

SOBRE OS ESPAÇOS H^1 E BMO

CARMEM SUZANE COMITRE GIMENEZ

Orientador

Prof. Dr. Benjamin Bordin

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Junho - 1983 -

Ao Tide e Anita.

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

MEUS AGRADEDIMENTOS

- Aos professores Bordin e Dicesar pela disponibilidade e paciência, desempenhando uma orientação segura e objetiva.
- Ao CNPq pela ajuda financeira.
- Aos professores, funcionários e alunos da EEPSP João de Moraes Gões - Piracaia - SP, pelo carinho e estímulo durante o tempo que lá estive.
- À Universidade Federal de Santa Catarina, em especial à Jane, Maria Helena e Neri, sempre dispostas a me cederem o tempo necessário para a conclusão deste trabalho.
- À Nativi, pelo precioso auxílio de alguns trabalhos.
- Ao Daniel e Eurípedes, pela sugestão do primeiro passo.
- À "Turma do Palitinho" e ao café do "seu" João, por tornar a permanência na UNICAMP menos árida e bem mais divertida.
- Ao Waldir, Joana, Rê, Albertina e Robert, pelo carinho e hospitalidade.
- Ao prof. Marcus, em especial, pelo estímulo, ajuda e confiança.
- À todos os amigos que ouviram com paciência (e mais de uma vez) o "romance" deste trabalho.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO	i
CAPÍTULO I - OS ESPAÇOS DE HARDY $H^1(\mathbb{R}_+^2)$	1
1.1. Os Espaços $H^1(\mathbb{R}_+^2)$ Analíticos	1
1.2. Os Espaços $H^1(\mathbb{R}_+^2)$ Definidos Através da Transfor- mada de Hilbert	17
CAPÍTULO II - O ESPAÇO BMO	23
2.1. O Espaço BMO	23
2.2. O Teorema de John-Nirenberg	33
2.3. Integrais Singulares e Espaços BMO	57
CAPÍTULO III - O TEOREMA DA DUALIDADE	67
3.1. Um Teorema de Densidade	66
3.2. O Teorema da Dualidade	75
CAPÍTULO IV - OS ESPAÇOS DE HARDY $H^1(\mathbb{R})$ ATÔMICOS	95
4.1. Os Espaços de Hardy $H_{\text{ATOM}}^{1,2}(\mathbb{R})$	94
4.2. A Dualidade $H_{\text{ATOM}}^{1,2}$ - BMO	106
4.3. Decomposição Atômica dos Espaços H_{Hb}^1	116
APÊNDICE	121
BIBLIOGRAFIA	133

INTRODUÇÃO

O objetivo geral deste trabalho é fazer um estudo dos espaços H^1 de Hardy e dos espaços BMO, relacionando-os num teorema de dualidade. No capítulo I são dadas duas caracterizações dos espaços H^1 de Hardy: os H^1 analíticos e os H^1 definidos via transformada de Hilbert. No capítulo II são estudados os espaços BMO, destacando-se como resultado importante o Teorema de John-Nirenberg. São também estudadas certas relações entre integrais singulares e espaços BMO. O capítulo III é dedicado ao teorema da dualidade H^1 -BMO, sendo feito de início um teorema de densidade que será de importância no decorrer do capítulo. No capítulo IV é dada uma outra caracterização dos espaços H^1 de Hardy, os H^1 atômicos, e uma outra demonstração da dualidade H^1 -BMO segundo esta caracterização.

CAPÍTULO I

OS ESPAÇOS DE HARDY $H^1(\mathbb{R}_+^2)$

Neste capítulo introduziremos duas definições de espaços de Hardy H^1 , a saber, os espaços H^1 analíticos e os espaços H^1 definidos via transformada de Hilbert. Nosso objetivo principal será demonstrar a equivalência das duas definições. A inspiração aqui será tomado de Stein [].

1.1. OS ESPAÇOS $H^1(\mathbb{R}_+^2)$ ANALÍTICOS.

1.1.1. DEFINIÇÃO. O espaço vetorial dos campos de vetores reais $F = (u, v)$ sobre $\mathbb{R}_+^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, tais que

(1) u e v satisfazem as equações de Cauchy-Riemann

e

$$(2) \sup_{t>0} \int_{\mathbb{R}} |F(x, t)| dx < \infty \quad (|F|^2 = |u|^2 + |v|^2),$$

chamaremos de espaço H^1 analítico e denotaremos por H_{ANAL}^1 . Equiparemos H_{ANAL}^1 com a norma:

$$(3) \|F\|_{H_{\text{ANAL}}^1} = \sup_{t>0} \|F(\cdot, t)\|_1$$

1.1.2. DEFINIÇÃO. Seja $F=(u,v)$ um campo vetorial sobre $\mathbb{R}_+^2$. Definimos a função maximal F^* de F por

$$(1) \quad F^*(x) = \sup_{t>0} |F(x,t)| = \sup_{t>0} \sqrt{|u(x,t)|^2 + |v(x,t)|^2}$$

1.1.3. TEOREMA. Para todo $F \in H_{ANAL}^1$, existem constantes positivas A e B tais que

$$(1) \quad A \|F\|_{H_{ANAL}^1} \leq \|F^*\|_{L^1} \leq B \|F\|_{H_{ANAL}^1}.$$

isto é, $\|F^*\|_{L^1}$ define uma norma equivalente em H^1 .

Mais ainda

$$(2) \quad \lim_{t \rightarrow 0} F(x,t) = F(x)$$

existe em quase toda parte e em norma L^1 .

DEMONSTRAÇÃO.(1). A primeira desigualdade em (1) é óbvia. Agora, sendo $F(u,v) \in H_{ANAL}^1$, vamos admitir por razões técnicas que u e v assumam valores no espaço $V^1 = \{(x,0,0) | x \in \mathbb{R}\}$ ($V^1 \approx \mathbb{R}$), isto é

$$u : \mathbb{R}_+^2 \longrightarrow V^1$$

$$v : \mathbb{R}_+^2 \longrightarrow V^1$$

Consideremos $V^2 = \{(0, y, z) / y, z\} \in \mathbb{R}$ e seja $V = V^1 \oplus V^2$ a soma direta de V^1 e V^2 . (V^1 e V^2 são complementares ortogonais em V).

Inicialmente definimos a função H por:

$$H(x, t) = \log\left(\frac{1}{x^2 + (t+1)^2}\right)^{1/2}.$$

Verifiquemos que H é harmônica para $(x, t) \in \mathbb{R}_+^2$:

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{-x}{x^2 + (t+1)^2} ; \quad \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \frac{x^2 - (t+1)^2}{[x^2 + (t+1)^2]^2}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{-(t+1)}{x^2 + (t+1)^2} ; \quad \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = \frac{(t+1) - x^2}{[x^2 + (t+1)^2]^2}$$

Assim:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = 0$$

Definimos agora

$$g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow V^2$$

e

$$h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow V^2$$

por:

$$g(x,t) = \left(\frac{\partial^2 H}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial t} \right)$$

e

$$h(x,t) = \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial t}, \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \right).$$

As funções g e h satisfazem as equações de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x} = \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \right), \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \right) \right] = (0,0)$$

e

$$\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial h}{\partial t} = \left(\frac{\partial^3 H}{\partial x \partial t^2} - \frac{\partial^3 H}{\partial x \partial t^2}, \frac{\partial^3 H}{\partial x^2 \partial t} - \frac{\partial^3 H}{\partial t \partial x^2} \right) = (0,0).$$

Seja $G(x,t) = (g,h)$ definida em $\mathbb{R}_+^2$ com valores em V^4 . Então, vemos que G satisfaz as equações de Cauchy-Riemann e verifica

$$(3) \quad |G(x,t)|^2 = 2/[x^2 + (t+1)^2]^2$$

Com efeito, a verificação de que G satisfaz as equações de Cauchy-Riemann é clara e quanto a (3) vamos ter

$$\begin{aligned}
 |G(x,t)|^2 &= |(g,h)|^2 = |g|^2 + |h|^2 = \\
 &= \left| \left(\frac{\partial^2 H}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial t} \right) \right|^2 + \left| \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial t}, \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \right) \right|^2 \\
 &= \left(\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \right)^2 \\
 &= \left\{ \frac{(t+1)^2 - x^2}{[x^2 + (t+1)^2]^2} \right\}^2 + 2 \left\{ \frac{2x(t+1)}{[x^2 + (t+1)^2]^2} \right\}^2 + \\
 &+ \left\{ \frac{x^2 - (t+1)^2}{[x^2 + (t+1)^2]^2} \right\}^2 = \frac{2[x^2 + (t+1)^2]^2}{\{[x^2 + (t+1)^2]\}^2} = \\
 &= 2/[x^2 + (t+1)^2]^2
 \end{aligned}$$

Estamos agora em condições de demonstrar que

$$\lim_{(x,t) \rightarrow \infty} |u(x,t)| = 0$$

e

$$\lim_{(x,t) \rightarrow \infty} |v(x,t)| = 0$$

De fato; temos

$$|g(x,t)| \leq |G(x,t)| = \sqrt{2} / [x^2 + (t+1)^2]$$

$$|h(x,t)| \leq |G(x,t)| = \sqrt{2} / [x^2 + (t+1)^2]$$

e assim

$$\lim_{(x,t) \rightarrow \infty} |g(x,t)| = 0$$

e

$$\lim_{(x,t) \rightarrow \infty} |h(x,t)| = 0$$

Para cada $\varepsilon > 0$, seja

$$(4) \quad F_{\varepsilon}(x,t) = F(x,t+\varepsilon) + \varepsilon G(x,t)$$

Fazendo

$$u_{\varepsilon}(x,t) = u(x,t+\varepsilon) + \varepsilon g(x,t)$$

$$v_{\varepsilon}(x,t) = v(x,t+\varepsilon) + \varepsilon h(x,t)$$

temos que u^{ε} e v^{ε} são contínuas em $\overline{\mathbb{R}_+^2}$.

Como $F = (u,v) \in H_{\text{ANAL}}^1$, temos também:

$$\sup_{t>0} \int |F(x,t)| dx < \infty$$

Logo:

$$\sup_{t>0} \int |u(x,t)| dx < \infty$$

e

$$\sup_{t>0} \int |v(x,t)| dx < \infty$$

Desta forma, u e v satisfazem as hipóteses do lema 7 (Apêndice) e temos que existem medidas de Borel finitas μ_1 e μ_2 tais que:

$$u(x,t) = \int P_t(x-x') d\mu_1(x')$$

e

$$v(x,t) = \int P_t(x-x') d\mu_2(x')$$

Concluimos então que

$$\lim_{|(x,t)| \rightarrow \infty} |u(x,t+\varepsilon)| = 0$$

$$\lim_{|(x,t)| \rightarrow \infty} |v(x,t+\varepsilon)| = 0$$

De fato: supondo que $d\mu_1 \geq 0$ e $d\mu_2 \geq 0$, pois do contrário, dividiremos $d\mu_1$ e $d\mu_2$ nas suas partes positiva e negativa, provemos inicialmente que:

(a) para todo $\delta > 0$ existe $M_1 > 0$ tal que para t com $|t| \geq M_1$, vale:

$$|u(x, t+\varepsilon)| < \delta \text{ e } |v(x, t+\varepsilon)| < \delta, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

De fato:

$$\begin{aligned} |u(x, t+\varepsilon)| &\leq \int |P_{t+\varepsilon}(x-x')| d\mu_1(x') \\ &= C_1 \int \frac{t+\varepsilon}{(t+\varepsilon)^2 + (x-x')^2} d\mu_1(x') \\ &\leq C_1 \int \frac{t+\varepsilon}{(t+\varepsilon)^2} d\mu_1(x') \\ &= C_1 \mu_1(\mathbb{R}) (t+\varepsilon)^{-1} \end{aligned}$$

Como $\lim_{t \rightarrow \infty} (t+\varepsilon)^{-1} = 0$, teremos que dado $\delta > 0$, existe $M_1 > 0$

tal que para t com $|t| \geq M_1$, vale

$$|u(x, t+\varepsilon)| < \delta.$$

Analogamente verificamos a desigualdade para v .

Agora,

(b) se t verifica $|t| < M_1$ veremos que $|u(x, t+\epsilon)| < \delta$ também é verificada desde que $|x|$ seja suficientemente grande. Faremos isto por etapas. Como

$$\int P_{t+\epsilon}(x-x') d\mu_1(x') < \infty$$

temos que existe $R > 0$ tal que

$$\int_{Q_R^c} P_{t+\epsilon}(x-x') d\mu_1(x') < \delta/2$$

onde $Q_R = (-R, R)$ e $Q_R^c = \mathbb{R} - Q_R$. Assim

$$|u(x, t+\epsilon)| < \delta/2 + \int_{-R}^R P_{t+\epsilon}(x-x') d\mu_1(x')$$

Estimemos a segunda integral. Vamos mostrar que existe $M_2 > 0$ tal que, se $|x| \geq M_2$, então

$$\int_{-R}^R P_{t+\epsilon}(x-x') d\mu_1(x') < \delta/2$$

Consideremos inicialmente $|x| > R$. Como a integral é sobre $(-R, R)$, então $|x'| < R$ e teremos:

$$|x| - R < |x| - |x'| \leq |x - x'|$$

Logo,

$$|x - x'|^2 < (|x| - R)^{-2}$$

e assim

$$\begin{aligned} \int_{-R}^R P_{t+\varepsilon}(x-x') d\mu_1(x') &< C_1(t+\varepsilon) (|x| - R)^2 \mu_1(\mathbb{R}) \\ &< C_1(M_1 + \varepsilon) \mu_1(\mathbb{R}) (|x| - R)^{-2} \end{aligned}$$

desde que $|t| < M_1$.

Como $\lim_{|x| \rightarrow \infty} (|x| - R)^{-2} = 0$, temos que dado $\delta > 0$, existe $M' > 0$ tal que, se $|x| \geq M'$, então

$$C_1(M_1 + \varepsilon) \mu_1(\mathbb{R}) (|x| - R)^{-2} < \delta/2.$$

Considerando $M_2 = \max\{R, M'\}$, teremos para $|x| \geq M_2$,

$$\int_{-R}^R P_{t+\varepsilon}(x-x') d\mu_1(x') < \delta/2$$

Assim, de (a) e (b) concluímos que

$$\lim_{|(x,t)| \rightarrow \infty} |u(x,t+\varepsilon)| = 0$$

e analogamente, para v

$$\lim_{|(x,t)| \rightarrow \infty} |v(x,t + \varepsilon)| = 0$$

Desta forma, $F_\varepsilon(x,t) = (u^\varepsilon, v^\varepsilon)$ se anula no infinito e é contínua em $\overline{\mathbb{R}_+^2}$. Também

$$\begin{aligned} |F_\varepsilon(x,t)|^2 &= |u^\varepsilon|^2 + |v^\varepsilon|^2 = |u + \varepsilon g|^2 + |v + \varepsilon h|^2 = \\ &= |u|^2 + \varepsilon^2 |g|^2 + 2\varepsilon u \cdot g + |v|^2 + \varepsilon^2 |h|^2 + 2\varepsilon v \cdot h = \\ &= |u|^2 + |v|^2 + \varepsilon^2 (|g|^2 + |h|^2) \end{aligned}$$

uma vez que u e v tomam valores em V^1 e g e h tomam valores em V^2 , com V^1 e V^2 complementares ortogonais em V .

Assim,

$$(5) \quad |F_\varepsilon(x,t)|^2 = |F(x,t + \varepsilon)|^2 + \varepsilon^2 |G(x,t)|^2$$

e por (3) temos que $|F_\varepsilon|^2 > 0$ em $\overline{\mathbb{R}_+^2}$. Desde que $F_\varepsilon(x,t) = (u^\varepsilon, v^\varepsilon)$ satisfaz as equações de Cauchy-Riemann e $|F_\varepsilon| > 0$, temos que existe $0 < q < 1$ tal que $|F_\varepsilon|^q$ é subharmônica.

Definimos agora a seguinte função auxiliar

$$f_\varepsilon(x) = |F_\varepsilon(x,0)|^q$$

Assim,

$$f_{\varepsilon}(x) = (|F_{\varepsilon}(x,0)|^2)^{q/2} = (|F(x,\varepsilon)|^2 + \varepsilon^2 |G(x,0)|^2)^{q/2}$$

Tomando $p = 1/q$ (portanto $p > 1$) temos:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |f_{\varepsilon}(x)|^p dx &= \int_{\mathbb{R}} [|F(x,\varepsilon)|^2 + \varepsilon^2 |G(x,0)|^2]^{1/2} dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} |F(x,\varepsilon)| dx + \varepsilon \int_{\mathbb{R}} |G(x,0)| dx \end{aligned}$$

Agora, como

$$\int_{\mathbb{R}} |G(x,0)| dx \leq \sqrt{2} \int \frac{dx}{x^2+1} dx < \infty,$$

segue que $f_{\varepsilon} \in L^p(\mathbb{R})$ com $p > 1$ e também

$$\|f\|_p^p \leq \|F\|_{H_{ANAL}^1}^1 + \varepsilon \|G(\cdot, 0)\|_{L^1}^1.$$

Seja $f_{\varepsilon}(x,t)$ a integral de Poisson de f_{ε} . Teremos então para todo $(x,t) \in \mathbb{R}_+^2$

$$(6) \quad |F_{\varepsilon}(x,t)|^q \leq f_{\varepsilon}(x,t)$$

Com efeito: observemos que $|F_\varepsilon(x,t)|^q - f_\varepsilon(x,t)$ se anula no infinito, pois $|F_\varepsilon(x,t)|^q$ e $f_\varepsilon(x,t)$ também se anulam no infinito. Também $|F_\varepsilon(x,t)|^q - f_\varepsilon(x,t)$ é contínua em $\overline{\mathbb{R}_+^2}$ pois $|F_\varepsilon(x,t)|^q$ e $f_\varepsilon(x,t)$ o são. Assim, para todo $\delta > 0$, existe $M > 0$ tal que se $|(x,t)| \geq M$, então

$$|F_\varepsilon(x,t)|^q - f_\varepsilon(x,t) < \delta$$

Seja $R = \{(x,t) \in \overline{\mathbb{R}_+^2} / |(x,t)| < M\}$. Assim, a desigualdade acima se verifica na fronteira de R , ∂R , pois se $t = 0$, então $f_\varepsilon(x,t) = f_\varepsilon(x)$. Desta forma, $|F_\varepsilon(x,t)|^q - f_\varepsilon(x,t)$ é contínua em $\overline{R}$, a desigualdade vale na fronteira de R e também

$$(7) \quad \Delta(|F_\varepsilon(x,t)|^q - f_\varepsilon(x,t)) \geq 0$$

Logo, pelo princípio do máximo, temos que para $|(x,t)| \leq M$ a desigualdade (4) se verifica e assim se verifica para todo $(x,t) \in \mathbb{R}_+^2$.

Tomando $\varepsilon < 1$ em

$$\|f_\varepsilon\|_p^p \leq \|F\|_{H_{ANAL}^1}^1 + \varepsilon \|G\|_{L^1}^1$$

obtemos

$$\|f_\varepsilon\|_p^p \leq \|F\|_{H_{ANAL}^1}^1 + \|G\|_{L^1}^1.$$

Portanto f_ε é limitada em L^p . Como $p > 1$, existe uma sub-sequência (f_{ε_j}) , $\varepsilon_j \longrightarrow 0$, que converge fracamente a uma função $f \in L^p(\mathbb{R})$, isto é:

$$\int f_{\varepsilon_j}(x) \cdot b(x) dx \longrightarrow \int f(x) \cdot b(x) dx$$

quando $\varepsilon_j \longrightarrow 0$, para toda função $b \in L^{p'}$ onde p' é o conjugado de p . Além disso, temos

$$\|f\|_p^p \leq \|F\|_{H_{ANAL}^1}^2 + \|G\|_{L^1}^2.$$

Seja agora $f(x,t)$ a integral de Poisson de $f(x)$.

Temos então, a desigualdade

$$(8) \quad |F(x,t)|^q \leq f(x,t)$$

para todo $(x,t) \in \mathbb{R}_+^2$. De fato, isto segue de (6) tendo em vista que

$$F_\varepsilon(x,t) \longrightarrow F(x,t) \quad , \quad (\varepsilon \longrightarrow 0)$$

pela própria definição de F , e também que

$$f_\varepsilon(x,t) \longrightarrow f(x,t) \quad , \quad (\varepsilon \longrightarrow 0)$$

pela convergência fraca, pois como $P_t(x) \in L^{p'}$, então

$$f_\varepsilon(x,t) = \int P_t(x-x') f_\varepsilon(x') dx' \longrightarrow f(x,t) = \int P_t(x-x') f(x') dx'$$

Desta forma, $f_\varepsilon(x,t)$ converge a $f(x,t)$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$ e (8) é verificada. Concluimos então que

$$\sup_{t>0} |F(x,t)|^q \leq \sup_{t>0} f(x,t) = (Nf)(x)$$

Mas pelo lema 11, (Apêndice), temos que

$$(Nf)(x) \leq KM(Nf)(x).$$

Também, pelo fato de $f \in L^p$, com $p > 1$, temos pelo lema 1.1, (Apêndice), que existe $C > 0$ tal que

$$\|Nf\|_p \leq C\|f\|_p.$$

Como $Nf \in L^p$ e $p > 1$, temos que

$$\|M(Nf)\|_p \leq K'\|Nf\|_p$$

$$\leq K'C\|f\|_p$$

$$= K''\|f\|_p$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 \int \sup_{t>0} |F(x,t)| dx &\leq \int \left(\sup_{t>0} |f(x,t)| \right)^{1/q} dx \\
 &= \int (Nf)^p(x) dx \\
 &= \|Nf\|_p^p \leq C^p \|f\|_p^p \\
 &\leq C^p \|f\|_{H_{ANAL}^1}^p = B^p \|f\|_{H_{ANAL}^1}^p
 \end{aligned}$$

Então:

$$\int \sup_{t>0} |F(x,t)| dx \leq B \sup_{t>0} \int |F(x,t)| dx$$

o que prova (1).

Provemos agora (2). Sendo $F = (u,v)$, temos que

$$|F(x,t)|^q \leq f(x,t)$$

para todo $(x,t) \in \mathbb{R}_+^2$

Então:

$$|u(x,t)|^q \leq |F(x,t)|^q \leq f(x,t)$$

$$|v(x,t)|^q \leq |F(x,t)|^q \leq f(x,t).$$

Sendo $f(x,t)$ a integral de Poisson de $f \in L^p$, $p > 1$, temos pelo lema 5 (Apêndice) que $f(x,t)$ é limitada não tangencialmente. Assim, u e v são limitadas não tangencialmente. Se u e v têm limite não tangencial, então $\lim_{t \rightarrow 0} u(x,t)$ e $\lim_{t \rightarrow 0} v(x,t)$ existem em quase toda parte e assim $\lim_{t \rightarrow 0} F(x,t)$ existe em quase toda parte. A convergência em norma L^1 segue de

$$(9) \quad \lim_{t \rightarrow 0} F(x,t) = F(x) \quad \text{qtp}$$

$$(10) \quad |F(x,t)| \leq [f(x,t)]^p$$

e como $f \in L^p$, pelo Teorema da Convergência Dominada temos que $F(x,t)$ converge a $F(x)$ em $L^1(\mathbb{R})$ quando $t \rightarrow 0$.

1.2. OS ESPAÇOS $H^1(\mathbb{R}_+^2)$ DEFINIDOS ATRAVÉS DA TRANSFORMADA DE HILBERT.

1.2.1. DEFINIÇÃO. O espaço das funções reais $f \in L^1(\mathbb{R})$ cujas transformadas de Hilbert Hf pertencem também a $L^1(\mathbb{R})$ é chamado espaço H^1 -Hilbert e é denotado por $H_{Hb}^1(\mathbb{R})$, ou seja

$$H_{Hb}^1 = H_{Hb}^1(\mathbb{R}) = \{f \in L^1(\mathbb{R}) \mid Hf \in L^1(\mathbb{R})\}$$

Munimos o espaço H_{Hb}^1 com a norma

$$(1) \quad \|f\|_{H_{Hb}^1}^2 = \|f\|_{L^1}^2 + \|Hf\|_{L^1}^2$$

Vamos agora enunciar e demonstrar o teorema mais importante deste capítulo.

1.2.2. TEOREMA. Os espaços H_{Hb}^1 e H_{ANAL}^1 são isomorfos, isto é, se $f \in H_{Hb}^1$, existe uma única $F_f \in H_{ANAL}^1$ tal que

$$(1) \quad \|F_f\|_{H_{ANAL}^1} \leq \|f\|_{H_{Hb}^1};$$

reciprocamente, se $F = (u, v) \in H_{ANAL}^1$, existe uma única $f \in H_{Hb}^1$ tal que $u = f * P_t$, $v = Hf * P_t$ e

$$\|f\|_{H_{Hb}^1} \leq \|F\|_{H_{ANAL}^1}.$$

DEMONSTRAÇÃO. Se $f \in H_{Hb}^1$ então $Hf \in L^1$ e portanto as funções $u : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $v : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$u(x, t) = \int P_t(x-x') f(x') dx'$$

$$v(x, t) = \int P_t(x-x') (Hf)(x') dx'$$

estão bem definidas. Consideremos então o campo vetorial $F_f = (u, v)$.

Vamos mostrar que F_f verifica as equações de Cauchy-Riemann. Como as funções u e v podem ser escritas na forma

$$u(x,t) = \int \hat{f}(x') \exp(-2\pi i x \cdot x') \exp(-2\pi |x'|t) dx'$$

$$v(x,t) = \int (Hf)^{\wedge}(x') \exp(-2\pi i x \cdot x') \exp(-2\pi |x'|t) dx'$$

derivando sob o sinal da integral, temos que

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x,t) = \int (Hf)^{\wedge}(x') \exp(-2\pi i x \cdot x') (-2\pi |x'|) \exp(-2\pi |x'|t) dx' =$$

$$= \int i(\text{sign } x') \hat{f}(x') \exp(-2\pi i x \cdot x') (-2\pi |x'|) \exp(-2\pi |x'|t) dx' .$$

Mas $(\text{sign } x') |x'| = x'$ e então a última expressão se reduz a

$$\int -2\pi i x' \hat{f}(x') \exp(-2\pi i x \cdot x') \exp(-2\pi |x'|t) dx'$$

Por outro lado,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = \int \hat{f}(x') (-2\pi i x') \exp(-2\pi i x \cdot x') \exp(-2\pi |x'|t) dx' =$$

$$= - \int 2\pi i x' \hat{f}(x') \exp(-2\pi i x \cdot x') \exp(-2\pi |x'|t) dx' = \frac{\partial v}{\partial t}(x,t)$$

Da mesma forma verifica-se que:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x,t)$$

Para concluirmos que $F_f = (u,v)$ pertence a H_{ANAL}^1 devemos mostrar que

$$\sup_{t>0} \|F_f(\cdot, t)\|_{L^1} < \infty$$

De fato:

$$\begin{aligned} \int |F_f(x,t)| dx &= \int (|u(x,t)|^2 + |v(x,t)|^2)^{1/2} dx \\ &\leq \int (|u(x,t)| + |v(x,t)|) dx \\ &= \int |u(x,t)| dx + \int |v(x,t)| dx \\ &\leq \int \left(\int P_t(x-x') |f(x')| dx' \right) dx + \\ &\quad + \int \left(\int P_t(x-x') |(Hf)(x')| dx' \right) dx \\ &= \|f\|_{L^1} + \|Hf\|_{L^1} = \|f\|_{H_{Hb}^1} \end{aligned}$$

onde na última passagem usamos o teorema de Fubini e o fato de que $\|P_t\|_{L^1} = 1$.

Assim, $F_f = (u, v) = (P_t * f, P_t * Hf)$ pertence a H_{ANAL}^1 e ainda

$$\|F_f\|_{H_{ANAL}^1} \leq \|f\|_{H_{Hb}^1}$$

Provemos agora a recíproca. Seja $F = (u, v)$ pertencente a H_{ANAL}^1 . Sabemos do Teorema 1.1.3(2) que

$$F(x, t) \longrightarrow F(x), \quad (t \longrightarrow 0)$$

Pelos Teoremas 12 e 13 (Apêndice) temos que

$$u(x, t) = f * P_t(x), \quad f \in L^1$$

$$v(x, t) = g * P_t(x), \quad g \in L^1$$

e também

$$u(x, t) \longrightarrow f(x), \quad (t \longrightarrow 0)$$

$$v(x, t) \longrightarrow g(x), \quad (t \longrightarrow 0).$$

Definimos

$$\tilde{v} = f * Q_t$$

onde Q_t é o núcleo conjugado de Poisson. Então:

$$\tilde{v} = f * Q_t = Hf * P_t$$

Assim, u e $\tilde{v}$ satisfazem as equações de Cauchy-Riemann, isto é, são funções harmônicas conjugadas. Mas também u e v o são, o que implica que $v = \tilde{v} + c$; com c uma constante. Como v e $\tilde{v}$ pertencem a L^1 , logo $v - \tilde{v} = c$ também pertence a L^1 , o que é uma contradição. Logo, $v = \tilde{v}$ e então $v = Hf * P_t$. Ainda,

$$Hf * P_t \longrightarrow Hf \quad (t \longrightarrow 0)$$

e

$$v(x,t) \longrightarrow g(x) \quad (t \longrightarrow 0)$$

Logo, $Hf = g$ em quase toda parte e desta forma $F = F_f$ e $f \in H_{Hb}^1$. Por outro lado

$$\begin{aligned} \|f\|_{H_{Hb}^1} &= \int |f(x)| dx + \int |(Hf)(x)| dx \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \int |f * P_t(x)| dx + \lim_{t \rightarrow 0} \int |f * Q_t(x)| dx \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \int (|u(x,t)| + |v(x,t)|) dx \\ &\leq 2 \|F_f\|_{H_{ANAL}^1}, \end{aligned}$$

o que completa a demonstração do Teorema.

CAPÍTULO II

O ESPAÇO BMO

O espaço BMO das funções de oscilação média limitada será fundamental na caracterização do dual do espaço $H^1(\mathbb{R})$. Vamos então desenvolver, neste capítulo, a teoria básica do espaço BMO (incluindo o Teorema de John-Nirenberg) e alguns aspectos dos operadores integrais singulares que atuam sobre BMO. As referências serão os trabalhos de Ortiz [3] e Sadoski [6].

2.1.0. O ESPAÇO BMO

2.1.1. DEFINIÇÃO. Fixemos um intervalo I_0 em $\mathbb{R}$, com $|I_0| < \infty$. Dizemos que f é uma função de oscilação média limitada se $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ e existir uma constante M tal que

$$(1) \quad \sup_I |I|^{-1} \int_I |f(x) - c_I| dx \leq M < \infty$$

onde o supremo é tomado sobre todos os intervalos I de I_0 e c_I é uma constante que depende de I . Podemos assumir que I_0 tem dimensões suficientemente grandes.

2.1.2. PROPOSIÇÃO. Toda função pertencente a $L^\infty(\mathbb{R})$ é uma função de oscilação média limitada.

DEMONSTRAÇÃO. Seja $f \in L^\infty(\mathbb{R})$; então existe uma constante C tal que $|f(x)| \leq C$. Logo,

$$\begin{aligned} \sup_I |I|^{-1} \int_I |f(x) - C_I| dx &\leq \sup_I |I|^{-1} \int_I (|f(x)| + |C_I|) dx \\ &= \sup_I |I|^{-1} \left[\int_I |f(x)| dx + \int_I |C_I| dx \right] \\ &\leq \sup_I |I|^{-1} \left[\int_I C dx + |C_I| |I| \right] \\ &= \sup_I |I|^{-1} (C |I| + |C_I| |I|) \\ &= \sup_I (C + |C_I|) = M < \infty \end{aligned}$$

donde se conclui que f é uma função de oscilação média limitada. Mostraremos posteriormente que nem toda função de oscilação média limitada pertence a $L^\infty(\mathbb{R})$.

2.1.3. DEFINIÇÃO. Seja $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$: definimos o valor médio de f sobre o intervalo $I \subset I_0$ como sendo

$$(1) \quad f_I = |I|^{-1} \int_I f(x) dx$$

2.1.4. PROPOSIÇÃO. Seja f uma função de oscilação média limitada. Então

$$(1) \quad \|f\|_* = \sup_I |I|^{-1} \int_I |f(x) - f_I| dx = 2M = M_1 < \infty$$

DEMONSTRAÇÃO. Vamos ter

$$\begin{aligned} |I|^{-1} \int_I |f(x) - f_I| dx &= |I|^{-1} \int_I |f(x) - f_I + C_I - C_I| dx \\ &\leq |I|^{-1} \int_I |f(x) - C_I| dx + |I|^{-1} \int_I |f_I - C_I| dx \\ &= |I|^{-1} \int_I |f(x) - C_I| dx + |f_I - C_I| \\ &= |I|^{-1} \int_I |f(x) - C_I| dx + \left| |I|^{-1} \int_I C_I dx - \right. \\ &\quad \left. - |I|^{-1} \int_I f(x) dx \right| \\ &= |I|^{-1} \int_I |f(x) - C_I| dx + \left| |I|^{-1} \int_I [C_I - f(x)] dx \right| \\ &\leq |I|^{-1} \int_I |f(x) - C_I| dx + |I|^{-1} \int_I |f(x) - C_I| dx \\ &\leq 2M = M_1 < \infty \end{aligned}$$

o que demonstra (1).

2.1.5. PROPOSIÇÃO. Seja f uma função de oscilação média limitada e c uma constante. Então,

$$(1) \quad \|f + c\|_* = \|f\|_*$$

DEMONSTRAÇÃO. Observemos inicialmente que

$$\begin{aligned} (f + c)_I &= |I|^{-1} \int_I (f + c)(x) dx = |I|^{-1} \int_I [f(x) + c] dx \\ &= |I|^{-1} \int_I f(x) dx + |I|^{-1} \int_I c dx = f_I + c \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \|f + c\|_* &= \sup_I |I|^{-1} \int_I |(f + c)(x) - (f + c)_I| dx \\ &= \sup_I |I|^{-1} \int_I |f(x) + c - f_I - c| dx = \|f\|_* \end{aligned}$$

2.1.6. PROPOSIÇÃO. A classe b.m.o. das funções de oscilação média limitada é um espaço vetorial e $\|\cdot\|_*$ é uma semi-norma sobre b.m.o.

DEMONSTRAÇÃO. Sejam f e g funções pertencentes a b.m.o. Temos que:

$$\begin{aligned}(f + g)_I &= |I|^{-1} \int_I (f + g)(x) dx \\ &= |I|^{-1} \int_I f(x) dx + |I|^{-1} \int_I g(x) dx = f_I + g_I\end{aligned}$$

e para $\lambda \in \mathbb{C}$

$$(\lambda f)_I = |I|^{-1} \int_I (\lambda f)(x) dx = |I|^{-1} \int_I \lambda f(x) dx = \lambda f_I.$$

Então,

$$\begin{aligned}|I|^{-1} \int_I |(f+g)(x) - (f+g)_I| dx &= |I|^{-1} \int_I |f(x) - f_I + g(x) - g_I| dx \\ &\leq |I|^{-1} \int_I |f(x) - f_I| dx + |I|^{-1} \int_I |g(x) - g_I| dx \\ &\leq M_1 + M_2 < \infty\end{aligned}$$

Logo, $f + g$ é uma função em b.m.o.

Também, para uma constante $\lambda \in \mathbb{C}$, teremos

$$\begin{aligned}|I|^{-1} \int_I |(\lambda f)(x) - (\lambda f)_I| dx &= |I|^{-1} \int_I |\lambda f(x) - \lambda f_I| dx \\ &= |I|^{-1} |\lambda| \int_I |f(x) - f_I| dx \\ &\leq |\lambda| \cdot M < \infty\end{aligned}$$

o que implica que λf é uma função em b.m.o.

Assim, a classe b.m.o. é um espaço vetorial.

Mostremos agora que $\|\cdot\|_*$ é uma semi-norma sobre b.m.o., ou seja, para f e g pertencentes a b.m.o. e $\lambda \in \mathbb{C}$ tem-se:

$$(a) \quad \|f\|_* \geq 0$$

$$(b) \quad \|\lambda f\|_* = |\lambda| \|f\|_*$$

$$(c) \quad \|f+g\|_* \leq \|f\|_* + \|g\|_*$$

De fato

$$(a) \quad \|f\|_* = \sup_I |I|^{-1} \int_I |f(x) - f_I| dx \geq 0$$

$$(b) \quad \|\lambda f\|_* = \sup_I |I|^{-1} \int_I |\lambda f(x) - \lambda f_I| dx = |\lambda| \|f\|_*$$

$$\begin{aligned} (c) \quad \|f+g\|_* &= \sup_I |I|^{-1} \int_I |(f+g)(x) - (f+g)_I| dx \\ &= \sup_I |I|^{-1} \int_I |f(x) - f_I + g(x) - g_I| dx \\ &\leq \sup_I |I|^{-1} \int_I |f(x) - f_I| dx + \sup_I |I|^{-1} \int_I |g(x) - g_I| dx \\ &= \|f\|_* + \|g\|_* \end{aligned}$$

o que completa a demonstração.

2.1.7. DEFINIÇÃO. Se f e g pertencem a b.m.o., diremos que $f \sim g$ se $f - g = c$, c uma constante. Denotaremos por BMO o espaço quociente

$$\text{BMO} = \text{b.m.o.} / \sim$$

2.1.8. TEOREMA. BMO é um espaço de Banach.

DEMONSTRAÇÃO. É suficiente provar que BMO é completo com a semi norma $\|\cdot\|_*$.

Consideremos uma sequência de Cauchy $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em BMO. Isto implica que $f_n \in L^1_{\text{loc}}(I_0)$ e

$$\sup_I |I|^{-1} \int_I |f_n(x) - f_{n_I}| dx \leq M < \infty$$

e então a sequência $\{f_n - f_{n_I}\}_{n \in \mathbb{N}}$ está em $L^1(I)$ para todo n e para todo $x \in I$. Por hipótese, $f_n \in \text{BMO}$ para todo n e $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy, o que implica que dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ e $m \geq n_0$, temos

$$\sup_I |I|^{-1} \int_I |f_n(x) - f_m(x) - (f_{n_I} - f_{m_I})| dx < \varepsilon$$

e então

$$|I|^{-1} \int_I |f_n(x) - f_m(x) - (f_{n_I} - f_{m_I})| dx < \varepsilon$$

para todo $I \subset I_0$. Dai,

$$|I|^{-1} \| (f_n - f_{n_I}) - (f_m - f_{m_I}) \|_{L^1(I)} < \varepsilon$$

o que implica que $\{f_n - f_{n_I}\}$ é uma sequência de Cauchy em $L^1(I)$.

Como $L^1(I)$ é completo, existe $g^I \in L^1(I)$ tal que

$$\| (f_n - f_{n_I}) - g^I \|_{L^1(I)} < \varepsilon.$$

Analogamente, se I' é outro intervalo contendo I , existe $g^{I'} \in L^1(I')$ tal que

$$\| (f_n - f_{n_{I'}}) - g^{I'} \|_{L^1(I')} < \varepsilon.$$

Concluimos então que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f_{n_I} - f_{n_{I'}}) = g^I - g^{I'} = g(I, I') = K$$

onde K é uma constante. Consideremos agora os intervalos I_k com centro na origem e comprimento $k \in \mathbb{N}$; seja $k_0 \in \mathbb{N}$ o comprimento de I_0 . Assim, para todo $x \in I_0$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x \in I_k$. Definimos a função limite da sequência $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ como sendo:

$$(1) \quad f(x) = g^{I_k}(x) - g(I_1, I_k).$$

Mostremos que a função f está bem definida. Seja $x \in I_j \subset I_{j'}$; sabemos que

$$g^{I_j}(x) - g^{I_{j'}}(x) = g(I_{j'}, I_j)$$

e para $1 < j < j'$ temos

$$\begin{aligned} g(I_1, I_j) &= g^{I_j} - g^{I_{j'}} + g^{I_{j'}} - g^{I_1} \\ &= g(I_{j'}, I_j) + g(I_1, I_{j'}) \end{aligned}$$

Portanto,

$$g(I_{j'}, I_j) = g(I_1, I_j) - g(I_1, I_{j'})$$

e assim

$$g^{I_j}(x) - g^{I_{j'}}(x) = g(I_1, I_j) - g(I_1, I_{j'})$$

o que implica que

$$g^{I_j}(x) - g(I_1, I_j) = g^{I_{j'}}(x) - g(I_1, I_{j'})$$

Vamos mostrar agora que f_n converge para f na semi-norma $\|\cdot\|_*$:

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |I|^{-1} \int_I |(f_n - f)(x) - (f_n - f)_I| dx &= \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} |I|^{-1} \int_I |f_n(x) - f(x) - f_{n_I} + f_I| dx .
 \end{aligned}$$

Como

$$g^I(x) = \lim_{\|\cdot\|_{L^1(I)}} (f_n - f_{n_I})$$

é suficiente mostrar que

$$g^I(x) - f(x) + f_I = 0$$

De fato:

$$\begin{aligned}
 g^I(x) - f(x) + f_I &= g^I(x) - (f - f_I)(x) \\
 &= \lim_{\|\cdot\|_{L^1(I)}} (f_n - f_{n_I}) - (f - f_I)(x) \\
 &= \lim_{\|\cdot\|_{L^1(I)}} (f_n - f_{n_I}) - [g^{I_j} - g^{(I_1, I_j)} - g_I^{I_j} + g^{(I_1, I_j)}] \\
 &= \lim_{\|\cdot\|_{L^1(I)}} (f_n - f_{n_I}) - \lim_{\|\cdot\|_{L^1(I)}} (f_n - f_{n_{I_j}}) + g_I^{I_j} \\
 &= \lim_{\|\cdot\|_{L^1(I)}} f_n - \lim_{\|\cdot\|_{L^1(I)}} f_{n_I} - \lim_{\|\cdot\|_{L^1(I)}} f_n + \lim_{\|\cdot\|_{L^1(I)}} f_{n_{I_j}} + g_I^{I_j} \\
 (3) \quad &= \lim_{\|\cdot\|_{L^1(I)}} (f_{n_{I_j}} - f_{n_I}) + g_I^{I_j} .
 \end{aligned}$$

Por outro lado, temos:

$$\begin{aligned} \left| (f_n - f_{n_{I_j}})_I - g_{I_j}^I \right| &= \left| |I|^{-1} \int_I (f_n - f_{n_{I_j}})(x) dx - |I|^{-1} \int_I g^I(x) dx \right| \\ &\leq |I|^{-1} \int_I |f_n - f_{n_{I_j}} - g^I| dx < \varepsilon \end{aligned}$$

Substituindo em (3) obtemos:

$$\begin{aligned} &\| \cdot \|_{L^1(I)} \lim_{n_{I_j}} (f_{n_{I_j}} - f_{n_I}) + \| \cdot \|_{L^1(I)} \lim_{n_I} (f_n - f_{n_{I_j}})_I = \\ &= \| \cdot \|_{L^1(I)} \lim_{n_{I_j}} f_{n_{I_j}} - \| \cdot \|_{L^1(I)} \lim_{n_I} f_{n_I} + \| \cdot \|_{L^1(I)} \lim_{n_I} f_{n_I} - \| \cdot \|_{L^1(I)} \lim_{n_{I_j}} f_{n_{I_j}} = 0 . \end{aligned}$$

Desta forma, (2) tende a zero e assim $f_n \longrightarrow f$ na semi-norma $\| \cdot \|_*$. Concluimos também que $(f_n - f) \in \text{BMO}$. Como BMO é um espaço vetorial, então $f \in \text{BMO}$, o que completa a demonstração.

2.2. O TEOREMA DE JOHN-NIRENBERG

Neste parágrafo provaremos o primeiro resultado profundo sobre os espaços BMO : o teorema de John-Nirenberg. Como consequência deste teorema provaremos que $\text{BMO} \not\subset L^\infty$ e que certos espaços BMO_p coincidem com BMO . Este último resultado será de importância no estudo da decomposição atômica dos espaços H^1 .

2.2.1. LEMA. Seja $g(t)$, $t \geq 0$, uma função continuamente diferenciável em $[0, \infty)$ tal que $g(0) = 0$. Então, para f em BMO e

$$\omega(\alpha) = |\{x \in I / |f(x) - c| > \alpha\}|$$

temos

$$(1) \quad \int_I g(|f(x) - c|) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\alpha) dg(\alpha)$$

DEMONSTRAÇÃO. Consideremos a partição do intervalo $[0, \infty)$, $0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_n < \dots < \infty$ e $F(x) = f(x) - c$, com f em BMO. Seja

$$E_k = \{x \in I / \alpha_{k-1} < F(x) < \alpha_k\}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Assim E_k é uma família disjunta e $\bigcup_k E_k = I$. Temos então

$$\int_I g(F(x)) dx = \sum_k \int_{E_k} g(F(x)) dx$$

Consideremos agora

$$M_k = \max g(t) \text{ em } [\alpha_{k-1}, \alpha_k]$$

e

$$m_k = \min g(t) \text{ em } [\alpha_{k-1}, \alpha_k]$$

Logo,

$$m_k |E_k| \leq \int_{E_k} g(F(x)) dx \leq M_k |E_k|$$

o que implica que

$$\sum_k m_k |E_k| \leq \int_I g(F(x)) dx \leq \sum_k M_k |E_k|$$

Observando que

$$\begin{aligned} \omega(\alpha_{k-1}) - \omega(\alpha_k) &= |\{x \in I / F(x) > \alpha_{k-1}\}| - |\{x \in I / F(x) > \alpha_k\}| \\ &= |\{x \in I / \alpha_{k-1} < F(x) \leq \alpha_k\}| = |E_k| \end{aligned}$$

teremos

$$\begin{aligned} (2) \quad \sum_k m_k |E_k| &= \sum_k m_k [\omega(\alpha_{k-1}) - \omega(\alpha_k)] \\ &\leq \int_I g(F(x)) dx \\ &\leq \sum_k M_k [\omega(\alpha_{k-1}) - \omega(\alpha_k)] \end{aligned}$$

Como g é contínua em $[\alpha_{k-1}, \alpha_k]$, temos que

$$(3) \quad m_k = g(\xi_1^{(k)}) \quad \text{e} \quad M_k = g(\xi_2^{(k)}).$$

Vamos mostrar agora que

$$\int_I g(F(x)) dx = - \int_0^\infty g(\alpha) d\omega(\alpha)$$

De fato: como $\omega(\alpha) = |\{x \in I / F(x) > \alpha\}|$, integrando por partes

$$- \int_I g(\alpha) d\omega(\alpha) = - \int_0^\infty g(\alpha) \omega'(\alpha) d\alpha$$

teremos para $g(\alpha) = u$, $\omega'(\alpha) d\alpha = dv$, $du = dg(\alpha)$ e $v = \omega(\alpha)$,

$$\begin{aligned} - \int_0^\infty g(\alpha) \omega'(\alpha) d\alpha &= - [g(\alpha) \omega(\alpha) \Big|_0^\infty - \int_0^\infty \omega(\alpha) dg(\alpha)] \\ &= -g(\alpha) \omega(\alpha) \Big|_0^\infty + \int_0^\infty \omega(\alpha) dg(\alpha) . \end{aligned}$$

Lembrando que $g(0) = 0$ e $\omega(\alpha) \longrightarrow 0$ quando $\alpha \longrightarrow \infty$, teremos $-g(\alpha) \omega(\alpha) = 0$ quando $\alpha \longrightarrow 0, +\infty$, e então

$$- \int_0^\infty g(\alpha) d\omega(\alpha) = \int_0^\infty \omega(\alpha) dg(\alpha)$$

Resta mostrar que

$$\int_I g(F(x)) dx = \int_0^\infty \omega(\alpha) dg(\alpha)$$

De fato: substituindo (3) em (2) obtemos

$$\begin{aligned} \sum_k g(\xi_1^{(k)}) [\omega(\alpha_{k-1}) - \omega(\alpha_k)] &\leq \int_I g(F(x)) dx \\ &\leq \sum_k g(\xi_2^{(k)}) [\omega(\alpha_{k-1}) - \omega(\alpha_k)] \end{aligned}$$

o que implica que

$$-\int_0^\infty g(\alpha) d\omega(\alpha) \leq \int_I g(F(x)) dx \leq \overline{\int_0^\infty g(\alpha) d\omega(\alpha)} .$$

Como g é integrável segundo Riemann-Stieljes para a função ω , teremos:

$$-\int_0^\infty g(\alpha) d\omega(\alpha) = \int_I g(F(x)) dx$$

e finalmente

$$\int_I |f(x) - c| dx = \int_0^\infty \omega(\alpha) dg(\alpha) .$$

2.2.2. TEOREMA DA DECOMPOSIÇÃO DE CALDERON-ZYGMUNDO. Seja f uma função integrável definida num intervalo I_0 e seja $t > 0$ tal que

$$|I_0|^{-1} \int_{I_0} |f(x)| dx \leq t .$$

Então, existe uma família enumerável de intervalos disjuntos, abertos, denotados por I_k em I_0 , tal que:

$$(a) |f(x)| \leq t \text{ quase sempre se } x \in I_0 - \bigcup_k I_k$$

$$(b) t < |I_k|^{-1} \int_{I_k} |f(x)| dx \leq 2t$$

$$(c) \sum_k |I_k| < t^{-1} \int_{I_0} |f(x)| dx$$

DEMONSTRAÇÃO. Vamos inicialmente dividir o intervalo I_0 em dois intervalos congruentes e denotar por I_{1k} , $k = 1, 2$, aqueles onde se tem

$$|I_{1k}|^{-1} \int_{I_{1k}} |f(x)| dx > t$$

Então:

$$t |I_{1k}| < \int_{I_{1k}} |f(x)| dx \leq \int_{I_0} |f(x)| dx \leq t |I_0| = 2t |I_{1k}|$$

Chamaremos $\tilde{I}_{1k}$ os intervalos onde se tem

$$|\tilde{I}_{1k}|^{-1} \int_{\tilde{I}_{1k}} |f(x)| dx \leq t$$

Dividimos agora cada intervalo $\tilde{I}_{1k}$ em dois intervalos congruentes e denotamos por I_{2k} os intervalos onde se tem

$$|I_{2k}|^{-1} \int_{I_{2k}} |f(x)| dx > t$$

Então:

$$t|I_{2k}| < \int_{I_{2k}} |f(x)| dx \leq \int_{\tilde{I}_{1k}} |f(x)| dx \leq t|\tilde{I}_{1k}| = 2t|I_{2k}|.$$

Continuando este processo, obtemos uma sucessão de intervalos $\{I_{jk}\}$ que chamaremos $\{I_k\}$, tal que

$$t < |I_k|^{-1} \int_{I_k} |f(x)| dx \leq 2t$$

o que prova (b). Além disso, temos:

$$t^{-1} \int_{I_0} |f(x)| dx \geq t^{-1} \int_{\bigcup_k I_k} |f(x)| dx = \sum_k t^{-1} \int_{I_k} |f(x)| dx \geq \sum_k |I_k|$$

o que prova (c).

Vamos agora provar (a): denotamos por $\{\tilde{I}_j\}$ a família dos intervalos, onde se tem

$$|\tilde{I}_j|^{-1} \int_{\tilde{I}_j} |f(x)| dx \leq t$$

Pelo Teorema de Lebesgue, temos:

$$|f(x)| = \lim_{j \rightarrow \infty} |\tilde{I}_j|^{-1} \int_{\tilde{I}_j} |f(y)| dy \leq t$$

o que prova (a).

2.2.3. TEOREMA (John-Nirenberg). Seja $f \in L^1(I_0)$ e assumimos que para uma constante M_1 tem-se

$$|I| \int_I |f(x) - f_I| dx \leq M_1$$

para todo intervalo $I \subset I_0$. Sendo

$$E_\alpha = \{x \in I / |f(x) - f_I| > \alpha\}$$

com $\alpha > 0$, então:

$$(1) \quad \omega(\alpha) \equiv |E_\alpha| \leq M_1 A e^{-a\alpha M_1^{-1}} \int_{I_0} |f(x) - f_I| dx$$

$$\text{com } a \leq \alpha M_1^{-1} \quad \text{e} \quad A \leq 1.$$

Como $\omega(\alpha) \leq |I_0|$, tem-se

$$(2) \quad \omega(\alpha) \leq e^{c \cdot a} \cdot e^{-c\alpha M_1^{-1}} |I_0|$$

onde c e a são constantes positivas.

DEMONSTRAÇÃO. Temos por hipótese que

$$|I|^{-1} \int_I |f(x) - f_I| dx \leq M_1$$

para todo intervalo $I \subset I_0$. Logo,

$$|I|^{-1} \int_I |f(x) - f_I| M_1^{-1} dx \leq 1$$

Se substituirmos $(f(x) - f_I)/M_1$ por $f(x)$ (quando $f_I \equiv 0$ e $M_1 = 1$) podemos assumir sem perda de generalidade que

$$|I|^{-1} \int_I |f(x)| dx \leq 1$$

e também $\omega(\alpha) \equiv E_\alpha$ com

$$E_\alpha = \{x \in I / |f(x)| > \alpha\}$$

Seja $p(\alpha)$ o menor número dependendo de α tal que

$$(3) \quad \omega(\alpha) \leq p(\alpha) \int_I |f(x)| dx$$

Tal $p(\alpha)$ existe pois

$$\int_I |f(x)| dx \geq \int_{E_\alpha} |f(x)| dx \geq \int_{E_\alpha} \alpha dx = \alpha |E_\alpha| = \alpha \omega(\alpha)$$

e assim

$$\omega(\alpha) \leq \alpha^{-1} \int_I |f(x)| dx$$

Observemos que $p(\alpha) \leq \alpha^{-1}$ pois $p(\alpha)$ é o menor número tal que a desigualdade (3) ocorre. Provemos agora que para $\alpha \geq 2$ e $1 \leq t \leq (1/2)\alpha$, temos

$$p(\alpha) \leq t^{-1} p(\alpha - 2t).$$

De fato: considerando que

$$|I|^{-1} \int_I |f(x)| dx \leq 1 \leq t \leq (1/2)\alpha,$$

por 2.2.2(a), (Teorema da decomposição), temos que se $|f(x)| > \alpha$ (e portanto $|f(x)| > \alpha \geq 2t > t$), então $x \in I_k$ para algum k , exceto num conjunto de medida nula. Consideremos o conjunto

$$B_k = \{x \in I_k / |f(x) - f_{I_k}| > \alpha - 2t\}$$

Mostremos que $E_\alpha \subset \bigcup_k B_k$: se $x \in E_\alpha$, então $|f(x)| > \alpha$ e então $x \in I_k$ para algum k . Por outro lado, temos:

$$|f_{I_k}| = \left| |I_k|^{-1} \int_{I_k} f(x) dx \right| \leq |I_k|^{-1} \int_{I_k} |f(x)| dx \leq t < 2t$$

Logo,

$$|f(x) - f_{I_k}| \geq |f(x)| - |f_{I_k}| > \alpha - 2t$$

o que implica que $x \in B_k$ para algum k , e então $x \in \bigcup_k B_k$. Desta forma, temos

$$\omega(\alpha) \leq \sum_k |B_k|.$$

Pela definição de $p(\alpha)$, tem que:

$$|B_k| \leq p(\alpha - 2t) \int_{I_k} |f(x) - f_{I_k}| dx \leq p(\alpha - 2t) |I_k|$$

e assim,

$$\omega(\alpha) \leq p(\alpha - 2t) \sum_k |I_k| < p(\alpha - 2t) t^{-1} \int_{I_0} |f(x)| dx$$

onde a segunda desigualdade ocorre por 2.2.2(c). Como $p(\alpha)$ é o menor número tal que vale a desigualdade (3), temos que

$$(4) \quad p(\alpha) \leq t^{-1} p(\alpha - 2t)$$

como queríamos demonstrar.

Colocando $t = \epsilon$ na desigualdade (4), ficamos com

$$p(\alpha) \leq e^{-1} p(\alpha - 2e)$$

Seja A uma constante a ser determinada e $c = (2e)^{-1}$. Logo, existe $\alpha_0 > 0$ tal que

$$p(\alpha_0) \leq A \cdot e^{-c\alpha_0}.$$

A existência de tal α_0 é garantida pela escolha de c , pois se fizermos $A = e^{c\alpha_0} \alpha_0^{-1}$, então

$$p(\alpha_0) \leq \alpha_0^{-1} = A \cdot e^{-c\alpha_0}.$$

Para $\alpha_0 + 2e$, temos:

$$\begin{aligned} p(\alpha_0 + 2e) &\leq e^{-1} p(\alpha_0 + 2e - 2e) = e^{-1} p(\alpha_0) \leq e^{-1} A e^{-c\alpha_0} \\ &= e^{-c2e} A e^{-c\alpha_0} = A e^{-c(\alpha_0 + 2e)} \end{aligned}$$

Assim, nos extremos do intervalo $[\alpha_0, \alpha_0 + 2e]$ temos

$$p(\alpha_0) \leq A e^{-c\alpha_0}$$

e

$$p(\alpha_0 + 2e) \leq A e^{-c(\alpha_0 + 2e)}.$$

Como o intervalo $[\alpha_0, \alpha_0 + 2e]$ é convexo, temos

$$(5) \quad p(\alpha) \leq Ae^{-c\alpha}$$

para todo α no interior do intervalo $[\alpha_0, \alpha_0 + 2e]$. Repetindo o argumento para o intervalo $[\alpha_0 + 2e, \alpha_0 + 2e + 2e]$, teremos a desigualdade (5) válida para todo α suficientemente grande. Por outro lado, se

$$2e(e-1)^{-1} \leq \alpha \leq 2e(e-1)^{-1} + 2e$$

tem-se

$$(6) \quad p(\alpha) \leq \alpha^{-1} \leq (12/10)(1/2)e^{-c\alpha} = (12/20)e^{-c\alpha}$$

Com efeito: vamos mostrar que

$$e^{c\alpha} \alpha^{-1} \leq (12/20).$$

Seja $g(x) = e^{cx} x^{-1}$. Então

$$g'(x) = (ce^{cx} - e^{cx})x^{-2} = e^{cx}(cx - 1)x^{-2}$$

Assim, $g'(x) = 0$ implica que $x = c^{-1}$. Ainda:

$$g''(x) = e^{cx} [c(cx - 1)x^2 + cx^2 - 2x(cx - 1)] x^{-4}$$

Para $x = c^{-1}$ temos:

$$g''(c^{-1}) = ec^{-1} c^4 = ec^3 > 0$$

onde $c = (2e)^{-1}$. Desta forma, $x = c^{-1}$ é ponto de mínimo da função $g(x) = e^{cx} x^{-1}$ no intervalo $[2e(e-1)^{-1}, 2e(e-1)^{-1} + 2e]$. Então, a função g atinge seu máximo em $2e(e-1)^{-1}$ ou em $2e(e-1)^{-1} + 2e$. Fazendo

$$g(2e(e-1)^{-1}) = e^{(2e)^{-1} \cdot 2e(e-1)^{-1}} (e-1)(2e)^{-1} = (e-1)e^{(e-1)^{-1}} (2e)^{-1}$$

e

$$\begin{aligned} g(2e(e-1)^{-1} + 2e) &= e^{(2e)^{-1} [2e(e-1)^{-1} + 2e]} [2e(e-1)^{-1} + 2e]^{-1} \\ &= (e-1)e^{(e-1)^{-1}} (2e)^{-1} \end{aligned}$$

vemos que:

$$g(2e(e-1)^{-1}) = g(2e(e-1)^{-1} + 2e)$$

Então, se

$$2e(e-1)^{-1} \leq x \leq 2e(e-1)^{-1} + 2e$$

teremos:

$$g(x) \leq (e-1)e^{(e-1)^{-1}}(2e)^{-1}$$

e então

$$e^{c\alpha} \alpha^{-1} \leq (e-1)e^{(e-1)^{-1}}(2e)^{-1}$$

o que nos dá

$$e^{c\alpha} \alpha^{-1} \leq e^{(e-1)^{-1}}(1-e^{-1})(1/2)$$

Como

$$e^{(e-1)^{-1}}(1-e^{-1}) \leq (18/10)(2/3) = 12/10$$

temos que

$$p(\alpha) \leq \alpha^{-1} \leq (12/20)e^{-c}$$

Então, para $c = (2e)^{-1}$ e $c\alpha \geq (e-1)^{-1}$, temos:

$$\omega(\alpha) \leq p(\alpha) \int_I |f(x)| dx \leq (12/20)e^{-c\alpha} \int_I |f(x)| dx$$

Fazendo $A = 12/20$, $a = c = (2e)^{-1}$, $M_1 = 1$ e $f_I \equiv 0$, teremos

$$\omega(\alpha) \leq AM_1^{-1} e^{-\alpha \alpha M_1^{-1}} \int_{I_0} |f(x) - f_I| dx$$

o que prova (1). Como

$$\int_{I_0} |f(x) - f_I| dx \leq M_1 |I_0|$$

e também $A \leq 1$ e $e^{ac} > 1$, teremos

$$\begin{aligned} \omega(\alpha) &\leq AM_1^{-1} e^{-\alpha \alpha M_1^{-1}} \int_{I_0} |f(x) - f_I| dx \\ &\leq AM_1^{-1} e^{-c \alpha M_1^{-1}} M_1 |I_0| \\ &\leq e^{-c \alpha M_1^{-1}} e^{ac} |I_0| \end{aligned}$$

o que demonstra (2).

2.2.4. COROLÁRIO. Seja $f \in BMO$ e $1 \leq p < \infty$. Então $f \in L^p(I_0)$, $|I_0| < \infty$.

DEMONSTRAÇÃO. Consideremos a função $F(x) = f(x) - f_{I_0}$ e a função $g(\alpha) = \alpha^p$, crescente, com $g(0) = 0$. Assim,

$$g(F(x)) = |F(x)|^p$$

Pelo Lema 2.2.1 teremos

$$\int_{I_0} |F(x)|^p dx = \int_0^\infty \omega(\alpha) d\alpha^p = \int_0^\infty \omega(\alpha) p\alpha^{p-1} d\alpha$$

$$\leq p \int_0^\infty A e^{-a\alpha M_1^{-1}} |I_0| \alpha^{p-1} d\alpha$$

$$= pA|I_0| \int_0^\infty e^{-a\alpha M_1^{-1}} \alpha^{p-1} d\alpha = B$$

Por outro lado,

$$\left(\int_0^\infty |f(x)|^p dx \right)^{1/p} = \left(\int_{I_0} |f(x) - f_{I_0} + f_{I_0}|^p dx \right)^{1/p}$$

$$\leq \left(\int_{I_0} (|f(x) - f_{I_0}| + |f_{I_0}|)^p dx \right)^{1/p}$$

Como

$$|f + g|^p \leq 2^p (|f|^p + |g|^p)$$

e

$$(a+b)^{1/p} \leq a^{1/p} + b^{1/p}$$

para $p > 1$, temos:

$$\begin{aligned}
 \left(\int_{I_0} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} &\leq \left(\int_{I_0} 2^p |f(x) - f_{I_0}|^p dx + \int_{I_0} 2^p |f_{I_0}|^p dx \right)^{1/p} \\
 &\leq 2 \left[\left(\int_{I_0} |f(x) - f_{I_0}|^p dx \right)^{1/p} + |f_{I_0}| |I_0|^{1/p} \right] \\
 &= 2 \left[\left(\int_{I_0} |F(x)|^p dx \right)^{1/p} + |f_{I_0}| |I_0|^{1/p} \right] \\
 &\leq 2 [B^{1/p} + |f_{I_0}| |I_0|^{1/p}] = C < \infty
 \end{aligned}$$

2.2.5. COROLÁRIO. Seja $f \in BMO$ com

$$|f(x) - f(y)| \leq \|f\|_*$$

em I_0 . Então

$$\sup_I |I|^{-1} \int_I |f(x) - f_I|^2 dx \leq \|f\|_*^2$$

onde o supremo é tomado sobre todos os intervalos $I \subset I_0$.

DEMONSTRAÇÃO.

$$|I|^{-1} \int_I |f(x) - f_I|^2 dx = |I|^{-1} \int_I \left| |I|^{-1} \int_I f(x) dy - |I|^{-1} \int_I f(y) dy \right|^2 dx$$

$$\begin{aligned}
 &= |I|^{-1} \int_I \left| |I|^{-1} \left(\int_I |f(x) - f(y)| dy \right) \right|^2 dx \\
 &\leq |I|^{-3} \int_I \left(\int_I |f(x) - f(y)| dy \right)^2 dx \\
 &\leq |I|^{-3} \int_I \left(\int_I \|f\|_* dy \right)^2 dx \\
 &= |I|^{-3} \int_I (\|f\|_* |I|)^2 dx = \|f\|_*^2
 \end{aligned}$$

Vamos agora mostrar utilizando o Teorema de John-Nirenberg que os elementos de BMO não são necessariamente limitados. Começamos com o

2.2.6. LEMA. Seja $f \in L^1(I)$. Para todo intervalo I associamos um número C_I tal que o conjunto

$$E_\alpha = \{x \in I / |f(x) - C_I| \geq \alpha\}$$

satisfaz a igualdade:

$$\omega(\alpha) = |E_\alpha| \leq A e^{-b\alpha} |I|$$

com $\alpha > 0$ e $b > 0$. Então, $f \in \text{BMO}$.

DEMONSTRAÇÃO. Consideremos $g(t) = t$ uma função continuamente diferenciável em $[0, \infty)$ e $g(0) = 0$. Pelo lema 2.2.1., temos:

$$\int_I |f(x) - C_I| dx = \int_0^\infty \omega(\alpha) d\alpha \leq A|I| \int_0^\infty e^{-b\alpha} d\alpha = Ab^{-1}|I| < \infty$$

Logo,

$$|I|^{-1} \int_I |f(x) - C_I| dx \leq Ab^{-1}$$

e então

$$\sup_I |I|^{-1} \int_I |f(x) - C_I| dx < M < \infty$$

o que implica que $f \in \text{BMO}$.

2.2.7. PROPOSIÇÃO. $\log|x| \in \text{BMO}$.

DEMONSTRAÇÃO. A idéia é mostrar que

$$|E_\alpha| = |\{x \in I / |\log|x - a| - C_I| \geq \alpha\}| \leq Ae^{-b\alpha}|I|,$$

com a : fixo. O resultado seguirá então pelo lema 2.2.6 .

Seja I um intervalo arbitrário de lado h , e sejam ξ e η pontos de I tais que:

$$|\xi - a| = \max_{x \in I} \{|x - a|\}$$

e

$$|\eta - a| = \min_{x \in I} \{|x - a|\}$$

sendo a um ponto fixo de I . Chamaremos $C_I = \log|\xi - a|$. Assim,

$$E_\alpha = \{x \in I / |\log|x - a| - \log|\xi - a|| \geq \alpha\}$$

$$= \{x \in I / |\log|x - a| - |\xi - a|^{-1}| \geq \alpha\}$$

e podemos afirmar que E_α está contido no intervalo $[a - |\xi - a|e^{-\alpha}, a + |\xi - a|e^{-\alpha}]$.

De fato: observemos que se $x \in E_\alpha$, então

$$|\log|x - a| - |\xi - a|^{-1}| \geq \alpha$$

o que implica que

$$-\alpha \leq \log|x - a| - |\xi - a|^{-1} \leq \alpha$$

e então

$$e^{\log|x - a| - |\xi - a|^{-1}} \leq e^\alpha$$

Assim,

$$|x - a| \leq |\xi - a|^{-1} e^\alpha$$

o que nos dá $e^\alpha \leq 1$ e portanto $e^{-\alpha} \geq 1$.

Logo,

$$|x - a| \leq |\xi - a| \leq |\xi - a|e^{-\alpha}$$

ou seja,

$$x \in [a - |\xi - a|e^{-\alpha}, a + |\xi - a|e^{-\alpha}] .$$

Desta forma,

$$\omega(\alpha) = |E_\alpha| \leq 2|\xi - a|e^{-\alpha} \leq 2he^{-\alpha} = 2e^{-\alpha} |I| .$$

Portanto, para $A = 2$ e $b = 1$, temos a desigualdade desejada.

Pelo lema 2.2.6., concluímos que $f \in \text{BMO}$.

2.2.8. PROPOSIÇÃO. $\text{sign log}|x| \notin \text{BMO}$.

DEMONSTRAÇÃO. No intervalo $(-\epsilon, \epsilon)$, temos:

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \text{sign log}|x| dx = 2 \int_0^{\epsilon} \text{sign log } x dx \longrightarrow \infty$$

Assim, $\text{sign log}|x| \notin L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ e portanto não pertence a BMO .

Terminando este parágrafo, daremos uma segunda aplicação do Teorema de John-Nirenberg.

2.2.9. DEFINIÇÃO. Chamaremos BMO_p , $1 \leq p < \infty$, a classe das funções $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ tais que

$$(1) \quad \|f\|_{*p} = \sup_I [|I|^{-1} \int_I |f(x) - f_I|^p dx]^{1/p} \leq M_1 < \infty$$

2.2.10. TEOREMA. Para todo p , $1 \leq p \leq \infty$, temos

$$(1) \quad BMO_p = BMO$$

e ainda: $\|\cdot\|_*$ e $\|\cdot\|_{*p}$ são equivalentes.

DEMONSTRAÇÃO. Seja $f \in BMO$. Então, por 2.2.4., $f \in L^p(I_0)$ e teremos

$$[\int_I |f(x)|^p dx]^{1/p} \leq M < \infty$$

Logo,

$$\begin{aligned} [|I|^{-1} \int_I |f(x) - f_I|^p dx]^{1/p} &\leq [|I|^{-1} \int_I (|f(x)| + |f_I|)^p dx]^{1/p} \\ &\leq [|I|^{-1} \int_I (2^p |f(x)|^p + 2^p |f_I|^p) dx]^{1/p} \\ &= 2 |I|^{-1/p} [\int_I |f(x)|^p dx + \int_I |f_I|^p dx]^{1/p} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq 2|I|^{-1/p} \left[\left(\int_I |f(x)|^p dx \right)^{1/p} + \left(\int_I |f_I|^p dx \right)^{1/p} \right] \\
 &\leq 2|I|^{-1/p} (M + |f_I| |I|^{1/p}) \\
 &= 2(|I|^{-1/p} M + |f_I|) < \infty
 \end{aligned}$$

Assim, $f \in \text{BMO}_p$.

Agora, se $f \in \text{BMO}_p$, então $f(x) - f_I \in L^p(I_O)$ e também $f(x) - f_I \in L^{p'}(I_O)$, com $1/p + 1/p' = 1$. Pela desigualdade de Hölder temos:

$$\begin{aligned}
 |I|^{-1} \int_I |f(x) - f_I| dx &= \int_I |f(x) - f_I| |I|^{-1} dx \\
 &\leq \|f - f_I\|_{L^p} \| |I|^{-1} \|_{L^{p'}} \\
 &= \left[\int_I |f(x) - f_I|^p dx \right]^{1/p} \left[\int_I |I|^{-p'} dx \right]^{1/p'} \\
 &\leq \left[\int_I |f(x) - f_I|^p dx \right]^{1/p} \cdot |I|^{1/p' - 1} \\
 &= |I|^{-1} \left[\int_I |f(x) - f_I|^p dx \right]^{1/p} \leq M_1 < \infty.
 \end{aligned}$$

Logo, $f \in \text{BMO}$ e $\text{BMO}^p = \text{BMO}$.

2.3. INTEGRAIS SINGULARES E ESPAÇOS BMO.

Uma integral singular T é uma transformação do tipo

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}} k(x-y)f(y)dy$$

onde o núcleo $k(y)$ tem singularidades na origem e no infinito, e a integral existe no sentido do valor principal de Cauchy. Seja $k(y) = |y|^{-1} \Omega(y)$, $\Omega(y)$ uma função adequada. Impondo para k as condições

$$(1) \quad |\hat{k}(x)| \leq A$$

$$\text{com } \hat{k}(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i y x} k(y) dy$$

$$(2) \quad \int_{|x| \geq 2|y|} |k(x-y) - k(x)| dx \leq A$$

Vamos ter que o operador Tf é do tipo forte (p,p) , $1 < p < \infty$ e ainda

$$(3) \quad \|Tf\|_{L^p} \leq A \|f\|_{L^p}$$

Em outras palavras, o operador T é limitado de L^p em L^p se $1 < p < \infty$. Este resultado é conhecido como o Teorema de Calderon-Zygmund. Se $p = 1$, o substituto adequado para L^1 é o espaço

H_{Hb}^1 definido em 1.2.1. Se $p = \infty$, o substituto é o espaço BMO.

2.3.1. TEOREMA. Seja $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ e

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}} x(k-y)f(y)dy$$

um operador integral singular cujo núcleo $k(y)$ satisfaz as condições

$$(1) \quad \hat{k}(x) \leq A$$

$$\text{com } \hat{k}(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi ixy} k(y)dy$$

$$(2) \quad \int_{|x| \geq 2|y|} |k(x-y) - k(x)| dx \leq A$$

Então, $Tf \in \text{BMO}$.

DEMONSTRAÇÃO. Podemos assumir sem perda da generalidade que

$|f(x)| \leq 1$ e que f se anula fora de um compacto. Desta maneira Tf está bem definido. Consideremos um intervalo $I \subset I_0$, I_0 como em 2.1.1., e I com centro em zero. Consideremos também um intervalo B de centro na origem e de comprimento igual ao dobro do comprimento de I . Vamos decompor f como segue:

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in B \\ 0 & \text{se } x \notin B \end{cases}$$

$$f_2(x) = f(x) - f_1(x)$$

Se $x \in B$, então $f_1(x) = f(x)$ e $f_2(x) = f(x) - f(x) = 0$. Se $x \notin B$, então $f_1(x) = 0$ e $f_2(x) = f(x)$.

Observemos que nesta decomposição o suporte de f_2 está no complementar de B , ou seja, se x pertence ao suporte de f_2 , então, $f_2(x) \neq 0$ e assim $x \notin B$.

Temos também que

$$Tf = Tf_1 + Tf_2.$$

Vamos estudar cada parcela; pela desigualdade de Schwarz

$$(3) \quad \int_I |Tf_1(x)| dx \leq \left(\int_I |Tf_1(x)|^2 dx \right)^{1/2} \cdot |I|^{1/2}$$

Como T é do tipo forte (2.2), temos que

$$\|Tf\|_{L^2} \leq A_2 \|f\|_{L^2}$$

ou seja:

$$\left(\int_I |Tf_1(x)|^2 dx \right)^{1/2} \leq A_2 \left(\int_I |f_1(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

Então, em (3) temos:

$$(4) \quad \int_I |Tf_1(x)| dx \leq A_2 \left(\int_I |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \cdot |I|^{1/2}$$

Pela hipótese (1), $|\hat{k}(x)| \leq A$, podemos afirmar que T tem uma extensão a um operador limitado sobre L^2 . Logo, em (4) temos:

$$\begin{aligned} \int_I |Tf_1(x)| dx &\leq A_2 \left(\int_B |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \cdot |I|^{1/2} \\ &\leq A_2 |B|^{1/2} \cdot |I|^{1/2} = A_2 \cdot a^{1/2} \cdot |I|^{1/2}. \end{aligned}$$

E assim,

$$|I|^{-1} \int_I |Tf_1(x)| dx \leq A_2 \cdot a^{1/2}$$

Devemos agora escolher C_I de maneira que

$$|I|^{-1} \int_I |Tf_2(x) - C_I| dx \leq M < \infty$$

para todo $I \subset I_0$. Para tanto, escolhemos

$$C_I = \int k(y) f_2(y) dy$$

Tal integral existe pois f_2 tem suporte fora da origem e $k(y) \in L^1_{loc}$ fora da origem. Teremos então:

$$\begin{aligned}
 |Tf_2(x) - C_I| &= \left| \int_{y \notin B} k(x-y) f_2(y) dy - \int_{y \notin B} k(y) f_2(y) dy \right| \\
 &\leq \int_{y \notin B} |k(x-y) - k(y)| |f_2(y)| dy \\
 &= \int_{y \notin B} |k(x-y) - k(y)| |f(y)| dy \\
 &\leq \int_{y \notin B} |k(x-y) - k(y)| dy .
 \end{aligned}$$

Para que o resultado se verifique, devemos tomar $x \in I$; logo, considerando a construção do intervalo B com respeito a I e $y \notin B$, teremos $|y| \geq 2|x|$ se $x \in I$.

Pela hipótese (2), teremos

$$|Tf_2(x) - C_I| \leq A .$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
 |I|^{-1} \int_I |Tf(x) - C_I| dx &\leq |I|^{-1} \int_I |Tf_1(x)| dx + \\
 &+ |I|^{-1} \int_I |Tf_2(x) - C_I| dx \leq \\
 &\leq A_2 \cdot a^{1/2} + A = M < \infty
 \end{aligned}$$

e portanto, $Tf \in BMO$.

2.3.2. LEMA. Seja $f \in \text{BMO}$ e I um intervalo com centro na origem e de comprimento 1. Então,

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|f(x) - f_I|}{1 + |x|^2} dx \leq A \|f\|_*$$

DEMONSTRAÇÃO. Consideremos uma sequência $\{I_{2^k}\}_{k=1}^{\infty}$ de intervalos encaixados com centro na origem e comprimento 2^k , com

$$I_{2^0} \equiv I$$

e

$$S_k = I_{2^k} - I_{2^{k-1}}.$$

Consideremos agora a decomposição

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|f(x) - f_I|}{1 + |x|^2} dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{S_k} \frac{|f(x) - f_I|}{1 + |x|^2} dx.$$

Observemos que se $x \notin I_{2^{k-1}}$, então

$$(1) \quad |x| \geq 2^{k-2}$$

De fato: se $x \in I_{2^{k-1}}$, então

$$|x| < 2^{k-1}/2 = 2^{k-2}$$

o que verifica (1). Então,

$$|x|^2 \geq (2^{k-2})^2$$

e daí vem

$$1 + |x|^2 \geq |x|^2 \geq 2^{2(k-2)} = 2^{2k} \cdot 2^{-4} = 2^{2k} \cdot 4^{-2}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int_{S_k} \frac{|f(x) - f_I|}{1 + |x|^2} dx &\leq \int_{S_k} \frac{|f(x) - f_I|}{4^2 \cdot 2^{2k}} dx \\ &= 4^2 \cdot 2^{-2k} \int_{I_{2^k}} |f(x) - f_I| dx. \end{aligned}$$

Estudemos a última integral

$$\begin{aligned} (2) \quad \int_{I_{2^k}} |f(x) - f_I| dx &= \int_{I_{2^k}} |f(x) - f_{I_{2^k}} + f_{I_{2^k}} - f_I| dx \\ &\leq \int_{I_{2^k}} |f(x) - f_{I_{2^k}}| dx + \int_{I_{2^k}} |f_{I_{2^k}} - f_I| dx \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} \int_{I_{2^k}} |f(x) - f_{I_{2^k}}| dx &= |I_{2^k}| \cdot |I_{2^k}|^{-1} \int_{I_{2^k}} |f(x) - f_{I_{2^k}}| dx \\ &\leq 2^k \|f\|_* \end{aligned}$$

e também

$$\begin{aligned} |f_{I_{2^{k-1}}} - f_{I_{2^k}}| &= \left| |I_{2^{k-1}}|^{-1} \int_{I_{2^{k-1}}} f(x) dx - f_{I_{2^k}} \right| \\ &= \left| |I_{2^{k-1}}|^{-1} \int_{I_{2^{k-1}}} [f(x) - f_{I_{2^k}}] dx \right| \\ &\leq |I_{2^{k-1}}|^{-1} \int_{I_{2^{k-1}}} |f(x) - f_{I_{2^k}}| dx \\ &\leq 2^{-(k-1)} \cdot 2^k \cdot \|f\|_* \\ &= 2 \|f\|_* \end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned} |f_{I_{2^k}} - f_I| &= |f_{I_{2^k}} - f_{I_{2^{k-1}}} + f_{I_{2^{k-1}}} - \dots - f_{I_2} + f_{I_2} - f_I| \\ &\leq |f_{I_{2^k}} - f_{I_{2^{k-1}}}| + \dots + |f_{I_2} - f_I| \\ &\leq k \cdot 2 \|f\|_* \end{aligned}$$

Desta forma, temos em (2):

$$\begin{aligned} \int_{I_{2^k}} |f(x) - f_I| dx &\leq \int_{I_{2^k}} |f(x) - f_{I_{2^k}}| dx + \int_{I_{2^k}} |f_{I_{2^k}} - f_I| dx \\ &\leq 2^k \|f\|_* + |I_{2^k}| \cdot 2^k \|f\|_* \\ &= 2^k (1 + 2k) \|f\|_* \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \frac{|f(x) - f_I|}{1 + |x|^2} dx &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{S_k} \frac{|f(x) - f_I|}{1 + |x|^2} dx \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} 4^2 \cdot 2^{-2k} \int_{I_{2^k}} |f(x) - f_I| dx \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} 4^2 \cdot 2^{-2k} \cdot 2^k (1 + 2k) \|f\|_* \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} 4^2 \cdot 2^{-k} (1 + 2k) \|f\|_* \\ &= 4^2 \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} (1 + 2k) \|f\|_* \\ &= A \cdot \|f\|_* \end{aligned}$$

CAPÍTULO III

O TEOREMA DA DUALIDADE

O objetivo principal deste capítulo é demonstrar o teorema de dualidade de Feffermann: $(H^1)' = BMO$. Começaremos estudando o problema dos subespaços densos de H^1 . Observamos que, na literatura, este problema não é tratado (ver Ortiz [3] e Reimann-Rychener [4]) ou é tratado de forma obscura (ver Stein [7]). Seguiremos aqui as idéias de Sato [5]. O desenvolvimento do teorema da dualidade foi inspirado tanto no trabalho original de Fefferman-Stein [2] quanto no de Reimann-Rychener [4]. A exposição aqui tentará ser a mais clara e completa possível.

3.1. UM TEOREMA DE DENSIDADE

Usaremos as seguintes notações:

$S(\mathbb{R})$: espaço das funções infinitamente diferenciáveis sobre $\mathbb{R}$ com valores reais e decrescimento rápido.

$C_c^\infty(\mathbb{R})$: espaço das funções infinitamente diferenciáveis sobre $\mathbb{R}$ com valores complexos e suporte compacto.

3.1.1. DEFINIÇÃO. Chamaremos $H_O^1(\mathbb{R})$ o espaço

$$H_O^1(\mathbb{R}) = H_{Hb}^1(\mathbb{R}) \cap S(\mathbb{R}).$$

3.1.2. LEMA. Seja G_1 o espaço das funções $f \in L^1(\mathbb{R})$ com valores reais tais que

$$(1) \quad \text{supp } \hat{f} \text{ é compacto}$$

e

$$(2) \quad 0 \notin \text{supp } \hat{f}$$

Seja $H_{00}^1(\mathbb{R})$ o espaço das funções $f \in S(\mathbb{R})$ que verificam (1) e (2). Então

$$(3) \quad H_{00}^1(\mathbb{R}) \subset G_1 \subset H_{Hb}^1(\mathbb{R})$$

e $H_{00}^1(\mathbb{R})$ é denso em G_1 .

DEMONSTRAÇÃO. A primeira inclusão em (3) é evidente, uma vez que $C_c^\infty(\mathbb{R})$ é um subespaço de $L^1(\mathbb{R})$.

Mostremos a segunda inclusão. Seja $f \in G_1$ e K um compacto de $\mathbb{R}$ tal que K é vizinhança compacta de $\text{supp } \hat{f}$ e $0 \notin K$. Podemos agora escolher uma função $M \in S(\mathbb{R})$ com valores reais tal que

$$(4) \quad \hat{M} \in C_c^\infty(\mathbb{R})$$

e

$$(5) \quad \text{Se } \xi \in K, \text{ então } \hat{M}(\xi) = -i\xi/|\xi|$$

Então,

$$Hf = M * f$$

o que se verifica através da transformada de Fourier. (sendo $\hat{M}$ calculada no sentido de distribuição). Como $M * f \in L^1(\mathbb{R})$, temos que $Hf \in L^1(\mathbb{R})$ e portanto $f \in H_{Hb}^1$.

Mostraremos que $H_{oo}^1(\mathbb{R})$ é denso em G_1 por etapas. Na primeira etapa, provaremos que existe $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ tal que

$$\psi(x) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(\xi) e^{ix\xi} d\xi$$

verifica as condições

(6) ψ tem valores reais

e

(7) $\psi(0) = 1$.

De fato: sabemos que existe $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}} \rho(\xi) d\xi = 1.$$

Definimos então

$$\varphi(\xi) = 1/2 [\rho(\xi) + \overline{\rho(-\xi)}].$$

Vemos então que a função ψ verifica (6) e (7).

Numa segunda etapa, vamos tomar $f \in G_1$ e mostrar que existe uma sequência $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ em $H_{00}^1(\mathbb{R})$ que converge para $f \in G_1$ em H_{Hb}^1 . Definimos a sequência $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ por:

$$f_k(x) = \psi(x/k) f(x).$$

Então

$$\hat{f}_k(\xi) = \int_{\mathbb{R}} k \varphi(kx) \hat{f}(\xi - x) dx$$

Para k suficientemente grande, temos que $\hat{f}_k(\xi) \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ e também $\text{supp } \hat{f} \subset K$. Assim, $f_k \in H_{00}^1(\mathbb{R})$ para todo k suficientemente grande. Mostremos agora que

$$f_k \longrightarrow f \quad (k \rightarrow \infty)$$

em H_{Hb}^1 . De fato, temos que

$$Hf_k - Hf = M * (f_k - f)$$

Logo,

$$\|Hf_k - Hf\|_{L^1} \leq \|M\|_{L^1} \cdot \|f_k - f\|_{L^1}$$

Como

$$f_k(x) = \psi(x/k) f(x)$$

e também $\psi(0) = 1$. Teremos, pelo Teorema da convergência dominada, que

$$\|f_k - f\|_{L^1} \longrightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty)$$

e assim, $f_k \longrightarrow f \quad (k \rightarrow \infty)$ em H_{Hb}^1 .

3.1.3. LEMA. Seja G_2 o espaço das funções $f \in H_{Hb}^1$ tais que o suporte de $\hat{f}$ está a uma distância positiva da origem, ou seja

$$(1) \quad \text{supp } \hat{f} \subset (-\infty, -\epsilon] \cup [\epsilon, \infty) \quad , \quad \epsilon > 0$$

Então,

$$(2) \quad G_1 \subset G_2 \subset H_{Hb}^1$$

e

$$(3) \quad G_1 \text{ é denso em } G_2 .$$

DEMONSTRAÇÃO. Mostremos inicialmente que existe uma função $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tal que

(4) $\varphi \equiv 1$ numa vizinhança do zero

e

$$(5) \quad \phi(x) = 1/2\pi \int \varphi(\xi) e^{ix\xi} d\xi$$

tem valores reais.

De fato: Tomemos $\varphi^1 \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ tal que $\varphi^1 \equiv 1$ numa vizinhança do zero. Então colocamos

$$\varphi(\xi) = 1/2 [\varphi^1(\xi) + \overline{\varphi^1(-\xi)}]$$

que verifica (4) e (5). Seja $f \in G_2$ e f_k a sequência

$$f_k(x) = \int k\varphi(k\xi) f(x - \xi) d\xi \equiv \phi_k * f$$

Mostremos que $f_k \in G_1$. Por definição, f_k tem valores reais e pertence a $L^1(\mathbb{R})$. Também,

$$\hat{f}_k(\xi) = \varphi(\xi/k) \hat{f}(\xi)$$

Logo, $\text{supp } \hat{f}_k$ é compacto e não contém a origem. Consequentemente $f_k \in G_1$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Mostremos agora que $f_k \longrightarrow f$ em H_{Hb}^1 . Temos que

$$Hf_k = (Hf)_k .$$

Além disso, como $Hf \in L^1(\mathbb{R})$ e usando as definições de f_k e de ϕ , teremos que

$$Hf_k \longrightarrow Hf \quad (k \longrightarrow \infty)$$

em norma L^1 , ou seja, $f_k \longrightarrow f \quad (k \longrightarrow \infty)$ em H_{Hb}^1 .

3.1.4. LEMA. G_2 é denso em H_{Hb}^1 .

DEMONSTRAÇÃO. Seja $f \in H_{Hb}^1$. Utilizando a definição de ϕ do lema 3.1.3, definimos a sequência $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ por:

$$f_k(x) = f(x) - \int k\phi(kx')f(x-x')dx' .$$

Mostremos que $f_k \in G_2$. Sendo

$$\hat{f}_k(\xi) = [1 - \phi(\xi/k)] \hat{f}(\xi)$$

então o suporte de $\hat{f}_k$ está a uma distância positiva da origem. Além disso, $f_k \in H_{Hb}^1$ pois f é integrável e ainda

$$Hf_k = (Hf)_k$$

o que implica que $Hf_k \in L^1(\mathbb{R})$, uma vez que $Hf \in L^1(\mathbb{R})$.

Mostremos agora que f_k converge para f em H_{Hb}^1 . Para tanto, é suficiente mostrar que: se $f \in L^1(\mathbb{R})$ e

$$\int f(x) dx = 0$$

em quase toda parte, então

$$\int k \phi(kx') f(x - x') dx' \longrightarrow 0$$

em norma L^1 . Com efeito: temos que

$$\int k \phi(kx') f(x - x') dx' = \int k [\phi(k(x-x')) - \phi(kx)] f(x') dx'$$

Também

$$\begin{aligned} (1) \quad & \left| \int \left| \int k \phi(kx') f(x - x') dx' \right| dx \right| \leq \\ & \leq \int \int |k [\phi(k(x-x')) - \phi(kx)]| dx |f(x')| dx' \\ & \leq \int \int |\phi(x - kx') - \phi(x)| dx |f(x')| dx' \end{aligned}$$

Como ϕ é integrável em $\mathbb{R}$, teremos

$$(2) \quad \int |\phi(x - kx') - \phi(x)| dx \leq 2 \int |\phi(x)| dx < \infty.$$

Quando $k \rightarrow 0$, o primeiro membro de (2) tende a zero, para todo $x' \in \mathbb{R}$. Pelo Teorema da Convergência dominada, o último membro de (1) converge a zero quando $k \rightarrow 0$. Consequentemente, o primeiro membro de (1) tende a zero quando $k \rightarrow 0$. Assim, f_k converge a f em H_{Hb}^1 .

3.1.5. PROPOSIÇÃO. Seja $H_{oo}^1(\mathbb{R})$ o espaço em 3.1.2. Então, $H_{oo}^1(\mathbb{R})$ é denso em $H_{Hb}^1(\mathbb{R})$.

DEMONSTRAÇÃO. Pelo lema 3.1.2, $H_{oo}^1(\mathbb{R})$ é denso em G_1 , que pelo lema 3.1.3, é denso em G_2 . O lema 3.1.4 nos diz que G_2 é denso em $H_{Hb}^1(\mathbb{R})$. Logo, $H_{oo}^1(\mathbb{R})$ é denso em $H_{Hb}^1(\mathbb{R})$.

3.1.6. TEOREMA. $H_o^1(\mathbb{R})$ é denso em $H_{Hb}^1(\mathbb{R})$.

DEMONSTRAÇÃO. Como $H_{oo}^1(\mathbb{R}) \subset H_{Hb}^1(\mathbb{R})$, sabemos que: se $f \in H_{oo}^1(\mathbb{R})$, então $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$, $f \in L^1(\mathbb{R})$ e $Hf \in L^1(\mathbb{R})$. Logo, como $H_o^1(\mathbb{R}) = S(\mathbb{R}) \cap H_{Hb}^1(\mathbb{R})$, temos

$$H_{oo}^1(\mathbb{R}) \subset H_o^1(\mathbb{R}) \subset H_{Hb}^1(\mathbb{R}).$$

Pela proposição 3.1.5, $H_{oo}^1(\mathbb{R})$ é denso em $H_{Hb}^1(\mathbb{R})$ e consequentemente, $H_o^1(\mathbb{R})$ é denso em $H_{Hb}^1(\mathbb{R})$.

3.2. O TEOREMA DA DUALIDADE

3.2.1. TEOREMA. Sendo $(H^1)'$ o dual de H^1 , são equivalentes:

$$(a) \quad f \in (H^1)'$$

$$(b) \quad f = f_0 + \tilde{f}_1, \quad f_0, f_1 \in L^\infty(\mathbb{R})$$

$$(c) \quad f \in \text{BMO}$$

$$(d) \quad (i) \quad \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| (1 + |x|^2)^{-1} dx < \infty$$

$$(ii) \quad \sup_Q |Q|^{-1} \int_Q \int_Q t |\nabla U(x,t)|^2 dx dt \leq A \|f\|_*^2$$

para todo cubo $Q \subset \mathbb{R}_+^2$, onde $U(x,t)$ é a integral de Poisson de f e

$$|\nabla U(x,t)|^2 = |\partial U / \partial t|^2 + |\partial U / \partial x|^2$$

DEMONSTRAÇÃO. (a) $\Rightarrow$ (b). Seja $B = L^1 \oplus L^1$. Então

$$B = \{(\varphi_0, \varphi_1) / \varphi_0, \varphi_1 \in L^1(\mathbb{R})\}$$

e sobre B consideramos a norma do gráfico:

$$\|(\varphi_0, \varphi_1)\|_B = \|\varphi_0\|_{L^1} + \|\varphi_1\|_{L^1}.$$

Consideremos

$$S = \{(\varphi_0, \varphi_1) \in B / \varphi_1 = H\varphi_0\}$$

e verifiquemos que S é um subespaço fechado de B .

Sejam $\varphi = (\varphi_0, H\varphi_0)$ e $\psi = (\psi_0, H\psi_0)$ em S e $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, com $H\varphi_0$ e $H\psi_0$ pertencentes a $L^1(\mathbb{R})$. Sendo linear a transformação de Hilbert, teremos:

$$\alpha\varphi + \beta\psi = (\alpha\varphi_0, \alpha H\varphi_0) + (\beta\psi_0, \beta H\psi_0)$$

$$= (\alpha\varphi_0 + \beta\psi_0, \alpha H\varphi_0 + \beta H\psi_0)$$

$$= (\alpha\varphi_0 + \beta\psi_0, H(\alpha\varphi_0 + \beta\psi_0)).$$

Além disso, sendo $\varphi_0, \psi_0 \in L^1(\mathbb{R})$, $\alpha\varphi_0 + \beta\psi_0$ também pertence a $L^1(\mathbb{R})$ e consequentemente $\alpha\varphi + \beta\psi$ pertence a S , o que prova que S é um subespaço de B . Mostremos agora que S é fechado. Tomemos uma sequência $(\varphi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ em S ,

$$\varphi_i = (\varphi_{0i}, H\varphi_{0i}), \quad i \in \mathbb{N}$$

que converge para $h = (h_0, h_1)$, $h \in B$. Vamos mostrar que $h \in S$.

Com efeito: Se $(\varphi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ converge para h , então

$$\varphi_{o_i} \longrightarrow h_o \quad (i \longrightarrow \infty)$$

e

$$\varphi_{o_i} \longrightarrow h_1 \quad (i \longrightarrow \infty).$$

Como $\varphi_{o_i} \in L^1(\mathbb{R})$ e L^1 é completo, então $h_o \in L^1(\mathbb{R})$. Também pelo fato da Transformada de Hilbert ser contínua em H_{Hb}^1 teremos

$$\lim_{i \rightarrow \infty} H\varphi_{o_i} = H(\lim_{i \rightarrow \infty} \varphi_{o_i}) = Hh_o = h_1.$$

Assim, $h = (h_o, h_1) \in S$ e S é fechado em B .

Verifica-se também que a aplicação

$$g : H_{Hb}^1 \longrightarrow S$$

$$\varphi_o \longmapsto (\varphi_o, H\varphi_o)$$

é uma isometria de espaços de Banach.

De fato: se φ e ψ estão em H_{Hb}^1 , vamos ter

$$\|g(\varphi) - g(\psi)\|_S = \|(\varphi_o, H\varphi_o) - (\psi_o, H\psi_o)\|_S$$

$$= \|(\varphi_o - \psi_o, H\varphi_o - H\psi_o)\|_S$$

$$= \|(\varphi_o - \psi_o, H(\varphi_o - \psi_o))\|_S$$

$$= \|\varphi_0 - \psi_0\|_{L^1} + \|H(\varphi_0 - \psi_0)\|_{L^1}$$

$$= \|\varphi - \psi\|_{H_{Hb}^1}$$

Assim, H_{Hb}^1 é isométrico a $S \subset B$ e podemos considerar $H_{HB}^1 \subset B$.

Por outro lado, todo funcional linear contínuo sobre H_{Hb}^1 pode ser identificado com um funcional linear contínuo sobre S ; logo, pelo teorema de Hann-Banach, este funcional se estende a um funcional linear contínuo sobre B . Observemos que $B' = L^\infty \oplus L^\infty$, já que $(L^1)' = L$. Fixemos nosso argumento sobre $S \simeq H_{Hb}^1$. Se ℓ é um funcional linear contínuo sobre H_{Hb}^1 , então ℓ pode ser expresso como um funcional linear contínuo sobre S e estendido a um funcional linear contínuo sobre B . Então, existem $f_0, f_1 \in L^\infty(\mathbb{R})$ tais que

$$\ell(\varphi)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f_0(x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} H\varphi(x) f_1(x) dx$$

Pelo caráter anti-hermitiano da Transformada de Hilbert temos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} H\varphi(x) f_1(x) dx = - \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) Hf_1(x) dx$$

onde $\varphi \in H_O^1 = H_{Hb}^1 \cap S$ e $f_1 \in L^\infty(\mathbb{R})$. Teremos então:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \ell(\varphi)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f_0(x) dx - \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) Hf_1(x) dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) [f_0(x) - Hf_1(x)] dx
 \end{aligned}$$

Assim, verifica-se que todo funcional linear contínuo sobre H_0^1 tem a representação (1), ou seja, se $f \in (H^1)'$, então $f = f_0 + Hf_1$, onde $f_0, f_1 \in L^\infty(\mathbb{R})$. Considerando que H_0^1 é denso em H_{Hb}^1 (3.1.6), obtemos (b).

(b) $\Rightarrow$ (c). Observemos inicialmente que a Transformada de Hilbert é um operador integral singular e se $f_1 \in L^\infty(\mathbb{R})$, pelo Teorema 2.3.1, $Hf_1 \in BMO$; como $f_0 \in L^\infty$ e $L^\infty \subset BMO$, também $f_0 \in BMO$ e assim $f = f_0 + Hf_1$ está em BMO .

(c) $\Rightarrow$ (d). (i) Se $f \in BMO$, pelo Lema 2.3.2, temos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(x)|}{1 + |x|^2} dx \leq A \|f\|_* < \infty$$

(c) $\Rightarrow$ (d). (ii) Seja $f \in BMO$ e assumimos que para $h > 0$,

$$Q = (-h/2, h/2) \times (0, h).$$

Consideremos o intervalo $(-2h, 2h) \subset \mathbb{R}$, χ a sua função característica e $\tilde{\chi} = 1 - \chi$ a função característica de $\mathbb{R} - (-2h, 2h)$.

Sabemos que

$$f_{2h} = 1/4h \int_{-2h}^{2h} f(x) dx$$

é o valor médio de f sobre $(-2h, 2h)$. Então

$$f = f_{2h} + (f - f_{2h}) \chi + (f - f_{2h}) \tilde{\chi} = f_1 + f_2 + f_3.$$

Fazendo a convolução de f com o núcleo de Poisson,

$$P_t(x) = c t (x^2 + t^2)^{-1}$$

teremos

$$U(x, t) = P_t * f(x)$$

$$= P_t * f_1(x) + P_t * f_2(x) + P_t * f_3(x)$$

$$= U_1(x, t) + U_2(x, t) + U_3(x, t)$$

Logo,

$$\int_{-h/2}^{h/2} \int_0^h t |\nabla U(x, t)|^2 dt dx = \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^h t |\nabla U_1(x, t)|^2 dt dx +$$

$$+ \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^h t |\nabla U_2(x, t)|^2 dt dx +$$

$$+ \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^h t |\nabla U_3(x, t)|^2 dt dx .$$

Examinemos cada uma destas integrais; como $f_1 = f_{2h}$ é constante, teremos

$$\nabla U_1(x, t) = \nabla(P_t * f_1(x)) = P_t * \nabla f_1(x) = 0$$

e então

$$(2) \quad \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^h t |\nabla U_1(x, t)|^2 dt dx = 0$$

Também,

$$(3) \quad \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^h t |\nabla U_2(x, t)|^2 dt dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} t |\nabla U_2(x, t)|^2 dt dx .$$

Consideremos a g -função que é definida por

$$g(f)(x) = \left(\int_0^{\infty} t |\nabla U(x, t)|^2 dt \right)^{1/2}$$

onde $U(x, t)$ é a integral de Poisson de f . Verifica-se que

$$\|g(f)\|_{L^2} = 1/\sqrt{2} \|f\|_{L^2}$$

Assim, de (3) temos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} t |\nabla U_2(x, t)|^2 dt dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_0^{\infty} t |\nabla U_2(x, t)|^2 dt \right] dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} [g(f_2)(x)]^2 dx$$

$$= \|g(f_2)\|_{L^2}^2$$

$$= 1/2 \|f\|_{L^2}^2$$

$$= 1/2 \int_{-2h}^{2h} |f(x) - f_{2h}| dx$$

$$\leq A_1 2h \|f\|_*^2$$

uma vez que se $f \in BMO$ isto implica que

$$\sup_I |I|^{-1} \int_I |f(x) - f_I|^2 dx \leq A \|f\|_*^2$$

Para analisarmos a terceira integral, examinemos as estimativas:

$$|\partial P_{t/\partial t}| = | [c(t^2+x^2) - 2t^2c] / (t^2+x^2)^2 | = | c / (t^2+x^2) | = P_t(x) \cdot t^{-1}$$

e

$$|\partial P_t / \partial x| = |(-2xct) / (t^2 + x^2)^2| \leq$$

$$\leq |-2c / (x^2 + t^2)| \cdot |tx / 2tx| = P_t(x) \cdot t^{-1}.$$

Teremos então

$$|\nabla P_t(x)| \leq P_t(x) \cdot t^{-1}$$

e

$$|\nabla P_t(x-y)| \leq P_t(x-y) \cdot t^{-1}.$$

Vem daí que

$$(4) \quad |\nabla U_3(x, t)| = \left| \nabla \int_{\mathbb{R}} P_t(x-y) f_3(y) dy \right|$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}} |\nabla P_t(x-y) f_3(y)| dy$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}} P_t(x-y) \cdot t^{-1} |f_3(y)| dy$$

$$= \int_{|y| \geq 2h} c(t^2 + |x-y|^2)^{-1} |f(y) - f_{2h}| dy$$

Para $(x, t) \in Q = (-h/2, h/2) \times (0, h)$, temos

$$t^2 + |x-y|^2 \geq |x-y|^2 \geq |y|^2 - |x|^2 \geq |y|^2 + h^2$$

Portanto, em (3) teremos:

$$(5) \quad |\nabla U_3(x,t)| \leq \int_{|y| \geq 2h} c(|y|^2 + h^2)^{-1} |f(y) - f_{2h}| dy$$

Pelo lema 2.3.2,

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|f(x) - f_I|}{1 + |x|^2} dx \leq A' \|f\|_*$$

quando I é o intervalo de centro na origem e comprimento 1. Fazendo a troca de variáveis $x \rightarrow x/\delta$, teremos:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|f(x) - f_I|}{\delta^2 + |x|^2} dx \leq A''(1/\delta) \|f\|_*$$

Então, em (5):

$$|\nabla U_3(x,t)| \leq A_2(1/h) \|f\|_*$$

com $A_2 = A''$. Assim,

$$\begin{aligned}
 (6) \quad \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^h t |\nabla U_3(x, t)|^2 dt dx &\leq \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^h t (A_2^2 h^{-2} \|f\|_*^2) dt dx \\
 &= A_2^2 h^{-2} \|f\|_*^2 \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^h t dt dx \\
 &= A_2^2 h^{-2} \|f\|_*^2 \int_{-h/2}^{h/2} (h^2/2) dx \\
 &= A_2^2 h^{-2} \|f\|_*^2 h \cdot (h^2/2) \\
 &\leq A_3 h \|f\|_*^2
 \end{aligned}$$

Finalmente, temos de (2), (3) e (6),

$$\begin{aligned}
 \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^h t |\nabla U(x, t)|^2 dt dx &\leq A_1 2h \|f\|_*^2 + A_3 h \|f\|_*^2 \\
 &= 2h \|f\|_*^2 (A_1 + A_3) \\
 &\leq A |Q| \|f\|_*^2
 \end{aligned}$$

E assim,

$$\sup |Q|^{-1} \iint_Q t |\nabla U(x, t)|^2 dx dt \leq A \|f\|_*^2$$

o que prova a implicação $(c) \Rightarrow (d)$ (ii).

$(d) \Rightarrow (a)$. Para provar esta implicação vamos usar a função auxiliar

$$g(f) = \left(\int_0^\infty t |Vf|^2 dt \right)^{1/2}$$

e também a caracterização de H^1 através da transformada de Hilbert, dada em 1.1.1.

Seja $\varphi \in H^1(\mathbb{R}_+)$. Então, $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ e $H\varphi \in L^1(\mathbb{R})$, sendo que

$$F(x,t) = (\varphi(x,t), H\varphi(x,t))$$

pertence a $H^1_{\text{ANAL.}}$, com $\varphi(x,t) = P_t * \varphi(x)$ e $H\varphi(x,t) = P_t * H\varphi(x)$.

Por polarização, temos:

$$(f, \varphi) = 1/4 (\|f + \varphi\|^2 - \|f - \varphi\|^2)$$

Então, para f e φ em $L^2(\mathbb{R})$, teremos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x) dx = 1/4 \int_{-\infty}^{\infty} (|f + \varphi|^2 - |f - \varphi|^2) dx$$

$$= 1/4 \int_{-\infty}^{\infty} 2(|g(f+\varphi)|^2 - |g(f-\varphi)|^2) dx =$$

$$= 1/2 \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^{\infty} t |\nabla(f+\varphi)|^2 dt - \int_0^{\infty} t |\nabla(f-\varphi)|^2 dt \right) dx =$$

$$= 1/2 \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^{\infty} t \left(\left| \frac{\partial}{\partial x}(f+\varphi) \right|^2 + \left| \frac{\partial}{\partial t}(f+\varphi) \right|^2 \right) dt - \right.$$

$$\left. - \int_0^{\infty} t \left(\left| \frac{\partial}{\partial x}(f-\varphi) \right|^2 + \left| \frac{\partial}{\partial t}(f-\varphi) \right|^2 \right) dt \right) dx$$

$$= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^{\infty} t \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) dt \right) dx$$

$$= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} t \langle \nabla f, \nabla \varphi \rangle dt dx$$

Para $U(x,t) = P_t * f(x)$ e $\varphi(x,t) = P_t * \varphi(x)$, teremos

$$(7) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x) dx = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} t \langle \nabla U(x,t), \nabla \varphi(x,t) \rangle dt dx$$

Então,

$$(8) \quad \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi(x) dx \right| \leq 2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} t | \langle \nabla U(x,t), \nabla \varphi(x,t) \rangle | dt dx$$

$$\leq 2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} t | \nabla U(x,t) | | \nabla \varphi(x,t) | dt dx$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} t | \nabla U(x,t) | | F_{\epsilon}(x,t) | dt dx$$

onde F_{ϵ} é definido como em 1.1.3.(4), e

$$| \nabla \varphi(x,t) | \leq | \nabla F_{\epsilon}(x,t) |$$

uma vez que

$$| \nabla \varphi_{\epsilon}(x,t) | \geq | \nabla \varphi(x,t) |.$$

Usando a desigualdade de Holder, temos de (8) que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} t | \nabla U(x,t) | | \nabla F_{\epsilon}(x,t) | dt dx \leq$$

$$\leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} t | \nabla U(x,t) |^2 | F_{\epsilon}(x,t) | dt dx \right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{t | \nabla F_{\epsilon}(x,t) |}{| F_{\epsilon}(x,t) |} dt dx \right)^{1/2}$$

pois,

$$t |\nabla U(x, t)| \cdot |\nabla F_\varepsilon(x, t)| =$$

$$= (t^{1/2} |\nabla U(x, t)| |F_\varepsilon(x, t)|^{1/2}) (t^{1/2} |\nabla F_\varepsilon(x, t)| \cdot |F_\varepsilon(x, t)|^{-1/2}).$$

Vamos estimar a primeira integral; inicialmente, temos de 1.1.3.(5) que

$$|F_\varepsilon(x, 0)|^2 = |F(x, \varepsilon)|^2 + \varepsilon |G(x, 0)|^2$$

$$f_\varepsilon(x, t) = P_t * f_\varepsilon(x)$$

e também $|F_\varepsilon(x, t)|^q$ é subharmônica. Também obtemos de 1.1.3 (7) que

$$\Delta(|F_\varepsilon(x, t)|^q - f_\varepsilon(x, t)) \geq 0$$

Como

$$|F_\varepsilon(x, 0)| = f_\varepsilon(x, 0)$$

e com base no princípio do Máximo, teremos de 1.3.3 (6) que

$$f_\varepsilon(x, t) \geq |F_\varepsilon(x, t)|^q$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} t |\nabla U(x, t)|^2 |F_{\epsilon}(x, t)| dt dx \leq \\
 & \leq \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} t |\nabla U(x, t)|^2 f_{\epsilon}^{1/q}(x, t) dt dx \leq \\
 & \leq \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} t |\nabla U(x, t)|^2 |F_{\epsilon}(x, 0)| dt dx = \\
 & = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^{\infty} t |\nabla U(x, t)|^2 dt \right) |F_{\epsilon}(x, 0)| dx \\
 & \leq A \|f\|_*^2 \int_{-\infty}^{\infty} |F_{\epsilon}(x, 0)| dx \\
 & \leq A \|f\|_*^2 \int_{-\infty}^{\infty} |F(x, \epsilon)| + \epsilon |G(x, 0)| dx \\
 & \leq A \|f\|_*^2 \int_{-\infty}^{\infty} \sup_{t>0} |F(x, t)| dx + \epsilon A \|f\|_*^2 \int_{-\infty}^{\infty} |G(x, 0)| dx \\
 & \leq (A \sup_{t>0} \int_{-\infty}^{\infty} |F(x, t)| dx + \epsilon A) \|f\|_*^2 \\
 & \leq (A \|F\|_{H_{ANAL}^1} + \epsilon A) \|f\|_*^2 \leq (A \|\varphi\|_{H_{Hb}^1} + \epsilon A) \|f\|_*^2 .
 \end{aligned}$$

No limite para $\varepsilon \longrightarrow 0$ temos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} t |\nabla U(x, t)|^2 |F(x, t)| dt dx \leq A \| \varphi \|_{H_{Hb}^1} \| f \|_*^2$$

Para estimar a segunda integral,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} t |\nabla F_{\varepsilon}(x, t)|^2 |F_{\varepsilon}(x, t)|^{-1} dt dx$$

usaremos a fórmula de Green para t e $|F_{\varepsilon}(x, t)|$ o domínio $R = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 / |(x, t)| \leq r\} \cap \overline{\mathbb{R}_+^2}$ e as estimativas

$$|\nabla G(x, t)| \leq O((1 + |x| + t)^{-3})$$

$$|\Delta G(x, t)| \leq O((1 + |x| + t)^{-4})$$

que decorrem das propriedades da função G .

Pelo Lema 14 (Apêndice), temos também que

$$|\nabla F_{\varepsilon}(x, t)|^2 |F_{\varepsilon}(x, t)|^{-1} \leq A \Delta |F_{\varepsilon}(x, t)|$$

Logo,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} t |\nabla F_{\varepsilon}(x, t)|^2 |F_{\varepsilon}(x, t)|^{-1} dt dx \leq A \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} t \Delta |F_{\varepsilon}(x, t)| dt dx$$

Aplicando a fórmula de Green na última integral para a região R e denotando por ∂R a fronteira de R , temos:

$$\int_R t \Delta |F_\varepsilon(x, t)| dt dx = \int_{\partial R} \left(t \frac{\partial}{\partial n} |F_\varepsilon(x, t)| - |F_\varepsilon(x, t)| \frac{\partial t}{\partial n} \right) d\sigma$$

onde $\partial/\partial n$ indica o sentido da normal à curva ∂ . Obtemos então

$$\left| \int_{\partial R \cap \mathbb{R}_+^2} \left(t \frac{\partial}{\partial n} |F_\varepsilon(x, t)| - |F_\varepsilon(x, t)| \frac{\partial t}{\partial n} \right) d\sigma \right|$$

$$\leq \int_{\partial R \cap \mathbb{R}_+^2} t \frac{\partial}{\partial n} |F_\varepsilon(x, t)| d\sigma + \int_{\partial R \cap \mathbb{R}_+^2} |F_\varepsilon(x, t)| \frac{\partial t}{\partial n} d\sigma$$

$$\leq r \int_{\partial R \cap \mathbb{R}_+^2} O(r^{-3}) d\sigma + \int_{\partial R \cap \mathbb{R}_+^2} O(r^{-2}) d\sigma = O(1/r)$$

Portanto, para $r \rightarrow \infty$ teremos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} t \Delta |F_\varepsilon(x, t)| dt dx = \int_{-\infty}^{\infty} |F_\varepsilon(x, 0)| dx$$

e assim

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} t |\nabla F_{\varepsilon}(x, t)|^2 |F_{\varepsilon}(x, t)|^{-1} dt dx$$

$$\leq A \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} t \Delta |F_{\varepsilon}(x, t)| dt dx$$

$$= A \int_{-\infty}^{\infty} |F_{\varepsilon}(x, 0)| dx \leq A \int_{-\infty}^{\infty} \sup_{t>0} |F(x, t)| dx + A_{\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} |G(x, 0)| dx .$$

No limite para $\varepsilon \longrightarrow 0$ temos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} t |\nabla F_{\varepsilon}(x, t)|^2 |F_{\varepsilon}(x, t)|^{-1} dt dx \leq A \|\varphi\|_{H_{Hb}^1} .$$

Juntando as estimativas obtemos:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi(x) dx &\leq (A \|\varphi\|_{H_{Hb}^1} \|f\|_{*}^2)^{1/2} \cdot (A \|\varphi\|_{H_{Hb}^1})^{1/2} \\ &= A \|\varphi\|_{H_{Hb}^1} \|f\|_{*} . \end{aligned}$$

Assim, para $f \in BMO$ temos que o funcional

$$\begin{aligned} \ell f : H_{Hb}^1 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\longrightarrow \int f(x) \varphi(x) dx \end{aligned}$$

pertence a $(H_{Hb}^1)'$ e ainda

$$\|\ell f\|_{(H_{Hb}^1)'} \leq A \|f\|_{*}$$

CAPÍTULO IV

OS ESPAÇOS DE HARDY $H^1_{\text{ATOM}}(\mathbb{R})$.

Estudaremos neste capítulo o problema da decomposição atômica dos espaços $H^1(\mathbb{R})$. Isto será feito introduzindo os espaços H^1 atômicos e mostrando que coincidem com os espaços $H^1(\mathbb{R})$ habituais. A demonstração deste fato envolve a caracterização de H^1 via transformada de Hilbert e o teorema da dualidade. Seguiremos aqui as idéias de Axler [1].

4.1. OS ESPAÇOS DE HARDY $H^{1,2}$ ATÔMICOS

4.1.1. DEFINIÇÃO. Uma função real $\alpha \in L^2(\mathbb{R})$ é chamada 2-átomo se tiver suporte compacto e se as seguintes condições forem verificadas:

$$(1) \quad \|\alpha\|_{L^2}^2 \leq 1/|I|$$

para I um intervalo tal que $\text{supp } f \subset I$, e

$$(2) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x) dx = 0$$

4.1.2. LEMA. Para todo 2-átomo α temos:

$$(1) \quad \|\alpha\|_{L^1} \leq 1.$$

DEMONSTRAÇÃO

$$\begin{aligned} \|\alpha\|_{L^1} &= \int_{-\infty}^{\infty} |\alpha(x)| dx \\ &= \int_I |\alpha(x)| dx \\ &\leq \left(\int_I dx \right)^{1/2} \left(\int_I |\alpha(x)|^2 dx \right)^{1/2} \\ &\leq |I|^{1/2} (1/|I|)^{1/2} = 1. \end{aligned}$$

4.1.3. LEMA. Se $(\lambda_n) \in \ell^1(\mathbb{N})$ e (α_n) é uma sequência de 2-átomos, então a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \alpha_n$$

converge em $L^1(\mathbb{R})$.

DEMONSTRAÇÃO. Imediata.

4.1.4. DEFINIÇÃO. O espaço de Hardy atômico $H_{\text{ATOM}}^{1,2}(\mathbb{R})$ é o subespaço de $L^1(\mathbb{R})$ formado pelas funções f que admitem uma representação

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \alpha_n(x)$$

com $(\lambda_n) \in l^1(\mathbb{N})$ e (α_n) sequência de 2-átomos. Equipamos $H_{\text{ATOM}}^{1,2}$ com a norma

$$\|f\|_{H_{\text{ATOM}}^{1,2}} = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| \mid f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \alpha_n(x) \right\}$$

4.1.5. TEOREMA. Vamos ter

$$(1) \quad H_{\text{ATOM}}^{1,2} \subset H_{\text{Hb}}^1$$

e a imersão é contínua.

DEMONSTRAÇÃO. Seja $f \in H_{\text{ATOM}}^{1,2}$. Então

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \alpha_n$$

onde (α_n) é uma sequência de 2-átomos e (λ_n) é tal que $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| < \infty$. Pelo lema 4.1.2, temos:

$$\|f\|_{L^1} = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \alpha_n \right\|_{L^1} \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| \|\alpha_n\|_{L^1} \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| < \infty$$

e assim $f \in L^1(\mathbb{R})$. Vamos provar agora que $H\alpha_n \in L^1(\mathbb{R})$.

De fato: se α é um 2-átomo e $\text{supp } \alpha \subset I$, então

$$\begin{aligned} \|H\alpha\|_{L^1} &= \int_{\mathbb{R}} |(H\alpha)(x)| dx = \int_I |(H\alpha)(x)| dx \\ &\leq \left(\int_I dx \right)^{1/2} \cdot \left(\int_I |(H\alpha)(x)|^2 dx \right)^{1/2} \\ &= |I|^{1/2} \cdot \|H\alpha\|_{L^2} \\ &\leq |I|^{1/2} \cdot \|\alpha\|_{L^2} \\ &\leq |I|^{1/2} \cdot |I|^{-1/2} < \infty . \end{aligned}$$

Assim, se $f_N = \sum_{n=1}^N \lambda_n \alpha_n$, teremos

$$\begin{aligned} \|Hf_N\|_{L^1} &= \left\| \sum_{n=1}^N \lambda_n H\alpha_n \right\|_{L^1} \leq \sum_{n=1}^N |\lambda_n| \|H\alpha_n\|_{L^1} \\ &\leq \sum_{n=1}^N |\lambda_n| < \infty \end{aligned}$$

Por continuidade, teremos que $Hf \in L^1(\mathbb{R})$ para $f = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \alpha_n$. Isto implica que $f \in H_{Hb}^1$.

4.1.6. LEMA. Seja α um 2-átomo e $g \in BMO_2$. Então

$$(1) \quad \left| \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x) g(x) dx \right| \leq \|g\|_{BMO}.$$

DEMONSTRAÇÃO.

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x) g(x) dx \right| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x) [g(x) - g_I] dx \right|$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty} |\alpha(x)| |g(x) - g_I| dx$$

$$\leq \|\alpha\|_{L^2} \cdot \|g\|_{BMO_2}$$

$$\leq \|g\|_{BMO_2}.$$

4.1.7. LEMA. Seja $g \in BMO_2$ e I um intervalo fechado. Então, existe um 2-átomo α tal que

$$(1) \quad |I|^{-1} \int_I |g(x) - g_I| dx \leq 2 \left| \int_I \alpha(x) g(x) dx \right|$$

DEMONSTRAÇÃO. Sejam

$$I_1 = \{x \in I / g(x) - g_I \geq 0\}$$

e

$$I_2 = \{x \in I / g(x) - g_I < 0\}$$

Suponhamos $|I_1| \leq |I_2|$. Definimos

$$\alpha(x) = \begin{cases} 1/|I| & \text{se } x \in I_1 \\ -(1/|I|)(|I_1|/|I_2|) & \text{se } x \in I_2 \\ 0 & \text{se } x \notin I \end{cases}$$

Verifiquemos agora que α é um 2-átomo. Em primeiro lugar, $\text{supp } \alpha \subset I$ por construção. Agora

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |\alpha(x)|^2 dx &= \int_I |\alpha(x)|^2 dx \\ &= \int_{I_1} |\alpha(x)|^2 dx + \int_{I_2} |\alpha(x)|^2 dx \\ &= \int_{I_1} |I|^{-2} dx + \int_{I_2} |I|^{-2} (|I_1|/|I_2|)^2 dx \\ &= |I_1| |I|^{-2} + |I_2| |I|^{-2} (|I_1|/|I_2|)^2 \\ &= |I|^{-2} (|I_1| + |I_2|) = |I|^{-1} \end{aligned}$$

BC/496J

o que verifica 4.1.1 (1). Também

$$\int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x) dx = \int_{I_1} \alpha(x) dx + \int_{I_2} \alpha(x) dx$$

$$= |I_1| |I|^{-1} + |I_2| (-1/|I|) (|I_1|/|I_2|)$$

$$= |I|^{-1} [|I_1| - |I_2| (|I_1|/|I_2|)] = 0$$

o que verifica 4.1.1 (2). Mostremos agora que

$$(2) \quad \alpha(x) [g(x) - g_I] \geq 0$$

e

$$(3) \quad \int_I |g(x) - g_I| dx = 2 \int_{I_1} |g(x) - g_I| dx = 2 \int_{I_2} |g(x) - g_I| dx .$$

De fato. Se $x \in I_1$, então

$$|I|^{-1} [g(x) - g_I] \geq 0 .$$

Se $x \in I_2$, então

$$- [g(x) - g_I] \geq 0$$

e assim,

$$-|I|^{-1}(|I_1|/|I_2|)|g(x) - g_I| \geq 0$$

o que verifica (2). Ainda,

$$\int_I |g(x) - g_I| dx = \int_{I_1} |g(x) - g_I| dx + \int_{I_2} |g_I - g(x)| dx .$$

Como

$$\begin{aligned} \int_I |g_I - g(x)| dx &= \int_{I_1} |g_I - g(x)| dx + \int_{I_2} |g_I - g(x)| dx \\ &= \int_{I_1} -[g(x) - g_I] dx + \int_{I_2} -[g(x) - g_I] dx = 0 \end{aligned}$$

uma vez que $g(x) - g_I \geq 0$ em I_1 e $g(x) - g_I < 0$ em I_2 . Teremos então:

$$\int_{I_1} |g_I - g(x)| dx = \int_{I_2} |g_I - g(x)| dx$$

Logo,

$$\int_I |g(x) - g_I| dx = 2 \int_{I_1} |g(x) - g_I| dx = 2 \int_{I_2} |g_I - g(x)| dx$$

e isto implica (3). Finalmente,

$$|I|^{-1} \int_I |g(x) - g_I| dx \leq 2 |I|^{-1} \int_{I_1} |g(x) - g_I| dx$$

$$= 2 \int_{I_1} |I|^{-1} [g(x) - g_I] dx$$

$$= 2 \int_{I_1} \alpha(x) [g(x) - g_I] dx$$

$$\leq 2 \int_I \alpha(x) |g(x) - g_I| dx$$

$$= 2 \left| \int_I \alpha(x) [g(x) - g_I] dx \right|$$

$$= 2 \left| \int_I \alpha(x) g(x) dx - \int_I \alpha(x) g_I dx \right|$$

$$= 2 \left| \int_I \alpha(x) g(x) dx \right|$$

4.1.8. PROPOSIÇÃO. $H_{\text{ATOM}}^{1,2}$ é fechado em H_{Hb}^1 .

DEMONSTRAÇÃO. Seja

$$J : H_{\text{ATOM}}^1 \longrightarrow H_{\text{Hb}}^1$$

a imersão contínua de $H_{\text{ATOM}}^{1,2}$ em H_{Hb}^1 , ou seja, $J(f) = f$.

Assim, J está bem definida e é linear. Mostremos que $J(H_{\text{ATOM}}^{1,2})$ é fechado em H_{Hb}^1 . Seja

$$T : \text{BMO} \longrightarrow (H_{\text{Hb}}^1)',$$

$$g \longrightarrow Tg$$

com

$$Tg(f) = \int_{\mathbb{R}} g(x) f(x) dx$$

para toda função $f \in H_{\text{O}}^1$. Considerando a aplicação transposta

$$J^* : (H_{\text{Hb}}^1)' \longrightarrow (H_{\text{ATOM}}^{1,2})'$$

teremos o diagrama

$$\begin{array}{ccc} (H_{\text{Hb}}^1)' & \xrightarrow{J^*} & (H_{\text{ATOM}}^{1,2})' \\ & \nwarrow T \quad \nearrow J^* \circ T & \\ & \text{BMO} & \end{array}$$

Então, para $g \in \text{BMO}$ e α um 2-átomo, temos

$$(J^* \circ T)(g)(\alpha) = J^*(Tg)(\alpha)$$

$$= Tg(J(\alpha))$$

$$= Tg(\alpha)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} g(x) \alpha(x) dx .$$

Consideremos uma sequência de Cauchy $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $(J^* \circ T)(BMO)$, convergindo para $F \in (H_{ATOM}^{1,2})'$. Como $F_n \in (J^* \circ T)(BMO)$ para todo n , existe uma sequência $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em BMO tal que

$$(J^* \circ T)(g_n) = F_n$$

para todo n . Pelo Lema 4.1.7., como $BMO_2 = BMO$ temos:

$$|I|^{-1} \int_I |g(x) - g_I| dx \leq 2 \left| \int_{\mathbb{R}} g(x) \alpha(x) dx \right|$$

$$\leq 2 |(J^* \circ T)(g)(\alpha)|$$

$$\leq 2 \| (J^* \circ T)g \|_{(H_{ATOM}^{1,2})'} \cdot \| \alpha \|_{H_{ATOM}^{1,2}}$$

$$\leq 2 \| (J^* \circ T)g \|_{(H_{ATOM}^{1,2})'}$$

e então

$$\|g_n\|_* \leq 2 \| (J^* \circ T)g \|_{(H_{ATOM}^{1,2})'}$$

o que implica que a sequência $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em BMO é de Cauchy. Como BMO é completo, $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para $g \in \text{BMO}$. Sendo $J^* \circ T$ contínua, teremos que

$$(J^* \circ T)(g_n) \longrightarrow (J^* \circ T)(g)$$

Mas

$$(J^* \circ T)(g_n) = F_n$$

e

$$F_n \longrightarrow F \quad (n \longrightarrow \infty).$$

Então

$$F = (J^* \circ T)(g)$$

o que implica que $F \in (J^* \circ T)(\text{BMO})$ e assim $(J^* \circ T)(\text{BMO})$ é fechado em $(H_{\text{ATOM}}^{1,2})'$. Como T é sobrejetora, temos que

$$(J^* \circ T)(\text{BMO}) = J^*[(H_{\text{Hb}}^1)']$$

e portanto J^* tem imagem fechada em $(H_{\text{ATOM}}^{1,2})'$.

Assim, $J(H_{\text{ATOM}}^{1,2})$ é fechado em H_{Hb}^1 .

4.2. A DUALIDADE $H_{\text{ATOM}}^{1,2}$ - BMO.

4.2.1. DEFINIÇÃO. O subespaço de $H_{\text{ATOM}}^{1,2}$ formado pelas funções f que admitem a representação

$$f(x) = \sum_{n=1}^N \lambda_n \alpha_n(x)$$

é chamado $H_O^{1,2}(\mathbb{R})$. É fácil ver que $H_O^{1,2}$ é denso em $H_{\text{ATOM}}^{1,2}$.

4.2.2. TEOREMA. O dual de $H_{\text{ATOM}}^{1,2}$ é o espaço BMO, no seguinte sentido

(i) Para toda função $f \in \text{BMO}$, a aplicação que associa a cada 2-átomo o número real

$$\langle L_f, \alpha \rangle = \int_{\mathbb{R}} \alpha(x) f(x) dx$$

se estende a um funcional linear contínuo, que continuaremos denotando por L_f , sobre $H_{\text{ATOM}}^{1,2}$, e ainda

$$(1) \quad \|L_f\|_{(H_{\text{ATOM}}^{1,2})'} = \sup\left\{ \left| \int_{\mathbb{R}} \alpha(x) f(x) dx \right| / \alpha \in H_{\text{ATOM}}^{1,2} \right\} = \|f\|_*$$

(ii) Para todo funcional linear contínuo L sobre $H_{\text{ATOM}}^{1,2}$ existe uma função $g \in \text{BMO}$ tal que para todo 2-átomo α teremos:

$$(2) \quad \langle L, \alpha \rangle = \int_{\mathbb{R}} \alpha(x) g(x) dx$$

e por linearidade (2) permanece válida para $H_O^{1,2}$.

DEMONSTRAÇÃO. A primeira igualdade em (1) decorre de:

$$\begin{aligned} \|L_f\|_{(H_{\text{ATOM}}^{1,2})'} &= \sup \{ |L_f(\alpha)| / \alpha \in H_{\text{ATOM}}^{1,2} \} \\ &= \sup \{ \left| \int_{\mathbb{R}} \alpha(x) f(x) dx \right| / \alpha \in H_{\text{ATOM}}^{1,2} \}. \end{aligned}$$

Mostremos a segunda igualdade em (1).

Seja α um 2-átomo e $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo satisfazendo as condições da definição 4.1.1. Então:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \alpha(x) f(x) dx &= \int_{\mathbb{R}} \alpha(x) [f(x) - f_I] dx \\ &\leq \left(\int_I |\alpha(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_I |f(x) - f_I|^2 dx \right)^{1/2} \\ &= \|\alpha\|_{L^2} \cdot \left(\int_I |f(x) - f_I|^2 dx \right)^{1/2} \\ &= (|I|^{-1} \int_I |f(x) - f_I|^2 dx)^{1/2} \\ &\leq \|f\|_{\text{BMO}_2}. \end{aligned}$$

Para demonstrar a desigualdade contrária, tomemos um intervalo $I \subset \mathbb{R}$ e a função definida por

$$\alpha(x) = \frac{\chi_I[f(x) - f_I]}{\|\chi_I[f(x) - f_I]\|_{L^2} |I|^{1/2}}$$

Mostremos que $\alpha(x)$ é um 2-átomo

$$\begin{aligned} \|\alpha\|_{L^2}^2 &= \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\chi_I[f(x) - f_I]}{\|\chi_I[f(x) - f_I]\|_{L^2} |I|^{1/2}} dx \right)^2 \\ &= \|\chi_I[f(x) - f_I]\|_{L^2}^{-2} \cdot |I|^{-1} \left(\int_{\mathbb{R}} |\chi_I[f(x) - f_I]|^2 dx \right) \\ &= \|\chi_I[f(x) - f_I]\|_{L^2}^{-2} \cdot |I|^{-1} \|\chi_I[f(x) - f_I]\|_{L^2}^2 \\ &= |I|^{-1} \end{aligned}$$

Isto verifica 4.1.1. (1). Mostremos 4.1.1. (2):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi_I[f(x) - f_I]}{\|\chi_I[f(x) - f_I]\|_{L^2} |I|^{1/2}} dx$$

$$= |I|^{-1/2} \| \chi_I [f(x) - f_I] \|_{L^2}^{-1} \left| \int_I f(x) dx - \int_I f_I dx \right|$$

$$= |I|^{-1/2} \| \chi_I [f(x) - f_I] \|_{L^2}^{-1} \left[\int_I f(x) dx - \int_I f(x) dx \right] = 0$$

Verifiquemos agora que:

$$\int_{\mathbb{R}} \alpha(x) f(x) dx = (|I|^{-1} \int_I |f(x) - f_I|^2 dx)^{1/2}$$

De fato: lembrando que

$$\| \chi_I [f(x) - f_I] \|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}} | \chi_I [f(x) - f_I] |^2 dx$$

$$= \int_I |f(x) - f_I|^2 dx$$

temos

$$\int_{\mathbb{R}} \alpha(x) f(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \alpha(x) [f(x) - f_I] dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{\| \chi_I [f(x) - f_I] \|_{L^2} [f(x) - f_I]}{\| \chi_I [f(x) - f_I] \|_{L^2} |I|^{1/2}} dx$$

$$\begin{aligned}
 &= \| \chi_I [f(x) - f_I] \|_{L^2}^{-1} |I|^{-1/2} \int_I |f(x) - f_I|^2 dx \\
 &= \| \chi_I [f(x) - f_I] \|_{L^2}^{-1} |I|^{-1/2} \\
 &= (|I|^{-1} \int_I |f(x) - f_I|^2 dx)^{1/2} \\
 &= \|f\|_{BMO_2}
 \end{aligned}$$

Assim,

$$\sup \left\{ \left| \int_{\mathbb{R}} \alpha(x) f(x) dx \right| / \alpha \in H_{ATOM}^{1,2} \right\} \geq \|f\|_{BMO_2}$$

o que completa a demonstração de (i).

Mostremos agora a parte (ii). Seja $L \in (H_{ATOM}^{1,2})'$. Para um intervalo $I \subset \mathbb{R}$ que contém um intervalo I_0 , colocamos,

$$L_O^2(I) = \{b \in L^2(I) / \int_I b(x) dx = 0 \text{ qtp}\}$$

Então, $L_O^2(I) \subset H_{ATOM}^{1,2}$ continuamente. Para $f \in L_O^2(I)$, a função definida por

$$\alpha(x) = |I|^{-1/2} \|f\|_{L^2}^{-1} f(x)$$

é um 2-átomo.

De fato: $\alpha \in L^2(\mathbb{R})$ pela definição. Mostremos 4.1.1.(1) e 4.1.1.(2). Inicialmente, $\text{supp } \alpha \subset I$ pois $f \in L^2_0(I)$. Também,

$$\begin{aligned} \|\alpha\|_{L^2}^2 &= \int_{\mathbb{R}} |\alpha(x)|^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} |I|^{-1} \|f\|_{L^2}^{-2} |f(x)|^2 dx \\ &= |I|^{-1} \|f\|_{L^2}^{-2} \|f\|_{L^2}^2 = |I|^{-1} \end{aligned}$$

o que verifica 4.1.1.(1). Ainda,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} |I|^{-1/2} \|f\|_{L^2}^{-1} f(x) dx = 0$$

pelo fato de f pertencer a $L^2_0(I)$. Sendo

$$\alpha(x) = |I|^{-1/2} \|f\|_{L^2}^{-1} f(x)$$

um 2-átomo, então

$$f(x) = \|f\|_{L^2} |I|^{1/2} \alpha(x)$$

pertence a $H_{\text{ATOM}}^{1,2}$: Logo,

$$\|f\|_{H_{\text{ATOM}}^{1,2}} \leq \|f\|_L |I|^{1/2}.$$

Isto implica que $\langle L, f \rangle$ está definido e existe uma constante C independente de f tal que:

$$|\langle L, f \rangle| \leq C |I|^{1/2} \|f\|_L$$

para todo $f \in L^2_O(I)$. Então, sendo L um funcional linear contínuo limitado sobre $L^2_O(I)$, L pode ser estendido sobre $L^2(I)$ com a mesma norma (Teorema de Hahn-Banach). Pelo Teorema da Representação de Riesz, temos que existe uma função $\varphi \in L^2(I)$ tal que

$$(3) \quad \langle L, f \rangle = \int_I \varphi(x) f(x) dx = \langle \varphi, f \rangle$$

para toda $f \in L^2(I)$. Ainda,

$$\|\varphi\|_{L^2} = \sup_{\| \chi_I f \|_{L^2} = 1} \left\{ \left| \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx \right| \right\}.$$

Observemos que, quando restrita a L^2_O , podemos substituir em (3) φ por $\varphi + c$ onde c é uma constante.

Vamos agora definir uma função $g \in \text{BMO}$ que satisfaça (3). Fixemos um ponto $x_0 \in \mathbb{R}$ e consideremos os intervalos

$$B_i = (x_0 - i, x_0 + i)$$

para cada i inteiro positivo. $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ é uma sequência crescente de intervalos $\mathbb{R}$, com $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \mathbb{R}$. Consideremos ainda uma sequência de funções $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ tal que $g_i \in L^2(B_i)$ e g_i satisfaz (3) para todo i . Colocamos a condição

$$(4) \quad \int_{B_i} g_i(x) dx = 0$$

pois senão, substituiríamos g_i por

$$g_i(x) - |B_i|^{-1} \int_{B_i} g_i(x) dx$$

e teríamos

$$\begin{aligned} \int_{B_i} g_i(x) dx &= \int_{B_i} [g_i(x) - |B_i|^{-1} \int_{B_i} g_i(x) dx] dx \\ &= \int_{B_i} g_i(x) dx - |B_i|^{-1} \int_{B_i} \left[\int_{B_i} g_i(x) dx \right] dx \\ &= \int_{B_i} g_i(x) dx - \int_{B_i} g_i(x) dx = 0 \end{aligned}$$

Com esta condição satisfeita, obtemos uma função g definida em $\mathbb{R}$ da seguinte maneira:

$$g(x) = g_i(x) \quad \text{para } x \in B_i.$$

A função g está bem definida pois para cada $i \geq 1$,

$$g_{i+1}|_{B_i} = g_i.$$

De fato: sabemos que $B_i \subset B_{i+1}$ e $L^2(B_i) \subset L^2(B_{i+1})$, donde resulta que a função $g_{i+1}\chi_{B_i}$ satisfaz (3) para toda função $f \in L^2(B_i)$. Então, a função $g_{i+1}\chi_{B_i} - g_i$ é uma constante, pois ambas estão em $L^2_0(B_i)$. Logo, da condição (4) vem que

$$g_{i+1}\chi_{B_i} - g_i = |B_i|^{-1} \int_{B_i} [g_{i+1}(x)\chi_{B_i}(x) - g_i(x)] dx$$

$$= |B_i|^{-1} \int_{B_i} g_{i+1}(x)\chi_{B_i}(x) dx -$$

$$- |B_i|^{-1} \int_{B_i} g_i(x) dx = 0$$

o que implica que

$$g_{i+1}|_{B_i} = g_i$$

Mostremos agora que $g \in BMO_2$. Seja I um intervalo qualquer de $\mathbb{R}$ e $f \in L^2(I)$. Então, existem i, j inteiros positivos tais que

$$I \subset B_i \quad \text{e} \quad I \supset B_j$$

o que implica que

$$|I| \leq |B_i| \quad \text{e} \quad |B_j| \leq |I|$$

Logo,

$$\begin{aligned} |I|^{-1} \int_I |g(x) - g_I|^2 dx &\leq |I|^{-1} \int_{B_i} |g_i(x) - |I|^{-1} \int_I g(x) dx|^2 dx \\ &\leq |I|^{-1} \int_{B_i} |g_i(x) - |I|^{-1} \int_{B_j} g_j(x) dx|^2 dx \\ &= |I|^{-1} \int_{B_i} |g_i(x)|^2 dx \\ &\leq |I|^{-1} \cdot \|g_i\|_{L^2}^2 < \infty \end{aligned}$$

Portanto, como todo 2-átomo α está em L^2_O , temos

$$\langle L, \alpha \rangle = \int_{\mathbb{R}} g(x) \alpha(x) dx$$

o que demonstra (2).

A demonstração do Teorema estará completa se lembrarmos que $BMO_2 = BMO$.

4.3. DECOMPOSIÇÃO ATÔMICA DOS ESPAÇOS H_{Hb}^1

4.3.1. TEOREMA. Uma função f pertence a H_{Hb}^1 se, e somente se f pode ser decomposta como

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \alpha_n$$

com $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| < \infty$ e $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de 2-átomos.

DEMONSTRAÇÃO. No Teorema 4.1.5, vimos que

$$H_{ATOM}^{1,2} \subset H_{Hb}^1$$

e na proposição 4.1.8 foi provado que $H_{ATOM}^{1,2}$ é fechado em H_{Hb}^1 . Vamos mostrar então que $H_{ATOM}^{1,2}$ é denso em H_{Hb}^1 , ou seja

$$\overline{H_{ATOM}^{1,2}} = H_{Hb}^1$$

De fato: Suponhamos

$$\overline{H_{\text{ATOM}}^{1,2}} \subsetneq H_{\text{Hb}}^1$$

e seja

$$f \in (H_{\text{Hb}}^1 - H_{\text{ATOM}}^{1,2})$$

Então, pelo Teorema de Hahn-Banach, existe uma função $\phi \in (H_{\text{Hb}}^1)'$ tal que

$$(1) \quad \phi(f) \neq 0$$

e

$$(2) \quad \phi|_{(H_{\text{ATOM}}^{1,2})} \equiv 0$$

Mas pelos teoremas 3.2.1 e 4.2.1, temos que

$$(H_{\text{Hb}}^1)' = \text{BMO}$$

e

$$(H_{\text{ATOM}}^{1,2})' = \text{BMO}$$

Então, de (2) temos:

$$\phi | (H_{\text{ATOM}}^{1,2})' = \phi$$

e assim ϕ é a função nula, o que contradiz (1) para a função f escolhida. Logo,

$$\overline{H_{\text{ATOM}}^{1,2}} = H_{\text{Hb}}^1$$

o que implica que $H_{\text{ATOM}}^{1,2} = H_{\text{Hb}}^1$.

APÊNDICE

Indicaremos por

$$P_t(x) = c t (t^2 + x^2)^{-1}$$

o núcleo de Poisson sobre $\mathbb{R}$, com $c = 1/\pi$, $x \in \mathbb{R}$ e $t \in \mathbb{R}^+$.
Indicaremos por $f(x,t)$ a integral de Poisson de f , isto é:

$$f(x,t) = P_t * f(x) = \int_{\mathbb{R}} P_t(x-y) f(y) dy$$

1. DEFINIÇÃO. Seja $u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Dizemos que u é harmônica se

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

2. LEMA. Se $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p \leq \infty$, então $f(x,t)$ é harmônica.

3. LEMA. Seja $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$. Então

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(x,t) = f(x)$$

em quase toda parte.

4. DEFINIÇÃO. Seja $\Gamma_\alpha(x_0)$ o cone

$$\Gamma_\alpha(x_0) = \{(x,t) \in \mathbb{R}_+^2 / |x - x_0| < \alpha t\}$$

e $u : \mathbb{R}_+^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que u tem limite não tangencial L no ponto x_0 se $u(x,t)$ tende a L quando $x \longrightarrow x_0$ no interior de $\Gamma_\alpha(x_0)$, para todo número real $\alpha > 0$.

5. LEMA. Seja $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$. Então, $f(x,t)$ tem limite não tangencial $f(x)$ em quase toda parte.

6. LEMA. Seja u uma função harmônica em $\mathbb{R}_+^2$ tal que existe uma constante finita $C > 0$ satisfazendo

$$\sup_{t > 0} \|u(\cdot, t)\|_{L^1} < C$$

Então, existe $K > 0$ tal que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |u(x,t)| \leq KC/t.$$

DEMONSTRAÇÃO. Seja B a bola aberta em $\mathbb{R}^2$ de centro (x,t) e raio t . Da propriedade do valor médio, temos:

$$|u(x,t)| \leq |B|^{-1} \int_B |u(x',t')| dx' dt'$$

Consideremos agora $T = I \times J = (0, 2t) \times (x-t, x+t)$. Então, existe uma constante C_1 tal que

$$|T| = C_1 |B|$$

e além disso, temos que $B \subset T$.

Logo,

$$\begin{aligned} |B|^{-1} \int_B \int |u(x', t')| dx' dt' &\leq C_1 |T|^{-1} \int_T \int |u(x', t')| dx' dt' \\ &= C_1 |I|^{-1} |J|^{-1} \int_I \int_J |u(x', t')| dx' dt' \\ &\leq C_1 |I|^{-1} |J|^{-1} \int_I C dx' \\ &= C_1 C |I|^{-1} |J|^{-1} \cdot |I| \\ &= C_1 C / 2t = KC/t \end{aligned}$$

com $K = C_1/2$.

7. LEMA. Seja u satisfazendo as condições do lema 6. Então, u é a integral de Poisson de uma medida de Borel finita $\mu \in M(\mathbb{R})$, isto é,

$$u(x, t) = \int P_t(x - x') d\mu(x').$$

DEMONSTRAÇÃO. Por hipótese, para $t > 0$ temos que

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^1} < C.$$

Então, existe uma subsequência $u(\cdot, t')$ convergindo fracamente a uma medida $\mu \in M(\mathbb{R})$ quando $t' \rightarrow 0$, isto é,

$$\int u(x', t') g(x') dx' \longrightarrow \int g(x') d\mu(x') \quad (t' \rightarrow 0)$$

para toda $g \in C^\infty(\mathbb{R})$. Em particular, tomemos

$$g(x) = P_t(x - x').$$

Então g é contínua e se anula no infinito para $t > 0$ e para todo x fixo em $\mathbb{R}$. Assim, para

$$w'(x, t) = \int P_t(x - x') u(x', t') dx'$$

e

$$v(x, t) = \int P_t(x - x') d\mu(x')$$

temos que

$$w'(x, t) \longrightarrow v(x, t) \quad (t' \rightarrow 0).$$

Vamos mostrar que $u(x,t) = v(x,t)$. Inicialmente, provemos que

$$w'(x,t) = u(x, t+t').$$

Com efeito: sabemos que se uma função h é harmônica em $\mathbb{R}_+^2$ e limitada em $\mathbb{R}_+^2(t_0) = \{(x,t)/0 < t_0 \leq t\}$ para cada t_0 , então

$$h(x, t+t') = \int h(x', t') P_t(x-x') dx'.$$

Pelo lema 6 temos

$$|u(x,t)| \leq KC/t$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Assim, fixado $t_0 > 0$, temos para $t \geq t_0$

$$|u(x,t)| \leq KC/t_0.$$

Então, u é limitada em $\mathbb{R}_+^2(t_0)$ para todo $t_0 > 0$ e como u é harmônica, temos que

$$u(x, t+t') = \int u(x', t') P_t(x-x') dx' = w'(x,t)$$

como queríamos mostrar.

Agora, em vista da continuidade de u em t temos que:

$$u(x,t) = \lim_{t' \rightarrow 0} u(x, t+t') = \lim_{t' \rightarrow 0} w'(x,t) = v(x,t).$$

e assim

$$u(x,t) = \int P_t(x-x') d\mu(x')$$

o que conclui a demonstração.

8. LEMA. Seja $p > 1$ e $g \in L^p(\mathbb{R}^2) \cap C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Então, $g(x,t)$ pertence a $C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^2})$.

DEMONSTRAÇÃO. Como $g(x,t)$ é harmônica em $\mathbb{R}_+^2$, então $g(x,t)$ é contínua em $\mathbb{R}_+^2$. Também,

$$\lim_{t \rightarrow 0} g(x,t) = g(x)$$

em quase toda parte. Mostremos agora que $g(x,t)$ converge a zero quando $|(x,t)|$ tende a infinito.

Com efeito: provemos inicialmente que para todo $\delta > 0$, existe $M' > 0$ tal que, se $t > M'$ então $|g(x,t)| < \delta$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} |g(x,t)| &= \left| \int P_t(x-x') g(x') dx' \right| \\ &\leq \int |P_t(x-x') g(x')| dx' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \|g\|_{L^p} \left[\int |P_t(x-x')|^{p'} dx' \right]^{1/p'} \\
 &= \|g\|_{L^p} C_1 \left[\int (t[t^2 + (x-x')^2]^{-1} dx')^{1/p'} \right] \\
 &= \|g\|_{L^p} C_1 \left[\int (t[t^2(1 + (x-x')^2 t^{-2})]^{-1})^{p'} dx' \right]^{1/p'} \\
 &= \|g\|_{L^p} C_1 t^{-1} \left[\int [1 + (x-x')^2 t^{-2}]^{-p'} dx' \right]^{1/p'} \\
 &= \|g\|_{L^p} C_1 t^{-1} \left[\int (1 + x^2)^{-p'} t dx \right]^{1/p'} \\
 &= \|g\|_{L^p} C_1 t^{-1} t^{1/p'} \| (1 + x^2)^{-1} \|_{L^{p'}} \\
 &= \|g\|_{L^p} C_1 t^{-1/p} \| (1 + x^2)^{-1} \|_{L^{p'}} .
 \end{aligned}$$

Chamando

$$K = C_1 \|g\|_{L^p} \| (1 + x^2) \|_{L^{p'}}$$

teremos

$$|g(x,t)| \leq K t^{-1/p}$$

e portanto

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |g(x, t)| = 0$$

Logo, para todo $\delta > 0$, existe $M' > 0$ tal que para $t \geq M'$ temos

$$|g(x, t)| < \delta.$$

Provemos agora que: se $t < M$, existe $K > 0$ tal que para $|x| > K$, temos $|g(x, t)| < \delta$.

De fato:

$$\begin{aligned} |g(x, t)| &\leq \int P_t(x - x') |g(x')| dx' \\ &= \int_{|x - x'| \leq B} P_t(x - x') |g(x')| dx' + \\ &\quad + \int_{|x - x'| > B} P_t(x - x') |g(x')| dx' \\ &\leq \max_{|x - x'| \leq B} |g(x')| \int_{|x - x'| \leq B} P_t(x - x') dx + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + C_1 \int_{|x-x'| > B} t [t^2 + (x-x')^2]^{-1} |g(x')| dx' \\
 & \leq \max_{|x-x'| \leq B} |g(x')| + C_1 \|g\|_{\infty} \int_{|x-x'| > B} (x-x')^{-2} dx'
 \end{aligned}$$

Tomamos B de maneira que

$$\int_{|x-x'| > B} (x-x')^{-2} dx' < \delta \cdot (C_1 \|g\|_{\infty} M)^{-1}$$

Para este B , tomamos $K > 0$ tal que se $|x| > K$, então

$$|g(x')| < \delta/2$$

quando $|x-x'| \leq B$. Assim, para todo $\delta > 0$, existe $K > 0$ tal que se $|x| > K$, então

$$|g(x,t)| < \delta/2 + \delta/2 = \delta.$$

9. DEFINIÇÃO. Se g é harmônica, definimos

$$(Ng)(x) = \sup_{t>0} |g(x,t)|$$

10. LEMA. Para toda função harmônica u sobre $\mathbb{R}_+^2$, existe uma constante $K > 0$ tal que

$$(Nu)(x) \leq KM(Nu(x))$$

onde M é o operador maximal de Hardy-Littlewood em $\mathbb{R}$.

DEMONSTRAÇÃO. Seja B a bola aberta de $\mathbb{R}^2$ de centro (x, t) e raio t . Seja $T = I \times J = (0, 2t) \times (x-t, x+t)$. Sabemos que existe uma constante C_1 tal que

$$|B| = C_1 |T| = C_1 |I| |J|.$$

Como $u(x, t)$ é harmônica em (x, t) , temos pela propriedade do valor médio que

$$|u(x, t)| \leq C |B|^{-1} \int_B |u(x', t')| dx' dt'$$

$$= C (C_1 |I| |J|)^{-1} \int_I \int_J |u(x', t')| dx' dt'$$

$$= K (|I| |J|)^{-1} \int_I \int_J |u(x', t')| dx' dt'$$

$$\leq K (|I| |J|)^{-1} \int_J \int_I \sup_{t' > 0} |u(x', t')| dt' dx'$$

$$= K (|I| |J|)^{-1} \int_J \sup_{t' > 0} |u(x', t')| \left(\int_I dt' \right) dx'$$

$$= K(|I| |J|)^{-1} |I| \int_J \sup_{t' > 0} |u(x', t')| dx'$$

$$= K|J|^{-1} \int_J (Nu)(x') dx'$$

$$= K|J|^{-1} |J| M(Nu)(x')$$

$$= K M M(Nu)(x').$$

Assim,

$$|u(x, t)| \leq K M(Nu)(x)$$

o que implica que

$$\sup_{t > 0} |u(x, t)| \leq K M(Nu)(x)$$

e então

$$N(u)(x) \leq K M(Nu)(x).$$

11. LEMA. Se $1 < p \leq \infty$, existe uma constante $c > 0$ tal que para toda $f \in L^p(\mathbb{R}^2)$ tem-se

$$\|Nf\|_{L^p} \leq C \|f\|_{L^p}.$$

12. TEOREMA. Se $U(x,t)$ é harmônica em $\mathbb{R}_+^2$ e existe uma constante $c > 0$ tal que

$$\|U(\cdot, t)\|_{L^p} = \left(\int_{\mathbb{R}} |U(x,t)|^p dx \right)^{1/p} \leq c < \infty$$

para $1 \leq p \leq \infty$ e para todo $t > 0$, então

(a) Quando $1 \leq p \leq \infty$, $U(x,t)$ é a integral de Poisson de uma função $f \in L^p(\mathbb{R})$.

(b) Se $p = 1$, $U(x,t)$ é a integral de Poisson-Stieltjes de uma medida de Borel finita; se além disso, $U(\cdot, t)$ é de Cauchy em norma L^1 quando $t \rightarrow 0$, então $U(x,t)$ é a integral de Poisson de uma função $f \in L^1(\mathbb{R})$.

13. TEOREMA. Se $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p \leq \infty$ e

$$U(x,t) = \int_{\mathbb{R}} P(x-y,t) f(y) dy$$

é a integral de Poisson de f , então $U(x,t)$ é harmônica em $\mathbb{R}_+^2$ e também

$$(1) \quad \lim_{t \rightarrow 0} U(x,t) = f(x)$$

e

$$(2) \quad \|U(\cdot, t)\|_{L^p} = \left(\int_{\mathbb{R}} |U(x,t)|^p dx \right)^{1/p} \leq \|f\|_{L^p}$$

para todo $t > 0$. Se $1 \leq p < \infty$, então $U(\cdot, t)$ converge para f em norma L^p quando $t \rightarrow 0$.

14. LEMA. Seja $F(x, t)$ harmônica em $\mathbb{R}_+^{n+1}$. Se $|F| > 0$ num ponto e $q \geq (n-1)n^{-1}$, então $\Delta(|F|^q) \geq 0$ neste ponto. Mais precisamente, se $q > (n-1)n^{-1}$, temos

$$Cq|F|^{q-2}|VF|^2 \geq \Delta(|F|^q) \geq cq|F|^{q-2}|VF|^2$$

para duas constantes positivas Cq e cq .

OBSERVAÇÃO. a demonstração dos Teoremas 12 e 13 estão em [8], pág. 50 e 47 respectivamente. O lema 14 está demonstrado em [7], pág. 217.

REFERÊNCIAS

- [1] S. AXLER, A Real Variable characterization of H^1 . Manuscripto não publicado.
- [2] C. FEFFERMAN - E.M. STEIN, H^p spaces of several variables . Acta Math. 129 (1972), 137-193
- [3] A. ORTIZ, Espacios de Oscilacion Media Acotada. Publicação da IV Escuela Latinoamericana de Matemática, 1978. Lima, Peru.
- [4] H.M. REIMANN - T. RYCHENER, Funktionen beschränkter Mittlerer Oszillation. Lecture Notes in Math. 487, Springer - Verlag , Berlim-Heidelberg, 1974.
- [5] H. SATO, Caracterisation par les Transformations de Riesz de la classe de Hardy H^1 de fonctions bi-harmoniques sur $\mathbb{R}_+^{m+1} \times \mathbb{R}_+^{m+1}$.
- [6] C. SADOSKI, Interpolation of Operators and Singular Integrals. Marcel Dekker, New York, N.Y., 1979.
- [7] E.M. STEIN, Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions. Princeton University Press, Princeton, N.Y. 1970.

- [8] E.M. STEIN, Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces. Princeton, N.Y., 1971.

- [9] E.M. STEIN - G. WEISS, Harmonic Analysis in Euclidean Spaces. Princeton University Press, Princeton, N.Y., 1972.

- [10] G. WEISS, Analisis Armonico em Varias Variables. Teoria de los Espacios H^p . Cursos y Seminarios de Matemática, fascículo 9, Universidade de Buenos Aires, 1960.

Unidade MC
Proc
A. P.
Tipo doação
Data 08/06/83