

ADEILTON PEDRO DE ALCANTARA

Inferência não paramétrica baseada no
método H-*splines* para a intensidade de
processos de Poisson não-homogêneos

CAMPINAS

2012

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO
CIENTÍFICA**

ADEILTON PEDRO DE ALCANTARA

**INFERÊNCIA NÃO PARAMÉTRICA BASEADA NO
MÉTODO H-SPLINES PARA A INTENSIDADE DE
PROCESSOS DE POISSON NÃO-HOMOGÊNEOS**

**TESE de DOUTORADO
APRESENTADA AO INSTITUTO DE MATEMÁTICA,
ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA
DA UNICAMP PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
DOUTOR EM ESTATÍSTICA**

**ORIENTADOR: Prof. Dr. Ronaldo Dias
COORIENTADORA: Profa. Dra. Nancy Lopes Garcia**

**ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA TESE DEFENDIDA PELO ALUNO Adailton
Pedro de Alcantara, E ORIENTADA PELO PROF.DR Ronaldo Dias.**



Assinatura do Orientador



Assinatura da Coorientadora

CAMPINAS, 2012

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA POR
MARIA FABIANA BEZERRA MULLER - CRB8/6162
BIBLIOTECA DO INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E
COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA - UNICAMP

AL16i Alcantara, Adeilton Pedro de, 1973-
Inferência não paramétrica baseada no método H-splines para a
intensidade de processos de Poisson não-homogêneos / Adeilton
Pedro de Alcantara. – Campinas, SP : [s.n.], 2012.

Orientador: Ronaldo Dias.
Coorientador: Nancy Lopes Garcia.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas,
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Estatística não paramétrica. 2. Teoria da estimativa. 3. Spline,
Teoria do. 4. Métodos de simulação. 5. Processo pontual. I. Dias,
Ronaldo, 1959-. II. Garcia, Nancy Lopes, 1964-. III. Universidade
Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica. IV. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em inglês: Nonparametric inference based on H-splines method for
intensity of inhomogeneous Poisson process

Palavras-chave em inglês:

Nonparametric statistics

Estimation theory

Spline theory

Simulation methods

Point processes

Área de concentração: Estatística

Titulação: Doutor em Estatística

Banca examinadora:

Ronaldo Dias [Orientador]

Clécio da Silva Ferreira

Jorge Alberto Achcar

Ricardo Sandes Ehlers

Jesus Enrique Garcia

Data de defesa: 19-07-2012

Programa de Pós-Graduação: Estatística

Tese de Doutorado defendida em 19 de julho de 2012 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof(a). Dr(a). RONALDO DIAS



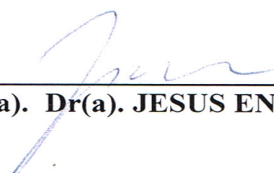
Prof(a). Dr(a). CLÉCIO DA SILVA FERREIRA



Prof(a). Dr(a). JORGE ALBERTO ACHCAR



Prof(a). Dr(a). RICARDO SANDES EHLERS



Prof(a). Dr(a). JESUS ENRIQUE GARCIA

Agradecimentos

A Deus, que nos iluminou ao longo desta jornada.

A minha família, por todo apoio, carinho e paciência dispensados.

Ao meu orientador e amigo, Prof. Dr. Ronaldo Dias pelo constante incentivo, sempre indicando a direção a ser tomada nos momentos de maior dificuldade. Agradeço, principalmente, pela confiança e ajuda na definição do tema estudado, tornando possível a elaboração e conclusão desta tese.

A minha co-orientadora, Prof. Dra. Nancy Lopes Garcia, que com paciência e dedicação, me deu apoio, me instruiu e me auxiliou, contribuindo para o êxito desta tese.

A Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro.

"Pesquisa desenvolvida com o auxílio do CENAPAD-SP (Centro Nacional de Processamento de Alto Desempenho em São Paulo), projeto 502, UNICAMP/MCTL".

A todos aqueles que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização desta tese, dando-me força e incentivo.

Resumo

Esta tese tem por objetivo propor uma nova metodologia baseada no método da expansão por bases *B-splines* e suas variantes para estimação não paramétrica da função intensidade $\lambda(t, x, y)$ de um processo de Poisson não homogêneo em $[T_0, T_1] \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ através da equação de log-verossimilhança. Foi considerado o seguinte modelo: $\lambda(t, x, y) = \lambda_1(t)\lambda_{23}(x, y)$. O objetivo é encontrar o número ideal de bases para a decomposição. Foram propostas duas abordagens, a equação de log-verossimilhança não penalizada e o *H-splines*. Estudos de simulação foram realizados considerando diferentes formas para a intensidade. Como uma aplicação à dados reais, aplicou-se a metodologia aos dados de terremoto no Brasil no período de novembro de 2008 até novembro de 2011. Foram propostos testes de hipóteses nula simples como: $H_0 : \lambda(t, x, y) = \lambda_0(t, x, y)$ contra $H_1 : \lambda(t, x, y) \neq \lambda_0(t, x, y)$ com estatísticas do teste baseadas na Diferença Quadrática Integrada, distância de Hellinger, distância de Kulback-Leibler, distância L_1 e na Afinidade.

Palavras-chave: B - *splines*; H - *splines*; distância de Hellinger; distância de Kullback-Leibler; Simulação; Processo pontual espaço-temporal.

Abstract

The main goal of this thesis is to propose a new methodology based on the method of expansion by B-*splines* bases for non-parametric estimate of the intensity function $\lambda(t, x, y)$ of a nonhomogeneous Poisson processes in $[T_0, T_1] \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ using the log-likelihood equation. The model considered is: $\lambda(t, x, y) = \lambda_1(t)\lambda_{23}(x, y)$. The goal of this study is to find the ideal number of basis for decomposition. In this work two approaches are compared, the equation log-likelihood not penalized and H-*splines*. Simulation studies have been performed considering different scenarios. As an application to real data, the methodology was applied to earthquake data in Brazil from November 2008 until November 2011. Tests for simple null hypothesis testing as: $H_0 : \lambda(t, x, y) = \lambda_0(t, x, y)$ versus $H_1 : \lambda(t, x, y) \neq \lambda_0(t, x, y)$ have been proposed with test statistics based on Integrated Squared Differences, Hellinger distance, Kulback-Leibler distance, L_1 distance and Affinity.

Keywords: B - *splines*; H - *splines*; Hellinger distance; Kullback-Leibler distance; Simulation; space-time point process.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Considerações Preliminares	2
1.2	Objetivos	2
1.3	Organização da Tese	4
2	Bases B-<i>splines</i> e processo de Poisson espaço-temporal não homogêneo	7
2.1	Bases B- <i>splines</i>	7
2.2	Processo de Poisson espaço-temporal não homogêneo	13
2.2.1	Processo de contagem multivariado	14
2.2.2	Processo de Poisson não homogêneo multivariado (PPNH) $\{S(\mathbf{t}), \mathbf{t} \geq \mathbf{0}\}$	14
3	Expansão por bases B-<i>splines</i>	17

3.1	Introdução	17
3.2	Formulação do modelo	17
3.3	Como escolher o número de funções base <i>B-splines</i> ?	22
3.3.1	Método da log-verossimilhança não penalizada	23
3.3.2	Método sequencial adaptativo <i>H-splines</i>	26
4	Estudos de Simulação	33
4.1	Introdução	33
4.1.1	Algoritmo aceitação/rejeição para gerar eventos aleatórios de um PPNH multivariado	34
4.1.2	Estrutura dos estudos de Simulação	36
4.2	Estudo de Simulação 1	37
4.2.1	Resultados do estudo de simulação 1	40
4.3	Estudo de Simulação 2	47
4.3.1	Resultados do estudo de simulação 2	50
4.4	Estudo de Simulação 3	57
4.4.1	Resultados do estudo de simulação 3	60

4.5	Estudo de Simulação 4	67
4.5.1	Resultados do estudo de simulação 4	70
4.6	Conclusões dos estudos de simulação	77
4.7	Estudo de caso : dados de ocorrência de terremotos no Brasil.	78
4.7.1	Estrutura do método <i>AIC</i> e <i>BIC</i>	78
4.7.2	Estrutura do método da verossimilhança não penalizada	80
4.7.3	Estrutura do Método sequencial adaptativo H- <i>splines</i>	81
4.7.4	Estrutura do método H- <i>splines</i>	82
4.7.5	Apresentação dos resultados	83
5	Testes de hipóteses	89
5.1	Introdução	89
5.2	Estatísticas do teste	89
5.3	Apresentação dos resultados: método H- <i>splines</i>	93
5.4	Conclusões dos testes de hipóteses	102
6	Conclusões	103

6.1	Extensões para trabalhos futuros	104
Referências Bibliográficas		107
Apêndice		113
A	Resultados dos estudos de simulação do método da equação de log-verossimilhança não penalizada	113
A.1	Apresentação dos resultados do Estudo de Simulação 1	113
A.1.1	Amostra com o número esperado de pontos de 15 observações . . .	113
A.1.2	Amostra com o número esperado de pontos de 30 observações . . .	115
A.1.3	Amostra com o número esperado de pontos de 100 observações . .	117
A.1.4	Amostra com o número esperado de pontos de 500 observações . .	119
A.2	Apresentação dos resultados do Estudo de Simulação 2	122
A.2.1	Amostra com o número esperado de ponto de 15 observações . . .	122
A.2.2	Amostra com o número esperado de pontos de 30 observações . . .	124
A.2.3	Amostra com o número esperado de pontos de 100 observações . .	126
A.2.4	Amostra com o número esperado de pontos de 500 observações . .	128

A.3	Apresentação dos resultados do Estudo de Simulação 3	130
A.3.1	Amostra com o número esperado de pontos de 15 observações . . .	130
A.3.2	Amostra com o número esperado de pontos de 30 observações . . .	132
A.3.3	Amostra com o número esperado de pontos de 100 observações . . .	134
A.3.4	Amostra com o número esperado de pontos de 500 observações . . .	136
A.4	Apresentação dos resultados do Estudo de Simulação 4	138
A.4.1	Amostra com o número esperado de pontos de 15 observações . . .	138
A.4.2	Amostra com o número esperado de pontos de 30 observações . . .	140
A.4.3	Amostra com o número esperado de pontos de 100 observações . . .	142
A.4.4	Amostra com o número esperado de pontos de 500 observações . . .	144
B	Resultados dos estudos de simulação do método H-splines	147
B.1	Apresentação dos resultados do Estudo de Simulação 1	147
B.1.1	Amostra com o número esperado de pontos de 15 observações . . .	147
B.1.2	Amostra com o número esperado de pontos de 30 observações . . .	149
B.1.3	Amostra com o número esperado de pontos de 100 observações . . .	151
B.1.4	Amostra com o número esperado de pontos de 500 observações . . .	153

B.2	Apresentação dos resultados do Estudo de Simulação 2	155
B.2.1	Amostra com o número esperado de ponto de 15 observações	155
B.2.2	Amostra com o número esperado de pontos de 30 observações . . .	157
B.2.3	Amostra com o número esperado de pontos de 100 observações . . .	159
B.2.4	Amostra com o número esperado de pontos de 500 observações . .	161
B.3	Apresentação dos resultados do Estudo de Simulação 3	163
B.3.1	Amostra com o número esperado de pontos de 15 observações . . .	163
B.3.2	Amostra com o número esperado de pontos de 30 observações . . .	165
B.3.3	Amostra com o número esperado de pontos de 100 observações . . .	167
B.3.4	Amostra com o número esperado de pontos de 500 observações . .	169
B.4	Apresentação dos resultados do Estudo de Simulação 4	171
B.4.1	Amostra com o número esperado de pontos de 15 observações . . .	171
B.4.2	Amostra com o número esperado de pontos de 30 observações . . .	174
B.4.3	Amostra com o número esperado de pontos de 100 observações . .	176
B.4.4	Amostra com o número esperado de pontos de 500 observações . . .	178

C Estatísticas sumárias das estatísticas de teste, considerando a

amostra com o número esperado de pontos de 500 observações.	181
D Programas utilizados no Estudo de Caso.	189
E Programas utilizados nos estudos simulados.	237
F Programas utilizados nos Testes de Hipóteses.	307

Lista de Figuras

2.1	<i>B-splines isolado de grau 2 (lado esquerdo) e outros B-splines sobrepostos (lado direito), de grau 2 com nós igualmente espaçados no intervalo $[0, 1]$.</i>	11
2.2	<i>B-splines cúbico isolado (lado esquerdo) e um conjunto com 8 B-splines cúbico sobrepostos (lado direito), com nós igualmente espaçados no intervalo $[0, 1]$.</i>	12
4.1	<i>Gráficos de contorno (parte superior esquerda) e de superfície (parte superior direita) da função intensidade $\lambda_{23}(x, y)$ e o gráfico da intensidade $\lambda_1(t)$ na parte inferior.</i>	39
4.2	<i>Estudo de Simulação 1: Intensidades marginais $\hat{\lambda}_1(t)$ sob os métodos AIC, BIC, equação de log-verossimilhança não penalizada e o H-splines.</i>	42
4.3	<i>Estudo de Simulação 1: Contorno das intensidades marginais $\hat{\lambda}_{23}(x, y)$, considerando o método AIC. Os contornos pretos correspondem à superfície verdadeira, enquanto que os contornos verdes correspondem às superfícies estimadas.</i>	43

4.4	<i>Estudo de Simulação 1: Contorno das intensidades marginais $\hat{\lambda}_{23}(x, y)$, considerando o método BIC. Os contornos pretos correspondem à superfície verdadeira, enquanto que os contornos verdes correspondem às superfícies estimadas.</i>	44
4.5	<i>Estudo de Simulação 1: Contorno das intensidades marginais $\hat{\lambda}_{23}(x, y)$, considerando a equação de Log-verossimilhança não penalizada. Os contornos pretos correspondem à superfície verdadeira, enquanto que os contornos verdes correspondem às superfícies estimadas.</i>	45
4.6	<i>Estudo de Simulação 1: Contorno das intensidades marginais $\hat{\lambda}_{23}(x, y)$, considerando o método H-splines. Os contornos pretos correspondem à superfície verdadeira, enquanto que os contornos verdes correspondem às superfícies estimadas.</i>	46
4.7	<i>Gráficos de contorno (parte superior esquerda) e de superfície (parte superior direita) da função intensidade $\lambda_{23}(x, y)$ e o gráfico da intensidade $\lambda_1(t)$ na parte inferior.</i>	49
4.8	<i>Estudo de Simulação 2: Intensidades marginais $\hat{\lambda}_1(t)$ sob os métodos AIC, BIC, a equação de Log-verossimilhança não penalizada e o H-splines. . . .</i>	52
4.9	<i>Estudo de Simulação 2: Contorno das intensidades marginais $\hat{\lambda}_{23}(x, y)$, considerando o método AIC. Os contornos pretos correspondem à superfície verdadeira, enquanto que os contornos verdes correspondem às superfícies estimadas.</i>	53

4.10	<i>Estudo de Simulação 2: Contorno das intensidades marginais $\hat{\lambda}_{23}(x, y)$, considerando o método BIC. Os contornos pretos correspondem à superfície verdadeira, enquanto que os contornos verdes correspondem às superfícies estimadas.</i>	54
4.11	<i>Estudo de Simulação 2: Contorno das intensidades marginais $\hat{\lambda}_{23}(x, y)$, considerando a equação de Log-verossimilhança não penalizada. Os contornos pretos correspondem à superfície verdadeira, enquanto que os contornos verdes correspondem às superfícies estimadas.</i>	55
4.12	<i>Estudo de Simulação 2: Contorno das intensidades marginais $\hat{\lambda}_{23}(x, y)$, considerando o método H-splines. Os contornos pretos correspondem à superfície verdadeira, enquanto que os contornos verdes correspondem às superfícies estimadas.</i>	56
4.13	<i>Gráficos de contorno (parte superior esquerda) e de superfície (parte superior direita) da função intensidade $\lambda_{23}(x, y)$ e o gráfico da intensidade $\lambda_1(t)$ na parte inferior.</i>	59
4.14	<i>Estudo de Simulação 3: Intensidades marginais $\hat{\lambda}_1(t)$ sob os métodos AIC, BIC, a equação de Log-verossimilhança não penalizada e o H-splines. . . .</i>	62
4.15	<i>Estudo de Simulação 3: Contorno das intensidades marginais $\hat{\lambda}_{23}(x, y)$, considerando o método AIC. Os contornos pretos correspondem à superfície verdadeira, enquanto que os contornos verdes correspondem às superfícies estimadas.</i>	63

4.16	<i>Estudo de Simulação 3: Contorno das intensidades marginais $\hat{\lambda}_{23}(x, y)$, considerando o método BIC. Os contornos pretos correspondem à superfície verdadeira, enquanto que os contornos verdes correspondem às superfícies estimadas.</i>	64
4.17	<i>Estudo de Simulação 3: Contorno das intensidades marginais $\hat{\lambda}_{23}(x, y)$, considerando a Log-verossimilhança não penalizada. Os contornos pretos correspondem à superfície verdadeira, enquanto que os contornos verdes correspondem às superfícies estimadas.</i>	65
4.18	<i>Estudo de Simulação 3: Contorno das intensidades marginais $\hat{\lambda}_{23}(x, y)$, considerando o método H-splines. Os contornos pretos correspondem à superfície verdadeira, enquanto que os contornos verdes correspondem às superfícies estimadas.</i>	66
4.19	<i>Gráficos de contorno (parte superior esquerda) e de superfície (parte superior direita) da função intensidade $\lambda_{23}(x, y)$ e o gráfico da intensidade $\lambda_1(t)$ na parte inferior.</i>	69
4.20	<i>Estudo de Simulação 4: Intensidades marginais $\hat{\lambda}_1(t)$ sob os métodos AIC, BIC, a Log-verossimilhança não penalizada e o H-splines.</i>	72
4.21	<i>Estudo de Simulação 4: Contorno das intensidades marginais $\hat{\lambda}_{23}(x, y)$, considerando o método AIC. Os contornos pretos correspondem à superfície verdadeira, enquanto que os contornos verdes correspondem às superfícies estimadas.</i>	73

4.22	<i>Estudo de Simulação 4: Contorno das intensidades marginais $\hat{\lambda}_{23}(x, y)$, considerando o método BIC. Os contornos pretos correspondem à superfície verdadeira, enquanto que os contornos verdes correspondem às superfícies estimadas.</i>	74
4.23	<i>Estudo de Simulação 4: Contorno das intensidades marginais $\hat{\lambda}_{23}(x, y)$, considerando a Log-verossimilhança não penalizada. Os contornos pretos correspondem à superfície verdadeira, enquanto que os contornos verdes correspondem às superfícies estimadas.</i>	75
4.24	<i>Estudo de Simulação 4: Contorno das intensidades marginais $\hat{\lambda}_{23}(x, y)$, considerando o método H-splines. Os contornos pretos correspondem à superfície verdadeira, enquanto que os contornos verdes correspondem às superfícies estimadas.</i>	76
4.25	<i>Intensidades marginais $\hat{\lambda}_1(\text{Magnitude})$, $\hat{\lambda}_2(\text{Tempo})$, considerando os métodos AIC, BIC, a equação de Log-verossimilhança não penalizada e o H-splines.</i>	85
4.26	<i>Gráfico da intensidade marginal $\hat{\lambda}_{23}(\text{Lat.}, \text{Long.})$, considerando os métodos AIC, BIC, a equação de Log-verossimilhança não penalizada e o H-splines.</i>	86
5.1	<i>Distribuições das estatísticas L_1, Hellinger, DQI, Kullback-Leibler e Afinitude, considerando o número esperado de pontos de 500 observações - Estudo de Simulação 1.</i>	95

5.2	<i>Distribuições das estatísticas L_1, Hellinger, DQI, Kullback-Leibler e Afinidade, considerando o número esperado de pontos de 500 observações - Estudo de Simulação 2.</i>	96
5.3	<i>Distribuições das estatísticas L_1, Hellinger, DQI, Kullback-Leibler e Afinidade, considerando o número esperado de pontos de 500 observações - Estudo de Simulação 3.</i>	97
5.4	<i>Distribuições das estatísticas L_1, Hellinger, DQI, Kullback-Leibler e Afinidade, considerando o número esperado de pontos de 500 observações - Estudo de Simulação 4.</i>	98

Lista de Tabelas

4.1	<i>Quantidade de superposições usada em cada estudo de simulação.</i>	36
4.2	<i>Quantidade de bases B-splines</i>	41
4.3	<i>Quantidade total de coeficientes: $K_1 + K \times K$</i>	41
4.4	<i>Quantidade de bases B-splines</i>	51
4.5	<i>Quantidade total de coeficientes: $(K_1 + K \times K)$</i>	51
4.6	<i>Quantidade de bases B-splines</i>	61
4.7	<i>Quantidade total de coeficientes: $K_1 + K \times K$</i>	61
4.8	<i>Quantidade de bases B-splines</i>	71
4.9	<i>Quantidade total de coeficientes: $(K_1 + K \times K)$</i>	71
4.10	<i>Quantidade de bases B-splines.</i>	84
4.11	<i>Quantidade total de coeficientes: $K_1 + K_2 + K$</i>	84

5.1	<i>Parâmetros da distribuição Gama estimados a partir dos valores obtidos das estatísticas L_1, Hellinger, DQI e Kulback-Leibler, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 1.</i>	99
5.2	<i>Parâmetros da distribuição Beta estimados a partir dos valores obtidos da estatística Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 1.</i>	99
5.3	<i>Parâmetros da distribuição Gama estimados a partir dos valores obtidos das estatísticas L_1, Hellinger, DQI e Kulback-Leibler, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 2.</i>	99
5.4	<i>Parâmetros da distribuição Beta estimados a partir dos valores obtidos da estatística Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 2.</i>	100
5.5	<i>Parâmetros da distribuição Gama estimados a partir dos valores obtidos das estatísticas L_1, Hellinger, DQI e Kulback-Leibler, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 3.</i>	100
5.6	<i>Parâmetros da distribuição Beta estimados a partir dos valores obtidos da estatística Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 3.</i>	100

5.7	<i>Parâmetros da distribuição Gama estimados a partir dos valores obtidos das estatísticas L_1, Hellinger, DQI e Kulback-Leibler, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 4.</i>	101
5.8	<i>Parâmetros da distribuição Beta estimados a partir dos valores obtidos da estatística Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 4.</i>	101
A.1	<i>Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição das estatísticas L_1, Hellinger, DQI, Kullback-Leibler e Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 15 observações, segue uma distribuição Normal - Estudo de Simulação 1.</i>	113
A.2	<i>Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se as distribuições das estatísticas L_1, Hellinger, DQI, Kullback-Leibler, seguem uma distribuição Gama, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 15 observações - Estudo de Simulação 1.</i>	114
A.3	<i>Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição da estatística Afinidade segue uma distribuição Beta, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 15 observações - Estudo de Simulação 1.</i>	114
A.4	<i>Parâmetros das distribuições Gama e Normal estimados a partir dos valores obtidos das estatísticas L_1, Hellinger, DQI e Kulback-Leibler, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 15 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 1.</i>	114

A.5	<i>Parâmetros das distribuições Beta e Normal estimados a partir dos valores obtidos da estatística Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 15 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 1.</i>	114
A.6	<i>Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição das estatísticas L_1, Hellinger, DQI, Kullback-Leibler e Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 30 observações, segue uma distribuição Normal - Estudo de Simulação 1.</i>	115
A.7	<i>Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se as distribuições das estatísticas L_1, Hellinger, DQI, Kullback-Leibler, seguem uma distribuição Gama, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 30 observações - Estudo de Simulação 1.</i>	115
A.8	<i>Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição da estatística Afinidade segue uma distribuição Beta, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 30 observações - Estudo de Simulação 1.</i>	115
A.9	<i>Parâmetros das distribuições Gama e Normal estimados a partir dos valores obtidos das estatísticas L_1, Hellinger, DQI e Kulback-Leibler, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 30 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 1.</i>	116
A.10	<i>Parâmetros das distribuições Beta e Normal estimados a partir dos valores obtidos da estatística Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 30 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 1.</i>	116

A.11	<i>Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição das estatísticas L_1, Hellinger, DQI, Kullback-Leibler e Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 100 observações, segue uma distribuição Normal - Estudo de Simulação 1.</i>	117
A.12	<i>Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se as distribuições das estatísticas L_1, Hellinger, DQI, Kullback-Leibler, seguem uma distribuição Gama, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 100 observações - Estudo de Simulação 1.</i>	117
A.13	<i>Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição da estatística Afinidade segue uma distribuição Beta, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 100 observações - Estudo de Simulação 1.</i>	117
A.14	<i>Parâmetros das distribuições Gama e Normal estimados a partir dos valores obtidos das estatísticas L_1, Hellinger, DQI e Kulback-Leibler, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 100 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 1.</i>	118
A.15	<i>Parâmetros das distribuições Beta e Normal estimados a partir dos valores obtidos da estatística Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 100 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 1.</i>	118
A.16	<i>Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição das estatísticas L_1, Hellinger, DQI, Kullback-Leibler e Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações, segue uma distribuição Normal - Estudo de Simulação 1.</i>	119

A.17	<i>Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se as distribuições das estatísticas L_1, Hellinger, DQI, Kullback-Leibler, seguem uma distribuição Gama, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações - Estudo de Simulação 1.</i>	119
A.18	<i>Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição da estatística Afinidade segue uma distribuição Beta, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações - Estudo de Simulação 1.</i>	119
A.19	<i>Parâmetros das distribuições Gama e Normal estimados a partir dos valores obtidos das estatísticas L_1, Hellinger, DQI e Kulback-Leibler, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 1.</i>	120
A.20	<i>Parâmetros das distribuições Beta e Normal estimados a partir dos valores obtidos da estatística Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 1.</i>	121
A.21	<i>Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição das estatísticas L_1, Hellinger, DQI, Kullback-Leibler e Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 15 observações, segue uma distribuição Normal - Estudo de Simulação 2.</i>	122
A.22	<i>Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se as distribuições das estatísticas L_1, Hellinger, DQI, Kullback-Leibler, seguem uma distribuição Gama, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 15 observações - Estudo de Simulação 2.</i>	122

A.23	<i>Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição da estatística Afinidade segue uma distribuição Beta, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 15 observações - Estudo de Simulação 2.</i>	122
A.24	<i>Parâmetros das distribuições Gama e Normal estimados a partir dos valores obtidos das estatísticas L_1, Hellinger, DQI e Kulback-Leibler, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 15 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 2.</i>	123
A.25	<i>Parâmetros das distribuições Beta e Normal estimados a partir dos valores obtidos da estatística Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 15 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 2.</i>	123
A.26	<i>Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição das estatísticas L_1, Hellinger, DQI, Kullback-Leibler e Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 30 observações, segue uma distribuição Normal - Estudo de Simulação 2.</i>	124
A.27	<i>Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se as distribuições das estatísticas L_1, Hellinger, DQI, Kullback-Leibler, seguem uma distribuição Gama, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 30 observações - Estudo de Simulação 2.</i>	124
A.28	<i>Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição da estatística Afinidade segue uma distribuição Beta, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 30 observações - Estudo de Simulação 2.</i>	124

A.29	<i>Parâmetros das distribuições Gama e Normal estimados a partir dos valores obtidos das estatísticas L_1, Hellinger, DQI e Kulback-Leibler, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 30 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 2.</i>	125
A.30	<i>Parâmetros das distribuições Beta e Normal estimados a partir dos valores obtidos da estatística Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 30 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 2.</i>	125
A.31	<i>Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição das estatísticas L_1, Hellinger, DQI, Kullback-Leibler e Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 100 observações, segue uma distribuição Normal - Estudo de Simulação 2.</i>	126
A.32	<i>Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se as distribuições das estatísticas L_1, Hellinger, DQI, Kullback-Leibler, seguem uma distribuição Gama, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 100 observações - Estudo de Simulação 2.</i>	126
A.33	<i>Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição da estatística Afinidade segue uma distribuição Beta, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 100 observações - Estudo de Simulação 2.</i>	126
A.34	<i>Parâmetros das distribuições Gama e Normal estimados a partir dos valores obtidos das estatísticas L_1, Hellinger, DQI e Kulback-Leibler, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 100 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 2.</i>	127

A.35	<i>Parâmetros das distribuições Beta e Normal estimados a partir dos valores obtidos da estatística Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 100 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 2.</i>	127
A.36	<i>Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição das estatísticas L_1, Hellinger, DQI, Kullback-Leibler e Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações, segue uma distribuição Normal - Estudo de Simulação 2.</i>	128
A.37	<i>Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se as distribuições das estatísticas L_1, Hellinger, DQI, Kullback-Leibler, seguem uma distribuição Gama, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações - Estudo de Simulação 2.</i>	128
A.38	<i>Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição da estatística Afinidade segue uma distribuição Beta, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações - Estudo de Simulação 2.</i>	128
A.39	<i>Parâmetros das distribuições Gama e Normal estimados a partir dos valores obtidos das estatísticas L_1, Hellinger, DQI e Kulback-Leibler, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 2.</i>	129
A.40	<i>Parâmetros das distribuições Beta e Normal estimados a partir dos valores obtidos da estatística Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 2.</i>	129

A.41	<i>Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição das estatísticas L_1, Hellinger, DQI, Kullback-Leibler e Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 15 observações, segue uma distribuição Normal - Estudo de Simulação 3.</i>	130
A.42	<i>Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se as distribuições das estatísticas L_1, Hellinger, DQI, Kullback-Leibler, seguem uma distribuição Gama, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 15 observações - Estudo de Simulação 3.</i>	130
A.43	<i>Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição da estatística Afinidade segue uma distribuição Beta, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 15 observações - Estudo de Simulação 3.</i>	130
A.44	<i>Parâmetros das distribuições Gama e Normal estimados a partir dos valores obtidos das estatísticas L_1, Hellinger, DQI e Kulback-Leibler, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 15 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 3.</i>	131
A.45	<i>Parâmetros das distribuições Beta e Normal estimados a partir dos valores obtidos da estatística Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 15 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 3.</i>	131
A.46	<i>Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição das estatísticas L_1, Hellinger, DQI, Kullback-Leibler e Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 30 observações, segue uma distribuição Normal - Estudo de Simulação 3.</i>	132

A.47	<i>Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se as distribuições das estatísticas L_1, Hellinger, DQI, Kullback-Leibler, seguem uma distribuição Gama, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 30 observações - Estudo de Simulação 3.</i>	132
A.48	<i>Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição da estatística Afinidade segue uma distribuição Beta, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 30 observações - Estudo de Simulação 3.</i>	132
A.49	<i>Parâmetros das distribuições Gama e Normal estimados a partir dos valores obtidos das estatísticas L_1, Hellinger, DQI e Kulback-Leibler, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 30 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 3.</i>	133
A.50	<i>Parâmetros das distribuições Beta e Normal estimados a partir dos valores obtidos da estatística Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 30 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 3.</i>	133
A.51	<i>Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição das estatísticas L_1, Hellinger, DQI, Kullback-Leibler e Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 100 observações, segue uma distribuição Normal - Estudo de Simulação 3.</i>	134
A.52	<i>Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se as distribuições das estatísticas L_1, Hellinger, DQI, Kullback-Leibler, seguem uma distribuição Gama, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 100 observações - Estudo de Simulação 3.</i>	134

A.53	<i>Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição da estatística Afinidade segue uma distribuição Beta, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 100 observações - Estudo de Simulação 3.</i>	134
A.54	<i>Parâmetros das distribuições Gama e Normal estimados a partir dos valores obtidos das estatísticas L_1, Hellinger, DQI e Kulback-Leibler, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 100 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 3.</i>	135
A.55	<i>Parâmetros das distribuições Beta e Normal estimados a partir dos valores obtidos da estatística Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 100 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 3.</i>	135
A.56	<i>Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição das estatísticas L_1, Hellinger, DQI, Kullback-Leibler e Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações, segue uma distribuição Normal - Estudo de Simulação 3.</i>	136
A.57	<i>Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se as distribuições das estatísticas L_1, Hellinger, DQI, Kullback-Leibler, seguem uma distribuição Gama, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações - Estudo de Simulação 3.</i>	136
A.58	<i>Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição da estatística Afinidade segue uma distribuição Beta, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações - Estudo de Simulação 3.</i>	136

A.59	<i>Parâmetros das distribuições Gama e Normal estimados a partir dos valores obtidos das estatísticas L_1, Hellinger, DQI e Kulback-Leibler, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 3.</i>	137
A.60	<i>Parâmetros das distribuições Beta e Normal estimados a partir dos valores obtidos da estatística Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 3.</i>	137
A.61	<i>Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição das estatísticas L_1, Hellinger, DQI, Kullback-Leibler e Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 15 observações, segue uma distribuição Normal - Estudo de Simulação 4.</i>	138
A.62	<i>Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se as distribuições das estatísticas L_1, Hellinger, DQI, Kullback-Leibler, seguem uma distribuição Gama, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 15 observações - Estudo de Simulação 4.</i>	138
A.63	<i>Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição da estatística Afinidade segue uma distribuição Beta, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 15 observações - Estudo de Simulação 4.</i>	138
A.64	<i>Parâmetros das distribuições Gama e Normal estimados a partir dos valores obtidos das estatísticas L_1, Hellinger, DQI e Kulback-Leibler, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 15 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 4.</i>	139

A.65	<i>Parâmetros das distribuições Beta e Normal estimados a partir dos valores obtidos da estatística Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 15 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 4.</i>	139
A.66	<i>Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição das estatísticas L_1, Hellinger, DQI, Kullback-Leibler e Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 30 observações, segue uma distribuição Normal - Estudo de Simulação 4.</i>	140
A.67	<i>Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se as distribuições das estatísticas L_1, Hellinger, DQI, Kullback-Leibler, seguem uma distribuição Gama, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 30 observações - Estudo de Simulação 4.</i>	140
A.68	<i>Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição da estatística Afinidade segue uma distribuição Beta, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 30 observações - Estudo de Simulação 4.</i>	140
A.69	<i>Parâmetros das distribuições Gama e Normal estimados a partir dos valores obtidos das estatísticas L_1, Hellinger, DQI e Kulback-Leibler, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 30 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 4.</i>	141
A.70	<i>Parâmetros das distribuições Beta e Normal estimados a partir dos valores obtidos da estatística Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 30 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 4.</i>	141

A.71	<i>Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição das estatísticas L_1, Hellinger, DQI, Kullback-Leibler e Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 100 observações, segue uma distribuição Normal - Estudo de Simulação 4.</i>	142
A.72	<i>Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se as distribuições das estatísticas L_1, Hellinger, DQI, Kullback-Leibler, seguem uma distribuição Gama, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 100 observações - Estudo de Simulação 4.</i>	142
A.73	<i>Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição da estatística Afinidade segue uma distribuição Beta, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 100 observações - Estudo de Simulação 4.</i>	142
A.74	<i>Parâmetros das distribuições Gama e Normal estimados a partir dos valores obtidos das estatísticas L_1, Hellinger, DQI e Kulback-Leibler, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 100 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 4.</i>	143
A.75	<i>Parâmetros das distribuições Beta e Normal estimados a partir dos valores obtidos da estatística Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 100 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 4.</i>	143
A.76	<i>Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição das estatísticas L_1, Hellinger, DQI, Kullback-Leibler e Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações, segue uma distribuição Normal - Estudo de Simulação 4.</i>	144

A.77	<i>Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se as distribuições das estatísticas L_1, Hellinger, DQI, Kullback-Leibler, seguem uma distribuição Gama, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações - Estudo de Simulação 4.</i>	144
A.78	<i>Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição da estatística Afinidade segue uma distribuição Beta, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações - Estudo de Simulação 4.</i>	144
A.79	<i>Parâmetros das distribuições Gama e Normal estimados a partir dos valores obtidos das estatísticas L_1, Hellinger, DQI e Kulback-Leibler, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 4.</i>	145
A.80	<i>Parâmetros das distribuições Beta e Gama estimados a partir dos valores obtidos da estatística Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 4.</i>	145
B.1	<i>Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição das estatísticas L_1, Hellinger, DQI, Kullback-Leibler e Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 15 observações, segue uma distribuição Normal - Estudo de Simulação 1.</i>	147
B.2	<i>Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se as distribuições das estatísticas L_1, Hellinger, DQI, Kullback-Leibler, seguem uma distribuição Gama, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 15 observações - Estudo de Simulação 1.</i>	148

B.3	<i>Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição da estatística Afinidade segue uma distribuição Beta, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 15 observações - Estudo de Simulação 1.</i>	148
B.4	<i>Parâmetros das distribuições Gama e Normal estimados a partir dos valores obtidos das estatísticas L_1, Hellinger, DQI e Kulback-Leibler, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 15 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 1.</i>	148
B.5	<i>Parâmetros das distribuições Beta e Normal estimados a partir dos valores obtidos da estatística Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 15 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 1.</i>	148
B.6	<i>Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição das estatísticas L_1, Hellinger, DQI, Kullback-Leibler e Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 30 observações, segue uma distribuição Normal - Estudo de Simulação 1.</i>	149
B.7	<i>Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se as distribuições das estatísticas L_1, Hellinger, DQI, Kullback-Leibler, seguem uma distribuição Gama, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 30 observações - Estudo de Simulação 1.</i>	149
B.8	<i>Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição da estatística Afinidade segue uma distribuição Beta, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 30 observações - Estudo de Simulação 1.</i>	149

B.9	<i>Parâmetros das distribuições Gama e Normal estimados a partir dos valores obtidos das estatísticas L_1, Hellinger, DQI e Kulback-Leibler, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 30 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 1.</i>	150
B.10	<i>Parâmetros das distribuições Beta Normal estimados a partir dos valores obtidos da estatística Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 30 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 1.</i>	150
B.11	<i>Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição das estatísticas L_1, Hellinger, DQI, Kullback-Leibler e Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 100 observações, segue uma distribuição Normal - Estudo de Simulação 1.</i>	151
B.12	<i>Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se as distribuições das estatísticas L_1, Hellinger, DQI, Kullback-Leibler, seguem uma distribuição Gama, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 100 observações - Estudo de Simulação 1.</i>	151
B.13	<i>Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição da estatística Afinidade segue uma distribuição Beta, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 100 observações - Estudo de Simulação 1.</i>	151
B.14	<i>Parâmetros das distribuições Gama e Normal estimados a partir dos valores obtidos das estatísticas L_1, Hellinger, DQI e Kulback-Leibler, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 100 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 1.</i>	152

B.15	<i>Parâmetros das distribuições Beta e Normal estimados a partir dos valores obtidos da estatística Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 100 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 1. . .</i>	152
B.16	<i>Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição das estatísticas L_1, Hellinger, DQI, Kullback-Leibler e Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações, segue uma distribuição Normal - Estudo de Simulação 1.</i>	153
B.17	<i>Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se as distribuições das estatísticas L_1, Hellinger, DQI, Kullback-Leibler, seguem uma distribuição Gama, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações - Estudo de Simulação 1.</i>	153
B.18	<i>Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição da estatística Afinidade segue uma distribuição Beta, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações - Estudo de Simulação 1.</i>	153
B.19	<i>Parâmetros das distribuições Gama e Normal estimados a partir dos valores obtidos das estatísticas L_1, Hellinger, DQI e Kulback-Leibler, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 1.</i>	154
B.20	<i>Parâmetros das distribuições Beta e Normal estimados a partir dos valores obtidos da estatística Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 1. . .</i>	154

B.21	<i>Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição das estatísticas L_1, Hellinger, DQI, Kullback-Leibler e Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 15 observações, segue uma distribuição Normal - Estudo de Simulação 2.</i>	155
B.22	<i>Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se as distribuições das estatísticas L_1, Hellinger, DQI, Kullback-Leibler, seguem uma distribuição Gama, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 15 observações - Estudo de Simulação 2.</i>	155
B.23	<i>Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição da estatística Afinidade segue uma distribuição Beta, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 15 observações - Estudo de Simulação 2.</i>	155
B.24	<i>Parâmetros das distribuições Gama e Normal estimados a partir dos valores obtidos das estatísticas L_1, Hellinger, DQI e Kulback-Leibler, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 15 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 2.</i>	156
B.25	<i>Parâmetros das distribuições Beta e Normal estimados a partir dos valores obtidos da estatística Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 15 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 2.</i>	156
B.26	<i>Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição das estatísticas L_1, Hellinger, DQI, Kullback-Leibler e Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 30 observações, segue uma distribuição Normal - Estudo de Simulação 2.</i>	157

B.27	<i>Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se as distribuições das estatísticas L_1, Hellinger, DQI, Kullback-Leibler, seguem uma distribuição Gama, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 30 observações - Estudo de Simulação 2.</i>	157
B.28	<i>Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição da estatística Afinidade segue uma distribuição Beta, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 30 observações - Estudo de Simulação 2.</i>	157
B.29	<i>Parâmetros das distribuições Gama e Normal estimados a partir dos valores obtidos das estatísticas L_1, Hellinger, DQI e Kulback-Leibler, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 30 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 2.</i>	158
B.30	<i>Parâmetros das distribuições Beta e Normal estimados a partir dos valores obtidos da estatística Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 30 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 2.</i>	158
B.31	<i>Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição das estatísticas L_1, Hellinger, DQI, Kullback-Leibler e Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 100 observações, segue uma distribuição Normal - Estudo de Simulação 2.</i>	159
B.32	<i>Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se as distribuições das estatísticas L_1, Hellinger, DQI, Kullback-Leibler, seguem uma distribuição Gama, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 100 observações - Estudo de Simulação 2.</i>	159

B.33	<i>Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição da estatística Afinidade segue uma distribuição Beta, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 100 observações - Estudo de Simulação 2.</i>	159
B.34	<i>Parâmetros das distribuições Gama e Normal estimados a partir dos valores obtidos das estatísticas L_1, Hellinger, DQI e Kulback-Leibler, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 100 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 2.</i>	160
B.35	<i>Parâmetros das distribuições Beta e Normal estimados a partir dos valores obtidos da estatística Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 100 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 2.</i>	160
B.36	<i>Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição das estatísticas L_1, Hellinger, DQI, Kullback-Leibler e Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações, segue uma distribuição Normal - Estudo de Simulação 2.</i>	161
B.37	<i>Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se as distribuições das estatísticas L_1, Hellinger, DQI, Kullback-Leibler, seguem uma distribuição Gama, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações - Estudo de Simulação 2.</i>	161
B.38	<i>Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição da estatística Afinidade segue uma distribuição Beta, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações - Estudo de Simulação 2.</i>	161

B.39	<i>Parâmetros das distribuições Gama e Normal estimados a partir dos valores obtidos das estatísticas L_1, Hellinger, DQI e Kulback-Leibler, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 2.</i>	162
B.40	<i>Parâmetros das distribuições Beta e Normal estimados a partir dos valores obtidos da estatística Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 2.</i>	162
B.41	<i>Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição das estatísticas L_1, Hellinger, DQI, Kullback-Leibler e Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 15 observações, segue uma distribuição Normal - Estudo de Simulação 3.</i>	163
B.42	<i>Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se as distribuições das estatísticas L_1, Hellinger, DQI, Kullback-Leibler, seguem uma distribuição Gama, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 15 observações - Estudo de Simulação 3.</i>	163
B.43	<i>Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição da estatística Afinidade segue uma distribuição Beta, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 15 observações - Estudo de Simulação 3.</i>	163
B.44	<i>Parâmetros das distribuições Gama e Normal estimados a partir dos valores obtidos das estatísticas L_1, Hellinger, DQI e Kulback-Leibler, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 15 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 3.</i>	164

B.45	<i>Parâmetros das distribuições Beta e Normal estimados a partir dos valores obtidos da estatística Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 15 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 3.</i>	164
B.46	<i>Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição das estatísticas L_1, Hellinger, DQI, Kullback-Leibler e Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 30 observações, segue uma distribuição Normal - Estudo de Simulação 3.</i>	165
B.47	<i>Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se as distribuições das estatísticas L_1, Hellinger, DQI, Kullback-Leibler, seguem uma distribuição Gama, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 30 observações - Estudo de Simulação 3.</i>	165
B.48	<i>Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição da estatística Afinidade segue uma distribuição Beta, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 30 observações - Estudo de Simulação 3.</i>	165
B.49	<i>Parâmetros das distribuições Gama e Normal estimados a partir dos valores obtidos das estatísticas L_1, Hellinger, DQI e Kulback-Leibler, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 30 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 3.</i>	166
B.50	<i>Parâmetros das distribuições Beta e Normal estimados a partir dos valores obtidos da estatística Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 30 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 3.</i>	166

B.51	<i>Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição das estatísticas L_1, Hellinger, DQI, Kullback-Leibler e Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 100 observações, segue uma distribuição Normal - Estudo de Simulação 3.</i>	167
B.52	<i>Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se as distribuições das estatísticas L_1, Hellinger, DQI, Kullback-Leibler, seguem uma distribuição Gama, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 100 observações - Estudo de Simulação 3.</i>	167
B.53	<i>Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição da estatística Afinidade segue uma distribuição Beta, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 100 observações - Estudo de Simulação 3.</i>	167
B.54	<i>Parâmetros das distribuições Gama e Normal estimados a partir dos valores obtidos das estatísticas L_1, Hellinger, DQI e Kulback-Leibler, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 100 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 3.</i>	168
B.55	<i>Parâmetros das distribuições Beta e Normal estimados a partir dos valores obtidos da estatística Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 100 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 3.</i>	168
B.56	<i>Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição das estatísticas L_1, Hellinger, DQI, Kullback-Leibler e Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações, segue uma distribuição Normal - Estudo de Simulação 3.</i>	169

B.57	<i>Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se as distribuições das estatísticas L_1, Hellinger, DQI, Kullback-Leibler, seguem uma distribuição Gama, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações - Estudo de Simulação 3.</i>	169
B.58	<i>Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição da estatística Afinidade segue uma distribuição Beta, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações - Estudo de Simulação 3.</i>	169
B.59	<i>Parâmetros das distribuições Gama e Normal estimados a partir dos valores obtidos das estatísticas L_1, Hellinger, DQI e Kulback-Leibler, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 3.</i>	170
B.60	<i>Parâmetros das distribuições Beta e Normal estimados a partir dos valores obtidos da estatística Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 3.</i>	170
B.61	<i>Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição das estatísticas L_1, Hellinger, DQI, Kullback-Leibler e Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 15 observações, segue uma distribuição Normal - Estudo de Simulação 4.</i>	171
B.62	<i>Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se as distribuições das estatísticas L_1, Hellinger, DQI, Kullback-Leibler, seguem uma distribuição Gama, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 15 observações - Estudo de Simulação 4.</i>	171

B.63	<i>Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição da estatística Afinidade segue uma distribuição Beta, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 15 observações - Estudo de Simulação 4.</i>	171
B.64	<i>Parâmetros das distribuições Gama e Normal estimados a partir dos valores obtidos das estatísticas L_1, Hellinger, DQI e Kulback-Leibler, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 15 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 4.</i>	172
B.65	<i>Parâmetros das distribuições Beta e Normal estimados a partir dos valores obtidos da estatística Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 15 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 4.</i>	173
B.66	<i>Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição das estatísticas L_1, Hellinger, DQI, Kullback-Leibler e Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 30 observações, segue uma distribuição Normal - Estudo de Simulação 4.</i>	174
B.67	<i>Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se as distribuições das estatísticas L_1, Hellinger, DQI, Kullback-Leibler, seguem uma distribuição Gama, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 30 observações - Estudo de Simulação 4.</i>	174
B.68	<i>Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição da estatística Afinidade segue uma distribuição Beta, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 30 observações - Estudo de Simulação 4.</i>	174

B.69	<i>Parâmetros das distribuições Gama e Normal estimados a partir dos valores obtidos das estatísticas L_1, Hellinger, DQI e Kulback-Leibler, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 30 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 4.</i>	175
B.70	<i>Parâmetros das distribuições Beta e Normal estimados a partir dos valores obtidos da estatística Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 30 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 4.</i>	175
B.71	<i>Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição das estatísticas L_1, Hellinger, DQI, Kullback-Leibler e Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 100 observações, segue uma distribuição Normal - Estudo de Simulação 4.</i>	176
B.72	<i>Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se as distribuições das estatísticas L_1, Hellinger, DQI, Kullback-Leibler, seguem uma distribuição Gama, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 100 observações - Estudo de Simulação 4.</i>	176
B.73	<i>Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição da estatística Afinidade segue uma distribuição Beta, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 100 observações - Estudo de Simulação 4.</i>	176
B.74	<i>Parâmetros das distribuições Gama e Normal estimados a partir dos valores obtidos das estatísticas L_1, Hellinger, DQI e Kulback-Leibler, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 100 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 4.</i>	177

B.75	<i>Parâmetros das distribuições Beta e Normal estimados a partir dos valores obtidos da estatística Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 100 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 4. . .</i>	177
B.76	<i>Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição das estatísticas L_1, Hellinger, DQI, Kullback-Leibler e Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações, segue uma distribuição Normal - Estudo de Simulação 4.</i>	178
B.77	<i>Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se as distribuições das estatísticas L_1, Hellinger, DQI, Kullback-Leibler, seguem uma distribuição Gama, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações - Estudo de Simulação 4.</i>	178
B.78	<i>Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição da estatística Afinidade segue uma distribuição Beta, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações - Estudo de Simulação 4.</i>	178
B.79	<i>Parâmetros das distribuições Gama e Normal estimados a partir dos valores obtidos das estatísticas L_1, Hellinger, DQI e Kulback-Leibler, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 4.</i>	179
B.80	<i>Parâmetros das distribuições Beta e Normal estimados a partir dos valores obtidos da estatística Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 4. . .</i>	179

C.1	<i>Estatísticas sumárias da estatística L_1, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações - Estudo de Simulação 1.</i>	181
C.2	<i>Estatísticas sumárias da estatística DQI, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações - Estudo de Simulação 1.</i>	182
C.3	<i>Estatísticas sumárias da estatística Hellinger, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações - Estudo de Simulação 1.</i>	182
C.4	<i>Estatísticas sumárias da estatística Kullback-Leibler, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações - Estudo de Simulação 1.</i>	182
C.5	<i>Estatísticas sumárias da estatística Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações - Estudo de Simulação 1.</i>	182
C.6	<i>Estatísticas sumárias da estatística L_1, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações - Estudo de Simulação 2.</i>	183
C.7	<i>Estatísticas sumárias da estatística DQI, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações - Estudo de Simulação 2.</i>	183
C.8	<i>Estatísticas sumárias da estatística Hellinger, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações - Estudo de Simulação 2.</i>	183
C.9	<i>Estatísticas sumárias da estatística Kullback-Leibler, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações - Estudo de Simulação 2.</i>	184

C.10	<i>Estatísticas sumárias da estatística Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações - Estudo de Simulação 2.</i>	184
C.11	<i>Estatísticas sumárias da estatística L_1, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações - Estudo de Simulação 3. . . .</i>	185
C.12	<i>Estatísticas sumárias da estatística DQI, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações - Estudo de Simulação 3. .</i>	185
C.13	<i>Estatísticas sumárias da estatística Hellinger, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações - Estudo de Simulação 3.</i>	185
C.14	<i>Estatísticas sumárias da estatística Kullback-Leibler, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações - Estudo de Simulação 3.</i>	186
C.15	<i>Estatísticas sumárias da estatística Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações - Estudo de Simulação 3.</i>	186
C.16	<i>Estatísticas sumárias da estatística L_1, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações - Estudo de Simulação 4. . . .</i>	187
C.17	<i>Estatísticas sumárias da estatística DQI, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações - Estudo de Simulação 4. .</i>	187
C.18	<i>Estatísticas sumárias da estatística Hellinger, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações - Estudo de Simulação 4.</i>	187

C.19	<i>Estatísticas sumárias da estatística Kullback-Leibler, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações - Estudo de Simulação 4.</i>	188
C.20	<i>Estatísticas sumárias da estatística Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações - Estudo de Simulação 4.</i>	188

Capítulo 1

Introdução

Processos de Poisson não homogêneos são muito utilizados na literatura para modelar dados epidemiológicos (por exemplo, Diggle, 2005 ; Diggle Rowlingson and SU, 2005), dados de terremotos (por exemplo, Choi and Hall, 2000; Ogata, 1998; Ogata e Tanemura, 1986), entre outros. Há diversos métodos paramétricos e não paramétricos utilizados para a análise de processos pontuais de Poisson espaço-temporais. Uma boa revisão destes métodos pode ser vista em Diggle (2003) ; Diggle, Rowlingson and SU (2005); Gu and Wang (2003); Gu and Kim (2002); Kauermann and Schellhase (2009); Ogata and Tanemura (1981); Ogata and Tanemura (1984); Wang and Taylor (2004).

Um dos métodos não paramétricos mais utilizados é a expansão da função intensidade em bases. Podem ser utilizadas bases trigonométricas (ver Walter (1987)), wavelets (ver Sheng (1996), Xiangqian e Lin (1999)), B-*splines* (ver De Boor (1978), Dias (1998), Ubri-
cht (2004)) , dentre outras. Neste trabalho vamos utilizar a expansão em bases B-*splines* e o objetivo é encontrar o número ideal de bases para a estimação da função intensidade do processo .

1.1 Considerações Preliminares

Seja S^* um processo de Poisson não homogêneo em $[T_0, T_1] \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ com intensidade λ . Denote por $S = \{(t_i, x_i, y_i); i = 1, \dots, S^*([T_0, T_1] \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y})\}$ a realização do processo. Neste caso a equação de log-verossimilhança é dada por:

$$L(\lambda \mid S) = \sum_{i=1}^N \log \{\lambda(t_i, x_i, y_i)\} - \int_{T_0}^{T_1} \int_{\mathcal{X}} \int_{\mathcal{Y}} \lambda(t, x, y) dy dx dt, \quad (1.1.1)$$

onde $\lambda(t, x, y)$ denota a intensidade do processo na localização (x, y) no tempo t .

Existem dois obstáculos na utilização da equação de log-verossimilhança para estimação da função intensidade λ :

1. A forma da intensidade pode ser intratável;
2. O termo da integral em (1.1.1).

Métodos computacionais como o Método de Monte Carlo estão se tornando mais disponíveis para resolver problemas deste tipo. Entretanto, na prática, esses métodos frequentemente necessitam de uma cuidadosa aplicação e o custo de desenvolvimento pode ser um obstáculo para uso rotineiro.

1.2 Objetivos

Os principais objetivos desta tese são:

1. Utilizar a abordagem de expansão em bases *B-splines* para estimação não paramétrica da intensidade λ do processo;
2. Desenvolver métodos para escolher o número de bases utilizadas para a obtenção do estimador;
3. Realizar testes de hipóteses.

Neste trabalho, o modelo separável será estudado. A intensidade conjunta $\lambda(t, x, y)$ será decomposta em duas intensidades marginais: $\lambda(t, x, y) = \lambda_1(t)\lambda_{23}(x, y)$. A abordagem é expandir λ em bases *B-splines* e decompor. Como estamos trabalhando com bases *B-splines*, o termo da integral em (1.1.1) pode ser facilmente calculado através do Método de Aproximação Numérica de Monte Carlo para estimação de integrais. Outra grande vantagem desta metodologia reside na flexibilidade do modelo proposto. Não é necessário conhecermos a priori a forma funcional da intensidade. Ao fazermos o uso da decomposição de *B-splines* transformamos um problema de dimensão infinita em um problema de dimensão finita, onde a dimensão do problema será o número de funções bases *B-splines* e a dimensão do espaço aproximante. Ou seja, uma vez encontrados os coeficientes das bases *B-splines*, a informação que está por trás dos dados é armazenada nos coeficientes e a curva e/ou superfície de interesse pode ser facilmente recuperada através da combinação linear entre as funções base *B-splines* dada por seus respectivos coeficientes.

Uma questão de vital importância para uma boa estimativa está na quantidade de bases *B-splines* (espaço de funções *B-splines*) a ser utilizada. Quanto mais bases, menos suave é a estimativa. Não há uma regra específica para escolha do espaço de funções. Nesta tese, tal escolha será feita com base nos métodos: *AIC*, *BIC*, no método da equação de log-verossimilhança não penalizada e no método sequencial adaptativo *H-splines* proposto por Dias (1998) no contexto de estimação de densidades.

Dentre as principais vantagens do método sequencial adaptativo *H-splines* pode-se destacar:

1. Baixo custo computacional;
2. Estabilidade numérica;
3. Prevenção da multicolinearidade entre as colunas da matriz do produto tensorial entre as bases *B-splines*.

Finalmente hipóteses como $H_0 : \lambda(t, x, y) = \lambda_0(t, x, y)$ contra $H_1 : \lambda(t, x, y) \neq \lambda_0(t, x, y)$ serão testadas com base em estatísticas do teste derivadas das distâncias de *Hellinger*, *Kullback – Leibler*, L_1 , na Diferença Quadrática Integrada (DQI) e na Afinidade.

1.3 Organização da Tese

Esta tese está dividida em 6 capítulos. O Capítulo 1 descreve em linhas gerais o objetivo desta tese, e faz uma revisão bibliográfica na qual são apresentadas algumas metodologias existentes na literatura para estimar a intensidade λ de um processo de Poisson não homogêneo espaço-temporal. No Capítulo 2 é feita uma apresentação sobre as funções base *B-splines* acompanhada de alguns exemplos e os principais conceitos sobre processo de Poisson não homogêneo espaço-temporal. No Capítulo 3 é apresentada uma nova metodologia para tratar do problema de interesse, ou seja, a estimação não paramétrica da intensidade de um processo de Poisson não homogêneo espaço-temporal utilizando a abordagem de expansão em bases *B-splines* e algumas alternativas para escolher o número de funções bases *B-splines* tais como o AIC, o BIC, o método da equação de

log-verossimilhança não penalizada e o método sequencial adaptativo H-*splines* via equação de log-verossimilhança penalizada. Posteriormente, o Capítulo 4 traz os principais resultados obtidos a partir de intensos estudos de simulação e de um exemplo com dados reais. O Capítulo 5 propõe testes de hipóteses. E, finalmente, o Capítulo 6 apresenta, respectivamente, uma síntese das principais conclusões desta tese.

Capítulo 2

Bases B-*splines* e processo de Poisson espaço-temporal não homogêneo

2.1 Bases B-*splines*

Os B-*splines* são bases do sub-espço de polinômios por partes, constituídos de pedaços de polinômios unidos de forma especial em certos valores chamados nós. A escolha do número de nós tem sido um assunto de muita pesquisa: muitos nós produzem uma curva sem quase nenhuma suavidade (interpolação), já poucos nós suavizam demais os dados.

Originalmente, os B-*splines* tem sido definidos como as diferenças divididas de bases de potência truncadas. As diferenças divididas surgem da forma de Newton por interpolação, onde para $n + 1$ pares $\{t_i, y_i\}_{i=0}^n$ com $y_i = f(t_i)$, um polinômio de grau n é aplicado sob a seguinte forma:

$$p(t) = c_0 + c_1(t - t_0) + c_2(t - t_0)(t - t_1) + \dots + c_n(t - t_0)(t - t_1) \dots (t - t_n) \quad (2.1.1)$$

com

$$p(t_0) = c_0 = f(t_0) \quad (2.1.2)$$

$$p(t_1) = c_0 + c_1(t_1 - t_0) = f(t_1) \quad (2.1.3)$$

$$p(t_2) = c_0 + c_1(t_2 - t_0) + c_2(t_2 - t_0)(t_2 - t_1) = f(t_2) \quad (2.1.4)$$

etc...

O coeficiente c_0 é dado por $c_0 = f(t_0) = [t_0]f$, onde $[t_0]f$ é a diferença dividida de ordem zero da função $f(t)$ sobre o ponto t_0 . Já c_1 em (2.1.5) é a diferença dividida de ordem 1 da função $f(t)$ sobre os pontos t_0 e t_1 . (ver Ulbricht (2004) [pág. 29]),

$$c_1 = \frac{f(t_1) - f(t_0)}{t_1 - t_0} = \frac{[t_1]f - [t_0]f}{t_1 - t_0} = [t_0, t_1]f. \quad (2.1.5)$$

Usando a diferença dividida de ordem q da função $f(t)$ sobre os pontos t_0, t_1, \dots, t_q , os coeficientes c_q , $q = 0, \dots, n$ são determinados por

$$c_q = [t_0, t_1, \dots, t_q]f \quad (2.1.6)$$

A equação (2.1.6) pode ser obtida recursivamente utilizando

$$[t_0, \dots, t_q]f = \frac{[t_1, \dots, t_q]f - [t_0, \dots, t_{q-1}]f}{t_q - t_0} \quad (2.1.7)$$

onde $q = 1, \dots, n$.

Utilizando a definição de diferença dividida, segue a definição de B-*splines* normalizado.

Definição 2.1.1. Para uma sequência não decrescente de m nós τ . O i -ésimo B-*splines* de ordem r é definido pela regra:

$$B_{i,r}(t) = (\tau_{i+r} - \tau_i)[\tau_i, \dots, \tau_{i+r}](\bullet - t)_+^{r-1}, \forall t \in \mathcal{R}. \quad (2.1.8)$$

A notação, $(\bullet - t)_+^{r-1}$ é usada para indicar que a r -ésima diferença dividida da função $(\tau - t)_+^{r-1}$ de duas variáveis τ e t deve ser feita fixando t e considerando $(\tau - t)_+^{r-1}$ como uma função de t (ver Ulbricht (2004)[pág. 29]). O fator $(\tau_{i+r} - \tau_i)$ é um fator de normalização escolhido para produzir a seguinte propriedade:

$$\sum_i B_{i,r}(t) = 1, \forall t \in \mathcal{J}. \quad (2.1.9)$$

assegurando que os B-*splines* formam uma partição da unidade.

Seja o intervalo $\mathcal{J} = [a, b]$ dividido em $m + 1$ sub-intervalos menores da forma $[x_0, x_1], \dots, [x_m, x_{m+1}]$ por $m + 2$ nós, sendo x_1, \dots, x_m nós interiores. Como em cada intervalo r B-*splines* de ordem r são não nulos, o número total de nós para a construção dos B-*splines* deve ser $m + 2r$. Assim, alguns nós adicionais precisam ser incluídos (ver Shumaker (1972)). Para isso, $r - 1$ nós são adicionados no início e no final da sequência de tal forma que $\tau_1 \leq \tau_2 \leq \dots \leq \tau_{r-1} \leq x_0$ e $x_{m+1} \leq \tau_{r+m+2} \leq \tau_{r+m+3} \leq \dots \leq \tau_{m+2r}$.

De Boor (1978) construiu um algoritmo para calcular B-*splines* de qualquer grau a partir de B-*splines* com ordem inferior, de maneira recursiva. Um B-*splines* de grau zero é um constante em um intervalo entre dois nós. Assim, o i -ésimo B-*splines* de ordem r

para uma sequência de m nós não-decrescentes $\tau = \{\tau_i\}$ pode ser calculada por

$$B_{i,r}(t) = \frac{t - \tau_i}{\tau_{i+r-1} - \tau_i} B_{i,r-1}(t) + \frac{\tau_{i+r} - t}{\tau_{i+r} - \tau_{i+1}} B_{i+1,r-1}(t), \quad (2.1.10)$$

onde

$$B_{i,1}(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } \tau_i \leq t < \tau_{i+1} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.1.11)$$

Os B-*splines* podem ter também múltiplos nós e, assim, é necessário ter um certo cuidado ao usar a relação de recorrência (2.1.11) para evitar a divisão por zero, ver De Boor (1978). Assim, considerando B-*splines* de ordem r com m nós interiores, é possível escrever a função f como:

$$f(t) = \sum_{i=1}^{K=r+m+1} c_i B_{i,r}(t). \quad (2.1.12)$$

Em geral, a ordem do B-*splines* é clara pelo contexto. Dessa forma, no lugar de $B_{i,r}(t)$ pode-se escrever somente $B_i(t)$ como em (2.1.13). Assim, a estimativa suave de f calculada a partir dos dados observados é dada por:

$$\hat{f}(t) = \sum_{i=1}^K \hat{c}_i B_i(t). \quad (2.1.13)$$

Seguem alguns exemplos de bases B-*splines*

Exemplo 2.1.1. A Figura 2.1 apresenta dois exemplos de funções base B-*splines* de grau

2 com com nós igualmente espaçados no intervalo $[0, 1]$. O lado esquerdo da Figura 2.1 mostra um B-splines de grau 2 isolado, composto por dois pedaços lineares. Um pedaço com nós interiores em $\tau_0 = 0.0$ e $\tau_1 = 0.2$ e um segundo pedaço com nós internos em $\tau_1 = 0.2$ e $\tau_2 = 0.4$. À esquerda de τ_0 e à direita de τ_2 esse B-splines é zero. No lado direito da Figura 2.1 são apresentados mais 6 B-splines de grau 2 com nós em $\{0.0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0\}$.

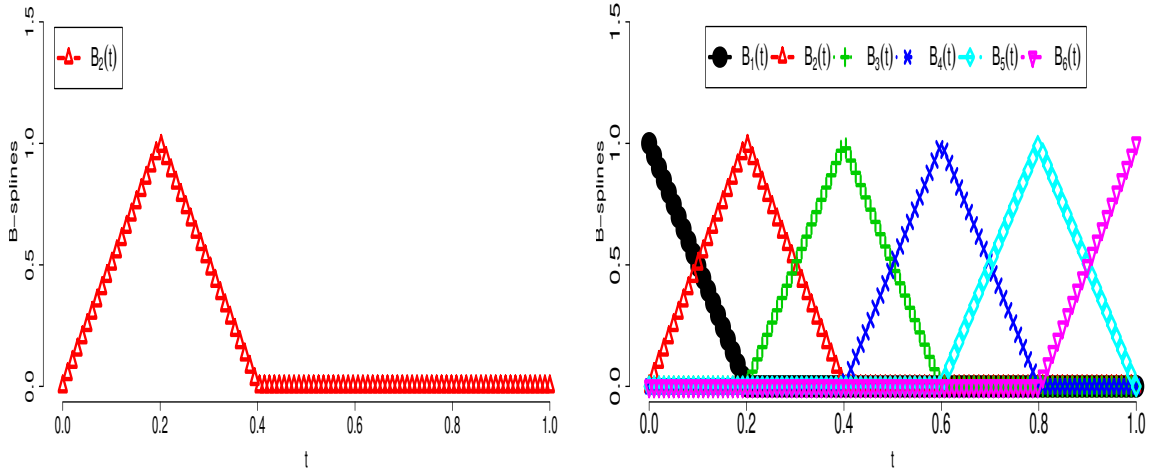


Figura 2.1: B-splines isolado de grau 2 (lado esquerdo) e outros B-splines sobrepostos (lado direito), de grau 2 com nós igualmente espaçados no intervalo $[0, 1]$.

Exemplo 2.1.2. A Figura 2.2 apresenta dois exemplos funções base B-splines, com nós igualmente espaçados no intervalo $[0, 1]$. No lado esquerdo da Figura 2.2 temos um B-splines cúbico isolado, composto por quatro peças de polinômios cúbicos unidos de forma especial em três nós interiores: $\tau_1 = 0.2$ e $\tau_2 = 0.4$ e $\tau_3 = 0.6$. No lado direito da Figura 2.2 são mostradas mais 8 B-splines cúbicos com nós em $\{0.0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0\}$.

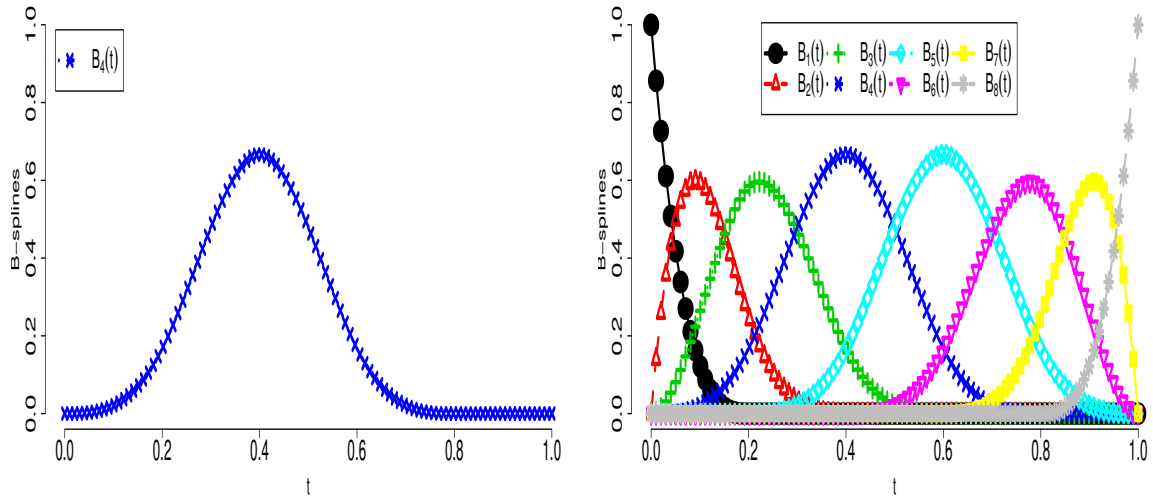


Figura 2.2: B-splines cúbico isolado (lado esquerdo) e um conjunto com 8 B-splines cúbico sobrepostos (lado direito), com nós igualmente espaçados no intervalo $[0, 1]$.

As Figuras apresentadas nos Exemplos (2.1.1) e (2.1.2) apresentam as seguintes propriedades gerais de um B-*splines* de grau r :

- consiste de $r + 1$ pedaços polinomiais, cada de grau r ;
- os pedaços polinomiais se unem em r nós internos;
- na junção dos pontos, as derivadas até a ordem $r - 1$ são contínuas;
- o B-*splines* é positivo no domínio gerado por $r + 2$ nós ;
- exceto nos extremos, ele se sobrepõe com $2r$ peças polinomiais de seus vizinhos;
- em um dado t , $r + 1$ B-*splines* são não-nulos.

Na próxima seção será feita uma breve apresentação sobre processos de Poisson espaço-temporal não homogêneo, destacando os principais conceitos, a função de verossimilhança e o teorema da superposição.

2.2 Processo de Poisson espaço-temporal não homogêneo

Esta seção está baseada nos autores Burnecki, (2009), Caetano, (2008), Cox and Isham, (1980), Karlin and Taylor (1975), Kingman (1993), Resnick, (1992), em especial Saltzman, (2008). Segundo Saltzman, (2008), "Um dos modelos mais amplamente utilizado e aceito para processos pontuais é o processo de Poisson. Com muitas propriedades e resultados conhecidos, o processo de Poisson é muito simples de se implementar. Ao longo dos anos, numerosas variantes do modelo original tem sido propostas na esperança de melhorar a sua adequação e validade em uma ampla gama de contextos".

2.2.1 Processo de contagem multivariado

Inicialmente será definido o processo de contagem multivariado como segue.

Definição 2.2.1. Processo de contagem multivariado

Um processo estocástico $\{S(\mathbf{t}), \mathbf{t} \geq \mathbf{0}\} = \{S(t_1, t_2, \dots, t_d), t_1 \geq 0, \dots, t_d \geq 0\}$ é dito um processo de contagem multivariado tal que $t_1, t_2, \dots, t_d \geq 0$ com as seguintes propriedades:

1. $\{S(\mathbf{t}) \geq \mathbf{0}\}$.
2. $\{S(\mathbf{t})\}$ é um valor inteiro não decrescente.

Para $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$, (isto é : $a_i \leq b_i, i = 1, 2, \dots, d$), seja $S_{\mathbf{a}, \mathbf{b}}^d$ o número de eventos que ocorreu na região d-dimensional $\mathbf{a}, \mathbf{b} = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \dots \times (a_d, b_d)$. Intuitivamente, $\{S(\mathbf{t})\}$ conta o número de eventos na região d-dimensional $(0, t_1) \times (0, t_2) \times \dots \times (0, t_d)$.

2.2.2 Processo de Poisson não homogêneo multivariado (PPNH) $\{S(\mathbf{t}), \mathbf{t} \geq \mathbf{0}\}$

Uma vez definido um processo de contagem multivariado, estamos aptos a introduzir a definição de processo de Poisson não homogêneo multivariado.

Definição 2.2.2. Processo de Poisson não homogêneo multivariado (PPNH)

Segundo Saltzman, (2008) [pág. 48], um processo de contagem multivariado $\{S(\mathbf{t}), \mathbf{t} \geq \mathbf{0}\}$ é um processo de Poisson não homogêneo multivariado $\{S(\mathbf{t}), \mathbf{t} \geq \mathbf{0}\}$ com função intensidade não negativa $\lambda(\mathbf{t}) = \lambda(t_1, t_2, \dots, t_d)$ se satisfaz as seguintes propriedades:

1. $\{S(\mathbf{0}) = 0\}$.
2. O processo tem incrementos independentes.
3. Para os vetores $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$ de dimensão d , o número de eventos que ocorrem na região d -dimensional $V = (a_1, b_1] \times (a_2, b_2] \times \dots \times (a_d, b_d]$ tem a distribuição de probabilidade:

$$P[S_{\mathbf{a}, \mathbf{b}}^d = n] = \frac{\left\{ \int_V \lambda(\mathbf{t}) d\mathbf{t} \right\}^n \exp - \int_V \lambda(\mathbf{t}) d\mathbf{t}}{n!} \quad (2.2.14)$$

para $n = 0, 1, 2, \dots$, onde o valor esperado é dado por:

$$\int_V \lambda(\mathbf{t}) d\mathbf{t} = \int_{a_d}^{b_d} \dots \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} \lambda(t_1, t_2, \dots, t_d) dt_1 dt_2 \dots dt_d. \quad (2.2.15)$$

Um conceito importante do PPNH multivariado é a função da intensidade $\lambda(\mathbf{t})$. A função de intensidade é interpretada como a taxa de ocorrência de eventos.

O logaritmo da função de verossimilhança de um PPNH multivariado é dada por:

$$L(S) = \sum_{i=1}^N \log \left\{ \left[\sum_{i=1}^N \lambda(t_{1i}, t_{2i}, \dots, t_{di}) \right] \right\} - \int_{a_d}^{b_d} \dots \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} \lambda(t_1, t_2, \dots, t_d) dt_1 dt_2 \dots dt_d \quad (2.2.16)$$

Um teorema muito importante dos PPNH multivariado que será apresentado é o teorema da superposição, conforme apresentado abaixo:

Teorema 2.2.1. Teorema da superposição

Sejam $S_1(\mathbf{t})$ e $S_2(\mathbf{t})$ dois PPNH multivariados e independentes com funções intensidade $\lambda_1(\mathbf{t})$ e $\lambda_2(\mathbf{t})$, respectivamente. Então a sua superposição $S(\mathbf{t}) = S_1(\mathbf{t}) + S_2(\mathbf{t})$ também é

um PPNH multivariado com a função de intensidade $\lambda(\mathbf{t}) = \lambda_1(\mathbf{t}) + \lambda_2(\mathbf{t})$, (ver Kingman, 1993).

O Teorema 2.2.1 nos permite sobrepor m PPNH multivariados independentes. Ou seja, temos o seguinte corolário:

Corolário 2.2.1. Sejam $S_1(\mathbf{t}), S_2(\mathbf{t}), \dots, S_m(\mathbf{t})$ PPNH multivariados e independentes com funções intensidade $\lambda_1(\mathbf{t}), \lambda_2(\mathbf{t}), \dots, \lambda_m(\mathbf{t})$, respectivamente. Então a sua superposição $S(\mathbf{t}) = \sum_{j=1}^m S_j(\mathbf{t})$ também é um PPNH multivariado com função intensidade

$$\lambda(\mathbf{t}) = \sum_{j=1}^m \lambda_j(\mathbf{t}).$$

Este corolário será muito importante para gerar amostras do processo de Poisson não homogêneo, como veremos no Capítulo 4.

No próximo capítulo será apresentada a abordagem por expansão por bases *B-splines* para a estimação não paramétrica da intensidade do processo λ . A principal vantagem desta abordagem reside no fato de não precisarmos conhecer a forma funcional da intensidade.

Capítulo 3

Expansão por bases B-*splines*

3.1 Introdução

Para obter o Estimador de Máxima Verossimilhança da intensidade do processo λ , será modelada como um produto de intensidades marginais. Será proposto um modelo onde o comportamento temporal do processo é independente do comportamento espacial, porém, o comportamento ao longo de cada uma das coordenadas espaciais, (por exemplo, latitude e longitude) não são independentes entre si.

3.2 Formulação do modelo

Seja \mathcal{H}^* o espaço infinito dimensional e \mathcal{H}_k o espaço finito dimensional aproximante gerado por k funções base B-*splines* cúbicas, tal que cada $\lambda \in \mathcal{H}^*$ será aproximado por uma função em \mathcal{H}_k . A intensidade do processo será fatorada em duas intensidades marginais independentes.

$$\lambda(t, x, y) = \lambda_1(t) \lambda_{23}(x, y), \quad (3.2.1)$$

onde vamos assumir que

$$\lambda_1(t) = \sum_{r_1=1}^{K_1} \beta_{r_1} B_{r_1}^{(1)}(t) \quad (3.2.2)$$

e

$$\lambda_{23}(x, y) = \sum_{r_2=1}^{K_2} \sum_{r_3=1}^{K_3} \varphi_{r_2 r_3} B_{r_2}^{(2)}(x) B_{r_3}^{(3)}(y), \quad (3.2.3)$$

onde $B_r^{(i)}(t)$ são os B-*splines* cúbicos naturais com sequência de nós não-decrescentes e igualmente espaçados $\tau^{(i)} = \{\tau_j^{(i)}\}_{j=1}^{n+k}$, onde $\tau^{(1)} \in [T_0, T_1]$, $\tau^{(2)}$ em \mathcal{X} e $\tau^{(3)}$ em \mathcal{Y} . O r -ésimo B-*splines* de ordem k para a sequência de nós é definido por

$$B_r^{(i)}(t) = -(\tau_{k+r}^{(i)} - t_r)[\tau_r^{(i)}, \dots, \tau_{k+r}^{(i)}](t - \tau_j^{(i)})_+^{k-1}, \text{ para todo } t \in \mathcal{R}.$$

As matrizes das bases B-*splines* $B^{(1)}(t)$, $B^{(2)}(x)$ e $B^{(3)}(y)$ são representadas na forma matricial como:

$$B^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} B_1^{(1)}(t_1) & B_2^{(1)}(t_1) & \cdots & B_{K_1}^{(1)}(t_1) \\ B_1^{(1)}(t_2) & B_2^{(1)}(t_2) & \cdots & B_{K_1}^{(1)}(t_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_1^{(1)}(t_n) & B_2^{(1)}(t_n) & \cdots & B_{K_1}^{(1)}(t_n) \end{bmatrix}$$

$$B^{(2)}(x) = \begin{bmatrix} B_1^{(2)}(x_1) & B_2^{(2)}(x_1) & \cdots & B_{K_2}^{(2)}(x_1) \\ B_1^{(2)}(x_2) & B_2^{(2)}(x_2) & \cdots & B_{K_2}^{(2)}(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_1^{(2)}(x_n) & B_2^{(2)}(x_n) & \cdots & B_{K_2}^{(2)}(x_n) \end{bmatrix}$$

$$B^{(3)}(y) = \begin{bmatrix} B_1^{(3)}(y_1) & B_2^{(3)}(y_1) & \cdots & B_{K_3}^{(3)}(y_1) \\ B_1^{(3)}(y_2) & B_2^{(3)}(y_2) & \cdots & B_{K_3}^{(3)}(y_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_1^{(3)}(y_n) & B_2^{(3)}(y_n) & \cdots & B_{K_3}^{(3)}(y_n) \end{bmatrix}$$

Neste caso, a equação de log-verossimilhança pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} L(C \mid S) &= \sum_{i=1}^n \log \left\{ \left[\sum_{r_1=1}^{K_1} \beta_{r_1} B_{r_1}^{(1)}(t_i) \right] \left[\sum_{r_2=1}^{K_2} \sum_{r_3=1}^{K_3} \varphi_{r_2 r_3} B_{r_2}^{(2)}(x_i) B_{r_3}^{(3)}(y_i) \right] \right\} \\ &\quad - \left[\sum_{r_1=1}^{K_1} \beta_{r_1} \int_{\mathcal{T}} B_{r_1, k_1}^{(1)}(t) dt \right] \\ &\quad \times \left[\sum_{r_2=1}^{K_2} \sum_{r_3=1}^{K_3} \varphi_{r_2 r_3} \int_{\mathcal{X}} \int_{\mathcal{Y}} B_{r_2}^{(2)}(x) B_{r_3}^{(3)}(y) dy dx \right] \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

Assim, temos respectivamente K_1 coeficientes a serem estimados em $C_1 = (\beta_1, \dots, \beta_{K_1})^T$ e $K_2 \times K_3$ coeficientes a serem estimados em $C_2 = (\varphi_{11}, \dots, \varphi_{K_2 \cdot K_3})^T$ e

$C = (C_1, C_2)$.

As integrais $\int_{\mathcal{T}} B_{r_1}^{(1)}(t)dt$ e $\int_{\mathcal{X}} \int_{\mathcal{Y}} B_{r_2}^{(2)}(x)B_{r_3}^{(3)}(y)dxdy$ serão aproximadas através do Método de Monte Carlo para estimação de integrais.

Os métodos de Monte Carlo tem sido utilizados há bastante tempo como forma de obter aproximações numéricas de funções complexas. Estes métodos tipicamente envolvem a geração de observações de alguma distribuição de probabilidade e o uso da amostra obtida para aproximar a função de interesse, (ver Ehlers, 2003).

As aplicações mais comuns dos métodos de Monte Carlo em computação numérica são para avaliar integrais. A idéia do método é escrever a integral que se deseja calcular como um valor esperado. Para introduzir o método, considere o problema de calcular a integral da função $B_{r_1}^{(1)}(t)$ no intervalo $(\min(\mathcal{T}), \max(\mathcal{T}))$:

$$I = \int_{\mathcal{T}} B_{r_1}^{(1)}(t)dt.$$

Essa integral pode ser escrita como

$$I = \int_{\mathcal{T}} B_{r_1}^{(1)}(t)dt = (T_0 - T_1)E[B_{r_1}^{(1)}(\mathcal{T})], \quad (3.2.5)$$

onde $\mathcal{T} = [T_0, T_1]$.

Identificando \mathcal{T} como uma variável aleatória com distribuição $U(T_0, T_1)$. Assim, transformamos o problema de avaliar a integral no problema estatístico de estimar uma média, $E[B_{r_1}^{(1)}(\mathcal{T})]$. Se dispomos de uma amostra aleatória de tamanho n , t_1, \dots, t_n da distribuição uniforme no intervalo (T_0, T_1) teremos também uma amostra de valores

$B_{r_1}^{(1)}(t_1), \dots, B_{r_1}^{(1)}(t_n)$ da função $B^{(1)}(t)$ e a integral acima pode ser estimada pela média amostral, i.e.

$$\hat{I} = \frac{(T_0 - T_1)}{n} \sum_{i=1}^n B_{r_1}^{(1)}(t_i), \quad (3.2.6)$$

Podemos então usar os seguintes passos para obter uma aproximação numérica da função $B^{(1)}(t)$.

- Passo 1: gere t_1, \dots, t_n da distribuição $U(T_0, T_1)$;
- Passo 2: obtenha $B_{r_1}^{(1)}(t_1), \dots, B_{r_1}^{(1)}(t_n)$;
- Passo 3: calcule a média amostral $\bar{B}^{(1)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n B_{r_1}^{(1)}(t_i)$;
- Passo 4: calcule $\hat{I} = (T_0 - T_1) \bar{B}^{(1)}$.

Os estimadores de Máxima Verossimilhança das quantidades $C_1 = (\beta_1, \dots, \beta_{K_1})^T$ e $C_2 = (\varphi_{1,1}, \dots, \varphi_{r_2, r_3})^T$ (coeficientes do produto tensorial das bases B-*Splines*), serão obtidos resolvendo o sistema de equações:

$$\begin{cases} \frac{\partial \{L(C | S)\}}{\partial \beta_{r_1}} = 0, & r_1 = 1, \dots, K_1 \\ \frac{\partial \{L(C | S)\}}{\partial \varphi_{r_2, r_3}} = 0, & r_2 = 1, \dots, K_2 \text{ e } r_3 = 1, \dots, K_3. \end{cases} \quad (3.2.7)$$

Como não há expressão analítica fechada para os estimadores de máxima verossimilhança, a solução do sistema de Equações (3.2.7) será feita com base em procedimentos iterativos

de maximização numérica da equação de log-verossimilhança, adotando o uso da função *nlminb()* disponível no *R* para maximização numérica.

3.3 Como escolher o número de funções base B-*splines*?

A escolha do número de funções bases B-*splines* é crucial para obtermos uma boa estimativa. Uma determinada quantidade de bases B-*splines* será adicionada uma depois da outra, testando em cada passo se a quantidade de B-*splines* adicionada melhora significativamente o modelo.

O fato de não existir nenhum método padrão para o problema de seleção de quantas bases B-*splines* serão usadas no modelo, nos leva à difícil tarefa de encontrar a dimensão aproximante.

Nesta seção serão descritos 4 métodos para a escolha do número de funções base B-*splines*, a saber:

1. Critério de informação de Akaike (AIC);
2. Critério de informação Bayesiano (BIC);
3. Método da verossimilhança não penalizada;
4. Método H - *splines*.

Sejam:

- $L(C | S)$ a equação de log-verossimilhança (3.2.4) da Seção (3.2);

- $\eta = K_1 + K_2 \times K_3$ o número total de coeficientes do modelo;
- n o número de observações;
- $AIC(\eta) = -2 \times L(\hat{C} \mid S) + 2 \times \eta$;
- $BIC(\eta) = -2 \times L(\hat{C} \mid S) + \log(n) \times \eta$.

O estimador escolhe o modelo com $\hat{\eta} = \arg \min_{\eta} AIC(\eta)$ e $\hat{\eta} = \arg \min_{\eta} BIC(\eta)$, (ver Sakamoto, Y., Ishiguro, M., and Kitagawa G. 1986).

Tome $K_2 = K_3 = K$. Como a quantidade de bases *B-splines* é dada por: $K = \{\text{grau do polinômio} + 1\} + \text{número de nós}$. Aqui o grau do polinômio é 3, pois estamos trabalhando com polinômios cúbicos. O intervalo sem nós interiores terá uma quantidade de bases *B-splines* $K = 4$ e $K_1 = 4$. Assim, K e K_1 variam de 4 até 15. Serão obtidas as estimativas de AIC , (K_1, K) , BIC e (K_1, K) . Serão escolhidas as quantidades de K_1 e K que fornecem o menor valor de AIC e BIC .

3.3.1 Método da log-verossimilhança não penalizada

Nesta seção será apresentado o método da log-verossimilhança não penalizada para escolher a quantidade de funções base *B-splines*, considerando a equação de log-verossimilhança (3.2.4) não penalizada. O método fornece um procedimento para estimar a intensidade de processo λ baseado em K_1 e K funções base, onde consideramos $K = K_2 = K_3$.

Estrutura do método da verossimilhança não penalizada

Dados $(T_1, X_1, Y_1), \dots, (T_n, X_n, Y_n)$: amostra de um PPNH multivariado, uma precisão δ e a intensidade conjunta.

$$\hat{\lambda}_{K_1^i, K^j}(t, x, y) = \left[\sum_{r_1=1}^{K_1} \hat{\beta}_{r_1} B_{r_1}^{(1)}(t_i) \right] \left[\sum_{r_2=1}^K \sum_{r_3=1}^K \hat{\varphi}_{r_2 r_3} B_{r_2}^{(2)}(x) B_{r_3}^{(3)}(y) \right]. \quad (3.3.8)$$

- Passo 1: Tome K_1^0 e K^0 , o número inicial de bases B-splines, $i = 0, j = 0$;
- Passo 2: Calcule as estimativas $\hat{\lambda}_{K_1^i, K^j}(t, x, y)$ e $\hat{\lambda}_{K_1^i, K^{j+1}}(t, x, y)$, onde $\hat{C} = \arg \max_C L(C | S)$ via aproximação de Newton-Raphson;;
- Passo 3: Avalie a distância entre $\hat{\lambda}_{K_1^i, K^j}(t, x, y)$ e $\hat{\lambda}_{K_1^i, K^{j+1}}(t, x, y)$;
- Passo 4: Se $d(\hat{\lambda}_{K_1^i, K^j}(t, x, y), \hat{\lambda}_{K_1^i, K^{j+1}}(t, x, y)) < \delta$, $K^1 = K^0 + 1$ bases B-splines é fornecida, caso contrário, $j = j + 1$. Volte para o Passo 2;
- Passo 5: Fixe $K^* = K^j$, $i = i + 1$ e volte para o Passo 2.

O objetivo agora, é encontrar um critério de parada que possa dizer quando parar de incrementar o número de funções base. Ou seja, queremos encontrar a distância $d(,)$ do Passo 4 da estrutura do método da equação de log-verossimilhança não penalizada. Para isto, considere a seguinte transformação.

$$t_\lambda(t, x, y) = \frac{\lambda^2(t, x, y)}{\int_{\mathcal{T}} \int_{\mathcal{X}} \int_{\mathcal{Y}} \lambda^2(t, x, y) dy dx dt}, \quad (3.3.9)$$

de forma que $t_\lambda(t, x, y) \geq 0$ e $\int_{\tau} \int_{\mathcal{X}} \int_{\mathcal{Y}} t_\lambda(t, x, y) dy dx dt = 1$, satisfazendo as condições de uma função densidade.

Assim, para quaisquer funções $f(t, x, y)$ e $g(t, x, y)$, definimos uma pseudo distância relacionada ao quadrado da distância de Hellinger,

$$\begin{aligned} d^2(f, g) &= \int_{\tau} \int_{\mathcal{X}} \int_{\mathcal{Y}} \left(\sqrt{t_f(t, x, y)} - \sqrt{t_g(t, x, y)} \right)^2 dy dx dt \\ &= 2(1 - \rho(f, g)) \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \rho(f, g) &= \int_{\tau} \int_{\mathcal{X}} \int_{\mathcal{Y}} \sqrt{t_f(t, x, y) t_g(t, x, y)} dy dx dt \\ &= \int_{\tau} \int_{\mathcal{X}} \int_{\mathcal{Y}} \sqrt{\frac{f^2(t, x, y) g^2(t, x, y)}{\int_{\tau} \int_{\mathcal{X}} \int_{\mathcal{Y}} f^2(t, x, y) dy dx dt \int_{\tau} \int_{\mathcal{X}} \int_{\mathcal{Y}} g^2(t, x, y) dy dx dt}} dy dx dt \\ &= \int_{\tau} \int_{\mathcal{X}} \int_{\mathcal{Y}} \frac{|f(t, x, y) g(t, x, y)|}{\sqrt{\int_{\tau} \int_{\mathcal{X}} \int_{\mathcal{Y}} f^2(t, x, y) dy dx dt \int_{\tau} \int_{\mathcal{X}} \int_{\mathcal{Y}} g^2(t, x, y) dy dx dt}} dy dx dt \end{aligned}$$

é a afinidade entre $f(t, x, y)$ e $g(t, x, y)$, onde $0 \leq \rho(f, g) \leq 1$ e que $d^2(f, g)$ é mínimo quando $\rho(f, g) = 1$ (ver Dias, 1999).

Aumentando o número de bases K_1 e K em uma unidade, o procedimento vai parar quando

$\rho(\hat{\lambda}_{K_1, K}, \hat{\lambda}_{K_1, K+1}) = \int_{\tau} \int_{\mathcal{X}} \int_{\mathcal{Y}} \frac{|\hat{\lambda}_{K_1, K}(t, x, y) \times \hat{\lambda}_{K_1, K+1}(t, x, y)|}{\sqrt{\hat{\lambda}_{K_1, K}^2(t, x, y) \times \hat{\lambda}_{K_1, K+1}^2(t, x, y)}} dy dx dt$ é aproximadamente igual a 1, já que $\rho(\hat{\lambda}_{K_1, K}, \hat{\lambda}_{K_1, K+1})$ é aproximadamente igual a 1 implica que

$\hat{\lambda}_{K_1, K}(t, x, y)$ é aproximadamente igual a $\hat{\lambda}_{K_1, K+1}(t, x, y)$.

3.3.2 Método sequencial adaptativo H-splines

Um bom ajuste aos dados não é o único objetivo ao estimar uma curva. Existe um outro objetivo, geralmente conflitante, que é obter uma estimativa que não oscile muito rapidamente. A idéia básica do método de penalização da não suavidade é quantificar a noção de quão rapidamente uma curva oscila e, então, representar o problema de estimação de maneira que o compromisso entre esses dois objetivos seja explícito.

Observe os seguintes esquemas:

$$(1) = \begin{cases} \text{Número de bases B-splines grande} \implies \text{superfície/curva muito "rugosa"}. \\ \text{Número de bases B-splines pequeno} \implies \text{superfície/curva muito "suave"}. \end{cases}$$

$$(2) = \begin{cases} \text{Parâmetro de penalização grande} \implies \text{superfície/curva muito "suave"}. \\ \text{Parâmetro de penalização pequeno} \implies \text{superfície/curva muito "rugosa"}. \end{cases}$$

Assim, será apresentado um método sequencial adaptativo H-splines via equação de log-verossimilhança penalizada, no qual os coeficientes das bases B-splines e os parâmetros de penalização serão obtidos em dois estágios com base no método de aproximação de Newton-Raphson e na pseudo distância de Hellinger para estabelecer um equilíbrio entre o número de bases B-splines e a magnitude do parâmetro de penalização. Várias medidas para a não suavidade foram sugeridas na literatura, (ver por exemplo Titterington (1985),

Good e Gaskins (1971), Ogata e Katsura (1988), Wang e Taylor (2004), dentre outros). Nesta tese a medida adotada para a não suavidade será a integral do quadrado da segunda derivada da função intensidade, por ser a mais usual. Ou seja, considerando o modelo adotado, a medida para a não suavidade é dada por:

$$\Phi(\lambda) = \alpha_1 \int_{\mathcal{T}} [\lambda_1''(t)]^2 dt + \alpha_2 \int_{\mathcal{X}} \int_{\mathcal{Y}} [\lambda_{23}''(x, y)]^2 dy dx. \quad (3.3.10)$$

Onde os parâmetros α_1 e α_2 controlam a relação entre a bondade do ajuste e a suavização da estimação da intensidade.

Sejam $(T_1, X_1, Y_1), \dots, (T_n, X_n, Y_n)$ observações de um processo de Poisson não homogêneo com intensidade λ . A estimativa da intensidade é definida como sendo o máximo da seguinte equação de log-verossimilhança penalizada.

$$L(C, \vec{\alpha} \mid S) = \sum_{i=1}^n \log \{ \lambda(t_i, x_i, y_i) \} - \int_{\mathcal{T}} \int_{\mathcal{X}} \int_{\mathcal{Y}} \lambda(t, x, y) dy dx dt - \left\{ \underbrace{\alpha_1 \int_{\mathcal{T}} [\lambda_1''(t)]^2 dt}_{g_1''} + \underbrace{\alpha_2 \int_{\mathcal{X}} \int_{\mathcal{Y}} [\lambda_{23}''(x, y)]^2 dx dy}_{g_{23}''} \right\}. \quad (3.3.11)$$

O termo g_1'' na Equação (3.3.11) pode ser escrito como:

$$g_1'' = \int_{\mathcal{T}} \left[\sum_{r_1=1}^{K_1} \beta_{r_1} [B_{r_1}^{(1)}(t)]'' \right]^2 dt,$$

onde $[B^{(1)}(t)]''$ é a segunda derivada de $B^{(1)}(t)$ em relação à t .

O termo $g_1''(t)$ tem forma quadrática com respeito aos coeficientes β_{r_1} . Assim, podemos escrever $g_1''(t) = C_1 \Omega_1 C_1^T$, pois $\Omega_1 = \int_{\mathcal{T}} \left[[B^{(1)}(t)]'' \right]^T \left[[B^{(1)}(t)]'' \right] dt$. Ω_1 será obtida pelo Método de Monte Carlo para estimação de integrais descrito na seção 3.2.

O termo g_{23}'' na Equação (3.3.11), que representa a integral da segunda derivada do produto tensorial entre as bases *B-splines* $B^{(2)}(x)$ e $B^{(3)}(y)$ ao quadrado, pode ser escrito como:

$$g_{23}'' = \int_{\mathcal{X}} \int_{\mathcal{Y}} \left\{ \left[\frac{\partial^2}{\partial x \partial x} \lambda_{23}(x, y) \right]^2 + 2 \left[\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \lambda_{23}(x, y) \right]^2 + \left[\frac{\partial^2}{\partial y \partial y} \lambda_{23}(x, y) \right]^2 \right\} dy dx.$$

O termo g_{23}'' pode ser trabalhado para que possamos encontrar a sua forma quadrática. Considere o índice r para indicar o par (r_2, r_3) onde $r_2 = 1, \dots, K_2$, $r_3 = 1, \dots, K_3$ e $r = 1, \dots, K_2 \times K_3$, para o produto tensorial de *B-splines*. Segundo Wang e Taylor, (2004) e Green e Silverman (1994) g_{23}'' tem forma quadrática com respeito aos coeficientes. Sejam $B_{r_2}^{(2)}(x) = \delta_{r_2}$, $B_{r_3}^{(3)}(y) = \varepsilon_{r_3}$ e $C_2 = (\varphi_{11}, \dots, \varphi_{r_2 \times r_3})^T$ com $\varphi_r = \varphi_{r_2, r_3}$, $r = 1, \dots, K_2 \times K_3$. Então, $\lambda_{23}(x, y) = \sum_{r_2=1}^{K_2} \sum_{r_3=1}^{K_3} \varphi_{r_2 r_3} \delta_{r_2} \varepsilon_{r_3}$.

Sejam

$$\begin{aligned} D_{r_2 f_2}^{(s)} &= \int_{\mathcal{X}} \delta_{r_2}^{(s)}(x) \delta_{f_2}^{(s)}(x) dx, \quad \forall r_2, f_2 = 1, \dots, K_2 \\ G_{r_3 f_3}^{(s)} &= \int_{\mathcal{Y}} \varepsilon_{r_3}^{(s)}(y) \varepsilon_{f_3}^{(s)}(y) dy, \quad \forall r_3, f_3 = 1, \dots, K_3 \end{aligned}$$

onde s representa o grau da derivada e F uma matriz $K_2 K_3 \times K_2 K_3$ definida por:

$$F_{rf} = \sum_{s=0}^2 \binom{2}{s} D_{r_2 f_2}^{(s)} G_{r_3 f_3}^{(2-s)}$$

Então, a forma quadrática do termo de penalização g_{23}'' fica:

$$g_{23}'' = C_2 F C_2^T$$

Assim, a equação a ser maximizada fica:

$$\begin{aligned}
L(C, \vec{\alpha} \mid S) &= \sum_{i=1}^n \log \left\{ \left[\sum_{r_1=1}^{K_1} \beta_{r_1} B_{r_1}^{(1)}(t_i) \right] \left[\sum_{r_2=1}^{K_2} \sum_{r_3=1}^{K_3} \varphi_{r_2 r_3} B_{r_2}^{(2)}(x_i) B_{r_3}^{(3)}(y_i) \right] \right\} \\
&\quad - \int_{\mathcal{T}} \int_{\mathcal{X}} \int_{\mathcal{Y}} \left\{ \left[\sum_{r_1=1}^{K_1} \beta_{r_1} B_{r_1}^{(1)}(t) \right] \left[\sum_{r_2=1}^{K_2} \sum_{r_3=1}^{K_3} \varphi_{r_2 r_3} B_{r_2}^{(2)}(x) B_{r_3}^{(3)}(y) \right] \right\} dy dx dt \\
&\quad - \left\{ \frac{\alpha_1 C_1 \Omega_1 C_1^T}{2} + \frac{\alpha_2 C_2 F C_2^T}{2} \right\}
\end{aligned} \tag{3.3.12}$$

onde $C_1 = (\beta_1, \dots, \beta_{K_1})^T$ e $C_2 = (\varphi_1, \dots, \varphi_{K_2 K_3})^T$.

Considere o vetor de parâmetros $C = (C_1, C_2, \vec{\alpha})^T$, de comprimento $K_1 + (K_2 \times K_3 + 2)$, onde $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)^T$ e C^l a iteração corrente de C . O método de aproximação de Newton-Raphson é dado por:

$$C^{l+1} = C^l + H^{-1}(C^l) \nabla(C^l) \tag{3.3.13}$$

onde

$$H(C^l) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \{L(C, \vec{\alpha} \mid S)\}}{\partial \beta_{r_1} \partial \beta_{r_1}} & \frac{\partial^2 \{L(C, \vec{\alpha} \mid S)\}}{\partial \beta_{r_1} \partial \varphi_r} & \frac{\partial^2 \{L(C, \vec{\alpha} \mid S)\}}{\partial \beta_{r_1} \partial \vec{\alpha}} \\ \frac{\partial^2 \{L(C, \vec{\alpha} \mid S)\}}{\partial \beta_{r_1} \partial \varphi_r} & \frac{\partial^2 \{L(C, \vec{\alpha} \mid S)\}}{\partial \varphi_r \partial \varphi_r} & \frac{\partial^2 \{L(C, \vec{\alpha} \mid S)\}}{\partial \varphi_r \partial \vec{\alpha}} \\ \frac{\partial^2 \{L(C, \vec{\alpha} \mid S)\}}{\partial \beta_{r_1} \partial \vec{\alpha}} & \frac{\partial^2 \{L(C, \vec{\alpha} \mid S)\}}{\partial \varphi_r \partial \vec{\alpha}} & \frac{\partial^2 \{L(C, \vec{\alpha} \mid S)\}}{\partial \vec{\alpha} \partial \vec{\alpha}} \end{bmatrix} \tag{3.3.14}$$

e

$$\nabla(C^l) = \left[\frac{\partial \{L(C, \vec{\alpha} \mid S)\}}{\partial \beta_{r_1}}, \frac{\partial \{L(C, \vec{\alpha} \mid S)\}}{\partial \varphi_r}, \frac{\partial \{L(C, \vec{\alpha} \mid S)\}}{\partial \vec{\alpha}} \right] \quad (3.3.15)$$

$\forall \ r_1 = 1, \dots, K_1$ e $\forall \ r = 1, \dots, K_2 \times K_3$. Onde $H(C^l)$ é uma matriz quadrada com dimensões $(K_1 + K_2 \times K_3 + 2) \times (K_1 + K_2 \times K_3 + 2)$ e $\nabla(C^l)$ é uma matriz com dimensões $1 \times (K_1 + K_2 \times K_3 + 2)$.

Após a convergência obtemos $\hat{C} = (\hat{C}_1, \hat{C}_2, \hat{\vec{\alpha}})^T$, a iteração final de Newton-Raphson, que depende de K_1 , $K = K_2 = K_3$ e de $\hat{\vec{\alpha}} = (\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2)^T$, tal que:

$$\hat{\lambda}_{K_1, K, \hat{\vec{\alpha}}}(t, x, y) = \left[\sum_{r_1=1}^{K_1} \hat{\beta}_{r_1} B_{r_1}^{(1)}(t) \right] \left[\sum_{r_2=1}^{K_2} \sum_{r_3=1}^{K_3} \hat{\varphi}_{r_2 r_3} B_{r_2}^{(2)}(x) B_{r_3}^{(3)}(y) \right]. \quad (3.3.16)$$

O método *H-splines* fornece um procedimento automático para estimar a intensidade λ baseado em $K_1 < n$, $K_2 < n$ e $K_3 < n$ funções base e os parâmetros de suavização $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$. Vamos assumir $K = K_2 = K_3$.

Estrutura do método *H-splines*

Pode-se descrever o procedimento *H-splines* da seguinte forma:

Dados T_1, \dots, T_n , X_1, \dots, X_n e Y_1, \dots, Y_n : amostra de um PPNH multivariado;

- Passo 1: Tome K_1^0 e K^0 , o número inicial de bases *B-splines* e $\vec{\alpha}^0$ o chute inicial do parâmetro de penalização;
- Passo 2: O método obtém $\hat{C}_{\vec{\alpha}^0} = \arg \max_C L(C, \vec{\alpha}^0 \mid S)$ via aproximação de Newton-Raphson;
- Passo 3: O método utiliza $\hat{C}_{\vec{\alpha}^0}$ para obter $\hat{\vec{\alpha}} = \arg \max_{\vec{\alpha}} L(\hat{C}_{\vec{\alpha}}, \vec{\alpha} \mid S)$ via aproxima-

ção de Newton-Raphson;

- Passo 4: O método utiliza $\hat{\vec{\alpha}}$ para obter $\hat{C}_{\hat{\vec{\alpha}}} = \arg \max_C L(C, \hat{\vec{\alpha}} | S)$ via aproximação de Newton-Raphson;
- Passo 5: O método obtém a intensidade $\hat{\lambda}_{K_1^0, K^0, \hat{\vec{\alpha}}}(t, x, y)$ dada por (3.3.16);
- Passo 6: Para K_1^0 fixo, o método repete os Passos 3, 4 e 5 e obtém a intensidade $\hat{\lambda}_{K_1^0, K^0+1, \hat{\vec{\alpha}}}$;
- Passo 7: Se $\rho(\hat{\lambda}_{K_1^0, K^0, \hat{\vec{\alpha}}}(t, x, y), \hat{\lambda}_{K_1^0, K^0+1, \hat{\vec{\alpha}}}(t, x, y)) \approx 1$, uma estimativa baseada em K_1^0 e $K^0 + 1$ bases B-splines é fornecida. Caso contrário o procedimento continua adicionando uma unidade em K mantendo K_1^0 fixa até encontrar a quantidade ótima de K bases B-spline;
- Passo 8: Uma vez encontrada a quantidade ótima de K bases B-spline, digamos: K^* , o procedimento toma K^* fixo e acrescenta uma base à K_1^0 . O procedimento para em K_1 quando a condição no Passo 7 é satisfeita e K_1^* é fornecida.

No próximo capítulo serão apresentados quatro exemplos de simulação nos quais as intensidades marginais $\lambda_1(t)$ e $\lambda_{23}(x, y)$ serão especificadas sob diferentes níveis de dificuldade. E por fim, um exemplo com dados reais.

Capítulo 4

Estudos de Simulação

4.1 Introdução

Neste capítulo iremos verificar empiricamente o desempenho do método da equação de log-verossimilhança não penalizada e do método *H-splines*. Para isso serão realizados quatro estudos de simulação. A idéia é mostrar que o método *H-splines* e o método da equação de log-verossimilhança não penalizada podem estimar superfícies, sob diferentes graus de dificuldade com um desempenho superior que os métodos *AIC* e *BIC*.

Também pretendemos mostrar empiricamente que o método *H-splines* pode, no mínimo, apresentar um comportamento semelhante ou melhor que o método da equação de log-verossimilhança não penalizada, porém com um número de bases *B-splines* inferior.

Para os dados simulados vamos obter as superfícies e as curvas estimadas usando os métodos *AIC*, *BIC*, o método da equação de log-verossimilhança não penalizada e o método *H-splines* descritos no Capítulo 4. Posteriormente as superfícies e as curvas

estimadas com base em cada método estudado serão confrontadas com as curvas e as superfícies verdadeiras oriundas dos quatros estudos de simulação que serão descritos na próxima seção, de modo que possamos fazer uma comparação visual entre as mesmas.

Cada estudo de simulação terá respectivamente um número esperado de pontos de 15, 30, 100 e 500 observações a fim de se determinar empiricamente a consistência dos estimadores. Na próxima seção será apresentado o algoritmo para gerar eventos aleatórios de um PPNH multivariado

4.1.1 Algoritmo aceitação/rejeição para gerar eventos aleatórios de um PPNH multivariado

Na literatura existem vários algoritmos para gerar eventos aleatórios de um processo de Poisson não homogêneo, incluindo o algoritmo de inversão Çinlar, (ver Çinlar, 1975) e o algoritmo thinning Shedler' s, (ver Saltzman, 2008). Assim, será apresentada a descrição dos passos do algoritmo para gerar um processo de Poisson não homogêneo tridimensional.

O primeiro passo é gerar um processo de Poisson homogêneo com taxa $\bar{\lambda} \geq \lambda(t, x, y)$, definido por uma variável aleatória $S \sim Poisson(\bar{\lambda} \times Volume(T \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y}))$ e dado $S = s$ eventos aleatórios (t_i^*, x_i^*, y_i^*) uniformemente distribuídos no cubo de volume $(T \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y})$ e variáveis aleatórias $U_i \sim Uniforme(0, 1)$ independentemente, $i = 1, \dots, s$.

Na terceira etapa (aceitação ou rejeição), se $U_i \leq \frac{\lambda(t_i^*, x_i^*, y_i^*)}{\bar{\lambda}}$, o ponto (t_i^*, x_i^*, y_i^*) é incluído no processo. O algoritmo formal é apresentado a seguir.

```

 $S = \emptyset;$ 
 $Encontre \bar{\lambda} \geq \lambda(t, x, y);$ 
 $Gere N^* \sim Poisson(\bar{\lambda} \times Volume(T \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y}));$ 
 $Dado N^* = n^* ;$ 
para  $i = 1$  até  $n^*$  faça
|    $t_i^* \sim U(T);$ 
|    $x_i^* \sim U(\mathcal{X});$ 
|    $y_i^* \sim U(\mathcal{Y});$ 
|    $Gere U_i \sim U(0, 1) ;$ 
|   se  $U_i \leq \frac{\lambda(t_i^*, x_i^*, y_i^*)}{\bar{\lambda}}$  então
|   |    $S \leftarrow U \{(t_i^*, x_i^*, y_i^*)\}.$ 
|   fim
fim
 $Retorne S$ 

```

Algorithm 1: Algoritmo para gerar um processo de Poisson não homogêneo

Para a construção de cada banco de dados será utilizado o algoritmo de (aceitação/rejeição) e o teorema da superposição (2.2.1) no qual o algoritmo de (aceitação/rejeição) será repetido m vezes. A quantidade m de superposições será dada por $m = \frac{n}{V}$, onde V é dado por:

$$V = \left[\int_{\mathcal{T}} \lambda_1(t) dt \right] \left[\int_{\mathcal{X}} \int_{\mathcal{Y}} \lambda_{23}(x, y) dy dx \right]. \quad (4.1.1)$$

Como foram realizadas m superposições do processo de Poisson não homogêneo, a

intensidade do processo fica $\lambda^*(t, x, y) = m \times \lambda(t, x, y)$. Assim, a estimativa final será dada por

$$\hat{\lambda}_l(t, x, y) = \frac{\hat{\lambda}_l^*(t, x, y)}{m_l} \quad \forall l = 1, 2, 3, 4. \quad (4.1.2)$$

O índice l corresponde a cada um dos quatro estudos de simulação.

Tabela 4.1: *Quantidade de superposições usada em cada estudo de simulação.*

Número esperado de pontos	$n = 15$	$n = 30$	$n = 100$	$n = 500$
Estudo de Simulação 1	5	11	36	181
Estudo de Simulação 2	1	2	6	36
Estudo de Simulação 3	8	26	73	350
Estudo de Simulação 4	4	9	29	146

Na próxima seção será apresentada a estrutura dos estudos de simulação considerando os métodos AIC , BIC , equação de log-verossimilhança não penalizada e H -splines.

4.1.2 Estrutura dos estudos de Simulação

- Passo 1: Simular amostras de um PPNH multivariado;
- Passo 2: Aplicar os métodos AIC , BIC , métodos da equação de log-verossimilhança não penalizada e H -splines;
- Passo 3: Os passos de 1 a 2 são repetidos 500 vezes;
- Passo 4: A dimensão do espaço cúbico natural será as medianas das quantidades K_1 e K .

Nos estudos de simulação, as intensidades marginais $\lambda_1(t)$ e $\lambda_{23}(x, y)$ foram escolhidas devido aos seus respectivos graus de complexidade.

4.2 Estudo de Simulação 1

Considere as seguintes funções intensidade marginais $\lambda_1(t)$ e $\lambda_{23}(x, y)$:

1.

$$\lambda_1(t) = 5 \times \text{sen}(\pi t) \quad t \in [0, 1] \quad (4.2.3)$$

2. $\lambda_{23}(x, y)$, representada por uma distribuição Normal bivariada:

$$\lambda_{23}(x, y) = \frac{1}{2\pi |\Sigma_{2 \times 2}|^{\frac{1}{2}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\vec{z} - \vec{\mu})^T \Sigma_{2 \times 2}^{-1} (\vec{z} - \vec{\mu}) \right\} \quad (4.2.4)$$

Com média e matriz de variância e covariância dados respectivamente por $\vec{\mu} = (0, 0)^T$,

$$\Sigma_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

e $\vec{z} = (x, y)^T$, onde $x \in [-3, 3]$ e $y \in [-3, 3]$, $\rho = 0.5$, $\mu_x = 0$, $\mu_y = 0$, $\sigma_x = 1$ e $\sigma_y = 1$.

Assim, $\lambda(t, x, y) = \lambda_1(t)\lambda_{23}(x, y)$ pode ser representada como:

$$\lambda(t, x, y) = 5 \times \text{sen}(\pi t) \times \frac{1}{2\pi |\Sigma_{2 \times 2}|^{\frac{1}{2}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\vec{z} - \vec{\mu})^T \Sigma_{2 \times 2}^{-1} (\vec{z} - \vec{\mu}) \right\} \quad (4.2.5)$$

e

$$\bar{\lambda} = 5 \times \frac{1}{2\pi |\Sigma_{2 \times 2}|^{\frac{1}{2}}}. \quad (4.2.6)$$

A Figura 4.1 é composta por três gráficos. Gráficos de contorno (parte superior esquerda) e de superfície (parte superior direita) da função intensidade $\lambda_{23}(x, y)$. E finalmente, na parte inferior o gráfico da intensidade $\lambda_1(t)$.

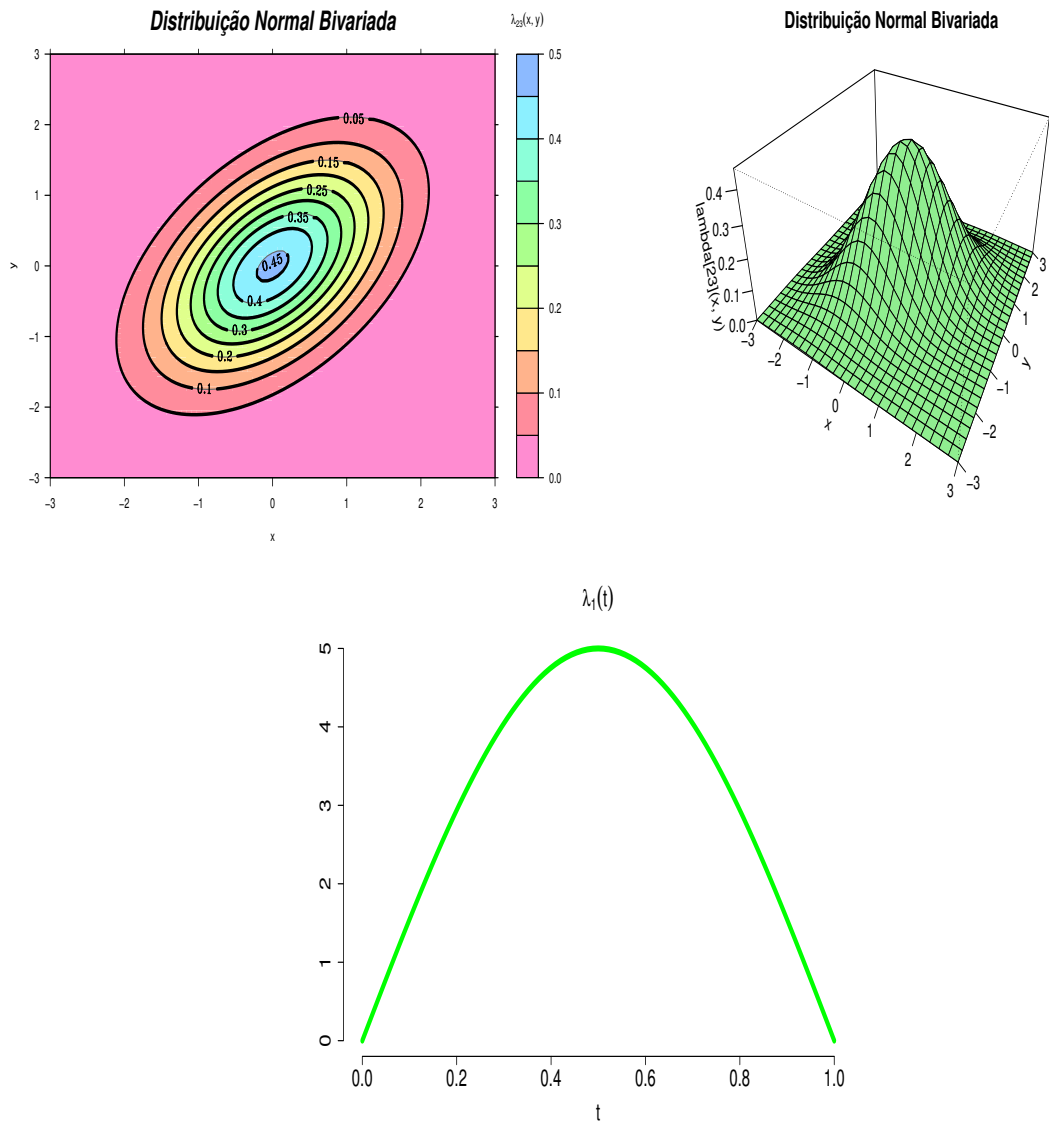


Figura 4.1: Gráficos de contorno (parte superior esquerda) e de superfície (parte superior direita) da função intensidade $\lambda_{23}(x, y)$ e o gráfico da intensidade $\lambda_1(t)$ na parte inferior.

4.2.1 Resultados do estudo de simulação 1

A Tabela 4.2 apresenta os valores de K_1 e de K , que são os números de bases *B-splines* utilizados para estimar a intensidade conjunta $\lambda(t, x, y)$ segundo os métodos *AIC*, *BIC*, o método da equação de log-verossimilhança não penalizada e o método *H-splines*. A Tabela 4.3 apresenta uma comparação entre a quantidade total de coeficientes utilizados para estimar a intensidade conjunta $\lambda(t, x, y)$, considerando os métodos estudados.

A Figura 4.2 apresenta as curvas estimadas da intensidade marginal do processo $\lambda_1(t)$. Com base nesta figura, pode-se notar que o método da equação de log-verossimilhança não penalizada e o método *H-splines* apresentaram um desempenho melhor que o desempenho apresentado pelos métodos *AIC* e *BIC*, no sentido que aqueles métodos apresentaram suas respectivas curvas estimadas mais próximas da curva verdadeira.

Os gráficos de contorno das Figuras 4.3, 4.4, 4.5 e 4.6 descrevem, respectivamente, os contornos estimados das intensidades do processo $\lambda_{23}(x, y)$ sob os métodos *AIC*, *BIC*, equação de log-verossimilhança não penalizada e o *H-splines*. Os contornos na cor preta correspondem aos contornos da superfície verdadeira, enquanto que os contornos na cor verdes correspondem aos contornos da superfície estimada.

Comparando o contornos da superfície verdadeira (contorno pretos) com o contorno da superfície estimada (contorno verdes), pode-se verificar visualmente que os métodos da equação de log-verossimilhança não penalizada e o *H-splines* apresentaram um desempenho superior que o desempenho apresentado pelos métodos *AIC* e *BIC*.

Comparando o desempenho entre o método da equação de log-verossimilhança não penalizada e o método *H-splines*, pode-se concluir que o método *H-splines* foi mais efi-

ciente que o método da equação de log-verossimilhança não penalizada, pois apresentou resultados tão semelhantes quanto os resultados apresentados pelo método da equação de log-verossimilhança não penalizada, porém com uma quantidade total de coeficientes muito inferior. Isto pode ser verificado nas Tabelas 4.2 e 4.3.

Tabela 4.2: *Quantidade de bases B-splines*

Métodos	$n = 15$		$n = 30$		$n = 100$		$n = 500$	
	K_1	K	K_1	K	K_1	K	K_1	K
AIC	4	4	4	4	4	4	4	4
BIC	4	4	4	4	4	4	5	4
Log-verossimilhança não penalizada	8	7	8	8	10	9	10	9
H-splines	5	5	6	5	6	6	6	6

Tabela 4.3: *Quantidade total de coeficientes: $K_1 + K \times K$*

Métodos	$n = 15$	$n = 30$	$n = 100$	$n = 500$
AIC	20	20	20	20
BIC	20	20	20	21
Log-verossimilhança não penalizada	57	72	91	91
H-splines	31	31	42	42

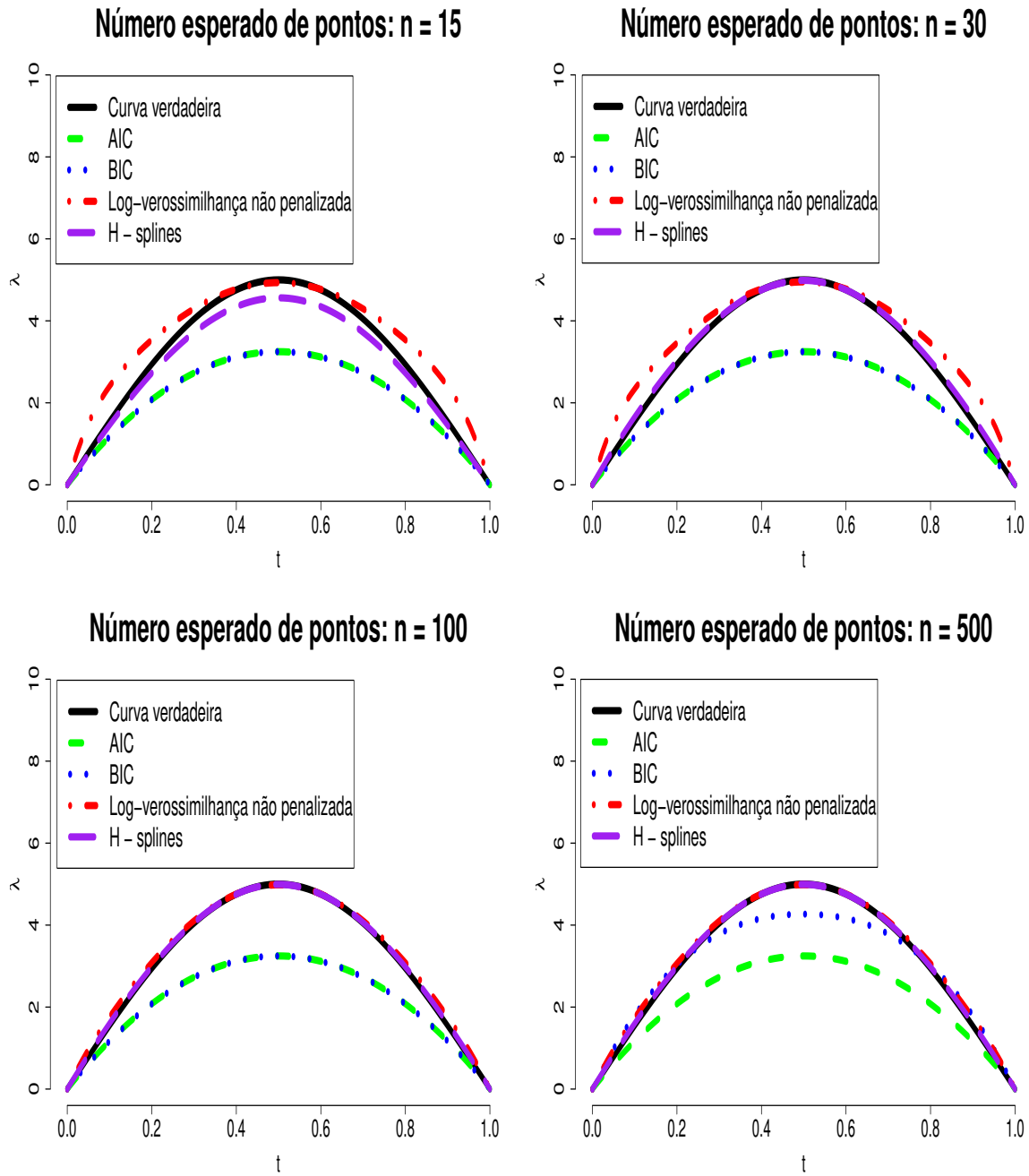


Figura 4.2: *Estudo de Simulação 1: Intensidades marginais $\hat{\lambda}_1(t)$ sob os métodos AIC, BIC, equação de log-verossimilhança não penalizada e o H-splines.*

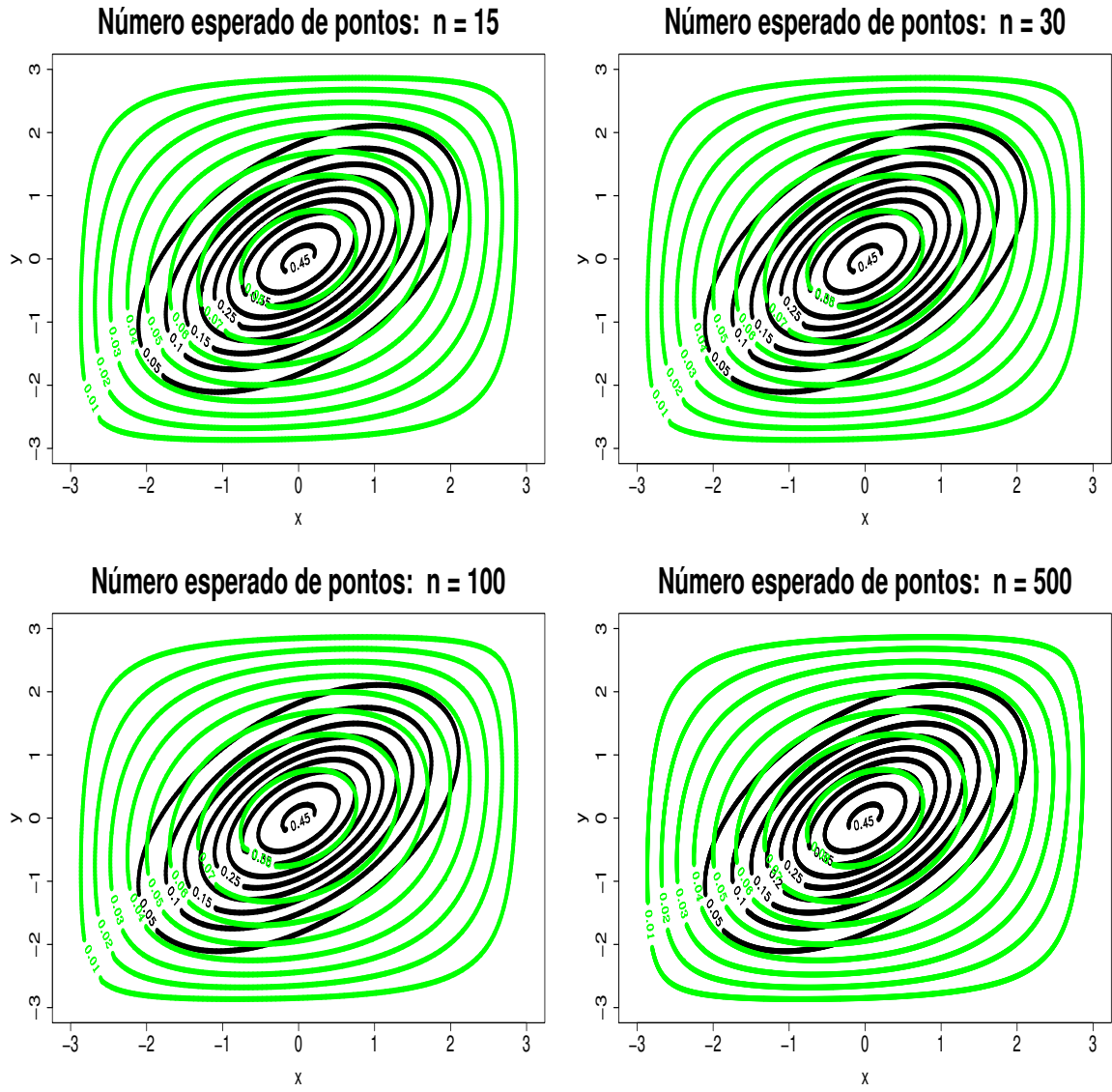


Figura 4.3: *Estudo de Simulação 1: Contorno das intensidades marginais $\hat{\lambda}_{23}(x, y)$, considerando o método AIC. Os contornos pretos correspondem à superfície verdadeira, enquanto que os contornos verdes correspondem às superfícies estimadas.*

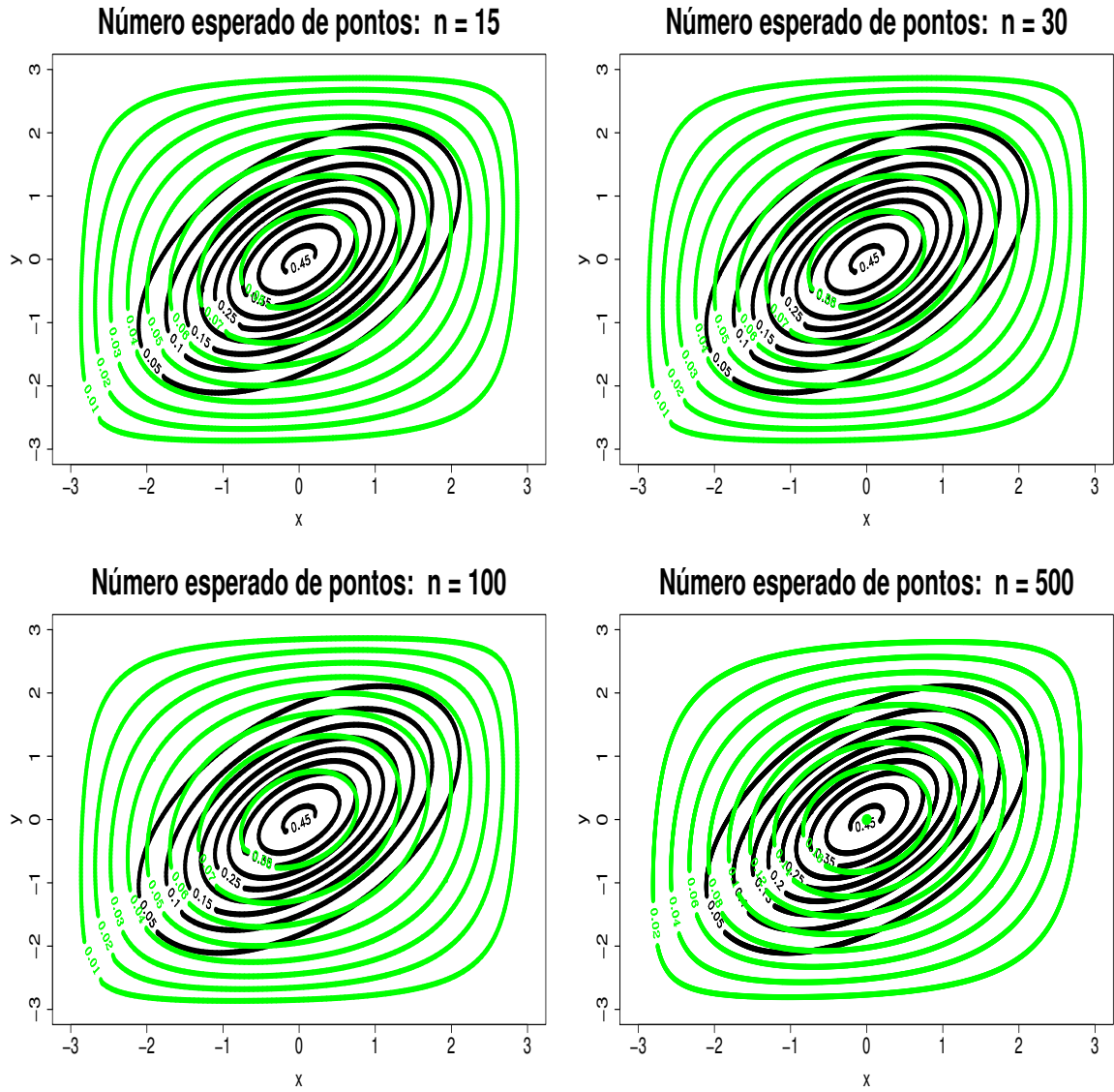


Figura 4.4: *Estudo de Simulação 1: Contorno das intensidades marginais $\hat{\lambda}_{23}(x, y)$, considerando o método BIC. Os contornos pretos correspondem à superfície verdadeira, enquanto que os contornos verdes correspondem às superfícies estimadas.*

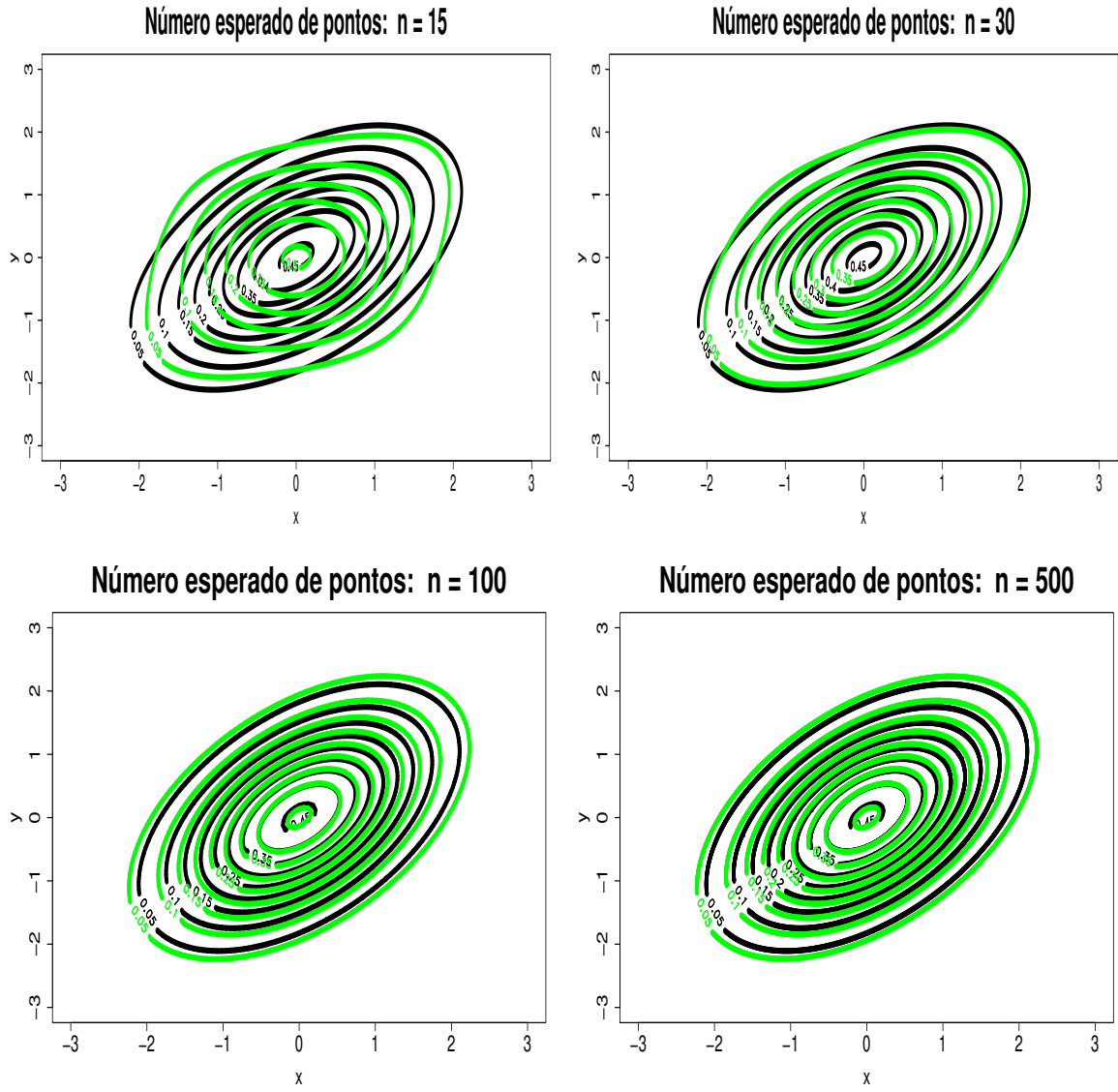


Figura 4.5: *Estudo de Simulação 1: Contorno das intensidades marginais $\hat{\lambda}_{23}(x, y)$, considerando a equação de Log-verossimilhança não penalizada. Os contornos pretos correspondem à superfície verdadeira, enquanto que os contornos verdes correspondem às superfícies estimadas.*

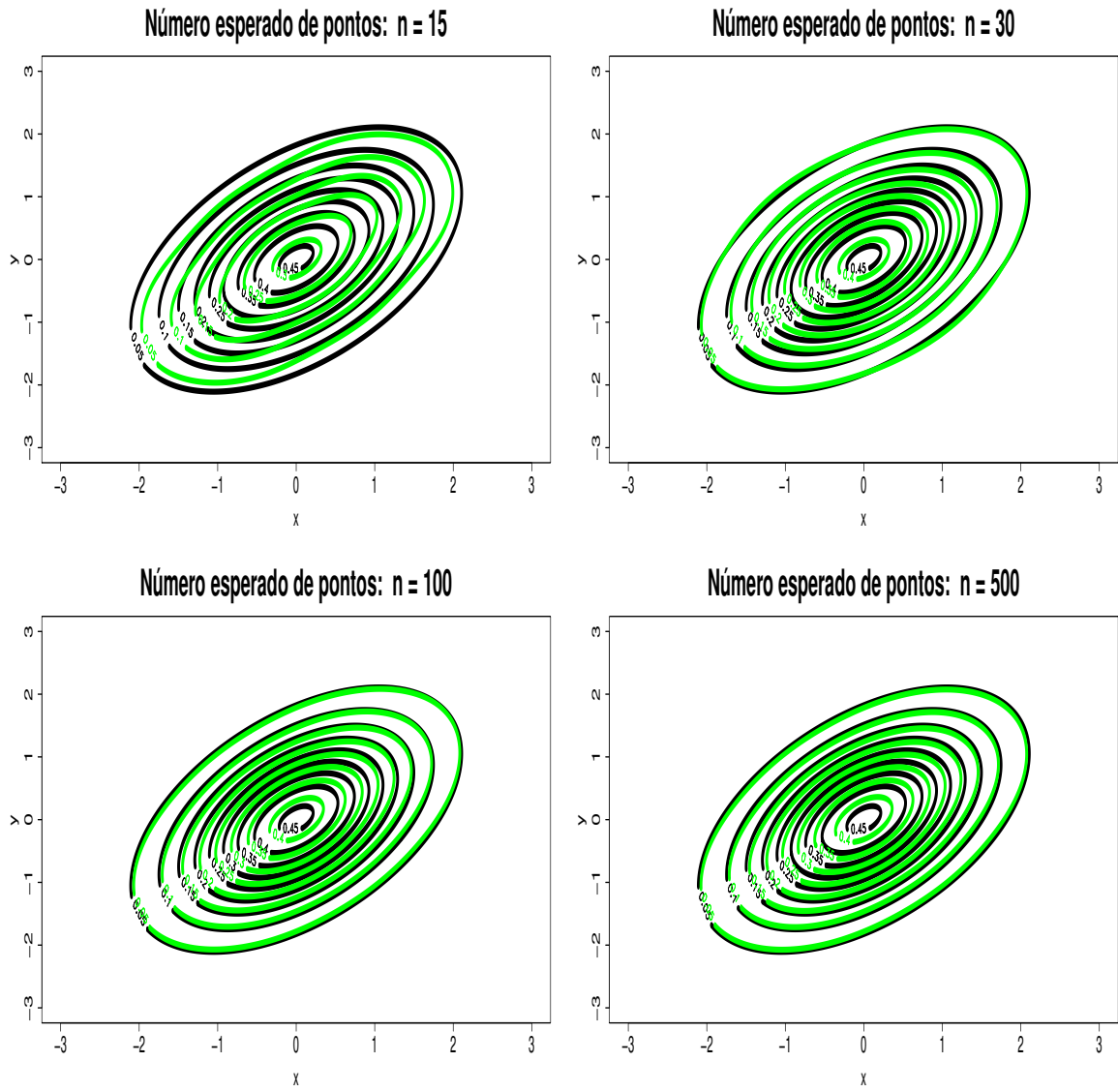


Figura 4.6: *Estudo de Simulação 1: Contorno das intensidades marginais $\hat{\lambda}_{23}(x, y)$, considerando o método H-splines. Os contornos pretos correspondem à superfície verdadeira, enquanto que os contornos verdes correspondem às superfícies estimadas.*

4.3 Estudo de Simulação 2

Considere as seguintes funções intensidades marginais $\lambda_1(t)$ e $\lambda_{23}(x, y)$:

1. $\lambda_1(t)$ será representada por uma mistura de duas distribuições Normal univariadas.

$$\lambda_1(t) = 50 \times \{0.4 \times f_1(x) + 0.6 \times f_2(x)\} \quad (4.3.7)$$

onde

$$f_k(x) = \frac{1}{\sigma_k \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_k^2} (x - \mu_k)^2 \right\}, \quad k = 1, 2, \quad (4.3.8)$$

$t \in [-7, 7]$, $\sigma_1 = 1$, $\mu_1 = -3$, $\sigma_2 = 1$ e $\mu_2 = 3$.

2. $\lambda_{23}(x, y)$ será representada por uma mistura de duas distribuições Normal bivariadas:

$$f_1(x, y) = \frac{1}{2\pi |\Sigma_1|^{\frac{1}{2}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\vec{z} - \vec{\mu}_1)^T \Sigma_1^{-1} (\vec{z} - \vec{\mu}_1) \right\} \quad (4.3.9)$$

$$f_2(x, y) = \frac{1}{2\pi |\Sigma_2|^{\frac{1}{2}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\vec{z} - \vec{\mu}_2)^T \Sigma_2^{-1} (\vec{z} - \vec{\mu}_2) \right\} \quad (4.3.10)$$

$$\lambda_{23}(x, y) = 0.7 \times f_1(x, y) + 0.3 \times f_2(x, y), \quad (4.3.11)$$

onde: $\vec{\mu}_1 = (4, 5)^T$, $\vec{\mu}_2 = (1, 4)^T$, $t \in [-7, 7]$, $x \in [-1, 7]$, $y \in [2, 8]$ e $\vec{z} = (x, y)^T$,

$$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix},$$

e

$$\Sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 \\ -0.5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Assim, $\lambda(t, x, y) = \lambda_1(t)\lambda_{23}(x, y)$ pode ser representada como:

$$\begin{aligned} \lambda(t, x, y) &= 50 \times \{0.4 \times f_1(x) + 0.6 \times f_2(x)\} \\ &\times \{0.7 \times f_1(x, y) + 0.3 \times f_2(x, y)\} \end{aligned} \quad (4.3.12)$$

e

$$\bar{\lambda} = 50 \times \frac{1}{2\pi} \times \frac{1}{2\pi |\Sigma_2|^{\frac{1}{2}}} \quad (4.3.13)$$

A Figura 4.7 é composta por três gráficos. Gráficos de contorno (parte superior esquerda) e de superfície (parte superior direita) da função intensidade $\lambda_{23}(x, y)$. E finalmente, na parte inferior o gráfico da intensidade $\lambda_1(t)$.

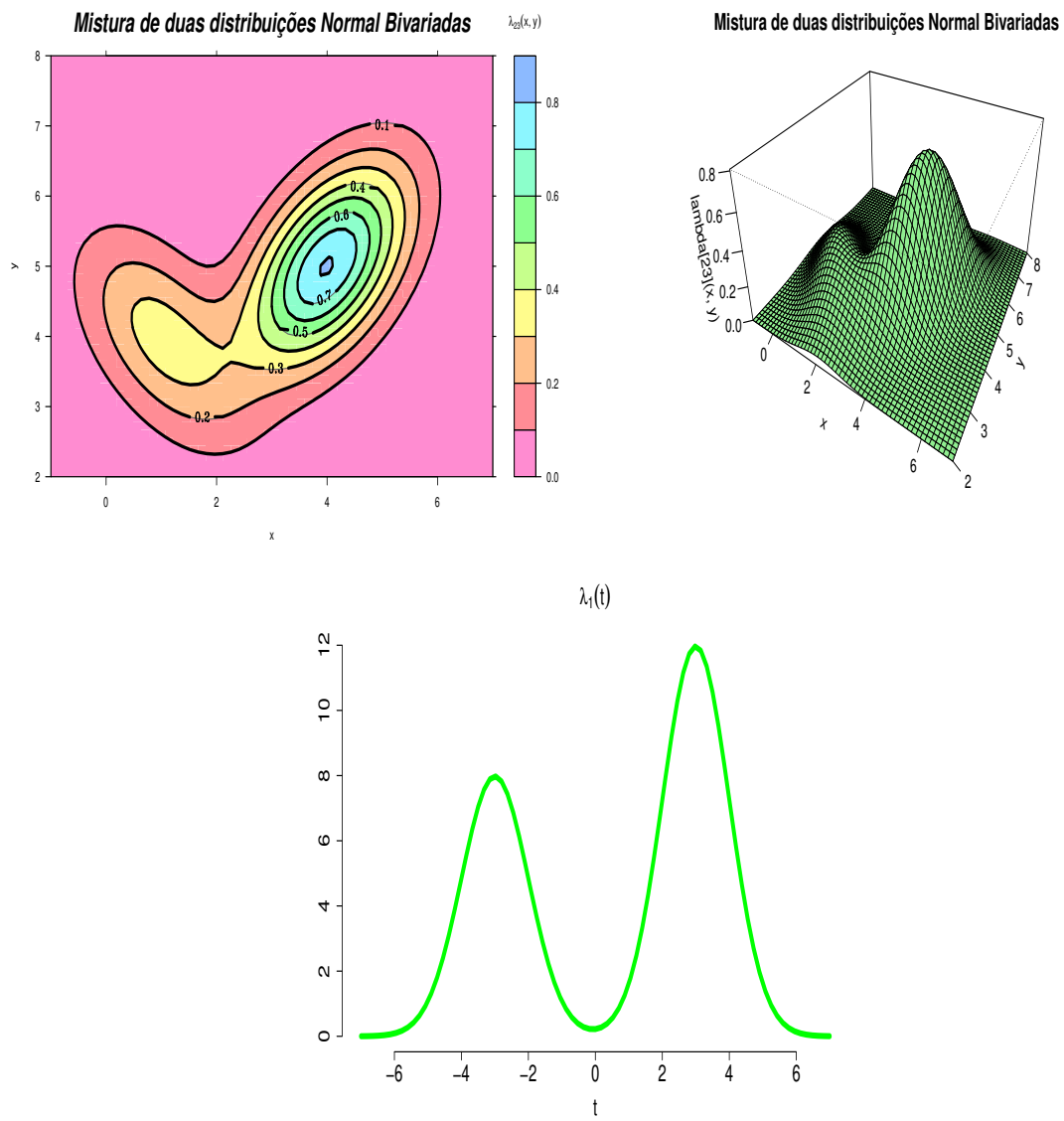


Figura 4.7: Gráficos de contorno (parte superior esquerda) e de superfície (parte superior direita) da função intensidade $\lambda_{23}(x, y)$ e o gráfico da intensidade $\lambda_1(t)$ na parte inferior.

4.3.1 Resultados do estudo de simulação 2

A Tabela 4.4 apresenta os valores de K_1 e de K , que são os números de bases *B-splines* utilizados para estimar a intensidade conjunta $\lambda(t, x, y)$ segundo os métodos *AIC*, *BIC*, a equação de Log-verossimilhança não penalizada e o *H-splines*. A Tabela 4.5 apresenta uma comparação entre a quantidade total de bases *B-splines* utilizada para estimar a intensidade conjunta $\lambda(t, x, y)$.

A Figura 4.8 apresenta as curvas estimadas da intensidade marginal do processo $\lambda_1(t)$ sob os métodos *AIC*, *BIC*, equação de log-verossimilhança não penalizada e o *H-splines*. Com base nesta figura, pode-se notar que o método da equação de log-verossimilhança não penalizada e o *H-splines* apresentaram um desempenho melhor que o desempenho apresentado pelos métodos *AIC* e *BIC*, no sentido que o método da equação de log-verossimilhança não penalizada e o *H-splines* apresentaram suas respectivas curvas estimadas mais próximas da curva verdadeira em todos os exemplos de simulação.

Os gráficos de contorno das Figuras 4.9, 4.10, 4.11 e 4.12 descrevem, respectivamente, os contornos estimados das intensidades marginais $\hat{\lambda}_{23}(x, y)$ sob os métodos *AIC*, *BIC*, equação de Log-verossimilhança não penalizada e o *H-splines*. Os contornos na cor preta correspondem aos contornos da superfície verdadeira, enquanto que os contornos na cor verdes correspondem aos contornos da superfície estimada.

Comparando o contornos da superfície verdadeira (contorno pretos) com o contorno da superfície estimada (contorno verdes), pode-se verificar visualmente que os métodos da equação de log-verossimilhança não penalizada e *H-splines* apresentaram um desempenho superior que o desempenho apresentado pelos métodos *AIC* e *BIC*.

Comparando o desempenho entre o método da equação de Log-verossimilhança não penalizada e o método H-*splines*, pode-se concluir que o método H-*splines* foi mais eficiente que o método da equação de Log-verossimilhança não penalizada, pois apresentou resultados tão semelhantes quanto os resultados apresentados pelo método da equação de Log-verossimilhança não penalizada, porém com uma quantidade total de coeficientes muito inferior. Isto pode ser verificado nas Tabelas 4.4 e 4.5.

Tabela 4.4: *Quantidade de bases B-splines*

Métodos	$n = 15$		$n = 30$		$n = 100$		$n = 500$	
	K_1	K	K_1	K	K_1	K	K_1	K
AIC	4	4	4	4	4	4	4	4
BIC	4	4	4	4	4	4	4	4
Log-verossimilhança não penalizada	9	7	10	9	12	9	13	9
H- <i>splines</i>	7	5	7	6	8	7	8	7

Tabela 4.5: *Quantidade total de coeficientes: $(K_1 + K \times K)$*

Métodos	$n = 15$	$n = 30$	$n = 100$	$n = 500$
AIC	20	20	20	20
BIC	20	20	20	20
Log-verossimilhança não penalizada	58	91	93	94
H- <i>splines</i>	32	43	56	57

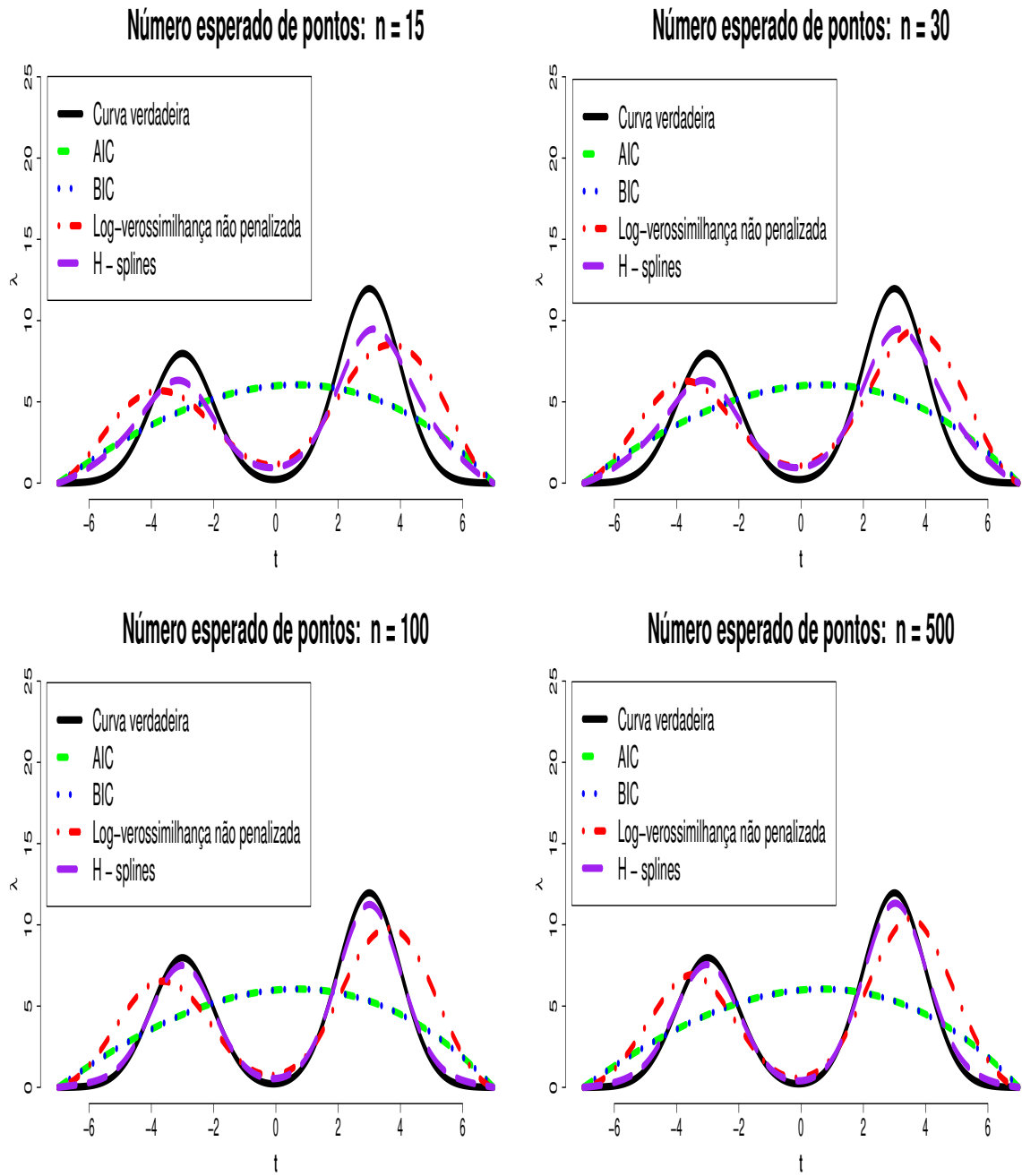


Figura 4.8: *Estudo de Simulação 2: Intensidades marginais $\hat{\lambda}_1(t)$ sob os métodos AIC, BIC, a equação de Log-verossimilhança não penalizada e o H-splines.*

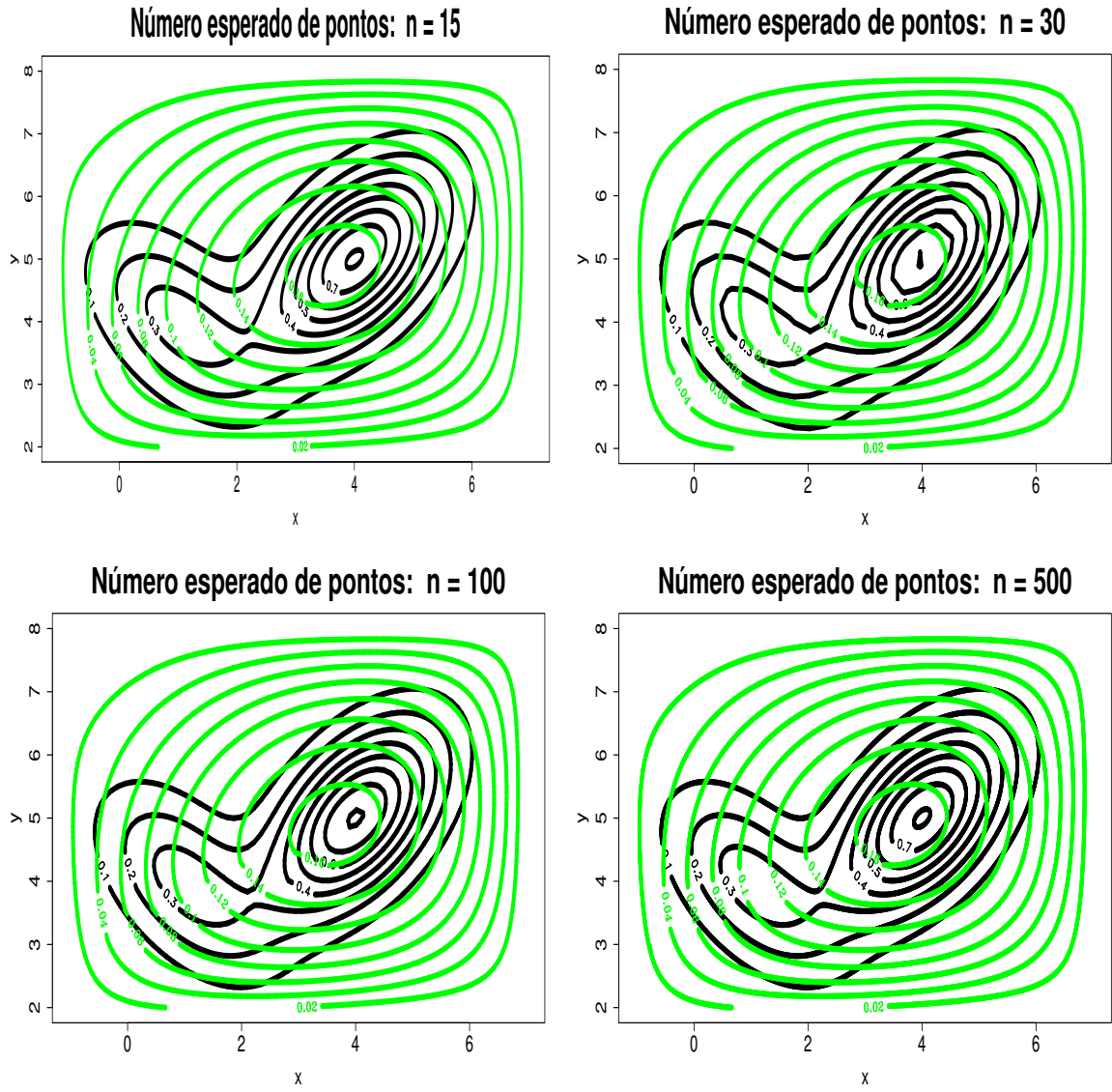


Figura 4.9: *Estudo de Simulação 2: Contorno das intensidades marginais $\hat{\lambda}_{23}(x, y)$, considerando o método AIC. Os contornos pretos correspondem à superfície verdadeira, enquanto que os contornos verdes correspondem às superfícies estimadas.*

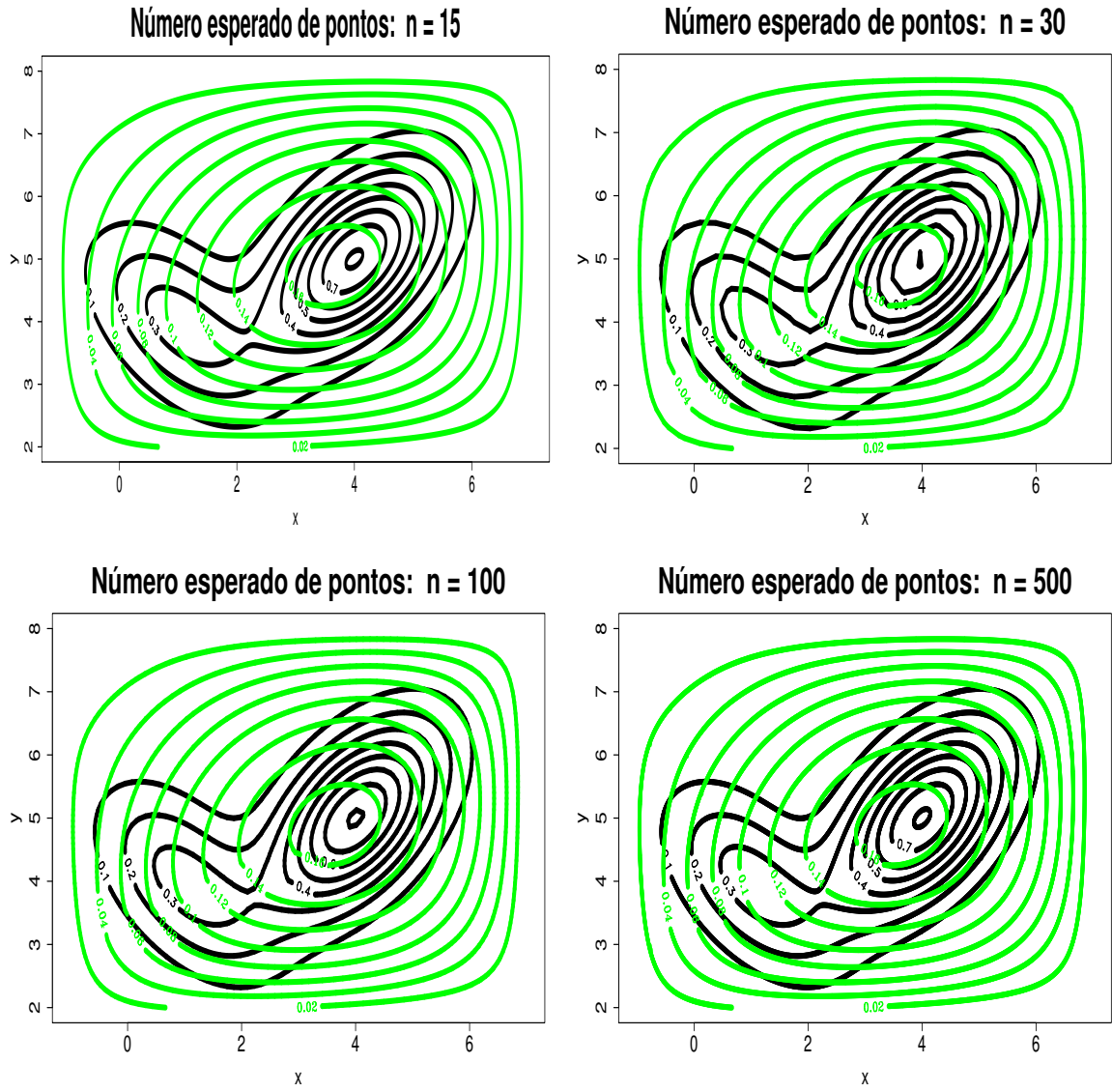


Figura 4.10: *Estudo de Simulação 2: Contorno das intensidades marginais $\hat{\lambda}_{23}(x, y)$, considerando o método BIC. Os contornos pretos correspondem à superfície verdadeira, enquanto que os contornos verdes correspondem às superfícies estimadas.*

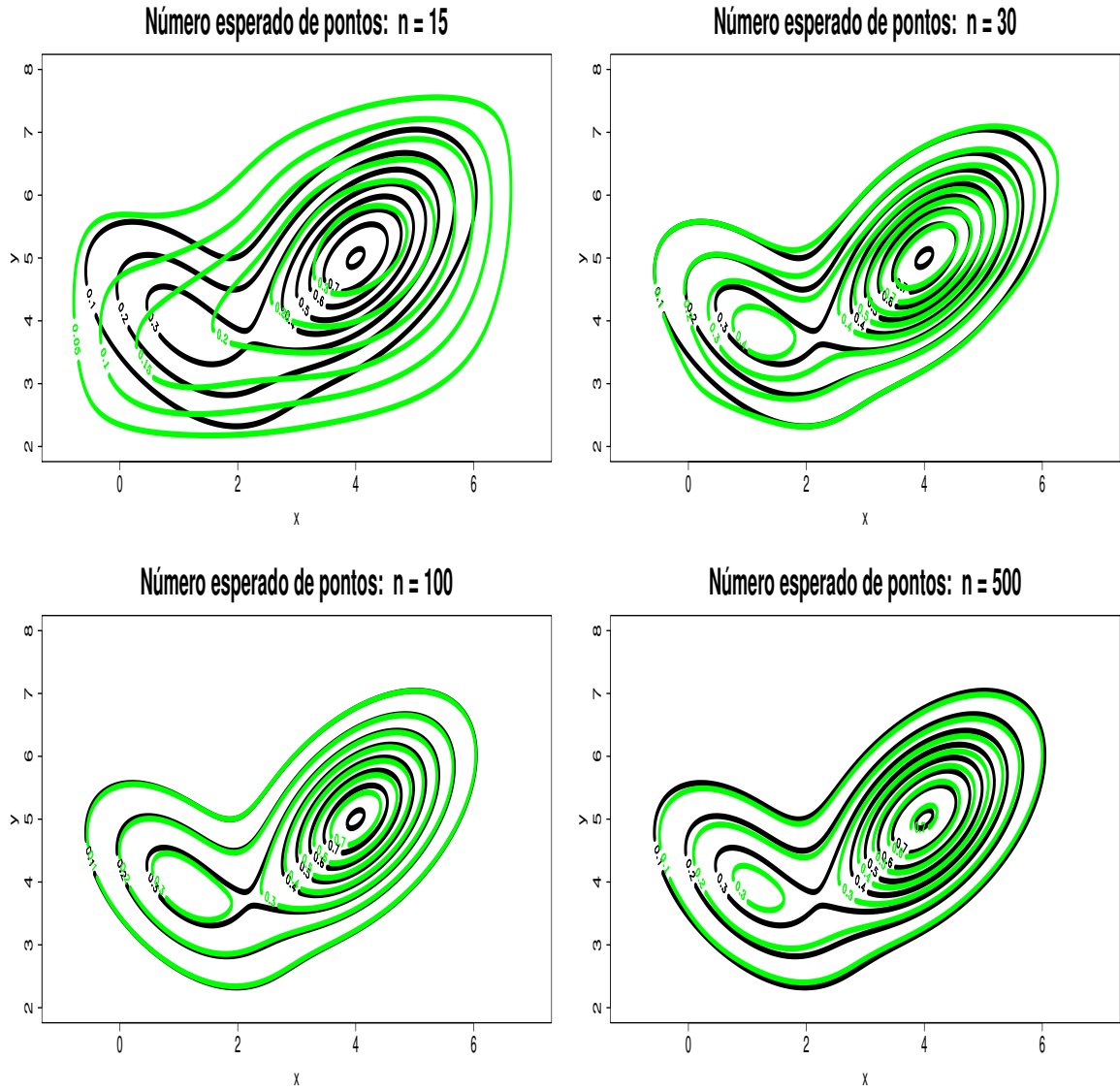


Figura 4.11: *Estudo de Simulação 2: Contorno das intensidades marginais $\hat{\lambda}_{23}(x, y)$, considerando a equação de Log-verossimilhança não penalizada. Os contornos pretos correspondem à superfície verdadeira, enquanto que os contornos verdes correspondem às superfícies estimadas.*

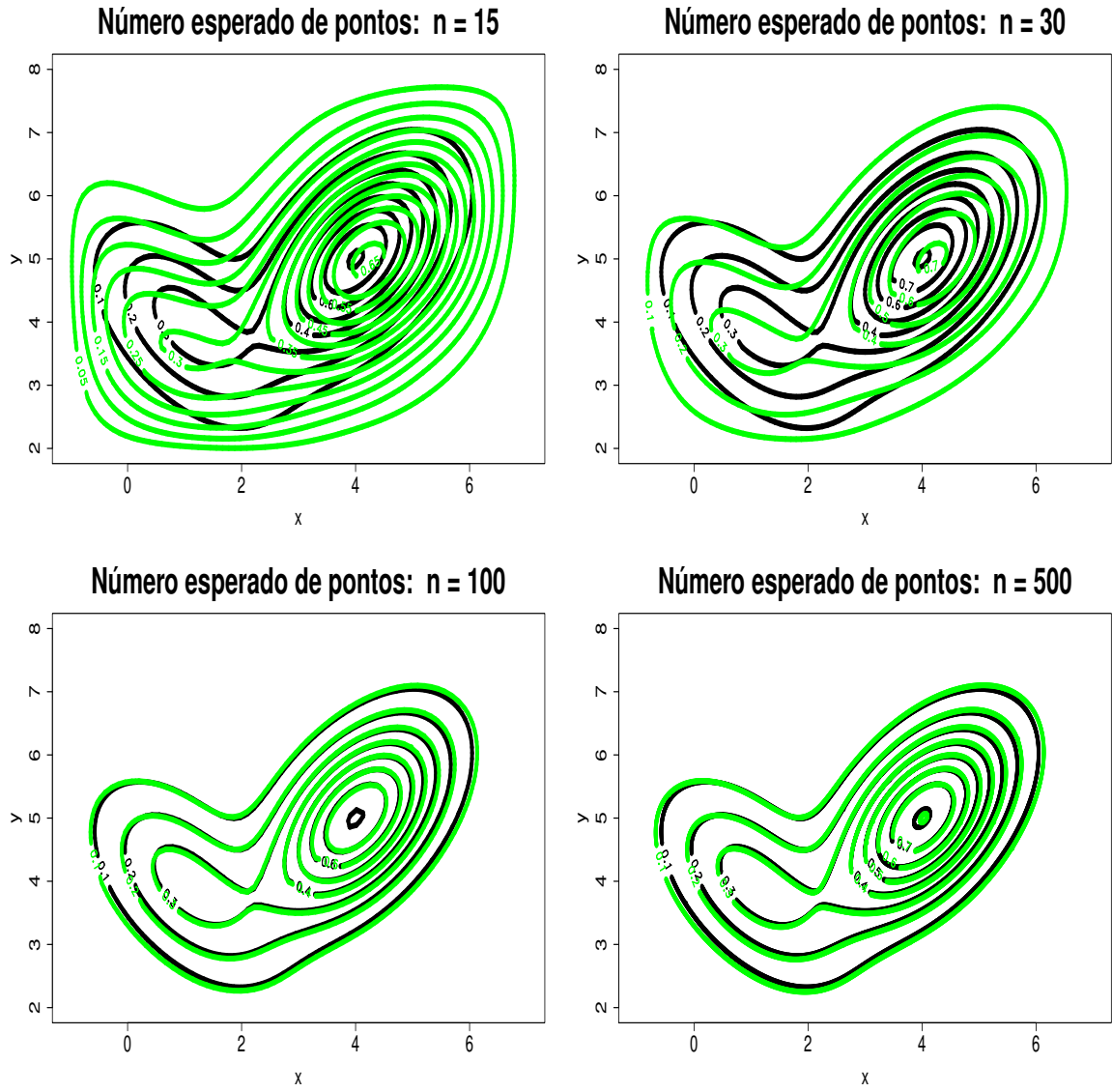


Figura 4.12: *Estudo de Simulação 2: Contorno das intensidades marginais $\hat{\lambda}_{23}(x, y)$, considerando o método H-splines. Os contornos pretos correspondem à superfície verdadeira, enquanto que os contornos verdes correspondem às superfícies estimadas.*

4.4 Estudo de Simulação 3

Considere as seguintes intensidades marginais $\lambda_1(t)$ e $\lambda_{23}(x, y)$:

1. $\lambda_1(t)$ será representada por uma constante 3.2 vezes a distribuição *Gama*($\alpha = 2, \beta = 3$) cuja densidade é dada por:

$$\lambda_1(t) = \frac{28,8}{\Gamma(2)} t \exp \{-3t\}, \quad (4.4.14)$$

onde $t \in [0, \pi]$.

2. $\lambda_{23}(x, y)$ será representada por um distribuição Log-Normal bivariada dada por:

$$\lambda_{23}(x, y) = \frac{1}{2\pi \times x \times y \mid \Sigma_{2 \times 2}^{\frac{1}{2}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\vec{z} - \vec{\mu})^T \Sigma_{2 \times 2}^{-1} (\vec{z} - \vec{\mu}) \right\}, \quad (4.4.15)$$

com média e matriz de variância e covariância dados respectivamente por $\vec{\mu} = (\mu_1, \mu_2)^T$,

$$\Sigma_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.1875 \\ 0.1875 & 0.25 \end{bmatrix}$$

e $\vec{z} = (\log(x), \log(y))^T$, onde $x \in [0, 2]$ e $y \in [0, 2]$.

Assim, $\lambda(t, x, y) = \lambda_1(t)\lambda_{23}(x, y)$ pode ser representada como:

$$\lambda(t, x, y) = \frac{28,8}{\Gamma(2)} t \exp \{-3t\} \times \frac{1}{2\pi \times x \times y \mid \Sigma_{2 \times 2} \mid^{\frac{1}{2}}} \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\vec{z} - \vec{\mu})^T \Sigma_{2 \times 2}^{-1} (\vec{z} - \vec{\mu}) \right\} \quad (4.4.16)$$

e

$$\bar{\lambda} = \frac{1.372397}{2\pi \times \exp \{\mu_x\} \times \exp \{\mu_y\} \mid \Sigma_{2 \times 2} \mid^{\frac{1}{2}}}. \quad (4.4.17)$$

A Figura 4.13 é composta por três gráficos. Gráficos de contorno (parte superior esquerda) e de superfície (parte superior direita) da função intensidade $\lambda_{23}(x, y)$. E finalmente, na parte inferior o gráfico da intensidade $\lambda_1(t)$.

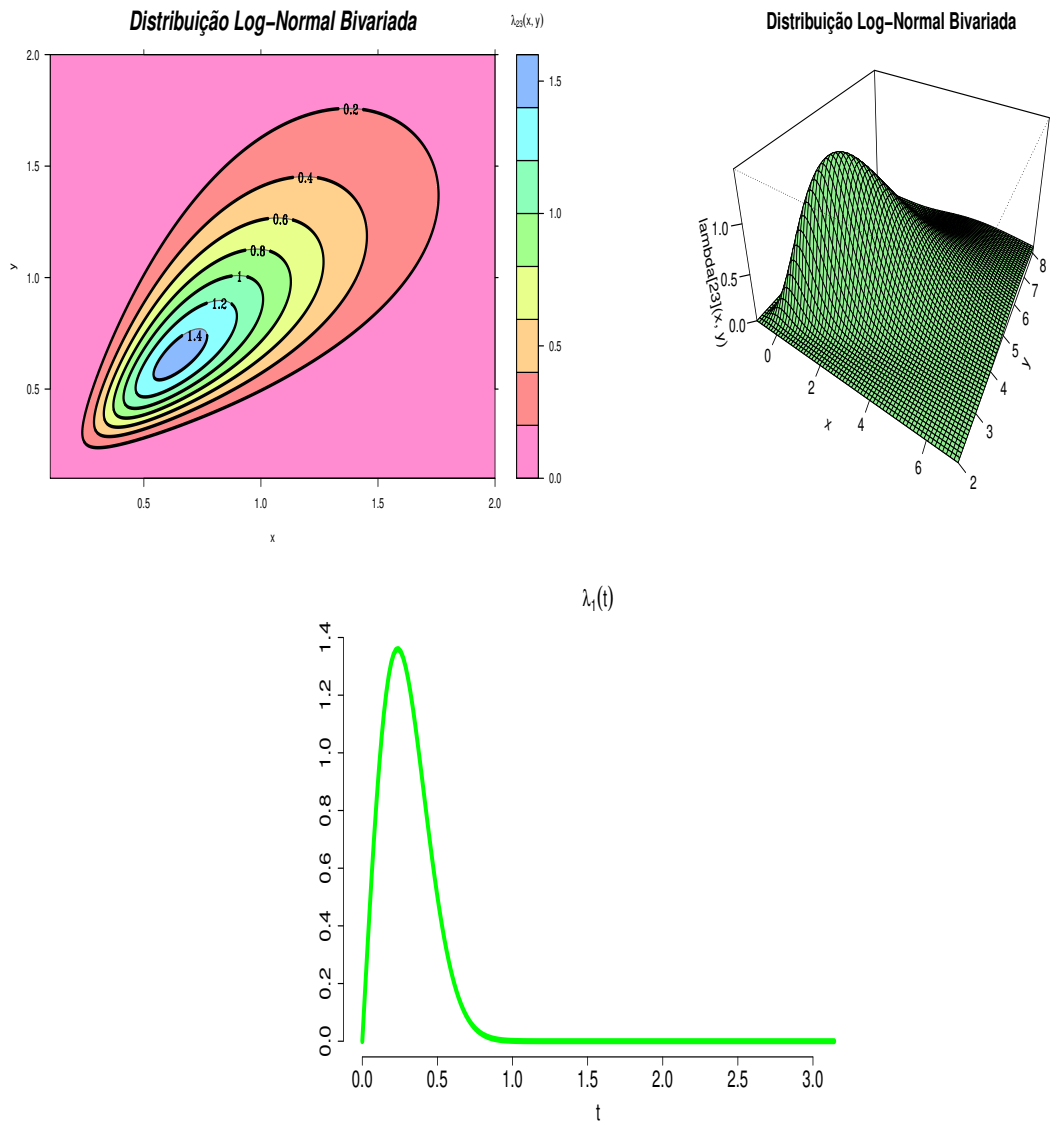


Figura 4.13: Gráficos de contorno (parte superior esquerda) e de superfície (parte superior direita) da função intensidade $\lambda_{23}(x, y)$ e o gráfico da intensidade $\lambda_1(t)$ na parte inferior.

4.4.1 Resultados do estudo de simulação 3

A Tabela 4.6 apresenta os valores de K_1 e de K , que são os números de bases B-*splines* utilizados para estimar a intensidade conjunta $\lambda(t, x, y)$ segundo os métodos *AIC*, *BIC*, a equação de Log-verossimilhança não penalizada e o H-*splines*.

A Tabela 4.7 apresenta uma comparação entre a quantidade total de coeficientes utilizada para estimar a intensidade conjunta $\lambda(t, x, y)$, considerando os métodos *AIC*, *BIC*, o Log-verossimilhança não penalizada e o H-*splines*.

A Figura 4.14 apresenta as curvas estimadas da intensidade marginal do processo $\lambda_1(t)$ sob os métodos *AIC*, *BIC*, equação de log-verossimilhança não penalizada e o H-*splines*. Com base nesta figura, pode-se notar que o método da equação de log-verossimilhança não penalizada e o H-*splines* apresentaram um desempenho melhor que o desempenho apresentado pelos métodos *AIC* e *BIC*, no sentido que o método da equação de log-verossimilhança não penalizada e o método H-*splines* apresentam suas respectivas curvas estimadas mais próximas da curva verdadeira em todos os exemplos de simulação.

Os gráficos de contorno das Figuras 4.15, 4.16, 4.17 e 4.18 descrevem, respectivamente, os contornos estimados das intensidades marginais $\hat{\lambda}_{23}(x, y)$ sob os métodos *AIC*, *BIC*, equação de Log-verossimilhança não penalizada e o H-*splines*. Os contornos na cor preta correspondem aos contornos da superfície verdadeira, enquanto que os contornos na cor verdes correspondem aos contornos da superfície estimada.

Comparando o contornos da superfície verdadeira (contorno pretos) com o contorno da superfície estimada (contorno verdes), pode-se verificar visualmente que os métodos da equação de log-verossimilhança não penalizada e H-*splines* apresentaram um desempenho

superior que o desempenho apresentado pelos métodos *AIC* e *BIC*.

Comparando o desempenho entre a equação de Log-verossimilhança não penalizada e o método *H-splines*, pode-se concluir que o método *H-splines* foi mais eficiente que o método da equação de Log-verossimilhança não penalizada, pois apresentou resultados tão semelhantes quanto os resultados apresentados pelo método da equação de Log-verossimilhança não penalizada, porém com uma quantidade total de coeficientes muito inferior. Isto pode ser verificado nas Tabelas 4.6 e 4.7.

Tabela 4.6: *Quantidade de bases B-splines*

Métodos	$n = 15$		$n = 30$		$n = 100$		$n = 500$	
	K_1	K	K_1	K	K_1	K	K_1	K
AIC	4	4	4	4	5	4	5	4
BIC	4	4	4	4	5	4	5	4
Log-verossimilhança não penalizada	11	6	11	9	13	9	13	9
<i>H-splines</i>	6	5	6	5	8	6	8	6

Tabela 4.7: *Quantidade total de coeficientes: $K_1 + K \times K$*

Métodos	$n = 15$	$n = 30$	$n = 100$	$n = 500$
AIC	20	20	21	21
BIC	20	20	21	21
Log-verossimilhança não penalizada	60	92	94	94
<i>H-splines</i>	31	31	44	44

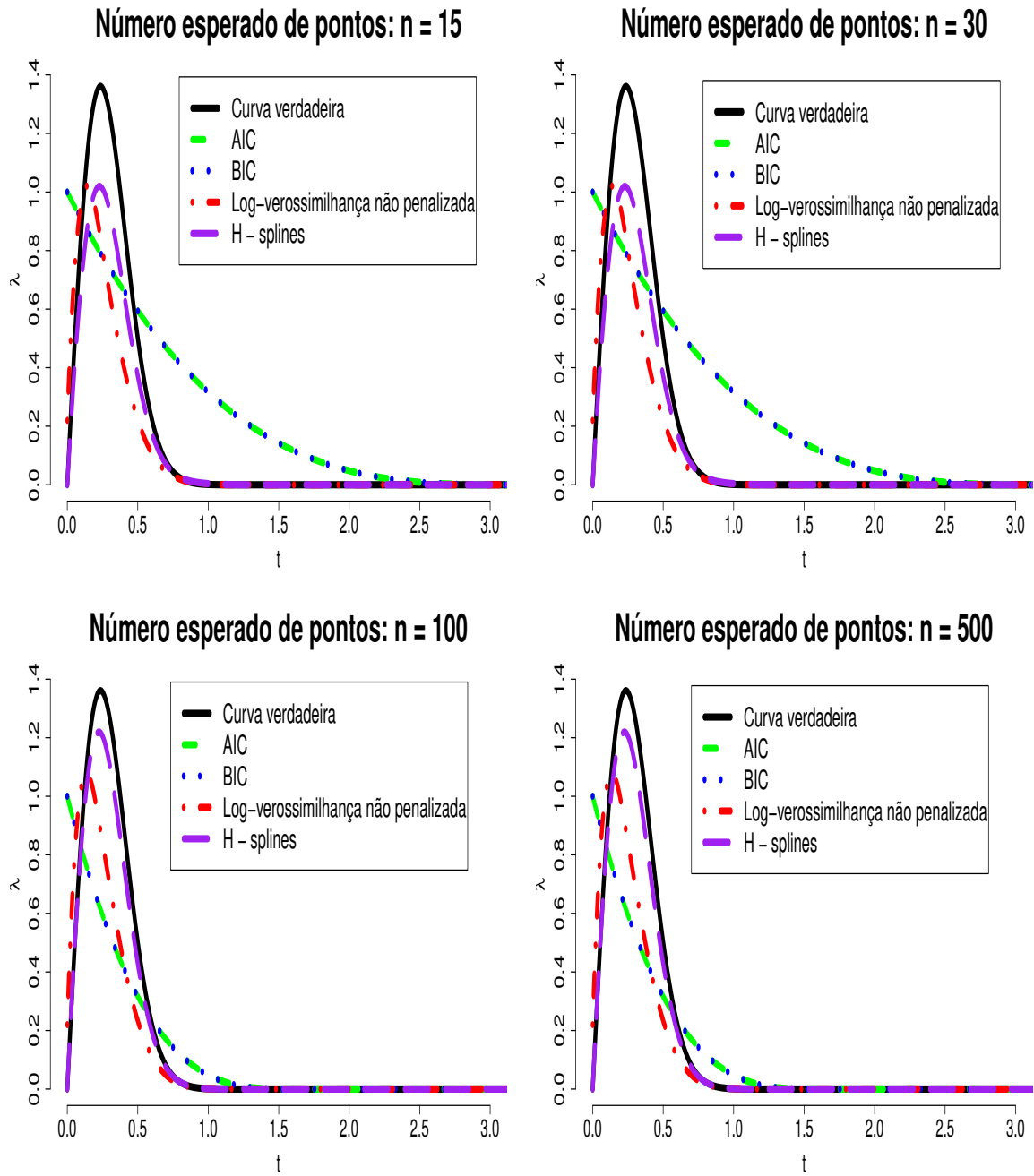


Figura 4.14: *Estudo de Simulação 3: Intensidades marginais $\hat{\lambda}_1(t)$ sob os métodos AIC, BIC, a equação de Log-verossimilhança não penalizada e o H-splines.*

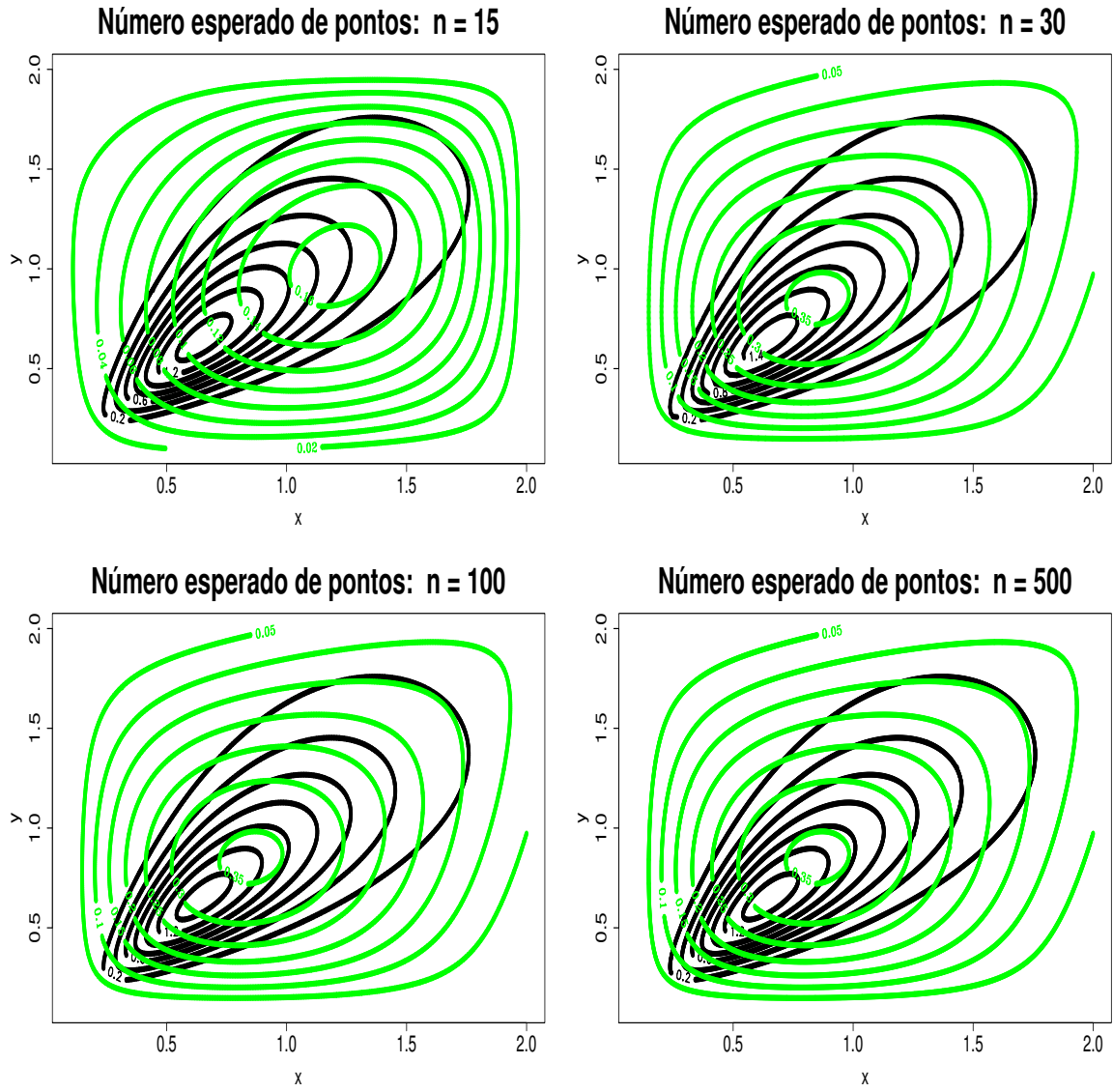


Figura 4.15: *Estudo de Simulação 3: Contorno das intensidades marginais $\hat{\lambda}_{23}(x, y)$, considerando o método AIC. Os contornos pretos correspondem à superfície verdadeira, enquanto que os contornos verdes correspondem às superfícies estimadas.*

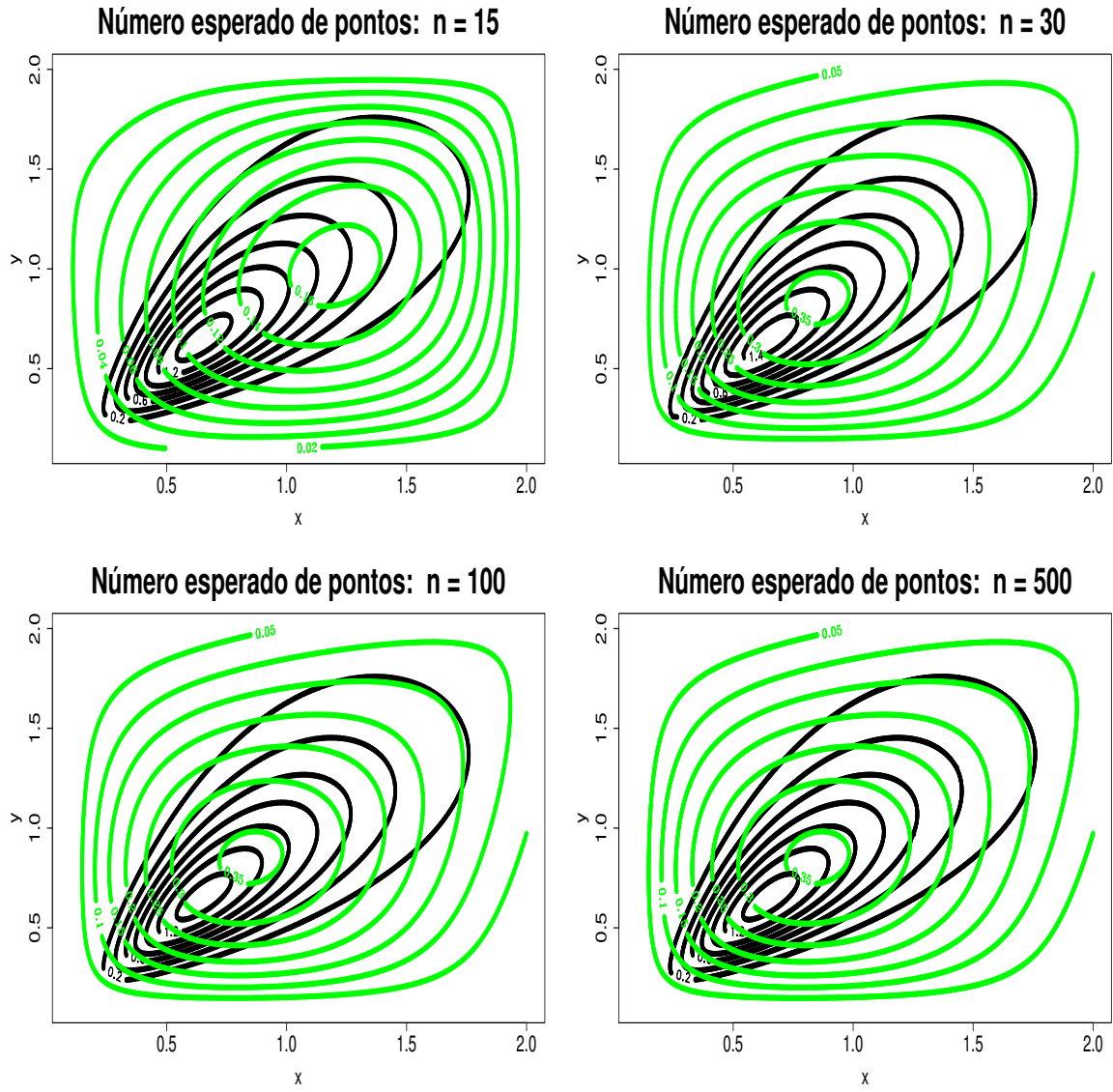


Figura 4.16: *Estudo de Simulação 3: Contorno das intensidades marginais $\hat{\lambda}_{23}(x, y)$, considerando o método BIC. Os contornos pretos correspondem à superfície verdadeira, enquanto que os contornos verdes correspondem às superfícies estimadas.*

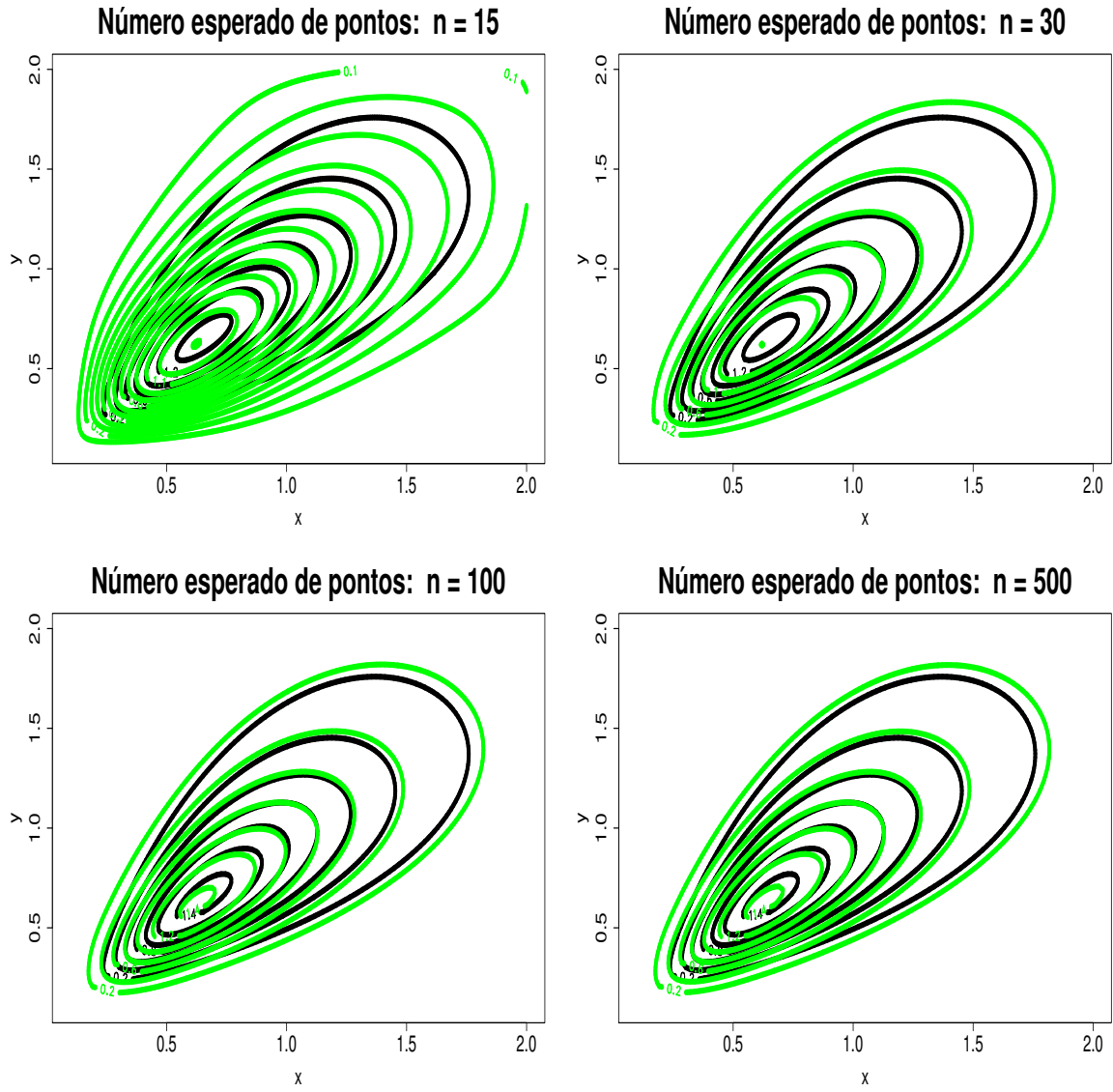


Figura 4.17: *Estudo de Simulação 3: Contorno das intensidades marginais $\hat{\lambda}_{23}(x, y)$, considerando a Log-verossimilhança não penalizada. Os contornos pretos correspondem à superfície verdadeira, enquanto que os contornos verdes correspondem às superfícies estimadas.*

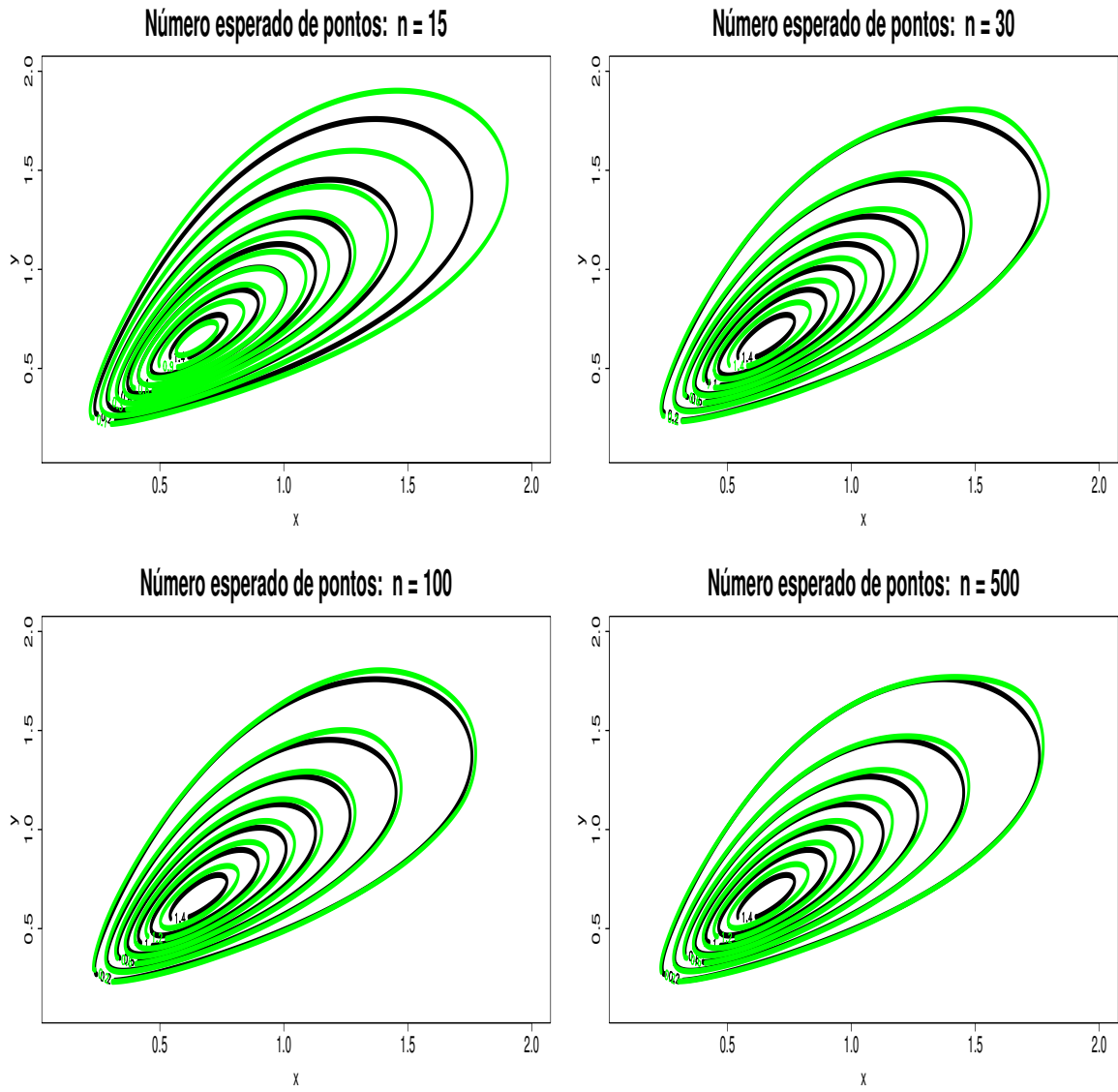


Figura 4.18: *Estudo de Simulação 3: Contorno das intensidades marginais $\hat{\lambda}_{23}(x, y)$, considerando o método H-splines. Os contornos pretos correspondem à superfície verdadeira, enquanto que os contornos verdes correspondem às superfícies estimadas.*

4.5 Estudo de Simulação 4

Considere as seguintes funções intensidades marginais $\lambda_1(t)$ e $\lambda_{23}(x, y)$:

1. A intensidade $\lambda_1(t)$ será representada por:

$$\lambda_1(t) = (1 + 3t), \quad (4.5.18)$$

onde $t \in [0, 1]$.

2. A intensidade $\lambda_{23}(x, y)$ será representada por uma mistura de cinco distribuições Normal Bivariada em (4.5.19):

$$\begin{aligned} \lambda_{23}(x, y) = & 0.28 \times f_1(x, y) + 0.28 \times f_2(x, y) + 0.28 \times f_3(x, y) \\ & + 0.11 \times f_4(x, y) + 0.05 \times f_5(x, y) \end{aligned} \quad (4.5.19)$$

Onde: $\vec{\mu}_1 = (1, 1)^T$, $\vec{\mu}_2 = (6, 6)^T$, $\vec{\mu}_3 = (1, 10)^T$, $\vec{\mu}_4 = (7, 1)^T$, $\vec{\mu}_5 = (1.5, 5)^T$,
 $t \in [0, 1]$, $x \in [-4, 10]$, $y \in [-5, 15]$, $\vec{z} = (x, y)^T$ e

$$f_k(x, y) = \frac{1}{2\pi |\Sigma_k|^{\frac{1}{2}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\vec{z} - \vec{\mu}_k)^T \Sigma_k^{-1} (\vec{z} - \vec{\mu}_k) \right\} \quad (4.5.20)$$

onde $k = 1, \dots, 5$ e

$$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1.4 \\ 1.4 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\Sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ 0.1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\Sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & -0.7 \\ -0.7 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\Sigma_4 = \begin{bmatrix} 1.5 & -0.2 \\ -0.2 & 1.5 \end{bmatrix},$$

$$\Sigma_5 = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

Assim, $\lambda(t, x, y) = \lambda_1(t)\lambda_{23}(x, y)$ pode ser representada como:

$$\begin{aligned} \lambda(t, x, y) = & \{1 + 3t\} \times \{0.28 \times f_1(x, y) + 0.28 \times f_2(x, y) + 0.28 \times f_3(x, y) \\ & + 0.11 \times f_4(x, y) + 0.05 \times f_5(x, y)\} \end{aligned} \quad (4.5.21)$$

e

$$\bar{\lambda} = 4 \times \frac{1}{2\pi |\Sigma_1|^{\frac{1}{2}}}. \quad (4.5.22)$$

A Figura 4.19 é composta por três gráficos. Gráficos de contorno (parte superior esquerda) e de superfície (parte superior direita) da função intensidade $\lambda_{23}(x, y)$. E finalmente, na parte inferior o gráfico da intensidade $\lambda_1(t)$.

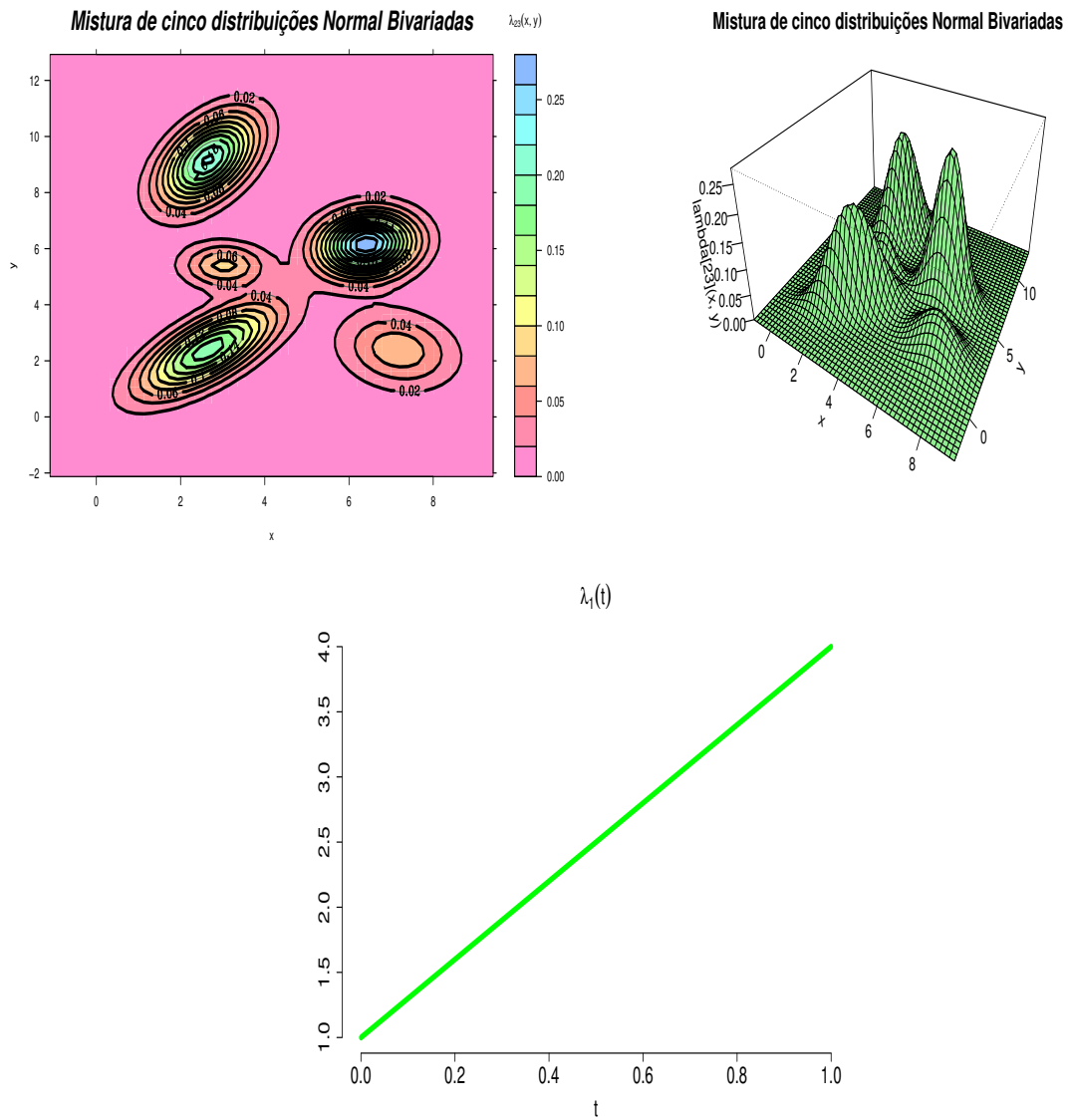


Figura 4.19: Gráficos de contorno (parte superior esquerda) e de superfície (parte superior direita) da função intensidade $\lambda_{23}(x, y)$ e o gráfico da intensidade $\lambda_1(t)$ na parte inferior.

4.5.1 Resultados do estudo de simulação 4

A Tabela 4.8 apresenta os valores de K_1 e de K , que são os números de bases B-splines utilizados para estimar a intensidade conjunta $\lambda(t, x, y)$ segundo os métodos *AIC*, *BIC*, a Log-verossimilhança não penalizada e o H-splines. A Tabela 4.20 apresenta uma comparação entre a quantidade total de coeficientes utilizada para estimar a intensidade conjunta $\lambda(t, x, y)$, considerando os métodos estudados.

A Figura (4.14) apresenta as curvas estimadas da intensidade marginal do processo $\lambda_1(t)$ sob os métodos *AIC*, *BIC*, equação de log-verossimilhança não penalizada e o H-splines. Com base nesta figura, pode-se notar que o método da equação de log-verossimilhança não penalizada e o método H-splines apresentaram um desempenho melhor que o desempenho apresentado pelos métodos *AIC* e *BIC*, no sentido que o método da equação de log-verossimilhança não penalizada e o método H-splines apresentaram suas respectivas curvas estimadas mais próximas da curva verdadeira em todos os exemplos de simulação.

Os gráficos de contorno das Figuras 4.21, 4.22, 4.23 e 4.24 descrevem, respectivamente, os contornos estimados das intensidades marginais $\hat{\lambda}_{23}(x, y)$ sob os métodos *AIC*, *BIC*, equação de log-verossimilhança não penalizada e o H-splines. Os contornos na cor preta correspondem aos contornos da superfície verdadeira, enquanto que os contornos na cor verdes correspondem aos contornos da superfície estimada.

Comparando o contornos da superfície verdadeira (contorno pretos) com o contorno da superfície estimada (contorno verdes), pode-se verificar visualmente que os métodos da equação de log-verossimilhança não penalizada e o H-splines apresentaram um desempenho superior que o desempenho apresentado pelos métodos *AIC* e *BIC*.

Comparando o desempenho entre o método da Log-verossimilhança não penalizada e o método H-*splines*, pode-se concluir que o método H-*splines* foi mais eficiente que o método da equação de Log-verossimilhança não penalizada, pois apresentou resultados tão semelhantes quanto os resultados apresentados pelo método da equação de Log-verossimilhança não penalizada, porém com uma quantidade total de coeficientes muito inferior. Isto pode ser verificado nas Tabelas 4.8 e 4.9.

Tabela 4.8: *Quantidade de bases B-splines*

Métodos	$n = 15$		$n = 30$		$n = 100$		$n = 500$	
	K_1	K	K_1	K	K_1	K	K_1	K
AIC	4	4	4	4	4	4	4	4
BIC	4	4	4	4	4	4	4	4
Log-verossimilhança não penalizada	6	6	6	12	7	14	7	14
H- <i>splines</i>	5	5	5	9	5	9	5	9

Tabela 4.9: *Quantidade total de coeficientes: $(K_1 + K \times K)$*

Métodos	$n = 15$	$n = 30$	$n = 100$	$n = 500$
AIC	20	20	20	20
BIC	20	20	20	20
Log-verossimilhança não penalizada	42	150	203	203
H- <i>splines</i>	30	86	86	86

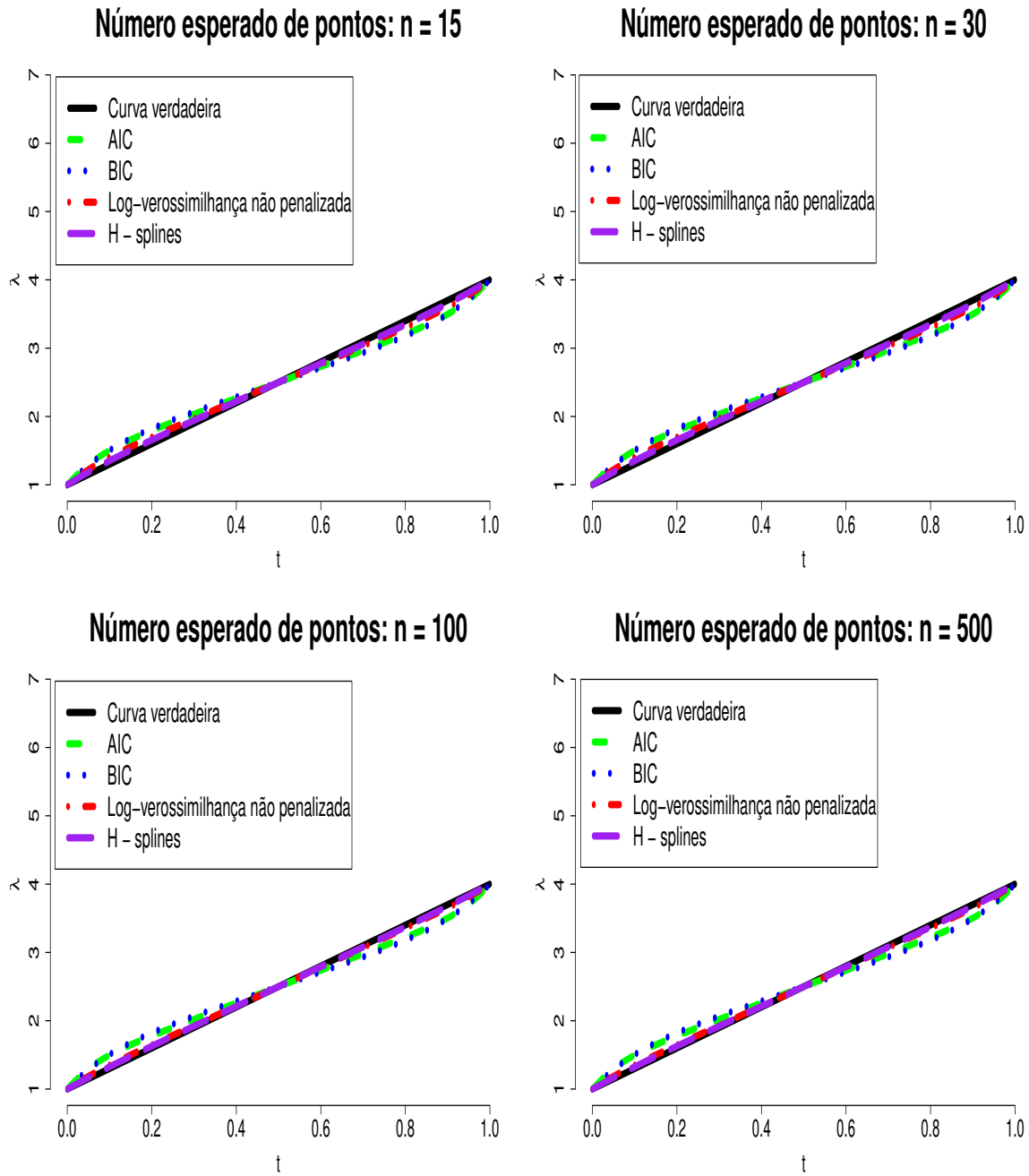


Figura 4.20: *Estudo de Simulação 4: Intensidades marginais $\hat{\lambda}_1(t)$ sob os métodos AIC, BIC, a Log-verossimilhança não penalizada e o H-splines.*

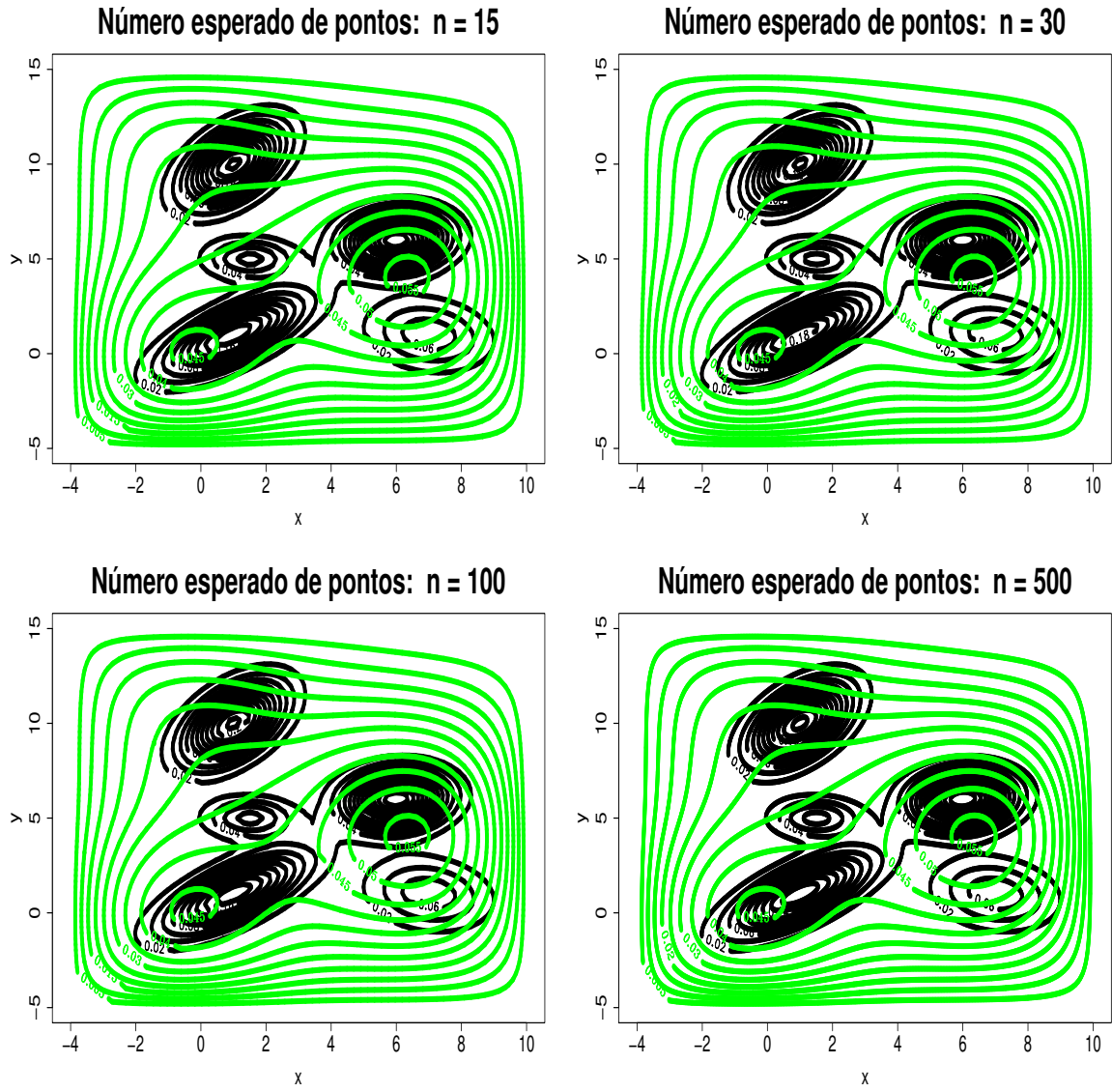


Figura 4.21: *Estudo de Simulação 4: Contorno das intensidades marginais $\hat{\lambda}_{23}(x, y)$, considerando o método AIC. Os contornos pretos correspondem à superfície verdadeira, enquanto que os contornos verdes correspondem às superfícies estimadas.*

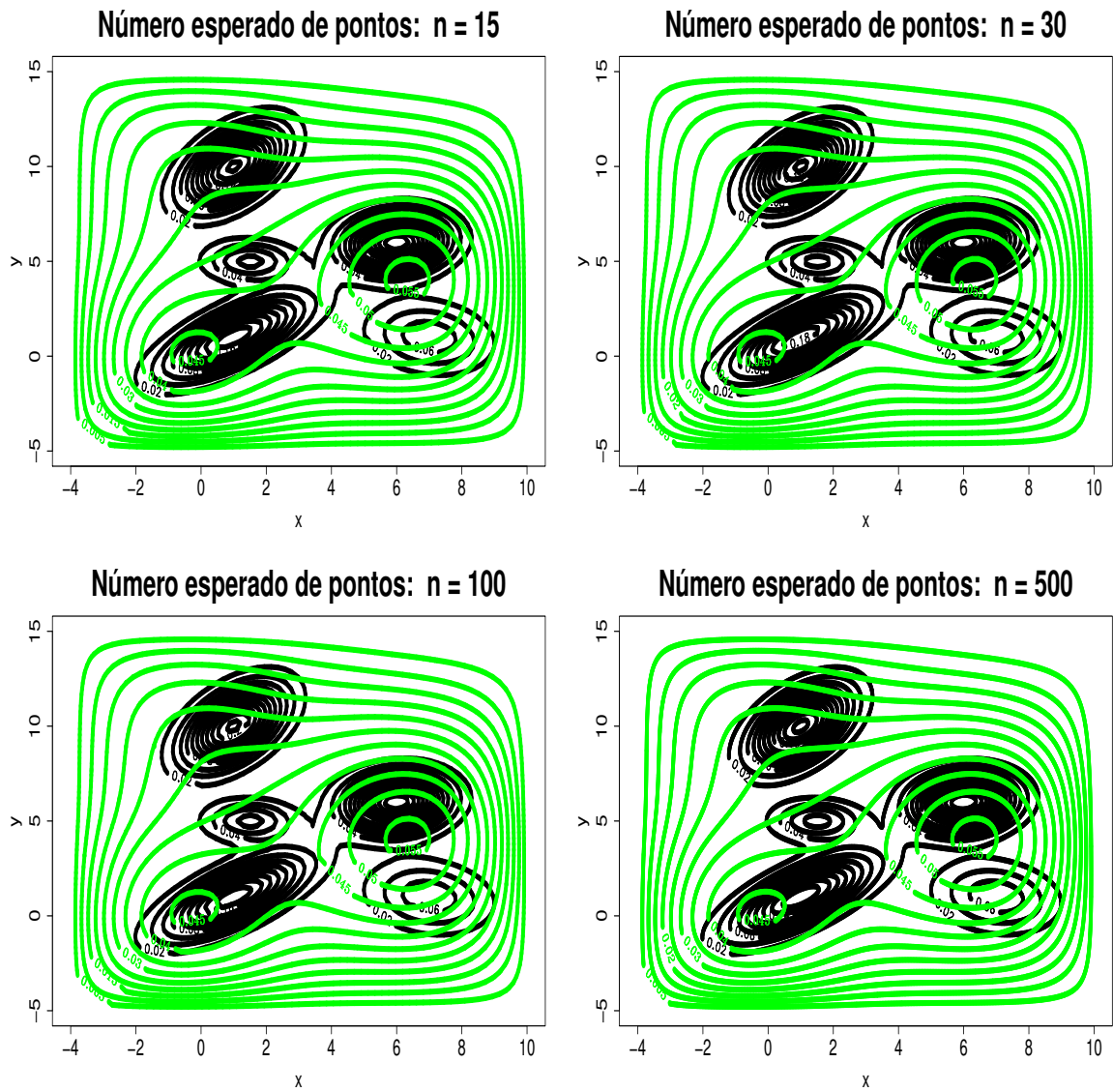


Figura 4.22: *Estudo de Simulação 4: Contorno das intensidades marginais $\hat{\lambda}_{23}(x,y)$, considerando o método BIC. Os contornos pretos correspondem à superfície verdadeira, enquanto que os contornos verdes correspondem às superfícies estimadas.*

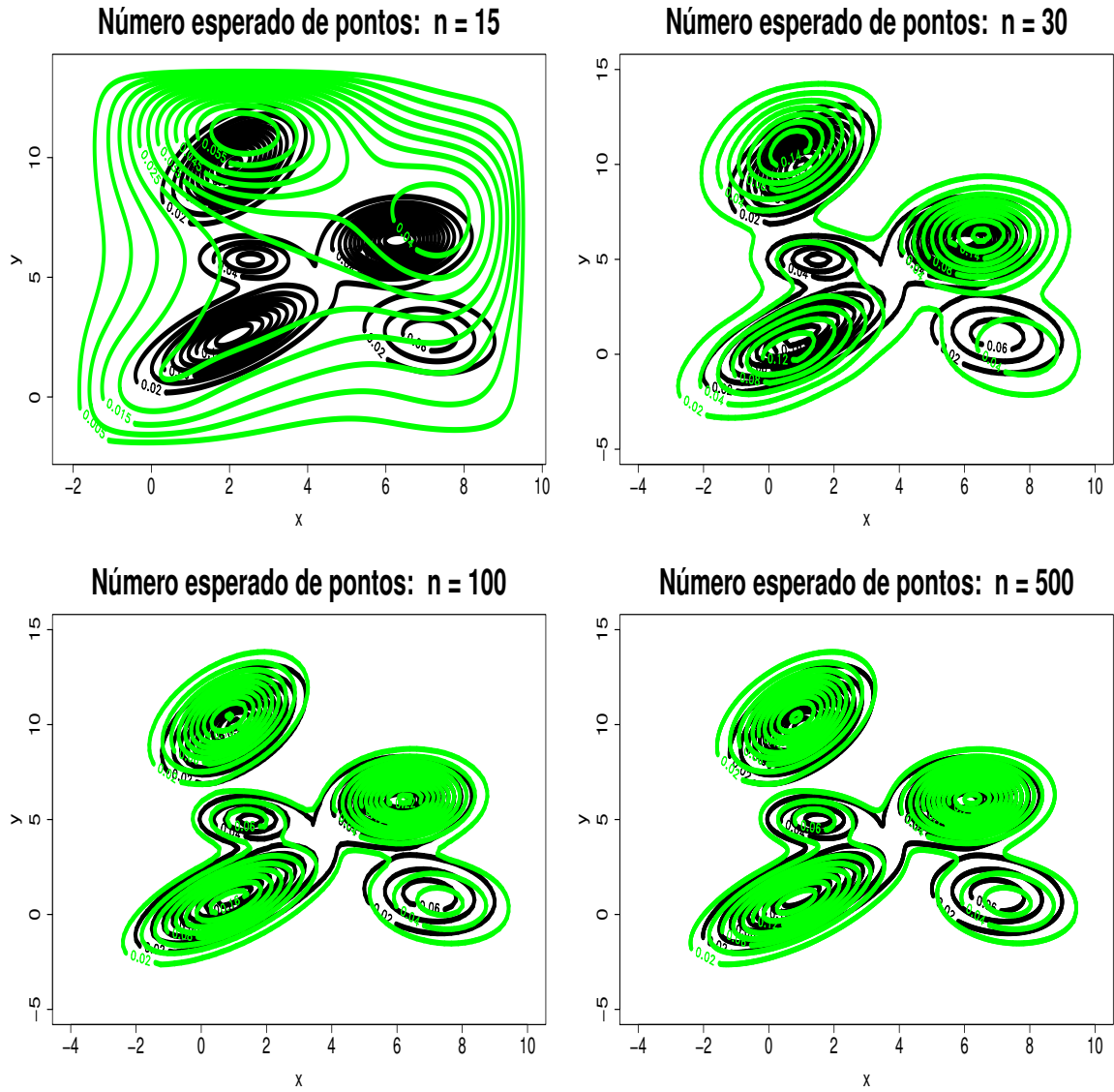


Figura 4.23: *Estudo de Simulação 4: Contorno das intensidades marginais $\hat{\lambda}_{23}(x, y)$, considerando a Log-verossimilhança não penalizada. Os contornos pretos correspondem à superfície verdadeira, enquanto que os contornos verdes correspondem às superfícies estimadas.*

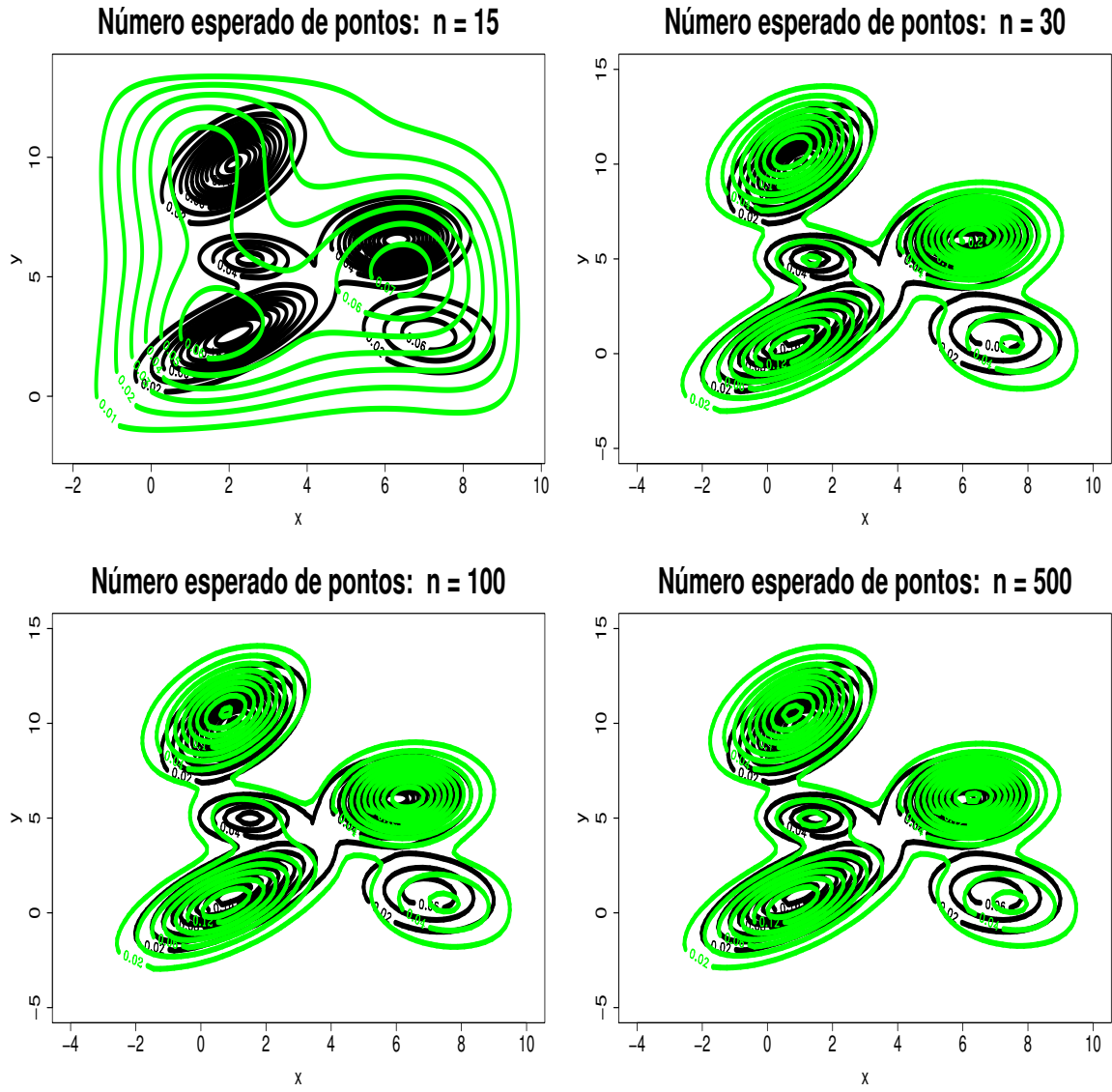


Figura 4.24: *Estudo de Simulação 4: Contorno das intensidades marginais $\hat{\lambda}_{23}(x, y)$, considerando o método H-splines. Os contornos pretos correspondem à superfície verdadeira, enquanto que os contornos verdes correspondem às superfícies estimadas.*

4.6 Conclusões dos estudos de simulação

Sob diferentes graus de dificuldades e de tamanhos amostrais, os estudos de simulação mostraram que o método sequencial adaptativo *H-splines* apresentou um desempenho superior que o desempenho apresentado pelos métodos *AIC* e *BIC* em todos os exemplos de simulação realizados nesta tese. Pelos resultados apresentados, os métodos *AIC* e *BIC* tiveram o pior desempenho. Observe que nestes métodos a quantidade de bases *B-splines* é bem pequena, ou seja, são métodos muito parcimoniosos e por isso não fornecem um bom ajuste. Quando nos referimos a desempenho, estamos nos referindo no sentido do método apresentar uma curva e/ou superfície mais próxima da curva e/ou superfície verdadeira.

Ao compararmos o método sequencial adaptativo *H-splines* com o método da equação de log-verossimilhança não penalizada, notamos que ambos os métodos apresentaram um comportamento, no mínimo, semelhante. Porém, o método da equação de log-verossimilhança não penalizada tem um custo computacional maior pois necessita estimar uma quantidade maior de coeficientes. Enquanto que o método sequencial adaptativo *H-splines* apresentou um bom ajuste com uma significativa redução na quantidade total de coeficientes. A redução na quantidade de coeficientes implica não só na redução do custo computacional, como também previne a presença de multicolinearidade entre as colunas da matriz correspondente ao produto tensorial entre as bases *B-splines* e garante uma maior estabilidade numérica.

Em relação ao tamanho amostral, conclui-se que, quanto maior o número esperado de pontos, melhor foram as estimativas das curvas e/ou superfícies estimadas evidenciando a consistência dos estimadores.

Na Seção 4.7 será apresentado um exemplo com dados reais, utilizando dados de terremotos registrados pelos sismógrafos do Observatório Sismológico da Universidade de Brasília no Brasil no período de novembro de 2008 à novembro de 2011.

4.7 Estudo de caso : dados de ocorrência de terremotos no Brasil.

Suponha que há o interesse em modelar o comportamento da magnitude dos terremotos registrados pelos sismógrafos do Observatório Sismológico da Universidade de Brasília no Brasil no período de novembro de 2008 até novembro de 2011.

Os dados dos terremotos estão disponíveis no sítio:
http://www.obsis.unb.br/index.php?option=com_content&view=category&id=39&Itemid=84&lang=

Vamos modelar a intensidade $\lambda(Magnitude, Tempo, Latitude, Longitude)$ assumindo separabilidade entre Magnitude e Tempo, exceto entre as coordenadas de Latitude e Longitude. Segue uma extensão das estruturas dos métodos estudados para quatro dimensões.

4.7.1 Estrutura do método *AIC* e *BIC*

Considere $L(C | S)$, a equação de log-verossimilhança.

$$\begin{aligned}
L(C, | S) &= \sum_{i=1}^n \log \left\{ \left[\sum_{r_1=1}^{K_1} \psi_{r_1} B_{r_1}^{(1)}(Mag_i) \right] \left[\sum_{r_2=1}^{K_2} \beta_{r_2} B_{r_2}^{(2)}(Temp_i) \right] \right. \\
&\quad \times \left. \left[\sum_{r_3=1}^{K_3} \sum_{r_4=1}^{K_4} \varphi_{r_3 r_4} B_{r_3}^{(3)}(Lat_i) B_{r_4}^{(4)}(Long_i) \right] \right\} \\
&\quad - \int_{Mag.} \int_{Temp.} \int_{Lat.} \int_{Long.} \left\{ \left[\sum_{r_1=1}^{K_1} \psi_{r_1} B_{r_1}^{(1)}(Mag.) \right] \left[\sum_{r_2=1}^{K_2} \beta_{r_2} B_{r_2}^{(2)}(Temp.) \right] \right. \\
&\quad \times \left. \left[\sum_{r_3=1}^{K_3} \sum_{r_4=1}^{K_4} \varphi_{r_3 r_4} B_{r_3}^{(3)}(Lat.) B_{r_4}^{(4)}(Long.) \right] \right\} dLong. dLat. dTemp. Mag.
\end{aligned} \tag{4.7.23}$$

onde $C_1 = (\psi_1, \dots, \psi_{K_1})^T$, $C_2 = (\beta_1, \dots, \beta_{K_2})^T$ e $C_3 = (\varphi_1, \dots, \varphi_{K_2 K_3})^T$ são os coeficientes a serem estimados, tal que $C = (C_1, C_2, C_3)$ tem comprimento $K_1 + K_2 + (K_3 \times K_4)$.

A estimativa da intensidade do processo é definida como:

$$\begin{aligned}
\hat{\lambda}_{K_1, K_2, K_3, \hat{\alpha}}(Mag., Temp., Lat., Long.) &= \left[\sum_{r_1=1}^{K_1} \hat{\psi}_{r_1} B_{r_1}^{(1)}(Mag.) \right] \left[\sum_{r_2=1}^{K_2} \hat{\beta}_{r_2} B_{r_2}^{(1)}(Temp.) \right] \\
&\quad \times \left[\sum_{r_3=1}^{K_3} \sum_{r_4=1}^{K_4} \hat{\varphi}_{r_3 r_4} B_{r_3}^{(3)}(Lat.) B_{r_4}^{(4)}(Long.) \right];
\end{aligned} \tag{4.7.24}$$

Sejam:

- $\eta = K_1 + K_2 + K_3 \times K_4$ o número total de coeficientes do modelo;

- n o número de observações;
- $AIC(\eta) = -2 \times L(\hat{C} \mid S) + 2 \times \eta$;
- $BIC(\eta) = -2 \times L(\hat{C} \mid S) + \log(n) \times \eta$.

O estimador escolhe o modelo com $\hat{\eta} = \arg \min_{\eta} AIC(\eta)$ e $\hat{\eta} = \arg \min_{\eta} BIC(\eta)$, (ver Sakamoto, Y., Ishiguro, M., and Kitagawa G. 1986).

Tome $K_3 = K_4 = K$. Assim, K , K_1 e K_2 variam de 4 até 7. Serão obtidas as estimativas de AIC , (K_1, K_2, K) , BIC e K_1, K_2, K . Serão escolhidas as quantidades de K_1 e K que fornecem o menor valor de AIC e BIC .

4.7.2 Estrutura do método da verossimilhança não penalizada

Dados uma precisão δ , $K_3 = K_4 = K$, o método da verossimilhança não penalizada segue os seguintes passos.

- Passo 1: Tome K_1^0 , K_2^0 e K^0 , o número inicial de bases B-splines, $i = 0$, $j = 0$, $l = 0$;
- Passo 2: Calcule as estimativas $\hat{\lambda}_{K_1^i, K_2^j, K^l}(Mag., Temp., Lat., Long.)$ e $\hat{\lambda}_{K_1^i, K_2^j, K^{l+1}}(Mag., Temp., Lat., Long.)$, onde $\hat{C} = \arg \max_C L(C \mid S)$ via aproximação de Newton-Raphson;;
- Passo 3: Avalie a distância entre $\hat{\lambda}_{K_1^i, K_2^j, K^l}(Mag., Temp., Lat., Long.)$ e $\hat{\lambda}_{K_1^i, K_2^j, K^{l+1}}(Mag., Temp., Lat., Long.)$;
- Passo 4:
Se $d(\hat{\lambda}_{K_1^i, K_2^j, K^l}(Mag., Temp., Lat., Long.), \hat{\lambda}_{K_1^i, K_2^j, K^{l+1}}(Mag., Temp., Lat., Long.)) <$

δ , $K^1 = K^0 + 1$ bases B-*splines* é fornecida, caso contrário, $l = l + 1$. Volte para o Passo 2;

- Passo 5: Fixe $K^* = K^l$ e $K_1, j = j + 1$ e volte para o Passo 2;
- Passo 6: Fixe $K^* = K^l$ e $K_2^* = K_2^j, i = i + 1$ e volte para o Passo 2.

4.7.3 Estrutura do Método sequencial adaptativo H-*splines*

A equação de log-verossimilhança penalizada pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
L(C, \vec{\alpha} \mid S) &= \sum_{i=1}^n \log \left\{ \left[\sum_{r_1=1}^{K_1} \psi_{r_1} B_{r_1}^{(1)}(Mag_i) \right] \left[\sum_{r_2=1}^{K_2} \beta_{r_2} B_{r_2}^{(2)}(Temp_i) \right] \right. \\
&\quad \times \left. \left[\sum_{r_3=1}^{K_3} \sum_{r_4=1}^{K_4} \varphi_{r_3 r_4} B_{r_3}^{(3)}(Lat_i) B_{r_4}^{(4)}(Long_i) \right] \right\} \\
&\quad - \int_{Mag.} \int_{Temp.} \int_{Lat.} \int_{Long.} \left\{ \left[\sum_{r_1=1}^{K_1} \psi_{r_1} B_{r_1}^{(1)}(Mag.) \right] \left[\sum_{r_2=1}^{K_2} \beta_{r_2} B_{r_2}^{(2)}(Temp.) \right] \right. \\
&\quad \times \left. \left[\sum_{r_3=1}^{K_3} \sum_{r_4=1}^{K_4} \varphi_{r_3 r_4} B_{r_3}^{(3)}(Lat.) B_{r_4}^{(4)}(Long.) \right] \right\} dLong.dLat.dTemp.Mag. \\
&\quad - \left\{ \frac{\alpha_1 C_1 \Omega_1 C_1^T}{2} + \frac{\alpha_2 C_2 \Omega_2 C_2^T}{2} + \frac{\alpha_3 C_3 F C_3^T}{2} \right\}
\end{aligned} \tag{4.7.25}$$

onde $C_1 = (\psi_1, \dots, \psi_{K_1})^T$, $C_2 = (\beta_1, \dots, \beta_{K_2})^T$ e $C_3 = (\varphi_1, \dots, \varphi_{K_2 K_3})^T$ são os coeficientes a serem estimados, tal que $C = (C_1, C_2, C_3)$ tem comprimento $K_1 + K_2 + (K_3 \times K_4)$. O

vetor de parâmetros $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ controla a relação entre a bondade do ajuste e a suavização da estimação da intensidade. A estimativa da intensidade do processo é definida como sendo o máximo da Equação (4.7.25).

4.7.4 Estrutura do método H-splines

- Passo 1: Tome K_1^0 , K_2^0 e K^0 , o número inicial de bases B-splines e $\vec{\alpha}^0$ o chute inicial do parâmetro de penalização;
- Passo 2: O método obtém $\hat{C}_{\vec{\alpha}^0} = \arg \max_C L(C, \vec{\alpha}^0 | S)$ via aproximação de Newton-Raphson;
- Passo 3: O método utiliza $\hat{C}_{\vec{\alpha}^0}$ para obter $\hat{\vec{\alpha}} = \arg \max_{\vec{\alpha}} L(\hat{C}_{\vec{\alpha}}, \vec{\alpha}^0 | S)$ via aproximação de Newton-Raphson;
- Passo 4: O método utiliza $\hat{\vec{\alpha}}$ para obter $\hat{C}_{\hat{\vec{\alpha}}} = \arg \max_C L(C, \hat{\vec{\alpha}} | S)$ via aproximação de Newton-Raphson;
- Passo 5: O método obtém a intensidade $\hat{\lambda}_{K_1^0, K_2^0, K^0, \hat{\vec{\alpha}}}(Mag., Temp., Lat., Long.)$;
- Passo 6: Para K_1^0 e K_2^0 fixos, o método repete os Passos 3, 4 e 5 e obtém a intensidade $\hat{\lambda}_{K_1^0, K_2^0, K^0+1, \hat{\vec{\alpha}}}(Mag., Temp., Lat., Long.)$;
- Passo 7: Se $\rho(\hat{\lambda}_{K_1^0, K_2^0, K^0, \hat{\vec{\alpha}}}(Mag., Temp., Lat., Long.), \hat{\lambda}_{K_1^0, K_2^0, K^0+1, \hat{\vec{\alpha}}}(Mag., Temp., Lat., Long.)) \approx 1$, uma estimativa baseada em K_1^0 , K_2^0 e $K^0 + 1$ bases B-splines é fornecida. Caso contrário o procedimento continua adicionando uma unidade em K mantendo K_1^0 e K_2^0 fixas até encontrar a quantidade ótima de K bases B-spline;
- Passo 8: Uma vez encontrada a quantidade ótima de K bases B-spline, digamos: K^* ,

o procedimento toma K^* e K_1^0 fixos e acrescenta uma base à K_2^0 . O procedimento para em K_2 quando a condição no Passo 7 é satisfeita e K_2^* é fornecida.

- Passo 9: Uma vez encontrada as quantidades ótimas de K e K_2 bases B-spline, digamos: K^* e K_2^* , o procedimento toma K^* e K_2^* fixos e acrescenta uma base à K_1^0 . O procedimento para em K_1 quando a condição no Passo 7 é satisfeita e K_1^* é fornecida.

4.7.5 Apresentação dos resultados

Todas as análises foram realizadas com o auxílio do pacote estatístico R, versão 2.12.0 (2009-04-17) ,disponível gratuitamente em <http://www.r-project.org>. A maximização das Equações (4.7.23) e (4.7.25) foram feitas com base em procedimentos iterativos de maximização numérica, fazendo uso da função `nlminb()` disponível no R. O valor da constante δ foi de 0.999. O número máximo de iterações foi definido como sendo $iter.max = 1500$, o tamanho do passo foi $step.min = 1e - 23$ e a tolerância mínima foi $x.tol = 1e - 15$. Considerando K , K_1 e K_2 variando de 4 até 7, o tempo de duração dos métodos *AIC* e *BIC* foi de 17 horas e 6 minutos, enquanto que o custo computacional dos métodos da equação de log-verossimilhança não penalizada e o H-splines foi respectivamente 1 minuto e 1.4 minutos.

A Figura 4.25 apresenta os gráficos das intensidades marginais $\hat{\lambda}_1(Magnitude)$ e $\hat{\lambda}_2(Tempo)$, enquanto que a Figura 4.26 apresenta quatro gráficos de contorno da intensidade marginal $\hat{\lambda}_{23}(Latitude, Longitude)$. A Tabela 4.10 resume os valores de K_1 , K_2 e K , que são os números de bases B-splines utilizados para estimar a intensidade $\lambda(Magnitude, Tempo, Latitude, Longitude)$. A Tabela 4.11 apresenta a quantidade total de coeficientes utilizados para estimar a intensidade conjunta

$\lambda(Magnitude, Tempo, Latitude, Longitude)$. Com base nas tabelas apresentadas pode-se verificar que não houve redução na quantidade de coeficientes ao compararmos o modelo estimado sob o método da equação de log-verossimilhança não penalizada e o modelo estimado sob o método H-*splines*. Observando os gráficos de contorno da intensidade marginal $\hat{\lambda}_{23}(Latitude, Longitude)$, pode-se concluir que o método que apresentou melhor desempenho foi o H-*splines*, pois pegou a maior quantidade de pontos afastados. Os métodos que apresentaram o pior desempenho foram o AIC, BIC, pois seus contornos encontram-se mais distantes dos pontos. Mesma conclusão pode ser obtida comparando as intensidades marginais $\hat{\lambda}_1(Magnitude)$ e $\hat{\lambda}_2(Tempo)$.

Tabela 4.10: *Quantidade de bases B-splines.*

Métodos	K_1	K_2	K
AIC	4	4	4
BIC	4	4	4
Log-verossimilhança não penalizada	5	5	5
H- <i>splines</i>	5	5	5

Tabela 4.11: *Quantidade total de coeficientes: $K_1 + K_2 + K$*

Métodos	$K_1 + K_2 + K^2$
AIC	24
BIC	24
Log-verossimilhança não penalizada	35
H- <i>splines</i>	35

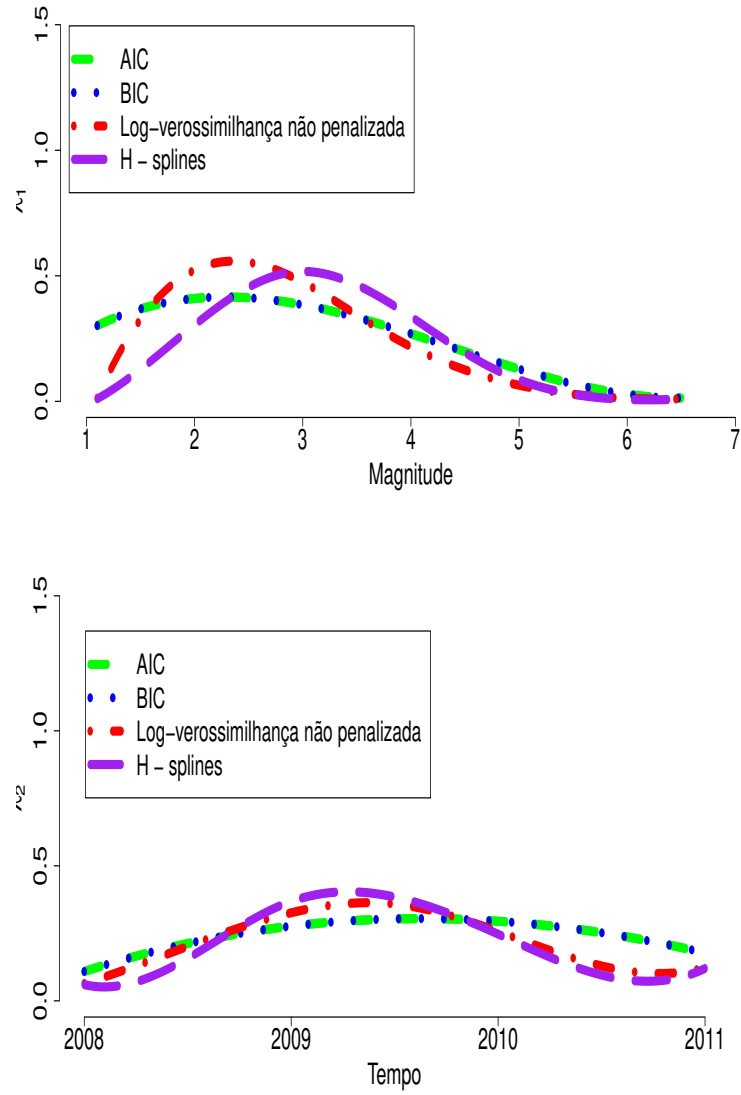


Figura 4.25: Intensidades marginais $\hat{\lambda}_1(\text{Magnitude})$, $\hat{\lambda}_2(\text{Tempo})$, considerando os métodos AIC, BIC, a equação de Log-verossimilhança não penalizada e o H-splines.

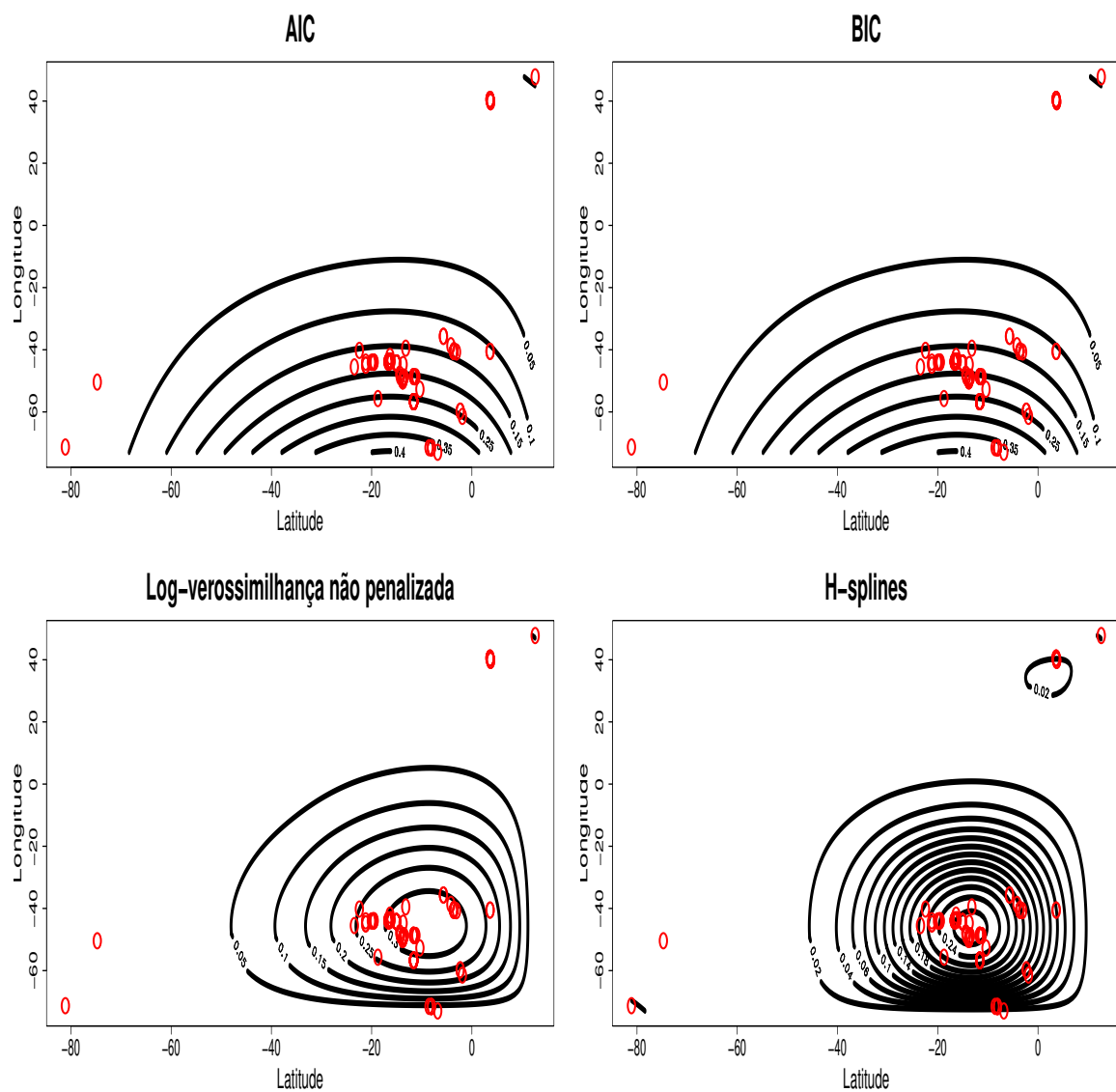


Figura 4.26: Gráfico da intensidade marginal $\hat{\lambda}_{23}(\text{Lat.}, \text{Long.})$, considerando os métodos AIC, BIC, a equação de Log-verossimilhança não penalizada e o H-splines.

No próximo capítulo serão realizados testes de hipóteses não paramétricos, onde o objetivo é verificar o comportamento da distribuição empírica das estatísticas do teste.

Capítulo 5

Testes de hipóteses

5.1 Introdução

Neste capítulo serão propostos testes de hipóteses nula simples como: $H_0 : \lambda(t, x, y) = \lambda_0(t, x, y)$ contra $H_1 : \lambda(t, x, y) \neq \lambda_0(t, x, y)$ com estatísticas do teste baseadas na Diferença Quadrática Integrada, distância de Hellinger, distância de Kulback-Leibler, distância L_1 e na Afinidade. Neste estudo, $\lambda_0(t, x, y)$ é o modelo que assumimos ser verdadeiro. Todas as distâncias propostas neste capítulo estão baseadas em Souza, (2008).

5.2 Estatísticas do teste

Considere a intensidade do processo $\lambda(t, x, y)$ e a transformação:

$$t_\lambda(t, x, y) = \frac{\lambda(t, x, y)^2}{\int_{\tau} \int_x \int_y \lambda(t, x, y)^2 dy dx dt}, \quad (5.2.1)$$

onde $t_\lambda(t, x, y) \geq 0$ e $\int_{\mathcal{T}} \int_{\mathcal{X}} \int_{\mathcal{Y}} t_\lambda(t, x, y) dy dx dt = 1$. Usando essa transformação propomos as seguintes estatísticas do teste:

- Estatística L_1 .

Um forma muito comum de medir o afastamento entre duas funções é através da distância L_1 dada por Allen (1997) propõe um teste baseado na distância L_1 entre as estimativas de densidade por kernel de duas amostras, com o objetivo de testar a proximidade de suas distribuições, (ver Souza, 2008). A estatística L_1 é dada por:

$$L_1 = \int_{\mathcal{T}} \int_{\mathcal{X}} \int_{\mathcal{Y}} |t_\lambda(t, x, y) - t_{\lambda_0}(t, x, y)| dy dx dt. \quad (5.2.2)$$

- Estatística de Kullback-Leibler.

$$KL = \int_{\mathcal{T}} \int_{\mathcal{X}} \int_{\mathcal{Y}} \{\log \{t_\lambda(t, x, y)\} - \log \{t_{\lambda_0}(t, x, y)\}\} t_{\lambda_0}(t, x, y) dy dx dt. \quad (5.2.3)$$

- Estatística de Hellinger.

$$Hellinger = \int_{\mathcal{T}} \int_{\mathcal{X}} \int_{\mathcal{Y}} \left\{ \sqrt{t_\lambda(t, x, y)} - \sqrt{t_{\lambda_0}(t, x, y)} \right\}^2 dy dx dt. \quad (5.2.4)$$

- Estatística Diferença Quadrática Integrada.

Outra medida muito usada para avaliar a proximidade entre duas funções é a Diferença Quadrática Integrada, descrita por:

$$DQI = \int_{\tau} \int_{\mathcal{X}} \int_{\mathcal{Y}} \{t_{\lambda}(t, x, y) - t_{\lambda_0}(t, x, y)\}^2 dy dx dt. \quad (5.2.5)$$

Qi Li (1996) utiliza a Diferença Quadrática Integrada entre duas estimativas de densidade por kernel para construir um teste não paramétrico para a proximidade de duas distribuições, (ver Souza, 2008).

- Estatística Afinidade.

$$Afinidade = \int_{\tau} \int_{\mathcal{X}} \int_{\mathcal{Y}} \frac{|t_{\lambda}(t, x, y) \times t_{\lambda_0}(t, x, y)|}{\sqrt{t_{\lambda}^2(t, x, y) \times t_{\lambda_0}^2(t, x, y)}} dy dx dt. \quad (5.2.6)$$

A principal dificuldade dos testes de hipóteses não paramétricos é avaliar a distribuição de cada estatística do teste. Souza, (2008) propôs o ajuste das distribuições Normal e Gama para as estatísticas L_1 , Hellinger, Kullback-Leibler e Diferença Quadrática Integrada e também ajustou as distribuições Beta e Normal para a estatística Afinidade. Como as estatísticas do teste não possuem distribuição de probabilidade conhecida, o comportamento de cada estatística será estudado através de simulações. Com base na forma dos histogramas das estatísticas de Hellinger $\in [0, 1]$, L_1 , Kullback-Leibler e Diferença Quadrática Integrada (cujos os valores destas estatísticas estão intervalo $[0, \infty)$) foram ajustadas as distribuições Normal e Gama utilizando a função *fitdistr()* do R, onde o método de estimação foi o Nelder-Mead. Com base nos histogramas da distribuição empírica da estatística Afinidade (a distância Afinidade $\in [0, 1]$, (ver Dias, 1999)), foram ajustadas as distribuições Beta e Normal com base na função *fitdistr()* do R. Também foi calculada a estimativa da densidade por kernel para cada uma das estatísticas de interesse. Para verificar se cada estatística de teste segue uma distribuição Normal, Gama ou Beta, foi utilizado o teste de Kolmogorov-Smirnov para duas amostras.

Estrutura dos estudos simulados.

- Passo 1: Simular amostras de um PPNH multivariado;
- Passo 2: Aplicar o método H-*splines* e obter $\lambda(t, x, y)$;
- Passo 3: Aplicar as transformações $t_{\lambda(t, x, y)}$ e $t_{\lambda_0(t, x, y)}$;
- Passo 4: O valor de cada estatística do teste é obtido;
- Passo 5: Os passos de 1 até 4 são repetidos 500 de vezes;
- Passo 6: Obter amostras aleatórias da distribuição de cada estatística do teste para que as mesmas possam ser avaliadas através de histogramas.

Nas próximas seções serão apresentados os resultados dos testes de hipóteses.

5.3 Apresentação dos resultados: método H-splines

As tabelas com os valores dos parâmetros da distribuição Gama e da distribuição Normal (estimados a partir dos valores da estatística L_1 , Hellinger, DQI e Kullback-Leibler) e as tabelas com os parâmetros da distribuição Beta e da distribuição Normal estimados a partir dos valores da estatística Afinidade estão disponíveis no Apêndice B.

Os resultados do teste de Kolmogorov-Smirnov para duas amostras para testar a hipótese de normalidade das estatísticas de teste, também estão disponíveis no Apêndice B. De acordo com o $p - valor$, há evidência estatística para rejeitar a hipótese de que as distribuições das estatísticas de teste (L_1 , Hellinger, DQI, Kullback-Leibler e Afinidade) sigam uma distribuição Normal, com um nível de significância $\alpha = 0.05$.

Também estão disponíveis no Apêndice B as tabelas com os valores do teste de Kolmogorov-Smirnov para testar se as estatísticas de teste L_1 , Hellinger, DQI e Kullback-Leibler seguem uma distribuição gama. Por fim, no mesmo Apêndice, encontram-se as tabelas com os resultados do teste de Kolmogorov-Smirnov para testar se a distribuição da estatística de teste Afinidade segue uma distribuição beta .

De acordo com o $p - valor$, disponível nas tabelas do Apêndice B, com um nível de significância $\alpha = 0.05$, não há evidência estatística para rejeitar a hipótese de que as distribuições das estatísticas de teste (L_1 , Hellinger, DQI e Kullback-Leibler) possam ser aproximadas por uma distribuição gama. A mesma conclusão pode ser alcançada para a estatística afinidade. Ou seja, com um nível de significância $\alpha = 0.05$, não há evidência estatística para rejeitar a hipótese de que a distribuição da estatística de teste afinidade possa ser aproximada por uma distribuição beta.

Assim como no método da equação de log-verossimilhança não penalizada, o comportamento dos histogramas das estatísticas de teste e suas respectivas distribuições ajustadas apresentaram comportamento semelhante em todos os estudos de simulação. Logo, serão apresentados apenas os histogramas das amostras com o número esperado de pontos de 500 observações do método H-*splines* dos estudos de simulação do Capítulo 4.

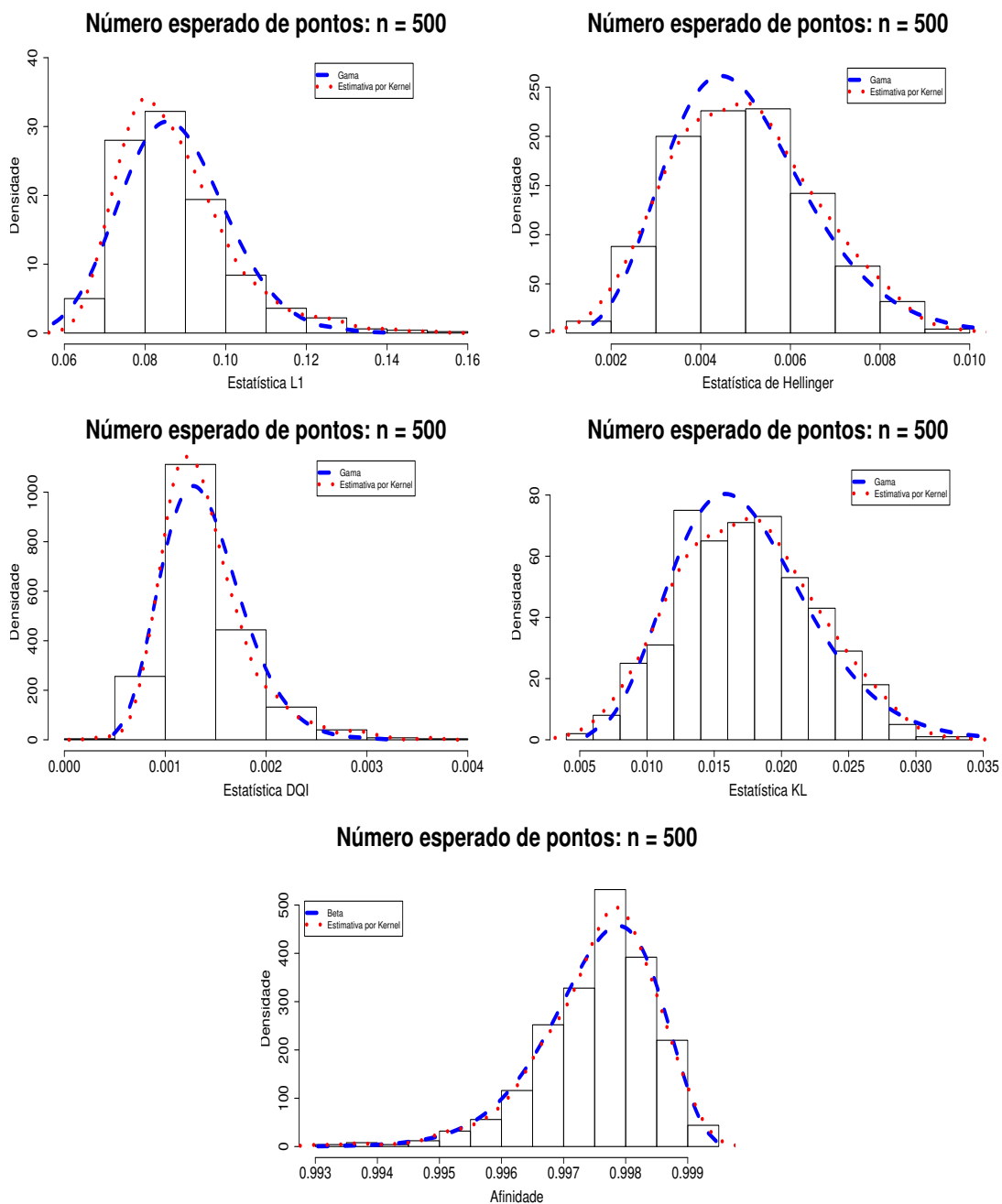


Figura 5.1: Distribuições das estatísticas L_1 , Hellinger, DQI, Kullback-Leibler e Afinidade, considerando o número esperado de pontos de 500 observações - Estudo de Simulação 1.

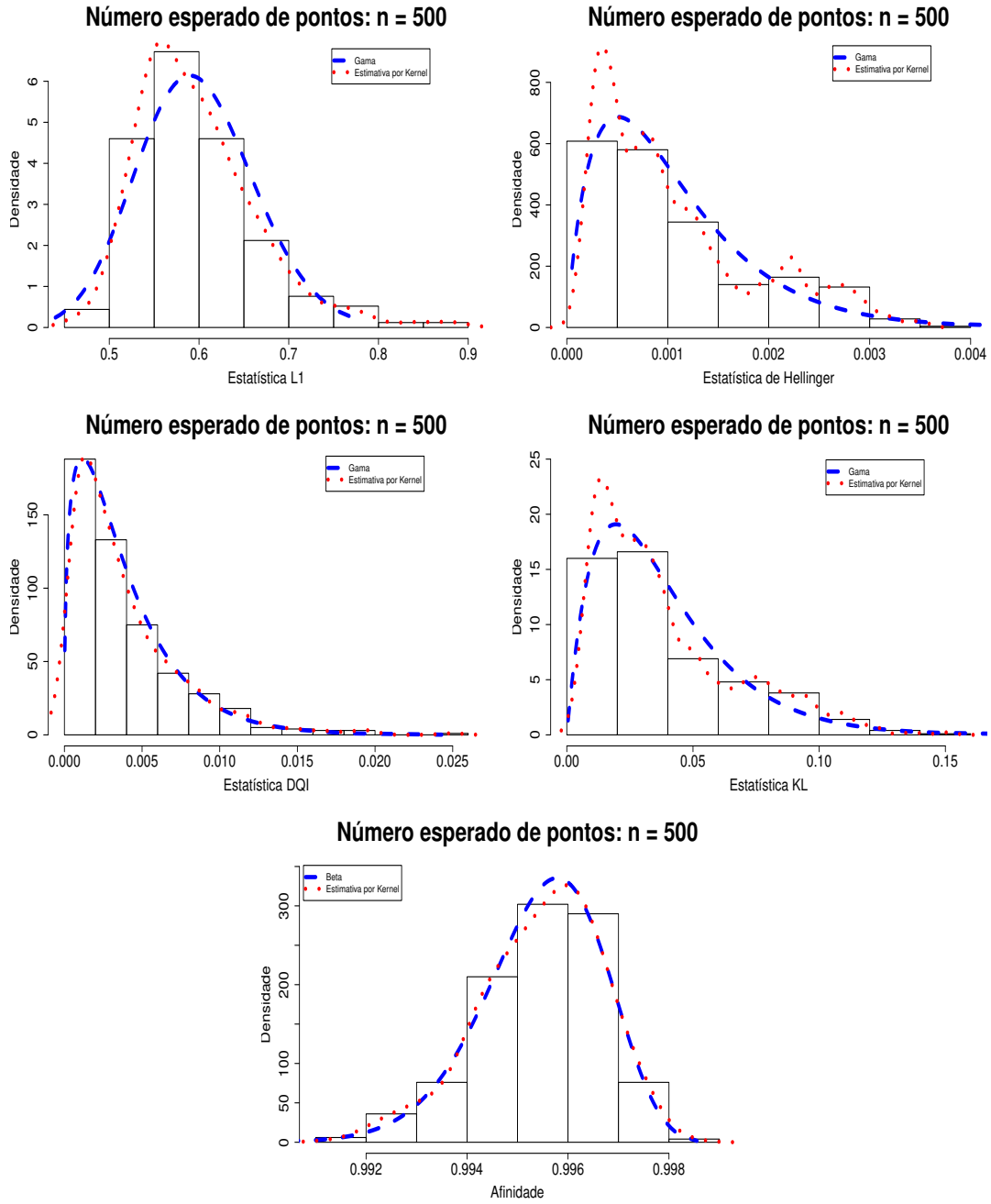


Figura 5.2: Distribuições das estatísticas L_1 , Hellinger, DQI, Kullback-Leibler e Afinidade, considerando o número esperado de pontos de 500 observações - Estudo de Simulação 2.

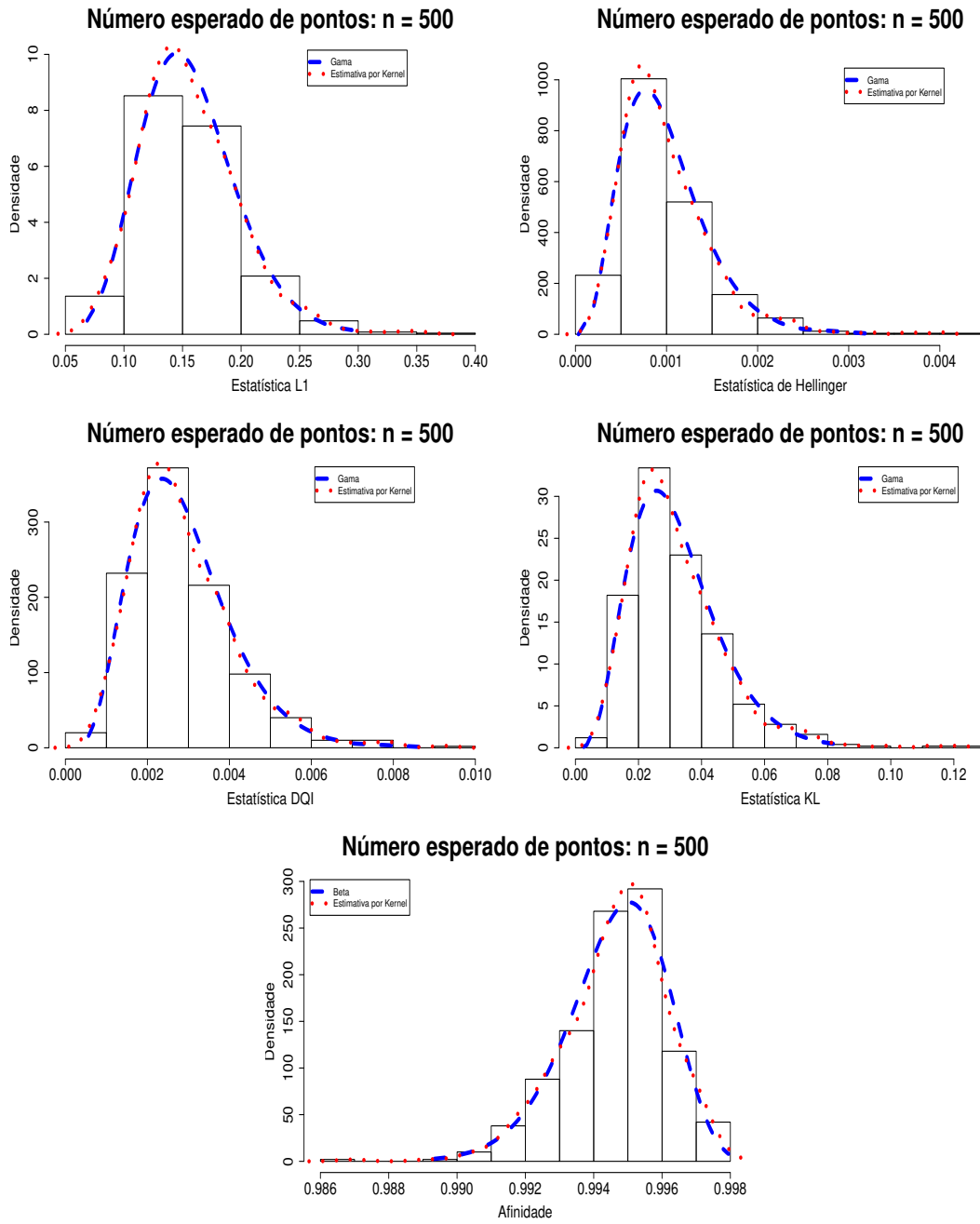


Figura 5.3: Distribuições das estatísticas L_1 , Hellinger, DQI, Kullback-Leibler e Afinidade, considerando o número esperado de pontos de 500 observações - Estudo de Simulação 3.

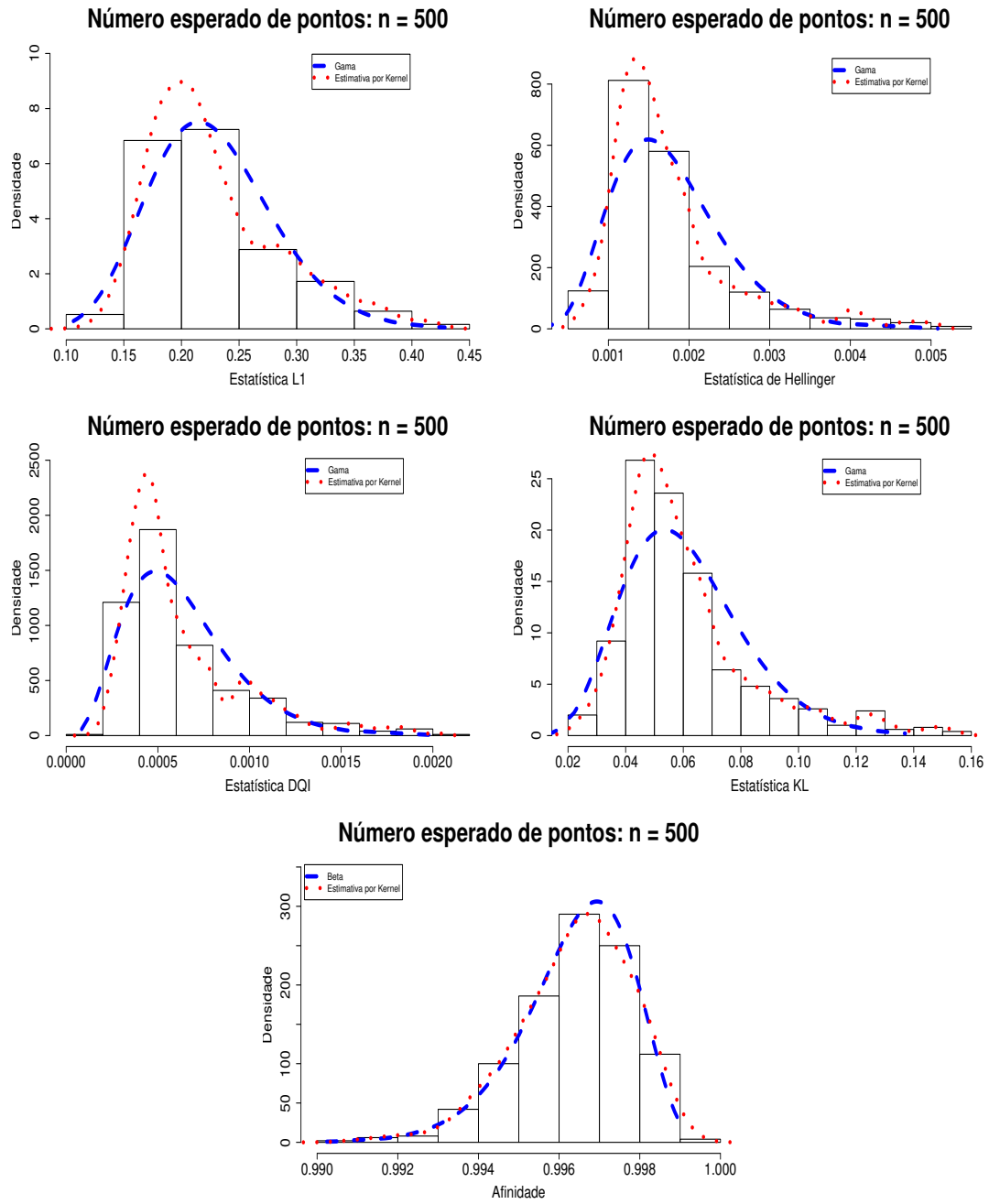


Figura 5.4: Distribuições das estatísticas L_1 , Hellinger, DQI, Kullback-Leibler e Afinidade, considerando o número esperado de pontos de 500 observações - Estudo de Simulação 4.

Tabela 5.1: *Parâmetros da distribuição Gama estimados a partir dos valores obtidos das estatísticas L_1 , Hellinger, DQI e Kulback-Leibler, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 1.*

Estatística	Gama	
	Forma	Escala
L1	94	0.0001
Hellinger	55.11	0.0035
DQI	0.01748	0.0025
Kullback-Leibler	10.08	0.0008

Tabela 5.2: *Parâmetros da distribuição Beta estimados a partir dos valores obtidos da estatística Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 1.*

Estatística	Beta	
	a	b
Afinidade	22.9088	2.6318

Tabela 5.3: *Parâmetros da distribuição Gama estimados a partir dos valores obtidos das estatísticas L_1 , Hellinger, DQI e Kulback-Leibler, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 2.*

Estatística	Gama	
	Forma	Escala
L1	91.96	0.0018
Hellinger	18.72	0.0005
DQI	23.74	4.2526e-06
Kullback-Leibler	22.75	0.0014

Tabela 5.4: *Parâmetros da distribuição Beta estimados a partir dos valores obtidos da estatística Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 2.*

Estatística	Beta	
	a	b
Afinidade	45.2286	3.5826

Tabela 5.5: *Parâmetros da distribuição Gama estimados a partir dos valores obtidos das estatísticas L_1 , Hellinger, DQI e Kulback-Leibler, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 3.*

Estatística	Gama	
	Forma	Escala
L1	14.56	0.0107
Hellinger	4.592	0.0021
DQI	5.645	0.005
Kulback-Leibler	5.074	0.0063

Tabela 5.6: *Parâmetros da distribuição Beta estimados a partir dos valores obtidos da estatística Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 3.*

Estatística	Beta	
	a	b
Afinidade	223.9325	4.49287

Tabela 5.7: *Parâmetros da distribuição Gama estimados a partir dos valores obtidos das estatísticas L_1 , Hellinger, DQI e Kulback-Leibler, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 4.*

Estatística	Gama	
	Forma	Escala
L1	17.52	0.013
Hellinger	6.548	0.0026
DQI	4.49	0.0001
Kullback-Leibler	8.392	0.0072

Tabela 5.8: *Parâmetros da distribuição Beta estimados a partir dos valores obtidos da estatística Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 4.*

Estatística	Beta	
	a	b
Afinidade	170.4437	6.2457

5.4 Conclusões dos testes de hipóteses

Através dos estudos de simulação foi possível estudar o comportamento da distribuição de cada uma das estatísticas do teste sob H_0 para testar a hipótese nula $H_0 : \lambda(t, x, y) = \lambda_0(t, x, y)$ contra a alternativa $H_1 : \lambda(t, x, y) \neq \lambda_0(t, x, y)$. Embora tenham sido apresentados apenas os histogramas das amostras com o número esperado de pontos de 500 observações do método H-*splines* dos estudos de simulação do Capítulo 4, a distribuição de cada estatística do teste foi avaliada considerando os diferentes exemplos propostos nesta tese e seus respectivos tamanhos amostrais.

Com base nos histogramas apresentados e nos resultados do teste de Kolmogorov-Smirnov pode-se concluir que as estatísticas L_1 , Hellinger, DQI e Kullback-Leibler podem ser bem aproximadas por uma distribuição Gama. A estimativa da densidade obtida utilizando os parâmetros de uma distribuição Beta parece ser razoável para a estatística Afinidade.

No próximo capítulo serão apresentadas as principais conclusões desta tese e propostas para trabalhos futuros.

Capítulo 6

Conclusões

O objetivo desse trabalho foi desenvolver uma metodologia efetiva como alternativa não paramétrica para estimar a intensidade λ de um processo de Poisson não homogêneo com base no método da expansão por bases *B-splines* e suas variantes e na equação de log-verossimilhança (1.1.1).

Foram apresentados alguns métodos para a escolha do espaço de funções base *B-splines* como o *AIC*, o *BIC*, o método da equação de log-verossimilhança não penalizada e o método *H-splines* proposto por Dias (1998) no contexto de estimação de densidades.

Os estudos de simulação mostraram que o método sequencial adaptativo *H-splines* para estimação não paramétrica da intensidade do processo λ apresentou um desempenho superior que o desempenho apresentado pelos métodos *AIC* e *BIC*. Os métodos *AIC* e *BIC* apresentaram o pior desempenho.

Ainda com base nos estudos simulados, também foi possível verificar que o método sequencial adaptativo *H-splines* apresentou um desempenho, no mínimo, similar ao desem-

penho apresentado pelo método da equação de log-verossimilhança não penalizada, com a vantagem de resolver o mesmo problema com um número de coeficientes bem inferior que o número de coeficientes apresentado pelo método da equação de log-verossimilhança não penalizada. Isto acarreta na redução do custo computacional, além de evitar a instabilidade numérica e a presença da multicolinearidade.

Além do método *H-splines* apresentar um desempenho (no sentido de apresentar uma curva e/ou superfície estimada mais próxima da curva e/ou superfície verdadeira) superior que o desempenho dos métodos *AIC* e *BIC*, o *H-splines* escolhe adaptativamente a quantidade de funções base *B-splines*, sem a necessidade de fixar o número de nós como no caso dos métodos *AIC* e *BIC*.

Testes de hipóteses simples foram propostos com base nas estatísticas do teste baseadas nas distâncias L_1 , Kullback-Leibler, Hellinger, na Diferença Quadrática Integrada (DQI) e na Afinidade. Em particular, testou-se a hipótese nula $H_0 : \lambda(t, x, y) = \lambda_0(t, x, y)$ contra a alternativa $H_1 : \lambda(t, x, y) \neq \lambda_0(t, x, y)$. Com base nos estudos simulados, foi possível estudar a distribuição de cada uma das estatísticas do teste. Com relação às estatísticas L_1 , Kullback-Leibler, Hellinger e DQI, foi possível concluir que a distribuição de cada uma delas pode ser aproximada por uma distribuição Gama ou por uma distribuição Qui-quadrado, que é um caso particular da distribuição Gama. Por sua vez, a distribuição da estatística Afinidade pode ser bem aproximada por uma distribuição Beta.

6.1 Extensões para trabalhos futuros

- No Capítulo 5 foram propostos testes de hipóteses nula simples como: $H_0 : \lambda(t, x, y) = \lambda_0(t, x, y)$ contra $H_1 : \lambda(t, x, y) \neq \lambda_0(t, x, y)$ com estatísticas do teste baseadas na Diferença Quadrática Integrada (DQI), distância de Hellinger, distân-

cia de Kulback-Leibler, distância L_1 e na Afinidade, afim de estudar a distribuição de cada uma das estatísticas do teste propostas. Com relação às estatísticas L_1 , Kullback-Leibler, Hellinger e DQI, foi possível concluir que a distribuição de cada uma dessas estatísticas pôde ser aproximada por uma distribuição Gama. Por sua vez, a distribuição da estatísticas afinidade pôde ser bem aproximada por uma distribuição Beta. Um próximo passo seria realizar um estudo teórico sobre a distribuição exata ou aproximada de cada uma das estatísticas do teste propostas nesta tese. No caso de um estudo sobre a distribuição aproximada poderia verificar o Teorema Central do Limite.

- Testar a separabilidade da intensidade conjunta $\lambda(t, x, y)$ em duas intensidades marginais: $\lambda_1(t)$ e $\lambda_{23}(x, y)$. Ou seja, para um $\delta > 0$ avaliar a distância $d\{\lambda(t, x, y) - \lambda_1(t) \times \lambda_{23}(x, y)\} < \delta$. No caso do exemplo com dados reais poderia verificar a separabilidade entre tempo e espaço.
- Fazer uma extensão da metodologia para qualquer dimensão finita.

Referências Bibliográficas

- [1] Allen, D. L. (1997) Hypothesis testing using and L1-distance bootstrap. *The American Statistician*, 51(2), 145-150.
- [2] Burnecki, K. (2009) *Simulation of counting processes*. Hugo Steinhaus Center, Wroclaw University of Technology. ECMI, 17th November, disponível em www.im.pwr.wroc.pl/burnecki.
- [3] Caetano, S. L. (2008) *Função de intensidade Poisson perturbada pelo número de ocorrências para dados de eventos recorrentes*. São Carlos UFScar. 87, (2): 251-263.
- [4] Çinlar, E. (1975) *Introduction to Stochastic Processes*. Prentice Hall.
- [5] Cox, D. R., and Isham, V. (1980) *Point Processes*, London: Chapman & Hall.
- [6] Choi, E. and Hall: (2000) *On the estimation of poles in intensity functions*. *Biometrika*. **87**, (2): 251-263.
- [7] Development Core Team (2008). R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. ISBN 3-900051-07-0, URL <http://www.R-project.org>.
- [8] De Boor, C. (1978), *A Practical Guide to Splines*, New York: Springer-Verlag.

- [9] Dias, R. (1999), Sequential Adaptive Nonparametric Regression via H-splines. *Communications in Statistics: Computation and Simulation*, Vol. **28**, No. 2, pp. 501-515.
- [10] Dias, R. (1998), Density Estimation via Hybrid Splines. *Journal of Statistical Computation and Simulation* , Vol. **60**, No. 4, pp. 277-294.
- [11] Diggle, P.J. (2003), *Statistical Analysis of Spatial and Spatio-Temporal Point Patterns*. Second edition, Arnold, London.
- [12] Diggle, P.J. (2005), Partial Likelihood for Spatio-temporal Point Processes. *Johns Hopkins University, Dept. of Biostatistics Working Papers*. Working Paper 75.
- [13] Diggle, P.J. (2005), Spatio-temporal Point Processes: Methods and Applications. *Johns Hopkins University, Dept. of Biostatistics Working Papers*. Working Paper 78.
- [14] Diggle, P.J. , Rowlingson B. and Su T.L. (2005), Point process methodology for on-line spatio-temporal disease surveillance. *Environmetrics*, Vol. **16**, pp. 423-434.
- [15] Ehlers, R. (2003), Métodos Computacionalmente Intensivos em Estatística. Departamento de Estatística, Universidade Federal do Pará, Notas de aula.
- [16] Gamerman, D. and Lopes, H.F. (2006), *Markov Chain Monte Carlo: Stochastic Simulation for Bayesian Inference* (Second Edition), Chapman & Hall, USA.
- [17] Good, I.J. & Gaskins, R.A. (1971). Nonparametric roughness penalties for probability densities. *Biometrika*, Vol **58**, pp. 255-277.
- [18] Green, P. and Silverman, B. (1994), Nonparametric Regression and Generalized Linear Models. Chapman and Hall, New York.

- [19] Gu, C. and Kim, Y. J. (2002), Penalized likelihood regression: General formulation and efficient approximation. *The Canadian Journal of Statistics*, Vol. **30**, No. 4, pp. 619-628.
- [20] Gu, C. and Wang, J. (2003), Penalized Likelihood Density Estimation: Direct Cross-Validation and Scalable Approximation. *Statistica Sinica*, Vol **13**, pp. 811-626.
- [21] Karlin, S. and Taylor, H. M. (1975), *A First Course in Stochastic Processes*. New York: Academic Press.
- [22] Kauermann, G. and Schellhase, C. (2009), *Density Estimation with a Penalized Mixture Approach*. Technical Report, Centre for Statistic, Bielefeld University.
- [23] Kingman, J. F. C. (1993), *Poisson Processes*. OXFORD STUDIES IN PROBABILITY 3, University of Bristol.
- [24] Kuonen, D. (2001). *Computer-intensive statistical methods: saddlepoint approximations with applications in bootstrap and robust inference*. PhD Thesis No. 2449, Department of Mathematics, Swiss Federal Institute of Technology, CH-1015 Lausanne.
- [25] Ogata, Y. and Tanemura, M. (1981). *Estimation of interaction potentials of spatial point patterns through the maximum likelihood procedure*. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, Vol. **33 B**, No. 1, pp. 315-338.
- [26] Ogata, Y. and Tanemura, M. (1984). *Likelihood analysis of spatial point patterns*. *Journal of the Royal Statistical Society*, Vol **46 B**, No. 3, pp. 496-518.
- [27] Ogata, Y. and Tanemura, M. (1986). *Likelihood estimation of interaction potentials and external fields of inhomogeneous spatial point patterns*, *Proc. PACIFIC STATISTICAL CONGRESS-1985*, (eds. I. S. Francis, B. F. J. Manly and F. C. Lam), pp. 150-154, North-Holland.

- [28] Ogata, Y. and Katsura, M. (1987). *Likelihood analysis of spatial inhomogeneity for marked poin patterns*, The institute of Statistical Mathematics, 4-6-7, Miami-Azabu. Minato-ku, Tokyo, Japan Vol. **40 B**, No. 1, pp. 29-39.
- [29] Ogata Y. (1998) Space-time point-process models for earthquake occurrences. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, Vol. **50**, No. 2, pp. 379–402.
- [30] Qi Li (1996) Nonparametric testing of closeness between two unknown distribution functions. *Econometrics Reviews*, 15(3), 261-274.
- [31] R Development Core Team (2012). R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. ISBN 3-900051-07-0, URL <http://www.R-project.org/>.
- [32] Resnick, S. (1992), *Adventures in Stochastic, Processes*, Birkhäuser, Berlin.
- [33] Saltzman, E. (2008) Multivariate nonhomogeneous Poisson processes, Thesis – College of William and Mary. Dept. of Mathematics.
- [34] Sakamoto, Y., Ishiguro, M., and Kitagawa G. (1986). Akaike Information Criterion Statistics. D. Reidel Publishing Company.
- [35] Schumaker, L. L. (1972) *Splines functions and Aproximation theory*, Birkhauser.
- [36] Sheng, Y. (1996), *Wavelet Transform, in The Transforms and Transactions on Signal Processing*, Vol. **41**, No. 12., pp. 3591-3596.
- [37] Souza, Camila Pedroso Estevam (2008) *Testes de hipóteses para dados funcionais baseados em distâncias: um estudo usando splines*, Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica - IMECC, Campinas, SP - Brasil. Dissertação de mestrado.

- [38] Titterton, D. M. (1985), Common structure of smmothing techniques in statistics, *Internat. Statist. Rev.*, **52(2)**, 141-170.
- [39] Ulbricht, J. (2004) *Representing Functional Data as Smooth Functions*, CASE - Center of Applied Statistics and Economics, Institute of Statistics and Econometrics, Humboldt University, Berlin.
- [40] Xiangqian, L. and Lin, Z. (1999), Haar Wavelet and Its Application in Optimal Control of Linear Time-invariant Systems, Tsinghua Science and Technology, Vol. 4, No.1, pp. 1307-1310.
- [41] Walter, R. (1987), Real and complex analysis (3rd ed.), New York: McGraw-Hill, ISBN 978-0-07-054234-1, MR924157.
- [42] Wang, Y. and Taylor, J. (2004) Monotone Constrained Tensor-product B-splines with application to screening studies, *University of Michigan School of Public Healt, Department of Biostatistics*. Working Papers 23.

Apêndice A

Resultados dos estudos de simulação do método da equação de log-verossimilhança não penalizada

A.1 Apresentação dos resultados do Estudo de Simulação 1

A.1.1 Amostra com o número esperado de pontos de 15 observações

Tabela A.1: *Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição das estatísticas L_1 , Hellinger, DQI, Kullback-Leibler e Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 15 observações, segue uma distribuição Normal - Estudo de Simulação 1.*

Estatísticas	Valor do teste	p-valor
L1	0.134	0.00025
Hellinger	0.14	0.00011
DQI	0.206	1.21946e-09
Kullback-Leibler	0.366	0.01308
Afinidade	0.174	5.32942e-07

Tabela A.2: *Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se as distribuições das estatísticas L_1 , Hellinger, DQI, Kullback-Leibler, seguem uma distribuição Gama, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 15 observações - Estudo de Simulação 1.*

Estatísticas	Valor do teste	p-valor
L1	0.082	0.06932
Hellinger	0.066	0.2262
DQI	0.044	0.71837
Kullback-Leibler	0.078	0.09546
Afinidade	0.06	0.32911

Tabela A.3: *Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição da estatística Afinidade segue uma distribuição Beta, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 15 observações - Estudo de Simulação 1.*

Estatística	Valor do teste	p-valor
Afinidade	0.06	0.32911

Tabela A.4: *Parâmetros das distribuições Gama e Normal estimados a partir dos valores obtidos das estatísticas L_1 , Hellinger, DQI e Kullback-Leibler, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 15 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 1.*

Estatística	Gama		Normal	
	Forma	Escala	Média	Desvio Padrão
L1	7.487	0.0959	0.7184	0.263
Hellinger	2.376	0.05250	0.12478	0.08663
DQI	1.528	0.1145	0.175	0.1934
Kullback-Leibler	17.25	0.0271	0.469	0.1104

Tabela A.5: *Parâmetros das distribuições Beta e Normal estimados a partir dos valores obtidos da estatística Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 15 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 1.*

Estatística	Beta		Normal	
	a	b	Média	Desvio Padrão
Afinidade	14.2281	2.0467	0.8752	0.0866

A.1.2 Amostra com o número esperado de pontos de 30 observações

Tabela A.6: *Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição das estatísticas L_1 , Hellinger, DQI, Kullback-Leibler e Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 30 observações, segue uma distribuição Normal - Estudo de Simulação 1.*

Estatísticas	Valor do teste	p-valor
L1	0.032	0.03
Hellinger	0.068	0.0197
DQI	0.154	1.4163e-05
Kullback-Leibler	0.104	0.0089
Afinidade	0.052	0.0084

Tabela A.7: *Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se as distribuições das estatísticas L_1 , Hellinger, DQI, Kullback-Leibler, seguem uma distribuição Gama, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 30 observações - Estudo de Simulação 1.*

Estatísticas	Valor do teste	p-valor
L1	0.026	0.34179
Hellinger	0.05	0.5595
DQI	0.088	0.3416
Kullback-Leibler	0.07	0.1724

Tabela A.8: *Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição da estatística Afinidade segue uma distribuição Beta, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 30 observações - Estudo de Simulação 1.*

Estatística	Valor do teste	p-valor
Afinidade	0.08	0.0815

Tabela A.9: *Parâmetros das distribuições Gama e Normal estimados a partir dos valores obtidos das estatísticas L_1 , Hellinger, DQI e Kulback-Leibler, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 30 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 1.*

Estatística	Gama		Normal	
	Forma	Escala	Média	Desvio Padrão
L1	31.56	0.0228	0.7202	0.1255
Hellinger	9.119	0.0131	0.1197	0.03946
DQI	5.862	0.0125	0.07352	0.03504
Kullback-Leibler	9.763	0.0392	0.383	0.1238

Tabela A.10: *Parâmetros das distribuições Beta e Normal estimados a partir dos valores obtidos da estatística Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 30 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 1.*

Estatística	Beta		Normal	
	a	b	Média	Desvio Padrão
Afinidade	59.1698	8.0465	0.8803	0.0394

A.1.3 Amostra com o número esperado de pontos de 100 observações

Tabela A.11: *Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição das estatísticas L_1 , Hellinger, DQI, Kullback-Leibler e Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 100 observações, segue uma distribuição Normal - Estudo de Simulação 1.*

Estatísticas	Valor do teste	p-valor
L1	0.038	0.0141
Hellinger	0.062	0.0217
DQI	0.088	0.0416
Kullback-Leibler	0.054	0.0429
Afinidade	0.076	0.0113

Tabela A.12: *Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se as distribuições das estatísticas L_1 , Hellinger, DQI, Kullback-Leibler, seguem uma distribuição Gama, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 100 observações - Estudo de Simulação 1.*

Estatísticas	Valor do teste	p-valor
L1	0.072	0.1496
Hellinger	0.066	0.2262
DQI	0.068	0.1979
Kullback-Leibler	0.036	0.2917

Tabela A.13: *Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição da estatística Afinidade segue uma distribuição Beta, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 100 observações - Estudo de Simulação 1.*

Estatística	Valor do teste	p-valor
Afinidade	0.062	0.9022

Tabela A.14: *Parâmetros das distribuições Gama e Normal estimados a partir dos valores obtidos das estatísticas L_1 , Hellinger, DQI e Kulback-Leibler, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 100 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 1.*

Estatística	Gama		Normal	
	Forma	Escala	Média	Desvio Padrão
L1	71.04	0.000874	0.062096	0.007341
Hellinger	11.74	0.0001368	0.0015971	0.0004556
DQI	21.7	1.610796e-05	0.0003495	7.593e-05
Kullback-Leibler	13.46	0.000429	0.005788	0.001537

Tabela A.15: *Parâmetros das distribuições Beta e Normal estimados a partir dos valores obtidos da estatística Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 100 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 1.*

Estatística	Beta		Normal	
	a	b	Média	Desvio Padrão
Afinidade	7652.064344	12.218818	0.9984029	0.0004556

A.1.4 Amostra com o número esperado de pontos de 500 observações

Tabela A.16: *Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição das estatísticas L_1 , Hellinger, DQI, Kullback-Leibler e Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações, segue uma distribuição Normal - Estudo de Simulação 1.*

Estatísticas	Valor do teste	p-valor
L1	0.046	0.0235
Hellinger	0.06	0.0291
DQI	0.084	0.0587
Kullback-Leibler	0.038	0.0031
Afinidade	0.064	0.0254

Tabela A.17: *Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se as distribuições das estatísticas L_1 , Hellinger, DQI, Kullback-Leibler, seguem uma distribuição Gama, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações - Estudo de Simulação 1.*

Estatísticas	Valor do teste	p-valor
L1	0.072	0.1496
Hellinger	0.095	0.91464
DQI	0.082	0.1693
Kullback-Leibler	0.043	0.3203

Tabela A.18: *Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição da estatística Afinidade segue uma distribuição Beta, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações - Estudo de Simulação 1.*

Estatística	Valor do teste	p-valor
Afinidade	0.068	0.1979

Tabela A.19: *Parâmetros das distribuições Gama e Normal estimados a partir dos valores obtidos das estatísticas L_1 , Hellinger, DQI e Kulback-Leibler, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 1.*

Estatística	Gama		Normal	
	Forma	Escala	Média	Desvio Padrão
L1	73.71	0.000848	0.062519	0.007274
Hellinger	12.34	0.00013	0.0016113	0.0004525
DQI	26.46	1.318508e-05	0.0003489	6.862e-05
Kullback-Leibler	14.11	0.000413	0.00584	0.001527

Tabela A.20: *Parâmetros das distribuições Beta e Normal estimados a partir dos valores obtidos da estatística Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 1.*

Estatística	Beta		Normal	
	a	b	Média	Desvio Padrão
Afinidade	3900.470551	12.597747	0.996777	0.000905

A.2 Apresentação dos resultados do Estudo de Simulação 2

A.2.1 Amostra com o número esperado de ponto de 15 observações

Tabela A.21: *Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição das estatísticas L_1 , Hellinger, DQI, Kullback-Leibler e Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 15 observações, segue uma distribuição Normal - Estudo de Simulação 2.*

Estatísticas	Valor do teste	p-valor
L1	0.09	0.0348
Hellinger	0.146	4.70239825469676e-05
DQI	0.238	1.0021e-12
Kullback-Leibler	0.134	0.0079
Afinidade	0.122	0.0041

Tabela A.22: *Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se as distribuições das estatísticas L_1 , Hellinger, DQI, Kullback-Leibler, seguem uma distribuição Gama, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 15 observações - Estudo de Simulação 2.*

Estatísticas	Valor do teste	p-valor
L1	0.072	0.1496
Hellinger	0.086	0.63561
DQI	0.082	0.1693
kullback-Leibler	0.032	0.1342

Tabela A.23: *Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição da estatística Afinidade segue uma distribuição Beta, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 15 observações - Estudo de Simulação 2.*

Estatística	Valor do teste	p-valor
Afinidade	0.128	0.4985

Tabela A.24: *Parâmetros das distribuições Gama e Normal estimados a partir dos valores obtidos das estatísticas L_1 , Hellinger, DQI e Kulback-Leibler, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 15 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 2.*

Estatística	Gama		Normal	
	Forma	Escala	Média	Desvio Padrão
L1	6.002	0.10975	0.6588	0.2602
Hellinger	1.95	0.0536	0.1046	0.0776
DQI	1.159	0.006	0.007068	0.00881
Kullback-Leibler	1.938	0.2032	0.3939	0.3097

Tabela A.25: *Parâmetros das distribuições Beta e Normal estimados a partir dos valores obtidos da estatística Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 15 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 2.*

Estatística	Beta		Normal	
	a	b	Média	Desvio Padrão
Afinidade	12.9792	1.5022	0.7908	0.1552

A.2.2 Amostra com o número esperado de pontos de 30 observações

Tabela A.26: *Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição das estatísticas L_1 , Hellinger, DQI, Kullback-Leibler e Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 30 observações, segue uma distribuição Normal - Estudo de Simulação 2.*

Estatísticas	Valor do teste	p-valor
L1	0.118	0.0001
Hellinger	0.112	0.0037
DQI	0.158	7.5886e-06
Kullback-Leibler	0.12	0.0014
Afinidade	0.134	1.26545e-05

Tabela A.27: *Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se as distribuições das estatísticas L_1 , Hellinger, DQI, Kullback-Leibler, seguem uma distribuição Gama, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 30 observações - Estudo de Simulação 2.*

Estatísticas	Valor do teste	p-valor
L1	0.074	0.0787
Hellinger	0.048	0.6121
DQI	0.044	0.7183
Kullback-Leibler	0.04	0.8186

Tabela A.28: *Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição da estatística Afinidade segue uma distribuição Beta, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 30 observações - Estudo de Simulação 2.*

Estatística	Valor do teste	p-valor
Afinidade	0.155	0.4892

Tabela A.29: *Parâmetros das distribuições Gama e Normal estimados a partir dos valores obtidos das estatísticas L_1 , Hellinger, DQI e Kulback-Leibler, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 30 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 2.*

Estatística	Gama		Normal	
	Forma	Escala	Média	Desvio Padrão
L1	6.945	0.0941	0.6535	0.2467
Hellinger	2.231	0.0476	0.10621	0.07358
DQI	1.7	0.0021	0.003663	0.00306
Kullback-Leibler	2.36	0.1566	0.3696	0.2539

Tabela A.30: *Parâmetros das distribuições Beta e Normal estimados a partir dos valores obtidos da estatística Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 30 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 2.*

Estatística	Beta		Normal	
	a	b	Média	Desvio Padrão
Afinidade	6.1283	1.6911	0.7876	0.1472

A.2.3 Amostra com o número esperado de pontos de 100 observações

Tabela A.31: *Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição das estatísticas L_1 , Hellinger, DQI, Kullback-Leibler e Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 100 observações, segue uma distribuição Normal - Estudo de Simulação 2.*

Estatísticas	Valor do teste	p-valor
L1	0.074	0.029857
Hellinger	0.07	0.0124
DQI	0.06	0.03298
Kullback-Leibler	0.124	0.0009
Afinidade	0.102	0.0110

Tabela A.32: *Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se as distribuições das estatísticas L_1 , Hellinger, DQI, Kullback-Leibler, seguem uma distribuição Gama, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 100 observações - Estudo de Simulação 2.*

Estatísticas	Valor do teste	p-valor
L1	0.05	0.3743
Hellinger	0.068	0.1485
DQI	0.066	0.2262
Kullback-Leibler	0.05	0.1496

Tabela A.33: *Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição da estatística Afinidade segue uma distribuição Beta, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 100 observações - Estudo de Simulação 2.*

Estatística	Valor do teste	p-valor
Afinidade	0.076	0.1113

Tabela A.34: *Parâmetros das distribuições Gama e Normal estimados a partir dos valores obtidos das estatísticas L_1 , Hellinger, DQI e Kulback-Leibler, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 100 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 2.*

Estatística	Gama		Normal	
	Forma	Escala	Média	Desvio Padrão
L1	34.64	0.00326	0.11318	0.01874
Hellinger	5.719	0.00094	0.005412	0.002148
DQI	9.018	7.30994e-06	6.593e-05	2.126e-05
Kullback-Leibler	6.863	0.00268	0.018439	0.006647

Tabela A.35: *Parâmetros das distribuições Beta e Normal estimados a partir dos valores obtidos da estatística Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 100 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 2.*

Estatística	Beta		Normal	
	a	b	Média	Desvio Padrão
Afinidade	222.87349	6.78211	0.989176	0.004296

A.2.4 Amostra com o número esperado de pontos de 500 observações

Tabela A.36: *Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição das estatísticas L_1 , Hellinger, DQI, Kullback-Leibler e Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações, segue uma distribuição Normal - Estudo de Simulação 2.*

Estatísticas	Valor do teste	p-valor
L1	0.038	0.0251
Hellinger	0.034	0.0347
DQI	0.11	0.0047
Kullback-Leibler	0.072	0.0396
Afinidade	0.044	0.0183

Tabela A.37: *Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se as distribuições das estatísticas L_1 , Hellinger, DQI, Kullback-Leibler, seguem uma distribuição Gama, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações - Estudo de Simulação 2.*

Estatísticas	Valor do teste	p-valor
L1	0.072	0.1496
Hellinger	0.038	0.8631
DQI	0.082	0.0693
Kullback-Leibler	0.09	0.0348

Tabela A.38: *Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição da estatística Afinidade segue uma distribuição Beta, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações - Estudo de Simulação 2.*

Estatística	Valor do teste	p-valor
Afinidade	0.04	0.3126

Tabela A.39: *Parâmetros das distribuições Gama e Normal estimados a partir dos valores obtidos das estatísticas L_1 , Hellinger, DQI e Kulback-Leibler, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 2.*

Estatística	Gama		Normal	
	Forma	Escala	Média	Desvio Padrão
L1	49.38	0.00217	0.1072	0.01495
Hellinger	7.204	0.00068	0.004942	0.001739
DQI	12.28	4.87859e-06	5.991e-05	1.699e-05
Kullback-Leibler	8.764	0.00192	0.01685	0.00537

Tabela A.40: *Parâmetros das distribuições Beta e Normal estimados a partir dos valores obtidos da estatística Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 2.*

Estatística	Beta		Normal	
	a	b	Média	Desvio Padrão
Afinidade	786.02718	42.1473	0.990116	0.003477

A.3 Apresentação dos resultados do Estudo de Simulação 3

A.3.1 Amostra com o número esperado de pontos de 15 observações

Tabela A.41: *Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição das estatísticas L_1 , Hellinger, DQI, Kullback-Leibler e Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 15 observações, segue uma distribuição Normal - Estudo de Simulação 3.*

Estatísticas	Valor do teste	p-valor
L1	0.118	0.00018
Hellinger	0.089	0.01017
DQI	0.174	3.42949e-09
Kullback-Leibler	0.166	2.10257e-08
Afinidade	0.119	0.00015

Tabela A.42: *Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se as distribuições das estatísticas L_1 , Hellinger, DQI, Kullback-Leibler, seguem uma distribuição Gama, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 15 observações - Estudo de Simulação 3.*

Estatísticas	Valor do teste	p-valor
L1	0.032	0.96
Hellinger	0.062	0.29173
DQI	0.04	0.81862
Kullback-Leibler	0.0918	0.41642

Tabela A.43: *Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição da estatística Afinidade segue uma distribuição Beta, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 15 observações - Estudo de Simulação 3.*

Estatística	Valor do teste	p-valor
Afinidade	0.17	0.17247

Tabela A.44: *Parâmetros das distribuições Gama e Normal estimados a partir dos valores obtidos das estatísticas L_1 , Hellinger, DQI e Kulback-Leibler, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 15 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 3.*

Estatística	Gama		Normal	
	Forma	Escala	Média	Desvio Padrão
L1	5.821	0.1767	1.0287	0.3949
Hellinger	2.041	0.06758	0.13797	0.09194
DQI	14.42	0.00053	0.007763	0.00207
Kullback-Leibler	31.71	0.03241	1.0279	0.1872

Tabela A.45: *Parâmetros das distribuições Beta e Normal estimados a partir dos valores obtidos da estatística Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 15 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 3.*

Estatística	Beta		Normal	
	a	b	Média	Desvio Padrão
Afinidade	3.84812	1.48877	0.7241	0.1839

A.3.2 Amostra com o número esperado de pontos de 30 observações

Tabela A.46: *Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição das estatísticas L_1 , Hellinger, DQI, Kullback-Leibler e Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 30 observações, segue uma distribuição Normal - Estudo de Simulação 3.*

Estatísticas	Valor do teste	p-valor
L1	0.08	0.034785
Hellinger	0.146	4.70239e-05
DQI	0.11	0.00471
Kullback-Leibler	0.662	0.01862
Afinidade	0.128	0.00263

Tabela A.47: *Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se as distribuições das estatísticas L_1 , Hellinger, DQI, Kullback-Leibler, seguem uma distribuição Gama, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 30 observações - Estudo de Simulação 3.*

Estatísticas	Valor do teste	p-valor
L1	0.067	0.79394
Hellinger	0.056	0.41314
DQI	0.052	0.29173
Kullback-Leibler	0.06	0.32911

Tabela A.48: *Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição da estatística Afinidade segue uma distribuição Beta, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 30 observações - Estudo de Simulação 3.*

Estatística	Valor do teste	p-valor
Afinidade	0.032	0.09274

Tabela A.49: *Parâmetros das distribuições Gama e Normal estimados a partir dos valores obtidos das estatísticas L_1 , Hellinger, DQI e Kulback-Leibler, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 30 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 3.*

Estatística	Gama		Normal	
	Forma	Escala	Média	Desvio Padrão
L1	19.49	0.0451	0.8789	0.2016
Hellinger	6.135	0.02948	0.18093	0.07765
DQI	5.472	0.271	1.4828	0.6774
Kullback-Leibler	1.955	0.85763	1.676	1.047

Tabela A.50: *Parâmetros das distribuições Beta e Normal estimados a partir dos valores obtidos da estatística Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 30 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 3.*

Estatística	Beta		Normal	
	a	b	Média	Desvio Padrão
Afinidade	6.12831	1.69114	0.6381	0.1553

A.3.3 Amostra com o número esperado de pontos de 100 observações

Tabela A.51: *Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição das estatísticas L_1 , Hellinger, DQI, Kullback-Leibler e Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 100 observações, segue uma distribuição Normal - Estudo de Simulação 3.*

Estatísticas	Valor do teste	p-valor
L1	0.046	0.0415
Hellinger	0.116	0.00239
DQI	0.112	0.00377
Kullback-Leibler	0.09	0.03484
Afinidade	0.14	0.00011

Tabela A.52: *Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se as distribuições das estatísticas L_1 , Hellinger, DQI, Kullback-Leibler, seguem uma distribuição Gama, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 100 observações - Estudo de Simulação 3.*

Estatísticas	Valor do teste	p-valor
L1	0.034	0.93473
Hellinger	0.036	0.90224
DQI	0.072	0.14967
Kullback-Leibler	0.08	0.08151

Tabela A.53: *Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição da estatística Afinidade segue uma distribuição Beta, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 100 observações - Estudo de Simulação 3.*

Estatística	Valor do teste	p-valor
Afinidade	0.048	0.61406

Tabela A.54: *Parâmetros das distribuições Gama e Normal estimados a partir dos valores obtidos das estatísticas L_1 , Hellinger, DQI e Kulback-Leibler, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 100 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 3.*

Estatística	Gama		Normal	
	Forma	Escala	Média	Desvio Padrão
L1	6.393	0.03866	0.24718	0.09621
Hellinger	2.237	0.01024	0.02291	0.01558
DQI	2.219	0.04401	0.09768	0.06977
Kullback-Leibler	2.443	0.02929	0.07158	0.04634

Tabela A.55: *Parâmetros das distribuições Beta e Normal estimados a partir dos valores obtidos da estatística Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 100 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 3.*

Estatística	Beta		Normal	
	a	b	Média	Desvio Padrão
Afinidade	44.55603	2.14132	0.95418	0.03115

A.3.4 Amostra com o número esperado de pontos de 500 observações

Tabela A.56: *Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição das estatísticas L_1 , Hellinger, DQI, Kullback-Leibler e Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações, segue uma distribuição Normal - Estudo de Simulação 3.*

Estatísticas	Valor do teste	p-valor
L1	0.074	0.01236
Hellinger	0.096	0.01394
DQI	0.098	0.01642
Kullback-Leibler	0.104	0.00896
Afinidade	0.1	0.01347

Tabela A.57: *Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se as distribuições das estatísticas L_1 , Hellinger, DQI, Kullback-Leibler, seguem uma distribuição Gama, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações - Estudo de Simulação 3.*

Estatísticas	Valor do teste	p-valor
L1	0.076	0.11135
Hellinger	0.018	0.396349
DQI	0.084	0.05872
Kullback-Leibler	0.092	0.29046

Tabela A.58: *Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição da estatística Afinidade segue uma distribuição Beta, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações - Estudo de Simulação 3.*

Estatística	Valor do teste	p-valor
Afinidade	0.044	0.41817

Tabela A.59: *Parâmetros das distribuições Gama e Normal estimados a partir dos valores obtidos das estatísticas L_1 , Hellinger, DQI e Kulback-Leibler, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 3.*

Estatística	Gama		Normal	
	Forma	Escala	Média	Desvio Padrão
L1	14.34	0.01124	0.16116	0.04321
Hellinger	4.519	0.00242	0.010953	0.005401
DQI	5.678	0.00507	0.02882	0.01245
Kullback-Leibler	5.031	0.00695	0.035	0.01625

Tabela A.60: *Parâmetros das distribuições Beta e Normal estimados a partir dos valores obtidos da estatística Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 3.*

Estatística	Beta		Normal	
	a	b	Média	Desvio Padrão
Afinidade	197.17736	4.41724	0.9781	0.0108

A.4 Apresentação dos resultados do Estudo de Simulação 4

A.4.1 Amostra com o número esperado de pontos de 15 observações

Tabela A.61: *Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição das estatísticas L_1 , Hellinger, DQI, Kullback-Leibler e Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 15 observações, segue uma distribuição Normal - Estudo de Simulação 4.*

Estatísticas	Valor do teste	p-valor
L1	0.101	0.00222
Hellinger	0.102	0.01101
DQI	0.07	5.26756e-09
Kullback-Leibler	0.168	1.48684e-06
Afinidade	0.098	0.01642

Tabela A.62: *Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se as distribuições das estatísticas L_1 , Hellinger, DQI, Kullback-Leibler, seguem uma distribuição Gama, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 15 observações - Estudo de Simulação 4.*

Estatísticas	Valor do teste	p-valor
L1	0.128	0.078659
Hellinger	0.041	0.83448
DQI	0.072	0.195493
Kullback-Leibler	0.074	0.76934

Tabela A.63: *Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição da estatística Afinidade segue uma distribuição Beta, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 15 observações - Estudo de Simulação 4.*

Estatística	Valor do teste	p-valor
Afinidade	0.13	0.86832

Tabela A.64: *Parâmetros das distribuições Gama e Normal estimados a partir dos valores obtidos das estatísticas L_1 , Hellinger, DQI e Kulback-Leibler, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 15 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 4.*

Estatística	Gama		Normal	
	Forma	Escala	Média	Desvio Padrão
L1	9.912	0.09781	0.9696	0.265
Hellinger	4.141	0.04938	0.2045	0.09455
DQI	1.505	0.03572	0.05378	0.05736
Kullback-Leibler	2.972	0.26184	0.7782	0.49

Tabela A.65: *Parâmetros das distribuições Beta e Normal estimados a partir dos valores obtidos da estatística Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 15 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 4.*

Estatística	Beta		Normal	
	a	b	Média	Desvio Padrão
Afinidade	3.84812	1.48877	0.591	0.1891

A.4.2 Amostra com o número esperado de pontos de 30 observações

Tabela A.66: *Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição das estatísticas L_1 , Hellinger, DQI, Kullback-Leibler e Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 30 observações, segue uma distribuição Normal - Estudo de Simulação 4.*

Estatísticas	Valor do teste	p-valor
L1	0.08	0.03151
Hellinger	0.086	0.04954
DQI	0.096	0.01994
Kullback-Leibler	0.138	0.00014
Afinidade	0.11	0.00471

Tabela A.67: *Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se as distribuições das estatísticas L_1 , Hellinger, DQI, Kullback-Leibler, seguem uma distribuição Gama, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 30 observações - Estudo de Simulação 4.*

Estatísticas	Valor do teste	p-valor
L1	0.026	0.54842
Hellinger	0.037	0.30348
DQI	0.065	0.68797
Kullback-Leibler	0.096	0.50849

Tabela A.68: *Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição da estatística Afinidade segue uma distribuição Beta, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 30 observações - Estudo de Simulação 4.*

Estatística	Valor do teste	p-valor
Afinidade	0.094	0.25743

Tabela A.69: *Parâmetros das distribuições Gama e Normal estimados a partir dos valores obtidos das estatísticas L_1 , Hellinger, DQI e Kulback-Leibler, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 30 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 4.*

Estatística	Gama		Normal	
	Forma	Escala	Média	Desvio Padrão
L1	31.25	0.02891	0.9036	0.1608
Hellinger	9.074	0.02012	0.18257	0.06233
DQI	4.879	0.00416	0.0203	0.01038
Kullback-Leibler	7.927	0.07808	0.619	0.2314

Tabela A.70: *Parâmetros das distribuições Beta e Normal estimados a partir dos valores obtidos da estatística Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 30 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 4.*

Estatística	Beta		Normal	
	a	b	Média	Desvio Padrão
Afinidade	9.11378	5.29322	0.6349	0.1247

A.4.3 Amostra com o número esperado de pontos de 100 observações

Tabela A.71: *Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição das estatísticas L_1 , Hellinger, DQI, Kullback-Leibler e Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 100 observações, segue uma distribuição Normal - Estudo de Simulação 4.*

Estatísticas	Valor do teste	p-valor
L1	0.082	0.03932
Hellinger	0.09	0.03484
DQI	0.148	3.50458e-05
Kullback-Leibler	0.112	0.00377
Afinidade	0.122	0.00117

Tabela A.72: *Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se as distribuições das estatísticas L_1 , Hellinger, DQI, Kullback-Leibler, seguem uma distribuição Gama, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 100 observações - Estudo de Simulação 4.*

Estatísticas	Valor do teste	p-valor
L1	0.06	0.48755
Hellinger	0.068	0.54842
DQI	0.038	0.86317
Kullback-Leibler	0.028	0.98954

Tabela A.73: *Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição da estatística Afinidade segue uma distribuição Beta, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 100 observações - Estudo de Simulação 4.*

Estatística	Valor do teste	p-valor
Afinidade	0.078	0.63211

Tabela A.74: *Parâmetros das distribuições Gama e Normal estimados a partir dos valores obtidos das estatísticas L_1 , Hellinger, DQI e Kulback-Leibler, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 100 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 4.*

Estatística	Gama		Normal	
	Forma	Escala	Média	Desvio Padrão
L1	15.88	0.01401	0.22258	0.05566
Hellinger	5	0.0032	0.016027	0.007467
DQI	3.527	0.00025	0.0008938	0.0005026
Kullback-Leibler	5.919	0.00924	0.0547	0.02282

Tabela A.75: *Parâmetros das distribuições Beta e Normal estimados a partir dos valores obtidos da estatística Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 100 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 4.*

Estatística	Beta		Normal	
	a	b	Média	Desvio Padrão
Afinidade	145.98551	4.83587	0.99395	0.01493

A.4.4 Amostra com o número esperado de pontos de 500 observações

Tabela A.76: *Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição das estatísticas L_1 , Hellinger, DQI, Kullback-Leibler e Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações, segue uma distribuição Normal - Estudo de Simulação 4.*

Estatísticas	Valor do teste	p-valor
L1	0.154	1.41633e-05
Hellinger	0.164	2.88827e-06
DQI	0.136	0.00019
Kullback-Leibler	0.15	2.60145e-05
Afinidade	0.106	0.00726

Tabela A.77: *Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se as distribuições das estatísticas L_1 , Hellinger, DQI, Kullback-Leibler, seguem uma distribuição Gama, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações - Estudo de Simulação 4.*

Estatísticas	Valor do teste	p-valor
L1	0.07	0.172476270330561
Hellinger	0.052	0.23046
DQI	0.081	0.96719
Kullback-Leibler	0.06	0.32911

Tabela A.78: *Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição da estatística Afinidade segue uma distribuição Beta, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações - Estudo de Simulação 4.*

Estatística	Valor do teste	p-valor
Afinidade	0.034	0.934732

Tabela A.79: *Parâmetros das distribuições Gama e Normal estimados a partir dos valores obtidos das estatísticas L_1 , Hellinger, DQI e Kulback-Leibler, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 4.*

Estatística	Gama		Normal	
	Forma	Escala	Média	Desvio Padrão
L1	21.96	0.01057	0.23218	0.05109
Hellinger	8.479	0.00234	0.019875	0.007399
DQI	5.072	0.00012	0.000609	0.0003101
Kullback-Leibler	10.89	0.006	0.06539	0.02113

Tabela A.80: *Parâmetros das distribuições Beta e Gama estimados a partir dos valores obtidos da estatística Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 4.*

Estatística	Beta		Normal	
	a	b	Média	Desvio Padrão
Afinidade	194.92081	8.07391	0.99603	0.0148

Apêndice B

Resultados dos estudos de simulação do método *H-splines*

B.1 Apresentação dos resultados do Estudo de Simulação 1

B.1.1 Amostra com o número esperado de pontos de 15 observações

Tabela B.1: *Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição das estatísticas L_1 , Hellinger, DQI, Kullback-Leibler e Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 15 observações, segue uma distribuição Normal - Estudo de Simulação 1.*

Estatísticas	Valor do teste	p-valor
L1	0.062	0.02674
Hellinger	0.162	4.00145e-06
DQI	0.21	5.30684e-10
Kullback-Leibler	0.398	2.07644e-06
Afinidade	0.104	0.00896

Tabela B.2: *Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se as distribuições das estatísticas L_1 , Hellinger, DQI, Kullback-Leibler, seguem uma distribuição Gama, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 15 observações - Estudo de Simulação 1.*

Estatísticas	Valor do teste	p-valor
L1	0.033	0.64231
Hellinger	0.061	0.18349
DQI	0.088	0.24163
Kullback-Leibler	0.119	0.25328

Tabela B.3: *Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição da estatística Afinidade segue uma distribuição Beta, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 15 observações - Estudo de Simulação 1.*

Estatística	Valor do teste	p-valor
Afinidade	0.059	0.614971

Tabela B.4: *Parâmetros das distribuições Gama e Normal estimados a partir dos valores obtidos das estatísticas L_1 , Hellinger, DQI e Kullback-Leibler, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 15 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 1.*

Estatística	Gama		Normal	
	Forma	Escala	Média	Desvio Padrão
L1	7.487	0.0959	0.7184	0.263
Hellinger	2.376	0.0525	0.12478	0.08663
DQI	1.528	0.1145	0.175	0.1934
Kullback-Leibler	1.37	0.11364	0.5471	0.1829

Tabela B.5: *Parâmetros das distribuições Beta e Normal estimados a partir dos valores obtidos da estatística Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 15 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 1.*

Estatística	Beta		Normal	
	a	b	Média	Desvio Padrão
Afinidade	14.2281	2.0467	0.8752	0.0866

B.1.2 Amostra com o número esperado de pontos de 30 observações

Tabela B.6: *Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição das estatísticas L_1 , Hellinger, DQI, Kullback-Leibler e Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 30 observações, segue uma distribuição Normal - Estudo de Simulação 1.*

Estatísticas	Valor do teste	p-valor
L1	0.09	0.0348
Hellinger	0.118	0.0018
DQI	0.18	1.8427e-07
Kullback-Leibler	0.14	0.0001
Afinidade	0.106	0.0072

Tabela B.7: *Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se as distribuições das estatísticas L_1 , Hellinger, DQI, Kullback-Leibler, seguem uma distribuição Gama, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 30 observações - Estudo de Simulação 1.*

Estatísticas	Valor do teste	p-valor
L1	0.035	0.2869
Hellinger	0.067	0.4365
DQI	0.08	0.08151
Kullback-Leibler	0.06	0.3291

Tabela B.8: *Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição da estatística Afinidade segue uma distribuição Beta, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 30 observações - Estudo de Simulação 1.*

Estatística	Valor do teste	p-valor
Afinidade	0.096	0.2199

Tabela B.9: *Parâmetros das distribuições Gama e Normal estimados a partir dos valores obtidos das estatísticas L_1 , Hellinger, DQI e Kulback-Leibler, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 30 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 1.*

Estatística	Gama		Normal	
	Forma	Escala	Média	Desvio Padrão
L1	12.06	0.0535	0.6453	0.1856
Hellinger	3.781	0.0263	0.09973	0.05494
DQI	2.792	0.0242	0.06772	0.04791
Kullback-Leibler	3.801	0.0867	0.3298	0.1889

Tabela B.10: *Parâmetros das distribuições Beta Normal estimados a partir dos valores obtidos da estatística Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 30 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 1.*

Estatística	Beta		Normal	
	a	b	Média	Desvio Padrão
Afinidade	9.9013	2.5591	0.8005	0.1099

B.1.3 Amostra com o número esperado de pontos de 100 observações

Tabela B.11: *Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição das estatísticas L_1 , Hellinger, DQI, Kullback-Leibler e Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 100 observações, segue uma distribuição Normal - Estudo de Simulação 1.*

Estatísticas	Valor do teste	p-valor
L1	0.078	0.01975
Hellinger	0.019	0.03147
DQI	0.15	2.6014e-05
Kullback-Leibler	0.978	0.04352
Afinidade	0.126	0.00071

Tabela B.12: *Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se as distribuições das estatísticas L_1 , Hellinger, DQI, Kullback-Leibler, seguem uma distribuição Gama, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 100 observações - Estudo de Simulação 1.*

Estatísticas	Valor do teste	p-valor
L1	0.092	0.02904
Hellinger	0.012	0.49028
DQI	0.034	0.93473
Kullback-Leibler	0.046	0.65429

Tabela B.13: *Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição da estatística Afinidade segue uma distribuição Beta, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 100 observações - Estudo de Simulação 1.*

Estatística	Valor do teste	p-valor
Afinidade	0.04	0.82472

Tabela B.14: *Parâmetros das distribuições Gama e Normal estimados a partir dos valores obtidos das estatísticas L_1 , Hellinger, DQI e Kulback-Leibler, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 100 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 1.*

Estatística	Gama		Normal	
	Forma	Escala	Média	Desvio Padrão
L1	49.91	0.00232	0.11609	0.01621
Hellinger	9.691	0.0005	0.004869	0.001555
DQI	15.39	7.91205e-05	0.0012176	0.0003197
Kullback-Leibler	11.38	0.00149	0.01706	0.005

Tabela B.15: *Parâmetros das distribuições Beta e Normal estimados a partir dos valores obtidos da estatística Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 100 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 1.*

Estatística	Beta		Normal	
	a	b	Média	Desvio Padrão
Afinidade	984.80294	9.68011	0.990262	0.003109

B.1.4 Amostra com o número esperado de pontos de 500 observações

Tabela B.16: *Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição das estatísticas L_1 , Hellinger, DQI, Kullback-Leibler e Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações, segue uma distribuição Normal - Estudo de Simulação 1.*

Estatísticas	Valor do teste	p-valor
L1	0.08	0.0015
Hellinger	0.018	0.0369
DQI	0.068	0.0314
Kullback-Leibler	0.042	0.0089
Afinidade	0.038	0.0317

Tabela B.17: *Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se as distribuições das estatísticas L_1 , Hellinger, DQI, Kullback-Leibler, seguem uma distribuição Gama, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações - Estudo de Simulação 1.*

Estatísticas	Valor do teste	p-valor
L1	0.03	0.9025
Hellinger	0.052	0.5647
DQI	0.032	0.96
Kullback-Leibler	0.03	0.978

Tabela B.18: *Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição da estatística Afinidade segue uma distribuição Beta, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações - Estudo de Simulação 1.*

Estatística	Valor do teste	p-valor
Afinidade	0.046	0.9573

Tabela B.19: *Parâmetros das distribuições Gama e Normal estimados a partir dos valores obtidos das estatísticas L_1 , Hellinger, DQI e Kulback-Leibler, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 1.*

Estatística	Gama		Normal	
	Forma	Escala	Média	Desvio Padrão
L1	366.2	0.00037	0.135769	0.007087
Hellinger	74.57	8.78034e-05	0.0065494	0.0007576
DQI	135.7	8.07903e-06	0.001097	9.403e-05
Kullback-Leibler	88.7	0.00025	0.022678	0.002405

Tabela B.20: *Parâmetros das distribuições Beta e Normal estimados a partir dos valores obtidos da estatística Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 1.*

Estatística	Beta		Normal	
	a	b	Média	Desvio Padrão
Afinidade	5545.22863	73.58268	0.996901	0.001515

B.2 Apresentação dos resultados do Estudo de Simulação 2

B.2.1 Amostra com o número esperado de ponto de 15 observações

Tabela B.21: *Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição das estatísticas L_1 , Hellinger, DQI, Kullback-Leibler e Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 15 observações, segue uma distribuição Normal - Estudo de Simulação 2.*

Estatísticas	Valor do teste	p-valor
L1	0.035	0.0308
Hellinger	0.142	8.3651e-05
DQI	0.226	1.6218e-11
Kullback-Leibler	0.196	9.1012e-09
Afinidade	0.178	2.6359e-07

Tabela B.22: *Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se as distribuições das estatísticas L_1 , Hellinger, DQI, Kullback-Leibler, seguem uma distribuição Gama, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 15 observações - Estudo de Simulação 2.*

Estatísticas	Valor do teste	p-valor
L1	0.032	0.6081
Hellinger	0.097	0.4253
DQI	0.08	0.0815
Kullback-Leibler	0.056	0.4138

Tabela B.23: *Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição da estatística Afinidade segue uma distribuição Beta, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 15 observações - Estudo de Simulação 2.*

Estatística	Valor do teste	p-valor	
Afinidade	0.027	0.168	0.4868

Tabela B.24: *Parâmetros das distribuições Gama e Normal estimados a partir dos valores obtidos das estatísticas L_1 , Hellinger, DQI e Kulback-Leibler, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 15 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 2.*

Estatística	Gama		Normal	
	Forma	Escala	Média	Desvio Padrão
L1	5.443	0.1234	0.6721	0.285
Hellinger	1.797	0.0616	0.11074	0.08818
DQI	1.099	0.0065	0.007182	0.00908
Kullback-Leibler	1.77	0.24277	0.4296	0.36

Tabela B.25: *Parâmetros das distribuições Beta e Normal estimados a partir dos valores obtidos da estatística Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 15 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 2.*

Estatística	Beta		Normal	
	a	b	Média	Desvio Padrão
Afinidade	4.2409	1.2765	0.7785	0.1764

B.2.2 Amostra com o número esperado de pontos de 30 observações

Tabela B.26: *Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição das estatísticas L_1 , Hellinger, DQI, Kullback-Leibler e Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 30 observações, segue uma distribuição Normal - Estudo de Simulação 2.*

Estatísticas	Valor do teste	p-valor
L1	0.094	0.0241
Hellinger	0.156	1.0388e-05
DQI	0.146	4.7023e-05
Kullback-Leibler	0.162	4.0014e-06
Afinidade	0.118	0.0018

Tabela B.27: *Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se as distribuições das estatísticas L_1 , Hellinger, DQI, Kullback-Leibler, seguem uma distribuição Gama, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 30 observações - Estudo de Simulação 2.*

Estatísticas	Valor do teste	p-valor
L1	0.059	0.86135
Hellinger	0.039	0.494748
DQI	0.094	0.02411
Kullback-Leibler	0.088	0.74587

Tabela B.28: *Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição da estatística Afinidade segue uma distribuição Beta, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 30 observações - Estudo de Simulação 2.*

Estatística	Valor do teste	p-valor
Afinidade	0.018	0.0081

Tabela B.29: *Parâmetros das distribuições Gama e Normal estimados a partir dos valores obtidos das estatísticas L_1 , Hellinger, DQI e Kulback-Leibler, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 30 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 2.*

Estatística	Gama		Normal	
	Forma	Escala	Média	Desvio Padrão
L1	12.06	0.0535	0.6453	0.1856
Hellinger	3.781	0.02637	0.09973	0.05494
DQI	2.792	0.02425	0.06772	0.04791
Kullback-Leibler	3.801	0.08676	0.3298	0.1889

Tabela B.30: *Parâmetros das distribuições Beta e Normal estimados a partir dos valores obtidos da estatística Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 30 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 2.*

Estatística	Beta		Normal	
	a	b	Média	Desvio Padrão
Afinidade	9.9013	2.55917	0.98005	0.1099

B.2.3 Amostra com o número esperado de pontos de 100 observações

Tabela B.31: *Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição das estatísticas L_1 , Hellinger, DQI, Kullback-Leibler e Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 100 observações, segue uma distribuição Normal - Estudo de Simulação 2.*

Estatísticas	Valor do teste	p-valor
L1	0.008	0.01792
Hellinger	0.092	0.013784
DQI	0.142	8.36513e-05
Kullback-Leibler	0.768	0.02911
Afinidade	0.116	0.00239

Tabela B.32: *Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se as distribuições das estatísticas L_1 , Hellinger, DQI, Kullback-Leibler, seguem uma distribuição Gama, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 100 observações - Estudo de Simulação 2.*

Estatísticas	Valor do teste	p-valor
L1	0.002	0.26019
Hellinger	0.041	0.82067
DQI	0.09	0.62934
Kullback-Leibler	0.04	0.81862

Tabela B.33: *Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição da estatística Afinidade segue uma distribuição Beta, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 100 observações - Estudo de Simulação 2.*

Estatística	Valor do teste	p-valor
Afinidade	0.028	0.98954

Tabela B.34: *Parâmetros das distribuições Gama e Normal estimados a partir dos valores obtidos das estatísticas L_1 , Hellinger, DQI e Kulback-Leibler, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 100 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 2.*

Estatística	Gama		Normal	
	Forma	Escala	Média	Desvio Padrão
L1	12.05	0.01155	0.13919	0.03803
Hellinger	3.1	0.00216	0.006723	0.003662
DQI	3.265	3.05703e-05	9.981e-05	5.257e-05
Kullback-Leibler	3.543	0.00663	0.02352	0.01183

Tabela B.35: *Parâmetros das distribuições Beta e Normal estimados a partir dos valores obtidos da estatística Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 100 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 2.*

Estatística	Beta		Normal	
	a	b	Média	Desvio Padrão
Afinidade	225.71909	3.07411	0.986554	0.007323

B.2.4 Amostra com o número esperado de pontos de 500 observações

Tabela B.36: *Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição das estatísticas L_1 , Hellinger, DQI, Kullback-Leibler e Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações, segue uma distribuição Normal - Estudo de Simulação 2.*

Estatísticas	Valor do teste	p-valor
L1	0.082	0.00693
Hellinger	0.036	0.00793
DQI	0.086	0.04954
Kullback-Leibler	0.89	0.00973
Afinidade	0.1	0.01347

Tabela B.37: *Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se as distribuições das estatísticas L_1 , Hellinger, DQI, Kullback-Leibler, seguem uma distribuição Gama, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações - Estudo de Simulação 2.*

Estatísticas	Valor do teste	p-valor
L1	0.012	0.72524
Hellinger	0.008	0.34985
DQI	0.062	0.29173
Kullback-Leibler	0.041	0.52314

Tabela B.38: *Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição da estatística Afinidade segue uma distribuição Beta, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações - Estudo de Simulação 2.*

Estatística	Valor do teste	p-valor
Afinidade	0.325	0.68146

Tabela B.39: *Parâmetros das distribuições Gama e Normal estimados a partir dos valores obtidos das estatísticas L_1 , Hellinger, DQI e Kulback-Leibler, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 2.*

Estatística	Gama		Normal	
	Forma	Escala	Média	Desvio Padrão
L1	91.96	0.00184	0.16944	0.01765
Hellinger	18.72	0.00053	0.009925	0.002196
DQI	23.74	4.2526e-06	0.000101	2.013e-05
Kullback-Leibler	22.75	0.00148	0.033704	0.006776

Tabela B.40: *Parâmetros das distribuições Beta e Normal estimados a partir dos valores obtidos da estatística Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 2.*

Estatística	Beta		Normal	
	a	b	Média	Desvio Padrão
Afinidade	545.22863	73.58268	0.9920151	0.004392

B.3 Apresentação dos resultados do Estudo de Simulação 3

B.3.1 Amostra com o número esperado de pontos de 15 observações

Tabela B.41: *Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição das estatísticas L_1 , Hellinger, DQI, Kullback-Leibler e Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 15 observações, segue uma distribuição Normal - Estudo de Simulação 3.*

Estatísticas	Valor do teste	p-valor
L1	0.105	0.00128
Hellinger	0.18	8.46756e-10
DQI	0.146	4.70239e-05
Kullback-Leibler	0.144	6.28441e-05
Afinidade	0.012	6.54514e-04

Tabela B.42: *Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se as distribuições das estatísticas L_1 , Hellinger, DQI, Kullback-Leibler, seguem uma distribuição Gama, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 15 observações - Estudo de Simulação 3.*

Estatísticas	Valor do teste	p-valor
L1	0.027	0.10634
Hellinger	0.037	0.0795
DQI	0.078	0.08167
Kullback-Leibler	0.46	0.59786

Tabela B.43: *Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição da estatística Afinidade segue uma distribuição Beta, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 15 observações - Estudo de Simulação 3.*

Estatística	Valor do teste	p-valor
Afinidade	0.577	0.86143

Tabela B.44: *Parâmetros das distribuições Gama e Normal estimados a partir dos valores obtidos das estatísticas L_1 , Hellinger, DQI e Kulback-Leibler, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 15 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 3.*

Estatística	Gama		Normal	
	Forma	Escala	Média	Desvio Padrão
L1	3.952	0.23463	0.9273	0.4312
Hellinger	1.368	0.17105	0.234	0.1914
DQI	1.1484	4.01284	4.609	4.869
Kullback-Leibler	2.186	0.20424	0.4465	0.3516

Tabela B.45: *Parâmetros das distribuições Beta e Normal estimados a partir dos valores obtidos da estatística Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 15 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 3.*

Estatística	Beta		Normal	
	a	b	Média	Desvio Padrão
Afinidade	3.37802	1.05634	0.766	0.1914

B.3.2 Amostra com o número esperado de pontos de 30 observações

Tabela B.46: *Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição das estatísticas L_1 , Hellinger, DQI, Kullback-Leibler e Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 30 observações, segue uma distribuição Normal - Estudo de Simulação 3.*

Estatísticas	Valor do teste	p-valor
L1	0.124	0.00091
Hellinger	0.121	0.00011
DQI	0.15	2.60145e-05
Kullback-Leibler	0.056	1.73221e-07
Afinidade	0.062	0.02591

Tabela B.47: *Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se as distribuições das estatísticas L_1 , Hellinger, DQI, Kullback-Leibler, seguem uma distribuição Gama, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 30 observações - Estudo de Simulação 3.*

Estatísticas	Valor do teste	p-valor
L1	0.103	0.81472
Hellinger	0.082	0.50849
DQI	0.062	0.15208
Kullback-Leibler	0.042	0.17872

Tabela B.48: *Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição da estatística Afinidade segue uma distribuição Beta, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 30 observações - Estudo de Simulação 3.*

Estatística	Valor do teste	p-valor
Afinidade	0.063	0.34321

Tabela B.49: *Parâmetros das distribuições Gama e Normal estimados a partir dos valores obtidos das estatísticas L_1 , Hellinger, DQI e Kulback-Leibler, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 30 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 3.*

Estatística	Gama		Normal	
	Forma	Escala	Média	Desvio Padrão
L1	12.99	0.05924	0.7697	0.2132
Hellinger	4.297	0.0334	0.14354	0.07293
DQI	3.594	0.35461	1.2746	0.7874
Kullback-Leibler	4.152	0.11047	0.4587	0.2383

Tabela B.50: *Parâmetros das distribuições Beta e Normal estimados a partir dos valores obtidos da estatística Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 30 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 3.*

Estatística	Beta		Normal	
	a	b	Média	Desvio Padrão
Afinidade	21.47203	3.61444	0.85646	0.07293

B.3.3 Amostra com o número esperado de pontos de 100 observações

Tabela B.51: *Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição das estatísticas L_1 , Hellinger, DQI, Kullback-Leibler e Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 100 observações, segue uma distribuição Normal - Estudo de Simulação 3.*

Estatísticas	Valor do teste	p-valor
L1	0.082	0.0226
Hellinger	0.168	1.48684e-06
DQI	0.184	8.89801e-08
Kullback-Leibler	0.18	1.84272e-07
Afinidade	0.174	5.32942e-07

Tabela B.52: *Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se as distribuições das estatísticas L_1 , Hellinger, DQI, Kullback-Leibler, seguem uma distribuição Gama, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 100 observações - Estudo de Simulação 3.*

Estatísticas	Valor do teste	p-valor
L1	0.032	0.96
Hellinger	0.088	0.14163
DQI	0.058	0.36961
Kullback-Leibler	0.04	0.81862

Tabela B.53: *Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição da estatística Afinidade segue uma distribuição Beta, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 100 observações - Estudo de Simulação 3.*

Estatística	Valor do teste	p-valor
Afinidade	0.054	0.45954

Tabela B.54: *Parâmetros das distribuições Gama e Normal estimados a partir dos valores obtidos das estatísticas L_1 , Hellinger, DQI e Kulback-Leibler, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 100 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 3.*

Estatística	Gama		Normal	
	Forma	Escala	Média	Desvio Padrão
L1	3.559	0.03441	0.12246	0.06588
Hellinger	1.196	0.00592	0.007087	0.007146
DQI	1.262	0.02272	0.02867	0.02844
Kullback-Leibler	1.296	0.01794	0.02325	0.02216

Tabela B.55: *Parâmetros das distribuições Beta e Normal estimados a partir dos valores obtidos da estatística Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 100 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 3.*

Estatística	Beta		Normal	
	a	b	Média	Desvio Padrão
Afinidade	81.89226	1.17933	0.98583	0.01429

B.3.4 Amostra com o número esperado de pontos de 500 observações

Tabela B.56: *Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição das estatísticas L_1 , Hellinger, DQI, Kullback-Leibler e Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações, segue uma distribuição Normal - Estudo de Simulação 3.*

Estatísticas	Valor do teste	p-valor
L1	0.06	0.00329
Hellinger	0.126	0.00071
DQI	0.08	0.08151
Kullback-Leibler	0.108	0.00586
Afinidade	0.115	0.00029

Tabela B.57: *Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se as distribuições das estatísticas L_1 , Hellinger, DQI, Kullback-Leibler, seguem uma distribuição Gama, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações - Estudo de Simulação 3.*

Estatísticas	Valor do teste	p-valor
L1	0.038	0.86317
Hellinger	0.078	0.09546
DQI	0.028	0.31893
Kullback-Leibler	0.07	0.17247

Tabela B.58: *Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição da estatística Afinidade segue uma distribuição Beta, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações - Estudo de Simulação 3.*

Estatística	Valor do teste	p-valor
Afinidade	0.093	0.91947

Tabela B.59: *Parâmetros das distribuições Gama e Normal estimados a partir dos valores obtidos das estatísticas L_1 , Hellinger, DQI e Kulback-Leibler, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 3.*

Estatística	Gama		Normal	
	Forma	Escala	Média	Desvio Padrão
L1	14.56	0.01072	0.15607	0.04189
Hellinger	4.592	0.00214	0.009831	0.004959
DQI	5.645	0.00508	0.02871	0.01259
Kullback-Leibler	5.074	0.00631	0.03204	0.01522

Tabela B.60: *Parâmetros das distribuições Beta e Normal estimados a partir dos valores obtidos da estatística Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 3.*

Estatística	Beta		Normal	
	a	b	Média	Desvio Padrão
Afinidade	223.93258	4.49287	0.9920339	0.009918

B.4 Apresentação dos resultados do Estudo de Simulação 4

B.4.1 Amostra com o número esperado de pontos de 15 observações

Tabela B.61: *Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição das estatísticas L_1 , Hellinger, DQI, Kullback-Leibler e Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 15 observações, segue uma distribuição Normal - Estudo de Simulação 4.*

Estatísticas	Valor do teste	p-valor
L1	0.134	0.00301
Hellinger	0.196	9.10126e-09
DQI	0.174	5.32942e-07
Kullback-Leibler	0.244	2.36033e-13
Afinidade	0.144	6.28441e-05

Tabela B.62: *Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se as distribuições das estatísticas L_1 , Hellinger, DQI, Kullback-Leibler, seguem uma distribuição Gama, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 15 observações - Estudo de Simulação 4.*

Estatísticas	Valor do teste	p-valor
L1	0.083	0.92732
Hellinger	0.042	0.76989
DQI	0.006	0.1813
Kullback-Leibler	0.069	0.268301

Tabela B.63: *Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição da estatística Afinidade segue uma distribuição Beta, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 15 observações - Estudo de Simulação 4.*

Estatística	Valor do teste	p-valor
Afinidade	0.082	0.06932

Tabela B.64: *Parâmetros das distribuições Gama e Normal estimados a partir dos valores obtidos das estatísticas L_1 , Hellinger, DQI e Kulback-Leibler, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 15 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 4.*

Estatística	Gama		Normal	
	Forma	Escala	Média	Desvio Padrão
L1	4.142	0.24881	1.0304	0.4158
Hellinger	1.97	0.13164	0.2593	0.1665
DQI	0.8797	0.08797	0.07738	0.11172
Kullback-Leibler	1.394	0.93721	1.306	1.18

Tabela B.65: *Parâmetros das distribuições Beta e Normal estimados a partir dos valores obtidos da estatística Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 15 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 4.*

Estatística	Beta		Normal	
	a	b	Média	Desvio Padrão
Afinidade	4.32838	1.51836	0.7407	0.1665

B.4.2 Amostra com o número esperado de pontos de 30 observações

Tabela B.66: *Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição das estatísticas L_1 , Hellinger, DQI, Kullback-Leibler e Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 30 observações, segue uma distribuição Normal - Estudo de Simulação 4.*

Estatísticas	Valor do teste	p-valor
L1	0.094	0.00564
Hellinger	0.134	0.00025
DQI	0.13	0.00042
Kullback-Leibler	0.012	0.00352
Afinidade	0.15	2.60145e-05

Tabela B.67: *Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se as distribuições das estatísticas L_1 , Hellinger, DQI, Kullback-Leibler, seguem uma distribuição Gama, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 30 observações - Estudo de Simulação 4.*

Estatísticas	Valor do teste	p-valor
L1	0.056	0.64784
Hellinger	0.049	0.40859
DQI	0.092	0.02904
Kullback-Leibler	0.08	0.082097

Tabela B.68: *Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição da estatística Afinidade segue uma distribuição Beta, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 30 observações - Estudo de Simulação 4.*

Estatística	Valor do teste	p-valor
Afinidade	0.094	0.24117

Tabela B.69: *Parâmetros das distribuições Gama e Normal estimados a partir dos valores obtidos das estatísticas L_1 , Hellinger, DQI e Kulback-Leibler, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 30 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 4.*

Estatística	Gama		Normal	
	Forma	Escala	Média	Desvio Padrão
L1	8.235	0.11695	0.9632	0.3259
Hellinger	2.959	0.07494	0.2218	0.13
DQI	1.717	0.01826	0.03135	0.02528
Kullback-Leibler	2.669	0.34542	0.9219	0.5699

Tabela B.70: *Parâmetros das distribuições Beta e Normal estimados a partir dos valores obtidos da estatística Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 30 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 4.*

Estatística	Beta		Normal	
	a	b	Média	Desvio Padrão
Afinidade	7.93104	2.28032	0.7782	0.13

B.4.3 Amostra com o número esperado de pontos de 100 observações

Tabela B.71: *Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição das estatísticas L_1 , Hellinger, DQI, Kullback-Leibler e Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 100 observações, segue uma distribuição Normal - Estudo de Simulação 4.*

Estatísticas	Valor do teste	p-valor
L1	0.076	0.01135
Hellinger	0.986	0.00001
DQI	0.168	1.48684e-06
Kullback-Leibler	0.132	0.00032
Afinidade	0.162	4.00145e-06

Tabela B.72: *Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se as distribuições das estatísticas L_1 , Hellinger, DQI, Kullback-Leibler, seguem uma distribuição Gama, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 100 observações - Estudo de Simulação 4.*

Estatísticas	Valor do teste	p-valor
L1	0.041	0.62961
Hellinger	0.078	0.09546
DQI	0.084	0.08516
Kullback-Leibler	0.082	0.069328

Tabela B.73: *Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição da estatística Afinidade segue uma distribuição Beta, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 100 observações - Estudo de Simulação 4.*

Estatística	Valor do teste	p-valor
Afinidade	0.096	0.19943

Tabela B.74: *Parâmetros das distribuições Gama e Normal estimados a partir dos valores obtidos das estatísticas L_1 , Hellinger, DQI e Kulback-Leibler, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 100 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 4.*

Estatística	Gama		Normal	
	Forma	Escala	Média	Desvio Padrão
L1	13.84	0.00813	0.11261	0.02948
Hellinger	3.473	0.00118	0.004122	0.002362
DQI	3.561	7.13835e-05	0.0002542	0.0001338
Kullback-Leibler	3.964	0.00374	0.01485	0.00769

Tabela B.75: *Parâmetros das distribuições Beta e Normal estimados a partir dos valores obtidos da estatística Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 100 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 4.*

Estatística	Beta		Normal	
	a	b	Média	Desvio Padrão
Afinidade	97.73308	3.22382	0.996811	0.01936

B.4.4 Amostra com o número esperado de pontos de 500 observações

Tabela B.76: *Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição das estatísticas L_1 , Hellinger, DQI, Kullback-Leibler e Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações, segue uma distribuição Normal - Estudo de Simulação 4.*

Estatísticas	Valor do teste	p-valor
L1	0.18	1.84272e-07
Hellinger	0.166	2.07646e-06
DQI	0.158	7.58868e-06
Kullback-Leibler	0.16	5.52154e-06
Afinidade	0.194	1.34424e-08

Tabela B.77: *Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se as distribuições das estatísticas L_1 , Hellinger, DQI, Kullback-Leibler, seguem uma distribuição Gama, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações - Estudo de Simulação 4.*

Estatísticas	Valor do teste	p-valor
L1	0.018	0.091615674122097
Hellinger	0.011	0.638224
DQI	0.016	0.97682
Kullback-Leibler	0.052	0.94583

Tabela B.78: *Teste de Kolmogorov-Smirnov usado para testar se a distribuição da estatística Afinidade segue uma distribuição Beta, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações - Estudo de Simulação 4.*

Estatística	Valor do teste	p-valor
Afinidade	0.062	0.29173

Tabela B.79: *Parâmetros das distribuições Gama e Normal estimados a partir dos valores obtidos das estatísticas L_1 , Hellinger, DQI e Kulback-Leibler, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 4.*

Estatística	Gama		Normal	
	Forma	Escala	Média	Desvio Padrão
L1	17.52	0.013	0.22783	0.05707
Hellinger	6.548	0.00269	0.017656	0.007833
DQI	4.49	0.00013	0.0006277	0.0003355
Kullback-Leibler	8.392	0.00724	0.06077	0.02309

Tabela B.80: *Parâmetros das distribuições Beta e Normal estimados a partir dos valores obtidos da estatística Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações sob H_0 - Estudo de Simulação 4.*

Estatística	Beta		Normal	
	a	b	Média	Desvio Padrão
Afinidade	170.4437	6.24571	0.996469	0.01567

Apêndice C

Estatísticas sumárias das estatísticas de teste, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações.

Tabela C.1: *Estatísticas sumárias da estatística L_1 , considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações - Estudo de Simulação 1.*

Métodos	Min	1º Quartil	Mediana	Média	3º Quartil	Máximo
AIC	0.1436	0.4748	0.6504	0.7032	0.8999	1.606
BIC	0.1574	0.3881	0.5145	0.5623	0.6924	1.366
LVNP ¹	0.05597	0.09787	0.1074	0.1072	0.1168	0.1607
H-splines	0.05964	0.07618	0.08141	0.09392	0.10643	0.162

¹LVNP: Log-verossimilhança não penalizada.

Tabela C.2: Estatísticas sumárias da estatística *DQI*, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações - Estudo de Simulação 1.

Métodos	Min	1º Quartil	Mediana	Média	3º Quartil	Máximo
AIC	0.2326	2.123	4.083	5.479	7.426	34
BIC	0.6255	3.857	6.794	9.729	12.37	91.26
LVNP ¹	1.875e-05	4.8e-05	5.802e-05	5.991e-05	6.956e-05	0.0001253
H-splines	8.661e-06	0.00115	0.001592	0.00186	0.001841	0.00412

¹LVNP: Log-verossimilhança não penalizada.

Tabela C.3: Estatísticas sumárias da estatística *Hellinger*, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações - Estudo de Simulação 1.

Métodos	Min	1º Quartil	Mediana	Média	3º Quartil	Máximo
AIC	0.07504	0.1428	0.2021	0.2161	0.27	0.4665
BIC	0.0506	0.1256	0.1579	0.1764	0.2181	0.46
LVNP ¹	0.009546	0.003695	0.004845	0.004942	0.00617	0.009811
H-splines	0.001681	0.00396	0.005154	0.005723	0.007878	0.01042

¹LVNP: Log-verossimilhança não penalizada.

Tabela C.4: Estatísticas sumárias da estatística *Kullback-Leibler*, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações - Estudo de Simulação 1.

Métodos	Min	1º Quartil	Mediana	Média	3º Quartil	Máximo
AIC	0.01857	0.178	0.3467	Inf	0.7122	Inf
BIC	0.02044	0.1214	0.2016	Inf	0.4001	Inf
LVNP ¹	0.003676	0.01316	0.01681	0.01685	0.02068	0.03189
H-splines	0.004669	0.01467	0.01711	0.01952	0.02306	0.03502

¹LVNP: Log-verossimilhança não penalizada.

Tabela C.5: Estatísticas sumárias da estatística *Afinidade*, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações - Estudo de Simulação 1.

Métodos	Min	1º Quartil	Mediana	Média	3º Quartil	Máximo
AIC	0.5335	0.73	0.7979	0.7839	0.8572	0.925
BIC	0.54	0.7819	0.8421	0.8236	0.8744	0.9494
LVNP ¹	0.9804	0.9877	0.9903	0.9901	0.9926	0.9981
H-splines	0.9929	0.99722	0.99877	0.99866	0.9988	0.9991

¹LVNP: Log-verossimilhança não penalizada.

Tabela C.6: *Estatísticas sumárias da estatística L_1 , considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações - Estudo de Simulação 2.*

Métodos	Min	1º Quartil	Mediana	Média	3º Quartil	Máximo
AIC	1.4473	1.7276	1.8056	1.7997	1.8766	2.236
BIC	1.1357	1.4759	1.6103	1.6456	1.7943	2.476
LVNP ¹	0.3884	0.5768	0.6283	0.6252	0.6726	0.836
H-splines	0.408	0.5317	0.6356	0.6358	0.6508	0.9362

¹LVNP: Log-verossimilhança não penalizada.

Tabela C.7: *Estatísticas sumárias da estatística DQI , considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações - Estudo de Simulação 2.*

Métodos	Min	1º Quartil	Mediana	Média	3º Quartil	Máximo
AIC	7.867	21.62	29.19	31.91	38.69	180.9
BIC	4.751	31.06	48.19	63.94	77.83	266.9
LVNP ¹	0.0001652	0.003012	0.003414	0.003489	0.003922	0.026339
H-splines	0.0008123	0.001038	0.001093	0.001097	0.001155	0.02141

¹LVNP: Log-verossimilhança não penalizada.

Tabela C.8: *Estatísticas sumárias da estatística $Hellinger$, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações - Estudo de Simulação 2.*

Métodos	Min	1º Quartil	Mediana	Média	3º Quartil	Máximo
AIC	0.1459	0.2527	0.2726	0.2737	0.2955	0.3629
BIC	0.0546	0.1562	0.1972	0.208	0.2465	0.5538
LVNP ¹	0.0005527	0.0001281	0.0001586	0.0001611	0.0001899	0.003019
H-splines	0.00001	0.00053	0.00055	0.00059	0.00079	0.00482

¹LVNP: Log-verossimilhança não penalizada.

Tabela C.9: *Estatísticas sumárias da estatística Kullback-Leibler, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações - Estudo de Simulação 2.*

Métodos	Min	1º Quartil	Mediana	Média	3º Quartil	Máximo
AIC	0.1836	0.3948	0.4688	0.469	0.5435	0.9216
BIC	0.02861	0.189	0.2858	0.286	0.4534	0.9812
LVNP ¹	0.002119	0.004735	0.005751	0.00584	0.006794	0.01056
H-splines	0.001	0.01116	0.02271	0.02298	0.02733	0.15302

¹LVNP: Log-verossimilhança não penalizada.

Tabela C.10: *Estatísticas sumárias da estatística Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações - Estudo de Simulação 2.*

Métodos	Min	1º Quartil	Mediana	Média	3º Quartil	Máximo
AIC	0.6371	0.7045	0.7274	0.7263	0.7473	0.8541
BIC	0.4462	0.7535	0.8028	0.792	0.8438	0.9454
LVNP ¹	0.994	0.9962	0.9968	0.9978	0.9984	0.9999
H-splines	0.9922	0.9948	0.9959	0.9959	0.9969	0.9989

¹LVNP: Log-verossimilhança não penalizada.

Tabela C.11: *Estatísticas sumárias da estatística L_1 , considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações - Estudo de Simulação 3.*

Métodos	Min	1º Quartil	Mediana	Média	3º Quartil	Máximo
AIC	0.284	0.8429	1.295	1.238	1.644	1.991
BIC	0.3326	0.921	1.372	1.264	1.597	1.935
LVNP ¹	0.06688	0.1293	0.1562	0.1612	0.1894	0.3605
H-splines	0.04983	0.1074	0.1508	0.1656	0.1813	0.4019

¹LVNP: Log-verossimilhança não penalizada.

Tabela C.12: *Estatísticas sumárias da estatística DQI , considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações - Estudo de Simulação 3.*

Métodos	Min	1º Quartil	Mediana	Média	3º Quartil	Máximo
AIC	1.60	1.777	5.037	6.835	10.050	30.510
BIC	3.87	5.690	15.800	22.050	31.900	12.3400
LVNP ¹	0.006635	0.001961	0.002666	0.002882	0.003654	0.09232
H-splines	0.006685	0.001496	0.002636	0.002871	0.003842	0.09237

¹LVNP: Log-verossimilhança não penalizada.

Tabela C.13: *Estatísticas sumárias da estatística $Hellinger$, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações - Estudo de Simulação 3.*

Métodos	Min	1º Quartil	Mediana	Média	3º Quartil	Máximo
AIC	0.08779	0.2927	0.4042	0.4036	0.5215	0.6723
BIC	0.06527	0.2855	0.4202	0.3923	0.4953	0.6764
LVNP ¹	0.002017	0.00693	0.009866	0.01095	0.01412	0.0431
H-splines	0.002223	0.006466	0.009878	0.01098	0.01422	0.0401

¹LVNP: Log-verossimilhança não penalizada.

Tabela C.14: *Estatísticas sumárias da estatística Kullback-Leibler, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações - Estudo de Simulação 3.*

Métodos	Min	1º Quartil	Mediana	Média	3º Quartil	Máximo
AIC	0.08141	0.8346	1.77	2.073	3.037	9.065
BIC	0.06967	0.8017	1.595	1.676	2.35	5.103
LVNP ¹	0.00709	0.02294	0.0319	0.035	0.04438	0.1283
H-splines	0.007839	0.02161	0.02902	0.03204	0.03949	0.1216

¹LVNP: Log-verossimilhança não penalizada.

Tabela C.15: *Estatísticas sumárias da estatística Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações - Estudo de Simulação 3.*

Métodos	Min	1º Quartil	Mediana	Média	3º Quartil	Máximo
AIC	0.3277	0.4785	0.5958	0.5964	0.7073	0.9122
BIC	0.3236	0.5047	0.5798	0.6077	0.7145	0.9347
LVNP ¹	0.99138	0.99718	0.99803	0.99781	0.99861	0.9996
H-splines	0.9863	0.99456	0.99544	0.99403	0.99673	0.9981

¹LVNP: Log-verossimilhança não penalizada.

Tabela C.16: *Estatísticas sumárias da estatística L_1 , considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações - Estudo de Simulação 4.*

Métodos	Min	1º Quartil	Mediana	Média	3º Quartil	Máximo
AIC	1.135	1.4126	1.583	1.6419	1.8152	2.759
BIC	1.01423	1.07061	1.074	1.077	2.506	2.942
LVNP ¹	0.1369	0.1933	0.2246	0.2322	0.2619	0.4092
H-splines	0.1018	0.1897	0.2237	0.2378	0.2669	0.4518

¹LVNP: Log-verossimilhança não penalizada.

Tabela C.17: *Estatísticas sumárias da estatística DQI , considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações - Estudo de Simulação 4.*

Métodos	Min	1º Quartil	Mediana	Média	3º Quartil	Máximo
AIC	3.149	3.797	7.783	12.29	16.31	76.23
BIC	2.262	3.755	10.61	16.71	24.94	110.80
LVNP ¹	0.0002062	0.0004024	0.0005203	0.000609	0.0007188	0.002262
H-splines	0.0001765	0.0004036	0.0005039	0.0006277	0.0007524	0.002037

¹LVNP: Log-verossimilhança não penalizada.

Tabela C.18: *Estatísticas sumárias da estatística $Hellinger$, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações - Estudo de Simulação 4.*

Métodos	Min	1º Quartil	Mediana	Média	3º Quartil	Máximo
AIC	0.06531	0.1433	0.2002	0.2135	0.2631	0.5813
BIC	0.05225	0.2166	0.3321	0.3367	0.4575	0.6593
LVNP ¹	0.000815	0.001473	0.00179	0.001987	0.002318	0.005689
H-splines	0.000631	0.001269	0.001545	0.001766	0.001976	0.005042

¹LVNP: Log-verossimilhança não penalizada.

Tabela C.19: *Estatísticas sumárias da estatística Kullback-Leibler, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações - Estudo de Simulação 4.*

Métodos	Min	1º Quartil	Mediana	Média	3º Quartil	Máximo
AIC	0.02501	0.1602	0.2973	0.4775	0.5913	2.655
BIC	0.02127	0.3942	0.9203	1.167	1.735	5.262
LVNP ¹	0.02915	0.0505	0.06069	0.06539	0.07538	0.1626
H-splines	0.02007	0.04561	0.05464	0.06077	0.07497	0.1633

¹LVNP: Log-verossimilhança não penalizada.

Tabela C.20: *Estatísticas sumárias da estatística Afinidade, considerando a amostra com o número esperado de pontos de 500 observações - Estudo de Simulação 4.*

Métodos	Min	1º Quartil	Mediana	Média	3º Quartil	Máximo
AIC	0.4187	0.7369	0.7998	0.7865	0.8567	0.9347
BIC	0.3407	0.5425	0.6679	0.6633	0.7834	0.9477
LVNP ¹	0.99431	0.99768	0.99821	0.99801	0.99853	0.99918
H-splines	0.9989	0.99502	0.99646	0.99623	0.99773	99998

¹LVNP: Log-verossimilhança não penalizada.

Apêndice D

Programas utilizados no Estudo de Caso.

```
library(splines)
library(mgcv)
library(fda)
# Funções para integração #
```

As funções de integração MC.integrate.1D, MC.integrate.2D, MC.integrate.3D e MC.integrate.4D foram retidas e adaptadas de Kuonen, D. (2001).

```
MC.integrate.4D<-function(fct,low=c(a,b,c,d),upp=c(e,f,g,h),npoints=n,exact.value=NULL)
{
points.t<-runif(n=npoints,min=low[1],max=upp[1])
points.x<-runif(n=npoints,min=low[2],max=upp[2])
points.y<-runif(n=npoints,min=low[3],max=upp[3])
points.z<-runif(n=npoints,min=low[4],max=upp[4])
```

```

approx.tmp<-fct(points.t,points.x,points.y,points.z)
V.tmp<-diff(c(low[1],upp[1]))*diff(c(low[2],upp[2]))*diff(c(low[3],upp[3]))*
diff(c(low[4],upp[4]))
approx<-mean(approx.tmp)*V.tmp
Varapprox<-var(approx.tmp)*V.tmp
if(!is.null(exact.value)){cat("To achiev an error of 0.0001 you need at least",
"floor(varapprox^2/0.0001^2)),points.\n")}
list(approx=approx)
}
MC.integrate.3D<-function(fct,low=c(a,b,c),upp=c(d,e,f),npoints=n,exact.value=NULL)
{
points.t<-runif(n=npoints,min=low[1],max=upp[1])
points.x<-runif(n=npoints,min=low[2],max=upp[2])
points.y<-runif(n=npoints,min=low[3],max=upp[3])
approx.tmp<-fct(points.t,points.x,points.y)
V.tmp<-diff(c(low[1],upp[1]))*diff(c(low[2],upp[2]))*diff(c(low[3],upp[3]))
approx<-mean(approx.tmp)*V.tmp
Varapprox<-var(approx.tmp)*V.tmp
if(!is.null(exact.value)){cat("To achiev an error of 0.0001 you need at least",
"floor(varapprox^2/0.0001^2)),points.\n")}
list(approx=approx)
}
MC.integrate.2D<-function(fct,low=c(a,b),upp=c(d,e),npoints=n,exact.value=NULL)
{
points.x<-runif(n=npoints,min=low[1],max=upp[1])
points.y<-runif(n=npoints,min=low[2],max=upp[2])

```

```

approx.tmp<-fct(points.x,points.y)
V.tmp<-diff(c(low[1],upp[1]))*diff(c(low[2],upp[2]))
approx<-mean(approx.tmp)*V.tmp
Varapprox<-var(approx.tmp)*V.tmp
if(!is.null(exact.value)){cat("To achiev an error of 0.0001 you need at least",
"floor(varapprox^2/0.0001^2)),points.\n")}
list(approx=approx)
}
MC.integrate.1D<-function(fct,low=a,upp=d,npoints=n,exact.value=NULL)
{
points<-runif(n=npoints,min=low,max=upp)
approx.tmp<-apply(as.matrix(points),2,fct)
V.tmp<-diff(c(low,upp))
approx<-mean(approx.tmp)*V.tmp
Varapprox<-var(approx.tmp)*V.tmp
if(!is.null(exact.value)){cat("To achiev an error of 0.0001 you need at least",
"floor(varapprox^2/0.0001^2)),points.\n")}
list(approx=approx)
}

# Funções para calcular os B-splines#

bsnorm1 = function(t, tl, tr, ndt, bdeg1 ){
t<-sort(t)
dt = abs(tr-tl)/(ndt+1)
knots1 <- sort(c(rep(tl,bdeg1),seq(tl,tr,by=dt),rep(tr,bdeg1)))

```

```

t = as.single(t)
B = spline.des(knots1,t,ord = bdeg1 + 1,(0*t),outer.ok=TRUE)$design
B1 = spline.des(knots1,t, ord = bdeg1 +1,((0*t) + 1),TRUE)$design
B2 = spline.des(knots1,t, ord = bdeg1 +1,((0*t) + 2),TRUE)$design
list(B = B, knots1 = knots1, B2 = B2,B1=B1)
}

```

```

bsnorm2 <- function(x, xl, xr, ndx, bdeg2){
x<-sort(x)
dx = abs(xr-xl)/(ndx+1)
knots2 <- sort(c(rep(xl,bdeg2),seq(xl,xr,by=dx),rep(xr,bdeg2)))
x <- as.single(x)
M <- spline.des(knots2, x, bdeg2+1,(0*x), outer.ok=TRUE)$design
M1 <- spline.des(knots2,x, bdeg2+1,((0*x) + 1),outer.ok=TRUE)$design
M2 <- spline.des(knots2,x, bdeg2+1,((0*x) + 2),outer.ok=TRUE)$design
list(M = M, knots2 = knots2, M2 = M2,M1=M1)
}

```

```

bsnorm3 <- function(y, yl, yr, ndy, bdeg3){
y<-sort(y)
dy <- abs(yr-yl)/(ndy+1)
knots3 <- sort(c(rep(yl,bdeg3),seq(yl,yr,by=dy),rep(yr,bdeg3)))
y <- as.single(y)
N <- spline.des(knots3, y, bdeg3 +1,0*y,outer.ok=TRUE)$design
N1 <- spline.des(knots3,y, bdeg3 +1,(0*y) + 1,TRUE)$design
N2 <- spline.des(knots3,y, bdeg3 +1,(0*y) + 2,TRUE)$design

```

```
list(N = N, knots3 = knots3, N1=N1, N2 = N2)
}
```

```
bsnorm4 <- function(z, zl, zr, ndz, bdeg4){
  z<-sort(z)
  dz <- abs(zr-zl)/(ndz+1)
  knots4 <- sort(c(rep(zl,bdeg4),seq(zl,zr,by=dz),rep(zr,bdeg4)))
  z <- as.single(z)
  O <- spline.des(knots4, z, bdeg4 +1,0*z,outer.ok=TRUE)$design
  O1 <- spline.des(knots4,z, bdeg4 +1,(0*z) +X1,TRUE)$design
  O2 <- spline.des(knots4,z, bdeg4 +1,(0*z) + 2,TRUE)$design
  list(O= O, knots4 = knots4,O1=O1, O2 = O2)
}
```

Função para calcular o produto tensorial entre as bases M e N#

```
PROUTOTENSORIAL = function(M,N){
  X<-list(M,N)
  P<-tensor.prod.model.matrix(X)
  list(P=P)
}
```

Funções para para montar as matrizes#

```
MATRIZNOVA<-function(k1,k2,k3,k4){
  diagonal1<-rep(1,k1)
```

```

diagonal2<-rep(1,(k2*k3))
diagonal3<-rep(1,k4)
A1<-cbind( diag(diagonal1),matrix(0,k1,(k2*k3)),matrix(0,k1,k4))
A2<-cbind(matrix(0,(k2*k3),k1),diag(diagonal2),matrix(0,(k2*k3),k4))
A3<-cbind(matrix(0,k4,k1),matrix(0,k4,(k2*k3)),diag(diagonal3))
list(A1=A1,A2=A2,A3=A3)
}

# Método: log-verossimilhança não penalizada, AIC e BIC#

# Função para calcular o chute inicial#

CHUTEINICIALCASO<- function(ndt,ndx,ndy,ndz,t,x,y,z){
n=length(y)
tl=min(t)
tr=max(t)
xl=min(x)
xr= max(x)
yl=min(y)
yr=max(y)
zl=min(z)
zr=max(z)
nnn1=(ndt +4)
nnn2=(ndx +4)
nnn3=(ndy +4)
nnn4=(ndz +4)

```

```

bdeg1= 3
bdeg2= 3
bdeg3= 3
bdeg4= 3
k1<-(ndt+4)
k2<-(ndx+4)
k3<-(ndy+4)
k4<-(ndz+4)
n1=length(t)
n2=length(x)
n3=length(y)
n4=length(z)
B<-bsnorm1(t, tl, tr, ndt, bdeg1 )$B
M<-bsnorm2(x, xl, xr, ndx, bdeg2 )$M
N<-bsnorm3(y, yl, yr, ndy, bdeg3)$N
O<-bsnorm4(z, zl, zr, ndz, bdeg4)$O
n1=length(t)
n2=length(x)
n3=length(y)
n4=length(z)
n=n1
niter<-50
lambda4 <-matrix(1,n4,k4)
c4=matrix((1/k4),1,k4)
c4s=c4
for (iter in 1:niter){

```

```

for (r4 in 1:k4) {
lambda4[,r4] = c4[r4]*O[,r4]
lambda4= lambda4/apply(lambda4,1,sum)
c4 = apply(lambda4,2,mean)
c4s=rbind(c4s,c4)
}
}
mlec4=c4s[niter+1,]
lambda1 <-matrix(1,n1,k1)
c1=matrix((1/k1),1,k1)
c1s=c1
for (iter in 1:niter)
{
for (r1 in 1:k1){
lambda1[,r1] = c1[r1]*B[,r1]
lambda1= lambda1/apply(lambda1,1,sum)
c1 = apply(lambda1,2,mean)
c1s=rbind(c1s,c1)
}
}
mlec1=c1s[niter+1,]
BB = NULL
for (i in 1:n)
BB = rbind(BB,matrix(matrix(M[i,],k2,1)%*%matrix(N[i,],1,k3),1,(k2*k3)))
alpha = rep(1/(k2*k3),(k2*k3))
tau = matrix(0,n,(k2*k3))

```



```

alphas = NULL
for (iter in 1:niter){
  for (j in 1:(k2*k3))
    tau[,j] = alpha[j]*BB[,j]
  tau = tau/apply(tau,1,sum)
  alpha = apply(tau,2,mean)
  alphas = rbind(alphas,alpha)
}
mlealpha = alphas[niter,]
mlec1 <- mlec1
mlec2 <- mlealpha
mlec4<-mlec4
mlec1<-mlec1 + 0.001
mlec2<-mlec2 + 0.001
mlec4<-mlec4 + 0.001
CC<-c(mlec1,mlec2,mlec4)
CC<-matrix(CC,((nnn2*nnn3)+nnn1+nnn4),1)
list(CC=CC)
}
#Início da função chute inicial 2 #
CHUTEINICIALCASO2 <- function(ndt,ndx,ndy,ndz,t,x,y,z){
  k1<-(ndt+4)
  k2<-(ndx+4)
  k3<-(ndy+4)
  k4<-(ndz+4)
  allpha1<-(1/ndt)^(4)

```

```

allpha2<-(1/(ndy*ndx))^(4)
allpha3<-(1/ndz)^(4)
allpha<-c(allpha1,allpha2,allpha3)
list(allpha=allpha)
}
#Fim da função chute inicial 2 #

#Função para recupera lambda23 estimado#
funclambdarecupera23<-function(t,x,y,mlec2,ndt,ndx,ndy){
n=length(y)
tt<-seq(min(t),max(t),length=n)
xx<-seq(min(x),max(x),length=n)
yy<-seq(min(y),max(y),length=n)
tl=min(tt)
tr=max(tt) xl=min(xx)
xr= max(xx)
yl=min(yy)
yr= max(yy)
bdeg1= 3
bdeg2= 3
bdeg3= 3
B11<-bsnorm1(tt, tl, tr, ndt, bdeg1 )$B
M11<-bsnorm2(xx, xl, xr, ndx, bdeg2 )$M
N11<-bsnorm3(yy, yl, yr, ndy, bdeg3)$N
P11<-PROUTOTENSORIAL(M11,N11)$P
k2<-dim(M11)[2]

```

```

k3<-dim(N11)[2]
lambda23estimada=matrix(0,n,n)
for(i in 1:n){
  for(j in 1:n){
    lambda23estimada[i,j]=sum((mlec2
*matrix(matrix(M11[i,],k2,1)%*%matrix(N11[j,],1,k3),1,(k2*k3)))
  }
}
list(lambda23estimada=lambda23estimada)
}

# Início da função métrica: log-verossimilhança não penalizada, AIC e BIC#

metrica<-function(ndt,ndx,ndy,ndz,t,x,y,z){
  ndx=ndx
  ndy=ndx
  ndt=ndt
  ndz=ndz
  tl=min(t)
  tr=max(t)
  xl=min(x)
  xr=max(x)
  yl=min(y)
  yr=max(y)
  zl=min(z)
  zr=max(z)

```

```

n1=length(t)
n2=length(x)
n3=length(y)
n4=length(z)
ntt<-length(t)
nxx<-length(x)
nyy<-length(y)
nzz<-length(z)
n<-length(t)
bdeg1= 3
bdeg2= 3
bdeg3= 3
bdeg4= 3
m1=length(t)
m2=length(x)
m3=length(y)
m4=length(z)
B<-bsnorm1(t, tl, tr, ndt, bdeg1 )$B
B2<-bsnorm1(t, tl, tr, ndt, bdeg1)$B2
B1<-bsnorm1(t, tl, tr, ndt, bdeg1)$B1
knots1<-bsnorm1(t, tl, tr, ndt, bdeg1)$knots1
M<-bsnorm2(x, xl, xr, ndx, bdeg2 )$M
M2<-bsnorm2(x, xl, xr, ndx, bdeg2)$M2
M1<-bsnorm2(x, xl, xr, ndx, bdeg2)$M1
knots2<-bsnorm2(x, xl, xr, ndx, bdeg2)$knots2
N<-bsnorm3(y, yl, yr, ndy, bdeg3)$N

```

```

N2<-bsnorm3(y, yl, yr, ndy, bdeg3)$N2
knots3<-bsnorm3(y, yl, yr, ndy, bdeg3)$knots3
O<-bsnorm4(z, zl, zr, ndz, bdeg4)$O
O2<-bsnorm4(z, zl, zr, ndz, bdeg4)$O2
knots4<-bsnorm4(z, zl, zr, ndz, bdeg4)$knots4
k1=dim(B)[2]
k2<-dim(M)[2]
k3<-dim(N)[2]
k4<-dim(O)[2]
tt<-seq(min(t),max(t),length=n)
xx<-seq(min(x),max(x),length=n)
yy<-seq(min(y),max(y),length=n)
zz<-seq(min(z),max(z),length=n)
n11=length(tt)
n22=length(xx)
n33=length(yy)
n44=length(zz)
ndtt= ndt
ndxx= ndx
ndyy= ndy
ndzz= ndz
ttl=min(tt)
ttr=max(tt)
xxl=min(xx)
xxr=max(xx)
yy1=min(yy)

```

```

yyr=max(yy)
zzl=min(zz)
zzr=max(zz)
bdeg11=3
bdeg22= 3
bdeg33= 3
bdeg44= 3
m1=length(tt)
m2=length(xx)
m3=length(yy)
m4=length(zz)
tt<-sort(tt)
xx<-sort(xx)
yy<-sort(yy)
zz<-sort(zz)
m1=length(tt)
m2=length(xx)
m3=length(yy)
m4=length(zz)
B11<-bsnorm1(tt, ttl, ttr, ndtt, bdeg11 )$B M11<-bsnorm2(xx, xxl, xxr, ndxx, bdeg22
)$M
N11<-bsnorm3(yy, yyl, yyr, ndyy, bdeg33 )$N
O11<-bsnorm4(zz, zzl, zzr, ndzz, bdeg44 )$O
B112<-bsnorm1(tt, ttl, ttr, ndtt, bdeg11 )$B2
P11<-PROUTOTENSORIAL(M11,N11)$P
P<-PROUTOTENSORIAL(M,N)$P

```

```

nsample<-length(tt)
fn1<-function(CC,t,x,y,z,P,fscale){
  tl=min(t)
  tr=max(t)
  xl=min(x)
  xr=max(x)
  yl=min(y)
  yr=max(y)
  zl=min(z)
  zr=max(z)
  k1<-(ndt+4)
  k2<-(ndx+4)
  k3<-(ndy+4)
  k4<-(ndz+4)
  A1<-MATRIZNOVA(k1,k2,k3,k4)$A1
  A2<-MATRIZNOVA(k1,k2,k3,k4)$A2
  A3<-MATRIZNOVA(k1,k2,k3,k4)$A3
  B<-bsnorm1(t, tl, tr, ndt, bdeg1)$B
  M<-bsnorm2(x, xl, xr, ndx, bdeg2)$M
  N<-bsnorm3(y, yl, yr, ndy, bdeg3)$N
  O<-bsnorm4(z, zl, zr, ndz, bdeg4)$O
  n1=length(t)
  n2=length(x)
  n3=length(y)
  n=n3
  P<-PROUTOTENSORIAL(M,N)$P

```

```

int1234<-function(t,x,y,z){
exp( ((B%*(A1%*CC))%*(t( P%*(A2%*CC))))%*%
((O%*(A3%*CC))))
}
INT1234<-MC.integrate.4D(int1234,low=c(tl,xl,yl,zl)
,upp=c(tr,xr,yr,zr),npoints=n,exact.value=NULL)
INT1234<-INT1234$approx
likelihood = (apply(matrix(( (B%*(A1%*CC))%*%
(t( P%*(A2%*CC))))%*%((O%*(A3%*CC))) ),n1,1),2,sum)-INT1234)
return(-likelihood)
}
ing<-log(CHUTEINICIALCASO(ndt,ndx,ndy,ndz,t,x,y,z)$CC)
CC<-ing
out1<-nlminb(CC,fn1,t=t,x=x,y=y,z=z,P=P,control=
list(iter.max = 1500,eval.max=5000,step.min=1e-23
,x.tol=1e-15,maxit = 10000),fscale = length(z))
out1$par<-exp(out1$par)
list(out1=out1)
}

```

#Fim da função métrica: log-verossimilhança não penalizada, AIC e BIC#

#Início da Função Afinidade 1 #

```

afinidade1<-function(ndt,ndx,ndy,ndz,t,x,y,z){
tl=min(t)

```



```

tr=max(t)
xl=min(x)
xr= max(x)
yl=min(y)
yr= max(y)
zl=min(z)
zr= max(z)
n=length(y)
bdeg1= 3
bdeg2= 3
bdeg3= 3
bdeg4= 3
n1=length(t)
n2=length(x)
n3=length(y)
n4=length(z)
n=length(y)
ndx=ndy
out1<-metrica(ndt,ndx,ndy,ndz,t,x,y,z)$out1
estimate<-out1$par
#estimate<-out1$estimate
mlec1<-estimate[1:(ndt+4)]
mlec2<-estimate[(ndt+4+1):((ndt+4)+(ndx+4)*(ndy+4))]
mlec3<-estimate[(((ndt+4)+(ndx+4)*(ndy+4))+1):((ndz+4)+
(ndt+4)+(ndx+4)*(ndy+4))]
tt<-seq(min(t),max(t),length=n)

```

```

xx<-seq(min(x),max(x),length=n)
yy<-seq(min(y),max(y),length=n)
zz<-seq(min(z),max(z),length=n)
tt<-sort(tt)
xx<-sort(xx)
yy<-sort(yy)
zz<-sort(zz)
tl=min(tt)
tr=max(tt)
xl=min(xx)
xr= max(xx)
yl=min(yy)
yr= max(yy)
zl=min(zz)
zr=max(zz)
B11<-bsnorm1(tt, tl, tr, ndt, bdeg1 )$B
M11<-bsnorm2(xx, xl, xr, ndx, bdeg2 )$M
N11<-bsnorm3(yy, yl, yr, ndy, bdeg3)$N
O11<-bsnorm4(zz, zl, zr, ndz, bdeg4)$O
lambdachapeu1<-((B11%*%mlec1))
lambdachapeu3<-((O11%*%mlec3))
k2<-dim(M11)[2]
k3<-dim(N11)[2]
lambdachapeu2=matrix(0,n,n)
for(i in 1:n){
for(j in 1:n){

```

```

lambdachapeu2[i,j]=sum((mlec2)*
matrix(matrix(M11[i,],k2,1)%*%matrix(N11[j,],1,k3),1,(k2*k3)))
}
}
g1<-(t(lambdachapeu3))%*%(lambdachapeu2%*%lambdachapeu1)
# Adicionando uma unidade em ndx e ndy#
out2<-metrica(ndt,ndx=(ndx+1),ndy=(ndy+1),ndz,t,x,y,z)$out1
estimate2<-out2$par
#estimate2<-out2$estimate
mlec1<-estimate2[1:(ndt+4)]
mlec2<-estimate2[((ndt+4+1):((ndt+4)+(ndx+1+4)*(ndy+1+4)))]
mlec3<-estimate2[(((ndt+4)+(ndx+4)*(ndy+4))+1):((ndz+4)+
(ndt+4)+(ndx+4)*(ndy+4))]
B22<-bsnorm1(tt, tl, tr, ndt, bdeg1 )$B
M22<-bsnorm2(xx, xl, xr, ndx=(ndx+1), bdeg2 )$M
N22<-bsnorm3(yy, yl, yr, ndy=(ndy+1), bdeg3)$N
O22<-bsnorm4(zz, zl, zr, ndz, bdeg4)$O
lambdachapeu122<-((B22%*%mlec1))
lambdachapeu322<-((O22%*%mlec3))
k22<-dim(M22)[2]
k32<-dim(N22)[2]
lambdachapeu222=matrix(0,n,n)
for(i in 1:n){
for(j in 1:n){
lambdachapeu222[i,j]=sum((mlec2)*
matrix(matrix(M22[i,],k22,1)%*%matrix(N22[j,],1,k32),1,(k22*k32)))

```

```

}
}
f1<-(t(lambdachapeu322))%%((lambdachapeu222)%%(lambdachapeu122))
dif1=(max(tt)-min(tt))/n1
dif2=(max(xx)-min(xx))/n2
dif3=(max(yy)-min(yy))/n3
dif4=(max(zz)-min(zz))/n4
peso=(dif1*dif2*dif3*dif4)
denominadorg1<-sum((g1*g1)*peso)
denominadorf1<-sum((f1*f1)*peso)
tg1<-(g1*g1)/denominadorg1
tf1<-(f1*f1)/denominadorf1
afinit1<-sum(sqrt((tg1)*tf1))*peso
afinit1<-afinit1
RESULTADO<-afinit1
list(RESULTADO=RESULTADO)
} #Fim da Função Afinidade 1 #

#Início da Função Afinidade 2#
afinidade2<-function(ndt,ndx,ndy,ndz,t,x,y,z){
tl=min(t)
tr=max(t)
xl=min(x)
xr= max(x)
yl=min(y)
yr= max(y)

```

```

zl=min(z)
zr= max(z)
n=length(y)
bdeg1= 3
bdeg2= 3
bdeg3= 3
bdeg4= 3
n1=length(t)
n2=length(x)
n3=length(y)
n4=length(z)
n=length(y)
ndx=ndy
out1<-metrica(ndt,ndx,ndy,ndz,t,x,y,z)$out1
estimate<-out1$par
#estimate<-out1$estimate
mlec1<-estimate[1:(ndt+4)]
mlec2<-estimate[(ndt+4+1):((ndt+4)+(ndx+4)*(ndy+4))]
mlec3<-estimate[((ndt+4)+(ndx+4)*(ndy+4))+1]:((ndz+4)+(
(ndt+4)+(ndx+4)*(ndy+4))]
tt<-seq(min(t),max(t),length=n)
xx<-seq(min(x),max(x),length=n)
yy<-seq(min(y),max(y),length=n)
zz<-seq(min(z),max(z),length=n)
tt<-sort(tt)
xx<-sort(xx)

```

```

yy<-sort(yy)
zz<-sort(zz)
tl=min(tt)
tr=max(tt)
xl=min(xx)
xr=max(xx)
yl=min(yy)
yr= max(yy)
zl=min(zz)
zr=max(zz)
B11<-bsnorm1(tt, tl, tr, ndt, bdeg1 )$B
M11<-bsnorm2(xx, xl, xr, ndx, bdeg2 )$M
N11<-bsnorm3(yy, yl, yr, ndy, bdeg3)$N
O11<-bsnorm4(zz, zl, zr, ndz, bdeg4)$O
lambdachapeu1<-((B11%%mlec1))
lambdachapeu3<-((O11%%mlec3))
k2<-dim(M11)[2]
k3<-dim(N11)[2]
lambdachapeu2=matrix(0,n,n)
for(i in 1:n){
for(j in 1:n){
lambdachapeu2[i,j]=sum((mlec2)*
matrix(matrix(M11[i,],k2,1)%%matrix(N11[j,],1,k3),1,(k2*k3)))
}
}
g1<-(t(lambdachapeu3))%%(lambdachapeu2%%lambdachapeu1)

```

```

# Adicionando uma unidade em ndt#
out2<-metrica(ndt=(ndt+1),ndx=ndx,ndy=ndy,ndz,t,x,y,z)$out1
estimate2<-out2$par
#estimate2<-out2$estimate
mlec1<-estimate2[1:(ndt+4+1)]
mlec2<-estimate2[(ndt+4+1+1):((ndt+4+1)+(ndx+4)*(ndy+4))]
mlec3<-estimate[(((ndt+4)+(ndx+4)*(ndy+4))+1):((ndz+4)+(
(ndt+4)+(ndx+4)*(ndy+4)))]
B22<-bsnorm1(tt, tl, tr, ndt=(ndt+1), bdeg1 )$B
M22<-bsnorm2(xx, xl, xr, ndx=ndx, bdeg2 )$M
N22<-bsnorm3(yy, yl, yr, ndy=ndy, bdeg3)$N
O22<-bsnorm4(zz, zl, zr, ndz=ndz, bdeg4)$O
lambdachapeu122<-((B22%%mlec1))
lambdachapeu322<-((O22%%mlec3))
k22<-dim(M22)[2]
k32<-dim(N22)[2]
lambdachapeu222=matrix(0,n,n)
for(i in 1:n){
for(j in 1:n){
lambdachapeu222[i,j]=sum((mlec2)*
matrix(matrix(M22[i,],k22,1)%%matrix(N22[j,],1,k32),1,(k22*k32)))
}
}
f1<-(t(lambdachapeu322))%%(lambdachapeu222)%%(lambdachapeu122)
dif1=(max(tt)-min(tt))/n1
dif2=(max(xx)-min(xx))/n2

```

```

dif3=(max(yy)-min(yy))/n3
dif4=(max(zz)-min(zz))/n4
peso=(dif1*dif2*dif3*dif4)
denominadorg1<-sum((g1*g1)*peso)
denominadorf1<-sum((f1*f1)*peso)
tg1<-(g1*g1)/denominadorg1
tf1<-(f1*f1)/denominadorf1
afinit1<-sum(sqrt((tg1)*tf1))*peso
afinit1<-afinit1
RESULTADO<-afinit1
list(RESULTADO=RESULTADO)
}
#Fim da Função Afinidade 2 #

#Início da Função Afinidade 3#
afinidade3<-function(ndt,ndx,ndy,ndz,t,x,y,z){
tl=min(t)
tr=max(t)
xl=min(x)
xr= max(x)
yl=min(y)
yr= max(y)
zl=min(z)
zr= max(z)
n=length(y)
bdeg1= 3

```



```

bdeg2= 3
bdeg3= 3
bdeg4= 3
n1=length(t)
n2=length(x)
n3=length(y)
n4=length(z)
n=length(y)
ndx=ndy
out1<-metrica(ndt,ndx,ndy,ndz,t,x,y,z)$out1
estimate<-out1$par
#estimate<-out1$estimate
mlec1<-estimate[1:(ndt+4)] mlec2<-estimate[(ndt+4+1):((ndt+4)+(ndx+4)*(ndy+4))]
mlec3<-estimate[(((ndt+4)+(ndx+4)*(ndy+4))+1):((ndz+4)+
(ndt+4)+(ndx+4)*(ndy+4))]
tt<-seq(min(t),max(t),length=n)
xx<-seq(min(x),max(x),length=n)
yy<-seq(min(y),max(y),length=n)
zz<-seq(min(z),max(z),length=n)
tt<-sort(tt)
xx<-sort(xx)
yy<-sort(yy)
zz<-sort(zz)
tl=min(tt)
tr=max(tt)
xl=min(xx)

```

```

xr= max(xx)
yl=min(yy)
yr= max(yy)
zl=min(zz)
zr=max(zz)
B11<-bsnorm1(tt, tl, tr, ndt, bdeg1 )$B
M11<-bsnorm2(xx, xl, xr, ndx, bdeg2 )$M
N11<-bsnorm3(yy, yl, yr, ndy, bdeg3)$N
O11<-bsnorm4(zz, zl, zr, ndz, bdeg4)$O
lambdachapeu1<-((B11%%mlec1))
lambdachapeu3<-((O11%%mlec3))
k2<-dim(M11)[2]
k3<-dim(N11)[2]
lambdachapeu2=matrix(0,n,n)
for(i in 1:n){
  for(j in 1:n){
    lambdachapeu2[i,j]=sum((mlec2)*
      matrix(matrix(M11[i,],k2,1)%*%matrix(N11[j,],1,k3),1,(k2*k3)))
  }
}
g1<-(t(lambdachapeu3))%*%(lambdachapeu2%*%lambdachapeu1)
# Adicionando uma unidade em ndz#
out2<-metrica(ndt=(ndt),ndx=ndx,ndy=ndy,ndz=(ndz+1),t,x,y,z)$out1
estimate2<-out2$par
#estimate2<-out2$estimate
mlec1<-estimate2[1:(ndt+4)]

```

```

mlec2<-estimate2[(ndt+4+1):((ndt+4)+(ndx+4)*(ndy+4))]
mlec3<-estimate2[((ndt+4)+(ndx+4)*(ndy+4))+1):((ndz+4+1)+(
(ndt+4)+(ndx+4)*(ndy+4))]
B22<-bsnorm1(tt, tl, tr, ndt=(ndt), bdeg1 )$B
M22<-bsnorm2(xx, xl, xr, ndx=ndx, bdeg2 )$M
N22<-bsnorm3(yy, yl, yr, ndy=ndy, bdeg3)$N
O22<-bsnorm4(zz, zl, zr, ndz=(ndz+1), bdeg4)$O
lambdachapeu122<-((B22%%mlec1))
lambdachapeu322<-((O22%%mlec3))
k22<-dim(M22)[2]
k32<-dim(N22)[2]
lambdachapeu222=matrix(0,n,n)
for(i in 1:n){
for(j in 1:n){
lambdachapeu222[i,j]=sum((mlec2)*
matrix(matrix(M22[i,],k22,1)%%matrix(N22[j,],1,k32),1,(k22*k32)))
}
}
f1<-(t(lambdachapeu322))%%(lambdachapeu222)%%(lambdachapeu122)
dif1=(max(tt)-min(tt))/n1
dif2=(max(xx)-min(xx))/n2
dif3=(max(yy)-min(yy))/n3
dif4=(max(zz)-min(zz))/n4
peso=(dif1*dif2*dif3*dif4)
denominadorg1<-sum((g1*g1)*peso)
denominadorf1<-sum((f1*f1)*peso)

```

```

tg1<-(g1*g1)/denominadorg1
tf1<-(f1*f1)/denominadorf1
afinit1<-sum(sqrt((tg1)*tf1))*peso
afinit1<-afinit1
RESULTADO<-afinit1
list(RESULTADO=RESULTADO)
}
#Fim da Função Afinidade 3 #

```

```

#Início da Função contagem Algoritmo1 #

```

```

contagem1algoritmo1<-function(t,x,y,z){
ndz<-0
ndt<-0
ndx<-0
ndy<-ndx
# Início do passo 1 #
RESPOSTA1<-TRUE
while(RESPOSTA1){
afinidade<- afinidade1(ndt,ndx,ndy=ndx,ndz,t,x,y,z)$RESULTADO
ndx<- (ndx+1)
ndy<-ndx
diferenca<-abs(1-afinidade)
if((diferenca <= 1e-03))

```

```

RESPOSTA1<-FALSE
}
ndz<-ndz
ndt<-ndt
ndxotimo<-ndx
ndyotimo<-ndx
# Fim do passo 1 #
# Início do passo 2 #
RESPOSTA2<-TRUE
while(RESPOSTA2){
  afinidade<-afinidade2(ndt,ndx=ndxotino,ndy=ndxotimo,
  ndz,t,x,y,z)$RESULTADO
  ndx<-ndxotimo
  ndy<-ndxotimo
  ndt=ndt+1
  ndz<-ndz
  diferenca<-abs(1-afinidade)
  if((diferenca <= 1e-03))
  RESPOSTA2<-FALSE
}
ndz<-ndz
ndtotimo<-ndt
ndxotimo<-ndxotimo
ndyotimo<-ndxotimo
# Fim do passo 2 #

```

```

#Início do passo 3 #
RESPOSTA2<-TRUE
while(RESPOSTA2)
{
afinidade<- afinidade3(ndt=ndtotimo,ndx=ndxotimo,
ndy=ndxotimo,ndz,t,x,y,z)$RESULTADO ndt<-ndtotimo
ndx<-ndxotimo
ndy<-ndxotimo
ndz=ndz+1
diferenca<-abs(1-afinidade)
if((diferenca <= 1e-03))
RESPOSTA2<-FALSE
}
ndz<-ndz
ndt<-ndtotimo
ndx<-ndxotimo
ndy<-ndxotimo
# Fim do passo 3 #
RESULTADOFINAL<-matrix(c(ndt,ndx,ndy,ndz),1,4)
list(RESULTADOFINAL=RESULTADOFINAL)
}
#Fim da Função contagem Algoritmo 1#

dados=read.table("C:\\Users\\ra066596\\Documents\\TERREMOTO.txt")
z<-dados$Magnitude
x<-dados$Latitude

```

```

y<-dados$Longitude
t<-dados$Tempo
z<-as.numeric(z)
t<-as.numeric(t)
x<-as.numeric(x)
y<-as.numeric(y)
n=length(y)
tt<-seq(min(t),max(t),length=n)
xx<-seq(min(x),max(x),length=n)
yy<-seq(min(y),max(y),length=n)
zz<-seq(min(z),max(z),length=n)
RESULTADOFINAL2ALGORITMO1<-contagem1algoritmo1(t,x,y,z)$RESULTADOFINAL
ndt<-(RESULTADOFINAL2ALGORITMO1[1,1])
ndx<-(RESULTADOFINAL2ALGORITMO1[1,2])
ndy<-(RESULTADOFINAL2ALGORITMO1[1,3])
ndz<-(RESULTADOFINAL2ALGORITMO1[1,4])
EXTRACT<-matrix(c(ndt,ndx,ndy,ndz) ,1,4)
list(EXTRACT=EXTRACT)

noindent

# Início da função para montar as matrizes#
MATRIZNOVA<-function(k1,k2,k3,k4){
diagonal1<-rep(1,k1)
diagonal2<-rep(1,(k2*k3))
diagonal3<-rep(1,k4)
A1<-cbind( diag(diagonal1) ,matrix(0,k1,(k2*k3)),matrix(0,k1,k4))

```

```

A2<-cbind(matrix(0,(k2*k3),k1),diag(diagonal2),matrix(0,(k2*k3),k4))
A3<-cbind(matrix(0,k4,k1),matrix(0,k4,(k2*k3)),diag(diagonal3))
list(A1=A1,A2=A2,A3=A3)
}
# Fim da função para montar as matrizes#

```

```

# Início da função para calcular Omega1 #
OMEGA11<-function(ndt,knots1){
base1 <- create.bspline.basis(c(knots1[1],knots1[ndt+8])
,breaks=knots1[4:(ndt+5)])
OMEGA <- getbasispenalty(base1)
list(OMEGA=OMEGA)
}
# Fim da função para calcular Omega1 #

```

```

# Início da função para calcular Omega4 #
OMEGA41<-function(ndz,knots4){
base4 <- create.bspline.basis(c(knots4[1],knots4[ndz+8])
,breaks=knots4[4:(ndz+5)])
OMEGA <- getbasispenalty(base4)
list(OMEGA=OMEGA)
}
# Fim da função para calcular Omega4 #

```

```

# Início da função para calcular a matriz F #
FUNCF <-function(xx,M,bdeg2,ndx,n3,yy,N,bdeg3,ndy,
xxl,xxr,yy1,yyr,knots2,knots3){

```



```

k2<-dim(M)[2]
k3<-dim(N)[2]
f2<-dim(N)[2]
f1<-dim(M)[2]
ndxx<-ndx
ndyy<-ndy
base2 <- create.bspline.basis(c(knots2[1],knots2[ndx+8]),
breaks=knots2[4:(ndx+5)])
base3 <- create.bspline.basis(c(knots3[1],knots3[ndy+8]),
breaks=knots3[4:(ndy+5)])
F <- kronecker(getbasispenalty(base2),getbasispenalty(base3))
list(F=F)
}
# Fim da função para calcular a matriz F #

# Início da função H-splines #
metrica<-function(ndt,ndx,ndy,ndz,t,x,y,z){
ndx=ndx
ndy=ndx
ndt=ndt ndz=ndz
tl=min(t)
tr=max(t)
xl=min(x)
xr=max(x)
yl=min(y)
yr=max(y)

```

```

zl=min(z)
zr=max(z)
n1=length(t)
n2=length(x)
n3=length(y)
n4=length(z)
ntt<-length(t)
nxx<-length(x)
nyy<-length(y)
nzz<-length(z)
n<-length(t)
bdeg1= 3
bdeg2= 3
bdeg3= 3
bdeg4= 3
m1=length(t)
m2=length(x)
m3=length(y)
m4=length(z)
B<-bsnorm1(t, tl, tr, ndt, bdeg1 )$B
B2<-bsnorm1(t, tl, tr, ndt, bdeg1)$B2
B1<-bsnorm1(t, tl, tr, ndt, bdeg1)$B1
knots1<-bsnorm1(t, tl, tr, ndt, bdeg1)$knots1
M<-bsnorm2(x, xl, xr, ndx, bdeg2 )$M
M2<-bsnorm2(x, xl, xr, ndx, bdeg2)$M2
M1<-bsnorm2(x, xl, xr, ndx, bdeg2)$M1

```

```

knots2<-bsnorm2(x, xl, xr, ndx, bdeg2)$knots2
N<-bsnorm3(y, yl, yr, ndy, bdeg3)$N
N2<-bsnorm3(y, yl, yr, ndy, bdeg3)$N2
knots3<-bsnorm3(y, yl, yr, ndy, bdeg3)$knots3
O<-bsnorm4(z, zl, zr, ndz, bdeg4)$O
O2<-bsnorm4(z, zl, zr, ndz, bdeg4)$O2
knots4<-bsnorm4(z, zl, zr, ndz, bdeg4)$knots4
k1=dim(B)[2]
k2<-dim(M)[2]
k3<-dim(N)[2]
k4<-dim(O)[2]
tt<-seq(min(t),max(t),length=n)
xx<-seq(min(x),max(x),length=n)
yy<-seq(min(y),max(y),length=n)
zz<-seq(min(z),max(z),length=n)
n11=length(tt)
n22=length(xx)
n33=length(yy)
n44=length(zz)
ndtt= ndt
ndxx= ndx
ndyy= ndy
ndzz= ndz
ttl=min(tt)
ttr=max(tt)
xxl=min(xx)

```

```

xxr=max(xx)
yyl=min(yy)
yyr=max(yy)
zzl=min(zz)
zzr=max(zz)
bdeg11=3
bdeg22=3
bdeg33=3
bdeg44=3
m1=length(tt)
m2=length(xx)
m3=length(yy)
m4=length(zz)
tt<-sort(tt)
xx<-sort(xx)
yy<-sort(yy)
zz<-sort(zz)
m1=length(tt)
m2=length(xx)
m3=length(yy)
m4=length(zz)
B11<-bsnorm1(tt, ttl, ttr, ndtt, bdeg11 )$B
M11<-bsnorm2(xx, xxl, xxr, ndxx, bdeg22 )$M
N11<-bsnorm3(yy, yy1, yyr, ndyy, bdeg33 )$N
O11<-bsnorm4(zz, zzl, zzr, ndzz, bdeg44 )$O
B112<-bsnorm1(tt, ttl, ttr, ndtt, bdeg11 )$B2

```

```

P11<-PROUTOTENSORIAL(M11,N11)$P
P<-PROUTOTENSORIAL(M,N)$P
OMEGA1<-OMEGA11(ndt,knots1)$OMEGA
OMEGA4<-OMEGA41(ndz,knots4)$OMEGA
F<-FUNCF(xx,M,bdeg2,ndx,n3,yy,N,bdeg3,ndy,xxl
,xxr,yyl,yyr,knots2,knots3)$F
nsample<-length(tt)
fn1<-function(CC,alpha,t,x,y,z,P,fscale){
ndx=ndx
ndy=ndx
ndt=ndt
ndz=ndz
tl=min(t)
tr=max(t)
xl=min(x)
xr=max(x)
yl=min(y)
yr=max(y)
zl=min(z)
zr=max(z)
k1<-(ndt+4)
k2<-(ndx+4)
k3<-(ndy+4)
k4<-(ndz+4)
A1<-MATRIZNOVA(k1,k2,k3,k4)$A1
A2<-MATRIZNOVA(k1,k2,k3,k4)$A2

```

```

A3<-MATRIZNOVA(k1,k2,k3,k4)$A3
A4<-MATRIZNOVA(k1,k2,k3,k4)$A4
A5<-MATRIZNOVA(k1,k2,k3,k4)$A5
A6<-MATRIZNOVA(k1,k2,k3,k4)$A6
tl=min(t)
tr=max(t)
xl=min(x)
xr=max(x)
yl=min(y)
yr=max(y)
zl=min(z)
zr=max(z)
n1=length(t)
n2=length(x)
n3=length(y)
n4=length(z)
ntt<-length(t)
nxx<-length(x)
nyy<-length(y)
nzz<-length(z)
n<-length(t)
bdeg1= 3
bdeg2= 3
bdeg3= 3
bdeg4= 3
m1=length(t)

```

```

m2=length(x)
m3=length(y)
m4=length(z)
B<-bsnorm1(t, tl, tr, ndt, bdeg1 )$B
knots1<-bsnorm1(t, tl, tr, ndt, bdeg1)$knots1
M<-bsnorm2(x, xl, xr, ndx, bdeg2 )$M
knots2<-bsnorm2(x, xl, xr, ndx, bdeg2)$knots2
N<-bsnorm3(y, yl, yr, ndy, bdeg3)$N
knots3<-bsnorm3(y, yl, yr, ndy, bdeg3)$knots3
O<-bsnorm4(z, zl, zr, ndz, bdeg4)$O
knots4<-bsnorm4(z, zl, zr, ndz, bdeg4)$knots4
B11<-bsnorm1(tt, ttl, ttr, ndtt, bdeg11 )$B
M11<-bsnorm2(xx, xxl, xxr, ndxx, bdeg22 )$M
N11<-bsnorm3(yy, yyl, yyr, ndyy, bdeg33 )$N
O11<-bsnorm4(zz, zzl, zzr, ndzz, bdeg44 )$O
P11<-PROUTOTENSORIAL(M11,N11)$P
P<-PROUTOTENSORIAL(M,N)$P
OMEGA1<-OMEGA11(ndt,knots1)$OMEGA
OMEGA4<-OMEGA41(ndz,knots4)$OMEGA
F<-FUNCF(xx,M,bdeg2,ndx,n3,yy,N,bdeg3,
ndy,xxl,xxr,yyl,yyr,knots2,knots3)$F
n1=length(t)
n2=length(x)
n3=length(y)
n=n3
P<-PROUTOTENSORIAL(M,N)$P

```

```

int1234<-function(t,x,y,z){
exp(((B%%(A1%%CC))%%(t(P%%(A2%%CC))))%%((O%%(A3%%CC))))
}
INT1234<-MC.integrate.4D(int1234,low=c(tl,xl,yl,zl),
upp=c(tr,xr,yr,zr),npoints=n,exact.value=NULL)
INT1234<-INT1234$approx
PENALTY<-( allpha[1]*(t(A1%%CC))%%OMEGA1%%((A1%%CC)))
+ allpha[2]*(t(A3%%CC))%%OMEGA4%%((A3%%CC)) +
allpha[3]*(t(A2%%CC))%%F%%((A2%%CC)))
likelihood =( (apply(matrix(( (B%%(A1%%CC))%%
(t( P%%(A2%%CC))))%%((O%%(A3%%CC))) ),n1,1),2,sum)-INT1234)
- ((tr-tl)*(xr-xl)*(yr-yl)*(zr-zl)*(1/n1)*(1/n2)*(1/n3)*
(1/n4))*sum(PENALTY))
return(-likelihood)
}
fn2<-function(allpha,CC,t,x,y,z,P,fscale)
{
ndx=ndx
ndy=ndx
ndt=ndt
ndz=ndz
tl=min(t)
tr=max(t)
xl=min(x)
xr=max(x)
yl=min(y)

```



```

yr=max(y)
zl=min(z)
zr=max(z)
k1<-(ndt+4)
k2<-(ndx+4)
k3<-(ndy+4)
k4<-(ndz+4)
A1<-MATRIZNOVA(k1,k2,k3,k4)$A1
A2<-MATRIZNOVA(k1,k2,k3,k4)$A2
A3<-MATRIZNOVA(k1,k2,k3,k4)$A3
A4<-MATRIZNOVA(k1,k2,k3,k4)$A4
A5<-MATRIZNOVA(k1,k2,k3,k4)$A5
A6<-MATRIZNOVA(k1,k2,k3,k4)$A6
tl=min(t)
tr=max(t)
xl=min(x)
xr=max(x)
yl=min(y)
yr=max(y)
zl=min(z)
zr=max(z)
n1=length(t)
n2=length(x)
n3=length(y)
n4=length(z)
ntt<-length(t)

```

```

nxx<-length(x)
nyy<-length(y)
nzz<-length(z)
n<-length(t)
bdeg1= 3
bdeg2= 3
bdeg3= 3
bdeg4= 3
m1=length(t)
m2=length(x)
m3=length(y)
m4=length(z)
B<-bsnorm1(t, tl, tr, ndt, bdeg1 )$B
knots1<-bsnorm1(t, tl, tr, ndt, bdeg1)$knots1
M<-bsnorm2(x, xl, xr, ndx, bdeg2 )$M
knots2<-bsnorm2(x, xl, xr, ndx, bdeg2)$knots2
N<-bsnorm3(y, yl, yr, ndy, bdeg3)$N
knots3<-bsnorm3(y, yl, yr, ndy, bdeg3)$knots3
O<-bsnorm4(z, zl, zr, ndz, bdeg4)$O
knots4<-bsnorm4(z, zl, zr, ndz, bdeg4)$knots4
B11<-bsnorm1(tt, ttl, ttr, ndtt, bdeg11 )$B
M11<-bsnorm2(xx, xxl, xxr, ndxx, bdeg22 )$M
N11<-bsnorm3(yy, yyl, yyr, ndyy, bdeg33 )$N
O11<-bsnorm4(zz, zzl, zzr, ndzz, bdeg44 )$O
P11<-PROUTOTENSORIAL(M11,N11)$P
P<-PROUTOTENSORIAL(M,N)$P

```

```

OMEGA1<-OMEGA11(ndt,knots1)$OMEGA
OMEGA4<-OMEGA41(ndz,knots4)$OMEGA
F<-FUNCF(xx,M,bdeg2,ndx,n3,yy,N,bdeg3,
ndy,xxl,xxr,yyl,yyr,knots2,knots3)$F
n1=length(t)
n2=length(x)
n3=length(y)
n=n3
P<-PROUTOTENSORIAL(M,N)$P
int1234<-function(t,x,y,z){
exp( ((B%%(A1%%CC))%%(t( P%%(A2%%CC))) )%%
((O%%(A3%%CC))) )
}
INT1234<-MC.integrate.4D(int1234,low=c(tl,xl,yl,zl)
,upp=c(tr,xr,yr,zr),npoints=n,exact.value=NULL)
INT1234<-INT1234$approx
PENALTY<-( allpha[1]*(t(A1%%CC))%%OMEGA1%%((A1%%CC)))
+ allpha[2]*(t(A3%%CC))%%OMEGA4%%((A3%%CC)))
+ allpha[3]*(t(A2%%CC))%%F%%((A2%%CC)))
likelihood =( (apply(matrix(( (B%%(A1%%CC))%%(t( P%%
(A2%%CC))) )%%((O%%(A3%%CC))) ),n1,1),2,sum)-INT1234)
- ((tr-tl)*(xr-xl)*(yr-yl)*(zr-zl)*(1/n1)*(1/n2)*(1/n3)*
(1/n4))*sum(PENALTY) )
return(-likelihood)
}
#obter alfa0

```

```

ing0<-log(CHUTEINICIALCASO(ndt,ndx,ndy,ndz,t,x,y,z)$CC)
CC0<-ing0
ingallpha0<-log(CHUTEINICIALCASO2(ndt,ndx,ndy,ndz,t,x,y,z)$allpha)
CCallpha0<-ingallpha0
out1<-nlminb(CCallpha0,fn2,CC=CC0,t=t,x=x,y=y,z=z,P=P,
control=list(iter.max = 1500,eval.max=5000,step.min=1e+2,
x.tol=1e-15,maxit = 10000),fscale = length(z))
estimate1<-exp(out1$par)
ing1<-CHUTEINICIALCASO(ndt,ndx,ndy,ndz,t,x,y,z)$CC
CC1<-ing1
mlec1<-ing1[1:(ndt+4)]
mlec2<-ing1[((ndt+4)+1):((ndt+4)+(ndx+4)*(ndy+4))]
mlec3<-ing1[(((ndt+4)+(ndx+4)*(ndy+4))+1):((ndz+4)+(ndt+4)
+(ndx+4)*(ndy+4))]
allpha1<-estimate1[1]
allpha2<-estimate1[2]
allpha3<-estimate1[3]
#usar alpha0 para obter beta que depende de alpha0
CC2<-log(c(mlec1,mlec2,mlec3))
CCallpha1<-log(c(allpha1,allpha2,allpha1))
out2<-nlminb(CC2,fn1,allpha=CCallpha1,t=t,x=x,y=y,
z=z,P=P,control=list(iter.max = 1500,eval.max=5000,
step.min=1e+2,x.tol=1e-15,maxit = 10000),fscale = length(z))
estimate2<-exp(out2$par)
#usar beta que depende de alpha0 para obter alpha
mlec12<-estimate2[1:(ndt+4)]

```

```

mlec22<-estimate2[(ndt+4+1):((ndt+4)+(ndx+4)*(ndy+4))]
mlec32<-estimate2[(((ndt+4)+(ndx+4)*(ndy+4))+1):((ndz+4)
+(ndt+4)+(ndx+4)*(ndy+4))]
CC3<-log(c(mlec12,mlec22,mlec32))
ingallpha3<-log(CHUTEINICIALCASO2(ndt,ndx,ndy,ndz,t,x,y,z)$allpha)
CCallpha3<-ingallpha3
out3<-nlminb(CCallpha3,fn2,CC=CC3,t=t,x=x,y=y,z=z,P=P
control=list(iter.max = 1500,eval.max=5000,step.min=1e+1
,x.tol=1e-15,maxit = 10000),fscale = length(z))
estimate3<-exp(out3$par)
allpha13<-estimate3[1]
allpha23<-estimate3[2]
allpha33<-estimate3[3]
#usar alpha para obter beta
#CC4<-log(c(mlec12,mlec22,mlec32))
ing4<-log(CHUTEINICIALCASO(ndt,ndx,ndy,ndz,t,x,y,z)$CC)
CC4<-ing4
CCallpha4<-(c(allpha13,allpha23,allpha33))
out4<-nlminb(CC4,fn1,allpha=CCallpha4,t=t,x=x,y=y,z=z
,P=P,control=list(iter.max = 1500,eval.max=5000,step.min=1e+2
,x.tol=1e-15,maxit = 10000),fscale = length(z))
out1<-out4
out1$par<-exp(out1$par)
out3$par<-exp(out3$par)
list(out1=out1,out3=out3)
}

```

```

#Fim da função H-splines #

# Métodos AIC e BIC #

# Início da função contagem AIC BIC#
contagemAICBIC<-function(t,x,y,z,n){
ndt<-rep(rep(seq(0,7,length.out=8), 8),8)
ndx<-rep(c(rep(0,8),rep(1,8),rep(2,8),rep(3,8),
rep(4,8),rep(5,8),rep(6,8),rep(7,8)),8)
ndz<-c(rep(0,8^2),rep(1,8^2),rep(2,8^2),rep(3,8^2),
rep(4,8^2),rep(5,8^2),rep(6,8^2),rep(7,8^2))
AIC<-rep(0,8^3)
BIC<-rep(0,8^3)
R<-matrix(c(ndz,ndx,ndt,AIC,BIC),((8)^(3)),5)
for(i in 1:(8^3)){
ndt<-R[i,3]
ndx<-R[i,2]
ndy<-R[i,2]
ndz<-R[i,1]
saida <- metrica(ndt=(R[i,3]),ndx=(R[i,2]),ndy=(R[i,2])
,ndz=(R[i,2]),t,x,y,z)$out1
minimum<-saida$objective
l1 <- (ndt+4)
l <- (ndx+4)
l4 <- (ndz +4)
R[i,4]<- (-2*(minimum) + 2*(l4+l1+(l*l)))

```

```

R[i,5]<- (-2*(minimum)+ log(n)*(l4+l1+(l*1)))
}
RESULTADOFINAL<-R
list(RESULTADOFINAL=RESULTADOFINAL)
}
# Fim da função contagem AIC BIC#
dados=read.table("C:\\Users\\ra066596\\Documents\\TERREMOTO.txt")
z<-dados$Magnitude
x<-dados$Latitude
y<-dados$Longitude
t<-dados$Tempo
z<-as.numeric(z)
t<-as.integer(t)
x<-as.numeric(x)
y<-as.numeric(y)
n=length(y)
RESULTADOFINALAICBIC<-contagemAICBIC(t,x,y,z,n)$RESULTADOFINAL
w1 <- which.min(RESULTADOFINALAICBIC[,4])
ndtAIC<-(RESULTADOFINALAICBIC[w1,1])
ndxAIC<-(RESULTADOFINALAICBIC[w1,2])
ndzAIC<-(RESULTADOFINALAICBIC[w1,3])
ndyAIC<-ndxAIC
w2 <- which.min(RESULTADOFINALAICBIC[,5])
ndtBIC<-(RESULTADOFINALAICBIC[w2,1])
ndxBIC<-(RESULTADOFINALAICBIC[w2,2])
ndzBIC<-(RESULTADOFINALAICBIC[w2,3])

```

```
ndyBIC<-ndxBIC
```

```
list(ndtAIC=ndtAIC,ndxAIC=ndxAIC,ndtBIC=ndtBIC,ndxBIC=ndxBIC)
```


Apêndice E

Programas utilizados nos estudos simulados.

```
library(xtable)
library(splines)
library(mgcv)
library(fda)
```

As funções para gerar as distribuições Normal bivariadas foram retiradas e adaptadas de <http://estatsticaeor.blogspot.com.br/2010/08/grafico-normall-bivariada-e-sua-curva-de.htm> e (Gamerman e Lopes, 2006) cujos códigos estão hospedados em <http://www.dme.ufrj.br/mcmc/>.

```
# Estudo de simulação1 #
#Início da função para gerar uma Distribuição Normal bivariada verdadeira#
funclambda23<-function(n){
m<-c(0,0)
```

```

S<-matrix(c(1, 0.5, 0.5, 1), 2, 2, byrow = TRUE)
x<-seq(m[1]-3*sqrt(S[1,1]),m[1]+3*sqrt(S[1,1]),length=n)
y<-seq(m[2]-3*sqrt(S[2,2]),m[2]+3*sqrt(S[2,2]),length=n)
lambda23<-matrix(0,length(x),length(y))
fnorm<-matrix(0,length(x),length(y))
iS<-solve(S)
constante<-1/sqrt(2*pi*abs(S[1,1]*S[2,2]-S[1,2]^2))
for(i in 1:length(x)){
  for(j in 1:length(y)) {
    fnorm[i,j]<-constante*exp(-0.5*(t(c(x[i],y[j])-m)%*%iS%*%(c(x[i],y[j])-m)))
  }
}
lambda23<-fnorm
list(lambda23=lambda23,x=x,y=y)}

#Fim da função para gerar uma Distribuição Normal bivariada verdadeira#

#Início da função para gerar a distribuição lambda(t) #
funclambda1<-function(n){
  t<-seq(0,1,length=n)
  lambda1<-5*sin(pi*t)
  list(lambda1=lambda1,t=t)}

#Fim da função para gerar a distribuição lambda(t) #

# Inicio da função para gerar o banco de dados artificial #
geragrid<-function(j){
  integrand1<-function(t){
    5*sin(pi*t)}

```

```

int1<-integrate(integrand1, lower = 0, upper = 1)
#Distribuição Normal 1#
mu1<-0
mu2<-0
s11<-1
s12<-(-0.5)
s22<-1
rho<-(- 0.5)
f<-function(x1,x2){
term1 <- 1/(2*pi*sqrt(s11*s22*(1-rho^2)))
term2 <- -1/(2*(1-rho^2))
term3 <- (x1-mu1)^2/s11
term4 <- (x2-mu2)^2/s22
term5 <- -2*rho*((x1-mu1)*(x2-mu2))/(sqrt(s11)*sqrt(s22))
term1*exp(term2*(term3+term4-term5))
}
# criação da função de densidade normal multivariada
fs1<-MC.integrate.2D(f,low=c(-3,-3),upp=c(3,3),npoints=n,
exact.value=NULL)$approx
V<-fs1*int1$value
m<-c(0,0)
S<-matrix(c(1, 0.5, 0.5, 1), 2, 2, byrow = TRUE)
iS<-solve(S)
a1<-1
a2<-3
a3<-3

```

```

b1<-0
b2<-(-3)
b3<-(-3)
apl1<-a1 - b1
apl2<-a2 - b2
apl3<-a3 - b3
sigmax=1
sigmay=1
mux=0
muy=0
lambdabarra=5*(1/(2*pi*sigmax*sigmay*sqrt(1-(0.5)^(2)) ))
N<-rpois(1, lambdabarra*V)
n<-N
#t<-seq(0,1,length=n)
#x<-seq(m[1]-3*sqrt(S[1,1]),m[1]+3*sqrt(S[1,1]),length=n)
#y<-seq(m[2]-3*sqrt(S[2,2]),m[2]+3*sqrt(S[2,2]),length=n)
t<-array(NA, dim = n, dimnames = NULL)
x<-array(NA, dim = n, dimnames = NULL)
y<-array(NA, dim = n, dimnames = NULL)
U<-array(NA, dim = n, dimnames = NULL)
RAZAO<- array(NA, dim = n, dimnames = NULL)
lambda<-array(NA, dim = n, dimnames = NULL)
#t[1]<-b1
#x[1]<-b2
#y[1]<-b3
for(i in 1:n){

```

```

RESPOSTA<-TRUE
while(RESPOSTA){
tt<-runif(1, min=b1, max=a1)
xx<-runif(1, min=b2, max=a2)
yy<-runif(1, min=b3, max=a3)
U<-runif(1, min=0, max=1)
constante<-1/sqrt(2*pi*abs(S[1,1]*S[2,2]-S[1,2]^2))
lambdabarra=5*(1/(2*pi*sigmax*sigmay*sqrt(1-(0.5)^2)) )
lambda <- 5*(sin(1*pi*tt))*(1/(2*pi*sigmax*sigmay*sqrt(1-0.5^2)) )
*exp(-( 1/(2*(1-0.5^2))))*( (((xx)-mux)/sigmax)^2
-2*(0.5)*((((xx)-mux)/sigmax))*((((yy)-muy)/sigmay))+((((yy)-
muy)/sigmay)^2)))
RAZAOESTRELA<-(lambda/lambdabarra)
if(U<RAZAOESTRELA)
RESPOSTA<-FALSE}
t[i]<-tt
x[i]<-xx
y[i]<-yy }
count<- N
rbind(t, x, y,count)}

# Fim da função para gerar o banco de dados artificial #

# Estudo de Simulação 2 #

# Início da função para gerar a Mistura de Normais #

dnormm<-function(x,m,P){

```

```

exp(-0.5*(t(x-m)%*%P%*(x-m)))
}

dmixtnormm<-function(x,m1,m2,P1,P2,dP1,dP2){
0.7*dP1*exp(-0.5*(t(x-m1)%*%P1%*(x-m1)))
+ 0.3*dP2*exp(-0.5*(t(x-m2)%*%P2%*(x-m2)))
}
funclambda23<-function(n){
m1<-c(4,5)
m2<-c(1,4)
S1<-matrix(c(1,0.5,0.5,1),2,2)
iS1<-solve(S1)
iS1<-(iS1 + t(iS1))/2
S2<-matrix(c(1,-0.5,-0.5,1),2,2)
iS2<-solve(S2)
iS2<-(iS2 + t(iS2))/2
dP1<-prod(diag(chol(iS1)))
dP2<-prod(diag(chol(iS2)))
#Distribuição verdadeira#
x<-seq(-1,7,length.out=n)
y<-seq( 2,8,length.out=n)
fnorm<-matrix(0,length(x),length(y))
for(i in 1: length(x)){
for(j in 1: length(y)) {
fnorm[i,j]<-dmixtnormm(c(x[i],y[j]),m1,m2,iS1,iS2,dP1,dP2)
}}
}

```

```

lambda23<-fnorm
list(lambda23=lambda23,x=x,y=y)
}
# Fim da função para gerar a Mistura de Normais #

#Início da função para gerar a Distribuição lambda_{1}(t)#
funclambda1<-function(n){
t<-seq(-7,7,length.out=n)
lambda1<-50*(0.4*dnorm(t,-3,1)+0.6*dnorm(t,3,1))
list(lambda1=lambda1,t=t)
}

#Fim da função para gerar a Distribuição lambda_{1}(t)#

# Inicio da função para gerar o banco de dados artificial #
geragrid<-function(j) {
integrand2<-function(t)
{
mu1=(-3)
sigma1=1
mu2=3
sigma2=1
f1=(1/(sqrt(2*pi)))*(sigma1)^2*exp( (- 1/(2*(sigma1)^2))*(t-mu1)^2 )
f2=(1/(sqrt(2*pi)))*(sigma2)^2*exp( (- 1/(2*(sigma2)^2))*(t-mu2)^2 )
#0.4*dnorm(t,-3,1)+0.6*dnorm(t,3,1)
50*(0.4*f1+0.6*f2)

```

```

}
int2<-integrate(integrand2, lower = -7, upper = 7)
# Mistura de duas distribuições normal bivariada #

#Distribuição Normal 1#
mu1<-4
mu2<-5
s11<-1
s12<-(0.5)
s22<-1
rho<-(0.5)
f<-function(x1,x2){
term1 <- 1/(2*pi*sqrt(s11*s22*(1-rho^2)))
term2 <- -1/(2*(1-rho^2))
term3 <- (x1-mu1)^2/s11
term4 <- (x2-mu2)^2/s22
term5 <- -2*rho*((x1-mu1)*(x2-mu2))/(sqrt(s11)*sqrt(s22))
term1*exp(term2*(term3+term4-term5))
}
# criação da função de densidade normal multivariada
f1<-MC.integrate.2D(f,low=c(-1,1),upp=c(7,4),npoints=n,
exact.value=NULL)$approx
#Distribuição Normal 2
mu1<-1
mu2<-4
s11<-1

```



```

s12<-(-0.5)
s22<-1
rho<-(-0.5)
f<-function(x1,x2){
term1 <- 1/(2*pi*sqrt(s11*s22*(1-rho^2)))
term2 <- -1/(2*(1-rho^2))
term3 <- (x1-mu1)^2/s11
term4 <- (x2-mu2)^2/s22
term5 <- -2*rho*((x1-mu1)*(x2-mu2))/(sqrt(s11)*sqrt(s22))
term1*exp(term2*(term3+term4-term5))
}
# criação da função de densidade normal multivariada
f2<-MC.integrate.2D(f,low=c(-1,1),upp=c(7,4),npoints=n, exact.value=NULL)$approx
V<-(0.7*f1 + 0.3*f2)*int2$value
m1<-c(4,5)
m2<-c(1,4)
S1<-matrix(c(1,0.5,0.5,1),2,2)
iS1<-solve(S1)
iS1<-(iS1 + t(iS1))/2
S2<-matrix(c(1,-0.5,-0.5,1),2,2)
iS2<-solve(S2)
iS2<-(iS2 + t(iS2))/2
dP1<-prod(diag(chol(iS1)))
dP2<-prod(diag(chol(iS2)))
#Distribuição verdadeira
a1<-7

```

```

a2<-7
a3<-8
b1<-(-7)
b2<-(-1)
b3<-2
apl1<-(a1 - b1)
apl2<-(a2 - b2)
apl3<-(a3 - b3)
lambdabarra=50*(1/(2*pi) )*(1/(2*pi*dP1) )
N<-rpois(1, lambdabarra*V)
n<-N
U<-array(NA, dim = n, dimnames = NULL)
RAZAO<- array(NA, dim = n, dimnames = NULL)
lambda<-array(NA, dim = n, dimnames = NULL)
t<-array(NA, dim = n, dimnames = NULL)
x<-array(NA, dim = n, dimnames = NULL)
y<-array(NA, dim = n, dimnames = NULL)
#t[1]<-b1
#x[1]<-b2
#y[1]<-b3
for(i in 1:n){
  RESPOSTA<-TRUE
  while(RESPOSTA){
    tt<-runif(1, min=b1, max=a1)
    xx<-runif(1, min=b2, max=a2)
    yy<-runif(1, min=b3, max=a3)
  }
}

```

```

U<-runif(1, min=0, max=1)
lambdabarra=50*(1/(2*pi*1) )*(1/(2*pi*dP1) )
lambda <- 50*( 0.4*dnorm(tt,-3,1)+
0.6*dnorm(tt,3,1) )*(dmixtnormm(c(xx,yy),m1,m2,iS1,iS2,dP1,dP2))
RAZAOESTRELA<-(lambda/lambdabarra)
if(U<RAZAOESTRELA)
RESPOSTA<-FALSE }
t[i]<-tt
x[i]<-xx
y[i]<-yy }
count<- N
rbind(t, x, y,count)
}
# Fim da função para gerar o banco de dados artificial #

# Estudo de Simulação 3 #
#Início da função para gerar uma Distribuição Log -Normal bivariada verdadeira#

funclambda23<-function(n){
m1<-0
m2<-0
sigma11<-0.50
sigma22<-0.50
ro<-0.75
sigma12<-sigma11*sigma22*ro
sigma21=sigma12

```

```

S<- matrix(c(sigma11^2, sigma12, sigma21,
sigma22^2), 2, 2, byrow = TRUE)
m<-c(m1,m2)
x<-seq(0.1,2,length=n)
y<-seq(0.1,2,length=n)
fnorm3<-matrix(0,length(x),length(y))
iS<-solve(S)
constante<-1/(2*pi*sqrt(abs(S[1,1]*S[2,2]-S[1,2]^2)))
for(i in 1:length(x)) {
for(j in 1:length(y)){
fnorm3[i,j]<-(1/(x[i]*y[j]))*constante*
exp(-0.5*(t(c(log(x[i]),log(y[j]))-m)%iS%(c(log(x[i]),log(y[j]))-m)))
} }
x<-sort(x)
y<-sort(y)
lambda23<-fnorm3
list(lambda23=lambda23,x=x,y=y)
}
#Fim da função para gerar uma Distribuição Log - Normal bivariada verdadeira#

#Início da função para gerar a distribuição lambda(t) #
funclambda1<-function(n){
alpha<-2
Beta<-3
t<-seq(0,pi,length=n)
lambda1 <- 3.17282*(Beta)^{-1}*

```

```

(Beta)^\{allpha\}*(t)^\{allpha-1\}*
exp(-(Beta*t)^\{allpha\})
list(lambda1=lambda1,t=t)
}
#Fim da função para gerar a distribuição lambda(t) #

# Inicio da função para gerar o banco de dados artificial #
geragrid<-function(j) {
integrand3<-function(t){
allpha<-2
Beta<-3
3.17282*((Beta*t)^\{allpha-1\}*exp(-(Beta*t)^\{allpha\}))
}
int3<-integrate(integrand3, lower = 0, upper = pi)
lognormal<-function(x,y){
m1<-0
m2<-0
sigma11<-0.50
sigma22<-0.50
ro<-0.75
sigma12<-sigma11*sigma22*ro
sigma21=sigma12
S<- matrix(c(sigma11^2, sigma12, sigma21, sigma22^2),
2, 2, byrow = TRUE)
m<-c(m1,m2)
sigmax=sigma11

```

```

sigmay=sigma22
mux=m1
muy=m2
allpha<-2
Beta<-3
#(1/(2*pi*sigmax*sigmay*sqrt(1-(ro)^{2}))))*
#(1/(exp((sigmax^{2})*(sigmay^{2}))
#*((1-((ro)^{2})/(2))/(1-(ro)^{2})))
# - ro*sigmax*sigmay - mux - muy )))
}
flog<-MC.integrate.2D(lognormal,low=c(0.1,0.1),upp=c(2,2),npoints=n,
exact.value=NULL)$approx
V<-flog*int3$value
m1<-0
m2<-0
sigma11<-0.50
sigma22<-0.50
ro<-0.75
sigma12<-sigma11*sigma22*ro
sigma21=sigma12
S<- matrix(c(sigma11^2, sigma12, sigma21, sigma22^2),
2, 2, byrow = TRUE)
m<-c(m1,m2)
a1<- pi
a2<-2
a3<-2

```

```

b1<-0
b2<-0.1
b3<-0.1
apl1<-(a1 - b1)
apl2<-(a2 - b2)
apl3<-(a3 - b3)
sigmax=sigma11
sigmay=sigma22
mux=m1
muy=m2
allpha<-2
Beta<-3
lambdabarra=3.17282*(((allpha-1)/allpha)^(1/((allpha-1)/allpha)))
*exp(-((allpha-1)/allpha))*(1/(2*pi*sigmax*sigmay*sqrt(1-ro^2)))
N<-rpois(1, lambdabarra*V)
n<-N
t<-array(NA, dim = n, dimnames = NULL)
x<-array(NA, dim = n, dimnames = NULL)
y<-array(NA, dim = n, dimnames = NULL)
U<-array(NA, dim = n, dimnames = NULL)
RAZAO<- array(NA, dim = n, dimnames = NULL)
lambda<-array(NA, dim = n, dimnames = NULL)
for(i in 1:n){
  RESPOSTA<-TRUE
  while(RESPOSTA{
    tt<-runif(1, min=b1, max=a1)

```

```

xx<-runif(1, min=b2, max=a2)
yy<-runif(1, min=b3, max=a3)
U<-runif(1, min=0, max=1)
lambdabarra=3.17282*(((alpha-1)/alpha)^(1/alpha))
*exp(-((alpha-1)/alpha)*(1/(2*pi*sigma_x*sigma_y*sqrt(1-ro^2)) ))
lambda<- 3.17282*((Beta*tt)^(alpha-1)*exp(-(Beta*tt)^alpha))*
(1/(2*pi*xx*yy*sigma_x*sigma_y*sqrt(1-ro^2)) ))*exp(-(1/(2*(1-ro^2))))
*(((log(xx)-mux)/sigma_x)^2-2*ro*(((log(xx)-mux)/sigma_x))*(((log(yy)
-muy)/sigma_y))+((log(yy)-muy)/sigma_y)^2))
RAZAOESTRELA<-(lambda/lambdabarra)
if(U<RAZAOESTRELA)
RESPOSTA<-FALSE
}
t[i]<-tt
x[i]<-xx
y[i]<-yy
}
count<- N
rbind(t, x, y,count)
}
# Fim da função para gerar o banco de dados artificial #

# Estudo de Simulação 4 #

# Início da função para gerar a Mistura de Normais #
dnormmm<-function(x,m,P){

```



```

exp(-0.5*(t(x-m)%*%P%*%(x-m)))
}
dmixtnormm<-function(x,m1,m2,m3,m4,m5,P1,P2,P3,P4,P5,dP1,dP2
,dP3,dP4,dP5){
ptrue=c(0.5,0.5,0.5,0.2,0.1)
ptrue=ptrue/sum(ptrue)
ptrue[1]*dP1*exp(-0.5*(t(x-m1)%*%P1%*%(x-m1)))+
ptrue[2]*dP2*exp(-0.5*(t(x-m2)%*%P2%*%(x-m2)))+ptrue[3]*
dP3*exp(-0.5*(t(x-m3)%*%P3%*%(x-m3)))+ptrue[4]*dP4*
exp(-0.5*(t(x-m4)%*%P4%*%(x-m4)))+ptrue[5]*dP5*
exp(-0.5*(t(x-m5)%*%P5%*%(x-m5)))
}
funclambda23<-function(n){
m1<-c(1,1)
m2<-c(6,6)
m3<-c(1,10)
m4<-c(7,1)
m5<-c(1.5,5)
S1<-matrix(c(2,1.4,1.4,2),2,2)
iS1<-solve(S1)
iS1<-(iS1 + t(iS1))/2
S2<-matrix(c(1,0.1,0.1,1),2,2)
iS2<-solve(S2)
iS2<-(iS2 + t(iS2))/2
S3<-matrix(c(1,0.7,0.7,2),2,2)
iS3<-solve(S3)

```

```

iS3<-(iS3 + t(iS3))/2
S4<-matrix(c(1.5,-0.25,-0.25,1.5),2,2)
iS4<-solve(S4)
iS4<-(iS4 + t(iS4))/2
S5<-matrix(c(0.8,0,0,0.5),2,2)
iS5<-solve(S5)
iS5<-(iS5 + t(iS5))/2
dP1<-prod(diag(chol(iS1)))
dP2<-prod(diag(chol(iS2)))
dP3<-prod(diag(chol(iS3)))
dP4<-prod(diag(chol(iS4)))
dP5<-prod(diag(chol(iS5)))
#Distribuição verdadeira
x<-seq(-4,10,length.out=n)
y<-seq(-5,15,length.out=n)
fnorm<-matrix(0,length(x),length(y))
for(i in 1: length(x)){
  for(j in 1: length(y)){
    fnorm[i,j]<-dmixtnormm(c(x[i],y[j]),m1,m2,m3,m4,m5,iS1,iS2,iS3,iS4,iS5,dP1,dP2,dP3
    ,dP4,dP5)
  }
}
lambda23<-fnorm
list(lambda23=lambda23,x=x,y=y)
}
# Fim da função para gerar a Mistura de Normais #

```

```

#Início da função para gerar a Distribuição lambda_{1}(t)#
funclambda1<-function(n){
t<-seq(0,1,length=n)
lambda1<- (1+3*t)
list(lambda1=lambda1,t=t)
}
#Fim da função para gerar a Distribuição lambda_{1}(t)#
# Inicio da função para gerar o banco de dados artificial #

geragrid<-function(j) {
integrand4<-function(t){
(1+3*t)
}
int4<-integrate(integrand4, lower = 0, upper = 1)
# Mistura de cinco distribuições normal bivariada #
#Distribuição Normal 1
mu1<-1
mu2<-1
s11<-2
s12<-(1.4)
s22<-2
rho<-(0.7)
f<-function(x1,x2){
term1 <- 1/(2*pi*sqrt(s11*s22*(1-rho^2)))
term2 <- -1/(2*(1-rho^2))

```

```

term3 <- (x1-mu1)^2/s11
term4 <- (x2-mu2)^2/s22
term5 <- -2*rho*((x1-mu1)*(x2-mu2))/(sqrt(s11)*sqrt(s22))
term1*exp(term2*(term3+term4-term5))
} # criação da função de densidade normal multivariada
f11<-MC.integrate.2D(f,low=c(-4,-5),upp=c(10,15),npoints=n,
exact.value=NULL)$approx
#Distribuição Normal 2
mu1<-6
mu2<-6
s11<-1
s12<-(0.1)
s22<-1
rho<-(0.1)
f<-function(x1,x2){
term1 <- 1/(2*pi*sqrt(s11*s22*(1-rho^2)))
term2 <- -1/(2*(1-rho^2))
term3 <- (x1-mu1)^2/s11
term4 <- (x2-mu2)^2/s22
term5 <- -2*rho*((x1-mu1)*(x2-mu2))/(sqrt(s11)*sqrt(s22))
term1*exp(term2*(term3+term4-term5))
} # criação da função de densidade normal multivariada#
f22<-MC.integrate.2D(f,low=c(-4,-5),upp=c(10,15),npoints=n,
exact.value=NULL)$approx #Distribuição Normal 3
mu1<-1
mu2<-10

```

```

s11<-(1)
s12<-(-0.7)
s22<-1
rho<-(-0.7)
f<-function(x1,x2){
term1 <- 1/(2*pi*sqrt(s11*s22*(1-rho^2)))
term2 <- -1/(2*(1-rho^2))
term3 <- (x1-mu1)^2/s11
term4 <- (x2-mu2)^2/s22
term5 <- -2*rho*((x1-mu1)*(x2-mu2))/(sqrt(s11)*sqrt(s22))
term1*exp(term2*(term3+term4-term5))
}
# Criação da função de densidade normal multivariada
f3<-MC.integrate.2D(f,low=c(-4,-5),upp=c(10,15),npoints=n,
exact.value=NULL)$approx
#Distribuição Normal 4
mu1<-7
mu2<-1
s11<-1.5
s12<-(-0.2)
s22<-1.5
rho<-(-0.1333333)
f<-function(x1,x2){
term1 <- 1/(2*pi*sqrt(s11*s22*(1-rho^2)))
term2 <- -1/(2*(1-rho^2))
term3 <- (x1-mu1)^2/s11

```

```

term4 <- (x2-mu2)^2/s22
term5 <- -2*rho*((x1-mu1)*(x2-mu2))/(sqrt(s11)*sqrt(s22))
term1*exp(term2*(term3+term4-term5))
} # criação da função de densidade normal multivariada
f4<-MC.integrate.2D(f,low=c(-4,-5),upp=c(10,15),npoints=n,
exact.value=NULL)$approx
#Distribuição Normal 5
mu1<-1.5
mu2<-5
s11<-0.8
s12<-(0)
s22<-0.5
rho<-(0)
f<-function(x1,x2){
term1 <- 1/(2*pi*sqrt(s11*s22*(1-rho^2)))
term2 <- -1/(2*(1-rho^2))
term3 <- (x1-mu1)^2/s11
term4 <- (x2-mu2)^2/s22
term5 <- -2*rho*((x1-mu1)*(x2-mu2))/(sqrt(s11)*sqrt(s22))
term1*exp(term2*(term3+term4-term5))
}# criação da função de densidade normal multivariada
f5<-MC.integrate.2D(f,low=c(-4,-5),upp=c(10,15),npoints=n,
exact.value=NULL)$approx
V<-(0.28*f11 + 0.28*f22+ 0.28*f3+0.11*f4+0.05*f5)*int4$value
a1<-1
a2<-(10)

```

```

a3<-(15)
b1<-(0)
b2<-(-4)
b3<-(-5)
apl1<- (a1 - b1)
apl2<- (a2 - b2)
apl3<- (a3 - b3)
m1<-c(1,1)
m2<-c(6,6)
m3<-c(1,10)
m4<-c(7,1)
m5<-c(1.5,5)
S1<-matrix(c(2,1.4,1.4,2),2,2)
iS1<-solve(S1)
iS1<-(iS1 + t(iS1))/2
S2<-matrix(c(1,0.1,0.1,1),2,2)
iS2<-solve(S2)
iS2<-(iS2 + t(iS2))/2
S3<-matrix(c(1,0.7,0.7,2),2,2)
iS3<-solve(S3)
iS3<-(iS3 + t(iS3))/2
S4<-matrix(c(1.5,-0.25,-0.25,1.5),2,2)
iS4<-solve(S4)
iS4<-(iS4 + t(iS4))/2
S5<-matrix(c(0.8,0,0,0.5),2,2)
iS5<-solve(S5)

```

```

iS5<-(iS5 + t(iS5))/2
dP1<-prod(diag(chol(iS1)))
dP2<-prod(diag(chol(iS2)))
dP3<-prod(diag(chol(iS3)))
dP4<-prod(diag(chol(iS4)))
dP5<-prod(diag(chol(iS5)))
lambdabarra = 4/(2*pi*((dP1)^(0.5)))
N<-rpois(1, lambdabarra*V)
n<-N
t<-array(NA, dim = n, dimnames = NULL)
x<-array(NA, dim = n, dimnames = NULL)
y<-array(NA, dim = n, dimnames = NULL)
U<-array(NA, dim = n, dimnames = NULL)
RAZAO<- array(NA, dim = n, dimnames = NULL)
lambda<-array(NA, dim = n, dimnames = NULL)
for(i in 1:n){
  RESPOSTA<-TRUE
  while(RESPOSTA) {
    tt<-runif(1, min=b1, max=a1)
    xx<-runif(1, min=b2, max=a2)
    yy<-runif(1, min=b3, max=a3)
    U<-runif(1, min=0, max=1)
    lambdabarra = 4*(2*pi*((dP1)^(0.5)))
    lambda <- (1+3*tt)*dmixtnormm(c(xx,yy),m1,m2,m3,m4,m5,iS1,
    iS2,iS3,iS4,iS5,dP1,
    dP2,dP3,dP4,dP5)
  }
}

```



```

RAZAOESTRELA<-(lambda/lambdabarra)
if(U<RAZAOESTRELA)
RESPOSTA<-FALSE
}
t[i]<-tt
x[i]<-xx
y[i]<-yy
}
count<- N
rbind(t, x, y,count)
}
# Fim da função para gerar o banco de dados artificial #

```

A função para realizar Superposições de um PPNH foi retirada e adaptada de Saltzman, E. (2008)

```

# Superposição #
superposition <- function(m) {
data <- c()
count <- 0
countper <- c()
for (j in 1:m) {
data <- cbind( geragrid(j), data)
count <- count + data[4,1]
countper[m-j+1] <- data[4,1]
}
}

```

```

number <- rep(count, length(data)/4)
#countpervector <- c(rep(countper[1], countper[1]),rep(countper[2],
countper[2]),rep(countper[3], countper[3]))
s<- rbind(data[1,], data[2,], data[3,], number)
list(s=s)
}

```

```

#Início da função recupera lambda23 estimado#
funclambdarecupera23<-function(t,x,y,mlec2,ndt,ndx,ndy){
n=length(y)
tt<-seq(min(t),max(t),length=n)
xx<-seq(min(x),max(x),length=n)
yy<-seq(min(y),max(y),length=n)
tl=min(tt)
tr=max(tt)
xl=min(xx)
xr= max(xx)
yl=min(yy)
yr= max(yy)
bdeg1= 3
bdeg2= 3
bdeg3= 3
B11<-bsnorm1(tt, tl, tr, ndt, bdeg1 )$B
M11<-bsnorm2(xx, xl, xr, ndx, bdeg2 )$M
N11<-bsnorm3(yy, yl, yr, ndy, bdeg3)$N
P11<-PROUTOTENSORIAL(M11,N11)$P

```

```

k2<-dim(M11)[2]
k3<-dim(N11)[2]
lambda23estimada=matrix(0,n,n)
for(i in 1:n){
for(j in 1:n) {
lambda23estimada[i,j]=sum((mlec2)*matrix(matrix(M11[i,],k2,1)
%*%matrix(N11[j,],1,k3),1,(k2*k3)))
}
}
list(lambda23estimada=lambda23estimada)
}
##Fim da função recupera lambda23 estimado#

# Início da função para calcular o produto tensorial entre as bases M e N#
PROUTOTENSORIAL = function(M,N){
X<-list(M,N)
P<-tensor.prod.model.matrix(X)
list(P=P)
}
# Fim da função para calcular o produto tensorial entre as bases M e N#

# Início da função para montar as matrizes usadas no H-splines#
MATRIZNOVA<-function(k1,k2,k3){
diagonal1<-rep(1,k1)
diagonal2<-rep(1,(k2*k3))
A1<-cbind( diag(diagonal1) ,matrix(0,k1,(k2*k3)) )

```

```

A2<-cbind(matrix(0,(k2*k3),k1),diag(diagonal2) )
list(A1=A1,A2=A2)}

#Fim da função para montar as matrizes#

# Início da função para calcular Omega1 #
OMEGA = function(ndt,knots1){
base1 <- create.bspline.basis(c(knots1[1],knots1[ndt+8]),breaks=knots1[4:(ndt+5)])
OMEGA1 <- getbasispenalty(base1)
list(OMEGA1=OMEGA1)
}

# Fim da função para calcular Omega1 #

# Início da função para calcular a matriz F #
FUNCF <-function(xx,M,bdeg2,ndx,n3,yy,N,bdeg3,ndy,xxl,xxr,yyl,yyr,knots2,knots3){
k2<-dim(M)[2]
k3<-dim(N)[2]
f2<-dim(N)[2]
f1<-dim(M)[2]
ndxx<-ndx
ndyy<-ndy
base2 <- create.bspline.basis(c(knots2[1],knots2[ndx+8]),breaks=knots2[4:(ndx+5)])
base3 <- create.bspline.basis(c(knots3[1],knots3[ndy+8]),breaks=knots3[4:(ndy+5)])
F <- kronecker(getbasispenalty(base2),getbasispenalty(base3))
list(F=F)
}

# Fim da função para calcular a matriz F #

```

```

# Início da função métrica H-spline#
metrica<-function(ndt,ndx,ndy,t,x,y){
  ndx=ndx
  ndy=ndx
  ndt=ndt
  tl=min(t)
  tr=max(t)
  xl=min(x)
  xr= max(x)
  yl=min(y)
  yr= max(y)
  n1=length(t)
  n2=length(x)
  n3=length(y)
  ntt<-length(t)
  nxx<-length(x)
  nyy<-length(y)
  n<-length(t)
  bdeg1= 3
  bdeg2= 3
  bdeg3= 3
  m1=length(t)
  m2=length(x)
  m3=length(y)
  B<-bsnorm1(t, tl, tr, ndt, bdeg1 )$B

```

```

B2<-bsnorm1(t, tl, tr, ndt, bdeg1)$B2
B1<-bsnorm1(t, tl, tr, ndt, bdeg1)$B1
knots1<-bsnorm1(t, tl, tr, ndt, bdeg1)$knots1
M<-bsnorm2(x, xl, xr, ndx, bdeg2 )$M
M2<-bsnorm2(x, xl, xr, ndx, bdeg2)$M2
M1<-bsnorm2(x, xl, xr, ndx, bdeg2)$M1
knots2<-bsnorm2(x, xl, xr, ndx, bdeg2)$knots2
N<-bsnorm3(y, yl, yr, ndy, bdeg3)$N
N2<-bsnorm3(y, yl, yr, ndy, bdeg3)$N2
knots3<-bsnorm3(y, yl, yr, ndy, bdeg3)$knots3
k1=dim(B)[2]
k2<-dim(M)[2]
k3<-dim(N)[2]
tt<-seq(min(t),max(t),length=n)
xx<-seq(min(x),max(x),length=n)
yy<-seq(min(y),max(y),length=n)
n11=length(tt)
n22=length(xx)
n33=length(yy)
ndtt= ndt
ndxx= ndx
ndyy= ndy
ttl=min(tt)
ttr=max(tt)
xxl=min(xx)
xxr=max(xx)

```

```

yyl=min(yy)
yyr=max(yy)
bdeg11=3
bdeg22= 3
bdeg33= 3
m1=length(tt)
m2=length(xx)
m3=length(yy)
tt<-sort(tt)
xx<-sort(xx)
yy<-sort(yy)
m1=length(tt)
m2=length(xx)
m3=length(yy)
B11<-bsnorm1(tt, ttl, ttr, ndtt, bdeg11 )$B
M11<-bsnorm2(xx, xxl, xxr, ndxx, bdeg22 )$M
N11<-bsnorm3(yy, yyn, yyr, ndyy, bdeg33 )$N
B112<-bsnorm1(tt, ttl, ttr, ndtt, bdeg11 )$B2
P11<-PROUTOTENSORIAL(M11,N11)$P
P<-PROUTOTENSORIAL(M,N)$P
fn1<-function(CC,alpha,t,x,y,ndt,ndx,ndy){
  ndx=ndx
  ndy=ndx
  ndt=ndt
  tl=min(t)
  tr=max(t)

```

```

xl=min(x)
xr= max(x)
yl=min(y)
yr= max(y)
n1=length(t)
n2=length(x)
n3=length(y)
ntt<-length(t)
nxx<-length(x)
nyy<-length(y)
n<-length(t)
bdeg1= 3
bdeg2= 3
bdeg3= 3
m1=length(t)
m2=length(x)
m3=length(y)
B<-bsnorm1(t, tl, tr, ndt, bdeg1 )$B
B2<-bsnorm1(t, tl, tr, ndt, bdeg1)$B2
B1<-bsnorm1(t, tl, tr, ndt, bdeg1)$B1
knots1<-bsnorm1(t, tl, tr, ndt, bdeg1)$knots1
M<-bsnorm2(x, xl, xr, ndx, bdeg2 )$M
M2<-bsnorm2(x, xl, xr, ndx, bdeg2)$M2
M1<-bsnorm2(x, xl, xr, ndx, bdeg2)$M1
knots2<-bsnorm2(x, xl, xr, ndx, bdeg2)$knots2
N<-bsnorm3(y, yl, yr, ndy, bdeg3)$N

```



```

N2<-bsnorm3(y, yl, yr, ndy, bdeg3)$N2
N1<-bsnorm3(y, yl, yr, ndy, bdeg3)$N1
knots3<-bsnorm3(y, yl, yr, ndy, bdeg3)$knots3
k1=dim(B)[2]
k2<-dim(M)[2]
k3<-dim(N)[2]
tt<-seq(min(t),max(t),length=n)
xx<-seq(min(x),max(x),length=n)
yy<-seq(min(y),max(y),length=n)
n11=length(tt)
n22=length(xx)
n33=length(yy)
ndtt= ndt
ndxx= ndx
ndyy= ndy
ttl=min(tt)
ttr=max(tt)
xxl=min(xx)
xxr=max(xx)
yyl=min(yy)
yyr=max(yy)
bdeg11=3
bdeg22= 3
bdeg33= 3
m1=length(tt)
m2=length(xx)

```

```

m3=length(yy)
tt<-sort(tt)
xx<-sort(xx)
yy<-sort(yy)
m1=length(tt)
m2=length(xx)
m3=length(yy)
B11<-bsnorm1(tt, ttl, ttr, ndtt, bdeg11 )$B
B111<-bsnorm1(tt, ttl, ttr, ndtt, bdeg11 )$B1
B112<-bsnorm1(tt, ttl, ttr, ndtt, bdeg11 )$B2
M11<-bsnorm2(xx, xxl, xxr, ndxx, bdeg22 )$M
M111<-bsnorm2(xx, xxl, xxr, ndxx, bdeg22 )$M1
M112<-bsnorm2(xx, xxl, xxr, ndxx, bdeg22 )$M2
N11<-bsnorm3(yy, yyl, yyr, ndyy, bdeg33 )$N
N111<-bsnorm3(yy, yyl, yyr, ndyy, bdeg33 )$N1
N112<-bsnorm3(yy, yyl, yyr, ndyy, bdeg33 )$N2
P11<-PROUTOTENSORIAL(M11,N11)$P
P<-PROUTOTENSORIAL(M,N)$P
#OMEGA1<-((1/n11)*(ttr-ttl)*( t(B111)%*%B111 + t(B112)%*%B112 ) )
#F=((1/n22)*(xxr-xxl)*(1/n33)*(yyr=yyr))
#*(( kronecker( (t(M111)%*%M111),(t(N11)%*%N11))
# + kronecker( (t(M11)%*%M11),(t(N111)%*%N111)))
#+ ( kronecker( (t(M11)%*%M11),(t(N112)%*%N112))
# + 2*(kronecker( (t(M111)%*%M111),(t(N111)%*%N111)))
#+ kronecker( (t(M112)%*%M112),(t(N11)%*%N111)))
OMEGA1<-OMEGA(ndt,knots1)$OMEGA1

```

```

F<-FUNCF(xx,M,bdeg2,ndx,n3,yy,N,bdeg3,ndy,xxl,xxr,yyl,yyr,knots2,knots3)$F
k1<-(ndt+4)
k2<-(ndx+4)
k3<-(ndy+4)
A1<-MATRIZNOVA(k1,k2,k3)$A1
A2<-MATRIZNOVA(k1,k2,k3)$A2
n1=length(t)
n2=length(x)
n3=length(y)
int123<-function(t,x,y){
exp( (B11%%(A1%%CC))%%t(P11%%(A2%%CC)) )
}
INT123<-MC.integrate.3D(int123,low=c(tl,xl,yl),upp=c(tr,xr,yr),npoints=n
,exact.value=NULL)
INT123<-INT123$approx
PENALTY<-( alpha[1]*(t(A1%%CC))%%OMEGA1%%((A1%%CC)))
+ alpha[2]*(t(A2%%CC))%%F%%((A2%%CC)))

# Inicio da função Likelihood #
likelihood = ( (apply(matrix( ( B%%(A1%%CC))%%
t(P%%(A2%%CC))),n1,1),2,sum)-INT123)
- ( ((tr-tl)*(xr-xl)*(yr-yl)*(1/n1)*(1/n2)*(1/n3))*sum(PENALTY) ) )
return(as.vector(-likelihood))

# Fim da funçãoLikelihood #

}

```

```

fn2<-function(alpha,CC,t,x,y,ndt,ndx,ndy){
  ndx=ndx
  ndy=ndx
  ndt=ndt
  tl=min(t)
  tr=max(t)
  xl=min(x)
  xr= max(x)
  yl=min(y)
  yr= max(y)
  n1=length(t)
  n2=length(x)
  n3=length(y)
  ntt<-length(t)
  nxx<-length(x)
  nyy<-length(y)
  n<-length(t)
  bdeg1= 3
  bdeg2= 3
  bdeg3= 3
  m1=length(t)
  m2=length(x)
  m3=length(y)
  B<-bsnorm1(t, tl, tr, ndt, bdeg1 )$B
  B2<-bsnorm1(t, tl, tr, ndt, bdeg1)$B2
  B1<-bsnorm1(t, tl, tr, ndt, bdeg1)$B1

```

```

knots1<-bsnorm1(t, tl, tr, ndt, bdeg1)$knots1
M<-bsnorm2(x, xl, xr, ndx, bdeg2 )$M
M2<-bsnorm2(x, xl, xr, ndx, bdeg2)$M2
M1<-bsnorm2(x, xl, xr, ndx, bdeg2)$M1
knots2<-bsnorm2(x, xl, xr, ndx, bdeg2)$knots2
N<-bsnorm3(y, yl, yr, ndy, bdeg3)$N
N2<-bsnorm3(y, yl, yr, ndy, bdeg3)$N2
N1<-bsnorm3(y, yl, yr, ndy, bdeg3)$N1
knots3<-bsnorm3(y, yl, yr, ndy, bdeg3)$knots3
k1=dim(B)[2]
k2<-dim(M)[2]
k3<-dim(N)[2]
tt<-seq(min(t),max(t),length=n)
xx<-seq(min(x),max(x),length=n)
yy<-seq(min(y),max(y),length=n)
n11=length(tt)
n22=length(xx)
n33=length(yy)
ndtt= ndt
ndxx= ndx
ndyy= ndy
ttl=min(tt)
ttr=max(tt)
xxl=min(xx)
xxr=max(xx)
yyl=min(yy)

```

```

yyr=max(yy)
bdeg11=3
bdeg22= 3
bdeg33= 3
m1=length(tt)
m2=length(xx)
m3=length(yy)
tt<-sort(tt)
xx<-sort(xx)
yy<-sort(yy)
m1=length(tt)
m2=length(xx)
m3=length(yy)
B11<-bsnorm1(tt, ttl, ttr, ndtt, bdeg11 )$B
B111<-bsnorm1(tt, ttl, ttr, ndtt, bdeg11 )$B1
B112<-bsnorm1(tt, ttl, ttr, ndtt, bdeg11 )$B2
M11<-bsnorm2(xx, xxl, xxr, ndxx, bdeg22 )$M
M111<-bsnorm2(xx, xxl, xxr, ndxx, bdeg22 )$M1
M112<-bsnorm2(xx, xxl, xxr, ndxx, bdeg22 )$M2
N11<-bsnorm3(yy, yyl, yyr, ndyy, bdeg33 )$N
N111<-bsnorm3(yy, yyl, yyr, ndyy, bdeg33 )$N1
N112<-bsnorm3(yy, yyl, yyr, ndyy, bdeg33 )$N2
P11<-PROUTOTENSORIAL(M11,N11)$P
P<-PROUTOTENSORIAL(M,N)$P
OMEGA1<-OMEGA(ndt,knots1)$OMEGA1
F<-FUNCF(xx,M,bdeg2,ndx,n3,yy,N,bdeg3,ndy,xxl,xxr,yyl,yyr,knots2,knots3)$F

```

```

k1<-(ndt+4)
k2<-(ndx+4)
k3<-(ndy+4)
A1<-MATRIZNOVA(k1,k2,k3)$A1
A2<-MATRIZNOVA(k1,k2,k3)$A2
n1=length(t)
n2=length(x)
n3=length(y)
int123<-function(t,x,y){
exp( (B11%%(A1%%CC))%%t(P11%%(A2%%CC)) )
}
INT123<-MC.integrate.3D(int123,low=c(tl,xl,yl),upp=c(tr,xr,yr),npoints=n
,exact.value=NULL)
INT123<-INT123$approx
PENALTY<-( allpha[1]*(t(A1%%CC))%%OMEGA1%%((A1%%CC)))
+ allpha[2]*(t(A2%%CC))%%F%%((A2%%CC)))
# Inicio da função Likelihood #
likelihood = ( apply(matrix( ( B%%(A1%%CC))%%
t(P%%(A2%%CC))),n1,1),2,sum)-INT123)
- ( ((tr-tl)*(xr-xl)*(yr-yl)*(1/n1)*(1/n2)*(1/n3))*sum(PENALTY) ) )
return(as.vector(-likelihood))
# Fim da funçãoLikelihood #

}
#obter alpha0 ing0<-log(CHUTEINICIAL(ndt,ndx,ndy,t,x,y)$CC)
CC0<-ing0

```

```

ingallpha0<-log(CHUTEINICIAL2(ndt,ndx,ndy,t,x,y)$allpha)
CCallpha0<-ingallpha0
out1<-nlminb(CCallpha0,fn2,CC=CC0,t=t,x=x,y=y,ndt=ndt
,ndx=ndx,ndy=ndy,control=list(iter.max = 1500,
eval.max=5000,step.min=1e-23,x.tol=1e-15,maxit = 10000))
estimate1<-exp(out1$par)
ing1<-(CHUTEINICIAL(ndt,ndx,ndy,t,x,y)$CC)
CC1<-ing1
mlec1<-ing1[1:(ndt+4)]
mlec2<-ing1[(ndt+4+1):((ndt+4)+(ndx+4)*(ndy+4))]
allpha1<-estimate1[1]
allpha2<-estimate1[2]
#usar alpha0 para obter beta que depende de alpha0
CC2<-log(c(mlec1,mlec2))
CCallpha1<-log(c(allpha1,allpha2))
out2<-nlminb(CC2,fn1,allpha=CCallpha1,t=t,x=x,
y=y,ndt=ndt,ndx=ndx,ndy=ndy,control=list(iter.max = 1500
,eval.max=5000,step.min=1e-23,x.tol=1e-15,maxit = 10000))
estimate2<-exp(out2$par)
#usar beta que depende de alpha0 para obter alpha
mlec12<-estimate2[1:(ndt+4)]
mlec22<-estimate2[(ndt+4+1):((ndt+4)+(ndx+4)*(ndy+4))]
CC3<-log(c(mlec12,mlec22))
CCallpha2<-(c(allpha1,allpha2))
ingallpha3<-log(CHUTEINICIAL2(ndt,ndx,ndy,t,x,y)$allpha)
CCallpha3<-ingallpha3

```



```

out3<-nlminb(CCallpha3,fn2,CC=CC3,t=t,x=x,y=y,ndt=ndt
,ndx=ndx,ndy=ndy,control=list(iter.max = 1500,eval.max=5000
,step.min=1e-23,x.tol=1e-15,maxit = 10000))
estimate3<-(out3$par)
allpha13<-estimate3[1]
allpha23<-estimate3[2]
#usar alpha para obter beta
ing4<-log(CHUTEINICIAL(ndt,ndx,ndy,t,x,y)$CC)
CC4<-ing4
CCallpha4<-(c(allpha13,allpha23))
out4<-nlminb(CC4,fn1,alpha=CCallpha4,t=t,x=x,y=y,
ndt=ndt,ndx=ndx,ndy=ndy,control=list(iter.max = 1500
,eval.max=5000,step.min=1e-23,x.tol=1e-15,maxit = 10000))
out1<-out4
out1$par<-exp(out1$par)
out3$par<-exp(out3$par)
list(out1=out1,out3=out3) }

# Fim da função métrica H-spline #

# Início da função para montar as matrizes: log-verossimilhança não penalizada,
AIC e BIC#

MATRIZNOVA<-function(k1,k2,k3){
diagonal1<-rep(1,k1)
diagonal2<-rep(1,(k2*k3))

```

```

A1<-cbind( diag(diagonal1) ,matrix(0,k1,(k2*k3)) )
A2<-cbind(matrix(0,(k2*k3),k1),diag(diagonal2) )
list(A1=A1,A2=A2)}
# Fim da função para montar as matrizes: log-verossimilhança não penalizada, AIC e
BIC#

```

```

# Início da função métrica: log-verossimilhança não penalizada, AIC e BIC#
metrica<-function(ndt,ndx,ndy,t,x,y){
ndx=ndx
ndy=ndx
ndt=ndt
tl=min(t)
tr=max(t)
xl=min(x)
xr= max(x)
yl=min(y)
yr= max(y)  n1=length(t)
n2=length(x)
n3=length(y)
ntt<-length(t)
nxx<-length(x)
nyy<-length(y)
n<-length(t)
bdeg1= 3
bdeg2= 3
bdeg3= 3

```

```

m1=length(t)
m2=length(x)
m3=length(y)
B<-bsnorm1(t, tl, tr, ndt, bdeg1 )$B
B2<-bsnorm1(t, tl, tr, ndt, bdeg1)$B2
B1<-bsnorm1(t, tl, tr, ndt, bdeg1)$B1
knots1<-bsnorm1(t, tl, tr, ndt, bdeg1)$knots1
M<-bsnorm2(x, xl, xr, ndx, bdeg2 )$M
M2<-bsnorm2(x, xl, xr, ndx, bdeg2)$M2
M1<-bsnorm2(x, xl, xr, ndx, bdeg2)$M1
knots2<-bsnorm2(x, xl, xr, ndx, bdeg2)$knots2
N<-bsnorm3(y, yl, yr, ndy, bdeg3)$N
N2<-bsnorm3(y, yl, yr, ndy, bdeg3)$N2
knots3<-bsnorm3(y, yl, yr, ndy, bdeg3)$knots3
k1=dim(B)[2]
k2<-dim(M)[2]
k3<-dim(N)[2]
tt<-seq(min(t),max(t),length=n)
xx<-seq(min(x),max(x),length=n)
yy<-seq(min(y),max(y),length=n)
n11=length(tt)
n22=length(xx)
n33=length(yy)
ndtt= ndt
ndxx= ndx
ndyy= ndy

```

```

ttl=min(tt)
ttr=max(tt)
xxl=min(xx)
xxr=max(xx)
yyl=min(yy)
yyr=max(yy)
bdeg11=3
bdeg22= 3
bdeg33= 3
m1=length(tt)
m2=length(xx)
m3=length(yy)
tt<-sort(tt)
xx<-sort(xx)
yy<-sort(yy)
m1=length(tt)
m2=length(xx)
m3=length(yy)
B11<-bsnorm1(tt, ttl, ttr, ndtt, bdeg11 )$B
M11<-bsnorm2(xx, xxl, xxr, ndxx, bdeg22 )$M
N11<-bsnorm3(yy, yy1, yyr, ndyy, bdeg33 )$N
B112<-bsnorm1(tt, ttl, ttr, ndtt, bdeg11 )$B2
P11<-PROUTOTENSORIAL(M11,N11)$P
P<-PROUTOTENSORIAL(M,N)$P
n<-length(tt)
fn1<-function(CC,t,x,y,ndt,ndx,ndy){

```

```

tl=min(t)
tr=max(t)
xl=min(x)
xr= max(x)
yl=min(y)
yr= max(y)
k1<-(ndt+4)
k2<-(ndx+4)
k3<-(ndy+4)
tt<-seq(min(t),max(t),length=n)
xx<-seq(min(x),max(x),length=n)
yy<-seq(min(y),max(y),length=n)
ttl=min(tt)
ttr=max(tt)
xxl=min(xx)
xxr=max(xx)
yyl=min(yy)
yyr=max(yy)
A1<-MATRIZNOVA(k1,k2,k3)$A1
A2<-MATRIZNOVA(k1,k2,k3)$A2
B<-bsnorm1(t, tl, tr, ndt, bdeg1 )$B
M<-bsnorm2(x, xl, xr, ndx, bdeg2 )$M
N<-bsnorm3(y, yl, yr, ndy, bdeg3)$N
B11<-bsnorm1(tt, ttl, ttr, ndtt, bdeg11 )$B
M11<-bsnorm2(xx, xxl, xxr, ndxx, bdeg22 )$M
N11<-bsnorm3(yy, yyn, yyn, ndyy, bdeg33 )$N

```

```

B112<-bsnorm1(tt, ttl, ttr, ndtt, bdeg11 )$B2
P11<-PROUTOTENSORIAL(M11,N11)$P
P<-PROUTOTENSORIAL(M,N)$P
n1=length(t)
n2=length(x)
n3=length(y)
n=n3
int123<-function(t,x,y){
exp( (B11%%(A1%%CC))%%t(P11%%(A2%%CC)) )
}
INT123<-MC.integrate.3D(int123,low=c(tl,xl,yl),upp=c(tr,xr,yr),npoints=n
,exact.value=NULL)
INT123<-INT123$approx

# Inicio da função Likelihood #
likelihood = ( apply(matrix(( B%%(A1%%CC))%%t(P%%(A2%%CC)) )
,n1,1),2,sum)-INT123) )
return(as.vector(likelihood))
# Fim da funçãoLikelihood #
}
ing<-log(CHUTEINICIAL(ndt,ndx,ndy,t,x,y)$CC)
CC<-ing
out1<- nlminb(CC,fn1,t=t,x=x,y=y,ndt=ndt,ndx=ndx,ndy=ndy,control=list(iter.max
=
1500,eval.max=5000,step.min=1e-23,x.tol=1e-15,maxit = 10000))
out1$par<-exp(out1$par)

```

```

list(out1=out1)}
#Fim da função métrica: log-verossimilhança não penalizada, AIC e BIC#

#Início da Função Afinidade 1 #
afinidade1<-function(ndt,ndx,ndy,t,x,y){
  tl=min(t)
  tr=max(t)
  xl=min(x)
  xr= max(x)
  yl=min(y)
  yr= max(y)
  n=length(y)
  bdeg1= 3
  bdeg2= 3
  bdeg3= 3
  n1=length(t)
  n2=length(x)
  n3=length(y)
  n=length(y)
  ndx=ndy
  out1<-metrica(ndt,ndx,ndy,t,x,y)$out1
  estimate<-out1$par
  #estimate<-out1$estimate
  mlec1<-estimate[1:(ndt+4)]
  mlec2<-estimate[(ndt+4+1):((ndt+4)+(ndx+4)*(ndy+4))]
  tt<-seq(min(t),max(t),length=n)

```

```

xx<-seq(min(x),max(x),length=n)
yy<-seq(min(y),max(y),length=n)
tt<-sort(tt)
xx<-sort(xx)
yy<-sort(yy)
tl=min(tt)
tr=max(tt)
xl=min(xx)
xr= max(xx)
yl=min(yy)
yr= max(yy)
B11<-bsnorm1(tt, tl, tr, ndt, bdeg1 )$B
M11<-bsnorm2(xx, xl, xr, ndx, bdeg2 )$M
N11<-bsnorm3(yy, yl, yr, ndy, bdeg3)$N
lambdachapeu1<-((B11%*%mlec1))
k2<-dim(M11)[2]
k3<-dim(N11)[2]
lambdachapeu2=matrix(0,n,n)
for(i in 1:n)
{
for(j in 1:n)
{
lambdachapeu2[i,j]=sum((mlec2)*
matrix(matrix(M11[i,],k2,1)%*%matrix(N11[j,],1,k3),1,(k2*k3)))
}
}
}

```



```

g1<-lambdachapeu2%%lambdachapeu1
# Adicionando uma unidade em ndx e ndy#
out2<-metrica(ndt,ndx=(ndx+1),ndy=(ndy+1),t,x,y)$out1
estimate2<-out2$par
#estimate2<-out2$estimate
mlec1<-estimate2[1:(ndt+4)]
mlec2<-estimate2[(ndt+4+1):((ndt+4)+(ndx+1+4)*(ndy+1+4))]
B22<-bsnorm1(tt, tl, tr, ndt, bdeg1 )$B
M22<-bsnorm2(xx, xl, xr, ndx=(ndx+1), bdeg2 )$M
N22<-bsnorm3(yy, yl, yr, ndy=(ndy+1), bdeg3)$N
lambdachapeu122<-((B22%%mlec1))
lambdachapeu122<-((B22%%mlec1))
k22<-dim(M22)[2]
k32<-dim(N22)[2]
lambdachapeu222=matrix(0,n,n)
for(i in 1:n)
{
for(j in 1:n)
{
lambdachapeu222[i,j]=sum((mlec2)*
matrix(matrix(M22[i,],k22,1)%%matrix(N22[j,],1,k32),1,(k22*k32)))
}
}
f1<-(lambdachapeu222)%(lambdachapeu122)
dif1=(max(tt)-min(tt))/n1
dif2=(max(xx)-min(xx))/n2

```

```

dif3=(max(yy)-min(yy))/n3
peso=(dif1*dif2*dif3)
denominadorg1<-sum((g1*g1)*peso)
denominadorf1<-sum((f1*f1)*peso)
tg1<-(g1*g1)/denominadorg1
tf1<-(f1*f1)/denominadorf1
afinit1<-sum(sqrt((tg1)*tf1))*peso
k1=dim(B11)[2]
k2<-dim(M11)[2]
k3<-dim(N11)[2]
K1= k1
K2= k2
K3= k3
afinit1<-afinit1
RESULTADO<-afinit1
list(RESULTADO=RESULTADO)}
#Fim da Função Afinidade 1 #

#Início da Função Afinidade 2#
afinidade2<-function(ndt,ndx,ndy,t,x,y){
  tl=min(t)
  tr=max(t)
  xl=min(x)
  xr= max(x)
  yl=min(y)
  yr= max(y)

```

```

n=length(y)
bdeg1= 3
bdeg2= 3
bdeg3= 3
n1=length(t)
n2=length(x)
n3=length(y)
n=length(y)
ndx=ndy
out1<-metrica(ndt,ndx,ndy,t,x,y)$out1
estimate<-out1$par
#estimate<-out1$estimate
mlec1<-estimate[1:(ndt+4)]
mlec2<-estimate[(ndt+4+1):((ndt+4)+(ndx+4)*(ndy+4))]
tt<-seq(min(t),max(t),length=n)
xx<-seq(min(x),max(x),length=n)
yy<-seq(min(y),max(y),length=n)
tt<-sort(tt)
xx<-sort(xx)
yy<-sort(yy)
tl=min(tt)
tr=max(tt)
xl=min(xx)
xr= max(xx)
yl=min(yy)
yr= max(yy)

```

```

B11<-bsnorm1(tt, tl, tr, ndt, bdeg1 )$B
M11<-bsnorm2(xx, xl, xr, ndx, bdeg2 )$M
N11<-bsnorm3(yy, yl, yr, ndy, bdeg3)$N
lambdachapeu1<-((B11%%mlec1))
k1=dim(B11)[2]
k2<-dim(M11)[2]
k3<-dim(N11)[2]
lambdachapeu2=matrix(0,n,n)
for(i in 1:n)
{
for(j in 1:n)
{
lambdachapeu2[i,j]=sum((mlec2)*
matrix(matrix(M11[i,],k2,1)%*%matrix(N11[j,],1,k3),1,(k2*k3)))
}
}
g1<-lambdachapeu2%%lambdachapeu1
# Adicionando uma unidade em ndt#
out2<-metrica(ndt=(ndt+1),ndx=ndx,ndy=ndy,t,x,y)$out1
estimate2<-out2$par
#estimate2<-out2$estimate
mlec1<-estimate2[1:(ndt+4+1)]
mlec2<-estimate2[(ndt+4+1+1):((ndt+4+1)+(ndx+4)*(ndy+4))]
B22<-bsnorm1(tt, tl, tr, ndt=(ndt+1), bdeg1 )$B M22<-bsnorm2(xx, xl, xr, ndx=ndx,
bdeg2 )$M
N22<-bsnorm3(yy, yl, yr, ndy=ndy, bdeg3)$N

```

```

lambdachapeu122<-((B22%%mlec1))
k22<-dim(M22)[2]
k32<-dim(N22)[2]
lambdachapeu222=matrix(0,n,n)
for(i in 1:n)
{
for(j in 1:n)
{
lambdachapeu222[i,j]=sum((mlec2)*
matrix(matrix(M22[i,],k22,1)%%matrix(N22[j,],1,k32),1,(k22*k32)))
}
}
f1<-(lambdachapeu222)%%(lambdachapeu122)
dif1=(max(tt)-min(tt))/n1
dif2=(max(xx)-min(xx))/n2
dif3=(max(yy)-min(yy))/n3
peso=(dif1*dif2*dif3)
denominadorg1<-sum((g1*g1)*peso)
denominadorf1<-sum((f1*f1)*peso)
tg1<-(g1*g1)/denominadorg1
tf1<-(f1*f1)/denominadorf1
afinit1<-sum(sqrt((tg1)*tf1))*peso
k1=dim(B11)[2]
k2<-dim(M11)[2]
k3<-dim(N11)[2]
K1= k1

```

```

K2= k2
K3= k3
afinit1<-afinit1
RESULTADO<-afinit1
list(RESULTADO=RESULTADO)}
#Fim da Função Afinidade 2 #

#Início da Função contagem Algoritmo1 #
contagem1algoritmo1<-function(t,x,y){
ndt<-0
ndx<-0
ndy<-ndx
# Início do passo 1 #
RESPOSTA1<-TRUE
while(RESPOSTA1){
afinidade<- afinidade1(ndt,ndx,ndy=ndx,t,x,y)$RESULTADO
ndx<- (ndx+1)
ndy<-ndx
diferenca<-abs(1-afinidade)
if( (diferenca <= 1e-04) )
RESPOSTA1<-FALSE}
ndt<-ndt
ndxotimo<-ndx
ndyotimo<-ndx
# Fim do passo 1 #
# Início do passo 2 #

```

```

RESPOSTA1<-TRUE
while(RESPOSTA1) {
afinidade<- afinidade2(ndt,ndx=ndxotino,ndy=ndxotimo,t,x,y)$RESULTADO
ndx<-ndxotimo
ndy<-ndxotimo
ndt=ndt+1
diferenca<-abs(1-afinidade)
if( (diferenca <= 1e-04) )
RESPOSTA1<-FALSE}
ndt<-ndt
ndx<-ndxotimo
ndy<-ndxotimo
# Fim do passo 2 #
RESULTADOFINAL<-matrix(c(ndt,ndx,ndy),1,3)
list(RESULTADOFINAL=RESULTADOFINAL)}
#Fim da Função contagem Algoritmo 1#

# Início da função aglomerado #
aglomerado<-function(m){
s<- superposition(m)$s
t<-s[1,]
x<-s[2,]
y<-s[3,]
t<-as.numeric(t)
x<-as.numeric(x)
y<-as.numeric(y)

```

```

quantidade<-s[4,1]
n=length(y)
RESULTADOFINAL2ALGORITMO1<-contagem1algoritmo1(t,x,y)$RESULTADOFINAL
ndt<-(RESULTADOFINAL2ALGORITMO1[1,1])
ndx<-(RESULTADOFINAL2ALGORITMO1[1,2])
ndy<-(RESULTADOFINAL2ALGORITMO1[1,2])
out1<-metrica(ndt,ndx,ndy,t,x,y)$out1
estimate<-out1$par
#estimate<-out1$estimate
tt<-seq(min(t),max(t),length=n)
xx<-seq(min(x),max(x),length=n)
yy<-seq(min(y),max(y),length=n)
lambda1<-funclambda1(n)$lambda1
lambda23<-funclambda23(n)$lambda23
tl=min(tt)
tr=max(tt)
xl=min(xx)
xr= max(xx)
yl=min(yy)
yr= max(yy)
bdeg1= 3
bdeg2= 3
bdeg3= 3
B11<-bsnorm1(t, tl, tr, ndt, bdeg1 )$B
M11<-bsnorm2(x, xl, xr, ndx, bdeg2 )$M
N11<-bsnorm3(y, yl, yr, ndy, bdeg3)$N

```



```

P11<-PROUTOTENSORIAL(M11,N11)$P
mlec1<-estimate[1:dim(B11)[2]]
mlec2<-estimate[(dim(B11)[2]+1):(dim(B11)[2]+dim(M11)[2]*dim(N11)[2])]
lambdachapeu1<-((B11%%mlec1))
lambdachapeu23<-
funclambda23(t,x,y,mlec2,ndt,ndx,ndy)$lambda23estimada
lambda1<-matrix(lambda1,n,1)
g1<-lambdachapeu23%%(lambdachapeu1)
f1<-(lambda23)%%(lambda1)
denominadorg1<-function(t,x,y){
((g1*g1))}
denominadorf1<-function(t,x,y){
((f1*f1))}
denominadorg1<-MC.integrate.3D(denominadorg1f,low=c(tl,xl,yl),upp=c(tr,xr,yr),
npoints=n,exact.value=NULL)
denominadorg1<-denominadorg1$approx
denominadorf1<-MC.integrate.3D(denominadorf1f,low=c(tl,xl,yl),upp=c(tr,xr,yr),
npoints=n,exact.value=NULL)
denominadorf1<-denominadorf1$approx
tg1<-(g1*g1)/denominadorg1
tf1<-(f1*f1)/denominadorf1
llf<-function(t,x,y){
(abs(tg1-tf1))}
dqif<-function(t,x,y){
((tf1-tg1)^2)}
hellingerf<-function(t,x,y){

```

```

( sqrt(tg1)-sqrt(tf1) )^2}
klf<-function(t,x,y){
((log(tf1)-log(tg1))*tf1)}
afinidade<-function(t,x,y){
(sqrt((tg1)*tf1))}
L1<-MC.integrate.3D(l1f,low=c(tl,xl,yl),upp=c(tr,xr,yr),npoints=n,
exact.value=NULL)
L1<-L1$approx
DQI<-MC.integrate.3D(dqif,low=c(tl,xl,yl),upp=c(tr,xr,yr),npoints=n
,exact.value=NULL)
DQI<-DQI$approx
HELLINGER<-MC.integrate.3D(hellingerf,low=c(tl,xl,yl),
upp=c(tr,xr,yr),npoints=n,exact.value=NULL)
HELLINGER<-HELLINGER$approx
KL<-MC.integrate.3D(klf,low=c(tl,xl,yl),upp=c(tr,xr,yr)
,npoints=n,exact.value=NULL)
KL<-KL$approx
AFINIDADE<-MC.integrate.3D(afinidadef,low=
c(tl,xl,yl),upp=c(tr,xr,yr),npoints=n,exact.value=NULL)
AFINIDADE<-AFINIDADE$approx
EXTRACT<-matrix(c(L1,DQI,HELLINGER,KL,AFINIDADE,ndt,ndx
,quantidade),1,8)
list(EXTRACT=EXTRACT) }
# Fim da função aglomerado#

#Início da função replicar #

```

```

replicacao<-function(m,rep){
A<- matrix(NA, rep, 8)
a<- matrix(NA, rep, 8)
for (r in 1:rep){
a[r,]=matrix(aglomerado(m)$EXTRACT,1,8)
A[r,1]=a[r,1]
A[r,2]=a[r,2]
A[r,3]=a[r,3]
A[r,4]=a[r,4]
A[r,5]=a[r,5]
A[r,6]=a[r,6]
A[r,7]=a[r,7]
A[r,8]=a[r,8]}
list(A=A)}
# Fim da função replicar #

#Métodos AIC e BIC#
nlimite = 7
nestrela<-(nlimite - 4)

#Início da Função contagem AIC BIC#
contagemAICBIC<-function(t,x,y,nestrela,n){
AIC<- matrix(NA, (nestrela+1), (nestrela+1) )
BIC<- matrix(NA, (nestrela+1), (nestrela+1) )
K1<- matrix(NA, (nestrela+1), (nestrela+1) )
K<- matrix(NA, (nestrela+1), (nestrela+1) )

```

```

for(ndt in 0:nestrela){
for(ndx in 0:nestrela){
ndt<-ndt
ndx<-ndx
ndy<-ndx
saida1 <- metrica(ndt=(ndt+1),ndx=(ndx+1),ndy=(ndy+1),t,x,y)$out1
minimumaic<-saida1$objective
saida2 <- metrica(ndt=(ndt+1),ndx=(ndx+1),ndy=(ndy+1),t,x,y)$out2
minimumbic<-saida2$objective
#AIC[(ndt+1),(ndx+1)]<- aic
#BIC[(ndt+1),(ndx+1)]<- bic
l1 <- (ndt+4+1)
l <- (ndx+4+1)
AIC[(ndt+1),(ndx+1)]<- (-2*(minimumaic) + 2*(l1+(l*1)))
BIC[(ndt+1),(ndx+1)]<- (-2*(minimumbic) + log(n)*(l1+(l*1)))
K1[(ndt+1),(ndx+1)]<-(ndt+4+1)
K[(ndt+1),(ndx+1)] <-(ndx+4+1)} }
AIC<- matrix(t(AIC),1,(nestrela+1)^(2}, byrow = TRUE)
BIC<- matrix(t(BIC),1,(nestrela+1)^(2}, byrow = TRUE)
K1 <-matrix(t(K1),1,(nestrela+1)^(2}, byrow = TRUE)
K <-matrix(t(K),1,(nestrela+1)^(2}, byrow = TRUE)
RESULTADOFINAL<-matrix(c(K1,K,AIC,BIC),((nestrela+1)^(2)),4)
list(RESULTADOFINAL=RESULTADOFINAL)}
# Fim da Função contagem AIC BIC #
#Início da função aglomerado AIC e BIC#
aglomerado<-function(m,nestrela)

```

```

s<- superposition(m)$s
t<-s[1,]
x<-s[2,]
y<-s[3,]
t<-as.numeric(t)
x<-as.numeric(x)
y<-as.numeric(y)
quantidade<-s[4,1]
n=length(y)
tt<-seq( 0,1,length=n)
xx<-seq(-3,3,length=n)
yy<-seq(-3,3,length=n)
RESULTADOFINALAICBIC<-contagemAICBIC(t,x,y,nestrela,n)$RESULTADOFINAL
w1 <- which.min(RESULTADOFINALAICBIC[,3])
ndtAIC<-(RESULTADOFINALAICBIC[w1,1]-4)
ndxAIC<-(RESULTADOFINALAICBIC[w1,2]-4)
ndyAIC<-ndxAIC
w2 <- which.min(RESULTADOFINALAICBIC[,4])
ndtBIC<-(RESULTADOFINALAICBIC[w2,1]-4)
ndxBIC<-(RESULTADOFINALAICBIC[w2,2]-4)
ndyBIC<-ndxBIC
out1AIC<-metrica(ndt=ndtAIC,ndx=ndxAIC,ndy=ndyAIC,t,x,y)$out1
estimateAIC<-out1AIC$par
#estimate<-out1$estimate
out1BIC<-metrica(ndt=ndtBIC,ndx=ndxBIC,ndy=ndyBIC,t,x,y)$out1
estimateBIC<-out1BIC$par

```

```

#estimate<-out1$estimate
lambda1<-funclambda1(n)$lambda1
lambda23<-funclambda23(n)$lambda23
tt<-sort(tt)
xx<-sort(xx)
yy<-sort(yy)
tl=min(tt)
tr=max(tt)
xl=min(xx)
xr= max(xx)
yl=min(yy)
yr= max(yy)
bdeg1= 3
bdeg2= 3
bdeg3= 3
B11AIC<-bsnorm1(tt, tl, tr, ndtAIC, bdeg1 )$B
M11AIC<-bsnorm2(xx, xl, xr, ndxAIC, bdeg2 )$M
N11AIC<-bsnorm3(yy, yl, yr, ndyAIC, bdeg3)$N
B11BIC<-bsnorm1(tt, tl, tr, ndtBIC, bdeg1 )$B
M11BIC<-bsnorm2(xx, xl, xr, ndxBIC, bdeg2 )$M
N11BIC<-bsnorm3(yy, yl, yr, ndyBIC, bdeg3)$N
mlec1AIC<-estimateAIC[1:dim(B11AIC)[2]]
mlec2AIC<-estimateAIC[(dim(B11AIC)[2]+1):(dim(B11AIC)[2]+dim(M11AIC)[2]
*dim(N11AIC)[2])]
lambdachapeu1AIC<-((B11AIC%*%mlec1AIC))
lambdachapeu23AIC<-

```

```

funclambdarecupera23(t,x,y,mlec2AIC,ndt,ndx,ndy)$lambda23estimada
lambda1<-matrix(lambda1,n,1)
g1AIC<-lambdachapeu23AIC%%(lambdachapeu1AIC)
mlec1BIC<-estimateBIC[1:dim(B11BIC)[2]]
mlec2BIC<-estimateBIC[(dim(B11BIC)[2]+1):(dim(B11BIC)[2]+dim(M11BIC)[2]
*dim(N11BIC)[2])]
lambdachapeu1BIC<-((B11BIC%%mlec1BIC))
lambdachapeu23BIC<-
funclambdarecupera23(t,x,y,mlec2BIC,ndt,ndx,ndy)$lambda23estimada
g1BIC<-lambdachapeu23BIC%%(lambdachapeu1BIC)
f1<-(lambda23)%%(lambda1)
denominadorg1AICf<-function(t,x,y){
((g1AIC*g1AIC))}
denominadorg1BICf<-function(t,x,y){
((g1BIC*g1BIC))}
denominadorf1f<-function(t,x,y){
((f1*f1))}
denominadorg1AIC<-MC.integrate.3D(denominadorg1AICf,low=c(tl,xl,yl),
upp=c(tr,xr,yr),npoints=n,exact.value=NULL)
denominadorg1AIC<-denominadorg1AIC$approx
denominadorg1BIC<-MC.integrate.3D(denominadorg1BICf,low=c(tl,xl,yl),
upp=c(tr,xr,yr),npoints=n,exact.value=NULL)
denominadorg1BIC<-denominadorg1BIC$approx
denominadorf1<-MC.integrate.3D(denominadorf1f,low=c(tl,xl,yl),
upp=c(tr,xr,yr),npoints=n,exact.value=NULL)
denominadorf1<-denominadorf1$approx

```

```

tg1AIC<-(g1AIC*g1AIC)/denominadorg1AIC
tg1BIC<-(g1BIC*g1BIC)/denominadorg1BIC
tf1<-(f1*f1)/denominadorf1
AFINIDADEAICf<-function(t,x,y){
  (sqrt((tg1AIC)*tf1))}
AFINIDADEBICf<-function(t,x,y){
  (sqrt((tg1BIC)*tf1))}
AFINIDADEAIC<-MC.integrate.3D(AFINIDADEAICf,low=c(tl,xl,yl),upp=c(tr,xr,yr),
  npoints=n,exact.value=NULL)
AFINIDADEAIC<-AFINIDADEAIC$approx
AFINIDADEBIC<-MC.integrate.3D(AFINIDADEBICf,low=c(tl,xl,yl),upp=c(tr,xr,yr),
  npoints=n,exact.value=NULL)
AFINIDADEBIC<-AFINIDADEBIC$approx
list(AFINIDADEAIC=AFINIDADEAIC,AFINIDADEBIC=AFINIDADEBIC,
  ndtAIC=ndtAIC,ndxAIC=ndxAIC,ndtBIC=ndtBIC,ndxBIC=ndxBIC,
  quantidade=quantidade)}
#Fim da função aglomerado AIC e BIC#

#Início da função replicar AIC e BIC#
replicacao<-function(m, rep,nestrela){
  quantidade<-array(NA, dim = rep, dimnames = NULL)
  k1AIC<-array(NA, dim = rep, dimnames = NULL)
  kAIC<-array(NA, dim = rep, dimnames = NULL)
  AFINIDADEAIC<-array(NA, dim = rep, dimnames = NULL)
  k1BIC<-array(NA, dim = rep, dimnames = NULL)
  kBIC<-array(NA, dim = rep, dimnames = NULL)

```



```

AFINIDADEBIC<-array(NA, dim = rep, dimnames = NULL)
for (r in 1:rep){
quantidade[r]<-aglomerado(m,nestrela)$quantidade
k1AIC[r]<-(aglomerado(m,nestrela)$ndtAIC)+4
kAIC[r]<-(aglomerado(m,nestrela)$ndxAIC)+4
AFINIDADEAIC[r]<-aglomerado(m,nestrela)$AFINIDADEAIC
k1BIC[r]<-(aglomerado(m,nestrela)$ndtBIC)+4
kBIC[r]<-(aglomerado(m,nestrela)$ndxBIC)+4
AFINIDADEBIC[r]<-aglomerado(m,nestrela)$AFINIDADEBIC}
RESULTADOFINAL<-matrix(c(AFINIDADEAIC,k1AIC,kAIC,AFINIDADEBIC
,k1BIC,kBIC,quantidade) ,rep,7)
list(RESULTADOFINAL=RESULTADOFINAL)}
# Fim da função replicar AIC e BIC#

#Estudo de simulação 1#
m=5
rep=500
RESULTADOS1N15<-replicacao(m,rep)$A
RESULTADOS1N15
RESULTADOS1N15AICBIC<-replicacao(m, rep,nestrela)$RESULTADOFINAL
RESULTADOS1N15AICBIC
m=11
rep=500
RESULTADOS1N30<-replicacao(m, rep)$A
RESULTADOS1N30
RESULTADOS1N30AICBIC<-replicacao(m, rep,nestrela)$RESULTADOFINAL

```

```

RESULTADOS1N30AICBIC
m=36
rep=500
RESULTADOS1N100<-replicacao(m, rep)$A
RESULTADOS1N100
RESULTADOS1N100AICBIC<-replicacao(m, rep,nestrela)$RESULTADOFINAL
RESULTADOS1N100AICBIC
m=181
rep=500
RESULTADOS1N500<-replicacao(m, rep)$A
RESULTADOS1N500
RESULTADOS1N500AICBIC<-replicacao(m, rep,nestrela)$RESULTADOFINAL
RESULTADOS1N500AICBIC
#Estudo de simulação 2#
m=1
rep=500
RESULTADOS2N15<-replicacao(m, rep)$A
RESULTADOS2N15
RESULTADOS2N15AICBIC<-replicacao(m, rep,nestrela)$RESULTADOFINAL
RESULTADOS2N15AICBIC
m=2
rep=500
RESULTADOS2N30<-replicacao(m, rep)$A
RESULTADOS2N30
RESULTADOS2N30AICBIC<-replicacao(m, rep,nestrela)$RESULTADOFINAL
RESULTADOS2N30AICBIC

```

```

m=6
rep=500
RESULTADOS2N100<-replicacao(m, rep)$A
RESULTADOS2N100
RESULTADOS2N100AICBIC<-replicacao(m, rep,nestrela)$RESULTADOFINAL
RESULTADOS2N100AICBIC
m=36
rep=500
RESULTADOS2N500<-replicacao(m, rep)$A
RESULTADOS2N500
RESULTADOS2N500AICBIC<-replicacao(m, rep,nestrela)$RESULTADOFINAL
RESULTADOS2N500AICBIC
#Estudo de simulação 3#
m=8
rep=500
RESULTADOS3N15<-replicacao(m, rep)$A
RESULTADOS3N15
RESULTADOS3N15AICBIC<-replicacao(m, rep,nestrela)$RESULTADOFINAL
RESULTADOS3N15AICBIC
m=26
rep=500
RESULTADOS3N30<-replicacao(m, rep)$A
RESULTADOS3N30
RESULTADOS3N30AICBIC<-replicacao(m, rep,nestrela)$RESULTADOFINAL
RESULTADOS3N30AICBIC
m=73

```

```

rep=500
RESULTADOS3N100<-replicacao(m, rep)$A
RESULTADOS3N100
RESULTADOS3N100AICBIC<-replicacao(m, rep,nestrela)$RESULTADOFINAL
RESULTADOS3N100AICBIC
m=350
rep=500
RESULTADOS3N500<-replicacao(m, rep)$A
RESULTADOS3N500
RESULTADOS3N500AICBIC<-replicacao(m, rep,nestrela)$RESULTADOFINAL
RESULTADOS3N500AICBIC
#Estudo de simulação 4#
m=4
rep=500
RESULTADOS4N15<-replicacao(m, rep)$A
RESULTADOS4N15
RESULTADOS4N15AICBIC<-replicacao(m, rep,nestrela)$RESULTADOFINAL
RESULTADOS4N15AICBIC
m=9
rep=500
RESULTADOS4N30<-replicacao(m, rep)$A
RESULTADOS4N30
RESULTADOS4N30AICBIC<-replicacao(m, rep,nestrela)$RESULTADOFINAL
RESULTADOS4N30AICBIC
m=29
rep=500

```

```
RESULTADOS4N100<-replicacao(m, rep)$A
RESULTADOS4N100
RESULTADOS4N100AICBIC<-replicacao(m, rep,nestrela)$RESULTADOFINAL
RESULTADOS4N100AICBIC
m=146
rep=500
RESULTADOS4N500<-replicacao(m, rep)$A
RESULTADOS4N500
RESULTADOS4N500AICBIC<-replicacao(m, rep,nestrela)$RESULTADOFINAL
RESULTADOS4N500AICBIC
```


Apêndice F

Programas utilizados nos Testes de Hipóteses.

#Teste de Hipóteses#

As funções para realizar os teste de Hipóteses foram retidas e adaptadas de Souza, (2008).

```
library(xtable)
```

```
library(splines)
```

```
library(mgcv)
```

```
library(fda)
```

```
estatL1<-c(RESULTADO[,1])
```

```
estatDQI<-c(RESULTADO[,2])
```

```
estatHel<-c(RESULTADO[,3])
```

```
estatKL<-c(RESULTADO[,4])
```

```
afinidade<-c(RESULTADO[,5])
```

```

parametros<-matrix(0,nrow=5,ncol=5)
parametros2<-matrix(0,nrow=5,ncol=3)

gamaparam<-fitdistr(estatL1, "gamma")$estimate
gamaparam<-fitdistr(estatL1, "gamma",list(shape=gamaparam[1],rate=
gamaparam[2]))$estimate
gama<-rgamma(rep,shape=gamaparam[1],rate=gamaparam[2])
normparam<-fitdistr(estatL1, "normal")$estimate
norm<-rnorm(rep,mean=normparam[1],sd=normparam[2])
norm1<-norm
gama1<-gama
vetornorm<-as.vector(normparam)
vetorgama<-as.vector(gamaparam)
vetornorm<-as.numeric(format(vetornorm,digits = 4))
vetorgama<-as.numeric(format(vetorgama,digits = 4))
parametros[1,]<-c("Estatística L1",vetorgama[1],(1/vetorgama[2]),
vetornorm)
parametros2[1,]<-c("Estatística L1",ks.test(estatL1,norm)$statistic,
ks.test(estatL1,norm)$p.value)
hist(estatL1,prob=T,xlab="Estatística L1",ylab="Densidade",
cex = 1.7, cex.axis = 1.7, cex.lab = 1.7
,cex.sub = 1.7, main="Número esperado de pontos: n = 30",
cex.main = 2.7)#, ylim=c(0,2.4))
lines(sort(norm),dnorm(sort(norm), mean=normparam[1],sd=normparam[2]),
type = "l",lty=1, main=, col="green", cex = 0.7,lwd=7,bty = "n")

```



```

lines(sort(gama),dgamma(sort(gama), shape=gamaparam[1],rate=gamaparam[2]),
type = "l", main=,lty=2, col="blue", cex = 0.7,lwd=7,bty = "n")
lines(density(estatL1,bw="bcv"), type = "l", main=,lty=3, col="red",
cex = 1.7,lwd=7,bty = "n")estimativa de densidade por kernel
legend(locator(1), legend = c("Normal", "Gama", "Estimativa por Kernel"),
col=c("green","blue","red"),lty=c(1,2,3),merge = TRUE,lwd=7)
legend(locator(1), legend = c("Gama", "Estimativa por Kernel"),
col=c("blue","red"),lty=c(2,3),merge = TRUE,lwd=7)

#estatHel
gamaparam<-fitdistr(estatHel, "gamma")$estimate
gamaparam<-fitdistr(estatHel, "gamma",list(shape=gamaparam[1],
rate=gamaparam[2]))$estimate
gama<-rgamma(rep,shape=gamaparam[1],rate=gamaparam[2])
normparam<-fitdistr(estatHel, "normal")$estimate
norm<-rnorm(rep,mean=normparam[1],sd=normparam[2])
norm2<-norm
gama2<-gama
vetornorm<-as.vector(normparam)
vetorgama<-as.vector(gamaparam)
vetornorm<-as.numeric(format(vetornorm,digits = 4))
vetorgama<-as.numeric(format(vetorgama,digits = 4))
parametros[2,]<-c("Estatística de Hellinger",vetorgama[1],(1/vetorgama[2])
,vetornorm)
parametros2[2,]<-c("Estatística de Hellinger",ks.test(estatHel,norm)$statistic
, ks.test(estatHel,norm)$p.value)

```

```

hist(estatHel,prob=T,xlab="Estatística de Hellinger",ylab="Densidade",
cex = 1.7, cex.axis = 1.7, cex.lab = 1.7,
cex.sub = 1.7, main="Número esperado de pontos: n = 30", cex.main = 2.7)
#, ylim=c(0,3.7))
lines(sort(norm),dnorm(sort(norm), mean=normparam[1],sd=normparam[2]),
type = "l",lty=1, main=, col="green", cex = 0.7,lwd=7,bty = "n")
lines(sort(gama),dgamma(sort(gama), shape=gamaparam[1],rate=gamaparam[2])
, type = "l", main=,lty=2, col="blue", cex = 0.7,lwd=7,bty = "n")
lines(density(estatHel,bw="bcv"), type = "l", main=,lty=3, col="red", cex = 1.7,
lwd=7,bty = "n")#estimativa de densidade por kernel
legend(locator(1), legend = c("Normal", "Gama", "Estimativa por Kernel"),
col=c("green","blue","red"),lty=c(1,2,3),merge = TRUE,lwd=7)
legend(locator(1), legend = c( "Gama", "Estimativa por Kernel"),
col=c("blue","red"),lty=c(2,3),merge = TRUE,lwd=7)

#estatDQI
gamaparam<-fitdistr(estatDQI, "gamma")$estimate
gamaparam<-fitdistr(estatDQI, "gamma",list(shape=gamaparam[1],
rate=gamaparam[2]))$estimate
gama<-rgamma(rep,shape=gamaparam[1],rate=gamaparam[2])
normparam<-fitdistr(estatDQI, "normal")$estimate
norm<-rnorm(rep,mean=normparam[1],sd=normparam[2])
norm3<-norm
gama3<-gama
vetornorm<-as.vector(normparam)
vetorgama<-as.vector(gamaparam)

```

```

vetornorm<-as.numeric(format(vetornorm,digits = 4))
vetorgama<-as.numeric(format(vetorgama,digits = 4))
parametros[3,]<-c("Estatística DQI",vetorgama[1],(1/vetorgama[2]),
vetornorm)
parametros2[3,]<-c("Estatística DQI",ks.test(estatDQI,norm)$statistic
, ks.test(estatDQI,norm)$p.value)
hist(estatDQI,prob=T,xlab="Estatística DQI",ylab="Densidade",cex = 1.7,
cex.axis = 1.7, cex.lab = 1.7,cex.sub = 1.7,
main="Número esperado de pontos: n = 30", cex.main = 2.7)#,ylim=c(0,2.3))
lines(sort(norm),dnorm(sort(norm), mean=normparam[1],sd=normparam[2]),
type = "l",lty=1, main=, col="green", cex = 0.7,lwd=7,bty = "n")
lines(sort(gama),dgamma(sort(gama), shape=gamaparam[1],rate=gamaparam[2]),
type = "l", main=,lty=2, col="blue", cex = 0.7,lwd=7,bty = "n")
lines(density(estatDQI,bw="bcv"), type = "l", main=,lty=3, col="red", cex = 1.7,
lwd=7,bty = "n")#estimativa de densidade por kernel
legend(locator(1), legend = c("Normal", "Gama", "Estimativa por Kernel"),
col=c("green","blue","red"),lty=c(1,2,3),merge = TRUE,lwd=7)
legend(locator(1), legend = c( "Gama", "Estimativa por Kernel"),
col=c("blue","red"),lty=c(2,3),merge = TRUE,lwd=7)

#estatKL
gamaparam<-fitdistr(estatKL, "gamma")$estimate
gamaparam<-fitdistr(estatKL, "gamma",list(shape=gamaparam[1],
rate=gamaparam[2]))$estimate
gama<-rgamma(rep,shape=gamaparam[1],rate=gamaparam[2])
normparam<-fitdistr(estatKL, "normal")$estimate

```

```

norm<-rnorm(rep,mean=normparam[1],sd=normparam[2])
norm4<-norm
gama4<-gama
vetornorm<-as.vector(normparam)
vetorgama<-as.vector(gamaparam)
vetornorm<-as.numeric(format(vetornorm,digits = 4))
vetorgama<-as.numeric(format(vetorgama,digits = 4))
parametros[4,]<-c("Estatística Kullback-Leibler",vetorgama[1],
(1/vetorgama[2]),vetornorm)
parametros2[4,]<-c("Estatística Kullback-Leibler",
ks.test(estatKL,norm)$statistic, ks.test(estatKL,norm)$p.value)
hist(estatKL,prob=T,xlab="Estatística KL",ylab="Densidade",
cex = 1.7, cex.axis = 1.7, cex.lab = 1.7,cex.sub = 1.7,
main="Número esperado de pontos: n = 30", cex.main = 2.7)#
,ylim=c(0,0.45))
lines(sort(norm),dnorm(sort(norm), mean=normparam[1],
sd=normparam[2]),type = "l",lty=1, main=,
col="green", cex = 0.7,lwd=7,bty = "n")
lines(sort(gama),dgamma(sort(gama), shape=gamaparam[1],
rate=gamaparam[2]), type = "l", main=,lty=2,
col="blue", cex = 0.7,lwd=7,bty = "n")
lines(density(estatKL,bw="bcv"), type = "l", main=,lty=3,
col="red", cex = 1.7,lwd=7,bty = "n")
#estimativa de densidade por kernel
legend(locator(1), legend = c("Normal", "Gama", "Estimativa por
Kernel"), col=c("green","blue","red"),

```

```

lty=c(1,2,3),merge = TRUE,lwd=7) legend(locator(1), legend = c( "Gama", "Estimativa
por Kernel"),
col=c("blue", "red"),lty=c(2,3),merge = TRUE,lwd=7)

# afinidade
mafin=mean(afinidade)
alpha=mafin*(((mafin*(1-mafin))/var(afinidade))-1)
Betha=(1-mafin)*(((mafin*(1-mafin))/var(afinidade))-1)
betaparam<-fitdistr(afinidade,
"beta",list(shape1=alpha,shape2=Betha))$estimate
beta<-rbeta(rep,shape1=betaparam[1],shape2=betaparam[2])
normparam<-fitdistr(afinidade, "normal")$estimate
norm<-rnorm(rep,mean=normparam[1],sd=normparam[2])
norm5<-norm
beta<-beta
vetornorm<-as.vector(normparam)
vetorbeta<-as.vector(betaparam)
vetornorm<-as.numeric(format(vetornorm,digits = 4))
vetorgama<-as.numeric(format(vetorgama,digits = 4))
parametros[5,]<-c("Afinidade",vetorbeta,vetornorm)
parametros2[5,]<-c("Afinidade",ks.test(afinidade,norm)$statistic
, ks.test(afinidade,norm)$p.value)
hist(afinidade,prob=T,xlab="Afinidade",ylab="Densidade",cex = 1.7,
cex.axis = 1.7, cex.lab = 1.7,cex.sub = 1.7,
main="Número esperado de pontos: n = 30", cex.main = 2.7)
#,ylim=c(0,5.3))

```

```

lines(sort(norm),dnorm(sort(norm), mean=normparam[1],
sd=normparam[2]),type = "l",lty=1, main=, col="green",
cex = 0.7,lwd=7,bty = "n")
lines(sort(beta),dbeta(sort(beta),betaparam[1],betaparam[2]),
type = "l", main=,lty=2, col="blue", cex = 1.7,lwd=7,bty = "n")
lines(density(afinidade,bw="bcv"), type = "l", main=,lty=3, col="red",
cex = 1.7,lwd=7,bty = "n")#estimativa de densidade por kernel
legend(locator(1), legend = c("Normal", "Beta", "Estimativa por Kernel"),
col=c("green","blue","red"),lty=c(1,2,3),merge = TRUE,lwd=7)
legend(locator(1), legend = c("Beta", "Estimativa por Kernel"),
col=c("blue","red"),lty=c(2,3),merge = TRUE,lwd=7)

tabela<-xtable(parametros,digits=4)
print(tabela,type="latex","tabelal latex.tex")
tabela
tabela2<-xtable(parametros2,digits=4)
print(tabela2,type="latex","tabelal latex.tex")
tabela2

```