



Luiz Alberto Viana da Silva

Escoamentos Incompressíveis com Viscosidade Pequena em Torno de Obstáculos Distantes



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA
E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA**

Luiz Alberto Viana da Silva

**Escoamentos Incompressíveis com Viscosidade Pequena
em Torno de Obstáculos Distantes**

Orientador: Profa. Dra. Helena Judith Nussenzveig Lopes

Co-orientador: Prof. Dr. Milton da Costa Lopes Filho

Tese de doutorado apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Unicamp para obtenção de título de Doutor em Matemática.

Este exemplar corresponde à versão final da tese defendida pelo aluno Luiz Alberto Viana da Silva, e orientada pela profa. Dra. Helena Judith Nussenzveig Lopes.



Helena Judith Nussenzveig Lopes
Orientadora



Milton da Costa Lopes Filho
Co-orientador

CAMPINAS

2012

iii

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA POR
MARIA FABIANA BEZERRA MULLER - CRB8/6162
BIBLIOTECA DO INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E
COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA - UNICAMP

Si38e Silva, Luiz Alberto Viana, 1984-
Escoamentos incompressíveis com viscosidade pequena em
torno de obstáculos distantes / Luiz Alberto Viana da Silva. –
Campinas, SP : [s.n.], 2012.

Orientador: Helena Judith Nussenzveig Lopes.
Coorientador: Milton da Costa Lopes Filho.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto
de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Perturbação singular (Matemática). 2. Navier-Stokes,
Equações de. 3. Euler, Equações de. I. Lopes, Helena Judith
Nussenzveig, 1963-. II. Lopes Filho, Milton da Costa, 1963-. III.
Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática,
Estatística e Computação Científica. IV. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em inglês: Incompressible flows around a distant obstacle and the
vanishing viscosity limit

Palavras-chave em inglês:

Singular perturbation (Mathematics)

Navier-Stokes equations

Euler equations

Área de concentração: Matemática

Titulação: Doutor em Matemática

Banca examinadora:

Milton da Costa Lopes Filho [Orientador]

Ademir Pastor Ferreira

Marcelo Martins dos Santos

Sérgio Luís Zani

Valéria Neves Domingos Cavalcanti

Data de defesa: 10-08-2012

Programa de Pós-Graduação: Matemática

Tese de Doutorado defendida em 10 de agosto de 2012 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



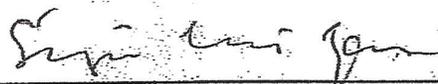
Prof(a). Dr(a). MILTON DA COSTA LOPES FILHO



Prof(a). Dr(a). ADEMIR PASTOR FERREIRA



Prof(a). Dr(a). MARCELO MARTINS DOS SANTOS



Prof(a). Dr(a). SÉRGIO LUÍS ZANI



Prof(a). Dr(a). VALÉRIA NEVES DOMINGOS CAVALCANTI

*À minha mãe,
Maria Izabel.*

Agradecimentos

Em 24 de março de 2003, data exata em que iniciei minha graduação na Universidade Federal Fluminense, eu não poderia imaginar quantas pessoas formidáveis fariam parte, efetivamente, do meu processo de formação acadêmica e pessoal...

- Em primeiro lugar, agradeço a Deus pela vida e por sempre me reanimar quando as adversidades se posicionam;
- Agradeço à minha mãe pelo amor incondicional e por sempre me encher de confiança e coragem;
- Agradeço ao meu sobrinho e afilhado Arthur, à minha irmã Beatriz e ao meu cunhado Jefferson por atribuírem à palavra família um sentido tão pleno e importante para minha vida;
- Agradeço aos amigos da minha turma do doutorado: Alisson, Eduardo, Grasielle, Ivan, Nelson e Thiago Castilho. A força e o companheirismo vindos destas pessoas fizeram da minha trajetória na Unicamp uma época muito especial e cheia de ótimas lembranças;
- Agradeço a todos os outros ótimos amigos conquistados no (ou através do) IMECC: Alda, Anne, Ariane, Beatriz Motta, Carlos Henrique, Carolina, Cintya, Débora, Durval, Fernanda, Igor, Juliana Motinha, Kelly, Luís Miranda, Maicon, Manuela, Paulo Henrique, Pedro, Rodrigo Lambert, Sérgio e Thiago Andrade, dentre outros;

- Agradeço aos amigos conquistados durante a graduação e o mestrado na UFF: Jaqueline, Maria Eugênia, Reginaldo, Renan e Suzete. Estar com eles é sempre ter a certeza de momentos muito divertidos;
- Agradeço à professora Helena Lopes e ao professor Milton Lopes por me orientarem de forma segura;
- Agradeço, sem distinção, a todos os funcionários do IMECC por fazerem deste local um ambiente bastante propício ao estudo e à pesquisa;
- Agradeço a todos professores com os quais pude aprender muitos assuntos de matemática e muitas questões ligadas à postura acadêmica. Em especial, registro minha gratidão à professora Cecília Fernandez, ao professor Dinamérico Pombo e à professora Katia Frensel por me incentivarem muito desde o começo, pelo enorme interesse na minha formação e pelo respeito com que sempre me trataram;
- Agradeço aos membros da banca examinadora por apontarem várias correções e por apresentarem valiosas sugestões que aprimoraram a versão final deste trabalho;
- Agradeço à Capes e ao CNPq pelo imprescindível apoio financeiro.

Resumo

Um problema clássico em aberto é determinar se, em domínios com fronteira, soluções das equações de Navier-Stokes convergem, em um sentido apropriado, a uma solução das equações de Euler quando a viscosidade do fluido tende a zero. Baseados nesta importante questão, Kelliher, Lopes Filho e Nussenzeig Lopes examinaram, em [21], o comportamento de escoamentos com viscosidade pequena em domínios limitados com fronteira afastada, e descreveram condições precisas para que o escoamento limite fosse regido pelas equações de Euler no espaço todo. O presente trabalho é uma continuação natural do artigo mencionado, pois analisamos a dinâmica de escoamentos tridimensionais incompressíveis com viscosidade pequena em torno de obstáculos distantes. Mais precisamente, apresentamos uma estimativa fina que indica um comportamento assintótico para famílias de soluções das equações de Navier-Stokes em termos da viscosidade do escoamento e da localização do obstáculo, e contrastamos a referida estimativa com aquela demonstrada no contexto dos escoamentos em domínios limitados.

Abstract

It is a classical open problem to determine if the vanishing viscosity limit can be established in the presence of boundaries. Based on this important issue, Kelliher, Lopes Filho and Nussenzveig Lopes studied in [21] the behavior of viscous incompressible flow in an expanding bounded domain when the viscosity is very small. To be more precise, these three authors described conditions under which the limiting flow satisfies the full space Euler equations. The present work is natural continuation of the aforementioned research since we consider 3D incompressible viscous flows around a distant obstacle along with the vanishing viscosity limit. Specifically, we obtain such a polynomial decay which shows an asymptotic behavior of families of 3D incompressible viscous flows, in the exterior of a single smooth obstacle, in terms of both the obstacle position and the small viscosity. Our approach allows us to compare our rate of convergence to that ones proved in [21].

Conteúdo

Resumo	xi
Abstract	xiii
Introdução	1
1 Definições e resultados básicos	9
1.1 Resultados de Análise Funcional	9
1.2 Sobre a decomposição de Weyl-Leray-Hopf	10
1.3 A desigualdade de Friedrichs e a desigualdade de Ladyzhenskaya . . .	12
1.4 A trajetória das partículas de um escoamento incompressível	14
1.5 Sobre as equações de Euler no espaço \mathbb{R}^3	17
2 Solução fraca das equações de Navier-Stokes em um domínio exterior	25
2.1 Definição e Propriedades Básicas	25
2.2 Existência de Solução Fraca	39
3 Comportamento no infinito	49
3.1 Velocidade invíscida no espaço todo	49
3.2 Comportamento da pressão	54

3.3	Comportamento do campo-corrente	59
3.4	Soluções fracas de Leray-Hopf em um domínio exterior	62
4	Domínios tridimensionais singularmente perturbados	73
4.1	Considerações e estimativas iniciais	74
4.1.1	Aproximação para a solução das equações de Euler	74
4.1.2	Convergência relacionada aos dados iniciais	80
4.2	Cálculos Formais	84
4.3	O teorema principal	88
4.4	Uma introdução ao conteúdo de [21] e considerações finais	96
	Bibliografia	101

Introdução

As equações de Navier-Stokes constituem o modelo que é amplamente utilizado para estudar o comportamento de escoamentos viscosos e incompressíveis em um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ($d = 2, 3$). Fixado $T > 0$, as referidas equações são

$$(NS^\nu) \begin{cases} \partial_t u^\nu + (u^\nu \cdot \nabla) u^\nu - \nu \Delta u^\nu = -\nabla p^\nu & em \ \Omega \times (0, T), \\ \operatorname{div} u^\nu = 0 & em \ \Omega \times [0, T], \\ u^\nu = 0 & em \ \partial\Omega \times (0, T), \\ u^\nu(x, 0) = u_0^\nu(x) & em \ \Omega \times \{t = 0\}, \end{cases}$$

onde $\nu > 0$ é a viscosidade cinemática do fluido, $u^\nu : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ é a sua velocidade, $p^\nu : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ é a sua pressão e $u_0^\nu : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ é um dado inicial para o sistema. Por outro lado, quando o escoamento é invíscido, são as equações de Euler que regem o seu comportamento e a sua evolução. Tais equações são dadas por

$$(E) \begin{cases} \partial_t u^E + (u^E \cdot \nabla) u^E = -\nabla p^E & em \ \Omega \times (0, T), \\ \operatorname{div} u^E = 0 & em \ \Omega \times [0, T], \\ u^E \cdot \hat{n} = 0 & em \ \partial\Omega \times (0, T), \\ u^E(\cdot, 0) = u_0^E(\cdot) & em \ \Omega \times \{t = 0\}, \end{cases}$$

onde $u^E : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ é a velocidade do fluido, $p^E : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ é a sua pressão e $u_0^E : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ é um dado inicial para o sistema e $\hat{n} = \hat{n}(x)$ denota o vetor normal em $x \in \partial\Omega$, apontando para fora de Ω .

Uma clássica pergunta da mecânica de fluidos é se o comportamento das soluções de (NS^ν) com viscosidade $\nu > 0$ pequena é, aproximadamente, aquele de uma solução de (E) . Do ponto de vista da matemática, esta questão pode ser colocada da seguinte forma: se, para cada $\nu > 0$, u^ν for uma solução de (NS^ν) , será que

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} u^\nu = u^E,$$

em um sentido apropriado, onde u^E é uma solução de (E)? Este é o *problema do limite invíscido*, que quando Ω é o espaço todo possui resposta afirmativa. No entanto, quando Ω é um domínio com fronteira não vazia, o referido problema ainda está em aberto tanto no contexto das soluções suaves de (NS^ν) quanto no contexto das soluções fracas. A maior dificuldade em tratar este problema é proveniente da formação de camadas limites em torno da fronteira de Ω , o que resulta do fato de as equações de Euler não poderem satisfazer a condição de Dirichlet na fronteira $\partial\Omega$. Resumidamente, existe uma vizinhança da fronteira na qual o escoamento é governado formalmente pelas equações de Prandtl para as quais, em geral, não são conhecidos resultados de boa-colocação (veja [30]).

Em [19], Kato obteve uma caracterização para o problema do limite invíscido, cujo enunciado é o seguinte:

Teorema 0.1 *Sejam $u_0^\nu, u_0^E \in L^2(\Omega)$ ($\nu > 0$) campos com divergente nulo e suponhamos que os mesmos sejam tangentes à fronteira de Ω . Suponhamos também que $(u_0^\nu)_{\nu>0}$ convirja a u_0^E em $L^2(\Omega)$ quando $\nu \rightarrow 0$. Para cada $\nu > 0$, seja u^ν uma solução fraca de NS^ν com dado inicial u_0^ν , e digamos que u^E seja uma solução suave de (E) com dado inicial u_0^E . As seguintes condições são equivalentes:*

(a) $\lim_{\nu \rightarrow 0} u^\nu = u^E$ em $L^\infty([0, T]; L^2(\Omega))$;

(b)

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \left(\nu \int_0^T \|\nabla u^\nu(\cdot, t)\|_{L^2(\Gamma(\nu))} dt \right) = 0,$$

onde $\Gamma(\nu)$ é uma ν -vizinhança de $\partial\Omega$.

O critério acima indica que a resolução do problema do limite invíscido depende fundamentalmente do comportamento das soluções viscosas em vizinhanças muito próximas à fronteira de Ω . Destacamos que, além do resultado em si, os argumentos desenvolvidos por Kato a fim de demonstrá-lo também foram bastante frutíferos. Em linhas gerais, estes se baseiam seguintes etapas:

- Construção de um campo corretor u^C que coincide com u^E em $\partial\Omega$, é nulo na fronteira $\Gamma(\nu)$ e converge a zero em $L^\infty([0, T]; L^2(\Omega))$;
- Aproximação de u^E por $u^A := u^E - u^C$ com respeito à norma do referido espaço de funções (observamos que u^A se anula em $\partial\Omega$);
- Aplicação de métodos de energia a fim de obter estimativas que garantam que

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \|u^\nu - u^A\|_{L^\infty([0, T]; L^2(\Omega))} = 0.$$

O problema em aberto supracitado e o critério de Kato motivaram uma série de trabalhos que versam sobre a perturbação singular de domínios bidimensionais e tridimensionais quando os mesmos encontram-se ocupados por fluidos incompressíveis tanto invíscidos quanto viscosos. Podemos observar dois diferentes enfoques em tal estudo: em um deles, a perturbação singular do domínio é realizada considerando-se escoamentos com viscosidade fixa; e no outro, a perturbação singular do domínio é tratada com a consideração adicional de que os escoamentos possuem viscosidade positiva e muito pequena.

A seguir descrevemos de forma sucinta o conteúdo abordado nesta linha de trabalhos recentes. Em [17], foi estabelecida uma análise do comportamento de escoamentos bidimensionais invíscidos em torno de obstáculos muito pequenos, em [18], um estudo para escoamentos viscosos foi realizado com o mesmo enfoque, e, baseados neste último, foi desenvolvido em [15] um estudo análogo para o caso tridimensional; em [27], foram considerados escoamentos bidimensionais invíscidos em um domínio limitado com buracos, sendo um deles muito pequeno; em [20] foi realizada uma análise para escoamentos bidimensionais, tanto invíscidos, quanto viscosos, em domínios limitados expandidos; em [23] foram estudados escoamentos invíscidos bidimensionais em torno de obstáculos pequenos tendendo a uma curva, e, em [24], tal estudo foi também estabelecido para escoamentos viscosos.

Além dos trabalhos [15], [17], [18], [20], [23], [24] e [27], onde são considerados es-

escoamentos com viscosidade fixa e o domínio é singularmente perturbado, destacamos os trabalhos [16] e [21] nos quais a perturbação singular de domínios bidimensionais e tridimensionais é confrontada com a suposição de que os escoamentos possuem viscosidade pequena. É importante enfatizar que os dois últimos artigos estimulam fortemente o estudo que será desenvolvido no decorrer deste texto. Antes de apresentarmos maiores esclarecimentos sobre isto, observamos que, em [16], foram tratados escoamentos em torno de obstáculos muito pequenos e, em [21], a investigação se colocou no contexto de domínios limitados muito expandidos. Neste último, argumentos de energia baseados no critério de Kato permitiram a obtenção de estimativas precisas que indicam que o escoamento limite é regido pelas equações de Euler no espaço todo. De maneira geral, o resultado central de [21] revela que a fronteira distante de um limitado expandido exerce uma influência no estabelecimento do limite invíscido. Nesta tese, consideramos escoamentos tridimensionais incompressíveis com viscosidade pequena em torno de obstáculos distantes que, de outra forma, também é um problema de perturbação singular de domínios que possuem fronteira distante. O objetivo aqui é investigar a influência da fronteira afastada no comportamento do escoamento com viscosidade pequena, sendo esta uma abordagem que permitirá uma comparação entre o nosso estudo e aquele desenvolvido em [21].

Introduzamos algumas notações a fim de que possamos enunciar o resultado central do nosso trabalho. Seja $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^3$ um domínio limitado e suave, e supohamos que $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}_0$ seja conexo e simplesmente conexo. Além disso, para cada $R > 0$, sejam $\Omega_R = \Omega_0 + (R, 0, 0)$, $\Pi_R = \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}_R$ e $\Gamma_R = \partial\Omega_R = \partial\Pi_R$. Agora, consideremos os espaços de funções

$$\mathcal{D}(\Pi_R) = \{\Psi \in C_c^\infty(\Pi_R); \operatorname{div} \Psi = 0 \text{ em } \Pi_R\},$$

$$H(\Pi_R) = \overline{\mathcal{D}(\Pi_R)}^{\|\cdot\|_{L^2(\Pi_R)}}$$

$$= \{f \in L^2(\Pi); \operatorname{div} f = 0 \text{ e } f \cdot \widehat{n}|_{\partial\Pi_R} = 0\}$$

e

$$\begin{aligned} H^1(\Pi_R) &= \overline{\mathcal{D}(\Pi_R)}^{\|\cdot\|_{W^{1,2}(\Pi_R)}} \\ &= \{f \in W^{1,2}(\Pi_R); \operatorname{div} f = 0 \text{ e } f|_{\partial\Pi_R} = 0\}. \end{aligned}$$

Assim, temos o

Teorema 0.2 *Seja $\omega_0 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$ um campo com divergente nulo, ponhamos*

$$u_0(x) = \frac{-1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{(x-y)}{|x-y|^3} \times \omega_0(y) dy$$

e consideremos a única solução suave $u = u(x, t)$ do sistema (E), com condição inicial u_0 . Além disso, denotemos por T^ o tempo de existência de u e fixemos $T \in (0, T^*)$ arbitrariamente. Agora, para cada $\nu > 0$ e para cada $R > 0$, sejam*

(a) u^R um campo vetorial em Π_R com as seguintes propriedades: u^R possui divergente nulo, se anula em uma vizinhança de Γ_R e satisfaz

$$\|u^R - u\|_{L^\infty([0, T]; W^{1,2}(\Pi_R))} = \mathcal{O}(R^{-2})$$

quando $R \rightarrow \infty$;

(b) $u_{0,R}$ a projeção ortogonal de $u_0|_{\Pi_R}$ sobre $H(\Pi_R)$;

(c) $u^{\nu, R} \in L^\infty(0, T; H(\Pi_R)) \cap L^2(0, T; H^1(\Pi_R))$ uma solução fraca de Leray-Hopf para as equações de Navier-Stokes em Π_R , com dado inicial $u_{0,R}$ (veja a Definição 2.1 e o Teorema 2.11).

Então existe uma constante $C = C(T, \Omega_0, \omega_0) > 0$ tal que

$$\|u^{\nu, R}(t) - u^R(t)\|_{L^2(\Pi_R)}^2 + \nu \int_0^t \|\nabla u^{\nu, R}(\tau) - \nabla u^R(\tau)\|_{L^2(\Pi_R)}^2 d\tau \leq C \left(\frac{1}{R^2} + \nu \right)$$

para quase todo $t \in [0, T]$ e para todo $R > 0$ suficientemente grande.

Com isso, chegamos à seguinte conclusão:

Corolário 0.3 *Consideremos as mesmas hipóteses do Teorema 0.2. Então existe uma contante $C = C(T, \Omega_0, \omega_0) > 0$ tal que*

$$\|u^{\nu,R} - u\|_{L^\infty([0,T];L^2(\Pi_R))} \leq C \left(\frac{1}{R} + \sqrt{\nu} \right).$$

Em particular, temos

$$\|u^{\nu,R} - u\|_{L^\infty([0,T];L^2(\Pi_R))} \rightarrow 0$$

quando $R \rightarrow \infty$ e $\nu \rightarrow 0$.

As informações do Teorema 0.2 e do Corolário 0.3 apontam que a fronteira distante influencia o comportamento do escoamento com viscosidade pequena, e que tal influência é mais efetiva aqui do que no caso analisado em [21] (consulte o Teorema 4.10, cujo enunciado pode ser encontrado na seção 4.4 do nosso trabalho).

Este texto está estruturado em 4 capítulos, como descreveremos a seguir. No Capítulo 1, fixando definições e fatos básicos que serão utilizados no decorrer do texto. Começamos o capítulo recordando certos resultados de Análise Funcional, tais como algumas caracterizações para conjuntos ortonormais completos em espaços de Hilbert, a decomposição ortogonal de Weyl-Leray-Hopf e a desigualdade de Ladyzhenskaya. Nas últimas seções apresentamos a aplicação que descreve a trajetória das partículas de um fluido suave e incompressível, e estudamos algumas das propriedades da solução suave das equações de Euler no espaço todo.

No Capítulo 2, utilizamos o método de Faedo-Galerkin a fim construirmos uma solução fraca de Leray-Hopf (veja [14] e [26]) para as equações de Navier-Stokes em um domínio exterior suave.

No Capítulo 3, estudamos o comportamento no infinito da velocidade das equações de Euler no espaço todo, do seu campo-corrente, e da pressão escalar associada. Além disso, mostramos que uma certa relação distribucional conhecida para soluções

fracas de Leray-Hopf pode ser estendida para campos-teste que não possuem suporte compacto, mas decaem suficientemente rápido no infinito.

No Capítulo 4, desenvolvemos um estudo sobre escoamentos tridimensionais incompressíveis com viscosidade pequena em torno de obstáculos distantes. Inicialmente, constituímos aproximações para a solução suave das equações de Euler baseados na argumentação desenvolvida por Kato em [19]. Além disso, também constituímos uma família de dados iniciais para os escoamentos viscosos em torno dos obstáculos distantes, e demonstramos um resultado de convergência envolvendo estes dados iniciais e o dado inicial considerado para as equações de Euler. Em seguida, efetuamos cálculos heurísticos que sugerem a validade do teorema central enunciado acima, e apresentamos justificativas rigorosas para o mesmo na seção subsequente. Finalizamos este texto, contrastando a nosso estudo com aquele desenvolvido em [21].

Capítulo 1

Definições e resultados básicos

Neste capítulo, visamos a fazer uma rápida exposição acerca de alguns rudimentos básicos que são necessários à compreensão do nosso trabalho.

1.1 Resultados de Análise Funcional

Esta seção é dedicada a uma breve explanação sobre os sistemas ortonormais completos em espaços com produto interno. É conhecido que, para cada espaço E com produto interno, estes sistemas são, precisamente, os elementos maximais do conjunto ordenado (pela relação de inclusão) de todas as famílias ortonormais existentes em E . Apesar desta caracterização, a definição mais comum para este conceito é a seguinte:

Definição 1.1 *Seja E um espaço com produto interno. Um subconjunto ortonormal \mathcal{S} de E é dito completo se $\mathcal{S}^\perp = \{0\}$.*

Com esta definição, temos a

Proposição 1.2 *Seja E um espaço separável com produto interno. Então existe um conjunto ortonormal completo e enumerável em E .*

Demonstração: Veja o Teorema 3.6-4(a) de [22] (na página 171). □

Observação 1.3 *Os únicos espaços de Hilbert que admitem subconjuntos ortonormais completos enumeráveis são os separáveis, o que pode ser visto no Teorema 3.6-4(b) de [22].*

Além disso, destacamos que os conjuntos ortonormais completos possuem certas propriedades que os tornam extremamente relevantes na teoria dos espaços de Hilbert (veja [12]). Na verdade, algumas delas são equivalentes à Definição 1.1, como pode ser visto no

Teorema 1.4 *Seja E um espaço de Hilbert real e consideremos um conjunto ortonormal $\mathcal{S} = \{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ em E . Então as seguintes condições são equivalentes:*

(a) \mathcal{S} é completo;

(b) O subespaço de E gerado por \mathcal{S} é denso em E ;

(c) $x = \sum_{n=1}^{\infty} (x|x_n)x_n$ para cada $x \in E$;

(d) $(x|y) = \sum_{n=1}^{\infty} (x|x_n)(y|x_n)$ para quaisquer $x, y \in E$;

(e) $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(x|x_n)|^2$ para cada $x \in E$.

A expressão dada em (e) é conhecida como Identidade de Parseval.

Demonstração: Este teorema sintetiza parte das conclusões obtidas na Seção 3.6 de [22]. Veja as páginas 167-175 do referido livro ou consulte [12]. \square

1.2 Sobre a decomposição de Weyl-Leray-Hopf

Em virtude do teorema de Hodge, é conhecido que todo campo vetorial $F \in L^2(\mathbb{R}^n)$ ($n \in \mathbb{N}$) se exprime de maneira única como

$$F = F_1 + F_2,$$

onde F_1 é um campo de divergente nulo e F_2 é um campo gradiente. Assim, fica estabelecida uma decomposição de $L^2(\mathbb{R}^n)$ como soma direta de dois de seus subespaços, sendo estes ortogonais. Para um estudo detalhado do assunto, recomendamos os livros [28] e [29].

Neste trabalho, contamos com a validade de uma tal decomposição para o espaço $L^2(\Pi)$, onde Π é o complementar de um subconjunto compacto de \mathbb{R}^3 (domínio exterior), que possui fronteira suave. Precisamente, com as notações

$$\mathcal{D}(\Pi) = \{\Psi \in C_c^\infty(\Pi); \operatorname{div}(\Psi) = 0\},$$

$$H(\Pi) = \overline{\mathcal{D}(\Pi)}^{\|\cdot\|_{L^2(\Pi)}}$$

e

$$G(\Pi) = \{w \in L^2(\Pi); w = \nabla p \text{ para algum } p \in L_{loc}^1(\Pi)\},$$

podemos apresentar um resultado que é conhecido como a decomposição de Weyl-Leray-Hopf, sendo este o análogo do teorema de Hodge no contexto de certas classes de domínios com fronteira (como domínios exteriores suaves, por exemplo). Mais precisamente, temos o

Teorema 1.5 *Seja Π um domínio exterior em \mathbb{R}^3 , com fronteira suave. Então $H(\Pi)$ e $G(\Pi)$ são subespaços ortogonais de $L^2(\Pi)$ (isto é, $v \perp w$ sempre que $v \in H(\Pi)$ e $w \in G(\Pi)$) tais que*

$$L^2(\Pi) = H(\Pi) \oplus G(\Pi).$$

Demonstração: Veja o Teorema III.1.1, que se encontra na página 145 de [11]. \square

Observação 1.6 (a) *O Teorema 1.5 é válido em domínios exteriores de \mathbb{R}^n , para todo $n \geq 2$, o que também encontra-se demonstrado em [11];*

(b) *Com a regularidade suposta para a fronteira de Π no teorema acima, foi demonstrado em [11] que $H(\Pi)$ é precisamente o subespaço fechado de $L^2(\Pi)$*

formado pelos campos vetoriais que possuem divergente nulo e são tangentes à fronteira de Π , ou seja,

$$H(\Pi) = \{v \in L^2(\Pi); \operatorname{div} v = 0 \text{ e } v \cdot \hat{n}|_{\partial\Pi} = 0\},$$

onde \hat{n} é o campo de vetores normais apontando para fora de $\partial\Pi$ e os valores de $u \cdot \hat{n}$ em pontos desta fronteira são compreendidos no sentido da aplicação traço.

Observação 1.7 Em [11] foi estabelecida uma equivalência entre o Teorema 1.5 e o seguinte problema: dado $u \in L^2(\Pi)$, encontrar um único (a menos de adição com uma constante) $p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$(a) \ p \in D^{1,2}(\Pi) = \{v \in L^1_{loc}(\Pi); \nabla v \in L^2(\Pi)\};$$

$$(b) \ \int_{\Pi} (\nabla p - u) \cdot \nabla \Psi(x) dx = 0 \text{ para todo } \Psi \in D^{1,2}(\Pi).$$

É através deste novo formato que a decomposição de Weyl-Leray-Hopf é obtida em [11] (veja o Lema III.1.2 na página 146 do referido livro).

1.3 A desigualdade de Friedrichs e a desigualdade de Ladyzhenskaya

Nesta seção, apresentaremos duas desigualdades que serão utilizadas no decorrer dos Capítulos 2 e 3. Enquanto uma delas (desigualdade demonstrada por Friedrichs em 1933) nos auxiliará no emprego do Método de Faedo-Galerkin, visando à obtenção de uma solução fraca para as equações de Navier-Stokes em um domínio exterior (Teorema 2.11), a outra (desigualdade de Ladyzhenskaya) nos deixará a par do mergulho contínuo

$$W_0^{1,2}(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^4(\mathbb{R}^3),$$

onde $W_0^{1,2}(\mathbb{R}^3) = \overline{C_c^\infty(\mathbb{R}^3)}^{\|\cdot\|_{W^{1,2}(\mathbb{R}^3)}}$, o que será muito oportuno na demonstração da Proposição 3.14. No próximo lema, apresentaremos a primeira das desigualdades supramencionadas.

Lema 1.8 *Sejam $a > 0$, $q \in [1, \infty)$ e consideremos o cubo $\mathcal{C} = (0, a)^3$. Então para cada $n \in \mathbb{N}$ existem n campos vetoriais $w_1, w_2, \dots, w_n \in L^\infty(\mathcal{C})$ (dependendo apenas de \mathcal{C} e de n) tais que*

$$\|w\|_{L^q(\mathcal{C})}^q \leq \sum_{i=1}^n \left| \int_{\mathcal{C}} w_i \cdot w \right|^q + \frac{(6a)^q}{2n^{q/3}} \|\nabla w\|_{L^q(\mathcal{C})}^q$$

para todo campo vetorial $w \in W^{1,q}(\mathcal{C})$.

Demonstração: Veja o Lema II.5.2 na página 73 de [11]. □

Agora, passemos à segunda desigualdade em questão.

Lema 1.9 *Para cada $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ em $W_0^{1,2}(\mathbb{R}^3)$, é válida a desigualdade*

$$\|f\|_{L^4(\mathbb{R}^3)} \leq \sqrt[4]{4} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{1/4} \|\nabla f\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{3/4}.$$

Demonstração: Veja o livro [25], onde a autora prova a referida desigualdade no contexto das funções suaves (Lema 2, página 9), mas argumenta, na página 8, sobre a validade da mesma para funções em $W_0^{1,2}(\mathbb{R}^3)$. □

A seguir, explicaremos por que a desigualdade do Lema 1.9 pode ser estendida para funções (ou campos vetoriais) definidos em um domínio exterior suave $\Pi \subset \mathbb{R}^3$. Antes disso, seja

$$H^1(\Pi) := \overline{\mathcal{D}(\Pi)}^{\|\cdot\|_{W^{1,2}(\Pi)}} = \{v \in W^{1,2}(\Pi); \operatorname{div} v = 0 \text{ e } v|_{\partial\Pi} = 0\},$$

onde os valores de v em $\partial\Pi$ são compreendidos no sentido da aplicação traço. Salientamos que a segunda igualdade conta com fato de Π possuir fronteira suave (veja [11] para mais informações).

Observação 1.10 *Seja $v \in H^1(\Pi)$ e consideremos*

$$\tilde{v}(x) = \begin{cases} v(x) & \text{se } x \in \Pi; \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Pi. \end{cases}$$

É conhecido que

$$(a) \tilde{v} \in W^{1,2}(\mathbb{R}^3);$$

$$(b) \nabla \tilde{v} = \widetilde{\nabla} v;$$

$$(c) \|v\|_{W^{1,2}(\Pi)} = \|\tilde{v}\|_{W^{1,2}(\mathbb{R}^3)}$$

(veja a Proposição 2 da página 79 de [5]). Portanto, utilizando o Lema 1.9, vem que

$$\begin{aligned} \|v\|_{L^4(\Pi)} = \|\tilde{v}\|_{L^4(\mathbb{R}^3)} &\leq \sqrt[4]{4} \|\tilde{v}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{1/4} \|\nabla \tilde{v}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{3/4} \\ &= \sqrt[4]{4} \|\tilde{v}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{1/4} \|\widetilde{\nabla} v\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{3/4} \\ &= \sqrt[4]{4} \|v\|_{L^2(\Pi)}^{1/4} \|\nabla v\|_{L^2(\Pi)}^{3/4}, \end{aligned}$$

como desejávamos verificar.

1.4 A trajetória das partículas de um escoamento incompressível

Nesta seção, introduzimos de forma breve uma aplicação que permite estudar o comportamento de um fluido incompressível através da análise da evolução de cada uma de suas partículas ao longo do tempo.

Consideremos um escoamento que ocupa o espaço \mathbb{R}^n e suponhamos que sua velocidade em $x \in \mathbb{R}^n$ seja $v = v(x, t)$ em cada instante $t \geq 0$. Fixemos a configuração do escoamento no instante em que começamos a observá-lo (e convençionemos que este instante seja $t_0 = 0$). Estamos em busca de uma família a um parâmetro de mapas

$$X_t : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad (t \geq 0),$$

que associam cada partícula $\alpha \in \mathbb{R}^n$ da configuração inicial do escoamento na sua nova posição $X_t(\alpha) = X(\alpha, t)$ no instante t .

No caso em que $v : \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ é suave (este é o nosso contexto de interesse!), o teorema de existência e unicidade clássico garante boa colocação para o problema de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt}(\alpha, t) = v(X(\alpha, t), t); \\ X(\alpha, 0) = \alpha, \end{cases}$$

para cada $\alpha \in \mathbb{R}^n$ pertencente à configuração inicial mencionada. Cada um desses parâmetros $\alpha \in \mathbb{R}^n$ é chamado de *marcador lagrangeano* e dá origem à curva em \mathbb{R}^n

$$\mathcal{C}_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n; x = X(\alpha, t) \text{ para algum } t \geq 0\}$$

que descreve a sua trajetória à medida que o seu movimento se realiza. Assim, já encontra-se devidamente definida a família de mapas $\{X_t; t \geq 0\}$ nos padrões que foram estabelecidos inicialmente.

Agora, fixemos um domínio $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^n$ no instante em que o fluido começa a ser observado, e consideremos o *domínio material*

$$X(\Omega_0, t) = \{X(\alpha, t); \alpha \in \Omega_0\}$$

para cada $t \geq 0$. Utilizando esta notação e o fato de X ser a solução do problema de Cauchy supracitado, chegamos à conclusão de que a referida aplicação transforma Ω_0 em $X(\Omega_0, t)$ em cada instante de tempo t , e que o campo $v = v(x, t)$ é tangente à curva delineada pela trajetória de cada marcador lagrangeano $\alpha \in \Omega_0$.

O próximo resultado permite traduzir informações do sistema de coordenadas físico (onde cada vetor em \mathbb{R}^n pode ser denotado pela n -upla $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$) em termos do sistema de coordenadas lagrangeanas (onde cada vetor em \mathbb{R}^n é visto como um marcador lagrangeano) e vice-versa. Precisamente, definindo

$$J(\alpha, t) = \det(\nabla_\alpha X(\alpha, t)),$$

temos a

Proposição 1.11 *Sejam $v = v(x, t)$ e $X = X(\alpha, t)$ os campos mencionados anteriormente. Então*

$$\frac{dJ}{dt} = (\operatorname{div}_x v)|_{(X(\alpha, t), t)} J(\alpha, t).$$

Demonstração: Veja a Proposição 1.2 na página 5 de [28]. □

Uma outra relação igualmente útil e importante nesta teoria é a *fórmula do transporte*, que auxilia, por exemplo, no processo de dedução das equações de Navier-Stokes (veja [29]). O enunciado desta fórmula é o seguinte:

Proposição 1.12 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio aberto e limitado, com fronteira suave, e continuemos com as aplicações X e v vistas acima. Então, para toda função suave $f = f(x, t)$, temos*

$$\frac{d}{dt} \int_{X(\Omega, t)} f(x, t) dx = \int_{X(\Omega, t)} [f_t + \operatorname{div}_x(fv)](x, t) dx.$$

Demonstração: Uma demonstração deste fato pode ser encontrada em [7]. Na verdade, a referência citada apresenta uma dedução para o caso em que $n = 3$, que é exatamente o contexto no qual este trabalho encontra-se inserido. □

Na próxima definição, lembraremos, do ponto de vista matemático, o imprescindível conceito de escoamento incompressível.

Definição 1.13 *Um escoamento $(X(\cdot, t))_{t \geq 0}$ é dito incompressível se, para todo $t > 0$ e para todo subdomínio suave $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, temos*

$$\operatorname{vol}(X(\Omega, t)) = \operatorname{vol}(\Omega),$$

onde $\operatorname{vol}(\cdot)$ denota a medida de Lebesgue em \mathbb{R}^n .

Observação 1.14 *Caso um escoamento seja incompressível, é fácil verificar a validade da condição $\operatorname{div}_x v = 0$. Com efeito, aplicando a fórmula do transporte com*

a função constante $f(x, t) = 1$, obtemos

$$0 = \frac{d}{dt} [\text{vol}(X(\Omega, t))] = \int_{X(\Omega, t)} \text{div}_x v dx$$

para todo domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ que seja aberto, limitado e suave. Assim, a arbitrariedade do domínio Ω garante imediatamente o fato de v possuir divergente nulo. Esta conclusão, associada à Proposição 1.11, implica

$$\frac{dJ}{dt} = 0,$$

isto é, $J(\alpha, t) = J(\alpha, 0) = 1$ para todo marcador lagrangeano $\alpha \in \mathbb{R}^n$ e para todo $t \geq 0$.

O próximo resultado ampliará as conclusões da Observação 1.14, apresentando certas caracterizações para escoamentos que sejam suaves e incompressíveis.

Proposição 1.15 *Acerca de um escoamento suave $X(\cdot, t)$ (associado a um campo velocidade $v = v(x, t)$), as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (a) *O escoamento é incompressível;*
- (b) *$\text{div } v = 0$;*
- (c) *$J(\alpha, t) = 1$ para todo marcador lagrangeano $\alpha \in \mathbb{R}^n$ e para todo $t \geq 0$.*

Na próxima seção, apresentaremos as equações de Euler no espaço \mathbb{R}^3 e, por esta razão, retomaremos parte desta discussão sobre a aplicação que descreve a trajetória de cada partícula de um escoamento suave e incompressível.

1.5 Sobre as equações de Euler no espaço \mathbb{R}^3

Nesta última seção do capítulo, fazemos uma exposição sobre as equações de Euler incompressíveis. Estas equações constituem um sistema que modela desde escoamentos hidrodinâmicos mais simples até o fenômeno da formação de vórtices na

esteira de um avião. O referido sistema de equações foi introduzido por Leonhard Euler em um artigo clássico de 1757, no qual o autor acreditava ter desvendado todas as facetas relativas à mecânica dos fenômenos que pudessem ser descritos pelas suas equações. Um indício deste fato é que o início do primeiro parágrafo do seu artigo dizia:

“Se ainda houver dificuldades, estas não serão provenientes da mecânica, mas apenas da análise...”

Além de ser um modelo bastante utilizado no estudo da dinâmica dos fluidos incompressíveis, Arnold indicou em [2] que as equações de Euler poderiam ser estudadas de um ponto de vista geométrico. Posteriormente, em [8], foi desenvolvida a proposta feita por Arnold e as soluções clássicas das equações de Euler também passaram a ser interpretadas como geodésicas do grupo de Lie formado pelos difeomorfismos que preservam volume (estando tal grupo munido de uma estrutura riemanniana adequada).

Neste trabalho, não discutimos as questões relacionadas à dedução das equações de Euler, mas destacamos que [7], [28] e [29] são boas referências acerca deste assunto. Finalmente, o sistema de equações que justifica a presente seção é o seguinte:

$$(E) \begin{cases} \partial_t u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = 0 & \text{em } \mathbb{R}^3 \times (0, \infty), \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{em } \mathbb{R}^3 \times [0, \infty), \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{em } \mathbb{R}^3 \times \{t = 0\}, \end{cases}$$

onde o campo u denota a velocidade do fluido e a função escalar p denota a pressão do mesmo. Além disso, destacamos que a primeira EDP do sistema é interpretada como uma lei de conservação do momento, enquanto a segunda assinala a condição de incompressibilidade do escoamento (veja a Proposição 1.15).

Antes de fazermos considerações a respeito da existência de solução para (E) , apresentamos um campo de vetores que está fortemente ligado à quantidade de

rotação de um fluido, posto que sua direção é aquela em relação a qual o fluido gira (veja [28] e [29]).

Definição 1.16 *Seja $u = u(x, t) = (u_1(x, t), u_2(x, t), u_3(x, t))$ um campo velocidade suave. A vorticidade associada a u é o campo de vetores suave $\omega = \omega(x, t)$, definido por*

$$\omega = \text{rot } u = (\partial_2 u_3 - \partial_3 u_2, \partial_3 u_1 - \partial_1 u_3, \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1).$$

Para cada dado inicial $u_0 \in C^s(\mathbb{R}^3)$, com $s > 1$, é conhecida a existência de um tempo $T^* > 0$ tal que o sistema (E) admite uma única solução $u \in C^s([0, T] \times \mathbb{R}^3)$ para cada $T \in (0, T^*)$ (veja o Teorema 4.2.1 na página 77 de [6]). O próximo teorema traz informações adicionais sobre esta solução no caso em que u_0 possui rotacional com suporte compacto.

Teorema 1.17 *Sejam u_0, u, T^* e T como acabamos de descrever, e suponhamos que $\omega_0 = \text{rot } u_0$ possua suporte compacto. Além disso, ponhamos $\omega(u) = \text{rot } u$. São válidas as seguintes propriedades:*

- (a) $u \in L^\infty(0, T; C^s(\mathbb{R}^3))$ e a pressão $p \in C([0, T]; C^1(\mathbb{R}^3))$ associada a u satisfaz $\nabla p \in L^\infty(0, T; L^a(\mathbb{R}^3))$ para todo $a \in (1, \infty]$;
- (b) $\omega = \omega(u) \in L^\infty(0, T; L^a(\mathbb{R}^3))$ para todo $a \in [1, \infty]$, sendo $(\|\omega\|_{L^\infty(0, T; L^a(\mathbb{R}^3))})_{a \in (1, \infty]}$ uniformemente limitado;
- (c) $\{r > 0; \text{supp}(\omega) \subset \bar{B}_r(0) \times [0, T]\} \neq \emptyset$;

Demonstração: Estas propriedades foram todas deduzidas na página 17 de [21] (Teorema 7.1). Apesar disso, forneceremos posteriormente maiores detalhes sobre a validade do item (c) (Observação 1.21). \square

Estando próximos do fim deste capítulo, fixamos nossa atenção em uma discussão que conduzirá à justificativa do Teorema 1.17(c). Como parte deste processo,

apresentamos propriedades que relacionam os campos u e ω (obtidos no referido teorema) ou fornecem algumas de suas características mais notáveis. Com este intuito, o primeiro passo é obter um sistema que descreva a evolução do campo vorticidade ω . Aplicando o rotacional em cada termo da equação

$$\partial_t u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = 0,$$

é possível obter

$$\partial_t \omega + (u \cdot \nabla)\omega = (\omega \cdot \nabla)u$$

(veja [29]) e, assim, acoplando esta última EDP com as duas condições naturais satisfeitas por u e ω , temos o sistema

$$(V) \begin{cases} \partial_t \omega + (u \cdot \nabla)\omega = (\omega \cdot \nabla)u & \text{em } \mathbb{R}^3 \times (0, \infty), \\ \operatorname{div} \omega = 0 & \text{em } \mathbb{R}^3 \times [0, \infty), \\ \omega = \operatorname{rot} u & \text{em } \mathbb{R}^3 \times [0, \infty). \end{cases}$$

Ressaltamos que (V) foi deduzido a partir da existência de uma solução suave de (E) como no Teorema 1.17. Entretanto, como o campo velocidade u aparece na EDP que rege a evolução da vorticidade ω , gostaríamos de conhecer uma relação que exprimisse o campo u em função do campo ω . O próximo resultado fornece tal relação, que é conhecida como *Lei de Biot-Savart*.

Proposição 1.18 *Sejam u e ω como no Teorema 1.17. São válidas as seguintes afirmações:*

(a) *A condição $\operatorname{div} \omega = 0$ é necessária e suficiente para que o sistema*

$$\begin{cases} \operatorname{rot} v = \omega, \\ \operatorname{div} v = 0, \end{cases}$$

admira uma única solução. Portanto, u é exatamente esta solução.

(b) *A condição $\operatorname{div} \omega = 0$ implica a relação*

$$u = -\operatorname{rot} \psi,$$

onde o campo-corrente ψ é a única solução de $\Delta\psi = \omega$, que é dada explicitamente por

$$\psi(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\omega(y)}{|x-y|} dy.$$

Com isso, temos a Lei de Biot-Savart

$$u(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{(x-y)}{|x-y|^3} \times \omega(y) dy,$$

que permite expressar o campo velocidade u em termos da sua vorticidade ω .

Demonstração: Este resultado é um caso particular da Proposição 2.16 de [28] (página 72). De fato, é possível demonstrar esta proposição admitindo que ω seja dotado de menos decaimento no infinito. \square

Outro fato que merece destaque no estudo do sistema (E) é que este modela escoamentos suaves que conservam diversas quantidades especiais, tais como o *fluxo total da velocidade*

$$\mathcal{V}(t) = \int_{\mathbb{R}^3} u(x, t) dx,$$

o *fluxo total da vorticidade*

$$\mathcal{W}(t) = \int_{\mathbb{R}^3} \omega(x, t) dx$$

e a *energia cinética*

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |u(x, t)|^2 dx.$$

Para ver a demonstração de que estas e outras quantidades relacionadas ao sistema (E) são funções constantes da variável temporal, recomendamos uma consulta à Proposição 1.12 da página 24 de [28].

A próxima proposição traz uma expressão para as derivadas do campo velocidade u . Ponhamos $u = (u_1, u_2, u_3)$ e denotemos por ∇u a matriz Jacobiana $(\partial_i u_j)_{i,j=1}^3$ associada a u .

Proposição 1.19 *Sejam u e ω como no Teorema 1.17. A validade da Lei de Biot-Savart*

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{(x - y)}{|x - y|^3} \times \omega(y, t) dy$$

implica a relação

$$\begin{aligned} [\nabla u(x)]\xi &= -VP \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{\omega(y) \times \xi}{4\pi|x - y|^3} + \frac{3\{[(x - y) \times \omega(y)] \otimes (x - y)\}\xi}{4\pi|x - y|^5} \right) dy \\ &\quad + \frac{1}{3}\omega(x) \times \xi \end{aligned}$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^3$, onde a segunda integral é compreendida no sentido do valor principal e o produto tensorial \otimes é definido por

$$z \otimes w := (z_i w_j)_{i,j=1}^3 \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R}) \quad (\text{para } z, w \in \mathbb{R}^3).$$

Demonstração: Este resultado é exatamente a Proposição 2.20 da página 77 de [28]. □

A seguir, veremos uma fórmula que garantirá a propagação da vorticidade pelos escoamentos que são suaves, invíscidos e incompressíveis. Trata-se da *Fórmula do transporte da vorticidade*, que conta com a existência do mapa X que descreve a trajetória de cada partícula do escoamento (Seção 1.4).

Proposição 1.20 *Continuemos com u , ω e $T \in T^*$ como no Teorema 1.17, e seja $X = X(\alpha, t)$ a aplicação trajetória de partículas proveniente de u . Então*

$$\omega(X(\alpha, t), t) = \nabla_\alpha X(\alpha, t)\omega_0(\alpha)$$

para todo marcador lagrangeano $\alpha \in \mathbb{R}^3$ e para todo $t \in [0, T]$.

Demonstração: Veja a Proposição 1.8 na página 20 de [28]. □

Finalmente, já estamos em condições de justificar o item (c) do Teorema 1.17.

Observação 1.21 Consideremos $u, \omega : \mathbb{R}^3 \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $X = X(\alpha, t)$ e $T \in (0, T^*)$ como no Teorema 1.17. Ponhamos $\mathcal{K} = \text{supp}(\omega_0)$ e recordemos que este é um subconjunto compacto de \mathbb{R}^3 . Afirmamos que

$$\text{supp}(\omega(\cdot, t)) \subset X(\mathcal{K} \times [0, T])$$

para todo $t \in [0, T]$. Realmente, tomando $y = X(\alpha_0, t)$, com $\alpha_0 \notin \mathcal{K}$ e $t \in [0, T]$, e aplicando a fórmula do transporte da vorticidade, vem que

$$\omega(y, t) = \nabla_{\alpha} X(\alpha_0, t) \omega_0(\alpha_0) = 0,$$

ou seja,

$$\{x \in \mathbb{R}^3; \omega(x, t) \neq 0\} \subset X(\mathcal{K} \times [0, T]).$$

Portanto, a continuidade de X implica a afirmação e, evidentemente, o Teorema 1.17(c).

Observação 1.22 Antes de encerrarmos este capítulo, é válido lembrar que a conclusão da Observação 1.21 decorre fundamentalmente da Fórmula do transporte da vorticidade. No entanto, destacamos que os fatos e ferramentas apresentados antes da referida observação serão utilizados no decorrer dos próximos capítulos.

Capítulo 2

Solução fraca das equações de Navier-Stokes em um domínio exterior

Neste capítulo, consideramos Ω um subconjunto aberto e suave de \mathbb{R}^3 e supomos que $\Pi = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$ seja conexo e simplesmente conexo. Aqui, o nosso objetivo é relembrar o conceito de solução fraca de Leray-Hopf para as equações de Navier-Stokes em Π , bem como apresentar o teorema que garante a existência de uma tal solução. Esta noção foi introduzida por Leray em [26], onde foi obtida a existência de solução fraca no caso em que o domínio é o espaço \mathbb{R}^3 . O trabalho pioneiro de Leray inspirou o estudo da existência deste tipo de solução no contexto de certos domínios com fronteira, como pode ser visto em um trabalho de Hopf publicado em 1951 (veja [14]). Paralelamente a estes dois importantes artigos que acabamos de mencionar, a nossa explanação se baseia em notas de dois minicursos, um deles ministrado por G. Galdi em 2000 e o outro ministrado por J. Robinson em 2010.

2.1 Definição e Propriedades Básicas

Seja $T > 0$. Denotamos por Π_T o conjunto $\Pi \times [0, T)$. Começamos apresentando um importante sistema de equações diferenciais parciais, que modela o movimento de um fluido Newtoniano incompressível contido no domínio Π . Precisamente, dada uma

condição inicial $v_0 : \Pi \rightarrow \mathbb{R}^3$, as equações de Navier-Stokes em Π , com forçamento $f : \Pi_T \rightarrow \mathbb{R}^3$ e condições de fronteira de Dirichlet homogênea são dadas pelo sistema

$$(NS) \begin{cases} \partial_t v + (v \cdot \nabla)v - \nu \Delta v = -\nabla p + f & \text{em } \Pi \times (0, T), \\ \operatorname{div} v = 0 & \text{em } \Pi_T, \\ v = 0 & \text{em } \partial\Pi \times (0, T), \\ v(x, 0) = v_0(x) & \text{em } \Pi \times \{t = 0\}, \end{cases}$$

onde $v : \Pi \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3$ é a velocidade do fluido, $p : \Pi \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ é a sua pressão e $\nu > 0$ é a sua viscosidade. Uma solução clássica do sistema (NS) é um par $(v, p) \in C^1([0, T], C^2(\Pi)) \times C([0, T], C^1(\Pi))$ que satisfaz as quatro condições.

No entanto, consideramos neste trabalho uma formulação fraca para (NS) , na qual o campo velocidade procurado v satisfaz o problema em questão no sentido das distribuições. Antes de precisarmos esta noção, lembremos que

$$\mathcal{D}(\Pi) = \{\Psi \in C_0^\infty(\Pi); \operatorname{div} \Psi = 0 \text{ em } \Pi\}$$

e que $H(\Pi)$ e $H^1(\Pi)$ denotam o fecho de $\mathcal{D}(\Pi)$ em $(L^2(\Pi), \|\cdot\|_2)$ e $(W^{1,2}(\Pi), \|\cdot\|_{1,2})$, respectivamente. Além disso, definamos

$$\mathcal{D}(\Pi_T) = \{\Phi \in C_0^\infty(\Pi_T); \operatorname{div}_x \Phi = 0 \text{ em } \Pi_T\}.$$

A seguir, consideraremos as notações

$$\nabla F = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right)_{i,j=1}^3$$

e

$$\nabla F : \nabla G = \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \frac{\partial G_i}{\partial x_j},$$

onde $F = (F_1, F_2, F_3)$ e $G = (G_1, G_2, G_3)$ são dois campos em \mathbb{R}^3 .

Definição 2.1 *Sejam $v_0 \in H(\Pi)$ e $f \in L^2(\Pi_T)$. Dizemos que um campo mensurável $v : \Pi_T \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma solução fraca de (NS) se valem as relações*

(a) $v \in L^2(0, T; H^1(\Pi)) \cap L^\infty(0, T; H(\Pi))$;

(b)

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Pi} [v \cdot \partial_t \Phi - \nu \nabla v : \nabla \Phi - v \cdot \nabla v \cdot \Phi](x, t) dx dt \\ &= - \int_0^T \int_{\Pi} f \cdot \Phi dx dt - \int_{\Pi} v_0 \cdot \Phi(x, 0) dx \end{aligned}$$

para todo campo-teste $\Phi \in \mathcal{D}(\Pi_T)$.

Analisando a definição anterior, percebemos que a relação integral do item (b) omite a pressão escalar presente na formulação clássica de (NS) . Na próxima observação, apresentaremos um sentido segundo o qual podemos atribuir uma pressão P a cada solução fraca v de (NS) .

Observação 2.2 *Caso $v : \Pi_T \rightarrow \mathbb{R}^3$ seja uma solução fraca de (NS) em Π_T , com dado inicial $v_0 \in H(\Pi)$, observamos que é sempre possível obter $P : \Pi_T \rightarrow \mathbb{R}$, com*

$$P(t) \in L^2(V)$$

para todo $t \in [0, T)$ e para todo aberto $V \subset\subset \Pi$, de modo que

$$\begin{aligned} & \int_0^t [-\nu(\nabla v | \nabla \chi)_{L^2(\Pi)} - (v \nabla v | \chi)_{L^2(\Pi)} + (f | \chi)_{L^2(\Pi)}] ds \\ &= (P(t) | \operatorname{div} \chi)_{L^2(\Pi)} + (v(t) | \chi)_{L^2(\Pi)} - (v_0 | \chi)_{L^2(\Pi)} \end{aligned}$$

para cada $\chi \in C_c^\infty(\Pi)$ e cada $t \in [0, T)$.

Destacamos que através desta última relação não podemos concluir que o par (v, P) é uma solução clássica de (NS) . No entanto, não é difícil verificar que a identidade integral acima é sempre satisfeita por uma solução clássica (\bar{v}, \bar{P}) de (NS) . Nesse sentido, dizemos que P é uma pressão escalar associada à solução fraca v de (NS) .

Apesar de ainda não termos apresentado um teorema que garanta existência de solução fraca nos moldes da Definição 2.1, desejamos conhecer *a priori* algumas de suas propriedades. O nosso principal objetivo nesta seção é obter uma caracterização para noção de solução fraca na qual os campos-teste pertençam a uma classe de aplicações que não dependam da variável temporal.

Lema 2.3 *Seja v uma solução fraca de (NS) em Π_T . Então, para quase todo $t \in [0, T)$ e para todo $\Phi \in \mathcal{D}(\Pi_T)$, temos*

$$\begin{aligned} & \int_{\Pi} [v \cdot \Phi](x, t) dx - \int_{\Pi} [v \cdot \Phi](x, 0) dx \\ &= \int_0^t \int_{\Pi} [v \cdot \partial_t \Phi - \nu \nabla v : \nabla \Phi - v \cdot \nabla v \cdot \Phi](x, \tau) dx d\tau \\ & \quad + \int_0^t \int_{\Pi} f(x, \tau) \cdot \Phi(x, \tau) dx d\tau. \end{aligned}$$

Demonstração: Sejam $t \in (0, T)$ e $\Phi \in \mathcal{D}(\Pi_T)$. Consideremos uma função $\theta \in C^\infty((0, \infty))$ tal que $\theta(\xi) = 1$ se $0 \leq \xi \leq 1$ e $\theta(\xi) = 0$ se $\xi \geq 2$. Agora, para cada $h > 0$ tal que $t + h < T$, definamos

$$\theta_h(\tau) = \theta\left(\frac{\tau - t + h}{h}\right)$$

e observamos que:

- (a) $\theta_h(\tau) = 1$ se $\tau \leq t$;
- (b) $\theta_h(\tau) = 0$ se $\tau \geq t + h$;
- (c) Existe uma constante $C > 0$ de modo que $\left| \frac{d\theta_h}{d\tau} \right| \leq \frac{C}{h}$, uma vez que $\frac{d\theta_h}{d\tau} = \frac{1}{h} \theta' \left(\frac{\tau - t + h}{h} \right)$;
- (d) $\int_t^{t+h} \frac{d\theta_h}{d\tau} d\tau = \theta_h(t+h) - \theta_h(t) = \theta(2) - \theta(1) = -1$;

(e) $\|\theta_h\|_{L^2([t,t+h])} = \sqrt{h} \|\theta\|_{L^2([1,2])}$, tendo em vista a mudança de variável $z = \frac{\tau-t+h}{h}$ no cálculo da integral $\int_t^{t+h} |\theta_h(\tau)|^2 d\tau$.

Como $v = v(x, t)$ é uma solução fraca de (NS) em Π_T , $\tilde{\Phi}(x, \tau) = \theta_h(\tau)\Phi(x, \tau)$ é um campo-teste em $\mathcal{D}(\Pi_T)$ e valem as propriedades (a) e (b) acima, chegamos à identidade

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_{\Pi} [v \cdot \partial_t \Phi - \nu \nabla v : \nabla \Phi - (v \nabla v) \cdot \Phi + f \cdot \Phi] (x, \tau) dx d\tau \\ & + \int_t^{t+h} \int_{\Pi} \theta_h(\tau) [v \cdot \partial_t \Phi - \nu \nabla v : \nabla \Phi - (v \nabla v) \cdot \Phi + f \cdot \Phi] (x, \tau) dx d\tau \\ & = - \left[\int_t^{t+h} \int_{\Pi} \frac{d\theta_h}{d\tau}(\tau) (v \cdot \Phi) (x, \tau) dx d\tau + \int_{\Pi} v(x, t) \cdot \Phi(x, t) dx \right] \\ & + \left[\int_{\Pi} v(x, t) \cdot \Phi(x, t) dx - \int_{\Pi} v_0 \cdot \Phi(x, 0) dx \right]. \end{aligned}$$

Para demonstrar o resultado, precisamos passar o limite quando $h \rightarrow 0$ nesta identidade. Inicialmente, vejamos que

$$L_1 = \lim_{h \rightarrow 0} \int_t^{t+h} \int_{\Pi} \theta_h [v \cdot \partial_t \Phi - \nu \nabla v : \nabla \Phi - (v \nabla v) \cdot \Phi + f \cdot \Phi] dx d\tau = 0.$$

Realmente, ponhamos $w = v \cdot \partial_t \Phi - \nu \nabla v : \nabla \Phi - (v \nabla v) \cdot \Phi + f \cdot \Phi$. Como $v \in L^2(0, T; H^1(\Pi))$, $\Phi \in C_0^\infty(\Pi_T)$ e $f \in L^2(\Pi_T)$, sabemos que $w \in L^2([0, T]; L^1(\Pi))$. Assim, utilizando a propriedade (e) supracitada e a desigualdade de Cauchy-Schwarz, vem que

$$\begin{aligned} \left| \int_t^{t+h} \int_{\Pi} \theta_h(\tau) w(x, \tau) dx d\tau \right| & \leq \int_t^{t+h} |\theta_h(\tau)| \|w(\cdot, \tau)\|_{L^1(\Pi)} d\tau \\ & \leq \|\theta_h\|_{L^2([t,t+h])} \|w\|_{L^2([0,T]; L^1(\Pi))} \\ & = \sqrt{h} \|\theta\|_{L^2([1,2])} \|w\|_{L^2([0,T]; L^1(\Pi))}, \end{aligned}$$

o que garante que $L_1 = 0$. Agora, provemos que

$$L_2 = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\int_t^{t+h} \int_{\Pi} \frac{d\theta_h}{d\tau}(\tau) (v \cdot \Phi)(x, \tau) dx d\tau + \int_{\Pi} v(x, t) \cdot \Phi(x, t) dx \right] = 0.$$

Com efeito, utilizando as propriedades (c) e (d) acima, somando e subtraindo

$$\int_t^{t+h} \int_{\Pi} \frac{d\theta_h}{d\tau} [v(x, \tau) \cdot \Phi(x, t)] dx d\tau,$$

e aplicando novamente a desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$\begin{aligned} & \left| \int_t^{t+h} \int_{\Pi} \frac{d\theta_h}{d\tau}(\tau) (v \cdot \Phi)(x, \tau) dx d\tau + \int_{\Pi} v(x, t) \cdot \Phi(x, t) dx \right| \\ &= \left| \int_t^{t+h} \int_{\Pi} \frac{d\theta_h}{d\tau}(\tau) (v \cdot \Phi)(x, \tau) dx d\tau - \int_t^{t+h} \int_{\Pi} \frac{d\theta_h}{d\tau}(\tau) (v \cdot \Phi)(x, t) dx d\tau \right| \\ &\leq \int_t^{t+h} \int_{\Pi} \left| \frac{d\theta_h}{d\tau}(\tau) \right| |v(x, \tau) - v(x, t)| |\Phi(x, t)| dx d\tau \\ &\quad + \int_t^{t+h} \int_{\Pi} \left| \frac{d\theta_h}{d\tau}(\tau) \right| |v(x, \tau)| |\Phi(x, \tau) - \Phi(x, t)| dx d\tau \\ &\leq C \|\Phi(\cdot, t)\|_{L^2(\Pi)} \left(\frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|v(x, \tau) - v(x, t)\|_{L^2(\Pi)} d\tau \right) \\ &\quad + \|v\|_{L^\infty((0, T); L^2(\Pi))} \max_{\tau \in [t, t+h]} \|\Phi(\cdot, \tau) - \Phi(\cdot, t)\|_{L^2(\Pi)}. \end{aligned}$$

A continuidade uniforme de Φ em partes compactas de $\Pi \times [0, T]$ implica facilmente a convergência

$$\lim_{h \rightarrow 0} \max_{\tau \in [t, t+h]} \|\Phi(\cdot, \tau) - \Phi(\cdot, t)\|_{L^2(\Pi)} = 0.$$

Além disso, o Teorema 3.85 da página 87 de [13] garante a existência de um subconjunto X de $[0, T]$, com medida de Lebesgue nula, tal que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|v(x, \tau) - v(x, t)\|_{L^2(\Pi)} d\tau \right) = 0$$

para todo $t \in [0, T] \setminus X$. Portanto, acabamos de verificar que $L_2 = 0$. Observando que X não depende de $\Phi = \Phi(x, t)$ em $\mathcal{D}(\Pi_T)$, a demonstração está concluída. \square

Observação 2.4 *A conclusão do Lema 2.3 continua verdadeira se trocarmos $\Phi = \Phi(x, t)$ em $\mathcal{D}(\Pi_T)$ por $\Psi = \Psi(x)$ em $\mathcal{D}(\Pi)$, o que pode ser visto através de modificações mínimas no cálculo de L_1 e L_2 . Além disso, o subconjunto X de $[0, T]$ mencionado na demonstração do referido lema permanece o mesmo e é independente do campo-teste $\Psi = \Psi(x)$.*

Observação 2.5 *Na demonstração do Lema 2.3, utilizamos a definição de solução fraca com o campo-teste $\tilde{\Phi}(x, t) = \theta_h(t)\Phi(x, t)$, onde $\Phi \in \mathcal{D}(\Pi_T)$ (campo com suporte contido em $\Pi \times [0, T]$) e $\text{supp}(\theta_h) \subset [0, t + h] \subset [0, T]$. Nesse caso, através de argumentos completamente análogos, podemos verificar que o referido lema continua válido para campos-teste Φ cujo suporte é um subconjunto compacto arbitrário de $\Pi \times [0, T]$.*

A seguir, destacaremos mais propriedades das soluções fracas, sendo todas provenientes do Lema 2.3.

Observação 2.6 *Seja $v : \Pi_T \rightarrow \mathbb{R}$ uma solução fraca do sistema (NS).*

(a) *É possível redefinir v em um subconjunto de medida nula de $[0, T]$ de modo que $v(t) \in L^2(\Pi)$ para todo $t \in [0, T]$, e valha a relação*

$$\begin{aligned} & \int_{\Pi} [v \cdot \Phi](x, t) dx - \int_{\Pi} [v \cdot \Phi](x, s) dx \\ &= \int_s^t \int_{\Pi} [v \cdot \partial_t \Phi - \nu \nabla v : \nabla \Phi - (v \cdot \nabla) v \cdot \Phi](x, \tau) dx d\tau \\ & \quad + \int_s^t \int_{\Pi} f(x, \tau) \cdot \Phi(x, \tau) dx d\tau, \end{aligned}$$

sempre que $0 \leq s < t < T$ e $\Phi \in \mathcal{D}(\Pi_T)$.

Realmente, para cada $\Phi \in \mathcal{D}(\Pi_T)$, o Lema 2.3 garante que a função essencialmente limitada em $(0, T)$

$$\alpha(t) = \int_{\Pi} [v \cdot \Phi](x, t) dx - \int_{\Pi} [v \cdot \Phi](x, 0) dx$$

coincide quase sempre com a função contínua em $[0, T]$

$$\begin{aligned}\beta(t) &= \int_0^t \int_{\Pi} [v \cdot \partial_t \Phi - \nu \nabla v : \nabla \Phi - (v \cdot \nabla)v \cdot \Phi](x, \tau) dx d\tau \\ &\quad + \int_0^t \int_{\Pi} f(x, \tau) \cdot \Phi(x, \tau) dx d\tau.\end{aligned}$$

Da teoria da Medida é conhecido que isto é suficiente para a obtenção da relação integral desejada quando $s = 0$. Assim, o caso em que $0 < s < t < T$ segue imediatamente.

(b) A princípio, só podemos utilizar a identidade integral da parte (a) desta observação com campos-teste $\Phi \in \mathcal{D}(\Pi_T)$ (enfatizamos que $\text{supp}(\Phi) \subset \Pi \times [0, T]$). No entanto, um argumento análogo àquele visto na Observação 2.5 permite verificar a referida identidade para campos-teste cujos suportes estejam contidos em $\Pi \times [0, T]$.

(c) Argumentando como na Observação 2.4, podemos concluir que v pode ser redefinida em um subconjunto de medida nula de $[0, T]$ de modo que a identidade

$$\begin{aligned}\int_{\Pi} v(x, t) \cdot \Psi(x) dx - \int_{\Pi} v_0 \cdot \Psi(x) dx &= -\nu \int_0^t \int_{\Pi} [\nabla v(x, \tau) : \nabla \Psi(x)] dx d\tau \\ &\quad - \int_0^t \int_{\Pi} [v(x, \tau) \cdot \nabla v(x, \tau)] \cdot \Psi(x) dx d\tau \\ &\quad + \int_0^t \int_{\Pi} f(x, \tau) \cdot \Psi(x) dx d\tau\end{aligned}$$

seja válida sempre que $t \in [0, T)$ e $\Psi \in \mathcal{D}(\Pi)$.

(d) A parte (c) desta observação traz a informação de que, após a redefinição, v se torna uma aplicação fracamente contínua definida em $[0, T)$ e tomando valores em $L^2(\Pi)$. Mais precisamente, dado $\tau \in [0, T)$, temos

$$\lim_{t \rightarrow \tau} \int_{\Pi} v(x, t) \cdot w(x) dx = \int_{\Pi} v(x, \tau) \cdot w(x) dx$$

para todo $w \in L^2(\Pi)$.

Daqui em diante, nossa meta é obter a recíproca da Observação 2.6(c), isto é, almejamos um formato alternativo para o conceito de solução fraca no qual os campos-teste dependam apenas das variáveis espaciais. A fim de alcançarmos a equivalência em questão, contamos com o

Lema 2.7 *Existe um conjunto ortonormal completo $\{\Psi_r; r \in \mathbb{N}\}$ em $H(\Pi)$, formado por elementos de $\mathcal{D}(\Pi)$, tal que se $\Phi \in \mathcal{D}(\Pi_T)$ e $\varepsilon > 0$, então existem $n = n(\Phi, \varepsilon) \in \mathbb{N}$ funções reais $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n \in C_c^1([0, T])$ de modo que*

$$\max_{t \in [0, T]} \|\Phi_n(\cdot, t) - \Phi(\cdot, t)\|_{C^2(\Pi)} + \max_{t \in [0, T]} \|\partial_t \Phi_n(\cdot, t) - \partial_t \Phi(\cdot, t)\|_{C(\Pi)} < \varepsilon,$$

onde $\Phi_n(x, t) = \sum_{k=1}^n \gamma_k(t) \Psi_k(x)$.

Demonstração: Fixemos $m > \frac{7}{2}$ e denotemos por $(\cdot | \cdot)_m$ o produto interno de $W^{m,2}(\Pi)$. Como

$$H^m = H^m(\Pi) = \overline{\mathcal{D}(\Pi)}^{\|\cdot\|_{W^{m,2}(\Pi)}}$$

é um espaço de Hilbert separável, a Proposição 1.2 e a equivalência entre as condições (a) e (b) do Teorema 1.4 garantem a existência de um conjunto ortonormal completo $(\Xi_r)_{r=1}^\infty$ em $(H^m, \|\cdot\|_{W^{m,2}})$, tal que $\Xi_r \in \mathcal{D}(\Pi)$ para todo $r \in \mathbb{N}$.

Agora, seja $\Phi \in \mathcal{D}(\Pi_T)$ e tomemos $\eta > 0$. Uma vez que Φ e suas derivadas são uniformemente contínuas em subconjuntos compactos de $\Pi \times [0, T]$, sabemos que existe uma partição $\mathcal{P} = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = T\}$ de $[0, T]$ de modo que

$$\|\Phi(\cdot, t) - \Phi(\cdot, s)\|_{W^{m,2}(\Pi)} < \frac{\eta}{3},$$

sempre que $t, s \in [t_{i-1}, t_i]$, onde $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. Além disso, pela equivalência entre os itens (a) e (c) do Teorema 1.4, temos

$$\Phi(t) = \sum_{r=1}^{\infty} (\Phi(\cdot, t) | \Xi_r)_m \Xi_r$$

para cada $t \in [0, T]$. Pondo

$$\Phi_l(t) = \sum_{r=1}^l (\Phi(\cdot, t) | \Xi_r)_m \Xi_r,$$

é claro que existe $l_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|\Phi_l(\cdot, t_i) - \Phi(\cdot, t_i)\|_{W^{m,2}(\Pi)} < \frac{\eta}{3}$$

para todo $l \geq l_0$ e $i \in \{0, 1, \dots, k\}$. Assim, tomando $t' \in [0, T]$ arbitrariamente e fixando $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ tal que $t' \in [t_{j-1}, t_j]$, chegamos a

$$\begin{aligned} \|\Phi_l(\cdot, t_j) - \Phi_l(\cdot, t')\|_{W^{m,2}(\Pi)}^2 &= \left\| \sum_{r=1}^l (\Phi(\cdot, t_j) - \Phi(\cdot, t'))|_{\Xi_r} \Xi_r \right\|_{W^{m,2}(\Pi)}^2 \\ &= \sum_{r=1}^l |(\Phi(\cdot, t_j) - \Phi(\cdot, t'))|_{\Xi_r}|_m|^2 \\ &\leq \|\Phi(\cdot, t_j) - \Phi(\cdot, t')\|_{W^{m,2}(\Pi)}^2 \\ &< \left(\frac{\eta}{3}\right)^2, \end{aligned}$$

onde a penúltima relação decorre da desigualdade de Bessel.

Nesse caso, os fatos obtidos até este ponto da demonstração e a imersão de Sobolev $W^{m,2}(\Pi) \hookrightarrow C^2(\Pi)$ (veja o Teorema 5.4 na página 97 de [1]) implicam a existência de $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \|\Phi_l(\cdot, t') - \Phi(\cdot, t')\|_{C^2(\Pi)} &\leq C\|\Phi_l(\cdot, t') - \Phi(\cdot, t')\|_{W^{m,2}(\Pi)} \\ &\leq C\|\Phi_l(\cdot, t') - \Phi_l(\cdot, t_j)\|_{W^{m,2}(\Pi)} + C\|\Phi_l(\cdot, t_j) - \Phi(\cdot, t_j)\|_{W^{m,2}(\Pi)} \\ &\quad + C\|\Phi(\cdot, t_j) - \Phi(\cdot, t')\|_{W^{m,2}(\Pi)} \\ &\leq C\left(\frac{\eta}{3} + \frac{\eta}{3} + \frac{\eta}{3}\right) \\ &= C\eta, \end{aligned}$$

para todo $l \geq l_0$. Lembrando que t' foi tomado arbitrariamente em $[0, T]$, vem que

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \max_{t \in [0, T]} \|\Phi_l(\cdot, t) - \Phi(\cdot, t)\|_{C^2(\Pi)} = 0.$$

Observemos, ainda, que trocando $\Phi = \Phi(x, t)$ por $\partial_t \Phi = \partial_t \Phi(x, t)$ e utilizando argumentos análogos àqueles que foram apresentados acima, podemos concluir sem

dificuldades que

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \max_{t \in [0, T]} \|\partial_t \Phi_l(\cdot, t) - \partial_t \Phi(\cdot, t)\|_{C^0(\Pi)} = 0.$$

Agora, passemos à demonstração da existência de uma sequência $(\Psi_r)_{r=1}^\infty$ com as propriedades descritas no enunciado. Com efeito, sabemos que $(\Xi_r)_{r=1}^\infty$ é um conjunto ortogonal em $(H^m; \|\cdot\|_{W^{m,2}(\Pi)})$ e, portanto, é linearmente independente. Consequentemente, aplicando o processo de ortonormalização de Gram-Schmidt com respeito ao produto interno de $(H(\Pi), \|\cdot\|_{L^2(\Pi)})$, obtemos uma sequência ortonormal $(\Psi_r)_{r=1}^\infty$ em $H(\Pi)$ tal que

$$[\Xi_1, \dots, \Xi_r] = [\Psi_1, \dots, \Psi_r]$$

para cada $r \in \mathbb{N}$. Em particular, $\{\Psi_r; r \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{D}(\Pi) \subset H(\Pi)$. Enfatizamos os seguintes fatos:

- (a) $\overline{H^m}^{\|\cdot\|_{L^2(\Pi)}} = H$: realmente, como $H^m \subset H$, é claro que $\overline{H^m}^{\|\cdot\|_{L^2(\Pi)}} \subset \overline{H}^{\|\cdot\|_{L^2(\Pi)}} = H$. Por outro lado, a relação $\mathcal{D}(\Pi) \subset H^m$ implica imediatamente $H = \overline{\mathcal{D}(\Pi)}^{\|\cdot\|_{L^2(\Pi)}} \subset \overline{H^m}^{\|\cdot\|_{L^2(\Pi)}}$, seguindo o desejado.
- (b) $\mathcal{S} = \{\Psi_r; r \in \mathbb{N}\}$ é um sistema ortonormal completo em $H(\Pi)$: de fato, como

$$H^m = \overline{[\Xi_1, \Xi_2, \dots]}^{\|\cdot\|_{W^{m,2}}}$$

(lembramos a equivalência entre os itens (a) e (b) do Teorema 1.4), concluímos que

$$\begin{aligned} H = \overline{H^m}^{\|\cdot\|_{L^2(\Pi)}} &= \overline{[\Xi_1, \Xi_2, \dots]}^{\|\cdot\|_{W^{m,2}}}^{\|\cdot\|_{L^2}} \subset \overline{[\Xi_1, \Xi_2, \dots]}^{\|\cdot\|_{L^2}}^{\|\cdot\|_{L^2}} \\ &= \overline{[\Xi_1, \Xi_2, \dots]}^{\|\cdot\|_{L^2}} = \overline{[\Psi_1, \Psi_2, \dots]}^{\|\cdot\|_{L^2}}. \end{aligned}$$

Este fato e o Teorema 1.4 já fornecem o que queríamos demonstrar.

(c) Para cada $l \in \mathbb{N}$ e para cada $t \in [0, T]$, $\Phi_l(t) \in [\mathcal{S}]$: realmente, como

$$\Phi_l(t) = \sum_{r=1}^l (\Phi(t)|_{\Xi_r})_m \Xi_r \quad e \quad [\Xi_1, \dots, \Xi_l] = [\Psi_1, \dots, \Psi_l],$$

para cada $t \in [0, T]$ e para cada $l \in \mathbb{N}$, basta pôr $\gamma_r(t) = \gamma_r^l(t) = (\Phi_l(t)|_{\Psi_r})_{L^2(\Pi)}$ para obter

$$\Phi_l(t) = \sum_{r=1}^l \gamma_r(t) \Psi_r.$$

Ressaltamos ainda que cada γ_r define uma função no intervalo $[0, T]$ que é suave e possui suporte contido em $[0, T]$.

Os dois limites calculados inicialmente e os três fatos (a),(b) e (c) finalizam esta demonstração. □

Observação 2.8 (a) *Acabamos de demonstrar no Lema 2.7 que o conjunto*

$$\mathcal{A} = \left\{ \sum_{k=1}^n \gamma_k \Psi_k; \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n \in C_0^1([0, T]) \text{ e } n \in \mathbb{N} \right\}$$

é denso em $\mathcal{D}(\Pi_T)$ com respeito à métrica uniforme definida por

$$d(\tilde{\Phi}, \Phi) = \max_{t \in [0, T]} \|\tilde{\Phi}(\cdot, t) - \Phi(\cdot, t)\|_{C^2(\Pi)} + \max_{t \in [0, T]} \|\partial_t \tilde{\Phi}(\cdot, t) - \partial_t \Phi(\cdot, t)\|_{C^0(\Pi)},$$

onde $\Phi, \tilde{\Phi} \in \mathcal{D}_T(\Pi)$.

(b) *Através de poucas adaptações na demonstração do Lema 2.7, podemos garantir que todo campo $\Psi \in \mathcal{D}(\Pi)$ pode ser uniformemente aproximado com respeito à norma de $W^{m,2}(\Pi)$, por campos da forma*

$$\Theta_n(x) = \sum_{r=1}^n \alpha_r \Psi_r,$$

onde $n \in \mathbb{N}$ e $\alpha_r \in \mathbb{R}$ para cada $r \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Agora, já estamos em condições de concluir o principal resultado desta seção.

Teorema 2.9 *A fim de que um campo mensurável $v : \Pi_T \rightarrow \mathbb{R}^3$ seja uma solução fraca de (NS) em Π_T como na Definição 2.1, é necessário e suficiente que:*

(a) $v \in L^2(0, T; H^1(\Pi)) \cap L^\infty(0, T; H(\Pi));$

(b) *Valha a relação*

$$\begin{aligned} \int_{\Pi} v(x, t) \cdot \Psi(x) dx - \int_{\Pi} v_0 \cdot \Psi(x) dx &= -\nu \int_0^t \int_{\Pi} [\nabla v(x, \tau) : \nabla \Psi(x)] dx d\tau \\ &- \int_0^t \int_{\Pi} [v(x, \tau) \cdot \nabla v(x, \tau)] \cdot \Psi(x) dx d\tau \\ &+ \int_0^t \int_{\Pi} f(x, \tau) \cdot \Psi(x) dx d\tau, \end{aligned}$$

para todo $t \in [0, T]$ e para todo $\Psi \in \mathcal{D}(\Pi)$.

Demonstração: Na Observação 2.6(c), já argumentamos que a referida condição é necessária. Passemos, assim, à demonstração de que a mesma é suficiente. Fixemos $T > 0$. Em virtude da Observação 2.8 (a), basta verificar a identidade

$$\int_0^T \int_{\Pi} [v \cdot \partial_t \Phi - \nu \nabla v : \nabla \Phi - v \cdot \nabla v \cdot \Phi](x, t) dx dt = - \int_0^T \int_{\Pi} f \cdot \Phi dx dt - \int_{\Pi} v_0 \cdot \Phi(x, 0) dx$$

para campos-teste $\Phi \in \mathcal{D}(\Pi_T)$ que sejam da forma $\Phi(x, t) = \gamma(t)\Psi(x)$, com $\gamma \in C_c^1([0, T])$ e $\Psi \in \mathcal{D}(\Pi)$.

Com efeito, ponhamos $w = -\nu \nabla v : \nabla \Psi - (v \cdot \nabla)v \cdot \Psi + f \cdot \Psi$ e consideremos a função $\sigma : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$\sigma(t) = \int_0^t \int_{\Pi} w(x, \tau) dx d\tau.$$

Como γ e σ são absolutamente contínuas, temos

$$\int_0^T \gamma'(t)\sigma(t) dt = \gamma(T)\sigma(T) - \gamma(0)\sigma(0)$$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^T \gamma(t) \left(\int_{\Pi} w(x, t) dx \right) dt \\
& = \int_0^T \int_{\Pi} [\nu \nabla v : \nabla \Phi + (v \cdot \nabla v) \cdot \Phi - f \cdot \Phi](x, t) dx dt,
\end{aligned}$$

uma vez que $\sigma(0) = 0$ e $\gamma(T) = 0$. Por outro lado, utilizando a identidade que aparece na parte (b) do enunciado, temos

$$\begin{aligned}
\int_0^T \gamma'(t) \sigma(t) dt &= \int_0^T \gamma'(t) \left(\int_{\Pi} v(x, t) \cdot \Psi(x) dx - \int_{\Pi} v_0 \cdot \Psi(x) dx \right) dt \\
&= \int_0^T \int_{\Pi} v(x, t) \cdot \partial_t \Phi(x, t) dx dt \\
&\quad - (\gamma(T) - \gamma(0)) \int_{\Pi} v_0 \cdot \Psi(x) dx \\
&= \int_0^T \int_{\Pi} v(x, t) \cdot \partial_t \Phi(x, t) dx dt \\
&\quad + \int_{\Pi} v_0 \cdot \Phi(x, 0) dx,
\end{aligned}$$

donde segue o desejado. □

2.2 Existência de Solução Fraca

Nesta seção, $(\Psi_r)_{r=1}^\infty$ denota uma sequência ortonormal completa em $H(\Pi)$ com as propriedades descritas no Lema 2.7.

O nosso objetivo é demonstrar que existe ao menos uma solução fraca para o sistema (NS) em um domínio exterior. A presente exposição conta com uma técnica conhecida como Método de Faedo-Galerkin. Esta ferramenta é similar ao conhecido Método de Galerkin (veja a primeira seção do Capítulo 7 de [9]), mas permite construir soluções fracas para algumas EDP's quando estas são consideradas sobre domínios ilimitados. De maneira bastante resumida, a aplicação do referido método se baseia em três estágios essenciais:

- (1) Construção de uma sequência de soluções aproximantes para a EDP em questão;
- (2) Obtenção de uma subsequência da sequência aproximante que convirja em um espaço de funções adequado;
- (3) Constatação de que o limite da subsequência aproximante seja uma solução fraca nos padrões almejados.

Antes de discutirmos o resultado de existência, fazemos um comentário que desempenha um papel importante na construção da sequência aproximante aqui considerada.

Observação 2.10 *Seja $k \in \mathbb{N}$ e fixemos dois campos $v_0 \in H(\Pi)$ e $f \in L^2(\Pi_T)$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, admitamos que existam funções $c_{k1}, c_{k2}, \dots, c_{kk} \in C^1([0, T])$ de forma que*

$$v_k = v_k(x, t) = \sum_{r=1}^k c_{kr}(t) \Psi_r(x)$$

seja uma solução clássica de (NS) em Π_T , e suponhamos que $p_k \in C([0, T]; C^1(\Pi))$ seja uma pressão associada a v_k . Calculando o produto interno em $L^2(\Pi)$ de cada

termo da equação

$$\partial_t v_k + v_k \nabla v_k - \nu \Delta v_k + \nabla p_k = 0$$

com Ψ_r ($r = 1, 2, \dots, k$), constatamos que $C_k(t) = (c_{k1}(t), c_{k2}(t), \dots, c_{kk}(t))$ é uma solução do sistema de EDO's

$$(\mathcal{O}) \begin{cases} \frac{dc_{k1}}{dt} + \sum_{i=1}^k a_{i1} c_{ki} + \sum_{i,s=1}^k a_{is1} c_{ki} c_{ks} = f_1; \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{dc_{kk}}{dt} + \sum_{i=1}^k a_{ik} c_{ki} + \sum_{i,s=1}^k a_{isk} c_{ki} c_{ks} = f_k, \end{cases}$$

onde $c_{kr}(0) = c_{0r} = (v_0 | \Psi_r)_{L^2(\Pi)}$, $a_{ir} = \nu (\nabla \Psi_i | \nabla \Psi_r)_{L^2(\Pi)}$, $a_{irs} = (\Psi_i \nabla \Psi_s | \nabla \Psi_r)_{L^2(\Pi)}$ e $f_r = (f | \Psi_r)_{L^2(\Pi)}$ para cada $r \in \{1, \dots, k\}$.

Teorema 2.11 Dados $T > 0$ e dois campos $v_0 \in H(\Pi)$ e $f \in L^2(\Pi_T)$, existe ao menos uma solução fraca $v : \Pi_T \rightarrow \mathbb{R}^3$ para (NS) que satisfaz

$$(a) \quad \|v(\cdot, t)\|_{L^2(\Pi)}^2 + 2\nu \int_0^t \|\nabla v(\cdot, \tau)\|_{L^2(\Pi)}^2 d\tau \leq \int_0^t \int_{\Pi} v(x, \tau) \cdot f(x, \tau) dx d\tau + \|v_0\|_{L^2(\Pi)}^2$$

para todo $t \in [0, T]$;

$$(b) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \|v(\cdot, t) - v_0\|_{L^2(\Pi)} = 0.$$

Demonstração: Como dissemos no início desta seção, a demonstração deste teorema se baseia no método de Faedo-Galerkin. Motivados pela Observação 2.10 e utilizando as suas notações, desejamos encontrar uma solução fraca de (NS) em Π_T que seja o limite (em um sentido conveniente a ser especificado) da sequência de campos

$$v_k = v_k(x, t) = \sum_{r=1}^k c_{kr}(t) \Psi_r(x) \quad (k \in \mathbb{N}),$$

onde $C_k = (c_{k1}, \dots, c_{kk})$ é uma solução do sistema (\mathcal{O}) . Com efeito, começamos observando que existem um tempo maximal $T_k \in (0, T]$ e um único caminho $C_k \in W^{1,2}(0, T_k)$ que é solução do problema de Cauchy (\mathcal{O}) , o que provém do teorema de

existência e unicidade clássico para EDO's (veja o Teorema VII.3 na página 104 de [3]), lembrando que $f_r \in L^2(0, T)$ para todo $r \in \{1, 2, \dots, r\}$. Além disso, somando membro a membro as k equações

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{|c_{kr}(t)|^2}{2} \right) + \left(\sum_{i=1}^k a_{ir} c_{ki}(t) \right) c_{kr}(t) + \left(\sum_{i,s=1}^k a_{isr} c_{ki}(t) c_{ks}(t) \right) = f_r(t) c_{kr}(t)$$

($r = 1, 2, \dots, k$) e integrando de 0 até $t \in [0, T_k)$, chegamos à relação

$$\|v_k(\cdot, t)\|_{L^2(\Pi)}^2 + 2\nu \int_0^t \|\nabla v_k(\cdot, \tau)\|_{L^2(\Pi)}^2 d\tau = 2 \int_0^t (v_k(\cdot, \tau) |f(\cdot, \tau)|)_{L^2(\Pi)} d\tau + \|v_k(\cdot, 0)\|_{L^2(\Pi)}^2,$$

uma vez que

$$\|v_k(\cdot, t)\|_{L^2(\Pi)}^2 = \sum_{r=1}^k |c_{kr}(t)|^2, \quad \nu \|\nabla v_k(\cdot, t)\|_{L^2(\Pi)}^2 = \sum_{r,i=1}^k a_{ir} c_{ki}(t) c_{kr}(t),$$

$$0 = (v_k \nabla v_k |v_k|)_{L^2(\Pi)} = \sum_{r,i,s=1}^k a_{isr} c_{ki}(t) c_{ks}(t) c_{kr}(t)$$

e

$$(v(\cdot, t) |f(\cdot, t)|)_{L^2(\Pi)} = \sum_{r=1}^k f_r(t) c_{kr}(t).$$

Vejamos que $T_k = T$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Para tanto, é suficiente verificar que a imagem do caminho C_k está contida em um compacto de \mathbb{R}^k para cada $k \in \mathbb{N}$. De fato, como

$$\int_0^t (v_k(\cdot, \tau) |f(\cdot, \tau)|)_{L^2(\Pi)} d\tau \leq \frac{1}{2} \int_0^t \|v_k(\cdot, \tau)\|_{L^2(\Pi)}^2 + \frac{1}{2} \|f\|_{L^2(\Pi_T)}^2$$

e

$$\|v_k(\cdot, 0)\|_{L^2(\Pi)}^2 = \sum_{r=1}^k |c_{kr}(0)|^2 = \sum_{r=1}^k |(v_0 | \Psi_r)_{L^2(\Pi)}|^2 \leq \|v_0\|_{L^2(\Pi)}^2,$$

segue da forma integral do Lema de Gronwall a existência de $M > 0$ tal que

$$\|v_k(\cdot, t)\|_{L^2(\Pi)}^2 + 2\nu \int_0^t \|\nabla v_k(\cdot, \tau)\|_{L^2(\Pi)}^2 d\tau \leq M$$

para todo $k \in \mathbb{N}$ e para todo $t \in T_k$. Em particular, $C_k(t) \in [-\sqrt{M}, \sqrt{M}]^k$, como pretendíamos constatar.

Definamos $G_k^r(t) = (v_k(\cdot, t) | \Psi_r)_{L^2(\Pi)}$ para $k, r \in \mathbb{N}$ e $t \in [0, T]$.

Afirmção 1: Para cada $r \in \mathbb{N}$ fixado, a sequência de funções $G_k^r : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ é pontualmente limitada e uniformemente equicontínua.

A limitação pontual desta sequência segue diretamente das relações

$$|G_k^r(t)| \leq \|v_k(\cdot, t)\|_{L^2(\Pi)} \leq \sqrt{M},$$

válidas para $k, r \in \mathbb{N}$ e $t \in [0, T]$. Assim, fixemos $r \in \mathbb{N}$ e passemos à verificação da equicontinuidade uniforme da referida sequência. Com efeito, somando membro a membro as k EDO's

$$\frac{d}{dt}(c_{kj}\Psi_j) + \sum_{i=1}^k a_{ij}c_{ki}\Psi_j + \sum_{i,s=1}^k a_{isj}c_{ki}c_{ks}\Psi_j = f_j\Psi_j$$

($j = 1, 2, \dots, k$) e calculando o produto interno em $L^2(\Pi)$ dos termos da equação resultante com Ψ_r , obtemos

$$\frac{dG_k^r}{dt} + \sum_{i=1}^k a_{ir}c_{ki} + \sum_{i,s=1}^k a_{isr}c_{ki}c_{ks} = f_r.$$

Nesse caso, dados $t, s \in [0, T]$, temos

$$\begin{aligned} |G_k^r(t) - G_k^r(s)| &\leq \|f\|_{L^2(\Pi_T)} |t - s|^{1/2} \\ &\quad + \left(M \sum_{i,s=1}^k \|\Psi_i\|_{L^2(\Pi)} \|\nabla \Psi_s\|_{L^2(\Pi)} \max_{x \in \Pi} |\Psi_r(x)| \right) |t - s| \\ &\quad + \left(\sqrt{M} \sum_{i=1}^k \|\nabla \Psi_i\|_{L^2(\Pi)} \|\nabla \Psi_r\|_{L^2(\Pi)} \right) |t - s|, \end{aligned}$$

o que finaliza a verificação da Afirmção 1.

Afirmção 2: Existe um subconjunto infinito $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$ de forma que $(G_k^r)_{k \in \mathbb{N}'}$ seja uniformemente convergente para todo $r \in \mathbb{N}$.

Realmente, pela Afirmção 1, podemos utilizar o teorema de Arzelá-Ascoli para obter uma sequência de conjuntos infinitos

$$\mathbb{N} \supset \mathbb{N}_1 \supset \mathbb{N}_2 \supset \dots \supset \mathbb{N}_r \supset \dots$$

de forma que $(G_k^r)_{k \in \mathbb{N}_r}$ seja uniformemente convergente em $[0, T]$ para cada $r \in \mathbb{N}$. Assim, definindo k_r como sendo o r -ésimo termo da sequência $(k)_{k \in \mathbb{N}_r}$, basta considerar $\mathbb{N}' = \{k_1 < k_2 < \dots < k_r < \dots\}$ obter a verificação da Afirmação 2.

Para cada $r \in \mathbb{N}$, seja $G^r \in C([0, T])$ tal que $\lim_{k \in \mathbb{N}'} \max_{t \in [0, T]} \|G_k^r - G^r\|_{C^0([0, T])} = 0$.

Afirmação 3: Para cada $t \in [0, T]$, existe $v(\cdot, t) \in H(\Pi)$ tal que $G^r(t) = (v(\cdot, t)|\Psi_r)_{L^2(\Pi)}$ para todo $r \in \mathbb{N}$. Assim,

$$\lim_{k \in \mathbb{N}'} (v_k(\cdot, t) - v(\cdot, t)|\Psi_r)_{L^2(\Pi)} = 0$$

uniformemente em $[0, T]$ para cada $r \in \mathbb{N}$.

Fixemos $t' \in [0, T]$ arbitrariamente. Como $(v_k(\cdot, t'))_{k \in \mathbb{N}'}$ é uma sequência limitada em $H(\Pi)$, existe $\mathbb{N}'' \subset \mathbb{N}'$ infinito de modo que $(v_k(\cdot, t'))_{k \in \mathbb{N}''}$ convirja fracamente a um elemento $v(\cdot, t') \in H(\Pi)$. Em particular,

$$\lim_{k \in \mathbb{N}''} (v_k(\cdot, t') - v(\cdot, t')|\Psi_r)_{L^2(\Pi)} = 0$$

para cada $r \in \mathbb{N}$. Logo, pela Afirmação 2 e pela unicidade de limite, temos $G^r(t') = (v(\cdot, t')|\Psi_r)_{L^2(\Pi)}$, seguindo a prova da Afirmação 3

Até o fim deste capítulo, $(v(\cdot, t))_{t \in [0, T]}$ continua denotando a família a um parâmetro de campos em $H(\Pi)$ obtida na Afirmação 3.

Afirmação 4: $v \in L^\infty(0, T; H(\Pi))$ e, para cada $u \in L^2(\Pi)$, temos

$$\lim_{k \in \mathbb{N}'} (v_k(\cdot, t) - v(\cdot, t)|u)_{L^2(\Pi)} = 0$$

uniformemente em $[0, T]$.

Inicialmente, enfatizamos que é suficiente provar esta afirmação no caso em que $u \in H(\Pi)$, tendo em vista o Teorema 1.5. Com efeito, fixemos $u \in H(\Pi)$ e $\varepsilon > 0$ arbitrariamente. Uma vez que

$$u = \sum_{r=1}^{\infty} (u|\Psi_r)_{L^2(\Pi)} \Psi_r,$$

é claro que a sequência $u_n = \sum_{r=n+1}^{\infty} (u|\Psi_r)_{L^2(\Pi)} \Psi_r$ converge a 0 em $H(\Pi)$ quando $n \rightarrow \infty$, o que implica a existência de $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|u_n\|_{L^2(\Pi)} \leq \frac{\varepsilon}{4\sqrt{M}}$ para todo $n \geq n_0$. Nesse caso, para cada $t \in [0, T)$, chegamos a

$$\begin{aligned} |(v_k(\cdot, t) - v(\cdot, t)|u_{n_0})_{L^2(\Pi)}| &\leq (\|v_k(\cdot, t)\|_{L^2(\Pi)} + \|v(\cdot, t)\|_{L^2(\Pi)}) \|u_{n_0}\|_{L^2(\Pi)} \\ &\leq 2\sqrt{M} \frac{\varepsilon}{4\sqrt{M}} = \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

pois passando o limite quando $k \rightarrow \infty$ nas relações

$$\begin{aligned} |(v(\cdot, t)|v(\cdot, t))_{L^2(\Pi)}| &\leq |(v_k(\cdot, t) - v(\cdot, t)|v(\cdot, t))_{L^2(\Pi)}| + \|v_k(\cdot, t)\|_{L^2(\Pi)} \|v(\cdot, t)\|_{L^2(\Pi)} \\ &\leq |(v_k(\cdot, t) - v(\cdot, t)|v(\cdot, t))_{L^2(\Pi)}| + \sqrt{M} \|v(\cdot, t)\|_{L^2(\Pi)}, \end{aligned}$$

vem que $\|v(\cdot, t)\|_{L^2(\Pi)}^2 \leq \sqrt{M} \|v(\cdot, t)\|_{L^2(\Pi)}$. Destacamos que as últimas relações já garantem que $v \in L^\infty(0, T; H(\Pi))$. Além disso, como

$$\lim_{k \in \mathbb{N}'} \sum_{r=1}^{n_0} (u|\Psi_r)_{L^2(\Pi)} (v_k(\cdot, t) - v(\cdot, t)|\Psi_r)_{L^2(\Pi)} = 0$$

uniformemente em $[0, T)$ para todo $r \in \mathbb{N}$ (Afirmação 3), existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left| \sum_{r=1}^{n_0} (u|\Psi_r)_{L^2(\Pi)} (v_k(\cdot, t) - v(\cdot, t)|\Psi_r)_{L^2(\Pi)} \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

sempre que $k \in \mathbb{N}'$, $k \geq k_0$ e $t \in [0, T)$. Isto certamente implica

$$\begin{aligned} |(v_k(\cdot, t) - v(\cdot, t)|u)_{L^2(\Pi)}| &\leq \left| \sum_{r=1}^{n_0} (u|\Psi_r)_{L^2(\Pi)} (v(\cdot, t) - v(\cdot, t)|\Psi_r)_{L^2(\Pi)} \right| \\ &\quad + |(v_k(\cdot, t) - v(\cdot, t)|u_{n_0})_{L^2(\Pi)}| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon, \end{aligned}$$

o que finaliza a demonstração da Afirmação 4.

Afirmação 5: $v \in L^2(0, T; H^1(\Pi))$.

Fixemos $m \in \{1, 2, 3\}$. Como $(v_k)_{k \in \mathbb{N}'}$ e $(\partial_m v_k)_{k \in \mathbb{N}'}$ são sequências limitadas em $L^2(\Pi_T)$, existem um conjunto infinito $\mathbb{N}'' \subset \mathbb{N}'$ e dois campos $\tilde{v}, \tilde{w} \in L^2(\Pi_T)$ de modo que as sequências $(v_k)_{k \in \mathbb{N}''}$ e $(\partial_m v_k)_{k \in \mathbb{N}''}$ convirjam fracamente a \tilde{v} e \tilde{w} em $L^2(\Pi_T)$, respectivamente. Portanto, $\tilde{w} = \partial_m \tilde{v}$, pois

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Pi} (\tilde{w} \cdot \Phi) dx dt &= \lim_{k \in \mathbb{N}''} \int_0^T \int_{\Pi} (\partial_m v_k \cdot \Phi) dx dt = - \lim_{k \in \mathbb{N}''} \int_0^T \int_{\Pi} (v_k \cdot \partial_m \Phi) dx dt \\ &= - \int_0^T \int_{\Pi} (v \cdot \partial_m \Phi) dx dt \end{aligned}$$

para cada $\Phi \in C_c^\infty(\Pi_T)$. Além disso, utilizando o Lema 2.7 e a Afirmação 4, também temos

$$\int_0^T \int_{\Pi} (v \cdot \Phi) dx dt = \lim_{k \in \mathbb{N}''} \int_0^T \int_{\Pi} (v_k \cdot \Phi) dx dt = \int_0^T \int_{\Pi} (\tilde{v} \cdot \Phi) dx dt$$

para cada $\Phi \in \mathcal{D}(\Pi_T)$. Assim, concluímos que $v = \tilde{v}$ quase sempre em Π_T e, portanto, $v \in L^2(0, T; H^1(\Pi))$.

Daqui em diante, concentramos nossa atenção em verificar que v é uma solução fraca de (NS) em Π_T . Com esta finalidade, começamos com a

Afirmação 6: Se $\mathcal{K} \subset\subset \Pi$, então

$$\lim_{k \in \mathbb{N}'} \|v_k - v\|_{L^2(\mathcal{K} \times [0, T])} = 0.$$

Observamos que basta mostrar esta afirmação para o caso em que $\mathcal{K} = \mathcal{C} = (0, a)^3$ é um cubo aberto em \mathbb{R}^3 . De fato, tomemos $\eta > 0$ e fixemos $n \in \mathbb{N}$ de modo que $\frac{(6a)^2}{2\sqrt[3]{n^2}} < \eta$. Pela desigualdade de Friedrichs (Lema 1.8), existem n campos vetoriais $w_1, w_2, \dots, w_n \in L^\infty(\mathcal{C})$ tais que

$$\int_0^T \|v_k(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|_{L^2(\mathcal{C})}^2 dt \leq \sum_{i=1}^n \int_0^T \left| \int_{\mathcal{C}} w_i \cdot (v_k - v) dx \right|^2 dt$$

$$\begin{aligned}
& +\eta \int_0^T \|\nabla v_k(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|_{L^2(\mathcal{C})}^2 dt \\
& \leq \sum_{i=1}^n \int_0^T \left| \int_{\mathcal{C}} w_i \cdot (v_k - v) dx \right|^2 dt + \frac{M}{2\nu} \eta
\end{aligned}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Por fim, como $\lim_{k \in \mathbb{N}} \sum_{i=1}^n \int_0^T \left| \int_{\mathcal{C}} w_i \cdot (v_k - v) dx \right|^2 dt = 0$ (Afirmação 4), segue a Afirmação 6.

Afirmação 7: v é uma solução fraca de (NS) em Π_T .

Realmente, das Afirmações 4 e 5, já sabemos que $v \in L^\infty(0, T; H(\Pi)) \cap L^2(0, T; H^1(\Pi))$. Consequentemente, aplicando o Teorema 2.9, o Lemma 2.7 e a Observação 2.8 (b), sabemos que basta verificar

$$\begin{aligned}
(v(\cdot, t)|\Psi_r)_{L^2(\Pi)} - (v_0|\Psi_r)_{L^2(\Pi)} &= -\nu \int_0^t (\nabla v(\cdot, \tau)|\nabla \Psi_r)_{L^2(\Pi)} d\tau \\
& - \int_0^t (v(\cdot, \tau) \cdot \nabla v(\cdot, \tau))|\Psi_r)_{L^2(\Pi)} d\tau \\
& + \int_0^t (f(\cdot, \tau)|\Psi_r)_{L^2(\Pi)} d\tau,
\end{aligned}$$

para todo $t \in [0, T)$ e para todo $r \in \mathbb{N}$. Primeiramente, como $c_{kr}(t) = (v_k(\cdot, t)|\Psi_r)_{L^2(\Pi)}$, $f_r(t) = (f|\Psi_r)_{L^2(\Pi)}$,

$$\sum_{i=1}^k a_{ir} c_{ki} = \sum_{i=1}^k \nu (\nabla \Psi_i|\nabla \Psi_r)_{L^2(\Pi)} c_{ki} = \nu (\nabla v_k(\cdot, t)|\nabla \Psi_r)_{L^2(\Pi)}$$

e

$$\sum_{i,s=1}^k a_{isr} c_{ki} c_{ks} = \sum_{i,s=1}^k (\Psi_i \nabla \Psi_s|\nabla \Psi_r)_{L^2(\Pi)} c_{ki} c_{ks} = (v_k(\cdot, t) \nabla v_k(\cdot, t)|\Psi_r)_{L^2(\Pi)}$$

para cada $r \in \mathbb{N}$ e para cada $t \in [0, T)$, basta integrar de 0 até $t \in [0, T)$ os termos das equações do sistema (\mathcal{O}) , para concluir que

$$\begin{aligned}
(v_k(\cdot, t)|\Psi_r)_{L^2(\Pi)} - (v_0|\Psi_r)_{L^2(\Pi)} &= -\nu \int_0^t (\nabla v_k(\cdot, \tau)|\nabla \Psi_r)_{L^2(\Pi)} d\tau \\
& - \int_0^t (v_k(\cdot, \tau) \cdot \nabla v_k(\cdot, \tau))|\Psi_r)_{L^2(\Pi)} d\tau
\end{aligned}$$

$$+ \int_0^t (f(\cdot, \tau)|\Psi_r)_{L^2(\Pi)} d\tau$$

para todo $t \in [0, T)$ e para todo $r \in \mathbb{N}$. Agora, das Afirmações 3 e 5, temos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (v_k(\cdot, t) - v(\cdot, t)|\Psi_r)_{L^2(\Pi)} = 0$$

e

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^t (\nabla v_k(\cdot, \tau) - \nabla v(\cdot, \tau)|\nabla \Psi_r)_{L^2(\Pi)} = 0.$$

Além disso, escolhendo um cubo $\mathcal{C}_r \subset \mathbb{R}^3$ de modo que $\text{supp}(\Psi_r) \subset \mathcal{C}_r$, chegamos a

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^t (v_k \cdot \nabla v_k | \Psi_r)_{L^2(\Pi)} d\tau - \int_0^t (v \cdot \nabla v | \Psi_r)_{L^2(\Pi)} d\tau \right| \\ & \leq \left| \int_0^t ((v_k - v) \cdot \nabla v_k | \Psi_r)_{L^2(\mathcal{C}_r)} d\tau \right| + \left| \int_0^t (v \cdot \nabla (v_k - v) | \Psi_r)_{L^2(\mathcal{C}_r)} d\tau \right| \\ & \leq \sqrt{\frac{M}{2\nu}} \|\Psi_r\|_{L^\infty(\mathcal{C}_r)} \left(\int_0^t \|v_k(\cdot, \tau) - v(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathcal{C}_r)}^2 d\tau \right)^{1/2} \\ & \quad + \sum_{m=1}^3 \left| \int_0^t (\partial_m (v_k - v) | v^m \Psi_r)_{L^2(\mathcal{C}_r)} d\tau \right|, \end{aligned}$$

para cada $t \in [0, T)$, onde v^m denota a m -ésima componente do campo v para cada $m \in \{1, 2, 3\}$. Esta desigualdade e as Afirmações 5 e 6 implicam

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^t (v_k \cdot \nabla v_k | \Psi_r)_{L^2(\Pi)} d\tau = \int_0^t (v \cdot \nabla v | \Psi_r)_{L^2(\Pi)} d\tau,$$

donde concluímos a Afirmação 7.

Na próxima afirmação, obteremos uma desigualdade de energia para v .

Afirmação 8: A solução fraca v satisfaz a estimativa (a) do enunciado deste teorema.

A demonstração desta afirmação consiste essencialmente calcular o limite inferior quando $k \rightarrow \infty$ de ambos os membros da identidade

$$\|v_k(\cdot, t)\|_{L^2(\Pi)}^2 + 2\nu \int_0^t \|\nabla v_k(\cdot, \tau)\|_{L^2(\Pi)}^2 d\tau = 2 \int_0^t (v_k(\cdot, \tau) | f(\cdot, \tau))_{L^2(\Pi)} d\tau + \|v_k(\cdot, 0)\|_{L^2(\Pi)}^2,$$

lembrando que esta é válida para todo $t \in [0, T]$. Sabemos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|v_k(\cdot, 0)\|_{L^2(\Pi)} = \|v_0\|_{L^2(\Pi)}$$

em virtude da identidade de Parseval (Teorema 1.4) e que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^t (v_k(\cdot, \tau)|f(\cdot, \tau))_{L^2(\Pi)} d\tau = \int_0^t (v(\cdot, \tau)|f(\cdot, \tau))_{L^2(\Pi)} d\tau$$

pela Afirmação 4. Por outro lado, v e ∇v são os limites das sequências $(v_k)_{k=1}^\infty$ e $(\nabla v_k)_{k=1}^\infty$, respectivamente, com respeito à convergência fraca de $L^2(\Pi_T)$ (Afirmações 4 e 5). Logo, pelo Teorema III.3.3 de [3] (página 35), chegamos à estimativa

$$\begin{aligned} & \|v(\cdot, t)\|_{L^2(\Pi)}^2 + 2\nu \int_0^t \|\nabla v(\cdot, \tau)\|_{L^2(\Pi)}^2 d\tau \\ & \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \left(\|v_k(\cdot, t)\|_{L^2(\Pi)}^2 + 2\nu \int_0^t \|\nabla v_k(\cdot, \tau)\|_{L^2(\Pi)}^2 d\tau \right) \\ & \leq 2 \int_0^t (v(\cdot, \tau)|f(\cdot, \tau))_{L^2(\Pi)} d\tau + \|v(\cdot, 0)\|_{L^2(\Pi)}^2, \end{aligned}$$

para todo $t \in [0, T]$, conforme desejávamos.

No último passo desta demonstração, vejamos que a aplicação $v : [0, T] \rightarrow L^2(\Pi)$ é contínua em $t = 0$.

Afirmação 9: v satisfaz a condição (b) do enunciado deste teorema.

Utilizando parte do que já demonstramos aqui, podemos verificar esta afirmação de maneira bastante simples. Por um lado, a desigualdade de energia obtida na Afirmação 8 fornece

$$\limsup_{t \rightarrow 0} \|v(\cdot, t)\|_{L^2(\Pi)}^2 \leq \|v_0\|_{L^2(\Pi)}^2.$$

Além disso, como v é uma aplicação fracamente contínua definida em $[0, T]$ e tomando valores em $L^2(\Pi)$ (Observação 2.6(d)), temos

$$\|v_0\|_{L^2(\Pi)}^2 \leq \liminf_{t \rightarrow 0} \|v(\cdot, t)\|_{L^2(\Pi)}^2$$

(Teorema III.3.5 da página 35 de [3]). Finalmente, a relação

$$\|v(\cdot, t) - v_0\|_{L^2(\Pi)}^2 = \|v(\cdot, t)\|_{L^2(\Pi)}^2 - 2(v(\cdot, t)|v_0)_{L^2(\Pi)} + \|v_0\|_{L^2(\Pi)}^2$$

e, novamente, a Observação 2.6 (d) implicam $\lim_{t \rightarrow 0} \|v(\cdot, t) - v_0\|_{L^2(\Pi)} = 0$. \square

Capítulo 3

Comportamento no infinito

Neste Capítulo, apresentamos resultados de caráter técnico que são fundamentais para o desenvolvimento do Capítulo 4 deste trabalho. Apesar de estarem intimamente ligados aos nossos propósitos, os fatos aqui provados são propriedades de permanência a respeito da solução suave das equações de Euler no espaço \mathbb{R}^3 e das soluções fracas das equações de Navier-Stokes em um domínio exterior. Isto significa que os resultados aqui obtidos evidenciam características gerais das referidas soluções, podendo ser úteis em outras situações e com outras finalidades.

3.1 Velocidade invíscida no espaço todo

Seja (u, p) a solução do sistema (E) associada a um dado inicial suave u_0 , suponhamos que $\omega_0 = \text{rot } u_0$ possua suporte compacto e denotemos por $T^* > 0$ o tempo de existência da referida solução. Fixemos $T \in (0, T^*)$ e recordemos que o par (u, p) usufrui das propriedades listadas no Teorema 1.17. Esta seção é dedicada ao estudo do comportamento de u , $\partial_t u$ e ∇u no infinito. Para isto, começamos com um lema que será importante tanto nesta seção quanto posteriormente.

Lema 3.1 *Consideremos um campo vetorial $\Phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$ tal que $\int_{\mathbb{R}^3} \Phi(y) dy = 0$, e seja $M > 0$ de modo que $\text{supp}(\Phi) \subset \overline{B}_M(0)$. Então existe $C > 0$ tal que*

$$\left| \int_{\mathbb{R}^3} \frac{(x-y)}{|x-y|^3} \times \Phi(y) dy \right| \leq \frac{C}{|x|^3},$$

sempre que $x \in \mathbb{R}^3$ e $|x| \geq 2M$.

Demonstração: Seja $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$ o campo vetorial definido por $g(x) = \frac{x}{|x|^3}$ e fixemos $x \in \mathbb{R}^3$ tal que $|x| \geq 2M$ e $y \in \bar{B}_M(0)$. Vejamos que o conjunto $[x, x-y] = \{(1-t)x + t(x-y); 0 \leq t \leq 1\}$ está contido em $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Com efeito, se isto não ocorresse, existiria $t_0 \in [0, 1]$ tal que

$$0 = (1-t_0)x + t_0(x-y) = x - t_0x + t_0x - t_0y = x - t_0y$$

e, portanto, teríamos $|x| = |t_0y| \leq M$. Assim, pela Fórmula de Taylor com resto de Lagrange, existe $\theta \in (0, 1)$ de forma que

$$g(x-y) = g(x) + Dg(x-\theta y)(-y).$$

Uma vez que

$$\begin{aligned} \partial_1 g(z) &= \left(\frac{-2z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}{|z|^5}, \frac{-3z_1z_2}{|z|^5}, \frac{-3z_1z_3}{|z|^5} \right), \\ \partial_2 g(z) &= \left(\frac{-3z_1z_2}{|z|^5}, \frac{z_1^2 - 2z_2^2 + z_3^2}{|z|^5}, \frac{-3z_2z_3}{|z|^5} \right) \end{aligned}$$

e

$$\partial_3 g(z) = \left(\frac{-3z_1z_3}{|z|^5}, \frac{-3z_2z_3}{|z|^5}, \frac{z_1^2 + z_2^2 - 2z_3^2}{|z|^5} \right)$$

para cada $z = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, e $y \in \bar{B}_M(0)$ foi tomado arbitrariamente, obtemos

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^3} \frac{(x-y)}{|x-y|^3} \times \Phi(y) dy \right| &= \left| \int_{\bar{B}_M(0)} Dg(x-\theta y)(-y) \times \Phi(y) dy \right| \\ &\leq C \int_{\bar{B}_M(0)} \frac{|\Phi(y)|}{|x-\theta y|^3} dy \\ &\leq \frac{C}{|x|^3}, \end{aligned}$$

onde também utilizamos as relações

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{x}{|x|^3} \times \Phi(y) dy = 0$$

e

$$|x - \theta y| \geq |x| - \theta|y| \geq |x| - \frac{|x|}{2} = \frac{|x|}{2}.$$

Consequentemente, segue o resultado. \square

A seguir, generalizaremos um argumento simples utilizado na demonstração do Lema 3.1 e que será importante no decorrer do texto.

Observação 3.2 *Consideremos uma função $h \in C_c(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}_+)$ e seja $M > 0$ tal que $\text{supp}(h) \subset B_M(0)$. Dado $\alpha \geq 1$, afirmamos que existe $C > 0$ de forma que*

$$\int_{\bar{B}_M(0)} \frac{h(y)}{|x-y|^\alpha} dy \leq \frac{C}{|x|^\alpha}$$

sempre que $x \in \mathbb{R}^3$ e $|x| > 2M$.

De fato, argumentando como na demonstração do Lema 3.1, concluímos que $|x-y| > \frac{|x|}{2}$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^2$ tais que $|x| > 2M \geq 2|y|$. Portanto, obtemos

$$\int_{\bar{B}_M(0)} \frac{h(y)}{|x-y|^\alpha} dy \leq \int_{\bar{B}_M(0)} h(y) \left(\frac{2}{|x|}\right)^\alpha dy = \left(2^\alpha \int_{\bar{B}_M(0)} h(y) dy\right) \frac{1}{|x|^\alpha}.$$

Assim como no Capítulo 1, continuamos com a notação $\omega(x, t) = (\text{rot } u)(x, t)$ para todo $(x, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, T]$. No próximo resultado, contaremos com a parte mais interessante do Teorema 1.17, a saber:

$$\{r > 0; \text{supp}(\omega) \subset \bar{B}_r(0) \times [0, T]\} \neq \emptyset.$$

Proposição 3.3 *Seja $M > 0$ tal que $\text{supp}(\omega(\cdot, t)) \subset \bar{B}_M(0)$ para todo $t \in [0, T]$.*

Então existe $C > 0$ de forma que

$$(a) \quad |u(x, t)| \leq \frac{C}{|x|^2};$$

$$(b) \quad |\partial_t u(x, t)| \leq \frac{C}{|x|^3};$$

$$(c) \quad |\nabla u(x, t)| \leq \frac{C}{|x|^3},$$

sempre que $|x| \geq 2M$ e $t \in [0, T]$.

Demonstração:

(a) Como $\omega \in L^\infty(0, T; L^1(\mathbb{R}^3))$ (Teorema 1.17) e valem as estimativas

$$\begin{aligned} |u(x, t)| &= \left| \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{(x-y)}{|x-y|^3} \times \omega(y, t) dy \right| \\ &\leq \frac{1}{4\pi} \int_{\bar{B}_M(0)} \frac{|\omega(y, t)|}{|x-y|^2} dy \\ &\leq \left(\frac{1}{\pi} \int_{\bar{B}_M(0)} |\omega(y, t)| dy \right) \frac{1}{|x|^2} \end{aligned}$$

sempre que $x \in \mathbb{R}^3$ e $|x| \geq 2M$ (veja a Observação 3.2), já temos a primeira parte desta proposição.

(b) Seja ψ o campo-corrente associado a u , como na Proposição 1.18. Nesse caso, $u = \text{rot } \psi$ e

$$\begin{aligned} \partial_t u = \text{rot } (\partial_t \psi) &= \text{rot} \left(\frac{-1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{(\omega \nabla u - u \nabla \omega)(y)}{|x-y|} dy \right) \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{\bar{B}_M(0)} \frac{(x-y)}{|x-y|^3} \times (\omega \nabla u - u \nabla \omega)(y) dy, \end{aligned}$$

pois a evolução de ω é regida pela equação

$$\partial_t \omega + u \nabla \omega = \omega \nabla u$$

e

$$x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{B}_{2M}(0) \mapsto \frac{-1}{4\pi} \int_{\bar{B}_M(0)} \frac{(\omega \nabla u - u \nabla \omega)(y)}{|x-y|} dy \in \mathbb{R}^3$$

é uma aplicação de classe C^∞ . Consequentemente, à luz do Lema 3.1 e da continuidade uniforme (e, portanto, limitação) da função

$$t \in [0, T] \mapsto \int_{\bar{B}_M(0)} |(\omega \nabla u - u \nabla \omega)(y, t)| dy \in \mathbb{R},$$

basta provar que $\int_{\mathbb{R}^3} (\omega \nabla u - u \nabla \omega)(y, t) dy = 0$ para cada $t \in [0, T]$. Com efeito, a condição $\text{div} \omega = 0$ implica

$$\omega \nabla u = \sum_{i=1}^3 \omega_i \partial_i u = \sum_{i=1}^3 \partial_i (\omega_i u)$$

e, portanto, fixando $R > M$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^3} \omega \nabla u dx = \sum_{i=1}^3 \int_{B_R(0)} \partial_i(\omega_i u) = - \sum_{i=1}^3 \int_{B_R(0)} (\omega_i u) \partial_i(1) dx = 0,$$

já que $\omega(x, t) = 0$ para todo $(x, t) \in S_R(0) \times [0, T]$. Finalmente, trocando os papéis de ω e u na argumentação que acabamos de apresentar, também obtemos $\int_{\mathbb{R}^3} u \nabla \omega dx = 0$ e chegamos à segunda estimativa do enunciado.

(c) Fixando $x \in \mathbb{R}^3$ de modo que $|x| \geq 2M$ e utilizando a Proposição 1.19, vem que

$$\begin{aligned} [\nabla u(x)]\xi &= -\text{PV} \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{\omega(y) \times \xi}{4\pi|x-y|^3} + \frac{3\{[(x-y) \times \omega(y)] \otimes (x-y)\}\xi}{4\pi|x-y|^5} \right) dy \\ &= -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x-y| \geq \varepsilon} \left(\frac{\omega(y) \times \xi}{4\pi|x-y|^3} + \frac{3\{[(x-y) \times \omega(y)] \otimes (x-y)\}\xi}{4\pi|x-y|^5} \right) dy \\ &= -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\{|x-y| \geq \varepsilon\} \cap \{|y| \leq M\}} \left(\frac{\omega(y) \times \xi}{4\pi|x-y|^3} \right) dy \\ &\quad - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\{|x-y| \geq \varepsilon\} \cap \{|y| \leq M\}} \left(\frac{3\{[(x-y) \times \omega(y)] \otimes (x-y)\}\xi}{4\pi|x-y|^5} \right) dy \end{aligned}$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^3$.

Por outro lado, é importante destacar que se $\varepsilon \in (0, M)$, então

$$|x-y| \geq \frac{|x|}{2} \geq M > \varepsilon$$

para todo $y \in \bar{B}_M(0)$, ou seja,

$$\{y \in \bar{B}_M(0); |y-x| \geq \varepsilon\} = \bar{B}_M(0)$$

para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Utilizando esta última afirmação, a Observação 3.2 e passando o limite quando $\varepsilon \rightarrow 0$ nas relações

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\{|x-y| \geq \varepsilon\} \cap \{|y| \leq M\}} \left(\frac{\omega(y) \times \xi}{4\pi|x-y|^3} + \frac{3\{[(x-y) \times \omega(y)] \otimes (x-y)\}\xi}{4\pi|x-y|^5} \right) dy \right| \\ &\leq \int_{\{|x-y| \geq \varepsilon\} \cap \{|y| \leq M\}} \left| \frac{\omega(y) \times \xi}{4\pi|x-y|^3} + \frac{3\{[(x-y) \times \omega(y)] \otimes (x-y)\}\xi}{4\pi|x-y|^5} \right| dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{|y| \leq M} \left| \frac{\omega(y) \times \xi}{4\pi|x-y|^3} + \frac{3\{[(x-y) \times \omega(y)] \otimes (x-y)\}\xi}{4\pi|x-y|^5} \right| dy \\
&\leq \left(\frac{1}{4\pi} \int_{|y| \leq M} \frac{|\omega(y)|}{|x-y|^3} dy \right) |\xi| \\
&\leq \frac{C}{|x|^3} |\xi|,
\end{aligned}$$

vem que

$$[\nabla u(x)]\xi \leq \frac{C}{|x|^3} |\xi|$$

para quaisquer $x, \xi \in \mathbb{R}^3$, com $|x| \geq 2M$. Com isso, todas as afirmações do enunciado estão devidamente demonstradas. □

Observação 3.4 *A continuidade de cada campos envolvidos na Proposição 3.3 permite estender as estimativas lá obtidas para todo $(x, t) \in (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) \times [0, T]$.*

Informamos que a Proposição 3.3 tem um papel crucial na seção subsequente, que é dedicada ao estudo do decaimento da pressão das equações de Euler no infinito.

3.2 Comportamento da pressão

Assim como na seção anterior, continuemos com a solução (u, p) das equações de Euler em \mathbb{R}^3 , com as propriedades destacadas no Teorema 1.17. O objetivo da presente seção é demonstrar que, para cada $t \in (0, T]$, existe $p_\infty = p_\infty(t) \in \mathbb{R}$ tal que a função escalar $p - p_\infty$ decai no infinito. Visando a este propósito, começamos estudando o comportamento de ∇p no infinito.

Proposição 3.5 *Fixemos $T \in (0, T^*)$. Então existe uma constante $C > 0$ (que não depende de $t \in (0, T]$) de forma que*

$$|\nabla p(x, t)| \leq \frac{C}{|x|^3}$$

para todo $(x, t) \in (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) \times (0, T]$.

Demonstração: Inicialmente, recordemos a primeira equação do sistema (E)

$$\nabla p = -\partial_t u - u \nabla u.$$

Pelos itens (a) e (c) da Proposição 3.3, existe $C > 0$ tal que

$$|(u \nabla u)(x, t)| \leq |u(x, t)| |\nabla u(x, t)| \leq \frac{C}{|x|^5}$$

para todo $(x, t) \in (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) \times [0, T]$. Assim, também utilizando a estimativa (b) da referida proposição, temos

$$|\nabla p(x, t)| \leq |\partial_t u(x, t)| + |(u \nabla u)(x, t)| \leq \frac{C}{|x|^3} + \frac{C}{|x|^5}$$

para todo $(x, t) \in (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) \times [0, T]$, o que fornece o desejado. \square

A proposição 3.5 sugere que a pressão p das equações de Euler se comporte como a função $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \mapsto \frac{1}{|x|^2} \in \mathbb{R}$ no infinito. A partir de agora, baseados nesta colocação intuitiva, visamos a atribuir um significado rigoroso para esta idéia. O primeiro passo é ver que a função p , restrita a qualquer reta em \mathbb{R}^3 que passa pela origem, possui um comportamento assintótico no infinito. Mais precisamente, temos o

Lema 3.6 *Seja $\bar{y} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Então o limite*

$$L = \lim_{\theta \rightarrow \infty} p(\theta \bar{y})$$

existe e é finito.

Demonstração: Consideremos uma sequência de números reais positivos $(\theta_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que $\theta_n \rightarrow \infty$. Fixemos $m, n \in \mathbb{N}$ arbitrariamente e digamos que $\theta_n < \theta_m$ (isto implica $|\theta_n \bar{y}| < |\theta_m \bar{y}|$). Assim, definindo o caminho retilíneo $\sigma_{mn}(s) = s \bar{y}$ ($s \in [\theta_n, \theta_m]$), aplicando o teorema fundamental do cálculo para integrais curvilíneas e utilizando a Proposição 3.5, chegamos a

$$|p(\theta_m \bar{y}) - p(\theta_n \bar{y})| = \left| \int_{\sigma_{m,n}} \nabla p \cdot dr \right|$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \int_{\theta_n}^{\theta_m} \nabla p(\sigma_{mn}(s)) \cdot \sigma'_{mn}(s) ds \right| \\
&\leq \int_{\theta_n}^{\theta_m} |\nabla p(s\bar{y})| |\bar{y}| ds \\
&\leq \int_{\theta_n}^{\theta_m} \frac{C}{s^3 |\bar{y}|^3} |\bar{y}| ds \\
&= \frac{C}{2|\bar{y}|^2} \left(\frac{1}{\theta_n^2} - \frac{1}{\theta_m^2} \right),
\end{aligned}$$

o que nos diz que $(p(\theta_n \bar{y}))_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy em \mathbb{R} . Ponhamos $L_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} p(\theta_n \bar{y})$. Para concluir a demonstração deste lema, é suficiente verificar que o limite L_1 não depende da sequência $(\theta_n)_{n=1}^{\infty}$ que foi tomada inicialmente. Com efeito, seja $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ uma outra sequência de números reais positivos que tende a infinito quando $n \rightarrow \infty$. É evidente que o mesmo argumento que apresentamos para sequência $(\theta_n)_{n=1}^{\infty}$ também garante que

$$|p(\lambda_m \bar{y}) - p(\lambda_n \bar{y})| \leq \frac{C}{2|\bar{y}|^2} \left| \frac{1}{\lambda_n^2} - \frac{1}{\lambda_m^2} \right|$$

para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$. Ponhamos $L_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} p(\lambda_n \bar{y})$ e vejamos que $L_1 = L_2$. Realmente, fixando $n \in \mathbb{N}$ arbitrariamente e trocando θ_m por λ_n na primeira estimativa apresentada nesta demonstração, concluímos de maneira inteiramente análoga que

$$|p(\theta_n \bar{y}) - p(\lambda_n \bar{y})| \leq \frac{C}{2|\bar{y}|^2} \left| \frac{1}{\theta_n^2} - \frac{1}{\lambda_n^2} \right|.$$

Finalmente, a desigualdade

$$|L_1 - L_2| \leq |L_1 - p(\theta_n \bar{y})| + |p(\theta_n \bar{y}) - p(\lambda_n \bar{y})| + |p(\lambda_n \bar{y}) - L_2|,$$

válida para todo $n \in \mathbb{N}$, estabelece o resultado. \square

Como já dissemos, a interpretação geométrica do Lema 3.6 é que a função p , restrita a retas em \mathbb{R}^3 que passam pela origem, tem um comportamento assintótico no infinito. Entretanto, tal comportamento depende, *a priori*, de cada reta fixada. Com isso, a pergunta natural é se este é realmente o caso. A resposta para esta questão é exatamente o conteúdo do

Lema 3.7 *Sejam \bar{y} e \bar{z} dois vetores em $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Então*

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} p(\theta\bar{y}) = \lim_{\theta \rightarrow \infty} p(\theta\bar{z}).$$

Demonstração: O caso em que $\bar{z} = \alpha\bar{y}$, para algum $\alpha > 0$, segue diretamente do Lema 3.6. Dessa forma, ponhamos $L = \lim_{\theta \rightarrow \infty} p(\theta\bar{y})$, $M = \lim_{\theta \rightarrow \infty} p(\theta\bar{z})$ e abordemos a situação complementar. Sem perda de generalidade, suponhamos que $|\bar{y}| \geq |\bar{z}|$. Fixemos $\theta > 0$, denotemos por \mathcal{S} a esfera centrada na origem de \mathbb{R}^3 , com raio $\theta|\bar{z}|$, e consideremos a geodésica minimizante em \mathcal{S} que liga o ponto $\theta\bar{z}$ ao ponto $q = q_\theta = \frac{\theta|\bar{z}|}{|\bar{y}|}\bar{y}$ (observemos que a referida curva é única quando $\theta\bar{z}$ e q não são antipodais). Utilizando a notação usual $T_q\mathcal{S}$ para o plano tangente a \mathcal{S} no ponto q , tomemos $v = v_\theta \in T_q\mathcal{S}$ de modo que

$$\sigma_1(s) = (\text{sen}(s))q + (\text{cos}(s))\theta|\bar{z}|v,$$

com $s \in [s_1, s_2] \subset [0, 2\pi]$, seja uma parametrização do arco de geodésica supramencionado (veja o Exemplo 3 da página 294 de [4]).

Agora, consideremos o caminho retilíneo $\sigma_2(s) = s\bar{y}$, com $s \in \left[\frac{\theta|\bar{z}|}{|\bar{y}|}, \theta\right]$, que liga o ponto $q \in \mathcal{S}$ ao ponto $\theta\bar{y}$ (observemos que o traço deste caminho se degenera em um único ponto se $|\bar{y}| = |\bar{z}|$).

Posto que o teorema fundamental do cálculo para integrais curvilíneas implica as relações

$$\begin{aligned} p(\theta\bar{y}) - p(\theta\bar{z}) &= [p(q) - p(\theta\bar{z})] + [p(\theta\bar{y}) - p(q)] \\ &= \int_{\sigma_1} \nabla p \cdot dr + \int_{\sigma_2} \nabla p \cdot dr, \end{aligned}$$

utilizamos a Proposição 3.5 para chegarmos às duas estimativas

$$\begin{aligned} \left| \int_{\sigma_1} \nabla p \cdot dr \right| &\leq \int_{s_1}^{s_2} |\nabla p(\sigma_1(s))| |\sigma_1'(s)| ds \\ &\leq \int_{s_1}^{s_2} \frac{C}{|\sigma_1(s)|^3} \theta|\bar{z}| ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{s_1}^{s_2} \frac{C}{\theta^3 |\bar{z}|^3} \theta |\bar{z}| ds \\
&= \frac{C}{\theta^2 |\bar{z}|^2} (s_2 - s_1) \\
&\leq \frac{2\pi C}{\theta^2 |\bar{z}|^2}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\sigma_2} \nabla p \cdot dr \right| &\leq \int_{\theta \frac{|\bar{z}|}{|\bar{y}|}}^{\theta} |\nabla p(\sigma_2(s))| |\sigma_2'(s)| ds \\
&\leq \int_{\theta \frac{|\bar{z}|}{|\bar{y}|}}^{\theta} \frac{C}{|\sigma_2(s)|^3} |\bar{y}| ds \\
&= \int_{\theta \frac{|\bar{z}|}{|\bar{y}|}}^{\theta} \frac{C}{s^3 |\bar{y}|^3} |\bar{y}| ds \\
&= \frac{C}{2\theta^2 |\bar{y}|} \left(\frac{|\bar{y}|^2}{|\bar{z}|^2} - 1 \right),
\end{aligned}$$

o que fornece

$$|p(\theta\bar{y}) - p(\theta\bar{z})| \leq \left[\frac{2\pi C}{|\bar{z}|^2} + \frac{C}{2|\bar{y}|} \left(\frac{|\bar{y}|^2}{|\bar{z}|^2} - 1 \right) \right] \frac{1}{\theta^2}.$$

Consequentemente, passando o limite quando $\theta \rightarrow \infty$ em ambos os membros desta última desigualdade, concluímos que $L = M$. \square

Observação 3.8 Definamos $p_\infty = p_\infty(x, t) = \lim_{\theta \rightarrow \infty} p(\theta x, t)$ para cada $(x, t) \in (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) \times [0, T]$. Em vista do Lema 3.7, p_∞ não depende de $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Consideremos a função $\bar{p}(x, t) = p(x, t) - p_\infty(t)$. O objetivo da próxima proposição é demonstrar que $\bar{p} = \mathcal{O}(|x|^{-2})$ quando $|x| \rightarrow \infty$.

Proposição 3.9 Com as notações acima, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|\bar{p}(x, t)| \leq \frac{C}{|x|^2}$$

sempre que $(x, t) \in (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) \times [0, T]$.

Demonstração: Fixemos $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Argumentando como nos Lemas 3.6 e 3.7, e utilizando a Proposição 3.5, concluímos facilmente que

$$\begin{aligned} |p(\theta x) - p(x)| &= \left| \int_1^\theta \nabla p(sx) \cdot x ds \right| \\ &\leq \int_1^\theta \frac{C}{s^3|x|^3} |x| ds \\ &= \frac{C}{2|x|^2} \left(1 - \frac{1}{\theta^2} \right) \end{aligned}$$

para cada $\theta > 1$. Portanto, utilizando a Observação 3.8 e passando o limite quando $\theta \rightarrow \infty$ na estimativa que acabamos de obter, vem imediatamente que

$$|\bar{p}(x)| = |p(x) - p_\infty| \leq \frac{C}{2|x|^2},$$

o que finaliza a demonstração. □

Observação 3.10 *Como o par (u, p) soluciona o sistema (E), é claro que o mesmo é verdadeiro para (u, \bar{p}) . No restante deste texto (e principalmente no Capítulo 4), este último é o par no qual estamos interessados, uma vez que o decaimento de \bar{p} no infinito (Proposição 3.9) é um fato crucial para os nossos propósitos.*

3.3 Comportamento do campo-corrente

Como na Seção 3.1, denotamos por ψ o campo-corrente associado à velocidade u das equações de Euler (veja a Proposição 1.18). O intuito da presente seção é analisar o comportamento de ψ e de suas primeiras derivadas no infinito. Para tanto começamos apresentando o seguinte fato geral:

Lema 3.11 *Seja $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$ e consideremos $M > 0$ de forma que $\text{supp}(f) \subset \bar{B}_M(0)$. Então existe $C > 0$ tal que*

$$\left| \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(y)}{|x-y|} dy - \frac{1}{|x|} \int_{\mathbb{R}^3} f(y) dy \right| \leq \frac{C}{|x|^2}$$

sempre que $x \in \mathbb{R}^3$, com $|x| > 2M$.

Demonstração: Seja $g \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}; \mathbb{R})$ a função definida por $g(x) = \frac{1}{|x|}$. Fixemos $x \in \mathbb{R}^3$, com $|x| > 2M$, e $y \in \bar{B}_M(0)$. Argumentando como na demonstração do Lema 3.1, concluímos que

$$[x, x - y] = \{(1 - t)x + t(x - y); t \in [0, 1]\} \subset \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}.$$

Dessa forma, utilizando a fórmula de Taylor com resto de Lagrange, obtemos $\theta \in (0, 1)$ de modo que

$$\begin{aligned} \frac{1}{|x - y|} &= g(x - y) \\ &= g(x) + dg(x - \theta y)(-y) \\ &= \frac{1}{|x|} + \frac{(x - \theta y) \cdot y}{|x - \theta y|^3}, \end{aligned}$$

uma vez que $\partial_i g(z) = \frac{z_i}{|z|^3}$ para cada $z = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ ($i \in \{1, 2, 3\}$). Logo, como y foi fixado arbitrariamente, vem que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(y)}{|x - y|} dy - \frac{1}{|x|} \int_{\mathbb{R}^3} f(y) dy \right| &= \left| \int_{\bar{B}_M(0)} \frac{(x - \theta y) \cdot y}{|x - \theta y|^3} \right| \\ &\leq \int_{\bar{B}_M(0)} \frac{dy}{|x - \theta y|^2}. \end{aligned}$$

Estando em posse desta última estimativa e argumentando novamente como na demonstração do Lema 3.1, segue imediatamente o que pretendíamos demonstrar.

□

Embora seja básico, o Lema 3.1 foi crucial para aperfeiçoarmos a estimativa pontual aguardada para o campo $\partial_t u$, questão descrita detalhadamente na Proposição 3.3(b). Do mesmo modo, salientamos que o Lema 3.11 exerce um papel semelhante na obtenção do decaimento de $\partial_t \psi$ no infinito.

Proposição 3.12 *Seja $\omega = \text{rot } u$, fixemos $T \in (0, T^*)$ e consideremos $M > 0$ de modo que $\text{supp}(\omega(\cdot, t)) \subset \bar{B}_M(0)$ para todo $t \in [0, T]$. Então existe $C > 0$ tal que*

$$(a) \quad |\psi(x, t)| \leq \frac{C}{|x|};$$

$$(b) \quad |\partial_t \psi(x, t)| \leq \frac{C}{|x|^2};$$

$$(c) \quad |\nabla \psi(x, t)| \leq \frac{C}{|x|^2}$$

sempre que $x \in \mathbb{R}^3$, com $|x| > 2M$, e $t \in (0, T]$.

Demonstração:

(a) Como

$$\psi(x, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\bar{B}_M(0)} \frac{\omega(y, t)}{|x - y|} dy$$

para todo $(x, t) \in (\mathbb{R}^3 \setminus \bar{B}_{2M}(0)) \times [0, T]$ e a função

$$t \in [0, T] \longmapsto \int_{\bar{B}_M(0)} |\omega(y, t)| dy \in \mathbb{R}$$

é uniformemente contínua, a conclusão desta parte segue imediatamente da Observação 3.2.

(b) A expressão integral de ψ obtida na Proposição 1.18 (também relembra acima) e a equação da vorticidade $\partial_t \omega + \mathbf{u} \nabla \omega = \omega \nabla \mathbf{u}$ implicam

$$\partial_t \psi(x, t) = \frac{-1}{4\pi} \int_{\bar{B}_M(0)} \frac{(\omega \nabla \mathbf{u} - \mathbf{u} \nabla \omega)(y, t)}{|x - y|} dy$$

para cada $(x, t) \in (\mathbb{R}^3 \setminus \bar{B}_{2M}(0)) \times (0, T]$. Recordamos que, na demonstração da Proposição 3.3(b), verificamos a relação

$$\int_{\bar{B}_M(0)} (\omega \nabla \mathbf{u} - \mathbf{u} \nabla \omega)(y, t) dy = 0$$

para todo $t \in (0, T]$. Logo, o resultado desejado segue do Lema 3.11, da Observação 3.2 e do fato de a função

$$t \in [0, T] \longmapsto \int_{\bar{B}_M(0)} |(\omega \nabla \mathbf{u} - \mathbf{u} \nabla \omega)(y, t)| dy \in \mathbb{R}$$

ser uniformemente contínua (e, portanto, limitada).

(c) Uma vez que

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{|x-y|} \right) = \frac{-(x_i - y_i)}{|x-y|^3}$$

para cada $(x, y) \in (\mathbb{R}^3 \setminus \bar{B}_{2M}(0)) \times \bar{B}_M(0)$ ($i \in \{1, 2, 3\}$), chegamos a

$$|\partial_i \psi(x, t)| = \left| \int_{\bar{B}_M(0)} \frac{x_i - y_i}{|x-y|^3} \omega(y, t) dy \right| \leq \int_{\bar{B}_M(0)} \frac{|\omega(y, t)|}{|x-y|^2}$$

para todo $(x, t) \in (\mathbb{R}^3 \setminus \bar{B}_{2M}(0)) \times [0, T]$. Nesse caso, a estimativa procurada é uma consequência direta da Observação 3.2.

□

3.4 Soluções fracas de Leray-Hopf em um domínio exterior

Assim como no Capítulo 2 deste trabalho, consideramos um aberto limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, que possua fronteira suave. Ainda como naquela ocasião, ponhamos $\Pi = \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$ e $\Pi_T = \Pi \times [0, T]$. A finalidade da presente seção é ajustar a Observação 2.6 de modo a estendê-la para campos-teste que não possuam suporte compacto, mas apresentem um decaimento razoável no infinito. Esta nova formulação é realmente necessária em vista do que desejamos apresentar no Capítulo 4.

Inicialmente, seja $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3; [0, 1])$ tal que

$$\eta(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| \leq 1, \\ 0 & \text{se } |x| \geq 2, \end{cases}$$

e, para cada $s > 0$, definamos $\eta_s(x) = \eta\left(\frac{x}{s}\right)$ ($x \in \mathbb{R}^3$). No próximo resultado, discutiremos algumas propriedades essenciais da família de campos suaves $\{\eta_s; s > 0\}$ que acabamos de introduzir.

Lema 3.13 *Com as notações fixadas acima, são válidas as seguintes afirmações:*

- (a) Se F é um campo suave em $\Pi \subset \mathbb{R}^3$ e pertence a $W^{1,2}(\Pi)$, então a família de campos $\{\eta_s F; s > 0\}$ converge a F em $W^{1,2}(\Pi)$ quando $s \rightarrow \infty$;
- (b) Para cada $a \in (3, \infty]$, a família de campos vetoriais $\{\nabla \eta_s; s > 0\}$ converge a 0 em $L^a(\Pi)$ quando $s \rightarrow \infty$.

Além disso, suponhamos que $G : \mathbb{R}^3 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3$ seja um campo suave, e admitamos que existam $C_1 > 0$ e $\alpha > 0$ tais que

$$|G(x, t)| \leq \frac{C_1}{|x|^\alpha}$$

para todo $(x, t) \in (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) \times [0, T]$. Então existe $C_2 > 0$ de modo que:

(c) $\|\partial_i \eta_s G(\cdot, t)\|_{L^2(\Pi)} \leq \frac{C_2}{s^{\alpha - \frac{1}{2}}}$ para todo $t \in [0, T]$, onde $i \in \{1, 2, 3\}$;

(d) $\|\partial_{ij}^2 \eta_s G(\cdot, t)\|_{L^2(\Pi)} \leq \frac{C_2}{s^{\alpha + \frac{1}{2}}}$ sempre que $t \in [0, T]$, onde $i, j \in \{1, 2, 3\}$;

(e) Se $\alpha > \frac{3}{2}$, então $\|\eta_s G(\cdot, t) - G(\cdot, t)\|_{L^2(\Pi)} \leq \frac{C_2}{s^{\alpha - \frac{3}{2}}}$ para todo $t \in [0, T]$.

Demonstração: Em primeiro lugar, fixemos $s_0 > 0$ tal que $\Omega \subset B_{s_0}(0)$ sempre que $s \geq s_0$. Nesta demonstração, todos os argumentos se referem a campos η_s indexados com $s \geq s_0$.

- (a) Seja $x \in \Pi$ e tomemos $s_1 \geq s_0$ de modo que $x \in B_s(0)$ para cada $s \geq s_1$. Nesse caso,

$$\eta_s(x)F(x) \rightarrow F(x)$$

e

$$\partial_i(\eta_s F)(x) \rightarrow \partial_i F(x) \quad (i = 1, 2, 3)$$

quando $s \rightarrow \infty$, uma vez que $\eta_s(x) = 1$ e $\partial_i \eta_s(x) = 0$ para todo $s \geq s_1$. Além disso,

$$|\eta_s(x)F(x)| = |\eta_s(x)||F(x)| \leq |F(x)|$$

e

$$|\partial_i(\eta_s F)(x)| = |\partial_i \eta_s(x) F(x) + \eta_s(x) \partial_i F(x)| \leq C|F(x)| + |\partial_i F(x)|,$$

sendo $C > 0$ uma constante que não depende de $x \in \Pi$ e também não depende de $s \geq s_0$. Portanto, como tomamos $x \in \Pi$ arbitrariamente e $F \in W^{1,2}(\Pi)$, o teorema da convergência dominada implica a parte (a) do enunciado.

(b) Para cada $i \in \{1, 2, 3\}$, temos

$$\partial_i \eta_s(x) = \frac{1}{s} \partial_i \eta\left(\frac{x}{s}\right),$$

o que claramente implica $\|\nabla \eta_s\|_{L^\infty(\Pi)} \rightarrow 0$ quando $s \rightarrow \infty$. Além disso, a demonstração no caso em que $a \in (3, \infty)$ segue diretamente das relações

$$\begin{aligned} \int_{\Pi} |\partial_i \eta_s(x)|^a dx &= \int_{\mathbb{R}^3} \left| \partial_i \eta\left(\frac{x}{s}\right) \right|^a \frac{1}{s^a} dx \\ &= \frac{1}{s^{a-3}} \int_{\mathbb{R}^3} \left| \partial_i \eta\left(\frac{x}{s}\right) \right|^a \frac{1}{s^3} dx = \frac{1}{s^{a-3}} \|\partial_i \eta\|_{L^a(\mathbb{R}^3)}^a, \end{aligned}$$

já que estas são válidas para todo $s \geq s_0$. Isto fornece a parte (b) do enunciado.

(c) Utilizando a mudança de variáveis $x = sy$ como no item (b), chegamos a

$$\begin{aligned} \int_{\Pi} |\partial_i \eta_s(x) G(x, t)|^2 dx &= \int_{s \leq |y| \leq 2s} \frac{1}{s^2} \left| \partial_i \eta\left(\frac{x}{s}\right) \right|^2 |G(x, t)|^2 dx \\ &\leq \int_{1 \leq |y| \leq 2} s |\partial_i \eta(y)|^2 |G(sy, t)|^2 dy \\ &\leq \int_{1 \leq |y| \leq 2} s |\partial_i \eta(y)|^2 \frac{C_1^2}{s^{2\alpha} |y|^{2\alpha}} dy \\ &\leq \frac{1}{s^{2\alpha-1}} \left(C_1^2 \int_{1 \leq |y| \leq 2} |\partial_i \eta(y)|^2 dy \right) \end{aligned}$$

para cada $i \in \{1, 2, 3\}$ e para cada $t \in [0, T]$, donde segue a condição (c) deste lema.

(d) Fixemos $i, j \in \{1, 2, 3\}$. Através da mesma mudança de variáveis da demonstração dos demais itens, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{\Pi} |\partial_{ij}^2 \eta_s(x) G(x, t)|^2 dx &= \int_{s \leq |x| \leq 2s} \frac{1}{s^4} \left| \partial_{ij}^2 \eta \left(\frac{x}{s} \right) \right|^2 |G(x, t)|^2 dx \\
&= \int_{1 \leq |y| \leq 2} \frac{1}{s} |\partial_{ij}^2 \eta(y)|^2 |G(sy, t)|^2 dy \\
&\leq \frac{1}{s} \int_{1 \leq |y| \leq 2} |\partial_{ij}^2 \eta(y)|^2 \frac{C_1^2}{s^{2\alpha} |y|^{2\alpha}} dy \\
&\leq \frac{1}{s^{2\alpha+1}} \left(C_1^2 \int_{1 \leq |y| \leq 2} |\partial_{ij}^2 \eta(y)|^2 dy \right)
\end{aligned}$$

para cada $t \in [0, T]$. Isto fornece a parte (d) do enunciado.

(e) Em primeiro lugar, destacamos que cálculos elementares garantem que

$$\int_{|y| \geq 1} \frac{dy}{|y|^{2\alpha}} = \frac{4\pi}{2\alpha - 3}$$

para todo $\alpha > \frac{3}{2}$. Logo,

$$\begin{aligned}
\int_{\Pi} |\eta_s(x) G(x, t) - G(x, t)|^2 dx &= \int_{|x| \geq s} \left| \left(\eta \left(\frac{x}{s} \right) - 1 \right) G(x, t) \right|^2 dx \\
&= \int_{|y| \geq 1} |\eta(y) - 1|^2 |G(sy, t)|^2 s^3 dy \\
&\leq \int_{|y| \geq 1} |\eta(y) - 1|^2 \frac{C_1^2}{s^{2\alpha} |y|^{2\alpha}} s^3 dy \\
&\leq \frac{CC_1^2}{s^{2\alpha-3}} \int_{|y| \geq 1} \frac{dy}{|y|^{2\alpha}} \\
&= \frac{1}{s^{2\alpha-3}} \left(\frac{4\pi CC_1^2}{2\alpha - 3} \right)
\end{aligned}$$

para todo $t \in [0, T]$, onde, novamente, foi utilizada a mudança de variáveis $x = sy$. Assim, todas as afirmações do enunciado já encontram-se demonstradas.

□

Agora, já estamos prontos para apresentar o resultado mais importante desta seção, que é também o último deste capítulo. Ressaltamos que este visa a obter conclusões análogas às aquelas que foram adquiridas na Observação 2.6(d), e que sua demonstração se refere a objetos tratados no Teorema 2.11. Sendo assim, fixamos $T > 0$, tomamos $v_0 \in H(\Pi)$ e consideramos o sistema (NS) em Π_T , com dado inicial v_0 e forçamento nulo. O referido teorema garante a existência de uma solução fraca $v : \Pi_T \rightarrow \mathbb{R}^3$ para o sistema mencionado (no sentido da Definição 2.1). Mediante estas colocações, temos a

Proposição 3.14 *Sejam $\tilde{\psi} : \mathbb{R}^3 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dois campos suaves satisfazendo as condições:*

- (a) *$\text{supp}(\tilde{\psi}) \subset (\mathbb{R}^3 \setminus \bar{B}) \times [0, T]$, onde B é uma bola aberta que contém Ω (salientamos que $\text{supp}(\tilde{\psi})$ não é necessariamente compacto);*
- (b) *$\text{div } F = 0$ e $\text{supp}(F)$ é um subconjunto compacto de Π ;*
- (c) *Existe uma constante $C_1 > 0$ tal que*

$$|\tilde{\psi}(x, t)| \leq \frac{C_1}{|x|},$$

$$|\nabla \tilde{\psi}(x, t)| \leq \frac{C_1}{|x|^2}$$

e

$$|\partial_t \tilde{\psi}(x, t)| \leq \frac{C_1}{|x|^2}$$

para todo $(x, t) \in (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) \times [0, T]$.

Seja $w = \text{rot } \tilde{\psi} + F$ e suponhamos que exista uma constante $C_2 > 0$ tal que

$$|w(x, t)| \leq \frac{C_2}{|x|^2},$$

$$|\nabla w(x, t)| \leq \frac{C_2}{|x|^3}$$

e

$$|\partial_t w(x, t)| \leq \frac{C_2}{|x|^3}$$

para todo $(x, t) \in (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) \times [0, T]$. Então

$$\begin{aligned} (v(\cdot, t)|w(\cdot, t))_{L^2(\Pi)} - (v_0|w(\cdot, 0))_{L^2(\Pi)} &= \int_0^t \int_{\Pi} [v \cdot \partial_t w - \nu \nabla v : \nabla w](x, \tau) dx d\tau \\ &+ \int_0^t \int_{\Pi} (v \nabla w) \cdot v dx d\tau \end{aligned}$$

para todo $t \in [0, T]$.

Demonstração: Fixando $s_0 > 0$ como no Lema 3.13, ponhamos

$$w_s := \text{rot}(\eta_s w) + F = \nabla \eta_s \times \tilde{\psi} + \eta_s \text{rot} \tilde{\psi} + F$$

para cada $s \geq s_0$. Claramente, $\{w_s; s \geq s_0\}$ é uma família de campos suaves que possuem divergente nulo (condição (b)) e cujos suportes são subconjuntos compactos de $\Pi \times [0, T]$ (condições (a) e (b)). Assim, pela Observação 2.6(a),(b), temos

$$\begin{aligned} (v(\cdot, t)|w_s(\cdot, t))_{L^2(\Pi)} - (v_0|w_s(\cdot, 0))_{L^2(\Pi)} &= \int_0^t \int_{\Pi} [v \cdot \partial_t w_s - \nu \nabla v : \nabla w_s](x, \tau) dx d\tau \\ &- \int_0^t \int_{\Pi} (v \nabla v) \cdot w_s dx d\tau \end{aligned}$$

para cada $t \in [0, T]$ e para cada $s \geq s_0$. A fim de obtermos a demonstração desta proposição, passamos o limite quando $s \rightarrow \infty$ em cada termo da relação que acabamos de exibir.

Afirmção 1: $\lim_{s \rightarrow \infty} (v(\cdot, t)|w_s(\cdot, t))_{L^2(\Pi)} = (v(\cdot, t)|w(\cdot, t))_{L^2(\Pi)}$ para cada $t \in [0, T]$.

Realmente, utilizando a desigualdade de energia (Teorema 2.11(a)), os decaimentos de $\tilde{\psi}$ e $\text{rot} \tilde{\psi}$ descritos no enunciado, e o Lema 3.13(c),(d), chegamos a

$$|(v(\cdot, t)|w_s(\cdot, t))_{L^2(\Pi)} - (v(\cdot, t)|w(\cdot, t))_{L^2(\Pi)}|$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \int_{\Pi} v(x, t) \cdot [\nabla \eta_s \times \tilde{\psi} + (\eta_s - 1) \text{rot } \tilde{\psi}] dx \right| \\
&\leq \|v(\cdot, t)\|_{L^2(\Pi)} \|\nabla \eta_s \times \tilde{\psi} + (\eta_s - 1) \text{rot } \tilde{\psi}\|_{L^2(\Pi)} \\
&\leq \|v_0\|_{L^2(\Pi)} (\|\nabla \eta_s \times \tilde{\psi}\|_{L^2(\Pi)} + \|(\eta_s - 1) \text{rot } \tilde{\psi}\|_{L^2(\Pi)}) \\
&\leq \|v_0\|_{L^2(\Pi)} \left(\frac{C}{\sqrt{s}} + \frac{C}{\sqrt{s}} \right) \\
&\leq \frac{C}{\sqrt{s}}
\end{aligned}$$

para cada $t \in [0, T)$, seguindo a Afirmação 1.

Afirmação 2: Para cada $t \in [0, T)$,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^t \int_{\Pi} (v \cdot \partial_t w_s) dx d\tau = \int_0^t \int_{\Pi} (v \cdot \partial_t w) dx d\tau.$$

De fato, observando que

$$\partial_t w_s = \nabla \eta_s \times \partial_t \tilde{\psi} + \eta_s \partial_t (\text{rot } \tilde{\psi}),$$

utilizando os decaimentos de $\partial_t \tilde{\psi}$ e $\partial_t w$ (hipótese), e recordando o Lema 3.13, concluímos que

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \|\nabla \eta_s \times \partial_t \tilde{\psi}\|_{L^2(\Pi)} = 0$$

e

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \|(\eta_s - 1) \partial_t (\text{rot } \tilde{\psi})\|_{L^2(\Pi)} = 0$$

uniformemente em $[0, T)$. Estes fatos e as relações

$$\begin{aligned}
&\left| \int_0^t \int_{\Pi} (v \cdot \partial_t w_s) dx d\tau - \int_0^t \int_{\Pi} (v \cdot \partial_t w) dx d\tau \right| \\
&\leq \int_0^t \int_{\Pi} |v| |\nabla \eta_s \times \partial_t \tilde{\psi} + (\eta_s - 1) \partial_t (\text{rot } \tilde{\psi})| dx d\tau \\
&\leq \|v_0\|_{L^2(\Pi)} \int_0^t \|\eta_s \times \partial_t \tilde{\psi}\|_{L^2(\Pi)}(\tau) d\tau \\
&\quad + \|v_0\|_{L^2(\Pi)} \int_0^t \|(\eta_s - 1) \partial_t (\text{rot } \tilde{\psi})\|_{L^2(\Pi)}(\tau) d\tau
\end{aligned}$$

(Teorema 2.11(a)), válidas para todo $t \in [0, T)$, demonstram a Afirmação 2.

Afirmação 3: $\lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^t \int_{\Pi} (\nabla v : \nabla w_s)(x, \tau) dx d\tau = \int_0^t \int_{\Pi} (\nabla v : \nabla w)(x, \tau) dx d\tau$
para todo $t \in [0, T)$.

Inicialmente, analisamos as relações

$$\nabla v : (\nabla w_s - \nabla w) = \sum_{i,j=1}^3 \partial_i v_j \partial_i (w_s^j - w^j) = \sum_{i=1}^3 \partial_i v \cdot \partial_i (w_s - w)$$

e

$$\partial_i w_s - \partial_i w = \partial_i (\nabla \eta_s) \times \tilde{\psi} + \nabla \eta_s \times \partial_i \tilde{\psi} + (\partial_i \eta_s) \text{rot } \tilde{\psi} + (\eta_s - 1) \partial_i (\text{rot } \tilde{\psi}) \quad (i=1,2,3).$$

Pelos decaimentos de $\tilde{\psi}$, $\nabla \tilde{\psi}$ e ∇w , assumidos no enunciado, podemos utilizar o Lema 3.13(c),(d),(e) para concluirmos que

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \|(\partial_i w_s - \partial_i w)(\cdot, \tau)\|_{L^2(\Pi)} = 0$$

uniformemente em $[0, T)$. Logo,

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^t \int_{\Pi} (\nabla v : \nabla w_s)(x, \tau) dx d\tau - \int_0^t \int_{\Pi} (\nabla v : \nabla w)(x, \tau) dx d\tau \right| \\ & \leq \sum_{i=1}^3 \int_0^t \int_{\Pi} |\partial_i v| |\partial_i (w_s - w)|(x, \tau) dx d\tau \\ & \leq \sum_{i=1}^3 \int_0^t \|\partial_i v(\cdot, \tau)\|_{L^2(\Pi)} \|\partial_i (w_s - w)(\cdot, \tau)\|_{L^2(\Pi)} dx d\tau \\ & \leq \sum_{i=1}^3 \left(\int_0^t \|\partial_i v(\cdot, \tau)\|_{L^2(\Pi)}^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \|\partial_i (w_s - w)(\cdot, \tau)\|_{L^2(\Pi)}^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq C \|v_0\|_{L^2(\Pi)} \sum_{i=1}^3 \left(\int_0^t \|\partial_i (w_s - w)(\cdot, \tau)\|_{L^2(\Pi)}^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

para todo $t \in [0, T)$ (utilizamos novamente a estimativa de energia do Teorema 2.11(a)), o que assegura a Afirmação 3.

Afirmação 4: Para cada $t \in [0, T)$,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^t \int_{\Pi} (v \nabla v) \cdot w_s dx d\tau = - \int_0^t \int_{\Pi} (v \nabla w) \cdot v dx d\tau.$$

Primeiramente, temos

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \int_{\Pi} (v \nabla v) \cdot w_s dx d\tau \\
&= \sum_{i=1}^3 \int_0^t \int_{\Pi} (v_i \partial_i v) \cdot w_s dx d\tau \\
&= \sum_{i=1}^3 \int_0^t \int_{\Pi} [v_i (\partial_i (v \cdot w_s) - v \cdot \partial_i w_s)] dx d\tau \\
&= \int_0^t \int_{\Pi} v \cdot \nabla (v \cdot w_s) dx d\tau \\
&\quad - \int_0^t \int_{\Pi} (v \nabla w_s) \cdot v dx d\tau \\
&= - \int_0^t \int_{\Pi} (v \nabla w_s) \cdot v dx d\tau,
\end{aligned}$$

pois como $(v \cdot w_s) \in L^1_{loc}(\Pi)$ e $\nabla(v \cdot w_s) \in L^2(\Pi)$, podemos utilizar a decomposição ortogonal do Teorema 1.5 para obtermos

$$\int_0^t \int_{\Pi} v \cdot \nabla (v \cdot w_s) dx d\tau = 0.$$

Consequentemente, lembrando novamente os decaimentos de $\tilde{\psi}$, $\nabla \tilde{\psi}$ e ∇w supostos no enunciado e utilizando o Lema 3.13(c),(d),(e), obtemos $C > 0$ (independente de $t \in [0, T]$) tal que

$$\begin{aligned}
& \left| \int_0^t \int_{\Pi} (v \nabla v) \cdot w_s dx d\tau + \int_0^t \int_{\Pi} (v \nabla w) \cdot v dx d\tau \right| \\
&= \left| \int_0^t \int_{\Pi} [v \nabla (w - w_s)] \cdot v dx d\tau \right| \\
&\leq \int_0^t \int_{\Pi} |v|^2 |\nabla w_s - \nabla w| dx d\tau \\
&\leq \int_0^t \|v(\cdot, \tau)\|_{L^4(\Pi)}^2 \|\nabla w_s - \nabla w\|_{L^2(\Pi)} d\tau \\
&\leq \frac{C}{s^{3/2}} \int_0^t \|v(\cdot, \tau)\|_{W^{1,2}(\Pi)}^2 d\tau \\
&\leq \frac{C\bar{C}}{s^{3/2}},
\end{aligned}$$

onde $\bar{C} > 0$ também não depende da variável temporal (veja o Lema 1.9, a Observação 1.10 e o Teorema 2.11)(a)). Assim, a Afirmação 4 já está verificada.

As quatro asserções vistas acima finalizam esta demonstração.

□

Capítulo 4

Domínios tridimensionais singularmente perturbados

Este capítulo é a parte central desta tese. Aqui, estamos interessados em estudar o comportamento assintótico de escoamentos incompressíveis tridimensionais com viscosidade pequena em torno de um obstáculo distante. Como dissemos na introdução, o presente trabalho é baseado em [21], onde foi desenvolvido um estudo detalhado sobre o comportamento limite de escoamentos incompressíveis bidimensionais e tridimensionais, com viscosidade pequena, quando os mesmos ocupam um domínio limitado com fronteira distante.

Assim como em [21], provamos, no nosso contexto, que o escoamento limite é regido pelas equações de Euler no espaço todo e descrevemos a taxa segundo a qual este comportamento assintótico é estabelecido. Além disso, como aqui e em [21] é examinado o efeito de considerarmos escoamentos com viscosidade pequena em domínios com fronteira distante, contrastamos as taxas de convergência resultantes dessas duas análises distintas.

Daqui em diante, consideramos um domínio limitado e suave $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^3$, e supomos que $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}_0$ seja conexo e simplesmente conexo. Além disso, para cada $R > 0$, utilizamos as notações $\Omega_R = \Omega_0 + (R, 0, 0)$, $\Pi_R = \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}_R$ e $\Gamma_R = \partial\Omega_R = \partial\Pi_R$.

4.1 Considerações e estimativas iniciais

Consideremos um campo vetorial $\omega_0 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$, com $\operatorname{div} \omega_0 = 0$. Pela Proposição 1.18, sabemos que

$$u_0(x) = \frac{-1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{(x-y)}{|x-y|^3} \times \omega_0(y) dy$$

é o único campo vetorial em $L^2(\mathbb{R}^3)$ tal que $\operatorname{div} u_0 = 0$ e $\operatorname{rot} u_0 = \omega_0$ (observamos ainda que $u_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$, tendo em vista o resultado da página 246 de [10]). Até o final deste texto, seja $u = u(x, t)$ a solução das equações de Euler incompressíveis em \mathbb{R}^3 , com dado inicial u_0 , consideremos o tempo $T^* > 0$ de existência desta solução e fixemos $T \in [0, T^*)$. Recordamos que esta solução $u = u(x, t)$ usufrui das propriedades descritas no Teorema 1.17. Agora, seja $\bar{p} = \bar{p}(x, t)$ a pressão associada a $u = u(x, t)$ como na Proposição 3.9 (veja também a Observação 3.10), isto é, (u, \bar{p}) é solução clássica do sistema

$$(E) \begin{cases} \partial_t u + (u \cdot \nabla)u + \nabla \bar{p} = 0 & \text{em } \mathbb{R}^3 \times (0, T); \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{em } \mathbb{R}^3 \times [0, T]; \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} |u(x, t)| = 0 & \text{para todo } t \in [0, T]; \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{em } \mathbb{R}^3, \end{cases}$$

onde $\bar{p} = \mathcal{O}(|x|^{-2})$ quando $|x| \rightarrow \infty$.

4.1.1 Aproximação para a solução das equações de Euler

Como nos capítulos anteriores, lembramos que

$$\mathcal{D}(\Pi_R) = \{\Psi \in C_c^\infty(\Pi_R); \operatorname{div} \Psi = 0 \text{ em } \Pi_R\},$$

$$H(\Pi_R) = \overline{\mathcal{D}(\Pi_R)}^{\|\cdot\|_{L^2(\Pi_R)}} = \{f \in L^2(\Pi_R); \operatorname{div} f = 0 \text{ e } f \cdot \hat{n}|_{\partial \Pi_R} = 0\}$$

e

$$H^1(\Pi_R) = \overline{\mathcal{D}(\Pi_R)}^{\|\cdot\|_{W^{1,2}(\Pi_R)}} = \{f \in W^{1,2}(\Pi_R); \operatorname{div} f = 0 \text{ e } f|_{\partial \Pi_R} = 0\}.$$

Nesta etapa, aproximamos a solução $u = u(x, t)$ de (E) por uma família de campos suaves $\{u^R; R > 0\}$ com respeito à norma de $L^\infty([0, T]; H^1(\Pi_R))$ e apresentamos um conjunto de estimativas que possibilitam o estudo do comportamento assintótico ao qual nos referimos no início deste capítulo. Com esta finalidade, fixamos $M_0 > 0$ tal que $\bar{\Omega}_0 \subset B_{M_0}(0)$ e consideramos uma função par $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}; [0, 1])$ satisfazendo as condições

$$\varphi(s) = \begin{cases} 1 & \text{se } |s| \geq 2M_0; \\ 0 & \text{se } |s| \leq M_0. \end{cases}$$

Agora, para cada $x \in \mathbb{R}^3$, ponhamos $\varphi^R(x) = \varphi(|x - (R, 0, 0)|)$, seja

$$\psi(x, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\omega(y, t)}{|x - y|} dy$$

($\omega = \text{rot } u$) o campo-corrente associado a $u = u(x, t)$ e definamos

$$u^R = u^R(x, t) = \text{rot } (\varphi^R(\psi + C_R)),$$

onde C_R é o campo vetorial constante dado por

$$C_R = \frac{-1}{4\pi R} \int_{\mathbb{R}^3} \omega_0(y) dy.$$

Observação 4.1 *Na Proposição 3.12(a) apresentamos um decaimento para o campo-corrente ψ no infinito. No entanto, a estimativa lá obtida não é suficiente para algumas das nossas finalidades. Destacamos que esta é a razão de termos introduzido o campo C_R .*

Observação 4.2 *A seguir, listaremos algumas propriedades básicas referentes aos campos pertencentes à família $\{u^R; R > 0\}$.*

(a) *Da definição da função φ , é claro que cada função φ^R satisfaz:*

$$\varphi^R(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x - (R, 0, 0)| \geq 2M_0; \\ 0 & \text{se } |x - (R, 0, 0)| \leq M_0. \end{cases}$$

Como

$$u^R = \nabla \varphi^R \times (\psi + C_R) + \varphi^R u \quad (R > 0),$$

cada u^R é um campo suave em \mathbb{R}^3 que se anula em uma vizinhança de Γ_R .

(b) $u^R(x, t) = u(x, t)$ sempre que $x \in \Pi_R$, $|x - (R, 0, 0)| \geq 2M_0$ e $t \geq 0$.

(c) Cada u^R ($R > 0$) possui divergente nulo, uma vez que estes campos são definidos como o rotacional de um campo suave.

(d) A derivada temporal de cada u^R ($R > 0$) se exprime como

$$\begin{aligned} \partial_t u^R &= \nabla \varphi^R \times \partial_t \psi + \varphi^R \partial_t u \\ &= \nabla \varphi^R \times \partial_t \psi - \varphi^R u \nabla u - \varphi^R \nabla \bar{p} \end{aligned}$$

em $\Pi_R \times (0, T)$.

Antes de verificarmos que $\|u^R - u\|_{L^\infty([0, T]; H^1(\Pi))} \rightarrow 0$ quando $R \rightarrow \infty$, necessitamos da desigualdade contida no

Lema 4.3 *Sejam $x, y \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ tais que $|x| \geq 2|y|$. Então*

$$\left| \frac{1}{|x - y|} - \frac{1}{|x|} \right| \leq \frac{4|y|}{|x|^2}.$$

Demonstração: Assim como no Lema 3.1, podemos obter $\theta \in (0, 1)$ de forma que

$$\frac{1}{|x - y|} - \frac{1}{|x|} = \frac{(x - \theta y) \cdot y}{|x - \theta y|^3}.$$

Uma vez que a relação $|x| \geq 2|y|$ implica $|x - \theta y| \geq \frac{|x|}{2}$, o lema está provado. \square

A seguir, faremos algumas colocações que serão utilizadas no decorrer do capítulo.

Observação 4.4 (a) *Seja $R > 0$, consideremos uma função $h \in C(\mathbb{R}^3 \times [0, T]; \mathbb{R})$, e suponhamos que existam $\alpha \geq 1$ e $C > 0$ tais que*

$$|h(x, t)| \leq \frac{C}{|x|^\alpha}$$

para todo $(x, t) \in (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) \times [0, T]$. Então

$$\sup_{t \in [0, T]} \int_{\Pi_R} |\nabla \varphi^R(x)|^2 |h(x, t)|^2 dx \leq \frac{C}{R^{2\alpha}}$$

para todo $R > 0$ suficientemente grande.

De fato, como

$$|y + (R, 0, 0)| \geq R - |y| \geq R - 2M_0 > 0$$

se $y \in \mathbb{R}^3$, $M_0 \leq |y| \leq 2M_0$ e $R > 2M_0$, a conclusão desejada vem das relações

$$\begin{aligned} \int_{\Pi_R} |\nabla \varphi^R(x)|^2 |h(x, t)|^2 dx &= \int_{M_0 \leq |x - (R, 0, 0)| \leq 2M_0} |\varphi'(|x - (R, 0, 0)|)|^2 |h(x, t)|^2 dx \\ &= \int_{M_0 \leq |y| \leq 2M_0} |\varphi'(|y|)|^2 |h(y + (R, 0, 0), t)|^2 dy \\ &\leq C \sup_{M_0 \leq |y| \leq 2M_0} |h(y + (R, 0, 0), t)|^2 \\ &\leq \sup_{M_0 \leq |y| \leq 2M_0} \left\{ \frac{C}{|y + (R, 0, 0)|^{2\alpha}} \right\} \\ &\leq \frac{C}{(R - 2M_0)^{2\alpha}} \\ &\leq \left[\frac{C}{\left(1 - \frac{2M_0}{R}\right)^{2\alpha}} \right] \frac{1}{R^{2\alpha}}, \end{aligned}$$

válidas para todo $t \in [0, T]$. Finalizamos este item observando que este fato continua válido se $h \in C(\mathbb{R}^3 \times [0, T]; \mathbb{R}^3)$.

(b) Se trocarmos $\nabla \varphi^R$ por $\varphi^R - 1$ ou por $\partial_{i_j}^2 \varphi^R$ ($i, j = 1, 2, 3$), obtemos um fato análogo àquele destacado no item (a), o que pode ser verificado facilmente através de mínimas adaptações.

O próximo resultado traz um importante conjunto de estimativas que permite estabelecer o resultado principal deste trabalho.

Proposição 4.5 *Existe uma constante $C = C(\Omega_0, T) > 0$ de modo que, para todo $R > 0$ suficientemente grande, são válidas as seguintes estimativas:*

$$(a) \quad \|u^R - u\|_{L^\infty([0, T]; L^2(\Pi_R))} + \|u^R - \varphi^R u\|_{L^\infty([0, T]; L^2(\Pi_R))} \leq \frac{C}{R^2};$$

$$(b) \quad \|\nabla u^R - \nabla u\|_{L^\infty([0,T];L^2(\Pi_R))} \leq \frac{C}{R^2};$$

$$(c) \quad \|\bar{p}\nabla\varphi^R\|_{L^\infty([0,T];L^2(\Pi_R))} + \|\nabla\varphi^R \times \partial_t\psi\|_{L^\infty([0,T];L^2(\Pi_R))} \leq \frac{C}{R^2};$$

$$(d) \quad \|u^R\|_{L^\infty([0,T];L^\infty(\Pi_R))} + \|\nabla u^R\|_{L^\infty([0,T];L^\infty(\Pi_R))} + \|\nabla u^R\|_{L^\infty([0,T];L^2(\Pi_R))} \leq C.$$

Demonstraçãõ: Iniciamos a demonstraçãõ de (a) mostrando o seguinte fato:

Afirmaçãõ: Existe uma constante $C > 0$ de forma que

$$\sup_{M_0 \leq |y| \leq 2M_0} |\psi(y + (R, 0, 0), t) + C_R| \leq \frac{C}{R^2}$$

para todo $R > 0$ suficientemente grande e para todo $t \in [0, T]$.

De fato, se $y \in \mathbb{R}^3$, com $M_0 \leq |y| \leq 2M_0$, e $R > 2M_0$, temos

$$|y + (R, 0, 0)| \geq R - |y| \geq R - 2M_0 > 0.$$

Isto fornece

$$\begin{aligned} & |\psi(y + (R, 0, 0), t) + C_R| \\ &= \left| \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\omega(z, t)}{|(y + (R, 0, 0)) - z|} dz - \frac{1}{4\pi R} \int_{\mathbb{R}^3} \omega_0(y) dy \right| \\ &\leq \left| \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\omega(z, t)}{|(y + (R, 0, 0)) - z|} dz - \frac{1}{4\pi|y + (R, 0, 0)|} \int_{\mathbb{R}^3} \omega(z, t) dz \right| \\ &\quad + \left| \frac{1}{4\pi|y + (R, 0, 0)|} - \frac{1}{4\pi R} \right| \int_{\mathbb{R}^3} |\omega_0(z)| dz \\ &\leq \frac{C}{|y + (R, 0, 0)|^2} + \frac{1}{4\pi} \frac{4|y|}{R^2} \int_{\mathbb{R}^3} |\omega_0(z)| dz \\ &\leq \frac{C}{(R - 2M_0)^2} + \frac{C}{R^2} \end{aligned}$$

para todo $t \in [0, T]$, tendo em vista os Lemas 3.11 e 4.3, a conservaçãõ do fluxo total da vorticidade e o fato de a funçãõ

$$t \in [0, T] \longmapsto \int_{\mathbb{R}^3} |\omega(z, t)| dz$$

ser limitada. Assim, a afirmaçãõ já estã devidaente verificada.

Em posse da afirmação acima, chegamos a

$$\begin{aligned}
& \|u^R - \varphi^R u\|_{L^2(\Pi_R)}^2 \\
&= \|\nabla \varphi^R \times (\psi + C_R)\|_{L^2(\Pi_R)}^2 \\
&= \int_{M_0 \leq |x - (R, 0, 0)| \leq 2M_0} |\varphi'(|x - (R, 0, 0)|)|^2 |\psi(x, t) + C_R|^2 dx \\
&= \int_{M_0 \leq |y| \leq 2M_0} |\varphi'(|y|)|^2 |\psi(y + (R, 0, 0), t) + C_R|^2 dy \\
&\leq C \sup_{M_0 \leq |y| \leq 2M_0} |\psi(y + (R, 0, 0), t) + C_R|^2 \\
&\leq \frac{C}{R^4}.
\end{aligned}$$

Além disso, como

$$|u(x, t)| \leq \frac{C}{|x|^2}$$

para todo $(x, t) \in (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) \times [0, T]$ (Proposição 3.3(a)), podemos utilizar a Observação 4.4(b) para obtermos a estimativa

$$\|(\varphi^R - 1)u\|_{L^\infty([0, T]; L^2(\Pi_R))} \leq \frac{C}{R^2}.$$

Portanto, basta recordar a identidade

$$u^R - u = \text{rot}(\varphi^R(\psi + C_R)) = \nabla \varphi^R \times (\psi + C_R) + (\varphi^R - 1)u$$

para concluir a parte (a) desta proposição.

Passando à parte (b) do enunciado, recordamos a identidade

$$\begin{aligned}
\partial_i u^R - \partial_i u &= \partial_i(\nabla \varphi^R) \times (\psi + C_R) + \nabla \varphi^R \times \partial_i \psi \\
&\quad + (\partial_i \varphi^R)u + (\varphi^R - 1)\partial_i u,
\end{aligned}$$

válida para cada $i \in \{1, 2, 3\}$. O mesmo argumento utilizado na obtenção da estimativa

$$\|\nabla \varphi^R \times (\psi + C_R)\|_{L^\infty([0, T]; L^2(\Pi_R))} \leq \frac{C}{R^2}$$

(demonstração do item (a)) também garante que

$$\|\partial_i(\nabla \varphi^R) \times (\psi + C_R)\|_{L^\infty([0, T]; L^2(\Pi_R))} \leq \frac{C}{R^2}.$$

Além disso, os decaimentos de $\nabla\psi$ (Proposição 3.12), u (Proposição 3.3(a)) e ∇u (Proposição 3.3(b)) implicam

$$\|\nabla\varphi^R \times \partial_i\psi\|_{L^\infty([0,T];L^2(\Pi_R))} \leq \frac{C}{R^2},$$

$$\|(\partial_i\varphi^R)u\|_{L^\infty([0,T];L^2(\Pi_R))} \leq \frac{C}{R^2}$$

e

$$\|(\varphi^R - 1)\partial_i u\|_{L^\infty([0,T];L^2(\Pi_R))} \leq \frac{C}{R^3}$$

para todo $R > 0$ suficientemente grande (veja também a Observação 4.4), o que finaliza a demonstração do item (b).

Para chegar a demonstração de (c), basta observar que os decaimentos de \bar{p} (Proposição 3.9) e $\partial_t\psi$ (Proposição 3.12(b)), e a Observação 4.4 asseguram imediatamente as estimativas

$$\|\bar{p}\nabla\varphi^R\|_{L^\infty([0,T];L^2(\Pi_R))} \leq \frac{C}{R^2}$$

e

$$\|\nabla\varphi^R \times \partial_t\psi\|_{L^\infty([0,T];L^2(\Pi_R))} \leq \frac{C}{R^2}$$

para todo $R > 0$ suficientemente grande.

Finalmente, passemos à demonstração do item (d). Em primeiro lugar, lembramos que a parte (a) desta proposição garante diretamente a existência $C > 0$ tal que

$$\|\nabla u^R\|_{L^\infty([0,T];L^2(\Pi_R))} \leq C$$

para todo $R > 0$ suficientemente grande. Já as limitações uniformes (com respeito a $R > 0$) restantes seguem da Observação 4.2(a) e das Proposições 3.3 e 3.12. Nesse caso, todas as estimativas do enunciado estão devidamente demonstradas. \square

4.1.2 Convergência relacionada aos dados iniciais

Como na seção anterior, continuamos com $\omega_0 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$, onde $\operatorname{div} \omega_0 = 0$ e u_0 como sendo o único campo vetorial em $L^2(\mathbb{R}^3)$ tal que $\operatorname{div} \omega_0 = 0$ e $\operatorname{rot} u_0 = \omega_0$.

Aqui, também consideramos as equações de Euler no espaço \mathbb{R}^3 , com dado inicial u_0 , e denotamos por u a única solução suave de tais equações. O nosso objetivo nesta subseção é construir uma família de campos vetoriais $\{u_{0,R}; R > 0\}$ em $H(\Pi_R)$ de tal maneira que $\text{rot } u_{0,R} = \omega_0|_{\Pi_R}$ e

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \|\tilde{u}_{0,R} - u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = 0,$$

onde

$$\tilde{u}_{0,R}(x) = \begin{cases} u_{0,R}(x) & \text{se } x \in \Pi_R; \\ 0 & \text{se } x \in \bar{\Omega}_R, \end{cases}$$

para cada $R > 0$. Estabelecidas estas notações, consideramos o sistema

$$(NS^{\nu,R}) \begin{cases} \partial_t u^{\nu,R} + (u^{\nu,R} \cdot \nabla) u^{\nu,R} - \nu \Delta u^{\nu,R} = -\nabla p & \text{em } \Pi_R \times (0, T), \\ \text{div } u^{\nu,R} = 0 & \text{em } \Pi_R \times [0, T], \\ u^{\nu,R} = 0 & \text{em } \partial\Pi_R \times (0, T), \\ u^{\nu,R}(x, 0) = u_{0,R}(x) & \text{em } \Pi_R \times \{t = 0\}, \end{cases}$$

($\nu > 0$ e $R > 0$), que admite uma solução fraca $u^{\nu,R}$ no sentido de Leray-Hopf como no Teorema 2.11. O nosso objetivo é estimar os campos $(u^{\nu,R} - u)_{\nu, R > 0}$ com respeito à norma de $L^\infty([0, T]; L^2(\Pi_R))$ e obter (na próxima seção) uma desigualdade que indique o comportamento assintótico almejado.

Proposição 4.6 *Dado $R > 0$, existe um único $u_{0,R} \in H(\Pi_R)$ tal que $\text{rot } u_{0,R} = \omega_0|_{\Pi_R}$. Além disso, existe uma constante $C > 0$ (que não depende de R) de forma que*

$$\|\tilde{u}_{0,R} - u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq \frac{C}{R^2}$$

para todo $R > 0$ suficientemente grande.

Demonstração: Como $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$, o Teorema 1.5 garante a existência de um campo $u_{0,R} \in H(\Pi_R)$ e de uma função $g \in L^2_{loc}(\Pi_R)$, com $\nabla g \in L^2(\Pi_R)$, tais que

$$u_0|_{\Pi_R} = u_{0,R} + \nabla g,$$

sendo única esta decomposição. Assim, como $\text{rot } u_0 = \omega_0$, já temos

$$\omega_0|_{\Pi_R} = \text{rot } u_0|_{\Pi_R} = \text{rot } (u_0|_{\Pi_R}) = \text{rot } (u_{0,R} + \nabla g) = \text{rot } u_{0,R}.$$

Vejamos que $u_{0,R}$ é o único campo em $H(\Pi_R)$ cujo rotacional é a restrição de ω_0 ao conjunto Π_R . Realmente, seja $v \in H(\Pi_R)$ tal que $\text{rot } v = \omega_0|_{\Pi_R}$. Consideremos $\Xi \in \mathcal{D}(\Pi_R)$ arbitrário e tomemos um campo suave Ψ , definido em Π_R , tal que $\Xi = \text{rot } \Psi$ (Π_R é simplesmente conexo). Portanto, a relação $\text{rot } (u_{0,R} - v) = 0$ implica

$$\int_{\Pi} (u_0 - v) \cdot \Xi dx = 0$$

e a arbitrariedade de Ξ corresponde à validade de

$$\int_{\Pi} (u_0 - v) \cdot w dx = 0$$

para todo $w \in H(\Pi_R)$. Consequentemente, aplicando novamente o Teorema 1.5, obtemos uma função escalar $g \in L^2_{loc}(\Pi_R)$, com $\nabla g \in L^2(\Pi_R)$, de forma que $u_0 - v = \nabla g$. Esta última conclusão, o fato de $(u_0 - v) \in H(\Pi_R)$ e a unicidade da decomposição do Teorema 1.5 permitem concluir que $v = u_0$.

Agora, passemos à demonstração da estimativa descrita no enunciado. Observando que $u_{0,R} \in H(\Pi_R)$ é a projeção ortogonal de $u_0|_{\Pi_R}$ sobre $H(\Pi_R)$ para cada $R > 0$ (Teorema 1.5), vemos que

$$\|u_0|_{\Pi_R} - u_{0,R}\|_{L^2(\Pi_R)} \leq \|u_0|_{\Pi_R} - w\|_{L^2(\Pi_R)}$$

para cada $w \in H(\Pi_R)$. Em particular, podemos tomar

$$w = u^R(0) = \text{rot } (\varphi^R(\psi + C_R))|_{t=0} = \nabla \varphi^R \times (\psi_0 + C_R) + \varphi^R u_0,$$

onde $\psi_0(x) = \psi(x, 0)$ para todo $x \in \mathbb{R}^3$. Com isso,

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}_{0,R} - u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 &= \int_{\mathbb{R}^3} |\tilde{u}_{0,R}(x) - u_0(x)|^2 dx \\ &= \int_{\Pi_R} |u_{0,R} - u_0|_{\Pi_R}|^2(x) dx + \int_{\Omega_R} |u_0(x)|^2 dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \|u_{0,R} - u_0|_{\Pi_R}\|_{L^2(\Pi_R)}^2 + \|u_0\|_{L^2(\bar{\Omega}_R)}^2 \\
&\leq \|u_0|_{\Pi_R} - u^R(0)\|_{L^2(\Pi_R)}^2 + \|u_0\|_{L^2(\bar{\Omega}_R)}^2 \\
&\leq (\|u_0|_{\Pi_R} - u^R(0)\|_{L^2(\Pi_R)} + \|u_0\|_{L^2(\bar{\Omega}_R)})^2,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\|\tilde{u}_{0,R} - u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq \|u_0|_{\Pi_R} - u^R(0)\|_{L^2(\Pi_R)} + \|u_0\|_{L^2(\bar{\Omega}_R)}.$$

Destacamos que a Proposição 4.5(a) já fornece

$$\|u_0|_{\Pi_R} - u^R(0)\|_{L^2(\Pi_R)} \leq \frac{C}{R^2}$$

para todo $R > 0$ suficientemente grande. Na próxima observação, analisaremos o comportamento de $(\|u_0\|_{L^2(\bar{\Omega}_R)})_{R>0}$ no infinito.

Afirmção: Existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|u_0\|_{L^2(\bar{\Omega}_R)} \leq \frac{C}{R^2}$$

para todo $R > 0$ suficientemente grande.

Fixemos $a > 0$ tal que $\text{supp}(\omega_0) \subset B_a(0)$. Lembrando que tomamos $M_0 > 0$ de forma que $\bar{\Omega}_0 \subset B_{M_0}(0)$, vemos que $\text{supp}(\omega_0) \cap \bar{\Omega}_R = \emptyset$ sempre que $R > a + 2M_0$.

De fato, se $x_0 \in \bar{\Omega}_R$, temos

$$|x_0| = |(x_0 - (R, 0, 0)) + (R, 0, 0)| \geq R - |x_0 - (R, 0, 0)| \geq R - M_0 > a + M_0 > a,$$

o que significa que $x_0 \notin \text{supp}(\omega_0)$. Logo, dados $x \in \bar{\Omega}_R$ e $y \in \text{supp}(\omega_0)$ arbitrários, temos $x \neq y$ e

$$\begin{aligned}
|x - y| &= |(y - (R, 0, 0)) - (x - (R, 0, 0))| \geq |y - (R, 0, 0)| - |x - (R, 0, 0)| \\
&\geq R - |y| - |x - (R, 0, 0)| > R - a - 2M_0 > 0,
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} |u_0(x)| &\leq \int_{B_a(0)} \frac{|\omega_0(y)|}{4\pi|x-y|^2} dy \leq \frac{C}{(R-a-2M_0)^2} \\ &\leq \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{a}{R} - \frac{2M_0}{R}\right)} \right] \frac{1}{R^2}. \end{aligned}$$

Finalmente, como a medida de Lebesgue de cada $\bar{\Omega}_R$ é igual à medida de Lebesgue de $\bar{\Omega}_0$ para todo $R > 0$, é claro que

$$\|u_0\|_{L^2(\bar{\Omega}_R)} \leq \frac{C}{R^2},$$

sendo a última constante independente de R .

Assim, a demonstração do resultado está concluída. \square

4.2 Cálculos Formais

Nesta seção, apresentamos certos cálculos heurísticos que sugerem a validade da convergência

$$\|u^{\nu,R} - u\|_{L^\infty([0,T];L^2(\Pi_R))} \rightarrow 0$$

quando $\nu \rightarrow 0$ e $R \rightarrow \infty$. Destacamos que este fato será devidamente demonstrado na próxima seção.

Suponhamos que $(u^{\nu,R}, p^{\nu,R})$ seja uma solução clássica do sistema $(\mathcal{NS}^{\nu,R})$ e definamos

$$W^{\nu,R} = u^{\nu,R} - u^R$$

para cada $\nu > 0$ e para cada $R > 0$. Nesse caso, utilizando a Observação 4.2(d), chegamos a

$$\begin{aligned} \partial_t W^{\nu,R} - \nu \Delta W^{\nu,R} &= -(W^{\nu,R} + u^R) \nabla W^{\nu,R} - W^{\nu,R} \nabla u^R - u^R \nabla u^R \\ &\quad - \nabla p^{\nu,R} + \nu \Delta u^R \\ &\quad - \nabla \varphi^R \times \partial_t \psi + \varphi^R u \nabla u + \varphi^R \nabla \bar{p}. \end{aligned}$$

Portanto, admitindo que $(u^{\nu,R}, p^{\nu,R})$ seja um par suficientemente regular, efetuamos o produto interno em L^2 de cada termo da equação supramencionada com o campo $W^{\nu,R}$, obtendo, para cada $t \in [0, T]$, as seguintes relações:

$$(a) \int_{\Pi_R} \partial_t W^{\nu,R} \cdot W^{\nu,R} dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|W^{\nu,R}\|_{L^2(\Pi_R)}^2;$$

$$(b) -\nu \int_{\Pi_R} \Delta W^{\nu,R} \cdot W^{\nu,R} dx = \nu \|\nabla W^{\nu,R}\|_{L^2(\Pi_R)}^2;$$

(c)

$$\int_{\Pi_R} [(W^{\nu,R} + u^R) \nabla W^{\nu,R}] \cdot W^{\nu,R} dx = 0,$$

pois a condição $\operatorname{div} (W^{\nu,R} + u^R) = 0$ implica

$$-\int_{\Pi_R} [(W^{\nu,R} + u^R) \nabla W^{\nu,R}] \cdot W^{\nu,R} dx = \int_{\Pi_R} [(W^{\nu,R} + u^R) \nabla W^{\nu,R}] \cdot W^{\nu,R} dx.$$

(d)

$$\begin{aligned} -\int_{\Pi_R} [W^{\nu,R} \nabla u^R] \cdot W^{\nu,R} dx &\leq \|\nabla u^R\|_{L^\infty(\Pi_R)} \|W^{\nu,R}\|_{L^2(\Pi_R)}^2 \\ &\leq C \|W^{\nu,R}\|_{L^2(\Pi_R)}^2, \end{aligned}$$

em virtude da Proposição 4.5(d).

(e)

$$\begin{aligned}
& \int_{\Pi_R} (\varphi^R u \nabla u - u^R \nabla u^R) \cdot W^{\nu,R} dx \\
&= \int_{\Pi_R} (\varphi^R u - u^R) \nabla u \cdot W^{\nu,R} dx \\
&\quad + \int_{\Pi_R} [u^R (\nabla u - \nabla u^R)] \cdot W^{\nu,R} dx \\
&\leq \|\varphi^R u - u^R\|_{L^2(\Pi_R)} \|\nabla u\|_{L^\infty(\Pi_R)} \|W^{\nu,R}\|_{L^2(\Pi_R)} \\
&\quad + \|\nabla u^R - \nabla u\|_{L^2(\Pi_R)} \|u^R\|_{L^\infty(\Pi_R)} \|W^{\nu,R}\|_{L^2(\Pi_R)} \\
&\leq \frac{C}{R^4} + \|W^{\nu,R}\|_{L^2(\Pi_R)}^2,
\end{aligned}$$

utilizando a desigualdade de Young e as Proposições 3.3 e 4.5(a),(b),(d);

$$(f) \int_{\Pi_R} \nabla p^{\nu,R} \cdot W^{\nu,R} dx = 0, \text{ pois } \operatorname{div} W^{\nu,R} = 0;$$

(g)

$$\begin{aligned}
\nu \int_{\Pi_R} (\Delta u^R \cdot W^{\nu,R}) dx &= -\nu \int_{\Pi_R} (\nabla u^R : \nabla W^{\nu,R}) dx \\
&\leq \nu \|\nabla u^R\|_{L^2(\Pi_R)} \|\nabla W^{\nu,R}\|_{L^2(\Pi_R)} \\
&\leq C\nu \|\nabla W^{\nu,R}\|_{L^2(\Pi_R)} \\
&\leq \frac{C^2\nu}{2} + \frac{\nu}{2} \|\nabla W^{\nu,R}\|_{L^2(\Pi_R)}^2,
\end{aligned}$$

utilizando novamente a desigualdade de Young e a Proposição 4.5(d);

(h)

$$\begin{aligned}
-\int_{\Pi_R} (\nabla \varphi^R \times \partial_t \psi) \cdot W^{\nu,R} dx &\leq \|\nabla \varphi^R \times \partial_t \psi\|_{L^2(\Pi_R)} \|W^{\nu,R}\|_{L^2(\Pi_R)} \\
&\leq \frac{C}{R^2} \|W^{\nu,R}\|_{L^2(\Pi_R)} \\
&\leq \frac{C}{R^4} + C \|W^{\nu,R}\|_{L^2(\Pi_R)}^2,
\end{aligned}$$

tendo em vista a desigualdade de Young e a Proposição 4.5(c);

(i)

$$\begin{aligned}
\int_{\Pi_R} (\varphi^R \nabla \bar{p}) \cdot W^{\nu,R} dx &= \int_{\Pi_R} [\nabla(\varphi^R \bar{p}) - \bar{p} \nabla \varphi^R] \cdot W^{\nu,R} dx \\
&= - \int_{\Pi_R} (\bar{p} \nabla \varphi^R) \cdot W^{\nu,R} dx \\
&\leq \|\bar{p} \nabla \varphi^R\|_{L^2(\Pi_R)} \|W^{\nu,R}\|_{L^2(\Pi_R)} \\
&\leq \frac{C}{R^2} \|W^{\nu,R}\|_{L^2(\Pi_R)} \\
&\leq \frac{C}{R^4} + C \|W^{\nu,R}\|_{L^2(\Pi_R)}^2,
\end{aligned}$$

lembrando a condição $\operatorname{div} W^{\nu,R} = 0$, a desigualdade de Young e a Proposição 4.5(c).

Destacamos ainda que as constantes positivas que aparecem em (d), (e), (g), (h) e (i) independem tanto da variável temporal quanto de $R > 0$ (suficientemente grande). Assim, baseados nas informações contidas em (a)-(i), vem que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|W^{\nu,R}\|_{L^2(\Pi_R)}^2 + \frac{\nu}{2} \|\nabla W^{\nu,R}\|_{L^2(\Pi_R)}^2 \leq C \|W^{\nu,R}\|_{L^2(\Pi_R)}^2 + \frac{C}{R^4} + C\nu$$

e, portanto, aplicando a forma diferencial da desigualdade de Gronwall, obtemos

$$\|W^{\nu,R}\|_{L^\infty([0,T];L^2(\Pi_R))} \leq e^{CT} \left[\|W^{\nu,R}(\cdot, 0)\|_{L^2(\Pi_R)} + \frac{C}{R^2} + C\sqrt{\nu} \right].$$

Finalmente, como

$$\begin{aligned}
\|W^{\nu,R}(\cdot, 0)\|_{L^2(\Pi_R)} &= \|u_{0,R} - u^R(0)\|_{L^2(\Pi_R)} \\
&= \|\tilde{u}_{0,R} - u^R(0)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\
&\leq \|\tilde{u}_{0,R} - u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|u_0 - u^R(0)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}
\end{aligned}$$

(Observação 4.2(a)), concluímos que

$$\|W^{\nu,R}\|_{L^\infty([0,T];L^2(\Pi_R))} \leq e^{CT} \left[\frac{C}{R^2} + C\sqrt{\nu} \right]$$

e, conseqüentemente,

$$\|u^{\nu,R} - u\|_{L^\infty([0,T];L^2(\Pi_R))} \leq e^{CT} \left[\frac{C}{R^2} + C\sqrt{\nu} \right]$$

(Proposições 4.5(a) e 4.6).

4.3 O teorema principal

Na seção 4.2, deduzimos uma estimativa que implica a convergência de uma certa família de soluções do sistema $(\mathcal{NS}^{\nu,R})$ à solução suave u das equações de Euler no espaço todo, quando $R \rightarrow \infty$ e $\nu \rightarrow 0$. No entanto, os cálculos lá apresentados pressupõem que cada solução pertencente à referida família usufrua de uma certa regularidade que, em geral, não pode ser garantida para soluções fracas no sentido de Leray-Hopf. Assim, o nosso objetivo nesta seção é apresentar argumentos rigorosos que justifiquem o fato sugerido na seção anterior. Para tanto, começamos com o

Exemplo 4.7 *Neste exemplo, construímos uma família de campos suaves, cada um com suporte não compacto, verificando as condições do Lema 3.14. Como na Seção 4.1, seja $\omega_0 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$, com $\operatorname{div} \omega_0 = 0$, ponhamos*

$$u_0(x) = \frac{-1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{(x-y)}{|x-y|^3} \times \omega_0(y) dy$$

e consideremos a única solução suave $u = u(x,t)$ do sistema (E), com condição inicial u_0 . Além disso, seja T^ o tempo de existência de u e fixemos $T \in (0, T^*)$ arbitrariamente. Para cada $R > 0$, definamos*

$$u^R = \operatorname{rot} (\varphi^R(\psi + C_R)) = \operatorname{rot} (\varphi^R\psi) + \operatorname{rot} (\varphi^R C_R).$$

As Proposições 3.3 e 3.12, e a Observação 4.2(a) implicam:

- (a) $\operatorname{supp}(\varphi^R\psi) \subset (\mathbb{R}^3 \setminus \bar{B}_{M_0}(0)) \times [0, T]$;
- (b) $\operatorname{div} \operatorname{rot} (\varphi^R C_R) = 0$ e cada campo $\operatorname{rot} (\varphi^R C_R) (= \nabla \varphi^R \times C_R)$ possui suporte compacto (contido em Π_R);

(c) São válidas as relações

$$\varphi^R \psi = \mathcal{O}(|x|^{-1}),$$

$$\nabla(\varphi^R \psi) = \mathcal{O}(|x|^{-2}),$$

$$\partial_t(\varphi^R \psi) = \mathcal{O}(|x|^{-2}),$$

$$u^R = \mathcal{O}(|x|^{-2}),$$

$$\nabla u^R = \mathcal{O}(|x|^{-3})$$

e

$$\partial_t u^R = \mathcal{O}(|x|^{-3})$$

quando $|x| \rightarrow \infty$.

Nesse caso, a família $\{u^R; R > 0\}$ se enquadra nos padrões do referido lema e, conseqüentemente, temos

$$\begin{aligned} & (u^{\nu,R}(\cdot, t) | u^R(\cdot, t))_{L^2(\Pi_R)} - (u_{0,R} | u^R(\cdot, 0))_{L^2(\Pi_R)} \\ &= \int_0^t \int_{\Pi_R} [u^{\nu,R} \cdot \partial_t u^R - \nu \nabla u^{\nu,R} : \nabla u^R](x, \tau) dx d\tau \\ &+ \int_0^t \int_{\Pi_R} [(u^{\nu,R} \nabla u^R) \cdot u^{\nu,R}](x, \tau) dx d\tau \end{aligned}$$

para todo $t \in [0, T)$.

O principal resultado deste trabalho é o seguinte:

Teorema 4.8 *Continuemos com o campo de divergente nulo $\omega_0 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$, ponhamos*

$$u_0(x) = \frac{-1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{(x-y)}{|x-y|^3} \times \omega_0(y) dy$$

e consideremos a única solução suave $u = u(x, t)$ do sistema (E), com condição inicial u_0 . Além disso, denotemos por T^ o tempo de existência de u e fixemos $T \in (0, T^*)$ arbitrariamente. Agora, para cada $\nu > 0$ e para cada $R > 0$, sejam*

- (a) $u^R = \text{rot}(\varphi^R(\psi + C_R))$ o campo introduzido no Exemplo 4.7;
- (b) $u_{0,R}$ a projeção ortogonal de $u_0|_{\Pi_R}$ sobre $H(\Pi_R)$;
- (c) $u^{\nu,R} \in L^\infty(0, T; H(\Pi_R)) \cap L^2(0, T; H^1(\Pi_R))$ uma solução fraca de $(\mathcal{NS}^{\nu,R})$, com dado inicial $u_{0,R}$, como no Teorema 2.11.

Então existe uma constante $C = C(T, \Omega_0, \omega_0) > 0$ tal que

$$\|u^{\nu,R}(t) - u^R(t)\|_{L^2(\Pi_R)}^2 + \nu \int_0^t \|\nabla u^{\nu,R}(\tau) - \nabla u^R(\tau)\|_{L^2(\Pi_R)}^2 d\tau \leq C \left(\frac{1}{R^2} + \nu \right)$$

para quase todo $t \in [0, T]$ e para todo $R > 0$ suficientemente grande.

Demonstração: Esta demonstração se baseia na obtenção de estimativas de energia, seguindo argumentos introduzidos por T. Kato em [19]. Em primeiro lugar, para cada $t \in [0, T]$, destacamos a desigualdade de energia

$$\frac{1}{2} \|u^{\nu,R}(\cdot, t)\|_{L^2(\Pi_R)}^2 + \nu \int_0^t \|\nabla u^{\nu,R}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\Pi_R)}^2 d\tau \leq \frac{1}{2} \|u_{0,R}\|_{L^2(\Pi_R)}^2 = \frac{1}{2} \|\tilde{u}_{0,R}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \quad (4.1)$$

(Teorema 2.11(a)), as relações

$$\begin{aligned} & -(u^{\nu,R}(\cdot, t)|u^R(\cdot, t))_{L^2(\Pi_R)} + (u_{0,R}|u^R(\cdot, 0))_{L^2(\Pi_R)} \\ &= - \int_0^t \int_{\Pi_R} [u^{\nu,R} \cdot \partial_t u^R - \nu \nabla u^{\nu,R} : \nabla u^R](x, \tau) dx d\tau \\ & \quad - \int_0^t \int_{\Pi_R} (u^{\nu,R} \nabla u^R) \cdot u^{\nu,R} dx d\tau \\ &= - \int_0^t \int_{\Pi_R} u^{\nu,R} \cdot (\nabla \varphi^R \times \partial_t \psi - \varphi^R u \nabla u - \varphi^R \nabla \bar{p})(x, \tau) dx d\tau \\ & \quad + \nu \int_0^t \int_{\Pi_R} (\nabla u^{\nu,R} : \nabla u^R) dx d\tau \\ & \quad - \int_0^t \int_{\Pi_R} [u^{\nu,R} \nabla u^R] \cdot u^{\nu,R} dx d\tau \\ &= - \int_0^t \int_{\Pi_R} u^{\nu,R} \cdot (\nabla \varphi^R \times \partial_t \psi - \varphi^R \nabla \bar{p})(x, \tau) dx d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\nu \int_0^t \int_{\Pi_R} \nabla(u^{\nu,R} : \nabla u^R) dx d\tau \\
& + \int_0^t \int_{\Pi_R} (\varphi^R u \nabla u) \cdot u^{\nu,R} dx d\tau - \int_0^t \int_{\Pi_R} [u^{\nu,R} \nabla u^R] \cdot u^{\nu,R} dx d\tau \\
= & - \int_0^t \int_{\Pi_R} u^{\nu,R} \cdot (\nabla \varphi^R \times \partial_t \psi - \varphi^R \nabla \bar{p})(x, \tau) dx d\tau \\
& +\nu \int_0^t \int_{\Pi_R} \nabla u^{\nu,R} : \nabla u^R dx d\tau \\
& + \int_0^t \int_{\Pi_R} [(\varphi^R u - u^R) \nabla u] \cdot u^{\nu,R} dx d\tau + \int_0^t \int_{\Pi_R} [u^R \nabla (u - u^R)] \cdot u^{\nu,R} dx d\tau \\
& + \int_0^t \int_{\Pi_R} [(u^{\nu,R} - u^R) \nabla u^R] \cdot (u^{\nu,R} - u^R) dx d\tau
\end{aligned} \tag{4.2}$$

(provenientes do Exemplo 4.7, da Observação 4.2(d) e do fato de termos adicionado e subtraído as integrais

$$\int_0^t \int_{\Pi_R} (u^R \nabla u) \cdot u^{\nu,R} dx d\tau \quad e \quad \int_0^t \int_{\Pi_R} (u^R \nabla u^R) \cdot u^{\nu,R} dx d\tau$$

e a estimativa

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \|u^R\|_{L^2(\Pi_R)}^2 & \leq \frac{1}{2} \|\nabla \varphi^R \times (\psi + C_R)\|_{L^2(\Pi_R)}^2 + \|\nabla \varphi^R \times (\psi + C_R)\|_{L^2(\Pi_R)} \|\varphi^R u\|_{L^2(\Pi_R)} \\
& \quad + \frac{1}{2} \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \\
& = \frac{1}{2} \|u^R - \varphi^R u\|_{L^2(\Pi_R)}^2 + \|u^R - \varphi^R u\|_{L^2(\Pi_R)} \|\varphi^R u\|_{L^2(\Pi_R)} \\
& \quad + \frac{1}{2} \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2
\end{aligned} \tag{4.3}$$

(onde foram utilizadas a Observação 4.2(a) e a conservação do fluxo total da velocidade). Além disso, como

$$\frac{1}{2} \|u^{\nu,R} - u^R\|_{L^2(\Pi_R)}^2 = \frac{1}{2} \|u^{\nu,R}\|_{L^2(\Pi_R)}^2 - (u^{\nu,R} | u^R)_{L^2(\Pi_R)} + \frac{1}{2} \|u^R\|_{L^2(\Pi_R)}^2,$$

$$\frac{1}{2} \|\tilde{u}_{0,R} - u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 = \frac{1}{2} \|\tilde{u}_{0,R}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 - (\tilde{u}_{0,R} | u_0)_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \frac{1}{2} \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2,$$

$$\begin{aligned}
(u_{0,R}|u^R(0))_{L^2(\Pi_R)} &= (u_{0,R}|u^R(0) - u_0)_{L^2(\Pi_R)} + (u_{0,R}|u_0)_{L^2(\Pi_R)} \\
&= (u_{0,R}|u^R(0) - u_0)_{L^2(\Pi_R)} + (\tilde{u}_{0,R}|u_0)_{L^2(\mathbb{R}^3)}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\nu \int_0^t \|\nabla u^{\nu,R}(\tau)\|_{L^2(\Pi_R)}^2 d\tau &= \nu \int_0^t \|(\nabla u^{\nu,R} - \nabla u^R)(\tau)\|_{L^2(\Pi_R)}^2 d\tau \\
&+ 2\nu \int_0^t (\nabla u^{\nu,R}|\nabla u^R)_{L^2(\Pi_R)} d\tau \\
&- \nu \int_0^t \|\nabla u^R(\tau)\|_{L^2(\Pi_R)}^2 d\tau,
\end{aligned}$$

utilizamos as relações 4.1, 4.2 e 4.3 para concluirmos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \|u^{\nu,R} - u^R\|_{L^2(\Pi_R)}^2 + \nu \int_0^t \|(\nabla u^{\nu,R} - \nabla u^R)(\tau)\|_{L^2(\Pi_R)}^2 d\tau \\
&\leq \frac{1}{2} \|\tilde{u}_{0,R} - u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \int_{\Pi_R} u_{0,R} \cdot (u_0 - u^R(0)) dx \\
&- \int_0^t \int_{\Pi_R} u^{\nu,R} \cdot (\nabla \varphi^R \times \partial_t \psi - \varphi^R \nabla \bar{p}) dx d\tau \\
&- \nu \int_0^t \int_{\Pi_R} \nabla u^{\nu,R} : \nabla u^R dx d\tau \\
&+ \nu \int_0^t \|\nabla u^R\|_{L^2(\Pi_R)}^2 d\tau \\
&+ \int_0^t \int_{\Pi_R} [(\varphi^R u - u^R) \nabla u] \cdot u^{\nu,R} dx d\tau + \int_0^t \int_{\Pi_R} [u^R \nabla (u - u^R)] \cdot u^{\nu,R} dx d\tau \\
&+ \int_0^t \int_{\Pi_R} [(u^{\nu,R} - u^R) \nabla u^R] \cdot (u^{\nu,R} - u^R) dx d\tau \\
&+ \frac{1}{2} \|u^R - \varphi^R u\|_{L^2(\Pi_R)}^2 + \|u^R - \varphi^R u\|_{L^2(\Pi_R)} \|\varphi^R u\|_{L^2(\Pi_R)}.
\end{aligned}$$

O próximo passo é estimar os termos que aparecem no segundo membro da última desigualdade.

Afirmação 1: Existe $C > 0$ (independente de $t \in [0, T]$) tal que

$$\|\tilde{u}_{0,R} - u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq \frac{C}{R^2}$$

para todo $R > 0$ suficientemente grande.

Com efeito, esta é, precisamente, a conclusão da Proposição 4.6.

Afirmação 2: Existe $C > 0$ (independente de $t \in [0, T]$) de forma que

$$\int_{\Pi_R} u_{0,R} \cdot (u_0 - u^R(0)) dx \leq \frac{C}{R^2}$$

para todo $R > 0$ suficientemente grande.

De fato, como $u_{0,R}$ é a projeção ortogonal de $u_0|_{\Pi_R}$ sobre $H(\Pi_R)$, a Proposição 4.5(a) implica

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Pi_R} u_{0,R} \cdot (u_0 - u^R(0)) dx \right| &\leq \|u_{0,R}\|_{L^2(\Pi_R)} \|u_0 - u^R(0)\|_{L^2(\Pi_R)} \\ &\leq \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|u_0 - u^R(0)\|_{L^2(\Pi_R)} \\ &\leq \frac{C}{R^2}. \end{aligned}$$

Afirmação 3: Existe uma constante $C = C(T) > 0$ tal que

$$\left| \int_0^t \int_{\Pi_R} u^{\nu,R} \cdot (\nabla \varphi^R \times \partial_t \psi - \varphi^R \nabla \bar{p}) dx d\tau \right| \leq \frac{C}{R^2}$$

para todo $t \in [0, T]$ e para todo $R > 0$ suficientemente grande.

Inicialmente, destacamos que

$$\begin{aligned} - \int_0^t \int_{\Pi_R} u^{\nu,R} \cdot (\varphi^R \nabla \bar{p}) dx d\tau &= - \int_0^t \int_{\Pi_R} u^{\nu,R} \cdot [\nabla(\varphi^R \bar{p}) - \bar{p} \nabla \varphi^R] dx d\tau \\ &= \int_0^t \int_{\Pi_R} u^{\nu,R} \cdot (\bar{p} \nabla \varphi^R) dx d\tau, \end{aligned}$$

pois $u^{\nu,R} \in H(\Pi_R)$, $\varphi^R \bar{p} \in L^2_{loc}(\Pi_R)$ e $\nabla(\varphi^R \bar{p}) \in L^2(\Pi_R)$ (veja a Proposição 3.5, a Observação 4.2(a) e o Teorema 1.5). Logo,

$$\left| \int_0^t \int_{\Pi_R} u^{\nu,R} \cdot (\nabla \varphi^R \times \partial_t \psi - \varphi^R \nabla \bar{p}) dx d\tau \right|$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \int_0^t \int_{\Pi_R} u^{\nu,R} \cdot (\nabla \varphi^R \times \partial_t \psi + \bar{p} \nabla \varphi^R) dx d\tau \right| \\
&\leq \int_0^t \|u^{\nu,R}\|_{L^2(\Pi_R)} (\|\nabla \varphi^R \times \partial_t \psi\|_{L^2(\Pi_R)} + \|\bar{p} \nabla \varphi^R\|_{L^2(\Pi_R)}) dx d\tau \\
&\leq T (\|\nabla \varphi^R \times \partial_t \psi\|_{L^\infty([0,T];L^2(\Pi_R))} + \|\bar{p} \nabla \varphi^R\|_{L^\infty([0,T];L^2(\Pi_R))}) \|u_{0,R}\|_{L^2(\Pi_R)} \\
&\leq \frac{CT \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}}{R^2},
\end{aligned}$$

onde utilizamos a desigualdade de energia do Teorema 2.11(a), a Proposição 4.5(c) e o fato de $u_{0,R}$ ser a projeção ortogonal de $u_0|_{\Pi_R}$ sobre $H(\Pi_R)$.

Afirmção 4: Existe uma contante $C = C(T) > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
&\left| \nu \int_0^t \|\nabla u^R\|_{L^2(\Pi_R)}^2 d\tau - \nu \int_0^t \int_{\Pi_R} \nabla u^{\nu,R} : \nabla u^R dx d\tau \right| \\
&\leq \frac{\nu}{2} \int_0^t \|(\nabla u^{\nu,R} - \nabla u^R)(\tau)\|_{L^2(\Pi_R)}^2 d\tau + C\nu
\end{aligned}$$

para todo $t \in [0, T]$ e para todo $R > 0$ suficientemente grande.

De fato, a desigualdade de Young e a Proposição 4.5(d) implicam

$$\begin{aligned}
&\left| \nu \int_0^t \|\nabla u^R\|_{L^2(\Pi_R)}^2 d\tau - \nu \int_0^t \int_{\Pi_R} \nabla u^{\nu,R} : \nabla u^R dx d\tau \right| \\
&\leq \nu \int_0^t \|\nabla u^{\nu,R} - \nabla u^R\|_{L^2(\Pi_R)} \|\nabla u^R\|_{L^2(\Pi_R)} d\tau \\
&\leq \frac{\nu}{2} \int_0^t \|\nabla u^{\nu,R} - \nabla u^R\|_{L^2(\Pi_R)}^2 d\tau + \frac{\nu}{2} \int_0^t \|\nabla u^R\|_{L^2(\Pi_R)}^2 d\tau \\
&\leq \frac{\nu}{2} \int_0^t \|\nabla u^{\nu,R} - \nabla u^R\|_{L^2(\Pi_R)}^2 d\tau + C\nu
\end{aligned}$$

para todo $t \in [0, T]$.

Afirmção 5: Existe $C = C(T) > 0$ tal que

$$\left| \int_0^t \int_{\Pi_R} [(\varphi^R u - u^R) \nabla u] \cdot u^{\nu,R} dx d\tau + \int_0^t \int_{\Pi_R} [u^R \nabla (u - u^R)] \cdot u^{\nu,R} dx d\tau \right| \leq \frac{C}{R^2}$$

para todo $t \in [0, T]$ e para todo $R > 0$ suficientemente grande.

Realmente,

$$\begin{aligned}
& \left| \int_0^t \int_{\Pi_R} [(\varphi^R u - u^R) \nabla u] \cdot u^{\nu,R} dx d\tau + \int_0^t \int_{\Pi_R} [u^R \nabla (u - u^R)] \cdot u^{\nu,R} dx d\tau \right| \\
& \leq \int_0^t \|\varphi^R u - u^R\|_{L^2(\Pi_R)} \|\nabla u\|_{L^\infty(\Pi_R)} \|u^{\nu,R}\|_{L^2(\Pi_R)} d\tau \\
& \quad + \int_0^t \|u^R\|_{L^\infty(\Pi_R)} \|\nabla (u - u^R)\|_{L^2(\Pi_R)} \|u^{\nu,R}\|_{L^2(\Pi_R)} d\tau \\
& \leq \frac{CT}{R^2},
\end{aligned}$$

onde aplicamos o Teorema 2.11(a), e as Proposições 3.3(c) e 4.5(a),(b),(d).

Afirmção 6: Existe $C > 0$ (independente de T) de modo que

$$\left| \int_0^t \int_{\Pi_R} [(u^{\nu,R} - u^R) \nabla u^R] \cdot (u^{\nu,R} - u^R) dx d\tau \right| \leq C \int_0^t \|u^{\nu,R} - u^R\|_{L^2(\Pi_R)}^2 d\tau$$

para cada $t \in [0, T]$.

Isto é consequência imediata da desigualdade de Hölder e da Proposição 4.5(d).

Assim, pelas afirmações acima e pela Proposição 4.5(a), concluímos que

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \|u^{\nu,R}(t) - u^R(t)\|_{L^2(\Pi_R)}^2 + \frac{\nu}{2} \int_0^t \|\nabla u^{\nu,R}(\tau) - \nabla u^R(\tau)\|_{L^2(\Pi_R)}^2 d\tau \\
& \leq C_1 \left(\frac{1}{R^2} + \nu \right) + C_2 \int_0^t \|u^{\nu,R}(\tau) - u^R(\tau)\|_{L^2(\Pi_R)}^2 d\tau
\end{aligned}$$

e podemos utilizar a forma integral da desigualdade de Gronwall para chegarmos a

$$\begin{aligned}
\|u^{\nu,R}(t) - u^R(t)\|_{L^2(\Pi_R)}^2 & \leq 2C_1 \left(\frac{1}{R^2} + \nu \right) (1 + 2C_2 t e^{2C_2 t}) \\
& \leq 2C_1 \left(\frac{1}{R^2} + \nu \right) (1 + 2C_2 T e^{2C_2 T}),
\end{aligned}$$

sendo a penúltima estimativa válida para todo $t \in [0, T]$ e a última para quase todo $t \in [0, T]$. Logo, o uso simultâneo das mesmas garante que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|u^{\nu,R}(t) - u^R(t)\|_{L^2(\Pi_R)}^2 + \frac{\nu}{2} \int_0^t \|\nabla u^{\nu,R}(\tau) - \nabla u^R(\tau)\|_{L^2(\Pi_R)}^2 d\tau \\ & \leq (2C_1 + 4C_1C_2T(1 + C_2Te^{2C_2T})) \left(\frac{1}{R^2} + \nu \right), \end{aligned}$$

para todo $t \in [0, T]$ e para todo $R > 0$ suficientemente grande, o que encerra a demonstração do teorema. \square

Corolário 4.9 *Admitamos as mesmas hipóteses do Teorema 4.8. Então existe uma contante $C = C(T, \Omega_0, \omega_0) > 0$ tal que*

$$\|u^{\nu,R} - u\|_{L^\infty([0,T];L^2(\Pi_R))} \leq C \left(\frac{1}{R} + \sqrt{\nu} \right).$$

Em particular, temos

$$\|u^{\nu,R} - u\|_{L^\infty([0,T];L^2(\Pi_R))} \rightarrow 0$$

quando $R \rightarrow \infty$ e $\nu \rightarrow 0$.

Demonstração: Este fato segue da desigualdade triangular, combinando a Proposição 4.5(a) e o Teorema 4.8. \square

4.4 Uma introdução ao conteúdo de [21] e considerações finais

Nesta seção, apresentamos uma breve introdução ao conteúdo de [21] e estabeleceremos certas conclusões acerca do nosso trabalho. Especialmente, contrastamos as informações contidas no Teorema 4.8 com aquelas obtidas no resultado principal de [21].

Ressaltamos que, no caso de um domínio com fronteira, ainda é um problema em aberto se soluções das equações de Navier-Stokes convergem a uma solução das equações de Euler quando a viscosidade tende a zero. Seguindo esta direção, a pesquisa realizada em [21] apresenta uma análise sobre esta questão quando consideramos um escoamento com viscosidade pequena ocupando um domínio limitado em \mathbb{R}^n ($n = 2, 3$) com fronteira distante.

Antes de nos referirmos precisamente ao teorema central do artigo [21], fixamos algumas notações essenciais à sua compreensão. Assim, seja \mathcal{U} um domínio limitado e simplesmente conexo em \mathbb{R}^3 , com $0 \in \mathcal{U}$, suponhamos que sua fronteira Γ seja de classe C^2 , e definamos $\mathcal{U}_R = R\mathcal{U}$ e $\Gamma_R = R\Gamma = \partial\mathcal{U}_R$ para cada $R > 0$. Consideremos o subespaço de $W^{1,2}(\mathbb{R}^3)$

$$V(\mathbb{R}^3) = \{f \in W^{1,2}(\mathbb{R}^3); \operatorname{div} f = 0 \text{ em } \mathbb{R}^3\}$$

e um campo $u_0 \in V(\mathbb{R}^3) \cap C^s(\mathbb{R}^3)$ ($s > 1$), com $\operatorname{supp}(\operatorname{rot} u_0)$ compacto. Recordamos que, com este dado inicial, as equações de Euler (E) no espaço \mathbb{R}^3 admitem uma única solução $u \in C^s([0, T] \times \mathbb{R}^3)$ para todo $T \in (0, T^*)$, onde T^* continua denotando o tempo de existência finito para esta solução (veja o Teorema 1.17). Como neste trabalho, para cada $R > 0$, foi construído um campo $\widehat{u}_{0,R} \in H(\mathcal{U}_R)$ a fim de que este fosse o dado inicial natural para as equações de Navier-Stokes

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t u^{\nu,R} + (u^{\nu,R} \cdot \nabla) u^{\nu,R} - \nu \Delta u^{\nu,R} = -\nabla p & \text{em } \mathcal{U}_R \times (0, T), \\ \operatorname{div} u^{\nu,R} = 0 & \text{em } \mathcal{U}_R \times [0, T), \\ u^{\nu,R} = 0 & \text{em } \Gamma_R \times (0, T), \\ u^{\nu,R}(x, 0) = \widehat{u}_{0,R}(x) & \text{em } \mathcal{U}_R \times \{t = 0\}. \end{array} \right.$$

Salientamos que este sistema possui pelo menos uma solução fraca como aquela construída no Teorema 2.11, fato também proveniente do célebre trabalho [26]. Sendo assim, fixamos uma solução fraca $u^{\nu,R}$ deste problema no sentido de Leray. Ainda sobre a família $\{\widehat{u}_{0,R}; R > 0\}$, destacamos que um dos resultados de [21] garante a

existência de uma constante $C > 0$ de forma que

$$\|\widehat{u}_{0,R} - u_0\|_{L^2(\mathcal{U}_R)} \leq \frac{C}{\sqrt{R}}$$

para todo $R > 0$ suficientemente grande. Este decaimento é essencial para a validade do comportamento assintótico lá analisado. Finalmente, enunciamos o principal resultado de [21].

Teorema 4.10 *Com as notações que acabamos de fixar, existe uma contante $C = C(s, T, \mathcal{U}, u_0) > 0$ tal que*

(a) *Se $s > 1$, então*

$$\|u^{\nu,R} - u\|_{L^\infty([0,T];L^2(\mathcal{U}_R))} \leq \left[C \left(\sqrt{\nu} + \frac{1}{\sqrt{R}} \right) + \|\widehat{u}_{0,R} - u_0\|_{L^2(\mathcal{U}_R)} \right] e^{CT};$$

(b) *Se $s \geq 2$, então*

$$\|u^{\nu,R} - u\|_{L^\infty([0,T];L^2(\mathcal{U}_R))} \leq \left[C \left(\nu + \frac{1}{\sqrt{R}} \right) + \|\widehat{u}_{0,R} - u_0\|_{L^2(\mathcal{U}_R)} \right] e^{CT},$$

para todo $R > 0$ suficientemente grande.

Tanto em nosso trabalho quanto em [21] o objetivo é avaliar como é afetado o comportamento de um escoamento com viscosidade pequena quando sua fronteira está distante. Antes da obtenção do Teorema 4.8, já havia a expectativa de que a influência da fronteira distante no caso aqui tratado seria maior do que no caso tratado em [21]. Destacamos que o nosso Teorema 4.8 e o Teorema 4.10 (provado em [21]), confirmam o que a nossa intuição já anunciava, uma vez que a taxa de convergência obtida no primeiro é

$$\|u^{\nu,R} - u\|_{L^\infty([0,T];L^2(\Pi_R))} \leq C \left(\frac{1}{R} + \sqrt{\nu} \right)$$

enquanto no segundo

$$\|u^{\nu,R} - u\|_{L^\infty([0,T];L^2(\mathcal{U}_R))} \leq C \left(\sqrt{\nu} + \frac{1}{\sqrt{R}} \right),$$

se $s > 1$ e

$$\|u^{\nu,R} - u\|_{L^\infty([0,T];L^2(U_R))} \leq C \left(\nu + \frac{1}{\sqrt{R}} \right),$$

se $s \geq 2$.

Na próxima observação, encerraremos o trabalho levantando uma breve discussão sobre os diferentes expoentes do parâmetro ν nos Teoremas 4.8 e 4.10.

Observação 4.11 *Na Afirmação 4 da demonstração do Teorema 4.8, vimos que existe uma constante $C = C(T) > 0$ tal que*

$$\begin{aligned} & \left| \nu \int_0^t \|\nabla u^R\|_{L^2(\Pi_R)}^2 d\tau - \nu \int_0^t \int_{\Pi_R} \nabla u^{\nu,R} : \nabla u^R dx d\tau \right| \\ & \leq \frac{\nu}{2} \int_0^t \|(\nabla u^{\nu,R} - \nabla u^R)(\tau)\|_{L^2(\Pi_R)}^2 d\tau + C\nu \end{aligned}$$

para todo $t \in [0, T]$ e para todo $R > 0$ suficientemente grande.

No caso do artigo [21], é possível constatar a existência de uma constante $K > 0$ tal que

$$\begin{aligned} & \left| \nu \int_0^t \|\nabla u^R\|_{L^2(U_R)}^2 d\tau - \nu \int_0^t \int_{U_R} \nabla u^{\nu,R} : \nabla u^R dx d\tau \right| \\ & \leq K \int_0^t \|(u^{\nu,R} - u^R)(\tau)\|_{L^2(\Pi_R)}^2 d\tau + KT\nu^2, \end{aligned}$$

o que provém de uma integração por partes na qual surge uma integral de superfície sobre ∂U_R que vale zero. Ressaltamos que, no nosso contexto, uma estratégia análoga não produz um efeito positivo, pois integrações por partes em conjuntos da forma

$$\Pi_R \cap \{y \in \mathbb{R}^3; |y - (R, 0, 0)| \leq s\},$$

com $\Omega_R \subset B_s(R, 0, 0)$, sempre originam integrais de superfície sobre

$$\{y \in \mathbb{R}^3; |y - (R, 0, 0)| = s\}$$

que não valem zero. Isto explica por que aparecem as parcelas $\sqrt{\nu}$ no nosso teorema e ν no Teorema 4.10 (com $s > 2$).

Bibliografia

- [1] R. A. Adams, *Sobolev Spaces*, Pure and Applied mathematics, vol. 65, Academic Press, 1975.
- [2] V. Arnold, *Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications à l'hydrodynamique des fluides parfaits*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **16** (1966), fasc. 1, 319-361.
- [3] H. Brèzis, *Análisis Funcional: Teoría y aplicaciones*, Alianza Editorial, S.A., Madrid, 1984.
- [4] M. P. do Carmo, *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*, Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2005.
- [5] M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti, *Introdução á Teoria das Distribuições e aos Espaços de Sobolev*, Maringá, Eduem, 2009.
- [6] J.-Y. Chemin, *Perfect incompressible fluids*, vol. 14 of Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1998. Translated from the 1995 French original by Isabelle Gallagher and Dragos Iftimie.
- [7] A. Chorin and J. Marsden, *An Introduction to Mathematical Theory Fluid Mechanics*, Springer Verlag, New York, 1979.
- [8] D. Ebin and J. Marsden, *Groups of Diffeomorphisms and the Motion of an Incompressible Fluid*, Ann. of Math., **92** (1970), n° 1, 102-163.

- [9] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, Providence, 2002.
- [10] G. B. Folland, *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*, John Wiley and Sons, 2nd edition, 1999.
- [11] G. P. Galdi, *An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier-Stokes Equations: Steady Problems*, 2nd edition, Springer Monography in Mathematics, 2011.
- [12] P. R. Halmos, *Introduction to Hilbert space and the theory of spectral multiplicity*, 2nd edition, New York: Chelsea Publishing, 1957.
- [13] E. Hille and R. S. Phillips, *Functional Analysis and Semigroups*, American Math. Soc. Colloq. publ., vol. 31, 1957.
- [14] E. Hopf, *Über die Anfangswertaufgabe für die Hydrodynamischen Grundgleichungen*, Math. Nachr, **4** (1951), 213-231.
- [15] D. Iftimie, J. Kelliher, *Remarks on the vanishing obstacle limit for a 3D viscous incompressible fluid*, Proc. Amer. Math. Soc. 137 (2009), n° 2, 685-694.
- [16] D. Iftimie, M. C. Lopes Filho, H. J. Nussenzweig Lopes, *Incompressible flow around a small obstacle and the vanishing viscosity limit*, Communications in Mathematical Physics, vol. 289, pag. 99-115, 2009.
- [17] D. Iftimie, M. C. Lopes Filho, H. J. Nussenzweig Lopes, *Two dimensional incompressible ideal flow around a small obstacle*, Communications in Partial Differential Equations, 28(1-2), pag. 349-379, 2003.
- [18] D. Iftimie, M. C. Lopes Filho, H. J. Nussenzweig Lopes, *Two dimensional incompressible viscous flow around a small obstacle*, Math Ann, 336(2), pag.449-489, 2006.

- [19] T. Kato, *Remarks on zero viscosity limit for nonstationary Navier-Stokes flows with boundary*, in Seminar on PDE, edited by S. S. Chern, Springer, NY, 1984.
- [20] J. P. Kelliher, *Expanding domain limit for incompressible fluids in the plane*, Communications in Math. Phys., 278(3), pag. 753-773, 2008.
- [21] J. P. Kelliher, M. C. Lopes Filho, H. J. Nussenzveig Lopes, *Vanishing viscosity limit for an expanding domain in space*, Annales de l'IHP-analyse non-lineaire, 2521-2537, 2009.
- [22] E. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley, New York, 1978.
- [23] C. Lacave, *Two Dimensional Incompressible Ideal Flow Around a Thin Obstacle Tending to a Curve*, Annales de L'IHP, Analyse non linéaire, **26** (2009), n°4, 1121-1148.
- [24] C. Lacave, *Two Dimensional Incompressible Viscous Flow Around a Thin Obstacle Tending to a Curve*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, vol. 139 (2009), n°6, 1237-1254.
- [25] O. Ladyshenskaya, *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flows*, 2nd english edn. Gorgon and Breach, New York, 1969.
- [26] J. Leray, *Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l' espace*, Acta Math. **63** (1934) ,n° 1, 193-248.
- [27] M. C. Lopes Filho, *Vortex dynamics in a two-dimensional domain with holes and the small obstacle limit*, SIAM J. Math. Anal., 39(2), pag. 422-436, 2007.
- [28] A. Majda and A. Bertozzi, *Vorticity and incompressible flow*, Cambridge Texts in Applied Mathematics, vol. 27, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

- [29] M. C. Lopes Filho, H. J. Nussenzweig Lopes, Y. Zheng, *Weak solutions for the equations of incompressible and inviscid fluid dynamics*, 22^o Colóquio Brasileiro de Matemática, 1999.
- [30] L. Prandtl, *Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung*, Verhandlungen des dritten internationalen Mathematiker-Kongresses (Heidelberg 1904), pag. 484-491, 1905. Kraus Reprinted Ltd. 1967.