRAS ALTERNATIVAS

2.3.1 - Definição:

Uma álgebra não associativa R é alternativa se valem as seguintes equações:

(i) $(yx)x = y(xx)$; (ii) $(xx)y = x(xy)$

para quaisquer x,y em R.

2.3.2 - Proposição:

A álgebra de Cayley é alternativa

Demonstração:

Vamos verificar (i). Sejam $\xi = \alpha+\beta e$, $\eta = \gamma+\delta e$ dois elementos de K.

$$(\eta\xi).\,\xi = [(\gamma\alpha-\bar\beta\delta)+(\beta\gamma+\delta\bar\alpha)e] \,.\, (\alpha+\beta e) =$$

$$= [(\gamma\alpha-\bar\beta\delta)\alpha-\bar\beta(\beta\gamma+\delta\bar\alpha)]+[\beta(\gamma\alpha-\bar\beta\delta)+(\beta\gamma+\delta\bar\alpha).\bar\alpha]e =$$

$$= [\gamma\alpha^2-\bar\beta\delta\alpha-\bar\beta\,\beta\gamma+\bar\beta\delta\bar\alpha]+[\beta\gamma\alpha-\beta\bar\beta\delta+\beta\gamma\bar\alpha+\delta\bar\alpha\bar\alpha]e =$$

$$= [\gamma\alpha^2-\bar\beta\delta(\alpha+\bar\alpha)-\bar\beta\beta\gamma]+[\beta\gamma(\alpha+\bar\alpha)-\beta\bar\beta\delta+\delta\bar\alpha\bar\alpha]e =$$

Por outro lado

$$\eta(\xi\xi) = (\gamma+\delta e).[(\alpha^2-\bar\beta\beta)+(\beta\alpha+\beta\bar\alpha)e] =$$

$$= [\gamma(\alpha^2-\bar\beta\beta)+\overline{(\beta\alpha+\beta\bar\alpha)}.\delta]+[(\beta\alpha+\beta\bar\alpha).\gamma+\delta\overline{(\alpha^2-\bar\beta\beta)}]e =$$

$$= [\gamma\alpha^2-\gamma\bar\beta\beta+\bar\alpha\bar\beta\delta+\alpha\bar\beta\delta]+[\beta\alpha\gamma+\beta\bar\alpha\gamma+\delta\bar\alpha\bar\alpha-\delta\bar\beta\beta]e =$$

$$= [\gamma\alpha^2-\bar\beta\beta\gamma+(\bar\alpha+\alpha)\bar\beta\delta]+[\beta(\alpha+\bar\alpha)\gamma+\delta\bar\alpha\bar\alpha-\beta\bar\beta\delta]$$

Desde que $(\alpha+\bar\alpha)$ e $\bar\beta\beta$ são números reais eles comutam com qualquer quaternio

Logo $(\eta\xi)\xi = \eta(\xi\xi)$.

De modo análogo, verifica-se (ii).

2.3.3 - Definição:

Se x,y,z são elementos de uma álgebra R, difinimos o comutador e o associador destes elementos respectivamente por:

$[x,y] = xy - yx$

$[x,y,z] = (xy)z - x(yz)$.

Note que o associador $[x,y,z]$ é linear em cada variável e que $[-x,y,z] = -[x,y,z]$

2.3.4 - Propriedades do associador $[x,y,z]$ numa álgebra alternativa R.

i) $[x,x,y] = [y,x,x] = 0$

ii) $[x,y,x] = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= [x,x+y,\ x+y] \\ &= [x,x+y,x] + [x,x+y,y] \\ &= [x,x,x] + [x,y,x] + [x,x,y] + [x,y,y] \\ &= [x,y,x]. \end{aligned}$$

iii) Se os elementos x,y,z de R são permutados, então o associador $[x,y,z]$ fica inalterado quando a permutação é par e troca de sinal quando é ímpar.

Para isto é suficiente mostrar que:

$[x,y,z] = -[y,x,z] = [y,z,x]$

Temos:

$$\begin{aligned} [x+y,x+y,z] &= [x,x,z]+[x,y,z]+[y,x,z]+[y,y,z] \\ &= [x,y,z]+[y,x,z]\ . \end{aligned}$$

Logo $[x,y,z] = -[y,x,z]$

2.3.5 - Identidades de Moufang.

i) $(xzx)y = x(z(xy))$

ii) $(xy)(zx) = x(yz)x$.

para todo x,y,z numa álgebra alternativa R, onde podemos escrever xzx uma vez que $[x,z,x] = 0$.

$$\begin{aligned}
(xzx)y-x(z(xy)) &= [xz,x,y] + [x,z,xy] \\
&= -[x,xz,y] - [x,xy,z] \\
&= -(x(xz))y+x((xz)y)-(x(xy))z + x((xy)z) \\
&= -((xx)z)y - ((xx)y)z + ((xz)y + (xy)z) \\
&= -[x^2,z,y]-[x^2,y,z] - x^2(zy) - x^2(yz) \\
&\qquad + x((xz)y + (xy)z) \\
&= x(-x(zy) - x(yz) + (xz)y + (xy)z) \\
&= x([x,z,y] + [x,y,z]) = 0 .
\end{aligned}$$

estabelecemos i) que implica ii).

$$\begin{aligned}
(xy)(zx) - x(yz)x &= [x,y,zx] + x(y(zx) - (yz)x) \\
&= -[x,zx,y] - x[y,z,x] \\
&= -(xzx)y + x((zx)y - [y,z,x]) \\
&= -x(z(xy) - (zx)y + [y,z,x]) \\
&= - x(-[z,x,y] + [y,z,x]) = 0 .
\end{aligned}$$

A identidade ii) é equivalente a

iii) $[xy,z,x] = [x,y,z]x$ para todo x,y,z em R, desde que:

$$\begin{aligned}
[xy,z,x] &= ((xy)z)x - (xy)(zx) = ((xy)z)x - x(yz)x = \\
&= ((xy)z - x(yz))x = [x,y,z]x .
\end{aligned}$$

2.3.6 - Proposição: Se K é a álgebra de Cayley,

$$[x,y,z] \neq 0 \quad \text{implica} \quad \begin{cases} [x,y] \neq 0 \\ [x,z] \neq 0 \\ [y,z] \neq 0 \,. \end{cases}$$

para quaisquer x,y,z em K.

Demonstração: Tomemos x em K, $\bar{x}$ seu conjugado e consideremos os números reais

$$t(x) = x+\bar{x} \,, \quad N(x) = x\bar{x} = \bar{x}x,$$ o

traço e a morma de x respectivamente.

Para x,y em K, o número real

$$R = N(x+y) - N(x) - N(y)$$ satisfaz,

$xy + yx - yt(x) - xt(y) + R = 0.$

Se $[x,y] = 0$, ie, $xy = yx$ então

$2xy - yt(x) = xt(y) - R$. Assim,

$[2xy - yt(x), z,x] = [xt(y) - R,z,x]$ para quaisquer x,y,z em K.

Mas $[xt(y) - R,z,x] = 0$, pela linearidade do associador, junto com o fato de K ser alternativa e R real.

Então,

$$0 = [2xy - yt(x),z,x] = [2xy,z,x] - [yt(x),z,x]$$

$$= [x,y,z]\,2x - [y,z,x]\,t(x) =$$

$$= [x,y,z]\,2x - [x,y,z]\,t(x) = [x,y,z]\,(2x-t(x))$$

Desde que K não tem divisores do zero e como $[x,y,z] \neq 0$ temos $2x - t(x) = 0$. O que implica x real. Contradição.

Nota: Usaremos a proposição anterior na seguinte forma

2.3.7 - Se $[x,y] = 0$ então $[x,y,z] = 0$ para quaisquer x,y,z em K.

* * *

CAPÍTULO III

CONSTRUÇÕES DE APLICAÇÕES BILINEARES NÃO SINGULARES

Nosso principal interesse neste capítulo está voltado para construções de aplicações bilineares não singulares, isto é, uma aplicação bililear $f:R^a \times R^b \longrightarrow R^c$ tal que se $f(x,y) = 0$, $x \in R^a$, $y \in R^b$ então $x = 0$ ou $y = 0$.

Trabalharemos assencialmente com a álgebra de Cayley K, juntamente com suas propriedades mensionadas no capítulo anterior.

Como já foi visto, dados $x = (a_1,a_2)$ e $y = (b_1,b_2)$ números de Cayley, representados como pares de quaternios o produto xy é dado por:

$$xy = (a_1b_1 - \bar{b}_2a_2 \ , \ b_2a_1 + a_2\bar{b}_1).$$

3.1 - A aplicação $K^2 \times K^2 \longrightarrow K^3$

Sejam $u = (x_1,x_2) \in K^2$ e $v = (y_1,y_2) \in K^2$. Colocando;

$$\phi_1(u,v) = x_1y_1 - \bar{y}_2x_2$$

$$\phi_2(u,v) = y_2x_1 + x_2\bar{y}_1$$

$$\phi_3(u,v) = x_2y_2 - y_2x_2$$

Então definimos $f(u,v)=(\phi_1(u,v), \phi_2(u,v), \phi_3(u,v))$.

3.1.1 - Teorema: A aplicação bilinear $f:K^2 \times K^2 \longrightarrow K^3$ é não singular. Além disso, por convenientes restrições, f induz as seguintes aplicações bilineares não singulares

i) $\mathbb{R}^{16} \times \mathbb{R}^{16} \longrightarrow \mathbb{R}^{23}$ v) $\mathbb{R}^{10} \times \mathbb{R}^{16} \longrightarrow \mathbb{R}^{22}$

ii) $\mathbb{R}^{13} \times \mathbb{R}^{13} \longrightarrow \mathbb{R}^{19}$ vi) $\mathbb{R}^{10} \times \mathbb{R}^{15} \longrightarrow \mathbb{R}^{21}$

iii) $\mathbb{R}^{11} \times \mathbb{R}^{11} \longrightarrow \mathbb{R}^{17}$ vii) $\mathbb{R}^{10} \times \mathbb{R}^{14} \longrightarrow \mathbb{R}^{20}$

iv) $\mathbb{R}^{10} \times \mathbb{R}^{10} \longrightarrow \mathbb{R}^{16}$ viii) $\mathbb{R}^{9} \times \mathbb{R}^{16} \longrightarrow \mathbb{R}^{16}$

Demonstração:

Se $f(u,v) = 0$ então $\phi_1(u,v)=\phi_2(u,v)=\phi_3(u,v)=0$

Obtemos assim tres equações

(1) $x_1 y_1 = \bar{y}_2 x_2$;

(2) $y_2 x_1 = - x_2 \bar{y}_1$;

(3) $x_2 y_2 = y_2 x_2$.

Para provar a não-singularidade da f, usamos estas equações e as propriedades da álgebra de Cayley.

Multiplicando a equação (1) por $\bar{y}_1$ a direita e a equação (2) por $\bar{y}_2$ a esquerda obtemos

(1'): $(x_1 y_1)\bar{y}_1 = (\bar{y}_2 x_2)\bar{y}_1$.

(2'): $\bar{y}_2(y_2 x_1) = - \bar{y}_2(x_2 \bar{y}_1)$.

Somando membro a membro estas duas equações obtemos.

(3'): $(x_1 y_1)\bar{y}_1 + \bar{y}_2(y_2 x_1) = (\bar{y}_2 x_2)\bar{y}_1 - \bar{y}_2(x_2 \bar{y}_1)$

Desde que $y_2 + \bar{y}_2$ é um número real,

$x_2(y_2 + \bar{y}_2) = (y_2 + \bar{y}_2)x_2$, usando (3) te mos $x_2\bar{y}_2 = \bar{y}_2 x_2$ e por (2.3.7) segue:

$(\bar{y}_2 x_2)\bar{y}_1 = \bar{y}_2(x_2\bar{y}_1)$.

Assim, a equação (3') fica reduzida a

$$(4) \quad (x_1 y_1)\bar{y}_1 + \bar{y}_2(y_2 x_1) = 0 .$$

Desde que $y_1\bar{y}_1 = \bar{y}_1 y_1$ e $\bar{y}_2 y_2 = \bar{y}_2 y_2$ usando novamente (2.3.7) temos a equação (4) na forma

$$(4') \quad x_1(y_1\bar{y}_1) + (\bar{y}_2 y_2)x_1 = 0$$

Sendo $\bar{y}_2 y_2$ um número real, reduzimos (4') para:

$$x_1[(y_1\bar{y}_1 + y_2\bar{y}_2)] = 0 .$$

Suponhamos $v = (y_1, y_2) \neq 0$, temos $x_1 \neq 0$ e voltando a equação (1), temos $\bar{y}_2 x_2 = 0$ e portanto $x_2 = 0$.

Logo $u = (x_1, x_2) = (0,0)$

Assim f é não singular

A segunda parte da demonstração, consiste em obter as seguintes aplicações;

$$\text{i)} \quad \mathbb{R}^{16} \times \mathbb{R}^{16} \longrightarrow \mathbb{R}^{23} .$$

Desde que K^2 tem dimensão 16 sobre $\mathbb{R}$, vamos verificar que a aplicação f dada é tal que, sua imagem está num subespaço de K^3 de dimensão 23. Para isto vamos verificar o termo

$$\phi_3(u,v) = x_2 y_2 - y_2 x_2 .$$

Consideremos $x_2 = (a_1, a_2)$ e $y_2 = (b_1, b_2)$ representados como pares de quaternios.

Uma vez que:

$$x_2y_2 = (a_1b_1 - \bar{b}_2a_2 \ , \ b_2a_1 + a_2\bar{b}_1) \quad \text{e}$$

$$y_2x_2 = (b_1a_1 - \bar{a}_2b_2 \ , \ a_2b_1 + b_2\bar{a}_1). \text{ temos:}$$

$$x_2y_2 - y_2x_2 = (a_1b_1 - b_1a_1 + \bar{a}_2b_2 - \bar{b}_2a_2,\ b_2(a_1-\bar{a}_1) - a_2(b_1-\bar{b}_1))$$

O quaternio $a_1b_1 - b_1a_1$ é um imaginário puro.

De fato:

Consideremos

$$a_1 = a_{11} + a_{12}i + a_{13}j + a_{14}k$$

$$b_1 = b_{11} + b_{12}i + b_{13}j + b_{14}k \quad \text{com}$$

a_{1i}, $1 \leq i \leq 4$ e b_{1i} $1 \leq i \leq 4$ números reais.

Assim,

$$a_1b_1 - b_1a_1 = (2a_{13}b_{14} - 2a_{14}b_{13})i +$$
$$+ (2a_{14}b_{12} - 2a_{12}b_{14})j + (2a_{12}b_{13} - 2a_{13}b_{12})k.$$

Um cálculo análogo mostra que o quaternio

$$\bar{a}_2b_2 - \bar{b}_2a_2$$

também não tem parte real.

Desta forma, o termo $x_2y_2 - y_2x_2 \in K$ é um imaginário puro, isto é, está num subespaço de K de dimensão 7.

Logo imagem de f está num subespaço de K^3 de dimensão 23, isto prova i).

ii) $\mathbb{R}^{13} \times \mathbb{R}^{13} \longrightarrow \mathbb{R}^{19}$

Consideremos V, um subespaço de K^3 de dimensão 5 consistindo dos elementos (a,b) com a real e b quaternio.

Sejam $x_2, y_2 \in V$ tal que $x_2 = (a_1, a_2)$ e

$y_2 = (b_1, b_2)$ com

a_1, b_1 reais e a_2, b_2 quaternios.

Consideremos $u = (x_1, x_2)$ e $v = (y_1, y_2)$ com u e v no subespaço $K \oplus V$ de K^2 de dimensão 13.

Vamos verificar que f restrita a este subespaço tem sua imagem num subespaço de K^3 de dimensão 19.

Para tais u e v, o termo

$$x_2 y_2 - y_2 x_2 = (a_1 b_1 - b_1 a_1 + \bar{a}_2 b_2 - \bar{b}_2 a_2 \ , \ b_2(a_1 - \bar{a}_1) - a_2(b_1 - \bar{b}_1)) .$$

Sendo a_1 real, ele comuta com qualquer quaternio, portanto $a_1 b_1 = b_1 a_1$, e como b_1 também é real, $a_1 = \bar{a}_1$ e $b_1 = \bar{b}_1$, logo

$$b_2(a_1 - \bar{a}_1) = 0 \quad e \quad a_2(b_1 - \bar{b}_1) = 0$$

Temos então que

$$x_2 y_2 - y_2 x_2 = (\bar{a}_2 b_2 - \bar{b}_2 a_2 \ , \ 0).$$

Pela parte i), vimos que $\bar{a}_2 b_2 - \bar{b}_2 a_2$ é um imaginário puro, então $x_2 y_2 - y_2 x_2$ está num subespaço de K de dimensão 3 e portanto imagem da f está num subespaço de K^3 de dimensão 19.

iii) $\mathbb{R}^{11} \times \mathbb{R}^{11} \longrightarrow \mathbb{R}^{17}$

Consideremos V, um subespaço de K de dimensão 3 consistindo dos elementos (a,b) com a real e b complexo.

Sejam $x_2, y_2 \in V$ tal que $x_2 = (a_1, a_2)$, $y_2 = (b_1, b_2)$ e $u = (x_1, x_2)$, $v = (y_1, y_2)$ com u e v no subespaço $K \oplus V$ de K^2 de dimensão 11.

Por (ii), $x_2 y_2 - y_2 x_2 = (\bar{a}_2 b_2 - \bar{b}_2 a_2, 0)$, e como $\bar{a}_2 b_2 - \bar{b}_2 a_2$ é um complexo que não tem parte real, $x_2 y_2 - y_2 x_2$ está num subespaço de K de dimensão 1.

Assim, imagem da f restrita ao subespaço de dimensão 11 de K^2 está num subespaço de dimensão 17 de K^3.

iv) $\mathbb{R}^{10} \times \mathbb{R}^{10} \longrightarrow \mathbb{R}^{16}$

Consideremos V, um subespaço de K de dimensão 2 consistindo dos elementos (a,b) com a e b reais.

Sejam $x_2 = (a_1, a_2)$ e $y_2 = (b_1, b_2)$ com $x_2, y_2 \in V$. e $u = (x_1, x_2)$ e $v = (y_1, y_2)$ com u, v pertencentes ao subespaço de $K \oplus V$ de K^2 de dimensão 10.

O termo $x_2 y_2 - y_2 x_2 = (\bar{a}_2 b_2 - \bar{b}_2 a_2, 0) = (0,0)$ já que a_2, b_2 são números reais.

Logo imagem de f está num subespaço de K^3 de dimensão 16.

v) $\mathbb{R}^{10} \times \mathbb{R}^{16} \longrightarrow \mathbb{R}^{22}$

Consideremos V, um subespaço de K de dimensão 2 consistindo dos elementos (a,b) com a e b reais.

Sejam $u = (x_1, x_2)$ um elemento do subespaço

$K \oplus V$ de K^2 de dimensão 10, e $v = (y_1, y_2)$ um elemento de K^2.

Para tais u e v analisemos o termo $x_2y_2 - y_2x_2$ com $x_2 = (a_1, a_2)$, $y_2 = (b_1, b_2)$ onde a_1, a_2 são reais e b_1, b_2 quaternios.

$$x_2y_2 - y_2x_2 = (a_1b_1 - b_1a_1 + \bar{a}_2b_2 -$$

$$- \bar{b}_2a_2, b_2(a_1-\bar{a}_1) - a_2(b_1-\bar{b}_1)$$

Como a_1, a_2 são reais, $a_1b_1 = b_1a_1$ e $\bar{a}_2b_2 = a_2b_2$ e então $\bar{a}_2b_2 - \bar{b}_2a_2 = a_2b_2 - a_2\bar{b}_2 = a_2(b_2-\bar{b}_2)$.

Portanto

$$x_2y_2 - y_2x_2 = (a_2(b_2-\bar{b}_2), - a_2(b_1-\bar{b}_1))$$

Por outro lado, como b_1 e b_2 são quaternios, $(b_2-\bar{b}_2)$ e $(b_1-\bar{b}_1)$ são imaginários puros e então $x_2y_2 - y_2x_2$ está num subespaço de dimensão 6 de K. Logo imagem da f está num subespaço de K^3 de dimensão 22.

vi) $\mathbb{R}^{10} \times \mathbb{R}^{15} \longrightarrow \mathbb{R}^{21}$

Consideremos V um subespaço de K de dimensão 2 consistindos dos elementos (a,b) com a,b reais e W um subespaço de K de dimensão 7 consistindo dos elementos (c,d) com c quaternio e d pertencente a um subespaço dos quaternios de dimensão 3 com parte real.

Sejam $u = (x_1, x_2) \in K \oplus V$ e $v = (y_1, y_2) \in K \oplus V$ com $x_2 = (a_1, a_2)$ e $y_2 = (b_1, b_2)$.

Por v), $x_2y_2 - y_2x_2 = (a_2(b_2-\bar{b}_2), -a_2(b_1-\bar{b}_1))$.

Para tais x_2, y_2, $a_2(b_2-\bar{b}_2)$ está num subespaço dos quaternios de dimensão 2 e $-a_2(b_1-\bar{b}_1)$ é um quaternio sem parte real.

Logo $x_2y_2 - y_2x_2$ está num subespaço de K de dimensão 5 e então, imagem da f se encontra num espaço de K^3 de dimensão 21.

vii) $\mathbb{R}^{10} \times \mathbb{R}^{10} \longrightarrow \mathbb{R}^{20}$

Consideremos V, um subespaço de K como em vi) e W um subespaço de K de dimensão 6, consistindo dos elementos (c,d) com c quaternio e d complexo.

Sejam $u = (x_1, x_2) \in K\oplus V$ e $v = (y_1, y_2) \in K\oplus V$ com $x_2 = (a_1, a_2)$, $y_2 = (b_1, b_2)$.

Para tais u e v, $x_2y_2 - y_2x_2 = (a_2(b_2-\bar{b}_2), -a_2(b_1-\bar{b}_1))$ onde a primeira coordenada está num subespaço de dimensão 1 de K e a segunda está num subespaço de dimensão 3 de K.

Assim $x_2y_2 - y_2x_2$ está num subespaço de K de dimensão 3 e então imagem da f se encontra num subespaço de K^3 de dimensão 19.

viii) $\mathbb{R}^9 \times \mathbb{R}^{16} \longrightarrow \mathbb{R}^{16}$

Tomando agora V um subespaço de K de dimensão 1, portanto formado pelos elementos (a,o) com a real.

Sejam, $u = (x_1, x_2)$ e $v = (y_1, y_2)$ com $u \in K\oplus V$,

$v \in K \oplus K$ com $x_2 = (a_1, o)$ e $y_2 = (b_1, b_2)$

Para tais u e v, $x_2y_2 - y_2x_2 = (a_1b_1 - b_1a_1, b_2(a_1 - \bar{a}_1)) =$
$= (0,0)$ uma vez que a_1 é real e portanto

$$a_1b_1 = b_1a_1 \quad e \quad a_1 = \bar{a}_1.$$

Logo imagem da f está num subespaço de dimensão 16 de K^3.

O próximo teorema nos permite melhorar iii) e obter uma aplicação bilinear não singular $f: \mathbb{R}^{12} \times \mathbb{R}^{12} \longrightarrow \mathbb{R}^{17}$, trabalhando agora com uma aplicação bilinear definida em $Q^3 = Q \oplus Q \oplus Q$.

3.1.2 - Teorema: Sejam $a = (a_1, a_2, a_3)$ e $b = (b_1, b_2, b_3)$ em Q^3. Então a aplicação $g: Q^3 \times Q^3 \longrightarrow Q^5$ definida por

$g(a,b) = (a_1b_1 + \bar{b}_2a_2 + \bar{b}_3a_3, a_2\bar{b}_1 - b_2a_1, a_3\bar{b}_1 - b_3a_1, b_2\bar{a}_3 + a_2\bar{b}_3, \bar{b}_3a_3 + \bar{a}_3b_3)$ induz uma aplicação bilinear não singular ix) $\mathbb{R}^{12} \times \mathbb{R}^{12} \to \mathbb{R}^{17}$

Demonstração: É facil ver que g é bilinear, vamos mostrar a não singularidade.

Se $g(a,b) = 0$, temos as seguintes equações

(1) $a_1b_1 + \bar{b}_2a_2 + \bar{b}_3a_3 = 0$

(2) $a_2\bar{b}_1 = b_2a_1$.

(3) $a_3\bar{b}_1 = b_3a_1$

(4) $b_2\bar{a}_3 = - a_2\bar{b}_3$

(5) $\bar{b}_3a_3 = - \bar{a}_3b_3$

Multiplicando (1) por $\bar{b}_1$ a direita obtemos:

$0 = (a_1 b_1)\bar{b}_1 + (\bar{b}_2 a_2).\bar{b}_1 + (\bar{b}_1 a_3).\bar{b}_1$, usando (2) e (3) e a associatividade dos quaternios temos:

$$0 = a_1(b_1\bar{b}_1) + \bar{b}_2(a_2.\bar{b}_1) + \bar{b}_3(a_3\bar{b}_1) = a_1(b_1\bar{b}_1) + \bar{b}_2(b_2 a_1) + \bar{b}_3(b_3 a_1) = a_1(b_1\bar{b}_1) + (\bar{b}_2 b_2).a_1 + (\bar{b}_3 b_3).a_1 = a_1.\left[(b_1\bar{b}_1) + (b_2\bar{b}_2) + (b_3\bar{b}_3)\right] .$$

Supondo $b = (b_1, b_2, b_3) \neq 0$ então $a_1 = 0$. Por outro lado multiplicando (1) por b_2 a esquerda obtemos:

$0 = b_2(a_1 b_1) + b_2(\bar{b}_2 a_2) + b_2(\bar{b}_3 a_3)$, usando (2), (4), (5) e a associatividade obtemos:

$$0 = (b_2 a_1)b_1 + (b_2\bar{b}_2)a_2 + b_2(\bar{b}_3 a_3) = (a_2\bar{b}_1)b_1 + (b_2\bar{b}_2)a_2 + b_2(-\bar{a}_3 b_3) = a_2(\bar{b}_1 b_1) + a_2(\bar{b}_2 b_2) - (b_2\bar{a}_3).b_3 = a_2(\bar{b}_1 b_1) + a_2(\bar{b}_2 b_2) + (a_2\bar{b}_3).b_3 = a_2(\bar{b}_1 b_1) + a_2(\bar{b}_2 b_2) + a_2(\bar{b}_3 b_3) = a_2\left[(\bar{b}_1 b_1) + (\bar{b}_2 b_2) + (\bar{b}_3.b_3)\right]$$ Logo $a_2 = 0$.

Usando o fato de $a_1 = a_2 = 0$, as equações (1), (3) e (4) ficam reduzidos a $\bar{b}_3 a_3 = 0$, $a_3\bar{b}_1 = 0$, $b_2\bar{a}_3 = 0$ respectivamente. Como $(b_1,b_2,b_3) \neq (0,0,0)$ temos $a_3 = 0$.

Com isto está verificada a não singularidade de g.

É fácil ver que g induz a aplicação bilinear $\mathbb{R}^{12} \times \mathbb{R}^{12} \to \mathbb{R}^{17}$, para isto basta tomar a última coordenada de g que é dada por $\bar{b}_3a_3 + \bar{a}_3b_3$ e ver que é um quaternio que só tem parte real. Logo imagem de g está num subespaço de Q^5 de dimensão 17.

3.2 - A aplicação $K^3 \times K^3 \to K^5$

Sejam $u = (x_1, x_2, x_3) \in K^3$ e $v = (y_1, y_2, y_3) \in K^3$.

Colocando
$$\phi_1(u,v) = x_1y_1 + x_2y_2$$
$$\phi_2(u,v) = \bar{y}_1x_2 - x_1\bar{y}_3$$
$$\phi_3(u,v) = \bar{y}_1x_2 - x_1\bar{y}_2 + x_3y_3$$
$$\phi_4(u,v) = \bar{y}_2x_3 - x_2\bar{y}_3$$
$$\phi_5(u,v) = x_1y_1 - y_1x_1$$

Definimos $h(u,v) = (\phi_1(u,v), \ldots, \phi_5(u,v))$.

3.2.1 - Teorema: A aplicação bilinear $h: K^3 \times K^3 \to K^5$ é não singular. Além disso, por convenientes restrições, h induz as seguintes aplicações bilineares não singulares

i) $\mathbb{R}^{24} \times \mathbb{R}^{24} \to \mathbb{R}^{39}$	v) $\mathbb{R}^{18} \times \mathbb{R}^{24} \to \mathbb{R}^{38}$
ii) $\mathbb{R}^{21} \times \mathbb{R}^{21} \to \mathbb{R}^{35}$	vi) $\mathbb{R}^{19} \times \mathbb{R}^{23} \to \mathbb{R}^{37}$
iii) $\mathbb{R}^{19} \times \mathbb{R}^{19} \to \mathbb{R}^{33}$	vii) $\mathbb{R}^{18} \times \mathbb{R}^{22} \to \mathbb{R}^{36}$
iv) $\mathbb{R}^{18} \times \mathbb{R}^{18} \to \mathbb{R}^{32}$	viii) $\mathbb{R}^{17} \times \mathbb{R}^{24} \to \mathbb{R}^{32}$

Demonstração:

Se $h(u,v) = 0$ então $\phi_1(u,v) = \ldots = \phi_5(u,v) = 0$.

(1) $x_1y_1 = -x_2y_2$

(2) $\bar{y}_1 x_3 = x_1 \bar{y}_3$

(3) $\bar{y}_1 x_2 - x_1 \bar{y}_2 + x_3 y_3 = 0$

(4) $\bar{y}_2 x_3 = x_2 \bar{y}_3$

(5) $x_1 y_1 = y_1 x_1$

Para provar a não-singularidade de h usaremos estas equações e as propriedades da Álgebra de Cayley. Dividiremos em diversos casos.

1º caso: Se $x_1 = 0$ e $y_1 = 0$, as equações acima ficam reduzidas ao seguinte sistema:

$$x_2 y_2 = 0$$
$$x_3 y_3 = 0$$
$$\bar{y}_2 x_3 = x_2 \bar{y}_3$$

Desde que K não tem divisores do zero segue facilmente que a $u = 0$ ou $v = 0$.

2º caso: Se $x_1 = 0$ e $y_1 \neq 0$, segue de (2) que $x_3 = 0$, substituindo em (3) $\bar{y}_1 x_2 = 0$, o que nos da $x_2 = 0$.

Portanto $u = 0$.

3º caso: Se $x_1 = 0$ e $y_1 \neq 0$, segue de (2) que $y_3 = 0$, substituindo em (3). $x_1 \bar{y}_2 = 0$. o que nos da $y_2 = 0$.

Portanto $v = 0$.

4º caso: Se $x_1 \neq 0$ e $y_1 \neq 0$, segue de (1) que $x_2 \neq 0$ e $y_2 \neq 0$, usando (2) temos $x_3 = 0$ se e sômente se $y_3 = 0$.

Se $x_3 = y_3 = 0$, as equações de (1) a (5) ficam reduzidas ao sistema.

(6) $x_1y_1 = -x_2y_2$

(7) $\bar{y}_1x_2 = x_1\bar{y}_2$

(8) $x_1y_1 = y_1x_1$

Multiplicando a equação (7) por y_1 a esquerda temos $y_1(\bar{y}_1x_2) = y_1(x_1\bar{y}_2)$.

Usando a propriedade (2,3,7) e a equação (8) temos:

$$y_1(\bar{y}_1x_2) = (y_1\bar{y}_1)x_2 = (y_1x_1)\bar{y}_2 = (x_1y_1)\bar{y}_2$$

Agora, multiplicando por y_2 a direita

$((y_1\bar{y}_1)x_2)y_2 = ((x_1y_1)\bar{y}_2)y_2$ que é equivalente a

$$(y_1\bar{y}_1)(x_2y_2) = (x_1y_1)(\bar{y}_2y_2),$$

usando (6) e o fato de que $y_1\bar{y}_1 = N(y_1) = \bar{y}_1y_1$ e $\bar{y}_2y_2 = N(y_2) = y_2\bar{y}_2$ são números reais, a equação acima se reduz a:

$$x_1y_1[N(y_1) + N(y_2)] = 0.$$

Como K não tem divisores do zero, $x_1y_1 = 0$ e isto implicaria $x_1 = 0$ ou $y_1 = 0$, e teriamos uma contradição.

Se $x_3 \neq 0$ e $y_3 \neq 0$.

Multiplicando (2) por y_1 à esquerda temos

$$y_1(\bar{y}_1x_3) = y_1(x_1\bar{y}_3).$$

Como $x_1y_1 = y_1x_1$ e $y_1\bar{y}_1 = \bar{y}_1y_1$, ficamos com $(y_1\bar{y}_1)x_3 = (x_1y_1)\bar{y}_3$.

Multiplicando a equação acima por y_3 a direita e usando o fato de $y_1\bar{y}_1$ ser um número real, chegamos a:

$$(9) \quad x_3y_3\ N(y_1) = x_1y_1\ N(y_3).$$

Substituindo (9) em (3) temos

$$(10) \quad \bar{y}_1x_2 - x_1\bar{y}_2 + x_1y_1\ N(y_3)\ N(y_1)^{-1} = 0.$$

Multiplicando (10) por y_1 à esquerda e por y_2 a direita, usando os argumentos anteriores chegamos a:

$$(11) \quad N(y_1)x_2y_2 - x_1y_1\ N(y_2) + $$
$$+ (y_1(x_1y_1))y_2\ N(y_3).N(y_1)^{-1} = 0$$

Desde que $x_1y_1 = y_1x_1$, temos

$$y_1(x_1y_1) = (y_1x_1)y_1 = (x_1y_1)y_1 \text{ e temos}$$

$$(y_1(x_1y_1))y_2 = ((x_1y_1)y_1)y_2 = (x_1y_1)(y_1y_2)$$

Usando (1) e este último resultado na equação (11) obtemos:

$$(12) \quad (N(y_1) + N(y_2))x_1y_1 =$$
$$= (x_1y_1)(y_1y_2)\ N(y_3)\ N(y_1)^{-1}$$

Desde que $x_1y_1 = y_1x_1$, vale o cancelamento, e:

$$N(y_1) + N(y_2) = (y_1y_2).N(y_3).N(y_1)^{-1}$$

Tomando $\lambda = N(y_1) + N(y_2)$; temos

$$(13) \quad \bar{y}_1 = y_2\ N(y_3)\ \lambda^{-1}$$

$$(14) \quad \bar{y}_2 = y_1\ N(y_3)^{-1}\ \lambda .$$

Então $y_1\bar{y}_1 = (y_1y_2)\ N(y_3)\lambda^{-1}$

$\bar{y}_2y_2 = (y_1y_2)\ N(y_3)^{-1}\ \lambda$ e

(15) $\lambda^2\ N(y_3)^{-2} = N(y_2).N(y_1)^{-1}$

Substituindo (13) e (14) em (10) obtemos

$$y_2x_2 = x_1y_1(\lambda^2\ N(y_3)^{-2} - \lambda\ N(y_1)^{-1})$$

Usando (15) e o fato de $\lambda = N(y_1) + N(y_2)$ temos $y_2x_2 = -\ x_1y_1$ e então por (1), $x_2y_2 = y_2x_2$.

A comutatividade de x_2y_2 e a equação (4) multiplicada a esquerda por y_2 e a direita por y_3 nos dá:

$$x_3y_3\ N(y_2) = x_2y_2\ N(y_3)$$

que somada com (9) e usando (1) obtemos $x_3y_3 = 0$.

Contradição.

Logo não podemos ter $h(u,v) = 0$ quando todos os x_i, y_j são distintos de zero, $i,j = 1,2,3$.

Portanto h é não singular.

Para obter as restrições procedemos exatamente como foi feito em (3.1.1).

Seja $x_1 = (a_1,a_2)$ e $y_1 = (b_1,b_2)$ os números de Cayley representados por pares de quaternios.

Temos então que:

$$x_1y_1 - y_1x_1 = (a_1b_1 - b_1a_1 + \bar{a}_2b_2 - \bar{b}_2a_2\ ,\ b_2(a_1-\bar{a}_1) - a_2(b_1-\bar{b}_1))$$

é um imaginário puro e portanto está num subespaço de K de dimensão 7, o que nos dá (i).

As outras são obtidas restringindo x_1, y_1 como segue:

Denotando r_i, z_i, q_i qualquer número real, complexo e quaternio respectivamente, e usando o fato do comutador, $x_1 y_1 - y_1 x_1$ ser um imaginário puro, temos:

Se $x_1 = (r_1, q_1)$, $y_1 = (r_2, q_2)$ obtemos (ii)

Se $x_1 = (r_1, z_1)$, $y_1 = (r_2, z_2)$ obtemos (iii)

Se $x_1 = (z_1, 0)$, $y_1 = (z_2, 0)$ obtemos (iv)

Se $x_1 = (r_1, r_2)$, $y_1 = (q_1, q_2)$ obtemos (v)

Se $x_1 = (r_1, z_1)$, $y_1 = ((r_2, z_2), q_1)$ obtemos (vi)

Se $x_1 = (z_1, 0)$, $y_1 = (z_2, 0)$ obtemos (vii)

Se $x_1 = (r_1, 0)$, $y_1 = (q_1, q_2)$ obtemos (viii)

* * *

CAPÍTULO IV

APLICAÇÕES

4.1 - Número de secções independentes do fibrado linear canônico.

Consideremos um fibrado η com projeção $\pi: E \longrightarrow B$, uma secção S_i em η é uma aplicação contínua $S_i: B \longrightarrow E$ tal que $\pi S_i(b) = b$ para cada $b \in B$. As secções $S_1, \ldots, S_k$ de η são chamadas independentes, se para cada $b \in B$, $\{S_1(b), \ldots, S_k(b)\}$ é um conjunto linearmente independentes de vetores na fibra sobre b.

Note que se θ^k é um fibrado trivial com carta local (B,h), definindo para cada $b \in B$, $S_i(b) = h(b,(0,\ldots,0,1,0,\ldots0))$ (com 1 na i-ésima posição) obtemos k-secções independentes.

Passemos agora a $\mathbb{P}^n$, o espaço projetivo real de dimensão n e ξ_n^1 o fibrado linear canônico sobre $\mathbb{P}^n$, cujo espaço total é obtido de $S^n \times \mathbb{R}$ pela identificação $(x,y) = (-x,-y)$.

Para cada inteiro positivo k, denotemos $k\xi_n^1$ a k-soma de Whitney de ξ_n^1, isto é, $k\xi_n^1 = \xi_n^1 \oplus \ldots \oplus \xi_n^1$ (k-vezes).

Deste modo o espaço total $k\xi_n^1$ é $S^n \times \mathbb{R}^k$ com a identificação $(x,y) = (-x,-y)$, indicado por

$(\overline{x,y})$.

Com isto podemos enunciar:

4.1.1 - Proposição.

Se existe uma aplicação bilinear não singular $f: \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s \longrightarrow \mathbb{R}^k$ então $k\xi^1_{r-1}$ admite s-secções independentes e $k\xi^1_{s-1}$ admite r-secções independentes.

Demonstração:

i) $k\xi^1_{r-1}$ admite s-secções independentes.

Dada a aplicação bilinear não singular $f: \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s \longrightarrow \mathbb{R}^k$, consideremos a esfera unitária $S^{r-1} \subset \mathbb{R}^r$ e a aplicação
$F: S^{r-1} \times \mathbb{R}^s \longrightarrow S^{r-1} \times \mathbb{R}^k$ dada por:
$F(u,y) = (u,f(u,y))$ com $u \in S^{r-1}$, $y \in \mathbb{R}^s$.
Se denotarmos por T a involução em $S^{r-1} \times \mathbb{R}^k$, dada por $T(x,y) = (-x,-y)$, vemos que

$\dfrac{S^{r-1} \times \mathbb{R}^k}{T} = E(k\xi^1_{r-1})$. Denotando ainda por T a involução antípoda $T(x) = -x$ obtemos
$\mathbb{P}^{r-1} = S^{r-1}/_T$.

Deste modo, nossa aplicação F, induz a aplicação $F': \mathbb{P}^{r-1} \times \mathbb{R}^s \longrightarrow E(k\xi^1_{r-1})$ dada por:
$F'(\bar{u},y) = (\overline{u,f(u,y)})$ com $\bar{u} \in \mathbb{P}^{r-1}$, $u \in \mathbb{R}^s$ que está bem definida; pois

$$F'(-\bar{u},y) = (\overline{-u,f(-u,y)}) = (\overline{-u,-f(u,y)}) =$$
$$= (\overline{u,f(u,y)}) = F'(\bar{u},y)$$

Estamos na seguinte situação

$$\begin{tikzcd}
S^{r-1} \times \mathbb{R}^s \arrow[r, "F"] \arrow[d, "q"'] & S^{r-1} \times \mathbb{R}^k \arrow[d, "q'"] \\
\mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{R}^s \arrow[r, "F'"'] \arrow[ur, "\bar{F}"] & (S^{r-1} \times \mathbb{R}^k)/_T
\end{tikzcd}$$

Desde que a topologia de $\mathbb{P}^{r-1} \times \mathbb{R}^s$ é a coinduzida pela aplicação projeção q, e a aplicação F é contínua, temos $\bar{F}$ contínua. Ainda mais, $F' = g' o \bar{F}$, portanto F' é contínua.

Consideremos agora o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{P}^{r-1} \times \mathbb{R}^s \arrow[rr, "F'"] \arrow[dr, "p"'] & & E(k\xi^1_{r-1}) \arrow[dl, "\pi"] \\
& \mathbb{P}^{r-1} &
\end{tikzcd}$$

onde p é a aplicação projeção do fibrado trivial $\mathbb{P}^{r-1} \times \mathbb{R}^s$ sobre $\mathbb{P}^{r-1}$ e π a aplicação projeção do fibrado $k\xi^1_{r-1}$ sobre $\mathbb{P}^{r-1}$. F' é homomorfismo de fibrados, uma vez que é contínua e para cada $\bar{u} \in \mathbb{P}^{r-1}$ é linear em cada fibra, i.e,

$$F'\Big|_{p^{-1}(\bar{u})} : \begin{array}{ccc} u \times \mathbb{R}^s & \longrightarrow & u \times \mathbb{R}^k \\ (u,y) & \longmapsto & (u,f(u,y)) \end{array}$$ é linear,

o que decorre imediatamente do fato de f ser bilinear:

Além disso, $F'\Big|_{p^{-1}(u)}$ é injetora, o que decorre de f ser não singular. Dado $\bar{u} \in \mathbb{P}^{r-1}$,

$(u,f(u,y)) = (u,0) \Rightarrow f(u,y) = 0 \Rightarrow y = 0.$

Agora, o que temos a fazer é transportar as secções de $\mathbb{P}^{r-1} \times \mathbb{R}^s$ para $k\xi^1_{r-1}$, já que $\mathbb{P}^{r-1} \times \mathbb{R}^s$ é trivial sôbre $\mathbb{P}^{r-1}$, e portanto admite s-secções independentes sôbre $\mathbb{P}^{r-1}$,

Se S_i, $1 \leq i \leq S$ são as secções de $\mathbb{P}^{r-1} \times \mathbb{R}^s$, definimos $C_i(\bar{u}) = F'[S_i(\bar{u})]$, $1 \leq i \leq S$. As funções C_i são secções do fibrado $k\xi^1_{r-1}$ pois

$$\pi C_i(\bar{u}) = \pi F'[S_i(\bar{u})] = p(S_i(\bar{u})) = \bar{u}$$

e são independentes pois F' é injetora nas fibras.

ii) Analogamente prova-se que $k\xi^1_{s-1}$ admite r-secções independentes.

4.1.2 - Resultados obtidos:

Usando as aplicações bilineares obtidas no Capítulo III, teoremas, (3.1.1),(3.1.2),(3.2.1), e o teorema anterior podemos construir a seguinte tabela:

$\mathbb{R}^R \times \mathbb{R}^S \longrightarrow \mathbb{R}^K$	$K\ \xi^1_{R-1}$	nº de secções independentes	$K\ \xi^1_{S-1}$	nº de secções independentes
$\mathbb{R}^{24} \times \mathbb{R}^{24} \to \mathbb{R}^{39}$	$39\ \xi^1_{23}$	24		
$\mathbb{R}^{21} \times \mathbb{R}^{21} \to \mathbb{R}^{35}$	$35\ \xi^1_{20}$	21		
$\mathbb{R}^{19} \times \mathbb{R}^{19} \to \mathbb{R}^{33}$	$33\ \xi^1_{18}$	19		
$\mathbb{R}^{18} \times \mathbb{R}^{18} \to \mathbb{R}^{32}$	$32\ \xi^1_{17}$	18		
$\mathbb{R}^{18} \times \mathbb{R}^{24} \to \mathbb{R}^{38}$	$38\ \xi^1_{17}$	24	$38\ \xi^1_{23}$	18
$\mathbb{R}^{19} \times \mathbb{R}^{23} \to \mathbb{R}^{37}$	$37\ \xi^1_{18}$	23	$37\ \xi^1_{22}$	19
$\mathbb{R}^{18} \times \mathbb{R}^{22} \to \mathbb{R}^{36}$	$36\ \xi^1_{17}$	22	$36\ \xi^1_{21}$	18
$\mathbb{R}^{17} \times \mathbb{R}^{24} \to \mathbb{R}^{32}$	$32\ \xi^1_{16}$	24	$32\ \xi^1_{23}$	17
$\mathbb{R}^{16} \times \mathbb{R}^{16} \to \mathbb{R}^{23}$	$23\ \xi^1_{15}$	16		
$\mathbb{R}^{13} \times \mathbb{R}^{13} \to \mathbb{R}^{19}$	$19\ \xi^1_{12}$	13		
$\mathbb{R}^{11} \times \mathbb{R}^{11} \to \mathbb{R}^{17}$	$17\ \xi^1_{10}$	11		
$\mathbb{R}^{10} \times \mathbb{R}^{10} \to \mathbb{R}^{16}$	$16\ \xi^1_{9}$	10		
$\mathbb{R}^{10} \times \mathbb{R}^{16} \to \mathbb{R}^{22}$	$22\ \xi^1_{9}$	16	$22\ \xi^1_{15}$	10
$\mathbb{R}^{10} \times \mathbb{R}^{15} \to \mathbb{R}^{21}$	$21\ \xi^1_{9}$	15	$21\ \xi^1_{14}$	10
$\mathbb{R}^{10} \times \mathbb{R}^{14} \to \mathbb{R}^{20}$	$20\ \xi^1_{9}$	14	$20\ \xi^1_{13}$	10
$\mathbb{R}^{9} \times \mathbb{R}^{16} \to \mathbb{R}^{16}$	$16\ \xi^1_{8}$	16	$16\ \xi^1_{15}$	9
$\mathbb{R}^{12} \times \mathbb{R}^{12} \to \mathbb{R}^{17}$	$17\ \xi^1_{11}$	12		

4.2 - Algumas imersões dos espaços projetivos no espaço Euclidiano.

4.2.1 - Teorema de Ginsburg.

Se existe uma aplicação bilinear não singular $f: \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^k$ $(8 < n+1 < k)$ então $\mathbb{P}^n$ imerge em $\mathbb{R}^{k-1}$.

Demonstração: Consideremos o espaço projetivo real de dimensão n, $\mathbb{P}^n$ e ξ_n^1 o fibrado linear canônico sôbre $\mathbb{P}^n$.

Tomemos $\underbrace{\xi_n^1 \oplus \xi_n^1 \oplus \dots \oplus \xi_n^1}_{(n+1)\text{-vezes}} = (n+1)\xi_n^1$

onde

$E[(n+1)\xi_n^1]$ é obtido de $S^n \times \mathbb{R}^{n+1}$ com a identificação $(u,y) = (-u,-y)$, denotado por $(\overline{u,y})$.

Sabemos por (1.6.1) que

$(n+1)\xi_n^1 = \zeta^n(\mathbb{P}^n) \oplus \theta^1(\mathbb{P}^n)$ onde $\zeta^n(\mathbb{P}^n)$ é o fibrado tangente a $\mathbb{P}^n$ e θ^1 é um trivial de dimensão 1 sôbre $\mathbb{P}^n$.

Desde que a aplicação f dada é bilinear não singular, ela induz uma aplicação.

$\bar{f}: E[(n+1)\xi_n^1] \longrightarrow \mathbb{R}^k$ dada por:

$\bar{f}[(\overline{u,y})] = f(u,y)$ com $u \in S^n$, $y \in \mathbb{R}^{n+1}$ que está bem definida, pois:

$$\bar{f}[(\overline{-u,-y})] = f(-u,-y) = f(u,y) = \bar{f}[(\overline{u,y})]$$

$\bar{f}$ é linear e não singular em cada fibra, isto é, se considerarmos π como a projeção de $(n+1)\xi_n^1$ sôbre $\mathbb{P}^n$, para cada $\bar{u} \in \mathbb{P}^n$.

$$\bar{f}\Big|_{\pi^{-1}(\bar{u})} : \begin{array}{ccc} u \times \mathbb{R}^{n+1} & \longrightarrow & \mathbb{R}^k \\ (u,y) & \longmapsto & f(u,y) \end{array}$$

é linear e não singular, o que decorre trivialmente do fato de f o ser.

Definimos agora a aplicação,

$$\mu : E[(n+1)\xi_n^1] \longrightarrow \mathbb{P}^n \times \mathbb{R}^k \quad \text{dada por:}$$

$$\mu[(\overline{u,y})] = (\pi[(\overline{u,y})] \; , \; \bar{f}[(\overline{u,y}])$$

μ está bem definida; pois

$$\mu[(\overline{-u,-y})] = (\pi[(\overline{-u,-y})] \; , \; \bar{f}[(\overline{-u,-y})]) =$$

$$= (\pi[(\overline{u,y})] \; , \; \bar{f}[(\overline{u,y})])) = \mu[(\overline{u,y})]$$

Ainda mais, μ é uma aplicação contínua que restrita a cada fibra é linear e injetora portanto um monomorfismo de fibrados.

Deste modo, imagem de μ que é um subconjunto de $\mathbb{P}^n \times \mathbb{R}^k$ é um subfibrado de $\mathbb{P}^n \times \mathbb{R}^k$ com fibra $\mathbb{R}^{n+1}$.

Podemos então construir a seguinte sequência exata curta de fibrados:

$$0 \longrightarrow (n+1)\xi_n^1 \xrightarrow{\mu} \mathbb{P}^n \times \mathbb{R}^k \xrightarrow{\delta} \gamma \longrightarrow 0$$

onde γ é o fibrado $(\mathbb{P}^n \times \mathbb{R}^k)/_{\mathrm{Im}\mu}$ que tem $\mathbb{R}^{k-(n+1)}$ como fibra.

Deste modo, o fibrado $\theta^k = \mathbb{P}^n \times \mathbb{R}^k$ pode ser escrito como:

$$\theta^k = (n+1)\xi_n^1 \oplus \gamma = (\zeta^n(\mathbb{P}^n) \oplus \theta^1) \oplus \gamma =$$

$$= \zeta^n(\mathbb{P}^n) \oplus (\theta^1 \oplus \gamma)$$

Recorrendo agora, aos resultados obtidos por Hirsch em [4] que são:

"Uma variedade fechada M^n, de dimensão n, imer ge em $\mathbb{R}^k$ com $k > n$, se e sõmente se, existe um fibrado η com fibra $\mathbb{R}^{k-n}$ tal que $\zeta^n(M) \oplus \eta^{k-n} = \theta^k$". Ainda mais. "Se o fibrado η é tal que $\eta = \eta' \oplus \theta^r$ e $k-r > n$ então M^n imerge em $\mathbb{R}^{k-r}$ ".

Podemos concluir que $\mathbb{P}^n$ imerge em $\mathbb{R}^{k-1}$

Usandos as aplicações bilineares obtidas em (3.1.1),(3.1.2),(3.2.1) e o teorema 4.2.1. podemos enunciar.

4.2.2 - Proposição: $\mathbb{P}^9$ imerge em $\mathbb{R}^{15}$, $\mathbb{P}^{11}$ imerge em $\mathbb{R}^{16}$, $\mathbb{P}^{12}$ imerge em $\mathbb{R}^{18}$, $\mathbb{P}^{15}$ imerge em $\mathbb{R}^{22}$, $\mathbb{P}^{17}$ imerge em $\mathbb{R}^{31}$, $\mathbb{P}^{18}$ imerge em $\mathbb{R}^{32}$, $\mathbb{P}^{20}$ imerge em $\mathbb{R}^{34}$ e $\mathbb{P}^{23}$ imerge em $\mathbb{R}^{38}$.

4.2.3 - Tābua das melhores imersões de $\mathbb{P}^n$ em $\mathbb{R}^{n+k}$ $n \leq 23$. Escreveremos $\mathbb{P}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$

1.	$\mathbb{P}^1 \subseteq \mathbb{R}^2$	13.	$\mathbb{P}^{13} \subseteq \mathbb{R}^{22}$	
2.	$\mathbb{P}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$	14.	$\mathbb{P}^{14} \subseteq \mathbb{R}^{22}$	
3.	$\mathbb{P}^3 \subseteq \mathbb{R}^4$	15.	$\mathbb{P}^{15} \subseteq \mathbb{R}^{22}$	
4.	$\mathbb{P}^4 \subseteq \mathbb{R}^7$	16.	$\mathbb{P}^{16} \subseteq \mathbb{R}^{31}$	
5.	$\mathbb{P}^5 \subseteq \mathbb{R}^7$	17.	$\mathbb{P}^{17} \subseteq \mathbb{R}^{31}$	
6.	$\mathbb{P}^6 \subseteq \mathbb{R}^7$	18.	$\mathbb{P}^{18} \subseteq \mathbb{R}^{32}$	
7.	$\mathbb{P}^7 \subseteq \mathbb{R}^8$	19.	$\mathbb{P}^{19} \subseteq \mathbb{R}^{32}$	(*)
8.	$\mathbb{P}^8 \subseteq \mathbb{R}^{15}$	20.	$\mathbb{P}^{20} \subseteq \mathbb{R}^{34}$	
9.	$\mathbb{P}^9 \subseteq \mathbb{R}^{15}$	21.	$\mathbb{P}^{21} \subseteq \mathbb{R}^{38}$	
10.	$\mathbb{P}^{10} \subseteq \mathbb{R}^{16}$	22.	$\mathbb{P}^{22} \subseteq \mathbb{R}^{38}$	
11.	$\mathbb{P}^{11} \subseteq \mathbb{R}^{16}$	23.	$\mathbb{P}^{23} \subseteq \mathbb{R}^{38}$	
12.	$\mathbb{P}^{12} \subseteq \mathbb{R}^{18}$			

Esta tábua é obtida dos seguintes resultados:

(1) Se M^n é uma variedade compacta, M^n não imerge em $\mathbb{R}^n$.

(2) Se $n = 1,3,7$, $\mathbb{P}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$; ([10], pg 47)

(3) Se $n = 2^r$, $\mathbb{P}^n \subseteq \mathbb{R}^{2n-1}$ mas não imerge em $\mathbb{R}^{2n-2}$; ([10], pg 50).

(4) $\mathbb{P}^5 \subset \mathbb{P}^6 \subseteq \mathbb{R}^7$; [4].

(5) Se $n = 2^r + 2^r + 2$, $n \geq 10$, $\mathbb{P}^n$ não imerge em $\mathbb{R}^{2n-5}$; [3].

(6) Se $n = 2^r + 2^s + 1$, $r > s \geq 2$, $n \geq 13$, $\mathbb{P}^n$, $\mathbb{P}^{n+1}$, $\mathbb{P}^{n+2}$ imergem em $\mathbb{R}^{2n-4}$ mas não imergem em $\mathbb{R}^{2n-5}$; [3]

(7) Se $n = 2^r + 4$, $n \geq 10$, $\mathbb{P}^n$ não imerge em $\mathbb{R}^{2n-7}$; [3].

(8) $\mathbb{P}^{19} \subseteq \mathbb{R}^{32}$; [11] .

(9) Proposição 4.2.2

Como se pode observar o método usado para encontrar as imersões obtidas em 4.2.2 nos dá as melhores imersões possíveis de $\mathbb{P}^n$ em $\mathbb{R}^{n+k}$ para $9 \leq n \leq 23$ com a excessão de $n = 19$ que por (4.2.2) $\mathbb{P}^{19} \subseteq \mathbb{R}^{34}$, e Sanderson mostrou que $\mathbb{P}^{19} \subseteq \mathbb{R}^{32}$.

Para $1 \leq n \leq 8$, as imersões seguem diretamente dos resultados mencionados acima de (1) a (4). Para $n = 9$, $\mathbb{P}^9$ não imerge em $\mathbb{R}^{15}$ pois $\mathbb{P}^8$ não imerge em $\mathbb{R}^{15}$ por (3).

Para $n = 10$, $\mathbb{P}^{10}$ não imerge em $\mathbb{R}^{15}$ por (5).

Para $n = 11$, $\mathbb{P}^{11}$ não imerge em $\mathbb{R}^{15}$ pois $\mathbb{P}^{10}$ não imerge em $\mathbb{R}^{15}$.

Para $n = 12$, $\mathbb{P}^{12}$ não imerge em $\mathbb{R}^{17}$ por (7).

Para $n = 13, 14, 15$, $\mathbb{P}^{13}$, $\mathbb{P}^{14}$ e $\mathbb{P}^{15}$ não imergem em $\mathbb{R}^{21}$ por (6).

Para $n = 16$, $\mathbb{P}^{16}$ não imerge em $\mathbb{R}^{30}$ por (3).

Para $n = 17$, $\mathbb{P}^{17}$ não imerge em $\mathbb{R}^{30}$ pois $\mathbb{P}^{16}$ não imerge em $\mathbb{R}^{30}$.

Para $n = 18$, $\mathbb{P}^{18}$ não imerge em $\mathbb{R}^{31}$ por (5).

Para $n = 20$, $\mathbb{P}^{20}$ não imerge em $\mathbb{R}^{33}$ por (7).

Para $n = 21, 22, 23$, $\mathbb{P}^{21}$, $\mathbb{P}^{22}$, $\mathbb{P}^{23}$ não imergem em $\mathbb{R}^{37}$ por (6).

* * *

B I B L I O G R A F I A

[1] J. Adem, Some immersions associated with bilinear maps, Bol. Soc. Mat. Mex, (2) 13. (1968), 95-104.

[2] M. Ginsburg, Some immersions of projective space in Euclidean space, Topology, 2 (1963), 69-71.

[3] S. Gitler, The projetive Stiefel manifolds - II Aplications, Topology, 7 (1968), 47-53.

[4] M.W. Hirsch, Immersions of manifolds, Trans. Amer. Math. Soc, 93. (1959), 242-276.

[5] D. Husemoller, Fibre Bundles, McGraw-Hill, 1966.

[6] A.G. Kurosh, Lectures in General Algebra, Pergamon Press, 1965, 221-234.

[7] K.Y. Lam, Construction of non singular bilinear maps, Topology, 6(1967), 423-26.

[8] E.L. Lima, Variedades Diferenciareis, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1973.

[9] S. Mac. Lane, G. Birkhoff, Algebra, MacMillan, 1967.

[10] J. Milnor, Characteristic classes, Princenton, 1974.

[11] B.J. Sanderson, Immersions and embeddings of projeticve spaces, Proc Lond Math. Soc. (3), 14(1964), 135-153.

[12] R.D. Schafer, An introduction to nonassociative algebras, Academic Press, 1966, 27-29.