

Carlos César Trucíos Maza

**Intervalos de previsão bootstrap em modelos de
volatilidade univariados.**

**CAMPINAS
2012**

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO
CIENTÍFICA.**


Carlos César Trucíos Maza

**Intervalos de previsão bootstrap em modelos de
volatilidade univariados.**

**DISSERTAÇÃO de MESTRADO APRESENTADA
AO INSTITUTO DE MATEMÁTICA,
ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA DA
UNICAMP PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
MESTRE EM ESTATÍSTICA.**

ORIENTADOR: Dr. Luiz Koodi Hotta.

**ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELO ALUNO
CARLOS CÉSAR TRUCÍOS MAZA E ORIENTADA PELO PROF.DR LUIZ KOODI HOTTA.**


Assinatura do Orientador

CAMPINAS, 2012

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA POR
ANA REGINA MACHADO - CRB8/5467
BIBLIOTECA DO INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E
COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA - UNICAMP

T764i Trucíos Maza, Carlos César, 1985-
Intervalos de previsão bootstrap em modelos de volatilidade
univariados / Carlos César Trucíos Maza. – Campinas, SP : [s.n.],
2012.

Orientador: Luiz Koodi Hotta.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas,
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Previsão estatística. 2. Bootstrap (Estatística). 3. Análise de
séries temporais. I. Hotta, Luiz Koodi, 1952-. II. Universidade
Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em inglês: Bootstrap prediction in univariate volatility models

Palavras-chave em inglês:

Statistical forecasting

Bootstrap (Statistics)

Time-series analysis

Área de concentração: Estatística

Titulação: Mestre em Estatística

Banca examinadora:

Luiz Koodi Hotta [Orientador]

Mauricio Enrique Zevallos Herencia

Ricardo Sandes Ehlers

Data de defesa: 11-07-2012

Programa de Pós-Graduação: Estatística

Dissertação de Mestrado defendida em 11 de julho de 2012 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof(a). Dr(a). LUIZ KOODI HOTTA



Prof(a). Dr(a). MAURICIO ENRIQUE ZEVALLOS HERENCIA



Prof(a). Dr(a). RICARDO SANDES EHLERS

Agradecimentos

A Jesus, meu Senhor e Salvador, pois reconheço que, se não fosse por ele, não seria nada.

A meus pais, Perla e Rafael, por estarem sempre perto, ainda que geograficamente estejam longe e por serem pra mim exemplos de esforço e dedicação.

Ao meu irmão, Rafael, porque ainda que não sempre tenhamos a mesma opinião, nunca deixou de me mostrar seu apoio.

Ao meu orientador, Dr. Luiz Koodi Hotta, pela amizade, oportunidade, ânimo, motivação, paciência, aprendizado e orientação.

Aos meus *hermanos* da *Iglesia Metodista de Magdalena*, porque sei que sempre estão orando por mim.

Ao Pastor Eduardo e sua esposa Anahi porque, ainda longe, sempre estiveram, estão e com certeza estarão preocupados comigo.

Ao Rev. Jorge Figueroa, pelos sábios conselhos.

Aos meus irmãos da Igreja Metodista Central em Campinas, em especial: Letícia, Larissa, Débora, Tiago, Weverton, Almir e suas respectivas famílias, por serem pra mim, uma verdadeira família neste país.

Ao Prof. Maurício, porque sem me conhecer, quando cheguei neste país, me mostrou sua amabilidade e seu apoio.

Aos meus amigos do IMECC, pelos momentos de descontração, apoio e longas jornadas de estudo em grupo.

À CAPES, pelo apoio financeiro recebido na elaboração deste trabalho.

Resumo

Mercados financeiros têm mostrado um grande interesse em intervalos de previsão como uma medida de incerteza. Além das previsões do nível, a previsão da volatilidade é importante em várias aplicações em finanças. O modelo GARCH tem sido bastante utilizado na modelagem da volatilidade. A partir deste modelo, outros modelos foram propostos para incorporar outros fatos estilizados, como o efeito de alavancagem. Neste sentido, temos os modelos EGARCH e GJR-GARCH. Os métodos tradicionais de construção de intervalos de previsão para séries temporais geralmente assumem que os parâmetros do modelo são conhecidos e os erros normais. Quando estas suposições não são verdadeiras, o que costuma acontecer na prática, o intervalo de previsão obtido tenderá a ter uma cobertura abaixo da nominal. Nesta dissertação propomos uma adaptação do algoritmo PRR (Pascual, Romo e Ruiz) desenvolvido para obter intervalos de previsão em modelos GARCH, para obter intervalos de previsão em modelos EGARCH e GJR-GARCH. As adaptações feitas são analisadas através de experimentos Monte Carlo e verifica-se que tiveram bom desempenho apresentando valores da cobertura estimada próximos da cobertura nominal. As adaptações propostas assim como o algoritmo PRR são aplicadas para obter intervalos de previsão dos retornos e das volatilidades para a série de retornos da Ibovespa e para a série *NYSE COMPOSITE(DJ)* da bolsa de valores de Nova Iorque, obtendo em ambos os casos resultados satisfatórios.

Palavras Chave: Intervalos de previsão, bootstrap, modelos de volatilidade.

Abstract

Financial Markets have shown a big interest in forecast intervals (prediction intervals) as a uncertain measure. Besides the level prediction, the prediction of the volatility is very important in many financial applications. The GARCH model, has been very used in volatility modeling. From this model, other have been proposed to incorporate other stylized facts, such as the leverage effect. In this sense, we have the EGARCH and GJR-GARCH models. Traditional methods for constructing predictions intervals for time series generally assume that the model parameters are known and the erros are normal. When these assumptions are not true, that it is very often in practice, the obtained prediction interval, will tend to have a cover under the nominal. In this theses we propose an adaptation of the PRR (Pascual, Romo and Ruiz) algorithm developed to obtain prediction intervals in GARCH models, to obtain prediction intervals in EGARCH and GJR-GARCH models. These adaptations are analized through Monte-Carlo experiments and It was verified that they have a good performance showing estimated cover values close to the nominal cover. The proposed adaptations, such as the PRR algorithm are applied to obtain prediction intervals from the returns and volatilities for the Ibovespa return series and for the New York Stock Exchange *NYSE COMPOSITE(DJ)* series, obtaining satisfactory results in both cases

keywords: Prediction Intervals, bootstrap, volatility models.

Sumário

Agradecimentos	v
Resumo	vii
Abstract	ix
1 Introdução	1
2 Modelos de Volatilidade	5
2.1 Modelos GARCH	7
2.2 Modelos EGARCH	10
2.3 Modelos GJR-GARCH	12
3 Bootstrap	15
3.1 Reamostragem por bootstrap	15
3.1.1 Intervalos de confiança	17
3.1.2 Teste de hipóteses	19
3.2 Bootstrap em séries temporais	22
3.2.1 Modelos baseados na reamostragem	23
3.2.2 Reamostragem por blocos	24
3.2.3 Sieve bootstrap	26
4 Intervalos de Previsão para Modelos da Família GARCH	29
4.1 Algoritmo PRR para intervalos de previsão	32
4.1.1 Algoritmo PRR	32
4.2 Adaptações do algoritmo PRR para intervalos de previsão	36
4.2.1 Algoritmo PRR para intervalos de previsão em modelos GJR-GARCH	36
4.2.2 Algoritmo PRR para intervalos de previsão em modelos EGARCH .	38

5	Simulação	41
5.1	Caso GARCH	46
5.2	Caso GJR-GARCH	55
5.3	Caso EGARCH	63
5.4	Considerações finais	72
6	Aplicações	77
6.1	Metodologia	77
6.2	Série Bovespa	79
6.2.1	Modelos ajustados	79
6.2.2	Intervalos de previsão	82
6.3	Série do índice da bolsa de valores de Nova Iorque	91
6.3.1	Modelo ajustado	91
6.3.2	Intervalos de previsão	94
7	Conclusões	103
A	GJR-GARCH	105
B	EGARCH	109
C	Tabelas Modelos 2, 3 e 4	113
D	Programas	117
	Referências Bibliográficas	126

Lista de Tabelas

5.1	Intervalos de previsão bootstrap dos retornos do modelo GARCH 1 para $h = 1, 2, 3, 4, 5$ passos à frente. Cobertura nominal de 90%	48
5.2	Intervalos de previsão bootstrap dos retornos do modelo GARCH 1 para $h = 1, 2, 3, 4, 5$ passos à frente. Cobertura nominal de 95%	48
5.3	Intervalos de previsão bootstrap dos retornos do modelo GARCH 1 para $h = 1, 2, 3, 4, 5$ passos à frente. Cobertura nominal de 99%	49
5.4	Intervalos de previsão bootstrap das volatilidades do modelo GARCH 1 para $h = 1, 2, 3, 4, 5$ passos à frente. Cobertura nominal de 90%	53
5.5	Intervalos de previsão bootstrap das volatilidades do modelo GARCH 1 para $h = 1, 2, 3, 4, 5$ passos à frente. Cobertura nominal de 95%	53
5.6	Intervalos de previsão bootstrap das volatilidades do modelo GARCH 1 para $h = 1, 2, 3, 4, 5$ passos à frente. Cobertura nominal de 99%	54
5.7	Intervalos de previsão bootstrap dos retornos do modelo GJR-GARCH(1,1) para $h = 1, 2, 3, 4, 5$ passos à frente. Cobertura nominal 90%	59
5.8	Intervalos de previsão bootstrap dos retornos do modelo GJR-GARCH(1,1) para $h = 1, 2, 3, 4, 5$ passos à frente. Cobertura nominal 95%	59
5.9	Intervalos de previsão bootstrap dos retornos do modelo GJR-GARCH(1,1) para $h = 1, 2, 3, 4, 5$ passos à frente. Cobertura nominal 99%	60
5.10	Intervalos de previsão bootstrap das volatilidades do modelo GJR-GARCH(1,1) para $h = 1, 2, 3, 4, 5$ passos à frente. Cobertura nominal de 90%	61
5.11	Intervalos de previsão bootstrap das volatilidades do modelo GJR-GARCH(1,1) para $h = 1, 2, 3, 4, 5$ passos à frente. Cobertura nominal de 95%	61
5.12	Intervalos de previsão bootstrap das volatilidades do modelo GJR-GARCH(1,1) para $h = 1, 2, 3, 4, 5$ passos à frente. Cobertura nominal de 99%	62
5.13	Intervalos de previsão bootstrap dos retornos do modelo EGARCH(1,1) para $h = 1, 2, 3, 4, 5$ passos à frente. Cobertura nominal 90%	66
5.14	Intervalos de previsão bootstrap dos retornos do modelo EGARCH(1,1) para $h = 1, 2, 3, 4, 5$ passos à frente. Cobertura nominal 95%	67

5.15	Intervalos de previsão bootstrap dos retornos do modelo EGARCH(1,1) para $h = 1, 2, 3, 4, 5$ passos à frente. Cobertura nominal 99%	67
5.16	Intervalos de previsão bootstrap das volatilidades do modelo EGARCH(1,1) para $h = 1, 2, 3, 4, 5$ passos à frente. Cobertura nominal de 90%	70
5.17	Intervalos de previsão bootstrap das volatilidades do modelo EGARCH(1,1) para $h = 1, 2, 3, 4, 5$ passos à frente. Cobertura nominal de 95%	70
5.18	Intervalos de previsão bootstrap das volatilidades do modelo EGARCH(1,1) para $h = 1, 2, 3, 4, 5$ passos à frente. Cobertura nominal de 99%	71
6.1	Estatísticas descritivas da série diária de retornos do Ibovespa.	79
6.2	Estimação da série diária de retornos do Ibovespa, no período 4 de janeiro de 2000 a 30 de Abril de 2012.	82
6.3	Porcentagem de cobertura para os retornos e volatilidades da série de retornos diários do Ibovespa. Cobertura nominal de 90%	88
6.4	Porcentagem de cobertura para os retornos e volatilidades da série de retornos diários do Ibovespa. Cobertura nominal de 95%	89
6.5	Porcentagem de cobertura para os retornos e volatilidades da série de retornos diários do Ibovespa. Cobertura nominal de 99%	90
6.6	Estatísticas descritivas da série diária de retornos do NYA.	91
6.7	Estimação da série diária de retornos do índice da bolsa de valores de Nova Iorque (NYA), no período 11 de fevereiro de 2003 a 30 de Abril de 2012.	94
6.8	Porcentagem de cobertura para os retornos da série de retornos do índice da bolsa de valores de Nova Iorque (NYA)	100
6.9	Porcentagem de cobertura para as volatilidades da série de retornos do índice da bolsa de valores de Nova Iorque (NYA)	101
C.1	Intervalos de previsão bootstrap dos retornos dos modelos GARCH 2, 3 e 4 para $h = 1, 2, 3, 4, 5$ passos à frente. Cobertura nominal 90%	113
C.2	Intervalos de previsão bootstrap dos retornos dos modelos GARCH 2, 3 e 4 para $h = 1, 2, 3, 4, 5$ passos à frente. Cobertura nominal 95%	114
C.3	Intervalos de previsão bootstrap dos retornos dos modelos GARCH 2, 3 e 4 para $h = 1, 2, 3, 4, 5$ passos à frente. Cobertura nominal 99%	114
C.4	Intervalos de previsão bootstrap das volatilidades dos modelos GARCH 2, 3 e 4 para $h = 1, 2, 3, 4, 5$ passos à frente. Cobertura nominal 90%	115
C.5	Intervalos de previsão bootstrap das volatilidades dos modelos GARCH 2, 3 e 4 para $h = 1, 2, 3, 4, 5$ passos à frente. Cobertura nominal 95%	115
C.6	Intervalos de previsão bootstrap das volatilidades dos modelos GARCH 2, 3 e 4 para $h = 1, 2, 3, 4, 5$ passos à frente. Cobertura nominal 99%	116

Lista de Figuras

5.1	Limites de previsão dos retornos 1 e 2 passos à frente para 20 replicações Monte Carlo com probabilidade de cobertura nominal de 95%. GARCH(1,1): Modelo 1	50
5.2	Densidade da distribuição dos retornos $h = 1, 2, 3, 4, 5$ passos à frente para uma das séries geradas pelo processo GARCH(1,1) definido no modelo 1 . .	51
5.3	Limites de previsão das volatilidade 1, 2 e 5 passos à frente para 20 replicações Monte Carlo com probabilidade de cobertura nominal de 95%. GARCH(1,1): Modelo 1. Para facilitar a visualização as replicações foram ordenadas pelo valor de $P_{0.5}$	56
5.4	Histograma e densidade da distribuição das volatilidades bootstrap e empírica respectivamente para $h = 1, 2, 3, 4, 5$ passos à frente para uma das séries geradas pelo processo GARCH(1,1): Modelo 1	57
5.5	Limites de previsão das volatilidade 1, 2 e 5 passos à frente para 20 replicações Monte Carlo com probabilidade de cobertura nominal de 95% GJR-GARCH(1,1). Para facilitar a visualização as replicações foram ordenadas pelo valor de $P_{0.5}$	64
5.6	Histograma e densidade da distribuição das volatilidades bootstrap e empírica respectivamente para $h = 1, 2, 3, 4, 5$ passos à frente para uma das séries geradas pelo processo GJR-GARCH(1,1)	65
5.7	Limites de previsão dos retornos 1 e 2 passos à frente para 20 replicações Monte Carlo com probabilidade de cobertura nominal de 95%	69
5.8	Limites de previsão do logaritmo do quadrado das volatilidades 1, 2 e 5 passos à frente para 20 replicações Monte Carlo com probabilidade de cobertura nominal de 95% EGARCH(1,1). ara facilitar a visualização as replicações foram ordenadas pelo valor de $P_{0.5}$	73
5.9	Densidade da distribuição das volatilidades $h = 1, 2, 3, 4, 5$ passos à frente para uma das séries geradas pelo processo EGARCH(1,1)	74

6.1	Evolução diária dos preços do Ibovespa, no período 3 de janeiro de 2000 a 30 de Abril de 2012 e retornos diários do Ibovespa, no período 4 de janeiro de 2000 a 30 de Abril de 2012	80
6.2	Função de autocorrelação amostral da série diária de retornos do Ibovespa.	81
6.3	Autocorrelações dos retornos ao quadrado e autocorrelações das inovações ao quadrado da série de retornos diários da Ibovespa após ter ajustado o modelo GARCH(1,1), EGARCH(1,1) e GJR GARCH(1,1)	83
6.4	Limites de previsão 90% dos retornos e volatilidades utilizando os modelos GARCH(1,1), EGARCH(1,1) e GJR GARCH(1,1).	84
6.5	Limites de previsão 95% dos retornos e volatilidades utilizando os modelos GARCH(1,1), EGARCH(1,1) e GJR GARCH(1,1).	85
6.6	Limites de previsão 99% dos retornos e volatilidades utilizando os modelos GARCH(1,1), EGARCH(1,1) e GJR GARCH(1,1).	86
6.7	Evolução diária dos preços do índice da bolsa de valores de Nova Iorque (NYA), no período 10 de fevereiro de 2003 a 30 de Abril de 2012 e Retornos diários do índice da bolsa de valores de Nova Iorque (NYA), no período 11 de fevereiro de 2003 a 30 de Abril de 2012	92
6.8	Função de Autocorrelação amostral dos retornos do índice da bolsa de valores de Nova Iorque (NYA), e dos retornos após o filtro AR(1)	93
6.9	Função de autocorrelação dos retornos ao quadrado do índice da bolsa de valores de Nova Iorque (NYA) e das inovações ao quadrado dos modelos AR(1)-GARCH(1,1), AR(1)-EGARCH(1,1), AR(1)-GJR-GARCH(1,1) . . .	95
6.10	Limites de previsão 90% dos retornos filtrados e volatilidades utilizando os modelos GARCH(1,1), EGARCH(1,1) e GJR GARCH(1,1).	97
6.11	Limites de previsão 95% dos retornos filtrados e volatilidades utilizando os modelos GARCH(1,1), EGARCH(1,1) e GJR GARCH(1,1).	98
6.12	Limites de previsão 99% dos retornos filtrados e volatilidades utilizando os modelos GARCH(1,1), EGARCH(1,1) e GJR GARCH(1,1).	99

Capítulo 1

Introdução

A previsão de valores futuros é um dos principais objetivos na análise de séries temporais, e é de interesse em muitas áreas de conhecimento como a economia, planejamento da produção, previsão de vendas, etc. A sua importância advém do fato de ser vantajoso conhecer a evolução provável de uma série no futuro. Nos mercados financeiros a previsão é um grande desafio para a estatística, pois a resposta correta a perguntas como se as ações da bolsa de valores vão subir, ou se a cotação do dólar vai cair, pode significar grande lucratividade ou grande prejuízo para os investidores individuais e/ou empresariais.

Geralmente, estas previsões são dadas como estimativas pontuais, embora seja ainda mais importante a previsão por intervalo (Pascual *et al.*, 2005). Apesar disso, observa-se na literatura que os autores de livros didáticos sobre a análise de séries temporais e previsão geralmente dedicam pouca importância à previsão por intervalo e dão pouca orientação sobre como calculá-los (Chatfield, 2003, p. 479). Em geral, os intervalos de previsão são calculados sob a suposição de que o modelo é conhecido, e os erros têm distribuição normal. Com estas suposições, intervalos de previsão podem ser facilmente obtidos com a média mais ou menos um múltiplo do desvio padrão.

No campo das séries financeiras existe pouca literatura sobre procedimentos para obter

intervalos de previsão para as volatilidades e para os retornos. Além disso, a distribuição com caudas mais pesadas do que a distribuição normal e a presença de assimetria são algumas características das séries de tempo no mercado financeiro que fazem com que obter intervalos de previsão utilizando a abordagem anteriormente mencionada afetem a cobertura dos intervalos, tornando as previsões inapropriadas, levando, geralmente, a um risco maior do que o desejável.

Uma alternativa para solucionar este problema é obter intervalos de previsão utilizando procedimentos bootstrap, os quais não requerem supor uma distribuição para a distribuição das perturbações (Fan e Yao, 2005). O método bootstrap, sugerido por Efron (1979), vem sendo frequentemente utilizado na literatura de séries temporais e pode ser utilizado para construir intervalos de confiança para os parâmetros do modelo, realizar testes de hipóteses, corrigir o vício de estimadores, entre outras utilidades.

Nas últimas décadas tem-se verificado a aplicação de procedimentos bootstrap de intervalos de previsão para séries temporais. Em um trabalho seminal nesta área, Thombs e Schucany (1990) constroem intervalos para modelos autorregressivos puros realizando replicações bootstrap fixando-se os últimos p valores da série, onde p é a ordem do maior coeficiente autorregressivo. Nesta mesma área temos trabalhos como o de Alonso *et al.* (2003) que utilizam o sieve bootstrap para obter os intervalos de previsão para uma classe geral de processos lineares, entre outros. No campo das séries financeiras temos os trabalhos de Miguel e Olave (1999) propondo um procedimento bootstrap para obter intervalos de previsão dos valores futuros em processos ARCH; Reeves (2005) que obteve intervalos de previsão nos modelos ARCH; Pascual *et al.* (2006) que fazem uma extensão do procedimento apresentado por Pascual *et al.* (2004) para modelos ARIMA para obter densidades

de previsão dos valores futuros dos retornos e das volatilidades de séries geradas por processos GARCH; Chen *et al.* (2011) que propõem novos métodos para obter intervalos de previsão dos retornos e das volatilidades nos modelos ARCH e GARCH; e recentemente o trabalho de Lee (2011) que utiliza a sub amostragem bootstrap para obter intervalos de previsão nos modelos GARCH e Lana (2012) que desenvolve intervalos de previsão bootstrap para modelos ARFIMA, entre outros.

Um dos métodos bootstrap para obter intervalos de previsão em modelos de volatilidade que tem mostrado bons resultados e que parece ser generalizável para outros modelos da família GARCH é o proposto por Pascual *et al.* (2006). Neste método, proposto para trabalhar com modelos GARCH(p,q), é incorporado um componente de incerteza nos intervalos de previsão devido à estimação dos parâmetros do modelo em cada replicação bootstrap e não depende da distribuição das inovações.

O objetivo principal desta dissertação é avaliar o desempenho do algoritmo de Pascual, Romo e Ruiz (2006) nos modelos GARCH com alta persistência e adapta-lo para os modelos com efeito de alavancagem EGARCH e GJR-GARCH, e assim poder propor a sua utilização na obtenção de intervalos de previsão neste tipo de modelos que são frequentemente ajustados.

A dissertação está organizada da seguinte forma: no capítulo 2, introduzimos os modelos de volatilidade utilizados; no capítulo 3, introduzimos os conceitos básicos do bootstrap; no capítulo 4, é feita uma descrição dos métodos bootstrap utilizados para obter intervalos de previsão nos modelos da família GARCH; no capítulo 5, resultados obtidos pelas simulações são apresentados. Aplicações a séries de dados reais são apresentados no capítulo 6 e no capítulo 7 encontram-se as conclusões sobre o trabalho.

Capítulo 2

Modelos de Volatilidade

A modelagem de séries temporais financeiras é um problema complexo. Esta complexidade não é apenas devido à variedade das séries em uso (ações, taxas de câmbio, taxas de juros, etc), frequência das observações (minuto, hora, dia, etc), e nem pela disponibilidade de grandes conjuntos de dados. A complexidade também vem da existência de *fatos estilizados* que são comuns a um grande número de séries financeiras e que são difíceis de serem modeladas. A maioria destes fatos estilizados foram apresentados em um artigo escrito por Mandelbrot (1963). Desde então, eles têm sido documentados, e referendados, por muitos estudos empíricos; a ocorrências destes fatos podem depender do tipo da série e da sua frequência (Francq e Zakoian, 2010).

Este capítulo apresenta brevemente uma revisão dos modelos de volatilidade utilizados frequentemente para analisar este tipo de séries.

Na prática é preferível trabalhar com retornos dos preços, seja pela sua interpretabilidade, seja por não depender da escala. Assim, denotemos por P_t o preço de um ativo no tempo t , normalmente preço de fechamento em um dia de negócio. A variação de preços entre os instantes $t - 1$ e t é dada por $\Delta P_t = P_t - P_{t-1}$ e a variação relativa de preços deste ativo, é definido por:

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} = \frac{\Delta P_t}{P_{t-1}}. \quad (2.0.1)$$

Definimos o retorno composto continuamente ou log-retorno como:

$$r_t = \log \frac{P_t}{P_{t-1}} = \log(1 + R_t) = p_t - p_{t-1}, \quad (2.0.2)$$

onde $p_t = \log(P_t)$.

Esta definição será a utilizada na dissertação, e r_t será chamado simplesmente de retorno. Para R_t não muito grande temos que $r_t \approx R_t$.

Os Fatos Estilizados relativos a retornos financeiros podem ser resumidos como segue: Morettin e Toloi (2004, p. 12); Francq e Zakoian (2010, p. 7-10).

- Os retornos são não correlacionados serialmente, ou apresentam em geral pequena auto-correlação.
- Os quadrados dos retornos são auto-correlacionados, geralmente com longa persistência.
- Séries de retornos apresentam conglomerados de volatilidades ao longo do tempo.
- A distribuição (incondicional) dos retornos apresenta caudas mais pesadas do que uma distribuição normal, e, a distribuição é em geral, leptocúrtica.
- Em muitos casos, a distribuição condicional também apresenta caudas pesadas.
- Efeito de alavanca: Retornos negativos tendem a aumentar mais as volatilidades futuras do que retornos positivos da mesma magnitude.

Os modelos apresentados a seguir, são frequentemente utilizados na modelagem deste tipo de séries.

2.1 Modelos GARCH

Os modelos autorregressivos com heterocedasticidade condicional (ARCH) foram introduzidos por Engle (1982) com o objetivo de estimar a variância da inflação no Reino Unido. A ideia básica é que o retorno r_t é não correlacionado, mas a volatilidade depende dos retornos passados por meio de uma função quadrática. Uma generalização deste modelo foi sugerida por Bollerslev (1986), o chamado modelo GARCH (*generalized ARCH*), onde a variância condicional é também função dos seus próprios valores defasados. Assim como o modelo ARMA pode ser mais parcimonioso, no sentido de apresentar menos parâmetros do que um modelo AR ou MA puro, o modelo GARCH pode ser usado para descrever a volatilidade com menos parâmetros do que um modelo ARCH.

Definição 2.1.1 *Um processo $\{r_t\}$ é chamado de processo $GARCH(p,q)$ se satisfaz as seguintes equações:*

$$\begin{aligned} r_t &= \sigma_t \varepsilon_t \\ \sigma_t^2 &= \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \sigma_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j r_{t-j}^2, \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

onde: $\omega > 0$, $\varepsilon_t \sim IID(0,1)$ e ε_t é independente de r_{t-i} , $i > 1$. Geralmente utiliza-se também as restrições $\alpha_i, \beta_j > 0$ pois estas condições são suficientes para que $\sigma_t^2 > 0$. As condições necessárias e suficientes para a estacionariedade estrita são difíceis de encontrar, mas para $GARCH(1,1)$ podem ser encontradas em (Francq e Zakoian, 2010,

P. 24). No entanto, o espaço paramétrico modifica-se muito pouco quando se utilizam as condições suficientes.

Quando $\omega > 0$ o processo GARCH(p,q) é estritamente estacionário, se e somente se, o *top Lyapunov exponent* γ associado às matrizes $A_n, n \in Z$ é estritamente negativo, Bougerol e Picard (1992), onde A_n é uma matriz de dimensão $(p+q-1) \times (p+q-1)$ da forma:

$$A_n = \begin{pmatrix} \tau_n & \beta_p & \alpha & \alpha_q \\ I_{p-1} & 0 & 0 & 0 \\ \xi_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{q-2} & 0 \end{pmatrix},$$

e onde I_{p-1} e I_{q-2} são matrizes identidade de tamanho $p-1$ e $q-2$ respectivamente, $\tau_n = (\beta_1 + \alpha_1 \epsilon_n^2, \beta_2, \dots, \beta_{p-1}) \in R^{p-1}$, $\xi_n = (\epsilon_n^2, 0, \dots, 0) \in R^{p-1}$, $\alpha = (\alpha_2, \dots, \alpha_{q-1}) \in R^{q-2}$ e:

$$\gamma = \inf \left\{ E \left(\frac{1}{n+1} \log \|A_0 A_1 \dots A_n\| \right), n \in N \right\}. \quad (2.1.2)$$

Esta condição de estacionariedade estrita é bastante forte. Na prática é suficiente que o processo seja estacionário de segunda ordem. Quando $\omega > 0$ o processo GARCH(p,q) é estacionário de segunda ordem, se e somente se:

$$\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j < 1. \quad (2.1.3)$$

Se a condição de estacionariedade acima é satisfeita, então temos que a variância incondicional é finita e dada por:

$$\sigma^2 = \frac{\omega}{1 - \sum_{i=1}^q \alpha_i - \sum_{j=1}^p \beta_j}. \quad (2.1.4)$$

Os processos GARCH(p,q) podem também ser representados como processos ARMA(max(p,q),q). Assim, se denotarmos $v_t = r_t^2 - \sigma_t^2$, teremos:

$$r_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{\max(p,q)} (\alpha_i + \beta_i) r_{t-i}^2 - \sum_{j=1}^q \beta_j v_{t-j} + v_t, \quad (2.1.5)$$

onde v_t tem média 0 e variância σ^2 .

Segundo Chatfield (2000, p. 63), o modelo GARCH (1,1) tornou-se o modelo padrão para descrever o comportamento da volatilidade sem razão aparente que não seja a relativa simplicidade. Na prática, quando este modelo é ajustado aos dados, encontra-se frequentemente que $\alpha + \beta \cong 1$, se $\alpha + \beta < 1$ temos que a condição de estacionariedade é satisfeita, quando $\alpha + \beta = 1$ o processo não tem variância finita. Neste caso teremos o modelo IGARCH (*Integrated GARCH*), proposto por Engle e Bollerslev (1986), definido como:

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha \sigma_{t-1}^2 + (1 - \alpha) r_{t-1}^2, \quad (2.1.6)$$

onde $0 < \alpha < 1$.

Nos modelos GARCH temos que volatilidades altas são precedidas de retornos ou volatilidades grandes, observando-se grupos de volatilidades presentes em séries financeiras. Uma vantagem deste modelo, descrita por Nelson (1991), é que ele consegue capturar os conglomerados de volatilidade (*volatility clustering*). Como desvantagem, Nelson apontou o grande número de restrições sobre os parâmetros necessários para garantir que

a variância seja positiva. Além disso, o modelo não captura o efeito de alavanca.

Na identificação da ordem de um modelo GARCH, geralmente modelos de ordem baixa, como $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$ ou $(2, 2)$ são capazes de explicar a volatilidade. Uma opção para selecionar o modelo é a utilização de critérios, como AIC ou BIC, valores de assimetria e curtose, da log-verossimilhança e de alguma função perda (Morettin e Toloi, 2004, p. 336) como

$$\sum_{t=1}^N (r_t^2 - \sigma_t^2)^2. \quad (2.1.7)$$

Existem várias propostas na literatura para se estimar os parâmetros ω , α_i , β_j : estimador de máxima verossimilhança condicional, estimador de Whittle e estimador do mínimo desvio absoluto. Maiores detalhes destes métodos podem ser obtidos em Fan e Yao (2005, p. 156-161).

2.2 Modelos EGARCH

Existem várias propostas para modelar o efeito de alavancagem. Um destes modelos é o modelo EGARCH (*Exponential GARCH*), introduzido por Nelson (1991).

Definição 2.2.1 *Um processo $\{r_t\}$ é chamado de processo EGARCH(p, q) se satisfaz as equações da forma:*

$$\begin{aligned}
r_t &= \sigma_t \varepsilon_t \\
\log(\sigma_t^2) &= \omega + \sum_{i=1}^q g(\varepsilon_{t-i}) + \sum_{j=1}^p \beta_j \log(\sigma_{t-j}^2),
\end{aligned} \tag{2.2.1}$$

onde:

$$g(\varepsilon_{t-i}) = \alpha_i \varepsilon_{t-i} + \gamma_i (|\varepsilon_{t-i}| - E(|\varepsilon_{t-i}|)), \tag{2.2.2}$$

e ω , α_i , β_j , γ_i , são números reais, e $\varepsilon_t \sim IID(0, 1)$.

Este modelo permite que a volatilidade seja mais afetada por retornos passados negativos do que a positivos, *efeito alavanca*. Uma vantagem neste modelo para garantir variância positiva é a inexistência da restrição de que os parâmetros sejam positivos.

O modelo EGARCH(p,q) é estritamente estacionário se, e somente se, as raízes de $\beta(z) = 1 - \sum_{j=1}^p \beta_j z^j$ estão fora do círculo unitário e são cumpridas as seguintes suposições: $g(\varepsilon_t)$ não é igual a zero e os polinômios $\alpha(z) = \sum_{i=1}^q \alpha_i z^i$ e $\beta(z)$ não têm raízes comuns, com $\alpha(z)$ não identicamente nulo.

Para o caso mais simples, ou seja um modelo EGARCH(1,1) temos:

$$\begin{aligned}
r_t &= \sigma_t \varepsilon_t \\
\log(\sigma_t^2) &= \omega + \alpha \varepsilon_t + \gamma [|\varepsilon_{t-1}| - E(|\varepsilon_{t-1}|)] + \beta \log(\sigma_{t-1}^2).
\end{aligned} \tag{2.2.3}$$

Assim a variância condicional quando $r_{t-1} < 0$ é:

$$\log(\sigma_t^2) = \omega + (\alpha - \gamma) \varepsilon_{t-1} + \beta \log(\sigma_{t-1}^2), \tag{2.2.4}$$

e a variância condicional quando $r_{t-1} > 0$ é:

$$\log(\sigma_t^2) = \omega + (\alpha + \gamma)\varepsilon_{t-1} + \beta \log(\sigma_{t-1}^2). \quad (2.2.5)$$

Se a condição de estacionariedade é satisfeita temos que a variância incondicional, quando as inovações seguem uma distribuição normal padrão é dada por:

$$\sigma^2 = \exp\left(\frac{\omega}{1 - \beta}\right), \quad (2.2.6)$$

onde o modelo é estacionário e tem curtose finita se $|\beta| < 1$.

2.3 Modelos GJR-GARCH

Um caminho natural para introduzir a assimetria é especificar a variância condicional em função das partes positivas e negativas dos retornos. O modelo GJR-GARCH, que é um caso particular do modelo TGARCH (Threshold GARCH) introduzido por Glosten *et al.* (1993) e por Zakoian (1994), introduz esse efeito na volatilidade.

Definição 2.3.1 *Um processo $\{r_t\}$ é chamado de processo GJR-GARCH(p, q) se satisfaz as equações da forma:*

$$\begin{aligned} r_t &= \sigma_t \varepsilon_t \\ \sigma_t^2 &= \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i r_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2 + \sum_{i=1}^q \gamma_i r_{t-i}^2 I(r_{t-i} < 0), \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

onde, $I(\cdot)$ é a função indicadora, $\varepsilon_t \sim IID(0, 1)$ e $\omega, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ são não negativos satisfazendo as condições semelhantes às do modelos GARCH.

Para o caso mais simples, ou seja um modelo GJR-GARCH(1,1) temos:

$$\begin{aligned} r_t &= \sigma_t \varepsilon_t \\ \sigma_t^2 &= \omega + \alpha_1 r_{t-1}^2 + \gamma_1 r_{t-1}^2 I(r_{t-1} < 0) + \beta_1 \sigma_{t-1}^2. \end{aligned} \tag{2.3.2}$$

Assim, temos que a variância condicional quando $r_{t-1} < 0$ é:

$$\sigma_t^2 = \omega + (\alpha_1 + \gamma_1) r_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2, \tag{2.3.3}$$

e a variância condicional quando $r_{t-1} > 0$ é:

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 r_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2. \tag{2.3.4}$$

Em outras palavras, se o retorno é negativo teremos que o efeito sobre a variância condicional é maior, do que quando o retorno é positivo quando α_1 é positivo. No caso do modelo GJR-GARCH(1,1) o processo é estacionário se satisfaz a condição:

$$Prob(r_t < 0)\gamma < (1 - \alpha - \beta), \tag{2.3.5}$$

e neste caso, a variância incondicional de r_t é dada por:

$$\sigma^2 = \frac{\omega}{1 - \alpha - \beta - \gamma Prob(r_t < 0)}. \tag{2.3.6}$$

Capítulo 3

Bootstrap

A ideia básica do bootstrap sugerida por Efron (1979) baseia-se no princípio do "plug-in" e consiste na replicação do processo de estimação via reamostragem da amostra original (bootstrap não paramétrico) ou da distribuição do estimador de interesse (bootstrap paramétrico). A vantagem no caso do bootstrap não paramétrico está no fato de não ser necessário o conhecimento da distribuição do estimador do parâmetro de interesse ou não depender de aproximações assintóticas.

Efron e Tibshirani (1993) e Davison e Hinkley (1997) apresentam várias aplicações dos métodos bootstrap em diversas metodologias estatísticas e são boas referências para uma introdução neste tópico.

Neste capítulo são apresentados os conceitos básicos do bootstrap, assim como uma breve revisão dos procedimentos bootstrap utilizados em séries temporais.

3.1 Reamostragem por bootstrap

Seja $\mathbf{x} = (x_1; x_2; \dots; x_n)$ uma amostra aleatória de tamanho n de uma população com distribuição \mathbf{F} . Seja $\hat{\mathbf{F}}$ a distribuição empírica, com probabilidade $1/n$ para cada valor

observado $x_i, i = 1; 2; \dots; n$. Uma amostra bootstrap é definida como sendo uma amostra aleatória com reposição de tamanho n retirada de $\hat{\mathbf{F}}$, digamos $x^* = (x_1^*; x_2^*; \dots; x_n^*)$. A notação x^* indica que estes não são as observações originais do conjunto de dados \mathbf{x} , mas sim uma reamostra de \mathbf{x} .

O procedimento descrito acima é conhecido na literatura como bootstrap não-paramétrico ou simplesmente bootstrap. Em algumas ocasiões conhecemos a forma de \mathbf{F} a menos de um parâmetro (ou conjunto de parâmetros), isto é, $\mathbf{F} \equiv F_\eta$, para algum η . Neste caso, se tivermos um procedimento de estimação de η , podemos utilizar uma alternativa paramétrica, que pode apresentar resultados mais precisos, (Pinheiro e Pinheiro, 2007, p. 86). Assim, no contexto paramétrico $x^* = (x_1^*; x_2^*; \dots; x_n^*)$ seria obtido da distribuição F_η , este último procedimento é chamado de bootstrap paramétrico. É utilizado X^{*b} para referirmos à b-ésima amostra bootstrap, e $T(\cdot)$ para referirmos a uma estatística.

Para obter a estimação do erro padrão fazemos:

$$\hat{se}_B = \sqrt{\sum_{b=1}^B \frac{[\hat{\theta}^*(b) - \hat{\theta}^*(\cdot)]^2}{B-1}}, \quad (3.1.1)$$

em que:

B é o número de reamostras bootstrap,

$$\begin{aligned} \hat{\theta}^*(b) &= T(X^{*b}) \text{ e} \\ \hat{\theta}^*(\cdot) &= \sum_{b=1}^B \frac{\hat{\theta}^*(b)}{B} \text{ (Chamado de estimador bootstrap).} \end{aligned}$$

Segundo Efron e Tibshirani (1993, p. 52) o número de reamostras B suficientes para que o resultado da estimativa do erro padrão seja satisfatório é geralmente $B = 200$. Contudo, a qualidade do estimador bootstrap é limitada pelo tamanho amostral n , isto é,

utilizar um B muito grande não garante um estimador mais confiável do erro-padrão. Na verdade se B for muito grande para o tamanho amostral n , a estimativa do erro padrão será viciada. Isto decorre do fato de que quando o número de reamostras é muito grande a proporção de amostras iguais passa a ser muito grande. Note-se que o máximo de reamostras diferentes é C_n^{2n-1} . Em muitas aplicações, utilizam-se estimativas dos quantis populacionais, os quantis amostrais. A estimação dos quantis necessita de B reamostras e o valor de B depende do percentil respeitando-se as limitações inerentes a n .

3.1.1 Intervalos de confiança

Um intervalo de confiança é um conjunto que fornece uma faixa de possíveis valores nos quais o verdadeiro valor do parâmetro de interesse se encontra com determinada confiança p . Embora existam vários métodos para obter intervalos de confiança para um parâmetro tais como o método da quantidade pivotal, o método assintótico e método da inversão da região de aceitação dos testes de hipóteses, (Casella e Berger, 2001, p. 420), algumas dificuldades fazem com que não seja sempre fácil obter estes intervalos. Já, os intervalos utilizando bootstrap geralmente podem ser obtidos mais facilmente, embora com um maior custo computacional. Na literatura existem vários intervalos de confiança bootstrap que podem ser considerados.

Quando $\hat{\theta}$ tem distribuição normal assintótica, um método simples e tradicional de se obter os intervalos de confiança é utilizar a aproximação normal:

$$[\hat{\theta} - \hat{se}_L \times z_{1-\alpha/2}; \hat{\theta} + \hat{se}_L \times z_{1-\alpha/2}], \quad (3.1.2)$$

onde $z_{1-\alpha/2}$ é o percentil $(1 - \alpha/2)$ da distribuição normal padrão, e \hat{se}_L é a estimativa

do erro padrão. Agora, quando o procedimento bootstrap é realizado, são obtidos o vício e o erro padrão, assim o intervalo de confiança bootstrap será da forma:

$$[\hat{\theta} - \hat{b}_R - \hat{se}_R \times z_{1-\alpha/2}; \hat{\theta} - \hat{b}_R + \hat{se}_R \times z_{1-\alpha/2}], \quad (3.1.3)$$

onde:

$$\hat{b}_R = \frac{\sum_{b=1}^B [\hat{\theta}^*(b) - \hat{\theta}^*(.)]}{B},$$

$$\hat{se}_R = \sqrt{\frac{\sum_{b=1}^B [\hat{\theta}^*(b) - \hat{\theta}^*(.)]^2}{B-1}},$$

são o vício e o erro padrão bootstrap obtidos respectivamente e

$$\hat{\theta}^*(.) = \frac{\sum_{b=1}^B \hat{\theta}^*(b)}{B}.$$

Na literatura existe um tipo de intervalo de confiança bootstrap chamado de método básico bootstrap para obter intervalos de confiança. Neste caso, o intervalo está dado da forma:

$$[2\hat{\theta} - \hat{\theta}^*_{(1-\alpha/2)}; 2\hat{\theta} - \hat{\theta}^*_{(\alpha/2)}], \quad (3.1.4)$$

onde $\hat{\theta}^*_{(1-\alpha/2)}$ é o percentil $(1 - \alpha/2)$ das estatísticas bootstrap $\hat{\theta}^*(b)$. Uma modificação deste intervalo de confiança, é conhecido como intervalo bootstrap estudentizado ou bootstrap-t e é dado por:

$$[\hat{\theta} - \hat{se}_L \times z^*_{(1-\alpha/2)}; \hat{\theta} - \hat{se}_L \times z^*_{(\alpha/2)}], \quad (3.1.5)$$

onde:

$$z^*(b) = \frac{\hat{\theta}^*(b) - \hat{\theta}}{\hat{se}_b^*(\hat{\theta})},$$

$z_{(1-\alpha/2)}^*$ é o percentil $(1 - \alpha/2)$ de $z^*(b)$,

$\hat{\theta}^*(b)$: é a estimativa bootstrap da estatística de interesse, e

$\hat{\theta}$: é a estatística de interesse na amostra original.

Para obter o valor de \hat{se}_L^* são necessários dois níveis de reamostragem bootstrap. Para cada uma das B reamostras são feitas M reamostras de onde é calculado o erro padrão para a b -ésima amostra. Quando \hat{se}_L não pode ser obtido por métodos assintóticos é estimado utilizando bootstrap.

Outro tipo de intervalos de confiança bootstrap são os chamados intervalos de confiança bootstrap percentílicos. Para cada uma das B reamostras bootstrap estimamos o valor $\hat{\theta}$, denotado por $\hat{\theta}^*(b)$, $b = 1, \dots, B$ e se utiliza a distribuição empírica de $\hat{\theta}^*(b)$ como uma aproximação para a verdadeira distribuição da estatística θ para fazer inferência sobre o parâmetro de interesse. Então, o limite inferior e o limite superior do intervalo de confiança bootstrap percentílico ao nível de confiança de $100(1 - \alpha)\%$, é definido como:

$$[\hat{\theta}_{\alpha/2}^*; \hat{\theta}_{1-\alpha/2}^*]. \quad (3.1.6)$$

3.1.2 Teste de hipóteses

Seja B o número de reamostras independentes de tamanho n de \hat{F} . Para cada reamostra b , $b = 1, \dots, B$ é calculado o valor da estatística de teste t_b^* , rejeitando H_0 quando $|t_b^*| \geq c$

Então o p-valor utilizando bootstrap pode ser aproximado por:

$$p_{boot} = \frac{1 + \#\{|t_b^*| \geq |t_{obs}|\}}{B + 1}. \quad (3.1.7)$$

Utilizando este procedimento para obter o p-valor bootstrap, diferentes testes de hipóteses podem ser realizados, como por exemplo testar a hipóteses de diferença de médias, testar a hipóteses de distribuições. Neste último consideramos que \mathbf{z} e \mathbf{y} são duas amostras aleatórias independentes de distribuições de probabilidade F e G , e queremos testar a hipótese nula $F = G$. Então para testar esta hipótese utilizando o procedimento bootstrap descrito acima, temos que seguir os seguintes passos:

1. Obter B reamostras bootstrap de tamanho $n + m$ de \mathbf{x} , as primeiras n observações são chamadas de \mathbf{z}^* e as m seguintes de \mathbf{y}^* .
2. Calcular a estatística de teste para cada uma das B reamostras

$$t_b^* = \bar{\mathbf{z}}^* - \bar{\mathbf{y}}^*, b = 1, \dots, B. \quad (3.1.8)$$

3. Obter o p-valor bootstrap.

$$p_{boot} = \frac{1 + \#\{|t_b^*| \geq |t_{obs}|\}}{B + 1}, \quad (3.1.9)$$

onde t_{obs} é a estatística de teste obtida da amostra original.

No seguinte exemplo, considere que queremos testar a hipótese nula de igualdade de médias, contra a hipótese alternativa, rejeitando H_0 quando $|t_b^*| \geq c$. Neste caso os passos a seguir são:

1. Obter B amostras bootstrap do tipo $(\mathbf{z}^*, \mathbf{y}^*)$ onde \mathbf{z}^* é a reamostra bootstrap de $\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_n$ e \mathbf{y}^* é a reamostra bootstrap de $\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_m$, onde $\tilde{z}_i = z_i - \bar{z} + \bar{x}, i = 1, \dots, n$ e $\tilde{y}_i = y_i - \bar{y} + \bar{x}, i = 1, \dots, m$, onde \bar{z} e \bar{y} são as médias de cada grupo e \bar{x} a média combinada da amostra.
2. Calcular a estatística de teste para cada uma das B reamostras

$$t_b^* = \frac{\bar{z}^* - \bar{y}^*}{\sqrt{\frac{\sigma_1^{2*}}{n} + \frac{\sigma_2^{2*}}{m}}}, b = 1, \dots, B. \quad (3.1.10)$$

onde σ_1^{2*} e σ_2^{2*} são as variâncias bootstrap de \mathbf{z}^* e \mathbf{y}^* respectivamente.

3. Obter o p-valor bootstrap.

$$p_{boot} = \frac{1 + \#\{|t_b^*| \geq |t_{obs}|\}}{B + 1}, \quad (3.1.11)$$

onde t_{obs} é a estatística de teste obtida da amostra original.

Estes são apenas dois exemplos de como utilizar os procedimentos bootstrap para fazer teste de hipóteses. Procedimentos semelhantes podem ser feitos para fazer outros testes de hipóteses utilizando este procedimento.

Um outro procedimento utilizado para fazer teste de hipóteses com bootstrap é conhecido como *double bootstrap test*. Para fazer teste de hipóteses com este procedimento temos que:

1. Obter B reamostras bootstrap de tamanho n . x_1^*, \dots, x_n^* .
2. Calcular a estatística de teste t_b^* para $b = 1, \dots, B$.

3. Obter M reamostras bootstrap de tamanho n $x_1^{**}, \dots, x_n^{**}$ para cada uma das B reamostras obtidas no passo 1.
4. Calcular a estatística de teste t_{bm}^{**} , $m = 1, \dots, M$.
5. Calcular para cada uma das B reamostras um p-valor auxiliar.

$$p_b^* = \frac{1 + \#\{|t_{bm}^{**}| \geq |t_b^*|\}}{M + 1}; b = 1, \dots, B. \quad (3.1.12)$$

6. Calcular o p-valor bootstrap duplo:

$$p_{boot2} = \frac{1 + \#\{p_b^* \geq p\}}{B + 1}. \quad (3.1.13)$$

Assim testes de hipóteses podem ser feitos utilizando o p-valor bootstrap duplo (ou p-valor ajustado), sendo o procedimento semelhante aos apresentados linhas acima. Uma vantagem deste método é que o valor p obtido geralmente é mais próximo do que o valor p obtido com o método bootstrap comum, mas uma desvantagem desta metodologia é que serão obtidas em total BM reamostras o que implica em um maior custo computacional.

3.2 Bootstrap em séries temporais

A utilização dos procedimentos bootstrap vistos anteriormente torna-se inadequada quando a estrutura dos dados é dependente (como no caso das séries temporais), pois a reamostragem modifica qualquer dependência que possa existir. Vários procedimentos bootstrap para dados dependentes tem sido propostos na literatura. Segundo MacKinnon (2006), os métodos mais populares são sieve bootstrap e bootstrap por blocos, os quais são apresentados aqui junto com um método bastante intuitivo que consiste em fazer reamostragem dos resíduos do modelo ajustado.

3.2.1 Modelos baseados na reamostragem

Uma das abordagens mais simples para fazer bootstrap em séries temporais é análoga à reamostragem em regressão. A ideia é ajustar um modelo adequado aos dados, obter os resíduos para o modelo ajustado, e gerar as novas séries pela incorporação das amostras aleatórias dos resíduos no modelo ajustado. Esses resíduos são centrados para ter a mesma média para as inovações do modelo. Para exemplificar o procedimento considere que a série temporal observada y_1, y_2, \dots, y_n é modelada por um AR(1),

$$y_i = \alpha y_{i-1} + \epsilon_i. \quad (3.2.1)$$

onde $\epsilon_i \sim IID(0, \sigma^2)$ Após estimar o parâmetro α , os resíduos são obtidos através de:

$$\varepsilon_i = y_i - \hat{\alpha} y_{i-1}, i = 2, \dots, n. \quad (3.2.2)$$

ε_1 não pode ser calculado pois y_0 é desconhecido. Para obter os resíduos bootstrap $\varepsilon_0^*, \dots, \varepsilon_n^*$ vamos considerar os resíduos centrados $\varepsilon_2 - \bar{\varepsilon}, \dots, \varepsilon_n - \bar{\varepsilon}$ e fazer uma reamostragem com reposição atribuindo a cada resíduo centrado a mesma probabilidade de seleção. Deste modo, é possível construir recursivamente a nova série (chamada às vezes de série bootstrap) a partir dos resíduos bootstrap da seguinte forma: $y_0^* = \varepsilon_0^*$ e

$$y_i^* = \hat{\alpha} y_{i-1}^* + \varepsilon_i^*, i = 1, \dots, n. \quad (3.2.3)$$

Assim, modelos baseados na reamostragem para séries temporais obtêm as novas séries partindo dos resíduos reamostrados. Esse procedimento é simples de aplicar, e tem um bom comportamento teórico para estimativas baseadas nos dados quando o modelo for

correto. Por exemplo, intervalos de confiança bootstrap-t para os coeficientes no modelo AR(p) tem boas propriedades assintóticas desde que o modelo ajustado seja escolhido corretamente (Davison e Hinkley, 1997).

Uma desvantagem deste método é que precisamos conhecer os parâmetros e a estrutura do modelo e isto nem sempre é fácil de conhecer. Se for escolhida uma estrutura incorreta, a série reamostrada terá uma estrutura diferente à imposta na série original, e terá propriedades estatísticas diferentes. Outra desvantagem é que as séries geradas pelo procedimento descrito são não estacionárias, mas isto pode ser removido tomando-se um período de "burn-in" de k observações que não serão consideradas na reamostragem, onde k é escolhido de modo que a estacionariedade seja atingida (Chernick, 2008, p. 103).

3.2.2 Reamostragem por blocos

Outra abordagem para fazer reamostragem em séries temporais foi introduzida por Carlstein (1986, *apud*, Chernick, 2008, p. 103) e desenvolvida por Künsch (1989, *apud*, Chernick, 2008, p. 103). Esta abordagem consiste em reamostrar blocos de observações consecutivas. Desde que o método foi introduzido muitas variantes do método tem sido desenvolvidas. A versão mais simples desta ideia consiste em dividir a série temporal em b blocos não superpostos de tamanho l . Sejam os blocos $z_1 = (y_1, \dots, y_l)$, $z_2 = (y_{l+1}, \dots, y_{2l})$, ..., $z_b = (y_{n-l+1}, \dots, y_n)$. O procedimento aqui é reamostrar os blocos por bootstrap, onde cada bloco tem probabilidade de seleção $1/b$ e em cada reamostra são reamostrados b blocos. Um exemplo clássico para mostrar como funciona este procedimento é considerar uma série de observações y_1, \dots, y_{12} , consideramos $l = 4$ e $b = 3$ assim: $z_1 = (y_1, y_2, y_3, y_4)$, $z_2 = (y_5, y_6, y_7, y_8)$, $z_3 = (y_9, y_{10}, y_{11}, y_{12})$. Seja a nova série obtida pela reamostragem

bootstrap por blocos:

$$\{Y^*\} = z_1^*, z_2^*, z_3^* = z_2, z_1, z_2 = y_5, y_6, y_7, y_8, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8. \quad (3.2.4)$$

A ideia do bootstrap por blocos é que se os blocos forem suficientemente amplos, a dependência original será preservada na série bootstrap, e a estatística calculada t^* terá aproximadamente a mesma distribuição da estatística t calculada das replicações da série original.

Existem várias variantes de reamostragem por blocos. Uma delas é permitir que os blocos se sobreponham, como foi proposto por Künsch (1989, *apud*, Chernick, 2008, p. 104). Neste caso, o número de blocos será $n - l + 1$ e os blocos serão da forma: $z_1 = (y_1, \dots, y_4)$, $z_2 = (y_2, \dots, y_5)$, ..., $z_9 = (y_9, \dots, y_{12})$. Dessa forma, as primeiras e últimas $l - 1$ observações aparecem em menos blocos, mas esses efeitos podem ser removidos adicionando blocos, em nosso exemplo $z_{10} = (y_{10}, y_{11}, y_{12}, y_1)$, $z_{11} = (y_{11}, y_{12}, y_1, y_2)$, $z_{12} = (y_{12}, y_1, y_2, y_3)$. Deste modo, cada observação tem a mesma probabilidade de aparecer na série bootstrap, e a correção final remove também o problema do esquema de blocos não sobrepostos (que o último bloco seja mais curto do que o resto, quando n/l não for inteiro).

Uma discussão do método original e das suas variantes, com comparações dos mesmos são discutidas por Lahiri (2000, Cap. 2). Entre elas, temos: blocos móveis bootstrap (MBB) formulado independentemente por Künsch (1989), e, Liu e Singh (1992), blocos bootstrap não sobrepostos (NBB) de Carlstein (1986), blocos bootstrap circulares (CBB) proposto por Politis e Romano (1992) e blocos bootstrap para dados estacionários (SBB) proposto por Politis e Romano (1994).

3.2.3 Sieve bootstrap

Outra abordagem bootstrap para séries temporais é a desenvolvida por Buhlmann (1997), chamada de *sieve bootstrap*.

Seja P uma distribuição de probabilidade conjunta desconhecida de uma sequência infinita de uma série temporal $\{Y_1, Y_2, \dots, Y_n, \dots\}$. A ideia do sieve bootstrap é escolher uma sequência de distribuições $\{P_n, n > 0\}$ que se aproxima a P . Esta sequência é tal que para cada n , P_{n+1} é mais próximo de P do que P_n e esta sequência converge a P quando $n \rightarrow \infty$. P_n é escolhido segundo algum critério de seleção do modelo como, por exemplo, o critério AIC de Akaike.

O algoritmo do sieve bootstrap é apresentado a seguir, (Smeekes, 2009, P. 9):

- Passo 1: Estimar o modelo autoregressivo de ordem p :

$$y_t = \sum_{j=1}^p \hat{\phi}_j y_{t-j} + \hat{\varepsilon}_t. \quad (3.2.5)$$

- Passo 2: Obter os resíduos bootstrap ε_t^* , onde $\varepsilon_1^*, \dots, \varepsilon_n^*$ são reamostrados de:

$$\varepsilon_t = \hat{\varepsilon}_t - \frac{\sum_{t=p+1}^n \hat{\varepsilon}_t}{n-p} \quad (3.2.6)$$

$$t = p+1, \dots, n.$$

- Passo 3: Construir

$$y_t^* = \sum_{j=1}^p \hat{\phi}_j y_{t-j}^* + \varepsilon_t^*. \quad (3.2.7)$$

- Passo 4: Calcular a estatística desejada $T_n^* = T_n(y_1^*, \dots, y_n^*)$.

No *sieve bootstrap* se deve assumir que o processo de geração dos dados pode ser descrito como um processo linear invertível. Para um processo AR de ordem finita, este modelo é equivalente ao modelo baseado no reamostragem (Smeeke, 2009)

Esta técnica vem sendo muito utilizada em séries temporais. Maiores detalhes podem ser encontrados em Buhlmann (1997); Zagdanski (1999) e Alonso *et al.* (2003).

Para um modelo AR de ordem finita este procedimento bootstrap é equivalente ao procedimento baseado na reamostragem descrito na seção 3.2.1. Para os modelos ARMA deve-se assumir que o processo é invertível.

Capítulo 4

Intervalos de Previsão para Modelos da Família GARCH

Seja uma série temporal y_1, y_2, \dots, y_N , o problema básico é estimar os valores futuros y_{N+h} . A estimativa de y_{N+h} é chamada de previsão de valores futuros, e é de importante interesse em muitas áreas de conhecimento como a economia, planejamento da produção, previsão de vendas, etc., fazendo com que a previsão de valores futuros seja um dos principais objetivos na análise de séries temporais. Embora seja mais importante a previsão por intervalo (Pascual *et al.*, 2005), geralmente estas previsões são dadas como estimativas pontuais. Apesar disso, observa-se na literatura que os autores de livros didáticos sobre a análise de séries temporais e previsão geralmente dedicam pouca importância à previsão por intervalos e dão pouca orientação sobre como calculá-los (Chatfield, 2003, p. 479).

No caso das séries temporais, a previsão por intervalos ou intervalos de previsão pode ser entendida como uma estimativa de um intervalo, baseado na série observada, no qual estará contido, com uma determinada probabilidade associada, o verdadeiro valor futuro de y_{N+h} $h = 1, 2, \dots$, onde os valores no extremo desses intervalos são chamados de limites de previsão (Wei, 2006, p. 93).

Em geral, os intervalos de previsão são calculados sob a suposição de que o modelo seja conhecido, quer dizer, que as estimativas do modelo não contém erros. Neste caso, e supondo uma série suficientemente longa, nos modelos lineares de séries temporais com perturbações normais, as distribuições preditivas são também normais e os intervalos de previsão podem ser facilmente obtidos com a média mais ou menos um múltiplo do desvio padrão. Intervalos de previsão construídos desta forma também têm sido utilizados para alguns modelos não lineares, tais como os modelos autoregressivos com limiar, TAR (Threshold autoregressive models). No entanto, este método não é apropriado quando a distribuição preditiva não é normal, o que infelizmente, acontece nas séries temporais não lineares (Fan e Yao, 2005, p. 470). Yang e Tong (1995, 1996) propõem a construção de intervalos de previsão utilizando percentis condicionais, embora intervalos de previsão assim construídos não sejam apropriados quando a distribuição preditiva é assimétrica e/ou multimodal. Fan e Yao (2005, p. 470) mencionam que distribuições preditivas assimétricas podem ocorrer em vários passos à frente, mesmo que os erros no modelo tenham distribuição simétrica.

Um dos métodos mais frequentemente utilizados para obter intervalos de previsão é o método assintótico. Um intervalo de previsão (assintótico) para y_{N+h} é dado por

$$y_N(h) \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{Var(y_N(h))}, \quad (4.0.1)$$

onde $y_N(h)$ é a previsão pontual, $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ é o percentil $\frac{\alpha}{2}$ da distribuição normal padrão e $Var(y_N(h))$ é a variância da previsão pontual. Porém, a presença de distribuição com caudas mais pesadas do que a distribuição normal e de assimetria, e o fato de que os

rendimentos negativos parecem ter mais impacto nas volatilidades futuras do que os positivos, são características das séries de retornos que tem sido reconhecidas pela literatura empírica faz tempo. Na presença destes fatos o intervalo anterior é incorreto. Isto tem feito que nos últimos anos procedimentos alternativos para a construção de intervalos de previsão estejam sendo desenvolvidos.

Um dos métodos que atualmente vem sendo pesquisado para obter intervalos de previsão em diversos modelos de séries temporais é o bootstrap não paramétrico, método este que não faz suposições sobre a distribuição dos erros no modelo. Os intervalos de previsão aqui obtidos são baseados no intervalo percentílico de Efron e Tibshirani (1993). Diversos trabalhos sobre intervalos de previsão utilizando bootstrap em séries temporais tem sido feitos. Entre eles temos: Alonso *et al.* (2003) que consideram o sieve bootstrap para a construção de intervalos de previsão para uma classe geral de modelos lineares, e mostram que o sieve bootstrap fornece estimadores consistentes da distribuição condicional dos valores futuros dada a série observada; Pascual *et al.* (2004) propõem um procedimento bootstrap para construir intervalos de previsão para modelos ARMA; Lana (2012) tem trabalhado com intervalos de previsão bootstrap em modelos ARFIMA, concluindo que os intervalos bootstrap apresentaram resultados significativamente melhores que os do intervalo Box-Jenkins mesmo com erros normais, e que no caso de erros assimétricos, a diferença de desempenho foi ainda maior. No campo de séries temporais financeiras temos os trabalhos de Miguel e Olave (1999) propondo um procedimento bootstrap para obter intervalos de previsão dos valores futuros em processos ARCH. Esta proposta mantém fixos os parâmetros estimados durante todo o processo bootstrap (não incorpora incerteza na estimação dos parâmetros) e tem seu foco na obtenção de intervalos de previsão dos

retornos. Pascual *et al.* (2006) desenvolvem um novo procedimento para obter intervalos de previsão para os retornos e volatilidades em modelos GARCH, onde diferentemente do procedimento desenvolvido por Miguel e Olave (1999) são incorporados incerteza nas estimativas dos parâmetros, sendo que em cada replicação bootstrap novas estimativas dos parâmetros são calculadas. Chen *et al.* (2011) desenvolvem um método para obter intervalos de previsão em modelos ARCH e GARCH, onde utilizam a representação linear dos modelos ARCH e GARCH e fazem uma adaptação do sieve bootstrap. Eles mostram que esta proposta fornece bons resultados para os intervalos de previsão dos retornos e das volatilidades.

4.1 Algoritmo PRR para intervalos de previsão

O algoritmo PRR proposto por Pascual, Romo e Ruiz (2006), é uma extensão do procedimento apresentado por Pascual *et al.* (2004) para modelos ARIMA. Este algoritmo incorpora uma componente de incerteza devido à estimação dos parâmetros para obter os intervalos de previsão resultantes para os retornos e volatilidades dos modelos GARCH.

4.1.1 Algoritmo PRR

Seja R_T uma sequência de T observações geradas pelo processo GARCH(1,1). O objetivo é estimar diretamente as distribuições de $r_T(h)$ e $\sigma_T(h)$ condicionadas aos dados. Assim o algoritmo PRR consiste em :

- Passo 1: Obter as estimativas dos parâmetros do processo GARCH(1,1) $\theta = (\omega, \alpha, \beta)$ dadas por: $\hat{\theta} = (\hat{\omega}, \hat{\alpha}, \hat{\beta})$ e calcular os resíduos centrados $\hat{\varepsilon}_t - \bar{\hat{\varepsilon}}$, onde: $\hat{\varepsilon}_t = \frac{r_t}{\hat{\sigma}_t}$ para

$t = 1, \dots, T$, $\hat{\sigma}_t^2 = \hat{\omega} + \hat{\alpha}r_{t-1}^2 + \hat{\beta}\hat{\sigma}_{t-1}^2$ para $t = 2, \dots, T$ e $\hat{\sigma}_1^2 = \frac{\hat{\omega}}{1-\hat{\alpha}-\hat{\beta}}$, onde $\hat{\sigma}_1^2$ é a estimativa da variância não condicional. Denote por \hat{F}_T a distribuição empírica dos resíduos centrados.

- Passo 2: Gerar a série bootstrap r_t^* , $t = 1, \dots, T$ utilizando a recursão:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_t^{*2} &= \hat{\omega} + \hat{\alpha}r_{t-1}^{*2} + \hat{\beta}\hat{\sigma}_{t-1}^{*2} \\ r_t^* &= \varepsilon_t^* \hat{\sigma}_t^*,\end{aligned}\tag{4.1.1}$$

onde ε_t^* é amostrado com reposição de \hat{F}_T e $\hat{\sigma}_1^{*2} = \hat{\sigma}_1^2 = \frac{\hat{\omega}}{1-\hat{\alpha}-\hat{\beta}}$. Finalmente ajustar a série bootstrap r_T^* e obter as estimativas bootstrap dos parâmetros $\hat{\theta}^* = (\hat{\omega}^*, \hat{\alpha}^*, \hat{\beta}^*)$

- Passo 3: Calcular as previsões dos retornos e das volatilidades h passos à frente, $h = 1, 2, \dots$, utilizando a recursão:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_T^{*2}(h) &= \hat{\omega}^* + \hat{\alpha}^*r_T^{*2}(h-1) + \hat{\beta}^*\hat{\sigma}_T^{*2}(h-1) \\ r_T^*(h) &= \varepsilon_T^*(h)\hat{\sigma}_T^*(h),\end{aligned}\tag{4.1.2}$$

onde $\varepsilon_T^*(h)$ é amostrado com reposição de \hat{F}_T , $r_T^* = r_T$ e

$$\hat{\sigma}_T^{*2} = \frac{\hat{\omega}^*}{1-\hat{\alpha}^*-\hat{\beta}^*} + \hat{\alpha}^* \sum_{j=0}^{T-2} \hat{\beta}^{*j} (r_{T-j-1}^2 - \frac{\hat{\omega}^*}{1-\hat{\alpha}^*-\hat{\beta}^*}).$$

Note-se que a representação alternativa da variância condicional $\hat{\sigma}_T^{*2}$ apresentada por Pascual *et al.* (2006) é diferente para toda réplica bootstrap pois este valor é obtido utilizando os respectivos parâmetros estimados bootstrap $\hat{\theta}^* = (\hat{\omega}^*, \hat{\alpha}^*, \hat{\beta}^*)$ e a série original dos retornos. $\hat{\sigma}_T^{*2}$ incorpora a variabilidade devido à estimação dos parâmetros.

- Passo 4: Repetir os passos 2 e 3, B vezes e assim obter B réplicas bootstrap $(r_T^{*(1)}(h), \dots, r_T^{*(B)}(h))$ e $(\sigma_T^{*(1)}(h), \dots, \sigma_T^{*(B)}(h))$ para $r_T(h)$ e $\sigma_T(h)$ respectivamente. Os limites de previsão para $r_T(h)$ são definidos como os quantis bootstrap de $r_T^*(h)$. Mais especificamente, se $G_r^*(h) = P(r_T^*(h) \leq h)$ é a função distribuição de $r_T^*(h)$, e é estimada por $G_{r,B}^*(h) = \frac{\#(r_T^{*b}(h) \leq h)}{B}$, então um intervalo de previsão 100(1 - γ)% para $r_T^*(h)$ está dado por

$$[Q_{r,B}^*(\frac{\gamma}{2}), Q_{r,B}^*(1 - \frac{\gamma}{2})],$$

onde $Q_{r,B}^* = G_{r,B}^{*-1}$.

Da mesma forma, um intervalo de previsão 100(1 - γ)% para $\sigma_T^*(h)$ está dado por:

$$[Q_{\sigma,B}^*(\frac{\gamma}{2}), Q_{\sigma,B}^*(1 - \frac{\gamma}{2})],$$

onde $Q_{\sigma,B}^* = G_{\sigma,B}^{*-1}$.

O procedimento descrito acima é considerando um processo GARCH(1,1), mas é facilmente generalizado para um processo GARCH(p,q).

A diferença entre as propostas de Pascual *et al.* (2006) e de Miguel e Olave (1999) é que o primeiro incorpora nos intervalos de previsão a incerteza devido à estimação dos parâmetros do modelo. Miguel e Olave (1999) consideram fixos os parâmetros estimados em todas as previsões bootstrap de $r_T^*(h)$ e $\hat{\sigma}_T^*(h)$ para $h = 1, \dots$, assim as previsões bootstrap dependem somente dos resíduos reamostrados, e são feitos pela recursão:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_T^{*2}(h) &= \hat{\omega} + \hat{\alpha} r_T^{*2}(h-1) + \hat{\beta} \hat{\sigma}_T^{*2}(h-1) \\ r_T(h) &= \hat{\sigma}_T^*(h) \varepsilon_T^*(h), \end{aligned} \tag{4.1.3}$$

onde $r_T^* = r_T$ e $\hat{\sigma}_T^{*2} = \hat{\sigma}_T^2$. Note que nesta proposta os intervalos de previsão não incorporam a incerteza devido à estimação dos parâmetros, e, nos modelos GARCH a variância $h = 1$ passo à frente está completamente determinada e dada por: $\hat{\sigma}_T^{*2}(1) = \hat{\omega} + \hat{\alpha}r_T^2 + \hat{\beta}\hat{\sigma}_T^2$ que é também considerada fixa em todas as replicações bootstrap. Assim, com esta proposta, não é possível estimar a distribuição da volatilidade para $h = 1$ passo à frente. O método proposto foi analisado através de simulações por Pascual *et al.* (2006) para um modelo $GARCH(1, 1)$ com $\omega = 0.05$, $\alpha = 0.1$ e $\beta = 0.85$ com erros Normais, t_5 e inovações exponenciais centradas para ter média zero. Eles compararam a cobertura obtida com os intervalos de previsão do método proposto, com a aproximação normal e com o intervalo de previsão condicionado bootstrap (CB) proposto por Miguel e Olave (1999), concluindo que o desempenho do método proposto para construir intervalos de previsão para os retornos nunca é pior do que com o método padrão (utilizando a aproximação normal), e que, comparado com o método CB, as diferenças observadas são pequenas. Eles concluíram também que quando a distribuição for simétrica, introduzir incerteza devido à estimação dos parâmetros não é relevante. No caso dos intervalos de previsão para as volatilidades são comparados o algoritmo PRR e o CB, e é observado que os intervalos de previsão obtidos com CB tem uma cobertura bem abaixo da cobertura nominal proposta e que o algoritmo PRR tem bons resultados. No dois casos, o aumento do tamanho da série melhora o desempenho de ambos algoritmos, embora os resultados utilizando o algoritmo CB continuam estando bem abaixo da cobertura nominal.

4.2 Adaptações do algoritmo PRR para intervalos de previsão

Baseados no algoritmo PRR para modelos GARCH, apresentaremos adaptações deste algoritmo para dois modelos: modelos EGARCH e GJR-GARCH, ambos com efeito de alavancagem. Estas adaptações mantêm a ideia do algoritmo PRR para modelos GARCH, incorporando a incerteza devido à estimação dos parâmetros, que é feita em cada replicação bootstrap.

4.2.1 Algoritmo PRR para intervalos de previsão em modelos GJR-GARCH

Seja R_T uma sequência de T observações geradas pelo processo GJR-GARCH(1,1). Os passos para obter os intervalos de previsão neste tipo de modelos são similares à ideia original do algoritmo PRR para modelos GARCH. O algoritmo aqui é descrito para o processo GJR-GARCH(1,1) mas, é facilmente generalizado para um processo GJR-GARCH(p,q).

- Passo 1: Obter as estimativas dos parâmetros do processo GJR-GARCH(1,1) $\theta = (\omega, \alpha, \beta, \gamma)$ dadas por: $\hat{\theta} = (\hat{\omega}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma})$ e calcular os resíduos centrados $\hat{\varepsilon}_t - \bar{\hat{\varepsilon}}$, onde: $\hat{\varepsilon}_t = \frac{r_t}{\hat{\sigma}_t}$ para $t = 1, \dots, T$, $\hat{\sigma}_t^2 = \hat{\omega} + \hat{\alpha}r_{t-1}^2 + \hat{\beta}\hat{\sigma}_{t-1}^2 + \hat{\gamma}r_{t-1}^2I(r_{t-1} < 0)$ para $t = 2, \dots, T$ e $\hat{\sigma}_1^2 = \frac{\hat{\omega}}{1 - \hat{\alpha} - \hat{\beta} - \hat{\gamma}Prob(r_t < 0)}$, onde $\hat{\sigma}_1^2$ é a estimativa da variância não condicional. Denote por \hat{F}_T a distribuição empírica dos resíduos centrados.
- Passo 2: Gerar a série bootstrap r_t^* , $t = 1, \dots, T$ utilizando a recursão:

$$\hat{\sigma}_t^{*2} = \hat{\omega} + \hat{\alpha}r_{t-1}^{*2} + \hat{\beta}\hat{\sigma}_{t-1}^{*2} + \hat{\gamma}r_{t-1}^{*2}I(r_{t-1}^* < 0) \quad (4.2.1)$$

$$r_t^* = \varepsilon_t^* \hat{\sigma}_t^*,$$

onde ε_t^* é amostrado com reposição de \hat{F}_T e $\hat{\sigma}_1^{*2} = \hat{\sigma}_1^2 = \frac{\hat{\omega}}{1 - \hat{\alpha} - \hat{\beta} - \hat{\gamma}Prob(r_t < 0)}$. Finalmente ajustar a série bootstrap r_T^* e obter as estimativas bootstrap dos parâmetros $\hat{\theta}^* = (\hat{\omega}^*, \hat{\alpha}^*, \hat{\beta}^*, \hat{\gamma}^*)$.

- Passo 3: Calcular as previsões dos retornos e das volatilidades h passos à frente, $h = 1, 2, \dots$ utilizando a recursão:

$$\hat{\sigma}_T^{*2}(h) = \hat{\omega}^* + \hat{\alpha}^*r_T^{*2}(h-1) + \hat{\beta}^*\hat{\sigma}_T^{*2}(h-1) + \hat{\gamma}^*r_T^{*2}(h-1)I(r_T^*(h-1) < 0) \quad (4.2.2)$$

$$r_T^*(h) = \varepsilon_T^*(h)\hat{\sigma}_T^*(h),$$

onde $\varepsilon_T^*(h)$ é amostrado com reposição de \hat{F}_T , $r_T^* = r_T$ e

$$\begin{aligned} \sigma_T^{*2} = & \frac{\omega^*}{1 - \alpha^* - \beta^* - \gamma^*P} - (\alpha^* + \gamma^*P) \frac{\omega^*}{1 - \alpha^* - \beta^* - \gamma^*P} \sum_{i=0}^{T-2} \beta^{*i} \\ & + \alpha^* \sum_{i=0}^{T-2} \beta^{*i} r_{T-i-1}^2 + \gamma^* \sum_{i=0}^{T-2} \beta^{*i} r_{T-i-1}^2 I(r_{T-i-1} < 0), \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

onde $P = Prob(r_t < 0)$. A fórmula expressada acima parte da forma alternativa de expressar a volatilidade condicional; para maiores detalhes ver o apêndice A. Note que $\hat{\sigma}_T^{*2}$, assim como no PRR para modelos GARCH, é diferente para toda réplica bootstrap pois este valor é obtido utilizando os respectivos parâmetros estimados bootstrap $\hat{\theta}^* = (\hat{\omega}^*, \hat{\alpha}^*, \hat{\beta}^*, \hat{\gamma}^*)$ e os retornos originais da série.

- Passo 4: Análogo ao passo 4 do algoritmo PRR para modelos GARCH.

4.2.2 Algoritmo PRR para intervalos de previsão em modelos EGARCH

Seja R_T uma sequência de T observações geradas pelo processo EGARCH(1,1). O algoritmo neste tipo de modelos é similar aos casos anteriores e consiste em ajustar a série, obter os resíduos bootstrap da série, reconstruir a série (que é chamada de série *bootstrap*), obter as novas estimativas bootstrap dos parâmetros da nova série, e finalmente obter as estimativas dos valores futuros. O algoritmo aqui é descrito para o processo EGARCH(1,1) mas, é facilmente generalizado para um processo EGARCH(p,q).

- Passo 1: Obter as estimativas dos parâmetros do processo EGARCH(1,1) $\theta = (\omega, \alpha, \beta, \gamma)$ dadas por: $\hat{\theta} = (\hat{\omega}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma})$ e calcular os resíduos centrados $\hat{\varepsilon}_t - \bar{\hat{\varepsilon}}$, onde: $\hat{\varepsilon}_t = \frac{r_t}{\hat{\sigma}_t}$ para $t = 1, \dots, T$, $\log(\hat{\sigma}_t^2) = \hat{\omega} + \hat{\alpha}\hat{\varepsilon}_t + \hat{\gamma}[|\hat{\varepsilon}_{t-1}| - E(|\varepsilon_{t-1}|)] + \hat{\beta}\log(\sigma_{t-1}^2)$ para $t = 2, \dots, T$ e $\hat{\sigma}_1^2 = \exp(\frac{\hat{\omega}}{1-\hat{\beta}})$, onde $\hat{\sigma}_1^2$ é a estimativa da variância não condicional. Denote por \hat{F}_T a distribuição empírica dos resíduos centrados.

- Passo 2: Gerar a série bootstrap r_t^* , $t = 1, \dots, T$ utilizando a recursão:

$$\begin{aligned} \log(\hat{\sigma}_t^{*2}) &= \hat{\omega} + \hat{\alpha}\varepsilon_t^* + \hat{\gamma}[|\varepsilon_{t-1}^*| - E(|\varepsilon_{t-1}^*|)] + \hat{\beta}\log(\sigma_{t-1}^{*2}) \\ r_t^* &= \varepsilon_t^* \hat{\sigma}_t^*, \end{aligned} \tag{4.2.4}$$

onde ε_t^* é amostrado com reposição de \hat{F}_T e $\hat{\sigma}_1^{*2} = \hat{\sigma}_1^2 = \exp(\frac{\hat{\omega}}{1-\hat{\beta}})$. Finalmente, ajustar a série bootstrap r_T^* e obter as estimativas bootstrap dos parâmetros $\hat{\theta}^* = (\hat{\omega}^*, \hat{\alpha}^*, \hat{\beta}^*, \hat{\gamma}^*)$.

- Passo 3: Calcular as previsões dos retornos e das volatilidades h passos à frente, $h = 1, 2, \dots$ utilizando a recursão:

$$\begin{aligned}
\log(\hat{\sigma}_T^{*2}(h)) &= \hat{\omega}^* + \hat{\alpha}^* \varepsilon_T^*(h) + \hat{\gamma}^* [|\varepsilon_T^*(h-1)| - E(|\varepsilon_T^*(h-1)|)] + \hat{\beta}^* \log(\sigma_T^{*2}(h-1)) \\
r_T^*(h) &= \varepsilon_T^*(h) \hat{\sigma}_T^*(h),
\end{aligned} \tag{4.2.5}$$

onde $\varepsilon_T^*(h)$ é amostrado com reposição de \hat{F}_T , $\varepsilon_T^* = \frac{r_T^*}{\sigma_T^*}$, $r_T^* = r_T$ e

$$\log(\hat{\sigma}_T^{*2}) = \frac{\omega^*}{1 - \beta^*} + \alpha^* \sum_{i=0}^{T-2} \beta^{*j} \varepsilon_{T-1-j} + \gamma \sum_{i=0}^{T-2} \beta^{*j} |\varepsilon_{T-1-j}| - \gamma E(|\varepsilon_T|) \sum_{i=0}^{T-2} \beta^{*j} \tag{4.2.6}$$

A fórmula expressada acima parte da forma alternativa de expressar o logaritmo da volatilidade condicional; para maiores detalhes ver o apêndice B.

- Passo 4: Análogo ao passo 4 do algoritmo PRR para modelos GARCH.

Capítulo 5

Simulação

Neste capítulo é avaliado o desempenho do algoritmo PRR nos modelos GARCH (quando temos alta persistência) e o desempenho das adaptações do algoritmo PRR para os modelos com efeito de alavancagem EGARCH e GJR-GARCH. Em todos os casos quando a distribuição das inovações tem distribuição normal com média 0 e variância 1. O comportamento dos algoritmos para obter intervalos de previsão dos retornos e volatilidades é analisado através de experimentos Monte Carlo. O tamanho das séries consideradas é de $T = 1000$ observações e os correspondentes intervalos são construídos com probabilidade de cobertura nominal $1 - \gamma$ igual a 0.90, 0.95 e 0.99. Em cada replicação são obtidos os intervalos de previsão bootstrap para $r_T(h)$ e $\sigma_T(h)$, h passos à frente, $h = 1, 2, 3, 4, 5$. Estes intervalos são denotados por $(L_{r_T(h)}^*, U_{r_T(h)}^*)$ e $(L_{\sigma_T(h)}^*, U_{\sigma_T(h)}^*)$. Para cada série gerada são gerados $R = 1000$ possíveis valores futuros de r_{T+h} e σ_{T+h} , assim as probabilidade de cobertura são estimadas por:

$$1 - \widehat{\gamma_{y_T(h)}}^* = \frac{\#\{L_{y_T(h)}^* \leq y_{T+h}^r \leq U_{y_T(h)}^*\}}{R} \quad (5.0.1)$$

onde y_{T+h}^r ($r = 1, \dots, R$) representa os retornos ou as volatilidades, segundo seja o caso. Ou seja, para obter a probabilidade de cobertura estimada se contabiliza quantos dos R

valores gerados estão dentro dos intervalos bootstrap calculados. De forma semelhante, são calculadas as falhas de cobertura estimadas à direita e à esquerda das caudas da distribuição. Para obter a largura de um intervalo é simplesmente calculada a diferença entre limite superior e o limite inferior.

O procedimento anterior é realizado $MC = 1000$ vezes e é calculada a média das probabilidades de cobertura, das falhas de cobertura à direita e à esquerda, e das larguras dos intervalos estimados. Em cada uma das $MC = 1000$ replicações de Monte Carlo são consideradas $B = 1000$ replicações bootstrap para obter os intervalos de previsão para $h = 1, 2, 3, 4, 5$ passos à frente.

Em todos os modelos considerados as condições de estacionariedade foram satisfeitas. Para garantir que nas séries bootstrap utilizadas sejam satisfeitas as condições de estacionariedade, e assim evitar problemas de convergência nos métodos de estimação, as séries bootstrap nas quais as estimativas não satisfaziam a condição de estacionariedade foram substituídas por novas séries bootstrap, onde esta condição era satisfeita.

Com o número de replicações Monte Carlo $MC = 1000$, número de replicações *bootstrap* por cada replicação Monte Carlo $B = 1000$, número de possíveis valores de r_{T+h} e σ_{T+h} por série para cada um dos $h = 5$ passos à frente de $R = 1000$, e considerando um tamanho de série $T = 1000$ foram gastos para fazer o estudo de simulações (utilizando um computador com processador Core i5 CPU 2.40 GHz 3 GB de RAM) em média 144 horas (6 dias) nos modelos GARCH e GJR-GARCH, e, 72 horas (3 dias) no modelo EGARCH.

O processo da simulação utilizado é o mesmo utilizado por Pascual *et al.* (2006) e é resumido no seguinte algoritmo.

- Passo 1: Gerar a série e obter $R = 1000$ valores r_{T+h} e σ_{T+h} , $h = 1, \dots, 5$.
- Passo 2: Calcular $B = 1000$ previsões bootstrap para os valores futuros $r_T^{*b}(h)$ e $\sigma_T^{*b}(h)$, $b = 1, \dots, B$, e construir os intervalos de previsão bootstrap $100(1 - \gamma)\%$ $(L_{r_T(h)}^*, U_{r_T(h)}^*)$ e $(L_{\sigma_T(h)}^*, U_{\sigma_T(h)}^*)$
- Passo 3: Estimar a cobertura dos intervalos de previsão dos retornos e das volatilidades

$$C_{r_T(h)}^{*M} = \frac{\#\{L_{r_T(h)}^* \leq r_{T+h}^r \leq U_{r_T(h)}^*\}}{R} \quad (5.0.2)$$

e

$$C_{\sigma_T(h)}^{*M} = \frac{\#\{L_{\sigma_T(h)}^* \leq \sigma_{T+h}^r \leq U_{\sigma_T(h)}^*\}}{R} \quad (5.0.3)$$

para $h = 1, \dots, 5$, e, $r = 1, \dots, R$.

- Passo 4: Repetir os passos 1-3, $MC = 1000$ vezes e calcular a média e o desvio padrão da cobertura dos retornos:

$$\overline{C_{r_T(h)}^{*M}} = \sum_{M=1}^{MC} \frac{C_{r_T(h)}^{*M}}{MC} \quad (5.0.4)$$

e

$$D.P(C_{r_T(h)}^{*M}) = \left\{ \sum_{M=1}^{MC} \frac{(C_{r_T(h)}^{*M} - \overline{C_{r_T(h)}^{*M}})^2}{MC} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (5.0.5)$$

de forma semelhante para as volatilidades temos:

$$\overline{C_{\sigma_T(h)}^{*M}} = \sum_{M=1}^{MC} \frac{C_{\sigma_T(h)}^{*M}}{MC} \quad (5.0.6)$$

e

$$D.P(C_{\sigma_T(h)}^{*M}) = \left\{ \sum_{M=1}^{MC} \frac{(C_{\sigma_T(h)}^{*M} - \overline{C_{\sigma_T(h)}^{*M}})^2}{MC} \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (5.0.7)$$

De forma semelhante são calculadas as falhas de cobertura à direita e à esquerda das caudas da distribuição e as larguras médias dos intervalos.

Todos os programas foram implementados no *R 2.14.1*¹ e são apresentados no final desta dissertação. Para as estimações dos parâmetros das séries geradas e das séries bootstrap no modelo EGARCH foi utilizado o pacote *egarch*² e para as estimações nos modelos GARCH e GJR-GARCH foi utilizado o pacote *rugarch*³.

Os modelos utilizados no estudo de simulação com seus respectivos parâmetros são apresentados a seguir.

- Modelo 1: *GARCH*(1, 1)

$$\begin{aligned} r_t &= \sigma_t \varepsilon_t \\ \sigma_t^2 &= 0.05 + 0.1r_{t-1}^2 + 0.85\sigma_{t-1}^2, \end{aligned} \tag{5.0.8}$$

onde $\varepsilon_t \sim N(0, 1)$.

- Modelo 2: *GARCH*(1, 1)

$$\begin{aligned} r_t &= \sigma_t \varepsilon_t \\ \sigma_t^2 &= 0.01 + 0.2r_{t-1}^2 + 0.6\sigma_{t-1}^2, \end{aligned} \tag{5.0.9}$$

onde $\varepsilon_t \sim N(0, 1)$.

- Modelo 3: *GARCH*(1, 1)

$$\begin{aligned} r_t &= \sigma_t \varepsilon_t \\ \sigma_t^2 &= 0.01 + 0.1832r_{t-1}^2 + 0.8118\sigma_{t-1}^2, \end{aligned} \tag{5.0.10}$$

onde $\varepsilon_t \sim N(0, 1)$.

¹R Development Core Team (2011). R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. ISBN 3-900051-07-0, URL <http://www.R-project.org/>.

²Kerstin Konnerth (2010). *egarch*: EGARCH simulation and fitting. R package version 1.0.0. <http://CRAN.R-project.org/package=egarch>

³Alexios Ghalanos (2012). *rugarch*: Univariate GARCH models. R package version 1.0-8.

- Modelo 4: $GARCH(1, 1)$

$$\begin{aligned} r_t &= \sigma_t \varepsilon_t \\ \sigma_t^2 &= 0.01 + 0.08r_{t-1}^2 + 0.915\sigma_{t-1}^2, \end{aligned} \tag{5.0.11}$$

onde $\varepsilon_t \sim N(0, 1)$.

- Modelo 5: $GJR - GARCH(1, 1)$

$$\begin{aligned} r_t &= \sigma_t \varepsilon_t \\ \sigma_t^2 &= 0.01 + 0.05\varepsilon_{t-1}^2 + 0.15\varepsilon_{t-1}^2 I(\varepsilon_{t-1} < 0) + 0.83\sigma_{t-1}^2, \end{aligned} \tag{5.0.12}$$

onde $\varepsilon_t \sim N(0, 1)$.

- Modelo 6: $EGARCH(1, 1)$

$$\begin{aligned} r_t &= \sigma_t \varepsilon_t \\ \log(\sigma_t^2) &= -0.3474 - 0.1420\varepsilon_t + 0.2195(|\varepsilon_{t-1}| - E(|\varepsilon_{t-1}|)) + 0.9496\log(\sigma_{t-1}^2), \end{aligned} \tag{5.0.13}$$

onde $\varepsilon_t \sim N(0, 1)$.

Nos modelos GARCH as persistências são iguais a 0.95 (modelo 1), 0.8 (modelo 2), 0.995 (modelos 3 e 4) e igual a 0.955 e 0.9496 para os modelos GJR-GARCH e EGARCH respectivamente. Foram escolhidas altas persistências, pois esta é uma das características encontradas em séries financeiras. Os parâmetros do modelo GARCH foram escolhidos segundo vários critérios. Para o modelo 1 foram escolhidos os mesmos parâmetros que em Pascual *et al.* (2006). Para o modelo 2 os parâmetros foram escolhidos com a finalidade de avaliar se a influência do parâmetro associado ao retorno influenciava na cobertura dos intervalos obtidos. Finalmente os parâmetros nos modelos 3 e 4 foram escolhidos para avaliar o algoritmo PRR quando temos alta persistência pois, segundo Chen *et al.* (2011), o algoritmo poderia apresentar problemas quando a persistência é próxima de 1.

5.1 Caso GARCH

Nas tabelas 5.1 a 5.6 são apresentados os valores das médias das probabilidades de cobertura estimadas (Cobertura) com seu respectivo desvio padrão (DP), os valores das médias das falhas de cobertura estimadas à esquerda (Inf) e à direita (Sup) das caudas da distribuição, e as médias das larguras dos intervalos estimados (Tam. Intervalo) para os retornos e para as volatilidades do modelo GARCH(1,1) definido em (5.0.8). As tabelas mostram os resultados das simulações para as probabilidades de cobertura nominais de 90%, 95% e 99%.

Os resultados são apresentados para as previsões $h = 1, 2, 3, 4, 5$ passos à frente e são comparados os resultados obtidos com a nossa implementação e a implementação feita na função *ugarchboot* do pacote *rugarch* do *R*. Além destas comparações, para o caso dos retornos são também comparados os intervalos de previsão propostos por Baillie e Bollerslev (1992).⁴

Nas tabelas 5.1, 5.2 e 5.3 podem-se ver os resultados quando a cobertura nominal é 90%, 95% e 99%. Os intervalos de previsão para os retornos apresentam bons resultados nos dois casos, embora, os resultados obtidos para cada método tenha as suas particularidades:

- As larguras médias dos intervalos de previsão utilizando a função *ugarchboot* são sempre menores do que as larguras médias dos intervalos de previsão utilizando nossa implementação.

⁴Os intervalos de previsão para r_{T+h} no nosso caso são obtidos através de $\pm Z_{\alpha/2} \times \sqrt{E(\sigma_{T+h}^2)}$. As previsões obtidas com este método só são conhecidas quando o modelo é GARCH(1,1) e parece difícil de generalizar para modelos GARCH(p,q). Estes intervalos são somente propostos para obter intervalos de previsão para os retornos.

- Ambas as coberturas são um pouco menores do que a nominal, embora, com a nossa implementação a diferenças sejam menores.
- Ambas as implementações levam a resultados aproximadamente simétricos. As falhas de cobertura à direita e à esquerda são praticamente iguais.
- Os desvios padrão utilizando *ugarchboot* são maiores do que os desvios padrão utilizando a nossa implementação. Isto quer dizer que, quando *ugarchboot* é utilizado as variabilidades das coberturas são maiores, ou seja em algumas séries podemos ter alta cobertura, enquanto que em outras as coberturas podem ser baixas. Os resultados obtidos com *ugarchboot* são menos precisos do que quando a nossa implementação é utilizada.
- Os intervalos de previsão BB (Baillie e Bollerslev, 1992) apresentam bom desempenho e são bastante próximos dos obtidos com a nossa implementação do algoritmo PRR. Entretanto, a forma das previsões são conhecidas apenas para o modelo GARCH(1,1) e parece difícil de generalizar para o modelo GARCH(p,q) o que limita o seu uso.

A figura 5.1 apresenta os limites dos intervalos de previsão para 20 replicações de Monte Carlo com a nossa implementação, com a implementação da função *ugarchboot* e com os limites empíricos para as previsões $h = 1, 2$ passos à frente dos retornos. Foram tomadas as primeiras 20 replicações. A apresentação desta figura tem objetivo de comparar os intervalos para cada série e não apenas as médias. O número de replicações bootstrap em cada replicação de Monte Carlo foi de $B = 1000$. Neste caso, para uma cobertura nominal de 95%, a cobertura média estimada utilizando a nossa adaptação e utilizando a função

Tabela 5.1: Intervalos de previsão bootstrap dos retornos do modelo GARCH 1 para $h = 1, 2, 3, 4, 5$ passos à frente. Cobertura nominal de 90%

Previsão	Método	Cobertura	DP	Inf	Sup	Tam. Intervalo
h=1	Implementação	0.89725	0.02000	0.05097	0.05177	3.20521
	ugarchboot	0.87930	0.03174	0.06107	0.05963	3.04761
	BB	0.89929	0.01447	0.05049	0.05022	3.21308
h=2	Implementação	0.89916	0.01915	0.04982	0.05102	3.21511
	ugarchboot	0.88046	0.02988	0.06013	0.05941	3.06330
	BB	0.89932	0.01458	0.04983	0.05085	3.22012
h=3	Implementação	0.89880	0.01975	0.05026	0.05093	3.21433
	ugarchboot	0.88308	0.02986	0.05846	0.05846	3.08192
	BB	0.89982	0.01389	0.04927	0.05091	3.22649
h=4	Implementação	0.89868	0.01974	0.05020	0.05112	3.21757
	ugarchboot	0.88382	0.02736	0.05802	0.05817	3.08802
	BB	0.90027	0.01290	0.04872	0.05101	3.23226
h=5	Implementação	0.89838	0.02054	0.05071	0.05091	3.21623
	ugarchboot	0.88456	0.02788	0.05811	0.05733	3.10081
	BB	0.90043	0.01288	0.04828	0.05129	3.23749

Tabela 5.2: Intervalos de previsão bootstrap dos retornos do modelo GARCH 1 para $h = 1, 2, 3, 4, 5$ passos à frente. Cobertura nominal de 95%

Previsão	Método	Cobertura	DP	Inf	Sup	Tam. Intervalo
h=1	Implementação	0.94762	0.01452	0.02566	0.02672	3.82147
	ugarchboot	0.93438	0.02405	0.03309	0.03254	3.63008
	BB	0.94956	0.01035	0.02507	0.02538	3.82862
h=2	Implementação	0.94848	0.01373	0.02527	0.02624	3.83520
	ugarchboot	0.93551	0.02205	0.03266	0.03183	3.65887
	BB	0.94897	0.00999	0.02459	0.02645	3.83701
h=3	Implementação	0.94871	0.01396	0.02514	0.02616	3.85026
	ugarchboot	0.93717	0.02165	0.03145	0.03138	3.69061
	BB	0.94893	0.00959	0.02422	0.02685	3.84460
h=4	Implementação	0.94887	0.01404	0.02504	0.02609	3.86390
	ugarchboot	0.93782	0.02024	0.03094	0.03124	3.70154
	BB	0.94836	0.00941	0.02390	0.02774	3.85147
h=5	Implementação	0.94803	0.01463	0.02560	0.02637	3.86139
	ugarchboot	0.93810	0.02028	0.03137	0.03053	3.71867
	BB	0.94869	0.00868	0.02365	0.02766	3.85770

Tabela 5.3: Intervalos de previsão bootstrap dos retornos do modelo GARCH 1 para $h = 1, 2, 3, 4, 5$ passos à frente. Cobertura nominal de 99%

Previsão	Método	Cobertura	DP	Inf	Sup	Tam. Intervalo
h=1	Implementação	0.98776	0.00647	0.00562	0.00662	5.01022
	ugarchboot	0.98221	0.01221	0.00908	0.00870	4.75888
	BB	0.98959	0.00406	0.00527	0.00514	5.03166
h=2	Implementação	0.98839	0.00594	0.00509	0.00653	5.07621
	ugarchboot	0.98287	0.01111	0.00878	0.00835	4.82855
	BB	0.98891	0.00401	0.00510	0.00599	5.04268
h=3	Implementação	0.98818	0.00630	0.00539	0.00643	5.11617
	ugarchboot	0.98401	0.00965	0.00804	0.00795	4.89809
	BB	0.98854	0.00409	0.00496	0.00650	5.05266
h=4	Implementação	0.98839	0.00610	0.00535	0.00626	5.17077
	ugarchboot	0.98453	0.00944	0.00780	0.00766	4.96208
	BB	0.98832	0.00412	0.00487	0.00681	5.06169
h=5	Implementação	0.98830	0.00657	0.00546	0.00624	5.20010
	ugarchboot	0.98473	0.00919	0.00777	0.00750	4.99504
	BB	0.98789	0.00416	0.00483	0.00728	5.06988

ugarchboot para as 20 replicações foram, respectivamente, 0.94755 e 0.941 para $h = 1$, e, 0.94785 e 0.94 para $h = 2$. Observe-se os intervalos obtidos com a nossa implementação e com a função *ugarchboot* são praticamente iguais. Para o caso das previsões $h = 3, 4, 5$ passos à frente, o comportamento foi semelhante ao apresentado para $h = 1, 2$ passos à frente.

A figura 5.2 apresenta, para uma das séries de tamanho $T = 1000$, as densidades estimadas dos valores empíricos r_{T+h} e dos valores bootstrap de $r_T^*(h)$ obtidos com a implementação feita nesta dissertação para $h = 1, 2, 3, 4, 5$ passos à frente. Note-se que a densidade de $r_T^*(h)$ tem o mesmo comportamento do que a da distribuição empírica, o que indica que a adaptação do algoritmo PRR oferece estimativas próximas da cobertura e das larguras dos intervalos. Para esta série temos que a cobertura estimada $h = 1, 2, 3, 4, 5$ passos à frente para um cobertura nominal de 95% é 0.941, 0.92, 0.942, 0.949, 0.941 e,

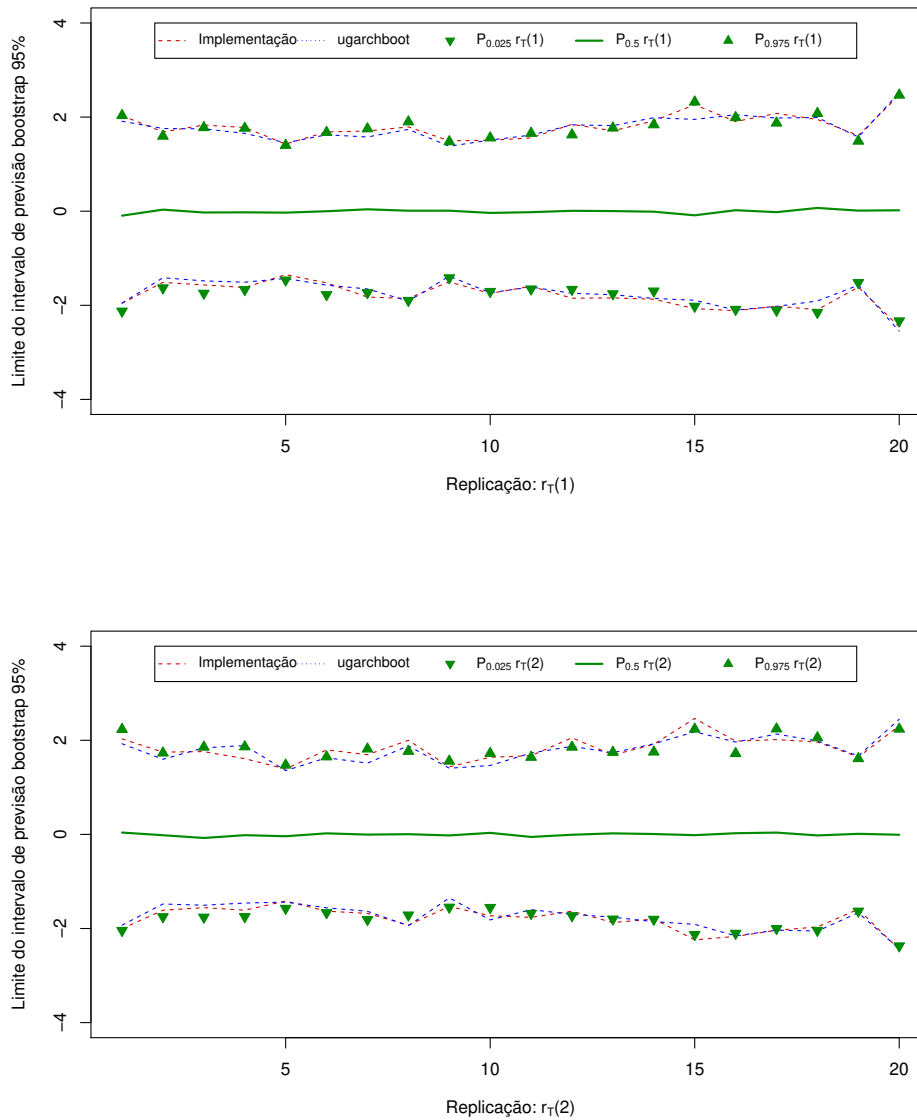


Figura 5.1: Limites de previsão dos retornos 1 e 2 passos à frente para 20 replicações Monte Carlo com probabilidade de cobertura nominal de 95%. GARCH(1,1): Modelo 1

0.988, 0.974, 0.984, 0.989, 0.988 para uma cobertura nominal de 99%.

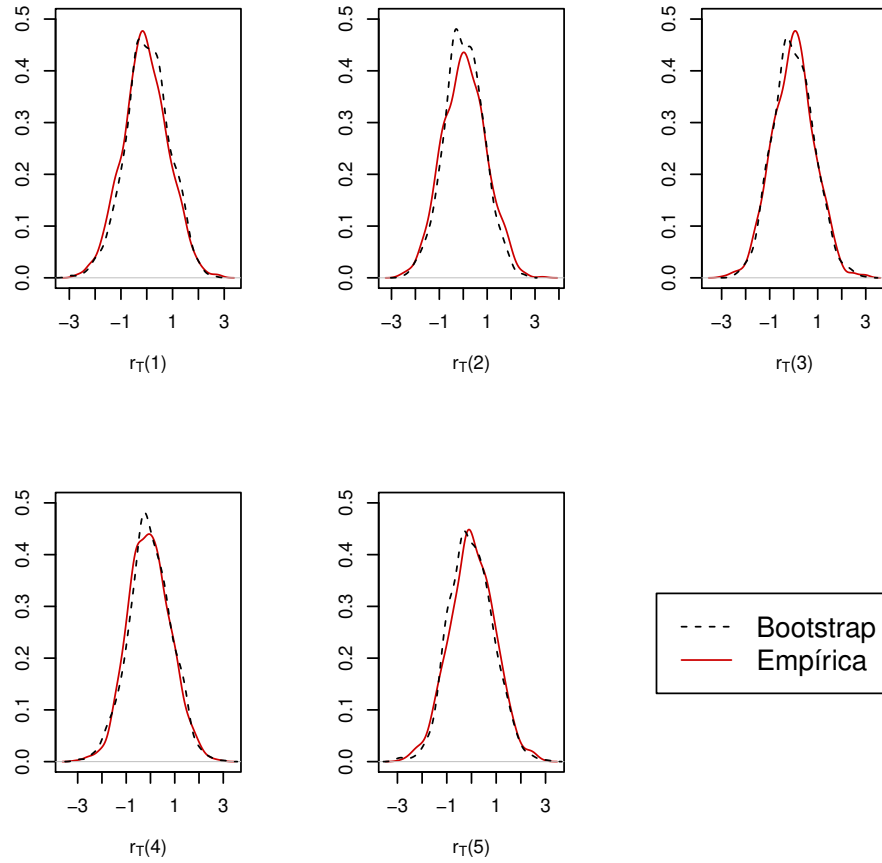


Figura 5.2: Densidade da distribuição dos retornos $h = 1, 2, 3, 4, 5$ passos à frente para uma das séries geradas pelo processo GARCH(1,1) definido no modelo 1

Para o caso dos intervalos de previsão para as volatilidades utilizando a implementação feita na função *ugarchboot* e a nossa implementação observa-se que:

- As coberturas médias estimadas para a previsão $h = 1$ passo à frente são bem abaixo da cobertura nominal quando a implementação da função *ugarchboot* é utilizada.
- As coberturas médias estimadas utilizando *ugarchboot* são sempre menores do que

as coberturas médias estimadas utilizando a nossa implementação.

- Tanto na nossa implementação quanto na implementação disponível na função *ugarchboot* as falhas de cobertura estimadas apresentam pequena assimetria.
- Existe uma diferença nas larguras médias dos intervalos, sendo que, as larguras médias dos intervalos obtidos com a nossa implementação são sempre maiores do que a obtida com a função *ugarchboot*. Esta maior amplitude dos intervalos permite que a cobertura estimada com a nossa implementação seja maior do que a obtida com a função *ugarchboot*, mas ainda com cobertura um pouco menor do que a nominal.

A figura 5.3 apresenta os limites dos intervalos de previsão obtidos para 20 replicações de Monte Carlo com a implementação feita nesta dissertação, com a função *ugarchboot* e com os limites empíricos para as previsões $h = 1, 2, 5$ passos à frente das volatilidades. O número de replicações bootstrap em cada replicação de Monte Carlo foi de $B = 1000$. Neste caso para uma cobertura nominal de 95% a cobertura média estimada utilizando a nossa implementação e utilizando a função *ugarchboot* para as 20 replicações foram respectivamente 1 e 0.8 para $h = 1$, 0.9484 e 0.9304 para $h = 2$, e, 0.94415 e 0.93765 para $h = 5$. Os limites empíricos acompanham melhor aos limites obtidos com a nossa implementação do que aos limites obtidos com a função *ugarchboot*. Para as previsões $h = 3, 4$ passos à frente, o comportamento foi semelhante ao apresentado na figura 5.3, sendo que os intervalos empíricos também acompanham melhor os intervalos obtidos com a nossa adaptação do que aos limites obtidos com a função *ugarchboot*. Para facilitar a visualização as replicações foram ordenadas pelo valor do percentil 50 ($P_{0.5}$).

Tabela 5.4: Intervalos de previsão bootstrap das volatilidades do modelo GARCH 1 para $h = 1, 2, 3, 4, 5$ passos à frente. Cobertura nominal de 90%

Previsão	Método	Cobertura	DP	Inf	Sup	Tam. Intervalo
h=1	Implementação	0.89300	0.30927	0.04600	0.06100	0.13061
	ugarchboot	0.61100	0.48777	0.01600	0.37300	0.12153
h=2	Implementação	0.89389	0.14596	0.05012	0.05600	0.24386
	ugarchboot	0.82549	0.23668	0.02123	0.15328	0.23090
h=3	Implementação	0.89278	0.11836	0.04992	0.05730	0.30926
	ugarchboot	0.85363	0.16467	0.02500	0.12137	0.29345
h=4	Implementação	0.88891	0.10704	0.05236	0.05872	0.35665
	ugarchboot	0.86302	0.13258	0.02910	0.10789	0.33913
h=5	Implementação	0.88359	0.10229	0.05610	0.06031	0.39351
	ugarchboot	0.86629	0.11495	0.03366	0.10005	0.37472

Tabela 5.5: Intervalos de previsão bootstrap das volatilidades do modelo GARCH 1 para $h = 1, 2, 3, 4, 5$ passos à frente. Cobertura nominal de 95%

Previsão	Método	Cobertura	DP	Inf	Sup	Tam. Intervalo
h=1	Implementação	0.95000	0.21805	0.01700	0.03300	0.15865
	ugarchboot	0.69200	0.46190	0.00600	0.30200	0.14636
h=2	Implementação	0.94410	0.10461	0.02682	0.02907	0.31244
	ugarchboot	0.89791	0.18633	0.01044	0.09166	0.29494
h=3	Implementação	0.94258	0.08843	0.02697	0.03046	0.38983
	ugarchboot	0.91658	0.12255	0.01329	0.07013	0.36901
h=4	Implementação	0.94026	0.08051	0.02806	0.03168	0.44674
	ugarchboot	0.92367	0.09758	0.01521	0.06112	0.42472
h=5	Implementação	0.93744	0.07731	0.03057	0.03199	0.49326
	ugarchboot	0.92624	0.08419	0.01757	0.05619	0.46923

Tabela 5.6: Intervalos de previsão bootstrap das volatilidades do modelo GARCH 1 para $h = 1, 2, 3, 4, 5$ passos à frente. Cobertura nominal de 99%

Previsão	Método	Cobertura	DP	Inf	Sup	Tam. Intervalo
h=1	Implementação	0.98500	0.12161	0.00300	0.01200	0.22169
	ugarchboot	0.77500	0.41779	0.00200	0.22300	0.19652
h=2	Implementação	0.98813	0.04496	0.00446	0.00741	0.46820
	ugarchboot	0.97175	0.08853	0.00146	0.02679	0.44077
h=3	Implementação	0.98585	0.04110	0.00632	0.00782	0.57310
	ugarchboot	0.97737	0.05407	0.00297	0.01966	0.54336
h=4	Implementação	0.98485	0.03887	0.00723	0.00792	0.65367
	ugarchboot	0.97991	0.04301	0.00375	0.01634	0.62418
h=5	Implementação	0.98343	0.03781	0.00843	0.00814	0.72201
	ugarchboot	0.98078	0.03718	0.00454	0.01468	0.69021

A figura 5.4 apresenta, para uma das séries de tamanho $T = 1000$, as densidades estimadas dos valores empíricos σ_{T+h} e dos valores bootstrap de $\sigma_T^*(h)$ obtidos com a implementação feita nesta dissertação para $h = 1, 2, 3, 4, 5$ passos à frente. A densidade dos valores empíricos de σ_{T+h} é *truncada* pois esta tem um valor mínimo. Isto é devido ao fato de que:

$$\sigma_{T+2}^2 = \hat{\omega} + \hat{\alpha}r_{T+1}^2 + \hat{\beta}\sigma_{T+1}^2, \quad (5.1.1)$$

varia segundo a variação de r_{T+1}^2 pois σ_{T+1}^2 está completamente determinado por r_T^2 e σ_T^2 e os valores dos parâmetros estimados são fixos. À medida que h for crescendo a variabilidade de σ_{T+h}^2 estará em função da variabilidade de σ_{T+h-1}^2 e r_{T+h-1}^2 . Para a série gerada a cobertura estimada para uma cobertura nominal de 95% é 1, 0.954, 0.928, 0.947, 0.96 para $h = 1, 2, 3, 4, 5$ passos à frente respectivamente, e, 1, 0.983, 0.98, 0.987, 0.988 para uma cobertura nominal de 99%. A medida que h for maior a distribuição empírica é mais próxima do que a obtida com o procedimento bootstrap

Especialmente para $h = 1$, a função *ugarchboot* não tem um bom desempenho para obter os intervalos de previsão, e pode se observar como os possíveis valores para σ_{T+h} estão fora dos intervalos em maior proporção do que deveriam.

Nas tabelas C.1, C.2, C.3, C.4, C.5, C.6 do apêndice são apresentadas as probabilidades de cobertura estimadas, e falhas de cobertura dos modelos 2, 3 e 4 para os retornos e para as volatilidades, ambos com probabilidades de cobertura nominais de 90%, 95% e 99%. Para o caso dos retornos, as probabilidades de cobertura estimadas são próximas das nominais assim como as falhas de cobertura à direita e à esquerda. Para as volatilidades, o procedimento funciona bem para os modelos 2 e 3, mas não para o modelo 4 quando $h = 1$. O baixo desempenho no modelo 4 não é devido à alta persistência nem ao tamanho de algum dos parâmetros, pois no modelo 3, com a mesma persistência, os resultados são bons e, no modelo 2, que tem maior peso no parâmetro associado com o retorno, também apresenta bons resultados. Não foi encontrada a explicação para o mal desempenho para o modelo 4, em contraste com o desempenho como foi nos outros casos.

5.2 Caso GJR-GARCH

As tabelas 5.7 a 5.12 apresentam os valores das médias das probabilidades de cobertura estimadas (Cobertura) com seus respectivos desvios padrão (DP), os valores das médias das falhas de cobertura estimadas à esquerda (Inf) e à direita (Sup) das caudas da distribuição, e as médias das larguras dos intervalos estimados (Tam. Intervalo) para os retornos e as volatilidades do modelo GJR-GARCH(1,1) definido em (5.0.12). As tabelas apresentadas mostram os resultados das simulações para as probabilidades de cobertura nominais de 90%, 95% e 99%.

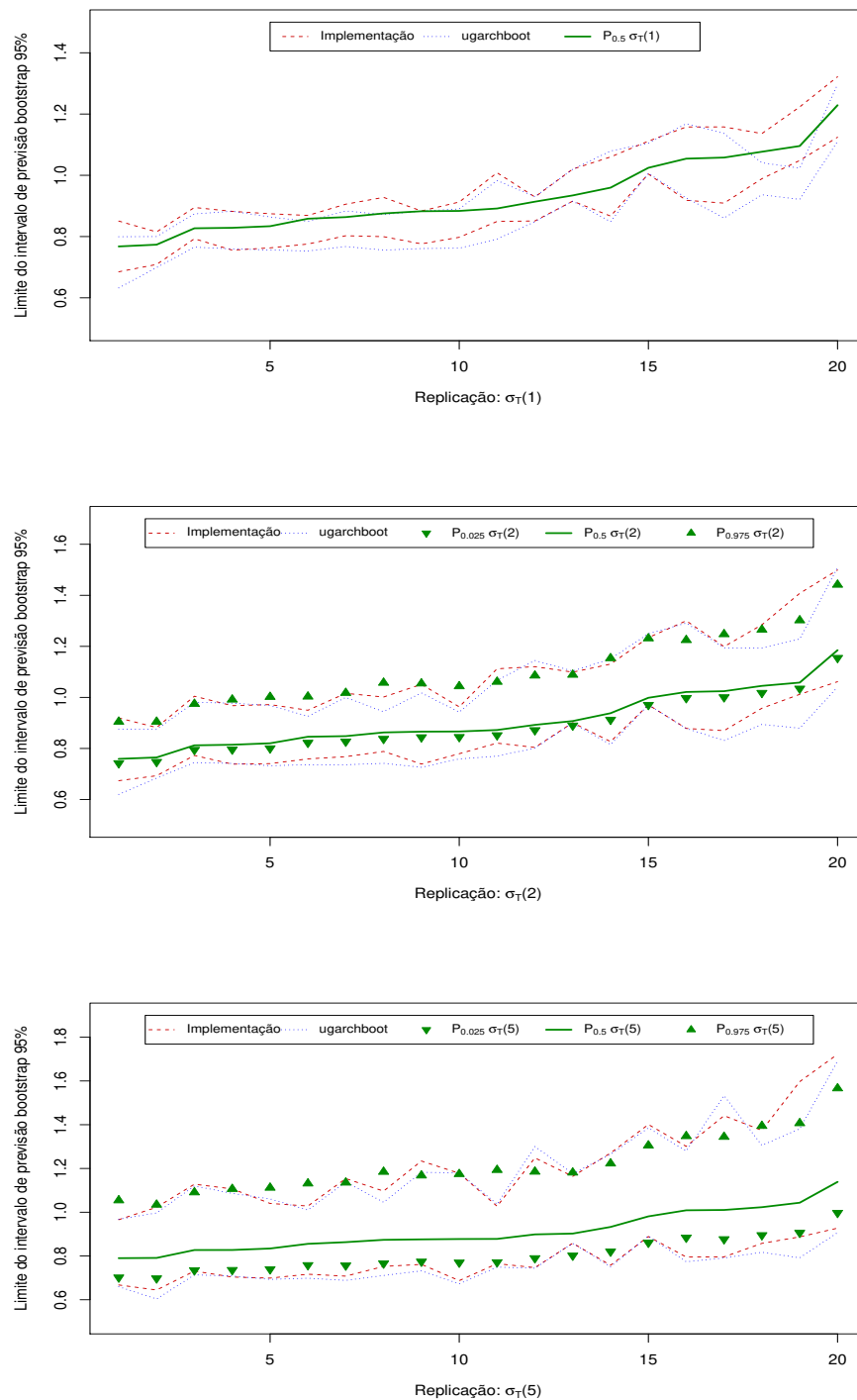


Figura 5.3: Limites de previsão das volatilidade 1, 2 e 5 passos à frente para 20 replicações Monte Carlo com probabilidade de cobertura nominal de 95%. GARCH(1,1): Modelo 1. Para facilitar a visualização as replicações foram ordenadas pelo valor de $P_{0.5}$.

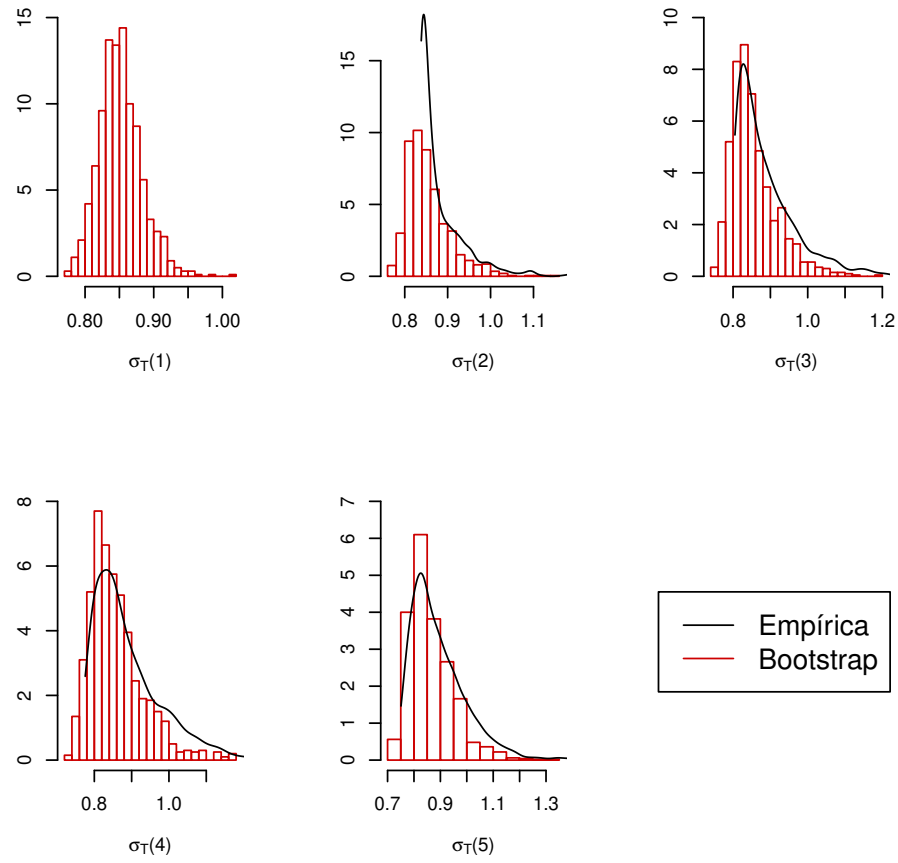


Figura 5.4: Histograma e densidade da distribuição das volatilidades bootstrap e empírica respectivamente para $h = 1, 2, 3, 4, 5$ passos à frente para uma das séries geradas pelo processo GARCH(1,1): Modelo 1

Semelhantemente ao caso anterior, os resultados são apresentados para as previsões $h = 1, 2, 3, 4, 5$ passos à frente e são comparados os resultados obtidos com a adaptação feita nesta dissertação e a implementação feita na função *ugarchboot* do pacote *rugarch* do *R*.

No caso dos retornos, como pode-se ver nas tabelas 5.7, 5.8, 5.9, os resultados obtidos com a implementação feita na função *ugarchboot* e com a nossa adaptação apresentam as mesmas características que no caso GARCH, sendo estas:

- As larguras médias dos intervalos de previsão utilizando a função *ugarchboot* são sempre menores do que as larguras médias dos intervalos de previsão utilizando nossa adaptação.
- Ambas as coberturas são um pouco menores do que a nominal, embora, com a nossa adaptação as diferenças sejam menores.
- Ambos os métodos levam a resultados aproximadamente simétricos.
- Os desvios padrão utilizando *ugarchboot* são maiores do que os desvios padrão utilizando a nossa adaptação, isto quer dizer que, quando *ugarchboot* é utilizado as variabilidades das coberturas são maiores, ou seja em alguma séries podemos ter alta cobertura, enquanto que em outras a cobertura pode ser baixa. Os resultados obtidos com *ugarchboot* são menos precisos do que quando a nossa adaptação é utilizada.

Tabela 5.7: Intervalos de previsão bootstrap dos retornos do modelo GJR-GARCH(1,1) para $h = 1, 2, 3, 4, 5$ passos à frente. Cobertura nominal 90%

Previsão	Método	Cobertura	DP	Inf	Sup	Tam. Intervalo
h=1	Implementação	0.89639	0.02181	0.05080	0.05281	1.48225
	ugarchboot	0.87546	0.04191	0.06158	0.06296	1.26643
h=2	Implementação	0.89715	0.02196	0.05088	0.05197	1.48421
	ugarchboot	0.87814	0.04090	0.06074	0.06112	1.27355
h=3	Implementação	0.89685	0.02248	0.05105	0.05209	1.48400
	ugarchboot	0.87932	0.03898	0.06034	0.06034	1.27754
h=4	Implementação	0.89651	0.02223	0.05143	0.05206	1.48622
	ugarchboot	0.88037	0.03728	0.05953	0.06010	1.28391
h=5	Implementação	0.89700	0.02238	0.05099	0.05200	1.48837
	ugarchboot	0.88213	0.03558	0.05874	0.05913	1.28875

Tabela 5.8: Intervalos de previsão bootstrap dos retornos do modelo GJR-GARCH(1,1) para $h = 1, 2, 3, 4, 5$ passos à frente. Cobertura nominal 95%

Previsão	Método	Cobertura	DP	Inf	Sup	Tam. Intervalo
h=1	Implementação	0.94748	0.01535	0.02553	0.02699	1.77203
	ugarchboot	0.93122	0.03335	0.03410	0.03468	1.51049
h=2	Implementação	0.94728	0.01611	0.02579	0.02693	1.77740
	ugarchboot	0.93313	0.03220	0.03334	0.03353	1.52544
h=3	Implementação	0.94707	0.01575	0.02596	0.02697	1.78443
	ugarchboot	0.93482	0.02927	0.03268	0.03250	1.53980
h=4	Implementação	0.94759	0.01546	0.02601	0.02640	1.79676
	ugarchboot	0.93587	0.02845	0.03202	0.03211	1.55147
h=5	Implementação	0.94766	0.01545	0.02555	0.02679	1.80590
	ugarchboot	0.93690	0.02641	0.03137	0.03173	1.56106

Os limites para os intervalos dos retornos para 20 replicações de Monte Carlo e as densidades estimadas dos valores empíricos r_{T+h} e dos valores bootstrap de $r_T^*(h)$ tem o mesmo comportamento no que no caso GARCH apresentado anteriormente.

No caso das volatilidades, os intervalos de previsão obtidos utilizando a adaptação feita nesta dissertação apresentam bons resultados, diferentemente dos resultados obtidos

Tabela 5.9: Intervalos de previsão bootstrap dos retornos do modelo GJR-GARCH(1,1) para $h = 1, 2, 3, 4, 5$ passos à frente. Cobertura nominal 99%

Previsão	Método	Cobertura	DP	Inf	Sup	Tam. Intervalo
h=1	Implementação	0.98787	0.00691	0.00544	0.00669	2.33698
	ugarchboot	0.98106	0.01701	0.00932	0.00962	1.99263
h=2	Implementação	0.98819	0.00679	0.00551	0.00630	2.38135
	ugarchboot	0.98231	0.01560	0.00895	0.00874	2.03992
h=3	Implementação	0.98823	0.00648	0.00546	0.00631	2.42883
	ugarchboot	0.98314	0.01337	0.00838	0.00848	2.08645
h=4	Implementação	0.98841	0.00627	0.00533	0.00626	2.47395
	ugarchboot	0.98356	0.01313	0.00830	0.00814	2.12319
h=5	Implementação	0.98827	0.00647	0.00548	0.00625	2.50000
	ugarchboot	0.98432	0.01212	0.00789	0.00779	2.15656

com a implementação feita na função *ugarchboot*. Entre as características inerentes a cada um dos métodos utilizados temos que:

- As coberturas médias estimadas para a previsão $h = 1$ passo à frente é bem menor do que a cobertura nominal quando a implementação da função *ugarchboot* é utilizada.
- As coberturas médias estimadas utilizando *ugarchboot* são sempre menores do que as coberturas médias estimadas utilizando a nossa adaptação.
- As falhas de cobertura estimadas com ambos métodos apresentam assimetria.
- As larguras médias dos intervalos de previsão utilizando a função *ugarchboot* são sempre menores do que as larguras médias dos intervalos de previsão utilizando nossa adaptação, o que permite que com a nossa adaptação as coberturas sejam maiores, mas sem ultrapassar ao valor nominal.

Tabela 5.10: Intervalos de previsão bootstrap das volatilidades do modelo GJR-GARCH(1,1) para $h = 1, 2, 3, 4, 5$ passos à frente. Cobertura nominal de 90%

Previsão	Método	Cobertura	DP	Inf	Sup	Tam. Intervalo
h=1	Implementação	0.88100	0.32395	0.05700	0.06200	0.06804
	ugarchboot	0.64100	0.47995	0.02200	0.33700	0.05966
h=2	Implementação	0.89512	0.15114	0.05036	0.05452	0.14686
	ugarchboot	0.84867	0.22266	0.02245	0.12888	0.12674
h=3	Implementação	0.89170	0.11887	0.05197	0.05633	0.19307
	ugarchboot	0.86703	0.16426	0.02596	0.10701	0.16601
h=4	Implementação	0.88765	0.10205	0.05447	0.05788	0.22511
	ugarchboot	0.87275	0.13202	0.03032	0.09693	0.19371
h=5	Implementação	0.88606	0.09278	0.05559	0.05835	0.25082
	ugarchboot	0.87523	0.11240	0.03407	0.09069	0.21577

Tabela 5.11: Intervalos de previsão bootstrap das volatilidades do modelo GJR-GARCH(1,1) para $h = 1, 2, 3, 4, 5$ passos à frente. Cobertura nominal de 95%

Previsão	Método	Cobertura	DP	Inf	Sup	Tam. Intervalo
h=1	Implementação	0.93100	0.25358	0.03100	0.03800	0.08171
	ugarchboot	0.71100	0.45352	0.00900	0.28000	0.07154
h=2	Implementação	0.94260	0.11470	0.02893	0.02847	0.19583
	ugarchboot	0.91183	0.17861	0.01198	0.07619	0.16900
h=3	Implementação	0.94186	0.09106	0.02819	0.02994	0.24839
	ugarchboot	0.92551	0.12454	0.01317	0.06132	0.21422
h=4	Implementação	0.94014	0.07771	0.02954	0.03033	0.28835
	ugarchboot	0.92982	0.09798	0.01558	0.05460	0.24784
h=5	Implementação	0.93854	0.07077	0.03085	0.03061	0.31913
	ugarchboot	0.93151	0.08172	0.01786	0.05063	0.27504

A figura 5.5 apresenta os limites dos intervalos de previsão obtidos para 20 replicações de Monte Carlo com a adaptação feita nesta dissertação, com a função *ugarchboot* e com os limites empíricos para as previsões das volatilidades $h = 1, 2, 5$ passos à frente. O número de replicações bootstrap em cada replicação de Monte Carlo foi de $B = 1000$. Neste caso para uma cobertura nominal de 95% a cobertura média estimada utilizando a nossa adaptação e utilizando a função *ugarchboot* para as 20 replicações foram respectivamente

Tabela 5.12: Intervalos de previsão bootstrap das volatilidades do modelo GJR-GARCH(1,1) para $h = 1, 2, 3, 4, 5$ passos à frente. Cobertura nominal de 99%

Previsão	Método	Cobertura	DP	Inf	Sup	Tam. Intervalo
h=1	Implementação	0.97900	0.14346	0.00600	0.01500	0.10919
	ugarchboot	0.79400	0.40463	0.00300	0.20300	0.09476
h=2	Implementação	0.98664	0.05289	0.00620	0.00715	0.30587
	ugarchboot	0.97415	0.09119	0.00289	0.02296	0.26581
h=3	Implementação	0.98564	0.04351	0.00703	0.00734	0.37695
	ugarchboot	0.97955	0.05705	0.00337	0.01709	0.32680
h=4	Implementação	0.98522	0.03774	0.00724	0.00754	0.43419
	ugarchboot	0.98201	0.04179	0.00366	0.01433	0.37825
h=5	Implementação	0.98438	0.03493	0.00797	0.00764	0.48306
	ugarchboot	0.98260	0.03741	0.00426	0.01314	0.42065

1 e 0.65 para $h = 1$, 0.9699 e 0.8966 para $h = 2$, e, 0.954 e 0.9192 para $h = 5$. Pode-se observar como os limites empíricos acompanham melhor aos limites obtidos com a nossa adaptação do que aos limites obtidos com a função *ugarchboot*. Para as previsões $h = 3, 4$ passos à frente, o comportamento foi semelhante ao apresentado na figura 5.5, sendo que os intervalos empíricos também acompanhavam melhor aos intervalos obtidos com a nossa adaptação do que aos limites obtidos com a função *ugarchboot*. Para facilitar a visualização as replicações foram ordenadas pelo valor do percentil 50 ($P_{0.5}$).

A figura 5.6 apresenta, para uma das séries de tamanho $T = 1000$, as densidades estimadas dos valores empíricos σ_{T+h} e dos valores bootstrap de $\sigma_T^*(h)$ obtidos com a adaptação feita nesta dissertação para $h = 1, 2, 3, 4, 5$ passos à frente. Note-se que a densidade de $\sigma_T^*(h)$ tem o mesmo comportamento do que a distribuição empírica (exceto quando $h = 2$ onde se observa uma diferença nas densidades estimadas). Para a série a cobertura estimada para uma cobertura nominal de 95% é 1, 0.977, 0.985, 0.982, 0.981 para $h = 1, 2, 3, 4, 5$ passos à frente respectivamente, e, 1, 0.998, 0.997, 0.999, 0.997 para

uma cobertura nominal de 99%. A densidade dos valores empíricos de σ_{T+h} se apresenta *truncada* pois esta tem um valor mínimo. A explicação disto é semelhante ao comentado para o caso GARCH.

5.3 Caso EGARCH

Nas tabelas 5.13 a 5.18 encontram-se os valores das médias das probabilidades de cobertura estimadas (Cobertura) com seus respectivos desvios padrão (DP), os valores das médias das falhas de cobertura estimadas à esquerda (Inf) e à direita (Sup) das caudas da distribuição, e as médias das larguras dos intervalo estimados (Tam. Intervalo) considerando probabilidades de cobertura nominais de 90%, 95% e 99% para os retornos e para as volatilidades do modelo EGARCH(1,1) definido em 5.0.13.

Os resultados são apresentados para as previsões $h = 1, 2, 3, 4, 5$ passos à frente e são comparados os resultados obtidos com a adaptação feita nesta dissertação e a implementação feita na função *ugarchboot* do pacote *rugarch* do *R*. Para o caso onde foi utilizada a adaptação feita nesta dissertação foram consideradas $MC = 1000$ réplicas de Monte Carlo, enquanto que, para o caso onde foi utilizada a função *ugarchboot* foram consideradas $MC = 225$ réplicas Monte Carlo, porque a função *ugarchboot* apresentou muitos problemas de convergência, que não permitia que o processo de simulação fosse terminado.

No caso dos retornos, os intervalos de previsão obtidos utilizando a adaptação feita nesta dissertação apresentam bons resultados comparado com os obtidos com a função *ugarchboot*. As principais conclusões são:

- As larguras dos intervalos utilizando a nossa adaptação são sempre menores do que as larguras dos intervalos utilizando a função *ugarchboot*.

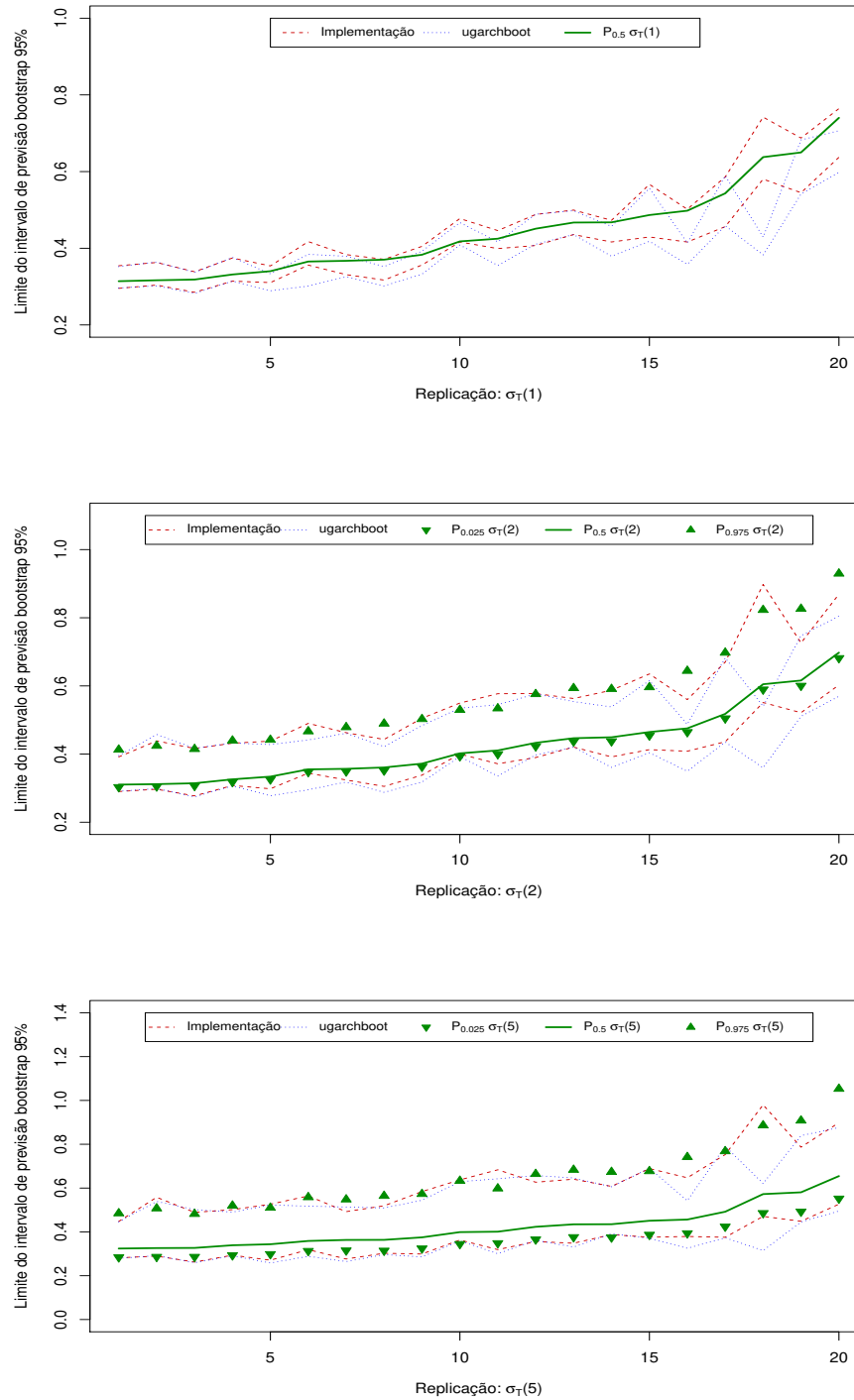


Figura 5.5: Limites de previsão das volatilidade 1, 2 e 5 passos à frente para 20 replicações Monte Carlo com probabilidade de cobertura nominal de 95% GJR-GARCH(1,1). Para facilitar a visualização as replicações foram ordenadas pelo valor de $P_{0.5}$.

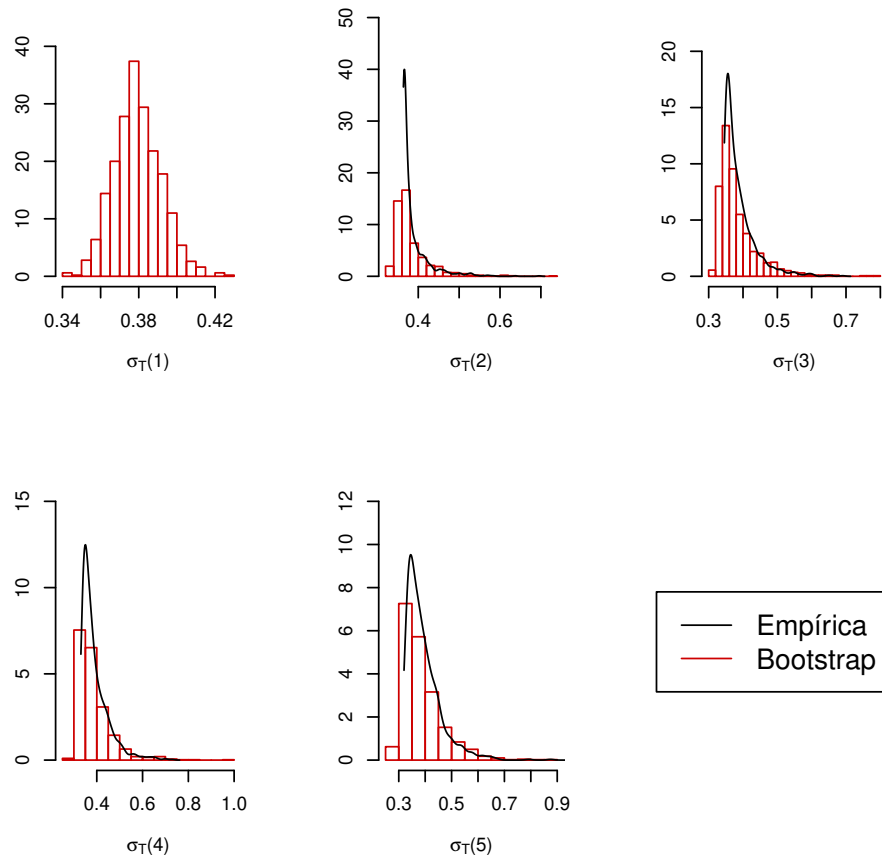


Figura 5.6: Histograma e densidade da distribuição das volatilidades bootstrap e empírica respectivamente para $h = 1, 2, 3, 4, 5$ passos à frente para uma das séries geradas pelo processo GJR-GARCH(1,1)

- Ambos os métodos levam a resultados aproximadamente simétricos. As falhas de cobertura à direita e à esquerda são próximas.
- A cobertura estimada utilizando *ugarchboot* é sempre maior do que a nominal, super estimando a cobertura.

Neste caso, os valores estimados da cobertura utilizando *ugarchboot* são maiores do que o nominal, mas, a cobertura utilizando a nossa adaptação é sempre mais próxima do que a nominal. Portanto, os intervalos dados pela nossa adaptação continuam sendo melhores.

Tabela 5.13: Intervalos de previsão bootstrap dos retornos do modelo EGARCH(1,1) para $h = 1, 2, 3, 4, 5$ passos à frente. Cobertura nominal 90%

Previsão	Método	Cobertura	DP	Inf	Sup	Tam. Intervalo
h=1	Implementação	0.89919	0.02871	0.04971	0.05109	0.10981
	ugarchboot	0.92140	0.03708	0.04020	0.03841	0.11698
h=2	Implementação	0.90017	0.02784	0.04934	0.05049	0.11017
	ugarchboot	0.94785	0.03102	0.02593	0.02621	0.13164
h=3	Implementação	0.90059	0.02856	0.04931	0.05010	0.11047
	ugarchboot	0.96549	0.02305	0.01720	0.01731	0.14650
h=4	Implementação	0.90101	0.02832	0.04949	0.04950	0.11081
	ugarchboot	0.97692	0.02012	0.01168	0.01140	0.16281
h=5	Implementação	0.89990	0.02965	0.04932	0.05078	0.11103
	ugarchboot	0.98465	0.01429	0.00771	0.00764	0.17957

A figura 5.7 apresenta os limites dos intervalos de previsão obtidos para 20 replicações de Monte Carlo com a adaptação feita nesta dissertação, com a função *ugarchboot* e com os limites empíricos para as previsões $h = 1, 2$ passos à frente dos retornos. O número de replicações bootstrap em cada replicação de Monte Carlo foi de $B = 1000$. Neste caso para uma cobertura nominal de 95% a cobertura média estimada utilizando a nossa adaptação e utilizando a função *ugarchboot* para as 20 replicações foram respectivamente 0.95485 e 0.95965 para $h = 1$, e, 0.94745 e 0.9755 para $h = 2$. Os limites empíricos acompanham

Tabela 5.14: Intervalos de previsão bootstrap dos retornos do modelo EGARCH(1,1) para $h = 1, 2, 3, 4, 5$ passos à frente. Cobertura nominal 95%

Previsão	Método	Cobertura	DP	Inf	Sup	Tam. Intervalo
h=1	Implementação	0.95013	0.01990	0.02451	0.02536	0.13186
	ugarchboot	0.96230	0.02508	0.01954	0.01816	0.13931
h=2	Implementação	0.95064	0.01945	0.02423	0.02513	0.13317
	ugarchboot	0.97812	0.01972	0.01114	0.01074	0.15926
h=3	Implementação	0.95121	0.01921	0.02387	0.02492	0.13447
	ugarchboot	0.98773	0.01239	0.00604	0.00623	0.17923
h=4	Implementação	0.95128	0.01931	0.02422	0.02450	0.13546
	ugarchboot	0.99241	0.01008	0.00392	0.00367	0.20172
h=5	Implementação	0.95057	0.01951	0.02417	0.02526	0.13625
	ugarchboot	0.99467	0.00725	0.00268	0.00264	0.22376

Tabela 5.15: Intervalos de previsão bootstrap dos retornos do modelo EGARCH(1,1) para $h = 1, 2, 3, 4, 5$ passos à frente. Cobertura nominal 99%

Previsão	Método	Cobertura	DP	Inf	Sup	Tam. Intervalo
h=1	Implementação	0.98968	0.00775	0.00486	0.00545	0.17604
	ugarchboot	0.99177	0.00931	0.00447	0.00376	0.18222
h=2	Implementação	0.99004	0.00717	0.00447	0.00549	0.18268
	ugarchboot	0.99663	0.00544	0.00172	0.00165	0.21575
h=3	Implementação	0.99037	0.00676	0.00434	0.00529	0.18750
	ugarchboot	0.99855	0.00231	0.00069	0.00076	0.25182
h=4	Implementação	0.99013	0.00690	0.00454	0.00533	0.19113
	ugarchboot	0.99916	0.00195	0.00048	0.00036	0.29141
h=5	Implementação	0.99000	0.00740	0.00456	0.00544	0.19438
	ugarchboot	0.99952	0.00129	0.00025	0.00023	0.32955

melhor aos limites obtidos com a nossa adaptação do que aos limites obtidos com a função *ugarchboot*, sendo os limites obtidos com este último maiores do que os obtidos com a nossa adaptação. Para as previsões $h = 3, 4, 5$ passos à frente, o comportamento foi semelhante ao apresentado na figura 5.7, sendo que os intervalos empíricos também acompanham melhor aos intervalos obtidos com a nossa adaptação do que aos limites obtidos com a função *ugarchboot*.

Verifica-se que densidade estimada dos valores empíricos r_{T+h} e dos valores bootstrap de $r_T^*(h)$ tem o mesmo comportamento, assim como aconteceu nos casos GARCH e GJR-GARCH.

Para o caso das volatilidades, com a nossa adaptação as probabilidades de cobertura estimadas são próximas às nominais enquanto que, os resultados obtidos com a implementação na função *ugarchboot* apresentam problemas na estimativa da probabilidade de cobertura. As principais conclusões são:

- As coberturas médias estimadas para as previsões $h = 1$ passo à frente são bem abaixo da cobertura nominal quando a implementação da função *ugarchboot* é utilizada.
- As coberturas médias estimadas utilizando *ugarchboot* são sempre menores do que as coberturas médias estimadas utilizando a nossa adaptação
- As coberturas médias estimadas utilizando *ugarchboot* sempre estão muito abaixo da cobertura nominal.
- Os desvios padrão utilizando *ugarchboot* são maiores do que os desvios padrão utilizando a nossa adaptação.

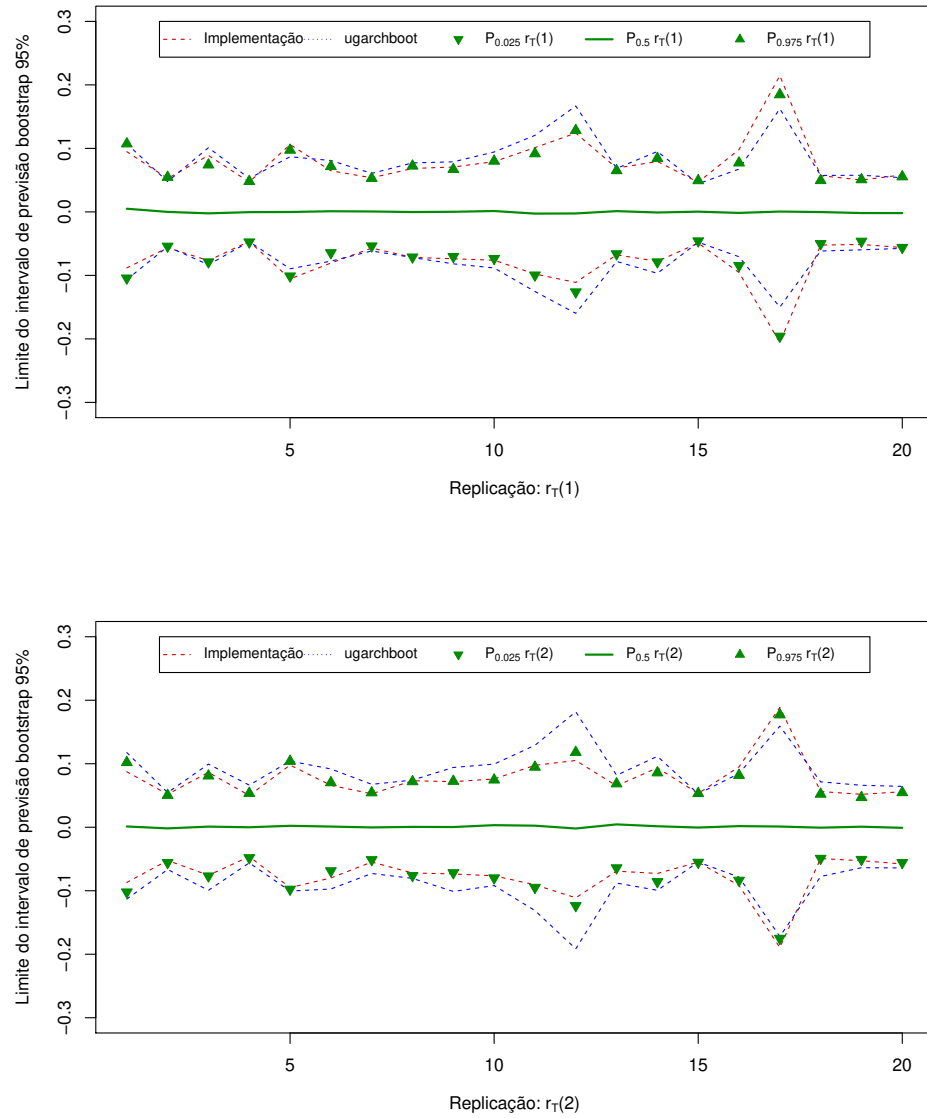


Figura 5.7: Limites de previsão dos retornos 1 e 2 passos à frente para 20 replicações Monte Carlo com probabilidade de cobertura nominal de 95%

Tabela 5.16: Intervalos de previsão bootstrap das volatilidades do modelo EGARCH(1,1) para $h = 1, 2, 3, 4, 5$ passos à frente. Cobertura nominal de 90%

Previsão	Método	Cobertura	DP	Inf	Sup	Tam. Intervalo
h=1	Implementação	0.92800	0.25862	0.04400	0.02800	0.00980
	ugarchboot	0.36889	0.48358	0.55111	0.08000	0.00587
h=2	Implementação	0.93093	0.12574	0.03384	0.03523	0.01639
	ugarchboot	0.49914	0.32541	0.49155	0.00931	0.02069
h=3	Implementação	0.93043	0.09747	0.03107	0.03850	0.01980
	ugarchboot	0.49698	0.24999	0.49960	0.00341	0.03159
h=4	Implementação	0.92554	0.08391	0.03266	0.04180	0.02227
	ugarchboot	0.45407	0.21785	0.54451	0.00142	0.04171
h=5	Implementação	0.91938	0.07851	0.03608	0.04454	0.02413
	ugarchboot	0.40189	0.19511	0.59736	0.00075	0.05169

Tabela 5.17: Intervalos de previsão bootstrap das volatilidades do modelo EGARCH(1,1) para $h = 1, 2, 3, 4, 5$ passos à frente. Cobertura nominal de 95%

Previsão	Método	Cobertura	DP	Inf	Sup	Tam. Intervalo
h=1	Implementação	0.96800	0.17609	0.01700	0.01500	0.01196
	ugarchboot	0.43556	0.49694	0.49333	0.07111	0.00705
h=2	Implementação	0.96794	0.08962	0.01672	0.01534	0.02069
	ugarchboot	0.57714	0.33082	0.41800	0.00485	0.02507
h=3	Implementação	0.96667	0.06936	0.01556	0.01777	0.02483
	ugarchboot	0.58988	0.26070	0.40860	0.00152	0.03868
h=4	Implementação	0.96439	0.05913	0.01582	0.01979	0.02786
	ugarchboot	0.56044	0.22452	0.43899	0.00057	0.05145
h=5	Implementação	0.96108	0.05589	0.01723	0.02169	0.03008
	ugarchboot	0.51579	0.20742	0.48389	0.00032	0.06430

Tabela 5.18: Intervalos de previsão bootstrap das volatilidades do modelo EGARCH(1,1) para $h = 1, 2, 3, 4, 5$ passos à frente. Cobertura nominal de 99%

Previsão	Método	Cobertura	DP	Inf	Sup	Tam. Intervalo
h=1	Implementação	0.98600	0.11755	0.00900	0.00500	0.01741
	ugarchboot	0.60889	0.48909	0.34222	0.04889	0.00935
h=2	Implementação	0.99353	0.04537	0.00405	0.00242	0.03059
	ugarchboot	0.72512	0.31755	0.27355	0.00134	0.03467
h=3	Implementação	0.99434	0.02789	0.00250	0.00316	0.03687
	ugarchboot	0.75006	0.24585	0.24972	0.00022	0.05459
h=4	Implementação	0.99406	0.02118	0.00233	0.00361	0.04127
	ugarchboot	0.74796	0.21118	0.25200	0.00004	0.07401
h=5	Implementação	0.99267	0.02153	0.00307	0.00427	0.04466
	ugarchboot	0.72444	0.19651	0.27552	0.00004	0.09384

A figura 5.8 apresenta os limites dos intervalos de previsão obtidos para 20 replicações de Monte Carlo com a adaptação feita nesta dissertação, com a função *ugarchboot* e com os limites empíricos para as previsões $h = 1, 2, 5$ passos à frente dos logaritmos das volatilidades ao quadrado ⁵. O número de replicações bootstrap em cada replicação de Monte Carlo foi de $B = 1000$. Pode-se observar como as larguras dos intervalos não são a razão pela qual as coberturas estimadas estão abaixo da cobertura nominal, mas o deslocamento dos limites do intervalo obtidos com a função *ugarchboot*, sendo que, em vários casos estes intervalos cobrem menos do 50% dos possíveis valores futuros. Já, os limites dos intervalos obtidos com a nossa adaptação acompanham bem aos limites empíricos. Neste caso para uma cobertura nominal de 95% a cobertura média estimada utilizando a nossa adaptação e utilizando *ugarchboot* para as 20 replicações foram respectivamente 0.95 e 0.40 para $h = 1$; 0.98485 e 0.57625 para $h = 2$; e; 0.9615 e 0.53705 para $h = 5$. Para as previsões $h = 3, 4$ passos à frente, o comportamento foi semelhante ao apresentado na figura 5.8,

⁵Foi utilizada esta transformação por ser de comum uso nos modelos EGARCH ($h_T = \log(\sigma_T^2)$) e porque esta transformação permite enxergar melhor as diferenças nos limites dos intervalos de previsão)

sendo que os intervalos empíricos também acompanhavam melhor aos intervalos obtidos com a nossa adaptação do que aos limites obtidos com a função *ugarchboot*. Para facilitar a visualização as replicações foram ordenadas pelo valor de $P_{0.5}$

A figura 5.9 apresenta para uma das série de tamanho $T = 1000$, as densidades estimadas dos valores empíricos σ_{T+h} e dos valores bootstrap de $\sigma_T^*(h)$ obtidos com a adaptação feita nesta dissertação para $h = 1, 2, 3, 4, 5$ passos à frente. A densidade de $\sigma_T^*(h)$ tem o mesmo comportamento do que a distribuição empírica, exceto quando $h = 2$, onde se observa uma diferença nas densidades estimadas. Para a série particular gerada temos que a cobertura estimada para uma cobertura nominal de 95% é 1, 0.986, 0.994, 0.994, 0.991 para $h = 1, 2, 3, 4, 5$ passos à frente respectivamente, e, 1, 0.999, 0.998, 1, 1 para uma cobertura nominal de 99%. Assim como nos casos anteriores a densidade dos valores empíricos de σ_{T+h} é *truncada* pois esta tem um valor mínimo.

5.4 Considerações finais

Entre as considerações finais do estudo de simulações feito, temos:

- As adaptações propostas nesta dissertação apresentaram um bom desempenho tanto para obter intervalos de previsão para os retornos quanto para as volatilidades. Isto não aconteceu nos intervalos de previsão obtidos através da função *ugarchboot* para as volatilidades; em especial, o intervalo para $h = 1$ passo à frente, onde a cobertura estimada está bem abaixo da nominal.
- Os problemas de estacionariedade nas estimações dos parâmetros nas séries bootstrap ocorreram com pouca frequência e, nos casos onde isto aconteceu, as séries

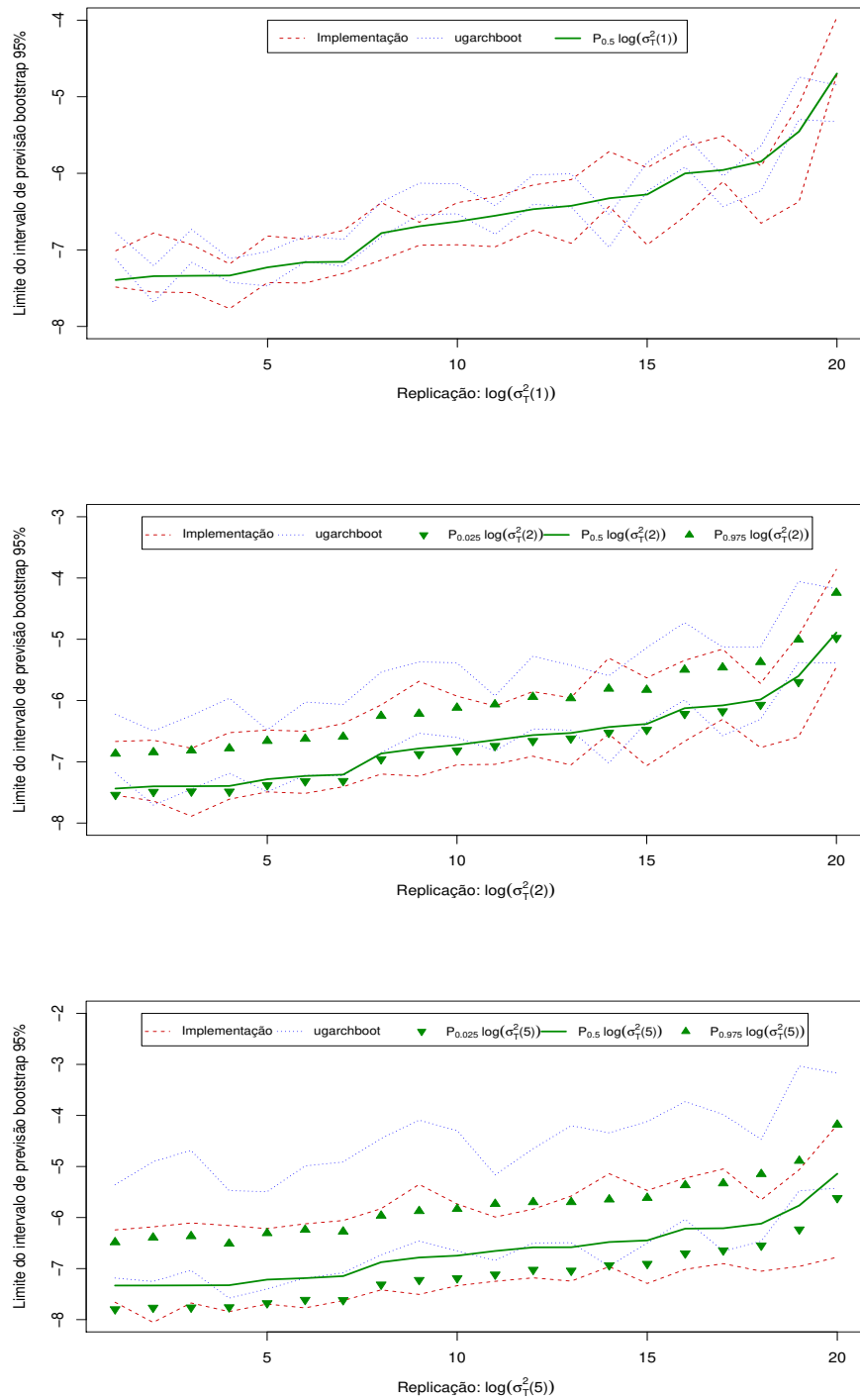


Figura 5.8: Limites de previsão do logaritmo do quadrado das volatilidades 1, 2 e 5 passos à frente para 20 replicações Monte Carlo com probabilidade de cobertura nominal de 95% EGARCH(1,1). Para facilitar a visualização as replicações foram ordenadas pelo valor de $P_{0.5}$

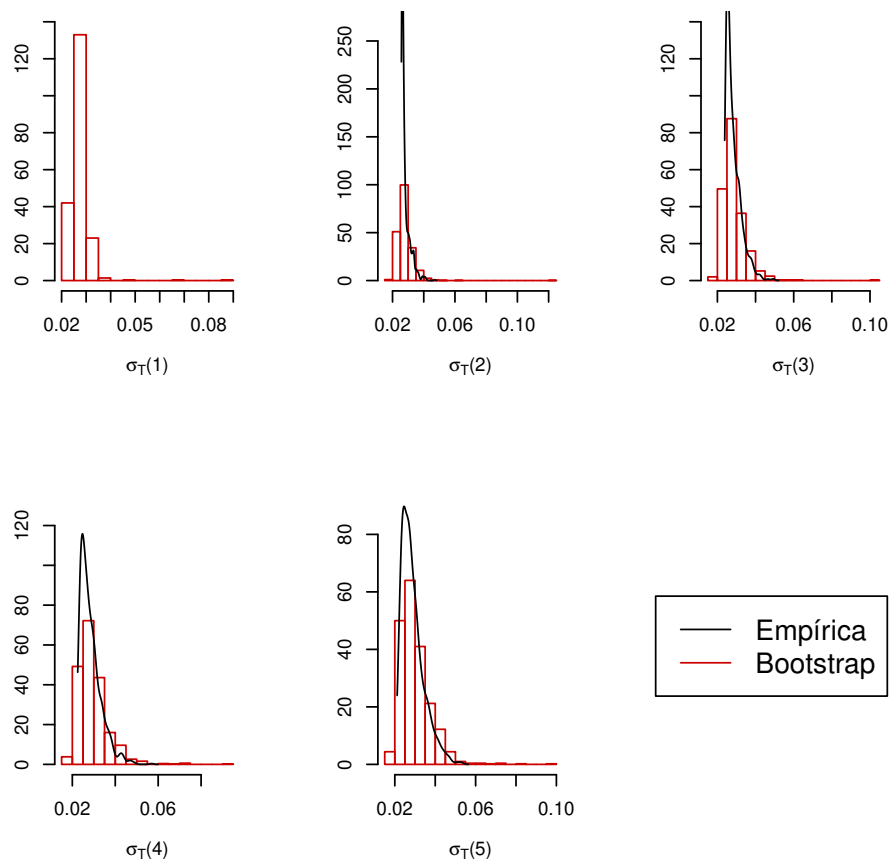


Figura 5.9: Densidade da distribuição das volatilidades $h = 1, 2, 3, 4, 5$ passos à frente para uma das séries geradas pelo processo EGARCH(1,1)

foram substituídas por novas séries bootstrap.

- Os resultados obtidos utilizando *ugarchboot* não foram satisfatórios em termos de probabilidade de cobertura para as volatilidades.
- Inicialmente, na implementação do algoritmo PRR, foi utilizada a função *garch* do pacote *tseries* do *R* para estimar os parâmetros do modelo. Com esta função os resultados obtidos eram diferentes dos obtidos por Pascual *et al.* (2006). Isto foi solucionado ao se utilizar a função *ugarchfit* do pacote *rugarch* para estimar os modelos. Foi verificado que o problema ocorreu porque para várias estimativas das séries bootstrap as estimativas dadas pela função *garch* muitas vezes estavam muito afastadas do valor real, fato que não ocorreu com a função *ugarchfit*.
- Para intervalos de previsão com nível de confiança de 99% recomenda-se utilizar um número de reamostras bootstrap superior ao utilizado aqui; utilizar $B = 10000$ é uma boa sugestão para um número apropriado de reamostras.
- Em alguns casos o algoritmo PRR apresentou problemas na cobertura das volatilidades para $h = 1$ passo à frente quando tínhamos alta persistência, embora, para outros casos não tenha ocorrido este problema nas coberturas. Não foi encontrada uma explicação sobre os motivos de terem ocorrido problemas de cobertura em alguns casos.
- Embora a função *ugarchboot* obtenha intervalos de previsão para as volatilidades com maior amplitude para o modelo EGARCH do que com a nossa adaptação, não houve um aumento nas coberturas estimadas, dado que os intervalos obtidos são deslocados.

Capítulo 6

Aplicações

Neste capítulo são apresentadas duas aplicações dos procedimentos bootstrap descritos nos capítulos anteriores. Será avaliada a série de retornos diários do Ibovespa, no período de 4 de janeiro de 2000 a 30 de abril de 2012, e a série de retornos diários do índice da bolsa de valores de Nova Iorque *NYSE COMPOSITE(DJ)*, chamada de NYA no *yahoo finance*, no período de 11 de fevereiro de 2003 a 30 de abril de 2012. Nas duas séries é utilizado o retorno composto, ou log-retorno. Na seção 6.1 é apresentada a metodologia utilizada na análise das séries, nas seções 6.2 e 6.3 são apresentadas as análises da série de retornos diários da Ibovespa e da série diária de retornos da NYA, respectivamente.

6.1 Metodologia

Antes da aplicação dos modelos de volatilidade foi considerada a necessidade de se filtrar a séries de retornos para retirar a dependência temporal no nível. Na séries de retornos do Ibovespa foi necessário apenas retirar a média, enquanto para a série NYA foi ajustado um modelo AR(1). Após a filtragem foram considerados ajustes e previsões dos retornos filtrados através dos modelos GARCH(1,1), EGARCH(1,1) e GJR-GARCH(1,1).

Para avaliar os intervalos de previsão dos retornos, foi analisado se seus *valores verdadeiros* estão dentro ou fora dos intervalos. No caso onde não foi utilizado o filtro AR(1) aos retornos, os *valores verdadeiros* dos retornos são simplesmente os retornos originais, mas no caso onde foi utilizado o filtro AR(1), os *valores verdadeiros* são os retornos após o filtro AR(1). Como estamos interessados nos intervalos de previsão dos modelos de volatilidade será considerados que não houve erro na filtragem. Na prática não observamos diretamente as volatilidades e, com o objetivo de avaliar os intervalos de previsão das volatilidades, foram consideradas como *valores reais* das volatilidades as volatilidades estimadas obtidas em cada um dos ajustes. Esta forma de análise é a mesma utilizada por Pascual *et al.* (2006). Note que, na primeira série, os *valores reais* dos retornos permanecerão iguais nos três modelos ajustados, mas os *valores reais* das volatilidades dependerão do ajuste feito. De forma semelhante, para a segunda série, temos que os *valores reais* dos retornos permanecerão os mesmos para os três modelos ajustados (pois foi aplicado o mesmo filtro, AR(1)), embora, para as volatilidades, a igual do que na primeira série, os *valores reais* dependerão do ajuste feito. As séries analisadas foram centradas, para trabalhar com séries de nível zero.

Em uma primeira análise os modelos foram ajustados para $T - 20$ observações, onde T é o número de retornos. As últimas 20 observações (correspondentes ao último mês) foram utilizadas para avaliar os intervalos de previsão obtidos dos retornos e das volatilidades $h = 1, 2, \dots, 20$ passos à frente.

Em uma segunda análise são construídas janelas móveis de tamanho $T - 250$ para obter os intervalos de previsão para os retornos e volatilidades $h = 1, 2, 3, 4, 5$ passos à frente. Este procedimento é feito 245 vezes, por exemplo na primeira vez são consideradas

desde a observação 1 até a observação $T - 250$, na segunda vez, são consideradas desde a observação 2 até a observação $T - 250 + 1$ e assim por diante. Em cada passo, foi contabilizado se os intervalos obtidos cobriam ou não os *valores verdadeiros*.

6.2 Série Bovespa

Foi extraída do site da Bovespa www.bmfbovespa.com.br a série de retornos diários do Ibovespa, no período de 4 de janeiro de 2000 a 30 de abril de 2012, num total de $T = 3054$ observações. O gráfico da evolução dos preços do Ibovespa e o gráficos dos retornos são apresentados na figura 6.1. A série de retornos não apresenta indicações de não estacionariedade e apresenta agrupamentos das volatilidades. Pode-se ver como a crise do 2008 afetou os preços gerando uma queda, e uma grande volatilidade nesse período. As estatísticas descritivas para a série diária de retornos são apresentadas na tabela 6.1. A média da série é igual a 0.00042 e o desvio padrão igual a 0.01930.

Tabela 6.1: Estatísticas descritivas da série diária de retornos do Ibovespa.

Média	D.P	Mínimo	Quar. 1	Mediana	Quar. 3	Máximo	Assimetria	Curtose
0.00042	0.01930	-0.12100	-0.01021	0.00109	0.01164	0.13680	-0.12711	6.779

6.2.1 Modelos ajustados

A figura 6.2 apresenta a função de autocorrelação dos retornos. Entre as cinco primeiras autocorrelações apenas a terceira ordem é significativa ao nível de confiança de 5%, mas tem um valor pequeno. Para remover essa autocorrelação significativa teríamos que aplicar um filtro AR(p) ou ARMA(p,q) de ordens muito grande, e ainda assim não teríamos muita diferença em termos práticos com os modelos ajustados considerando um termo constante, motivo pelo qual

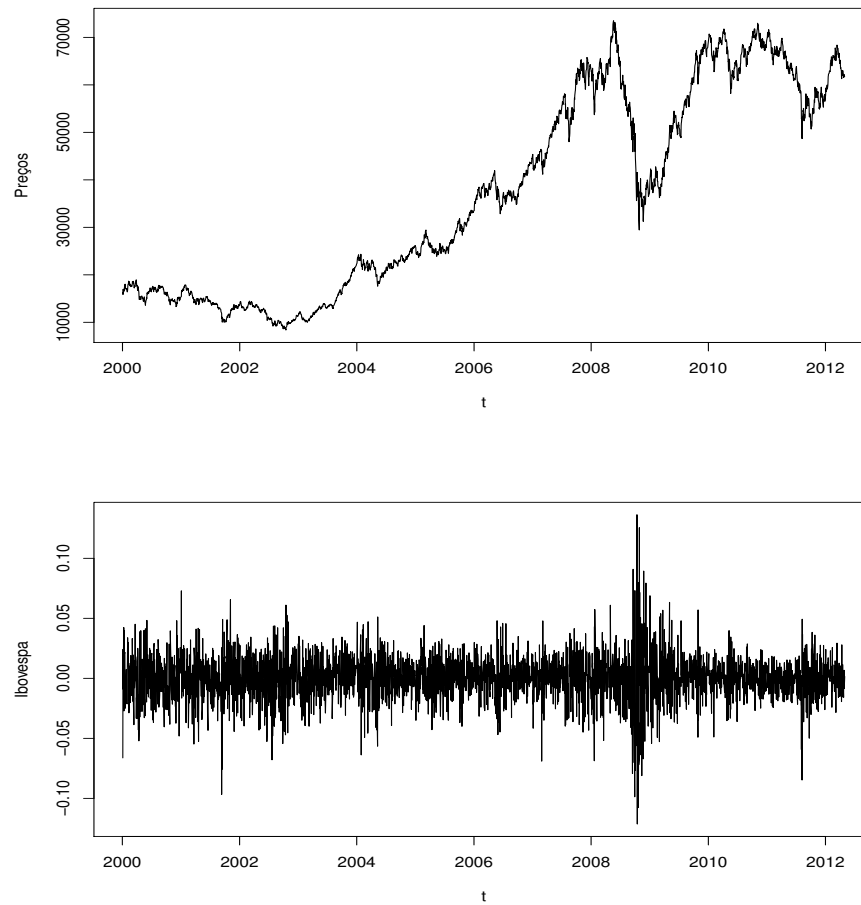


Figura 6.1: Evolução diária dos preços do Ibovespa, no período 3 de janeiro de 2000 a 30 de Abril de 2012 e retornos diários do Ibovespa, no período 4 de janeiro de 2000 a 30 de Abril de 2012

foi ajustado apenas uma constante.

As estimativas dos parâmetros dos modelos GARCH(1,1), EGARCH(1,1) e GJR-GARCH(1,1) ajustados à série diária de retornos do Ibovespa assim como os respectivos desvios padrão e os valores das estatísticas AIC e BIC para escolha do modelo são apresentados na tabela 6.2. O ajuste foi realizado sobre a série completa de retornos, de 4 de janeiro de 2000 a 30 de Abril de 2012. Observa-se que o menor valor do AIC e BIC correspondem ao modelo GJR-GARCH(1,1), o que indica que este modelo apresenta o melhor ajuste em termos de verossimilhança, após penalização pelo número de parâmetros. No entanto, é interessante notar que em todos os modelos ajustados todos os parâmetros estimados são altamente significativos, exceto um dos parâmetros do modelo GJR-GARCH(1,1).

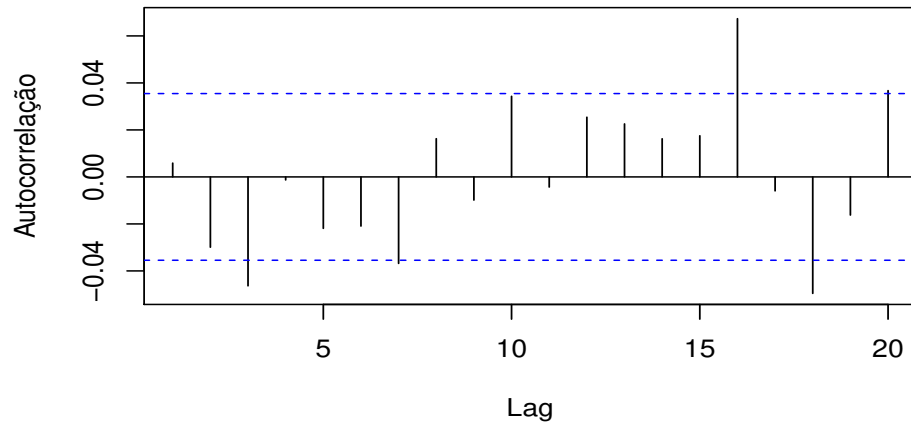


Figura 6.2: Função de autocorrelação amostral da série diária de retornos do Ibovespa.

Os gráficos das autocorrelações dos retornos ao quadrado, e das inovações ao quadrado após ajustar os modelos GARCH(1,1), EGARCH(1,1) e GJR-GARCH(1,1) são apresentados na figura 6.3, de onde concluímos que os três modelos utilizados descrevem adequadamente a volatilidade. Os três modelos ajustados explicam grande parte do comportamento dos dados.

Tabela 6.2: Estimação da série diária de retornos do Ibovespa, no período 4 de janeiro de 2000 a 30 de Abril de 2012.

	GARCH(1,1)		EGARCH(1,1)		GJR GARCH(1,1)	
	Estimativa	D.P	Estimativa	D.P	Estimativa	D.P
ω	0.000007	0.000002	-0.211605	0.045157	0.000009	0.000002
α	0.072036	0.009657	-0.083874	0.011181	0.009645	0.008425
β	0.907968	0.012412	0.973687	0.005574	0.909102	0.013397
γ	-	-	0.127706	0.016181	0.106639	0.017082
AIC	-5.2491		-5.2683		-5.2700	
BIC	-5.2432		-5.2604		-5.2621	

Embora tenha algumas correlações fora dos limites de confiança, os modelos descrevem bem os dados analisados, e para melhorar o ajuste teríamos que aumentar muito a ordem do modelo, e ainda assim não teríamos muita diferença em termos práticos com os modelos aqui ajustados. Como todos os modelos passam nos testes usuais de diagnósticos eles foram utilizados para construir intervalos de confiança. Os ajustes em todas as janelas móveis também apresentaram resultados semelhantes.

6.2.2 Intervalos de previsão

As figuras 6.4, 6.5 e 6.6 apresentam os limites de previsão para $h = 1, 2, \dots, 20$ passos à frente (correspondente ao mês de abril de 2012) dos retornos e das volatilidades utilizando o algoritmo PRR e as adaptações feitas nesta dissertação para os modelos EGARCH e GJR-GARCH. Os limites são apresentados com nível de confiança de 90%, 95% e 99%. Para os retornos temos que os intervalos de previsão utilizando o modelo GARCH(1,1) são menores do que com os outros modelos e os intervalos de previsão de maior amplitude são os obtidos utilizando o modelo EGARCH(1,1). Para as volatilidades temos que o limite superior dos intervalos de previsão mais pequeno corresponde ao obtido utilizando o modelo GARCH(1,1) e o limite superior maior é o obtido utilizando o modelo EGARCH(1,1). No caso das volatilidades temos que os limites obtidos não são quase iguais como no caso dos retornos. Nos três modelos os intervalos obtidos mostram resultados satisfatórios. Para o caso dos retornos temos que os intervalos de previsão

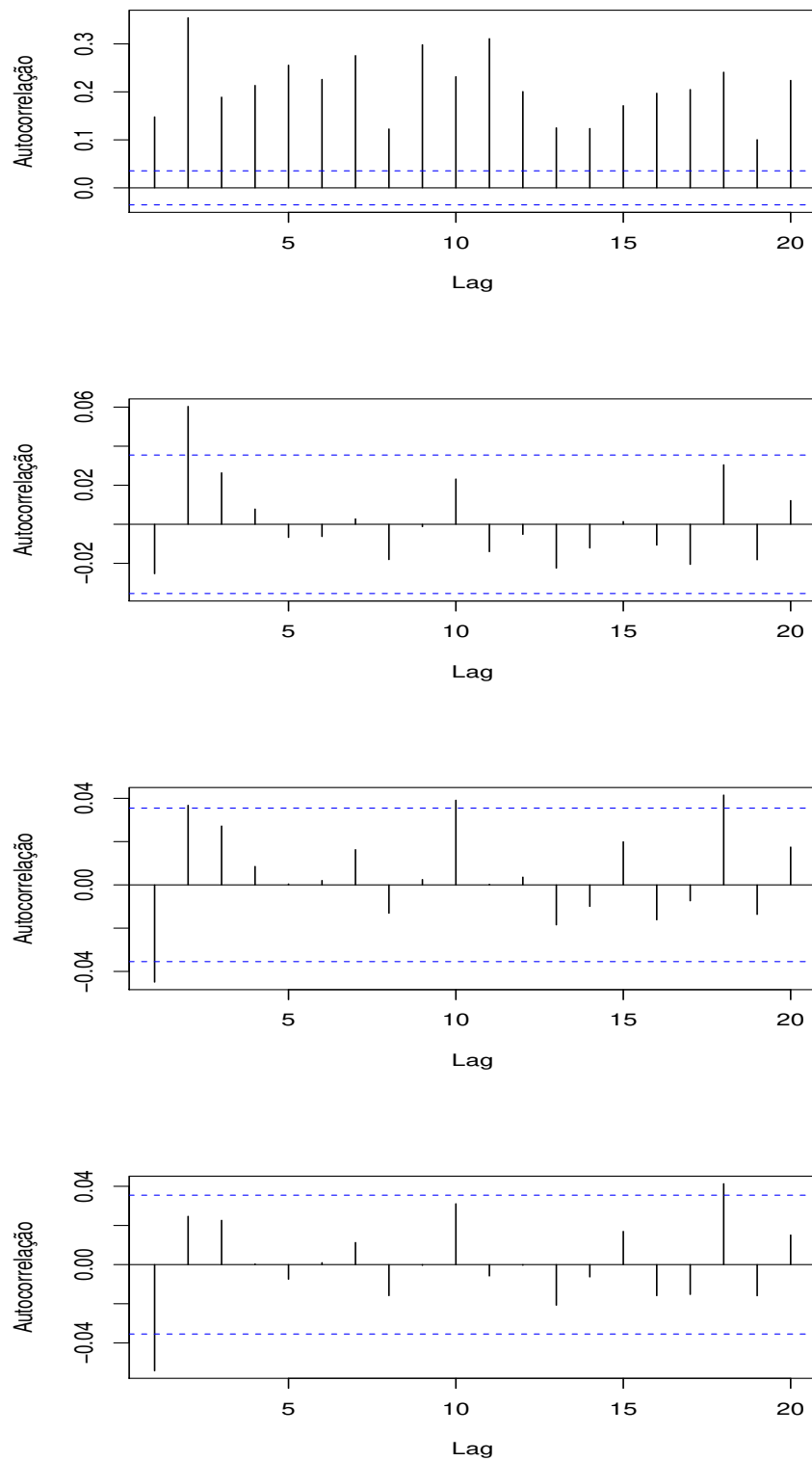


Figura 6.3: Autocorrelações dos retornos ao quadrado e autocorrelações das inovações ao quadrado da série de retornos diários da Ibovespa após ter ajustado o modelo GARCH(1,1), EGARCH(1,1) e GJR GARCH(1,1)

para os $h = 1, 2, \dots, 20$ passos à frente cobrem o *valor real* na maioria dos pontos, somente quando $h = 8$ temos que este valor está fora do intervalo de previsão com nível de confiança de 90% para os intervalos obtidos com os três modelos e, fora do intervalo de previsão com nível de confiança de 95% com o modelo GARCH(1,1). No caso das volatilidades, temos que todos os intervalos de previsão obtidos cobrem todos os *valores reais* das volatilidades (inclusive quando o nível de confiança é de 90%). Para se obter os intervalos de previsão bootstrap das volatilidades foi simplesmente utilizada a transformação raiz quadrada para os modelos GARCH e GJR-GARCH, e a raiz quadrada da exponencial para o modelo EGARCH; ou seja, não trabalhamos com correção do vício.

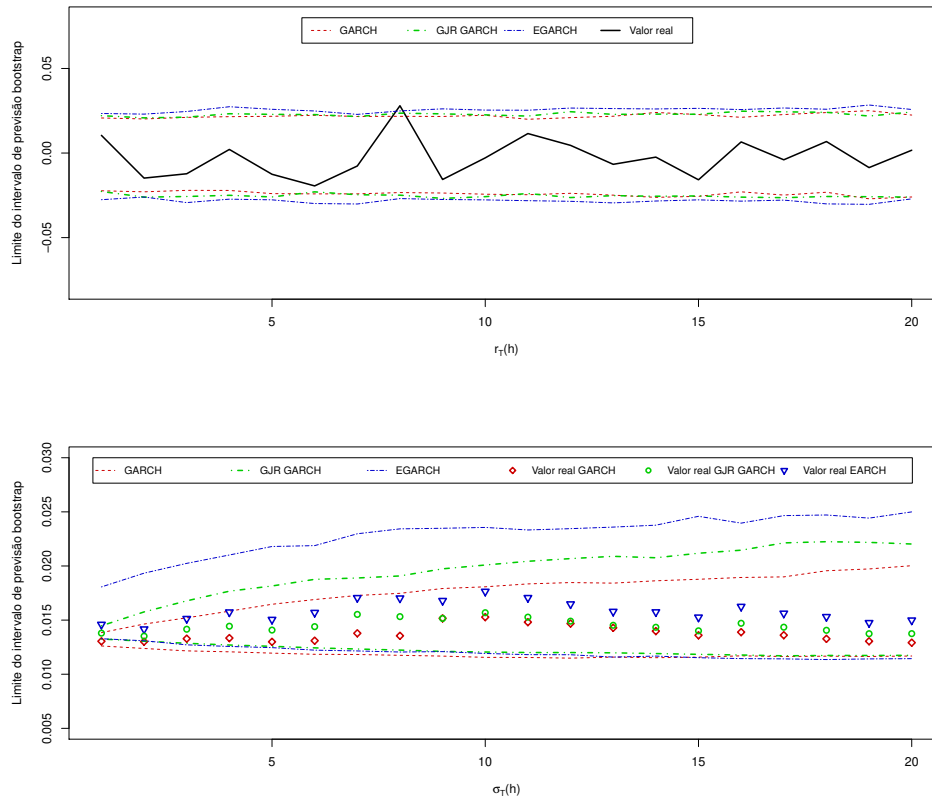


Figura 6.4: Limites de previsão 90% dos retornos e volatilidades utilizando os modelos GARCH(1,1), EGARCH(1,1) e GJR GARCH(1,1).

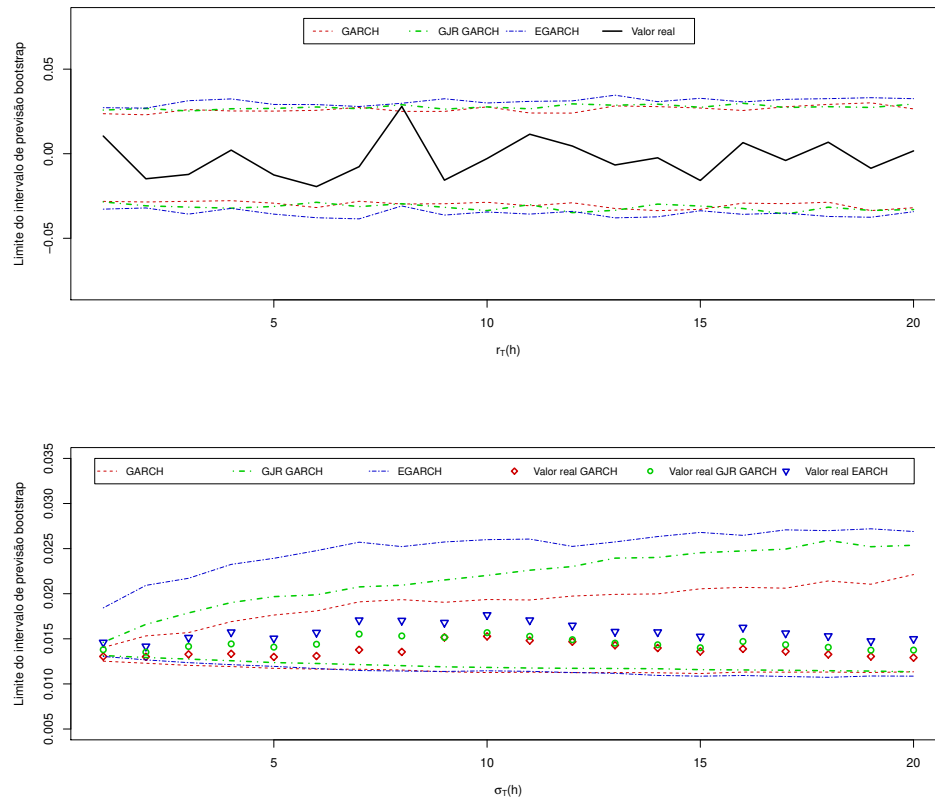


Figura 6.5: Limites de previsão 95% dos retornos e volatilidades utilizando os modelos GARCH(1,1), EGARCH(1,1) e GJR GARCH(1,1).

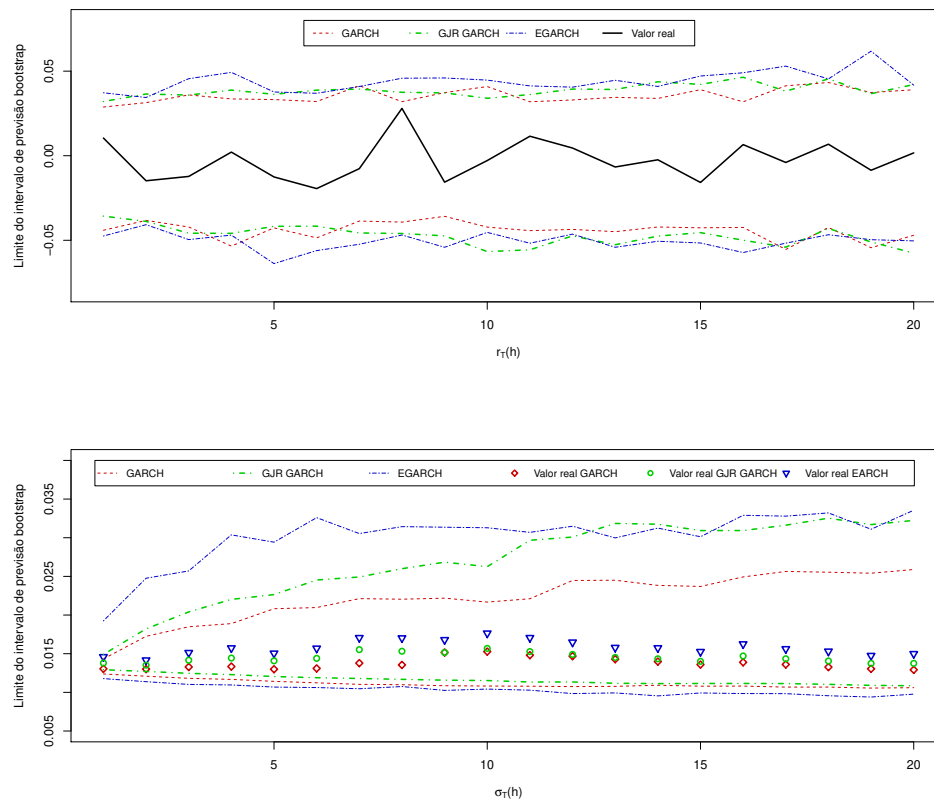


Figura 6.6: Limites de previsão 99% dos retornos e volatilidades utilizando os modelos GARCH(1,1), EGARCH(1,1) e GJR GARCH(1,1).

Nas tabelas 6.3, 6.4 e 6.5 temos os resultados obtidos ao utilizar o procedimento PRR e as adaptações feitas nesta dissertação às janelas móveis utilizadas. O procedimento bootstrap proposto por Pascual *et al.* (2006) e as adaptações propostas nesta dissertação tem bons resultados, sendo que das $N = 245$ vezes que foram construídos intervalos de previsão temos que os limites de previsão 90%, 95% e 99% cobrem os verdadeiros valores, tanto nos retornos como nas volatilidades. Os resultados de 99% precisam ser analisados com certo cuidado porque temos apenas 245 intervalos. Estes resultados concordam, para o caso do algoritmo PRR, com os resultados obtidos por Pascual *et al.* (2006). Entre os principais resultados temos:

- Utilizando os três modelos a cobertura dos retornos é sempre maior do que a cobertura nominal.
- A cobertura utilizando o modelo EGARCH é sempre maior do que com os outros modelos (exceto no caso das volatilidades quando $h = 1$).
- O desvio padrão da cobertura para os retornos utilizando o modelo EGARCH é sempre menor do que o desvio padrão obtido utilizando os outros modelos.
- Os intervalos de previsão para as volatilidades (90%, 95% e 99%) cobrem os *valores reais* em todos os casos quando $h = 1$ e os modelos utilizados são GARCH e GJR-GARCH.
- A respeito da cobertura das volatilidades e o desvio padrão da cobertura das volatilidades, não se observa um padrão nos intervalos que nos possa indicar se com algum modelo a cobertura é maior ou menor, pois isto varia dependendo do nível de confiança utilizado.
- Utilizando qualquer um dos modelos, a cobertura para as volatilidades é sempre maior do que a nominal (90%, 95%).
- Como todos os modelos passam pelos testes de diagnostico e, em termos de intervalos de previsão bootstrap (cobertura e largura dos intervalos) não existe um modelo que domine os outros; os modelos são equivalentes para os objetivos propostos.

Tabela 6.3: Porcentagem de cobertura para os retornos e volatilidades da série de retornos diários do Ibovespa. Cobertura nominal de 90%

Retornos					
Previsão	Modelo	Cobertura	DP	Inf	Sup
h=1	GARCH	0.930612	0.254633	0.036735	0.032653
	EGARCH	0.938776	0.240232	0.028571	0.032653
	GJR	0.930612	0.254633	0.040816	0.028571
h=2	GARCH	0.926531	0.261440	0.040816	0.032653
	EGARCH	0.938776	0.240232	0.028571	0.032653
	GJR	0.934694	0.247571	0.040816	0.024490
h=3	GARCH	0.926531	0.261440	0.040816	0.032653
	EGARCH	0.938776	0.240232	0.040816	0.020408
	GJR	0.930612	0.254633	0.040816	0.028571
h=4	GARCH	0.926531	0.261440	0.044898	0.028571
	EGARCH	0.942857	0.232591	0.036735	0.020408
	GJR	0.930612	0.254633	0.044898	0.024490
h=5	GARCH	0.930612	0.254633	0.044898	0.024490
	EGARCH	0.938776	0.240232	0.036735	0.024490
	GJR	0.934694	0.247571	0.036735	0.028571
Volatilidades					
h=1	GARCH	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	EGARCH	0.926531	0.261440	0.032653	0.040816
	GJR	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000
h=2	GARCH	0.971429	0.166940	0.028571	0.000000
	EGARCH	0.955102	0.207504	0.012245	0.032653
	GJR	0.971429	0.166940	0.028571	0.000000
h=3	GARCH	0.967347	0.178091	0.032653	0.000000
	EGARCH	0.959184	0.198270	0.016327	0.024490
	GJR	0.967347	0.178091	0.032653	0.000000
h=4	GARCH	0.979592	0.141681	0.020408	0.000000
	EGARCH	0.955102	0.207504	0.016327	0.028571
	GJR	0.967347	0.178091	0.032653	0.000000
h=5	GARCH	0.975510	0.154880	0.024490	0.000000
	EGARCH	0.946939	0.224614	0.016327	0.036735
	GJR	0.971429	0.166940	0.028571	0.000000

Tabela 6.4: Porcentagem de cobertura para os retornos e volatilidades da série de retornos diários do Ibovespa. Cobertura nominal de 95%

Retornos					
Previsão	Modelo	Cobertura	DP	Inf	Sup
h=1	GARCH	0.959184	0.198270	0.024490	0.016327
	EGARCH	0.975510	0.154880	0.012245	0.012245
	GJR	0.967347	0.178091	0.016327	0.016327
h=2	GARCH	0.959184	0.198270	0.024490	0.016327
	EGARCH	0.959184	0.198270	0.020408	0.020408
	GJR	0.955102	0.207504	0.024490	0.020408
h=3	GARCH	0.959184	0.198270	0.024490	0.016327
	EGARCH	0.963265	0.188495	0.020408	0.016327
	GJR	0.955102	0.207504	0.028571	0.016327
h=4	GARCH	0.955102	0.207504	0.028571	0.016327
	EGARCH	0.971429	0.166940	0.012245	0.016327
	GJR	0.967347	0.178091	0.016327	0.016327
h=5	GARCH	0.955102	0.207504	0.028571	0.016327
	EGARCH	0.967347	0.178091	0.016327	0.016327
	GJR	0.963265	0.188495	0.020408	0.016327
Volatilidades					
h=1	GARCH	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	EGARCH	0.979592	0.141681	0.008163	0.012245
	GJR	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000
h=2	GARCH	0.987755	0.110202	0.012245	0.000000
	EGARCH	0.987755	0.110202	0.004082	0.008163
	GJR	0.983673	0.126987	0.016327	0.000000
h=3	GARCH	0.983673	0.126987	0.016327	0.000000
	EGARCH	0.991837	0.090165	0.000000	0.008163
	GJR	0.975510	0.154880	0.024490	0.000000
h=4	GARCH	0.979592	0.141681	0.020408	0.000000
	EGARCH	0.979592	0.141681	0.012245	0.008163
	GJR	0.979592	0.141681	0.020408	0.000000
h=5	GARCH	0.975510	0.154880	0.024490	0.000000
	EGARCH	0.987755	0.110202	0.008163	0.004082
	GJR	0.979592	0.141681	0.020408	0.000000

Tabela 6.5: Porcentagem de cobertura para os retornos e volatilidades da série de retornos diários do Ibovespa. Cobertura nominal de 99%

Retornos					
Previsão	Modelo	Cobertura	DP	Inf	Sup
h=1	GARCH	0.991837	0.090165	0.000000	0.008163
	EGARCH	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	GJR	0.987755	0.110202	0.000000	0.012245
h=2	GARCH	0.987755	0.110202	0.000000	0.012245
	EGARCH	0.995918	0.063888	0.000000	0.004082
	GJR	0.991837	0.090165	0.000000	0.008163
h=3	GARCH	0.991837	0.090165	0.000000	0.008163
	EGARCH	0.991837	0.090165	0.000000	0.008163
	GJR	0.991837	0.090165	0.000000	0.008163
h=4	GARCH	0.983673	0.126987	0.000000	0.016327
	EGARCH	0.991837	0.090165	0.000000	0.008163
	GJR	0.987755	0.110202	0.004082	0.008163
h=5	GARCH	0.987755	0.110202	0.000000	0.012245
	EGARCH	0.991837	0.090165	0.000000	0.008163
	GJR	0.987755	0.110202	0.004082	0.008163
Volatilidades					
h=1	GARCH	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	EGARCH	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	GJR	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000
h=2	GARCH	0.991837	0.090165	0.008163	0.000000
	EGARCH	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	GJR	0.987755	0.110202	0.012245	0.000000
h=3	GARCH	0.983673	0.126987	0.016327	0.000000
	EGARCH	0.995918	0.063888	0.000000	0.004082
	GJR	0.987755	0.110202	0.012245	0.000000
h=4	GARCH	0.979592	0.141681	0.020408	0.000000
	EGARCH	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	GJR	0.987755	0.110202	0.012245	0.000000
h=5	GARCH	0.979592	0.141681	0.020408	0.000000
	EGARCH	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	GJR	0.987755	0.110202	0.012245	0.000000

6.3 Série do índice da bolsa de valores de Nova Iorque

A série de retornos diários do *NYSE COMPOSITE(DJ)*, chamada de NYA no *yahoo finance*, no período de 11 de fevereiro de 2003 a 30 de abril de 2012 foi obtida através de *yahoo finance*. O gráfico da evolução dos preços do NYA e os gráficos dos retornos são apresentados na figura 6.7. A série dos retornos não apresenta indicações de não estacionariedade e apresenta agrupamentos das volatilidades. Pode-se ver como a crise do 2008 afetou os preços gerando uma forte queda, e uma grande volatilidade nesse período. As estatísticas descritivas para a série diária de retornos são apresentadas na tabela 6.6, com a média da série possui igual a 0.00022 e o desvio padrão igual a 0.01385.

Tabela 6.6: Estatísticas descritivas da série diária de retornos do NYA.

Média	D.P	Mínimo	Quar. 1	Mediana	Quar. 3	Máximo	Assimetria	Curtose
0.00022	0.01385	-0.10230	-0.00481	0.00069	0.00625	0.11530	-0.42106	13.201

6.3.1 Modelo ajustado

A figura 6.8 apresenta a função de autocorrelação dos retornos do NYA e dos retornos do NYA após o filtro AR(1). Foram ajustados vários modelos mas os coeficientes de maior ordem não eram significativos, assim foi escolhido o filtro AR(1). No gráfico inferior podemos ver que entre as cinco primeiras autocorrelações, a segunda e a quinta são significativa ao nível de confiança de 5%, mas tem um valor pequeno. Para remover essas autocorrelações significativas teríamos que aplicar um filtro AR(p) de ordem muito grande, e mesmo assim não teríamos muita diferença em termos práticos com os modelos ajustados considerando o filtro AR(1). Daí, termos optado pelo modelo mais parcimonioso, AR(1).

As estimativas dos parâmetros dos modelos AR(1)-GARCH(1,1), AR(1)-EGARCH(1,1) e AR(1)-GJR-GARCH(1,1) ajustados assim como os respectivos desvios padrão e os valores das estatísticas AIC e BIC para escolha do modelo são apresentados na tabela 6.7. Observa-se que o menor valor do AIC e BIC correspondem ao modelo GJR-GARCH(1,1), o que indica que este

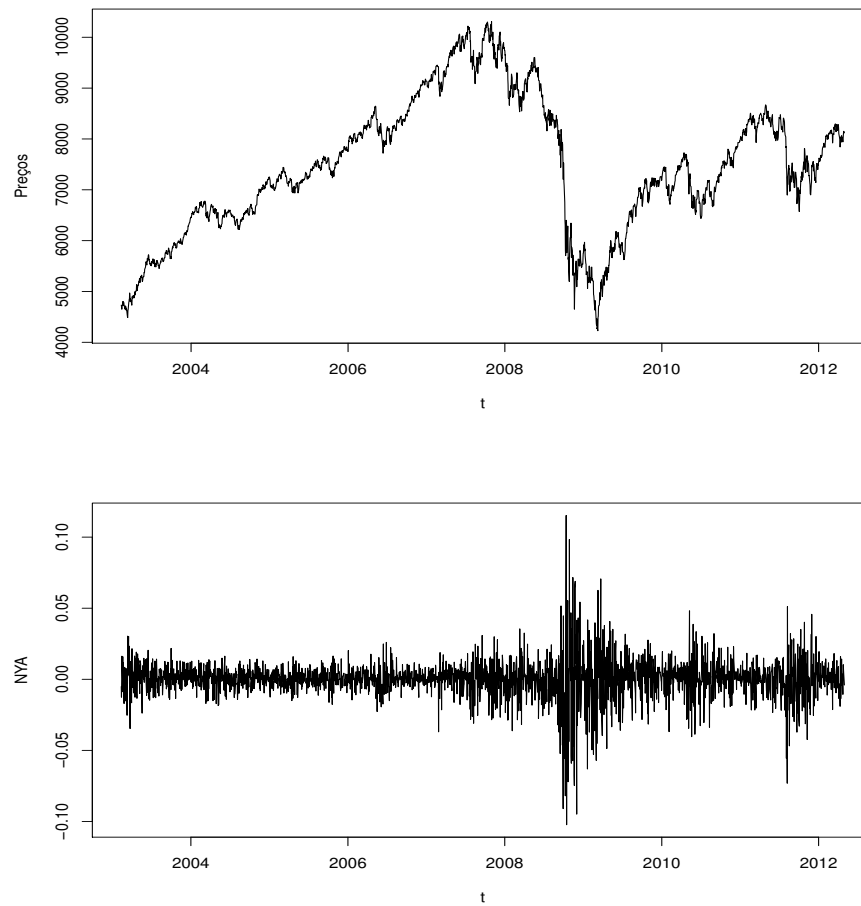


Figura 6.7: Evolução diária dos preços do índice da bolsa de valores de Nova Iorque (NYA), no período 10 de fevereiro de 2003 a 30 de Abril de 2012 e Retornos diários do índice da bolsa de valores de Nova Iorque (NYA), no período 11 de fevereiro de 2003 a 30 de Abril de 2012

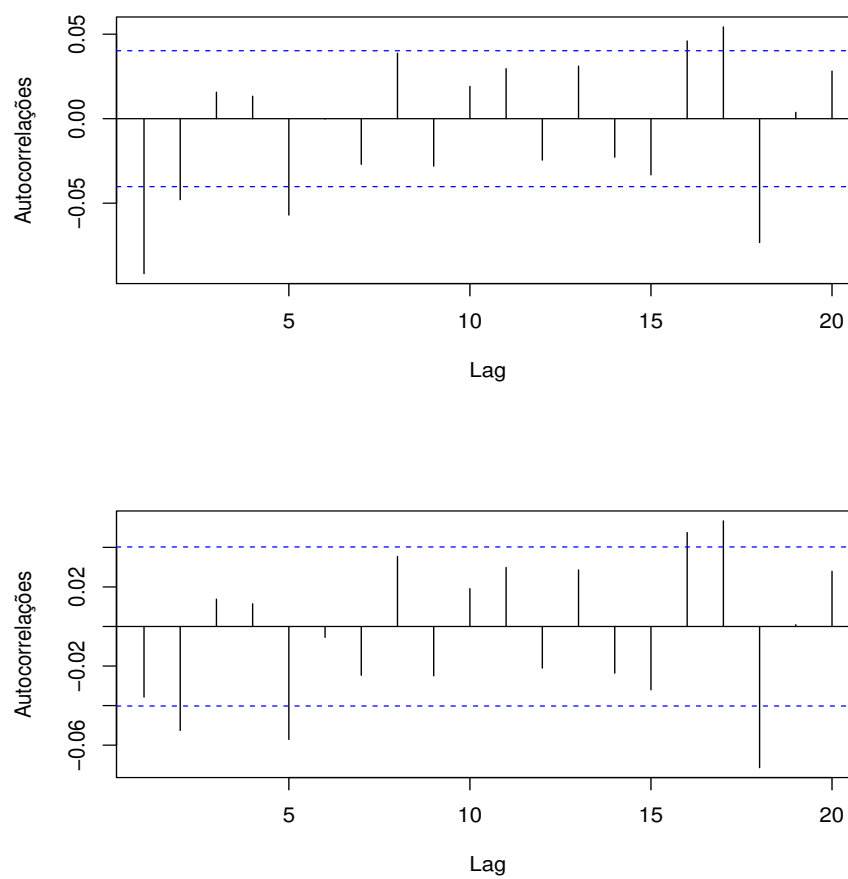


Figura 6.8: Função de Autocorrelação amostral dos retornos do índice da bolsa de valores de Nova Iorque (NYA), e dos retornos após o filtro AR(1)

modelo apresenta o melhor ajuste em termos de verossimilhança, após penalização pelo número de parâmetros.

Tabela 6.7: Estimação da série diária de retornos do índice da bolsa de valores de Nova Iorque (NYA), no período 11 de fevereiro de 2003 a 30 de Abril de 2012.

	GARCH(1,1)		EGARCH(1,1)		GJR GARCH(1,1)	
	Estimativa	D.P	Estimativa	D.P	Estimativa	D.P
AR	-0.059486	0.02135	-0.056949	0.022336	-0.050627	0.022194
ω	0.000001	0.000000	-0.125333	0.021293	0.000001	0.000000
α	0.075976	0.008588	-0.101131	0.011053	0.000000	0.021974
β	0.915581	0.009025	0.985794	0.002335	0.929837	0.017051
γ	-	-	0.108235	0.013676	0.111086	0.018021
AIC	-6.3348		-6.3588		-6.3665	
BIC	-6.3251		-6.3467		-6.3543	

Os gráficos das autocorrelações dos retornos ao quadrado e das inovações ao quadrado após ajustar os modelos AR(1)-GARCH(1,1), AR(1)-EGARCH(1,1) e AR(1)-GJR-GARCH(1,1) são apresentados na figura 6.9, de onde concluimos que os três modelos utilizados descrevem adequadamente a volatilidade. Os três modelos ajustados explicam grande parte do comportamento dos dados, embora tenha algumas correlações fora dos limites de confiança os modelos descrevem bem os dados analisados, para melhorar o ajuste teríamos que aumentar muito a ordem do modelo, e mesmo assim não teríamos muita diferença em termos práticos com os modelos aqui ajustados.

6.3.2 Intervalos de previsão

Foram obtidos os intervalos de previsão bootstrap dos retornos e das volatilidades para $h = 1, 2, \dots, 20$ passos à frente (correspondente ao mês de abril de 2012) utilizando o algoritmo PRR e as adaptações feitas nesta dissertação, os limites de previsão ao 90%, 95% e 99% para os retornos e volatilidades são apresentados nas figuras 6.10, 6.11 e 6.12 respectivamente, onde pode-se observar como para o caso dos retornos os intervalos cobrem aos *valores reais* na maioria dos pontos, sendo que apenas dois valores estão fora dos limites obtidos com o modelos EGARCH

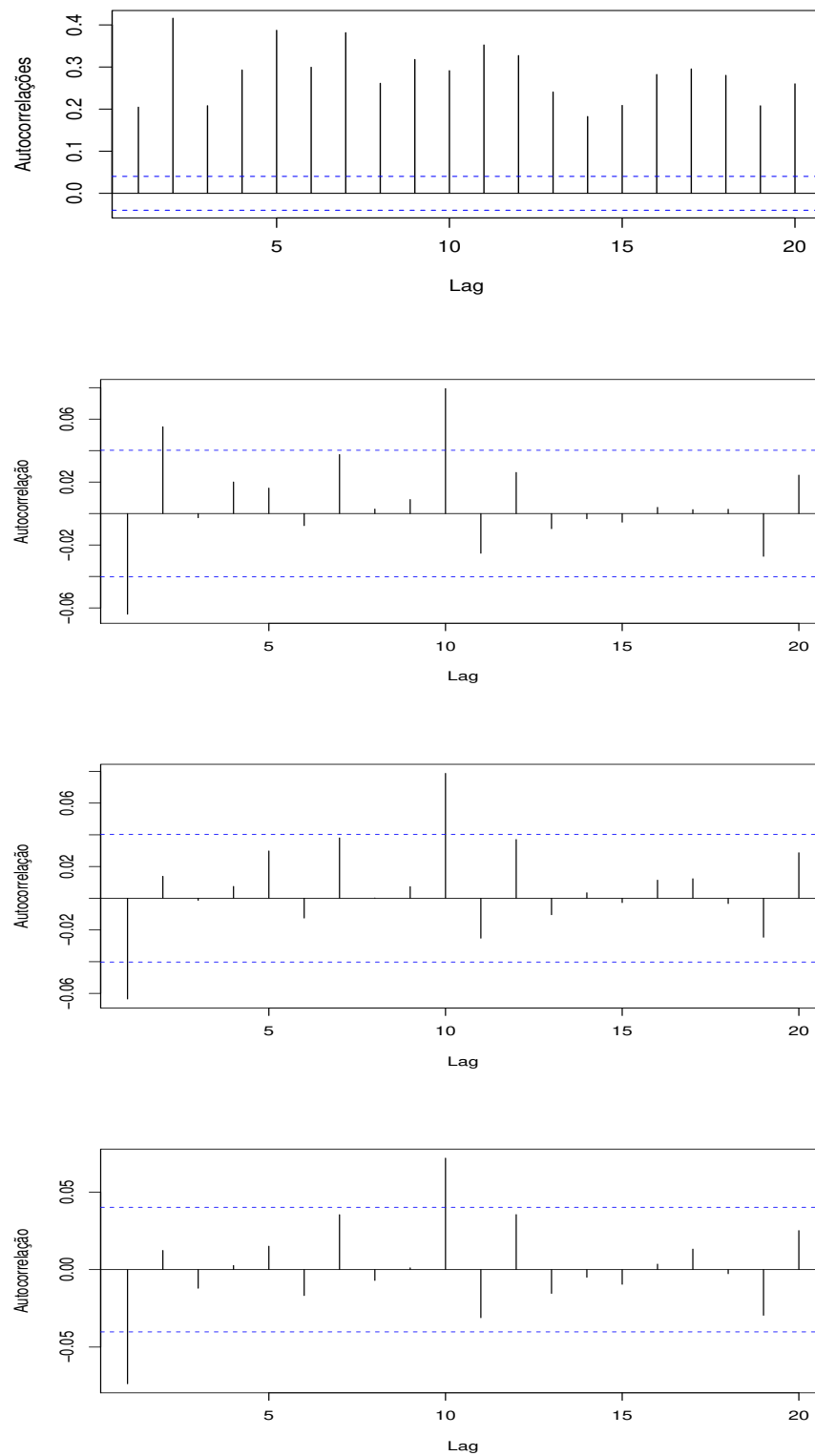


Figura 6.9: Função de autocorrelação dos retornos ao quadrado do índice da bolsa de valores de Nova Iorque (NYA) e das inovações ao quadrado dos modelos $AR(1)$ -GARCH(1,1), $AR(1)$ -EGARCH(1,1), $AR(1)$ -GJR-GARCH(1,1)

e 3 valores fora dos limites obtidos com os modelos GARCH e GJR-GARCH para um nível de confiança de 90%. Para os limites ao 95% temos que apenas 2 valores estão fora dos limites obtidos com o modelo GJR-GARCH e um valor fora do limite obtido com o modelo GARCH. Para as volatilidades os intervalos com 95% e 99% de confiança cobrem aos *valores reais* em todos os pontos, quando os limites dos intervalos estão com um nível de confiança de 90% temos que três valores estão fora dos limites obtidos com o modelo GJR-GARCH. Estes resultados concordam com os resultados obtidos nas simulações. Para se obter os intervalos de previsão bootstrap das volatilidades foi simplesmente utilizada a transformação raiz quadrada para os modelos GARCH e GJR-GARCH, e a raiz quadrada da exponencial para o modelo EGARCH; ou seja, não trabalhamos com correção do vício.

Um resumo dos resultados obtidos utilizando o procedimento PRR e as adaptações feitas nesta dissertação aos retornos após o filtro AR(1) são apresentadas nas tabelas 6.8 e 6.9. O procedimento bootstrap proposto por Pascual *et al.* (2006) e as adaptações propostas nesta dissertação mostram bons resultados, sendo que nestes dados reais das $N = 245$ vezes em que foram construídos os intervalos de previsão, temos que os limites de previsão 90%, 95% e 99% cobrem bem aos verdadeiros valores, tanto nos retornos como nas volatilidades, tendo proporções de cobertura próximas às nominais. Os resultados aqui mostrados concordam com as simulações. Ao igual do que na aplicação anterior, os resultados de 99% precisam ser analisados com certo cuidado porque temos apenas 245 intervalos.

A porcentagem de cobertura nestes dados com cada um dos modelos cobre adequadamente aos dados para cada um dos $h = 1, 2, 3, 4, 5$ passos à frente tanto dos retornos como das volatilidades. Os resultados com níveis de confiança de 90%, 95% e 99% para os retornos e volatilidades são apresentados nas tabelas 6.8, e 6.9 respectivamente. Os resultados obtidos são satisfatórios, tanto o algoritmo PRR como as adaptações feitas apresentam um bom desempenho.

Entre os principais resultados temos:

- Diferentemente da aplicação anterior, pode-se verificar como nesta aplicação as coberturas para os retornos são bastante próximas às nominais nos três modelos.

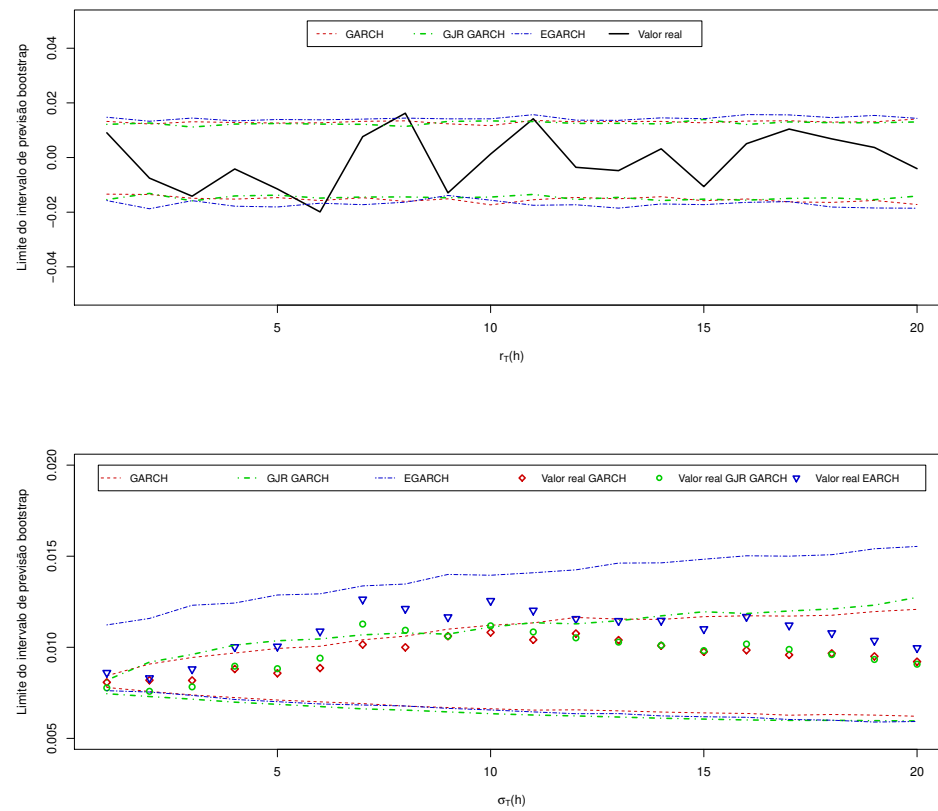


Figura 6.10: Limites de previsão 90% dos retornos filtrados e volatilidades utilizando os modelos GARCH(1,1), EGARCH(1,1) e GJR GARCH(1,1).

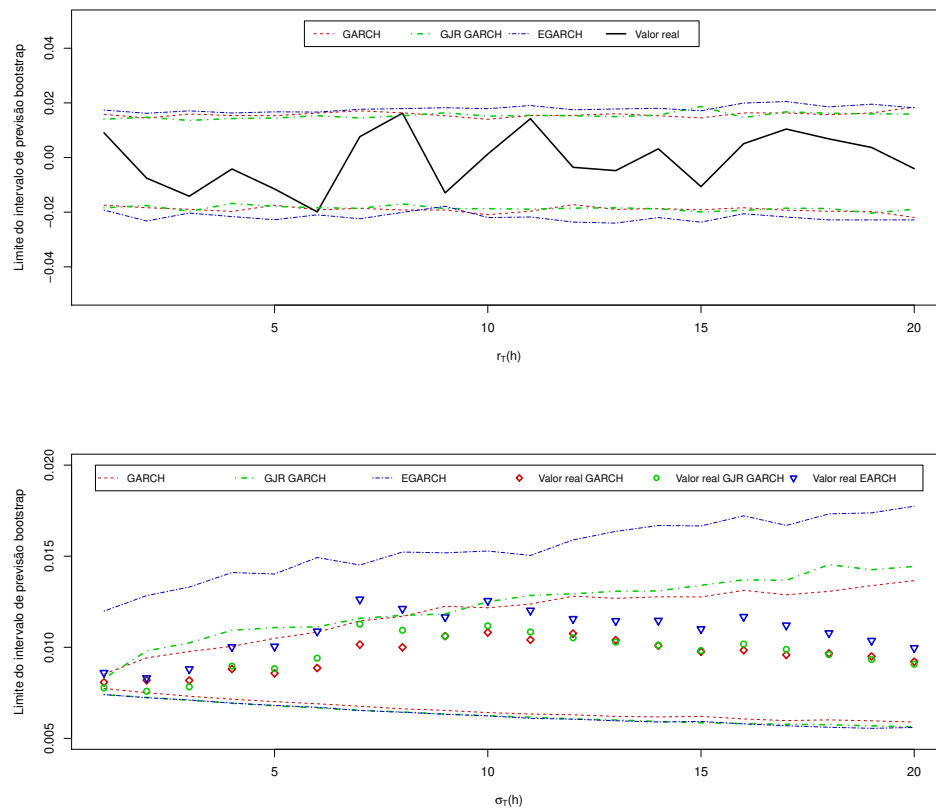


Figura 6.11: Limites de previsão 95% dos retornos filtrados e volatilidades utilizando os modelos GARCH(1,1), EGARCH(1,1) e GJR GARCH(1,1).

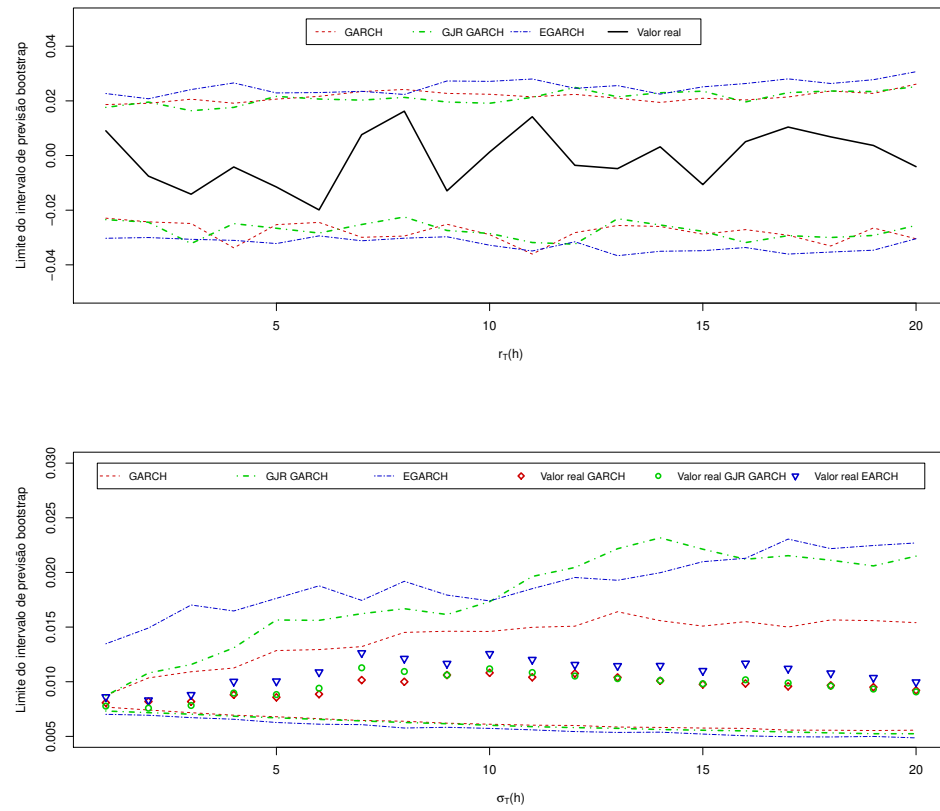


Figura 6.12: Limites de previsão 99% dos retornos filtrados e volatilidades utilizando os modelos GARCH(1,1), EGARCH(1,1) e GJR GARCH(1,1).

Tabela 6.8: Porcentagem de cobertura para os retornos da série de retornos do índice da bolsa de valores de Nova Iorque (NYA)

Previsão	Retornos					
	90%		95%		99%	
	Cobertura	DP	Cobertura	DP	Cobertura	DP
GARCH						
h=1	0.902041	0.297868	0.959184	0.198270	0.983673	0.126987
h=2	0.902041	0.297868	0.946939	0.224614	0.987755	0.110202
h=3	0.902041	0.297868	0.955102	0.207504	0.983673	0.126987
h=4	0.906122	0.292255	0.955102	0.207504	0.979592	0.141681
h=5	0.902041	0.297868	0.955102	0.207504	0.983673	0.126987
EGARCH						
h=1	0.910204	0.286474	0.955102	0.207504	0.983673	0.126987
h=2	0.906122	0.292255	0.951020	0.216267	0.987755	0.110202
h=3	0.902041	0.297868	0.959184	0.198270	0.991837	0.090165
h=4	0.893878	0.308625	0.967347	0.178091	0.987755	0.110202
h=5	0.902041	0.297868	0.967347	0.178091	0.983673	0.126987
GJR-GARCH						
h=1	0.897959	0.303322	0.955102	0.207504	0.987755	0.110202
h=2	0.902041	0.297868	0.942857	0.232591	0.983673	0.126987
h=3	0.889796	0.313785	0.951020	0.216267	0.983673	0.126987
h=4	0.906122	0.292255	0.955102	0.207504	0.987755	0.110202
h=5	0.897959	0.303322	0.955102	0.207504	0.987755	0.110202

Tabela 6.9: Porcentagem de cobertura para as volatilidades da série de retornos do índice da bolsa de valores de Nova Iorque (NYA)

Previsão	Volatilidades					
	90%		95%		99%	
	Cobertura	DP	Cobertura	DP	Cobertura	DP
GARCH						
h=1	1.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000	0.000000
h=2	0.955102	0.207504	0.975510	0.154880	0.987755	0.110202
h=3	0.951020	0.216267	0.967347	0.178091	0.987755	0.110202
h=4	0.951020	0.216267	0.967347	0.178091	0.983673	0.126987
h=5	0.938776	0.240232	0.975510	0.154880	0.983673	0.126987
EGARCH						
h=1	0.963265	0.188495	0.967347	0.178091	0.987755	0.110202
h=2	0.979592	0.141681	0.983673	0.126987	0.995918	0.063888
h=3	0.967347	0.178091	0.991837	0.090165	1.000000	0.000000
h=4	0.983673	0.126987	0.991837	0.090165	1.000000	0.000000
h=5	0.979592	0.141681	0.983673	0.126987	1.000000	0.000000
GJR-GARCH						
h=1	1.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000	0.000000
h=2	0.934694	0.247571	0.971429	0.166940	0.995918	0.063888
h=3	0.934694	0.247571	0.967347	0.178091	0.991837	0.090165
h=4	0.930612	0.254633	0.975510	0.154880	0.987755	0.110202
h=5	0.955102	0.207504	0.979592	0.141681	0.983673	0.126987

- Os intervalos de previsão para as volatilidades (90%, 95% e 99%) quando $h = 1$ sempre cobrem os *valores reais* quando os modelos GARCH e GJR-GARCH são utilizados, o que sugere que os intervalos são excessivamente conservadores.
- Utilizando qualquer um dos modelos, a cobertura para as volatilidades é sempre maior do que a nominal (90%, 95%).
- Como todos os modelos passam pelos testes de diagnostico e, em termos de intervalos de previsão bootstrap (cobertura e largura dos intervalos) não existe um modelo que domine os outros os modelos são equivalentes para os objetivos propostos.

Capítulo 7

Conclusões

Este trabalho teve como objetivo investigar os intervalos de previsão bootstrap para os retornos e as volatilidades no modelo GARCH, e nos modelos alternativos com efeito de alavancagem: os modelos EGARCH e GJR-GARCH. Na construção dos intervalos de previsão foram utilizadas as adaptações do algoritmo PRR propostas nesta dissertação e as implementações feitas na função *ugarchboot* do pacote *rugarch* do *R*. As principais conclusões foram:

1. Avaliando o desempenho dos intervalos nos modelos EGARCH e GJR-GARCH observa-se que as implementações feitas na função *ugarchboot* do pacote *rugarch* do *R* não apresentam um desempenho satisfatório na obtenção dos intervalos de previsão para as volatilidades, sendo que a cobertura estimada destes, é em alguns casos bem diferente da cobertura nominal, apresentando uma maior diferença quando o intervalo de previsão para a volatilidade $h = 1$ passo à frente.
2. As adaptações do algoritmo PRR para os modelos EGARCH e GJR-GARCH propostas nesta dissertação tem um bom desempenho, obtendo intervalos de previsão cuja cobertura estimada é próxima da cobertura nominal, tanto para os retornos como para as volatilidades.
3. Intervalos de previsão bootstrap fornecem uma alternativa fácil e confiável para obter intervalos de previsão para os retornos e volatilidades nos modelos GARCH, EGARCH e GJR-GARCH. Esta alternativa, embora fácil, demanda um maior custo computacional.

Não entanto, este inconveniente, será minimizado a curto prazo dado os avanços computacionais.

4. O Algoritmo PRR proposto por Pascual *et al.* (2006) tem um bom desempenho mesmo quando temos alta persistência. Observou-se que a cobertura estimada fica levemente abaixo em alguns modelos, mas não se encontrou até agora para que valores de parâmetros isto ocorre.
5. Nas aplicações, para os objetivos propostos, não houve um modelo com desempenho superior aos outros. No caso da série NYA as coberturas dos intervalos de previsão da volatilidade sempre foram muito maiores do que a cobertura nominal sugerindo que eles tem uma largura desnecessariamente grande.
6. Resumindo, intervalos de previsão utilizando a metodologia bootstrap apresentam uma nova proposta para obter intervalos de previsão em modelos de volatilidade. A proposta de Pascual *et al.* (2006) parece ser fácil de adaptar para outros modelos, abrindo caminho para obter intervalos de previsão em outros modelos de volatilidade como: modelos de volatilidades multivariados, modelos de volatilidade estocástica e modelos de volatilidades estocástica multivariados.

Como trabalhos futuros nesta área podemos citar:

1. Construção de intervalos de previsão bootstrap em modelos GARCH multivariados;
2. Construção de intervalos de previsão bootstrap em modelo GARCH multivariados com efeito de alavancagem;
3. Construção de intervalos de previsão bootstrap para modelos de volatilidade estocástica univariados e multivariados, com e sem efeito de alavancagem;
4. Utilização de outras distribuições para as perturbações, incluindo distribuições assimétricas.

Apêndice A

GJR-GARCH

Sabemos que no processo GJR-GARCH(1,1) a volatilidade é dada por:

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha r_{t-1}^2 + \gamma r_{t-1}^2 I(r_{t-1} < 0) + \beta \sigma_{t-1}^2,$$

e sabemos também que a volatilidade não condicional é dado por:

$$\sigma_1^2 = \frac{\omega}{1 - \alpha - \beta - \gamma P},$$

onde $P = Prob(\varepsilon_t < 0)$. Seja $N = 4$, então temos:

$$\begin{aligned} \sigma_4^2 &= \omega + \alpha r_3^2 + \gamma r_3^2 I(r_3 < 0) \beta \sigma_3^2 \\ &= \omega + \alpha r_3^2 + \gamma r_3^2 I(r_3 < 0) \beta (\omega + \alpha r_2^2 + \gamma r_2^2 I(r_2 < 0) + \beta \sigma_2^2) \\ &= \omega(\beta^0 + \beta^1) + \alpha(\beta^0 r_3^2 + \beta^1 r_2^2) + \gamma(\beta^0 r_3^2 I(r_3 < 0) + \beta^1 r_2^2 I(r_2 < 0)) + \beta^2 \sigma_2^2 \\ &= \omega(\beta^0 + \beta^1) + \alpha(\beta^0 r_3^2 + \beta^1 r_2^2) + \gamma(\beta^0 r_3^2 I(r_3 < 0) + \beta^1 r_2^2 I(r_2 < 0)) \\ &\quad + \beta^2 (\omega + \alpha r_1^2 + \gamma r_1^2 I(r_1 < 0) \beta \sigma_1^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \omega(\beta^0 + \beta^1 + \beta^2) + \alpha(\beta^0 r_3^2 + \beta^1 r_2^2 + \beta^2 r_1^2) + \gamma(\beta^0 r_3^2 I(r_3 < 0) + \beta^1 r_2^2 I(r_2 < 0) \\
&\quad + \beta^2 r_1^2 I(r_1 < 0)) + \beta^3 \sigma_1^2 \\
&= \omega(\beta^0 + \beta^1 + \beta^2) + \alpha(\beta^0 r_3^2 + \beta^1 r_2^2 + \beta^2 r_1^2) + \gamma(\beta^0 r_3^2 I(r_3 < 0) + \beta^1 r_2^2 I(r_2 < 0) \\
&\quad + \beta^2 r_1^2 I(r_1 < 0)) + \beta^3 \frac{\omega}{1 - \alpha - \beta - \gamma P} \\
&= \frac{\omega}{1 - \alpha - \beta - \gamma P} - (\alpha + \gamma P) \frac{\omega}{1 - \alpha - \beta - \gamma P} \sum_{i=0}^2 \beta^i + \alpha \sum_{i=0}^2 \beta^i r_{4-i-1}^2 \\
&\quad + \gamma \sum_{i=0}^2 \beta^i r_{4-i-1}^2 I(r_{4-i-1} < 0).
\end{aligned}$$

Agora vamos supor que para $N = T$ é verdadeiro, ou seja:

$$\begin{aligned}
\sigma_T^2 &= \frac{\omega}{1 - \alpha - \beta - \gamma P} - (\alpha + \gamma P) \frac{\omega}{1 - \alpha - \beta - \gamma P} \sum_{i=0}^{T-2} \beta^i + \alpha \sum_{i=0}^{T-2} \beta^i r_{T-i-1}^2 \\
&\quad + \gamma \sum_{i=0}^{T-2} \beta^i r_{T-i-1}^2 I(r_{T-i-1} < 0).
\end{aligned}$$

Agora vejamos para $N = T + 1$:

$$\begin{aligned}
\sigma_{T+1}^2 &= \omega + \alpha r_T^2 + \gamma r_T^2 I(r_T^2 < 0) + \beta \sigma_T^2 \\
&= \omega + \alpha r_T^2 + \gamma r_T^2 I(r_T^2 < 0) + \beta \left(\frac{\omega}{1 - \alpha - \beta - \gamma P} - (\alpha + \gamma P) \frac{\omega}{1 - \alpha - \beta - \gamma P} \sum_{i=0}^{T-2} \beta^i \right. \\
&\quad \left. + \alpha \sum_{i=0}^{T-2} \beta^i r_{T-i-1}^2 + \gamma \sum_{i=0}^{T-2} \beta^i r_{T-i-1}^2 I(r_{T-i-1} > 0) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \omega \frac{1 - \alpha - \gamma P}{1 - \alpha - \beta - \gamma P} - (\alpha + \gamma P) \frac{\omega}{1 - \alpha - \beta - \gamma P} \sum_{i=0}^{T-2} \beta^{i+1} + \alpha r_T^2 + \alpha \sum_{i=0}^{T-2} \beta^{i+1} r_{T-i-1}^2 \\
&+ \gamma r_T^2 I(r_t < 0) + \gamma \sum_{i=0}^{T-2} \beta^{i+1} r_{T-i-1}^2 I(r_{T-i-1} < 0) \\
&= \frac{\omega}{1 - \alpha - \beta - \gamma P} - (\alpha + \gamma P) \frac{\omega \beta^0}{1 - \alpha - \beta - \gamma P} - (\alpha + \gamma P) \frac{\omega}{1 - \alpha - \beta - \gamma P} \sum_{j=1}^{T-1} \beta^j + \alpha r_T^2 \\
&+ \alpha \sum_{j=1}^{T-1} \beta^j r_{T-j}^2 + \gamma r_T^2 I(r_t < 0) + \gamma \sum_{i=1}^{T-1} \beta^i r_{T-i}^2 I(r_{T-i} < 0) \\
&= \frac{\omega}{1 - \alpha - \beta - \gamma P} - (\alpha + \gamma P) \frac{\omega}{1 - \alpha - \beta - \gamma P} \sum_{j=0}^{T-1} \beta^j + \alpha \sum_{j=0}^{T-1} \beta^j r_{(T+1)-j-1}^2 \\
&+ \gamma \sum_{j=0}^{T-1} \beta^j r_{(T+1)-j-1}^2 I(r_{(T+1)-j-1} < 0).
\end{aligned}$$

Assim fica mostrado por indução que a variância condicional, pode ser expressada, alternativamente como:

$$\begin{aligned}
\sigma_T^2 &= \frac{\omega}{1 - \alpha - \beta - \gamma P} - (\alpha + \gamma P) \frac{\omega}{1 - \alpha - \beta - \gamma P} \sum_{i=0}^{T-2} \beta^i + \alpha \sum_{i=0}^{T-2} \beta^i r_{T-i-1}^2 \\
&+ \gamma \sum_{i=0}^{T-2} \beta^i r_{T-i-1}^2 I(r_{T-i-1} < 0).
\end{aligned}$$

Apêndice B

EGARCH

Sabemos que no processo EGARCH(1,1) o logaritmo da volatilidade é dado por:

$$\log(\sigma_t^2) = \omega + \alpha\varepsilon_{t-1} + \gamma(|\varepsilon_{t-1}| - E(|\varepsilon_{t-1}|)) + \beta\log(\sigma_{t-1}^2),$$

onde $E(|\varepsilon_{t-1}|)$ é uma constante e que denotaremos por M para facilidade de cálculo. Sabemos também que o logaritmo da volatilidade não condicional é dado por:

$$\log(\sigma_1^2) = \frac{\omega}{1-\beta},$$

Seja $N = 4$, então temos:

$$\begin{aligned}\log(\sigma_4^2) &= \omega + \alpha\varepsilon_3 + \gamma(|\varepsilon_3| - M) + \beta\log(\sigma_3^2) \\ &= \omega + \alpha\varepsilon_3 + \gamma(|\varepsilon_3| - M) + \beta(\omega + \alpha\varepsilon_2 + \gamma(|\varepsilon_2| - M) + \beta\log(\sigma_2^2)) \\ &= \omega(\beta^0 + \beta^1) + \alpha(\beta^0\varepsilon_3 + \beta^1\varepsilon_2) + \gamma(\beta^0(|\varepsilon_3| - M) + \beta^1(|\varepsilon_2| - M)) + \beta^2\log(\sigma_2^2) \\ &= \omega(\beta^0 + \beta^1) + \alpha(\beta^0\varepsilon_3 + \beta^1\varepsilon_2) + \gamma(\beta^0(|\varepsilon_3| - M) + \beta^1(|\varepsilon_2| - M)) \\ &\quad + \beta^2(\omega + \alpha\varepsilon_1 + \gamma(|\varepsilon_1| - M) + \beta\log(\sigma_1^2))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \omega(\beta^0 + \beta^1 + \beta^2) + \alpha(\beta^0 \varepsilon_3 + \beta^1 \varepsilon_2 + \beta^2 \varepsilon_1) + \gamma(\beta^0(|\varepsilon_3| - M) + \beta^1(|\varepsilon_2| - M) \\
&\quad + \beta^2(|\varepsilon_1| - M)) + \beta^3 \log(\sigma_1^2) \\
&= \omega(\beta^0 + \beta^1 + \beta^2) + \alpha(\beta^0 \varepsilon_3 + \beta^1 \varepsilon_2 + \beta^2 \varepsilon_1) + \gamma(\beta^0(|\varepsilon_3| - M) + \beta^1(|\varepsilon_2| - M) \\
&\quad + \beta^2(|\varepsilon_1| - M)) + \beta^3 \frac{\omega}{1 - \beta} \\
&= \omega \frac{(1 - \beta)(\beta^0 + \beta^1 + \beta^2)}{1 - \beta} + \omega \frac{\beta^3}{1 - \beta} + \alpha \sum_{i=0}^2 \beta^i \varepsilon_{4-1-i} + \gamma \sum_{i=0}^2 \beta^i (|\varepsilon_{4-1-i}| - M) \\
&= \frac{\omega}{1 - \beta} + \alpha \sum_{i=0}^2 \beta^i \varepsilon_{4-1-i} + \gamma \sum_{i=0}^2 \beta^i (|\varepsilon_{4-1-i}| - M).
\end{aligned}$$

Agora vamos supor que para $N = T$ é verdadeiro, ou seja:

$$\log(\sigma_T^2) = \frac{\omega}{1 - \beta} + \alpha \sum_{i=0}^{T-2} \beta^i \varepsilon_{T-1-i} + \gamma \sum_{i=0}^{T-2} \beta^i (|\varepsilon_{T-1-i}| - M).$$

Agora vejamos para $N = T + 1$:

$$\begin{aligned}
\log(\sigma_{T+1}^2) &= \omega + \alpha \varepsilon_T + \gamma(|\varepsilon_T| - M) + \beta \log(\sigma_T^2) \\
&= \omega + \alpha \varepsilon_T + \gamma(|\varepsilon_T| - M) + \beta \left(\frac{\omega}{1 - \beta} + \alpha \sum_{i=0}^{T-2} \beta^i \varepsilon_{T-1-i} + \gamma \sum_{i=0}^{T-2} \beta^i (|\varepsilon_{T-1-i}| - M) \right) \\
&= \frac{\omega}{1 - \beta} + \alpha \varepsilon_T + \alpha \sum_{i=0}^{T-2} \beta^{i+1} \varepsilon_{T-1-i} + \gamma(|\varepsilon_T| - M) + \gamma \sum_{i=0}^{T-2} \beta^{i+1} (|\varepsilon_{T-1-i}| - M) \\
&= \frac{\omega}{1 - \beta} + \alpha \varepsilon_T + \alpha \sum_{j=1}^{T-1} \beta^j \varepsilon_{T-j} + \gamma(|\varepsilon_T| - M) + \gamma \sum_{j=1}^{T-1} \beta^j (|\varepsilon_{T-j}| - M) \\
&= \frac{\omega}{1 - \beta} + \alpha \sum_{j=0}^{T-1} \beta^j \varepsilon_{(T+1)-1-j} + \gamma \sum_{j=0}^{T-1} \beta^j (|\varepsilon_{(T+1)-1-j}| - M).
\end{aligned}$$

Assim fica mostrado por indução que o logaritmo da variância condicional, pode ser expressada alternativamente como:

$$\log(\sigma_T^2) = \frac{\omega}{1 - \beta} + \alpha \sum_{i=0}^{T-2} \beta^i \varepsilon_{T-1-i} + \gamma \sum_{i=0}^{T-2} \beta^i (|\varepsilon_{T-1-i}| - M).$$

Apêndice C

Tabelas Modelos 2, 3 e 4

Tabela C.1: Intervalos de previsão bootstrap dos retornos dos modelos GARCH 2, 3 e 4 para $h = 1, 2, 3, 4, 5$ passos à frente. Cobertura nominal 90%

Previsão	Modelo	Cobertura	DP	Inf	Sup
h=1	2	0.89789	0.02108	0.05024	0.05186
	3	0.89779	0.02062	0.05095	0.05126
	4	0.90009	0.02230	0.04925	0.05066
h=2	2	0.89798	0.02005	0.05055	0.05147
	3	0.89752	0.02106	0.05056	0.05191
	4	0.90020	0.02267	0.04958	0.05022
h=3	2	0.89728	0.01988	0.05046	0.05226
	3	0.89705	0.02117	0.05116	0.05178
	4	0.90061	0.02360	0.04945	0.04994
h=4	2	0.89672	0.01999	0.05088	0.05240
	3	0.89631	0.02228	0.05183	0.05186
	4	0.90047	0.02398	0.04909	0.05044
h=5	2	0.89701	0.02030	0.05073	0.05226
	3	0.89590	0.02248	0.05158	0.05252
	4	0.90031	0.02458	0.04937	0.05031

Tabela C.2: Intervalos de previsão bootstrap dos retornos dos modelos GARCH 2, 3 e 4 para $h = 1, 2, 3, 4, 5$ passos à frente. Cobertura nominal 95%

Previsão	Modelo	Cobertura	DP	Inf	Sup
h=1	2	0.94753	0.01521	0.02539	0.02708
	3	0.94766	0.01517	0.02602	0.02632
	4	0.94952	0.01578	0.02477	0.02571
h=2	2	0.94825	0.01451	0.02539	0.02636
	3	0.94835	0.01462	0.02529	0.02637
	4	0.95002	0.01581	0.02453	0.02546
h=3	2	0.94737	0.01420	0.02575	0.02688
	3	0.94724	0.01518	0.02592	0.02685
	4	0.95007	0.01618	0.02453	0.02541
h=4	2	0.94746	0.01410	0.02543	0.02711
	3	0.94663	0.01597	0.02654	0.02683
	4	0.94968	0.01661	0.02462	0.02570
h=5	2	0.94686	0.01461	0.02587	0.02727
	3	0.94616	0.01589	0.02663	0.02721
	4	0.94908	0.01734	0.02501	0.02591

Tabela C.3: Intervalos de previsão bootstrap dos retornos dos modelos GARCH 2, 3 e 4 para $h = 1, 2, 3, 4, 5$ passos à frente. Cobertura nominal 99%

Previsão	Modelo	Cobertura	DP	Inf	Sup
h=1	2	0.98789	0.00693	0.00554	0.00656
	3	0.98829	0.00664	0.00562	0.00608
	4	0.98838	0.00668	0.00533	0.00630
h=2	2	0.98820	0.00632	0.00536	0.00644
	3	0.98831	0.00649	0.00528	0.00640
	4	0.98848	0.00687	0.00530	0.00622
h=3	2	0.98802	0.00649	0.00533	0.00664
	3	0.98777	0.00679	0.00557	0.00665
	4	0.98862	0.00665	0.00527	0.00610
h=4	2	0.98792	0.00641	0.00543	0.00665
	3	0.98774	0.00654	0.00574	0.00652
	4	0.98881	0.00704	0.00522	0.00597
h=5	2	0.98774	0.00660	0.00562	0.00664
	3	0.98737	0.00702	0.00588	0.00675
	4	0.98846	0.00748	0.00530	0.00624

Tabela C.4: Intervalos de previsão bootstrap das volatilidades dos modelos GARCH 2, 3 e 4 para $h = 1, 2, 3, 4, 5$ passos à frente. Cobertura nominal 90%

Previsão	Modelo	Cobertura	DP	Inf	Sup
h=1	2	0.89400	0.30799	0.04000	0.06600
	3	0.86800	0.33866	0.06000	0.07200
	4	0.84100	0.36586	0.08800	0.07100
h=2	2	0.89538	0.13408	0.04421	0.06041
	3	0.88171	0.13669	0.05854	0.05975
	4	0.87075	0.20100	0.07572	0.05353
h=3	2	0.88312	0.11849	0.05463	0.06226
	3	0.88268	0.10123	0.05734	0.05997
	4	0.87567	0.15991	0.07049	0.05385
h=4	2	0.87644	0.11394	0.05981	0.06375
	3	0.87824	0.08536	0.06010	0.06166
	4	0.87672	0.13734	0.06784	0.05544
h=5	2	0.87357	0.11076	0.06199	0.06445
	3	0.87429	0.07664	0.06297	0.06274
	4	0.87599	0.12443	0.06769	0.05633

Tabela C.5: Intervalos de previsão bootstrap das volatilidades dos modelos GARCH 2, 3 e 4 para $h = 1, 2, 3, 4, 5$ passos à frente. Cobertura nominal 95%

Previsão	Modelo	Cobertura	DP	Inf	Sup
h=1	2	0.94500	0.22809	0.02200	0.03300
	3	0.92100	0.26987	0.03600	0.04300
	4	0.88900	0.31429	0.06300	0.04800
h=2	2	0.94303	0.11178	0.02425	0.03272
	3	0.93278	0.10975	0.03554	0.03168
	4	0.92100	0.17047	0.05086	0.02814
h=3	2	0.93633	0.10159	0.02959	0.03408
	3	0.93415	0.08119	0.03377	0.03208
	4	0.92624	0.13147	0.04519	0.02857
h=4	2	0.93156	0.09884	0.03341	0.03504
	3	0.93274	0.06741	0.03420	0.03306
	4	0.92837	0.11310	0.04221	0.02942
h=5	2	0.92944	0.09633	0.03522	0.03534
	3	0.93126	0.06050	0.03517	0.03357
	4	0.92896	0.10205	0.04100	0.03004

Tabela C.6: Intervalos de previsão bootstrap das volatilidades dos modelos GARCH 2, 3 e 4 para $h = 1, 2, 3, 4, 5$ passos à frente. Cobertura nominal 99%

Previsão	Modelo	Cobertura	DP	Inf	Sup
h=1	2	0.97600	0.15313	0.01100	0.01300
	3	0.96600	0.18132	0.01600	0.01800
	4	0.94900	0.22011	0.02800	0.02300
h=2	2	0.97999	0.08698	0.01021	0.00980
	3	0.98079	0.06331	0.01128	0.00793
	4	0.97288	0.10841	0.02049	0.00663
h=3	2	0.97929	0.08012	0.01030	0.01040
	3	0.98078	0.04395	0.01101	0.00821
	4	0.97566	0.08389	0.01740	0.00694
h=4	2	0.97807	0.07818	0.01112	0.01082
	3	0.98121	0.03483	0.01036	0.00843
	4	0.97681	0.06866	0.01579	0.00740
h=5	2	0.97744	0.07635	0.01155	0.01101
	3	0.98110	0.03195	0.01051	0.00839
	4	0.97847	0.05911	0.01424	0.00730

Apêndice D

Programas

```
> # ----- #
> # ----- Algoritmo PRR - GARCH(1,1) ----- #
> # ----- #

> pascual = function(y,ordem,B,H){
+ # y: série de retornos
+ # ordem: ordem do modelo
+ # B: Número de reamostras bootstrap
+ # H: Número de passos à frente
+ num = length(y); Coeff_b = matrix(NA,ncol=3,nrow=B)
+ s2_boot = matrix(NA,ncol=B,nrow=num); y_boot = matrix(NA,ncol=B,nrow=num)
+ yb = s2 = e_b = rep(NA,H); yp = s2p = matrix(NA,ncol=H,nrow=B)
+ spec = ugarchspec(variance.model = list(model = "sGARCH", garchOrder = c(1,1),
+ variance.targeting = FALSE), mean.model = list(armaOrder = c(0,0),
+ include.mean = FALSE), distribution.model = "norm")
+ modelo = ugarchfit(spec=spec, data=y,fit.control = list(stationarity = 1))
+ coeff = modelo@fit$coef
+ residuais = y/sigma(modelo)
```

```

+ res_centrados = (residuais-mean(residuais))/sd(residuais)
+ for (b in 1:B) {
+   COEFF = 2
+   eboot = sample(res_centrados,num,replace = TRUE)
+   s2_boot[1,b] = coeff[1]/(1-coeff[2]-coeff[3])
+   for (m in 1:num){
+     if (m==1) y_boot[m,b]=eboot[m]*sqrt(s2_boot[m,b])
+     if (m>1) {
+       s2_boot[m,b] = coeff[1] + coeff[2]*y_boot[m-1,b]^2 + coeff[3]*s2_boot[m-1,b]
+       y_boot[m,b]=eboot[m]*sqrt(s2_boot[m,b])
+     }
+   }
+ }
+ COEFF = ugarchfit(spec=spec, data=y_boot[,b],
+ fit.control = list(stationarity = 1))@fit$coef
+ while((COEFF[2]+COEFF[3])>=1 || length(COEFF)!=3){
+   eboot = sample(res_centrados,num,replace = TRUE)
+   s2_boot[1,b] = coeff[1]/(1-coeff[2]-coeff[3])
+   for (m in 1:num){
+     if (m==1) y_boot[m,b]=eboot[m]*sqrt(s2_boot[m,b])
+     if (m>1) {
+       s2_boot[m,b] = coeff[1] + coeff[2]*y_boot[m-1,b]^2 +
+       coeff[3]*s2_boot[m-1,b]
+       y_boot[m,b]=eboot[m]*sqrt(s2_boot[m,b])
+     }
+   }
+ }
+ COEFF = ugarchfit(spec=spec, data=y_boot[,b],
+ fit.control = list(stationarity = 1))@fit$coef

```

```

+   }
+   Coeff_b[b,] = COEFF
+   e_b = sample(res_centrados, H, replace=TRUE)
+   suma = 0
+   for (j in 0:(num-2)){
+       suma = suma+ (Coeff_b[b,3]^(j))*
+           (y[num-j-1]^2-Coeff_b[b,1]/(1-Coeff_b[b,2]-Coeff_b[b,3]))
+   }
+   S_2 = Coeff_b[b,1]/(1-Coeff_b[b,2]-Coeff_b[b,3]) + Coeff_b[b,2]*suma
+   for (k in 1:H){
+       if (k == 1) {
+           s2[k] = Coeff_b[b,1]+Coeff_b[b,2]*y[num]^2+Coeff_b[b,3]*S_2
+           yb[k] = e_b[k]*sqrt(s2[k])
+       }
+       if (k>1) {
+           s2[k] = Coeff_b[b,1]+Coeff_b[b,2]*yb[k-1]^2+Coeff_b[b,3]*s2[k-1]
+           yb[k] = e_b[k]*sqrt(s2[k])
+       }
+   }
+   yp[b,(1:H)]=yb
+   s2p[b,(1:H)]=s2
+ }
+ OUT= list(Coeff_b,yp,s2p,coeff)
+ return(OUT)
+ }

> # ----- #
> # ----- Adaptação do algoritmo PRR - EGARCH(1,1) ----- #

```



```

> # ----- #
> # Função previa
> egarch.ajust = function(y,coeff){
+ # y: Série de retornos
+ # coeff: parâmetros do modelo
+ M = sqrt(2)/sqrt(pi); ls2 = c(); e = c(); num = length(y)
+ ls2[1] = coeff[1]/(1-coeff[3])
+ e[1] = y[1]/sqrt(exp(ls2[1]))
+ for (i in 2:num){
+   ls2[i] = coeff[1]+coeff[2]*e[i-1]+coeff[4]*(abs(e[i-1])-M)+coeff[3]*ls2[i-1]
+   e[i] = y[i]/sqrt(exp(ls2[i]))
+ }
+ out = list(ls2,e)
+ return(out)
+ }
> # ----- #
> epascual = function(y,ordem,B,H){
+ # y: série de retornos
+ # ordem: ordem do modelo
+ # B: Número de reamostras bootstrap
+ # H: Número de passos à frente
+ num = length(y)
+ Coeff_b = matrix(NA,ncol=4,nrow=B)
+ ls2_boot = matrix(NA,ncol=B,nrow=num)
+ y_boot = matrix(NA,ncol=B,nrow=num)
+ yb = ls2 = e_b = rep(NA,H)
+ yp = ls2p = matrix(NA,ncol=H,nrow=B)

```

```

+ M = sqrt(2)/sqrt(pi)
+ modelo= egarch(x = y, order = ordem)
+ coeff = c(modelo$beta[1],modelo$eta,modelo$beta[2],modelo$gamma)
+ ajuste = egarch.ajust(y,coeff)
+ residuais = ajuste[[2]]
+ res_centrados = (residuais-mean(residuais))/sd(residuais)
+ for (b in 1:B) {
+   eboot = sample(res_centrados,num,replace = TRUE)
+   ls2_boot[1,b] = coeff[1]/(1-coeff[3])
+   for (m in 1:num){
+     if (m==1) y_boot[m,b]=eboot[m]*sqrt(exp(ls2_boot[m,b]))
+     if (m>1) {
+       ls2_boot[m,b] = coeff[1] + coeff[2]*eboot[m-1] +
+         coeff[3]*ls2_boot[m-1,b] +
+         coeff[4]*(abs(eboot[m-1])-M)
+       y_boot[m,b]=eboot[m]*sqrt(exp(ls2_boot[m,b]))
+     }
+   }
+   modelob = egarch(x = y_boot[,b], order = ordem)
+   Coeff_b[b,] = c(modelob$beta[1],modelob$eta,modelob$beta[2],modelob$gamma)
+   print(Coeff_b[b,])
+   ls2_boot_B = rep(NA,num)
+   ls2_boot_B[1] = Coeff_b[b,1]/(1-Coeff_b[b,3])
+   for (u in 2:num){
+     ls2_boot_B[u] = Coeff_b[b,1] + Coeff_b[b,2]*residuais[u-1] +
+       Coeff_b[b,3]*ls2_boot_B[u-1] + Coeff_b[b,4]*(abs(residuais[u-1])-M)
+   }

```

```

+   ls2_boot_B[num]
+   e_b = sample(res_centrados, H, replace=TRUE)
+   for (k in 1:H){
+     if (k == 1) {
+       ls2[k] = Coeff_b[b,1] + Coeff_b[b,2]*y[num]/sqrt(exp(ls2_boot_B[num])) +
+       Coeff_b[b,3]*ls2_boot_B[num] + Coeff_b[b,4]*
+       (abs(y[num]/sqrt(exp(ls2_boot_B[num])))-M)
+       yb[k] = e_b[k]*sqrt(exp(ls2[k]))
+     }
+     if (k>1) {
+       ls2[k] = Coeff_b[b,1] + Coeff_b[b,2]*e_b[k-1] + Coeff_b[b,3]*ls2[k-1] +
+       Coeff_b[b,4]*(abs(e_b[k-1])-M)
+       yb[k] = e_b[k]*sqrt(exp(ls2[k]))
+     }
+   }
+   yp[b,(1:H)]=yb
+   ls2p[b,(1:H)]=ls2
+ }
+ OUT= list(Coeff_b,yp,ls2p)
+ return(OUT)
+ }

```

```

> # ----- #
> # ----- Adaptação do algoritmo PRR - GJRGARCH(1,1) ----- #
> # ----- #

> gjrpascual = function(y,ordem,B,H){
+ # y: série de retornos
+ # ordem: ordem do modelo
+ # B: Número de reamostras bootstrap
+ # H: Número de passos à frente
+ num = length(y)
+ Coeff_b = matrix(NA,ncol=4,nrow=B)
+ s2_boot = matrix(NA,ncol=B,nrow=num)
+ y_boot = matrix(NA,ncol=B,nrow=num)
+ yb = s2 = e_b = rep(NA,H)
+ yp = s2p = matrix(NA,ncol=H,nrow=B)
+ spec = ugarchspec(variance.model = list(model = "gjrGARCH", garchOrder = c(1,1)),
+   mean.model = list(armaOrder = c(0,0), include.mean = FALSE),distribution.model =
+ modelo= ugarchfit(spec=spec, data=y,fit.control = list(stationarity = 1))
+ coeff = modelo@fit$coef
+ residuais = y/sigma(modelo)
+ res_centrados = (residuais-mean(residuais))/sd(residuais)
+
+ for (b in 1:B) {
+   eboot = sample(res_centrados,num,replace = TRUE)
+   s2_boot[1,b] = coeff[1]/(1-coeff[2]-coeff[3]-coeff[4]/2)
+   for (m in 1:num){
+     if (m==1) y_boot[m,b]=eboot[m]*sqrt(s2_boot[m,b])
+     if (m>1) {

```

```

+       s2_boot[m,b] = coeff[1] + coeff[2]*y_boot[m-1,b]^2 +
+       coeff[3]*s2_boot[m-1,b] + coeff[4]
+       *y_boot[m-1,b]^2*ifelse(y_boot[m-1,b]<0,1,0)
+       y_boot[m,b]=eboot[m]*sqrt(s2_boot[m,b])
+   }
+ }
+ COEFF = ugarchfit(spec=spec, data=y_boot[,b],fit.control =
+ list(stationarity = 1))@fit$coef
+ while (length(COEFF)!=4 || (COEFF[2]+COEFF[3]+COEFF[4]*0.5)>=1
+ || (COEFF[2]+COEFF[4])<=0) {
+     eboot = sample(res_centrados,num,replace = TRUE)
+     s2_boot[1,b] = coeff[1]/(1-coeff[2]-coeff[3]-coeff[4]/2)
+     for (m in 1:num){
+         if (m==1) y_boot[m,b]=eboot[m]*sqrt(s2_boot[m,b])
+         if (m>1) {
+             s2_boot[m,b] = coeff[1] + coeff[2]*y_boot[m-1,b]^2 +
+             coeff[3]*s2_boot[m-1,b] + coeff[4]
+             *y_boot[m-1,b]^2*ifelse(y_boot[m-1,b]<0,1,0)
+             y_boot[m,b]=eboot[m]*sqrt(s2_boot[m,b])
+         }
+     }
+ }
+ COEFF = ugarchfit(spec=spec, data=y_boot[,b],fit.control =
+ list(stationarity = 1))@fit$coef
+ }
+ Coeff_b[b,] = COEFF
+ e_b = sample(res_centrados, H, replace=TRUE)
+ sigma2 = rep(NA,num)

```

```

+   sigma2[1] = Coeff_b[b,1]/(1-Coeff_b[b,2]-Coeff_b[b,3]-0.5*Coeff_b[b,4])
+   for ( u in 2:num){
+       sigma2[u] = Coeff_b[b,1] + Coeff_b[b,2]*y[u-1]^2+Coeff_b[b,3]*sigma2[u-1]+
+           Coeff_b[b,4]*y[u-1]^2*ifelse(y[u-1]<0,1,0)
+   }
+   for (k in 1:H){
+       if (k == 1) {
+           s2[k] = Coeff_b[b,1]+Coeff_b[b,2]*y[num]^2+Coeff_b[b,3]*sigma2[num]+
+               Coeff_b[b,4]*y[num]^2*ifelse(y[num]<0,1,0)
+           yb[k] = e_b[k]*sqrt(s2[k])
+       }
+       if (k>1) {
+           s2[k] = Coeff_b[b,1]+Coeff_b[b,2]*yb[k-1]^2+Coeff_b[b,3]*s2[k-1]+
+               Coeff_b[b,4]*yb[k-1]^2*ifelse(yb[k-1]<0,1,0)
+           yb[k] = e_b[k]*sqrt(s2[k])
+       }
+   }
+   yp[b,(1:H)]=yb
+   s2p[b,(1:H)]=s2
+ }
+ OUT= list(Coeff_b,yp,s2p)
+ return(OUT)
+ }

```


Referências Bibliográficas

- Alonso, A., Peña, D. e Romo, J. On sieve bootstrap prediction intervals. *Statistics and Probability Letters*, 65:13–20, 2003.
- Baillie, R. e Bollerslev, T. Prediction in dynamic models with time-dependent conditional variances. *Journal of Econometrics*, 52:91–113, 1992.
- Bollerslev, T. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 31:307–327, 1986.
- Bougerol, P. e Picard, N. Stationarity of GARCH processes and of some nonnegative time series. *Journal of Econometrics*, 52:115–127, 1992.
- Buhlmann, P. Sieve bootstrap for time series. *Bernoulli*, 2:123–148, 1997.
- Carlstein, E. The use of subseries methods for estimating the variance of a general statistic from a stationary time series. *Annals of Statistics*, 14:1171–1179, 1986.
- Casella, G. e Berger, R. *Statistical Inference*. Thomson Learning, California, segunda edição, 2001.
- Chatfield, C. *Time Series Forecasting*. Chapman & Hall, Nova Iorque, 2000.
- Chatfield, C. Prediction intervals for time series forecasting. J. S. Armstrong (editor), *Principles of Forecasting: A Handbook for Researchers and Practitioners*. Kluwer Academic Publishers. Nova Iorque, 2003.

- Chen, B., Gel, Y., Balakrishna, N. e Abraham, B. Computationally efficient bootstrap prediction intervals for returns and volatilities in ARCH and GARCH processes. *Journal of Forecasting*, 30:51–71, 2011.
- Chernick, M. *Bootstrap Methods: A Guide for Practitioners and Researchers*. John Wiley & Sons, Nova Jersey, segunda edição, 2008.
- Davison, A. e Hinkley, D. *Bootstrap Methods and Their Application*. Cambridge University Press, Nova Iorque, 1997.
- Efron, B. Bootstrap methods: another look at the jackknife. *The Annals of Statistics*, 7:1–26, 1979.
- Efron, B. e Tibshirani, R. *An Introduction to the Bootstrap*. Chapman & Hall, Nova Iorque, 1993.
- Engle, R. Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation. *Econometrica*, 50:987–1008, 1982.
- Engle, R. e Bollerslev, T. Modelling the persistence of conditional variances. *Econometric Reviews*, 5:1–50, 1986.
- Fan, J. e Yao, Q. *Nonlinear Time Series: Nonparametrics and Parametric Methods*. Springer, Nova Iorque, 2005.
- Francq, C. e Zakoian, J. *GARCH models : Structure, Statistical Inference, and Financial Applications*. John Wiley & Sons, Wiltshire, 2010.
- Glosten, L., Jagannathan, R. e Runkle, D. On the relation between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks. *The Journal of Finance*, 48:1779–1801, 1993.
- Künsch, H. The jackknife and the bootstrap for general stationary observations. *The Annals of Statistics*, 17:1217–1261, 1989.

- Lahiri, S. *Resampling Methods for Dependent Data*. Springer, Nova Iorque, 2000.
- Lana, G. Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, 2012.
- Lee, Y. Sub-sample bootstrap Prediction Intervals in GARCH models. *European Journal of Social Sciences*, 22:188–192, 2011.
- Liu, R. e Singh, K. Moving blocks jackknife and bootstrap capture weak dependence. R. LePage e L. Billard (editores), *Exploring the Limits of Bootstrap*. Wiley, Nova Iorque, páginas 225–248, 1992.
- MacKinnon, J. Bootstrap methods in econometrics. *The Economic Record*, 82:S2–S18, 2006.
- Mandelbrot, B. The variation of certain speculative prices. *The Journal of Business*, 36:394–419, 1963.
- Miguel, J. e Olave, P. Bootstrapping forecast intervals in ARCH models. *Sociedad de Estadística e Investigación Operativa*, 8:345–364, 1999.
- Morettin, P. e Toloi, C. *Análise de Séries Temporais*. Edgar Blucher, São Paulo, 2004.
- Nelson, D. Autoregressive conditional heteroskedasticity: A new approach. *Econometrica*, 59:347–370, 1991.
- Pascual, L., Romo, J. e Ruiz, E. Bootstrap predictive inference for ARIMA processes. *Journal of Time Series Analysis*, 25:449–465, 2004.
- Pascual, L., Romo, J. e Ruiz, E. Bootstrap prediction intervals for power-transformed time series. *International Journal of Forecasting*, 21:219–235, 2005.
- Pascual, L., Romo, J. e Ruiz, E. Bootstrap prediction for returns and volatilities in GARCH models. *Computational Statistics and Data Analysis*, 50:2293–2312, 2006.

- Pinheiro, A. e Pinheiro, H. *Métodos Não-Paramétricos e Suas Aplicações*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2007.
- Politis, D. e Romano, J. A circular block resampling procedure for stationary data. R. LePage e L. Billard (editores), *Exploring the Limits of Bootstrap*. Wiley, Nova Iorque, páginas 263–270, 1992.
- Politis, D. e Romano, J. The Stationary bootstrap. *Journal of the American Statistical Association*, 89:1303–1313, 1994.
- Reeves, J. Bootstrap prediction intervals for ARCH models. *International Journal of Forecasting*, 21:237–248, 2005.
- Smeeke, S. Tese de doutorado, Universitaire Pers Maastricht, Department of Quantitative Economics, 2009.
- Thombs, L. e Schucany, W. Bootstrap prediction intervals for autoregression. *Journal of the American Statistical Association*, 85:486–492, 1990.
- Wei, W. *Time Series Analysis: Univariate and Multivariate Methods*. Addison Wesley, Nova Iorque, segunda edição, 2006.
- Yang, Q. e Tong, H. On prediction and chaos in stochastics systems. H. Tong (editor), *Chaos and Forecasting*. World Scientific, Cingapura, páginas 57–86, 1995.
- Yang, Q. e Tong, H. Assymmetric least squares regression estimation: A nonparametric approach. *Journal of Nonparametric Statistics*, 6:273–292, 1996.
- Zagdanski, A. Prediction intervals for stationary time series using the sieve bootstrap method. Website, 1999.
- Zakoian, J. Threshold heteroskedasticity models. *The Journal of Economics Dynamics and Control*, 18:931–955, 1994.