



JANETE DE PAULA FERRAREZE

**TRANSITIVIDADE DE SEMIGRUPOS EM
VARIEDADES HOMOGÊNEAS**

CAMPINAS

2012



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E
COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

JANETE DE PAULA FERRAREZE

TRANSITIVIDADE DE SEMIGRUPOS EM
VARIETADES HOMOGÊNEAS

Orientador: Prof. Dr. Luiz Antonio Barrera San Martin

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós Graduação
em Matemática do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
da Universidade Estadual de Campinas para obtenção do título de Doutora em Matemática.

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA TESE
DEFENDIDA PELA ALUNA JANETE DE PAULA FERRAREZE
E ORIENTADA PELO PROF. DR LUIZ ANTONIO BARRERA SAN MARTIN

Assinatura do Orientador

A handwritten signature in black ink, which appears to read "Luiz A. B. San Martin", is written over a light blue horizontal line.

CAMPINAS

2012

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA POR
ANA REGINA MACHADO - CRB8/5467
BIBLIOTECA DO INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E
COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA - UNICAMP

F412t Ferrareze, Janete de Paula, 1982-
Transitividade de semigrupos em variedades homogêneas /
Janete de Paula Ferrareze. – Campinas, SP : [s.n.], 2012.

Orientador: Luiz Antonio Barrera San Martin.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas,
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Lie, Grupos de. 2. Semigrupos. 3. Variedades homogêneas.
4. Teoria do controle. I. San Martin, Luiz Antonio Barrera, 1955-. II.
Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática,
Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em inglês: Transitivity of semigroups on homogeneous manifolds

Palavras-chave em inglês:

Lie groups

Semigroups

Homogeneous manifolds

Control theory

Área de concentração: Matemática

Titulação: Doutora em Matemática

Banca examinadora:

Luiz Antonio Barrera San Martin [Orientador]

Elizabeth Terezinha Gasparim

Caio José Colletti Negreiros

Oswaldo Germano do Rocio

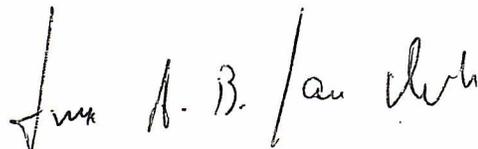
Mauro Moraes Alves Patrão

Data de defesa: 12-09-2012

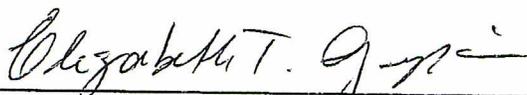
Programa de Pós-Graduação: Matemática

Tese de Doutorado defendida em 12 de setembro de 2012 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



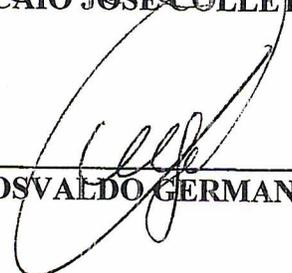
Prof(a). Dr(a). LUIZ ANTONIO BARRERA SAN MARTIN



Prof(a). Dr(a). ELIZABETH TEREZINHA GASPARIM



Prof(a). Dr(a). CAIO JOSÉ COLLETTI NEGREIROS



Prof(a). Dr(a). OSVALDO GERMANO DO ROCIO



Prof(a). Dr(a). MAURO MORAES ALVES PATRÃO

*Aos meus pais
Eduardo e Nair*

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente à Deus por dar-me sabedoria, força e esperança.

Ao Prof. Luiz San Martin, agradeço pela atenção, paciência e pela excelente orientação.

Ao meu querido Jair, agradeço pelo amor, companheirismo e compreensão durante todos os anos de doutorado.

À minha família, agradeço pelo apoio, pelas orações e por estarem sempre ao meu lado.

Aos amigos pelos momentos de descontração. Agradeço também àqueles que sempre me incentivaram durante meu processo de formação e aperfeiçoamento profissional, em especial agradeço a Michael, Ariane, Juliana e Fernando.

Aos Profs. Osvaldo, Mauro, Elizabeth e Caio por gentilmente terem aceito o convite para participarem da banca examinadora e pelas sugestões que contribuíram para melhorar a versão final da tese.

Aos funcionários do IMECC, agradeço pela atenção e pela disposição para solucionar as questões burocráticas.

À CAPES e ao CNPq pelo apoio financeiro.

RESUMO

Seja G um grupo de Lie simples, $S \subset G$ um semigrupo com interior não vazio e $L \subset G$ um subgrupo fechado e conexo. Para que a ação de S seja transitiva na variedade homogênea G/L é necessário que L seja transitivo no tipo parabólico $\mathbb{F}(S)$ de S , que L admita uma sequência contractante com respeito a essa variedade e ainda que $\mathbb{F}(S)$ seja flag de L . No caso em que S é um semigrupo de compressão essa condição é também suficiente. A partir desses resultados, apresentamos nessa tese pares (S, L) tais que S é transitivo em G/L , com S semigrupo próprio de G . Além disso, selecionamos algumas variedades homogêneas onde isso não ocorre. Para isso, selecionamos subgrupos com as propriedades citadas acima utilizando resultados envolvendo dualidade entre variedades flags, dimensões dessas variedades e o fato que algumas delas não podem ser flags dos grupos G e L simultaneamente. A busca por esses pares (S, L) está relacionada com a questão de verificar quando a condição $S = G$ é necessária para a controlabilidade de um sistema invariante em G/L . Diante dos resultados encontrados, concluímos que os casos em que isso ocorre são raros.

ABSTRACT

Let G be a simple Lie group, $S \subset G$ a semigroup with nonvoid interior and $L \subset G$ a closed and connected subgroup. In order that S is transitive on a homogeneous manifold G/L is necessary that the action of L on parabolic type $\mathbb{F}(S)$ is transitive, that L admits a contractive sequence with respect to $\mathbb{F}(S)$ and that this manifold is flag of L . In the case that S is a compression semigroup this condition is also sufficient. From these results, we present here pairs (S, L) such that S is transitive on G/L and $S \neq G$. Furthermore, we selected some homogeneous manifolds in that it doesn't occur. For this purpose we selected subgroups with the property above mentioned using results about duality between flag manifolds, dimensions of these manifolds and the fact that some them can not be flags of the groups G and L simultaneously. The search for these pairs (S, L) is related with the problem of verifying when the condition $S = G$ is necessary for the controllability of a invariant system in G/L . In view these results, we concluded that the cases in which this occurs are rare.

CONTEÚDO

Agradecimentos	ix
1 Preliminares	7
1.1 Motivação	7
1.2 Ação Minimal e Sequência Contractante	8
1.2.1 Tipo Parabólico	8
1.2.2 Ação Minimal e Sequência Contractante	10
1.3 Caracterização de semigrupos transitivos	11
1.4 Resultados quando L é conexo	13
1.5 Tipo Parabólico de $S_L := S \cap L$	14
1.5.1 $\mathbb{F}(S_L)$ se projeta em $\mathbb{F}(S)$	15
1.6 Resultados envolvendo Variedades Flags Duais	15
2 Grupos Transitivos em Flags Minimais de $Sl(n, \mathbb{R})$	19
2.1 Grupos Transitivos no Espaço Projetivo Real	19
2.2 Grupos Transitivos em Grassmannianas Reais	22
3 Variedades Homogêneas de $Sl(n, \mathbb{R})$ Admitindo Ação Transitiva de Semigrupos Próprios	25
3.1 Existência de sequências contractantes	25
3.1.1 $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$	26
3.1.2 $\mathfrak{sl}(m, \mathbb{C})$	26
3.1.3 $\mathfrak{sl}(m, \mathbb{H})$	28
3.1.4 $\mathfrak{sp}(m, \mathbb{R})$	30
3.1.5 $\mathfrak{sp}(m, \mathbb{C})$	32
3.1.6 $\mathfrak{sl}(m, \mathbb{H}) \oplus \mathfrak{su}(2)$	33
3.2 Semigrupos com Tipo Parabólico $\mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1}$ ou $Gr_k(n)$	33
3.3 $\mathbb{F}(S_L) = \mathbb{F}(S)$ para o caso $L = Sp(n, \mathbb{R})$, $G = Sl(2n, \mathbb{R})$ e $S = S_{[W]}$	37

3.4	Semigrupos com Tipo Projetivo ou Tipo K	38
3.5	Conclusões	40
4	Transitividade em Variedades Homogêneas de Grupos Complexos	41
4.1	Redução ao caso Maximal	42
4.2	Comparando dimensões entre flags de G e órbitas de L	45
4.2.1	Dimensão de um flag	45
4.2.2	Exclusão de alguns subgrupos maximais L	47
4.3	Casos não excluídos	67
4.4	Estudo dos casos da tabela 4.4	69
4.5	Transitividade em Variedades Homogêneas de Grupos Complexos	72
4.6	Transitividade em $\mathrm{Sp}(N, \mathbb{C})/L$	73
4.7	Transitividade em $\mathrm{SO}(2N + 1, \mathbb{C})/L$	73
4.7.1	O caso $G_2 \subset B_3 = \mathfrak{so}(7)$	73
4.8	Transitividade em $\mathrm{SO}(2N, \mathbb{C})/L$	75
4.8.1	O caso $B_n \subset D_{n+1} = \mathfrak{so}(2n + 2)$	76
4.9	Transitividade em $\mathrm{Sl}(N, \mathbb{C})/L$	78
4.9.1	$\mathbb{C}P^{2m-1}$ e $C_{2m, 2m-1}$ são flags de $\mathrm{Sp}(m, \mathbb{C})$	79
4.10	Conclusões	81
4.11	Flag maximal de grupo complexo	82
4.12	Grupos complexos e formas reais normais	84
4.12.1	Flag complexo de formas reais normais	84
A	Subgrupos Maximais dos Grupos Clássicos	85
A.1	Redução à Teoria de Representações	87
A.2	$\mathrm{Sl}(N)$	90
A.3	$\mathrm{Sp}(N)$	90
A.4	$\mathrm{O}(N)$	90
	Bibliografia	97

INTRODUÇÃO

Nesse trabalho apresentamos resultados sobre a existência de variedades homogêneas G/L que admitam ação transitiva de semigrupos próprios $S \subset G$, com interior não vazio, sendo G um grupo de Lie simples e $L \subset G$ um subgrupo fechado, conexo e semissimples. Para encontrar os subgrupos que satisfazem essas características, utilizamos resultados de San Martin [11] e de San Martin e Tonelli [16] que afirmam que o tipo parabólico de S , denotado por $\mathbb{F}(S)$, deve ser flag comum de L e de G e também que afirmam que L deve ter ação transitiva e contractante com respeito $\mathbb{F}(S)$. Procedendo dessa maneira, apresentamos nesse trabalho exemplos de variedades homogêneas G/L que admitem ação transitiva de semigrupos próprios de G . Apresentamos também resultados que garantem que certas variedades homogêneas não podem admitir ação transitiva de semigrupos que não sejam o grupo todo. Nesse sentido destacamos as seguintes variedades que podem admitir ação transitiva de semigrupos próprios de G :

- $\mathrm{Sl}(2n, \mathbb{R})/\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$, sendo que o semigrupo que age transitivamente nessa variedade homogênea deve ter tipo parabólico igual a $\mathbb{R}P^{2n-1}$ ou $Gr_{2n-1}(2n)$.
- $\mathrm{Sl}(2n, \mathbb{C})/\mathrm{Sp}(n, \mathbb{C})$, sendo que o semigrupo que age transitivamente nessa variedade homogênea deve ter tipo parabólico igual a $\mathbb{C}P^{2n-1}$ ou $C_{2n, 2n-1}$.
- $\mathrm{SO}(7, \mathbb{C})/G_2$, sendo que o semigrupo que age transitivamente nessa variedade homogênea deve ter tipo parabólico igual a $\mathbb{F}_{\Theta_1} = G/P_{\Theta_1}$, onde $\Theta_1 = \Sigma_G - \{\alpha_1\}$.
- $\mathrm{SO}(2n+2, \mathbb{C})/\mathrm{SO}(2n+1, \mathbb{C})$, sendo que o semigrupo que age transitivamente nessa variedade homogênea deve ter tipo parabólico igual a $\mathbb{F}_{\Theta_n} = G/P_{\Theta_n}$ ou $\mathbb{F}_{\Theta_{n+1}} = G/P_{\Theta_{n+1}}$, onde $\Theta_n = \Sigma_G - \{\alpha_n\}$ e $\Theta_{n+1} = \Sigma_G - \{\alpha_{n+1}\}$.

Além dos exemplos citados acima, destacamos variedades homogêneas que não podem admitir ação transitiva de semigrupos próprios de G , por exemplo:

- $\mathrm{Sl}(N, \mathbb{C})/L$, com $L \neq \mathrm{Sp}(m, \mathbb{R})$, onde $N = 2m$.
- $\mathrm{SO}(2N+1, \mathbb{C})/L$, com $L \neq G_2$ um subgrupo maximal irredutível simples.

- $\text{Sp}(N, \mathbb{R})/L$, com L um subgrupo maximal irreduzível simples.

Com os resultados obtidos, podemos observar que são raras as variedades homogêneas G/L que admitem ação transitiva de semigrupos próprios de G , com interior não vazio.

Um dos motivos para estudarmos a transitividade de semigrupos em variedades homogêneas é a sua relação com a controlabilidade de sistemas da forma

$$\dot{x} = \tilde{A}(x) + \sum_i u_i \tilde{B}_i(x), \quad (1)$$

com \tilde{A} e \tilde{B} campos induzidos por $A, B \in \mathfrak{g}$, onde \mathfrak{g} representa a álgebra de Lie do grupo G , $x \in \mathbb{R}^n$ e o controle u_i percorre os reais. Associado a esse sistema temos um semigrupo de G dado por

$$S = \{e^{A+u_1 B} \dots e^{A+u_m B} : u_i \in \mathbb{R}, m \geq 1\},$$

através do qual podemos estudar a controlabilidade do sistema. Temos que o sistema (1) é controlável em G/L se, e somente se, o semigrupo S é transitivo em G/L . Com isso, podemos concluir que se $S = G$, então o sistema é controlável. Mas essa condição é também necessária para a controlabilidade do sistema? Com os resultados apresentados nesse trabalho podemos dizer que na maioria das vezes a resposta para essa questão é afirmativa, pois percebemos que são raras as variedades homogêneas G/L que admitem ação transitiva de semigrupos próprios de G , conseqüentemente, na maioria das vezes para que um sistema da forma dada acima seja controlável em G/L é necessário que S seja o grupo todo. No entanto, vimos acima algumas exceções, ou seja, alguns exemplos onde não é preciso ter $S = G$ para que a ação desse semigrupo seja transitiva.

Para o caso em que G/L é compacto, essa condição realmente é necessária. Tal resultado foi apresentado por San Martin e Tonelli em [16] (Teo 1.2): “Seja G um grupo de Lie simples com centro finito, $S \subset G$ um semigrupo com $\text{int}(S) \neq \emptyset$ e $L \subset G$ um subgrupo fechado. Suponha que $0 < \dim L < \dim G$. Assuma que G/L seja compacto. Então S não é transitivo em G/L a menos que $S = G$ ”. Além disso, em [16] foi apresentado um contra-exemplo para o caso não compacto, ou seja, quando G/L não é compacto, podemos ter um semigrupo próprio $S \subset G$ tal que S é transitivo em G/L : “Consideremos o grupo de Lie $G = \text{Sl}(2n, \mathbb{R})$, $S_W = \{g \in \text{Sl}(2n, \mathbb{R}) : gW \subset W\}$ um semigrupo de G , onde W é um cone pontual e gerador do \mathbb{R}^{2n} e $L = \text{Sp}(n, \mathbb{R})$ um subgrupo de G . Temos que S_W é um semigrupo próprio, de interior não vazio que age transitivamente na variedade homogênea $\text{Sl}(2n, \mathbb{R})/\text{Sp}(n, \mathbb{R})$ ”.

A partir desse exemplo podemos nos perguntar: Existem outros pares da forma (S, L) tais que S é transitivo em G/L , além de $(S_W, \text{Sp}(n, \mathbb{R}))$? Quais condições L deve satisfazer para que a variedade homogênea G/L admita ação transitiva de semigrupos próprios de G com interior não vazio? Essa última pergunta foi respondida por San Martin e Tonelli em [16], impondo condições sobre os subgrupos fechados L de G para que G/L admita ação transitiva de semigrupos próprios $S \subset G$, com $\text{int}S \neq \emptyset$. Além disso, San Martin mostrou em [11] que essas condições são também suficientes para uma certa classe de semigrupos. Mais ainda, mostrou que se S age transitivamente em G/L , então o tipo parabólico de S é flag de L para o caso em que L é semissimples. Todos esses resultados tornaram possível a busca por pares (S, L) com as características descritas acima.

No desenvolvimento de nosso trabalho utilizamos alguns conceitos e definições como ferramentas fundamentais. Dentre eles destacamos o conceito de tipo parabólico de um semigrupo, denotado por $\mathbb{F}(S)$,

ações minimais de grupos em variedades flags e a existência de sequências contractantes no subgrupo L . Utilizando esses conceitos, foram provados em [11] e [16] resultados que nos dão uma caracterização de semigrupos próprios transitivos em variedades homogêneas de G . Mais precisamente, nesses artigos foram provados os seguintes resultados:

Teorema 1: Seja $S \subset G$ um semigrupo com $\text{int}S \neq \emptyset$, $L \subset G$ um subgrupo fechado e $\mathbb{F}(S)$ o tipo parabólico de S . Para que S seja transitivo na variedade homogênea G/L é necessário que a ação de L em $\mathbb{F}(S)$ seja minimal e que L admita uma sequência contractante com respeito a $\mathbb{F}(S)$, ver [16].

Teorema 2: Seja $S \subset G$ um semigrupo com $\text{int}S \neq \emptyset$ e $L \subset G$ um subgrupo fechado. Assuma G/L conexo. Para que S_C seja transitivo na variedade homogênea G/L é suficiente que a ação de L em $\mathbb{F}(S)$ seja minimal e que L admita uma sequência contractante com respeito a $\mathbb{F}(S)$, onde S_C é o semigrupo de compressão do conjunto de controle invariante para a ação de S em $\mathbb{F}(S)$, [11].

Proposição 1: Todo subgrupo fechado e conexo L para o qual a variedade homogênea G/L admite ação transitiva de um semigrupo $S \subset G$ é redutível, isto é, se L é S -admissível então L é redutível e sua componente semissimples E também é S -admissível. Além disso, L é não compacto e o tipo parabólico $\mathbb{F}(S)$ é uma variedade flag de E , ver [11].

A partir desses resultados, nossa busca se restringe aos pares (S, L) tais que S é transitivo em G/L , cujos subgrupos $L \subset G$ são fechados, conexos, semissimples e transitivos no tipo parabólico de S , já que para L conexo a ação minimal é equivalente a ação transitiva, ver [11]. Em seguida, investigamos entre os encontrados, quais possuem sequência contractante com respeito ao tipo parabólico de S . Em alguns casos, principalmente no último capítulo, usamos fortemente o resultado fornecido pela Proposição 1, o qual garante que se S age transitivamente em G/L , então o tipo parabólico de S é flag de L . Desta forma pudemos concluir que em alguns casos G/L não pode admitir ação transitiva de semigrupos próprios $S \subset G$, pois através da dimensão de flags e resultados mostrados por Rabelo e San Martin em [8] sobre homologia de flags complexos, verificamos que flags do subgrupo L não poderiam ser flags do grupo G . Selecionando L com as características descritas acima, temos pelo Teorema 2 que S_C age transitivamente em G/L . A partir disso, conseguimos selecionar os pares (S_C, L) tais que S_C é transitivo em G/L .

No desenvolvimento desse trabalho, primeiramente consideramos $G = \text{Sl}(n, \mathbb{R})$ e $S \subset G$ um semigrupo com interior não vazio, tal que o tipo parabólico de S é uma variedade flag minimal de G . Em seguida, através de resultados sobre projeções de flags, conseguimos resultados sobre semigrupos cujo tipo parabólico são variedades flags intermediárias que se projetam nessas minimais. Por último, passamos a considerar G um grupo de Lie complexo clássico. Para o caso real, consideramos semigrupos cujo tipo parabólico é uma variedade flag minimal de $\text{Sl}(n, \mathbb{R})$, ou seja, uma Grassmanniana real ou o espaço projetivo real. Assim, o primeiro passo foi procurar os subgrupos de $\text{Sl}(n, \mathbb{R})$ que são transitivos nessas variedades, depois estudamos os subgrupos encontrados, e selecionamos aqueles que possuem sequência contractante com respeito a tais variedades. Para o caso complexo, usamos uma classificação dos subgrupos maximais simples dos grupos clássicos, feita por Dynkin em [2], dados nas tabelas 4.1, 4.2 e 4.3, e procuramos dentre esses subgrupos àqueles que possuem flags em comum com o grupo.

No primeiro capítulo dessa tese, apresentamos os conceitos de tipo parabólico, ações minimais de grupos em variedades flag e também a existência de sequências contractantes, que são ferramentas essenciais para o desenvolvimento da tese. Além disso, esse capítulo contém os teoremas 1 e 2 e a Proposição 1 citados

acima, alguns resultados desenvolvidos por San Martin em [11] e um lema, os quais nos permitem restringir a busca pelos subgrupos $L \subset G$ que são fechados, conexos, semissimples, não compactos e transitivos no tipo parabólico $\mathbb{F}(S)$. Nesse capítulo provamos também a seguinte proposição: “Seja G um grupo de Lie semissimples e $L \subset G$ um subgrupo fechado, e semissimples. Se \mathbb{F}_Θ é flag de L , então L também age transitivamente na variedade flag dual \mathbb{F}_{Θ^*} .” Tal resultado garante que certos subgrupos transitivos em variedades flags são também transitivos nas variedades flags duais a essas.

Dedicamos o segundo capítulo à procura de grupos conexos transitivos nas variedades flags minimais $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ e $Gr_k(n)$ de $Sl(n, \mathbb{R})$, pois assim resolvemos os casos em que o tipo parabólico de S é uma dessas variedades ou que se projeta em alguma delas. Para o caso em que o tipo parabólico é o espaço projetivo, utilizamos uma tabela fornecida por Boothby e Wilson em [1] que contém os subgrupos transitivos em $\mathbb{R}^n - \{0\}$, e para o caso em que o tipo parabólico é uma variedade Grassmanniana, utilizamos resultados envolvendo dualidade de variedades flag, citados acima, e alguns resultados sobre transitividade em Grassmannianas apresentados por Oniščik nos artigos [6] e [7]. Mais resultados sobre transitividade de grupos de Lie em variedades compactas podem ser encontrados em [3], [4] e [5].

No terceiro capítulo, utilizamos os grupos selecionados no segundo capítulo e o conceito de sequência contractante para encontrar variedades homogêneas de $Sl(n, \mathbb{R})$ que admitam ação transitiva de semigrupos próprios com interior não vazio, cujo tipo parabólico se projeta em uma variedade Grassmanniana ou no espaço projetivo. Nesse capítulo provamos um dos principais resultados da tese, utilizando os subgrupos transitivos em $\mathbb{R}P^{n-1}$ e/ou em $Gr_k(n)$ que possuem sequência contractante com respeito a essas variedades. Mais precisamente, foi provado o seguinte resultado:

Teorema: Seja $G = Sl(n, \mathbb{R})$ e $S \subset G$ um semigrupo próprio com $\text{int}(S) \neq \emptyset$, cujo o tipo parabólico $\mathbb{F}(S)$ é de tipo projetivo ou tipo k (exceto os casos em aberto: $Gr_2(4)$, $Gr_3(8)$, $Gr_{2l+1}(2m)$, com $2l+1 < 2m-3$). Então a única variedade homogênea não trivial de G na qual S pode ser transitivo é $Sl(n, \mathbb{R})/Sp(m, \mathbb{R})$, com $n = 2m$.

Os resultados vistos no primeiro capítulo, são válidos para grupos de Lie simples em geral. Desta forma, dedicamos o quarto capítulo à busca de variedades homogêneas G/L que admitam ação transitiva de semigrupos próprios de G com interior não vazio, onde G é um grupo de Lie complexo clássico e L é um subgrupo fechado, conexo, simples e maximal de G . Pela Proposição 1, podemos buscar pelos grupos G e subgrupos L que possuem flags em comum. Para isso, consideramos novamente o tipo parabólico de S uma variedade minimal de G e utilizamos os subgrupos maximais dos grupos clássicos obtidos por Dynkin em [2]. No capítulo em questão, demonstramos o seguinte lema: “Seja $L \subset G$ um subgrupo fechado e conexo e $\mathbb{F}_\Theta = G/P_\Theta$ uma variedade flag de G . Considere $L = KAN$ a decomposição de Iwasawa de L e suponha que a ação de L em \mathbb{F}_Θ seja transitiva. Então $\dim \mathbb{F}_\Theta \leq \dim L - \dim AN$ ”. Esse resultado fornece um limitante superior para a dimensão dos flags de G em que L pode agir transitivamente. Com isso, eliminamos muitos dos subgrupos maximais L classificados em [2], ou seja, concluímos que para a maioria deles a variedade homogênea G/L não pode admitir ação transitiva de semigrupos próprios de G . Em seguida, eliminamos outros subgrupos em que os flags selecionados através da dimensão têm segunda homologia diferente dos flags de G . Para concluir isso, usamos o fato que a segunda homologia de $H_2(\mathbb{F}_\Theta; \mathbb{Z})$ é dada por $\mathbb{Z}^{|\Sigma - \Theta|}$, onde $|\Sigma - \Theta|$ é o número de elementos em $\Sigma - \Theta$, ver [8]. Procedendo dessa maneira, provamos resultados que resumimos da seguinte forma:

Teorema: Seja G um dos grupos de Lie complexos clássicos $\text{Sp}(N, \mathbb{C})$ ou $\text{SO}(N, \mathbb{C})$, $L \subset G$ um dos subgrupos maximais fechados, conexos e semissimples classificados por Dynkin em [2] e $S \subset G$ um semigrupo próprio, com $\text{int}S \neq \emptyset$.

1. Se $G = \text{Sp}(N, \mathbb{C})$, então S não pode agir transitivamente em G/L' , para qualquer $L' \subset L$.
2. Se $G = \text{SO}(2N + 1, \mathbb{C})$, então a única variedade homogênea de G , além da trivial, na qual S pode ser transitivo é $\text{SO}(7, \mathbb{C})/G_2$, onde G_2 é subgrupo de $\text{SO}(7, \mathbb{C})$ com álgebra de Lie G_2 .
3. Se $G = \text{SO}(2N, \mathbb{C})$, então as possibilidades para G/L nas quais S pode ser transitivo são:
 - (a) L com álgebra de Lie B_n e G com álgebra de Lie D_{n+1} , com $n \geq 3$.
 - (b) L com álgebra de Lie $B_n \cdot A_1$ e G com álgebra de Lie D_{n+3} , com $n \geq 2$.
 - (c) L com álgebra de Lie $B_{n_1} \cdot B_{n_2}$ e G com álgebra de Lie $D_{n_1+n_2+1}$, com $n_1 \geq 1$, $n_2 \geq 1$ e $n_1 + n_2 \geq 4$.

Para os casos $\text{SO}(7, \mathbb{C})/G_2$ e D_{n+1}/B_n , com $n \geq 3$, mostramos usando órbitas projetivas de vetores de peso máximo, que uma certa variedade flag de L é uma subvariedade aberta e fechada de uma variedade flag de G , e dessa forma são iguais, concluindo assim que essas variedades homogêneas admitem ação transitiva de semigrupos próprios. Para o caso em que $G = \text{Sl}(n, \mathbb{C})$, utilizamos resultados de Oniščik que fornecem os subgrupos transitivos no espaço projetivo $\mathbb{C}P^{n-1}$ e nas Grassmannianas complexas $C_{n,k}$. Dessa forma, mostramos um resultado semelhante so obtido no caso real:

Teorema: Seja $G = \text{Sl}(n, \mathbb{C})$ e $S \subset G$ um semigrupo próprio com $\text{int}(S) \neq \emptyset$, transitivo em G/L . Se n é ímpar ou se n é par e $\mathbb{F}(S)$ se projeta em $C_{n,k}$, diferente de $C_{n,n-1}$ e de $\mathbb{C}P^{n-1}$, então G/L é trivial. Se n é par e $\mathbb{F}(S) = \mathbb{C}P^{n-1}$ ou $\mathbb{F}(S) = C_{n,n-1}$, então a única possibilidade para G/L , além da trivial, é $\text{Sl}(n, \mathbb{C})/\text{Sp}(m, \mathbb{C})$, com $n = 2m$.

A partir desses teoremas, ao final dos Capítulos 3 e 4, os principais desse trabalho, fizemos algumas conclusões, apresentamos alguns pares (S, L) tais que S é transitivo em G/L e algumas observação sobre casos em que a ação transitiva de semigrupos próprios não pode acontecer.

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

Neste capítulo vamos apresentar resultados e definições importantes para o desenvolvimento deste trabalho. Nosso objetivo é encontrar variedades homogêneas G/L que admitam ação transitiva de semigrupos próprios $S \subset G$ com interior não vazio. Para isso vamos utilizar resultados onde o conceito de tipo parabólico, ou tipo flag, é fundamental. Tais resultados, mostrados por San Martin em [11] e por San Martin e Tonelli em [16], estabelecem condições bastante restritivas sobre L para que G/L admita ação transitiva de um semigrupo S de interior não vazio.

1.1 Motivação

A ideia de estudar esse assunto surgiu a partir da seguinte questão: A condição $S = G$ é suficiente para que se tenha ação transitiva de S em variedades homogêneas de G , mas essa condição é também necessária? Motivados por essa questão, procuramos responder quando tal condição não é necessária, ou seja, para quais variedades G/L existem semigrupos próprios de G agindo transitivamente. No caso em que a variedade homogênea é compacta, a resposta para essa questão é afirmativa, como mostra o teorema a seguir apresentado em [16], (Teo 1.2).

Teorema 1.1. *Seja G um grupo de Lie simples com centro finito, $S \subset G$ um semigrupo com $\text{int}(S) \neq \emptyset$ e $L \subset G$ um subgrupo fechado. Suponha que $0 < \dim L < \dim G$. Assuma que G/L seja compacto. Então S não é transitivo em G/L a menos que $S = G$.*

A princípio, esse resultado foi apresentado em [15] (Teo 6.4) sem a hipótese de que G/L fosse compacto, e foi corrigido posteriormente em [16], apresentando-se na forma acima. Além disso, nesse artigo foi apresentado um contra-exemplo para o caso não compacto, a saber, foi mostrado que o semigrupo de compressão de um cone W definido por

$$S_W = \{g \in \text{Sl}(2n, \mathbb{R}) : gW \subset W\},$$

onde $W \subset \mathbb{R}^{2n}$ é um cone pontual, isto é, $W \cap -W = \{0\}$, e gerador ($\text{int}W \neq \emptyset$), age transitivamente na variedade homogênea $\text{Sl}(2n, \mathbb{R})/\text{Sp}(n, \mathbb{R})$. Veremos mais detalhes no exemplo 3.5. Desta forma, temos que se G/L não é compacto, pode existir um semigrupo próprio $S \subset G$ tal que S é transitivo em G/L .

A partir desse exemplo podemos nos perguntar: Quais condições o subgrupo L deve satisfazer para que existam semigrupos próprios, com interior não vazio, que agem transitivamente em variedades homogêneas de G ? Essa pergunta foi respondida por San Martin e Tonelli em [16] e por San Martin em [11], impondo condições bastante restritivas sobre os subgrupos fechados L de G para que isso ocorra. As condições necessárias apresentadas em [16] afirmam que a ação de L no tipo parabólico de S deve ser minimal e que L deve admitir sequência contractante com respeito a esse tipo parabólico. Além disso, em [11] é apresentada uma condição necessária que será fortemente utilizada no quarto capítulo a qual garante que o tipo parabólico de S deve ser variedade flag do subgrupo L . Motivados pela questão acima e fundamentados nessas condições, vamos encontrar variedades homogêneas que admitam ação transitiva de semigrupos próprios.

1.2 Ação Minimal e Sequência Contractante

Apresentamos nessa seção alguns resultados desenvolvidos por San Martin e Tonelli em [16] que estabelecem condições sobre L para que existam semigrupos transitivos em G/L . Mas antes disso, exibiremos alguns conceitos e definições indispensáveis para tais resultados.

1.2.1 Tipo Parabólico

Nessa seção apresentamos a definição de tipo parabólico, denominado também por tipo flag, um conceito fortemente usado no teorema principal desse capítulo. Apresentamos antes disso, algumas conceitos preliminares relacionados à teoria de semigrupos e de controle. Os resultados sobre esse assunto, apresentados a seguir, podem ser encontrados em [15].

Seja G um grupo de Lie semissimples, conexo, não compacto, com centro finito e \mathfrak{g} a álgebra de Lie de G . Denotamos por Π o sistema de raízes, Π^+ o conjunto de raízes positivas e Σ o subconjunto de raízes simples de \mathfrak{g} . Seja \mathfrak{g}_α o espaço de raízes associado a $\alpha \in \Pi$ e $\mathfrak{n}^+ = \sum_{\alpha \in \Pi^+} \mathfrak{g}_\alpha$. Assim, temos a decomposição de Iwasawa $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^+$ da álgebra de Lie \mathfrak{g} , onde \mathfrak{k} é dada pela decomposição de Cartan $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$ de \mathfrak{g} e $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{s}$ é uma subálgebra abeliana maximal. A partir da decomposição de Iwasawa da álgebra de Lie, temos a decomposição global de Iwasawa do grupo correspondente, a qual denotamos por $G = KAN^+$. Denotemos por \mathfrak{m} o centralizador de \mathfrak{a} em \mathfrak{k} . A subálgebra $\mathfrak{p} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^+$ é chamada subálgebra parabólica minimal e a partir desta temos as demais subálgebras parabólicas $\mathfrak{p}_\Theta = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{n}^-(\Theta)$ denominada subálgebra parabólica associada a $\Theta \subset \Sigma$, onde $\mathfrak{n}^-(\Theta) = \sum_{\alpha \in (\Theta)^+} \mathfrak{g}_{-\alpha}$. Normalizando-a, obtemos o subgrupo parabólico $P_\Theta = \{g \in G; \text{Ad}(g)\mathfrak{p}_\Theta = \mathfrak{p}_\Theta\}$ e a partir desses subgrupos, definimos um dos principais ambientes de nosso estudo, as variedades flags.

Definição 1.2. Chamamos de variedade Flag \mathbb{F}_Θ a variedade homogênea G/P_Θ .

Para definirmos tipo parabólico de um semigrupo, utilizamos os conjuntos de controle invariantes para a ação de S contidos nas variedades flags, os quais definimos a seguir.

Definição 1.3. *Seja $S \subset G$ um semigrupo com $\text{int}S \neq \emptyset$. Um conjunto de controle invariante para S é um subconjunto não vazio $C_\Theta \subset \mathbb{F}_\Theta$ satisfazendo:*

- i) Para todo $x \in C_\Theta$, $\text{fe}(Sx) = \text{fe}C_\Theta$*
- ii) C_Θ é maximal satisfazendo a propriedade (i).*

Além do conjunto de controle invariante, definimos a seguir um subconjunto deste no qual S age transitivamente.

Definição 1.4. *Seja C_Θ um conjunto de controle invariante para o semigrupo S . O conjunto de transitividade para C_Θ é o subconjunto C_0 definido por:*

$$(C_\Theta)_0 := \{x \in C_\Theta : \text{existe } g \in \text{int}S \text{ tal que } gx = x\}.$$

O subconjunto $(C_\Theta)_0$ é denso em C_Θ e é o único subconjunto invariante aberto de \mathbb{F}_Θ onde S é transitivo.

Dado um semigrupo S com interior não vazio, existe um elemento regular real $h \in \text{int}S$, isto é, um elemento do interior de S pertencente à câmara positiva A^+ de G . A existência de tais elementos em S é usada no estudo da ação de S nas variedades flags. Mais precisamente, dado h um elemento regular real, temos que a h -ação na variedade flag \mathbb{F}_Θ tem um único atrator $b_\Theta^+(h)$ com variedade estável aberta e densa $st(h)$, e um único repulsor $b_\Theta^-(h)$. Vale o seguinte resultado, ver [15]:

Proposição 1.5. *Seja $h \in S$ um elemento regular real e \mathbb{F}_Θ uma variedade flag. Então*

- 1. $b_\Theta^+(h) \in \text{cl}(Sx)$ para todo $x \in \mathbb{F}_\Theta$.*
- 2. Existe exatamente um conjunto de controle invariante para S em \mathbb{F}_Θ . Ele é fechado e contém o atrator $b_\Theta^+(h)$.*
- 3. Além disso, se $h \in \text{int}S$ então $b_\Theta^+(h)$ pertence ao conjunto de transitividade do conjunto de controle invariante para a ação de S , ou seja, $b_\Theta^+(h) \in (C_\Theta)_0$.*

A partir dos resultados a seguir, que podem ser encontrados em [15] podemos concluir que os conjuntos de controle invariantes são formados por atratores de elementos de $\text{int}S$.

Teorema 1.6. *Seja C_0 o conjunto de transitividade para S na variedade flag maximal \mathbb{F} . Para qualquer $b \in C_0$, existe $h \in \text{int}S$ regular tal que $b = b^+(h)$.*

Teorema 1.7. *Seja W o grupo de Weyl e $w \in W$. Então existe um conjunto de controle em \mathbb{F} que contém o conjunto dos pontos fixados por w*

$$\{b_w(h) \in \mathbb{F}; h \in \text{reg}(S)\}.$$

Definição 1.8. *O conjunto de controle em \mathbb{F} contendo os pontos fixados por w para algum (e assim para todo) $h \in \text{reg}(S)$ é denotado por $D(w)$.*

Proposição 1.9. *Seja $D \subset \mathbb{F}$ um conjunto de controle efetivo, isto é, $D_0 \neq \emptyset$. Então existe $w \in W$ tal que $D = D(w)$.*

A partir desses resultados e definições preliminares, temos a definição de tipo parabólico de um semigrupo.

Definição 1.10. *Seja $1 \in W$ a identidade do grupo de Weyl e S um semigrupo de interior não vazio de G . Temos $D(1)$ o único conjunto de controle invariante para S em \mathbb{F} . Definimos o tipo parabólico de S como sendo o subconjunto*

$$W(S) = \{w \in W; D(w) = D(1)\}.$$

Observação 1.11. *Temos que $W(S)$ é um subgrupo parabólico $W_{\Theta(S)} \subset W$, isto é, gerado por reflexões com relação as raízes de um subconjunto de $\Theta(S) \subset \Sigma$, a saber,*

$$\Theta(S) = \Theta(H) = \{\alpha \in \Sigma; \alpha(H) = 0\},$$

onde $H \in \mathfrak{a}$ é um elemento característico. Alternativamente, denotamos o tipo parabólico de S pela correspondente variedade flag $\mathbb{F}(S) = \mathbb{F}_{\Theta(S)}$ e dizemos que o tipo parabólico de S é $\mathbb{F}_{\Theta(S)}$, ou ainda simplesmente $\Theta(S)$.

O Teorema a seguir, bem como a definição e observação que acabamos de ver podem ser encontrados no artigo [15]. Esse teorema nos dá uma equivalência para o tipo parabólico de S , ou seja, uma outra forma de definir tal variedade flag.

Teorema 1.12. *Seja \mathbb{F}_{Θ} uma variedade Flag e denote por $\pi : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}_{\Theta}$ a projeção canônica da variedade Flag maximal e por C_{Θ} o conjunto de controle invariante para S em \mathbb{F}_{Θ} . Então, $\mathbb{F}_{\Theta} = \mathbb{F}(S)$ se, e somente se, as condições a seguir valem:*

1. $C = \pi^{-1}(C_{\Theta})$, onde C é o conjunto de controle invariante para S em \mathbb{F} .
2. C_{Θ} é contrátil.

Observação 1.13. *O tipo parabólico de um semigrupo S é a maior variedade cujo conjunto de controle invariante para a ação de S é contrátil (contido na célula aberta de Bruhat), e as únicas variedades flags que também possuem o conjunto de controle invariante para a ação de S contrátil são aquelas em que o tipo parabólico se projeta. Além disso, existe $g \in \text{int}S$, com $g = \exp H$, onde H é uma matriz diagonal satisfazendo $\alpha(H) = 0$ para todo $\alpha \in \Theta(S)$. Por exemplo, dado $S \subset \text{Sl}(n, \mathbb{R})$, se o tipo parabólico de S for o espaço projetivo então $\text{int}S$ contém um elemento da forma $g = \exp H$, com $H = \text{diag}\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_2, \dots, \alpha_2\}$, ou se o tipo parabólico de S for a Grassmanniana $Gr_3(n)$ então $\text{int}S$ contém um elemento da forma $g = \exp H$, com $H = \text{diag}\{\alpha_1, \alpha_1, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_2 \dots, \alpha_2\}$, onde α_i são números reais nos dois casos. Essa propriedade implica que o tipo parabólico é a variedade flag minimal que satisfaz $\pi_{\Theta(S)}^{-1}(C_{\Theta(S)}) = C$, onde C é o conjunto de controle invariante na variedade flag maximal.*

1.2.2 Ação Minimal e Sequência Contractante

Dedicamos essa seção a duas definições essenciais ao desenvolvimento desse trabalho, as quais podem ser vistas em [16] e em [11], mas antes de tais definições falaremos brevemente sobre a decomposição polar de um grupo de Lie, pois será utilizada em uma destas definições.

Decomposição Polar: Seja $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$ a decomposição de Cartan de \mathfrak{g} associada a involução θ , então temos a decomposição $G = KS$, onde $K = \langle \exp(\mathfrak{k}) \rangle$ e $S = \exp(\mathfrak{s})$. Seja $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{s}$ um subespaço abeliano maximal, ponha $A = \exp(\mathfrak{a})$ e $\mathfrak{a}^+ \subset \mathfrak{a}$ a câmara de Weyl positiva. Sabemos que A é um subgrupo fechado de G e

$\exp : \mathfrak{a} \rightarrow A$ é um difeomorfismo. Assim $A^+ = \exp(\mathfrak{a}^+)$ é um subconjunto aberto de A difeomorfo a \mathfrak{a}^+ . Para qualquer $X \in \mathfrak{s}$ existe $k \in K$ tal que $k \cdot X \in \mathfrak{a}^+$. Esse fato junto com a fórmula $\exp(\text{Ad}(g)X) = g \exp(X) g^{-1}$, com $g \in G$ e $X \in \mathfrak{g}$, nos fornece a decomposição polar de G . De fato, dado $g \in G$ temos que $g = ks$, com $k \in K$ e $s \in S$. Como $s = \exp(X)$, com $X \in \mathfrak{s}$, existe $k_1 \in K$ tal que $k_1 \cdot X = H \in \mathfrak{a}^+$. Então $g = ks = kk_1^{-1}k_1 \exp(X) = kk_1^{-1} \exp(\text{Ad}(k_1)X)k_1 = kk_1^{-1} \exp(H)k_1 = k' h k_1 \in KA^+K$. Assim a decomposição de Cartan de G implica na seguinte **decomposição polar de G**

$$G = KA^+K.$$

Definição 1.14. A ação de um subgrupo $L \subset G$ em uma variedade flag \mathbb{F}_Θ é **minimal** se toda órbita Lx , com $x \in \mathbb{F}_\Theta$, é densa em \mathbb{F}_Θ .

Definição 1.15. Seja $G = KAN$ a decomposição de Iwasawa de G e tome $h \in A$. Como \exp é um difeomorfismo em \mathfrak{a} , existe $H \in \mathfrak{a}$ tal que $\exp(H) = h$, dizemos que $H = \log(h)$. Para cada raiz $\alpha \in \Pi$ consideremos a aplicação $\phi_\alpha : A \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\phi_\alpha(h) = \exp(\alpha(\log h)).$$

Seja g_k uma sequência em G e escreva sua decomposição polar $g_k = v_k h_k u_k$, com $v_k, u_k \in K$ e $h_k \in \text{cl}A^+$. Essa sequência é **contractante** com respeito a uma variedade flag \mathbb{F}_Θ , se $\phi_\alpha(h_k) \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$, para toda raiz negativa α que não está no subconjunto $\langle \pm\Theta \rangle$.

Apesar das definições 1.14 e 1.15 serem para variedades flag em geral, vamos utilizá-las particularmente para o tipo parabólico de S , ou seja, para $\mathbb{F}_\Theta = \mathbb{F}(S)$.

1.3 Caracterização de semigrupos transitivos

Os principais resultados dessa seção, nos dá uma caracterização de semigrupos próprios transitivos em variedades homogêneas de G . O primeiro deles, Teorema 1.18, fornece condições necessárias para que um semigrupo de interior não vazio $S \subset G$ seja transitivo numa variedade homogênea G/L . Esse teorema foi demonstrado por San Martin e Tonelli em [16] utilizando alguns resultados que enunciaremos a seguir, também demonstrados no artigo citado.

Proposição 1.16. *Seja $g_k \in G$ uma sequência. Então existem:*

1. *uma subsequência g_{k_n} ;*
2. *elementos $v, u \in K$; e*
3. *uma aplicação linear τ de \mathfrak{n}_Θ^- ,*

tal que para todo $Y \in \mathfrak{n}_\Theta^-$ tem-se $g_{k_n} u^{-1} \exp(Y) \cdot b_0 \rightarrow v \exp(\tau Y) \cdot b_0$, quando $n \rightarrow \infty$. A subsequência é contractante com respeito a \mathbb{F}_Θ se, e somente se, $\tau = 0$.

Corolário 1.17. *Seja $g_k \in G$ uma sequência, e suponha que para um subconjunto aberto $U \subset \mathbb{F}_\Theta$, $g_k x \rightarrow b_0$ para todo $x \in U$, onde $b_0 \in \mathbb{F}_\Theta$ é fixado. Então g_k admite uma subsequência contractante com respeito a \mathbb{F}_Θ .*

Teorema 1.18. *Seja $S \subset G$ um semigrupo com $\text{int}S \neq \emptyset$ e $L \subset G$ um subgrupo fechado. Para que S seja transitivo na variedade homogênea G/L é necessário que*

1. a ação de L em $\mathbb{F}(S)$ seja minimal e
2. L admita uma sequência contractante com respeito a $\mathbb{F}(S)$.

Demonstração:

1. A ação de L em $\mathbb{F}(S)$ é minimal:

Para todo $x \in C_0$ e para toda vizinhança U de x , existe $h \in \text{int}S$ tal que $hC \subset U$ (existe $h \in \text{reg}(S)$ tal que $h^k \cdot y \rightarrow x \in C_0, \forall y \in \sigma$). Como S age transitivamente em G/L , pela Proposição 2.3 de [16], existe $g \in L$ tal que $h^{-1}g \in S$, isto é, $h^{-1}g = s \in S$ o que resulta em $g = hs \in \text{int}S$, mais precisamente, $g \in (L \cap \text{int}S)$. Além disso, $h^{-1}gC \subset C$, já que C é invariante pela ação de S , e assim $gC \subset hC \subset U$. Logo $gC \cap U \neq \emptyset$, o que implica em $(L \cap \text{int}S)y$ densa em C_0 , para todo $y \in C$. Como C_0 é denso em C , temos que $(L \cap \text{int}S)y$ densa em C_0 , ou seja, $C \subset \text{fe}((L \cap \text{int}S)y)$, para todo $y \in C$. Esse resultado é válido para gC no lugar de C , considerando o semigrupo gSg^{-1} , já que se S age transitivamente na variedade G/L , então gSg^{-1} também age transitivamente em G/L . Agora tome $x, y \in \mathbb{F}(S)$ e V uma vizinhança de y . Já que gC cobre toda a variedade $\mathbb{F}(S)$ que é conexa, podemos encontrar $g_i \in G$, $i = 1, \dots, l$ tal que $x \in U_1$ e $y \in U_l$, onde $U_i = \text{int}(g_iC)$, e $U_i \cap U_{i+1} \neq \emptyset$. Tome $z_i \in U_i \cap U_{i+1}$, com $i = 1, \dots, l-1$ e considere $z_0 = x$ e $z_l = y$. Temos que $z_i, z_{i+1} \in \text{int}(g_{i+1}C)$. Considere $V_l = V \cap U_l$ uma vizinhança de y . Como $z_{l-1}, y \in U_l = \text{int}(g_lC)$, vimos acima que existe $h_l \in (L \cap \text{int}(g_lSg_l^{-1}))$ tal que $h_l(g_lC) \subset V_l$. Defina $V_{l-1} = h_l^{-1}V_l \cap U_{l-1}$. Então $z_{l-1} \in V_{l-1}$ e $h_l z_{l-1} \in V_l$. Usando o mesmo raciocínio, encontramos V_i vizinhança de z_i e $h_i \in (L \cap \text{int}(g_iSg_i^{-1}))$ tal que $h_i z_i \in V_{i+1}$, para todo $i = 1, \dots, l-1$. Analogamente, a partir da vizinhança V_1 de z_1 e uma vizinhança $V_x \subset U_1$ de x , existe $h_0 \in (L \cap \text{int}(g_1Sg_1^{-1}))$ tal que $h_0(g_1C) \subset V_1$. Tome $V_0 = h_0^{-1}V_1 \cap V_x$. Então $x \in V_0$ e $h_0 x \in V_1$. A partir dessa construção temos

$$h_l h_{l-1} \dots h_1 h_0 \cdot x \in V_l \subset V_y,$$

com $h_l h_{l-1} \dots h_1 h_0 = \tilde{h} \in L$. Resumidamente, dados $x, y \in \mathbb{F}(S)$ e V uma vizinhança de y , existe $\tilde{h} \in L$ tal que $\tilde{h}x \in V$. Logo a órbita Lx é densa em $\mathbb{F}(S)$ e portanto, a ação de L em $\mathbb{F}(S)$ é minimal.

2. L admite sequência contractante com respeito a $\mathbb{F}(S)$:

Consideremos $x \in C_0$ e uma sequência de vizinhanças U_k de x tais que $\bigcap_k U_k = \{x\}$. Consideremos também $h_k \in \text{reg}(S)$ tais que $h_k C \subset U_k$. Pela Proposição 2.3 de [16] existe, para cada k , $g_k \in L$ tal que $h_k^{-1}g_k \in S$. Assim, $h_k^{-1}g_k C \subset C$, o que implica em $g_k C \subset h_k C \subset U_k$ e conseqüentemente $g_k y \rightarrow x$, para todo $y \in C$. Pelo Corolário 1.17, temos que g_k admite uma subsequência contractante com respeito a $\mathbb{F}(S)$, basta tomar $U = \text{int}C \neq \emptyset$.

□

Seja S um semigrupo com interior não vazio, $\mathbb{F}(S)$ o tipo parabólico de S e $C \subset \mathbb{F}(S)$ o conjunto de controle invariante para a ação de S em $\mathbb{F}(S)$. O próximo resultado, demonstrado em [11], é a recíproca do Teorema 1.18, considerando o semigrupo de compressão de C definido por $S_C = \{g \in G; gC \subset C\}$.

Teorema 1.19. *Seja $S \subset G$ um semigrupo com $\text{int}S \neq \emptyset$ e $L \subset G$ um subgrupo fechado. Assuma G/L conexo. Para que S_C seja transitivo na variedade homogênea G/L é suficiente que a ação de L em $\mathbb{F}(S)$ seja minimal e que L admita uma sequência contractante com respeito a $\mathbb{F}(S)$.*

1.4 Resultados quando L é conexo

Os resultados da seção anterior fornecem condições necessárias ao subgrupo L para que a ação de um semigrupo S de interior não vazio possa ser transitiva na variedade homogênea G/L . Nesse trabalho, consideramos o subgrupo L conexo e assumimos \mathfrak{g} uma álgebra de Lie simples. Apresentamos a seguir alguns resultados de [11] que restringem um pouco mais as possibilidades para tal subgrupo L . Mas vale ressaltar que se L não é conexo, mas tem uma quantidade finita de componentes conexas, então S é transitivo em G/L se, e somente se, S é transitivo em G/L_0 , onde L_0 representa a componente conexa de L , e assim reincidimos no caso conexo. Tal resultado e ainda resultados relacionados a esse assunto para o caso em que a quantidade de componentes conexas de L não for finita, são apresentados em [11].

Definição 1.20. *Dizemos que um subgrupo fechado $L \subset G$ é S -admissível se S é transitivo em G/L .*

Proposição 1.21. *Todo subgrupo S -admissível conexo L é redutível e sua componente semissimples E é também S -admissível. Além disso, $\mathbb{F}(S)$ é uma variedade flag de E .*

Observação 1.22. *Como consequência da proposição acima, do Teorema 1.18 e da definição de um subgrupo fechado e conexo L ser S -admissível, temos que L com tais características tem ação minimal no tipo parabólico de S , admite sequência contractante com respeito a essa variedade e ainda $\mathbb{F}(S)$ é variedade flag desse subgrupo. Por outro lado, se uma variedade flag \mathbb{F}_Θ do grupo G for também variedade flag do subgrupo $L \subset G$, temos que L tem ação transitiva em \mathbb{F}_Θ , pois $\mathbb{F}_\Theta = L/P_{\Theta_L}$, e ainda, L admite sequência contractante com respeito a \mathbb{F}_Θ . De fato, se tomarmos $h \in L$ tal que $\log h = H \in \mathfrak{a}_L^+$, isto é, h é um elemento regular, então $\alpha(H) = c > 0$. Consideremos a sequência h_n tal que $\log h_n = nH$, temos que*

$$\phi_{-\alpha}(h_n) = \exp(-\alpha(\log h_n)) = \exp(-\alpha(nH)) = \exp(-n\alpha(H)) = \exp(-n \cdot c) \rightarrow 0,$$

quando $n \rightarrow \infty$. Logo h_n é uma sequência contractante com respeito a qualquer flag de L , em particular, com respeito \mathbb{F}_Θ , que é flag comum a G e a L .

A partir dessa observação, temos que se S é um semigrupo com interior não vazio e $\mathbb{F}(S)$ é uma variedade flag de L , ou seja, $\mathbb{F}(S) = L/P_{\Theta_L}$, então S_C age transitivamente em G/L , se G/L é conexo. De fato, nessas condições, temos que a ação de L em $\mathbb{F}(S)$ é transitiva e portanto minimal, e ainda, L possui sequência contractante com respeito a essa variedade. Portanto pelo Teorema 1.19, temos que S_C é transitivo em G/L , considerando L e G/L conexos.

Vejam os a seguir outros resultados de [11] que limitam um pouco mais nossa busca.

Lema 1.23. *Considere $L \subset G$ fechado, conexo e semissimples. Então, sua ação em uma variedade \mathbb{F}_Θ é minimal se, e somente se, ele age transitivamente em \mathbb{F}_Θ .*

Demonstramos a seguir um lema que garante que sob as condições citadas acima, o subgrupo L é não compacto. Tal resultado já havia sido considerado em [11], porém sem demonstração.

Lema 1.24. *Se L é transitivo e contractante com respeito a $\mathbb{F}(S)$, então L é não compacto.*

Demonstração: Suponha que L seja compacto, então toda sequência possui uma subsequência convergente. Sem perda de generalidade, podemos tomar $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ uma sequência contractante e convergente em L . Considere $g_k \rightarrow g$, e a decomposição polar $g_k = u_k h_k v_k$ e $g = uhv$. Como K é compacto, $u_k \rightarrow u$, $v_k \rightarrow v$, o que resulta em uma convergência de $h_k \rightarrow h$. Assim temos $g_k = u_k h_k v_k \rightarrow uhv$ o que dá uma decomposição polar para g . Seja $H_k = \log h_k$ e $H = \log h$, logo $H_k \rightarrow H$. Como $\alpha \in \Pi$ são funcionais lineares contínuos, $\alpha(H_k) \rightarrow \alpha(H)$, para todo $\alpha \in \Pi$. Por outro lado, $\alpha(H_k) = \alpha(\log(h_k)) \rightarrow -\infty$, para toda raiz negativa $\alpha \notin \langle \Theta \rangle$, o que é uma contradição. Portanto, uma sequência contractante g_k de L não pode admitir subsequência convergente, e consequentemente L é não compacto. \square

Pela Proposição 1.21, podemos concluir que se a componente semissimples E não for S -admissível, então L também não será. Dessa forma, vamos nos restringir aos casos em que os subgrupos $L \subset G$, são fechados, conexos e semissimples.

Reunindo todos esses resultados que dão condições necessárias para que um semigrupo S tenha ação transitiva em uma variedade homogênea G/L , temos a seguinte proposição:

Proposição 1.25. *Seja G um grupo de Lie Simples, $L \subset G$ um subgrupo fechado, conexo, semissimples e $S \subset G$ um semigrupo com interior não vazio. Se S age transitivamente em G/L , então:*

1. L é não compacto;
2. L é transitivo no tipo parabólico $\mathbb{F}(S)$;
3. L possui sequência contractante com respeito a $\mathbb{F}(S)$;
4. $\mathbb{F}(S)$ é flag de L .

Sendo assim, dado $S \subset G$ um semigrupo com interior não vazio, passamos a procurar os subgrupos próprios, fechados, semissimples, não compactos e conexos L que satisfazem as propriedades da proposição anterior. Nos casos em que $\mathbb{F}(S)$ é uma variedade flag de L , temos que L é S_C -admissível. Nos casos em que L e G não possuem variedades flags em comum, se S é transitivo em G/L , então $S = G$.

1.5 Tipo Parabólico de $S_L := S \cap L$

Seja $S \subset G$ como antes, um semigrupo com interior não vazio que age transitivamente no espaço homogêneo G/L , onde L é um subgrupo fechado, conexo e semissimples de G . Então, conforme demonstrado em [16], temos que a ação de L em $\mathbb{F}(S)$ é minimal, L possui uma sequência contractante de G com respeito a $\mathbb{F}(S)$, $(\text{int}S) \cap gLg^{-1}$ e $(\text{int}(gSg^{-1})) \cap L$ são não vazios para todo $g \in G$ e ainda $\mathbb{F}(S)$ é um flag de L o qual denotaremos por $\mathbb{F}_L(S)$. A partir desses resultados, tomando $g = 1$ temos que $(\text{int}S) \cap L \neq \emptyset$. Sendo assim, $S_L = L \cap S$ é um semigrupo de interior não vazio em L . Dessa forma é natural questionar: qual é a relação entre o tipo parabólico de S_L e o tipo parabólico de S ? Diante disso, nessa seção estudamos o tipo parabólico desse semigrupo S_L .

1.5.1 $\mathbb{F}(S_L)$ se projeta em $\mathbb{F}(S)$

Vamos mostrar que o tipo parabólico $\mathbb{F}(S_L)$ de S_L se projeta em $\mathbb{F}(S)$ visto como flag de L . Primeiramente mostremos que o conjunto de controle invariante para S_L é igual ao conjunto de controle invariante para S em $\mathbb{F}(S)$, conforme já havia sido considerado em [16].

Lema 1.26. *Sejam C_S e C_L os conjuntos de controle invariantes para S e S_L , respectivamente, no tipo parabólico de S e por $(C_S)_0$ e $(C_L)_0$ seus respectivos conjuntos de transitividade. Então $C_L = C_S$.*

Demonstração: Como $S_L \subset S$ temos que $C_L \subset C_S$. Como C_L é o conjunto de controle invariante para S_L em $\mathbb{F}(S)$, ele satisfaz que $\text{fe}(S_L y) = \text{fe}(C_L)$ para todo $y \in C_L$ e se existir um subconjunto C' de $\mathbb{F}(S)$ com essa propriedade tal que $C_L \subset C'$, então $C_L = C'$. Vamos mostrar que C_S satisfaz essa propriedade e assim, como já temos $C_L \subset C_S$, teremos a igualdade.

Como na demonstração do Teorema 1.18, tome $x \in (C_S)_0$ e U uma vizinhança de x , então existe $h \in \text{int}S$ tal que $hC_S \subset U$. Pelo Lema 2.4 de [16], temos que $C_S \subset \text{fe}((L \cap \text{int}S)y)$ para todo $y \in C_S$. Como $\text{fe}((L \cap \text{int}S)y) \subset \text{fe}((L \cap S)y) = \text{fe}(S_L y)$, temos que $C_S \subset \text{fe}(S_L y)$ para todo $y \in C_S$. Por outro lado, temos que $S_L y \subset S y$ para todo $y \in C_S$. Então $\text{fe}(S_L y) \subset \text{fe}(S y) = \text{fe}(C_S)$ para todo $y \in C_S$, sendo a última igualdade do fato que C_S é o conjunto de controle invariante para S em $\mathbb{F}(S)$. Dessa forma, $\text{fe}(S_L y) = \text{fe}(C_S)$ para todo $y \in C_S$, como queríamos mostrar. Portanto $C_L = C_S$. \square

Como $\mathbb{F}(S)$ é o tipo parabólico de S , temos que C_S é contrátil. Assim o conjunto de controle invariante para S_L em $\mathbb{F}(S)$, o qual denotamos por C_L , é contrátil e desta forma, pela Observação 1.13, temos que o tipo parabólico de S_L se projeta em $\mathbb{F}(S)$, visto como flag de L , ou seja, em $\mathbb{F}_L(S)$.

Veremos mais adiante um exemplo em que vale a igualdade, ou seja, o tipo parabólico de S_L é igual ao tipo parabólico de S , visto como flag de L .

1.6 Resultados envolvendo Variedades Flags Duais

Nessa seção utilizamos a relação existente entre uma variedade flag e sua variedade dual para mostrar alguns resultados importantes para nosso trabalho. Esses resultados surgem da necessidade de encontrar os subgrupos transitivos em variedades Grassmannianas reais, pois os resultados de Oniščik que utilizamos não deixam claro quais são os subgrupos transitivos em certas Grassmannianas.

Primeiramente apresentamos a definição de variedade dual, a qual pode ser encontrada em [13]. Seja W o grupo de Weyl e seja $w_0 \in W$ a involução principal, ou seja, o elemento que satisfaz $w_0(\Sigma) = -\Sigma$. Então $-w_0(\Sigma) = \Sigma$. Ponha $i = -w_0$, então $i(\Sigma) = \Sigma$.

Definição 1.27. *Dada uma variedade flag $\mathbb{F}_\Theta = G/P_\Theta$, $\Theta \subset \Sigma$, temos que a variedade flag dual é dada por $\mathbb{F}_{\Theta^*} = G/P_{\Theta^*}$, onde $\Theta^* = i(\Theta)$.*

Para exemplificar, temos que as variedades flags duais às Grassmannianas reais $Gr_k(n)$ são as Grassmannianas reais $Gr_{n-k}(n)$.

Como o tipo parabólico de S^{-1} é a variedade dual do tipo parabólico de S , ver [13], o lema a seguir garante que um subgrupo L que seja S -admissível, tem ação minimal e possui sequência contractante com respeito a variedade dual do tipo parabólico de S .

Lema 1.28. *Suponha que S é transitivo em G/L , com L conexo. Então L tem ação minimal (transitiva) em $\mathbb{F}(S^{-1})$ e possui sequência contractante com respeito a $\mathbb{F}(S^{-1})$.*

Demonstração: Primeiramente observemos que S age transitivamente em G/L se, e somente se, S^{-1} age transitivamente em G/L . De fato, dados $x, y \in G/L$ existem $g, g' \in S$ tais que $gx = y$ e $g'y = x$. Assim, $g^{-1}, (g')^{-1} \in S^{-1}$ e valem as igualdades $g^{-1}y = x$ e $(g')^{-1}x = y$. Logo, S^{-1} age transitivamente em G/L . A recíproca segue analogamente. Agora, temos por hipótese que S é transitivo em G/L , então pelo que vimos acima S^{-1} também é transitivo em G/L . Dessa forma, pelo Teorema 1.18 temos que L tem ação minimal (transitiva) em $\mathbb{F}(S^{-1})$ e possui sequência contractante com respeito a essa variedade. \square

Observação 1.29. *Como consequência do fato: “ S é transitivo em G/L se, e somente se, S^{-1} é transitivo em G/L ”, sempre que selecionarmos um par (S, L) tal que o semigrupo S age transitivamente em G/L temos automaticamente selecionado o par (S^{-1}, L) .*

Mais um resultado desenvolvido usando dualidade de flags foi a proposição a seguir.

Proposição 1.30. *Se um subgrupo de Lie $L \subset G$ age transitivamente em uma variedade flag \mathbb{F}_Θ de G , então existe um automorfismo ϕ de G tal que $\phi(L)$ age transitivamente na variedade flag dual \mathbb{F}_{Θ^*} .*

Demonstração: Denote por φ o automorfismo de \mathfrak{g} que restrito a \mathfrak{a} é igual a i , ver Teo. 8.8 de [12]. Como $i(\Theta) = \Theta^*$, temos $\varphi(\mathfrak{p}_\Theta) = \mathfrak{p}_{\Theta^*}$. Seja ϕ o automorfismo de G que estende φ . Então ele induz uma aplicação $\bar{\phi} : G/P_\Theta \rightarrow G/P_{\Theta^*}$ dada por $\bar{\phi}(gP_\Theta) = \phi(g)P_{\Theta^*}$, que é sobrejetora e tem a seguinte propriedade:

$$\bar{\phi}(h \cdot gP_\Theta) = \bar{\phi}(hgP_\Theta) = \phi(hg)P_{\Theta^*} = \phi(h) \cdot \phi(g)P_{\Theta^*}.$$

Como L é transitivo em G/P_Θ , temos que $L \cdot P_\Theta = G/P_\Theta$. Assim,

$$\phi(L) \cdot P_{\Theta^*} = \{\phi(l) \cdot P_{\Theta^*} : l \in L\} = \{\bar{\phi}(l \cdot P_\Theta) : l \in L\} = \bar{\phi}(L \cdot P_\Theta) = \bar{\phi}(G/P_\Theta) = G/P_{\Theta^*}.$$

Portanto $\phi(L)$ é transitivo em \mathbb{F}_{Θ^*} . \square

Observação 1.31. *Sabemos que $\varphi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ é um automorfismo que restrito a \mathfrak{a} é igual a i , ou seja, $\varphi|_{\mathfrak{a}} = -w_0$. Como $W = M^*/M$, podemos tomar $w_0 \in K$ o representante da involução principal. Além disso, consideremos θ a involução de Cartan, θ representará tanto a involução do grupo G quanto da álgebra \mathfrak{g} . Então $\phi = C_{w_0} \circ \theta$, pois*

$$(d\phi)_e|_{\mathfrak{a}} = (d(C_{w_0} \circ \theta))_e|_{\mathfrak{a}} = ((dC_{w_0})_e \circ (d\theta)_e)|_{\mathfrak{a}} = (w_0 \circ \theta)|_{\mathfrak{a}} = w_0 \circ (-id)|_{\mathfrak{a}} = -w_0.$$

Proposição 1.32. *Seja G um grupo de Lie semissimples e $L \subset G$ um subgrupo fechado, e semissimples. Se \mathbb{F}_Θ é flag de L , então L também age transitivamente na variedade flag dual \mathbb{F}_{Θ^*} .*

Demonstração: Seja θ a involução de Cartan de G . Então θ fixa os elementos do subgrupo compacto maximal $K \subset G$. Além disso, o automorfismo $\phi : G \rightarrow G$ da Proposição 1.30 é dado por $\phi(g) = w_0\theta(g)w_0^{-1}$, como vimos na observação anterior. Considere $L \subset G$ um subgrupo como no enunciado. Tome $K_L \subset L$ o

subgrupo compacto maximal de L . Como K_L está contido em K , temos que os elementos de K_L também são fixados por θ , e por isso, $\phi(K_L) = w_0 K_L w_0^{-1}$ e $\phi^2(K_L) = K_L$. Como L age transitivamente em \mathbb{F}_Θ , temos que gLg^{-1} também é transitivo em \mathbb{F}_Θ . De fato, dados $x, y \in \mathbb{F}_\Theta$, então $g^{-1}x, g^{-1}y \in \mathbb{F}_\Theta$, logo existe $l \in L$ tal que $l(g^{-1}x) = g^{-1}y$, o que implica em $(glg^{-1})x = y$. Como \mathbb{F}_Θ é flag de L , temos que K_L age transitivamente em \mathbb{F}_Θ e portanto $\phi(K_L) = w_0 K_L w_0^{-1}$ também tem ação transitiva nessa variedade. Pelo Lema 1.30, temos que $\phi(\phi(K_L))$ age transitivamente na variedade \mathbb{F}_{Θ^*} , ou seja, K_L age transitivamente na variedade flag dual e portanto o subgrupo L tem ação transitiva em \mathbb{F}_{Θ^*} . \square

A proposição acima será utilizada no próximo capítulo para selecionar subgrupos de $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$ que são transitivos em variedades Grassmann duais, partindo do fato que se L é S -admissível então L é transitivo em $\mathbb{F}(S)$ e essa variedade é flag de L , o que satisfaz as hipóteses da proposição.

CAPÍTULO 2

GRUPOS TRANSITIVOS EM FLAGS MINIMAIS DE $SL(N, \mathbb{R})$

No decorrer desse capítulo, G representa o grupo $SL(n, \mathbb{R})$, L um subgrupo fechado de G e S um semigrupo de G de interior não vazio. Pelos resultados do capítulo anterior, devemos procurar os subgrupos L que tenham ação minimal no tipo parabólico de S e que possuam sequência contractante com respeito a essa variedade. No caso de L conexo, o Lema 1.23 garante que a propriedade de minimalidade de um subgrupo em uma variedade flag é equivalente a propriedade de transitividade desse subgrupo nessa variedade. Diante disso, dedicamos esse capítulo a procura de grupos conexos transitivos nas variedades flags minimais $\mathbb{R}P^n$ e $Gr_k(n)$, pois assim resolvemos os casos em que o tipo parabólico de S for uma dessas variedades ou se projetar em alguma delas, como veremos no Capítulo 3.

2.1 Grupos Transitivos no Espaço Projetivo Real

Nesta seção, consideremos o tipo parabólico de S igual ao espaço projetivo real ou uma variedade flag que se projeta nele, isto é, existe projeção canônica π de $\mathbb{F}(S)$ em $\mathbb{R}P^{n-1}$ dada por $\pi((V_{r_1} \subset V_{r_2} \subset \dots \subset V_{r_s})) = (V_{r_1})$, onde $\dim V_{r_1} = 1$. No artigo [1], escrito por Boothby e Wilson, encontramos uma tabela que nos fornece os subgrupos transitivos em $\mathbb{R}^n - \{0\}$, a qual apresentamos a seguir. Assim podemos identificar quais desses subgrupos são S -admissíveis, considerando $\mathbb{F}(S) = \mathbb{R}P^{n-1}$. Mais precisamente, mostramos que existe uma única variedade homogênea de $SL(n, \mathbb{R})$ que admite a ação transitiva de um semigrupo com essas características.

Na tabela abaixo encontramos as álgebras de matrizes transitivas, ou melhor dizendo, representantes de cada classe de equivalência de álgebras de matrizes transitivas. Cada classe é dada pela seguinte relação de equivalência: \mathfrak{g} está relacionada com $\bar{\mathfrak{g}}$ se, e somente se, existe $A \in GL(n, \mathbb{R})$ tal que $\bar{\mathfrak{g}} = A\mathfrak{g}A^{-1}$. Dizemos que

$\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ é transitiva se $\text{rank}_x \mathfrak{g} = n$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ não nulo, onde $\text{rank}_x \mathfrak{g}$ é a dimensão do subespaço $\{Ax : A \in \mathfrak{g}\} \subseteq \mathbb{R}^n$. Nessa tabela, n representa a dimensão do espaço euclidiano onde a álgebra $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ está agindo e N representa a dimensão da álgebra \mathfrak{g} .

Tabela 2.1: Subálgebras Transitivas em $\mathbb{R}^n - \{0\}$

Tipo	n	N	Representante
I.1	m	$m(m-1)/2 + 1$	$\mathfrak{so}(m) \oplus \mathbb{R}$
I.2	$2m$	$m^2 - 1 + \varepsilon (\varepsilon = 1, 2)$	$\mathfrak{su}(m) \oplus \mathfrak{c}$
I.3	$4m$	$2m^2 + m + \varepsilon (\varepsilon = 1, 2)$	$\mathfrak{sp}(m) \oplus \mathfrak{c}$
I.4	$4m$	$2m^2 + m + 4$	$\mathfrak{sp}(m) \oplus \mathbb{H}$
I.5	8	22	$\mathfrak{spin}(7) \oplus \mathbb{R}$
I.6	16	37	$\mathfrak{spin}(9) \oplus \mathbb{R}$
I.7	7	15	$\mathfrak{g}_2(-14) \oplus \mathbb{R}$
II.1	m	$m^2 - 1 + \varepsilon (\varepsilon = 0, 1)$	$\mathfrak{sl}(m, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{c}$
II.2	$2m$	$2(m^2 - 1) + \varepsilon (\varepsilon = 0, 1, 2)$	$\mathfrak{sl}(m, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{c}$
II.3	$4m$	$4m^2 - 1 + \varepsilon (\varepsilon = 0, 1, 2)$	$\mathfrak{sl}(m, \mathbb{H}) \oplus \mathfrak{c}$
II.4	$2m$	$2m^2 + m - \varepsilon (\varepsilon = 0, 1)$	$\mathfrak{sp}(m, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{c}$
II.5	$4m$	$4m^2 + 2m + \varepsilon (\varepsilon = 0, 1, 2)$	$\mathfrak{sp}(m, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{c}$
III	$4m$	$4m^2 + 2 + \varepsilon (\varepsilon = 0, 1)$	$\mathfrak{sl}(m, \mathbb{H}) \oplus \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{c}$

Toda álgebra da tabela é da forma $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{c}$, onde \mathfrak{g}_0 é semisimples e \mathfrak{c} é o centro de \mathfrak{g} .

Para $m \geq 1$ e $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ (ou \mathbb{H}), a restrição de multiplicação escalar a \mathbb{R} transforma \mathbb{F}^m em \mathbb{R}^{2m} (ou \mathbb{R}^{4m}) e, assim a identificação usual de matrizes $m \times m$ sobre \mathbb{F} com transformações lineares em \mathbb{F}^m transforma matrizes complexas $m \times m$ em matrizes reais $2m \times 2m$ e matrizes quaternionicas $m \times m$ em matrizes reais $4m \times 4m$.

Para $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou \mathbb{H} , $\mathfrak{sl}(m, \mathbb{F})$ denota a álgebra de Lie de todas as matrizes $m \times m$ sobre \mathbb{F} que tem traço zero, onde o traço real é usado para $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{H}$ e o traço complexo para $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Em cada um desses casos, $\mathfrak{sl}(m, \mathbb{F})$ pode ser visto como subálgebra de $\mathfrak{gl}(m, \mathbb{R})$, $\mathfrak{gl}(m, \mathbb{C})$ e $\mathfrak{gl}(m, \mathbb{H})$.

Cada subálgebra da Tabela 2.1 é representante de uma classe dada pela relação de equivalência já citada. A classe de $\mathfrak{sl}(m, \mathbb{R})$ é formado por ela somente. A classe de $\mathfrak{sl}(m, \mathbb{C})$ é formada por todas as subálgebras \mathfrak{g} de $\mathfrak{gl}(2m, \mathbb{R})$ para as quais existe uma estrutura complexa I tal que $\mathfrak{g} = \{X \in \mathfrak{gl}(2m, \mathbb{R}); [X, I] = 0 \text{ e } \text{tr}(X) = 0 = \text{tr}(IX)\}$. A classe de equivalência de $\mathfrak{sl}(m, \mathbb{H})$ é formada por todas as subálgebras \mathfrak{g} de $\mathfrak{gl}(4m, \mathbb{R})$ para as quais existe uma \mathbb{H} -estrutura em \mathbb{R}^{4m} tal que \mathfrak{g} é a coleção de todos os elementos de $\mathfrak{sl}(4m, \mathbb{R})$ comutando com esta \mathbb{H} -estrutura. As subálgebras $\mathfrak{so}(m)$, $\mathfrak{su}(m)$ e $\mathfrak{sp}(m)$ representam as classes de subálgebras de $\mathfrak{sl}(m, \mathbb{F})$ cujos elementos X satisfazem $X^* = -X$, para $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ e \mathbb{H} , respectivamente, onde $X \rightarrow X^*$ é a operação de transposição e conjugação de matrizes sobre \mathbb{F} . Para $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , $\mathfrak{sp}(m, \mathbb{F})$ denota a subálgebra de $\mathfrak{sl}(2m, \mathbb{F})$

consistindo de elementos X tal que JXJ é a \mathbb{F} -transposta de X , onde $J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \in M_{2m}(\mathbb{F})$. A álgebra $\mathfrak{so}(2m+1)$ tem uma representação em \mathbb{R}^{2m} , para m congruente a 0 ou 3, módulo 4. Essa representação é chamada representação spin de $\mathfrak{so}(2m+1)$ e a álgebra associada de matrizes reais $2^m \times 2^m$ é denotada por $\mathfrak{spin}(2m+1)$. Finalmente, a álgebra $\mathfrak{g}_2(-14)$ representa a álgebra de matrizes 7×7 obtida da representação da álgebra de Lie simples compacta de tipo G_2 em \mathbb{R}^7 .

Observação 2.1. *Seja $G \subset Gl(n, \mathbb{R})$ o único subgrupo de Lie conexo com álgebra de Lie \mathfrak{g} . Então $\text{rank}_x \mathfrak{g}$ coincide com a dimensão da órbita Gx em \mathbb{R}^n . Consequentemente, $\text{rank}_x \mathfrak{g} = n$ se, e somente se, Gx é aberto de \mathbb{R}^n . Suponha que \mathfrak{g} seja transitiva. Como $\mathbb{R}^n - \{0\} = \bigcup_{x \in \mathbb{R}^n - \{0\}} Gx$, temos que Gx é aberto e fechado. Logo $Gx = \mathbb{R}^n - \{0\}$, já que $\mathbb{R}^n - \{0\}$ é conexo. Resumidamente temos que \mathfrak{g} é transitiva se, e somente se, G é transitivo em $\mathbb{R}^n - \{0\}$.*

Lema 2.2. *Seja L um grupo de Lie não compacto. Então L é transitivo em $\mathbb{R}^n - \{0\}$ se, e somente se, L é transitivo em \mathbb{RP}^{n-1} .*

Demonstração: Sabemos que se um subgrupo é transitivo em $\mathbb{R}^n - \{0\}$, então ele também é transitivo em \mathbb{RP}^{n-1} . Para a recíproca, primeiramente vamos mostrar que se um subgrupo é transitivo em \mathbb{RP}^{n-1} então ele é transitivo também em \mathbb{S}^{n-1} . Para isso, considere o recobrimento duplo $p : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{RP}^{n-1}$ dado por $v \mapsto [v]$, onde $[v]$ representa a reta gerada pelo vetor v . Temos que a imagem inversa de uma órbita $L[x]$ via aplicação p é formada por órbitas Lx , cada uma com a mesma dimensão de $L[x]$. Como L é transitivo em \mathbb{RP}^{n-1} , temos $L[x] = \mathbb{RP}^{n-1}$. Assim, Lx é aberto e fechado em \mathbb{S}^{n-1} . Portanto, $Lx = \mathbb{S}^{n-1}$. Agora resta mostrar que L é transitivo em $\mathbb{R}^n - \{0\}$.

Como L é não compacto, existe uma matriz $A \in \mathfrak{l}$ que é diagonalizável com autovalores positivos, onde \mathfrak{l} é a álgebra de Lie de L . Sem perda de generalidade, seja $A = \text{diag}\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, com $\alpha_i > 0$, para todo $i = 1, \dots, n$. Consideremos o subgrupo a um parâmetro $H = \{\exp(tA); t \in \mathbb{R}\} \subset L$. Então dado $v \in \mathbb{R}^n$ um autovetor associado ao autovalor α_1 , isto é, $Av = \alpha_1 v$, temos que H é transitivo na semi-reta positiva $\mathbb{R}_+ v = \{\lambda v; \lambda \in \mathbb{R} \text{ e } \lambda > 0\}$. De fato, dado $v_1 \in \mathbb{R}_+ v$ podemos escrever $v_1 = \lambda_1 v$ com $\lambda_1 > 0$ e ainda $\lambda_1 = e^{t_0 \alpha_1}$ para algum $t_0 \in \mathbb{R}$. Como $Av = \alpha_1 v$, temos que $\exp(tA)v = e^{t\alpha_1} v$. Assim, $v_1 = \lambda_1 v = e^{t_0 \alpha_1} v = \exp(t_0 A)v = gv$, onde $g = \exp(t_0 A) \in L$. Logo, L é transitivo na semi-reta $\mathbb{R}_+ v$.

Agora mostremos que L é transitivo em $\mathbb{R}^n - \{0\}$. Dados $x, y \in \mathbb{R}^n - \{0\}$, existe $g_1 \in L$ tal que $g_1(\mathbb{R}_+ x) = \mathbb{R}_+ v$, pois L é transitivo na esfera \mathbb{S}^{n-1} e consequentemente $g_1 x = v_1 \in \mathbb{R}_+ v$. Por outro lado, existe $g_2 \in L$ tal que $g_2 v_1 = v$ e assim $(g_2 g_1)x = v$. Analogamente, existem $h_1, h_2 \in L$ tais que $(h_2 h_1)y = v$, ou seja, $(h_1^{-1} h_2^{-1})v = y$. Tomando $l = h_1^{-1} h_2^{-1} g_2 g_1 \in L$ temos

$$l \cdot x = h_1^{-1} h_2^{-1} g_2 g_1 \cdot x = h_1^{-1} h_2^{-1} \cdot v = y.$$

Portanto, L é transitivo em $\mathbb{R}^n - \{0\}$. □

Observação 2.3. *Em nosso trabalho, nos interessamos pelos subgrupos não compactos transitivos no tipo parabólico do semigrupo em questão. Logo, quando consideramos $\mathbb{F}(S) = \mathbb{RP}^{n-1}$, devemos encontrar os*

subgrupos não compactos transitivos em $\mathbb{R}P^{n-1}$. Pelo Lema 2.2, um grupo não compacto é transitivo em $\mathbb{R}P^{n-1}$ se, e somente se, ele é transitivo em $\mathbb{R}^n - \{0\}$. Desta forma, para o nosso trabalho interessa apenas as componentes semissimples dos subgrupos não compactos associados as subálgebras encontradas na tabela 2.1, ou seja, aquelas de tipo II ou III.

2.2 Grupos Transitivos em Grassmannianas Reais

Seja $G = \text{Sl}(n, \mathbb{R})$ e S um semigrupo de G , com $\text{int}S \neq \emptyset$ cujo tipo parabólico é uma variedade Grassmanniana $Gr_k(n)$ ou uma variedade flag que se projeta sobre ela, isto é, existe uma projeção canônica π de $\mathbb{F}(S)$ em $Gr_k(n)$ dada por $\pi((V_{r_1} \subset \dots \subset V_{r_k} \subset \dots \subset V_{r_s})) = (V_{r_k})$, onde $\dim V_{r_k} = k$. Vimos anteriormente que se a ação de S é transitiva em uma variedade homogênea G/L , com L conexo, então L é transitivo em $\mathbb{F}(S)$. A partir disso, o objetivo principal desta seção é selecionar os subgrupos $L \subset \text{Sl}(n, \mathbb{R})$ que são transitivos em variedades Grassmannianas. Para isso utilizamos resultados envolvendo dualidade de variedades flag demonstrados no capítulo anterior e alguns resultados apresentados por Oniščik em [6] e [7]. Dentre os resultados apresentados por Oniščik selecionamos os teoremas 2.4 e 2.6, enunciados nessa seção, que podem ser encontrados nos artigos [6] e [7] em sua versão original, onde são obtidos resultados não somente para Grassmannianas reais, mas também para outras variedades.

A partir do teorema a seguir, obtemos os grupos que são transitivos nas variedades Grassmann da forma $Gr_{2l}(n)$, com $l \geq 2$ e $n > 2l + 2$.

Teorema 2.4. *Todo grupo de Lie conexo não compacto que age transitivamente e efetivamente nas variedades $Gr_{2k}(n)$, com $n > 5$, $1 < k < (n - 2)/2$ se n for par e $1 < k < (n - 1)/2$ se n for ímpar, é similar ao grupo $\text{Sl}(n, \mathbb{R})$ agindo naturalmente nestas variedades.*

Em um de seus artigos, Oniščik comenta que a classificação dos grupos transitivos nas Grassmannianas está concluída, exceto para os casos $Gr_3(8)$ e $Gr_{2l+1}(2m)$, com $2l + 1 < 2m - 3$. No entanto, nem todos os casos aparecem explicitamente nos teoremas comentados acima. Percebemos que utilizando a dualidade entre as variedades flag, esse problema poderia ser resolvido.

O Lema 1.28 afirma que o subgrupo L tem as mesmas propriedades com respeito a variedade $\mathbb{F}(S)^*$ dual a $\mathbb{F}(S)$, que é $\mathbb{F}(S^{-1})$. Além disso, a Proposição 1.30 fornece, a partir de um grupo L transitivo em uma variedade flag, um grupo $\phi(L)$ transitivo na variedade dual a esta, e ainda a Proposição 1.32, garante que sob certas condições, o próprio grupo L age transitivamente nas duas variedades. A partir desses resultados, mostramos a seguinte proposição:

Proposição 2.5. *Considere o grupo de Lie $G = \text{Sl}(2m + 1, \mathbb{R})$ e seja $S \subset G$ um semigrupo com $\text{int}S \neq \emptyset$ cujo tipo parabólico é $Gr_{2l+1}(2m + 1)$, com $2m + 1 > 2l + 3$ e $l > 1$. Assuma que S age transitivamente em uma variedade homogênea G/L , onde L é conexo. Então, L é o próprio grupo $\text{Sl}(2m + 1, \mathbb{R})$, isto é, G/L é trivial.*

Demonstração: Como já sabemos, $Gr_{2l+1}(2m + 1)$ é uma variedade flag de $\text{Sl}(2m + 1, \mathbb{R})$, digamos \mathbb{F}_Θ . Como S é transitivo em G/L , pela Proposição 1.25 temos que \mathbb{F}_Θ é flag de L . Logo, pela Proposição 1.32, L é transitivo na variedade flag $\mathbb{F}_{\Theta^*} = Gr_{2(m-l)}(2m + 1)$ dual a \mathbb{F}_Θ . Como $2m + 1 > 2l + 3$ e $l > 1$ temos

que $1 < m - l < m = \frac{(2m+1)-1}{2}$. Logo o Teorema 2.4 afirma que o único grupo conexo e não compacto que é transitivo em $Gr_{2(m-l)}(2m+1)$ é similar a $Sl(2m+1, \mathbb{R})$. Portanto, L é similar a $Sl(2m+1, \mathbb{R})$. \square

Com isso concluímos que se $\mathbb{F}(S)$ é uma variedade Grassmanniana $Gr_{2k}(n)$, com $n > 2k + 2$ e $k > 1$, ou uma Grassmannianas $Gr_{2l+1}(n)$ com $n = 2m + 1 > 2l + 3$ e $l > 1$, então o único subgrupo semissimples que pode ser S -admissível é o próprio $Sl(n, \mathbb{R})$.

Algumas Grassmannianas não são compreendidas pelo Teorema 2.4 e pela Proposição 2.5. São elas: $Gr_2(n)$, $n \geq 3$; $Gr_3(n)$, $n \geq 4$; Grassmannianas de subespaços de codimensão 1 e 2; e $Gr_{2l+1}(2m)$, com $l > 1$. Para solucionar alguns desses casos, temos o resultado abaixo, demonstrado por Oniščik.

Teorema 2.6. *Todo grupo de Lie conexo que age transitivamente e efetivamente em uma das variedades M dadas na tabela abaixo, é similar a um dos grupos dados na posição correspondente na segunda e na terceira coluna dessa tabela, onde K denota um grupo compacto agindo transitivamente e G o grupo não compacto correspondente que o contém.*

M	K	G
$Gr_2(n)$ $n \geq 5$	$So(n)$	$Sl(n, \mathbb{R})$ $So(n, S)$
$Gr_2(7)$	G_2	$G_2^{\mathbb{C}}$
$Gr_2(8)$	$Spin(7)$	$So(1, 7)$ $Spin(7)^{\mathbb{C}}$
$Gr_3(2n)$ $(n = 3, n > 4)$	$So(2n)$	$Sl(2n, \mathbb{R})$
$Gr_3(2k+1)(k > 2)$	$So(2k+1)$	$Sl(2k+1, \mathbb{R})$
$Gr_4(2k+1)(k > 3)$	$So(2k+1)$	$Sl(2k+1, \mathbb{R})$

Com esse resultado resolvemos alguns casos, mas ainda falta encontrar os subgrupos que podem ser S -admissíveis para os casos em que $\mathbb{F}(S)$ é uma Grassmanniana de subespaços de codimensão 1 ou 2, ou a Grassmanniana $Gr_3(8)$, ou uma Grassmanniana $Gr_{2l+1}(2m)$, com $l > 1$.

Observação 2.7. *Da forma como fizemos na Proposição 2.5, podemos concluir que os subgrupos de $Sl(n, \mathbb{R})$ que são transitivos em $Gr_k(k+1)$ (codimensão 1) e que possuem as características desejadas são os mesmos encontrados para o caso $\mathbb{F}(S) = \mathbb{R}\mathbb{P}^k$, os quais podemos encontrar na Tabela 2.1, já que essas variedades são duais uma da outra. Analogamente, os subgrupos transitivos em $Gr_k(k+2)$ com as características citadas acima, são os mesmos para o caso $\mathbb{F}(S) = Gr_2(k+2)$.*

Para o caso de Grassmannianas de subespaços de codimensão 2 ainda fica pendente o caso $Gr_k(k+2)$, com $k = 2$, pois a variedade dual a $Gr_2(4)$ é ela mesma e não conhecemos os grupos transitivos nessa variedade. Além desse, os casos $Gr_3(8)$ e $Gr_{2l+1}(2m)$, com $2l+1 < 2m-3$ e $l > 1$, também ficam em aberto pois não conseguimos encontrar os subgrupos de $Sl(n, \mathbb{R})$ que são transitivos nessas variedades.

Com esses resultados apresentamos na tabela a seguir, os possíveis subgrupos conexos L de $Sl(n, \mathbb{R})$, para os quais a variedade homogênea G/L pode admitir ação transitiva de semigrupos próprios, cujo tipo parabólico são variedades Grassmann da forma $Gr_k(n)$, exceto os casos em aberto mencionados acima.

Nesta tabela, K representa o grupo compacto e G o grupo não compacto que o contém, os quais agem transitivamente nas variedades Grassmann da respectiva linha e os casos que aparecem com * e ** têm como variedades duais $\mathbb{R}P^{n-1}$ e $Gr_2(n)$, respectivamente.

Tabela 2.2: Subgrupos Transitivos em $Gr_k(n)$

CASOS	k	n	K	G
I.1	2	$n \geq 5$	$So(n)$	$Sl(n, \mathbb{R})$ $So(n, S)$
I.2	2	$n = 3$	ver Tabela 2.1*	
I.3	2	$n = 7$	G_2	$G_2^{\mathbb{C}}$
I.4	2	$n = 8$	$Spin(7)$	$Spin(7)^{\mathbb{C}}$ $So(1, 7)$
II.1	3	$n = 2m,$ $(m = 3 \text{ e } m > 4)$	$So(n)$	$Sl(n, \mathbb{R})$
II.2	3	$n = 4$	ver Tabela 2.1*	
II.3	3	$n = 5$	$So(5)^{**}$	$Sl(5, \mathbb{R})$ $So(5, S)$
II.4	3	$n = 2m + 1, (m \geq 3)$	$So(n)$	$Sl(n, \mathbb{R})$
III.1	$2l, l \geq 2$	$n = 2l + 1$	ver Tabela 2.1*	
III.2	$2l, l \geq 2$	$n = 2l + 2$	$So(n)^{**}$	$Sl(n, \mathbb{R})$ $So(n, S)$
III.3	$2l, l \geq 2$	$n > 2l + 2$	$So(n)$	$Sl(n, \mathbb{R})$
IV.1	$2l + 1, l \geq 2$	$n = 2l + 2$	ver Tabela 2.1*	
IV.2	$2l + 1, l \geq 2$	$n = 2l + 3$	$So(n)^{**}$	$Sl(n, \mathbb{R})$ $So(n, S)$
IV.3	$2l + 1, l \geq 2$	$n = 2m + 1$ $(2m + 1 > 2l + 3)$	$So(n)$	$Sl(n, \mathbb{R})$

CAPÍTULO 3

VARIEDADES HOMOGÊNEAS DE $SL(N, \mathbb{R})$ ADMITINDO AÇÃO TRANSITIVA DE SEMIGRUPOS PRÓPRIOS

No capítulo anterior, listamos nas tabelas 2.1 e 2.2 os subgrupos fechados, conexos, semissimples e não compactos $L \subset G$ que são transitivos no espaço projetivo real e os que são transitivos em Grassmannianas, diferentes de $Gr_3(8)$, $Gr_2(4)$ e de $Gr_{2l+1}(2m)$, para os quais a variedade homogênea G/L pode admitir ação transitiva de semigrupos próprios de G . Nesse capítulo, considerando $G = SL(n, \mathbb{R})$ e $S \subset G$ um semigrupo com interior não vazio, vamos analisar quais desses subgrupos definem variedades homogêneas que realmente admitem ação transitiva de S . Para isso, primeiramente vamos analisar a partir dessas tabelas, quais subgrupos contém sequência contractante com respeito ao tipo parabólico de S .

3.1 Existência de sequências contractantes

Como já comentamos na Observação 2.3, em nosso trabalho nos interessamos apenas pelas componentes semissimples não-compactas dos subgrupos encontrados na tabela 2.1, ou seja, aqueles de tipo II ou III, para os casos em que o tipo parabólico de S é o espaço projetivo. Para os casos em que o tipo parabólico de S é uma Grassmanniana, diferente de $Gr_3(8)$, $Gr_2(4)$ e de $Gr_{2l+1}(2m)$, temos que analisar os subgrupos selecionados na Tabela 2.2. Suponha que $\mathbb{F}(S)$ seja flag minimal de $SL(n, \mathbb{R})$. Então $\mathbb{F}(S)$ é o espaço projetivo real ou uma variedade Grassmanniana real. Se $\mathbb{F}(S) = Gr_k(n)$ e a ação de L em $\mathbb{F}(S)$ é transitiva, então pela

Tabela 2.2 devemos ter $L = \mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$, $L = G_2^{\mathbb{C}}$ (quando $n = 7$), $L = \mathrm{Spin}(7)^{\mathbb{C}}$ (quando $n = 8$), $L = \mathrm{SO}(1, 7)$ (quando $n=8$) ou $L = \mathrm{SO}(n, S)$. Dentre esses, apenas o primeiro caso é subgrupo de $G = \mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$, e portanto temos a seguinte observação:

Observação 3.1.

- (a) Como L é subgrupo de $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$, com n sendo a dimensão do espaço euclidiano onde estão contidos os subespaços que formam a Grassmanniana, devemos desconsiderar alguns subgrupos da Tabela 2.2, a saber, $\mathrm{So}(n, S)$, $\mathrm{SO}(1, 7)$, $\mathrm{Spin}(7)^{\mathbb{C}}$ e $G_2^{\mathbb{C}}$, pois são subgrupos de $\mathrm{Sl}(N, \mathbb{R})$, com $N > n$. Sendo assim, no caso de $\mathbb{F}(S) = \mathrm{Gr}_k(n)$ restam apenas as seguintes possibilidades para L : $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$ e os casos da Tabela 2.1.
- (b) Em relação a Tabela 2.1, a parte semissimples das álgebras de tipo I são compactas. Dessa forma temos as seguintes possibilidades para L : $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$; $\mathrm{Sl}(m, \mathbb{C})$, com $n = 2m$; $\mathrm{Sl}(m, \mathbb{H})$, com $n = 4m$; $\mathrm{Sp}(m, \mathbb{R})$, com $n = 2m$; $\mathrm{Sp}(m, \mathbb{C})$, com $n = 4m$ e $\mathrm{Sl}(m, \mathbb{H}) \oplus \mathrm{Su}(2)$, com $n = 4m$.

Com os resultados vistos até agora, é possível encontrar os subgrupos de $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$ que são S -admissíveis. Faremos isso checando quais subgrupos, citados na Observação 3.1, possuem sequência contractante com respeito as variedades flags minimais em que eles tem ação transitiva, ou seja, com respeito a $\mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1}$ ou a $\mathrm{Gr}_{n-1}(n)$.

3.1.1 $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$

O grupo $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$ tem álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ e age transitivamente em $\mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1}$ e em $\mathrm{Gr}_k(n)$. Portanto sua ação é minimal nessas variedades. Além disso, $\mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1}$ e $\mathrm{Gr}_k(n)$ são flags de $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$. Portanto, pela Observação 1.22 podemos garantir que $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$ possui sequência contractante com respeito ao espaço projetivo e também com respeito as Grassmannianas. No entanto, esse caso não é interessante estudar, pois para $L = \mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$ temos que G/L é a variedade homogênea trivial.

3.1.2 $\mathfrak{sl}(m, \mathbb{C})$

Como o grupo $\mathrm{Sl}(m, \mathbb{C})$ com tal álgebra age em \mathbb{R}^{2m} , temos que $G = \mathrm{Sl}(2m, \mathbb{R})$ e podemos identificar $\mathrm{Sl}(m, \mathbb{C})$ com um subgrupo $L \subset G$. Para isso, tome $X \in \mathfrak{sl}(m, \mathbb{C})$. Então $X = A + iB$, com $A, B \in \mathfrak{sl}(m, \mathbb{R})$, pois $\mathrm{tr}X = 0$, logo $\mathrm{tr}(A + iB) = 0$ o que implica em $\mathrm{tr}A = 0$ e $\mathrm{tr}B = 0$. Sabemos que $\mathfrak{sl}(m, \mathbb{C})$ age em \mathbb{C}^m . Então tome $w = u + iv \in \mathbb{C}^m$, onde $u, v \in \mathbb{R}^m$. Temos que

$$X \cdot w = (A + iB)(u + iv) = Au - Bv + i(Bu + Av).$$

Escrevendo na forma de matriz temos,

$$\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Au - Bv \\ Bu + Av \end{pmatrix}.$$

Analogamente, temos que elementos da forma $h = \exp H$ não podem constituir uma seqüência contractante com respeito a $Gr_{2m-1}(2m)$. De fato, sabemos que $Gr_{2m-1}(2m)$ é um flag de $Sl(2m, \mathbb{R})$ associado ao conjunto de raízes $\Theta_{2m-1} = \{\alpha_{12}, \alpha_{23}, \dots, \alpha_{(2m-2, 2m-1)}\}$. Então $\alpha_{(2m-1, 2m)}$ é uma raiz simples que não pertence a $\langle \Theta_{2m-1} \rangle$. Tome a raiz negativa $\alpha = -\alpha_{(m, 2m)} = \alpha_{(2m, m)}$ e $h = \exp(H)$. Então

$$\phi_\alpha(h) = \exp(\alpha_{(2m, m)}(\log h)) = \exp(\alpha_{(2m, m)}(H)) = \exp(\lambda_m - \lambda_m) = 1.$$

Dessa forma, se h_k for uma seqüência em $\text{cl}A^+ \cap L$, então $\phi_\alpha(h_k)$ não converge para zero quando $k \rightarrow \infty$ e $\alpha \notin \langle \pm\Theta_{2m-1} \rangle$, pois $\alpha = -(\alpha_{m, m+1} + \dots + \alpha_{2m-1, 2m})$.

Observação 3.2. *Seja $G = Sl(2m, \mathbb{R})$, $G = KAN$ uma decomposição de Iwasawa de G e $L \subset G$ um subgrupo fechado. Suponha que L possua uma seqüência contractante $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de G com respeito a alguma variedade flag \mathbb{F}_Θ . Considere a decomposição polar dessa seqüência $g_k = (u_k h_k v_k)$ com $u_k, v_k \in K$ e $h_k \in \text{cl}A^+$. Agora considere uma decomposição de Iwasawa de $L = K_1 A_1 N_1$. Sem perda de generalidade podemos supor $K_1 \subset K$, $A_1 \subset A$ e $N_1 \subset N$. Como cada elemento da seqüência pertence a L podemos considerar a decomposição polar destes elementos nesse grupo, digamos $g_k = u_k^1 h_k^1 v_k^1$, com $u_k^1, v_k^1 \in K_1$ e $h_k^1 \in \text{cl}A_1^+$. Como $K_1 \subset K$ e $A_1^+ \subset A^+$, temos que $u_k^1, v_k^1 \in K$ e $h_k^1 \in \text{cl}A^+$. Logo, essa é uma decomposição polar em G também, e como a parte radial em $\text{cl}A^+$ da decomposição polar é única, temos que $h_k^1 = h_k$. O que significa que $h_k \in L \cap \text{cl}A^+$.*

Como já mostramos, elementos de $L \cap \text{cl}A^+$ não podem gerar uma seqüência contractante. Portanto $Sl(m, \mathbb{C})$ não contém seqüência contractante de $Sl(2m, \mathbb{R})$ com respeito a $\mathbb{R}P^{2m-1}$ ou com respeito a $Gr_{2m-1}(2m)$. O que nos permite concluir que qualquer semigrupo $S \subset Sl(2m, \mathbb{R})$, com interior não vazio, que tenha tipo parabólico $\mathbb{F}(S) = \mathbb{R}P^{2m-1}$ ou $\mathbb{F}(S) = Gr_{2m-1}(2m)$ não pode ser transitivo na variedade homogênea $Sl(2m, \mathbb{R})/Sl(m, \mathbb{C})$.

3.1.3 $\mathfrak{sl}(m, \mathbb{H})$

Como o grupo $Sl(m, \mathbb{H})$ com tal álgebra age em \mathbb{R}^{4m} , temos que $G = Sl(4m, \mathbb{R})$ e podemos identificar $Sl(m, \mathbb{H})$ com um subgrupo $L \subset G$. Para isso, tome $X \in \mathfrak{sl}(m, \mathbb{H})$. Então $X = A + iB + jC + kD$, com $A, B, C, D \in \mathfrak{sl}(m, \mathbb{R})$, pois $\text{tr}X = 0$, logo $\text{tr}(A + iB + jC + kD) = 0$ o que implica em $\text{tr}A = \text{tr}B = \text{tr}C = \text{tr}D = 0$. Vamos identificar X com um elemento de $\mathfrak{sl}(4m, \mathbb{R})$. Tome $u, v, w, z \in \mathbb{R}^\geq$. Sabemos que $\mathfrak{sl}(m, \mathbb{H})$ age em \mathbb{H}^m . Então

$$\begin{aligned} X \cdot (u + iv + jw + kz) &= (A + iB + jC + kD)(u + iv + jw + kz) \\ &= (Au - Bv - Cw - Dz) + i(Av + Bu + Cz - Dw) + \\ &\quad j(Aw - Bz + Cu + Dv) + k(Az + Bw - Cv + Du). \end{aligned}$$

Escrevendo na forma matricial temos,

$$\begin{pmatrix} A & -B & -C & -D \\ B & A & -D & C \\ C & D & A & -B \\ D & -C & B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Au - Bv - Cw - Dz \\ Bu + Av + Cz - Dw \\ Aw - Bz + Cu + Dv \\ Az + Bw - Cv + Du \end{pmatrix}$$

Denote por $W = \begin{pmatrix} A & -B & -C & -D \\ B & A & -D & C \\ C & D & A & -B \\ D & -C & B & A \end{pmatrix}$.

Temos que cada elemento $X = (A + iB + jC + kD) \in \mathfrak{sl}(m, \mathbb{H})$ está identificado com $W \in \mathfrak{sl}(4m, \mathbb{R})$, o que implica que $\mathrm{Sl}(m, \mathbb{H})$ está identificado com o subgrupo $L \subset \mathrm{Sl}(4m, \mathbb{R})$ o qual é o único subgrupo conexo com álgebra de Lie

$$\mathfrak{l} = \left\{ \begin{pmatrix} A & -B & -C & -D \\ B & A & -D & C \\ C & D & A & -B \\ D & -C & B & A \end{pmatrix} : A, B, C, D \in \mathfrak{sl}(m, \mathbb{R}) \right\}.$$

Primeiramente vamos escrever a decomposição de Cartan de \mathfrak{l} . Considere $\mathfrak{l} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$, onde \mathfrak{k} é o subconjunto de matrizes antisimétricas e \mathfrak{s} é o subconjunto de matrizes simétricas de \mathfrak{l} . Tome $X = \begin{pmatrix} A & -B & -C & -D \\ B & A & -D & C \\ C & D & A & -B \\ D & -C & B & A \end{pmatrix} \in \mathfrak{l}$. Se $X \in \mathfrak{k}$, então ele tem a propriedade de que $X = -X^t$, então temos

que $A^t = -A$, $B^t = B$, $C^t = C$ e $D^t = D$, ou seja, A é antisimétrica e B, C, D são simétricas. Agora se $X \in \mathfrak{s}$, então $X = X^t$, o que implica em A simétrica e B, C, D antisimétricas. Sendo assim, podemos

decompor $X = \begin{pmatrix} A & -B & -C & -D \\ B & A & -D & C \\ C & D & A & -B \\ D & -C & B & A \end{pmatrix} \in \mathfrak{l}$ como uma soma $X = K + S$, sendo que a primeira parcela

pertence a \mathfrak{k} e a segunda pertence a \mathfrak{s} , onde

$$K = \begin{pmatrix} \frac{A-A^t}{2} & -\frac{B+B^t}{2} & -\frac{C+C^t}{2} & -\frac{D+D^t}{2} \\ \frac{B+B^t}{2} & \frac{A-A^t}{2} & -\frac{D+D^t}{2} & \frac{C+C^t}{2} \\ \frac{C+C^t}{2} & \frac{D+D^t}{2} & \frac{A-A^t}{2} & -\frac{B+B^t}{2} \\ \frac{D+D^t}{2} & -\frac{C+C^t}{2} & \frac{B+B^t}{2} & \frac{A-A^t}{2} \end{pmatrix} \text{ e } S = \begin{pmatrix} \frac{A+A^t}{2} & -\frac{B-B^t}{2} & -\frac{C-C^t}{2} & -\frac{D-D^t}{2} \\ \frac{B-B^t}{2} & \frac{A+A^t}{2} & -\frac{D-D^t}{2} & \frac{C-C^t}{2} \\ \frac{C-C^t}{2} & \frac{D-D^t}{2} & \frac{A+A^t}{2} & -\frac{B-B^t}{2} \\ \frac{D-D^t}{2} & -\frac{C-C^t}{2} & \frac{B-B^t}{2} & \frac{A+A^t}{2} \end{pmatrix}.$$

Então temos

$$\mathfrak{s} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & -\beta & -\gamma & -\delta \\ \beta & \alpha & -\delta & \gamma \\ \gamma & \delta & \alpha & -\beta \\ \delta & -\gamma & \beta & \alpha \end{pmatrix} : \alpha \text{ é simétrica e } \beta, \gamma, \delta \text{ são antisimétricas} \right\}.$$

Sabemos que um abeliano maximal \mathfrak{a} em $\mathfrak{sl}(4m, \mathbb{R})$ é o conjunto de matrizes diagonais. Então

$$\mathfrak{s} \cap \mathfrak{a} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & & & \\ & \alpha & & \\ & & \alpha & \\ & & & \alpha \end{pmatrix} : \alpha \text{ é diagonal} \right\}.$$

consequentemente

$$\begin{aligned}
\phi_\alpha(h_t) &= \phi_{\alpha_{j,1}}(h_t) \\
&= \exp(\alpha_{j,1}(\log h_t)) \\
&= \exp(\alpha_{j,1}(tH)) \\
&= \exp t(\alpha_{j,1}(H)) \\
&= \exp(t \cdot c) \rightarrow 0,
\end{aligned}$$

concluindo a afirmação feita acima.

Desta forma, se S é um semigrupo de $\mathrm{Sl}(2m, \mathbb{R})$ com interior não vazio, cujo tipo parabólico é $\mathbb{F}(S) = \mathbb{R}\mathbb{P}^{2m-1}$, temos pelo Teorema 1.19 que o semigrupo de compressão S_C age transitivamente na variedade homogênea $\mathrm{Sl}(2m, \mathbb{R})/\mathrm{Sp}(m, \mathbb{R})$, onde C denota o conjunto de controle invariante para S contido em $\mathbb{F}(S)$, pois a variedade homogênea $\mathrm{Sl}(2m, \mathbb{R})/\mathrm{Sp}(m, \mathbb{R})$ é conexa, a ação de $\mathrm{Sp}(m, \mathbb{R})$ em $\mathbb{F}(S)$ é transitiva (minimal) e L admite uma sequência contractante com respeito a $\mathbb{F}(S)$.

3.1.5 $\mathfrak{sp}(m, \mathbb{C})$

Temos que a álgebra

$\mathfrak{sp}(m, \mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 \\ Z_3 & -Z_1^t \end{pmatrix}; Z_i \text{ são matrizes complexas } m \times m \text{ e } Z_2, Z_3 \text{ são simétricas} \right\}$. Logo, é uma subálgebra de $\mathfrak{sl}(2m, \mathbb{C})$ e age em \mathbb{C}^{2m} . Mais ainda, cada Z_i age em \mathbb{C}^m . Então, podemos identificar Z_1 com uma matriz da forma $\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$ e Z_2, Z_3 com matrizes da forma $\begin{pmatrix} C & -D \\ D & C \end{pmatrix}$ tais que $A, B, C, D \in \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R})$, C é simétrica e D é anti-simétrica.

Sendo assim, um elemento $X \in \mathfrak{sp}(m, \mathbb{C})$ se identifica com um elemento de $\mathfrak{sl}(4m, \mathbb{R})$ da forma

$$\begin{pmatrix} A & -B & C & -D \\ B & A & D & C \\ E & -F & -A^t & -B^t \\ F & E & B^t & -A^t \end{pmatrix},$$

onde C, E são simétricas e D, F são anti-simétricas.

Vamos escrever a decomposição de Cartan de um elemento de $\mathfrak{l} \subset \mathfrak{sl}(4m, \mathbb{R})$, onde \mathfrak{l} está identificado com $\mathfrak{sp}(m, \mathbb{C})$.

Considere $\mathfrak{l} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$, onde \mathfrak{k} é o subconjunto de matrizes antisimétricas e \mathfrak{s} é o subconjunto de matrizes simétricas de \mathfrak{l} .

Tome X como a matriz descrita acima. Se $X \in \mathfrak{k}$ tem a propriedade de que $X = -X^t$, então temos que $A^t = -A$, $B^t = B$, $E = -C^t$ e $F = D^t$, ou seja, A é anti-simétrica e B é simétrica e podemos reescrever

$$X = \begin{pmatrix} A & -B & C & -D \\ B & A & D & C \\ -C^t & -D^t & -A^t & -B^t \\ D^t & -C^t & B^t & -A^t \end{pmatrix}. \text{ Agora se } X \in \mathfrak{s}, \text{ então } X = X^t, \text{ o que implica em } A \text{ simétrica, } B$$

de S uma variedade Grassmanniana real ou o espaço projetivo real. Então $\mathbb{F}(S) = \mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})/P_{\Theta(S)}$, onde $\Theta(S) = \Sigma - \{\alpha_{i, i+1}\}$. Suponha que S age transitivamente em uma variedade homogênea G/L , com $L \subset G$ um subgrupo fechado, conexo e semissimples. Nessas condições, sabemos pela Proposição 1.25, que L age transitivamente em $\mathbb{F}(S)$, possui sequência contractante com respeito a $\mathbb{F}(S)$, é não compacto e $\mathbb{F}(S)$ é flag de L . Utilizaremos a Observação 3.1 e a existência ou não de sequências contractantes em L com respeito a $\mathbb{F}(S)$, feita na seção anterior, para classificar as variedades homogêneas de $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$ que admitem ação transitiva de semigrupos próprios desse grupo. Nos casos em que o subgrupo $L \subset G$ transitivo no tipo parabólico de S é o grupo todo, ou seja, $L = \mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$, temos que G/L é trivial e não é interessante estudar esse caso. Os teoremas 3.3 e 3.4 nos informam quando isso acontece. O próximo teorema, juntamente com os exemplos em seguida, garantem que é única a variedade homogênea, não trivial, que admite ação transitiva de um semigrupo próprio, cujo tipo parabólico é \mathbb{RP}^{n-1} ou $Gr_{n-1}(n)$.

Teorema 3.3. *Seja $G = \mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$ e $S \subset G$ um semigrupo próprio, com $\mathrm{int}(S) \neq \emptyset$, cujo o tipo parabólico $\mathbb{F}(S)$ é \mathbb{RP}^{n-1} ou $Gr_{n-1}(n)$. Suponha que S seja transitivo em G/L , com $L \subset G$ subgrupo fechado, conexo e semissimples. Então G/L é trivial se n é ímpar e se n é par a única possibilidade para G/L , além da trivial, é $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})/\mathrm{Sp}(m, \mathbb{R})$, com $n = 2m$.*

Demonstração: Seja G/L uma variedade homogênea onde o semigrupo S descrito acima age transitivamente, com L conexo. Temos pela Proposição 1.25 que a ação de L em \mathbb{RP}^{n-1} é transitiva, L é não compacto, podemos nos restringir aos subgrupos L que são semissimples e além disso tal subgrupo possui sequência contractante com respeito a \mathbb{RP}^{n-1} . De fato, se $\mathbb{F}(S) = \mathbb{RP}^{n-1}$ então o Teorema 1.18 garante isso. No caso em que $\mathbb{F}(S) = Gr_{n-1}(n)$, o Lema 1.28 garante que L tem ação minimal e possui sequência contractante com respeito a $\mathbb{F}(S^{-1})$ que sabemos ser a variedade dual a $\mathbb{F}(S)$, ou seja, \mathbb{RP}^{n-1} . Desta forma, L deve ser um dos subgrupos citados na Observação 3.1. Selecionando dentre estes, os que possuem sequências contractantes com respeito a \mathbb{RP}^{n-1} , temos que a única possibilidade não trivial é $L = \mathrm{Sp}(m, \mathbb{R})$, onde $n = 2m$. Consequentemente, se n for ímpar, $L = \mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$ e G/L é trivial. \square

O próximo teorema garante que se o tipo parabólico de S for uma variedade Grassmanniana, diferente daquela considerada no teorema anterior e diferente dos casos em aberto ($Gr_2(4)$, $Gr_3(8)$ ou $Gr_{2l+1}(2m)$), então a variedade homogênea que admite ação transitiva de S só pode ser a trivial.

Teorema 3.4. *Seja $G = \mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$ e $S \subset G$ um semigrupo próprio com $\mathrm{int}(S) \neq \emptyset$, cujo o tipo parabólico $\mathbb{F}(S)$ é uma variedade Grassmann $Gr_k(n)$ (exceto casos em aberto) diferente de $Gr_{n-1}(n)$, quando n for par. Então S não pode agir transitivamente em qualquer variedade homogênea G/L , com L conexo, diferente da trivial.*

Demonstração: Sabemos que se um semigrupo de interior não vazio $S \subset \mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$ for transitivo em uma variedade da forma $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})/L$, então L age transitivamente no tipo parabólico de S . Por hipótese, temos que $\mathbb{F}(S) = Gr_k(n)$. Se n for par e $k \neq n-1$ ou se n for ímpar, as Tabelas 2.1 e 2.2 juntamente com a Observação 3.1 indicam que o único subgrupo L de $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$ transitivo em $Gr_k(n)$ é ele próprio. Logo, $L = \mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$ e portanto G/L é trivial. \square

Vimos no Teorema 3.3 que a única variedade homogênea de $\mathrm{Sl}(2n, \mathbb{R})$ que pode admitir ação transitiva de um semigrupo próprio de $\mathrm{Sl}(2n, \mathbb{R})$, cujo tipo parabólico é \mathbb{RP}^{2n-1} ou $Gr_{2n-1}(2n)$, é a variedade

$\mathrm{Sl}(2n, \mathbb{R})/\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$. O exemplo a seguir garante que realmente essa variedade admite ação transitiva de um semigrupo próprio de $\mathrm{Sl}(2n, \mathbb{R})$.

Exemplo 3.5. Consideremos o grupo de Lie $G = \mathrm{Sl}(2n, \mathbb{R})$ e o semigrupo de G dado por $S_{[W]} = \{g \in \mathrm{Sl}(2n, \mathbb{R}) : g[W] \subset [W]\}$, onde W é um cone pontual e gerador do \mathbb{R}^{2n} e $[W] \subset \mathbb{R}P^{2n-1}$ é o subconjunto formado pelas retas geradas pelos vetores $v \in W$. Temos que $S_{[W]}$ age transitivamente na variedade homogênea $\mathrm{Sl}(2n, \mathbb{R})/\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$, onde $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$ é o subgrupo simplético visto na Subseção 3.1.4. Vamos usar o Teorema 1.19, para mostrar que $S_{[W]}$ age transitivamente em $\mathrm{Sl}(2n, \mathbb{R})/\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$. Para isso, vamos verificar se as hipóteses do teorema são satisfeitas.

1. O tipo parabólico de $S_{[W]}$ é o espaço projetivo $\mathbb{R}P^{2n-1}$, isto é, $\mathbb{F}(S_W) = \mathbb{R}P^{2n-1}$.

De fato, para isso vamos mostrar que $\mathbb{R}P^{2n-1}$ se projeta em $\mathbb{F}(S_{[W]})$. Tome $v \in \mathrm{int}W$ e defina $V = \{v\}^\perp$.

Seja $H = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_2 \end{pmatrix}$, com $\lambda_1 > \lambda_2$, onde v é autovetor de H associado ao autovalor λ_1 e

os vetores da base de V são autovetores associados ao autovalor λ_2 . Temos que v é o atrator da ação de $\exp(tH)$, com $t > 0$, para todo vetor $u \in \mathbb{R}^{2n}$ tal que $\langle v, u \rangle > 0$, ver [16]. Em particular, vale para os vetores $w \in W$. Sendo assim, $\exp(tH)W \subset \mathrm{int}W$ para $t > 0$ suficientemente grande. Logo, S_W contém

um elemento $h = \exp(H)$, com $H = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha_2 \end{pmatrix}$. Como $S_W \subset S_{[W]}$, temos que $S_{[W]}$ também

contém um elemento com tais propriedades e consequentemente temos que $\mathbb{F}(S_{[W]})$ se projeta em \mathbb{F}_Θ , com $\Theta = \{\alpha \in \Sigma; \alpha(H) = 0\} = \{\lambda_2 - \lambda_3, \dots, \lambda_{2n-1} - \lambda_{2n}\}$, ou seja, $\mathbb{F}(S_{[W]})$ se projeta em $\mathbb{R}P^{2n-1}$ e portanto

$$\mathbb{F}(S_{[W]}) = \mathbb{R}P^{2n-1}.$$

2. Temos que $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$ age transitivamente em $\mathbb{R}P^{2n-1}$, o que garante a minimalidade da ação desse subgrupo no tipo parabólico de $S_{[W]}$.

De fato, a subálgebra de matrizes anti-simétricas da decomposição de Cartan de $\mathfrak{sp}(n)$ é dada por

$$\mathfrak{k} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}; a \text{ é anti-simétrica e } b \text{ é simétrica} \right\}.$$

Seja $K = \langle \exp \mathfrak{k} \rangle$ o subgrupo compacto de $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$ com álgebra de Lie \mathfrak{k} . Vamos mostrar que K age transitivamente em $\mathbb{R}P^{2n-1}$. Para isso, vamos mostrar que a órbita de K em $[e_1] \in \mathbb{R}P^{2n-1}$ é aberta.

Consideremos as matrizes abaixo com entradas reais:

$$A = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & a_2 & \dots & a_n \\ \hline -a_2 & & & \\ \vdots & & 0 & \\ -a_n & & & \end{array} \right) \text{ e } B = \left(\begin{array}{c|ccc} b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ \hline b_2 & & & \\ \vdots & & 0 & \\ b_n & & & \end{array} \right).$$

Então $X = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \in \mathfrak{k}$ e o subgrupo a um parâmetro $e^{tX} \in K$. Desta forma, temos que

$$\frac{d}{dt}e^{tX} \cdot [e_1]|_{t=0} \in T_{[e_1]}(K \cdot [e_1]),$$

onde $T_{[e_1]}(K \cdot [e_1])$ é o espaço tangente a órbita $K \cdot [e_1]$ no ponto $[e_1]$. Como $\frac{d}{dt}e^{tX} \cdot [e_1]|_{t=0}$ é o próprio campo agindo em $[e_1]$ e a_i e b_j são arbitrários, temos que

$$\{(0, -a_2, \dots, -a_n, b_1, \dots, b_n); a_i, b_j \in \mathbb{R}\} \subset T_{[e_1]}(K \cdot [e_1]).$$

Desta forma temos que $T_{[e_1]}(K \cdot [e_1])$ contém um subespaço real de dimensão $2n - 1$. Além disso, temos que $\dim_{\mathbb{R}}(T_{[e_1]}\mathbb{R}P^{2n-1}) = 2n - 1$ e $T_{[e_1]}(K \cdot [e_1]) \subset T_{[e_1]}\mathbb{R}P^{2n-1}$. Logo, vale a igualdade entre os espaços tangentes e assim a órbita $K \cdot [e_1]$ é aberta em $\mathbb{R}P^{2n-1}$. Por outro lado, como K é compacto, temos que $K \cdot [e_1]$ é fechada. Como $\mathbb{R}P^{2n-1}$ é conexo, temos que $K \cdot [e_1] = \mathbb{R}P^{2n-1}$. Mostrando assim, que a ação de K em $\mathbb{R}P^{2n-1}$ é transitiva e consequentemente a ação de $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$ também é.

3. Como já foi mostrado na subseção 3.1.4, $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$ admite sequência contractante com respeito a $\mathbb{R}P^{2n-1}$.

Resumidamente, temos que $S_{[W]}$ é um semigrupo de interior não vazio de $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$ cujo tipo parabólico é $\mathbb{R}P^{2n-1}$, a ação de $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$ em $\mathbb{R}P^{2n-1}$ é transitiva e desta forma minimal, $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$ admite uma sequência contractante com respeito a $\mathbb{R}P^{2n-1}$, $S_{[W]}$ é o semigrupo de compressão de seu conjunto de controle invariante e $\mathrm{Sl}(2n, \mathbb{R})/\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$ é conexo. Desta forma, pelo Teorema 1.19, temos que o semigrupo próprio $S_{[W]}$ age transitivamente na variedade homogênea $\mathrm{Sl}(2n, \mathbb{R})/\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$.

Exemplo 3.6. Seja $G = \mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$ e considere sua representação natural em $\Lambda^k \mathbb{R}^n$ dada por $g(v_1 \wedge \dots \wedge v_k) = gv_1 \wedge \dots \wedge gv_k$. Seja $\mathcal{O}_k = \{\sum a_I e_I; a_I \geq 0\}$, com $e_I = e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k} \in \Lambda^k \mathbb{R}^n$, o octante positivo de $\Lambda^k \mathbb{R}^n$ com respeito a base $\{e_I\}$ e $S_k = \{g \in G; g\mathcal{O}_k \subset \mathcal{O}_k\}$. Temos que S_k é um semigrupo de interior não vazio. A seguir trazemos algumas das propriedades de S_k que utilizaremos para mostrar que esse semigrupo não pode agir transitivamente em variedades homogêneas de $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$, para certos valores de k . Para mais detalhes sobre essas propriedades citamos [14].

Uma matriz g pertence a S_k se, e somente se, $\langle ge_I, e_J \rangle \geq 0$, para todo I, J multi-índices. Além disso, dado um multi-índice I , as coordenadas de ge_I com respeito à base $\{e_J\}$ são k -menores da matriz da transformação linear que g define em \mathbb{R}^n , com respeito a base canônica. Desta forma, $\langle ge_I, e_J \rangle$ é o menor de g correspondente aos multi-índices I, J . Assim, $g \in S_k$ se, e somente se, seus k -menores são não negativos.

Seja $Gr_k^+(n) \subset \Lambda^k \mathbb{R}^n$ o subconjunto de vetores decomponíveis, isto é, vetores em $\Lambda^k \mathbb{R}^n$ do tipo $v_1 \wedge \dots \wedge v_k$, com $v_i \in \mathbb{R}^n$. A notação coincidente vem do fato que $Gr_k^+(n)$ está em bijeção com a Grassmanniana de subespaços orientados k -dimensionais de \mathbb{R}^n . O semigrupo S_k pode ser definido como um semigrupo de compressão de um subconjunto de $Gr_k^+(n)$. De fato, defina $C_k = \mathcal{O}_k \cap Gr_k^+(n)$. Então C_k é o cone em $Gr_k^+(n)$ gerado por $\{e_I\}$ e $g \in S_k$ se, e somente se, $gC_k \subset C_k$. Portanto S_k é o semigrupo de compressão

$$S_k = \{g \in \mathrm{Sl}(n, \mathbb{R}); gC_k \subset C_k\},$$

e desta forma temos que $\mathbb{F}(S_k) = Gr_k^+(n)$, ver [13].

Agora, consideremos n e k pares, com $n \neq 4$ e $k \neq 2$. Pelo que vimos acima, o tipo parabólico de S_k é $Gr_k^+(n)$. Portanto, pelo Teorema 3.4, S_k **não** pode agir transitivamente em qualquer variedade homogênea $Sl(n, \mathbb{R})/L$, onde L é subgrupo próprio de $Sl(n, \mathbb{R})$. O mesmo resultado vale quando tomamos n ímpar e k qualquer.

Como ainda não encontramos os subgrupos de $Sl(n, \mathbb{R})$, para $n = 4$ ou $n = 2m$, que são transitivos nas variedades Grassmannianas $Gr_2^+(4)$ e $Gr_{2l+1}^+(2m)$ com $2l+1 < 2m-3$, não podemos decidir se os semigrupos $S_2 \subset Sl(4, \mathbb{R})$ e $S_{2l+1} \subset Sl(2m, \mathbb{R})$ agem transitivamente em alguma variedade homogênea desses respectivos grupos.

Exemplo 3.7. Ainda considerando S_k do exemplo anterior, temos pelo Teorema 1.19 que S_1 e S_{2n-1} agem transitivamente na variedade homogênea $Sl(2n, \mathbb{R})/Sp(n, \mathbb{R})$. De fato, temos que S_1 é um semigrupo de interior não vazio de $Sl(2n, \mathbb{R})$ cujo tipo parabólico é $Gr_1^+(2n) = \mathbb{R}P^{2n-1}$, vimos no Exemplo 3.5 que a ação de $Sp(n, \mathbb{R})$ em $\mathbb{R}P^{2n-1}$ é transitiva e desta forma minimal. Além disso, $Sp(n, \mathbb{R})$ admite uma sequência contractante com respeito a $\mathbb{R}P^{2n-1}$. Como S_1 é o semigrupo de compressão de seu conjunto de controle invariante e $Sl(2n, \mathbb{R})/Sp(n, \mathbb{R})$ é conexo, temos pelo Teorema 1.19, S_1 age transitivamente na variedade homogênea $Sl(2n, \mathbb{R})/Sp(n, \mathbb{R})$.

Analogamente, temos que S_{2n-1} é um semigrupo de interior não vazio de $Sl(2n, \mathbb{R})$ cujo tipo parabólico é $Gr_{2n-1}^+(2n)$. A ação de $Sp(n, \mathbb{R})$ em $Gr_{2n-1}^+(2n)$ é transitiva. De fato, $Sp(n, \mathbb{R})$ age transitivamente em $\mathbb{R}P^{2n-1}$ e $\mathbb{R}P^{2n-1}$ é flag de $Sp(n, \mathbb{R})$, logo, pela Proposição 1.32 temos que $Sp(n, \mathbb{R})$ também age transitivamente na variedade flag dual de $\mathbb{R}P^{2n-1}$ a qual é $Gr_{2n-1}^+(2n)$. Além disso, vimos na subseção 3.1.4 que $Sp(n, \mathbb{R})$ admite uma sequência contractante com respeito a $Gr_{2n-1}^+(2n)$. Como S_{2n-1} é o semigrupo de compressão de seu conjunto de controle invariante, temos pelo Teorema 1.19, S_{2n-1} age transitivamente na variedade homogênea $Sl(2n, \mathbb{R})/Sp(n, \mathbb{R})$.

Como consequência desse fato temos que $Gr_{2n-1}(2n)$ é flag de $Sp(n, \mathbb{R})$.

3.3 $\mathbb{F}(S_L) = \mathbb{F}(S)$ para o caso $L = Sp(n, \mathbb{R})$, $G = Sl(2n, \mathbb{R})$ e $S = S_{[W]}$

Mostramos que $Sl(2n, \mathbb{R})/Sp(n, \mathbb{R})$ é a única variedade homogênea que admite ação transitiva de um semigrupo próprio $S \subset G$, com interior não vazio, cujo tipo parabólico é $\mathbb{R}P^{2n-1}$ ou $Gr_{2n-1}(2n)$. Além disso, vimos no Exemplo 3.5 que $S_{[W]}$ é um semigrupo com tais características e assim, pela Proposição 1.21, temos como consequência que $\mathbb{R}P^{2n-1}$ é flag de $Sp(n, \mathbb{R})$. Veremos a seguir que o tipo parabólico de $S_L = S_{[W]} \cap Sp(n, \mathbb{R})$ é o mesmo de $S_{[W]}$, visto como flag de L , ou seja, $\mathbb{F}(S_L) = \mathbb{R}P^{2n-1}$.

Um sistema de raízes simples para $L = Sp(n, \mathbb{R})$ é dado por $\Sigma_L = \{\lambda_1 - \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1} - \lambda_n, 2\lambda_n\}$. Dado $\Theta \subset \Sigma_L$, uma variedade Flag é da forma $\mathbb{F}_\Theta = L/P_\Theta$, onde P_Θ é o subgrupo parabólico associado a Θ . Por outro lado, considerando $\mathbf{r} = \{r_1, \dots, r_k\}$, com $1 \leq r_1 < \dots < r_k \leq n$ e

$$\mathbb{L}_n(r_1, \dots, r_k) = \{(V_{r_1} \subset \dots \subset V_{r_k}) : V_{r_i} \subset \mathbb{R}^{2n} \text{ são subespaços isotrópicos de dimensão } r_i\},$$

temos que $\mathbb{L}_n(r_1, \dots, r_k)$ é uma variedade homogênea de $Sp(n, \mathbb{R})$. A relação entre as dimensões r_1, \dots, r_k e Θ é dada da seguinte maneira: denote por $\alpha_1 = \lambda_1 - \lambda_2, \dots, \alpha_{n-1} = \lambda_{n-1} - \lambda_n, \alpha_n = 2\lambda_n$. Então $\mathbb{L}_n(r_1, \dots, r_k) = \mathbb{F}_\Theta$, onde Θ é formado pelas raízes de índices diferentes de r_i , com $i = 1, \dots, k$.

pela transitividade de L em \mathbb{F}_{Θ_1} , existe $l \in L$ tal que $ly_1 = y_2$, resta mostrar que $l \in L_x$, ou seja, $lx = x$. Temos que $lx = l\pi(y_1) = \pi(ly_1) = \pi(y_2) = x$, concluindo assim a afirmação acima.

Reciprocamente, considere L é transitivo em \mathbb{F}_{Θ_2} e L_x é transitivo na fibra $\pi^{-1}(x)$ e tome $y_1, y_2 \in \mathbb{F}_{\Theta_1}$. Se $\pi(y_1) = \pi(y_2)$, então y_1 e y_2 pertencem a mesma fibra. Logo existe $l \in L_x \subset L$ tal que $ly_1 = y_2$. Por outro lado, se $\pi(y_1) \neq \pi(y_2)$, sejam $x_1 = \pi(y_1)$ e $x_2 = \pi(y_2)$. Pela transitividade de L em \mathbb{F}_{Θ_2} , existe $g \in L$ tal que $gx_1 = x_2$. Considere $u = gy_1$. Temos que $\pi(u) = \pi(gy_1) = g\pi(y_1) = gx_1 = x_2$, logo $u \in \pi^{-1}(x_2)$ e como $y_2 \in \pi^{-1}(x_2)$, existe $l \in L_x \subset L$ tal que $lu = y_2$. Tome $l' = lg \in L$. Notemos que $l'y_1 = (lg)y_1 = l(gy_1) = lu = y_2$. Portanto, podemos concluir que L é transitivo em \mathbb{F}_{Θ_1} . \square

Agora temos um resultado que garante a existência de sequência contractante com respeito às projeções.

Lema 3.10. *Suponha que L possui sequência contractante com respeito a $\mathbb{F}_{\Theta(S)}$. Então L possui sequência contractante com respeito a qualquer variedade flag na qual $\mathbb{F}_{\Theta(S)}$ se projeta.*

Demonstração: Como L possui uma sequência contractante com respeito a $\mathbb{F}_{\Theta(S)}$, digamos $(h_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $\phi_\alpha(h_k) \rightarrow 0$, quando $k \rightarrow \infty$, para toda raiz negativa α que não pertence a $\langle \Theta(S) \rangle$. Considere \mathbb{F}_Θ uma variedade flag na qual $\mathbb{F}_{\Theta(S)}$ se projeta. Então, $\Theta(S) \subset \Theta$, o que implica que $\langle \Theta(S) \rangle \subset \langle \Theta \rangle$. Dessa forma, se $\alpha \notin \langle \Theta \rangle$, então $\alpha \notin \langle \Theta(S) \rangle$. Logo, $\phi_\alpha(h_k) \rightarrow 0$, quando $k \rightarrow \infty$, para toda raiz negativa $\alpha \notin \langle \Theta \rangle$. Portanto, a sequência $(h_k)_{k \in \mathbb{N}}$ também é contractante com respeito a \mathbb{F}_Θ . \square

A partir desses dois resultados, apresentamos o seguinte teorema:

Teorema 3.11. *Seja $G = \text{Sl}(n, \mathbb{R})$ e $S \subset G$ um semigrupo próprio com $\text{int}(S) \neq \emptyset$, cujo o tipo parabólico $\mathbb{F}(S)$ é de tipo projetivo ou tipo k (exceto os casos em aberto). Então a única variedade homogênea não trivial de G na qual S pode ser transitivo é $\text{Sl}(n, \mathbb{R})/\text{Sp}(m, \mathbb{R})$, com $n = 2m$.*

Demonstração: Como já vimos, para que S seja transitivo em G/L é necessário que L seja transitivo em $\mathbb{F}(S)$ e possua uma sequência contractante com respeito a essa variedade flag. Como $\mathbb{F}(S)$ se projeta em \mathbb{RP}^{n-1} , ou em $Gr_k(n)$ para algum $k \in \{2, 3, \dots, n-1\}$, a Proposição 3.9 garante que basta procurar aqueles subgrupos que são transitivos em \mathbb{RP}^{n-1} , ou em $Gr_k(n)$. Além disso, podemos procurar quais desses subgrupos contém sequência contractante com respeito a \mathbb{RP}^{n-1} , ou com respeito a $Gr_k(n)$. De fato, se $\mathbb{F}(S)$ se projeta em \mathbb{RP}^{n-1} , o Lema 3.10 garante que se não possuir com respeito ao projetivo, então não possuirá com respeito a $\mathbb{F}(S)$, analogamente, se não possuir com respeito a $Gr_k(n)$, então não possuirá com respeito a $\mathbb{F}(S)$.

Em qualquer um dos casos, L tem ação minimal e possui sequência contractante com respeito a \mathbb{RP}^{n-1} . De fato, primeiramente suponha que $\mathbb{F}(S)$ se projeta em \mathbb{RP}^{n-1} , então já concluímos que isso ocorre. Agora suponha que $\mathbb{F}(S)$ se projeta em $Gr_k(n)$, com $k \in \{2, 3, \dots, n-1\}$ (exceto os casos em aberto). Se n é ímpar, ou se n é par e $k \neq n-1$, temos que $L = \text{Sl}(n, \mathbb{R})$, e assim G/L é trivial. Se n é par e $k = n-1$, temos pelo Lema 1.28 que L tem ação minimal e possui sequência contractante com respeito a \mathbb{RP}^{n-1} , pois essa é a variedade dual a $Gr_{n-1}(n)$.

Desta forma, como foi demonstrado em 3.3 temos que a única possibilidade não trivial é $L = \text{Sp}(m, \mathbb{R})$, onde $n = 2m$, ou seja, $G/L = \text{Sl}(2m, \mathbb{R})/\text{Sp}(m, \mathbb{R})$. \square

3.5 Conclusões

A proposta inicial desse trabalho era selecionar pares (S, L) , com $S \subset G$ um semigrupo de interior não vazio e $L \subset G$ um subgrupo fechado e conexo, tais que a ação de S na variedade homogênea G/L seja transitiva. Podemos resumir os resultados principais desse capítulo no seguinte teorema:

Teorema 3.12. *Seja $G = \mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$ e $S \subset G$ um semigrupo próprio, com $\mathrm{int}(S) \neq \emptyset$, transitivo na variedade homogênea G/L , com $L \subset G$ um subgrupo fechado, conexo e semissimples.*

1. *Se n é ímpar, então G/L é trivial.*
2. *Se n é par e $\mathbb{F}(S) = \mathrm{Gr}_k(n)$, diferente de $\mathrm{Gr}_{n-1}(n)$, $\mathrm{Gr}_2(4)$, $\mathrm{Gr}_3(8)$ e de $\mathrm{Gr}_{2l+1}(2m)$, com $l > 1$ e $2l + 1 \leq 2m - 3$, então G/L é trivial.*
3. *Se n é par e $\mathbb{F}(S) = \mathbb{R}P^{n-1}$ ou $\mathbb{F}(S) = \mathrm{Gr}_{n-1}(n)$, então a única possibilidade para G/L , além da trivial, é $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})/\mathrm{Sp}(m, \mathbb{R})$, com $n = 2m$.*

Além disso, se $\mathbb{F}(S)$ tem tipo k diferente de $\mathbb{R}P^{n-1}$, de $\mathrm{Gr}_{n-1}(n)$ e dos casos em aberto, então G/L é trivial.

A partir desse resultado, temos que no caso $G = \mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$, os únicos pares que aparecem com tais propriedades são:

- $(S_C, \mathrm{Sp}(m, \mathbb{R}))$ e
- $(S_C^{-1}, \mathrm{Sp}(m, \mathbb{R}))$,

onde S_C representa o semigrupo de compressão do conjunto de controle invariante C para a ação do semigrupo S em seu tipo parabólico $\mathbb{F}(S)$, sendo que S satisfaz:

1. $S \subset \mathrm{Sl}(2m, \mathbb{R})$, $\mathrm{int}S \neq \emptyset$ e $\mathbb{F}(S) = \mathbb{R}P^{2m-1}$; ou
2. $S \subset \mathrm{Sl}(2m, \mathbb{R})$, $\mathrm{int}S \neq \emptyset$ e $\mathbb{F}(S) = \mathrm{Gr}_{2m-1}(2m)$.

Além desses casos, os únicos que podem aparecer são aqueles em que $\mathbb{F}(S) = \mathrm{Gr}_2(4)$ ou $\mathbb{F}(S) = \mathrm{Gr}_{2l+1}(2m)$ com $2l + 1 < 2m - 3$, pois esses casos ficaram em aberto devido ao fato de ainda termos que descobrir os subgrupos de $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$ que são transitivos nessas variedades.

Vimos ainda nesse capítulo, que os semigrupos de $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$, com $n > 4$, cujo tipo parabólico é $\mathrm{Gr}_{2l}(n)$ não podem ser transitivos em qualquer variedade homogênea $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})/L$, com L subgrupo próprio de G . Sendo assim, os semigrupos, cujo tipo parabólico se projeta em $\mathrm{Gr}_{2l}(n)$ também não podem. Desta forma, qualquer semigrupo cujo tipo parabólico é o flag maximal \mathbb{F} de $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$, não pode agir transitivamente em qualquer variedade homogênea $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})/L$, diferente da trivial, já que \mathbb{F} se projeta sobre $\mathrm{Gr}_{2l}(n)$.

A afirmação feita acima para os semigrupos de $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$ também é verdadeira no caso em que G é um grupo de Lie complexo. Apresentaremos no final do próximo capítulo a demonstração desse fato, a qual é feita usando a homologia e a dimensão dos flags de G e de L .

CAPÍTULO 4

TRANSITIVIDADE EM VARIEDADES HOMOGÊNEAS DE GRUPOS COMPLEXOS

No capítulo anterior, procuramos pares (S, L) tais que o semigrupo S age transitivamente na variedade homogênea G/L , para o caso $G = \mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$. A partir de agora, nosso objetivo principal é classificar os semigrupos que são transitivos em variedades homogêneas de grupos complexos clássicos. Por esse motivo, no decorrer desse capítulo, G representa um grupo de Lie complexo clássico, $S \subset G$ um semigrupo de interior não vazio e $L \subset G$ um subgrupo fechado e conexo e semissimples. Para que S seja transitivo em G/L , a Proposição 1.25 garante que é necessário que L seja transitivo no tipo parabólico $\mathbb{F}(S)$ de S , que possua sequência contractante com respeito a $\mathbb{F}(S)$, além disso, nesse capítulo usamos fortemente o fato que o tipo parabólico de S deve ser flag de L . Para a seleção dos pares (S, L) com as características comentadas acima, primeiramente utilizamos os subgrupos maximais $L \subset G$ dos grupos clássicos classificados por Dynkin em [2], pois se S não for transitivo em G/L também não será em qualquer G/L' , com $L' \subset L$. A partir daí, verificamos quais subgrupos maximais podem ser transitivos nos flags minimais de G , já que a princípio consideramos semigrupos cujo tipo parabólico é um desses flags minimais. Em seguida, resultados sobre a dimensão e a segunda homologia de variedades flags nos permitiram concluir que certos subgrupos maximais L não podem ter variedades flags em comum com o grupo de Lie complexo clássico que o contém e desta forma, não podem existir semigrupos próprios agindo transitivamente em G/L . Além disso, analisando a dimensão e a segunda homologia dos flags encontramos variedades homogêneas que admitem ação transitiva de semigrupos próprios.

4.1 Redução ao caso Maximal

Seja $S \subset G$ um semigrupo, com $\text{int}S \neq \emptyset$, tal que S é transitivo em uma variedade homogênea G/L , com $L \subset G$ subgrupo fechado, conexo e semissimples. Pelo Teorema 1.18 e Lema 1.23 temos que L age transitivamente em $\mathbb{F}(S)$ e L possui sequência contractante com respeito a $\mathbb{F}(S)$. Além disso, pela proposição 3.9, temos que se L é transitivo em uma variedade flag intermediária, então ele também é transitivo nas variedades flags minimais em que esta se projeta, ou seja, se L não é transitivo em uma variedade flag minimal, então L também não é transitivo em qualquer variedade flag intermediária que se projeta nessa minimal. Sendo assim, procuramos primeiramente os subgrupos L que podem ser transitivos nas variedades flags minimais de G .

A contra-positiva do lema a seguir nos garante que para os casos em que S não é transitivo em G/L , com L maximal, temos que S também não será transitivo em G/L' , onde $L' \subset L$ é um subgrupo fechado, conexo e semissimples. Dessa forma, restringimos nossa busca por subgrupos L que são fechados, conexos, semissimples e maximais em G .

Lema 4.1. *Sejam L e L' subgrupos fechados de G . Se $L' \subset L$, então $\pi : G/L' \rightarrow G/L$ dada por $\pi(gL') = gL$ é um fibrado e vale que se S é transitivo em G/L' , então S é transitivo em G/L .*

Demonstração: Como L e L' são subgrupos fechados de G e $L' \subset L$, temos que G/L' é um fibrado sobre G/L , com a projeção canônica dada por $\pi(gL') = gL$. Além disso, temos que π é equivariante, ou seja, $\pi(h \cdot gL') = h \cdot \pi(gL')$. Sendo assim, temos que

$$\begin{aligned} S(gL) &= \{s \cdot gL; s \in S\} = \{s \cdot \phi(gL'); s \in S\} \\ &= \{\phi(s \cdot gL'); s \in S\} = \phi(SgL') = \phi(G/L') = G/L, \end{aligned}$$

sendo as últimas igualdade devidas ao fato de S ser transitivo em G/L' e de π ser sobrejetora. A partir daí, podemos concluir que S age transitivamente em G/L . \square

Para encontrar tais subgrupos maximais, usamos a classificação dos subgrupos maximais dos grupos clássicos feita por Dynkin em [2], sobre a qual fizemos uma breve apresentação no Apêndice A deste trabalho. As informações dadas nas tabelas 4.1, 4.2 e 4.3 a seguir, foram tiradas desse artigo, mais precisamente das tabelas 6, 11, 15, 16 e 17 de [2], as quais são citadas nos teoremas A.11, A.13 e A.14-A.16. Essas tabelas trazem os subgrupos irredutíveis semissimples maximais dos grupos clássicos, os quais vamos utilizar para selecionar pares (S, L) tais que o semigrupo S age transitivamente na variedade homogênea G/L . Nessas tabelas, L representa um subgrupo irredutível do grupo clássico G e ϕ é a representação de L em G , cujo diagrama associado pode ser encontrado nas tabelas originais dadas no Apêndice A.

Tabela 4.1: Subgrupos Irredutíveis Simples Maximais em $Sl(N)$

	L	G	Tipo de G
1.	$(B_n, \phi), n \geq 2$	$Sl(2n + 1, \mathbb{C})$	A_{2n}
2.	$(D_n, \phi), n \geq 3$	$Sl(2n, \mathbb{C})$	A_{2n-1}
3.	$(A_n, \phi), n \geq 3$	$Sl(\frac{n(n+1)}{2}, \mathbb{C})$	$A_{\frac{n(n+1)}{2}-1}$
4.	$(A_n, \phi), n \geq 2$	$Sl(\frac{(n+1)(n+2)}{2}, \mathbb{C})$	$A_{\frac{(n+1)(n+2)}{2}-1}$
5.	(D_5, ϕ)	$Sl(16, \mathbb{C})$	A_{15}
6.	(E_6, ϕ)	$Sl(27, \mathbb{C})$	A_{26}
7.	$(C_n, \phi), n \geq 2$	$Sl(2n, \mathbb{C})$	A_{2n-1}

Tabela 4.2: Subgrupos Irredutíveis Simples Maximais em $Sp(N)$

	L	G	Tipo de G
1.	(A_1, ϕ)	$Sp(2, \mathbb{C})$	C_2
2.	(A_5, ϕ)	$Sp(10, \mathbb{C})$	C_{10}
3.	(C_3, ϕ)	$Sp(7, \mathbb{C})$	C_7
4.	(D_6, ϕ)	$Sp(16, \mathbb{C})$	C_{16}
5.	(E_7, ϕ)	$Sp(28, \mathbb{C})$	C_{28}

Tabela 4.3: Subgrupos Irredutíveis Simples Maximais em $O(N)$

	L	G	Tipo de G
1.	(G_2, ϕ)	$\text{So}(7, \mathbb{C})$	D_3
2.	(B_2, ϕ)	$\text{So}(10, \mathbb{C})$	D_5
3.	$(A_1 \cdot A_1, \phi)$	$\text{So}(10, \mathbb{C})$	D_5
4.	(B_2, ϕ)	$\text{So}(14, \mathbb{C})$	D_7
5.	(G_2, ϕ)	$\text{So}(14, \mathbb{C})$	D_7
6.	(C_3, ϕ)	$\text{So}(14, \mathbb{C})$	D_7
7.	(B_4, ϕ)	$\text{So}(16, \mathbb{C})$	D_8
8.	(F_4, ϕ)	$\text{So}(26, \mathbb{C})$	D_{13}
9.	(B_n, ϕ) $n \geq 4$	$\text{So}(2(n+1), \mathbb{C})$	D_{n+1}
10.	$(B_n \cdot A_1, \phi)$ $n \geq 2$	$\text{So}(2(n+3), \mathbb{C})$	D_{n+3}
11.	$(B_{n_1} \cdot B_{n_2}, \phi)$ $n_1, n_2 \geq 1, n_1 + n_2 \geq 4$	$\text{So}(2(n_1 + n_2 + 1), \mathbb{C})$	$D_{n_1+n_2+1}$
12.	(B_3, ϕ)	$\text{So}(8, \mathbb{C})$	D_4
13.	$(A_1 \cdot A_1, \phi)$	$\text{So}(8, \mathbb{C})$	D_4
14.	$(B_2 \cdot A_1, \phi)$	$\text{So}(8, \mathbb{C})$	D_4
15.	(A_2, ϕ)	$\text{So}(8, \mathbb{C})$	D_4

4.2 Comparando dimensões entre flags de G e órbitas de L

A partir da classificação dos subgrupos maximais semissimples apresentada na seção anterior em forma de tabelas e do lema a seguir, podemos excluir a possibilidade de haver ação transitiva de L em \mathbb{F}_Θ para certos subgrupos L das tabelas 4.1, 4.2 e 4.3, onde \mathbb{F}_Θ representa uma variedade flag minimal de G .

Lema 4.2. *Seja $L \subset G$ um subgrupo fechado e conexo e $\mathbb{F}_\Theta = G/P_\Theta$ uma variedade flag de G . Considere $L = KAN$ a decomposição de Iwasawa de L e suponha que a ação de L em \mathbb{F}_Θ seja transitiva. Então $\dim \mathbb{F}_\Theta \leq \dim L - \dim AN$.*

Demonstração: Como L é um subgrupo fechado de G . Existe uma decomposição de Iwasawa de G que é compatível com a decomposição de Iwasawa de L , ou seja, $G = \overline{K} \overline{A} \overline{N}$ tal que $K \subset \overline{K}$, $A \subset \overline{A}$ e $N \subset \overline{N}$. Pelo Teorema do ponto fixo de Vinberg existe $x_0 \in \mathbb{F}_\Theta$ tal que $gx_0 = x_0$ para todo $g \in AN$. Seja $L_{x_0} = \{g \in L; gx_0 = x_0\}$ o subgrupo de isotropia em x_0 . Como a ação de L em \mathbb{F}_Θ é transitiva, temos que $\mathbb{F}_\Theta \approx L/L_{x_0}$. Da escolha de x_0 e da definição de L_{x_0} temos que $AN \subset L_{x_0}$ e portanto $\dim \mathbb{F}_\Theta = \dim L - \dim L_{x_0} \leq \dim L - \dim AN$. \square

4.2.1 Dimensão de um flag

Vejam agora um exemplo de como podemos encontrar a dimensão de um flag \mathbb{F}_Θ através do subconjunto $\Theta \subset \Sigma$ de raízes simples. Seja $\mathbb{F}_{\Theta_i} = G/P_{\Theta_i}$ um flag minimal de G . Então $\Theta_i = \Sigma - \{\alpha_i\}$ e P_{Θ_i} é o subgrupo de G de matrizes triangulares superiores com a diagonal em blocos, com as ordens dos blocos dependendo das componentes conexas do diagrama de Θ_i . Por exemplo, se $G = \text{Sl}(7, \mathbb{C})$ e $\Theta_3 = \Sigma - \{\alpha_3\}$, temos

1. $\Sigma = \{\alpha_1 = \lambda_1 - \lambda_2, \dots, \alpha_6 = \lambda_6 - \lambda_7\}$ associado ao diagrama de Dynkin A_6 :



2. $\Theta_3 = \{\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_2 - \lambda_3, \lambda_4 - \lambda_5, \lambda_5 - \lambda_6, \lambda_6 - \lambda_7\}$, o qual está associado ao diagrama de Dynkin A_2 A_3 :



3. Sendo assim, os elementos de P_{Θ_3} são da forma

$$\begin{pmatrix} \ddots & & & \vdots & * & * & * & * \\ & P_1 & & \vdots & * & * & * & * \\ & & \ddots & \vdots & * & * & * & * \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & \ddots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & & P_2 & & \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

4. A dimensão do quociente de $G = \text{Sl}(7, \mathbb{C})$ pelo subgrupo P_{Θ_3} é calculada olhando a dimensão do subconjunto de matrizes de G cujas entradas não nulas estão nas posições onde os elementos de P_{Θ_3} são sempre nulos, no caso do exemplo, o bloco formado por zeros abaixo da diagonal em blocos.
5. Para encontrar tal dimensão, primeiramente contamos a dimensão do subespaço de matrizes triangulares inferiores de $G = \text{Sl}(7, \mathbb{C})$ com zeros na diagonal principal, depois descontamos as dimensões dos subespaços de matrizes triangulares inferiores de P_1 e de P_2 com zeros na diagonal principal.
6. Sabemos que a dimensão do subconjunto de matrizes triangulares inferiores com zeros na diagonal principal de um grupo de Lie é igual ao total de raízes negativas associadas a álgebra de Lie deste grupo, o qual denotaremos por $\#\Pi_{\mathfrak{g}}^-$.
7. Desta forma, $\dim \mathbb{F}_{\Theta_3} = \#\Pi_{A_6}^- - (\#\Pi_{A_2}^- + \#\Pi_{A_3}^-) = 21 - (3 + 6) = 12$.

Para facilitar o cálculo final da dimensão de uma variedade flag, apresentamos a seguir uma tabela, que pode ser encontrada em [12], que indica as dimensões das álgebras de Lie simples e a quantidade de raízes negativas de cada uma delas.

Álgebras Clássicas	Dimensão	$\#\Pi_{\mathfrak{g}}^-$	Álgebras Excepcionais	Dimensão	$\#\Pi_{\mathfrak{g}}^-$
A_l	$l(l+2)$	$\frac{l(l+1)}{2}$	G_2	14	6
B_l	$l(2l+1)$	l^2	F_4	52	24
C_l	$l(2l+1)$	l^2	E_6	78	36
$D_l; l \geq 2$	$l(2l-1)$	$l(l-1)$	E_7	133	63
			E_8	248	120

4.2.2 Exclusão de alguns subgrupos maximais L

Usando as tabelas da seção 4.1, dadas pela classificação de Dynkin, a técnica para calcular a dimensão de uma variedade flag, vista no exemplo anterior com $G = \mathrm{Sl}(7, \mathbb{C})$, e o Lema 4.2, vamos excluir alguns dos subgrupos L das tabelas 4.1, 4.2 e 4.3, para os quais não pode haver semigrupo próprio de G agindo transitivamente em G/L , já que nesses casos teremos que L não pode ser transitivo em $\mathbb{F}(S)$. Faremos isso separadamente para os casos $G = \mathrm{Sp}(N, \mathbb{C})$, $G = \mathrm{So}(N, \mathbb{C})$ e $G = \mathrm{Sl}(N, \mathbb{C})$ e ao final apresentamos uma tabela contendo os casos que não foram excluídos levando em consideração apenas as dimensões de L e dos flags minimais de G .

1. Caso $G = \mathrm{Sp}(N, \mathbb{C})$

Vamos estudar os casos contidos na Tabela 4.2, onde ϕ é a representação de L como subgrupo de G . No decorrer dessa subseção, consideramos \mathbb{F}_{Θ} uma variedade flag minimal de G . O Lema 4.2 fornece um limitante superior para a dimensão dos flags de G em que L pode agir transitivamente. Vamos comparar a dimensão de cada \mathbb{F}_{Θ} com tal limitante.

1. $L = (A_1, \phi)$ e $G = \mathrm{Sp}(2, \mathbb{C})$.

Suponha que a ação de L em \mathbb{F}_{Θ} seja transitiva. Pelo Lema 4.2 devemos ter

$$\dim \mathbb{F}_{\Theta} \leq \dim A_1 - \dim (AN)_{A_1} = 3 - 2 = 1$$

- 1.1 $\Theta_i = \Sigma - \alpha_i$, com $i = 1, 2$.

Diagrama de G : C_2

Diagrama de Θ_i : A_1

$$\dim \mathbb{F}_{\Theta_i} = \#\Pi_{C_2}^- - \#\Pi_{A_1}^- = 3.$$

Portanto, (A_1, ϕ) não pode ser transitivo nos flags de $\mathrm{Sp}(2, \mathbb{C})$, já que $\dim \mathbb{F}_{\Theta_i} > 1$.

2. $L = (A_5, \phi)$ e $G = \text{Sp}(10, \mathbb{C})$

Suponha que a ação de L em \mathbb{F}_Θ seja transitiva. Pelo Lema 4.2 devemos ter

$$\dim \mathbb{F}_\Theta \leq \dim A_5 - \dim (AN)_{A_5} = 35 - 20 = 15$$

2.1 $\Theta_1 = \Sigma - \alpha_1$.

Diagrama de G : C_{10}

Diagrama de Θ_1 : C_9

$$\dim \mathbb{F}_{\Theta_1} = \#\Pi_{C_{10}}^- - \#\Pi_{C_9}^- = 19.$$

2.2 $\Theta_i = \Sigma - \alpha_i$, com $i = 2, \dots, 8$.

Diagrama de G : C_{10}

Diagrama de Θ_i : $A_k C_j$, com $1 \leq k \leq 7$ e $j = 9 - k$.

$$\begin{aligned} \dim \mathbb{F}_{\Theta_i} &= \#\Pi_{C_{10}}^- - (\#\Pi_{A_k}^- + \#\Pi_{C_j}^-), \\ &= 100 - r = -\frac{3}{2}k^2 + \frac{35}{2}k + 19, \quad \text{onde } r = \frac{k(k+1)}{2} + (9-k)^2. \end{aligned}$$

Considerando $f(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{35}{2}x + 19$, no intervalo fechado $[1, 7]$, temos que f atinge máximo e mínimo nesse intervalo. Como seu valor mínimo é $f(1) = 35$ e seu valor máximo é $f(\frac{35}{6}) \approx 70,04$, temos que

$$35 \leq \dim \mathbb{F}_{\Theta_i} < 70,04$$

2.3 $\Theta_9 = \Sigma - \alpha_9$.

Diagrama de G : C_{10}

Diagrama de Θ_9 : $A_8 A_1$

$$\dim \mathbb{F}_{\Theta_9} = \#\Pi_{C_{10}}^- - (\#\Pi_{A_8}^- + \#\Pi_{A_1}^-) = 63.$$

2.4 $\Theta_{10} = \Sigma - \alpha_{10}$.

Diagrama de G : C_{10}

Diagrama de Θ_{10} : A_9

$$\dim \mathbb{F}_{\Theta_{10}} = \#\Pi_{C_{10}}^- - \#\Pi_{A_9}^- = 55.$$

Portanto, (A_5, ϕ) não pode ser transitivo nos flags de $\text{Sp}(10, \mathbb{C})$, já que em todos os subcasos $\dim \mathbb{F}_\Theta > 15$.

3. $L = (C_3, \phi)$ e $G = \text{Sp}(7, \mathbb{C})$

Suponha que a ação de L em \mathbb{F}_Θ seja transitiva. Pelo Lema 4.2 devemos ter

$$\dim \mathbb{F}_\Theta \leq \dim C_3 - \dim (AN)_{C_3} = 21 - 12 = 9$$

3.1 $\Theta_1 = \Sigma - \alpha_1$.

Diagrama de G : C_7

Diagrama de Θ_1 : C_6

$$\dim \mathbb{F}_{\Theta_1} = \sharp \Pi_{C_7}^- - \sharp \Pi_{C_6}^- = 13.$$

3.2 $\Theta_i = \Sigma - \alpha_i$, com $i = 2, \dots, 5$.

Diagrama de G : C_7

Diagrama de Θ_i : $A_k C_j$, com $1 \leq k \leq 4$ e $j = 6 - k$.

$$\begin{aligned} \dim \mathbb{F}_{\Theta_i} &= \sharp \Pi_{C_7}^- - (\sharp \Pi_{A_k}^- + \sharp \Pi_{C_j}^-), \\ &= 49 - r = -\frac{3}{2}k^2 + \frac{23}{2}k + 13, \quad \text{onde } r = \frac{k(k+1)}{2} + (6-k)^2. \end{aligned}$$

Considerando $f(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{23}{2}x + 13$, no intervalo fechado $[1, 4]$, temos que f atinge máximo e mínimo nesse intervalo. Como seu valor mínimo é $f(1) = 23$ e seu valor máximo é $f(\frac{23}{6}) \approx 35,04$, temos que

$$23 \leq \dim \mathbb{F}_{\Theta_i} < 35,04$$

3.3 $\Theta_6 = \Sigma - \alpha_6$.

Diagrama de G : C_7

Diagrama de Θ_6 : $A_5 A_1$

$$\dim \mathbb{F}_{\Theta_6} = \sharp \Pi_{C_7}^- - (\sharp \Pi_{A_5}^- + \sharp \Pi_{A_1}^-) = 33.$$

3.4 $\Theta_7 = \Sigma - \alpha_7$.

Diagrama de G : C_7

Diagrama de Θ_7 : A_6

$$\dim \mathbb{F}_{\Theta_7} = \sharp \Pi_{C_7}^- - \sharp \Pi_{A_6}^- = 28.$$

Portanto, (C_3, ϕ) não pode ser transitivo nos flags de $\text{Sp}(7, \mathbb{C})$, já que em todos os subcasos $\dim \mathbb{F}_{\Theta} > 9$.

4. $L = (D_6, \phi)$ e $G = \text{Sp}(16, \mathbb{C})$

Suponha que a ação de L em \mathbb{F}_{Θ} seja transitiva. Pelo Lema 4.2 devemos ter

$$\dim \mathbb{F}_{\Theta} \leq \dim D_6 - \dim (AN)_{D_6} = 66 - 36 = 30$$

4.1 $\Theta_1 = \Sigma - \alpha_1$.

Diagrama de G : C_{16}

Diagrama de Θ_1 : C_{15}

$$\dim \mathbb{F}_{\Theta_1} = \sharp \Pi_{C_{16}}^- - \sharp \Pi_{C_{15}}^- = 31.$$

4.2 $\Theta_i = \Sigma - \alpha_i$, com $i = 2, \dots, 14$.

Diagrama de G : C_{16} Diagrama de Θ_i : $A_k C_j$, com $1 \leq k \leq 13$ e $j = 15 - k$.

$$\begin{aligned} \dim \mathbb{F}_{\Theta_i} &= \#\Pi_{C_{16}}^- - (\#\Pi_{A_k}^- + \#\Pi_{C_j}^-), \\ &= 256 - r = -\frac{3}{2}k^2 + \frac{59}{2}k + 31, \quad \text{onde } r = \frac{k(k+1)}{2} + (15-k)^2. \end{aligned}$$

Considerando $f(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{59}{2}x + 31$, no intervalo fechado $[1, 13]$, temos que f atinge máximo e mínimo nesse intervalo. Como seu valor mínimo é $f(1) = 59$ e seu valor máximo é $f(\frac{59}{6}) \approx 176,04$, temos que

$$59 \leq \dim \mathbb{F}_{\Theta_i} < 176,04$$

4.3 $\Theta_{15} = \Sigma - \alpha_{15}$.

Diagrama de G : C_{16} Diagrama de Θ_{15} : $A_{14}A_1$

$$\dim \mathbb{F}_{\Theta_{15}} = \#\Pi_{C_{16}}^- - (\#\Pi_{A_{14}}^- + \#\Pi_{A_1}^-) = 150.$$

4.4 $\Theta_{16} = \Sigma - \alpha_{16}$.

Diagrama de G : C_{16} Diagrama de Θ_{16} : A_{15}

$$\dim \mathbb{F}_{\Theta_{16}} = \#\Pi_{C_{16}}^- - \#\Pi_{A_{15}}^- = 136.$$

Portanto, (D_6, ϕ) não pode ser transitivo nos flags de $\text{Sp}(16, \mathbb{C})$, já que em todos os subcasos $\dim \mathbb{F}_{\Theta} > 30$.

5. $L = (E_7, \phi)$ e $G = \text{Sp}(28, \mathbb{C})$

Suponha que a ação de L em \mathbb{F}_{Θ} seja transitiva. Pelo Lema 4.2 devemos ter

$$\dim \mathbb{F}_{\Theta} \leq \dim E_7 - \dim (AN)_{E_7} = 133 - 70 = 63$$

5.1 $\Theta_1 = \Sigma - \alpha_1$.

Diagrama de G : C_{28} Diagrama de Θ_1 : C_{27}

$$\dim \mathbb{F}_{\Theta_1} = \#\Pi_{C_{28}}^- - \#\Pi_{C_{27}}^- = 55.$$

5.2 $\Theta_i = \Sigma - \alpha_i$, com $i = 2, \dots, 26$.

Diagrama de G : C_{28} Diagrama de Θ_i : $A_k C_j$, com $1 \leq k \leq 25$ e $j = 27 - k$.

$$\begin{aligned} \dim \mathbb{F}_{\Theta_i} &= \#\Pi_{C_{28}}^- - (\#\Pi_{A_k}^- + \#\Pi_{C_j}^-), \\ &= 784 - r = -\frac{3}{2}k^2 + \frac{107}{2}k + 55, \quad \text{onde } r = \frac{k(k+1)}{2} + (27-k)^2. \end{aligned}$$

Considerando $f(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{107}{2}x + 55$, no intervalo fechado $[1, 25]$, temos que f atinge máximo e mínimo nesse intervalo. Como seu valor mínimo é $f(1) = 107$ e seu valor máximo é $f(\frac{107}{6}) \approx 532,04$, temos que

$$107 \leq \dim \mathbb{F}_{\Theta_i} < 532,04$$

5.3 $\Theta_{27} = \Sigma - \alpha_{27}$.

Diagrama de G : C_{28}

Diagrama de Θ_{27} : $A_{26}A_1$

$$\dim \mathbb{F}_{\Theta_{27}} = \#\Pi_{C_{28}}^- - (\#\Pi_{A_{26}}^- + \#\Pi_{A_1}^-) = 432.$$

5.4 $\Theta_{28} = \Sigma - \alpha_{28}$.

Diagrama de G : C_{28}

Diagrama de Θ_{28} : A_{27}

$$\dim \mathbb{F}_{\Theta_{28}} = \#\Pi_{C_{28}}^- - \#\Pi_{A_{27}}^- = 406.$$

Portanto, (E_7, ϕ) não pode ser transitivo nos flags de $\text{Sp}(28, \mathbb{C})$, exceto o flag \mathbb{F}_{Θ_1} , já que em todos os outros subcasos $\dim \mathbb{F}_{\Theta} > 63$.

Observação 4.3. *Apesar de valer $\dim \mathbb{F}_{\Theta_1} = 55 < 63$, ainda não está garantida a transitividade. Esse é um caso que ainda devemos estudar.*

2. Caso $\mathbf{G} = \text{So}(N, \mathbb{C})$

Vamos estudar os casos contidos na Tabela 4.3, vista na seção 4.1, onde ϕ é a representação de L como subgrupo de G . Assim como foi feito para $\text{Sp}(N, \mathbb{C})$, em cada caso, consideramos \mathbb{F}_{Θ} uma variedade flag minimal de G . Vamos comparar a dimensão de \mathbb{F}_{Θ} com o limitante superior fornecido pelo Lema 4.2 nos casos em que L age transitivamente em tal variedade.

1. $L = (G_2, \phi)$ e $G = \text{So}(7, \mathbb{C})$

Suponha que a ação de L em \mathbb{F}_{Θ} seja transitiva. Pelo Lema 4.2 devemos ter

$$\dim \mathbb{F}_{\Theta} \leq \dim G_2 - \dim (AN)_{G_2} = 14 - 8 = 6$$

1.1 $\Theta_1 = \Sigma - \alpha_1$.

Diagrama de G : B_3

Diagrama de Θ_1 : B_2

$$\dim \mathbb{F}_{\Theta_1} = \#\Pi_{B_3}^- - \#\Pi_{B_2}^- = 5.$$

$$1.2 \quad \Theta_2 = \Sigma - \alpha_2.$$

Diagrama de G : B_3

Diagrama de Θ_2 : $A_1 A_1$

$$\dim \mathbb{F}_{\Theta_2} = \#\Pi_{B_3}^- - (\#\Pi_{A_1}^- + \#\Pi_{A_1}^-) = 7.$$

$$1.3 \quad \Theta_3 = \Sigma - \alpha_3.$$

Diagrama de G : B_3

Diagrama de Θ_3 : A_2

$$\dim \mathbb{F}_{\Theta_3} = \#\Pi_{B_3}^- - \#\Pi_{A_2}^- = 6.$$

Portanto, (G_2, ϕ) não pode ser transitivo no flag \mathbb{F}_{Θ_2} de $\text{So}(7, \mathbb{C})$, apenas nos flags \mathbb{F}_{Θ_1} e \mathbb{F}_{Θ_3} .

Observação 4.4. *Apesar de valer $\dim \mathbb{F}_{\Theta_1}, \dim \mathbb{F}_{\Theta_3} \leq 6$, ainda não está garantida a transitividade. Esses casos deverão ser estudados.*

$$2. \quad L = (B_2, \phi) \text{ e } G = \text{So}(10, \mathbb{C})$$

Suponha que a ação de L em \mathbb{F}_{Θ} seja transitiva. Pelo Lema 4.2 devemos ter

$$\dim \mathbb{F}_{\Theta} \leq \dim B_2 - \dim (AN)_{B_2} = 10 - 6 = 4$$

$$2.1 \quad \Theta_1 = \Sigma - \alpha_1.$$

Diagrama de G : D_5

Diagrama de Θ_1 : D_4

$$\dim \mathbb{F}_{\Theta_1} = \#\Pi_{D_5}^- - \#\Pi_{D_4}^- = 8.$$

$$2.2 \quad \Theta_2 = \Sigma - \alpha_2.$$

Diagrama de G : D_5

Diagrama de Θ_2 : $A_1 A_3$

$$\dim \mathbb{F}_{\Theta_2} = \#\Pi_{D_5}^- - (\#\Pi_{A_1}^- + \#\Pi_{A_3}^-) = 13.$$

$$2.3 \quad \Theta_3 = \Sigma - \alpha_3.$$

Diagrama de G : D_5

Diagrama de Θ_3 : $A_2 A_1 A_1$

$$\dim \mathbb{F}_{\Theta_3} = \#\Pi_{D_5}^- - (\#\Pi_{A_2}^- + \#\Pi_{A_1}^- + \#\Pi_{A_1}^-) = 15.$$

2.4 $\Theta_i = \Sigma - \alpha_i$, com $i = 4, 5$.

Diagrama de G : D_5

Diagrama de Θ_i : A_4

$$\dim \mathbb{F}_{\Theta_i} = \#\Pi_{D_5}^- - \#\Pi_{A_4}^- = 10.$$

Portanto, (B_2, ϕ) não pode ser transitivo nos flags de $\text{So}(10, \mathbb{C})$, já que em todos os subcasos $\dim \mathbb{F}_{\Theta} > 4$.

3. $L = (A_1 \cdot A_1, \phi)$ e $G = \text{So}(10, \mathbb{C})$

Suponha que a ação de L em \mathbb{F}_{Θ} seja transitiva. Pelo Lema 4.2 devemos ter

$$\begin{aligned} \dim \mathbb{F}_{\Theta} &\leq \dim L - \dim (AN)_L \\ &= (\dim A_1 + \dim A_1) - (\dim (AN)_{A_1} + \dim (AN)_{A_1}) \\ &= 6 - 4 = 2 \end{aligned}$$

Portanto, $(A_1 \cdot A_1, \phi)$ não pode ser transitivo nos flags de $\text{So}(10, \mathbb{C})$, já que $\dim \mathbb{F}_{\Theta} > 2$ como vimos no caso anterior.

4. $L = (B_2, \phi)$ e $G = \text{So}(14, \mathbb{C})$

Suponha que a ação de L em \mathbb{F}_{Θ} seja transitiva. Pelo Lema 4.2 devemos ter

$$\dim \mathbb{F}_{\Theta} \leq \dim B_2 - \dim (AN)_{B_2} = 10 - 6 = 4$$

4.1 $\Theta_1 = \Sigma - \alpha_1$.

Diagrama de G : D_7

Diagrama de Θ_1 : D_6

$$\dim \mathbb{F}_{\Theta_1} = \#\Pi_{D_7}^- - \#\Pi_{D_6}^- = 12.$$

4.2 $\Theta_2 = \Sigma - \alpha_2$.

Diagrama de G : D_7

Diagrama de Θ_2 : $A_1 D_5$

$$\dim \mathbb{F}_{\Theta_2} = \#\Pi_{D_7}^- - (\#\Pi_{A_1}^- + \#\Pi_{D_5}^-) = 21.$$

4.3 $\Theta_3 = \Sigma - \alpha_3$.

Diagrama de G : D_7

Diagrama de Θ_3 : $A_2 D_4$

$$\dim \mathbb{F}_{\Theta_3} = \#\Pi_{D_7}^- - (\#\Pi_{A_2}^- + \#\Pi_{D_4}^-) = 27.$$

4.4 $\Theta_4 = \Sigma - \alpha_4$.

Diagrama de G : D_7

Diagrama de Θ_4 : A_3A_3

$$\dim \mathbb{F}_{\Theta_4} = \# \Pi_{D_7}^- - (\# \Pi_{A_3}^- + \# \Pi_{A_3}^-) = 30.$$

4.5 $\Theta_5 = \Sigma - \alpha_5$.

Diagrama de G : D_7

Diagrama de Θ_5 : $A_4A_1A_1$

$$\dim \mathbb{F}_{\Theta_5} = \# \Pi_{D_7}^- - (\# \Pi_{A_4}^- + \# \Pi_{A_1}^- + \# \Pi_{A_1}^-) = 30.$$

4.6 $\Theta_i = \Sigma - \alpha_i$, com $i = 6, 7$.

Diagrama de G : D_7

Diagrama de Θ_i : A_6

$$\dim \mathbb{F}_{\Theta_i} = \# \Pi_{D_7}^- - \# \Pi_{A_6}^- = 21.$$

Portanto, (B_2, ϕ) não pode ser transitivo nos flags de $\text{So}(14, \mathbb{C})$, já que em todos os subcasos $\dim \mathbb{F}_{\Theta} > 4$.

5. $L = (G_2, \phi)$ e $G = \text{So}(14, \mathbb{C})$

Suponha que a ação de L em \mathbb{F}_{Θ} seja transitiva. Pelo Lema 4.2 devemos ter

$$\dim \mathbb{F}_{\Theta} \leq \dim G_2 - \dim (AN)_{G_2} = 14 - 8 = 6$$

Portanto, (G_2, ϕ) não pode ser transitivo nos flags de $\text{So}(14, \mathbb{C})$, já que $\dim \mathbb{F}_{\Theta} > 6$ como vimos no caso anterior.

6. $L = (C_3, \phi)$ e $G = \text{So}(14, \mathbb{C})$

Suponha que a ação de L em \mathbb{F}_{Θ} seja transitiva. Pelo Lema 4.2 devemos ter

$$\dim \mathbb{F}_{\Theta} \leq \dim C_3 - \dim (AN)_{C_3} = 21 - 12 = 9$$

Portanto, (C_3, ϕ) não pode ser transitivo nos flags de $\text{So}(14, \mathbb{C})$, já que $\dim \mathbb{F}_{\Theta} > 9$ como vimos no caso anterior.

7. $L = (B_4, \phi)$ e $G = \text{So}(16, \mathbb{C})$

Suponha que a ação de L em \mathbb{F}_{Θ} seja transitiva. Pelo Lema 4.2 devemos ter

$$\dim \mathbb{F}_{\Theta} \leq \dim B_4 - \dim (AN)_{B_4} = 36 - 20 = 16$$

7.1 $\Theta_1 = \Sigma - \alpha_1$.

Diagrama de G : D_8

Diagrama de Θ_1 : D_7

$$\dim \mathbb{F}_{\Theta_1} = \#\Pi_{D_8}^- - \#\Pi_{D_7}^- = 14.$$

7.2 $\Theta_i = \Sigma - \alpha_i$, com $i = 2, 3, 4$.

Diagrama de G : D_8

Diagrama de Θ_i : $A_k D_j$

$$\dim \mathbb{F}_{\Theta_2} = \#\Pi_{D_8}^- - (\#\Pi_{A_1}^- + \#\Pi_{D_6}^-) = 25.$$

$$\dim \mathbb{F}_{\Theta_3} = \#\Pi_{D_8}^- - (\#\Pi_{A_2}^- + \#\Pi_{D_5}^-) = 33.$$

$$\dim \mathbb{F}_{\Theta_4} = \#\Pi_{D_8}^- - (\#\Pi_{A_3}^- + \#\Pi_{D_4}^-) = 38.$$

7.3 $\Theta_5 = \Sigma - \alpha_5$.

Diagrama de G : D_8

Diagrama de Θ_5 : $A_4 A_3$

$$\dim \mathbb{F}_{\Theta_5} = \#\Pi_{D_8}^- - (\#\Pi_{A_4}^- + \#\Pi_{A_3}^-) = 40.$$

7.4 $\Theta_6 = \Sigma - \alpha_6$.

Diagrama de G : D_8

Diagrama de Θ_6 : $A_5 A_1 A_1$

$$\dim \mathbb{F}_{\Theta_6} = \#\Pi_{D_8}^- - (\#\Pi_{A_5}^- + \#\Pi_{A_1}^- + \#\Pi_{A_1}^-) = 39.$$

7.5 $\Theta_i = \Sigma - \alpha_i$, com $i = 7, 8$.

Diagrama de G : D_8

Diagrama de Θ_i : A_7

$$\dim \mathbb{F}_{\Theta_i} = \#\Pi_{D_8}^- - \#\Pi_{A_7}^- = 28.$$

Portanto, (B_4, ϕ) não pode ser transitivo nos flags de $\text{So}(16, \mathbb{C})$, exceto o flag \mathbb{F}_{Θ_1} , já que em todos os outros subcasos $\dim \mathbb{F}_{\Theta} > 16$.

8. $L(F_4, \phi) = \mathfrak{e}$ e $G = \text{So}(26, \mathbb{C})$

Suponha que a ação de L em \mathbb{F}_{Θ} seja transitiva. Pelo Lema 4.2 devemos ter

$$\dim \mathbb{F}_{\Theta} \leq \dim F_4 - \dim (AN)_{F_4} = 52 - 28 = 24$$

8.1 $\Theta_1 = \Sigma - \alpha_1$.

Diagrama de G : D_{13}

Diagrama de Θ_1 : D_{12}

$$\dim \mathbb{F}_{\Theta_1} = \#\Pi_{D_{13}}^- - \#\Pi_{D_{12}}^- = 24.$$

8.2 $\Theta_i = \Sigma - \alpha_i$, com $i = 2, \dots, 9$.

Diagrama de G : D_{13}

Diagrama de Θ_i : $A_k D_j$, com $1 \leq k \leq 8$ e $j = 12 - k$.

$$\begin{aligned} \dim \mathbb{F}_{\Theta_i} &= \#\Pi_{D_{13}}^- - (\#\Pi_{A_k}^- + \#\Pi_{D_j}^-), \\ &= 156 - r = -\frac{3}{2}k^2 + \frac{45}{2}k + 24, \quad \text{onde } r = \frac{k(k+1)}{2} + j(j-1). \end{aligned}$$

Considerando $f(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{45}{2}x + 24$, no intervalo fechado $[1, 8]$, temos que f atinge máximo e mínimo nesse intervalo. Como seu valor mínimo é $f(1) = 45$ e seu valor máximo é $f(\frac{45}{6}) \approx 108,37$, temos que

$$45 \leq \dim \mathbb{F}_{\Theta_i} < 108,37$$

8.3 $\Theta_{10} = \Sigma - \alpha_{10}$.

Diagrama de G : D_{13}

Diagrama de Θ_{10} : $A_9 A_3$

$$\dim \mathbb{F}_{\Theta_{10}} = \#\Pi_{D_{13}}^- - (\#\Pi_{A_9}^- + \#\Pi_{A_3}^-) = 105.$$

8.4 $\Theta_{11} = \Sigma - \alpha_{11}$.

Diagrama de G : D_{13}

Diagrama de Θ_{11} : $A_{10} A_1 A_1$

$$\dim \mathbb{F}_{\Theta_{11}} = \#\Pi_{D_{13}}^- - (\#\Pi_{A_{10}}^- + \#\Pi_{A_1}^- + \#\Pi_{A_1}^-) = 99.$$

8.5 $\Theta_i = \Sigma - \alpha_i$, com $i = 12, 13$.

Diagrama de G : D_{13}

Diagrama de Θ_i : A_{12}

$$\dim \mathbb{F}_{\Theta_i} = \#\Pi_{D_{13}}^- - \#\Pi_{A_{12}}^- = 78.$$

Portanto, (F_4, ϕ) não pode ser transitivo nos flags de $\text{So}(26, \mathbb{C})$, exceto o flag \mathbb{F}_{Θ_1} , já que em todos os outros subcasos $\dim \mathbb{F}_{\Theta} > 24$.

9. $L = (B_n, \phi)$, $n \geq 4$ e $G = \text{So}(2(n+1), \mathbb{C})$

Suponha que a ação de L em \mathbb{F}_{Θ} seja transitiva. Pelo Lema 4.2 devemos ter

$$\dim \mathbb{F}_{\Theta} \leq \dim B_n - \dim (AN)_{B_n} = (n(2n+1)) - (n^2 + n) = n^2$$

9.1 $\Theta_1 = \Sigma - \alpha_1$.

Diagrama de G : D_{n+1}

Diagrama de Θ_1 : D_n

$$\dim \mathbb{F}_{\Theta_1} = \#\Pi_{D_{n+1}}^- - \#\Pi_{D_n}^- = 2n.$$

Como $\dim \mathbb{F}_{\Theta_1} = 2n < n^2$ para todo $n \geq 4$, esse caso ainda deverá ser estudado.

9.2 $\Theta_i = \Sigma - \alpha_i$, com $i = 2, \dots, n-3$.

Diagrama de G : D_{n+1}

Diagrama de Θ_i : $A_k D_j$, com $1 \leq k \leq n-4$ e $j = n-k$.

$$\begin{aligned} \dim \mathbb{F}_{\Theta_i} &= \#\Pi_{D_{n+1}}^- - (\#\Pi_{A_k}^- + \#\Pi_{D_j}^-), \\ &= (n+1)n - r = -\frac{3}{2}k^2 + \frac{(4n-3)}{2}k + 2n, \quad \text{onde } r = \frac{k(k+1)}{2} + j(j-1). \end{aligned}$$

Considerando $f(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{(4n-3)}{2}x + 2n$, no intervalo fechado $[1, n-4]$, temos que f atinge máximo e mínimo nesse intervalo.

Seu valor máximo é $f(\frac{(4n-3)}{6}) = \frac{3}{8} + n + \frac{2}{3}n^2$ e como o valor máximo é menor que n^2 para todo $n \geq 4$ temos que

$$\dim \mathbb{F}_{\Theta_i} < n^2.$$

Desta forma, todos esses casos ainda deverão ser estudados.

9.3 $\Theta_{n-2} = \Sigma - \alpha_{n-2}$.

Diagrama de G : D_{n+1}

Diagrama de Θ_{n-2} : $A_{n-3}A_3$

$$\begin{aligned} \dim \mathbb{F}_{\Theta_{n-2}} &= \#\Pi_{D_{n+1}}^- - (\#\Pi_{A_{n-3}}^- + \#\Pi_{A_3}^-) \\ &= (n+1)n - \left(\frac{(n-3)(n-2)}{2} + 6 \right) \\ &= \frac{n^2 + 7n - 18}{2} \end{aligned}$$

Como $\dim \mathbb{F}_{\Theta_{n-2}} = \frac{n^2 + 7n - 18}{2} < n^2$ para todo $n \geq 4$, esse caso ainda deverá ser estudado.

9.4 $\Theta_{n-1} = \Sigma - \alpha_{n-1}$.

Diagrama de G : D_{n+1}

Diagrama de Θ_{n-1} : $A_{n-2}A_1A_1$

$$\begin{aligned} \dim \mathbb{F}_{\Theta_{n-1}} &= \#\Pi_{D_{n+1}}^- - (\#\Pi_{A_{n-2}}^- + \#\Pi_{A_1}^- + \#\Pi_{A_1}^-) \\ &= (n+1)n - \left(\frac{(n-2)(n-1)}{2} + 1 + 1 \right) \\ &= \frac{n^2 + 5n - 6}{2} \end{aligned}$$

Como $\dim \mathbb{F}_{\Theta_{n-1}} = \frac{n^2 + 5n - 6}{2} < n^2$ para todo $n \geq 4$, esse caso ainda deverá ser estudado.

9.5 $\Theta_i = \Sigma - \alpha_i$, com $i = n, n + 1$.

Diagrama de G : D_{n+1}

Diagrama de Θ_i : A_n

$$\begin{aligned} \dim \mathbb{F}_{\Theta_i} &= \#\Pi_{D_{n+1}}^- - \#\Pi_{A_n}^- \\ &= (n+1)n - \left(\frac{n(n+1)}{2}\right) \\ &= \frac{n^2 + n}{2} \end{aligned}$$

Como $\dim \mathbb{F}_{\Theta_i} = \frac{n^2 + n}{2} < n^2$ para todo $n \geq 4$, esse caso ainda deverá ser estudado.

Portanto, devemos estudar o caso do subgrupo $L = (B_n, \phi)$ em relação a todos os flags minimais de $\text{So}(2(n+1), \mathbb{C})$, já que em todos os casos temos $\dim \mathbb{F}_{\Theta} \leq n^2$.

10. $L = (B_n \cdot A_1, \phi)$, $n \geq 2$ e $G = \text{So}(2(n+3), \mathbb{C})$

Suponha que a ação de L em \mathbb{F}_{Θ} seja transitiva. Pelo Lema 4.2 devemos ter

$$\begin{aligned} \dim \mathbb{F}_{\Theta} &\leq (\dim B_n + \dim A_1) - (\dim (AN)_{B_n} + \dim (AN)_{A_1}) \\ &= (n(2n+1) + 3) - ((n^2 + n) + 2) = n^2 + 1 \end{aligned}$$

10.1 $\Theta_1 = \Sigma - \alpha_1$.

Diagrama de G : D_{n+3}

Diagrama de Θ_1 : D_{n+2}

$$\dim \mathbb{F}_{\Theta_1} = \#\Pi_{D_{n+3}}^- - \#\Pi_{D_{n+2}}^- = 2(n+2).$$

Para $n = 2$ temos $2(n+2) > n^2 + 1$, logo L não pode ser transitivo em \mathbb{F}_{Θ_1} .

Para todo $n \geq 3$, temos $2(n+2) \leq n^2 + 1$, o que implica que esses casos ainda deverão ser estudados.

10.2 $\Theta_i = \Sigma - \alpha_i$, com $i = 2, \dots, n-1$.

Diagrama de G : D_{n+3}

Diagrama de Θ_i : $A_k D_j$, com $1 \leq k \leq n-2$ e $j = n-k+2$.

$$\begin{aligned} \dim \mathbb{F}_{\Theta_i} &= \#\Pi_{D_{n+3}}^- - (\#\Pi_{A_k}^- + \#\Pi_{D_j}^-), \\ &= (n+3)(n+2) - r \\ &= -\frac{3}{2}k^2 + \frac{(4n+5)}{2}k + (2n+4), \quad \text{onde } r = \frac{k(k+1)}{2} + j(j-1). \end{aligned}$$

Considerando $f(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{(4n+5)}{2}x + (2n+4)$, no intervalo fechado $[1, n-2]$, temos que f atinge máximo e mínimo nesse intervalo.

Seu valor máximo é $f\left(\frac{(4n+5)}{6}\right) = \frac{16n^2 + 88n + 121}{24}$. Vejamos em quais casos a dimensão máxima é maior que $n^2 + 1$.

$$\dim_{\max} \mathbb{F}_{\Theta_i} > n^2 + 1 \Leftrightarrow \frac{16n^2 + 88n + 121}{24} > n^2 + 1.$$

Dessa condição e da condição inicial sobre n , temos que $2 \leq n \leq 12$. Desta forma, para $n \geq 13$, todos os casos deverão ser estudados, pois $\dim_{\max} \mathbb{F}_{\Theta_i} \leq n^2 + 1$ e assim as dimensões de todos os flags minimais também serão menores ou iguais a $n^2 + 1$.

Observação 4.5. Os casos em que $2 \leq n \leq 12$ ainda não estão totalmente excluídos, analisaremos a dimensão de cada flag variando n e k . Seguindo esta técnica e comparando cada dimensão com $n^2 + 1$, selecionamos para serem estudados dentre esses, os seguintes casos: $n = 5$ e $k = 1$, $n = 6$ e $k = 1$, $n = 7$ e $k = 1, 2$, $n = 8$ e $k = 1, 2, 3$, $n = 9$ e $k = 1, 2, 3, 4$, $n = 10$ e $k = 1, 2, 3, 4, 5$, $n = 11$ e $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ e por último $n = 12$ e $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$. Esse último caso será incluído no caso mais geral, pois esses valores de k representam todas as variedades do caso Θ_i , $i = 2, \dots, n - 1$ e $n = 12$.

10.3 $\Theta_n = \Sigma - \alpha_n$.

Diagrama de G : D_{n+3}

Diagrama de Θ_n : $A_{n-1}A_3$

$$\begin{aligned} \dim \mathbb{F}_{\Theta_n} &= \# \Pi_{D_{n+3}}^- - (\# \Pi_{A_{n-1}}^- + \# \Pi_{A_3}^-) \\ &= (n+3)(n+2) - \left(\frac{(n-1)n}{2} + 6 \right) \\ &= \frac{n^2 + 11n}{2} \end{aligned}$$

Vejamos em quais casos a $\dim \mathbb{F}_{\Theta_n}$ é maior que $n^2 + 1$.

$$\dim \mathbb{F}_{\Theta_n} > n^2 + 1 \Leftrightarrow \frac{n^2 + 11n}{2} > n^2 + 1 \Leftrightarrow 2 \leq n \leq 10,$$

considerando a condição inicial sobre n . Logo, L não pode ser transitivo em \mathbb{F}_{Θ_n} para $2 \leq n \leq 10$. Os casos quando $n \geq 11$ deverão ser estudados, pois $\dim \mathbb{F}_{\Theta_n} \leq n^2 + 1$ e assim não podemos garantir a transitividade ou não de L .

10.4 $\Theta_{n+1} = \Sigma - \alpha_{n+1}$.

Diagrama de G : D_{n+3}

Diagrama de Θ_{n+1} : $A_n A_1 A_1$

$$\begin{aligned} \dim \mathbb{F}_{\Theta_{n+1}} &= \# \Pi_{D_{n+3}}^- - (\# \Pi_{A_n}^- + \# \Pi_{A_1}^- + \# \Pi_{A_1}^-) \\ &= (n+3)(n+2) - \left(\frac{n(n+1)}{2} + 1 + 1 \right) \\ &= \frac{n^2 + 9n + 8}{2} \end{aligned}$$

Vejamos em quais casos a $\dim \mathbb{F}_{\Theta_{n+1}}$ é maior que $n^2 + 1$.

$$\dim \mathbb{F}_{\Theta_{n+1}} > n^2 + 1 \Leftrightarrow \frac{n^2 + 9n + 8}{2} > n^2 + 1 \Leftrightarrow 2 \leq n \leq 9,$$

considerando a condição inicial sobre n . Logo, L não pode ser transitivo em $\mathbb{F}_{\Theta_{n+1}}$ para $2 \leq n \leq 9$. Os casos quando $n \geq 10$ deverão ser estudados, pois $\dim \mathbb{F}_{\Theta_{n+1}} \leq n^2 + 1$ e assim não podemos garantir a transitividade ou não de L .

10.5 $\Theta_i = \Sigma - \alpha_i$, com $i = n + 2, n + 3$.

Diagrama de G : D_{n+3}

Diagrama de Θ_i : A_{n+2}

$$\begin{aligned} \dim \mathbb{F}_{\Theta_i} &= \# \Pi_{D_{n+3}}^- - \# \Pi_{A_{n+2}}^- \\ &= (n+3)(n+2) - \left(\frac{(n+2)(n+3)}{2} \right) \\ &= \frac{n^2 + 5n + 6}{2} \end{aligned}$$

Vejam os casos em que $\dim \mathbb{F}_{\Theta_i}$ é maior que $n^2 + 1$.

$$\dim \mathbb{F}_{\Theta_i} > n^2 + 1 \Leftrightarrow \frac{n^2 + 5n + 6}{2} > n^2 + 1 \Leftrightarrow 2 \leq n \leq 5,$$

considerando a condição inicial sobre n . Logo, L não pode ser transitivo em \mathbb{F}_{Θ_i} para $2 \leq n \leq 5$. Os casos quando $n \geq 6$ deverão ser estudados, pois $\dim \mathbb{F}_{\Theta_i} \leq n^2 + 1$ e assim não podemos garantir a transitividade ou não de L .

11. $L = (B_{n_1} \cdot B_{n_2}, \phi)$, $n_1 \geq 1$, $n_2 \geq 2$ e $n_1 + n_2 \geq 4$, e $G = \text{So}(2(n_1 + n_2 + 1), \mathbb{C})$

Suponha que a ação de L em \mathbb{F}_{Θ} seja transitiva. Pelo Lema 4.2 devemos ter

$$\begin{aligned} \dim \mathbb{F}_{\Theta} &\leq \dim B_{n_1} \cdot B_{n_2} - \dim (AN)_{B_{n_1} \cdot B_{n_2}} \\ &= (n_1(2n_1 + 1) + n_2(2n_2 + 1)) - (n_1^2 + n_1 + n_2^2 + n_2) \\ &= n_1^2 + n_2^2 \end{aligned}$$

Observemos que no item 9. foram calculadas as dimensões dos flags minimais de D_{n+1} . Agora, queremos as dimensões dos flags minimais de $D_{n_1+n_2+1}$. Sendo assim, basta substituímos n por $n_1 + n_2$ nos resultados encontrados e teremos as dimensões procuradas nesse caso.

11.1 $\Theta_1 = \Sigma - \alpha_1$.

$$\dim \mathbb{F}_{\Theta_1} = 2(n_1 + n_2)$$

Verifiquemos quando a desigualdade $2(n_1 + n_2) > n_1^2 + n_2^2$ é verdadeira. Sabemos que $2(n_1 + n_2) > n_1^2 + n_2^2 \Leftrightarrow -n_1^2 + 2n_1 + (-n_2^2 + 2n_2) > 0$. Considerando a expressão à esquerda do sinal como uma parábola na variável n_1 , temos que a desigualdade é verdadeira somente quando $\Delta_1 = -4n_2^2 + 8n_2 + 4 > 0$ e n_1 está entre as raízes da equação, e isso ocorre quando $1 \leq n_2 \leq 2$, já respeitando a condição $n_2 \geq 1$. Para $n_2 = 1$ deveríamos ter $0 < n_1 \leq 2$ e para $n_2 = 2$ deveríamos ter $0 < n_1 < 2$. Em ambos os casos temos uma contradição com o fato de que $n_1 + n_2 \geq 4$. Desta forma, $2(n_1 + n_2) \leq n_1^2 + n_2^2$ para todo $n_1, n_2 \geq 1$ tal que $n_1 + n_2 \geq 4$. Portanto esse caso ainda deverá ser estudado.

11.2 $\Theta_i = \Sigma - \alpha_i$, com $i = 2, \dots, (n_1 + n_2) - 3$.

$$\dim \mathbb{F}_{\Theta_i} = -\frac{3}{2}k^2 - \frac{(3 - 4(n_1 + n_2))}{2}k + 2(n_1 + n_2),$$

onde $i = 2, \dots, (n_1 + n_2) - 3$ e $k = i - 1$ (o que implica em $1 \leq k \leq (n_1 + n_2) - 4$).

Considerando $f(x) = -\frac{3}{2}x^2 - \frac{(3 - 4(n_1 + n_2))}{2}x + 2(n_1 + n_2)$, no intervalo fechado $[1, (n_1 + n_2) - 4]$, temos que f atinge máximo e mínimo nesse intervalo.

Seu valor máximo é $f\left(\frac{-3 + 4(n_1 + n_2)}{6}\right) = \frac{2}{3}(n_1 + n_2)^2 + (n_1 + n_2) + \frac{3}{8}$.

Vamos analisar os casos em que $\dim \mathbb{F}_{\Theta_i} > n_1^2 + n_2^2$. Para isso, vejamos primeiramente quando $\dim_{max} \mathbb{F}_{\Theta_i} > n_1^2 + n_2^2$.

$$\begin{aligned}
\dim_{max}\mathbb{F}_{\Theta_i} &= \frac{2}{3}(n_1 + n_2)^2 + (n_1 + n_2) + \frac{3}{8} > n_1^2 + n_2^2 \\
&\Leftrightarrow \frac{2}{3}(n_1^2 + 2n_1n_2 + n_2^2) + (n_1 + n_2) + \frac{3}{8} - n_1^2 - n_2^2 > 0 \\
&\Leftrightarrow -8n_1^2 + (32n_2 + 24)n_1 + (-8n_2^2 + 24n_2 + 9) > 0
\end{aligned}$$

Considerando a expressão à esquerda do sinal como uma parábola na variável n_1 , temos que a desigualdade poderá ser verdadeira somente quando $\Delta_1 = 96(8n_2^2 + 24n_2 + 9) > 0$, e isso ocorre para qualquer n_2 , pois $n_2 \geq 1$. Além disso $n_1 \in \mathbb{N}$ deverá estar entre as raízes da equação, ou seja, no intervalo (a, b) , onde $a = \frac{(32n_2 + 24) - \sqrt{96(8n_2^2 + 24n_2 + 9)}}{16}$ e $b = \frac{(32n_2 + 24) + \sqrt{96(8n_2^2 + 24n_2 + 9)}}{16}$.

Desta forma, para $n_1 \notin (a, b)$ temos $\dim_{max}\mathbb{F}_{\Theta_i} \leq n_1^2 + n_2^2$ e conseqüentemente as dimensões de todos os flags minimais também serão menores ou iguais a $n_1^2 + n_2^2$. Assim todos esses casos ainda deverão ser estudados.

Observação 4.6. *Os casos em que $n_1 \in (a, b)$ ainda não estão totalmente excluídos, já que comparamos apenas com a dimensão máxima. Para selecionar dentre esses casos especiais, deveremos encontrar para cada $n_2 \geq 1$ os valores possíveis para n_1 dentro do intervalo citado acima, e a partir disso, comparar cada dimensão variando $1 \leq k \leq (n_1 + n_2) - 4$.*

$$11.3 \quad \Theta_{(n_1+n_2)-2} = \Sigma - \alpha_{(n_1+n_2)-2}.$$

$$\dim\mathbb{F}_{\Theta_{(n_1+n_2)-2}} = \frac{(n_1 + n_2)^2 + 7(n_1 + n_2) - 18}{2}$$

Vamos analisar os casos em que $\dim\mathbb{F}_{\Theta_{(n_1+n_2)-2}} > n_1^2 + n_2^2$.

$$\begin{aligned}
\dim\mathbb{F}_{\Theta_{(n_1+n_2)-2}} &= \frac{(n_1 + n_2)^2 + 7(n_1 + n_2) - 18}{2} > n_1^2 + n_2^2 \\
&\Leftrightarrow \frac{n_1^2 + 2n_1n_2 + n_2^2 + 7n_1 + 7n_2 - 18 - 2n_1^2 - 2n_2^2}{2} > 0 \\
&\Leftrightarrow -n_1^2 + (2n_2 + 7)n_1 + (-n_2^2 + 7n_2 - 18) > 0
\end{aligned}$$

Considerando a expressão à esquerda do sinal como uma parábola na variável n_1 , temos que a desigualdade posará ser verdadeira somente quando $\Delta_1 = 56n_2 - 23 > 0$ e isso ocorre para qualquer n_2 , já respeitando a condição $n_2 \geq 1$. Além disso $n_1 \in \mathbb{N}$ deverá estar entre as raízes da equação, ou seja, no intervalo (a, b) , onde $a = \frac{(2n_2 + 7) - \sqrt{56n_2 - 23}}{2}$ e $b = \frac{(2n_2 + 7) + \sqrt{56n_2 - 23}}{2}$. Sendo assim, dados $n_1, n_2 \geq 1$ e $n_1 \in (a, b)$, temos que $\dim\mathbb{F}_{\Theta_{(n_1+n_2)-2}} > n_1^2 + n_2^2$ e assim L não pode agir transitivamente em $\mathbb{F}_{\Theta_{(n_1+n_2)-2}}$. Quando $n_1 \notin (a, b)$ temos $\dim\mathbb{F}_{\Theta_{(n_1+n_2)-2}} \leq n_1^2 + n_2^2$, portanto esses casos ainda deverão ser estudados.

11.4 $\Theta_{(n_1+n_2)-1} = \Sigma - \alpha_{(n_1+n_2)-1}$.

$$\dim \mathbb{F}_{\Theta_{(n_1+n_2)-1}} = \frac{(n_1 + n_2)^2 + 5(n_1 + n_2) - 6}{2}$$

Vamos analisar os casos em que $\dim \mathbb{F}_{\Theta_{(n_1+n_2)-1}} > n_1^2 + n_2^2$.

$$\begin{aligned} \dim \mathbb{F}_{\Theta_{(n_1+n_2)-1}} &= \frac{(n_1 + n_2)^2 + 5(n_1 + n_2) - 6}{2} > n_1^2 + n_2^2 \\ \Leftrightarrow \frac{n_1^2 + 2n_1n_2 + n_2^2 + 5n_1 + 5n_2 - 6 - 2n_1^2 - 2n_2^2}{2} &> 0 \\ \Leftrightarrow -n_1^2 + (2n_2 + 5)n_1 + (-n_2^2 + 5n_2 - 6) &> 0 \end{aligned}$$

Considerando a expressão à esquerda do sinal como uma parábola na variável n_1 , temos que a desigualdade posará ser verdadeira somente quando $\Delta_1 = 40n_2 + 1 > 0$ e isso ocorre para qualquer n_2 , já respeitando a condição $n_2 \geq 1$. Além disso $n_1 \in \mathbb{N}$ deverá estar entre as raízes da equação, ou seja, no intervalo (a, b) , onde $a = \frac{(2n_2 + 5) - \sqrt{40n_2 + 1}}{2}$ e $b = \frac{(2n_2 + 5) + \sqrt{40n_2 + 1}}{2}$. Sendo assim, dados $n_1, n_2 \geq 1$ e $n_1 \in (a, b)$, temos que $\dim \mathbb{F}_{\Theta_{(n_1+n_2)-1}} > n_1^2 + n_2^2$ e assim L não pode agir transitivamente em $\mathbb{F}_{\Theta_{(n_1+n_2)-1}}$. Quando $n_1 \notin (a, b)$ temos $\dim \mathbb{F}_{\Theta_{(n_1+n_2)-1}} \leq n_1^2 + n_2^2$, portanto esses casos ainda deverão ser estudados.

11.5 $\Theta_i = \Sigma - \alpha_i$, com $i = (n_1 + n_2), (n_1 + n_2) + 1$.

$$\dim \mathbb{F}_{\Theta_i} = \frac{(n_1 + n_2)^2 + (n_1 + n_2)}{2}$$

Vamos analisar os casos em que $\dim \mathbb{F}_{\Theta_i} > n_1^2 + n_2^2$.

$$\begin{aligned} \dim \mathbb{F}_{\Theta_i} &= \frac{(n_1 + n_2)^2 + (n_1 + n_2)}{2} > n_1^2 + n_2^2 \\ \Leftrightarrow \frac{n_1^2 + 2n_1n_2 + n_2^2 + n_1 + n_2 - 2n_1^2 - 2n_2^2}{2} &> 0 \\ \Leftrightarrow -n_1^2 + (2n_2 + 1)n_1 + (-n_2^2 + n_2) &> 0 \end{aligned}$$

Considerando a expressão à esquerda do sinal como uma parábola na variável n_1 , temos que a desigualdade posará ser verdadeira somente quando $\Delta_1 = 8n_2 + 1 > 0$ e isso ocorre para qualquer n_2 , já respeitando a condição $n_2 \geq 1$. Além disso $n_1 \in \mathbb{N}$ deverá estar entre as raízes da equação, ou seja, no intervalo (a, b) , onde $a = \frac{(2n_2 + 1) - \sqrt{8n_2 + 1}}{2}$ e $b = \frac{(2n_2 + 1) + \sqrt{8n_2 + 1}}{2}$. Sendo assim, dados $n_1, n_2 \geq 1$ e $n_1 \in (a, b)$, temos que $\dim \mathbb{F}_{\Theta_i} > n_1^2 + n_2^2$ e assim L não pode agir transitivamente em \mathbb{F}_{Θ_i} . Quando $n_1 \notin (a, b)$ temos $\dim \mathbb{F}_{\Theta_i} \leq n_1^2 + n_2^2$, portanto esses casos ainda deverão ser estudados.

12. $L = (B_3, \phi)$ e $G = \text{So}(8, \mathbb{C})$

Suponha que a ação de L em \mathbb{F}_{Θ} seja transitiva. Pelo Lema 4.2 devemos ter

$$\dim \mathbb{F}_{\Theta} \leq \dim B_3 - \dim (AN)_{B_3} = 21 - 12 = 9$$

12.1 $\Theta_1 = \Sigma - \alpha_1$.

Diagrama de G : D_4

Diagrama de Θ_1 : A_3

$$\dim \mathbb{F}_{\Theta_1} = \# \Pi_{D_4}^- - \# \Pi_{A_3}^- = 6.$$

12.2 $\Theta_2 = \Sigma - \alpha_2$.

Diagrama de G : D_4

Diagrama de Θ_2 : $A_1 A_1 A_1$

$$\dim \mathbb{F}_{\Theta_2} = \# \Pi_{D_4}^- - (\# \Pi_{A_1}^- + \# \Pi_{A_1}^- + \# \Pi_{A_1}^-) = 9.$$

12.3 $\Theta_i = \Sigma - \alpha_i$, com $i = 3, 4$.

Diagrama de G : D_4

Diagrama de Θ_i : A_3

$$\dim \mathbb{F}_{\Theta_i} = \# \Pi_{D_4}^- - \# \Pi_{A_3}^- = 6.$$

Portanto, (B_3, ϕ) pode ser transitivo nos flags minimais de $\text{So}(8, \mathbb{C})$, já que em todos os subcasos $\dim \mathbb{F}_{\Theta} \leq 9$. Esse caso ainda deve ser estudado.

13. $L = (A_1 \cdot A_1, \phi)$ e $G = \text{So}(8, \mathbb{C})$

Suponha que a ação de L em \mathbb{F}_{Θ} seja transitiva. Pelo Lema 4.2 devemos ter

$$\begin{aligned} \dim \mathbb{F}_{\Theta} &\leq \dim L - \dim (AN)_L \\ &= (\dim A_1 + \dim A_1) - (\dim (AN)_{A_1} + \dim (AN)_{A_1}) \\ &= 6 - 4 = 2 \end{aligned}$$

Portanto, $(A_1 \cdot A_1, \phi)$ não pode ser transitivo nos flags de $\text{So}(8, \mathbb{C})$, já que $\dim \mathbb{F}_{\Theta} > 2$ como vimos no caso anterior.

14. $L = (B_2 \cdot A_1, \phi)$ e $G = \text{So}(8, \mathbb{C})$

Suponha que a ação de L em \mathbb{F}_{Θ} seja transitiva. Pelo Lema 4.2 devemos ter

$$\begin{aligned} \dim \mathbb{F}_{\Theta} &\leq \dim L - \dim (AN)_L \\ &= (\dim B_2 + \dim A_1) - (\dim (AN)_{B_2} + \dim (AN)_{A_1}) \\ &= (10 + 3) - (6 + 2) = 5 \end{aligned}$$

Portanto, $(B_2 \cdot A_1, \phi)$ não pode ser transitivo nos flags de $\text{So}(8, \mathbb{C})$, já que $\dim \mathbb{F}_{\Theta} > 5$ como vimos no caso anterior.

15. $L = (A_2, \phi)$ e $G = \text{So}(8, \mathbb{C})$

Suponha que a ação de L em \mathbb{F}_{Θ} seja transitiva. Pelo Lema 4.2 devemos ter

$$\dim \mathbb{F}_{\Theta} \leq \dim A_2 - \dim (AN)_{A_2} = 8 - 5 = 3$$

Portanto, (A_2, ϕ) não pode ser transitivo nos flags de $\text{So}(8, \mathbb{C})$, já que $\dim \mathbb{F}_{\Theta} > 3$ como vimos no caso anterior.

3. Caso $G = \text{Sl}(N, \mathbb{C})$

Assim como fizemos nos dois primeiros casos, consideramos \mathbb{F}_Θ uma variedade flag minimal de G . Vamos comparar a dimensão de \mathbb{F}_Θ com o limitante superior fornecido pelo Lema 4.2 nos casos em que L age transitivamente em tal variedade. Primeiramente vamos calcular a dimensão de cada flag minimal de G sabendo que a álgebra de Lie de G é do tipo A_m .

Dado $\Theta_i = \Sigma - \{\alpha_i\}$, com $i = 1, \dots, m$, temos

Diagrama de G : A_m Diagrama de Θ_i : $A_k A_l$

Assim,

$$\begin{aligned} \dim \mathbb{F}_{\Theta_i} &= \#\Pi_{A_m}^- - (\#\Pi_{A_k}^- + \#\Pi_{A_l}^-) \\ &= \frac{m(m+1)}{2} - \left(\frac{k(k+1)}{2} + \frac{l(l+1)}{2} \right) \\ &= \frac{m^2+m}{2} - \left(\frac{2k^2-2km+2k+m^2-m}{2} \right) \\ &= \frac{m^2+m-2k^2+2km-2k-m^2+m}{2} \\ &= -k^2 + (m-1)k + m, \end{aligned}$$

onde $k = i - 1$. Vamos estudar cada um dos casos contidos na Tabela 4.1, vista na seção 4.1, onde ϕ é a representação de L como subgrupo de G .

1. $L = (B_n, \phi)$, com $n \geq 2$ e $G = \text{Sl}(2n+1, \mathbb{C})$

Suponha que a ação de L em \mathbb{F}_Θ seja transitiva. Pelo Lema 4.2 devemos ter

$$\begin{aligned} \dim \mathbb{F}_\Theta &\leq \dim B_n - \dim (AN)_{B_n} \\ &= n(2n+1) - (n+n^2) \\ &= n^2 \end{aligned}$$

Considerando $m = 2n$, pelos cálculos feitos acima temos que para todo $i = 1, \dots, 2n$,

$$\dim \mathbb{F}_{\Theta_i} = -k^2 + (2n-1)k + 2n, \text{ onde } k = i - 1.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \dim \mathbb{F}_{\Theta_i} > n^2 &\Leftrightarrow -k^2 + (2n-1)k + 2n > n^2 \\ &\Leftrightarrow -k^2 + (2n-1)k + (-n^2 + 2n) > 0. \end{aligned}$$

Dada a equação $-x^2 + (2n-1)x + (-n^2 + 2n) = 0$ temos que o discriminante $\Delta = 4n+1$ é maior que zero para todo $n \geq 2$ e as raízes são dadas por $x_1 = \frac{(2n-1) - \sqrt{4n+1}}{2}$ e $x_2 = \frac{(2n-1) + \sqrt{4n+1}}{2}$. Logo, $\dim \mathbb{F}_{\Theta_i} > n^2 \Leftrightarrow x_1 < k < x_2$. Para k fora do intervalo (x_1, x_2) temos que $\dim \mathbb{F}_{\Theta_i} \leq n^2$, portanto esses casos ainda deverão ser estudados.

2. $L = (D_n, \phi)$, com $n \geq 3$ e $G = \text{Sl}(2n, \mathbb{C})$

Suponha que a ação de L em \mathbb{F}_Θ seja transitiva. Pelo Lema 4.2 devemos ter

$$\begin{aligned} \dim \mathbb{F}_\Theta &\leq \dim D_n - \dim (AN)_{D_n} \\ &= n(2n-1) - (n+n(n-1)) \\ &= n^2 - n \end{aligned}$$

Considerando $m = 2n - 1$ temos que para todo $i = 1, \dots, (2n - 1)$,

$$\dim \mathbb{F}_{\Theta_i} = -k^2 + (2n - 2)k + (2n - 1), \text{ onde } k = i - 1.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \dim \mathbb{F}_{\Theta_i} > n^2 - n &\Leftrightarrow -k^2 + (2n - 2)k + (2n - 1) > n^2 - n \\ &\Leftrightarrow -k^2 + (2n - 2)k + (-n^2 + 3n - 1) > 0. \end{aligned}$$

Dada a equação $-x^2 + (2n - 2)x + (-n^2 + 3n - 1) = 0$ temos que o discriminante $\Delta = 4n$ é maior que zero para todo $n \geq 3$ e as raízes são dadas por $x_1 = ((n - 1) - \sqrt{n})$ e $x_2 = ((n - 1) + \sqrt{n})$. Logo, $\dim \mathbb{F}_{\Theta_i} > n^2 - n \Leftrightarrow x_1 < k < x_2$. Para k fora do intervalo (x_1, x_2) temos que $\dim \mathbb{F}_{\Theta_i} \leq n^2 - n$, portanto esses casos ainda deverão ser estudados.

3. $L = (A_n, \phi)$, com $n \geq 3$ e $G = \text{SI}(\frac{n(n+1)}{2}, \mathbb{C})$

Suponha que a ação de L em \mathbb{F}_{Θ} seja transitiva. Pelo Lema 4.2 devemos ter

$$\begin{aligned} \dim \mathbb{F}_{\Theta} &\leq \dim A_n - \dim (AN)_{A_n} \\ &= n(n + 2) - (n + \frac{n(n+1)}{2}) \\ &= \frac{n^2 + n}{2} \end{aligned}$$

Considerando $m = \frac{n(n+1)}{2} - 1$, temos que para todo $i = 1, \dots, (\frac{n(n+1)}{2} - 1)$,

$$\begin{aligned} \dim \mathbb{F}_{\Theta_i} &= -k^2 + (\frac{n(n+1)}{2} - 1 - 1)k + (\frac{n(n+1)}{2} - 1) \\ &= -k^2 + (\frac{n^2+n-4}{2})k + (\frac{n^2+n-2}{2}), \text{ onde } k = i - 1. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \dim \mathbb{F}_{\Theta_i} > \frac{n^2+n}{2} &\Leftrightarrow -k^2 + (\frac{n^2+n-4}{2})k + (\frac{n^2+n-2}{2}) > \frac{n^2+n}{2} \\ &\Leftrightarrow -2k^2 + (n^2 + n - 4)k - 2 > 0. \end{aligned}$$

Dada a equação $-2x^2 + (n^2 + n - 4)x - 2 = 0$ temos que $\Delta = n(n + 1)(n^2 + n - 8)$ é maior que zero para todo $n \geq 3$ e as raízes são dadas por

$$x_1 = \frac{(n^2 + n - 4) - \sqrt{n(n+1)(n^2 + n - 8)}}{4}$$

e

$$x_2 = \frac{(n^2 + n - 4) + \sqrt{n(n+1)(n^2 + n - 8)}}{4}.$$

Logo, $\dim \mathbb{F}_{\Theta_i} > \frac{n^2+n}{2} \Leftrightarrow x_1 < k < x_2$. Para k fora do intervalo (x_1, x_2) temos que $\dim \mathbb{F}_{\Theta_i} \leq \frac{n^2+n}{2}$, portanto esses casos ainda deverão ser estudados.

4. $L = (A_n, \phi)$, com $n \geq 2$ e $G = \text{SI}(\frac{(n+1)(n+2)}{2}, \mathbb{C})$

Suponha que a ação de L em \mathbb{F}_{Θ} seja transitiva. Pelo Lema 4.2 devemos ter

$$\dim \mathbb{F}_{\Theta} \leq \frac{n^2 + n}{2},$$

como foi visto no item anterior.

Considerando $m = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1$, temos que para todo $i = 1, \dots, (\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1)$,

$$\begin{aligned} \dim \mathbb{F}_{\Theta_i} &= -k^2 + (\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1 - 1)k + (\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1) \\ &= -k^2 + (\frac{n^2+3n-2}{2})k + (\frac{n^2+3n}{2}), \text{ onde } k = i - 1. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \dim \mathbb{F}_{\Theta_i} > \frac{n^2+n}{2} &\Leftrightarrow -k^2 + (\frac{n^2+3n-2}{2})k + (\frac{n^2+3n}{2}) > \frac{n^2+n}{2} \\ &\Leftrightarrow -2k^2 + (n^2 + 3n - 2)k + 2n > 0. \end{aligned}$$

Dada a equação $-2x^2 + (n^2 + 3n - 2)x + 2n = 0$ temos que $\Delta = (n+1)(n^3 + 5n^2 + 4)$ é maior que zero para todo $n \geq 2$ e as raízes são dadas por

$$x_1 = \frac{(n^2 + 3n - 2) - \sqrt{(n+1)(n^3 + 5n^2 + 4)}}{4}$$

e

$$x_2 = \frac{(n^2 + 3n - 2) + \sqrt{(n+1)(n^3 + 5n^2 + 4)}}{4}.$$

Logo, $\dim \mathbb{F}_{\Theta_i} > \frac{n^2+n}{2} \Leftrightarrow x_1 < k < x_2$. Para k fora do intervalo (x_1, x_2) temos que $\dim \mathbb{F}_{\Theta_i} \leq \frac{n^2+n}{2}$, portanto esses casos ainda deverão ser estudados.

5. $L = (D_5, \phi)$ e $G = \text{Sl}(16, \mathbb{C})$

Suponha que a ação de L em \mathbb{F}_{Θ} seja transitiva. Pelo Lema 4.2 devemos ter

$$\begin{aligned} \dim \mathbb{F}_{\Theta} &\leq \dim D_5 - \dim (AN)_{D_5} \\ &= 5 \cdot 9 - (5 + 20) = 20 \end{aligned}$$

Considerando $m = 15$, temos que para todo $i = 1, \dots, 15$,

$$\dim \mathbb{F}_{\Theta_i} = -k^2 + 14k + 15, \text{ onde } k = i - 1.$$

Temos que a parábola dada por $f(x) = -x^2 + 14x + 15$ no intervalo $[0, 14]$ atinge seu valor máximo $f(7) = 64$ e seu valor mínimo $f(0) = 15 = f(14)$. Para todo inteiro $k = 1, \dots, 13$, temos que $f(k) \geq f(1) = f(13) = 28$ e $f(k) \leq f(7) = 64$. Desta forma, apenas \mathbb{F}_{Θ_1} e $\mathbb{F}_{\Theta_{15}}$ tem dimensão menor que 20. Esses são os únicos flags de G em que L pode agir transitivamente, portanto, ainda devemos estudá-los.

6. $L = (E_6, \phi)$ e $G = \text{Sl}(27, \mathbb{C})$

Suponha que a ação de L em \mathbb{F}_{Θ} seja transitiva. Pelo Lema 4.2 devemos ter

$$\begin{aligned} \dim \mathbb{F}_{\Theta} &\leq \dim E_6 - \dim (AN)_{E_6} \\ &= 78 - (6 + 36) = 36 \end{aligned}$$

Considerando $m = 26$, temos que para todo $i = 1, \dots, 26$,

$$\dim \mathbb{F}_{\Theta_i} = -k^2 + 25k + 26, \text{ onde } k = i - 1.$$

Temos que a parábola dada por $f(x) = -x^2 + 25x + 26$ no intervalo $[0, 25]$ atinge seu valor máximo $f(12, 5) = 182, 25$ e seu valor mínimo $f(0) = 26 = f(25)$. Para todo inteiro $k = 1, \dots, 24$, temos que $f(k) \geq f(1) = f(24) = 50$ e $f(k) < f(12, 5) = 182, 25$. Desta forma, apenas \mathbb{F}_{Θ_1} e $\mathbb{F}_{\Theta_{26}}$ tem dimensão menor que 36. Esses são os únicos flags de G em que L pode agir transitivamente, portanto, ainda devemos estudá-los.

7. $L = (C_n, \phi)$, com $n \geq 2$ e $G = \text{Sl}(2n, \mathbb{C})$

Suponha que a ação de L em \mathbb{F}_{Θ} seja transitiva. Pelo Lema 4.2 devemos ter

$$\begin{aligned} \dim \mathbb{F}_{\Theta} &\leq \dim C_n - \dim (AN)_{C_n} \\ &= n(2n + 1) - (n + n^2) \\ &= n^2 \end{aligned}$$

Considerando $m = 2n - 1$ temos que para todo $i = 1, \dots, (2n - 1)$,

$$\dim \mathbb{F}_{\Theta_i} = -k^2 + (2n - 2)k + (2n - 1), \text{ onde } k = i - 1.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \dim \mathbb{F}_{\Theta_i} > n^2 &\Leftrightarrow -k^2 + (2n - 2)k + (2n - 1) > n^2 \\ &\Leftrightarrow -k^2 + (2n - 2)k + (-n^2 + 2n - 1) > 0. \end{aligned}$$

Dada a equação $-x^2 + (2n - 2)x + (-n^2 + 2n - 1) = 0$ temos que o discriminante $\Delta = 0$. Logo, $\dim \mathbb{F}_{\Theta_i} \leq n^2$, para todo $i = 1, \dots, 2n - 1$. Portanto esse caso ainda deverá ser estudado.

4.3 Casos não excluídos

Vimos no decorrer da seção anterior que alguns casos não podem ser excluídos apenas usando cálculos com dimensões e o Lema 4.2. Na tabela a seguir estão selecionados os casos que ainda deverão ser estudados, ou seja, os subgrupos maximais L de $G = \text{Sp}(N, \mathbb{C})$ ou $\text{So}(N, \mathbb{C})$ que podem ser transitivos em flags minimais \mathbb{F}_{Θ_i} desses grupos, os quais também aparecem na tabela, na respectiva linha de L . Dentre os subgrupos maximais desses grupos que podem agir transitivamente em flags minimais, omitimos na tabela o caso $L = (B_{n_1} \cdot B_{n_2}, \phi)$, com $n_1 \geq 1$, $n_2 \geq 1$ e $n_1 + n_2 \geq 4$, pois para esse caso, usando apenas o limitante superior fornecido pelo Lema 4.2, não conseguimos uma regularidade em relação aos flags minimais selecionados. Para esse caso, futuramente pretendemos fazer comparações entre as dimensões dos flags minimais de G e de L , e a partir daí procurar entres os flags minimais que tem mesma dimensão aqueles que são comuns aos dois grupos. Para o caso em que $G = \text{Sl}(N, \mathbb{C})$, veremos mais adiante que resultados sobre grupos transitivos em Grassmannianas complexas, obtidos por Oniščik em [3] e [6], ajudam a solucionar o problema.

Tabela 4.4: Casos Não Excluídos por Dimensão

	L	G	Θ_i
I.	(E_7, ϕ)	$\text{Sp}(28, \mathbb{C})$	$\Theta_1 = \Sigma - \{\alpha_1\}$
II.	(G_2, ϕ)	$\text{So}(7, \mathbb{C})$	$\Theta_1 = \Sigma - \{\alpha_1\}$ $\Theta_3 = \Sigma - \{\alpha_3\}$
III.	(B_4, ϕ)	$\text{So}(16, \mathbb{C})$	$\Theta_1 = \Sigma - \{\alpha_1\}$
IV.	(F_4, ϕ)	$\text{So}(26, \mathbb{C})$	$\Theta_1 = \Sigma - \{\alpha_1\}$
V.	$(B_n, \phi),$ $n \geq 3$	$\text{So}(2(n+1), \mathbb{C})$	$\Theta_i = \Sigma - \{\alpha_i\},$ $(i = 1, \dots, n+1)$
VI.	$(B_n \cdot A_1, \phi),$ $n \geq 2$	$\text{So}(2(n+3), \mathbb{C})$	$\Theta_1 = \Sigma - \{\alpha_1\},$ para $n \geq 3$ $\Theta_i = \Sigma - \{\alpha_i\},$ para $n \geq 12$ $(i = 2, \dots, n-1),$ $\Theta_n = \Sigma - \{\alpha_n\},$ para $n \geq 11$ $\Theta_{n+1} = \Sigma - \{\alpha_{n+1}\},$ para $n \geq 10$ $\Theta_i = \Sigma - \{\alpha_i\},$ para $n \geq 6$ $(i = n+2, n+3)$
	casos especiais $(2 \leq n \leq 11)$		
	$(B_5 \cdot A_1, \phi)$	$\text{So}(16, \mathbb{C})$	$\Theta_i = \Sigma - \{\alpha_i\}, i = 2$
	$(B_6 \cdot A_1, \phi)$	$\text{So}(18, \mathbb{C})$	$\Theta_i = \Sigma - \{\alpha_i\}, i = 2$
	$(B_7 \cdot A_1, \phi)$	$\text{So}(20, \mathbb{C})$	$\Theta_i = \Sigma - \{\alpha_i\}, i = 2, 3$
	$(B_8 \cdot A_1, \phi)$	$\text{So}(22, \mathbb{C})$	$\Theta_i = \Sigma - \{\alpha_i\}, i = 2, 3, 4$
	$(B_9 \cdot A_1, \phi)$	$\text{So}(24, \mathbb{C})$	$\Theta_i = \Sigma - \{\alpha_i\}, i = 2, 3, 4, 5$
	$(B_{10} \cdot A_1, \phi)$	$\text{So}(26, \mathbb{C})$	$\Theta_i = \Sigma - \{\alpha_i\}, i = 2, 3, 4, 5, 6$
	$(B_{11} \cdot A_1, \phi)$	$\text{So}(28, \mathbb{C})$	$\Theta_i = \Sigma - \{\alpha_i\}, i = 2, 3, 4, 5, 6, 7$

4.4 Estudo dos casos da tabela 4.4

A partir dessa primeira seleção, temos a seguinte situação: Dado G um grupo de Lie complexo clássico, procuramos $L \subset G$ subgrupo fechado, conexo, não compacto, semissimples e maximal, e semigrupos próprios $S \subset G$ com interior não vazio, tais que a ação de S na variedade homogênea G/L seja transitiva. Pela Proposição 1.25 vista no primeiro capítulo desse trabalho, para que isso ocorra é necessário que L tenha ação transitiva no tipo parabólico de S , o qual denotamos por $\mathbb{F}(S)$. Sendo assim, se existir algum subgrupo $L \subset G$ satisfazendo tais exigências, ele deve ser um dos subgrupos da Tabela 4.4, ou melhor dizendo, é um subgrupo conexo cuja álgebra de Lie está na referida tabela, pois dentre os subgrupos semissimples maximais de G , classificados por Dynkin em [2], esses são os únicos que podem agir transitivamente em variedades flags minimais desse grupo. Vamos estudar cada caso e decidir se realmente tais subgrupos L podem definir variedades homogêneas G/L que admitem ação transitiva de semigrupos próprios de G com interior não vazio. Para isso, vamos usar fortemente o resultado fornecido pela Proposição 1.21, o qual garante que se S age transitivamente em G/L , então o tipo parabólico de S é flag de L . Desta forma, usando os resultados mostrados por Rabelo e San Martin em [8] sobre homologia de flags complexos, podemos concluir em alguns casos que flags de subgrupos podem ser diferentes de flags do grupo, mesmo que eles tenham a mesma dimensão e assim concluímos que $\mathbb{F}(S)$ não pode ser flag de L , mostrando que S não pode ser transitivo em G/L , para alguns subgrupos L dados na Tabela 4.4. Podemos resumir tais resultados de [8] na seguinte proposição:

Proposição 4.7. *Sejam \mathbb{F}_Θ , $\Theta \subset \Sigma$, uma variedade flag de uma álgebra de Lie complexa e $H_k(\mathbb{F}_\Theta; \mathbb{Z})$ a k -homologia de \mathbb{F}_Θ sobre \mathbb{Z} . Então a segunda homologia é dada por $H_2(\mathbb{F}_\Theta; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{|\Sigma - \Theta|}$, onde $|\Sigma - \Theta|$ é o número de elementos em $\Sigma - \Theta$.*

Esse resultado baseia-se no fato que no caso complexo as células de Schubert têm dimensão par e assim a homologia celular é gerada livremente pelas células de Schubert e as únicas homologias não triviais são as de dimensão par. As células de Schubert S_w^Θ são parametrizadas por elementos w do grupo de Weyl W . No caso complexo, a dimensão de S_w^Θ é $2l(w)$, onde $l(w)$ é o comprimento de $w \in W$. Pelo Lema 5.1 de [8], tem-se que para parametrizar as células de Schubert em \mathbb{F}_Θ é suficiente tomar os elementos minimais nas classes laterais wW_Θ . Em particular, $H_2(\mathbb{F}_\Theta; \mathbb{Z})$ é gerada pelas células de Schubert de dimensão 2, isto é, por S_w tal que w é elemento minimal em sua classe lateral e w tem comprimento 1. Isso só acontece quando w é uma reflexão simples. Por fim, só aparecem as reflexões simples associadas às raízes simples fora de Θ . Daí o resultado.

Observação 4.8. *Esse resultado também garante que devemos procurar somente entre os flags minimais de L aqueles que podem ser iguais aos flags minimais de G que aparecem na Tabela 4.4. De fato, seja \mathbb{F}_Θ um flag minimal de G . Então $\Theta = \Sigma_G - \{\alpha\}$, e assim, pela proposição acima temos que $H_2(\mathbb{F}_\Theta; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{|\Sigma_G - \Theta|} = \mathbb{Z}$. Desta forma, dado \mathbb{F}_{Θ_L} um flag de L temos que se $\mathbb{F}_{\Theta_L} = \mathbb{F}_\Theta$, então $H_2(\mathbb{F}_{\Theta_L}; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ e assim $|\Sigma_L - \Theta_L| = 1$. Logo, $\Theta_L = \Sigma_L - \{\alpha_j\}$, para algum $\alpha_j \in \Sigma_L$ e portanto \mathbb{F}_{Θ_L} é flag minimal de L .*

A partir de agora, utilizaremos a Proposição 4.7 para selecionar quais das variedades da Tabela 4.4 podem ser, simultaneamente, variedades flags do grupo G e do subgrupo L correspondente na mesma tabela. Além disso, pela Observação 4.8, podemos nos restringir apenas as variedades flags minimais de L , ou melhor, para cada subgrupo L dado na Tabela 4.4, vamos encontrar quais das variedades flags minimais de L têm a mesma dimensão de alguma das variedades flags minimais de G , correspondentes na mesma tabela, que não foram excluídas apenas utilizando o Lema 4.2.

- I. O primeiro caso da Tabela 4.4 é $L = (E_7, \phi)$ e $G = \text{Sp}(28, \mathbb{C})$. A única variedade minimal de G na qual L pode agir transitivamente é $\mathbb{F}_{\Theta_1} = G/P_{\Theta_1}$, onde $\Theta_1 = \Sigma_G - \{\alpha_1\}$. Vimos na Seção 4.2.2 que $\dim \mathbb{F}_{\Theta_1} = 55$. Verificamos se algum flag de E_7 tem essa mesma dimensão e encontramos três flags $\mathbb{F}_{\Theta_{L,i}}$, $i = 1, 2, 3$, de L tais que $\dim \mathbb{F}_{\Theta_{L,i}} = 55$, a saber, $\Theta_{L,1} = \Sigma_L - \{\alpha_4, \alpha_5\}$, $\Theta_{L,2} = \Sigma_L - \{\alpha_4, \alpha_6\}$ e $\Theta_{L,3} = \Sigma_L - \{\alpha_2, \alpha_5\}$.

Utilizando resultados mostrados por Rabello e San Martin em [8], sobre homologia de flags complexos, chegamos a conclusão que nenhuma dessas três variedades de E_7 pode ser igual ao flag \mathbb{F}_{Θ_1} de G , pois a segunda homologia de \mathbb{F}_{Θ_1} com coeficientes em \mathbb{Z} é diferente da segunda homologia de $\mathbb{F}_{\Theta_{L,i}}$ sobre \mathbb{Z} , com $i = 1, 2, 3$, a saber,

$$H_2(\mathbb{F}_{\Theta_1}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{|\Sigma - \Theta_1|} = \mathbb{Z}$$

e

$$H_2(\mathbb{F}_{\Theta_{L,i}}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{|\Sigma - \Theta_{L,i}|} = \mathbb{Z}^2.$$

- II. O segundo caso da Tabela 4.4 é $L = (G_2, \phi)$ e $G = \text{SO}(7, \mathbb{C})$. Nesse caso selecionamos duas variedades minimais de G na qual L pode agir transitivamente as quais são $\mathbb{F}_{\Theta_1} = G/P_{\Theta_1}$, onde $\Theta_1 = \Sigma_G - \{\alpha_1\}$ e $\mathbb{F}_{\Theta_3} = G/P_{\Theta_3}$, onde $\Theta_3 = \Sigma_G - \{\alpha_3\}$. Vimos na Seção 4.2.2 que $\dim \mathbb{F}_{\Theta_1} = 5$ e $\dim \mathbb{F}_{\Theta_3} = 6$. Podemos observar que G_2 tem uma variedade flag com dimensão igual a 6, no entanto ela não é minimal, logo a 2-homologia dessa variedade não pode ser igual a 2-homologia de \mathbb{F}_{Θ_3} e portanto, elas não podem ser iguais, ou seja, \mathbb{F}_{Θ_3} não pode ser flag de G_2 .

Calculando as dimensões, concluímos que as duas variedades flags minimais de G_2 tem dimensão igual a 5, a saber, $\dim \mathbb{F}_{\Theta_{L_1}} = 5$, onde $\Theta_{L_1} = \Sigma_L - \{\alpha_1\}$ e $\dim \mathbb{F}_{\Theta_{L_2}} = 5$, onde $\Theta_{L_2} = \Sigma_L - \{\alpha_2\}$. Vamos verificar, mais adiante se alguma dessas variedades flags de L é igual a \mathbb{F}_{Θ_1} estudando a órbita de L nessas variedades.

- III. O terceiro caso da Tabela 4.4 é $L = (B_4, \phi)$ e $G = \text{SO}(16, \mathbb{C})$. A única variedade minimal de G na qual L pode agir transitivamente é $\mathbb{F}_{\Theta_1} = G/P_{\Theta_1}$, onde $\Theta_1 = \Sigma_G - \{\alpha_1\}$. Vimos na Seção 4.2.2 que $\dim \mathbb{F}_{\Theta_1} = 14$. Verifiquemos se algum flag minimal de B_4 tem essa mesma dimensão. Calculando as dimensões dos flags minimais de B_4 encontramos $\dim \mathbb{F}_{\Theta_{L_1}} = 7$, $\dim \mathbb{F}_{\Theta_{L_2}} = 11$, $\dim \mathbb{F}_{\Theta_{L_3}} = 12$ e $\dim \mathbb{F}_{\Theta_{L_4}} = 10$. Portanto, \mathbb{F}_{Θ_1} não pode ser flag de B_4 .

- IV. O quarto caso da Tabela 4.4 é $L = (F_4, \phi)$ e $G = \text{SO}(26, \mathbb{C})$. A única variedade minimal de G na qual L pode agir transitivamente é $\mathbb{F}_{\Theta_1} = G/P_{\Theta_1}$, onde $\Theta_1 = \Sigma_G - \{\alpha_1\}$. Vimos na Seção 4.2.2 que $\dim \mathbb{F}_{\Theta_1} = 24$. Temos que $24 = \dim \mathbb{F}_{\Theta_L} = \sharp \Pi_{F_4}^- - a = 24 - a$ se, e somente se, $a = 0$. Logo $\Theta = \emptyset$,

consequentemente \mathbb{F}_{Θ_L} é a variedade flag maximal de F_4 , resultando em $H_2(\mathbb{F}_{\Theta_L}; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^4$. Portanto, \mathbb{F}_{Θ_1} não pode ser flag de F_4 .

V. O quinto caso da Tabela 4.4 é $L = (B_n, \phi)$, com $n \geq 3$, e $G = \text{SO}(2(n+1), \mathbb{C})$. Nesse caso não foi possível excluir nenhuma das variedades flags minimais de G apenas usando dimensão, isto é, todas as variedades flags minimais de G podem admitir ação transitiva de L , pois a dimensão de cada uma delas ficou abaixo do limitante superior dado pelo Lema 4.2. Sendo assim, vamos verificar se os grupos G e L possuem alguma variedades flag minimal em comum. Vimos na seção 4.2 que as dimensões dos flags minimais de G são:

1. $\dim \mathbb{F}_{\Theta_1} = 2n$;
2. $\dim \mathbb{F}_{\Theta_i} = -\frac{3}{2}(i-1)^2 + \frac{4n-3}{2}(i-1) + 2n$, para todo $i = 2, \dots, n-3$;
3. $\dim \mathbb{F}_{\Theta_{n-2}} = \frac{n^2 + 7n - 18}{2}$;
4. $\dim \mathbb{F}_{\Theta_{n-1}} = \frac{n^2 + 5n - 6}{2}$;
5. $\dim \mathbb{F}_{\Theta_n} = \dim \mathbb{F}_{\Theta_{n+1}} = \frac{n^2 + n}{2}$.

Analogamente calculamos as dimensões dos flags minimais de L e encontramos:

1. $\dim \mathbb{F}_{\Theta_{L_1}} = 2n - 1$;
2. $\dim \mathbb{F}_{\Theta_{L_j}} = -\frac{3}{2}(j-1)^2 + \frac{4n+5}{2}(j-1) + (2n-1)$, para todo $j = 2, \dots, n-2$;
3. $\dim \mathbb{F}_{\Theta_{L_{n-1}}} = \frac{n^2 + 3n - 4}{2}$;
4. $\dim \mathbb{F}_{\Theta_{L_n}} = \frac{n^2 + n}{2}$.

Como podemos ver, os flags \mathbb{F}_{Θ_n} e $\mathbb{F}_{\Theta_{n+1}}$ de G tem mesma dimensão do flag $\mathbb{F}_{\Theta_{L_n}}$ de L . Veremos mais adiante que esses são flags em comum entre os dois grupos e assim podemos concluir que G/L admite ação transitiva de certos semigrupos $S \subset G$ de interior não vazio. A possibilidade de existirem outros flags em comum aos dois grupos será estudada futuramente, partindo da comparação entre suas dimensões, ou seja, dadas as dimensões dos flags minimais de G e de L listadas acima, verificaremos se mais algumas delas coincidem e a partir daí pretendemos estudar caso a caso.

VI. O sexto caso da Tabela 4.4 é $L = (B_n \cdot A_1, \phi)$, com $n \geq 2$, e $G = \text{SO}(2(n+3), \mathbb{C})$. Utilizando um algoritmo para comparar as dimensões dos flags minimais de G e de L podemos excluir alguns casos quando $2 \leq n \leq 11$, restando apenas quatro deles:

1. Para $n = 4$ os flags \mathbb{F}_{Θ_1} de G e $\mathbb{F}_{\Theta_{L_3}}$ de L têm dimensão igual a 12.
2. Para $n = 7$ os flags \mathbb{F}_{Θ_2} de G e $\mathbb{F}_{\Theta_{L_6}}$ de L têm dimensão igual a 33.
3. Para $n = 9$ os flags \mathbb{F}_{Θ_3} de G e $\mathbb{F}_{\Theta_{L_6}}$ de L têm dimensão igual a 57.

4. Para $n = 10$ os flags \mathbb{F}_{Θ_3} de G e $\mathbb{F}_{\Theta_{L_9}}$ de L têm dimensão igual a 63.

Estudaremos futuramente se os flags de cada caso são iguais, bem como a possibilidade de existirem flags minimais em comum entre G e L para $n \geq 12$, pois comparando as dimensões através de um algoritmo, encontramos flags minimais de G com mesma dimensão de flags minimais de L , por exemplo, para $n = 13$ os flags \mathbb{F}_{Θ_4} de G e $\mathbb{F}_{\Theta_{L_{12}}}$ de L têm dimensão igual a 102, para $n = 16$ os flags \mathbb{F}_{Θ_5} de G e $\mathbb{F}_{\Theta_{L_{15}}}$ de L têm dimensão igual a 150 e para $n = 19$ os flags \mathbb{F}_{Θ_6} de G e $\mathbb{F}_{\Theta_{L_{18}}}$ de L têm dimensão igual a 207.

4.5 Transitividade em Variedades Homogêneas de Grupos Complexos

Após excluirmos alguns dos subgrupos maximais de grupos clássicos classificados por Dynkin utilizando as técnicas vistas nas seções anteriores, podemos resumir os resultados encontrados nos seguintes teoremas:

Teorema 4.9. *Seja G um dos grupos de Lie complexos clássicos $\mathrm{Sp}(N, \mathbb{C})$ ou $\mathrm{SO}(N, \mathbb{C})$, $L \subset G$ um dos subgrupos maximais fechados, conexos e semissimples classificados por Dynkin em [2] e $S \subset G$ um semigrupo próprio, com $\mathrm{int}S \neq \emptyset$.*

1. Se $G = \mathrm{Sp}(N, \mathbb{C})$, então S não pode agir transitivamente em G/L' , para qualquer $L' \subset L$.
2. Se $G = \mathrm{SO}(2N + 1, \mathbb{C})$, então a única variedade homogênea de G , além da trivial, na qual S pode ser transitivo é $\mathrm{SO}(7, \mathbb{C})/G_2$, onde G_2 é subgrupo de $\mathrm{SO}(7, \mathbb{C})$ com álgebra de Lie G_2 .
3. Se $G = \mathrm{SO}(2N, \mathbb{C})$, então as possibilidades para G/L nas quais S pode ser transitivo são:
 - (a) L com álgebra de Lie B_n e G com álgebra de Lie D_{n+1} , com $n \geq 3$.
 - (b) L com álgebra de Lie $B_n \cdot A_1$ e G com álgebra de Lie D_{n+3} , com $n \geq 2$.
 - (c) L com álgebra de Lie $B_{n_1} \cdot B_{n_2}$ e G com álgebra de Lie $D_{n_1+n_2+1}$, com $n_1 \geq 1$, $n_2 \geq 1$ e $n_1 + n_2 \geq 4$.

Teorema 4.10. *Seja $G = \mathrm{Sl}(n, \mathbb{C})$ e $S \subset G$ um semigrupo próprio com $\mathrm{int}(S) \neq \emptyset$, transitivo em G/L . Se n é ímpar ou se n é par e $\mathbb{F}(S)$ se projeta em $C_{n,k}$, diferente de $C_{n,n-1}$ e de $\mathbb{C}P^{n-1}$, então G/L é trivial. Se n é par e $\mathbb{F}(S) = \mathbb{C}P^{n-1}$ ou $\mathbb{F}(S) = C_{n,n-1}$, então a única possibilidade para G/L é $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{C})/\mathrm{Sp}(m, \mathbb{C})$, com $n = 2m$.*

As demonstrações desses teoremas serão feitas nas seções seguintes, separadamente para os casos $G = \mathrm{Sl}(N, \mathbb{C})$, $G = \mathrm{Sp}(N, \mathbb{C})$ e $G = \mathrm{SO}(N, \mathbb{C})$ e poderemos observar mais adiante, Corolário 4.17, que no caso (a) do teorema acima, a variedade G/L realmente admite ação transitiva de semigrupos próprios de G . Os demais casos ainda serão estudados.

4.6 Transitividade em $\mathrm{Sp}(N, \mathbb{C})/L$

Podemos observar no decorrer da seção anterior, que para $G = \mathrm{Sp}(N, \mathbb{C})$, todos os subgrupos maximais $L \subset G$ da Tabela 4.2 foram excluídos, alguns apenas comparando a dimensão dos flags minimais de G com a dimensão das órbitas de L , e o único caso não excluído por dimensão, caso I da Tabela 4.4, foi excluído calculando-se a segunda homologia dos flags de G e dos flags de L que possuem a mesma dimensão. Como consequência desses fatos temos o seguinte resultado:

Teorema 4.11. *Seja $G = \mathrm{Sp}(N, \mathbb{C})$ e $L' \subset G$ um subgrupo fechado, conexo e semissimples contido em algum subgrupo maximal dado na Tabela 4.2. Então não existe semigrupo próprio $S \subset G$, com $\mathrm{int}S \neq \emptyset$, tal que a ação de S na variedade homogênea G/L' seja transitiva.*

Demonstração: Se existisse tal semigrupo S transitivo em G/L' , então a ação de S também seria transitiva em G/L , onde L é um subgrupo maximal que contém L' como no enunciado. Pelo Teorema 1.18 deveríamos ter L agindo transitivamente no tipo parabólico $\mathbb{F}(S)$ e consequentemente nas variedades flags minimais nas quais $\mathbb{F}(S)$ se projeta. Conforme vimos na seção anterior, o único subgrupo conexo maximal L da Tabela 4.2 que pode agir transitivamente em variedades flags minimais de G tem álgebra de Lie do tipo E_7 . Além disso, pela Proposição 1.21, deveríamos ter $\mathbb{F}(S)$ uma variedade flag de L , o que não ocorre para o caso em que a álgebra de Lie de L é E_7 . De fato, ao estudarmos o caso $L = (E_7, \phi)$ percebemos que as variedades flags de G e de L que têm mesma dimensão, possuem a segunda homologia diferentes. Desta forma, qualquer flag minimal de G não pode ser flag de L . Portanto, $\mathrm{Sp}(N, \mathbb{C})/L$ não admite ação transitiva de semigrupos próprios de $\mathrm{Sp}(N, \mathbb{C})$, para qualquer L como no enunciado. \square

4.7 Transitividade em $\mathrm{SO}(2N + 1, \mathbb{C})/L$

Podemos perceber a partir da tabela 4.3, que para $G = \mathrm{SO}(2N + 1, \mathbb{C})$ o único subgrupo L conexo e semissimples que é maximal em G é o subgrupo cuja álgebra de Lie é G_2 . Vimos na Seção 4.3, comparando a dimensão dos flags minimais de G com a dimensão das órbitas de L , que a ação desse subgrupo pode ser transitiva em algumas variedades de G . Além disso, ao estudarmos o caso II da Tabela 4.4, percebemos que G_2 e B_3 possuem variedades flags minimais com dimensão e segunda homologia iguais. Utilizando esses fatos, vamos encontrar nessa seção uma variedade homogênea de $\mathrm{SO}(2N + 1, \mathbb{C})$ que admite ação transitiva de semigrupos próprios desse grupo, a saber, $\mathrm{SO}(7, \mathbb{C})/L$, onde L é um subgrupo conexo com álgebra de Lie igual a G_2 . Para isso, vamos mostrar que B_3 e G_2 possuem um flag em comum.

4.7.1 O caso $G_2 \subset B_3 = \mathfrak{so}(7)$

Antes de mais nada, apresentamos a seguir algumas observações e resultados sobre flags e representações irreduzíveis de álgebras de Lie, os quais serão utilizados para mostrar que G_2 e B_3 possuem um flag em comum. Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie semissimples complexa com sistema simples de raízes $\Sigma = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$.

Os pesos fundamentais $\Lambda = \{\mu_1, \dots, \mu_l\}$ são definidos por

$$\langle \alpha_i^\vee, \mu_j \rangle = \frac{2\langle \alpha_i, \mu_j \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle} = \delta_{ij}.$$

Os pesos máximos das representações irredutíveis de dimensão finita são da forma $\mu = n_1\mu_1 + \dots + n_l\mu_l$ com n_i inteiros ≥ 0 . O seguinte fato é bem conhecido:

Lema 4.12. *Seja ρ_μ a representação irredutível com peso máximo $\mu = n_1\mu_1 + \dots + n_l\mu_l$ e denote por $G = \langle \exp \rho_\mu(\mathfrak{g}) \rangle$ o grupo de Lie linear com álgebra de Lie $\rho_\mu(\mathfrak{g}) \approx \mathfrak{g}$. Tome um vetor de peso máximo v e seja $G \cdot [v]$ a órbita da reta $[v]$ no espaço V_μ da representação. Então, como espaço homogêneo $G_\mu \cdot [v]$ é o flag $\mathbb{F}_{\Theta(\mu)}$ onde $\Theta(\mu) = \{\alpha_i \in \Sigma : n_i = 0\}$.*

Demonstração: Como v é vetor de peso máximo, a álgebra de isotropia $\mathfrak{g}_{[v]}$ em $[v]$ contém a subálgebra de Borel $\mathfrak{p} = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\beta > 0} \mathfrak{g}_\beta$. Portanto, $\mathfrak{g}_{[v]}$ é uma subálgebra parabólica \mathfrak{p}_Θ e o grupo de isotropia $G_{[v]}$ contém a componente conexa da identidade do grupo parabólico P_Θ . Como \mathfrak{g} é álgebra complexa, os grupos parabólicos são conexos, daí que $G_{[v]} = P_\Theta$ e a órbita é de fato um flag de \mathfrak{g} . Falta mostrar que $\Theta = \Theta(\mu)$. Por definição $\langle \alpha_i^\vee, \mu \rangle = n_i$ e daí que $\langle \alpha_i^\vee, \mu \rangle = 0$ se $\alpha_i \in \Theta(\mu)$ e $\langle \alpha_i^\vee, \mu \rangle > 0$ se $\alpha_i \notin \Theta(\mu)$. Como, a igualdade $\langle \alpha_i^\vee, \mu \rangle = 0$ implica que $\rho_\mu(\mathfrak{g}_{-\alpha_i})v = 0$, portanto $\Theta(\mu) \subset \Theta$. De novo, como μ é peso máximo, o teorema de representação de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ garante que $\rho_\mu(\mathfrak{g}_{-\alpha_i})v$ não é paralelo a v se $\langle \alpha_i^\vee, \mu \rangle > 0$ o que mostra que $\Theta \subset \Theta(\mu)$. \square

Proposição 4.13. *O flag $\mathbb{F}_{\Theta_1} = \text{SO}(7, \mathbb{C})/P_{\Theta_1}$ do Caso II. é também flag de G_2 .*

Demonstração: Considere G_2 com $\Sigma_L = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ sendo que α_1 é a raiz longa e α_2 a raiz curta e $\Lambda_L = \{\mu_1, \mu_2\}$ os pesos fundamentais. Então, a representação ρ_{μ_2} tem dimensão 7 e a imagem de G_2 por essa representação cai dentro de $\mathfrak{so}(7, \mathbb{C}) = B_3$. Portanto, pelo lema anterior, a órbita projetiva do peso máximo é o flag $\mathbb{F}_{\Theta_{L_2}}$, com $\Theta_{L_2} = \{\alpha_1\} = \Sigma_L - \{\alpha_2\}$.

Por outro lado, seja $\mathfrak{so}(7, \mathbb{C}) = B_3$ com sistema simples $\Sigma_G = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$, com β_3 a raiz curta, e pesos fundamentais $\Lambda_G = \{\nu_1, \nu_2, \nu_3\}$. Então, a representação canônica ρ_ν em dimensão 7 tem peso máximo ν_1 , ou seja, $\nu = 1 \cdot \nu_1 + 0 \cdot \nu_2 + 0 \cdot \nu_3$. Logo a órbita projetiva do peso máximo é o flag \mathbb{F}_{Θ_1} , com $\Theta_1 = \{\beta_2, \beta_3\} = \Sigma_G - \{\beta_1\}$.

Como existem decomposições de Iwasawa compatíveis, pode-se escolher um vetor de peso máximo comum para as duas representações. Como $G_2 \subset B_3$, a órbita de G_2 fica dentro da órbita de B_3 , isto é, $\mathbb{F}_{\Theta_{L_2}} \subset \mathbb{F}_{\Theta_1}$. Mas as dimensões são iguais, dessa forma, $\mathbb{F}_{\Theta_{L_2}}$ é uma subvariedade aberta de \mathbb{F}_{Θ_1} . Por compacidade segue que $\mathbb{F}_{\Theta_{L_2}} = \mathbb{F}_{\Theta_1}$. \square

Como consequências dos resultados vistos até agora, temos o seguinte teorema:

Teorema 4.14. *Seja $G = \text{SO}(2N + 1, \mathbb{C})$, $L \subset G$ um subgrupo maximal fechado, conexo e semissimples dado na Tabela 4.3. Então existe uma única variedade homogênea G/L a qual admite ação transitiva de semigrupos $S \subset G$ de interior não vazio, a saber, $\text{SO}(7, \mathbb{C})/L$, onde L é o subgrupo conexo com álgebra de Lie G_2 . Além disso, devemos ter $\mathbb{F}(S) = \mathbb{F}_{\Theta_1}$, com $\Theta_1 = \Sigma_G - \{\alpha_1\}$.*

Demonstração: Suponha que exista semigrupo de interior não vazio $S \subset G$ transitivo em G/L , com L segundo o enunciado. Então tal subgrupo L é transitivo em $\mathbb{F}(S)$ e possui uma sequência contractante com respeito a essa variedade flag. Consequentemente L é transitivo em qualquer variedade flag minimal de G na qual $\mathbb{F}(S)$ se projeta. Como vimos na Seção 4.3, L deve ter álgebra de Lie G_2 , G deve ter álgebra de Lie B_3 e as únicas variedades minimais de G que admitem ação transitiva desse subgrupo maximal são \mathbb{F}_{Θ_1} e \mathbb{F}_{Θ_3} . Logo, a única variedade homogênea com as hipóteses do enunciado que pode admitir ação transitiva de um semigrupo próprio $S \subset G$ é $\text{SO}(7, \mathbb{C})/G_2$, onde G_2 aqui representa o grupo de Lie conexo e não compacto com álgebra de Lie G_2 . Além disso, $\mathbb{F}(S)$ só poderia se projetar em \mathbb{F}_{Θ_1} e/ou \mathbb{F}_{Θ_3} . Ao estudarmos o caso II. da Tabela 4.4, vimos que \mathbb{F}_{Θ_3} não pode ser flag de G_2 , assim $\mathbb{F}(S)$ não pode se projetar em \mathbb{F}_{Θ_3} . De fato, se isso fosse verdade, teríamos G_2 transitivo e com sequência contractante com respeito a \mathbb{F}_{Θ_3} , o que pelo Teorema 1.19 resultaria na existência de semigrupos próprios transitivos em $\text{SO}(7, \mathbb{C})/G_2$, cujo tipo parabólico seria \mathbb{F}_{Θ_3} , e desta forma teríamos pela Proposição 1.21 que \mathbb{F}_{Θ_3} seria flag de G_2 , e já mostramos que isso não é possível. Logo, $\mathbb{F}(S)$ só pode se projetar em \mathbb{F}_{Θ_1} e portanto $\mathbb{F}(S) = \mathbb{F}_{\Theta_1}$.

Novamente pela Proposição 1.21, devemos ter $\mathbb{F}(S)$ uma variedade flag de L . Como provamos na proposição anterior, \mathbb{F}_{Θ_1} é flag de G_2 . Desta forma, esse subgrupo é transitivo em \mathbb{F}_{Θ_1} e possui sequência contractante com respeito a essa variedade. Sendo assim, dado um semigrupo $S \subset \text{SO}(7, \mathbb{C})$, com interior não vazio, cujo tipo parabólico é \mathbb{F}_{Θ_1} , temos pelo Teorema 1.19 que S_C é um semigrupo próprio que age transitivamente variedade homogênea $\text{SO}(7, \mathbb{C})/G_2$. \square

4.8 Transitividade em $\text{SO}(2N, \mathbb{C})/L$

Através da seção 4.2.2 percebemos que alguns subgrupos maximais de $\text{SO}(2N, \mathbb{C})$ podem agir transitivamente em variedades flags minimais desse grupo, já que as dimensões de algumas dessas variedades ficaram abaixo do limitante superior fornecido pelo Lema 4.2. Depois disso, usamos resultados sobre as segunda homologia de flags minimais de G e de L e assim, dentre os subgrupos maximais listados na Tabela 4.3 restaram apenas três possibilidades para sua álgebra de Lie. Como consequência desse fato, temos o seguinte resultado:

Teorema 4.15. *Seja $G = \text{SO}(2N, \mathbb{C})$ e $L \subset G$ um subgrupo maximal dado na Tabela 4.3. Se existir um semigrupo $S \subset G$, com interior não vazio, cuja ação na variedade homogênea G/L é transitiva, então as únicas possibilidades para L e G são:*

1. L com álgebra de Lie B_n e G com álgebra de Lie D_{n+1} , com $n \geq 3$.
2. L com álgebra de Lie $B_n \cdot A_1$ e G com álgebra de Lie D_{n+3} , com $n \geq 2$.
3. L com álgebra de Lie $B_{n_1} \cdot B_{n_2}$ e G com álgebra de Lie $D_{n_1+n_2+1}$, com $n_1 \geq 1$, $n_2 \geq 1$ e $n_1 + n_2 \geq 4$.

Demonstração: Como no Teorema 4.14, se existir tal semigrupo devemos ter L transitivo no tipo parabólico de S e consequentemente em qualquer variedade flag minimal de G na qual $\mathbb{F}(S)$ se projeta. Como vimos na seção 4.3, os únicos subgrupos que podem agir transitivamente em variedades flags minimais de G são os que aparecem no enunciado.

□

No teorema anterior, garantimos que para um subgrupo maximal L dado na Tabela 4.3, somente três “tipos” de variedades homogêneas $\mathrm{SO}(2N, \mathbb{C})/L$ podem admitir ação transitiva de semigrupos próprios desse grupo. A seguir, veremos que o caso 1. do teorema realmente acontece, ou seja, a variedade homogênea $\mathrm{SO}(2(n+1), \mathbb{C})/L$, onde L é um subgrupo fechado, maximal e conexo, cuja álgebra de Lie é B_n , admite ação transitiva de semigrupos próprios de $\mathrm{SO}(2(n+1), \mathbb{C})$. Para isso, vamos mostrar que esses grupos possuem flags em comum.

4.8.1 O caso $B_n \subset D_{n+1} = \mathfrak{so}(2n+2)$

Vamos mostrar que os flags \mathbb{F}_{Θ_n} e $\mathbb{F}_{\Theta_{n+1}}$ de D_{n+1} , os quais são difeomorfos entre si, são flags de B_n . Mais ainda, vistos como flags de B_n , eles são representados pelo mesmo espaço homogêneo, o flag $\mathbb{F}_{\Theta_{L_n}}$. Vimos que esses flags tem dimensão $\frac{n^2+n}{2}$ e por serem flags minimais, a segunda homologia também é a mesma.

Considere D_{n+1} com o sistema de raízes simples $\Sigma_G = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}\}$ e $\Lambda_G = \{\mu_1, \dots, \mu_{n+1}\}$ os pesos fundamentais. Podemos realizar essa álgebra de Lie como a álgebra $\mathfrak{so}(2n+2)$ das matrizes anti-simétricas em relação a forma bilinear simétrica não-degenerada cuja matriz é

$$J = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} & & & 0 & & & & & 0 \\ & & & \vdots & & & & & \vdots \\ & & & 0 & & 1_n & & & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & & 0 \\ \hline & & & 0 & & & & & 0 \\ & & & \vdots & & & & & \vdots \\ & & & 0 & & 0 & & & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & & 1 \end{array} \right).$$

Desta forma, $X \in \mathfrak{so}(2n+2)$ se, e somente se, $XJ + JX^t = 0$.

Agora consideremos B_n com o sistema de raízes simples $\Sigma_L = \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ e $\Lambda_L = \{\nu_1, \dots, \nu_n\}$ os pesos fundamentais. Podemos realizar essa álgebra de Lie como a álgebra $\mathfrak{so}(2n+1)$ das matrizes anti-simétricas em relação a forma bilinear simétrica não-degenerada cuja matriz é

$$J' = \left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & 0 & & & & & \\ & & & \vdots & & & & & \\ & & & 0 & & 1_n & & & \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & & \\ \hline & & & 0 & & & & & \\ & & & \vdots & & & & & \\ & & & 0 & & 0 & & & \end{array} \right).$$

Desta forma, $X \in \mathfrak{so}(2n+1)$ se, e somente se, $XJ' + J'X^t = 0$. Sendo assim, temos que

$$X = \left(\begin{array}{c|c|c} A & \beta & B \\ \hline \gamma & 0 & -\beta^t \\ \hline C & -\gamma^t & -A^t \end{array} \right),$$

onde β e γ são matrizes complexas $n \times 1$ e $1 \times n$, respectivamente, e A , B e C são matrizes complexas $n \times n$, com B e C anti-simétricas. Podemos identificar $\mathfrak{so}(2n+1)$ com a seguinte subálgebra de $\mathfrak{so}(2n+2)$, a qual também denotamos por $\mathfrak{so}(2n+1)$:

$$\mathfrak{so}(2n+1) = \left\{ \left(\begin{array}{c|c|c|c} A & \beta & B & 0 \\ \hline \gamma & 0 & -\beta^t & 0 \\ \hline C & -\gamma^t & -A^t & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right) ; \beta, \gamma, A, B, C \text{ são como em } \mathfrak{so}(2n+1) \right\}.$$

Desta forma, um elemento da subálgebra de Cartan de $\mathfrak{so}(2n+2)$ contido em $\mathfrak{so}(2n+1)$ é da forma:

$$H = \left(\begin{array}{ccccccc} a_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & a_n & & & & \\ & & & 0 & & & \\ & & & & -a_1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & -a_n \\ & & & & & & & 0 \end{array} \right)$$

Consideremos as representações ρ_μ e ρ_ξ de D_{n+1} , com $\mu = 2\mu_{n+1}$ e $\xi = 2\mu_n$. Vamos procurar qual é o peso máximo, correspondente a μ e ξ , da representação de $B_n = \mathfrak{so}(2n+1)$ em $D_{n+1} = \mathfrak{so}(2n+2)$ dada acima. Para isso, calculemos os pesos máximos μ e ξ no elemento H da subálgebra de Cartan de $\mathfrak{so}(2n+1)$.

$$\begin{aligned} \mu(H) = 2\mu_{n+1}(H) &= (\lambda_1 + \dots + \lambda_n + \lambda_{n+1})(H) \\ &= \lambda_1(H) + \dots + \lambda_n(H) + \lambda_{n+1}(H) \\ &= a_1 + \dots + a_n + 0 \\ &= \lambda_1(H) + \dots + \lambda_n(H) \\ &= (\lambda_1 + \dots + \lambda_{n+1})(H) = 2\nu_n(H) = \nu(H) \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\xi(H) = 2\mu_n(H) = 2\nu_n(H) = \nu(H).$$

Proposição 4.16. *Os flags \mathbb{F}_{Θ_n} e $\mathbb{F}_{\Theta_{n+1}}$ do caso V. são flags de B_n .*

Demonstração: Vimos acima que $\mu|_{B_n} = \xi|_{B_n} = \nu$, onde $\nu = 0 \cdot \nu_1 + \dots + 0 \cdot \nu_{n-1} + 2 \cdot \nu_n$. Assim, ρ_μ e ρ_ξ restritas a B_n são iguais a ρ_ν . Como existem decomposições de Iwasawa compatíveis, pode-se escolher um vetor v de peso máximo comum para as representações μ e ν . Pelo Lema 4.12 temos

$$\rho_\nu(B_n) \cdot [v] = L_\nu \cdot [v] = \mathbb{F}_{\Theta_{L_n}} \text{ e } \rho_\mu(D_{n+1}) \cdot [v] = G_\mu \cdot [v] = \mathbb{F}_{\Theta_{n+1}},$$

onde $\Theta_{L_n} = \Sigma_L - \{\beta_n\}$ e $\Theta_{n+1} = \Sigma_G - \{\alpha_{n+1}\}$. Como $L_\nu \subset G_\mu$, temos $\mathbb{F}_{\Theta_{L_n}} \subset \mathbb{F}_{\Theta_{n+1}}$. Assim, $\mathbb{F}_{\Theta_{L_n}}$ é uma subvariedade aberta de $\mathbb{F}_{\Theta_{n+1}}$, já que as dimensões são iguais. Por compacidade segue que $\mathbb{F}_{\Theta_{L_n}} = \mathbb{F}_{\Theta_{n+1}}$.

Analogamente pode-se escolher um vetor v de peso máximo comum para as representações ξ e ν . Como $\rho_\xi(D_{n+1}) \cdot [v] = G_\xi \cdot [v] = \mathbb{F}_{\Theta_n}$, temos que $\mathbb{F}_{\Theta_{L_n}} = L_\nu \cdot [v] \subset G_\mu \cdot [v] = \mathbb{F}_{\Theta_{n+1}}$ e pelo mesmo argumento usado acima temos $\mathbb{F}_{\Theta_{L_n}} = \mathbb{F}_{\Theta_n}$. \square

Corolário 4.17. *Considere $G = \text{SO}(2(n+1), \mathbb{C})$ e suponha que um semigrupo próprio $S \subset G$, com interior não vazio, tenha tipo parabólico $\mathbb{F}(S) = \mathbb{F}_{\Theta_{n+1}}$ ou $\mathbb{F}(S) = \mathbb{F}_{\Theta_n}$. Então a variedade homogênea $\text{SO}(2(n+1), \mathbb{C})/L_\nu$ admite ação transitiva de um semigrupo próprio de G , onde L_ν é o subgrupo da proposição anterior cuja álgebra de Lie é B_n .*

Demonstração: Pela proposição anterior temos que $\mathbb{F}(S) = \mathbb{F}_{\Theta_{n+1}}$ é flag de L_ν . Logo esse subgrupo tem ação transitiva em $\mathbb{F}(S)$ e admite sequência contractante com respeito a essa variedade. Portanto, pelo Teorema 1.19, temos que o semigrupo de compressão S_C age transitivamente em $\text{SO}(2(n+1), \mathbb{C})/L_\nu$. Analogamente temos o resultado quando $\mathbb{F}(S) = \mathbb{F}_{\Theta_n}$. \square

4.9 Transitividade em $\text{Sl}(N, \mathbb{C})/L$

Através dos cálculos com dimensões feitos na Seção 4.2, percebemos que no caso $G = \text{Sl}(N, \mathbb{C})$ nenhum dos subgrupos maximais dados na tabela 4.1 foram excluídos apenas utilizando o limitante superior fornecido pelo Lema 4.2. Além disso, podemos encontrar flags minimais de $\text{Sl}(n, \mathbb{C})$ com mesma dimensão de flags minimais de subgrupos maximais contidos na referida tabela, por exemplo, os flags \mathbb{F}_{Θ_1} e $\mathbb{F}_{\Theta_{2n-1}}$ de $\text{Sl}(2n, \mathbb{C})$, onde $\Theta_i = \Sigma_G - \{\alpha_i\}$, têm a mesma dimensão do flag $\mathbb{F}_{\Theta_{L_1}}$ de $L = (C_n, \phi)$, onde $\Theta_{L_1} = \Sigma_L - \{\alpha_1\}$, a saber, $\dim \mathbb{F}_{\Theta_1} = \dim \mathbb{F}_{\Theta_{2n-1}} = \dim \mathbb{F}_{\Theta_{L_1}} = 2n - 1$. Para solucionar o problema proposto para $\text{Sl}(N, \mathbb{C})$, vamos utilizar resultados obtidos por Oniščik em [3] e [6] e em seguida algumas técnicas já empregadas nesse trabalho.

Pelo Teorema 9 de [3], temos que se $1 < k < n - 1$, então todo grupo de Lie compacto, conexo e transitivo na Grassmanniana complexa $C_{n,k}$ é similar ao grupo $\text{SU}(n)$ e pelo Teorema 6 desse mesmo artigo, os grupos de Lie compactos, conexos e transitivos no espaço projetivo complexo $\mathbb{C}P^{n-1}$ são $\text{SU}(n)$ ou para o caso $n = 2m$ seu subgrupo $\text{Sp}(m)$. Além disso, o Teorema 3 de [6] fornece os grupos não compactos que

contém esses grupos transitivos em $C_{n,k}$ e em $\mathbb{C}P^{n-1}$, que são $L = \text{Sl}(n, \mathbb{C})$ contendo $\text{SU}(n)$ e $L = \text{Sp}(m, \mathbb{C})$ ou $L = \text{SU}^*(2m)$ contendo $\text{Sp}(m)$. Como o último caso não representa um grupo de Lie complexo, nos resta analisar apenas o subgrupo não compacto $L = \text{Sp}(m, \mathbb{C})$ o qual é maximal em $\text{Sl}(2m, \mathbb{C})$, pois para o caso $L = \text{Sl}(n, \mathbb{C})$, a variedade homogênea G/L é a trivial. Desta forma, obtemos um resultado análogo ao resultado obtido no caso real.

Teorema 4.18. *Seja $G = \text{Sl}(n, \mathbb{C})$ e $S \subset G$ um semigrupo próprio com $\text{int}(S) \neq \emptyset$, cujo o tipo parabólico $\mathbb{F}(S)$ é de tipo projetivo ou/e tipo k . Então a única variedade homogênea não trivial de G na qual S pode ser transitivo é $\text{Sl}(n, \mathbb{C})/\text{Sp}(m, \mathbb{C})$, com $n = 2m$.*

Demonstração: Como já vimos, para que S seja transitivo em G/L é necessário que L seja transitivo em $\mathbb{F}(S)$ e possua uma sequência contractante com respeito a essa variedade flag. Como $\mathbb{F}(S)$ se projeta em $\mathbb{C}P^{n-1}$, ou/e em $C_{n,k}$ para algum $k \in \{2, 3, \dots, n-1\}$, a Proposição 3.9 garante que L deve ser transitivo em $\mathbb{C}P^{n-1}$, ou/e em $C_{n,k}$. Se $\mathbb{F}(S)$ se projeta em $\mathbb{C}P^{n-1}$ e n é ímpar, ou se $\mathbb{F}(S)$ se projeta em $C_{n,k}$ e $k \neq n-1$, temos que $L = \text{Sl}(n, \mathbb{R})$, e assim G/L é trivial. Se n é par e S é de tipo projetivo ou de tipo $k = n-1$, temos pelos resultados de Oniščik que a única possibilidade não trivial é $L = \text{Sp}(m, \mathbb{C})$, onde $n = 2m$, ou seja, $G/L = \text{Sl}(2m, \mathbb{C})/\text{Sp}(m, \mathbb{C})$. \square

Vimos no teorema anterior que a variedade homogênea $\text{Sl}(2m, \mathbb{C})/\text{Sp}(m, \mathbb{C})$ é a única em que um semigrupo próprio de G pode agir transitivamente. Para o caso $G = \text{Sl}(N, \mathbb{C})$, no final dessa seção veremos que essa variedade realmente admite ação transitiva de semigrupos próprios de G .

4.9.1 $\mathbb{C}P^{2m-1}$ e $C_{2m,2m-1}$ são flags de $\text{Sp}(m, \mathbb{C})$

Analogamente ao que foi feito no Exemplo 3.5, podemos mostrar que $\text{Sp}(m, \mathbb{C})$ age transitivamente em $\mathbb{C}P^{2m-1}$. Basta tomarmos as matrizes

$$A = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & a_2 & \dots & a_n \\ \hline -a_2 & & & \\ \vdots & & & \\ -a_n & & & 0 \end{array} \right) \text{ e } B = \left(\begin{array}{c|ccc} b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ \hline b_2 & & & \\ \vdots & & & \\ b_n & & & 0 \end{array} \right)$$

daquele exemplo com entradas complexas e $e_1 \in \mathbb{C}^{2m}$. Logo $[e_1] \in \mathbb{C}P^{2m-1}$ e assim $K \cdot [e_1]$ é uma órbita em $\mathbb{C}P^{2m-1}$ cujo espaço tangente tem dimensão complexa $2m-1$. A partir daí temos

$$T_{[e_1]}(K \cdot [e_1]) = T_{[e_1]}\mathbb{C}P^{2m-1},$$

o que implica que a órbita de K no ponto $[e_1]$ é aberta. Como K é compacto, temos que $K \cdot [e_1]$ também é fechada. Logo, pela conexidade de $\mathbb{C}P^{2m-1}$, temos que $K \cdot [e_1] = \mathbb{C}P^{2m-1}$ e portanto $\text{Sp}(m, \mathbb{C})$ é transitivo em $\mathbb{C}P^{2m-1}$.

Agora vejamos que $\mathbb{C}P^{2m-1}$ é flag de $\text{Sp}(m, \mathbb{C})$. Seja $b_0 = [e_1] \in \mathbb{C}P^{2m-1}$ e denote por $\mathfrak{g}_{b_0} \subset \mathfrak{sp}(m, \mathbb{C})$ a subálgebra de isotropia em b_0 . Tome $X \in \mathfrak{g}_{b_0}$. Como $X \in \mathfrak{sp}(m, \mathbb{C})$ temos que ele é da forma

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^t \end{pmatrix}.$$

com $a_1 > \dots > a_m$. Consideremos $\mu = \mu_1$ e $\xi = \mu_{2m-1}$ pesos máximos da representação de A_{2m-1} . Calculando μ e ξ em elementos H da subálgebra de Cartan de $\mathfrak{sp}(m, \mathbb{C})$, temos:

$$\mu(H) = \mu_1(H) = \lambda_1(H) = a_1$$

e

$$\begin{aligned} \xi(H) = \mu_{2m-1}(H) &= (\lambda_1 + \dots + \lambda_{2m-1})(H) \\ &= a_1 + \dots + a_{m-1} + a_m - a_m - a_{m-1} - \dots - a_2 \\ &= a_1. \end{aligned}$$

Desta forma, $\mu|_{\mathfrak{sp}} = \xi|_{\mathfrak{sp}} = \nu$, onde $\nu = 1 \cdot \nu_1 + 0 \cdot \nu_2 + \dots + 0 \cdot \nu_m$ e $\{\nu_1, \dots, \nu_m\}$ são os pesos fundamentais de C_m . Pelo Lema 4.12 temos que $\mathbb{C}P^{2m-1}$ é o flag $\mathbb{F}_{\Theta(\mu)}$ de $G = \mathrm{Sl}(2m, \mathbb{C})$, onde $\Theta(\mu) = \Sigma_G - \{\alpha_1\}$ e $C_{2m, 2m-1}$ é o flag $\mathbb{F}_{\Theta(\xi)}$ de $\mathrm{Sl}(2m, \mathbb{C})$, onde $\Theta(\xi) = \Sigma_G - \{\alpha_{2m-1}\}$.

Da igualdade de μ e ξ restritos a $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$ temos que esses flags são iguais ao flag $\mathbb{F}_{\Theta_{L_1}}$ de $\mathrm{Sp}(m, \mathbb{C})$ vistos como espaço homogêneo de $\mathrm{Sp}(m, \mathbb{C})$, concluindo a afirmação.

Corolário 4.19. *Seja $G = \mathrm{Sl}(2m, \mathbb{C})$ e $S \subset G$ um semigrupo próprio com $\mathrm{int}(S) \neq \emptyset$, cujo o tipo parabólico $\mathbb{F}(S)$ é $\mathbb{C}P^{2m-1}$ ou a Grassmanniana complexa $C_{2m, 2m-1}$. Considere S_C o semigrupo de compressão do conjunto de controle invariante para a ação de S em $\mathbb{F}(S)$. Então S_C age transitivamente na variedade homogênea $\mathrm{Sl}(2m, \mathbb{C})/\mathrm{Sp}(m, \mathbb{C})$.*

Demonstração: Pelo que vimos acima, $\mathbb{C}P^{2m-1}$ é flag de $\mathrm{Sp}(m, \mathbb{C})$. Logo esse subgrupo tem ação transitiva em $\mathbb{F}(S)$ e admite sequência contractante com respeito a essa variedade. Portanto, pelo Teorema 1.19, temos que o semigrupo de compressão S_C age transitivamente em $\mathrm{Sl}(2m, \mathbb{C})/\mathrm{Sp}(m, \mathbb{C})$. Analogamente temos o resultado se $\mathbb{F}(S) = C_{2m, 2m-1}$. \square

4.10 Conclusões

Como comentamos no início desse trabalho, nossa proposta era encontrar pares (S, L) , com $S \subset G$ um semigrupo de interior não vazio e $L \subset G$ um subgrupo fechado e conexo, tais que a ação de S na variedade homogênea G/L seja transitiva. Podemos concluir a partir dos resultados principais desse capítulo, que essa propriedade é satisfeita para os seguintes pares :

- (S_C, G_2) , onde $G = \mathrm{SO}(7, \mathbb{C})$ e S tem tipo parabólico \mathbb{F}_{Θ} , com $\Theta = \Sigma_G - \{\alpha_1\}$.
- (S_C, B_n) , onde $G = \mathrm{SO}(2n + 2, \mathbb{C})$ e S tem tipo parabólico \mathbb{F}_{Θ} , com $\Theta = \Sigma_G - \{\alpha_n\}$ ou $\Theta = \Sigma_G - \{\alpha_{n+1}\}$.
- $(S_C, \mathrm{Sp}(m, \mathbb{C}))$, onde $G = \mathrm{Sl}(2m, \mathbb{C})$ e S tem tipo parabólico $\mathbb{C}P^{2m-1}$ ou $C_{2m, 2m-1}$.

Lembrando que S_C representa o semigrupo de compressão do conjunto de controle invariante C para a ação do semigrupo S em seu tipo parabólico $\mathbb{F}(S)$.

Além desses casos, dentre os subgrupos maximais contidos nas tabelas 4.1, 4.2 e 4.3, os únicos que podem aparecer são (B_n, ϕ) , com $n \geq 3$, $(B_n \cdot A_1, \phi)$, com $n \geq 2$, e $(B_{n_1} \cdot B_{n_2}, \phi)$, com $n_1, n_2 \geq 1$ e $n_1 + n_2 \geq 4$, sendo todos eles subgrupos de $\text{SO}(N, \mathbb{C})$ para algum N .

Como comentamos no final do terceiro capítulo, qualquer semigrupo cujo tipo parabólico é o flag maximal \mathbb{F} de $\text{Sl}(n, \mathbb{R})$, não pode agir transitivamente em qualquer variedade homogênea $\text{Sl}(n, \mathbb{R})/L$. Mostraremos na próxima seção que essa afirmação também é verdadeira no caso em que G é um grupo de Lie complexo.

4.11 Flag maximal de grupo complexo

Observando as últimas seções podemos perceber que em alguns casos os grupos G e L possuem variedades flags em comum, onde L é subgrupo de G . Mais precisamente, vimos alguns casos em que variedades flags minimais de G são iguais a variedades flags minimais de L . Veremos nessa seção, que isso não pode acontecer para a variedade flag maximal de G . Como consequência disso temos que: “Um semigrupo próprio $S \subset G$ cujo tipo parabólico é o flag maximal \mathbb{F} de G não pode agir transitivamente em qualquer variedade homogênea de G , exceto na trivial”. De fato, se S for transitivo em G/L , pela Proposição 1.21 devemos ter $\mathbb{F}(S) = \mathbb{F}$ flag de L , o que só pode ocorrer se $L = G$, como veremos a seguir.

Proposição 4.20. *Sejam G grupo simples complexo e $L \subset G$ subgrupo próprio semissimples, também complexo. Seja \mathbb{F} o flag maximal de G . Então, \mathbb{F} não é flag de L .*

Antes da demonstração dessa proposição apresentamos a seguir algumas observações sobre a homologia de flags de grupos complexos, os quais utilizamos na demonstração.

Seja \mathbb{F}_Θ um flag de um grupo complexo G e denote por $H_m(\mathbb{F}_\Theta)$ sua m homologia com coeficientes em \mathbb{Z} . Valem as seguintes propriedades:

1. $H_m(\mathbb{F}_\Theta) = \{0\}$ se m é ímpar.
2. Se m é par então $H_m(\mathbb{F}_\Theta) = \mathbb{Z}^{k_m}$ (gerado livremente, sobre \mathbb{Z} , por k_m elementos), onde k_m é o número de células de Bruhat de dimensão real m .
3. Se \mathbb{F}_Θ é o flag maximal de G então k_m é também o número de elementos do grupo de Weyl cuja decomposição minimal (em relação a um sistema simples pré-determinado) tem $m/2$ reflexões simples.
4. No caso em que \mathbb{F}_Θ é o flag maximal de G então $H_2(\mathbb{F}_\Theta) = \mathbb{Z}^p$ onde p é o número de raízes simples, isto é, $p = k_2 = \text{postog}$, onde \mathfrak{g} é a álgebra de Lie de G .
5. Se \mathbb{F}_Θ é um flag parcial de G então $k_2 < \text{postog}$, pois no caso de um flag parcial o número de células de dimensão real 2 é $<$ ao número de raízes simples.
6. Em suma, $k_2 \leq \text{postog}$ e a igualdade só vale no flag maximal.

Lema 4.21. *Sejam G , \mathbb{F} e L como na Proposição 4.20 e denote por \mathfrak{g} e \mathfrak{l} as álgebras de Lie de G e L , respectivamente. Suponha que \mathbb{F} é flag de L , isto é, $\mathbb{F} = \mathbb{F}_{\Theta_L}$ para um flag de L . Então, $\text{posto}(\mathfrak{l}) = \text{posto}(\mathfrak{g})$ e \mathbb{F}_{Θ_L} é o flag maximal também de L .*

Demonstração: Se $\mathbb{F} = \mathbb{F}_{\Theta_L}$ então $H_2(\mathbb{F}_{\Theta_L}) = H_2(\mathbb{F}) = \mathbb{Z}^p$ onde $p = \text{posto}(\mathfrak{g})$. Por outro lado, por 6. temos que $p \leq \text{posto}(l)$ e a igualdade só vale se \mathbb{F}_{Θ_L} for o flag maximal de L . No entanto, como L é subgrupo de G (e l é subálgebra de \mathfrak{g}) vale a desigualdade $\text{posto}(l) \leq \text{posto}(\mathfrak{g}) = p$ (esse é um fato geral que segue da definição de posto de uma álgebra de Lie como sendo a multiplicidade algébrica mínima de $\text{ad}(X)$). Logo, $p = \text{posto}(l)$ e portanto segue que \mathbb{F}_{Θ_L} é o flag maximal de L . \square

Demonstração: Proposição 4.20

A partir do lema anterior, devemos ter L e G com mesmo posto e assim, demonstração é uma questão de olhar caso a caso e verificar que o flag maximal de um grupo ou não tem a mesma topologia que o flag maximal de outro grupo ou, caso tenha a mesma topologia, um dos grupos não é subgrupo do outro.

1. Se o posto é 2 (A_2 , B_2 ou G_2) então os respectivos flag maximais não coincidem. Isso pode ser visto só com dimensão: (i) para A_2 , $\dim = 3$; (ii) para B_2 , $\dim = 4$; (iii) para G_2 , $\dim = 6$.
2. O flag maximal de A_l ou de D_l , $l > 8$, não coincide com o flag maximal de nenhum outro grupo. De fato, as possibilidades seriam B_l , C_l e D_l (as excepcionais caem fora com $l > 8$). Novamente, apenas a dimensão distingue: (i) para A_l , $\dim = l(l+1)/2$; (ii) para B_l e C_l , $\dim = l^2$; (iii) para D_l , $\dim = l(l-1)$. Essas dimensões são todas diferentes.
3. Os casos B_l e C_l têm o mesmo grupo de Weyl, portanto as homologias de seus flags maximais coincidem (em particular, as dimensões também coincidem). O que acontece aqui é que $B_l = \mathfrak{so}(2l+1, \mathbb{C})$ e $C_l = \mathfrak{sp}(l, \mathbb{C})$ tem a mesma dimensão $\dim = l(2l+1)$. Portanto, $\mathfrak{so}(2l+1, \mathbb{C})$ não aparece como subgrupo próprio de $\mathfrak{sp}(l, \mathbb{C})$, ou vice-versa. (Um subgrupo próprio de um grupo de Lie conexo tem dimensão estritamente menor que o grupo.)

Para concluir a demonstração da proposição falta verificar os excepcionais F_4 , E_6 , E_7 e E_8 . Novamente a dimensão resolve. De fato, as dimensões dos flags maxmais (número de raízes positivas) são as seguintes:

- F_4 : $\dim \mathbb{F} = 24$. As possibilidades com posto 4 são: i) A_4 ($\dim \mathbb{F} = 10$); ii) B_4-C_4 ($\dim \mathbb{F} = 16$); iii) D_4 ($\dim \mathbb{F} = 12$). As dimensões são todas diferentes, portanto os flags não coincidem.
- E_6 : $\dim \mathbb{F} = 36$. As possibilidades com posto 6 são: i) A_6 ($\dim \mathbb{F} = 21$); ii) B_6-C_6 ($\dim \mathbb{F} = 36$); iii) D_6 ($\dim \mathbb{F} = 30$). A única possibilidade é que o flag de E_6 coincida com o de B_6 ou C_6 .

No entanto, um não pode aparecer como subgrupo (subálgebra) dos outros pois as dimensões coincidem $\dim E_6 = \dim B_6 = \dim C_6 = 78$

- E_7 : $\dim \mathbb{F} = 63$. As possibilidades com posto 7 são: i) A_7 ($\dim \mathbb{F} = 28$); ii) B_7-C_7 ($\dim \mathbb{F} = 49$); iii) D_7 ($\dim \mathbb{F} = 42$). As dimensões são todas diferentes, portanto os flags não coincidem.
- E_8 : $\dim \mathbb{F} = 120$. As possibilidades com posto 8 são: i) A_8 ($\dim \mathbb{F} = 36$); ii) B_8-C_8 ($\dim \mathbb{F} = 64$); iii) D_8 ($\dim \mathbb{F} = 56$). As dimensões são todas diferentes, portanto os flags não coincidem.

\square

4.12 Grupos complexos e formas reais normais

Suponha que G é um grupo complexo semissimples e L é grupo semissimples real, cuja álgebra de Lie \mathfrak{l} é a forma real normal de seu complexificado. Então nenhum flag de G coincide com um flag de L . Isso porque os flags de G são todos simplesmente conexos, já os de L têm grupo fundamental não trivial, pois todas as raízes de \mathfrak{l} têm multiplicidade 1. (O grupo fundamental dos flags é determinado pelas raízes simples que têm multiplicidade 1.)

4.12.1 Flag complexo de formas reais normais

Um análogo do que foi dito na seção anterior para grupos complexos vale para formas reais normais. A idéia é substituir a homologia $H_2(\mathbb{F}, \mathbb{Z})$ pela primeira homologia com coeficientes em \mathbb{Z}_2 .

Seja \mathbb{F}_Θ um flag de um grupo semissimples qualquer \overline{G} e denote por $H_m(\mathbb{F}_\Theta, \mathbb{Z}_2)$ sua m homologia com coeficientes em \mathbb{Z}_2 . Valem as seguintes propriedades:

1. $H_m(\mathbb{F}_\Theta, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2^{k_m}$ (gerado livremente, sobre \mathbb{Z}_2 , por k_m elementos), onde k_m é o número de células de Bruhat de dimensão m .
2. Suponha que $\overline{\mathfrak{g}}$ é a forma real normal de seu complexificado e \mathbb{F}_Θ é o flag maximal de \overline{G} . Então k_m é também o número de elementos do grupo de Weyl cuja decomposição minimal (em relação a um sistema simples pré-determinado) tem m reflexões simples. (A razão disso é que todo espaço de raízes \mathfrak{g}_α tem dimensão 1.
3. No mesmo caso anterior, $H_2(\mathbb{F}_\Theta, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2^p$ onde p é o número de raízes simples, isto é, $p = k_2 = \text{posto}\overline{\mathfrak{g}}$, onde $\overline{\mathfrak{g}}$ é a álgebra de Lie de \overline{G} .
4. Se \mathbb{F}_Θ é um flag parcial de \overline{G} então $k_2 < \text{posto}\overline{\mathfrak{g}}$, pois no caso de um flag parcial o número de células de dimensão real 2 é $<$ ao número de raízes simples.
5. Em suma, $k_2 \leq \text{posto}\overline{\mathfrak{g}}$ e a igualdade só vale no flag maximal.

Proposição 4.22. *Sejam G grupo simples e $L \subset G$ subgrupo próprio semissimples e suponha que os dois sejam a forma real normal de seus respectivos complexificados. Seja \mathbb{F} o flag maximal de G . Então, \mathbb{F} não é flag de L .*

A demonstração é quase a mesma que para o caso complexo. Como no lema anterior, podemos concluir através de 3. e 5. acima que se L possui um flag igual ao flag maximal de G , então o posto de L é igual ao posto de G e esse flag é o flag maximal de L . Daí a demonstração da proposição segue do fato que se G e L têm o mesmo posto, então não podem ter flags maximais em comum, como foi mostrado para grupos complexos verificando caso a caso.

APÊNDICE A

SUBGRUPOS MAXIMAIS DOS GRUPOS CLÁSSICOS

Nesse apêndice apresentamos um pequeno resumo da parte do trabalho desenvolvido por Dynkin em [2], que será usada em nosso trabalho. No decorrer do texto, R^N denota o espaço complexo N -dimensional, $\mathrm{Sl}(N)$ o grupo de todas as transformações lineares unimodulares de R^N , $\mathrm{O}(N)$ o grupo de todas as transformações unimodulares ortogonais de R^N e $\mathrm{Sp}(N)$ o grupo de todas as transformações simpléticas de R^N . Quanto as tabelas citadas aqui, podem ser encontradas no final do apêndice e suas numerações estão segundo a numeração encontrada no artigo.

Alguns problemas em geometria e álgebra recaem no problema de determinar os subgrupos maximais de grupos de Lie. Dynkin em [2] dá uma completa solução deste problema. Mais precisamente, determina em todos os grupos de Lie aqueles subgrupos maximais que não contém um subgrupo normal não-trivial do grupo (problema de S. Lie). Uma afirmação mais precisa do problema é a seguinte: Seja G um dos grupos clássicos (ou mais geralmente, um grupo de Lie conexo); procuramos subgrupos conexos maximais de G , isto é, para subgrupos conexos, aqueles que **não estão contidos em outro subgrupo próprio conexo de G** . Tal problema é equivalente ao problema de determinar as subálgebras maximais da álgebra de Lie \mathfrak{g} correspondente a G .

Os teoremas abaixo nos fornecem os subgrupos maximais dos grupos clássicos entre os subgrupos redutíveis (isto é, os subgrupos que contém um certo subespaço linear) e entre os subgrupos irredutíveis não-simples (isto é, os subgrupos que contém um subgrupo normal não trivial).

Teorema A.1. (Dynkin Teo 1.1) *Seja \tilde{R} um subespaço arbitrário de R^N , que não seja o espaço nulo ou o espaço todo. Então o grupo de todas as transformações lineares de $\mathrm{Sl}(N)$ que levam \tilde{R} nele mesmo é um subgrupo maximal de $\mathrm{Sl}(N)$, e todos subgrupos maximais redutíveis são descritos por essa construção.*

Teorema A.2. (Dynkin Teo 1.2) *Seja $Q(\xi, \eta)$ uma forma bilinear não degenerada, simétrica ou anti-*

simétrica. Seja \tilde{R} um subespaço arbitrário de R^N , que não seja o espaço nulo ou o espaço todo, satisfazendo uma das duas condições a seguir:

- (a) $Q(\xi, \eta)$ é não degenerada em \tilde{R} , isto é, se para algum $\xi \in \tilde{R}$ e todo $\eta \in \tilde{R}$ temos $Q(\xi, \eta) = 0$, então $\xi = 0$;
- (b) $Q(\xi, \eta)$ é identicamente nula em \tilde{R} .

Então o grupo de todas as transformações com determinante 1 que deixa a forma $Q(\xi, \eta)$ e o subespaço \tilde{R} invariantes é um **subgrupo maximal** de $O(N)$ (se $Q(\xi, \eta)$ é simétrica) ou de $Sp(N)$ (se $Q(\xi, \eta)$ é anti-simétrica). Todos subgrupos maximais redutíveis de $Sp(N)$ e $O(N)$ são descritos por essa construção.

Teorema A.3. (Dynkin Teo 1.3) *O conjunto de matrizes*

$$Sl(s) \times Sl(t) \quad (st = N, 2 \leq s \leq t) \quad (\text{A.1})$$

é um subgrupo maximal de $Sl(N)$. Os subgrupos maximais irredutíveis não simples de $Sl(N)$ são esgotados pelos subgrupos deste tipo (a menos de conjugação).

Teorema A.4. (Dynkin Teo 1.4) *O conjunto de matrizes*

$$Sp(s) \times O(t) \quad (st = N; s \geq 2, t \geq 3, t \neq 4; \text{ ou } s = 2, t = 4) \quad (\text{A.2})$$

é um subgrupo maximal de $Sp(N)$. Todo subgrupo irredutível não simples de $Sp(N)$ é conjugado em $Sp(N)$ a um dos grupos da forma (A.2).

O conjunto de matrizes

$$Sp(s) \times Sp(t) \quad (st = N; 2 \leq s \leq t) \quad (\text{A.3})$$

e

$$O(s) \times O(t) \quad (st = N; 3 \leq s \leq t, s, t \neq 4) \quad (\text{A.4})$$

são subgrupos maximais de $O(N)$. Todo subgrupo irredutível não simples de $O(N)$ é conjugado no grupo de todas as matrizes ortogonais a um dos grupos da forma (A.3) ou (A.4).

O caso que apresenta maior dificuldade é dos subgrupos que estão entre os irredutíveis simples. O próximo teorema garante que um grupo irredutível de matrizes unimodulares não está, como uma regra, contido em qualquer outro grupo de matrizes unimodulares que não seja $Sl(N)$, $Sp(N)$ ou $O(N)$, são raras as exceções. A prova deste teorema será reduzida a uma questão na teoria de representações lineares e será mostrado como obtê-lo dos resultados fundamentais dos capítulos 4, 5, e 6 de [2], que classificam os subgrupos irredutíveis simples dos grupos clássicos.

Teorema A.5. (Dynkin Teo 2.3) *Uma completa classificação de todos os tipos de inclusões $G \subset G^*$, onde G e G^* são grupos irredutíveis de transformações lineares unimodulares e G^* é simples distinto de $Sl(N)$, $Sp(N)$ e $O(N)$, é dado pela Tabela 5. (Para cada tipo $G \subset G^*$ a tabela indica os diagramas pelos quais G e G^* são dados e a dimensão N do espaço no qual esses grupos agem).*

Observação A.6. *Deste fato fundamental segue que quase todo grupo irredutível simples de matrizes unimodulares é maximal em um dos grupos clássicos $Sl(N)$, $Sp(N)$ ou $O(N)$. A descoberta do fato que as duas classes de grupos lineares: “grupos irredutíveis simples” e “subgrupos maximais de um dos grupos clássicos” essencialmente coincidem aparece como o resultado mais importante de [2].*

Esse fato pode ser visto como consequência do próximo teorema, pois a partir de sua demonstração, podemos perceber que os únicos grupos irredutíveis simples que não são maximais em $\mathrm{Sl}(N)$, $\mathrm{Sp}(N)$ ou $\mathrm{O}(N)$ são aqueles que aparecem na Tabela 5 (os que não estão contidos nos grupos clássicos) e na Tabela 1 (os que estão contidos nos grupos clássicos mas não são maximais aí). Essa demonstração está baseada nos resultados obtidos no Teorema A.5.

Teorema A.7. (Dynkin Teo 1.5) *Todo grupo irredutível de transformações lineares unimodulares do espaço N -dimensional \mathbb{R}^N é maximal em $\mathrm{Sl}(N)$ (se ele não tem um invariante bilinear), ou em $\mathrm{Sp}(N)$ (se ele tem um invariante bilinear anti-simétrico), ou em $\mathrm{O}(N)$ (se ele tem um invariante bilinear simétrico). Exceções a esta regra geral são somente quatro séries e 14 subgrupos irredutíveis isolados listados na Tabela 1.*

Observações na formulação do Teorema A.7:

1. As três possibilidades no teorema são mutuamente exclusivas, porque um subgrupo irredutível não pode ter simultaneamente uma forma invariante simétrica e uma anti-simétrica.
2. Os grupos irredutíveis de transformações lineares unimodulares foram classificados por Cartan, mas Dynkin expõe os resultados de Cartan da seguinte maneira: Cada grupo irredutível de transformações lineares unimodulares é semissimples. Cada diagrama de Dynkin está associado a uma série de grupos irredutíveis de transformações lineares (não necessariamente equivalentes). Se para cada pequeno círculo do diagrama um certo número inteiro não negativo é sobescrito, então cada diagrama equipado com marcas numéricas descreve um certo grupo linear irredutível. Assim, uma classificação completa dos grupos unimodulares irredutíveis simples é obtido se marcas numéricas são associadas arbitrariamente a cada um dos esquemas de A_n , B_n , C_n , D_n , E_6 , E_7 , E_8 , F_4 e G_2 .
3. Na Tabela 1 os subgrupos irredutíveis simples que são exceções, isto é, aqueles que não são maximais em um dos grupos $\mathrm{Sl}(N)$, $\mathrm{Sp}(N)$, $\mathrm{O}(N)$, são dados por seus diagramas. Para cada grupo é mostrada a dimensão N do espaço no qual ele age e um número ε o qual é 0 quando G não tem um invariante bilinear, 1 quando G tem um invariante bilinear simétrico e -1 quando G tem um invariante bilinear anti-simétrico.
4. Dessa exposição temos que o Teorema A.7 dá uma completa classificação dos subgrupos maximais irredutíveis simples dos grupos clássicos. Já que todos os grupos irredutíveis simples de transformações lineares são conhecidos (ver item 2.) e já que são conhecidos quais deles não são maximais em um dos grupos $\mathrm{Sl}(N)$, $\mathrm{Sp}(N)$, $\mathrm{O}(N)$ (ver Tabela 1).

A.1 Redução à Teoria de Representações

Pelo que vimos acima, concluímos que a solução do problema de classificação dos subgrupos maximais dos grupos clássicos gira em torno dos Teoremas A.5 e A.7. O Teorema A.7 nos fornece, dentre os subgrupos irredutíveis de grupos clássicos, aqueles que são maximais em cada um deles, enquanto que o Teorema A.5 nos fornece os tipos de inclusões entre os subgrupos irredutíveis e os grupos irredutíveis simples.

A demonstração do Teorema A.5 se reduz a um certo problema na teoria de transformações lineares de grupos de Lie semissimples, a saber, temos o seguinte problema: Para cada grupo de Lie simples G e para cada representação linear ϕ de seus subgrupos H são encontrados aqueles que correspondem, sob ϕ , a um sistema irredutível de matrizes. O resultado a seguir formaliza a redução do problema à teoria de representações lineares.

Teorema A.8. (Dynkin Teo 2.6) *Sejam G e H grupos. Sejam ϕ um isomorfismo de H em G e Φ uma representação linear fiel de G . Ao par (ϕ, Φ) está associado um par de grupos lineares $G_1 = \Phi(G)$, $H_1 = \Phi\phi(H)$ e $G_1 \supset H_1$. Reciprocamente, se $G_1 \supset H_1$ é um par de grupos lineares, com G_1 isomorfo a G e H_1 isomorfo a H , então ϕ e Φ podem ser escolhidas de tal modo que $G_1 = \Phi(G)$ e $H_1 = \Phi\phi(H)$.*

Os grupos G_1, H_1 são irredutíveis se, e somente se, a representação $\Phi\phi$ de H é irredutível.

O teorema a seguir justifica o fato de nos restringirmos ao caso quando o grupo G^* é simples conforme aparece no enunciado do Teorema A.5.

Teorema A.9. (Dynkin Teo 2.2) *Seja*

$$G^* = G_1^* \times G_2^* \times \dots \times G_k^*,$$

onde $G_1^, G_2^*, \dots, G_k^*$ são grupos irredutíveis simples de matrizes unimodulares. Todo subgrupo irredutível G de G^* pode ser representado na forma*

$$G = G_1 \times G_2 \times \dots \times G_k,$$

onde G_1, G_2, \dots, G_k são grupos irredutíveis e $G_i \subseteq G_i^$.*

O Teorema A.10 mostra que para a solução do problema é suficiente encontrar, para cada grupo de Lie simples G e para cada representação linear fiel Φ de G , todos os subgrupos H de G que são irredutíveis com respeito a Φ .

Teorema A.10. (Dynkin Teo 2.5) *Seja G um grupo. Para todo subgrupo H e toda representação fiel Φ de G corresponde um par de grupos lineares $G_1 = \Phi(G)$, $H_1 = \Phi(H)$, onde $H_1 \subset G_1$ e G_1 é isomorfo a G . Reciprocamente, para todo par de grupos lineares $H_1 \subset G_1$, onde G_1 é isomorfo a G , um subgrupo H e uma representação fiel Φ de G podem ser escolhidos de tal modo que $G_1 = \Phi(G)$, $H_1 = \Phi(H)$.*

Para que os grupos G_1, H_1 sejam irredutíveis é necessário e suficiente que H seja irredutível com respeito a Φ .

A partir desses dois últimos resultados, encontramos os subgrupos irredutíveis H de G , ou seja, as inclusões do tipo $H \subset G$ (na notação do Teorema A.5, $G \subset G^*$), com H e G irredutíveis e além disso, G simples.

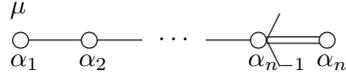
Nos últimos capítulos de [2], Dynkin estuda principalmente o caso quando o grupo G^* do enunciado do Teorema A.5 é do tipo A_n , B_n , C_n e D_n , isto é, quando ele é isomorfo a um dos grupos clássicos. A demonstração de A.5 para os grupos clássicos é feita a partir dos resultados desses capítulos. Nesses casos o Teorema A.8 é particularmente conveniente para aplicar, porque um isomorfismo ϕ de um grupo H em um grupo clássico G pode ser considerado como uma representação linear. A formulação do Teorema A.8 mostra que para a solução de nosso problema é suficiente encontrar, para cada um dos grupos clássicos G e para cada grupo semissimples H , todos os pares (ϕ, Φ) , para o qual $\Phi\phi$ é uma representação irredutível de H (onde ϕ é uma representação de H em G e Φ uma representação linear de G).

Desta forma, o Teorema A.8 garante que estaremos classificando os subgrupos irredutíveis de transformações lineares unimodulares H de G , onde G representa o grupo $Sl(N)$, $Sp(N)$ ou $O(N)$, resolvendo assim o problema enunciado no Teorema A.5 para os casos clássicos. Tal problema formulado para os grupos clássicos é resolvido pelos teoremas 4.1, 5.1 e 6.1-6.3 de [2] que apresentamos na próxima seção. É suficiente transferir os teoremas indicados para a linguagem de inclusões entre subgrupos para se obter aquela parte da Tabela 5 (Teo. 2.3 Dynkin) a qual corresponde ao caso de um grupo clássico G^* . Quanto ao caso quando G^* é um grupo do tipo excepcional, a parte correspondendo a da Tabela 5 é obtida usando resultados de Dynkin sobre os grupos excepcionais, o qual é exposto em outro artigo.

Baseados na conclusão estabelecida acima, apresentamos a seguir os principais resultados dos capítulos 4,5 e 6 de [2], onde Dynkin classifica os subgrupos irredutíveis simples dos grupos $Sl(N)$, $Sp(N)$ e $O(N)$.

A.2 $Sl(N)$

Teorema A.11. (Dynkin Teo. 4.1) *Toda representação não trivial Φ do grupo $Sl(N, \mathbb{C})$ que é irredutível com respeito a algum subgrupo H ou é uma alternância (π_k) ou uma simetrização $\pi_1^{<k>}$ ou $\pi_1^{<k>}$ das representações fundamentais π_1, π^1 de $Sl(N, \mathbb{C})$. O subgrupo simplético $Sp(n)$ definido pelo esquema C_n*



é irredutível com respeito as simetrizações de todas as ordens. Com respeito a qualquer outro subgrupo as simetrizações de todas as ordens $k \geq 2$ são redutíveis. A completa classificação de todos os casos nos quais H é irredutível com respeito a π_k ($1 < k \leq N/2$) é dada pelos esquemas 1)-6) da Tabela 6 (O esquema 7) nos dá o grupo todo).

Observação A.12. *Seja f um automorfismo de $Sl(N, \mathbb{C})$ que permuta as raízes simples. Como $(\pi_k)_f = \pi_{N-k}$ é suficiente classificar os casos de irredutibilidade com respeito a π_k para $k \leq N/2$.*

A.3 $Sp(N)$

Teorema A.13. (Dynkin Teo. 5.1) *Seja Φ uma representação do grupo $Sp(N, \mathbb{C})$, irredutível com respeito a algum subgrupo próprio H . Então Φ é uma das representações básicas de $Sp(N, \mathbb{C})$. Uma completa classificação de todos os casos de H -irredutíveis representações básicas ρ_k ($1 < k \leq N(\phi)/2$) é dada na Tabela 11.*

A.4 $O(N)$

Teorema A.14. (Dynkin Teo. 6.1) *Seja H um subgrupo próprio de B_n ($n \geq 3$) ($So(2n + 1, \mathbb{C})$). Uma representação arbitrária Φ de B_n diferente da representação fundamental τ_1 é redutível com respeito a H . As únicas exceções são as representações $\tau_1^{<k>}$ ($k = 2, 3, 4, \dots$) de B_3 as quais são irredutíveis com respeito a um subgrupo de tipo G_2 (Tabela 15).*

Teorema A.15. (Dynkin Teo. 6.2) *Seja H um subgrupo de D_n ($n \geq 5$) ($So(2n, \mathbb{C})$) e Φ uma representação de D_n diferente da representação fundamental τ_1 . Uma completa lista dos casos em que Φ é irredutível com respeito a H é dada na Tabela 16.*

Teorema A.16. (Dynkin Teo. 6.3) *No grupo D_4 existem ao todo quatro classes de subgrupos que são isomorfos em D_4 e irredutíveis com respeito a toda representação de D_4 . Essas classes de subgrupos são dos seguintes tipos dados na Tabela 17.*

Table 1

Type of the group \mathfrak{G}	Scheme of \mathfrak{G}	N	ϵ
$(A_n)_1$ $n > 3$		$3 \binom{n+2}{4}$	0
$(A_n)_2$ $n \geq 2$		$3 \binom{n+3}{4}$	0
$(B_{2n+1})_k$ $n \geq 1$ $k \geq 1$		$\prod_{s=1}^{2n} \frac{\binom{k+2s-1}{k}}{\binom{k+s}{k}}$	$(-1)^{(n+1)k}$
$(\mathfrak{G}_2)_k$ $k > 1$		$\frac{2k+5}{5} \binom{k+4}{4}$	1
(A_1)		7	1
$(A_5)_3$		189	1
(B_4)		128	1
$(C_3)_1$		90	1
$(C_3)_2$		350	-1
(D_5)		560	0
$(D_6)_1$		495	1
$(D_6)_2$		4928	0
$(E_6)_1$		351	0
$(E_6)_2$		17550	0
$(E_7)_1$		1539	1
$(E_7)_2$		27664	-1
$(E_7)_3$		365 750	1
$(E_7)_4$		3 792 096	-1

Table 5

No.	Inclusion type $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{G}^*$	Scheme of \mathfrak{G}	Scheme of \mathfrak{G}^*	N
I_1	$(C_n \subset A_{2n-1})_k$ $n \geq 2$ $k \geq 2$			$\binom{2n-1+k}{k}$
I_2	$(B_n \subset A_{2n})_k$ $n \geq 2$ $n > k \geq 2$			$\binom{2n+1}{k}$
I_3	$(B_n \subset A_{2n})_n$ $n \geq 2$			$\binom{2n+1}{n}$
I_4	$(D_n \subset A_{2n-1})_k$ $n \geq 4$ $n-1 > k \geq 2$			$\binom{2n}{k}$
I_5	$(D_n \subset A_{2n-1})_{n-1}$ $n \geq 4$			$\binom{2n}{n-1}$
I_6	$(A_n \subset A_{\frac{(n-1)(n+2)}{2}})$ $n \geq 3$			$\frac{1}{8}(n-1)n(n+1)(n+2)$
I_7	$(A_n \subset A_{\frac{n(n+3)}{2}})$ $n \geq 2$			$\frac{1}{8}n(n+1)(n+2)(n+3)$
I_8	$(D_5 \subset A_{15})_1$			120
I_9	$(D_5 \subset A_{15})_2$			560
I_{10}	$(E_6 \subset A_{26})_1$			351
I_{11}	$(E_6 \subset A_{26})_2$			2925
I_{12}	$(E_6 \subset A_{26})_3$			17550
II_1	$(A_5 \subset C_{10})$			189
II_2	$(C_3 \subset C_7)_1$			90
II_3	$(C_3 \subset C_7)_2$			350
II_4	$(D_6 \subset C_{16})_1$			495
II_5	$(D_6 \subset C_{16})_2$			4928
II_6	$(E_7 \subset C_{28})_1$			1539
II_7	$(E_7 \subset C_{28})_2$			27664

Table 5 (continued)

No.	Inclusion type $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{G}^*$	Scheme of \mathfrak{G}	Scheme of \mathfrak{G}^*	N
II_8	$(E_7 \subset C_{28})_3$			365750
II_9	$(E_7 \subset C_{28})_4$			3792096
III_1	$(\mathfrak{G}_2 \subset B_3)_k \quad k \geq 2$			$\frac{2k+5}{5} \binom{k+4}{4}$
IV_1	$(B_n \subset D_{n+1})_k \quad \begin{matrix} n \geq 3 \\ k \geq 2 \end{matrix}$			$\prod_{s=1}^{n-1} \binom{k+2s-1}{k}$
IV_2	$(B_{n_1} \cdot B_{n_2} \subset D_{n_1+n_2+1}) \quad \begin{matrix} n_1 \geq 1 \\ n_2 \geq 1 \\ n_1+n_2 \geq 4 \end{matrix}$			$2^{n_1+n_2}$
IV_3	$(B_n \cdot A_1 \subset D_{n+3}) \quad n \geq 2$			2^{n+2}
IV_4	$(B_2 \subset D_5)$			2^4
IV_5	$(A_1 \cdot A_1 \subset D_5)$			2^4
IV_6	$(B_2 \subset D_7)$			2^6
IV_7	$(\mathfrak{G}_2 \subset D_7)$			2^6
IV_8	$(C_3 \subset D_7)$			2^6
IV_9	$(B_4 \subset D_8)$			2^7
IV_{10}	$(F_4 \subset D_{13})$			2^{12}
V_1	$(A_1 \subset \mathfrak{G}_2)$			7
VI_1	$(A_2 \subset E_6)$			27
VI_2	$(\mathfrak{G}_2 \subset E_6)$			27
VI_3	$(C_4 \subset E_6)$			27

Table 6

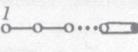
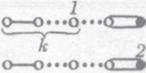
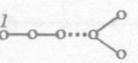
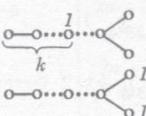
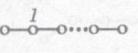
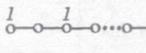
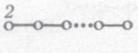
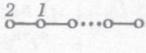
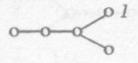
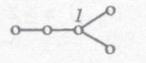
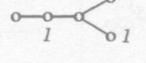
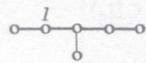
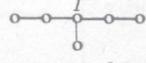
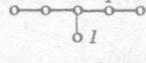
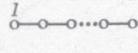
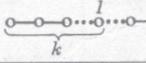
No.	\mathcal{G}	ϕ	$N(\phi)$	k	$\phi^{\{k\}}$	$N(\phi^{\{k\}})$
1)	B_n $n \geq 2$		$2n + 1$	$2, 3, \dots, n-1$ n		$\left. \begin{matrix} \\ \\ \end{matrix} \right\} \binom{2n+1}{k}$
2)	D_n $n \geq 3$		$2n$	$2, 3, \dots, n-2$ $n-1$		$\left. \begin{matrix} \\ \\ \end{matrix} \right\} \binom{2n}{k}$
3)	A_n $n \geq 3$		$\frac{1}{2}n(n+1)$	2		$3 \binom{n+2}{4}$
4)	A_n $n \geq 2$		$\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$	2		$3 \binom{n+3}{4}$
5)	D_5		16	2		120
				3		560
6)	E_6		27	2		351
				3		2925
				4		17550
7)	A_n		$n + 1$	$2, 3, \dots, \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$		$\binom{n+1}{k}$

Table 11

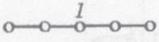
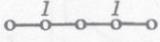
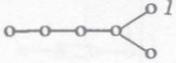
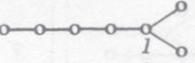
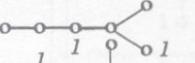
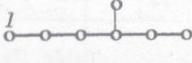
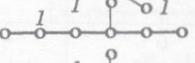
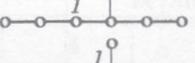
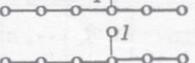
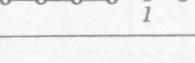
No.	\mathcal{G}	ϕ	$N(\phi)$	k	$\rho_k \phi$	$N(\rho_k \phi)$
1)	A_1		4	2		5
2)	A_5		20^n	2		189
3)	C_3		14	2		90
				3		350
4)	D_6		32	2		495
				3		4928
5)	E_7		56	2		1539
				3		27664
				4		365750
				5		3792096

Table 15

\mathcal{G}	ϕ	$N(\phi)$	Φ	$\Phi\phi$	$N(\Phi) = N(\Phi\phi)$
\mathcal{G}_2		6	$\tau_1^{<k>}$ $k = 2, 3, 4, \dots$		$\frac{2k+5}{5} \binom{k+4}{4}$

Table 16

No.	\mathfrak{G}	ϕ	$N(\phi)$	Φ	$\Phi\phi$	$N(\Phi) = N(\Phi\phi)$
1)	B_2		10	$\left. \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{matrix} \right\}$		2^4
2)	$A_1 \cdot A_1$		10	$\left. \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{matrix} \right\}$		2^4
3)	B_2		14	$\left. \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{matrix} \right\}$		2^6
4)	\mathfrak{G}_2		14	$\left. \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{matrix} \right\}$		2^6
5)	C_3		14	$\left. \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{matrix} \right\}$		2^6
6)	B_4		16	σ_1		2^7
7)	F_4		26	$\left. \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{matrix} \right\}$		2^{12}
8)	B_n $n \geq 4$		$2(n+1)$	$\left. \begin{matrix} \sigma_1^{<k>} \\ \sigma_2^{<k>} \end{matrix} \right\}$		$\prod_{s=1}^{n-1} \binom{k+2s-1}{k}$
9)	$B_{n_1} \cdot B_{n_2}$ $n_1 \geq 1, n_2 \geq 1$ $n_1 + n_2 \geq 4$		$2(n_1 + n_2 + 1)$	$\left. \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{matrix} \right\}$		$2^{n_1 + n_2}$
10)	$B_n \cdot A_1$ $n \geq 2$		$2(n+3)$	$\left. \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{matrix} \right\}$		2^{n+2}

Table 17

No.	\mathfrak{G}	$\sigma_1\phi$	$\sigma_2\phi$	$\sigma_3\phi$	$\sigma_2^{<k>\phi} \sim \sigma_3^{<k>\phi}$	$N(\sigma_2^{<k>\phi}) = N(\sigma_3^{<k>\phi})$
1)	B_3					$\frac{k+3}{3} \binom{k+5}{5}$
2)	$A_1 \cdot A_1$					
3)	$B_2 \cdot A_1$					
4)	A_2					

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] W.M. BOOTHBY E E.N. WILSON. *Determination of the transitivity of bilinear systems*. SIAM J. Control and Optimization, Vol.17, No.2, (1979), 212-221.
- [2] E.B. DYNKIN. *The Maximal Subgroups of the Classical Groups*. Amer. Math. Soc. Transl., Série 2, Vol. 6, (1957), 245-378.
- [3] A.L. ONIŠČIK. *Transitive Compact Transformation Groups*. American Math. Society Translation, No.55, (1963), 153-194.
- [4] A.L. ONIŠČIK. *On Lie Groups Transitive on Compact Manifolds*. American Math. Society Translation, No.73, (1966), 59-72.
- [5] A.L. ONIŠČIK. *On Lie Groups Transitive on Compact Manifolds II*. Math. USSR - Sbornik, Vol.3, No.3, (1967), 373-388.
- [6] A.L. ONIŠČIK. *On Lie Groups, Transitive on Compact Manifolds III*. Math. USSR - Sbornik, Vol.4, No.2, (1968), 233-240.
- [7] A.L. ONIŠČIK. *Lie Groups Transitive on Grassmann and Stiefel Manifolds*. Math. USSR - Sbornik, Vol.12, No.3, (1970), 405-427.
- [8] L. RABELO E L.A.B. SAN MARTIN. *Cellular Homology of Real Flag Manifolds*. Submetido.
- [9] O.G. DO ROCIO, L.A.B. SAN MARTIN E A.J. SANTANA. *Invariant cones and convex sets for bilinear control systems and parabolic type of semigroups*. J. Dynam. Control Systems, Vol. 12, No.3, (2006), 419-432.
- [10] L.A.B. SAN MARTIN. *On global controllability of discrete-time control systems*. Math. Control Signals Systems 8 (1995), 279-297.

- [11] L.A.B. SAN MARTIN. *Homogeneous Spaces Admitting Transitive Semigroups*. Journal of Lie Theory Vol.8 (1998), 111-128.vol. 8
- [12] L.A.B. SAN MARTIN. *Álgebras de Lie*. Editora da Unicamp (1999).
- [13] L.A.B. SAN MARTIN. *Maximal semigroups in semi-simple Lie groups*. Trans. Amer. Math. Soc. **353** (2001), 5165-5184.
- [14] L.A.B. SAN MARTIN. *A family of maximal noncontrollable Lie wedges with empty interior*. Systems & Control Letters **43** (2001), 53-57.
- [15] L.A.B. SAN MARTIN E P.A. TONELLI, *Semigroup actions on homogeneous spaces*. Semigroup Forum **50** (1995), 59-88.
- [16] L.A.B. SAN MARTIN E P.A. TONELLI. *Transitive actions of semigroups in semi-simple Lie groups*. Semigroup Forum **58** (1999), 142-151.
- [17] F. ZILLMER. *Conjuntos Controláveis para a ação de semigrupos em variedades homogêneas*. Dissertação (2003).