INTEGRAIS MONÓTONAS

ALBERTO MARTINS

Orientador

RODNEY C. BASSANEZI

Dissertação apresentada no Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação da Universidade Estadual de Campinas como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Campinas - 1980.

Ã
Rafael, Márcia, Glória, Mário.

AGRADECIMENTOS

Difícil seria citar todas as pessoas que, de maneira direta ou indiretamente, colaboraram na feitura desse trabalho. A todos, os meus sinceros agradecimentos, em especial:

"Ao Prof. Dr. Rodney Bassanezi, que muito nos auxiliou com sua orientação segura.

"Ao Prof. Franscisco Blasi, a quem tomamos como exemplo de dignidade, moral e amizade. Agradecemos também aos incentivos recebidos, desde nosso início em Matemática".

"Ao Prof. "Jony", amigo que nos auxiliou muito quando iniciamos o curso de mestrado em Matemática".

"Ao Prof. Makoto Anbe, a primeira pessoa que nos despertou para o estudo de Matemática.

Alberto Martins

Campinas - 1980.

INTRODUÇÃO

Seja $\mathbb{B}$ o espaço das funções contínuas definidas em $[a,b]$, com valores em $[0,+\infty)$. O funcional $T : \mathbb{B} \longrightarrow [0,+\infty)$ dado por $T(f) = \int_a^b f(x)dx$, associa a cada função f em $\mathbb{B}$, um número real não negativo, que representa a "área" da região compreendida entre o gráfico da função f e o eixo das abcissas.

Uma generalização do conceito anterior é obtida quando consideramos o funcional $T : \mathbb{B} \longrightarrow [0,+\infty]$ definido por $T(f) = \int_{\mathbb{E}} f d\alpha$, onde α é a medida de Lebesgue, $\mathbb{E}$ um conjunto mensurável e $f \in \mathbb{B}$, é uma função definida em $\mathbb{E}$ com valores em $[0,+\infty)$, f mensurável.

Ambos funcionais citados satisfazem as propriedades:

(i) $T(\overline{0}) = 0$, onde $\overline{0}$ é a função identicamente nula.

(ii) $T(f) \leq T(g)$ se $f \leq g$, $\forall f,g \in \mathbb{B}$.

(iii) $T(f) = T(f \wedge a) + T(f \vee a - a)$, $\forall f \in \mathbb{B}$, $\forall a \in [0,+\infty)$

(iv) $T(f) = \lim\limits_{n \to +\infty} T(f \wedge n)$

(v) $T(f) = \lim\limits_{n \to +\infty} T(f \vee \frac{1}{n} - \frac{1}{n})$, $\forall f \in \mathbb{B}$.

(vi) $T(\varphi_I) = \alpha(I)$ (medida de I), onde I é um intervalo real e φ_I a função característica de I.

(vii) $T(f) = T(f \cdot \varphi_I) + T(f \cdot \varphi_{\mathbb{R}-I})$, sendo I intervalo real.

O objetivo do nosso trabalho é definir um funcional $T : [0,+\infty]^{\mathbb{R}} \longrightarrow [0,+\infty]$, ou seja $T(f) \in [0,+\infty]$ sendo f uma função *qualquer* de $\mathbb{R}$ em $[0,+\infty]$, de modo que o valor $T(f)$ satisfaça as propriedades (i) a (vii) especificadas.

Consideremos $\alpha : P(\mathbb{R}) \longrightarrow [0,+\infty]$ uma função monótona de conjuntos, isto e, $\alpha(\emptyset)=0$, $\alpha(A) \leq \alpha(B)$ se $A \subset B$. O funcional,

$$\int_{\mathbb{R}} \cdot \, d\alpha \; : \; [0,+\infty]^{\mathbb{R}} \longrightarrow [0,+\infty] \quad \text{, definido por}$$

$$\int_{\mathbb{R}} f d\alpha = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\varepsilon} \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha\{f > n\varepsilon\} \quad \text{, satisfaz as propriedades (i)}$$

a (v) para cada α. Ainda mais, se T é um funcional definido em $[0,+\infty]^{\mathbb{R}}$ assumindo valores em $[0,+\infty]$ e satisfazendo as proprieda - des (i) a (v), a função monótona de conjuntos $\alpha : P(\mathbb{R}) \longrightarrow [0,+\infty]$, definida por $\alpha(A) = T(\varphi_A)$, $\forall A \in \mathbb{R}$, é a única função monótona de conjuntos tal que

$$T(f) = \int_{\mathbb{R}} f d\alpha \quad , \quad \forall f \in [0,+\infty]^{\mathbb{R}} \, .$$

Se o conjunto $\mathbb{R}$ for substituído por um conjunto X qual- quer, $X \neq \emptyset$, podemos definir de modo análogo, a quantidade " $\int_X f d\alpha$ ", denominada "integral da f sobre X, em relação a fun- ção monótona de conjuntos $\alpha : P(X) \longrightarrow [0,+\infty]$, $\forall f \in [0,+\infty]^{\mathbb{R}}$ ".

Chamaremos de *integral monótona*, qualquer funcional $T : \mathbb{B} \longrightarrow [0,+\infty]$, $\mathbb{B} \subset [0,+\infty]^X$, $X \neq \emptyset$, que verifica as propriedades:

(i) $a \in [0,+\infty)$, $f \in \mathbb{B} \longrightarrow af,\ f \wedge a,\ f \vee a - a \in \mathbb{B}$.

(ii) $f,g \in \mathbb{B}$, $f \leq g \longrightarrow T(f) \leq T(g)$.

(iii) $T(a \cdot f) \overset{(1)}{=} a \cdot T(f)$, $\forall a \in [0,+\infty)$, $\forall f \in \mathbb{B}$.

(iv) $T(f) = T(f \wedge a) + T(f \vee a - a)$, $a \in [0,+\infty)$, $\forall f \in \mathbb{B}$.

(v) $T(f) = \lim\limits_{n \to +\infty} T(f \wedge n)$, $\forall f \in \mathbb{B}$, $n \in \mathbb{N}$.

(vi) $T(f) = \lim\limits_{n \to +\infty} T(f \vee \frac{1}{n} - \frac{1}{n})$, $\forall f \in \mathbb{B}$, $n \in \mathbb{N}$:

Para qualquer integral monótona T, $T : \mathbb{B} \subset [0,+\infty]^X \to [0,+\infty]$, $X \neq \emptyset$, existe um teorema de representação do tipo de Riesz, ou seja, se "$\alpha_T, \beta_T : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0,+\infty]$, são funções monótonas de conjuntos definidos por:

$$\alpha_T(A) = \sup\{T(f) : f \in \mathbb{B},\ f \leq \varphi_A\},$$

$$\beta_T(A) = \inf\{T(f) : f \in \mathbb{B},\ f \geq \varphi_A\}^{(2)} ,$$

(*) [illegible]

(1) $0 \cdot (+\infty)$ [illegible]

(2) $\inf(\emptyset) = +\infty$.

$\forall A \subset X$, então, uma função monótona de conjuntos $\alpha : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0,+\infty]$ é tal que $T(f) = \int_X f d\alpha$, $\forall f \in \mathbb{B}$, se e somente se $\alpha_T \leq \alpha \leq \beta_T$.

Visando facilitar a leitura para aqueles que se iniciam nesse estudo, muitas vezes optamos por uma demonstração mais extensa, porém mais simples, sem contudo deixar de seguir uma sequência lógica dos resultados.

A continuação natural desse trabalho seria o estudo da linearidade das integrais monótonas que só não foi aqui abordado porque extenderíamos por demais o assunto, extrapolando assim, o objetivo proposto inicialmente.

CAPÍTULO I

INTEGRAIS MONÓTONAS

DEFINIÇÃO 1.: Seja $\mathbb{A} \neq \emptyset$ um conjunto, e $[0,+\infty]^{\mathbb{A}}$ a classe das funções definidas em $\mathbb{A}$ e assumindo valores em $[0,+\infty]$. Consideremos $\mathbb{B} \subset [0,+\infty]^{\mathbb{A}}$, $\mathbb{B} \neq \emptyset$ satisfazendo

(i) Para todo $\lambda \in [0,+\infty]$ e $g \in \mathbb{B}$ tem-se que $\lambda g \in \mathbb{B}$, $g \wedge \lambda \in \mathbb{B}$, $g \vee \lambda - \lambda \in \mathbb{B}$.

Uma aplicação $T : \mathbb{B} \longrightarrow [0,+\infty]$ é chamada "integral monótona" se valem as seguintes propriedades:

(ii) $T(\lambda f) = \lambda T(f)$, $\forall f \in \mathbb{B}$, $\forall \lambda \in [0,+\infty)$

(T é homogênea)

(iii) $(\forall f, g \in \mathbb{B};\ f \leq g) \Longrightarrow (T(f) \leq T(g))$

(Monotocidade)

(iv) $T(f) = T(f \wedge \lambda) + T(f \vee \lambda - \lambda)$, $\forall f \in \mathbb{B}$ e $\lambda \in [0,+\infty)$

(v) $T(f) = \lim\limits_{n \to +\infty} T(f \wedge n)$; $\forall f \in \mathbb{B}$

(vi) $T(f) = \lim\limits_{n \to +\infty} T(f \wedge \frac{1}{n} - \frac{1}{n})$, $\forall f \in \mathbb{B}$.

Observações:

(1) $$(f \vee g)(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq g(x) \\ g(x) & \text{se } f(x) < g(x) \end{cases}$$

(2) $$(f \wedge g)(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se} \quad f(x) \leq g(x) \\ g(x) & \text{se} \quad f(x) > g(x) \end{cases}$$

(3) Convencionemos que $0 \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot 0 = 0$.

Assim se T é uma integral monótona as propriedades (i) e (ii) nos garantem que a função identicamente nula, $\overline{0}$, pertence a $\mathbb{B}$ e $T(\overline{0}) = 0$ pois: se $f \in \mathbb{B} \neq \emptyset$ por (i) $\overline{0} = 0 \cdot f \in \mathbb{B}$; por outro lado como T é homogênea e $f \in \mathbb{B}$ temos $T(0 \cdot f) = 0 \cdot T(f) = 0$, e assim $T(\overline{0}) = 0$.

(4) Dada $f \in \mathbb{B}$ e $\{\lambda, \mu\} \subset [0, +\infty)$, $\lambda \geq \mu$

então $f \wedge \lambda - f \wedge \mu = (f \wedge \lambda) \vee \mu - \mu$.

Demonstração:

$\forall x, y \in [0, +\infty]$ tem-se que $x \wedge y + x \vee y = x + y$, logo,

$(f \wedge \lambda) \wedge \mu + (f \wedge \lambda) \vee \mu = (f \wedge \lambda) + \mu \implies (f \wedge \lambda) \vee \mu - \mu =$

$= f \wedge \lambda - (f \wedge \lambda) \wedge \mu \implies (f \wedge \lambda) \vee \mu - \mu = f \wedge \lambda - f \wedge \mu$

cqd.

Prop. (1.1) Suponhamos que sejam verificados os itens (i), (iii), (iv) da definição de integral monótona para uma transformação $T : \mathbb{B} \to [0, +\infty]$. Então os itens (v) e (vi) equivalem a

(vii) $$\lim_{\substack{\lambda \to +\infty \\ \mu \to 0+}} T[(f \wedge \lambda) - (f \wedge \mu)] = T(f)$$

Dem.

($\Longrightarrow$) Vamos mostrar que se (i), (ii) e (iv) valem então (v) e (vi) implicam (vii). De fato:

$$\lim_{\substack{\lambda\to+\infty\\ \mu\to 0+}} T[f\wedge\lambda - f\wedge\mu] = \sup_{\substack{\lambda,\mu\in\mathbb{R}^+\\ \lambda\geq\mu}} \{T(f\wedge\lambda - f\wedge\mu)\} =$$

$$= \sup_{\lambda\in\mathbb{R}^+}\ \sup_{\mu\in\mathbb{R}^+} \{T(f\wedge\lambda - f\wedge\mu)\}\} =$$

$$= \sup_{\lambda\in\mathbb{R}^+}\ \lim_{\mu\to+\infty} \{T[(f\wedge\lambda)\vee\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu}] =$$

$$= \sup_{\lambda\in\mathbb{R}^+} T(f\wedge\lambda) = \lim_{\lambda\to+\infty} T(f\wedge\lambda) = T(f)$$

($\Longrightarrow$) Reciprocamente, se (i), (iii) e (iv) valem então (vii) implica (v) e (vi). Sabemos que $T(f) = \lim_{\substack{\lambda\to+\infty\\ \mu\to 0+}} (f\wedge\lambda - f\wedge\mu)$. Temos que, $f\wedge\lambda - f\wedge\mu \leq f\wedge\lambda \leq f \Longrightarrow$

$\Longrightarrow T(f\wedge\lambda - f\wedge\mu) \leq T(f\wedge\lambda) \leq T(f), \quad \forall\lambda,\mu\in[0,+\infty),$

logo $\lim_{\substack{\lambda\to+\infty\\ \mu\to 0+}} T(f\wedge\lambda - f\wedge\mu) \leq \lim_{\lambda\to+\infty} T(f\wedge\lambda) \leq T(f),$

ou seja, $T(f) \leq \lim_{\lambda\to+\infty} T(f\wedge\lambda) \leq T(f)$. Assim

$T(f) = \lim_{\lambda\to+\infty} T(f\wedge\lambda)$

Provemos (vi).

$$f\wedge\lambda \leq f \Longrightarrow (f\wedge\lambda)\vee\mu \leq f\vee\mu \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (f\vee\lambda)\vee\mu - \frac{1}{\mu} \leq f\vee\mu - \frac{1}{\mu} \leq f \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow T[(f\vee\lambda)\vee\mu - \frac{1}{\mu}] \leq T(f\vee\mu - \frac{1}{\mu}) \leq T(f),$$

$\forall\lambda,\mu\in[0,+\infty)$.

$$\therefore \lim_{\substack{\lambda \to +\infty \\ \mu \to 0+}} T[(f \vee \lambda) \vee \mu - \frac{1}{\mu}] \leq \lim_{\mu \to +0} T(f \vee \mu - \frac{1}{\mu}) \leq T(f) ,$$

ou seja, $T(f) \leq \lim_{\mu \to 0+} T(f \vee \mu - \frac{1}{\mu}) \leq T(f)$, e assim

$$T(f) = \lim_{\mu \to 0+} T(f \vee \mu - \frac{1}{\mu}).$$

Observações: Suponhamos que T verifica os itens (i) e (iv) da definição de integral monótona, então:

(a) $\forall f \in \mathbb{B}$, $T(f) = \lim_{n \to +\infty} T(f \wedge n) \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow T(f) = \sum_{n=1}^{+\infty} T(f \wedge n - f \wedge (n-1)) , \quad \forall f \in \mathbb{B}$$

(b) $\forall f \in \mathbb{B}$, $T(f) = \lim_{n \to +\infty} T(f \vee \frac{1}{n} - \frac{1}{n}) \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow T(f \wedge 1) = \sum_{n=1}^{+\infty} T(f \wedge \frac{1}{n} - f \wedge \frac{1}{n+1}) , \quad \forall f \in \mathbb{B}$$

De fato:

No item (a) as reduzidas da série são dadas por:

$$S_1 = T(f \wedge 1)$$

$$S_2 = T(f \wedge 1) + T(f \wedge 2 - f \wedge 1) = T(f \wedge 1) + T[(f \wedge 2) \vee 1 - 1] =$$

$$= T[(f \wedge 2) \wedge 1] + T[(f \wedge 2) \vee 1 - 1] = T(f \wedge 2).$$

Suponha $S_{n-1} = T(f \wedge (n-1))$. Assim

$$S_n = T[f \wedge (n-1)] + T[f \wedge n - f \wedge (n-1)] =$$

$$= T[(f \wedge n) \wedge (n-1)] + T[(f \wedge n) \vee (n-1) - (n-1)] =$$

$$= T(f \wedge n).$$

Mostramos por indução que $S_n = T(f \wedge n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e então:

$$T(f) = \lim_{n \to +\infty} T(f \wedge n) \iff T(f) = \sum_{n=1}^{\infty} T(f \wedge n - f \wedge (n-1))$$

Provemos agora o item (b).

As reduzidas da série $\sum_{i=1}^{+\infty} T(f \wedge \frac{1}{n} - f \wedge \frac{1}{n+1})$

são da forma:

$$S_{n-1} = T[(f \wedge 1) \vee \frac{1}{n} - \frac{1}{n}] \ ; \quad n \in \mathbb{N} \ , \ n \geq 2 \ , \text{ pois}$$

$$S_1 = T(f \wedge 1 - f \wedge \frac{1}{2}) = T[(f \wedge 1) \vee \frac{1}{2} - \frac{1}{2}] \quad \text{e}$$

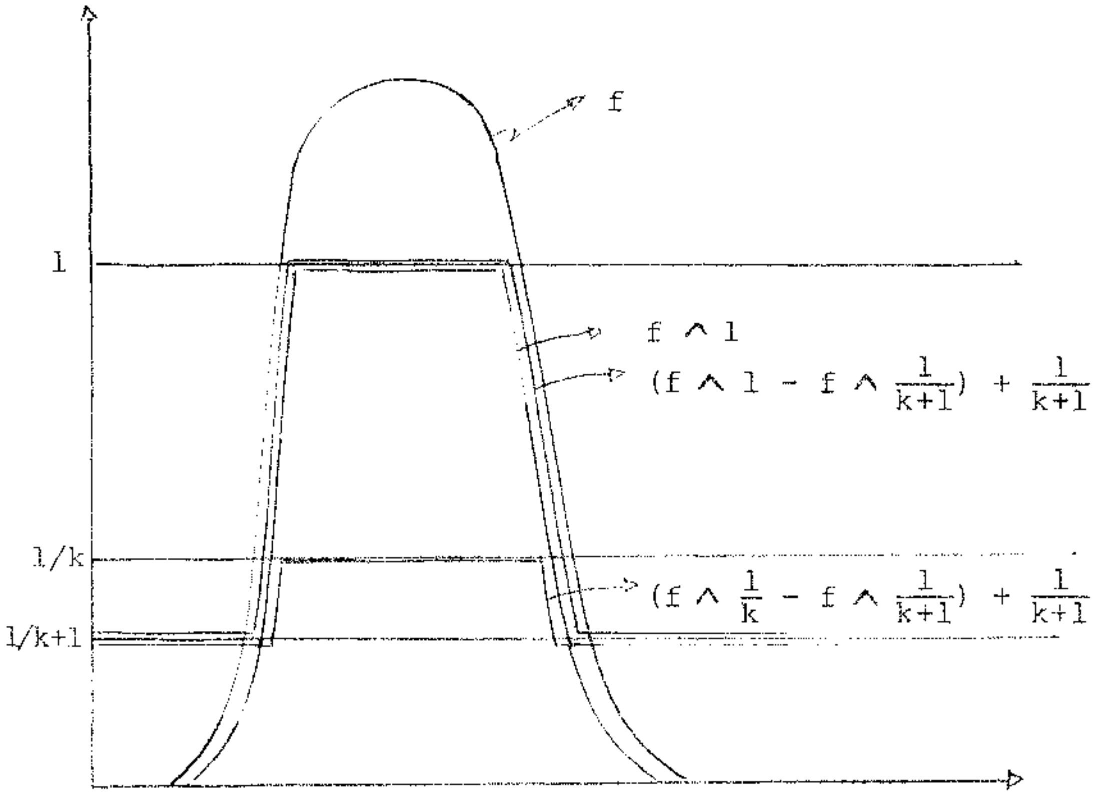
supondo válido que $S_{k-1} = T[(f \wedge 1) \vee \frac{1}{k} - \frac{1}{k}]$,

vamos mostrar que $S_k = T[(f \wedge 1) \vee \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+1}]$,

e teremos provado, por indução como são as reduzidas S_{n-1}.

$$S_k = T[(f \wedge 1) \vee \frac{1}{k} - \frac{1}{k}] + T(f \wedge \frac{1}{k} - f \wedge \frac{1}{k+1}) =$$

$$= T[(f \wedge 1) \vee \frac{1}{k} - \frac{1}{k}] + T[(f \wedge \frac{1}{k}) \vee \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+1}]$$



Temos

$$(f \wedge \frac{1}{k} - f \wedge \frac{1}{k+1}) = (f \wedge 1 - f \wedge \frac{1}{k+1}) \wedge (\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1})$$

e, $\quad (f \wedge 1) \vee \frac{1}{k} - \frac{1}{k} = f \wedge 1 - f \wedge \frac{1}{k} =$

$$= \quad (f \wedge 1 - f \wedge \frac{1}{k+1}) \vee (\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) - (\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) \; .$$

Logo

$$s_k = T[(f \wedge 1) \vee \frac{1}{k} - \frac{1}{k})] + T[(f \wedge \frac{1}{k}) \vee \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+1}] =$$

$$= T[(f \wedge 1 - f \wedge \frac{1}{k+1}) \vee (\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) - (\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1})] +$$

$$+ T[(f \wedge 1 - f \wedge \frac{1}{k+1}) \wedge (\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1})]^{(iv)}$$

$$= T(f \wedge 1 - f \wedge \frac{1}{k+1}) = T[(f \wedge 1) \vee \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+1}]$$

$$\therefore s_k = T[(f \wedge 1) \vee \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+1}]$$

Provemos agora a equivalência

$(\Longrightarrow)$ Como qualquer $f \in \mathbb{B}$,

$$T(f) = \lim_{n \to +\infty} T(f \vee \frac{1}{n} - \frac{1}{n}) \quad \text{então,}$$

$$T(f \wedge 1) = \lim_{n \to +\infty} T[(f \wedge 1) \vee \frac{1}{n} - \frac{1}{n}] =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} s_{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} T(f \wedge \frac{1}{n} - f \wedge \frac{1}{n+1})$$

$(\Longleftarrow)$ $\forall f \in \mathbb{B}$, $T(f \wedge 1) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} T(f \wedge \frac{1}{k} - f \wedge \frac{1}{k+1}) =$

$$= \lim_{k \to +\infty} s_{k-1} = \lim_{k \to +\infty} T[(f \wedge 1) \vee \frac{1}{k} - \frac{1}{k}]$$

$$\therefore T(f) = \lim_{k \to +\infty} T[(f \wedge 1) \vee \frac{1}{k} - \frac{1}{k}]) +$$

$$+ T[f \vee 1 - 1] = \lim_{k \to +\infty} \{T[(f \wedge 1) \vee \frac{1}{k} - \frac{1}{k}] + T(f \vee 1 - 1)\} =$$

$$= \lim_{k \to +\infty} T(f \vee \frac{1}{k} - \frac{1}{k}).$$

TEOREMA (1.1) - Sejam, T uma integral monótona definida em $\mathbb{B} \subset [0, +\infty]^{\mathbb{A}}$, $\mathbb{A} \neq \emptyset$, k um número natural qualquer, $(g_n)_{n=1}^{+\infty}$ uma sequência de funções tal que $g_n \in \mathbb{B}$ e "g" uma função pertencente a $\mathbb{B}$. Se $(g_n \wedge k) \xrightarrow{\cdot} g \wedge k$, $\forall k \in \mathbb{N}$, uniformemente(*) então:

(viii) $T(g) \leq \liminf_{n} T(g_n)$

Demonstração:

Como $g_n \wedge k \to g \wedge k$ uniformemente, $\forall k \in \mathbb{N}$, então dado $\varepsilon = \frac{1}{k}$, $\exists n(k)$ tal que $\forall n$, $n \geq n(k)$ teremos, $g \wedge k - \frac{1}{k} \leq g_n \wedge k \leq g \wedge k + \frac{1}{k}$, logo $g \wedge k \leq g_n \wedge k + \frac{1}{k}$, daí,

$$(g \wedge k) \vee \frac{1}{k} \leq (g_n \wedge k + \frac{1}{k}) \vee \frac{1}{k} = g_n \wedge k + \frac{1}{k}$$

Agora, como $(g \wedge k) \vee \frac{1}{k} - \frac{1}{k} \leq g_n \wedge k$ temos que

$$T[(g \wedge k) \vee \frac{1}{k} - \frac{1}{k}] \leq T(g_n \wedge k) \leq T(g_n),$$

pois T é monótona.

Logo $T(g \wedge k - g \wedge \frac{1}{k}) \leq T(g_n)$, $\forall k \in \mathbb{N}$ e $n \geq n(k)$, e assim, $\forall k \in \mathbb{N}$, tem-se

(*) [illegible]

$$T(g \wedge k - g \wedge \frac{1}{k}) \leq \inf_{n \geq n(k)} T(g_n) \leq \sup_{k \in \mathbb{N}} \inf_{n \geq n(k)} T(g_n) ;$$

segue-se então que,

$$\liminf_{k} T(g \wedge k - g \wedge \frac{1}{k}) \leq \sup_{k \in \mathbb{N}} \inf_{n \geq n(k)} T(g_n).$$

Concluímos então que:

$$T(g) = \lim_{k \to +\infty} T(g \wedge k - g \wedge \frac{1}{k}) =$$

$$= \liminf_{k} T(g \wedge k - g \wedge \frac{1}{k}) \leq \liminf_{n} T(g_n),$$

ou seja:

$$\boxed{T(g) \leq \liminf_{n} T(g_n)} \qquad \text{(viii)}$$

PROPOSIÇÃO (1.2) Se valem (i), (ii), (iii) e (iv) da definição de integral monótona então (viii) $\Longrightarrow$ (v) e (vi)

Prova:

(a) (viii) $\Longrightarrow$ (v) , de fato:

Seja $(g_n) = (f \wedge n)$ uma sequência crescente de funções em $\mathbb{B}$, $g_n \wedge k = (f \wedge n) \wedge k$ converge uniformemente a $f \wedge k$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Logo pela (viii), $T(f) \leq \liminf_{n} T(f \wedge n) \leq T(f)$.

Portanto, $T(f) = \liminf_n T(f \wedge n)$, e como a sequência $\langle g_n \rangle$ é crescente o limite inferior de $T(f \wedge n)$ é o próprio limite e assim:

$$\boxed{T(f) = \lim_{n \to +\infty} T(f \wedge n)} \qquad (v)$$

(b) (viii) $\Longrightarrow$ (vi), de fato:

Seja $g_n = f \vee \frac{1}{n} - \frac{1}{n}$, que formam uma sequência crescente.

$$f \vee \frac{1}{n} - \frac{1}{n} = \begin{cases} f - \frac{1}{n} & \text{se} \quad f \geq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{se} \quad f < \frac{1}{n} \end{cases}$$

Temos que:

$$0 \leq f \vee \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \leq f \ , \quad \forall n \in \mathbb{N} \ , \quad e$$

$$g_n \wedge k = (f \vee \frac{1}{n} - \frac{1}{n}) \wedge k \longrightarrow f \wedge k \ ,$$

uniformemente, $\forall k \in \mathbb{N}$, assim por (viii) temos

$$T(f) \leq \liminf_n T(f \vee \frac{1}{n} - \frac{1}{n}) \leq \liminf_n T(f) \ ,$$

ou seja, $T(f) = \liminf_n T(f \vee \frac{1}{n} - \frac{1}{n})$. Como a sequência $\langle g_n \rangle_{n=1}^{\infty}$ é crescente e T é monótona temos $\liminf_n T(g_n) = \lim_{n \to +\infty} T(g_n)$

$$\therefore \boxed{T(f) = \lim T(f \vee \frac{1}{n} - \frac{1}{n})} \qquad (vi)$$

CONSISTÊNCIA DA DEFINIÇÃO DE INTEGRAL MONÓTONA (INDEPENDÊNCIA DAS CONDIÇÕES)

Seja $T : \mathbb{B} \longrightarrow [0,+\infty]$, $\mathbb{B} \subset [0,+\infty]^{\mathbb{A}}$, $\mathbb{A} \neq \emptyset$, satisfazendo (i) da definição (1).

(i) $f \in \mathbb{B} \Longrightarrow f \wedge k \in \mathbb{B}$; $f \vee k - k \in \mathbb{B}$, $kf \in \mathbb{B}$, $\forall k \in [0,+\infty]$

(1) (ii) não depende das demais condições.

De fato:

Seja $\mathbb{B} = [0,+\infty]^{\mathbb{A}}$ e $T(f) = +\infty$, $\forall f \in \mathbb{B}$.

T assim definida não verifica (ii) pois, $+\infty = T(0 \cdot f) = 0 \cdot T(f)$.
As demais são verificadas facilmente.

(2) (iii) não depende das demais condições.

De fato:

Seja $H_1 \neq \emptyset$, $H_1 \subsetneq H_2$, (H_1, $H_2 \in P(\mathbb{A})$), e definimos $\mathbb{B} = \{\lambda\varphi_{H_1} : \lambda \in [0,+\infty)\} \cup \{\lambda\varphi_{H_2} : \lambda \in [0,+\infty)\}$, onde $\varphi_{H_1}, \varphi_{H_2}$ são funções características. $\mathbb{B}$ satisfaz (i), e definimos T em $\mathbb{B}$, por $T(\lambda\varphi_{H_1}) = 2\lambda$ e $T(\lambda\varphi_{H_2}) = \lambda$. Como essa definição T não satisfaz (iii), pois $\varphi_{H_1} < \varphi_{H_2}$ e $2 = T(\varphi_{H_1}) > T(\varphi_{H_2}) = 1$.

Verifiquemos se T satisfaz as demais condições:

(ii) $T(\lambda f) = \lambda T(f)$, $\forall f \in \mathbb{B}$, $\forall \lambda \in [0,+\infty)$

De fato:

$f \in \mathbb{B} \Longrightarrow f = \lambda'\varphi_{H_1}$ ou $f = \lambda''\varphi_{H_2}$, $\lambda', \lambda'' \in [0,+\infty)$

Logo:

$$T(\lambda\lambda'\varphi_{H_1}) = 2\lambda\lambda' = \lambda \cdot 2\lambda' = \lambda \cdot T(\lambda' f), \text{ e}$$

$$T(\lambda\lambda''\varphi_{H_2}) = \lambda\lambda'' = \lambda \cdot T(\lambda''\varphi_{H_2})$$

$$\therefore\ T(\lambda f) = \lambda T(f) \quad , \quad \forall f \in \mathbb{B} .$$

(iv) $T(f) = T(f \wedge \lambda') + T(f \vee \lambda' - \lambda'), \quad \lambda' \in [0,+\infty) \text{ e } f \in \mathbb{B}.$

De fato:

seja $f = \lambda\varphi_{H_1}$, $T(f) = T(\lambda\varphi_{H_1}) = 2\lambda$,

$$T(f \wedge \lambda') = T(\lambda\varphi_{H_1} \wedge \lambda') = \begin{cases} T(\lambda\varphi_{H_1}) = 2\lambda & \text{se } \lambda \leq \lambda' \\ \text{ou} & \\ T(\lambda'\varphi_{H_1}) = 2\lambda' & \text{se } \lambda > \lambda' \end{cases}$$

$$T(f \vee \lambda' - \lambda') = T(\lambda\varphi_{H_1} \vee \lambda' - \lambda') = \begin{cases} 0 \quad \text{se } \lambda \leq \lambda' \\ \\ T(\lambda\varphi_{H_1} - \lambda') = \\ = T[(\lambda - \lambda')\varphi_{H_1}] = \\ = 2(\lambda - \lambda') \text{ se} \\ \quad \lambda > \lambda' \end{cases}$$

$$\therefore\ T(f \wedge \lambda') + T(f \vee \lambda' - \lambda') = \begin{cases} 2\lambda + 0 = 2\lambda & \text{se } \lambda \leq \lambda' \\ 2\lambda' + 2\lambda - 2\lambda' = 2\lambda & \text{se } \lambda > \lambda' \end{cases}$$

daí $T(f \wedge \lambda') + T(f \vee \lambda' - \lambda') = 2\lambda = T(f)$.

Se $f = \lambda\varphi_{H_2}$ teremos $T(f) = \lambda$ e ;

$$T(f \wedge \lambda') = T(\lambda\varphi_{H_2} \wedge \lambda') = \begin{cases} \lambda & \text{se} \quad \lambda \leq \lambda' \\ \lambda' & \text{se} \quad \lambda > \lambda' \end{cases}$$

$$T(f \vee \lambda' - \lambda') = T(\lambda\varphi_{H_2} \vee \lambda' - \lambda') = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad \lambda \leq \lambda' \\ \lambda - \lambda' & \text{se} \quad \lambda > \lambda' \end{cases}$$

$$\therefore T(f \wedge \lambda') + T(f \vee \lambda' - \lambda') = T(f)$$

(v) $T(f) = \lim\limits_{n \to +\infty} T(f \wedge n)$

Seja $f = \lambda\varphi_{H_1}$

se $n < \lambda$ temos $f \wedge n = \lambda\varphi_{H_1} \wedge n = n\varphi_{H_1}$

se $n \geq \lambda$ temos $f \wedge n = \lambda\varphi_{H_1} \wedge n = n\varphi_{H_1}$

Assim dado $\varepsilon > 0$, existe "n_o" (1º nº natural maior que λ) tal que qualquer "n", $n \geq n_o$ tem-se

$$|T(f \wedge n) - T(f)| = |T(\lambda\varphi_{H_1} \wedge n) - T(\lambda\varphi_{H_1})| = 0 < \varepsilon$$

Assim $T(f) = \lim\limits_{n \to +\infty} T(f \wedge n)$. De modo análogo se mostra quando $f = \lambda\varphi_{H_2}$.

(vi) $T(f) = \lim_{n \to +\infty} T(f \vee \frac{1}{n} - \frac{1}{n})$

Seja $f = \lambda \varphi_{H_1}$

$$f \vee \frac{1}{n} - \frac{1}{n} = \lambda\varphi_{H_1} \vee \frac{1}{n} - \frac{1}{n} = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad \lambda \leq \frac{1}{n} \\ (\lambda - \frac{1}{n})\varphi_{H_1} & \text{se} \quad \lambda > \frac{1}{n} \end{cases}$$

Assim dado $\varepsilon > 0$, existe $n_o \in \mathbb{N}$ (basta tomar $n_o > \frac{1}{\lambda} \wedge \frac{1}{\varepsilon}$) tal que qualquer $n > n_o$, $n \in \mathbb{N}$, teremos:

$$|T(f \vee \frac{1}{n} - \frac{1}{n}) - T(f)| = |(\lambda - \frac{1}{n}) - \lambda| = \frac{1}{n} < \varepsilon ,$$

pois $n > \frac{1}{\varepsilon}$.

$$\therefore \lim_{n \to +\infty} T(f \vee \frac{1}{n} - \frac{1}{n}) = T(f)$$

(3) (iv) *não depende das demais*

Seja $\{x,y\} \subset \mathbb{A}$, $x \neq y$

Consideremos $\mathbb{B} = [0, +\infty]^{\mathbb{A}}$ e $T(f) = \sqrt{f(x) \cdot f(y)}$ qualquer $f \in \mathbb{B}$.

T não verifica (iv) para $f = \varphi_{\{x\}} + 2\varphi_{\{y\}}$ e $\lambda = 1$, onde $\varphi_{\{x\}}$ e $\varphi_{\{y\}}$ são funções características.

$$T(f) = T(\varphi_{\{x\}} + 2\varphi_{\{y\}}) = \sqrt{(1+0)\cdot(0+2)} = \sqrt{2} .$$

$$T(f \wedge 1) = T[(\varphi_{\{x\}} + 2\varphi_{\{y\}}) \wedge 1] = T(\varphi_{\{x,y\}}) = \sqrt{1 . 1} = 1$$

$$T(f \vee 1 - 1) = T[(\varphi_{\{x\}} + 2\varphi_{\{y\}}) \vee 1 - 1] = T(\varphi_{\{y\}}) = \sqrt{0.1} = 0$$

Portanto $T(f) \neq T(f \wedge \lambda) + T(f \vee \lambda - \lambda)$

T satisfaz a outras propriedades:

(ii) $T(\lambda f) = \sqrt{\lambda f(x) \cdot \lambda f(y)} = \lambda \sqrt{f(x) \cdot f(y)} = \lambda T(f)$

(iii) $f \leq g \Longrightarrow \sqrt{f(x) \cdot f(y)} \leq \sqrt{g(x) \cdot g(y)} \Longrightarrow T(f) \leq T(g)$

(v) $$\lim_{n \to +\infty} T(f \wedge n) = \lim_{n \to +\infty} \sqrt{(f(x) \wedge n) \cdot (f(y) \wedge n)} =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \sqrt{[f(x) \cdot f(y)] \wedge n} = \sqrt{f(x) \cdot f(y)} = T(f)$$

(vi) $$\lim_{n \to +\infty} T(f \vee \tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{n}) = \lim_{n \to +\infty} \sqrt{(f(x) \vee \tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{n}) \cdot (f(y) \vee \tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{n})} =$$

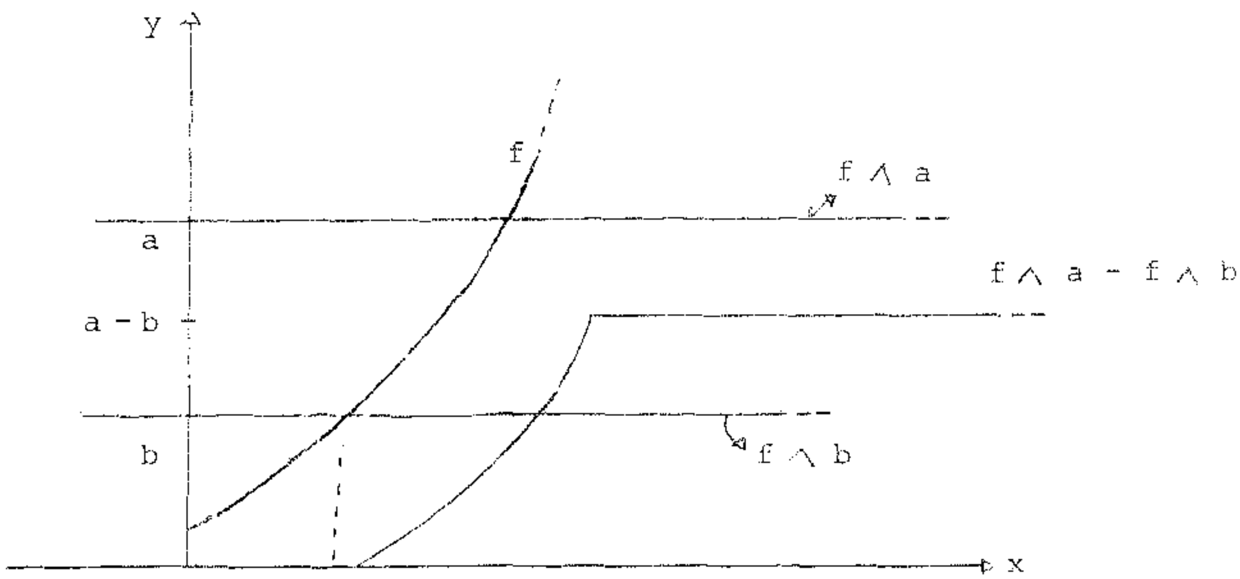
$$= \sqrt{f(x) \cdot f(y)} = T(f) .$$

(4) *A propriedade* (v) *não depende das demais*

Sejam, $f \in [0, +\infty]^{\mathbb{A}}$ tal que $\{x \in \mathbb{A} : f(x) = t\} \neq \emptyset$, qualquer $t \in (0, +\infty)$, $\mathbb{B} \subset [0, +\infty]^{\mathbb{A}}$ definido por

$\mathbb{B} = \{u \cdot (f \wedge a - f \wedge b) : u, a, b \in [0, +\infty]$, $0 \leq b < a \leq +\infty$, $u \neq +\infty\}$.

Colocamos $T(g) = T[u(f \wedge a - f \wedge b)] = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad a < +\infty \\ u & \text{se} \quad a = +\infty \end{cases}$

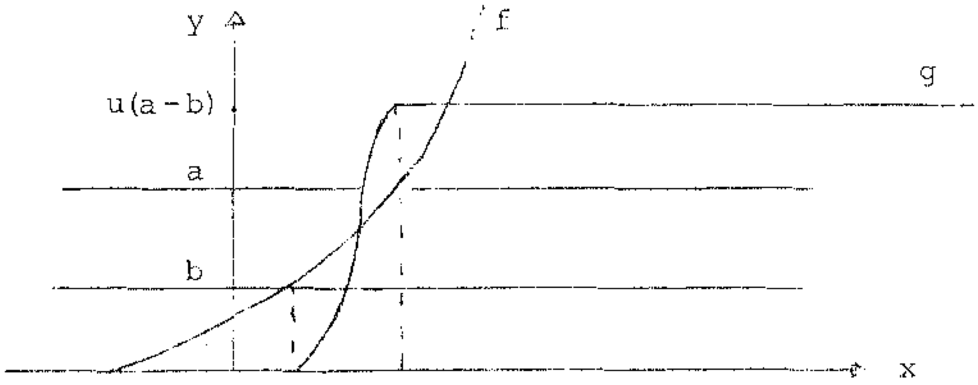


É claro que T é bem definida.

Façamos uma melhor imterpretação da definição dada da transformação acima.

(1º Caso) Seja $g = u(f \wedge a - f \wedge b)$ com $a < +\infty$.

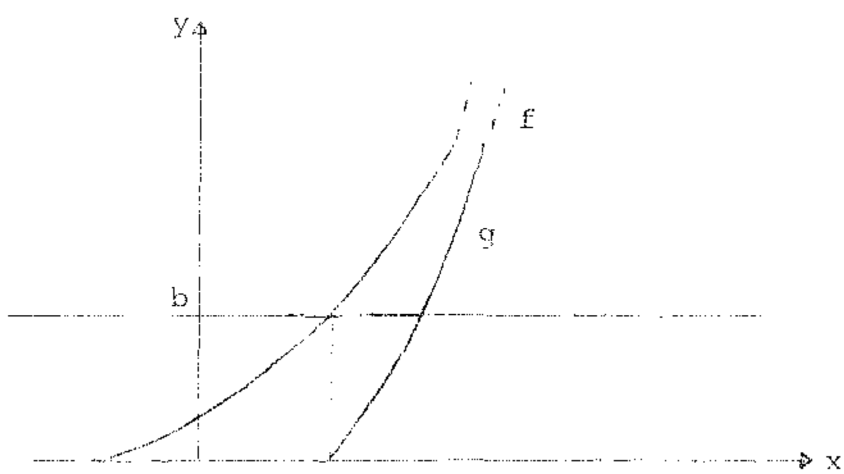
Assim $g = \begin{cases} u(a - b) & \text{se} \quad f \geq a \\ u(f - b) & \text{se} \quad b \leq f < a \quad (*) \\ 0 & \text{se} \quad f < b \end{cases}$



Logo (*) nos mostra que se $a < +\infty$ então g é limitada e pela definição de T, $T(g) = 0$.

(2º Caso) Se $a = +\infty$ temos para $g = u(f \wedge a - f \wedge b)$ a seguinte expressão:

$$g = u(f - f \wedge b) = \begin{cases} u(f - b) & \text{se } f \geq b \\ 0 & \text{se } f < b \end{cases}$$



Sabemos, pelas condições impostas inicialmente a "f" que ela não é limitada. Assim, g não é limitada quando $a = +\infty$ e $u \neq 0$.

Mostraremos agora que T não verifica a propriedade (v) da definição de integral monótona, pois seja $g \in \mathbb{B}$, $g = u(f \wedge a - f \wedge b)$ com $a = +\infty$. Assim g é ilimitada e $T(g) = u$. Note que $g \wedge n$ é limitada qualquer $n \in \mathbb{N}$ e por (i) $g \wedge n \in \mathbb{B}$ logo $g \wedge n =$ $= k_n [f \wedge a_n - f \wedge b_n]$ e como "$g \wedge n$" é limitada, qualquer $n \in \mathbb{N}$ temos $a_n < +\infty$, qualquer $n \in \mathbb{N}$, e assim $T(g \wedge n) = 0$, qualquer $n \in \mathbb{N}$.

$$\therefore T(g) \neq \lim_{n \to +\infty} T(g \wedge n)$$

T *satisfaz as outras propriedades da definição de integral monótona:*

(1) Seja $g \in \mathbb{B}$ e $\lambda \in [0,+\infty)$ então

$$g \wedge \lambda = u\left[f \wedge \left(b + \frac{\lambda}{u}\right) - f \wedge b\right] \in \mathbb{B}, \text{ onde}$$

$$g = u(f \wedge a - f \wedge b) \text{ com } u \neq 0, \ a > b + \frac{\lambda}{u}$$

Dem.

(1_1) Se $f(x) \leq b$ temos

$$u\left[f \wedge \left(b + \frac{\lambda}{u}\right) - f \wedge b\right] = 0 \quad \text{e} \quad g \wedge \lambda = 0$$

(1_2) Se $b < f(x) \leq b + \frac{\lambda}{u}$ temos

$$g \wedge \lambda = u\left[(f \wedge a - b) \wedge \frac{\lambda}{u}\right], \quad \text{e}$$

$$u[f \wedge (b + \frac{\lambda}{u}) - f \wedge b] = u[f - b] \text{ , e como } f < b + \frac{\lambda}{u} \text{ temos}$$

$$f - b < \frac{\lambda}{u} \text{ , logo } u(f - b) = u[(f - b) \wedge \frac{\lambda}{u}] \text{ .}$$

Estamos considerando $a > b + \frac{\lambda}{u}$, pois caso contrário, $a \leq b + \frac{\lambda}{u}$ teríamos $u(a - b) \leq \lambda$ e como $g \leq u(a - b)$ teríamos $g \wedge \lambda = g \in \mathbb{B}$, nada tendo a mostrar. Assim,

$$u[f \wedge (b + \frac{\lambda}{u}) - f \wedge b] = u[(f - b) \wedge \frac{\lambda}{u}] = u[(f \wedge a - b) \wedge \frac{\lambda}{u}] \text{ ,}$$

e portanto $g \wedge \lambda = u[f \wedge (b + \frac{\lambda}{u}) - f \wedge b]$

(1_3) Se $f(x) > b + \frac{\lambda}{u}$ temos:

$$u[f \wedge (b + \frac{\lambda}{u}) - f \wedge b)] = u \cdot \frac{\lambda}{u} = \lambda \text{ , e}$$

$$g \wedge \lambda = u[(f \wedge a - f \wedge b) \wedge \frac{\lambda}{u}] = u[(f \wedge a - b) \wedge \frac{\lambda}{u}] \text{ .}$$

$$\text{Mas } u[(f \wedge a - b) \wedge \frac{\lambda}{u}] = \begin{cases} u[(f - b) \wedge \frac{\lambda}{u}] & \text{se } f \wedge a = f \\ u[(a - b) \wedge \frac{\lambda}{u}] & \text{se } f \wedge a = a \end{cases}$$

Como $f - b > \frac{\lambda}{u}$, e $a > b + \frac{\lambda}{u}$, isto é $(a - b) < \frac{\lambda}{u}$, temos que $u[(f - b) \wedge \frac{\lambda}{u}] = u[(a - b) \wedge \frac{\lambda}{u}] = \lambda$.

$$\therefore g \wedge \lambda = u[f \wedge (b + \frac{\lambda}{u}) - f \wedge b] \text{ .}$$

Por (1_1), (1_2) e (1_3) conclui-se a validade de (1)

(2) Vamos mostrar agora que dada

$g = u[f \wedge a - b] \in \mathbb{B}$, , $\lambda \in [0,+\infty)$,

$\lambda g = \lambda u[f \wedge a - f \wedge b] \in \mathbb{B}$ e $g \vee \lambda - \lambda \in \mathbb{B}$.

Dem.

Se $u = 0$ óbvio. Suporemos então $u \neq 0$.

(2_1) Se $f \leq b$, $g \vee \lambda - \lambda = u[f \wedge a - f \wedge (b + \frac{\lambda}{u})]$, logo $g \vee \lambda - \lambda \in \mathbb{B}$.

(2_2) Se $b < f < a$ poderemos ter

$b < f \leq b + \frac{\lambda}{u}$ ou $b + \frac{\lambda}{u} < f < a$. Quando

$b < f < b + \frac{\lambda}{u}$, $u[f \wedge a - f \wedge (b + \frac{\lambda}{u})] = 0$ e

$g \vee \lambda - \lambda = u[f \wedge a - f \wedge b] \vee \lambda - \lambda =$

$= u(f \wedge a - b) \vee \lambda - \lambda$. Estamos supondo

$a > b + \frac{\lambda}{u}$ pois caso contrário, $g \leq u(a - b)$ e

$g < \lambda$ e assim $g \vee \lambda - \lambda = 0 \in \mathbb{B}$ obviamente.

Logo, $g \vee \lambda - \lambda = u(f \wedge a - b) \vee \lambda - \lambda = u(f - b) \vee \lambda - \lambda =$

$= u[(f - b) \vee \frac{\lambda}{u}] - \lambda = u \cdot \frac{\lambda}{u} - \lambda = 0$, e assim $g \vee \lambda - \lambda = u[f \wedge a - f \wedge (b + \frac{\lambda}{u})] \in \mathbb{B}$.

Quando $b + \frac{\lambda}{u} < f(x) < a$ teremos,

$u \cdot [f \wedge a - f \wedge (b + \frac{\lambda}{u})] = u[f - b - \frac{\lambda}{u}] = u(f - b) - \lambda$,

e, $g \vee \lambda - \lambda = u(f - b) \vee \lambda - \lambda = u[(f - b) \vee \frac{\lambda}{u}] - \lambda =$

$= u(f - b) - \lambda$. Logo,

$g \vee \lambda - \lambda = u[f \wedge a - f \wedge (b + \frac{\lambda}{u})] \in \mathbb{B}$

(2_3) Se $f \geq a$ teremos,

$g \vee \lambda - \lambda = u(a - b) \vee \lambda - \lambda = u(a - b) - \lambda$, e

assim $g \vee \lambda - \lambda = u[f \wedge a - f \wedge (b + \frac{\lambda}{u})] \in \mathbb{B}$.

Por (2_1), (2_2) e (2_3) concluímos que $g \vee \lambda - \lambda \in \mathbb{B}$. É óbvio que se $g = u[f \wedge a - f \wedge b]$ então $\lambda g = \lambda u[f \wedge a - f \wedge b]$ e assim $\lambda g \in \mathbb{B}$, $\forall \lambda \in [0,+\infty)$ e $g \in \mathbb{B}$.

Pelos ítens (1) e (2) concluímos então que a propriedade (i) da definição de integral monótona é satisfeita pela T .

T *satisfaz* (ii), *ou seja*, $T(\lambda g) = \lambda T(g)$ $\lambda \in [0,+\infty)$

Dem.

Seja $g = u(f \wedge a - f \wedge b)$, assim

$$T(\lambda g) = T[\lambda u(f \wedge a - f \wedge b)] = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad a < +\infty \\ \lambda u & \text{se} \quad a = +\infty \end{cases}$$

$$\lambda T(g) = \lambda T(u(f \wedge a - f \wedge b)) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad a < +\infty \\ \lambda u & \text{se} \quad a = +\infty \end{cases}$$

Logo (ii) *é satisfeita pela* T.

T *satisfaz* (iii), *ou seja;*

$$(\forall h, g \in \mathbb{B},\ h \leq g) \implies T(h) \leq T(g)$$

Dem.

Sejam $\begin{cases} h = u(f \wedge a - f \wedge b) \\ g = \lambda(f \wedge r - f \wedge s) \end{cases}$ com

$$\begin{cases} u(f \wedge a - f \wedge b) \leq \lambda(f \wedge r - f \wedge s) \\ 0 \leq b < a \leq +\infty \quad \text{e} \quad 0 \leq s < r \leq +\infty \end{cases}$$

Se $a < +\infty$ então $T(h) = 0 \leq T(g)$,

Se $a = +\infty$ então g não é limitada e como $g \leq h$ temos h não limitada, logo $r = +\infty$, e assim $g = u(f - f \wedge b)$ e $h = \lambda(f - f \wedge s)$.

Como $\{x : f(x) = t\} \neq \emptyset$ $\forall t \in (0,+\infty)$, podemos formar uma sequência $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de $\mathbb{A}$ tal que $f(b_n) = n+s$. É claro que $f(b_n) \longrightarrow +\infty$ quando $n \longrightarrow +\infty$.

Como $u[f - f\wedge b] \leq \lambda[f - f\wedge s]$, assumindo $\lambda \neq 0$ temos $\frac{u}{\lambda} \leq (\frac{f - f\wedge b}{f - f\wedge s})(b_n)$, $\forall b_n \in \mathbb{A}$, isto é $\frac{u}{\lambda} \leq \dfrac{1 - \frac{b}{f(b_n)}}{1 - \frac{s}{f(b_n)}}$, $\forall b_n \in \mathbb{A}$. Logo $\frac{u}{\lambda} \leq \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1 - \frac{b}{f(b_n)}}{1 - \frac{s}{f(b_n)}} = 1$, e assim, $u \leq \lambda$. Levando em conta que $T(g) = u$ e $T(h) = \lambda$ temos $T(g) \leq T(h)$.

T *satisfaz* (iv), *isto é*, $T(g) = T(g\wedge\lambda) + T(g\vee\lambda - \lambda)$, $\forall\lambda \in [0,+\infty)$.

Dem.

Seja $g = u(f\wedge a - f\wedge b)$, e consideremos as duas seguintes situações:

(1º Caso) Suponhamos $a < +\infty$ ou $u = 0$, então $T(g) = 0$. Como (i) é satisfeita, $g\wedge\lambda \in \mathbb{B}$ e supondo $\lambda \in [0,+\infty)$, $g\wedge\lambda$ é limitada, logo $g\wedge\lambda = k(f\wedge r - f\wedge s)$ com $r < +\infty$. Analogamente temos que $g\vee\lambda - \lambda \in \mathbb{B}$ e é limitada, logo $g\vee\lambda - \lambda = k'[f\wedge r' - f\wedge s']$ onde $r' < +\infty$. Assim $T(g\wedge\lambda) = T(g\vee\lambda - \lambda) = 0$, e então $T(g) = T(g\wedge\lambda) + T(g\vee\lambda - \lambda)$.

(2º Caso) Suponhamos $a = +\infty$ e $u \neq 0$, então $T(g) = u$. Como (i) é satisfeita $g \wedge \lambda \in \mathbb{B}$ e $g \vee \lambda - \lambda \in \mathbb{B}$, logo $g \wedge \lambda = k'|f \wedge r' - f \wedge s'|$. Mas $g \wedge \lambda$ é limitada pois estamos considerando $\lambda \in [0,+\infty)$, logo $r' < +\infty$ e portanto $T(g \wedge \lambda) = 0$. Podemos também escrever que $g \vee \lambda - \lambda = k|f \wedge r - f \wedge s|$, mas $g \vee \lambda - \lambda$ não é limitada pois $g \vee \lambda$ não o é, assim $g \vee \lambda - \lambda = k|f \wedge r - f \wedge s| = u|f - f \wedge b| \vee \lambda - \lambda$, com $r = +\infty$.

Como $\{f = t\} \neq \emptyset$, $t \in (0,+\infty)$, podemos formar uma sequência $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, de elementos de $\mathbb{A}$ tal que $f(b_n) = n + s$, e é claro que $f(b_n) \longrightarrow +\infty$ quando $n \to +\infty$. Consideremos um número natural n_o tal que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_o$ $f(b_n) - (f \wedge b)(b_n) > \max\{\lambda, b\}$. Tal n_o existe pois $f(b_n) \longrightarrow +\infty$ quando $n \to +\infty$. Retomando a igualdade $k|f \wedge r - f \wedge s| = u|f - f \wedge b| \vee \lambda - \lambda$ e tendo em conta que $u \neq 0$, temos que

$$\frac{k}{u} = \frac{|f(b_n) - (f \wedge b)(b_n)| - \lambda}{f(b_n) - (f \wedge s)(b_n)} = \frac{f(b_n) - b - \lambda}{f(b_n) - s}$$

ou seja, $$\frac{k}{u} = \frac{1 - \dfrac{b+\lambda}{f(b_n)}}{1 - \dfrac{s}{f(b_n)}}, \qquad \forall n \geq n_o .$$

Fazendo $n \to +\infty$, obtemos $\frac{k}{u} = 1$, ou seja $k = u$.

Assim temos $T(g \vee \lambda - \lambda) = k = u$, e

$T(g) = T(g \wedge \lambda) + T(g \vee \lambda - \lambda)$.

T *satisfaz (vi), ou seja,*

$$T(g) = \lim_{n \to +\infty} T(g \vee \frac{1}{n} - \frac{1}{n})$$

Dem: Seja $g = u[f \wedge a - f \wedge b] \in \mathbb{B}$, por (i) temos que $g \vee \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \in \mathbb{B}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, logo $g \vee \frac{1}{n} - \frac{1}{n} = k_n[f \wedge a_n - f \wedge b_n]$, $n \in \mathbb{N}$.

Provaremos a afirmação acima, analisando dois casos possíveis:

(1º Caso) Quando $a < +\infty$ e $u = 0$. Então temos que g é limitada, e assim $g \vee \frac{1}{n} - \frac{1}{n}$ é limitada, $\forall n \in \mathbb{N}$. Consequentemente $a_n < +\infty$ e $T(g \vee \frac{1}{n} - \frac{1}{n}) = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, e como $T(g) = 0$, temos

$$\lim_{n \to +\infty} T(g \vee \frac{1}{n} - \frac{1}{n}) = T(g) = 0.$$

(2º Caso) Quando $a = +\infty$ e $u \neq 0$. Temos $T(g) = u$, e como g não é limitada $g \vee \frac{1}{n} - \frac{1}{n}$ não é limitada, assim $a_n = +\infty$ $\forall n \in \mathbb{N}$ e portanto $g \vee \frac{1}{n} - \frac{1}{n} = k_n[f - f \wedge b_n]$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Mas mostramos (*)

(*) [illegible] da prop. (ii).

que se $g = u[f - f \wedge b]$ e $u[f - f \wedge b] \vee \lambda - \lambda = k[f \wedge r - f \wedge s]$ com $r = +\infty$ então $u = k$. Logo $u = k_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e $T(g \vee \frac{1}{n} - \frac{1}{n}) = u$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e assim:

$$T(g) = \lim_{n \to +\infty} T(g \vee \frac{1}{n} - \frac{1}{n})$$

(5) *A propriedade* (vi) *da definição de integral monótona não depende das demais:*

Seja $f \in [0,+\infty]^{\mathbb{A}}$ tal que $\{x : x \in \mathbb{A},\ f(x) = t\} \neq \emptyset$ $\forall t \in (0,+\infty)$. Coloquemos $\mathbb{B} \subset [0,+\infty]^{\mathbb{A}}$, sendo $B = \{u(f \wedge a - f \wedge b) : u,a,b \in [0,+\infty[\ ,\ u \neq +\infty\ ,\ a > b\}$, definimos $T : B \to [0,+\infty]$ por:

$$T(g) = T[u(f \wedge a - f \wedge b)] = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad b > 0 \\ u & \text{se} \quad b = 0 \end{cases}$$

Assim definida, a transformação T não verifica a propriedade (vi) da definição de integral monótona, porém verifica as propriedades (ii), (iii), (iv) e (v).

T *verifica* (ii), *ou seja;* $T(\lambda g) = \lambda T(g)$, $\forall \lambda \in [0,+\infty)$

Dem.: Seja $g = u[f \wedge a - f \wedge b]$, assim $\lambda g = \lambda u[f \wedge a - f \wedge b]$. Temos que ;

$$T(\lambda g) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad b > 0 \\ \lambda u & \text{se} \quad b = 0 \end{cases} \quad , \text{ e que },$$

$$\lambda T(g) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad b > 0 \\ \lambda u & \text{se} \quad b = 0 \end{cases}$$

$$\therefore \ T(\lambda g) = \lambda T(g)$$

T *verifica* (iii), *ou seja*,

$$g \leq h \implies T(g) < T(h)$$

Dem: Sejam $g = u(f \wedge a - f \wedge b)$ e $h = \lambda(f \wedge r - f \wedge s)$, $g \leq h$.

Se $b > 0$ então $T(g) = 0 \leq T(h)$

Se $b = 0$, $g = u(f \wedge a)$, e assim teremos que $u(f \wedge a) \leq \lambda\,|f \wedge r - f \wedge s|$. Como $\{x : x \in \mathbb{A},\ f(x) = t\} \neq \emptyset$ $\forall t \in (0,+\infty)$, podemos escolher uma sequência $\{b_n\}_{n=1}^{+\infty}$, de elementos de $\mathbb{A}$, de modo que $f(b_n) = \frac{1}{n}$. É claro que $f(b_n) \to 0$, quando $n \to +\infty$, e que $\frac{u}{\lambda} < \frac{f(b_n) \wedge r}{f(b_n) \wedge a}$, desde que $\lambda \neq 0$.

Logo $\forall n \in \mathbb{N}$, $n > \dfrac{1}{\min\{r,a\}}$, temos que

$\frac{u}{\lambda} \leq \dfrac{f(b_n)}{f(b_n)} = 1$, ou seja, $u \leq \lambda$.

Basta provarmos agora que $s = 0$.

Suponhamos que $s \neq 0$, então temos que

$$g = u(f \wedge a), \text{ e }, h = \begin{cases} \lambda(r-s) & \text{se } f > r \\ f - s & \text{se } s < f < r \\ 0 & \text{se } f \leq s \end{cases}$$

Notemos que, se $0 < t < k = \min\{a,s\}$, como $\{x : x \in \mathbb{A},\ f(x) = t\} \neq \emptyset$, existe $x \in \mathbb{A}$ tal que $f(x) = t$, daí $f(x) \wedge a = t$, logo, $f \wedge a \neq 0$ para $f(x) < k$; portanto existe $x \in \mathbb{A}$, tal que $g(x) = u(f \wedge a)(x) \neq 0$ para $f(x) \leq k$, o que é absurdo, pois $h = 0$ para $f \leq k \leq s$, e, $h \geq g$.

Logo $s = 0$, e assim $T(g) \leq T(h)$

T *verifica* (*iv*), *ou seja*,

$T(g) = T(g \wedge \lambda) + T(g \vee \lambda - \lambda)$, $\forall \lambda \in [0,+\infty)$

Dem.: Seja $g = u[f \wedge a - f \wedge b] \neq 0$, pois se $g = 0$ nada há para demonstrar. Consideremos dois casos:

(1º Caso) Quando $b > 0$, temos $T(g) = 0$. Por (i) $g \wedge \lambda \in \mathbb{B}$, logo $g \wedge \lambda = k[f \wedge r - f \wedge s]$.

Vamos mostrar que $s > 0$, consequentemente $T(g \wedge \lambda) = 0$.

Suponhamos $s = 0$, então teremos $u[f \wedge a - f \wedge b] \wedge \lambda = k(f \wedge r)$. Seja $0 < t < b$, então existe $x \in \mathbb{A}$ tal que $f(x) = t$ e daí: $(u[f \wedge a - f \wedge b] \wedge \lambda)(x) = u[f(x) \wedge a - f(x) \wedge b] \wedge \lambda = u[t - t] \wedge \lambda = 0$. Por outro lado, $k(f \wedge r)(x) = k(f(x) \wedge r) = k(t \wedge r)$. Agora, se $r = 0$, como $s = 0$, $g \wedge \lambda = 0$, daí $g = 0$ o que é absurdo. Se $r \neq 0$, temos $k(f \wedge r)(x) \neq 0$ e $(u[f \wedge a - f \wedge b] \wedge \lambda)(x) = 0$, que é absurdo.

Logo $s > 0$, e assim $T(g \wedge \lambda) = 0$.

Provemos agora que $T(g \vee \lambda - \lambda) = 0$ para o caso em que $b > 0$. Como $g \vee \lambda - \lambda \in \mathbb{B}$, temos que $g \vee \lambda - \lambda = k[f \wedge r - f \wedge s]$. Devemos provar que $s > 0$.

Supor $s = 0$. Assim, $u[f \wedge a - f \wedge b] \vee \lambda - \lambda = k(f \wedge r)$. Seja $0 < t < b < a$, como $\{x : x \in \mathbb{A},\ f(x) = t\} \neq \emptyset$, $\forall t \in (0, +\infty)$, temos que existe $x \in \mathbb{A}$ tal que $f(x) = t$. Assim:

$$(u[f \wedge a - f \wedge b] \vee \lambda - \lambda)(x) = u[t \wedge a - t \wedge b] \vee \lambda - \lambda = 0.$$

Por outro lado $k(f \wedge r)(x) = k(f(x) \wedge r) = k(t \wedge r) \neq 0$, pois k, r, t são não nulos ($r \neq 0$ pois se $r = 0$, como $s = 0$ teríamos $g = 0$).

Logo existe $x \in \mathbb{A}$ tal que $f(x) = t$, $0 < t < b < a$, e:

$$(u[f \wedge a - f \wedge b] \vee \lambda - \lambda)(x) \neq k(f \wedge r)(x),$$

que é um absurdo.

Logo $s > 0$, e assim $T(g \vee \lambda - \lambda) = 0$

Consequentemente,

$$T(g) = T(g \wedge \lambda) + T(g \vee \lambda - \lambda)$$

(2º Caso) Supor $b = 0$. Assim $g = u(f \wedge a)$, e $T(g) = u$. Sabemos que $g \wedge \lambda = u(f \wedge a) \wedge \lambda \in \mathbb{B}$, logo $u(f \wedge a) \wedge \lambda = k[f \wedge r - f \wedge s]$.

Vamos mostrar que $u = k$ e que $s = 0$, daí $T(g \wedge \lambda) = u$, e posteriormente provaremos que $T(g \vee \lambda - \lambda) = 0$, ficando assim provado a propriedade.

Supor $s > 0$. Consideremos $0 < t < \min\{a,s\}$(*). Como $\{x : x \in \mathbb{A}, f(x) = t\} \neq \emptyset$, $\forall t \in (0,+\infty)$, $\exists x \in \mathbb{A}$, tal que $f(x) = t$. Assim:

$$(u(f \wedge a) \wedge \lambda)(x) = u(f(x) \wedge a) \wedge \lambda = u(t \wedge a) \wedge \lambda = ut \wedge \lambda \neq 0 .$$

Por outro lado, $k[f \wedge r - f \wedge s](x) = k[t \wedge r - t \wedge s] = k[t - t] = 0$, o que é absurdo. Logo $s = 0$.

Como $s = 0$ temos, $u(f \wedge a) \wedge \lambda = k(f \wedge r)$.

Podemos formar uma sequência $\{b_n\}_{n=1}^{+\infty}$, de elementos $\mathbb{A}$, tal que $f(b_n) = \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, pois $\{x : x \in \mathbb{A}, f(x) = t\} \neq \emptyset$,

---

(*) $a \neq 0$ pois $u \neq 0$.

$t \in (0,+\infty)$. Logo para "n" suficientemente grande teremos:

$$u[f(b_n) \wedge a] \wedge \lambda = uf(b_n) \quad , \quad e,$$

$$k[f(b_n) \wedge r] = kf(b_n) \qquad (\text{pois } r \neq 0)$$

Logo $\exists n_o \in \mathbb{N}$, $n_o > \dfrac{1}{\min\{a,\lambda,r\}}$, tal que $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_o$, $uf(b_n) = kf(b_n)$, e assim teremos que $u = k$, ou seja, $T(g \wedge \lambda) = u$.

Basta provar que $T(g \vee \lambda - \lambda) = 0$ quando $b = 0$. Por (i) temos que $(g \vee \lambda - \lambda) \in \mathbb{B}$, logo $g \vee \lambda - \lambda = k[f \wedge r - f \wedge s]$. Daí sai que, $u[f \wedge a - f \wedge b] \vee \lambda - \lambda = k[f \wedge r - f \wedge s]$, e mostrando que $s > 0$ teremos $T(g \vee \lambda - \lambda) = 0$.

Suponha $s = 0$. Então,

$$u[f \wedge a - f \wedge b] \vee \lambda - \lambda = k[f \wedge r], \quad \text{e como } b = 0,$$

$$u(f \wedge a) \vee \lambda - \lambda = k(f \wedge r).$$

Seja $0 < t < \min\{a, r, \frac{\lambda}{u}\}$. Essas desigualdades tem sentido pois "a" e "r" são não nulos, devido ao fato de ter-se $g \neq 0$, e se "λ" ou "u" fossem nulos a propriedade já estaria provada. Como $\{f = t_o\} \neq \emptyset$, $t_o \in (0,+\infty)$, existe $x \in \mathbb{A}$ tal que $f(x) = t$, logo:

$$(u[f \wedge a] \vee \lambda - \lambda)(x) = u(t \wedge a) \vee \lambda - \lambda = ut \vee \lambda - \lambda = \lambda - \lambda = 0.$$

Por outro lado $k(f \wedge r)(x) = k(t \wedge r) = kt \neq 0$, que é um absurdo, pois, $u[f \wedge a - f \wedge b] \vee \lambda - \lambda = k[f \wedge r - f \wedge s]$.

Logo $s > 0$, e assim:

$$T(g) = T(g \wedge \lambda) + T(g \vee \lambda - \lambda)$$

T *verifica* (v), *ou seja*, $T(g) = \lim_{n \to +\infty} T(g \wedge n)$

Dem: Seja $g = u[f \wedge a - f \wedge b] \in \mathbb{B}$. Consideremos dois casos, quando $b > 0$ e quando $b = 0$.

Se $b > 0$ temos $T(g) = 0$. Como, $g \wedge n = u[f \wedge a - f \wedge b] \wedge n \in \mathbb{B}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, temos que $u[f \wedge a - f \wedge b] \wedge n = k_n [f \wedge a_n - f \wedge b_n]$.

Mostraremos que $b_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, consequentemente $T(g \wedge n) = 0$ e assim $T(g) = \lim_{n \to +\infty} T(g \wedge n)$.

Suponha que $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $b_n = 0$, daí, $u[f \wedge a - f \wedge b] \wedge n = k_n [f \wedge a_n]$. Seja $0 < t < b$, então $\exists x \in \mathbb{A}$ tal que $f(x) = t$, e assim $(u[f \wedge a - f \wedge b] \wedge n)(x) \neq$ $\neq k_n [f \wedge a_n](x)$ pois $(u[f \wedge a - f \wedge b] \wedge n)(x) = 0$ e $k_n(f \wedge a_n) = k_n(t \wedge a_n) \neq 0$ (*), o que é um absurdo.

Logo $b_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Se $b = 0$, $g = u(f \wedge a)$, logo $T(g) = u$.

(*) $a_n \neq 0$ pois se $a_n = 0$, $g \wedge n = 0$ e então $g = 0$, nada tendo assim a mostrar.

Temos que $g \wedge n = u(f \wedge a) \wedge n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, logo se $n_o \in \mathbb{N}$ e $n_o \geq u \cdot a$ então $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_o$, $g \wedge n = u(f \wedge a) \wedge n = u(f \wedge a) = g$.

Logo $T(g) = \lim\limits_{n \to +\infty} T(g \wedge n)$

T *não satisfaz* (vi), *isto é, existe* $g \in \mathbb{B}$, *tal que* $T(g) \neq \lim\limits_{n \to +\infty} T(g \vee \frac{1}{n} - \frac{1}{n})$

Dem: Seja $g = u(f \wedge a - f \wedge b)$ com $b = 0$ e $u \neq 0$. Assim $T(g) = u$. Mostramos anteriormente que se $b = 0$ $T(g \vee \lambda - \lambda) = 0$, assim $T(g \vee \frac{1}{n} - \frac{1}{n}) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Logo $T(g) \neq \lim\limits_{n \to +\infty} T(g \vee \frac{1}{n} - \frac{1}{n})$

DEF. 2 - Seja $\mathbb{A} \neq \emptyset$ um conjunto e $P(\mathbb{A})$ a classe dos subconjuntos de $\mathbb{A}$. Dizemos que uma função $\alpha : P(\mathbb{A}) \longrightarrow [0,+\infty]$ é uma função de conjuntos, monótona, se os ítens abaixo são verificados:

(i) $\alpha(\emptyset) = 0$

(ii) $\forall x,y \in P(\mathbb{A})$; $x \subset y \Longrightarrow \alpha(x) \leq \alpha(y)$

TEOR. 1.2 - Seja $\mathbb{A}$ um conjunto qualquer e $\alpha : P(\mathbb{A}) \to [0,+\infty]$ uma função de conjuntos, monótona. Se $T : [0,+\infty]^{\mathbb{A}} \longrightarrow [0,+\infty]$ é a transformação definida por:

$$T(f) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{+\infty} \alpha\{f > \frac{i}{2^n}\}, \quad \forall f \in [0,+\infty]^{\mathbb{A}},$$

então temos que T é uma integral monótona, e $T(\varphi_B) = \alpha(B)$, $\forall B \in \mathcal{P}(\mathbb{A})$. Além disso, se S é uma integral monótona sobre $[0,+\infty]^{\mathbb{A}}$ com $S(\varphi_B) = \alpha(B)$, $\forall B \in \mathcal{P}(\mathbb{A})$, então $T = S$.

No teorema anterior φ_B denota a função característica de B.

Dem. do Teor:- Mostraremos em primeiro lugar que $T(\varphi_B) = \alpha(B)$, $\forall B \in \mathcal{P}(\mathbb{A})$. Temos, $T(\varphi_B) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{+\infty} \alpha\{\varphi_B > \frac{i}{2^n}\}$, e que,

$\alpha\{\varphi_B > \frac{i}{2^n}\} = \alpha\{x : \varphi_B(x) > \frac{i}{2^n}\}$, $i = 1,2,3,\ldots$. Quando $x_o \notin B$, $\varphi_B(x_o) = 0$, assim $x_o \notin \{\varphi_B > \frac{i}{2^n}\}$, $\forall i = 1,2,3,\ldots$. Quando $x_o \in B$ $\varphi_B(x_o) = 1$, logo $x_o \in \{\varphi_B > \frac{i}{2^n}\}$ para $i = 1,2,\ldots,(2^n - 1)$, e se $x_o \in \{x : \varphi_B(x) > \frac{i}{2^n}\}$ então $\varphi_B(x_o) > \frac{i}{2^n}$, logo $\varphi_B(x_o) = 1$, e isso mostra que $x_o \in B$. Com isso concluímos que:

$$x_o \in B \iff x_o \in \{x : x \in \mathbb{A},\ \varphi_B(x) > \frac{i}{2^n}\},\ com\ i = 1,2,3,\ldots,$$

$2^n - 1$. Além disso, $\{x : x \in \mathbb{A},\ \varphi_B(x) > \frac{i}{2^n}\} = \emptyset$, para $i \geq 2^n$, pois $\max_{x\in\mathbb{A}} \{\varphi_B(x)\} = 1$.

Assim temos que,

$$T(\varphi_B) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{+\infty} \alpha\{\varphi_B > \frac{i}{2^n}\} =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} \left| \sum_{i=1}^{2^n - 1} \alpha\{\varphi_B > \frac{i}{2^n}\} + \sum_{i=2^n}^{+\infty} \alpha\{\varphi_B > \frac{i}{2^n}\} \right| =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} \left| \sum_{i=1}^{2^n - 1} \alpha(B) + \sum_{i=2^n}^{+\infty} \alpha(\emptyset) \right| =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{2^n - 1} \alpha(B) = \alpha(B) \lim_{n \to +\infty} \frac{2^n - 1}{2^n} = \alpha(B).$$

Passaremos agora a demonstrar que T é uma integral monótona sobre $[0,+\infty]^{\mathbb{A}}$, ou seja:

— T *satisfaz a propriedade* (i) *da definição de integral monótona, pois* $\mathbb{B} = [0,+\infty]^{\mathbb{A}}$.

— T *satisfaz a propriedade* (iii), *pois sejam* $f,g \in [0,+\infty]^{\mathbb{A}}$, com $f \leq g$. Assim,

$\{x : g(x) > \frac{i}{2^n}\} \supset \{x : f(x) > \frac{i}{2^n}\}$, logo ,

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \alpha\{x : g(x) > \frac{i}{2^n}\} \geq \sum_{i=1}^{+\infty} \alpha\{x : f(x) > \frac{i}{2^n}\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{+\infty} \alpha\{g > \frac{i}{2^n}\} \geq \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{+\infty} \alpha\{f > \frac{i}{2^n}\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{+\infty} \alpha\{g > \frac{i}{2^n}\} \geq \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{+\infty} \alpha\{f > \frac{i}{2^n}\} \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow T(g) \geq T(f).$

— T *satisfaz a propriedade* (v), *ou seja*

$T(f) = \lim\limits_{\lambda \to +\infty} T(f \wedge \lambda)$, pois

$T(f \wedge \lambda) = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} \sum\limits_{i=1}^{+\infty} \alpha\{f \wedge \lambda > \frac{i}{2^n}\}$, e $f \wedge \lambda \leq \lambda$, logo para

$i > i_o$ (onde i_o é o maior inteiro que não supera $\lambda \cdot 2^n$), temos

$\{f \wedge \lambda > \frac{i}{2^n}\} = \emptyset$, assim $T(f \wedge \lambda) = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} \sum\limits_{i=1}^{i_o} \alpha\{f \wedge \lambda > \frac{i}{2^n}\} =$

$$\overset{(*)}{=} \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{i_o} \alpha\{f > \frac{i}{2^n}\} .$$

Temos então que,

$$T(f \wedge \lambda) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{i_o} \alpha\{f > \frac{i}{2^n}\} \text{, onde}$$

i_o é o maior inteiro que não supera $\lambda \cdot 2^n$. Observemos que para cada "n" fixado a soma

$\sum\limits_{i=1}^{i_o} \alpha\{f > \frac{i}{2^n}\}$ cresce, quando λ cresce,

---

assim $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \sum\limits_{i=1}^{i_o} \alpha\{f > \frac{i}{2^n}\} = \sup\limits_{\lambda \in \mathbb{R}} \{ \sum\limits_{i=1}^{i_o} \alpha\{f > \frac{i}{2^n}\} =$

$= \sum\limits_{i=1}^{+\infty} \alpha\{f > \frac{i}{2^n}\}$. Logo,

$$\lim_{\lambda \to +\infty} T(f \wedge \lambda) = \lim_{\substack{n \to +\infty \\ \lambda \to +\infty}} \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{i_o} \alpha\{f > \frac{i}{2^n}\} =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \sum_{i=1}^{i_o} \alpha\{f > \frac{i}{2^n}\} =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{+\infty} \alpha\{f > \frac{i}{2^n}\} = T(f).$$

— T *satisfaz a propriedade* (vi), *ou seja,*

$$T(f) = \lim_{n \to +\infty} T(f \vee \frac{1}{n} - \frac{1}{n}).$$

Para mostrarmos que T satisfaz a propriedade (vi), é útil provarmos que,

$$\lim_{\substack{n \to +\infty \\ \varepsilon \to 0+}} \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{+\infty} \alpha\{f > \varepsilon + \frac{i}{2^n}\} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{+\infty} \alpha\{f > \frac{i}{2^n}\}.$$

Assim teremos, $\alpha\{f > \varepsilon + \frac{i}{2^n}\} \leq \alpha\{f > \frac{i}{2^n}\}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$, logo,

$\frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{+\infty} \alpha\{f > \varepsilon + \frac{i}{2^n}\} \leq \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{+\infty} \alpha\{f > \frac{i}{2^n}\}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$, onde

concluímos que:

$$\lim_{\substack{n \to +\infty \\ \varepsilon \to 0+}} \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{+\infty} \alpha\{f > \varepsilon + \frac{i}{2^n}\} \leq \lim_{\substack{n \to +\infty \\ \varepsilon \to 0+}} \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{+\infty} \alpha\{f > \frac{i}{2^n}\}$$

Por outro lado temos que, para $\varepsilon < \frac{1}{2^n}$, $\alpha\{f > \varepsilon + \frac{i}{2^n}\} \geq$ $\geq \alpha\{f > \frac{i+1}{2^n}\}$, $n \in \mathbb{N}$, logo,

$\frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{+\infty} \alpha\{f > \varepsilon + \frac{i}{2^n}\} \geq \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{+\infty} \alpha\{f > \frac{i+1}{2^n}\}$, onde tiramos que,

$$\lim_{\substack{n \to +\infty \\ \varepsilon \to 0+}} \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{+\infty} \alpha\{f > \varepsilon + \frac{i}{2^n}\} \geq \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{i=2}^{+\infty} \alpha\{f > \frac{i}{2^n}\}$$

Basta mostrarmos agora que,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{i=2}^{+\infty} \alpha\{f > \frac{i}{2^n}\} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{+\infty} \alpha\{f > \frac{i}{2^n}\}.$$

Em primeiro lugar provaremos, por indução sobre "s" que,

$$\frac{1}{2^{n+k}} \alpha\{f > \frac{1}{2^n}\} + \frac{1}{2^{n+k}} \sum_{i=2}^{s \cdot 2^k} \alpha\{f > \frac{i}{2^{n+k}}\} \geq \sum_{i=1}^{s} \frac{1}{2^n} \alpha\{f > \frac{i}{2^n}\},$$

$\forall k$, $n \in \mathbb{N}$.

Para $s = 1$, temos:

$$\frac{1}{2^{n+k}}\ \alpha\{f > \frac{1}{2^n}\} + \frac{1}{2^{n+k}} \sum_{i=2}^{2^k} \alpha\{f > \frac{i}{2^{n+k}}\} \overset{(*)}{\geq}$$

$$\geq \frac{1}{2^{n+k}}\ \alpha\{f > \frac{1}{2^n}\} + \frac{1}{2^{n+k}}\ (2^k - 1)\cdot \alpha\{f > \frac{1}{2^n}\} =$$

$$= \frac{2^k}{2^{n+k}}\ \alpha\{f > \frac{1}{2^n}\} = \frac{1}{2^n}\ \alpha\{f > \frac{1}{2^n}\}.$$

Admitiremos por hipótese de indução que a propriedade seja válida até o valor "s", e tentaremos provar que valerá para $s + 1$, $s \in \mathbb{N}$.

$$\frac{1}{2^{n+k}}\ \alpha\{f > \frac{1}{2^n}\} + \frac{1}{2^{n+k}} \sum_{i=2}^{(s+1)\cdot 2^k} \alpha\{f > \frac{i}{2^{n+k}}\} =$$

$$= \frac{1}{2^{n+k}}\ \alpha\{f > \frac{1}{2^n}\} + \frac{1}{2^{n+k}} \sum_{i=2}^{s\cdot 2^k} \alpha\{f > \frac{i}{2^{n+k}}\} +$$

$$+ \frac{1}{2^{n+k}} \sum_{i=s\cdot 2^k+1}^{(s+1)\cdot 2^k} \alpha\{f > \frac{i}{2^{n+k}}\} \overset{H.I}{\geq} \sum_{i=1}^{s} \frac{1}{2^n}\ \alpha\{f > \frac{i}{2^n}\} +$$

(*) $\alpha\{f > \frac{i}{2^{n+k}}\} \geq \alpha\{f > \frac{1}{2^n}\}$.

$$+\ \frac{1}{2^{n+k}} \sum_{i=s\cdot 2^k+1}^{(s+1)\cdot 2^k} \overset{(*)}{\alpha}\{f > \frac{i}{2^{n+k}}\} \geq \sum_{i=1}^{s} \frac{1}{2^n}\,\alpha\{f > \frac{i}{2^n}\} +$$

$$+\ \frac{1}{2^{n+k}} \sum_{i=s\cdot 2^k+1}^{(s+1)\cdot 2^k} \alpha\{f > \frac{s+1}{2^n}\} = \sum_{i=1}^{s} \frac{1}{2^n}\,\alpha\{f > \frac{i}{2^n}\} +$$

$$+\ \frac{1}{2^{n+k}} \cdot 2^k \cdot \alpha\{f > \frac{s+1}{2^n}\} = \sum_{i=1}^{s+1} \frac{1}{2^n}\,\alpha\{f > \frac{i}{2^n}\}$$

$$\therefore\ \forall s,n,k \in \mathbb{N},\ \frac{1}{2^{n+k}}\,\alpha\{f > \frac{1}{2^n}\} +$$

$$+\ \frac{1}{2^{n+k}} \sum_{i=1}^{s\cdot 2^k} \alpha\{f > \frac{i}{2^{n+k}}\} \geq \sum_{i=1}^{s} \frac{1}{2^n}\,\alpha\{f > \frac{i}{2^n}\},$$

e fazendo $s \longrightarrow +\infty$, teremos;

$$\frac{1}{2^{n+k}} \sum_{i=2}^{+\infty} \alpha\{f > \frac{i}{2^{n+k}}\} \geq \frac{-1}{2^{n+k}}\,\alpha\{f > \frac{1}{2^n}\} + \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{+\infty} \alpha\{f > \frac{i}{2^n}\},$$

agora fazendo $k \longrightarrow +\infty$, teremos:

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{1}{2^{n+k}} \sum_{i=2}^{+\infty} \alpha\{f > \frac{i}{2^{n+k}}\} \geq \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{+\infty} \alpha\{f > \frac{i}{2^n}\},\quad \forall n \in \mathbb{N},$$

ou seja, $\displaystyle \lim_{m \to +\infty} \frac{1}{2^m} \sum_{i=2}^{+\infty} \alpha\{f > \frac{i}{2^m}\} \geq \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{+\infty} \alpha\{f > \frac{i}{2^n}\},\quad \forall n \in \mathbb{N}$, e

---

(*) $\alpha\{f > \frac{i}{2^{n+k}}\} \geq \alpha\{f > \frac{s+1}{2^n}\}$, $i = 1, 2, \ldots, (s+1)2^k$.

assim,

$$\lim_{m \to +\infty} \frac{1}{2^m} \sum_{i=2}^{+\infty} \alpha\{f > \frac{i}{2^m}\} \geq \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{+\infty} \alpha\{f > \frac{i}{2^n}\} \geq$$

$$\geq \lim_{m \to +\infty} \sum_{i=2}^{+\infty} \alpha\{f > \frac{i}{2^m}\} \quad , \quad \text{e assim,}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{i=2}^{+\infty} \alpha\{f > \frac{i}{2^n}\} = \lim \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{+\infty} \alpha\{f > \frac{i}{2^n}\} .$$

Podemos concluir então que,

$$\lim_{\substack{n \to +\infty \\ \varepsilon \to 0+}} \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{+\infty} \alpha\{f > \varepsilon + \frac{i}{2^n}\} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{+\infty} \alpha\{f > \frac{i}{2^n}\}$$

Assim,

$$\lim_{k \to +\infty} T(f \vee \frac{1}{k} - \frac{1}{k}) = \lim_{k \to +\infty} (\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{+\infty} \alpha\{f \vee \frac{1}{k} - \frac{1}{k} > \frac{i}{2^n}\}) =$$

$$= \lim_{\substack{k \to +\infty \\ n \to +\infty}} \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{+\infty} \alpha\{f \vee \frac{1}{k} > \frac{1}{k} + \frac{i}{2^n}\} =$$

$$= \lim_{\substack{k \to +\infty \\ n \to +\infty}} \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{+\infty} \alpha\{f > \frac{1}{k} + \frac{i}{2^n}\} =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{+\infty} \alpha\{f > \frac{i}{2^n}\} = T(f).$$

T *satisfaz* (iv), *ou seja*,

$$T(f) = T(f \wedge \lambda) + T(f \vee \lambda - \lambda) \quad , \quad \lambda \in [0,+\infty)$$

De fato, dado $\lambda \in \mathbb{R}^+$ defino, $i(n) = [\lambda \cdot 2^n]$ máximo inteiro que não supera $\lambda \cdot 2^n$, e então, $i(n) \leq \lambda \cdot 2^n$; $\lambda - \frac{i(n)}{2^n} =$

$$= \frac{\lambda \cdot 2^n - i(n)}{2^n} \longrightarrow 0^+ \text{ , quando } n \longrightarrow +\infty.$$

$$T(f \wedge \lambda) + T(f \vee \lambda - \lambda) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{+\infty} \alpha\{f \wedge \lambda > \frac{i}{2^n}\} +$$

$$+ \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{+\infty} \alpha\{f \vee \lambda - \lambda > \frac{i}{2^n}\}.$$ Devemos notar que,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{+\infty} \alpha\{f \vee \lambda - \lambda > \frac{i}{2^n}\} =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{+\infty} \alpha\{f \vee \lambda > \lambda + \frac{i}{2^n}\} =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{+\infty} \alpha\{f > \frac{i}{2^n} + \lambda\} =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{i=i(n)+1}^{+\infty} \alpha\{f > \frac{i}{2^n} + (\lambda - \frac{i(n)}{2^n})\}.$$

Assim temos,

$$T(f \wedge \lambda) + T(f \vee \lambda - \lambda) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{+\infty} \alpha\{f \wedge \lambda > \frac{i}{2^n}\} +$$

$$+ \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{i=i(n)+1}^{+\infty} \alpha\{f > \frac{i}{2^n} + (\lambda - \frac{i(n)}{2^n})\}.$$ Devemos observar

que para $i > i(n)$, $\{f \wedge \lambda > \frac{i}{2^n}\} = \emptyset$ e que

$\{f \wedge \lambda > \frac{i}{2^n}\} = \{f > \frac{i}{2^n}\}$ para $i \leq i(n) - 1$. Logo,

$$T(f \wedge \lambda) + T(f \vee \lambda - \lambda) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{i(n)-1} \alpha\{f > \frac{i}{2^n}\} +$$

$$+ \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{i=i(n)+1}^{+\infty} \alpha\{f > \frac{i}{2^n} + (\lambda - \frac{i(n)}{2^n})\} =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{i(n)-1} \alpha\{f > \frac{i}{2^n} + \overset{(*)}{} (\lambda - \frac{i(n)}{2^n})\} +$$

$$+ \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{i=i(n)+1}^{+\infty} \alpha\{f > \frac{i}{2^n} + (\lambda - \frac{i(n)}{2^n})\}.$$

(*) $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{i(n)-1} \alpha\{f > \frac{i}{2^n} + (\lambda - \frac{i(n)}{2^n})\} = \lim \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{i(n)-1} \alpha\{f > \frac{i}{2^n}\}$

Podemos supor $\alpha\{f > \lambda\} < +\infty$, pois caso contrário (vi) é imediata, e assim,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} \alpha\{f > \frac{i(n)}{2^n} + \lambda - \frac{i(n)}{2^n}\} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} \alpha\{f > \lambda\} = 0 ,$$

e então, $T(f \wedge \lambda) + T(f \vee \lambda - \lambda) =$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{i(n)-1} \alpha\{f > \frac{i}{2^n} + (\lambda - \frac{i(n)}{2^n})\} +$$

$$+ \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} \alpha\{f > \frac{i(n)}{2^n} + (\lambda - \frac{i(n)}{2^n})\} +$$

$$+ \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{i=i(n)+1}^{+\infty} \alpha\{f > \frac{i}{2^n} + (\lambda - \frac{i(n)}{2^n})\} =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{+\infty} \alpha\{f > \frac{i}{2^n} + (\lambda - \frac{i(n)}{2^n})\} =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{+\infty} \alpha\{f > \frac{i}{2^n}\} = T(f) .$$

— T *satisfaz* (ii), *ou seja*,

$$T(\lambda f) = \lambda \cdot T(f), \quad \lambda \in [0,+\infty).$$

Se provarmos que,

$$T(f) = \lim_{\lambda \to +\infty} \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{+\infty} \alpha\{f > \frac{i}{\lambda}\} \quad , \text{ daí },$$

$$T(cf) = \lim_{\lambda \to +\infty} \frac{c}{c\lambda} \sum_{i=1}^{+\infty} \alpha\{cf > \frac{i}{\lambda}\} \quad , \ c \in (0,+\infty) \ ,$$

e assim, $T(cf) = c \cdot \lim_{\lambda \to +\infty} \frac{1}{c\lambda} \sum_{i=1}^{+\infty} \alpha\{f > \frac{i}{c\lambda}\} = cT(f)$.

Quando $c = 0$, o resultado é óbvio.

Para demonstrarmos o exposto acima, é útil mostrar que, se $g = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \chi_{B_i}$ então $T(g) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \ \alpha(B_i)$, onde $\lambda_i \geq 0$ e $B_i \supset B_{i+1}$.

Seja $a_i(n)$ o maior número natural tal que,

$\sum_{j=1}^{i} \lambda_j - \frac{2}{2^n} \leq \frac{a_i(n)}{2^n} \leq \sum_{j=1}^{i} \lambda_j$. Como posteriormente faremos $n \to +\infty$, podemos supor,

$$\sum_{j=1}^{i-1} \lambda_j \leq \frac{a_i(n)}{2^n} \leq \sum_{j=1}^{i} \lambda_j \ , \quad \text{com } i \in \mathbb{N} \ , \ 2 \leq i \leq n \ .$$

Assim teremos,

$$\sum_{j=1}^{a_1(n)} \alpha\{g > \frac{j}{2^n}\} = \sum_{j=1}^{a_1(n)} \alpha(B_1) = a_1(n)\alpha(B_1) \ ,$$

$$\sum_{j=a_1(n)+1}^{a_2(n)} \alpha\{g > \frac{j}{2^n}\} = \sum_{j=a_1(n)+1}^{a_2(n)} \alpha(B_2) = [a_2(n) - a_1(n)]\alpha(B_2)$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\sum_{j=a_{m-1}(n)+1}^{a_m(n)} \alpha\{g > \frac{j}{2^n}\} = \sum_{j=a_{m-1}(n)+1}^{a_m(n)} \alpha(B_m) = [a_m(n)-a_{m-1}(n)]\alpha(B_m)$$

Assim teremos que,

$$\sum_{j=1}^{a_m(n)} \alpha\{g > \frac{j}{2^n}\} = a_1(n)\alpha(B_1) + [a_2(n) - a_1(n)]\alpha(B_2) +$$

$$+\ldots+ [a_m(n)- a_{m-1}(n)]\alpha(B_m) = a_1(n)\alpha(B_1) +$$

$$+ \sum_{i=2}^{m} a_i(n)\alpha(B_i) + \sum_{i=1}^{m-1} a_i(n)\alpha(B_{i+1}) = a_1(n)\alpha(B_1) +$$

$$+ \sum_{i=2}^{m} a_i(n)\alpha(B_i) - \sum_{i=2}^{m} a_{i-1}(n)\alpha(B_i) = a_1(n)\alpha(B_1) +$$

$$+ \sum_{i=2}^{m} [a_i(n) - a_{i-1}(n)]\alpha(B_i).$$ Mas ,

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \alpha\{g > \frac{j}{2^n}\} = \sum_{j=1}^{a_m(n)} \alpha\{g > \frac{j}{2^n}\}, \text{ pois para } j > a_m(n),$$

$\alpha\{g > \frac{j}{2^n}\} = 0$. Assim ,

$$\frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{+\infty} \alpha\{g > \frac{j}{2^n}\} = \frac{1}{2^n} \sum_{j=1}^{a_m(n)} \alpha\{g > \frac{j}{2^n}\} =$$

$$= \frac{a_1(n)}{2^n} \cdot \alpha(B_1) + \sum_{i=2}^{m} [\frac{a_i(n)}{2^n} + \frac{a_{i-1}(m)}{2^n}]\ \alpha(B_i). \text{ Temos então que,}$$

$$T(g) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{+\infty} \alpha\{g > \frac{j}{2^n}\} =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{a_1(n)}{2^n}\ \alpha(B_1) + \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=2}^{m} [\frac{a_i(n)}{2^n} - \frac{a_{i-1}(n)}{2^n}]\ \alpha(B_i) =$$

$$= \lambda_1\ \alpha(B_1) + \sum_{i=2}^{m} [\sum_{j=1}^{i} \lambda_j - \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_j]\ \alpha(B_i) =$$

$$= \lambda_1\ \alpha(B_1) + \sum_{i=2}^{m} \lambda_i\ \alpha(B_i) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\ \alpha(B_i).$$

Logo, $T(g) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\ \alpha(B_i)$.

Mostraremos agora que para $m \in \{1,2,3,\ldots\}$ e $\lambda \in (0,+\infty)$, vale que,

$$f \wedge \frac{m}{\lambda} - f \wedge \frac{1}{\lambda} \leq \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{m} \varphi_{\{f > \frac{i}{\lambda}\}} \leq f \, .$$

(i) Onde $f < \frac{1}{\lambda}$, temos,

$$0 = f \wedge \frac{m}{\lambda} - f \wedge \frac{1}{\lambda} \leq 0 = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{m} \varphi_{\{f > \frac{i}{\lambda}\}} \leq f \, .$$

(ii) Onde $f > \frac{m}{\lambda}$, temos

$$\frac{m}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} = f \wedge \frac{m}{\lambda} - f \wedge \frac{1}{\lambda} \leq \frac{m}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{m} \varphi_{\{f > \frac{i}{\lambda}\}} \leq f \, .$$

(iii) Onde $\frac{j}{\lambda} < f \leq \frac{j+1}{\lambda}$, $j = 1,2,\ldots,m-1$, temos

$$f \wedge \frac{m}{\lambda} - f \wedge \frac{1}{\lambda} = f - \frac{1}{\lambda} \, ,$$

$$\frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{m} \varphi_{\{f > \frac{i}{2^n}\}} = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{j} \varphi_{\{f > \frac{i}{2^n}\}} = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{j} 1 = \frac{j}{\lambda}$$

Assim, $f \wedge \frac{m}{\lambda} - f \wedge \frac{1}{\lambda} \leq \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{m} \varphi_{\{f > \frac{i}{2^n}\}} \leq f$

Como T é monótona temos que ;

$$T(f \wedge \frac{m}{\lambda} - f \wedge \frac{1}{\lambda}) \leq T(\frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{m} \varphi_{\{f > \frac{i}{\lambda}\}}) \leq T(f) \text{ e considerando}$$

$$B_i = \{f > \frac{i}{\lambda}\} \quad \text{e} \quad g = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\lambda} \varphi_{\{f > \frac{i}{\lambda}\}} , \quad \text{temos que}$$

$$T(g) = \sum_{i=1}^{m} \alpha\{f > \frac{i}{\lambda}\} \text{ . Assim ,}$$

$$T(f \wedge \frac{m}{\lambda} - f \wedge \frac{1}{\lambda}) \leq \sum_{i=1}^{m} \alpha\{f > \frac{i}{\lambda}\} \leq T(f) \text{ , fazendo primeiro}$$

$m \longrightarrow +\infty$, depois $\lambda \longrightarrow +\infty$, e usando (vii) teremos,

$$T(f) \leq \lim_{\substack{m \to +\infty \\ \lambda \to +\infty}} \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{m} \alpha\{f > \frac{i}{\lambda}\} \leq T(f) .$$

$$\therefore \; T(f) = \lim_{\lambda \to +\infty} \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{+\infty} \alpha\{f > \frac{i}{\lambda}\}$$

A unicidade da T citada no teorema, será provada posteriormente. Mais precisamente, a unicidade da T sairá como um corolário do Teor. 1.2.

A integral monótona associada a função de conjuntos, monótona, $\alpha : P(\mathbb{A}) \longrightarrow [0,+\infty]$ será indicada pelo símbolo,

$$\int_{\mathbb{A}} (\text{---})d\alpha \text{ , } ou \ ainda, \quad T(f) = \int_{\mathbb{A}} f d\alpha$$

Esta integral possue muitas propriedades interessantes, que veremos a seguir:

Prop: 1.3 - Seja $\alpha: P(\mathbb{A}) \longrightarrow [0,+\infty]$ monótona , então,

$$\int_{\mathbb{A}} f d\alpha \geq \varepsilon \cdot \alpha\{f > \varepsilon\}, \ \forall \varepsilon > 0, \ \varepsilon \in \mathbb{R}.$$

Dem. Basta notarmos que $f \geq \varepsilon \cdot \varphi_{\{x:f(x) > \varepsilon\}}$ e pela monotocidade da integral temos,

$$\int_{\mathbb{A}} f d\alpha \geq \int_{\mathbb{A}} \varepsilon \cdot \varphi_{\{x:f(x) > \varepsilon\}} d\alpha = \varepsilon \cdot \int_{\mathbb{A}} \varphi_{\{x:f(x) > \varepsilon\}} d\alpha =$$

$$= \varepsilon \cdot \alpha\{x:f(x) > \varepsilon\} .$$

Prop: 1.4 - Seja $\alpha : P(\mathbb{A}) \longrightarrow [0,+\infty]$. Se $f = \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i \varphi_{B_i}$ com $B_i \supset B_{i+1}$ e $\lambda_i \in \mathbb{R}_+$, então

$$\int_{\mathbb{A}} f d\alpha = \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i \alpha(B_i)$$

Dem: Dividiremos a demonstração em duas partes:

($1^{\underline{a}}$ parte) Se existe um número finito de λ_i's $\neq 0$ então $f = \sum_{i=1}^{m} \lambda_{j_i} \varphi_{B_{j_i}} = \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i \varphi_{B_i}$ com $\lambda_{j_i} \neq 0$. E já mostramos que para

$$f = \sum_{i=1}^{m} \lambda_{j_i} \varphi_{B_i} ,$$

$$\int_{\mathbb{A}} f d\alpha = \sum_{i=1}^{m} \lambda_{j_i} \alpha(B_{j_i}) = \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i \alpha(B_i)$$

(2ª parte) Se existe infinitos λ_i's $\neq 0$, teremos $\forall m \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i \varphi_{B_i} \geq \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_{B_i} \implies \forall m \in \mathbb{N}^*, \int_{\mathbb{A}} f d\alpha \geq$$

$$\geq \int_{\mathbb{A}} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_{B_i} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \alpha(B_i) \implies$$

$$\implies \lim_{m \to +\infty} \int_{\mathbb{A}} f d\alpha \geq \lim_{m \to +\infty} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \alpha(B_i) \implies$$

$$\boxed{\int_{\mathbb{A}} f d\alpha \geq \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i \alpha(B_i)} \quad (I)$$

Consideremos $s_m = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_{B_i}$, $m \in \mathbb{N}$,

$s = \lim_{m \to +\infty} s_m = \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i \varphi_{B_i}$. Temos que ,

$s_m \wedge k \rightrightarrows s \wedge k$ (convergência uniforme), assim por (viii) temos ,

$$\int_{\mathbb{A}} f d\alpha \leq \liminf_{m} \int_{\mathbb{A}} s_m d\alpha = \liminf_{m} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \alpha(B_i) \quad \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i \alpha(B_i)$$

Logo , $\boxed{\int_{\mathbb{A}} f d\alpha \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i \alpha(B_i)}$ (II) .

De (I) e (II), obtemos,

$$\int_{\mathbb{A}} f d\alpha = \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i \varphi_{B_i} \qquad \text{c.q.d.}$$

Prop. 1.5 - Seja $\alpha : P(\mathbb{A}) \longrightarrow [0,+\infty]$ monótona, então,

$$\int_{\mathbb{A}} f d\alpha = \lim_{\lambda \to +\infty} \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{+\infty} \alpha\{f \geq \frac{i}{\lambda}\}$$

Dem: Já provamos que $\int_{\mathbb{A}} f d\alpha = \lim_{\lambda \to +\infty} \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{+\infty} \alpha\{f > \frac{i}{\lambda}\}$.

Se mostrarmos que $f \wedge \frac{m}{\lambda} - f \wedge \frac{1}{\lambda} \leq \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{m} \varphi_{\{f \geq \frac{i}{\lambda}\}} \leq f$, $m \in \{0,1,2,\ldots\}$

e $\lambda \in (0,+\infty)$, a demonstração fica análoga à prova de que $\int_{\mathbb{A}} f d\alpha =$

$= \lim_{\lambda \to +\infty} \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{+\infty} \alpha\{f > \frac{i}{\lambda}\}$.

(i) Para $f \geq \frac{m}{\lambda}$,

$$f \wedge \frac{m}{\lambda} - f \wedge \frac{1}{\lambda} = \frac{m}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} = \frac{m-1}{\lambda} \leq \frac{m}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{m} \varphi_{\{f \geq \frac{1}{\lambda}\}} \leq f$$

(ii) Para $f < \frac{1}{\lambda}$,

$$f \wedge \frac{m}{\lambda} - f \wedge \frac{1}{\lambda} = 0 \leq \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{m} \varphi_{\{f \geq \frac{i}{\lambda}\}} = 0 \leq f$$

(iii) Para $\frac{1}{\lambda} \leq f \leq \frac{m}{\lambda}$.

Seja $x \in \mathbb{A}$ tal que $\frac{1}{\lambda} \leq f(x) \leq \frac{2}{\lambda}$, então $(f \wedge \frac{m}{\lambda} - f \wedge \frac{1}{\lambda})(x) = f(x) - \frac{1}{\lambda}$, temos também que $\frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{m} \varphi_{\{f \geq \frac{i}{\lambda}\}}(x) =$ $= \frac{1}{\lambda}$, e como $\frac{1}{\lambda} \leq f(x) < \frac{2}{\lambda}$, teremos $0 \leq f(x) - \frac{1}{\lambda} \leq \frac{1}{\lambda}$, ou ainda, $0 < (f \wedge \frac{m}{\lambda} - f \wedge \frac{1}{\lambda})(x) \leq \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{m} \varphi_{\{f > \frac{i}{\lambda}\}}(x) \leq f(x)$.

Suponha agora, $x \in \mathbb{A}$, tal que,

$$\frac{j-1}{\lambda} \leq f(x) \leq \frac{j}{\lambda}, \text{ com } 2 \leq j \leq m.$$

$$(f \wedge \frac{m}{\lambda} - f \wedge \frac{1}{\lambda})(x) = f(x) - \frac{1}{\lambda} , \quad e ,$$

$$\frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{m} \varphi_{\{f \geq \frac{i}{\lambda}\}}(x) = \frac{j-1}{\lambda}$$

Como $\frac{j-1}{\lambda} \leq f(x) \leq \frac{j}{\lambda}$, temos que, $\frac{j-2}{\lambda} \leq f(x) - \frac{1}{\lambda} < \frac{j-1}{\lambda} <$ $< f(x)$, e assim temos,

$$(f \wedge \frac{m}{\lambda} - f \wedge \frac{1}{\lambda})(x) \leq \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{m} \varphi_{\{f \geq \frac{i}{\lambda}\}}(x) \leq f(x)$$

Visto que, "j" é genérico, $2 \leq j \leq m$, $j \in \mathbb{N}$, demonstramos que,

$$f \wedge \frac{m}{\lambda} - f \wedge \frac{1}{\lambda} \leq \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{m} \varphi_{\{f \geq \frac{i}{\lambda}\}} \leq f.$$

Provada a expressão acima, e com os comentários feitos inicialmente, obtemos que,

$$\int_{\mathbb{A}} f d\alpha = \lim_{\lambda \to +\infty} \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{+\infty} \alpha\{f \geq \frac{i}{\lambda}\}$$

Prop. 1.6 - Se a sucessão $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset [0,+\infty]^{\mathbb{A}}$ converge uniformemente para a função $g \in [0,+\infty]^{\mathbb{A}}$ e $g_n \leq g$, $\forall n \in \mathbb{N}$, então:

$$\int_{\mathbb{A}} g d\alpha = \lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{A}} g_n d\alpha$$

Dem: $g_n \leq g \Longrightarrow \int_{\mathbb{A}} g_n d\alpha \leq \int_{\mathbb{A}} g d\alpha$, $\forall n \in \mathbb{N}$,

logo $\limsup_n \int_{\mathbb{A}} g_n d\alpha \leq \int_{\mathbb{A}} g d\alpha$. Por outro lado, a propriedade (viii) diz que $\int_{\mathbb{A}} g d\alpha \leq \liminf_n \int_{\mathbb{A}} g_n d\alpha$.

Assim, $\int_{\mathbb{A}} g d\alpha = \lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{A}} g_n d\alpha$.

Prop. 1.7 - Suponha que a sucessão $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset [0,+\infty)^{\mathbb{A}}$ converge uniformemente para uma função $g \in [0,+\infty)^{\mathbb{A}}$, se existe $f \in [0,+\infty)^{\mathbb{A}}$ e $\lambda \in (0,+\infty)$ tal que $g_n \leq f$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e $\int_{\mathbb{A}} (f \wedge \lambda) d\alpha < +\infty$, então,

$$\int_{\mathbb{A}} g d\alpha = \lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{A}} g_n d\alpha .$$

Dem: Da prop. (viii) temos,

$$\int_{\mathbb{A}} g d\alpha \leq \liminf_n \int_{\mathbb{A}} g_n d\alpha .$$

Para provarmos a prop. enunciada é suficiente mostrarmos que $\int_{\mathbb{A}} g d\alpha \geq \limsup_n \int_{\mathbb{A}} g_n d\alpha$. Seja $\varepsilon \in (0,+\infty)$ e $\delta \in \mathbb{R}$, com $\delta < \limsup_n \int_{\mathbb{A}} g_n d\alpha$. Como $g_n \rightrightarrows g$, e $\delta < \limsup_n \int_{\mathbb{A}} g_n d\alpha$, escolheremos $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, tal que $g_{n(\varepsilon)} - \varepsilon < g$ e $\int_{\mathbb{A}} g_{n(\varepsilon)} d\alpha > \delta$, assim $g_{n(\alpha)} < g + \varepsilon$ e teremos que,

$$\boxed{g_{n(\varepsilon)} \vee \varepsilon \leq (g+\varepsilon) \vee \varepsilon = g + \varepsilon \Longrightarrow g_{n(\varepsilon)} \vee \varepsilon - \varepsilon < g} \quad (\mathrm{I})$$

Tendo em conta que, $\delta < \int_{\mathbb{A}} g_{n(\varepsilon)}\, d\alpha$, $g_n \leq f$, e levando em consideração a implicação (I), obtemos

$$\delta < \int_{\mathbb{A}} g_{n(\varepsilon)}\, d\alpha = \int_{\mathbb{A}} (g_{n(\varepsilon)} \wedge \varepsilon) d\alpha + \int_{\mathbb{A}} (g_{n(\varepsilon)} \vee \varepsilon - \varepsilon) d\alpha \leq$$

$$\leq \int_{\mathbb{A}} (f \wedge \varepsilon) d\alpha + \int_{\mathbb{A}} g d\alpha .$$ Observemos também que

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{\mathbb{A}} (f \wedge \varepsilon) d\alpha = 0$$, pois por hipótese existe $\lambda \in (0,+\infty)$ tal que $\int_{\mathbb{A}} (f \wedge \lambda) d\alpha < +\infty$. Assim teremos,

$$\delta \leq \Big(\lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{\mathbb{A}} (f \wedge \varepsilon) d\alpha \Big) + \int_{\mathbb{A}} g d\alpha$$, ou seja ,

$\delta \leq \int_{\mathbb{A}} g d\alpha$. Com e exposto concluímos que,

$$\forall \delta \in \mathbb{R}, \text{ tem-se, } (\delta < \limsup_n \int_{\mathbb{A}} g_n d\alpha) \implies (\delta \leq \int_{\mathbb{A}} g d\alpha) \ ,$$

e isso implica que $\int_{\mathbb{A}} g d\alpha \geq \limsup_n \int_{\mathbb{A}} g_n d\alpha$.

$$\therefore \int_{\mathbb{A}} g d\alpha \leq \liminf_n \int_{\mathbb{A}} g_n d\alpha \leq \limsup_n \int_{\mathbb{A}} g_n d\alpha \leq \int_{\mathbb{A}} g d\alpha \ ,$$

e assim, $\int_{\mathbb{A}} g d\alpha = \lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{A}} g_n d\alpha$.

Prop. 1.8 - Se $g \in [0,+\infty]^{\mathbb{A}}$ e $\int_{\mathbb{A}} g d\alpha < +\infty$, então para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, $\alpha(B) < \delta$ implica $\int_B g d\alpha < \varepsilon$, $B \subset \mathbb{A}$, $g \in B$.

Dem: Temos que,

$$\int_{\mathbb{A}} g d\alpha = \int_{\mathbb{A}} (g \wedge n) d\alpha + \int_{\mathbb{A}} (g \vee n - n) d\alpha \ , \quad \forall n, \ n \in \mathbb{N} \ ,$$

logo, $\int_{\mathbb{A}} g d\alpha = \lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{A}} (g \wedge n) d\alpha + \lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{A}} (g \vee n - n) d\alpha$, e como $\lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{A}} (g \wedge n)d\alpha = \int_{\mathbb{A}} gd\alpha < +\infty$, temos que

$\lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{A}} (g \vee n - n)d\alpha = 0$. Assim dado $\varepsilon > 0$, $\exists n_o(\varepsilon)$ tal

$\int_{\mathbb{A}} (g \vee n_o - n_o)d\alpha < \frac{\varepsilon}{2}$, e consequentemente,

$$\int_B gd\alpha = \int_B (g \wedge n_o)d\alpha + \int_B (g \vee n_o - n_o)d\alpha < n_o \cdot \alpha(B) + \frac{\varepsilon}{2} .$$

Então dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, $\delta = \frac{\varepsilon}{2n_o}$, tal que, qualquer $B \subset \mathbb{A}$, $\alpha(B) < \delta$ implica $\int_B gd\alpha < \varepsilon$.

Prop. 1.9 - Se $a > b > 0$, $a,b \in \mathbb{R}$, $f \in [0,+\infty]^{\mathbb{A}}$, então:

(a) $\lim_{\delta \to 0+} \int_{\mathbb{A}} [f \wedge (a-\delta) - f \wedge b]d\alpha = \int_{\mathbb{A}} (f \wedge a - f \wedge b)d\alpha$

(b) $\lim_{\delta \to 0+} \int_{\mathbb{A}} [f \wedge a - f \wedge (b+\delta)]d\alpha = \int_{\mathbb{A}} (f \wedge a - f \wedge b)d\alpha$

Dem: De (viii) temos,

$$\int_{\mathbb{A}} (f \wedge a - f \wedge b)d\alpha \leq \liminf_{\delta \in \mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{A}} [f \wedge (a-\delta) - f \wedge b]d\alpha \quad , \quad e,$$

$$\int_{\mathbb{A}} (f \wedge a - f \wedge b)d\alpha \leq \liminf_{\delta \in \mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{A}} [f \wedge a - f \wedge (b+\delta)]d\alpha \text{ , pois}$$

$\{f \wedge (a-\delta) - f \wedge b\}_\delta$ e $\{f \wedge a - f \wedge (b+\delta)\}_\delta$, convergem uniformemente para $f \wedge a - f \wedge b$, quando $\delta \to 0^+$. Por outro lado, $f \wedge (a - \delta) - f \wedge b \leq f \wedge a - f \wedge b$ e $f \wedge a - f \wedge (b + \delta) \leq$ $\leq f \wedge a - f \wedge b$, logo,

$$\limsup_{\delta \in \mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{A}} [f \wedge (a-\delta) - f \wedge b]d\alpha \leq \int_{\mathbb{A}} (f \wedge a - f \wedge b)d\alpha \text{ , e ,}$$

$$\limsup_{\delta \in \mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{A}} [f \wedge a - f \wedge (b+\delta)]d\alpha \leq \int_{\mathbb{A}} (f \wedge a - f \wedge b)d\alpha \text{ .}$$

Assim, $\displaystyle\int_{\mathbb{A}} (f \wedge a - f \wedge b)d\alpha \leq \liminf_{\delta \in \mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{A}} [f \wedge a - f \wedge (b+\delta)]d\alpha \leq$

$$\leq \limsup_{\delta \in \mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{A}} [f \wedge a - f \wedge (b+\delta)]d\alpha \leq \int_{\mathbb{A}} (f \wedge a - f \wedge b)d\alpha \text{ ,}$$

ou seja, $\displaystyle\lim_{\delta \to 0^+} \int_{\mathbb{A}} [f \wedge a - f \wedge (b+\delta)]d\alpha = \int_{\mathbb{A}} (f \wedge a - f \wedge b)d\alpha$.

Analogamente obtemos que,

$$\lim_{\delta \to 0^+} \int_{\mathbb{A}} [f \wedge (a-\delta) - f \wedge b]\, d\alpha = \int_{\mathbb{A}} (f \wedge a - f \wedge b)\, d\alpha \;.$$

Prop. 1.10 - Para toda $f \in [0,+\infty]^{\mathbb{A}}$, $\alpha : P(\mathbb{A}) \longrightarrow [0,+\infty]$ monótona temos,

$$\text{(a)} \quad \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\mathbb{A}} \frac{f \wedge (\tau+\varepsilon) - f \wedge \tau}{\varepsilon}\, d\alpha = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \alpha\{f > \tau + \varepsilon\} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \alpha\{f \geq \tau + \varepsilon\} \quad , \quad \tau \in (0,+\infty)$$

$$\text{(b)} \quad \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\mathbb{A}} \frac{f \wedge \tau - f \wedge (\tau-\varepsilon)}{\varepsilon}\, d\alpha =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \alpha\{f > \tau - \varepsilon\} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \alpha\{f \geq \tau - \varepsilon\} \quad , \quad \tau \in (0,+\infty) .$$

Dem: Em primeiro lugar mostraremos que

$(a-b)\varphi_{\{f \geq b\}} \geq (a-b)\varphi_{\{f > b\}} \geq f \wedge a - f \wedge b \geq (a-b)\varphi_{\{f \geq a\}} \geq$

$\geq (a-b)\varphi_{\{f > a\}}$, onde $a > b$, $a,b \in [0,+\infty]$. Essas desigualdades são óbvias, a menos de ,

$(a-b)\varphi_{\{f > b\}} \geq f \wedge a - f \wedge b \geq (a-b)\varphi_{\{f \geq a\}}$, que passaremos a demonstrar.

(1) Se $f(x) \leq b$, então $(a-b)\varphi_{\{f > b\}}(x) = 0$,

$(a - b)\varphi_{\{f \geq a\}}(x) = 0$ pois $a > b$, $(f \wedge a - f \wedge b)(x) =$

$= f(x) \wedge a - f(x) \wedge b = 0$, $(a - b)\varphi_{\{f > a\}}(x) = 0$

(2) Se $b < f(x) < a$ temos,

$(a - b)\varphi_{\{f > b\}}(x) = a - b$,

$(f \wedge a - f \wedge b)(x) = f(x) - b < a - b$,

$(a - b)\varphi_{\{f \geq a\}}(x) = 0$, logo

$(a - b)\varphi_{\{f > b\}}(x) \geq (f \wedge a - f \wedge b)(x) \geq (a-b)\varphi_{\{f \geq a\}}(x)$,

para "$x \in \mathbb{A}$" tq. $b < f(x) < a$.

(3) Se $f(x) \geq a$, temos

$(a - b)\varphi_{\{f > b\}}(x) = a - b$,

$(f \wedge a - f \wedge b)(x) = a - b$, e $(a - b)\varphi_{\{f \geq a\}}(x) = (a - b)$.

Assim, $\forall x \in \mathbb{A}$ tem-se que,

$(a - b)\varphi_{\{f > b\}} \geq f \wedge a - f \wedge b \geq (a - b)\varphi_{\{f \geq a\}}$. Logo,

$$\frac{f \wedge (\tau + \varepsilon) - f \wedge \tau}{\varepsilon} \geq \frac{1}{\varepsilon}(\tau + \varepsilon - \tau)\varphi_{\{f \geq \tau + \varepsilon\}} >$$

$$> \frac{1}{\varepsilon}(\tau + \varepsilon - \tau)\varphi_{\{f > \tau + \varepsilon\}} \quad ; \quad \text{e então,}$$

$$\int_{\mathbb{A}} \frac{f \wedge (\tau + \varepsilon) - f \wedge \tau}{\varepsilon} \, d\alpha \geq \int_{\mathbb{A}} \varphi_{\{f \geq \tau + \varepsilon\}} \, d\alpha > \int_{\mathbb{A}} \varphi_{\{f > \tau + \varepsilon\}} \, d\alpha,$$

ou seja, $\displaystyle\int_{\mathbb{A}} \frac{f \wedge (\tau + \varepsilon) - f \wedge \tau}{\varepsilon} \, d\alpha \geq \alpha\{f \geq \tau + \varepsilon\} > \alpha\{f + \varepsilon\}$,

$\forall \varepsilon > 0$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Fazendo $\varepsilon \to 0^+$, obteremos,

$$\boxed{\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\mathbb{A}} \frac{f \wedge (\tau + \varepsilon) - f \wedge \tau}{\varepsilon} \, d\alpha \geq \lim_{\varepsilon \to 0^+} \alpha\{f \geq \tau + \varepsilon\} \geq \lim_{\varepsilon \to 0^+} \alpha\{f > \tau + \varepsilon\}}$$

Por outro lado, a propriedade anterior nos diz que,

$$\int_{\mathbb{A}} \frac{f \wedge (\tau + \varepsilon) - f \wedge \tau}{\varepsilon} \, d\alpha = \lim_{\delta \to 0^+} \int_{\mathbb{A}} \frac{f \wedge (\tau + \varepsilon) - f \wedge (\tau + \delta)}{\varepsilon} \, d\alpha \, .$$

Temos também $\dfrac{f \wedge (\tau + \varepsilon) - f \wedge (\tau + \delta)}{\varepsilon} \leq \dfrac{1}{\varepsilon}[(\tau + \varepsilon) - (\tau + \delta)]\varphi_{\{f > \tau + \delta\}}$,

que implica

$$\int_{\mathbb{A}} \frac{f \wedge (\tau + \varepsilon) - f \wedge (\tau + \delta)}{\varepsilon} \, d\alpha \leq \frac{\varepsilon - \delta}{\varepsilon} \int_{\mathbb{A}} \varphi_{\{f > \tau + \delta\}} d\alpha =$$

$$= \frac{\varepsilon - \delta}{\varepsilon} \alpha\{f > \tau + \delta\}$$. Assim,

$$\lim_{\delta \to 0^+} \int_{\mathbb{A}} \frac{f \wedge (\tau + \varepsilon) - f \wedge (\tau + \delta)}{\varepsilon} \leq \lim_{\delta \to 0^+} \frac{\varepsilon - \delta}{\varepsilon} \alpha\{f > \tau + \delta\} =$$

$$= \lim_{\delta \to 0^+} \alpha\{f > \tau + \delta\}$$, ou ainda ,

$$\int_{\mathbb{A}} \frac{f \wedge (\tau + \varepsilon) - f \wedge \tau}{\varepsilon} \, d\alpha \leq \lim_{\delta \to 0^+} \alpha\{f > \tau + \delta\} \quad , \quad \forall \varepsilon > 0$$

que implica

$$\boxed{\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\mathbb{A}} \frac{f \wedge (\tau + \varepsilon) + f \wedge \tau}{\varepsilon} \, d\alpha \leq \lim_{\varepsilon \to 0^+} \alpha\{f > \tau + \varepsilon\}}$$

Temos então que,

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\mathbb{A}} \frac{f \wedge (\tau + \varepsilon) - f \wedge \tau}{\varepsilon} \, d\alpha = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \alpha\{f > \tau + \varepsilon\} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \alpha\{f \geq \tau + \ \}$$

De modo análogo prova-se o ítem (b) da proposição.

Prop. 1.11 - Para toda $f \in [0,+\infty]^{\mathbb{A}}$, $\alpha : \mathcal{P}(\mathbb{A}) \longrightarrow [0,+\infty]$, monótona, o conjunto dado por,

$$\{\tau \in (0,+\infty) : \alpha\{f > \tau\} \neq \alpha\{f \geq \tau\}\ \text{é enumerável.}$$

Dem: Sejam, $h(t) = \alpha\{f > t\}$ e $g(t) = \alpha\{f \geq t\}$, $t \in (0,+\infty)$. Pela propriedade anterior temos que $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} h(t+\varepsilon) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \alpha\{f > t+\varepsilon\} =$

$= \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \alpha\{f \geq t+\varepsilon\} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} g(t+\varepsilon)$, e assim $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} h(t+\varepsilon) =$

$= \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} g(t+\varepsilon)$. Logo se h e g são contínuas em "t" então $h(t) = g(t)$, isto é, $\alpha\{f > t\} = \alpha\{f \geq t\}$. Como o conjunto $\mathbb{E}$ dos valores de "t" onde "h" ou "g" é descontínua, é enumerável, pois h e g são monótonas, segue-se então que

$k = \{\tau \in (0,+\infty) : \alpha\{f > \tau\} \neq \alpha\{f \geq \tau\}$ é enumerável, pois $k \subset \mathbb{E}$.

DEF. 3 - Seja $T : \mathbb{B} \to [0,+\infty]$ uma integral monótona sobre $\mathbb{B} \subset [0,+\infty]^{\mathbb{A}}$. Definimos α_T e β_T as funções de conjuntos dadas por

$$\alpha_T : \mathcal{P}(\mathbb{A}) \longrightarrow [0,+\infty]^{\mathbb{A}}$$
$$B \longrightarrow \alpha_T(B) = \sup\{T(f) : f \leq \varphi_B \ \text{e}\ f \in \mathbb{B}\},$$

e
$$\beta_T : \mathcal{P}(\mathbb{A}) \longrightarrow [0,+\infty]^{\mathbb{A}}$$
$$B \longrightarrow \beta_T(B) = \inf\{T(f) : f \geq \varphi_B \ \text{e}\ f \in \mathbb{B}\}$$

As funções α_T e β_T são monótonas, pois dados $B_1, B_2 \in$ $\in P(\mathbb{A})$ com $B_1 \subset B_2$, então $\varphi_{B_1} \leq \varphi_{B_2}$ e assim,

$$\sup \{T(f): f \leq \varphi_{B_1} \text{ e } f \in \mathbb{B}\} \leq \sup \{T(f): f \leq \varphi_{B_2} \text{ e } f \in \mathbb{B}\},$$

pois T é monótona, e assim $\alpha_T(B_1) \leq \alpha_T(B_2)$.
De modo análogo segue que $\beta_T(B_1) \leq \beta_T(B_2)$.

A monotocidade da T nos indica também que $\alpha_T \leq \beta_T$. Indicaremos por $[\alpha_T, \beta_T]$ o conjunto não vazio formado pelas funções $\gamma: P(\mathbb{A}) \longrightarrow [0,+\infty]$ monótonas, tais que $\alpha_T \leq \gamma \leq \beta_T$.

DEF. 4 - Dizemos que a função $\gamma: P(\mathbb{A}) \longrightarrow [0,+\infty]$ representa a integral monótona $T: \mathbb{B} \longrightarrow [0,+\infty]$ se $T(f) = \int_{\mathbb{A}} f d\gamma$, $\forall f \in \mathbb{B}$.

Com as propriedades da integral monótona e estas definições podemos formalizar uma nova versão do Teorema de Riesz.

Teor. 1.3 - Seja $T: \mathbb{B} \longrightarrow [0,+\infty]$ uma integral monótona sobre $\mathbb{B} \subset [0,+\infty]^{\mathbb{A}}$. A função monótona $\gamma: P(\mathbb{A}) \longrightarrow [0,+\infty]$ representa o funcional T se, e somente se, $\gamma \in [\alpha_T, \beta_T]$.

Dem: ($\Longrightarrow$) Seja $f_1 \leq \varphi_B \leq f_2$ com $f_1, f_2 \in \mathbb{B}$ e $B \in P(\mathbb{A})$. Então,

$$T(f_1) = \int_{\mathbb{A}} f_1 d\gamma \leq \gamma(B) \leq \int_{\mathbb{A}} f_2 d\gamma = T(f_2),$$ e pela definição

de α_T e β_T, temos que ,

$\alpha_T(B) \leq \gamma(B) \leq \beta_T(B)$, logo $\gamma \in [\alpha_T, \beta_T]$.

($\Longleftarrow$) Para mostrarmos a recíproca devemos observar os seguintes ítens,

(1) Se $f \leq \varphi_B \leq f_2$, $f_1, f_2 \in \mathbb{B}$, $B \in \mathcal{P}(\mathbb{A})$ então

$T(f_1) \leq \alpha_T(B) \leq \beta_T(B) \leq T(f_2)$.

(2) Se $\lambda_i > 0$, $1 \leq i \leq n$, $\varphi_{B_i} \geq \varphi_{B_{i+1}}$; $f_1, f_2 \in \mathbb{B}$

e $f_1 \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_{B_i} \leq f_2$ então temos que,

$T(f_1) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_T(B_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \beta_T(B_i) \leq T(f_2)$.

Justificação deste ítem:

Vamos mostrar por indução. Para $k = 1$, $\lambda_i \neq 0$ temos que se $f_1 \leq \lambda_1 \varphi_{B_1} \leq f_2$, $f_1, f_2 \in \mathbb{B}$ então $f_1 \cdot \lambda_1^{-1} \leq \varphi_{B_1} \leq f_2 \cdot \lambda_1^{-1}$ e daí pela definição de α_T e β_T temos $T(f_1 \cdot \lambda^{-1}) \leq \alpha_T(B_1) \leq$ $\leq \beta_T(B_1) \leq T(f_2 \cdot \lambda_1^{-1})$, ou seja, $T(f_1) \leq \lambda_1 \alpha_T(B_1) \leq \lambda_1 \beta_T(B_1) \leq$ $\leq T(f_2)$, e assim vale o item (2) para $k = 1$.

Supor válida a propriedade para $k = n-1$, provaremos que será válida para $k = n$. Seja $f_1 \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_{B_i} \leq f_2$; $f_1, f_2 \in \mathbb{B}$, $\lambda_i > 0$,

$1 \leq i \leq n$, com $\varphi_{B_i} \geq \varphi_{B_{i+1}}$. Então teremos:

(a) $f_1 \wedge \lambda_1 \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_{B_i} \wedge \lambda_1 \leq f_2 \wedge \lambda_1$, ou seja,

$$f_1 \wedge \lambda_1 \leq \lambda_1 \varphi_{B_1} \leq f_2 \wedge \lambda_1 .$$

(b) $f_1 \vee \lambda_1 - \lambda_1 \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_{B_i} \vee \lambda_1 - \lambda_1 \leq f_2 \vee \lambda_1 - \lambda_1$,

ou seja, $f_1 \vee \lambda_1 - \lambda_1 \leq \sum_{i=2}^{n} \lambda_i \varphi_{B_i} \leq f_2 \vee \lambda_1 - \lambda_1$,

que podemos reescrever,

$$f_1 \vee \lambda_1 - \lambda_1 \leq \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_{i+1} \varphi_{B_{i+1}} \leq f_2 \vee \lambda_1 - \lambda_1 .$$

Decorre do item (1) e da observação de (a) que,

$$(*) \quad T(f_1 \wedge \lambda_1) \leq \lambda_1 \alpha_T(B_1) \leq \lambda_1 \beta_T(B_1) \leq T(f_2 \wedge \lambda_1) ,$$

observando (b) e a hipótese de indução teremos,

$$(\overset{*}{*}) \quad T(f_1 \vee \lambda_1 - \lambda_1) \leq \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \alpha_T(B_i) \leq \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \beta_T(B_i) \leq T(f_2 \vee \lambda_1 - \lambda_1).$$

Somando-se membro a membro as expressões (*) e ($\overset{*}{*}$) obteremos,

$$T(f_1) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_T(B_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \beta_T(B_i) \leq T(f_2) \quad ,$$

ficando provado o item (2).

(3) Para qualquer $f \in \mathbb{B}$, $n \in \mathbb{N}$ vale a desigualdade:

$$f \wedge n - f \wedge \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{n \cdot 2^n} \varphi_{\{f > \frac{i}{2^n}\}} \leq f$$

De fato:

Se $f(x) \leq \dfrac{1}{2^n}$ temos,

$$(f \wedge n - f \wedge \frac{1}{2^n})(x) = f(x) - f(x) = 0 \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{n \cdot 2^n} \varphi_{\{f > \frac{i}{2^n}\}}(x) = 0 .$$

Se $\dfrac{j}{2^n} < f(x) \leq \dfrac{j+1}{2^n}$, $1 \leq j \leq (n.2^n - 1)$,

temos $(f \wedge n - f \wedge \dfrac{1}{2^n})(x) = f(x) - \dfrac{1}{2^n}$ e

$$\frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{n \cdot 2^n} \varphi_{\{f > \frac{i}{2^n}\}}(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{j} \varphi_{\{f > \frac{i}{2^n}\}}(x) = \frac{j}{2^n}$$

Mas $\dfrac{j}{2^n} < f(x) \leq \dfrac{j+1}{2^n}$, logo $\dfrac{j-1}{2^n} < f(x) - \dfrac{1}{2^n} \leq \dfrac{j}{2^n}$, e então $(f \wedge n - f \wedge \frac{1}{2^n})(x) \leq \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{n\cdot 2^n} \varphi_{\{f > \frac{i}{2^n}\}}(x) \leq f(x)$

Se $f(x) > n\cdot 2^n$ teremos,

$$(f \wedge n - f \wedge \frac{1}{2^n})(x) = n - \frac{1}{2^n} \text{ , e, também ,}$$

$$\frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{n\cdot 2^n} \varphi_{\{f > \frac{i}{2^n}\}}(x) = \frac{n\cdot 2^n}{2^n} = n \text{ ,}$$

logo a desigualdade é válida.

Provaremos agora a recíproca. Combinando os itens (2) e (3) e tomando os seguintes conjuntos B_i definidos por $B_i = \{f > \frac{i}{2^n}\}$ temos,

$$T(f \wedge n - f \wedge \frac{1}{2^n}) \leq \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{n\cdot 2^n} \alpha_T\{f > \frac{i}{2^n}\} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{n\cdot 2^n} \beta_T\{f > \frac{i}{2^n}\} \leq T(f) \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N} .$$

Usando o Teor.(1.2) e a propriedade (vii) da definição de integral monótona temos,

$$T(f) = \int_{\mathbb{A}} f d\alpha_T = \int_{\mathbb{A}} f d\beta_T \quad , \quad \text{e como}$$

$\gamma \in [\alpha_T, \beta_T]$, $T(f) = \int_{\mathbb{A}} f d\gamma$. c.q.d.

UNICIDADE DA INTEGRAL MONÓTONA

Seja $\alpha: \mathcal{P}(\mathbb{A}) \longrightarrow [0,+\infty]$ uma função de conjuntos monótona. A única integral monótona sobre $[0,+\infty]^{\mathbb{A}}$ que verifica $T(\varphi_B) = \alpha(B)$, $\forall B \in \mathcal{P}(\mathbb{A})$, é definida por:

$$\text{"} \quad T(f) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{n} \alpha\{f > \frac{i}{2^n}\} \quad \text{"}$$

Prova: Seja $S : [0,+\infty]^{\mathbb{A}} \longrightarrow [0,+\infty]$ outra integral monótona sobre $\mathbb{A}$ tal que $S(\varphi_B) = \alpha(B)$, $\forall B \in \mathcal{P}(\mathbb{A})$. Temos pelo Teorema 1.3 que existe $\gamma: \mathcal{P}(\mathbb{A}) \quad [0,+\infty]$, $\gamma \in [\alpha_T, \beta_T]$ tal que,

$$S(f) = \int_{\mathbb{A}} f d\gamma \ , \quad \forall f \in [0,+\infty]^{\mathbb{A}} \ . \text{ Logo },$$

$$S(\varphi_B) = \gamma(B) = \alpha(B) = T(\varphi_B) \ , \ \forall B \in \mathcal{P}(\mathbb{A}) \ ,$$

assim $\alpha = \gamma$ e consequentemente $S = T$. c.q.d.

Daremos agora alguns exemplos de integral monótona associada a uma função de conjuntos-monótona.

Exemplo 1 - Seja $B \neq \emptyset$ e $B \subset \mathbb{A}$. Se $\alpha_B: \mathcal{P}(\mathbb{A}) \longrightarrow \{0,1\}$ é uma função de conjuntos monótona definida por $\alpha_B(H) = 1$ quando $H \supset B$ e $\alpha_B(H) = 0$ quando $H \not\supset B$, então,

$$\int_{\mathbb{A}} f d\alpha_B = \inf_{x \in B} f(x) \quad , \quad \forall f \in [0,+\infty]^{\mathbb{A}}$$

Dem: Mostraremos que, para qualquer função de conjuntos monótona "γ" que assume valores "0" ou "1" em $\mathcal{P}(\mathbb{A})$ tem-se,

$$\int_{\mathbb{A}} f d\gamma = \inf\{h \in (0,+\infty) : \gamma\{f > h\} = 0\} \ ,$$

e a partir disso, obteremos o resultado enunciado.

Seja $s_o = \inf\{h \in (0,+\infty) : \gamma\{f > h\} = 0\}$, então:

(a) Se $s_o = +\infty$, obtemos que $\forall t \in (0,+\infty)$,

$$t = t\gamma\{f > h\} \leq \int_{\mathbb{A}} f d\gamma \text{ , e assim } \int_{\mathbb{A}} f d\gamma = +\infty .$$

(b) Se $s_o = 0$, temos $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{+\infty} \gamma\{f > \frac{i}{2^n}\} = 0$,

ou seja $\int_{\mathbb{A}} f d\gamma = 0$.

(c) Se $s_o \in (0,+\infty)$, temos $\int_{\mathbb{A}} (f \wedge s_o) d\gamma \leq s_o \cdot \gamma(\mathbb{A}) = s_o$.

Por outro lado $t = t \cdot \gamma\{f > t\} \leq \int_{\mathbb{A}} (f \wedge s_o) d\gamma$, $\forall t \in (0,s_o)$,

logo $\sup\{t : t \in (0,s_o)\} \leq \int_{\mathbb{A}} (f \wedge s_o) d\gamma$, ou seja,

$$s_o \leq \int_{\mathbb{A}} (f \wedge s_o)d\gamma \ , \quad \text{e assim,} \quad \int_{\mathbb{A}} (f \wedge s_o)d\gamma = s_o \ .$$

Mas $\displaystyle\int_{\mathbb{A}} (f \vee s_o - s_o)d\gamma = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{+\infty} \gamma\{f \wedge s_o > s_o + \frac{i}{2^n}\} =$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{+\infty} \alpha\{f > s_o + \frac{i}{2^n}\} = 0. \quad \text{Logo ,}$$

$$\int_{\mathbb{A}} fd\gamma = \int_{\mathbb{A}} (f \wedge s_o)d\gamma + \int_{\mathbb{A}} (f \vee s_o - s_o)d\gamma = s_o \ .$$

Basta agora, mostrarmos que,
$\inf\{h \in (0+\infty) : \alpha_B\{f > h\} = 0\} = \inf\limits_{x \in B} f(x)$. Seja $r = \inf\limits_{x \in B} f(x)$ e $s_o = \inf\{h \in (0,+\infty) : \alpha_B\{f > h\} = 0\}$. Se $r < s_o$, existe $h \in \mathbb{R}$ tal que $r < h < s_o$, e assim, $\alpha_B\{f > h\} = 1$, consequentemente, $\{f > h\} \supset B$.
Mas, $\{f > h\} \supset B \implies \forall x \in B \ , \ f(x) > h \implies r = \inf\limits_{x \in B} f(x) > h$, o que é absurdo. Logo $r \geq s_o$.

Se $r > s_o$, existe $h \in \mathbb{R}$ tal que $r > h > s_o$, e então $\alpha_B\{f > h\} = 0$. Mas $h < r$, logo , $\forall x \in B$, $f(x) > r > h$, e assim $x \in \{f > h\}$. Logo, $B \subset \{f > h\}$, e $\alpha_B\{f > h\} = 1$, que é um absurdo. Temos assim que $\displaystyle\int_{\mathbb{A}} fd\alpha_B = \inf_{x \in B} f(x)$.

Exemplo 2 - Seja $B \neq \emptyset$ e $B \subset \mathbb{A}$. Se $\beta_B : P(\mathbb{A}) \longrightarrow \{0,1\}$ é uma função monótona de conjuntos definida por

$$\beta_B(H) = \begin{cases} 1 & \text{se } H \cap B = \emptyset \\ 0 & \text{se } H \cap B \neq \emptyset \end{cases} \qquad \text{então}$$

$$\int_{\mathbb{A}} f d\beta_B = \sup_{x \in B} f(x) \quad , \quad \forall f \in [0,+\infty]^{\mathbb{A}} .$$

Dem: Basta provarmos que,

$\inf\{h \in (0,+\infty) : \beta_B\{f > h\} = 0\} = \sup_{x \in B} f(x)$. Sejam, $r = \sup_{x \in B} f(x)$ e $s_o = \inf\{h \in (0,+\infty) : \beta_B\{f > h\} = 0\}$.

Se $r < s_o$, existe $h \in \mathbb{R}$ tal que $r < h < s_o$, logo $\beta_B\{f > h\} = 1$. Como $h > r$, $\forall x \in B$, $f(x) < h$ e então $\{f > h\} \cap B = \emptyset$, ou seja, $\beta_B\{f > h\} = 0$, que é absurdo. Logo $r \geq s_o$. Analogamente mostra-se que "r" não pode ser maior que s_o, e assim $r = s_o$, que implica,

$$\int_{\mathbb{A}} f d\beta_B = \sup_{x \in B} f(x)$$

DEF. 5 - Seja $\mathbb{A} \neq \emptyset$ um conjunto, $F \subset P(\mathbb{A})$ é chamado *filtro de conjuntos sobre* $\mathbb{A}$ *se*

(a) $F \neq \emptyset$

(b) $\emptyset \notin F$

(c) $H \in \mathcal{F}$, $B \supset H \implies B \in \mathcal{F}$

(d) $H, B \in \mathcal{F} \implies H \cap B \in \mathcal{F}$

Exemplo 3 - Seja $\mathcal{F}$ um filtro de conjuntos sobre $\mathbb{A}$ e $\alpha_{\mathcal{F}} : \mathcal{P}(\mathbb{A}) \longrightarrow \{0,1\}$ a função definida por

$$\alpha_{\mathcal{F}}(H) = \begin{cases} 1 & \text{se } H \in \mathcal{F} \\ 0 & \text{se } H \notin \mathcal{F} \end{cases} \quad , \text{ então}$$

$$\int_{\mathbb{A}} f d\alpha_{\mathcal{F}} = \sup_{H \in \mathcal{F}} \inf_{x \in H} f(x) \quad , \qquad f \in [0,+\infty]^{\mathbb{A}} \ .$$

Por definição colocamos,

$$\liminf_{\mathcal{F}} f = \sup_{H \in \mathcal{F}} \inf_{x \in H} f(x)$$

Dem: Mostraremos incialmente que,

$$\liminf_{\mathcal{F}} : [0,+\infty]^{\mathbb{A}} \longrightarrow [0,+\infty] \quad ,$$

$$f \longlongrightarrow \liminf_{\mathcal{F}} f$$

é uma integral monótona sobre $[0,+\infty]^{\mathbb{A}}$. O axioma (i) da definição de integral monótona é satisfeito obviamente. Analisemos (ii) da definição de integral monótona,

$$\forall f \in [0,+\infty]^{\mathbb{A}}\ ,\ \lambda \in [0,+\infty),\ \liminf_{\mathcal{F}} \lambda f = \inf_{H\in\mathcal{F}} \sup_{x\in H} \lambda f(x) =$$

$$= \inf_{H\in\mathcal{F}} \{\lambda \cdot \sup_{x\in H} f(x)\} = \lambda \cdot \inf_{H\in\mathcal{F}} \sup_{x\in H} f(x) = \lambda \liminf_{\mathcal{F}} f\ .$$

(iii) $\forall f;\ g \in [0,+\infty]^{\mathbb{A}}\ ,\ f \leq g \implies \inf_{x\in H} f(x) \leq \inf_{x\in H} g(x) \implies$

$$\implies \sup_{H\in\mathcal{F}} \inf_{x\in H} f(x) \leq \sup_{H\in\mathcal{F}} \inf_{x\in H} g(x) \implies \liminf_{\mathcal{F}} f \leq \liminf_{\mathcal{F}} g\ .$$

(iv) $\forall f \in [0,+\infty]^{\mathbb{A}}\ ,\ \lambda \in [0,+\infty)$, temos,

$$\liminf_{\mathcal{F}} (f \wedge \lambda) = \sup_{H\in\mathcal{F}} \inf_{x\in H}\{f(x) \wedge \lambda\} = \sup_{H\in\mathcal{F}}\{(\inf_{x\in H} f(x) \wedge \lambda\} =$$

$= (\sup_{H\in\mathcal{F}} \inf_{x\in H} f(x)) \wedge \lambda = (\liminf_{\mathcal{F}} f) \wedge \lambda$. De modo análogo, usando a definição da $\liminf_{\mathcal{F}} f$, obtemos que,

$$\liminf_{\mathcal{F}} (f \vee \lambda - \lambda) = (\liminf_{\mathcal{F}} f) \vee \lambda - \lambda\ ,$$

$\forall \in [0,+\infty)$. Assim ,

$$\liminf_{\mathcal{F}} (f \wedge \lambda) + \liminf_{\mathcal{F}} (f \vee \lambda - \lambda) =$$

$$= (\liminf_{\mathcal{F}} f) \wedge \lambda + (\liminf_{\mathcal{F}} f) \vee \lambda - \lambda = \liminf_{\mathcal{F}} f\ .$$

(v) $\forall f \in [0,+\infty]^{\mathbb{A}}$, $n \in \mathbb{N}$, temos,

$\lim\limits_{\mathcal{F}} \inf f = \lim\limits_{n\to+\infty} [\lim\limits_{\mathcal{F}} \inf (f \wedge n)]$, pois a sequência

$\{\lim\limits_{\mathcal{F}} \inf(f \wedge n)\}_n$ é não decrescente, e assim,

$$\lim_{n\to+\infty} [\lim_{\mathcal{F}} \inf (f \wedge n)] = \sup_{n\in\mathbb{N}} \{\sup_{H\in\mathcal{F}} \inf_{x\in H} (f(x) \wedge n)\} =$$

$$= \sup_{n\in\mathbb{N}} \{(\sup_{H\in\mathcal{F}} \inf_{x\in H} f(x) \wedge n\} = \sup_{H\in\mathcal{F}} \inf_{x\in H} f(x) =$$

$$= \lim_{\mathcal{F}} \inf f .$$

(vi) De modo análogo ao item (v) obtemos que, $\forall f \in [0,+\infty]^{\mathbb{A}}$, $n \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n\to+\infty} [\lim_{\mathcal{F}} \inf(f \vee \tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{n})] = \lim_{\mathcal{F}} \inf f .$$

Assim $\lim\limits_{\mathcal{F}} \inf f$ é uma integral monótona sobre $\mathbb{A}$.

Sabemos que, para qualquer $B \in \mathcal{P}(\mathbb{A})$,

$$\int_{\mathbb{A}} \varphi_B d\alpha_{\mathcal{F}} = \alpha_{\mathcal{F}}(B) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad B \notin \mathcal{F} \\ 1 & \text{se} \quad B \in \mathcal{F} \end{cases}$$

. Agora, dado

$B \in \mathcal{P}(\mathbb{A})$, $\lim\limits_{\mathcal{F}} \inf \varphi_B = \sup\limits_{H\in\mathcal{F}} \inf\limits_{x\in H} \varphi_B(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad B \notin \mathcal{F} \\ 1 & \text{se} \quad B \in \mathcal{F} \end{cases}$

$$\therefore \lim_{F} \inf \varphi_B = \int_{\mathbb{A}} \varphi_B \, d\alpha_F \, , \quad \forall B \subset \mathbb{A} \, ,$$

e pela unicidade do Teor. (1.2) , obtemos que

$$\int_{\mathbb{A}} f d\alpha_F = \lim_{F} \inf f$$

Exemplo 4 - Sejam, F um filtro de conjuntos sobre $\mathbb{A}$, $\beta_F : P(\mathbb{A}) \longrightarrow \{0,1\}$ a função de conjuntos definida por,

$$\beta_F(H) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad H \cap B \neq \emptyset \, , \quad \forall B \in F \\ 0 & \text{se} \quad H \cap B = \emptyset \, , \text{ para algum } \; B \in F \, . \end{cases}$$

Então, $$\int_{\mathbb{A}} f d\beta_F = \inf_{H \in F} \sup_{x \in H} f(x) .$$

Por definição colocamos,

$$\lim_{F} \sup f = \inf_{H \in F} \sup_{x \in H} f(x)$$

Dem:

$$\lim_{F} \sup : [0,+\infty]^{\mathbb{A}} \longrightarrow [0,+\infty] \, ,$$
$$f \longmapsto \lim_{F} \sup f$$

é uma integral monótona, obviamente. Dado

$\forall B \subset \mathbb{A}$, $\lim\limits_{F} \sup \varphi_B = \inf\limits_{H \in F} \sup\limits_{x \in H} \varphi_B(x) = 1$

se $H \cap B \neq \emptyset$, $\forall H \in F$, ou $\lim\limits_{F} \sup \varphi_B = 0$ se

$\exists H \in F$ tal que $H \cap B = \emptyset$. Logo,

$$\lim_{F} \sup \varphi_B = \beta_F(B) \ , \ \forall B \in P(\mathbb{A}) .$$

Temos também que $\displaystyle\int_{\mathbb{A}} \varphi_B \, d\beta_F = \beta_F(B)$, $\forall B \in P(\mathbb{A})$,

e pela unicidade exposta no Teor. (1.2), temos ,

$$\int_{\mathbb{A}} f d\beta_F = \lim_{F} \inf f$$

Prop. 1.12 - Seja $\gamma : P(\mathbb{A}) \longrightarrow \{0,1\}$ uma função de conjuntos monótona com as propriedades :

(1) $\gamma(\mathbb{A}) = 1$

(2) $\gamma(B \cap C) = \gamma(B) \wedge \gamma(C)$, $\forall B,C \in P(\mathbb{A})$.

Então, $\displaystyle\int_{\mathbb{A}} f d\gamma = \lim_{F} \inf f$, onde F é o filtro formado por

$H \in P(\mathbb{A})$ tal que $\gamma(H) = 1$.

Dem: Mostraremos inicialmente que F é um filtro.

(a) $F \neq \emptyset$ pois $\mathbb{A} \in F$.

(b) $\emptyset \notin F$ pois $\gamma(\emptyset) = 0$

(c) Seja $C \in F$, $B \in P(\mathbb{A})$, $B \supset C$. Então como γ é monótona $\gamma(B) = 1$, assim $B \in F$.

(d) $B, C \in F \Longrightarrow \gamma(B) = \gamma(C) = 1 \Longrightarrow \gamma(B) \wedge \gamma(C) = 1 \Longrightarrow$
$\Longrightarrow \gamma(B \cap C) = 1 \Longrightarrow B \cap C \in F$

$\therefore F$ é filtro.

Temos por definição que,

$$\gamma(H) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad H \in F \\ 0 & \text{se} \quad H \notin F \end{cases} \quad , \text{ assim} \quad \alpha_F = \gamma$$

e pelo exemplo (3), $\displaystyle\int_{\mathbb{A}} f d\gamma = \lim_{F} \inf f$.

Prop. 1.13 - Seja $\gamma : P(\mathbb{A}) \longrightarrow \{0,1\}$ uma função de conjuntos monótona com as propriedades:

(a) $\gamma(\mathbb{A}) = 1$

(b) $\gamma(B \cup C) = \gamma(B) \vee \gamma(C)$, $\forall B, C \in P(\mathbb{A})$.

Então, $\displaystyle\int_{\mathbb{A}} f d\gamma = \lim_{F} \sup f$, onde F é o filtro formado pelos $H \in P(\mathbb{A})$ tal que $\gamma(\mathbb{A} - H) = 0$.

Dem: Mostraremos que F é um filtro.

(a) $\mathcal{F} \neq \emptyset$ pois $\mathbb{A} - \mathbb{A} = \emptyset$, logo $\gamma(\mathbb{A} - \mathbb{A}) = 0$

(b) $\emptyset \notin \mathcal{F}$ pois $\gamma(\mathbb{A} - \emptyset) = \gamma(\mathbb{A}) = 1$

(c) Se $C \in \mathcal{F}$ e $B \supset C$ então $\mathbb{A} - C \supset \mathbb{A} - B$ e como γ é monótona, $\gamma(A - B) \leq \gamma(A - C) = 0$, logo $\gamma(\mathbb{A} - B) = 0$, assim $B \in \mathcal{F}$.

(d) $\gamma(\mathbb{A} - B \cap C) = \gamma(\mathbb{A} - B) \cup (\mathbb{A} - C)) = \gamma(\mathbb{A} - B) \vee \gamma(\mathbb{A} - C)$,
e se, $B, C \in \mathcal{F}$ temos que $\gamma(\mathbb{A} - B \cup C) = 0$.

Mostraremos agora que γ com as propriedades (a) e (b) equivale a $\beta_{\mathcal{F}}$. Seja $H \in \mathcal{P}(\mathbb{A})$ tal que $\gamma(H) = 0$, $\gamma(H) = \gamma(A - (A - H)) = 0$ implica $(A - H) \in \mathcal{F}$, e como $H \cap (\mathbb{A} - H) = \emptyset$ temos $\beta_{\mathcal{F}}(H) = 0$, logo ,

$$(H \in \mathcal{P}(\mathbb{A}) \text{ , } \gamma(H) = 0) \Longrightarrow \beta_{\mathcal{F}}(H) = 0$$

Seja $H \in \mathcal{P}(\mathbb{A})$ com $\beta_{\mathcal{F}}(H) = 0$, então existe $B \in \mathcal{F}$ tal que $H \cap B = \emptyset$. Como $B \in \mathcal{F}$, $\gamma(A - B) = 0$, $H - B \subset \mathbb{A} - B$, e γ é monótona, obtemos, $\gamma(H - B) \leq \gamma(A - B)$, logo $\gamma(H - B) = 0$. Assim $\gamma(H) = \gamma(H - B) = 0$, e

$$(H \in \mathcal{P}(\mathbb{A}) \text{ , } \beta_{\mathcal{F}}(H) = 0) \Longrightarrow \gamma(H) = 0$$

Concluímos então que $\forall H \in \mathcal{P}(\mathbb{A})$,

$\gamma(H) = 0 \iff \beta_{\mathcal{F}}(H) = 0$, ou seja ,

$$\gamma(H) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad H \cap B \neq \emptyset \quad \text{qualquer} \quad B \in \mathcal{F} \\ 0 & \text{se} \quad H \cap B = \emptyset \quad \text{para algum} \quad B \in \mathcal{F} \end{cases} ,$$

e pelo exemplo 4 , temos,

$$\int_{\mathbb{A}} f d\gamma = \limsup_{\mathcal{F}} f$$

DEF. 6 - Seja $\mathbb{A} \neq \emptyset$ um conjunto, $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\mathbb{A})$ é um *ultra-filtro* se $\mathcal{F}$ é um filtro sobre $\mathbb{A}$ e satisfaz a propriedade:

$$B \in \mathcal{F} \iff (\mathbb{A} - B) \not\subset \mathcal{F}$$

Exemplo 5 - Seja $\mathcal{F}$ um ultra-filtro sobre $\mathbb{A}$, então,

$$\int_{\mathbb{A}} f d\alpha_{\mathcal{F}} = \int_{\mathbb{A}} f d\beta_{\mathcal{F}} = \lim_{\mathcal{F}} f \quad .$$

Observação: Se $\liminf_{\mathcal{F}} f = \limsup_{\mathcal{F}} f$, diremos que f tem um limite sobre $\mathcal{F}$, que indicamos $\lim_{\mathcal{F}} f = \liminf_{\mathcal{F}} f$.

Dem: Para mostrarmos o resultado basta provarmos que $\beta_{\mathcal{F}} = \alpha_{\mathcal{F}}$. Seja $H \in \mathcal{P}(\mathbb{A})$, $\beta_{\mathcal{F}}(H) = 1 \iff (\mathbb{A} - H) \not\in \mathcal{F} \iff H \in \mathcal{F} \iff$

$\iff \alpha_{\mathcal{F}}(H) = 1.$

Como α_F e β_F assume valores "0" e "1", temos que $\alpha_F = \beta_F$, e assim,

$$\int_{\mathbb{A}} f d\alpha_F = \int_{\mathbb{A}} f d\beta_F = \lim_F f$$

Prop. 1.14 - Seja $\gamma : P(\mathbb{A}) \longrightarrow \{0,1\}$ uma função de conjuntos monótona com as propriedades:

(a) $\gamma(\mathbb{A}) = 1$

(b) $\gamma(B \cap C) + \gamma(B \cup C) = \gamma(B) + \gamma(C)$

Então, $\int_{\mathbb{A}} f d\gamma = \lim_F f$, onde F é ultra-filtro, formado por $H \in P(\mathbb{A})$, tal que $\gamma(H) = 1$.

Dem: Mostremos que F é um ultra-filtro.

(1) $F \neq \emptyset$ pois $\gamma(\mathbb{A}) = 1$

(2) $\emptyset \notin F$ pois $\gamma(\emptyset) = 0$

(3) Sejam $B \in F$ e $B \subset \mathbb{C}$, como γ é monótona $\gamma(\mathbb{C}) = 1$, logo $\mathbb{C} \in F$.

(4) Sejam $B, \mathbb{C} \in F$, $B \cup \mathbb{C} \in F$, pois, $B \subset B \cup \mathbb{C}$ e como $\gamma(B \cap \mathbb{C}) = \gamma(B) + \gamma(\mathbb{C}) - \gamma(B \cup \mathbb{C})$ temos, $\gamma(B \cap \mathbb{C}) = 1 + 1 - 1 = 1$, logo $B \cap \mathbb{C} \in F$.

(5) Supor $B \in \mathcal{F}$, assim $\gamma(B \cap (\mathbb{A}-B)) + \gamma(B \cup (\mathbb{A}-B)) =$

$= \gamma(B) + \gamma(\mathbb{A}-B)$, logo, $\gamma(\emptyset) + \gamma(\mathbb{A}) = \gamma(B) + \gamma(\mathbb{A}-B)$,

e assim, $\gamma(\mathbb{A}-B) = 0$, ou seja, $\mathbb{A}-B \notin \mathcal{F}$. Logo,

$$B \in \mathcal{F} \Longrightarrow (\mathbb{A}-B) \notin \mathcal{F}.$$

Suponhamos $(\mathbb{A}-B) \notin \mathcal{F}$, obteremos de modo análogo que $\gamma(B) = 1$, ou seja, $B \in \mathcal{F}$, e assim,

$$(\mathbb{A}-B) \notin \mathcal{F} \Longrightarrow B \in \mathcal{F}.$$

Logo $\mathcal{F}$ é ultra-filtro.

Mas $\gamma = \alpha_{\mathcal{F}}$, pois, $\gamma(H) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad H \in \mathcal{F} \\ 0 & \text{se} \quad H \notin \mathcal{F} \end{cases}$,

e pelo exemplo 5 , $\displaystyle\int_{\mathbb{A}} fd\alpha = \lim_{\mathcal{F}} f$

Exemplo 6 - Sejam, $\mathbb{A} \neq \emptyset$ um conjunto $\mathcal{M} = \{\alpha \in [0,+\infty]^{\mathcal{P}(\mathbb{A})}:$ α é monótona$\}$, $f \in [0,+\infty]^{\mathbb{A}}$. A aplicação $T_f : \mathcal{M} \longrightarrow [0,+\infty]$ definida por,

$T_f(\alpha) = \displaystyle\int_{\mathbb{A}} fd\alpha$ é uma integral monótona sobre $\mathcal{M}$ com as propriedades:

(1) $\displaystyle\int_{\mathbb{A}} fd(\alpha+\beta) = \int_{\mathbb{A}} fd\alpha + \int_{\mathbb{A}} fd\beta$.

(2) $\int_{\mathbb{A}} f d\alpha \leq \liminf_{n} \int_{\mathbb{A}} f d\alpha_n$, se

$\alpha(B) \leq \liminf_{n} \alpha_n(B)$, $\forall B \in P(\mathbb{A})$, $\alpha_n \in M$, $n \in \mathbb{N}$.

Dem: Sejam, $\lambda \in [0,+\infty)$, $\alpha, \beta \in M$.

(i) $\lambda\beta$, $\beta \wedge \lambda$, $\beta \vee \lambda - \lambda$ pertencem a M , obviamente.

(ii) $T_f(\lambda \cdot \beta) = \lambda \cdot T(\beta)$ pois, $T_f(\lambda\beta) = \int_{\mathbb{A}} f d(\lambda\beta) =$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda\beta(\{f > \frac{i}{2^n}\}) =$$

$$= \lambda \cdot \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{+\infty} \beta(\{f > \frac{i}{2^n}\}) = \lambda \cdot \int_{\mathbb{A}} f d\beta = \lambda \cdot T_f(\beta) \ .$$

(iii) $\alpha \leq \beta \implies T_f(\alpha) \leq T_f(\beta)$ pois,

$$\alpha \leq \beta \implies \int_{\mathbb{A}} f d\alpha \leq \int_{\mathbb{A}} f d\beta \implies T_f(\alpha) \leq T_f(\beta)$$

(iv) $T_f(\beta) = T_f(\beta \wedge \lambda) + T_f(\beta \vee \lambda - \lambda)$, pois ,

$$T_f(\beta \wedge \lambda) = \int_{\mathbb{A}} f d(\beta \wedge \lambda) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{+\infty} (\beta \wedge \lambda)(\{f > \frac{i}{2^n}\})$$

$$T_f(\beta \vee \lambda - \lambda) = \int_{\mathbb{A}} fd(\beta \vee \lambda - \lambda) =$$

$$= \lim_{n\to +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{+\infty} (\beta \vee \lambda - \lambda)(\{f > \frac{i}{2^n}\}). \text{ Logo ,}$$

$$T_f(\beta \wedge \lambda) + T_f(\beta \vee \lambda - \lambda) =$$

$$= \lim_{n\to +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{+\infty} [(\beta \wedge \lambda) + (\beta \vee \lambda - \lambda)](\{f > \frac{i}{2^n}\}) .$$

Como $(\beta \wedge \lambda) + (\beta \vee \lambda - \lambda) = \beta$, temos

$$T_f(\beta \wedge \lambda) + T_f(\beta \vee \lambda - \lambda) = \lim_{n\to +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{+\infty} \beta(\{f > \frac{i}{2^n}\}) = T_f(\beta) .$$

(v) $\quad T_f(\beta) = \lim_{m\to +\infty} T_f(\beta \wedge m)$

$$T_f(\beta \wedge m) = \lim_{n\to +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{+\infty} (\beta \wedge m)(\{f > \frac{i}{2^n}\}) .$$

$$\lim_{m\to +\infty} T_f(\beta \wedge m) = \lim_{m\to +\infty} [\lim_{n\to +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{+\infty} (\beta \wedge m)(\{f > \frac{i}{2^n}\})] =$$

$$= \lim_{n\to +\infty} [\lim_{m\to +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{+\infty} (\beta \wedge m)(\{f > \frac{i}{2^n}\})] =$$

$$= \lim_{n\to +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{+\infty} \beta(\{f > \frac{i}{2^n}\}) = \int_{\mathbb{A}} fd\beta = T_f(\beta).$$

(vi) De modo análogo a (v), mostra-se que,

$$T(g) = \lim_{n \to +\infty} T_f(g \vee \frac{1}{n} - \frac{1}{n})$$

$\therefore$ T_f é uma integral monótona.

Provaremos agora que,

$$\int_{\mathbb{A}} fd(\alpha+\beta) = \int_{\mathbb{A}} fd\alpha + \int_{\mathbb{A}} fd\beta .$$

$$\int_{\mathbb{A}} fd(\alpha+\beta) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{+\infty} (\alpha+\beta)(\{f > \frac{i}{2^n}\}) =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{+\infty} \alpha(\{f > \frac{i}{2^n}\}) + \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{+\infty} \beta(\{f > \frac{i}{2^n}\}) =$$

$= \int_{\mathbb{A}} fd\alpha + \int_{\mathbb{A}} fd\beta$. Temos também que,

$\int_{\mathbb{A}} fd\alpha \leq \liminf_n \int_{\mathbb{A}} fd\alpha_n$, se $\alpha(B) \leq \liminf_n \alpha_n(B)$,

$\forall B \in P(\mathbb{A})$, $\{\alpha_n\}_n \subset \mathcal{M}$. De fato, seja

$\overline{\alpha_n} : P(\mathbb{A}) \longrightarrow [0,+\infty]$ definida por,

$\overline{\alpha_n}(B) = \inf_{k \geq n} \{\alpha_k(B)\}$, $B \in P(\mathbb{A})$. A sequência $\{\overline{\alpha_n}\}_n$ é cres -

cente e converge a $\liminf\limits_n \alpha_n$.

Definimos $T : [0,+\infty]^{\mathbb{A}} \longrightarrow [0,+\infty]$

$$g \longrightarrow T(g) = \lim_n \int_{\mathbb{A}} g d\bar{\alpha}_n \ ,$$

$\forall g \in [0,+\infty]^{\mathbb{A}}$. É óbvio que T é uma integral monótona sobre $[0,+\infty]^{\mathbb{A}}$ com a propriedade $T(\varphi_B) = \liminf\limits_n \alpha_n(B)$.

Como $\liminf\limits_n \alpha_n(B)$ é uma função monótona sobre $P(\mathbb{A})$, temos que $\int_{\mathbb{A}} fd(\liminf\limits_n \alpha_n)$ é uma integral monótona sobre $[0,+\infty]^{\mathbb{A}}$, com

$\int_{\mathbb{A}} \varphi_B \, d(\liminf\limits_n \alpha_n) = (\liminf\limits_n \alpha_n)(B)$, e pela unicidade de T (Teor.

1.2) temos que, $T(g) = \int_{\mathbb{A}} gd(\liminf\limits_n \alpha_n)$, isto é,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{A}} gd\bar{\alpha}_n = \int_{\mathbb{A}} gd(\liminf_n \alpha_n), \quad \forall g \in [0,+\infty]^{\mathbb{A}} .$$

Como $\alpha(B) \leq \liminf\limits_n \alpha_n(B)$ e $\bar{\alpha}_n(B) \leq \alpha_n(B)$, $\forall B \in P(\mathbb{A})$,

$$\int_{\mathbb{A}} fd\alpha \leq \int_{\mathbb{A}} fd(\liminf_n \alpha_n) = \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{A}} fd\bar{\alpha}_n \leq \liminf_n \int_{\mathbb{A}} fd\alpha_n .$$

Proposição (1.15) Sejam, $\alpha, \beta : P(\mathbb{A}) \longrightarrow [0,+\infty]$ funções monótonas e $f \in [0,+\infty]^{\mathbb{A}}$. São válidas as propriedades:

(1) Se $\alpha\{f > \tau\} \leq \beta\{f > \tau\}$, para qualquer $\tau \in D$, onde D é um conjunto denso em $(0,+\infty)$, então $\int_{\mathbb{A}} f d\alpha \leq \int_{\mathbb{A}} f d\beta$.

(2) Se $\int_{\mathbb{A}} f d\alpha < +\infty$ e $\alpha \leq \beta$, então $\int_{\mathbb{A}} f d\alpha = \int_{\mathbb{A}} f d\beta$, se e só se, existe um conjunto $D \subset (0,+\infty)$, D denso em $(0,+\infty)$ tal que, $\alpha\{f > \tau\} = \beta\{f > \tau\}$, $\forall \tau \in D$.

Dem: D é denso em $(0,+\infty)$, então para quaisquer $i,n \in \mathbb{N}$, existe $t_{i,n} \in D$, tal que $\frac{i}{2^n} \leq t_{i,n} \leq \frac{i+1}{2^n}$, e, $\alpha\{f > t_{i,n}\} \leq \beta\{f > t_{i,n}\}$. Assim temos

$\frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{+\infty} \alpha(\{f > t_{i,n}\}) \leq \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{+\infty} \beta(\{f > t_{i,n}\})$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Por outro lado qualquer $n \in \mathbb{N}$,

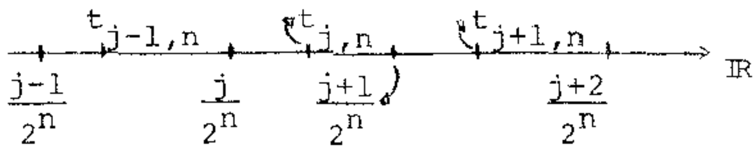
$$f \vee \frac{2}{2^n} - \frac{2}{2^n} \leq \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{+\infty} \varphi\{f > t_{i,n}\} \leq f,$$

pois;

(a) Se $x \in \mathbb{A}$, com $0 \leq f(x) \leq t_{1,n}$, temos, $(f \vee \frac{2}{2^n} - \frac{2}{2^n})(x) = 0$, pois $t_{1,n} \leq \frac{2}{2^n}$, $\frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{+\infty} \varphi\{f > t_{i,n}\}(x) = 0$, e $f(x) \geq 0$.

(b) Se $x \in \mathbb{A}$, com $t_{j,n} < f(x) \leq t_{j+1,n}$, com $j = 2,3,\ldots$, então,

$$(*)\quad \left(f \vee \frac{2}{2^n} - \frac{2}{2^n}\right)(x) \le f(x) - \frac{2}{2^n} \le t_{j+1,n} - \frac{2}{2^n} \le \frac{j}{2^n}$$



$$\frac{1}{2^n}\sum_{i=1}^{+\infty} \varphi_{\{f > t_{i,n}\}}(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{i=1}^{+j} \varphi_{\{f > t_{i,n}\}}(x) = \frac{j}{2^n} \quad ,$$

e como $f(x) \ge t_{j,n} \ge \frac{j}{2^n}$, obtemos

$$f \vee \frac{2}{2^n} - \frac{2}{2^n} \le \frac{1}{2^n}\sum_{i=1}^{+\infty} \varphi_{\{f > t_{i,n}\}} \le f(x) \quad , \quad \forall x \in \mathbb{A} .$$

Assim temos que,

$$\int_{\mathbb{A}} \left(f \vee \frac{2}{2^n} - \frac{2}{2^n}\right) d\alpha \le \frac{1}{2^n} \int_{\mathbb{A}} \sum_{i=1}^{+\infty} \varphi_{\{f > t_{i,n}\}}\, d\alpha \le \int_{\mathbb{A}} f d\alpha \quad ,$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, assim ,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{A}} \left(f \vee \frac{2}{2^n} - \frac{2}{2^n}\right) d\alpha \le \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} \int_{\mathbb{A}} \sum_{i=1}^{+\infty} \varphi_{\{f > t_{i,n}\}} \le \int_{\mathbb{A}} f d\alpha \ .$$

Mas, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{A}} \left(f \vee \frac{2}{2^n} - \frac{2}{2^n}\right) d\alpha = \lim_{n\to+\infty} T\left(f \vee \frac{2}{2^n} - \frac{2}{2^n}\right) =$

$$= T(f) = \int_{\mathbb{A}} f d\alpha \quad , \quad e \ ,$$

(*) Quando $t_{j,n} < f(x) < t_{j+1,n}$ a desigualdade é fácil.

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} \int_{\mathbb{A}} \sum_{i=1}^{+\infty} \varphi\{f > t_{i,n}\}\, d\alpha =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} \int_{\mathbb{A}} \lim_{m \to +\infty} \sum_{i=1}^{m} \varphi\{f > t_{i,n}\}\, d\alpha =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \lim_{m \to +\infty} \frac{1}{2^n} \int_{\mathbb{A}} \sum_{i=1}^{m} \varphi\{f > t_{i,n}\}\, d\alpha =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \lim_{m \to +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{m} \alpha(\{f > t_{i,n}\}) =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{+\infty} \alpha(\{f > t_{i,n}\}). \text{ Assim,}$$

$$\int_{\mathbb{A}} f d\alpha \leq \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{+\infty} \alpha(\{f > t_{i,n}\}) \leq \int_{\mathbb{A}} f d\alpha \ ,$$

ou seja, $\displaystyle\int_{\mathbb{A}} f d\alpha = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{+\infty} \alpha\{f > t_{i,n}\}.$

De modo análogo obtemos,

$$\int_{\mathbb{A}} f d\beta = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{+\infty} \beta\{f > t_{i,n}\} .$$

Como por hipótese $\beta\{f > t_{i,n}\} \geq \alpha\{f > t_{i,n}\}$, $\forall i,n$, "i" e "n" naturais, obtemos

$$\int_{\mathbb{A}} f d\alpha = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{+\infty} \alpha\{f > t_{i,n}\} \leq$$

$$\leq \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{+\infty} \beta\{f > t_{i,n}\} = \int_{\mathbb{A}} f d\beta \ .$$

Mostraremos agora que vale o item (2) da proposição enunciada, ou seja, se $\int_{\mathbb{A}} f d\alpha < +\infty$ e $\alpha \leq \beta$, então $\int_{\mathbb{A}} f d\alpha = \int_{\mathbb{A}} f d\beta$ se, e só se, existe um conjunto $D \subset (0,+\infty)$, denso em $(0,+\infty)$, tal que $\alpha\{f > \tau\} = \beta\{f > \tau\}$, $\forall \tau \in D$.

($\Longleftarrow$) A prova da recíproca é consequência imediata do item (1) da proposição.

($\Longrightarrow$) Em primeiro lugar mostremos que $\int_{\mathbb{A}} (f \wedge a - f \wedge b) d\alpha = \int_{\mathbb{A}} (f \wedge a - f \wedge b) d\beta$, onde $a > b \geq 0$, $a,b \in \mathbb{R}$.

$$\alpha \leq \beta \Longrightarrow \begin{cases} 0 \leq \int_{\mathbb{A}} (f \wedge a - f \wedge b) d\alpha \leq \int_{\mathbb{A}} (f \wedge a - f \wedge b) d\beta \\ 0 \leq \int_{\mathbb{A}} (f \vee a - a) d\alpha \leq \int_{\mathbb{A}} (f \vee a - a) d\beta \\ 0 \leq \int_{\mathbb{A}} (f \wedge b) d\alpha \leq \int_{\mathbb{A}} (f \wedge b) d\beta \ . \end{cases}$$

Assim,

$$\int_{\mathbb{A}} f d\alpha \overset{(*)}{=} \int_{\mathbb{A}} (f \wedge a - f \wedge b) d\alpha + \int_{\mathbb{A}} (f \vee a - a) d\alpha +$$

$$+ \int_{\mathbb{A}} (f \wedge b) d\alpha \leq \int_{\mathbb{A}} (f \wedge a - f \wedge b) d\beta + \int_{\mathbb{A}} (f \vee a - a) d\beta +$$

$$+ \int_{\mathbb{A}} (f \wedge b) d\beta = \int_{\mathbb{A}} f d\beta \; .$$

Como $\int_{\mathbb{A}} f d\alpha = \int_{\mathbb{A}} f d\beta$, temos que ,

$$\int_{\mathbb{A}} (f \wedge a - f \wedge b) d\alpha = \int_{\mathbb{A}} (f \wedge a - f \wedge b) d\beta \; ,$$

$$\int_{\mathbb{A}} (f \vee a - a) d\alpha = \int_{\mathbb{A}} (f \vee a - a) d\beta \; , \quad e \; ,$$

$$\int_{\mathbb{A}} (f \wedge b) d\alpha = \int_{\mathbb{A}} (f \wedge b) d\beta \; .$$

Sabemos que as funções $\alpha\{f > t\}$ e $\beta\{f > t\}$ são funções

---

(*) $\int_{\mathbb{A}} [(f \wedge a) \vee b - b] d\alpha + \int_{\mathbb{A}} (f \vee a - a) d\alpha + \int_{\mathbb{A}} (f \wedge b) d\alpha =$

$\int_{\mathbb{A}} [(f \wedge a) \vee b - b] d\alpha + \int_{\mathbb{A}} (f \vee a - a) d\alpha + \int_{\mathbb{A}} ((f \wedge a) \wedge b) d\alpha =$

$= \int_{\mathbb{A}} (f \wedge a) d\alpha + \int_{\mathbb{A}} (f \vee a - a) d\alpha = \int_{\mathbb{A}} f d\alpha .$

que possuem um número de descontinuidades, no máximo enumerável (pois são monótonas). Seja t_o um ponto de continuidade para $\alpha\{f > t\}$ e $\beta\{f > t\}$, temos pelo item (b) da prop. (1.10), que

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\mathbb{A}} \frac{f \wedge t_o - f \wedge (t_o - \varepsilon)}{\varepsilon} \, d\alpha =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \alpha\{f > t_o - \varepsilon\} = \alpha\{f > t_o\}.$$ Analogamente

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\mathbb{A}} \frac{f \wedge t_o - f \wedge (t_o - \varepsilon)}{\varepsilon} \, d\beta = \beta\{f > t_o\}$$, e como

$$\int_{\mathbb{A}} [f \wedge t_o - f \wedge (t_o - \varepsilon)] \, d\alpha = \int_{\mathbb{A}} [f \wedge t_o - f \wedge (t_o - \varepsilon)] \, d\beta$$

$\forall \varepsilon > 0$, temos que, $\frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{A}} [f \wedge t_o - f \wedge (t_o - \varepsilon)] \, d\alpha =$

$= \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{A}} [(f \wedge t_o - f \wedge (t_o - \varepsilon)] \, d\beta$, $\forall \varepsilon > 0$, logo ,

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\mathbb{A}} \frac{f \wedge t_o - f \wedge (t_o - \varepsilon)}{\varepsilon} \, d\alpha =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\mathbb{A}} \frac{f \wedge t_o - f \wedge (t_o - \varepsilon)}{\varepsilon} \, d\beta$$

e isso implica que $\alpha\{f > t_o\} = \beta\{f > t_o\}$, $\forall t_o \in [0,+\infty)$, onde $\alpha\{f > t\}$, $\beta\{f > t\}$, são funções contínuas. Como o conjunto formado pelos valores de "t_o" onde $\alpha\{f > t\}$ e $\beta\{f > t\}$ são contínuas é não enumerável, segue a tese.

Seja $\mathbb{A}$ um conjunto não vazio, $\mathbb{H} \subset P(\mathbb{A})$, com $\emptyset \in \mathbb{H}$. Colocamos $\mathbb{B}_{\mathbb{H}} = \{f \in [0,+\infty]^{\mathbb{A}}$: existe um conjunto denso D, em $(0,+\infty)$, tal que $\{f > \tau\} \in \mathbb{H}$, $\forall \tau \in D\}$. Denotamos por $\overline{\mathbb{H}}$, $\overline{\mathbb{H}} \subset [0,+\infty]^{\mathbb{A}}$, o conjunto formado pelas funções características, $\varphi_B : \mathbb{A} \to [0,+\infty]$, tal que $B \in \mathbb{H}$.

Prop. (1.16). Sejam $\overline{\mathbb{H}}$ e $\mathbb{B}_{\mathbb{H}}$ como estabelecidos acima. Seja $B \subset [0,+\infty]^{\mathbb{A}}$, com $\overline{\mathbb{H}} \subset \mathbb{B} \subset \mathbb{B}_{\mathbb{H}}$. Então duas integrais monótonas T_1 e T_2 definidas sobre $\mathbb{B}$ são iguais se $T_1(\varphi_B) = T_2(\varphi_B)$, qualquer $\mathbb{B} \in \mathbb{H}$.

Dem: Pelo Teor. (1.2) temos,

$$T_1(f) = \int_{\mathbb{A}} f d\alpha \ , \quad T_2(f) = \int_{\mathbb{A}} f d\gamma \ , \text{ com } f \in \mathbb{B} \ ,$$

$\alpha \in [\alpha_{T_1}, \beta_{T_1}]$, $\gamma \in [\alpha_{T_2}, \beta_{T_2}]$. Temos por hipótese que, se $f \in \mathbb{B}$ então $f \in \mathbb{B}_{\mathbb{H}}$, logo existe um conjunto denso D em $(0,+\infty)$ tal que $\{f > t\} \in \mathbb{H}$, $\forall t \in D$, e como $\overline{\mathbb{H}} \subset \mathbb{B}$, temos $\varphi_{\{f > t\}} \in \mathbb{B}$, $\forall t \in D$.

Temos então, $\alpha\{f > t\} = \int_{\mathbb{B}} \varphi_{\{f > t\}}\, d\alpha =$

$= T_1(\varphi_{\{f > t\}}) = T_2(\varphi_{\{f > t\}}) = \int_{\mathbb{B}} \varphi_{\{f > t\}}\, d\gamma =$

$= \gamma\{f > t\}$, $\forall t \in D$, e pela prop. (1.15) temos ,

$\int_{\mathbb{B}} f d\alpha = \int_{\mathbb{B}} f d\gamma$, ou seja, $T_1(f) = T_2(f)$. c.q.d.

Como é possível associar a cada função monótona de conjuntos sobre $P(\mathbb{A})$, $\mathbb{A} \in \emptyset$, uma integral monótona sobre $[0,+\infty]^{\mathbb{A}}$, é possível associar, a cada função $\delta : \mathbb{H} \subset P(\mathbb{A}) \longrightarrow [0,+\infty]$ com as propriedades:

(a) $\emptyset \in \mathbb{H}$, (b) $\delta(\emptyset) = 0$, (c) $\delta(B) \leq \delta(\mathbb{C})$,

com $B, \mathbb{C} \in \mathbb{H}$, e $B \subset \mathbb{C}$, uma integral monótona sobre $\mathbb{B}_{\mathbb{H}}$, do seguinte modo:

$$\begin{aligned} \mathbb{B}_{\mathbb{H}} &\longrightarrow [0,+\infty] \quad , \text{ onde } \quad \gamma : P(\mathbb{A}) \longrightarrow [0,+\infty]^{\mathbb{A}} \\ f &\longrightarrow \int_{\mathbb{A}} f d\gamma \end{aligned}$$

é qualquer função monótona tal que $\gamma/\mathbb{H} = \delta$.

A aplicação $\begin{aligned} \mathbb{B}_{\mathbb{H}} &\longrightarrow [0,+\infty] \\ f &\longrightarrow \int_{\mathbb{A}} f d\gamma \end{aligned}$, estabelecida acima é bem definida pois o número $\int_{\mathbb{A}} fd\gamma$, não depende de γ, já que $\gamma/\mathbb{H} = \delta$ e $f \in \mathbb{B}_{\mathbb{H}}$. Esta aplicação é de fato uma integral monótona sobre $\mathbb{B}_{\mathbb{H}}$, pois é restrição da integral monótona $\int_{\mathbb{A}} (—)d\gamma : [0,+\infty]^{\mathbb{A}} \to [0,+\infty]$, ao conjunto $\mathbb{B}_{\mathbb{H}} \subset [0,+\infty]^{\mathbb{A}}$. A referida aplicação será denotada por:

$$\int_{\mathbb{A}} \cdot \, d\beta : \begin{array}{rcl} \mathbb{B}_{\mathbb{H}} & \longrightarrow & [0,+\infty] \\ f & \longmapsto & \int_{\mathbb{A}} fd\delta \end{array} .$$

A função δ, de conjuntos com as propriedades (1), (2) e (3) será chamada de "função de conjunto monótona *sobre* $\mathbb{H} \subset P(\mathbb{A})$". Assim, dada uma função de conjuntos monótona "δ" sobre $\mathbb{H} \subset P(\mathbb{A})$, existe, pela prop. (1.16) uma única integral monótona T sobre $\mathbb{B}_{\mathbb{H}}$ tal que $T(\varphi_B) = \delta(B)$, $\forall B \in \mathbb{H}$.

Prop.(1.17) Sejam, α_n, α, β, funções monótonas de conjunto, definidas em $P(\mathbb{A})$, $\mathbb{A} \neq \emptyset$, tal que $\alpha_n \overset{(*)}{\leq} \beta$, $\alpha(B) = \limsup_n \alpha_n(B)$, $\forall B \in P(\mathbb{A})$, e $f \in [0,+\infty]^{\mathbb{A}}$. Se $\int_{\mathbb{A}} fd\beta < +\infty$ então

$$\int_{\mathbb{A}} fd\alpha \geq \limsup_n \int_{\mathbb{A}} fd\alpha_n .$$

(*) A hipótese $\alpha_n \leq \beta$, é para garantir que $\limsup_n \int_{\mathbb{A}} fd\alpha_n$ seja finito.

Dem: Para simplificar a prova, suporemos inicialmente $\alpha_n(B) \geq \alpha_{n+1}(B)$, $\forall B \in P(\mathbb{A})$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Assim $\alpha(B) = \lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n(B)$, $\forall B \in P(\mathbb{A})$. Com a hipótese de que $\alpha_n(B) \geq \alpha_{n+1}(B)$, $\forall B \in P(\mathbb{A})$, para provar a propriedade é suficiente mostrar que,

$$\int_{\mathbb{A}} f d\alpha = \lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{A}} f d\alpha_n .$$

Consideremos os conjuntos,

$$\mathbb{H} = \{B \in P(\mathbb{A}) : \beta(B) < +\infty\} \text{ , e ,}$$

$$\mathbb{B} = \{g \in [0,+\infty]^{\mathbb{A}} : \int_{\mathbb{A}} g d\beta < +\infty\} \neq \emptyset, \text{ pois } f \in \mathbb{B} .$$

É claro que $\overline{\mathbb{H}} \subset \mathbb{B} \subset \mathbb{B}_{\mathbb{H}}$. A aplicação $T : \mathbb{B} \longrightarrow [0,+\infty]$, dada por $T(g) = \lim\limits_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{A}} g d\alpha_n$, $g \in \mathbb{B}$, é uma integral monótona, pois:

(i) Se $\lambda \in [0,+\infty)$ e $g,f \in \mathbb{B}$, tem-se obviamente que $\lambda g \in \mathbb{B}$; $g \vee \lambda - \lambda \in \mathbb{B}$, $g \wedge \lambda \in \mathbb{B}$.

(ii) $T(\lambda g) = \lambda T(g)$

(iii) $(g \leq f \, ; g,f \in \mathbb{B}) \Longrightarrow T(g) \leq T(f)$

(iv) $T(g) = T(g \wedge \lambda) + T(g \vee \lambda - \lambda)$, $\forall \lambda \in [0,+\infty)$

Mostraremos a seguir, que T verifica as propriedades, (v)

$T(g) = \lim\limits_{n \to +\infty} T(g \wedge n)$, e (vi) $T(g) = \lim\limits_{n \to +\infty} T(g \vee \frac{1}{n} - \frac{1}{n})$ respectivamente.

$$T(g \vee m - m) = \lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{A}} (g \vee m - m)d\alpha_n \leq \int_{\mathbb{A}} (g \vee m - m)d\beta \ ,$$

$\forall m \in \mathbb{N}$, logo $\lim\limits_{m \to +\infty} T(g \vee m - m) \leq \lim\limits_{m \to +\infty} \int_{\mathbb{A}} (g \vee m - m)d\beta = 0$

e assim $\lim\limits_{m \to +\infty} T(g \vee m - m) = 0$. Como

$T(g) = \lim\limits_{n \to +\infty} T(g \wedge n) + \lim\limits_{n \to +\infty} T(g \vee n - n)$, temos

$T(g) = \lim\limits_{n \to +\infty} T(g \wedge n)$.

$$T(g \wedge \frac{1}{m}) = \lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{A}} (g \wedge \frac{1}{m})d\alpha_n \leq \int_{\mathbb{A}} (g \wedge \frac{1}{m})d\beta \ , \quad \forall m \in \mathbb{N} .$$

$$\therefore \lim_{m \to +\infty} T(g \wedge \frac{1}{m}) \leq \lim_{m \to +\infty} \int_{\mathbb{A}} (g \wedge \frac{1}{m})d\beta = 0 \ ,$$

e assim $\lim\limits_{m \to +\infty} T(g \wedge \frac{1}{m}) = 0$. Como

$T(g) = \lim\limits_{m \to +\infty} T(g \wedge \frac{1}{m}) + \lim\limits_{m \to +\infty} T(g \vee \frac{1}{m} - \frac{1}{m})$,

concluímos que $T(g) = \lim\limits_{m \to +\infty} T(g \vee \frac{1}{m} - \frac{1}{m})$.

Assim T é uma integral monótona sobre $\mathbb{B}$. Temos também que $\int_{\mathbb{A}} \cdot\, d\alpha : \mathbb{B} \longrightarrow [0,+\infty]$ é uma integral monótona sobre $\mathbb{B}$.

$$g \longrightarrow \int_{\mathbb{A}} g d\alpha$$

Como $T(\varphi_B) = \lim_{n \to +\infty} \int \varphi_B \, d\alpha_n = \lim_{n \to +\infty} \alpha_n(B) =$

$= \alpha(B) = \int_{\mathbb{A}} \varphi_B \, d\alpha$, temos pela prop. (1.16) que

$$T(g) = \int_{\mathbb{A}} g d\alpha \ , \quad \forall g \in \mathbb{B} \text{, isto é ,}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{A}} g d\alpha_n = \int_{\mathbb{A}} g d\alpha \ , \quad \forall g \in \mathbb{B} .$$

Quando não tivermos $\alpha_n \geq \alpha_{n+1}$, faremos $\beta_n = \sup_{k \geq n} \alpha_k$, ou seja $\beta_n(B) = \sup_{k \geq n} \alpha_k(B)$, $B \in P(\mathbb{A})$. Assim $\beta_n \downarrow \alpha$,

logo, $\int_{\mathbb{A}} f d\alpha = \lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{A}} f d\beta_n \geq \int_{\mathbb{A}} f d\alpha_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

$$\therefore \int_{\mathbb{A}} f d\alpha \geq \limsup_{n} \int_{\mathbb{A}} f d\alpha_n$$

c.q.d.

INTEGRAL DE LEBESGUE

Consideremos agora, a família $\mathcal{I}$, de intervalos contidos em $R_+^* = (0,+\infty)$, e definamos uma função "ℓ" em $\mathcal{I}$ do seguinte modo:

$$\ell(I) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad I = \emptyset \\ +\infty & \text{se} \quad I \text{ é ilimitado} \\ |b-a| & \text{se} \quad \text{"b" e "a" são extremos do intervalo } I. \end{cases}$$

Sabemos que "ℓ" assim definida é uma função monótona de conjuntos *sobre* $\mathcal{I}$ e pelas discussões feitas antes da prop. (1.17) tem sentido escrever $\displaystyle\int_{(0,+\infty)} \varphi \, d\ell$, se $\varphi \in B_{\mathcal{I}} \subset [0,+\infty]^{\mathbb{R}_+^*}$.

A integral "$\displaystyle\int_{(0,+\infty)} \varphi \, d\ell$" é a integral de Riemann ou de Lebesgue, para $\varphi \in B_{\mathcal{I}}$, mensurável.

Prop: (1.18) Seja $\ell : \mathcal{I} \longrightarrow [0,+\infty]$ a função monótona de conjuntos, como definida anteriormente. Seja α uma função de conjuntos monótona definida em $\mathcal{P}(\mathbb{A})$, $\mathbb{A} \neq \emptyset$. Então

$$\int_{\mathbb{A}} f d\alpha = \int_{(0,+\infty)} \alpha\{f > \tau\} \, d\ell(\tau) \, , \quad \forall f \in [0,+\infty]^{\mathbb{A}} .$$

Dem: A função $\varphi(\tau) = \alpha\{f > \tau\}$ para $\tau \in (0,+\infty)$, é decrescente, e há sentido escrever $\int_{(0,+\infty)} \varphi d\ell$. O conjunto $\{\tau : \varphi(\tau) \leq s\} \subset$ $\subset (0,+\infty)$, é vazio ou então um intervalo. Indicaremos $\alpha_s : P(\mathbb{A}) \to \{0,1\}$, $s \in (0,+\infty)$, a função monótona de conjuntos dada por:

$$\alpha_s(H) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad \alpha(H) > s \\ 0 & \text{se} \quad \alpha(H) \leq s \end{cases}$$

Assim temos,

$$\int_{\mathbb{A}} f d\alpha_s = \inf \{\tau : \alpha\{f > \tau\} \leq s\} = \ell(\{\varphi > s\})$$

Logo, $$\int_{(0,+\infty)} \varphi d\ell = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{+\infty} \ell\{\varphi > \frac{i}{2^n}\} =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{+\infty} \left(\int_{\mathbb{A}} f d\alpha_{\frac{i}{2^n}}\right) = \lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{A}} f d\left(\frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{+\infty} \alpha_{\frac{i}{2^n}}\right) .$$

Devemos observar que se $\alpha(H) = r$, então

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} \sum\limits_{i=1}^{+\infty} \alpha_{\frac{i}{2^n}}(H) = r$, pois seja $j \in \mathbb{N}$, tal que

$\frac{j}{2^n} \leq r \leq \frac{j+1}{2^n}$, assim $\frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{+\infty} \alpha_{\frac{i}{2^n}}(H) = \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{+j} \alpha_{\frac{i}{2^n}}(H) = \frac{j}{2^n}$ e quando $n \to +\infty$, $\frac{j}{2^n} \longrightarrow r$, logo, $\lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \alpha_{\frac{i}{2^n}}(H) = \alpha(H)$.

Assim,

$$\int_{(0,+\infty)} \varphi d\ell = {}_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{A}} fd\left(\frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{+\infty} \alpha_{\frac{i}{2^n}}\right) = \int_{\mathbb{A}} fd\alpha$$

c.q.d.

As propriedades da integral $\int_{(0,+\infty)} \cdot d\ell$ são descritas pela seguinte proposição:

Prop. (1.19) Seja $\ell : T \longrightarrow [0,+\infty]$ como definida anteriormente. Se φ_n, φ, ψ são funções de $(0,+\infty)$ em $[0,+\infty]$ decrescentes, então:

(1) $$\int_{(0,+\infty)} (\varphi + \psi) d\ell = \int_{(0,+\infty)} \varphi d\ell + \int_{(0,+\infty)} \psi d\ell .$$

(2) $\displaystyle\int_{(0,+\infty)} \varphi d\ell \leq \int_{(0,+\infty)} \psi d\ell$, se existe um conjunto denso D tal que $\varphi(\tau) \leq \psi(\tau)$, $\forall \tau \in D$.

(3) $\displaystyle\int_{(0,+\infty)} \varphi d\ell \leq \liminf_n \int_{(0,+\infty)} \varphi_n d\ell$, se existe um conjunto denso D em $(0,+\infty)$ tal que $\varphi(\tau) \leq \liminf_n \varphi_n(\tau)$, $\forall \tau \in D$.

(4) $\displaystyle\int_{(0,+\infty)} \varphi d\ell \geq \limsup_n \int \varphi_n d\ell$, se existe um conjunto denso D em $(0,+\infty)$ tal que $\varphi(\tau) \geq \limsup_n \varphi_n(\tau)$, $\forall \tau \in D$ e $\varphi_n(\tau) \leq \psi(\tau)$, $\forall \tau \in D$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e $\displaystyle\int_{(0,+\infty)} \psi d\ell < \infty$.

Dem: Para qualquer $\varphi : (0,+\infty) \longrightarrow [0,+\infty]$ decrescente, associaremos uma função de conjuntos monótona $\alpha_\varphi : P((0,+\infty)) \longrightarrow [0,+\infty]$ com a propriedade $\alpha_\varphi((t,+\infty)) = \varphi(t)$, $\forall t \in (0,+\infty)$. Para essa função de conjuntos tem-se obviamente que $\displaystyle\int_{(0,+\infty)} i_D \, d\alpha_\varphi = \int_{(0,+\infty)} \varphi d\ell$ onde $i_D : (0,+\infty) \longrightarrow (0,+\infty)$ é a função identidade.

Assim temos:

(i) $$\int_{(0,+\infty)} (\varphi + \psi)\, d\ell = \int_{(0,+\infty)} i_D \, d\alpha_{(\varphi + \psi)} =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{+\infty} \alpha_{(\varphi + \psi)}(\{i_D > \frac{i}{2^n}\}) =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{+\infty} \alpha_{(\varphi + \psi)} [(\frac{i}{2^n}, +\infty)] =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{+\infty} (\varphi + \psi)(\frac{i}{2^n}) =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{+\infty} (\varphi(\frac{i}{2^n}) + \psi(\frac{i}{2^n})) =$$

$$= [\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{+\infty} \varphi(\frac{i}{2^n})] + [\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{+\infty} \psi(\frac{i}{2^n})] =$$

$$= [\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{+\infty} \alpha_\varphi[\{i_D > \frac{i}{2^n}\}] +$$

$$+ [\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{+\infty} \alpha_\psi[\{i_D > \frac{i}{2^n}\}] =$$

$$= \int_{(0,+\infty)} i_D \, d\alpha_\varphi + \int_{(0,+\infty)} i_D \, d\alpha_\psi = \int_{(0,+\infty)} \varphi d\ell + \int_{(0,+\infty)} \psi d\ell \ .$$

(2) Temos que, $\int_{(0,+\infty)} \varphi d\ell = \int_{(0,+\infty)} i_D \, d\alpha_\varphi$ e $\int_{(0,+\infty)} \psi d\ell =$

$= \int_{(0,+\infty)} i_D \, d\alpha_\psi$. Como $\alpha_\varphi\{i_D > \tau\} = \varphi(\tau)$, $\alpha_\psi\{i_D > \tau\} =$

$= \psi(\tau)$, e existe um conjunto denso D onde $\varphi(\tau) \leq \psi(\tau)$,

$\forall \tau \in D$, temos que $\alpha_\varphi\{i_D > \tau\} \leq \alpha_\psi\{i_D > \tau\}$, $\forall \tau \in D$, e pela prop. (1.15) temos

$$\int_{(0,+\infty)} i_D \, d\alpha_\varphi \leq \int_{(0,+\infty)} i_D \, \alpha_\psi \text{ , ou seja ,}$$

$$\int_{(0,+\infty)} \varphi d\ell \leq \int_{(0,+\infty)} \psi d\ell$$

(3) Por hipótese temos $\varphi(\tau) \leq \liminf\limits_{n} \varphi_n(t)$, $\forall t \in D$, assim $\alpha_\varphi((t,+\infty)) \leq \liminf\limits_{n} \alpha_{\varphi_n}((t,+\infty))$, $\forall t \in D$. Seja "α", a função de conjuntos monótona dada por,

$$\alpha(B) = \liminf \alpha_{\varphi_n}(B), \quad \forall B \subset (0,+\infty).$$

Assim $\alpha_\varphi((t,+\infty)) \leq \alpha((t,+\infty))$, $\forall t \in D$, e pela definição de integral monótona temos que

$$\int_{(0,+\infty)} i_D \, d\alpha_\varphi \leq \int_{(0,+\infty)} i_D \, d\alpha. \quad \text{Como ,}$$

$$\alpha(B) = \liminf_n \alpha_{\varphi_n}(B) \;, \quad \forall B \in \mathcal{P}((0,+\infty)) \;,$$

pelo exemplo (6) concluímos que ,

$$\int_{(0,+\infty)} i_D \, d\alpha_\varphi \leq \liminf_n \int_{(0,+\infty)} i_D \, d\alpha_{\varphi_n} \;,$$

ou seja, $\int_{(0,+\infty)} \varphi d\ell \leq \liminf \int_{(0,+\infty)} \varphi_n \, d\ell$

(4) Seja $\alpha(B) = \limsup_n \alpha_{\varphi_n}(B)$, $\forall B \subset (0,+\infty)$, como $\varphi(\tau) \geq \limsup_n \varphi_n(\tau)$, $\forall \tau \in D$, tem-se $\alpha_\varphi((t,+\infty)) \geq$ $\geq \limsup_n \alpha_{\varphi_n}(t,+\infty)$, $\forall t \in D$, isto é, $\alpha_\varphi((t,+\infty)) \geq \alpha((t,+\infty))$, $\forall t \in D$, e assim $\int_{(0,+\infty)} i_D \, d\alpha_\varphi \geq \int_{(0,+\infty)} i_D \, d\alpha$. Consideremos as funções de conjuntos monótonas α_ψ e α_{φ_n}, com as propriedades $\alpha_\psi((t,+\infty)) = \psi(t)$ e $\alpha_{\varphi_n}((t,+\infty)) = \varphi_n(t)$, $\forall t \in (0,+\infty)$, $n \in \mathbb{N}$.

Como $\varphi_n(t) \leq \psi(t)$, $\forall t \in D$, temos $\int_{(0,+\infty)} i_D \, d\alpha_{\varphi_n} \leq \int_{(0,+\infty)} i_D \, d\alpha_{\psi} =$

$= \int_{(0,+\infty)} \psi d\ell < +\infty$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Temos então que:

(a) $\alpha(B) = \limsup_n \alpha_{\varphi_n}(B)$, $\forall B \in (0,+\infty)$

(b) $\limsup_n \int_{(0,+\infty)} i_D \, d\alpha_{\varphi_n} < +\infty$

(c) $\int_{(0,+\infty)} i_D \, d\alpha_{\psi} < +\infty$

Usando a propriedade (1.17) obtemos que

$$\int_{(0,+\infty)} i_D \, d\alpha \geq \limsup_n \int_{(0,+\infty)} i_D \, d\alpha_{\varphi_n} .$$

Logo, $\int_{(0,+\infty)} i_D \, d\alpha_{\varphi} \geq \limsup_n \int_{(0,+\infty)} i_D \, d\alpha_{\varphi_n}$,

ou seja $\int_{(0,+\infty)} \varphi d\ell \geq \limsup_n \int \varphi_n \, d\ell$

Prop. (1.20)

(a) Seja α uma função monótona de conjuntos definida em $P(\mathbb{A})$, $\mathbb{A} \neq \emptyset$, com a propriedade $\alpha(B_n) \uparrow \alpha(B)$ se $B_n \uparrow B$, $B_n, B \in \mathcal{P}(\mathbb{A})$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Então temos:

$$(f_n, f \in [0,+\infty]^{\mathbb{A}};\ f_n \uparrow f) \Longrightarrow (\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{A}} f_n d\alpha = \int_{\mathbb{A}} f d\alpha)$$

(b) Seja α uma função monótona de conjuntos definida em $\mathcal{P}(\mathbb{A})$, $\mathbb{A} \neq \emptyset$, com a propriedade "$\alpha(B_n) \downarrow \alpha(B)$ se $B_n \downarrow B$, onde $\alpha(B_1) < + \infty$ e $B_n, B \in \mathcal{P}(\mathbb{A})$". Assim,

$$(f_n, f \in [0,+\infty]^{\mathbb{A}};\ f_n \downarrow f,\ \int_{\mathbb{A}} f_1 d\alpha < +\infty) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{A}} f_n d\alpha = \int_{\mathbb{A}} f d\alpha)$$

Dem: Como $f_n \uparrow f$ temos $f_n \leq f$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e assim $\int_{\mathbb{A}} f_n d\alpha \leq \int_{\mathbb{A}} f d\alpha$, $\forall n \in \mathbb{N}$, logo,

$$\boxed{\limsup_{n} \int_{\mathbb{A}} f_n d\alpha \leq \int_{\mathbb{A}} f d\alpha}$$

Temos também que,

$$\int_{\mathbb{A}} f d\alpha = \int_{(0,+\infty)} \alpha\{f > t\} d\ell(t) \quad , \quad e \ ,$$

$\int_{\mathbb{A}} f_n d\alpha = \int_{(0,+\infty)} \alpha\{f_n > t\}\, d\ell(t)$. Mas, para cada $n \in \mathbb{N}$ temos $\varphi_n(t) = \alpha\{f_n > t\}$ e $\varphi(t) = \alpha\{f > t\}$ são funções decrescentes e os $B_n = \{f_n > t\}$, formam uma sequência que converge para $B = \{f > t\}$, e é crescente. Temos então que $\alpha(B) = \lim_{n \to +\infty} \alpha(B_n)$, e consequentemente $\varphi(t) = \lim_{n \to +\infty} \varphi_n(t)$, ou ainda $\varphi(t) \leq \liminf_n \varphi_n(t)$, $\forall t \in (0,+\infty)$. Usando o resultado o item (3) da prop. (1.19), temos,

$$\int_{(0,+\infty)} \varphi d\ell \leq \liminf_n \int_{(0,+\infty)} \varphi_n d\ell \quad \text{, isto é ,}$$

$$\int_{(0,+\infty)} \alpha\{f > t\}\, d\ell \leq \liminf_n \int_{(0,+\infty)} \alpha\{f_n > t\}\, d\ell \;,$$

e assim, $\boxed{\int_{\mathbb{A}} f d\alpha \leq \liminf_n \int_{\mathbb{A}} f_n d\alpha}$

$$\therefore \int_{\mathbb{A}} f d\alpha = \liminf \int_{\mathbb{A}} f_n d\alpha$$

(b) Como $f_n \downarrow f$, temos $f_n \geq f$, $\forall n \in \mathbb{N}$, logo $\int_{\mathbb{A}} f_n d\alpha \geq \int_{\mathbb{A}} f d\alpha$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e assim, $\boxed{\liminf \int_{\mathbb{A}} f_n d\alpha \geq \int_{\mathbb{A}} f d\alpha}$

Por outro lado temos ,

$$\int_{\mathbb{A}} f_n d\alpha = \int_{(0,+\infty)} \alpha\{f_n > t\}\, d\ell = \int_{(0,+\infty)} \varphi_n d\ell \ ,$$

$$\int_{\mathbb{A}} f d\alpha = \int_{(0,+\infty)} \alpha\{f > t\} = \int_{(0,+\infty)} \varphi\, d\ell \ ,$$

onde $\varphi_n(t) = \alpha\{f_n > t\}$ e $\varphi(t) = \alpha\{f > t\}$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, φ_n e φ são funções decrescentes e sendo $B_n = \{f_n > t\}$, como $f_n \downarrow f$, temos $B_n \downarrow B$, onde $B = \{f > t\}$. Assim $\alpha(B) = \lim_{n \to +\infty} \alpha(B_n) = \limsup_n \alpha(B_n)$, consequentemente ,

$\alpha\{f > t\} = \limsup_n \alpha\{f_n > t\}$, $\forall t \in (0,+\infty)$, e assim $\varphi(t) =$

$= \limsup_n \varphi_n(t)$, $\forall t \in (0,+\infty)$. Notemos também que $\varphi_n(t) =$

$= \alpha\{f_n > t\} \leq \alpha\{f_1 > t\}$, $\forall t \in (0,+\infty)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e que

$\int_{(0,+\infty)} \alpha\{f_1 > t\}\, d\ell = \int_{\mathbb{A}} \psi\, d\alpha < +\infty$, onde $\psi = \alpha\{f > t\}$.

Usando o item (4) da prop. (1.19) temos ,

$$\int_{(0,+\infty)} \varphi d\ell \geq \limsup_n \int_{(0,+\infty)} \varphi_n \, d\ell \quad \text{, isto é ,}$$

$$\int_{(0,+\infty)} \alpha\{f > t\} \, d\ell \geq \limsup_n \int_{(0,+\infty)} \alpha\{f_n > t\} \, d\ell \; ,$$

e assim, $\boxed{\int_{\mathbb{A}} f d\alpha \geq \limsup_n \int_{\mathbb{A}} f_n d\alpha}$

$$\therefore \int_{\mathbb{A}} f d\alpha = \limsup_n \int_{\mathbb{A}} f_n d\alpha$$

c.q.d.

BIBLIOGRAFIA

[1] BOURBAKI, N. - *Functions d'une variable reele, chap. 2, Hermann, Paris* (1958).

[2] DE GIORGI, E. - Letta, G. - "Une notion générale de convergence faible pour des fonctions croissantes d'ensemble", Ann.Sc. Norm. Sup. Pisa (iv), 61-99 (1977)

[3] GRECO, G.H. - "Integrale Monotono", Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, nº 57, 149-166 (1977).

[4] GRECO, G.H. - "Sur la mesurabilité d'une fonction numérique par rapport à une famille d'ensembles".

[5] HALMOS, P.R. - *Mesure Theory*, Van Nostrand Reinhold Co., New York (1950).

[6] ROYDEN, H.L. - *Real Analysis*, Macmillan Co., New York (1968).