

ESTABILIDADE DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES
DIFERENCIAIS DESCONTÍNUOS

Este exemplar corresponde a redação final da tese devidamente corrigida e defendida pela Sra. Clarice Favaretto e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 25 de FEVEREIRO de 1987


Prof. Dr. Marco Antonio Teixeira
Orientador

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

A meus pais e
irmãos

AGRADECIMENTOS

Ao professor Marco Antonio Teixeira pela proposta do presente trabalho e sua orientação constante na elaboração do mesmo.

A professora Sueli I. R. Costa pelo interesse em discutir cada capítulo, tornando mais natural o desenvolvimento do trabalho.

Ao professor Orlando F. Lopes pelo auxílio na compreensão de alguns resultados.

Aos docentes da Universidade de Passo Fundo, em especial a Luiz Eurico Spalding, Dario Fiorentini e Vera Jussara Lourenzi, pelo incentivo.

A UPF, CAPES e UNICAMP pelo apoio financeiro.

A todos que direta e indiretamente colaboraram na realização deste trabalho.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO	i
CAPÍTULO 0	
Preliminares	1
CAPÍTULO I	
Um teorema de unicidade de solução à direita para equações diferenciais contínuas por partes	13
CAPÍTULO II	
Estabilidade de posições de equilíbrio para sistemas descontínuos	38
CAPÍTULO III	
Exemplos	72
CAPÍTULO IV	
Estabilidade de soluções periódicas de um sistema de equações diferenciais descontínuo	87
BIBLIOGRAFIA	119

INTRODUÇÃO

Os principais objetivos deste trabalho consistem em:

- 1) Abordar teoremas relativos a existência e unicidade de soluções de uma classe de equações diferenciais descontínuas, segundo as condições de Filipov dadas em [F].
- 2) Apresentar resultados relativos a estabilidade de Liapunov de tais equações (Ver AG1).
- 3) Investigar o comportamento qualitativo de trajetórias próximas a soluções de equilíbrio que aparecem em certos tipos de equações descontínuas.

Inicialmente, no capítulo 0, apresenta-se alguns teoremas e definições que serão utilizados no decorrer deste trabalho.

No capítulo I encontra-se definições e resultados básicos envolvendo, entre outros, soluções de equações descontínuas, unicidade de soluções, dependência contínua da solução nas condições iniciais, um teorema de existência e unicidade para uma classe especial de equações descontínuas, etc. Mais especificamente, consideremos G uma região limitada do \mathbb{R}^n e $F : G \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^∞ tal que zero é valor regular de F . A referência

básica é $[F]$. Denotemos por S a superfície definida por $F^{-1}(0)$.

Suponhamos que S divide G em duas regiões distintas, $G^+ = F^{-1}(0, \infty)$ e $G^- = F^{-1}(-\infty, 0)$.

Consideremos o sistema

$$\dot{x} = f(t, x) \quad \text{com } T_0 < t < T_1, \quad x \in G$$

e

$$f(t, x) = (f_1(t, x), \dots, f_n(t, x)).$$

Aqui as funções reais f_i ($i=1, \dots, n$) são definidas, mensuráveis e limitadas em $Q = G \times [T_0, T_1]$. Para cada t fixo as funções f_i são de tal modo que $\lim_{F(x) \rightarrow -0} f_i$ e $\lim_{F(x) \rightarrow +0} f_i$ existem para todo $i = 1, \dots, n$.

As notações $F(x) \rightarrow -0$ ou $F(x) \rightarrow +0$ indicam respectivamente, que estamos encontrando o limite de $f_i(t, x)$ para valores de x tendendo a S em G^- ou G^+ .

Sobre as funções f_i ($i = 1, \dots, n$) impõe-se ainda a condição

$$\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right| \leq K \quad \text{para todo } t \in (T_0, T_1)$$

$x \in G$, K constante e $i, j = 1, \dots, n$.

No capítulo II, com base em [AG1], estuda-se o comportamento

das trajetórias do sistema $\dot{x} = f(x)$ na superfície de descontinuidade de S . O sistema $\dot{x} = f(x)$ é tal que as funções $f^+(x)$ e $f^-(x)$ são definidas em G e

$$f(x) = \begin{cases} f^+(x) & \text{se } x \in G^+ \\ f^-(x) & \text{se } x \in G^- \end{cases}$$

Supõe-se que

- (i) cada um dos sistemas, $\dot{x} = f^+(x)$ e $\dot{x} = f^-(x)$, satisfaz as condições de existência e unicidade de soluções segundo o capítulo I;
- (ii) as funções $f^+(x)$ e $f^-(x)$ não possuem pontos críticos em S ;

As soluções do sistema $\dot{x} = f(x)$ em pontos de S serão determinadas de acordo com as condições dadas por Aizerman e Gantmacher em [AG1]. Poderão assim aparecer posições de equilíbrio do sistema $\dot{x} = f(x)$ em S .

O estudo da estabilidade de tais posições de equilíbrio, em uma classe particular X_0 destes sistemas, realiza-se através de uma função auxiliar chamada "transformação primeiro retorno" que é um difeomorfismo do semiplano $x_1 \geq 0$, $x_n = 0$ em

si próprio. Verifica-se que a estabilidade do ponto fixo $x = 0$ da transformação primeiro retorno G implica na estabilidade da posição de equilíbrio $x = 0$ do sistema $\dot{x} = f(x)$ (e vice-versa). Para sistemas em X_0 apresenta-se teoremas dando condições para a estabilidade ou instabilidade da posição de equilíbrio.

No capítulo III encontram-se alguns exemplos para ilustrar os resultados obtidos nos capítulos anteriores.

No último capítulo deste trabalho investiga-se a estabilidade da solução periódica $z = z^0(t)$ (com período T) do sistema $\dot{z} = f(z, t)$ com $z \in \mathbb{R}^n$, $f(z, t+T) = f(z, t)$. Sobre a função $f(z, t)$ são impostas condições, entre as quais pode-se destacar: O espaço $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ é dividido por superfícies $F_\alpha = 0$ ($\alpha \in t$) em regiões H_α e a função $f(z, t)$ possui descontinuidades de primeira espécie sobre as superfícies $F_\alpha = 0$ (para $t = t_\alpha$).

A investigação da estabilidade da solução periódica $z = z^0(t)$ do sistema $\dot{z} = f(t, z)$ é feita através da investigação da estabilidade da solução nula da aproximação linear

$$\dot{x} = \left[\frac{\partial f}{\partial z} \right]_{z=z^0(t)} x.$$

Para a demonstração posterior dos teoremas que definem as condições de estabilidade e instabilidade da solução periódica $z = z^0(t)$ faz-se paralelamente mudanças de variáveis sobre o sistema $\dot{z} = f(z, t)$ e sua correspondente aproximação linear. Na demonstração de tais teoremas é de importância vital o conceito

de "função de Liapunov" para equações descontínuas [Ver AG2].

Finalmente apresenta-se a bibliografia utilizada na realização deste trabalho.

É conveniente ressaltar que vários problemas em teoria do controle são considerados através do estudo de equações diferenciais com 2º membro descontínuo (Veja por exemplo [B] e [F]). Também pode-se encontrar certos fenômenos em Economia e Oscilações Descontínuas na Mecânica modelados através de E.D.D. (Veja por exemplo [M], [H1], [H2] e [I]).

CAPÍTULO 0

PRELIMINARES

Enunciaremos aqui, além das definições necessárias para este trabalho, alguns resultados que serão de grande utilidade no desenrolar do mesmo.

Consideremos o sistema de equações diferenciais

$$(1) \quad \dot{x} = f(t, x) \quad \text{onde} \quad x \in \mathbb{R}^n, f(t, x) = (f_1(t, x), \dots, f_n(t, x))$$

e a seguinte condição:

- CONDIÇÃO A

As funções $f_i(t, x_1, \dots, x_n)$ são reais, mensuráveis e de finidas quase sempre num domínio G aberto ou fechado do espaço $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Para qualquer região $D \subseteq G$, fechada e limitada, existe uma função real $A(t)$, finita quase sempre, tal que quase sempre em D temos

$$|f(t, x)| < A(t).$$

Na maioria dos resultados adicionaremos à condição A a seguinte condição: a função $A(t)$ é integrável segundo Lebesgue; A condição A acrescida desta chamaremos de "Condição B".

0.1. DEFINIÇÃO DE SOLUÇÃO. Uma solução de $\dot{x} = f(t, x)$ satisfazendo a condição A, é uma função $\varphi(t)$ definida para $t \in (t_1, t_2)$ tal que:

(ii) $\varphi(t)$ é absolutamente contínua;

(iii) para quase todo $t \in (t_1, t_2)$ e $\delta > 0$ a sua derivada $\dot{\varphi}(t)$ pertence ao menor conjunto fechado convexo contendo todos os valores $f(t, x')$ com t fixo e $x' \in U(\varphi(t), \delta)$ (δ -vizinhança de $\varphi(t)$).

Adotaremos a seguinte notação

$$\dot{\varphi}(t) \in \prod_{\delta > 0} \prod_{\mu(N)=0} \text{conv.} \cdot f(t, U(\varphi(t), \delta) - N) = K\{f(t, \varphi(t))\}$$

onde μ representa a medida de Lebesgue.

O lema a seguir mostra a vantagem de termos o sistema $\dot{x} = f(t, x)$ satisfazendo a condição B e sua demonstração se encontra em [F].

0.2. LEMA. Suponhamos que $\dot{x} = f(t, x)$ satisfaz a condição B. Então $\varphi(t)$ é solução desta equação no intervalo $[t_0, t_1]$ se e somente se para todo $t_1 \in [t_0, t_2]$ tem-se

$$\varphi(t_1) = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \phi(t) dt$$

para alguma função real $\phi(t)$ e para quase todo $t \in [t_0, t_1]$, $\phi(t) \in K\{f(t, \varphi(t))\}$.

0.3. UNICIDADE DE SOLUÇÃO. Seja $\dot{x} = f(t, x)$ uma equação diferencial satisfazendo a condição A. Dizemos que $\dot{x} = f(t, x)$ admite unicidade de solução à direita se dado $(t_0, x_0) \in G$ para $t \geq t_0$ existe uma e somente uma solução satisfazendo $\varphi(t_0) = x_0$.

Analogamente podemos definir unicidade à esquerda (i.é. para $t \leq t_0$) e unicidade em ambos os lados.

0.4. DEPENDÊNCIA CONTÍNUA DA SOLUÇÃO. Seja $\varphi(t)$ solução de $\dot{x} = f(t, x)$ e $[t_0, t_1]$ qualquer intervalo em que $\varphi(t)$ existe com valores em G .

Se dados $\tilde{\varphi}(t)$ solução da equação e $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$|\tilde{\varphi}(t_0) - \varphi(t_0)| < \delta$ implica que $\tilde{\varphi}(t)$ existe para $t \in [t_0, t_1]$ e $|\tilde{\varphi}(t) - \varphi(t)| < \varepsilon$ para qualquer t neste intervalo, dizemos que $\dot{x} = f(t, x)$ depende continuamente das condições iniciais.

Enunciaremos a seguir três resultados cujas demonstrações se encontram em [F].

0.5. TEOREMA. Suponhamos que $\dot{x} = f(t, x)$ satisfaz a condição A.

Então para qualquer mudança de variáveis da forma

$$(2) \quad y = \psi(t, x)$$

onde $\psi(t, x) = (\psi_1(t, x), \dots, \psi_n(t, x))$ é de classe C^1 , tem-se que

(i) $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ é não singular ;

(ii) toda solução do sistema (1) é transformada numa solução do sistema

$$(3) \quad \dot{y} = F(t, y) \quad \text{com} \quad F(t, y) = (F_1(t, y), \dots, F_n(t, y)) \quad \text{e}$$

$$F_i(t, y) = \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \psi_i}{\partial x_j} f_j(t, x_1, \dots, x_n) \quad .$$

0.6. TEOREMA. Seja $\dot{x} = f(t, x)$ satisfazendo a condição B. Existe unicidade de solução à direita de $\dot{x} = f(t, x)$ se para quase todo (t, x) e (t, z) com $|x - z| < \varepsilon_0$, $\varepsilon_0 > 0$ tem-se que

$$(x - z) \cdot (f(t, x) - f(t, z)) \leq K|x - z|^2, \quad K = \text{constante.}$$

0.7. TEOREMA. Seja $\dot{x} = f(t, x)$ satisfazendo a condição B e $\varphi(t)$ a única solução de $\dot{x} = f(t, x)$ em $[t_0, t_1]$ satisfazendo a condição inicial $\varphi(t_0) = x_0$. Então esta solução depende continuamente

da condição inicial. Mais ainda, se $\dot{x} = f(t, x) + g(t, x)$ com $|g(t, x)| < \theta(t)$ e $\int_{t_0}^t \theta(t) dt < \delta(\varepsilon)$ então a solução $\varphi(t)$ de $\dot{x} = f(t, x) + g(t, x)$ passando por (t_0, x_0) satisfaz $|\varphi(t) - \psi(t)| < \varepsilon$ para todo $t \in [t_0, t_1]$.

Na realidade os teoremas 0.6 e 0.7 são corolários dos teoremas 10 e 11 encontrados em [F]. Seguem agora duas proposições que serão utilizadas na demonstração de um lema no capítulo I deste trabalho.

0.8. PROPOSIÇÃO. Se $f : U \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$, é contínua e possui n derivadas parciais contínuas $\frac{\partial f}{\partial x_i} : U \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, então $\int_a^b f(x, t) dt$ é de classe C^1 .

DEMONSTRAÇÃO. [L1].

0.9. PROPOSIÇÃO. Sejam X um espaço métrico e $f : X \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função contínua. Definamos $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ sendo $\phi(x) = \int_a^b f(x, t) dt$. Então ϕ é contínua.

DEMONSTRAÇÃO. [L2].

A seguir enunciaremos alguns teoremas cujas demonstrações se encontram em [B].

0.10. TEOREMA. Suponhamos que todas as raízes da equação característica de um sistema linear $\dot{x} = Ax$ tem parte real negativa. Então para toda forma quadrática $W(x,x)$ tal que

- (i) W é uma função de sinal negativo;
- (ii) W se anula num conjunto M que não contém trajetórias inteiras exceto a origem;

existe uma e somente uma forma quadrática V satisfazendo

- (iii) $\dot{V} = W$;
- (iv) V é positiva definida.

Aqui \dot{V} é a derivada de V tomada de acordo com o sistema $\dot{x} = Ax$ ou seja $\dot{V} = \text{grad } V \cdot Ax$.

0.11. TEOREMA. Suponhamos que entre as raízes da equação característica do sistema linear $\dot{x} = Ax$ existe pelo menos uma com parte real positiva. Então para toda forma quadrática $W(x,x)$ tal que

- (i) W é uma função de sinal positivo;
- (ii) W se anula num conjunto M que não contém trajetórias inteiras exceto a origem;

podemos encontrar uma forma quadrática V e um número $\alpha > 0$ satisfazendo

$$(iii) \dot{V} = \alpha V + W ;$$

(iv) V não é uma função de sinal negativo.

Seja agora o sistema

$$(4) \quad \dot{x} = X(x) \text{ com } x \in \mathbb{R}^n, X(x) = (X_1(x), \dots, X_n(x))$$

onde as funções X_i são definidas e contínuas num aberto M do \mathbb{R}^n e Lipschitzianas em qualquer região fechada $D \subset M$ contendo a origem.

0.12. TEOREMA. Suponhamos que na região M em que o sistema (4) está definido existe uma função V de sinal constante tal que sua derivada \dot{V} tomada de acordo com o sistema é uma função de sinal fixo, oposto ao sinal de V . Então a posição de equilíbrio é estável no sentido de Liapunov.

0.13. DEFINIÇÃO. Um conjunto S é dito invariante por X se $x \in S$ implica $\varphi(t, x) \in S$ para todo $t \in \mathbb{R}$, onde φ denota o fluxo de X .

Se $\varphi(t, x) \in S$ somente para $t > 0$ dizemos que S é invariante positivo por X .

0.14. LEMA. Suponhamos que existe uma função de Liapunov V limitada inferiormente (respectivamente superiormente) numa região D invariante positiva e que nesta região a derivada \dot{V} é uma função de termos negativos (respectivamente positivos). Então todos os pontos ω -limite de um dado ponto p pertencem a uma mesma superfície de nível da função V .

0.15. DEFINIÇÃO. A solução nula do sistema (4) é dita globalmente estável se é estável no sentido de Liapunov e se toda solução $\varphi(t)$ do sistema satisfaz $\|\varphi(t)\| \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.

0.16. DEFINIÇÃO. Dizemos que uma função de Liapunov V é infinitamente global se dado qualquer $A > 0$, existe $R > 0$ tal que

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 > R \implies V(x) > A \text{ para todo } (x = x_1, \dots, x_n)$$

0.17. TEOREMA. Sejam N um conjunto que não contém trajetórias inteiras do sistema (4), exceto a posição de equilíbrio zero, e V uma função infinitamente global tal que $\dot{V}(x) < 0$ se $x \notin N$ e $\dot{V}(x) \leq 0$ se $x \in N$. Então a solução nula do sistema $\dot{x} = X(x)$, $x(0) = 0$ é globalmente estável.

DEMONSTRAÇÃO. Seja p um ponto arbitrário do espaço de fase e

$\varphi(p, t)$ ($t > 0$) a semi-trajetória passando por p . Como por hipótese $\dot{V} \leq 0$ tem-se que $V(\varphi(p, t)) \leq V_0$. A função V é infinitamente global, logo o conjunto $\{p/V(p) \leq 0\}$ é limitado ou seja, a semi-trajetória $\varphi(p, t)$, $t > 0$ está numa região limitada. Consequentemente $\varphi(p, t)$, $t > 0$ possui pontos ω -limites. Pelo lema 0.14 o conjunto Ω de todos os pontos ω -limites está numa única superfície de nível $V = V_\omega$.

Consideremos dois casos:

- a) $V_\omega = 0$, ou seja a superfície de nível é a origem. Assim Ω coincide com a origem e temos $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t, x) = 0$. Como $\dot{V} \leq 0$, pelo teorema 0.12 tem-se a estabilidade no sentido de Liapunov. Segue que a solução nula do sistema $\dot{x} = X(x)$, $x(0) = 0$ é globalmente estável.
- b) $V_\omega \neq 0$. Na superfície $V = W_\omega$ está o conjunto Ω -limite do ponto p , consistindo de trajetórias inteiras. É óbvio que ao longo destas trajetórias $\dot{V} = 0$ e assim $\Omega \subseteq N$ que contradiz a hipótese de N não conter trajetórias inteiras. Portanto $V_\omega = 0$ e tem-se a estabilidade global. \square

Como trabalharemos com funções que possuem descontinuidades em alguns pontos, há a necessidade de definirmos a derivada para tais funções.

0.18. DEFINIÇÃO. A derivada de toda função descontínua $x(t)$ (em $t = t_\alpha$) com grandezas de descontinuidade η_α é dada por

$$Dx = \frac{dx}{dt} + \sum_{\alpha} \eta_{\alpha} \delta(t - t_{\alpha})$$

onde $\delta(t)$ é a função de Dirac. Chamaremos esta derivada de "derivada generalizada da função $x(t)$ descontínua em $t = t_{\alpha}$ ".

Daremos a seguir a definição da transformação de Liapunov que será usada na demonstração dos teoremas que veremos no capítulo IV deste trabalho.

0.19. DEFINIÇÃO. Uma transformação linear

$$x = L(t)y$$

é chamada uma "transformação de Liapunov" se $L(t)$ e $\dot{L}(t)$ são matrizes quadradas limitadas para todo t e existe um número $\epsilon > 0$ tal que $|\det L(t)| > \epsilon$ para todo t .

0.20. OBSERVAÇÃO. Em vista da existência da "derivada generalizada de uma função descontínua em alguns pontos" pode-se definir uma transformação de Liapunov tal que a matriz $L(t)$ é descontínua em alguns pontos.

A seguir enunciaremos dois teoremas que podem ser encontrados em [G].

0.21. TEOREMA. Se sob a transformação de Liapunov $x = L(t) \cdot y$ o sistema

$$(1) \quad \dot{x}_i = \sum_{k=1}^n p_{ik}(t)x_k$$

é levado sobre o sistema

$$(1') \quad \dot{y}_i = \sum_{k=1}^n q_{ik}(t)y_k$$

e a solução nula deste sistema é estável, assintoticamente estável ou instável no sentido de Liapunov, então a solução nula do sistema original (1) é estável, assintoticamente estável ou instável, respectivamente.

Consideremos agora o sistema de equações diferenciais $\dot{x} = Ax$.

0.22. TEOREMA. Se todos os autovalores da matriz A tem parte real negativa, então para toda forma quadrática negativa definida $W(x,x)$ existe uma única forma quadrática positiva definida que satisfaz $\dot{V} = -W$.

Reciprocamente, se para toda forma quadrática $W(x,x)$ negativa definida existe uma única forma quadrática positiva definida

tal que $\dot{V} = W$ então todo autovalor da matriz A tem parte real negativa.

CAPÍTULO I

UM TEOREMA DE UNICIDADE DE SOLUÇÃO À DIREIRA PARA EQUACÕES DIFERENCIAIS CONTÍNUAS POR PARTES

1. HIPÓTESE FUNDAMENTAL

Sejam G uma região limitada do \mathbb{R}^n e $F:G \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^∞ tal que zero é o valor regular da mesma. Consideremos a superfície S definida por $F^{-1}(0)$ e as regiões distintas $G^+ = F^{-1}(0, \infty)$ e $G^- = F^{-1}(-\infty, 0)$. Sejam f^+ e f^- funções diferenciáveis em $G \times I$ e $f:G \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função tal que $f/G^+ \times I = f^+$ e $f/G^- \times I = f^-$. Para todo $x \in S$ convencionaremos que a direção positiva da normal a S , passando pelo ponto $x \in S$, é a de G^- para G^+ .

Seja

$$(1.1) \quad \dot{x} = f(t, x) \quad \text{com } T_0 < t < T_1, \quad x \in G,$$

$f(t, x) = (f_1(t, x), \dots, f_n(t, x))$ onde as funções reais f_i ($i=1, \dots, n$) são definidas, mensuráveis e limitadas em $Q = G \times [T_0, T_1]$. Para cada t fixo as funções f_i são de tal modo que $\lim_{F(x) \rightarrow -0} f_i$ e $\lim_{F(x) \rightarrow +0} f_i$ existem. Aqui $F(x) \rightarrow -0$ (ou

$F(x) \rightarrow +0$) indica que estamos encontrando o limite de $f_i(t, x)$ para valores de x tendendo a S tais que $F(x) < 0$, i.é., $x \in G^-$ (respectivamente para $x \in G^+$).

Suponhamos ainda que

$$(1.2) \quad \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right| \leq k \quad \text{para todo } t \in (T_0, T_1) \quad \text{e } x \in G$$

$$i, j = 1, \dots, n$$

Para todo $x \in S$, sejam

$$f^+(t, x) = \lim_{F(x) \rightarrow +0} f(t, x), \quad f^-(t, x) = \lim_{F(x) \rightarrow -0} f(t, x),$$

$$f_N^+ = |f^+| \cos \theta_1 \quad \text{e} \quad f_N^- = |f^-| \cos \theta_2$$

onde θ_1 e θ_2 são os ângulos formados pelos vetores $f^+(t, x)$ e $f^-(t, x)$ com $\text{grad } F(x)$ respectivamente. Observemos que $f_N^+(t, x)$ e $f_N^-(t, x)$ são as projeções de $f^+(t, x)$ e $f^-(t, x)$ na direção da normal a S no ponto (t, x) .

2. LEMAS PRELIMINARES

LEMA 1.1. Se para todo $x \in S$, $h = f^+ - f^-$ dirige-se para G^- ao longo da normal a S em (t, x) (ou é zero) i.é., $h_N(t, x) \leq 0$, então para o sistema (1) temos:

- (i) unicidade de solução à direita ;
(ii) dependência contínua nas condições iniciais em G .

PROVA. Pelos teoremas 0.6 e 0.7 é suficiente verificar a desigualdade.

$$(1.3) \quad (x - z) \cdot (f(t, x) - f(t, z)) \leq k|x - z|^2, \quad \forall x, z \in G.$$

Se ambos, x e z , pertencem a G^+ (ou ambos a G^-) então (1.3) segue da diferenciabilidade de f em G^+ (ou G^-) e da condição (1.2).

Para $x \in G^+$ e $z \in G^-$ seja y o ponto de intersecção mais próximo a x do segmento $ax + (1 - a)z$, $a \in [0, 1]$ com a superfície S . Por (1.2)

$$(1.4) \quad |f(t, x) - f^+(t, y)| \leq k|x - y|$$

$$|f^-(t, x) - f(t, z)| \leq k|y - z|.$$

O segmento $ay + (1 - a)x$, $a \in [0, 1)$ está contido em G^+ e $h(t, y) = f^+(t, y) - f^-(t, y)$ dirige-se para G^- ao longo da normal a S no ponto y . Assim tem-se

$$(x - y) \cdot (f^+(t, y) - f^-(t, y)) \leq 0$$

e se trocarmos $(x-y)$ por $(x-z)$ dirigido para o mesmo lado, esta desigualdade continua válida. Assim

$$\begin{aligned}
 (x-z) \cdot (f(t,x) - f(t,z)) &= (x-z) \cdot [f(t,x) - f^+(t,y) + f^-(t,y) - f(t,z)] \\
 &\quad + (x-z) \cdot (f^+(t,y) - f^-(t,y)) \\
 &\leq (x-z) \cdot [(f(t,x) - f^+(t,y)) + f^-(t,y) - f(t,z)] \\
 &= |x-z| [|f(t,x) - f^+(t,y)| \cos \theta_1 + |f^-(t,y) - \\
 &\quad - f(t,z)| \cos \theta_2] \\
 &\leq |x-z| [|f(t,x) - f^+(t,y)| + |f^-(t,y) - f(t,z)|] \\
 &\leq |x-z| [k|x-z| + k|x-z|] \\
 &= k_1 |x - z|^2 \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

LEMA 1.2. Seja S_0 um domínio aberto da superfície S . Se $f_N^+(t,x) \leq 0$ para $t_1 < t < t_2$ e $x \in S_0$ então para $t_1 \leq t \leq t_2$ nenhuma solução vai de S_0 diretamente para G^+ .

PROVA. Suponhamos que existe uma solução $\varphi(t)$ e t', t'' tais que

$$(1.5) \quad \varphi(t') \in S_0, \quad \varphi(t) \in G^+ \text{ para } t' < t < t'' \quad (t_1 \leq t' < t'' \leq t_2).$$

Para $x \in G^+$ definamos $r(x) = \min_{y \in S} |x - y| = |x - y(x)|$.

Seja $\varphi(t) \in G^+$ então $\frac{dr}{dt}(\varphi(t))$ é a projeção de $\dot{\varphi}(t)$ na normal a S traçada para $\varphi(t)$ (no ponto $y(\varphi(t))$). Mas, $f_N^+(t, \varphi(t))$ é a projeção de $f(t, \varphi(t))$ nesta normal, logo para quase todo t com $y(\varphi(t)) \in S_0$ tem-se

$$\frac{dr}{dt}(\varphi(t)) = f_N^+(t, \varphi(t)) \leq f_N^+(t, \varphi(t)) - f_N^+(t, y(\varphi(t)))$$

Por (1.2)

$$\begin{aligned} |f_N^+(t, \varphi(t)) - f_N^+(t, y(\varphi(t)))| &\leq M |\varphi(t) - y(\varphi(t))| \\ &\leq Kn^2 |\varphi(t) - y(\varphi(t))|. \end{aligned}$$

Assim $r(x)$ que é absolutamente contínua satisfaz $\frac{dr}{dt}(\varphi(t)) \leq Kn^2 r(\varphi(t))$ para quase todo t .

Consequentemente $r(\varphi(t)) \leq r(\varphi(t')) \exp [Kn^2(t - t')]$ para $t' < t \leq t''$ que contradiz (1.5). ■

OBSERVAÇÃO 1.3. Trocando t por $-t$ obtêm-se o seguinte:

Se $f_N^+ \geq 0$ em S_0 então nenhuma solução vai diretamente de G^+ para S_0 .

LEMA 1.4. Se para $t_1 < t < t_2$ e $(t, x) \in S_0 \subset S$ temos $f_N^+ > 0$, $f_N^- > 0$ (ou para estes valores de t temos $f_N^+ < 0$ e $f_N^- < 0$) então em $G^+ \cup S_0 \cup G^-$ tem-se unicidade e dependência contínua da solução sob as condições iniciais.

PROVA. Pelo lema 1.2 e a observação 1.3, não existe solução $\varphi(t)$ tal que $\varphi(t_0) \in S_0$ e $\varphi(t) \in G^-$ para $t_0 < t \leq t_0 + \delta$ ($t_1 \leq t_0 < t_0 + \delta \leq t_2$) ou $\varphi(t_0) \in S_0$ e $\varphi(t) \in G^+$ para $t_0 - \delta \leq t < t_0$ ($t_1 \leq t_0 - \delta < t_0 \leq t_2$).

A solução $\varphi(t) \notin S_0$ para todo $t \in (t_0, t_0 + \delta)$ ou para todo $t \in (t_0 - \delta, t_0)$ pois pela definição de solução $\dot{\varphi}(t)$ pertence ao segmento $af^+ + (1-a)f^-$ com $a \in [0, 1]$, para quase todo t nestes intervalos. Assim $\dot{\varphi}(t)$ não está no plano tangente a S . Portanto se $\varphi(t_0) \in S_0$ tem-se que $\varphi(t) \in G^+$ para $t_0 < t \leq t_0 + \delta$ e $\varphi(t) \in G^-$ para $t_0 - \delta \leq t < t_0$.

Sejam $\varphi(t)$ e $\psi(t)$ soluções satisfazendo $\varphi(t_0) = \psi(t_0)$. Ambas estão em G^- para $t_0 - \delta \leq t < t_0$ e em G^+ para $t_0 < t \leq t_0 + \delta$ onde (1.3) é satisfeita. Assim $\psi(t) = \varphi(t)$ e pelo teorema 0.7 tem-se a dependência contínua. ■

LEMA 1.5. Sejam $g(z_2, z_3, \dots, z_n, t)$ de classe C^1 e $f(z_2, \dots, z_n, t)$ com primeira e segunda derivadas parciais contínuas exceto possivelmente $\frac{\partial^2 f}{\partial t}$. Então existe uma função $\psi(z_1, \dots, z_n, t)$ tendo derivadas de segunda ordem contínuas exceto possivelmente $\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$.

e para $z_1 = 0$, ψ satisfaz:

$$\psi = f \quad \text{e} \quad \frac{\partial \psi}{\partial z_1} = g$$

PROVA. Mostremos que

$$\psi(z_1, \dots, z_n, t) = f(z_2, \dots, z_n, t) + z_1 \int_0^1 g(z_2 + u z_1, \dots, z_n + u z_1, t) du_2 \dots du_n$$

satisfaz as condições do lema.

Para $z_1 = 0$

$$\psi(0, z_2, \dots, z_n, t) = f(z_2, \dots, z_n, t)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial z_1} \Big|_{z_1=0} = z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} \int_0^1 \dots \int_0^1 g(z_2 + u z_1, \dots, z_n + u z_1, t) du_2 \dots du_n$$

$$+ \int_0^1 \dots \int_0^1 g(z_2 + u z_1, \dots, z_n + u z_1, t) du_2 \dots du_n \Big|_{z_1=0}$$

$$= \int_0^1 \dots \int_0^1 z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} g(z_2 + u z_1, \dots, z_n + u z_1, t) du_2 \dots du_n$$

$$+ \int_0^1 \dots \int_0^1 g(z_2 + u z_1, \dots, z_n + u z_1, t) du_2 \dots du_n \Big|_{z_1=0}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=2}^n \int_0^1 g_{i-1}(\dots, z_i + u_i z_1, \dots, t) u_i z_1 du_i \dots du_{i-1} du_{i+1} \dots \\
&+ \int_0^1 \dots \int_0^1 g(z_2 + u_2 z_1, \dots, z_n + u_n z_1, t) du_2 \dots du_n \Big|_{z_1=0}
\end{aligned}$$

onde g_{i-1} é a derivada de g em relação i -ésima coordenada.

Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \psi}{\partial z_1} \Big|_{z_1=0} &= \sum_{i=2}^n \int_0^1 \dots \int_0^1 g(\dots, z_{i-1} + u_{i-1} z_1, z_i + z_1, z_{i+1} + u_{i+1} z_1, \dots, t) \dots du_{i-1} du_{i+1} \dots \\
&- (n-2) \int_0^1 \dots \int_0^1 g(z_2 + u_2 z_1, \dots, z_n + u_n z_1, t) du_2 \dots du_n \\
&+ \int_0^1 \dots \int_0^1 g(z_2 + u_2 z_1, \dots, z_n + u_n z_1, t) du_2 \dots du_n \Big|_{z_1=0} \\
&= \sum_{i=2}^n \int_0^1 \dots \int_0^1 g(\dots, z_{i-1} + u_{i-1} z_1, z_i + z_1, z_{i+1} + u_{i+1} z_1, \dots, t) \dots du_{i-1} du_{i+1} \dots \\
&- (n-1) \int_0^1 \dots \int_0^1 g(z_2 + u_2 z_1, \dots, z_n + u_n z_1, t) du_2 \dots du_n \Big|_{z_1=0} \\
&= (n-1) g(z_i, \dots, z_n, t) - (n-2) g(z_1, \dots, z_n, t) \\
&= g(z_1, \dots, z_n, t) .
\end{aligned}$$

Para $z_1 \neq 0$

$$\frac{\partial \psi}{\partial z_1} = \sum_{i=2}^n \int_0^1 \dots \int_0^1 g(\dots, z_{i-1} + u_{i-1} z_1, z_i + z_1, z_{i+1} + u_{i+1} z_1, \dots, t) du_2 \dots du_{i-1} du_{i+1} \dots du_n$$

$$- (n-2) \int_0^1 \dots \int_0^1 g(z_2 + u_2 z_1, \dots, z_n + u_n z_1, t) du_2 \dots du_n$$

e

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z_1^2} = \sum_{i=2}^n \int_0^1 \dots \int_0^1 \frac{\partial}{\partial z_1} g(\dots, z_{i-1} + u_{i-1} z_1, z_i + z_1, z_{i+1} + u_{i+1} z_1, \dots, t) du_2 \dots du_{i-1} du_{i+1} \dots du_n$$

$$- (n-2) \int_0^1 \dots \int_0^1 \frac{\partial}{\partial z_1} g(z_2 + u_2 z_1, \dots, z_n + u_n z_1, t) du_2 \dots du_n$$

$$= \frac{1}{z_1} \left\{ \sum_{i=2}^n \sum_{j=2}^{i-1} \int_0^1 \dots \int_0^1 g(\dots, z_{j-1} + u_{j-1} z_1, z_j + z_1, z_{j+1} + u_{j+1} z_1, \dots, z_{i-1} + u_{i-1} z_1, z_i + z_1, z_{i+1} + u_{i+1} z_1, \dots, t) du_2 \dots du_{j-1} du_{j+1} \dots du_{i-1} du_{i+1} \dots du_n \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \int_0^1 \dots \int_0^1 g(\dots, z_{i-1} + u_{i-1} z_1, z_i + z_1, z_{i+1} + u_{i+1} z_1, \dots, z_{j-1} + u_{j-1} z_1, z_j + z_1, z_{j+1} + u_{j+1} z_1, \dots, t) du_2 \dots du_{i-1} du_{i+1} \dots du_{j-1} du_{j+1} \dots du_n \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \int_0^1 \dots \int_0^1 g(\dots, z_{i-1} + u_{i-1} z_1, z_i + z_1, z_{i+1} + u_{i+1} z_1, \dots, z_{j-1} + u_{j-1} z_1, z_j + z_1, z_{j+1} + u_{j+1} z_1, \dots, t) du_2 \dots du_{i-1} du_{i+1} \dots du_{j-1} du_{j+1} \dots du_n \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \int_0^1 \dots \int_0^1 g(\dots, z_{i-1} + u_{i-1} z_1, z_i + z_1, z_{i+1} + u_{i+1} z_1, \dots, z_{j-1} + u_{j-1} z_1, z_j + z_1, z_{j+1} + u_{j+1} z_1, \dots, t) du_2 \dots du_{i-1} du_{i+1} \dots du_{j-1} du_{j+1} \dots du_n \right.$$

$$\begin{aligned}
 & -2(n-2) \sum_{i=2}^n \int_0^1 \dots \int_0^1 g(z_2+u_2 z_1, \dots, z_n+u_n z_1, t) du_2 \dots du_n \\
 & + \sum_{i=2}^n \int_0^1 \dots \int_0^1 g_{i-1}(\dots, z_{i-1}+u_{i-1} z_1, z_i+z_1, z_{i+1}+u_{i+1} z_1, \dots, t) du_2 \dots du_{i-1} du_{i+1} \dots du_n
 \end{aligned}$$

Para $1 \geq 2$:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \psi}{\partial z_i} &= \frac{\partial f}{\partial z_i}(z_2, \dots, z_n, t) + z_1 \frac{\partial}{\partial z_i} \int_0^1 \dots \int_0^1 g(z_2+u_2 z_1, \dots, z_n+u_n z_1, \dots, t) du_2 \dots du_n \\
 &= \frac{\partial f}{\partial z_i}(z_2, \dots, z_n, t) + \int_0^1 \dots \int_0^1 \int_0^1 g_{i-1}(\dots, z_i+u_i z_1, \dots, t) z_1 du_i du_2 \dots du_{i-1} du_{i+1} \dots du_n \\
 &= \frac{\partial f}{\partial z_i}(z_2, \dots, z_n, t) + \int_0^1 \dots \int_0^1 g(\dots, z_{i+1}+u_{i-1} z_1, z_i+z_1, z_{i+1}+u_{i+1} z_1, \\
 &\quad \dots, t) du_2 \dots du_{i-1} du_{i+1} \dots du_n \\
 &\quad - \int_0^1 \dots \int_0^1 g(\dots, z_{i-1}+u_{i-1} z_1, z_i, z_{i+1}+u_{i+1} z_1, \dots, t) du_2 \dots du_{i-1} du_{i+1} \dots du_n \\
 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z_i^2} &= \frac{\partial^2 f}{\partial z_i^2}(z_2, \dots, z_n, t) + \int_0^1 \dots \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial z_i}(\dots, z_{i-1}+u_{i-1} z_1, z_i+z_1, z_{i+1}+u_{i+1} z_1, \\
 &\quad \dots, t) du_2 \dots du_{i-1} du_{i+1} \dots du_n
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^1 \dots \int_0^1 \frac{\partial}{\partial z_i} g(\dots, z_{i-1} + u_{i-1} z_1, z_i, z_{i+1} + u_{i+1} z_1, \dots, t) du_2 \dots du_{i-1} du_{i+1} \dots du_n \\
& = \frac{\partial^2}{\partial z_i^2} f(z_2, \dots, z_n, t) + \int_0^1 \dots \int_0^1 g_{i-1}(z_2 + u_2 z_1, \dots, z_{i-1} + u_{i-1} z_1, z_i + z_1, z_{i+1} + \\
& \quad + u_{i+1} z_1, \dots, t) du_2 \dots du_{i-1} du_{i+1} \dots du_n
\end{aligned}$$

$$- \int_0^1 \dots \int_0^1 g_{i-1}(z_2 + u_2 z_1, \dots, z_{i-1} + u_{i-1} z_1, z_{i+1} + u_{i+1} z_1, \dots, t) du_2 \dots du_{i-1} du_{i+1} \dots du_n$$

Para $i, j \geq 2$ e supondo $i > j$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \psi}{\partial z_i \partial z_j} & = \frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z_j} + \int_0^1 \dots \int_0^1 \frac{\partial}{\partial z_j} g(\dots, z_{i-1} + u_{i-1} z_1, z_i + z_1, z_{i+1} + u_{i+1} z_1, \\
& \quad \dots, t) du_2 \dots du_{i-1} du_{i+1} \dots du_n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^1 \dots \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial z_j}(\dots, z_{i-1} + u_{i-1} z_1, z_i, z_{i+1} + u_{i+1} z_1, \dots, t) du_2 \dots du_{i-1} du_{i+1} \dots du_n \\
& = \frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z_j} + \int_0^1 \dots \int_0^1 \int_0^1 g_{j-1}(\dots, z_j + u_j z_1, \dots, z_{i-1} + u_{i-1} z_1, z_i + z_1, z_{i+1} + u_{i+1} z_1 \\
& \quad \dots, t) du_{j+1} \dots du_{j-1} du_{j+1} \dots du_{i-1} du_{i+1} \dots du_n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^1 \dots \int_0^1 \left[\int_0^1 g_{j-1}(\dots, z_j + u_j z_1, \dots, z_{i-1} + u_{i-1} z_1, z_i, z_{i+1} + u_{i+1} z_1, \right. \\
& \quad \left. \dots, t) du_j \dots du_{j-1} du_{j+1} \dots du_{i-1} du_{i+1} \dots du_n \right. \\
& = \frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z_j} + \frac{1}{z_1} \left[\int_0^1 \dots \int_0^1 g(\dots, z_{j-1} + u_{j-1} z_1, z_j + z_1, z_{j+1} + u_{j+1} z_1, \dots, z_{i-1} + u_{i-1} z_1, \right. \\
& \quad \left. z_i + z_1, z_{i+1} + u_{i+1} z_1, \dots, t) du_2 \dots du_{j-1} du_{j+1} \dots du_{i-1} du_{i+1} \dots du_n \right. \\
& - \int_0^1 \dots \int_0^1 g(\dots, z_{j-1} + u_{j-1} z_1, z_j, z_{j+1} + u_{j+1} z_1, \dots, z_{i-1} + u_{i-1} z_1, z_i + z_1, z_{i+1} + \\
& \quad \left. + u_{j+1} z_1, \dots, t) du_2 \dots du_{j-1} du_{j+1} \dots du_{i-1} du_{i+1} \dots du_n \right. \\
& - \int_0^1 \dots \int_0^1 g(\dots, z_{j-1} + u_{j-1} z_1, z_j + z_1, z_{j+1} + u_{j+1} z_1, \dots, z_{i-1} + u_{i-1} z_1, z_i, z_{i+1} + \\
& \quad \left. + u_{i+1} z_1, \dots, t) du_2 \dots du_{j-1} du_{j+1} \dots du_{i-1} du_{i+1} \dots du_n \right. \\
& + \int_0^1 \dots \int_0^1 g(\dots, z_{j-1} + u_{j-1} z_1, z_j, z_{j+1} + u_{j+1} z_1, \dots, z_{i-1} + u_{i-1} z_1, z_i, \\
& \quad \left. z_{i+1} + u_{i+1} z_1, \dots, t) du_2 \dots du_{j-1} du_{j+1} \dots du_{i-1} du_{i+1} \dots du_n \right].
\end{aligned}$$

OBSERVAÇÃO. Para $i < j$ o resultado é análogo.

Para $j \geq 2$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z_i \partial z_j} &= \sum_{i=2}^n \int_0^1 \dots \int_0^1 \frac{\partial}{\partial z_j} g(\dots, z_{i-1} + u_{i-1} z_1, z_i + z_1, z_{i+1} + u_{i+1} z_1, \\ &\quad \dots, t) du_2 \dots du_{i-1} du_{i+1} \dots du_n \\ &- (n-2) \int_0^1 \dots \int_0^1 \frac{\partial}{\partial z_j} g(z_2 + u_2 z_1, \dots, z_n + u_n z_1, t) du_2 \dots du_n \\ &= \sum_{i=2}^{j-1} \int_0^1 \dots \int_0^1 \frac{\partial}{\partial z_j} g(\dots, z_{i-1} + u_{i-1} z_1, z_i + z_1, z_{i+1} + u_{i+1} z_1, \dots, z_j + u_j z_1, \dots \\ &\quad \dots t) du_2 \dots du_{i-1} du_{i+1} \dots du_n \\ &\quad + \sum_{i=j+1}^n \int_0^1 \dots \int_0^1 \frac{\partial}{\partial z_j} g(\dots, z_j + u_j z_1, \dots, z_{i-1} + u_{i-1} z_1, z_i + z_1, z_{i+1} + u_{i+1} z_1, \\ &\quad \dots t) du_2 \dots du_{i-1} du_{i+1} \dots du_n \\ &\quad + \int_0^1 \dots \int_0^1 \frac{\partial}{\partial z_j} g(\dots, z_{j-1} + u_{j-1} z_1, z_j + z_1, z_j + u_{j+1} z_1, \dots, t) du_2 \dots du_{j-1} du_{j+1} \dots du_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -(n-2) \int_0^1 \cdots \int_0^1 \frac{\partial}{\partial z_j} g(z_2 + u_2 z_1, \dots, z_n + u_n z_1, t) du_2 \cdots du_n \\
&= \sum_{i=2}^{j-1} \int_0^1 \cdots \int_0^1 \left[\int_0^1 g_{j-1}(\dots, z_{i-1} + u_{i-1} z_1, z_i + z_1, z_{i+1} + u_{i+1} z_1, \dots, z_j + u_j z_1, \right. \\
&\quad \left. \dots, t) du_j \right] du_2 \cdots du_{i-1} du_{i+1} \cdots du_{j-1} du_{j+1} \cdots du_n \\
&+ \sum_{i=j+1}^n \int_0^1 \cdots \int_0^1 \left[\int_0^1 g_{j-1}(\dots, z_j + u_j z_1, \dots, z_{i-1} + u_{i-1} z_1, z_i + z_1, z_{i+1} + u_{i+1} z_1, \right. \\
&\quad \left. \dots, t) du_j \right] du_2 \cdots du_{j-1} du_{j+1} \cdots du_{i-1} du_{i+1} \cdots du_n \\
&+ \int_0^1 \cdots \int_0^1 g_{j-1}(z_2 + u_2 z_1, \dots, z_{j-1} + u_{j-1} z_1, z_j + z_1, z_{j+1} + u_{j+1} z_1, \dots, t) du_2 \cdots du_{j-1} du_{j+1} \cdots du_n \\
&- (n-2) \int_0^1 \cdots \int_0^1 g_{j-1}(z_2 + u_2 z_1, \dots, z_n + u_n z_1, t) du_2 \cdots du_n \\
&= \frac{1}{z_1} \left[\sum_{i=2}^{j-1} \int_0^1 \cdots \int_0^1 g(\dots, z_{i-1} + u_{i-1} z_1, z_i + z_1, z_{i+1} + u_{i+1} z_1, \dots, z_{j-1} + u_{j-1} z_1, \right. \\
&\quad \left. z_j + z_1, z_{j+1} + u_{j+1} z_1, \dots, t) du_2 \cdots du_{i-1} du_{i+1} \cdots du_{j-1} du_{j+1} \cdots du_n \right]
\end{aligned}$$

$$- \sum_{i=2}^{j-1} \int_0^1 \dots \int_0^1 g(\dots, z_{i-1}^{+u_{i-1}} z_1, z_i^{+z_1}, z_i^{+u_{i+1}} z_1, \dots, z_{j-1}^{+u_{j-1}} z_1, \dots, z_j, \\ z_{j+1}^{+u_{j+1}} z_1, \dots, t) du_2 \dots du_{i-1} du_{i+1} \dots du_{j-1} du_{j+1} \dots du_n$$

$$+ \sum_{i=j+1}^n \int_0^1 \dots \int_0^1 g(\dots, z_{j-1}^{+u_{j-1}} z_1, z_j^{+z_1}, z_{j+1}^{+u_{j+1}} z_1, \dots, z_{i-1}^{+u_{i-1}} z_1, \\ z_i^{+z_1}, z_{i+1}^{+u_{i+1}} z_1, \dots, t) du_2 \dots du_{j-1} du_{j+1} \dots du_{i-1} du_{i+1} \dots du_n$$

$$- \sum_{i=j+1}^n \int_0^1 \dots \int_0^1 g(\dots, z_{j-1}^{+u_{j-1}} z_1, z_j, z_{j+1}^{+u_{j+1}} z_1, \dots, z_{i-1}^{+u_{i-1}} z_1, \\ z_i^{+z_1}, z_{i+1}^{+u_{i+1}} z_1, \dots, t) du_2 \dots du_{j-1} du_{j+1} \dots du_{i-1} du_{i+1} \dots du_n$$

$$+ \int_0^1 \dots \int_0^1 g_{j-1}(z_2^{+u_2} z_1, \dots, z_{j-1}^{+u_{j-1}} z_1, z_j^{+z_1}, z_{j+1}^{+u_{j+1}} z_1, \\ \dots, t) du_2 \dots du_{j-1} du_{j+1} \dots du_n$$

$$-(n-2) \int_0^1 \dots \int_0^1 g(z_2^{+u_2} z_1, \dots, z_{j-1}^{+u_{j-1}} z_1, z_j^{+z_1}, z_{j+1}^{+u_{j+1}} z_1, \\ \dots, t) du_2 \dots du_{j-1} du_{j+1} \dots du_n$$

$$+(n-2) \int_0^1 \dots \int_0^1 g(z_2 + u_2 z_1, \dots, z_{j-1} + u_{j-1} z_1, z_j, z_{j+1} + u_{j+1} z_1, \dots, t) du_2 \dots du_{j-1} du_{j+1} \dots du_n.$$

Agora seja:

$$\begin{aligned} g(z_2 + u_2 z_1, \dots, z_n + u_n z_1, t) &= g(u_2, \dots, w_n, t) \\ &= F(z_1, \dots, z_n, u_2, \dots, u_n, t) \end{aligned}$$

onde $w_i = z_i + u_i z_1$, $i = 2, \dots, n$.

A função F é contínua e suas derivadas

$$\frac{\partial F}{\partial z_1} = \frac{\partial g}{\partial w_1} u_2 + \dots + \frac{\partial g}{\partial w_n} u_n,$$

$$\frac{\partial F}{\partial z_i} = \frac{\partial g}{\partial w_i} u_i, \quad i=2, \dots, n,$$

$$\frac{\partial F}{\partial u_i} = \frac{\partial g}{\partial w_i} z_1, \quad i=2, \dots, n$$

e

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial g}{\partial t}$$

são todas contínuas pois g é de classe C^1 . Assim, pela aplicação da proposição 0.8 tem-se que

$$\int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 g(z_2 + u_2 z_1, \dots, z_n + u_n z_1, t) du_2 \dots du_n$$

é de classe C^1 . Portanto as derivadas parciais de primeira ordem de ψ são contínuas.

Para que as derivadas de segunda ordem, exceto possivelmente $\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$, sejam contínuas precisamos verificar que

$$\int_0^1 \dots \int_0^1 g_{i-1}(\dots, z_{i-1} + u_{i-1} z_1, z_i + z_1, z_{i+1} + u_{i+1} z_1, \dots, t) du_2 \dots du_i$$

é contínua. Isto segue pela proposição 0.9. ■

LEMA 1.7. Seja S uma superfície definida pelo gráfico de $x_1 = \phi(x_2, \dots, x_n)$ onde ϕ é de classe C^2 . Suponhamos que em todo ponto de S existe $h: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , $|h| \geq$

$\eta > 0$ e $h_1 - \sum_{i=1}^n \frac{\partial \phi}{\partial x_i} h_i \neq 0$ para qualquer $x \in S$. Então exist

tem uma vizinhança V de S em \mathbb{R}^n e uma transformação de coordenadas diferenciável $\theta: V \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por

$$\begin{cases} x_1 = \theta_1(z_1, \dots, z_n, t) \\ \dots \\ x_n = \theta_n(z_1, \dots, z_n, t) \end{cases}$$

tal que

- (i) $\frac{\partial \theta}{\partial z}$ é não singular ;
- (ii) nas novas coordenadas S será definida por $z_1 = 0$;
- (iii) as funções θ_i tem derivadas parciais de primeira e segunda ordem contínuas exceto possivelmente $\frac{\partial^2 \theta_i}{\partial t^2}$;
- (iv) em S a direção da linha dada por $z_2 = \text{const}, \dots, z_n = \text{const}$ é a mesma que a do vetor h .
- (v) para $z_1 = 0$ as funções θ_i não dependem de t .

PROVA. Fazemos a mudança de coordenadas $y = P(x)$ dada por

$$(1.6) \quad \begin{cases} y_1 = x_1 - \phi(x_2, \dots, x_n) \\ y_2 = x_2 \\ \dots \\ y_n = x_n \end{cases}$$

A superfície S é agora definida por $y_1 = 0$ e a direção de h é dada por

$$(1.7) \quad dP(x) \cdot h = \begin{bmatrix} \dot{h}_1 - \sum_{i=2}^n \frac{\partial \phi}{\partial x_i} h_i \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix}$$

Seja $y = Q(z)$ dada por

$$(1.8) \quad \begin{cases} Y_1 = z_1 \\ Y_2 = \psi_2(z_1, \dots, z_n) \\ \dots \\ Y_n = \psi_n(z_1, \dots, z_n) \end{cases}$$

Pelo lema anterior as funções ψ_i existem e tem derivadas de primeira e segunda ordem contínuas exceto possivelmente $\frac{\partial^2 \psi_i}{\partial t^2}$ e para $z = 0$ tem-se

$$(1.9) \quad \psi_i = z_i, \quad \frac{\partial \psi_i}{\partial z_1} = \frac{h_i}{g} \quad (i=2, \dots, n).$$

Através de (1.6) e (1.8) obtêm-se a transformação $x = \theta(z)$ dada por

$$(1.10) \left\{ \begin{array}{l} x_1 = z_1 + \phi(\psi_2(z_1, \dots, z_n, t), \dots, \psi_n(z_1, z_2, \dots, z_n, t)) = \theta_1(z_1, \dots, z_n, t) \\ x_2 = \psi_2(z_1, \dots, z_n, t) = \theta_2(z_1, \dots, z_n, t) \\ \dots \\ x_n = \psi_n(z_1, \dots, z_n, t) = \theta_n(z_1, \dots, z_n, t) \end{array} \right.$$

Mostremos que (1.10) satisfaz as condições de (i) a (v):

(i) $\frac{\partial \theta}{\partial z}$ é não singular pois a transformação

$x = \theta(z)$ é a composição das transformações

$x = P^{-1}(y)$ e $y = Q(z)$ com $\frac{\partial P}{\partial x}$ e $\frac{\partial Q}{\partial z}$ não singulares.

(ii) Óbvio.

(iii) As derivadas parciais de primeira e segunda ordem de θ_i para $i \geq 2$ são iguais as derivadas parciais das funções ψ_i . Pelo lema anterior tais derivadas são contínuas, exceto possivelmente $\frac{\partial^2 \psi_i}{\partial t^2}$ ou seja $\frac{\partial^2 \theta_i}{\partial t^2}$.

Ainda mais

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial z_1} = 1 + \sum_{i=2}^n \frac{\partial \phi}{\partial \psi_i} (\psi_2(z, t), \dots, \psi_n(z, t)) \frac{\partial \psi_i}{\partial z_1},$$

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial z_j} = \sum_{i=2}^n \frac{\partial \phi}{\partial \psi_i} \frac{\partial \psi_i}{\partial z_j} \quad \text{para } j \geq 2,$$

$$\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial z_1^2} = \sum_{i=2}^n \left[\frac{\partial \phi}{\partial \psi_i} \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial z_1^2} + \frac{\partial \psi_i}{\partial z_1} \sum_{j=2}^n \frac{\partial^2 \phi}{\partial \psi_j \partial \psi_i} \frac{\partial \psi_j}{\partial z_1} \right]$$

e

$$\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial z_1 \partial z_1} = \sum_{i=2}^n \left[\frac{\partial \psi_i}{\partial z_1} \sum_{k=2}^n \frac{\partial^2 \phi}{\partial \psi_k \partial \psi_i} \frac{\partial \psi_k}{\partial z_1} + \frac{\partial \phi}{\partial \psi_1} \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial z_1 \partial z_1} \right]$$

são contínuas. Logo as derivadas parciais de primeira e segunda ordem de θ_i ($i = 1, \dots, n$) são todas contínuas exceto possivelmente $\frac{\partial^2 \theta_i}{\partial t^2}$

(iv) Como

$$d\theta(z) \begin{bmatrix} z_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial z_1} & z_1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \psi_n}{\partial z_1} & z_1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} g & 0 & \dots & 0 \\ h_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = z_1 \begin{bmatrix} g \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix}$$

segue que a direção da linha dada por $z_2 = \text{const}, \dots, z_n = \text{const}$ é a mesma que a do vetor h .

(v) em $z_1 = 0$

$$\theta_1(0, z_2, \dots, z_n) = \phi(z_2, \dots, z_n)$$

$$\theta_2(0, z_2, \dots, z_n) = z_2$$

...

$\theta_n(0, z_2, \dots, z_n) = z_n$, ou seja θ_i ($i=1, \dots, n$) não depende

de t e a prova do lema está completa. ■

TEOREMA 1.8. Seja

$$(1.11) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, \dots, x_n, t) \\ \dots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, \dots, x_n, t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições dadas na hipótese fundamental, onde S é localmente do tipo gráfico i.é., em uma vizinhança de cada um de seus pontos S pode ser representada por uma de suas coordenadas $x_i = \phi(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$ com ϕ de classe C^2 . Suponhamos f_N^+ e f_N^- contínuas para $(x_1, \dots, x_n) \in S$.

Se em S $f_N^- > 0$ ou $f_N^+ < 0$, não necessariamente a mesma

desigualdade em todos os pontos, então na região G temos unicidade à direita e dependência contínua nas condições iniciais.

PROVA. Em qualquer ponto $x \in S$ pelo menos uma das condições abaixo é satisfeita:

$$(1.12) \quad f_N^+ - f_N^- < 0$$

$$(1.13) \quad f_N^+ > 0, \quad f_N^- > 0$$

$$(1.14) \quad f_N^- < 0, \quad f_N^+ < 0.$$

Se para $x_1 \in S$, $t = t_0$ (1.13) ou (1.14) é satisfeita, então pela continuidade de f_N^+ e f_N^- existe uma vizinhança $V_\varepsilon(x_1)$ na qual, para $|t - t_0| < \delta$, a mesma condição é satisfeita. Pelo lema 1.4 segue a unicidade nesta vizinhança.

Se para $x_1 \in S$, $t = t_0$, (1.12) é satisfeita, então existe uma vizinhança $V_\varepsilon(x_1)$ na qual a equação que define S pode ser representada por uma de suas coordenadas, por exemplo $x_1 = \phi(x_2, \dots, x_n)$, onde ϕ é de classe C^2 . Tomemos $V_\varepsilon(x_1)$ de maneira que pela continuidade de f_N^+ e f_N^- para $|t - t_0| < \delta$, $\delta > 0$ tem-se $f_N^+ - f_N^- < 0$ para todo $x \in V_\varepsilon(x_1)$. Em $V_\varepsilon(x_1)$ fabriquemos uma mudança de coordenadas como no lema 1.8 tomando $h = f^+ - f^-$.

O sistema (1.11) nas novas coordenadas é dado por

$$(1.15) \quad \begin{cases} \dot{z}_1 = F_1(z_1, \dots, z_n, t) \\ \dots \\ \dot{z}_n = F_n(z_1, \dots, z_n, t) \end{cases}$$

onde as F_i ($i = 1, \dots, n$) são definidas pelas equações

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \theta_1}{\partial z_i} F_i + \frac{\partial \theta_1}{\partial t} = f_1$$

$$(1.16) \quad \dots$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \theta_n}{\partial z_i} F_i + \frac{\partial \theta_n}{\partial t} = f_n$$

As funções F_i ($i = 1, \dots, n$) satisfazem a hipótese fundamental e são descontínuas somente quando $z_1 = 0$.

Por (1.16) segue que $F_j^+ - F_j^- = H_j$ satisfaz as equações

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \theta_1}{\partial z_i} H_i = h_1$$

$$(1.17) \quad \dots$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \theta_n}{\partial z_i} H_i = h_n$$

Pelo lema anterior, $\left. \frac{\partial \theta_i}{\partial z_1} \right|_{z_1=0} = \frac{h_i}{g}$ ($i=1, 2, \dots, n$), mas

(1.17) tem uma única solução, logo $H_1 = g$ e $H_2 = H_3 = \dots = H_n = 0$.

Logo para o sistema (1.15) o vetor de descontinuidade H é dirigido ao longo da normal ao plano de descontinuidade $z_1 = 0$ na direção de G^- assim como h o é.

Pelo lema 1.1 tem-se unicidade à direita para (1.15).

Pelo teorema (0.5) segue que o mesmo vale para (1.11) junto a parte de S considerada.

Assim numa vizinhança de S temos unicidade à direita. O mesmo vale para pontos não pertencentes a S pois é válida a desigualdade (1.2), logo (1.3). Consequentemente na região G tem-se unicidade à direita e pelo teorema 0.7 há dependência contínua da solução nas condições iniciais. ■

CAPÍTULO II

ESTABILIDADE DE POSIÇÕES DE EQUILÍBRIO PARA SISTEMAS DESCONTÍNUOS

Sejam G uma região limitada do \mathbb{R}^n e $F:G \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^∞ tal que zero é um valor regular de F . Denotemos por S a superfície definida por $F^{-1}(0)$ e por G^+ e G^- as regiões definidas respectivamente por $F^{-1}(0,+\infty)$ e $F^{-1}(-\infty,0)$.

Consideremos os sistemas de equações diferenciais

$$(2.1^+) \quad \dot{x} = f^+(x)$$

$$(2.1^-) \quad \dot{x} = f^-(x)$$

onde f^+ e f^- estão definidas em G .

Seja agora o sistema descontínuo dado por

$$(2.1^\pm) \quad \dot{x} = f(x)$$

onde

$$f(x) = \begin{cases} f^+(x) & \text{se } x \in G^+ \\ f^-(x) & \text{se } x \in G^- \end{cases}$$

Suponhamos que

- (a) os sistemas (2.1^+) e (2.1^-) satisfazem as condições de existência e unicidade de solução.
- (b) os campos $f^+(x)$ e $f^-(x)$ não possuem pontos críticos na superfície de descontinuidade.

Neste capítulo serão caracterizadas as soluções do sistema $\dot{x} = f(x)$ passando pelos pontos de S e determinado em que condições ocorrem em S posições de equilíbrio do sistema (2.1^\pm) .

1. DETERMINAÇÃO DO MOVIMENTO NO RETRATO DE FASE

Os sistemas (2.1^+) e (2.1^-) determinam dois campos vetoriais na superfície de descontinuidade S . Consideremos, por exemplo, o superior (2.1^+) . A superfície S divide-se em domínios tais que em cada um deles, os vetores do campo dirigem-se a um lado definido da superfície. Este domínios são separados por uma variedade Γ^+ genericamente de dimensão $(n-2)$ na qual o campo superior é tangente a S .

Analogamente o outro lado de S divide-se em domínios separados por uma variedade Γ^- genericamente de dimensão $(n-2)$.

Para todo ponto $x \in \Gamma^+$ (respectivamente $x \in \Gamma^-$) tem-se que

$$(i) \quad f^+(x) \neq 0 \quad (\text{respectivamente } f^-(x) \neq 0)$$

$$(ii) \quad f^+F(x) = 0 \quad (\text{respectivamente } f^-F(x) = 0) \quad \text{onde}$$

$$f^+F = f^+ \cdot \text{grad } F.$$

Usando o teorema do fluxo tubular em x com relação a f^+ , podemos considerar coordenadas (x_1, \dots, x_n) em torno de x tais que numa vizinhança de x o campo é dado por

$$f^+ = \frac{\partial}{\partial x_1}.$$

Podemos supor também, sem perda de generalidade, que localmente S é dada pelo gráfico de uma função $x_n = g(x_1, \dots, x_{n-1})$ com $g(0, \dots, 0) = 0$.

Assim (ii) é equivalente a

$$(ii') \quad \frac{\partial g}{\partial x_1}(x) = 0 \quad \text{se considerarmos } F(x) = x_n.$$

Ao campo de vetores f^+ (respectivamente f^-) acrescentaremos a hipótese de que

$$f^{+2}F(x) = \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2}(x) \neq 0$$

para $\forall x \in \Gamma^+$ (analogamente para Γ^-). Temos então que o contato entre as trajetórias de f^+ (respectivamente f^-) e S num ponto x é parabólico, assim como em todos os pontos de tangência próximos a x em S . Portanto cada ponto de Γ^+ (respectivamente cada ponto de Γ^-) é de um dos tipos A ou B (figura 1), dependendo do comportamento das trajetórias do sistema $\dot{x} = f^+(x)$ ($\dot{x} = f^-(x)$) numa vizinhança do ponto.

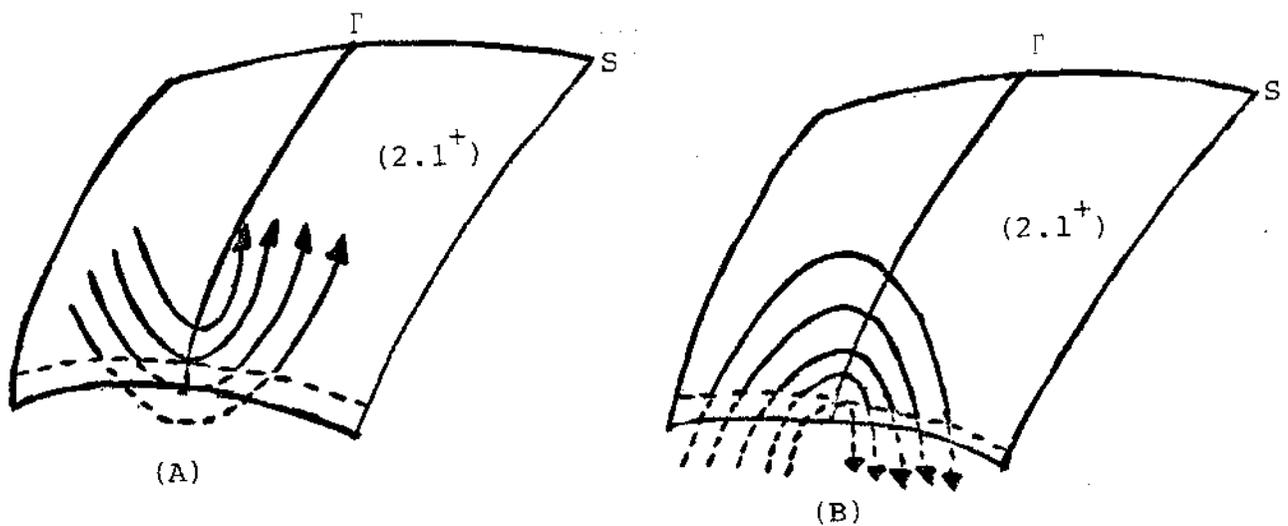


FIGURA 1

Tipos de tangência entre as trajetórias do sistema (2.1^+) e a superfície S .

As variedades Γ^+ e Γ^- são separadas por:

a) um domínio C (figura 2A) onde para todo x temos

$$\lim_{F(x) \rightarrow +0} \dot{F}(x) = f^+(x) \cdot \text{grad } F(x) \leq 0 \quad \text{e}$$

$$\lim_{F(x) \rightarrow -0} \dot{F}(x) = f^-(x) \cdot \text{grad } F(x) \geq 0$$

b) uma parte P (figuras 2A e 2C) onde os vetores não se cancelam mutuamente ou seja

$$\lim_{F(x) \rightarrow +0} \dot{F}(x) \cdot \lim_{F(x) \rightarrow -0} \dot{F}(x) > 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{F(x) \rightarrow +0} \dot{F}(x) > 0 \quad \text{e} \quad \lim_{F(x) \rightarrow -0} \dot{F}(x) < 0$$

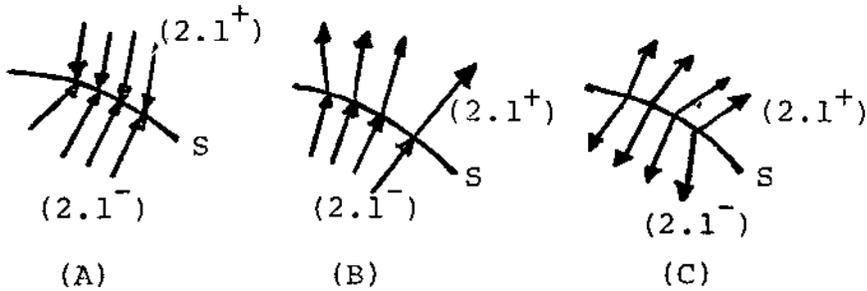


Figura 2

Encontro entre os campos f^+ e f^- na superfície S .

Em [AG1] é feita a seguinte caracterização para o comportamento das trajetórias na superfície de descontinuidade S .

As trajetórias do campo são sempre contínuas e sobre pontos de S não necessariamente há unicidade de solução.

As seguintes leis devem ser obedecidas:

- 1) Se uma trajetória contida no semi-espço G^- (respectivamente G^+) encontra S num ponto x do domínio P em que

$$\lim_{F(x) \rightarrow +0} \dot{F}(x) \cdot \lim_{F(x) \rightarrow -0} \dot{F}(x) > 0,$$
 deverá continuar seu movimento em G^+ junto a trajetória de (2.1⁺) que passa pelo ponto x (respectivamente em G^- junto a trajetória de (2.1⁻) que passa pelo ponto x).

- 2) Se uma trajetória chega a superfície S num ponto do domínio P em que

$$\lim_{F(x) \rightarrow +0} \dot{F}(x) > 0 \quad \text{e} \quad \lim_{F(x) \rightarrow -0} \dot{F}(x) < 0$$
 deverá sair de S junto a uma das trajetórias do sistema (2.1[±]) que passam pelo ponto. Como em S não há unicidade de solução precisamos escolher dentre as trajetórias uma em particular. Tomando o valor absoluto de $f_N^+(x)$ e $f_N^-(x)$ (projeções de f^+ e f^- na normal a S no ponto x) decidimos que a trajetória sai de S na direção do vetor com projeção de maior valor absoluto.

Chamaremos P de domínio regular.

3) Uma trajetória que encontra a superfície S num ponto M do domínio C continua seu movimento como segue:

Consideremos os vetores f^+ e f^- em M e a linha L unindo os extremos dos mesmos. Seja P o ponto de intersecção do plano tangente a S com a linha L . A trajetória continua seu movimento na direção do vetor \vec{MP} (figura 3) e permanecerá em S enquanto estivermos no domínio C . Seja (C) o sistema que determina o movimento neste domínio. Chamaremos C de "domínio de deslize".

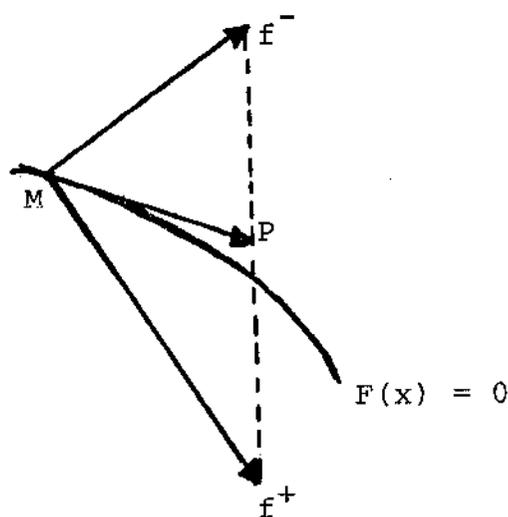


Figura 3

Movimento da trajetória no domínio C .

4) Suponhamos que uma trajetória encontre S num ponto pertencente a Γ^+ ou Γ^- . Estas variedades podem ser divididas em domínios, genericamente de dimensão $(n-2)$, P e C da seguinte maneira:

Consideremos Γ^+ , f^+/Γ^+ e f^-/Γ^+ . Consideremos ainda, para todo $x \in \Gamma^+$, a normal a Γ^+ contida no plano tangente a S . Fixemos a direção positiva desta normal. Trabalhando com as

projeções de $f^-/\Gamma^+(t,x)$ e $f^+/\Gamma^+(t,x)$ no plano tangente a S em x podemos dividir Γ^+ em domínios P_{Γ^+} e C_{Γ^+} da mesma maneira que foram determinados os domínios P e C na superfície S .

Analogamente pode-se dividir Γ^- em domínios P_{Γ^-} e C_{Γ^-} .

Neste caso de cada ponto de P_{Γ} (P_{Γ^+} ou P_{Γ^-}) sairá pelo menos uma trajetória dos sistemas (2.1⁺), (2.1⁻) e (C) enquanto que nenhuma trajetória sairá dos pontos de C_{Γ} (C_{Γ^+} ou C_{Γ^-}).

Quando uma trajetória encontra o domínio P num ponto em que passam diversas trajetórias, ela continuará seu movimento junto a uma trajetória que deve ser especificada.

Se a trajetória encontra o domínio C_{Γ} então ela movimentar-se-á em C_{Γ} de acordo com o sistema (Γ) que é encontrado da mesma maneira que o sistema (C).

Quando a trajetória encontra Γ numa variedade G , genericamente de dimensão $(n-3)$, que separa os domínios P_{Γ} e C_{Γ} , divide-se a variedade em domínios P_G e C_G assim como Γ foi dividida em domínios P_{Γ} e C_{Γ} . Determina-se então uma equação (G) e assim por diante.

5) Quando as variedades Γ^+ e Γ^- coincidem o movimento é determinado como em 4).

Se Γ^+ é transversal a Γ^- não podemos determinar o movimento como em 4), pois para $x \in \Gamma^+ \cap \Gamma^-$ não necessariamente tem-se unicidade da normal $\Gamma^+ \cap \Gamma^-$ contida no plano tangente

a S em x (figura 4). Não consideraremos este caso.

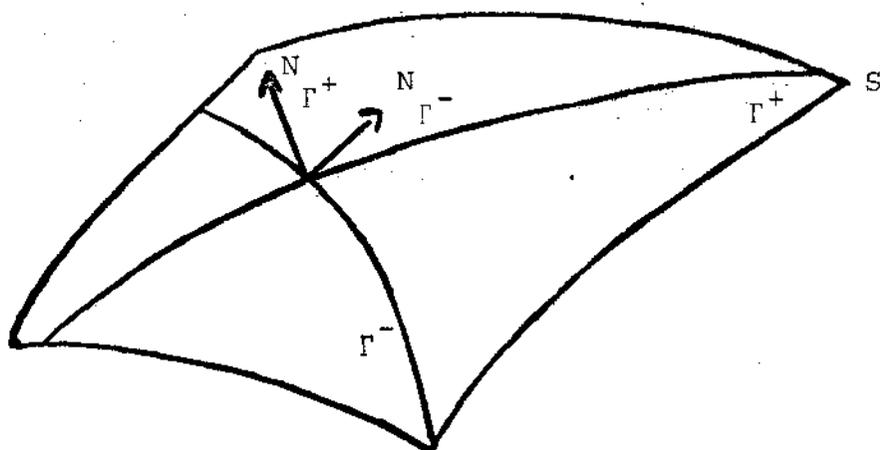


Figura 4

Não Unicidade da normal à $\Gamma^+ \cap \Gamma^-$, contida no plano tangente a S .

Em vista da caracterização dada para o comportamento das trajetórias na superfície S , conclui-se que:

As posições de equilíbrio poderão ocorrer somente em pontos do domínio C e da variedade Γ que são singulares para os sistemas (C) , (Γ) , (G) e assim por diante.

Estudaremos aqui uma classe particular χ_0 de campos vetoriais. Tal classe é o conjunto dos sistemas $\dot{x} = f(x)$ satisfazendo:

- (i) as condições (a) e (b) dadas no início deste capítulo.
- (ii) a origem é posição de equilíbrio de $\dot{x} = f(x)$.
- (iii) o contato entre as trajetórias de $\dot{x} = f^+(x)$ (respectivamente $\dot{x} = f^-(x)$) e a superfície S é parabólico, i.é., $f^{+2} \cdot F(x) \neq 0$ e $f^{-2} \cdot F(x) \neq 0$ para todo $x \in \Gamma$.

- (iv) as variedades Γ^+ e Γ^- coincidem e ambas são do tipo B (figura 1) ou seja $f^+ F(x) < 0$ e $f^- F(x) > 0$ para todo $x \in \Gamma$.

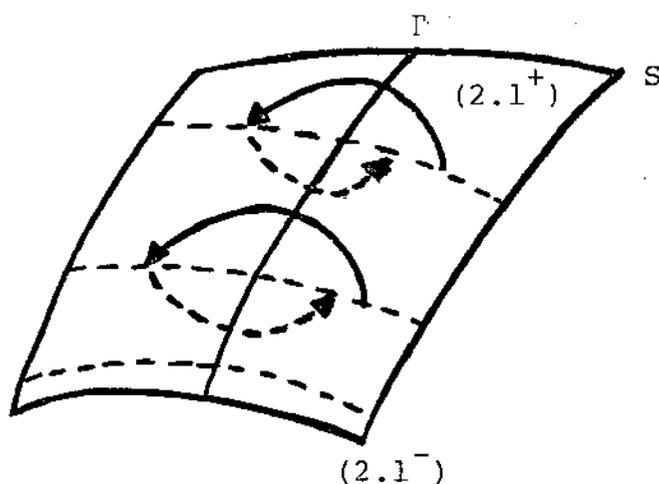


Figura 5

Sistema de equações diferenciais em χ_0 .

2. FÓRMULAS PARA A TRANSFORMAÇÃO PRIMEIRO RETORNO CONSIDERANDO-SE SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PERTENCENTES A χ_0 .

Consideremos $f^+(x)$ e $f^-(x)$ definidas em G^+ e G^- respectivamente e análiticas numa vizinhança da origem.

Observemos que cada uma das funções $f^+(x)$ e $f^-(x)$ não

está definida numa vizinhança inteira $V_0(\varepsilon)$ da origem mas somente em $V_0(\varepsilon) \cap S^c$.

Quando falamos em analiticidade e diferenciabilidade destas funções temos em mente a possibilidade de estendermos a definição destas funções para uma vizinhança completa da origem.

Sem perda de generalidade podemos supor que $F(x) = x_n$ e $\Gamma = \{(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) / x_1 = x_n = 0\}$. Lembremos que Γ é a variedade de dimensão $(n-2)$ consistindo dos pontos em que os campos inferior e superior são tangentes a $F(x) = 0$. O caso geral quando a superfície de descontinuidade é dada pela equação $x_n = P(x_1, \dots, x_{n-1})$ e Γ pela equação adicional $x_1 = Q(x_2, \dots, x_{n-1})$ pode ser reduzido para o caso considerado, por meio da transformação de variáveis

$$x'_1 = x_1 - Q(x_2, \dots, x_{n-1})$$

$$x'_2 = x_2$$

$$x'_3 = x_3$$

...

$$x'_n = x_n - P(x_1, \dots, x_{n-1}).$$

Mostraremos a seguir que as trajetórias do sistema (2.1⁺) determinam uma transformação G_1 do semiplano $x_1 \geq 0, x_n = 0$ no semiplano $x_1 \leq 0, x_n = 0$ e as trajetórias de (2.1⁻) uma transformação G_2 do semiplano $x_1 \leq 0, x_n = 0$ no semiplano

$x_1 \geq 0, x_n = 0$. A composta destas transformações $G = G_2 G_1$ transforma o semiplano $x_1 \geq 0, x_n = 0$ em si próprio e todos os pontos de Γ são fixos por G_1, G_2 e G .

"A estabilidade do ponto fixo $x = 0$ de G é equivalente a estabilidade da posição de equilíbrio do sistema (2.1⁺) situada na origem".

2.1. FÓRMULAS PARA A TRANSFORMAÇÃO G_1

2.1.1. EXPANSÃO DAS COMPONENTES DO CAMPO $f^+(x)$ EM TORNO DA ORIGEM

Consideremos

$$(2.2) \quad f_j^+(x_1, \dots, x_n) = c_j^+ + \sum_{k=1}^n c_{jk}^+ x_k + \sum_{k, l=1}^n c_{jkl}^+ x_k x_l + \dots$$

$$\text{com } j = 1, \dots, n \text{ e } c_{jkl}^+ = c_{jlk}^+.$$

Em todos os pontos de Γ o campo de vetores pertence ao plano $x_n = 0$ ou seja $f_n^+(x_1, \dots, x_n) = 0$ sempre que $x_1 = x_n = 0$. Logo

$$(2.3) \quad f_n^+(x_1, \dots, x_n) = c_{n1}^+ x_1 + \dots + c_{nn}^+ x_n + \dots$$

2.1.2. DEPENDÊNCIA DA COORDENADA x_n EM RELAÇÃO AO TEMPO

Seja $\gamma^+(t)$ a trajetória do sistema (2.1⁺) que passa pela origem. Determinaremos a dependência de $x_n = \gamma_n^+(t)$ em relação ao tempo através de seu desenvolvimento em série de Taylor em torno de $t = 0$.

Observemos que

$$\gamma_n^+(t) \Big|_{t=0} = F(\gamma^+(t)) \Big|_{t=0} = F(0, \dots, 0) = 0,$$

$$\begin{aligned} \gamma_n^{+'}(t) \Big|_{t=0} &= F(\gamma^{+'}(t)) \Big|_{t=0} = F(f^+(\gamma^+(0))) = F(f^+(0)) = \\ &= F(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \gamma_n^{+''}(t) \Big|_{t=0} &= F(f^{+'}(\gamma^+(t))\gamma^{+'}(t)) \Big|_{t=0} = F\left(\frac{d}{dt} f^+(\gamma^+(t))\right) \Big|_{t=0} = \\ &= F(\dot{f}^+(0)) = \dot{f}_n^+(0) \end{aligned}$$

e assim

$$(2.4) \quad x_n = \frac{1}{2} \dot{f}_n^+(0) t^2 + \dots$$

Considerando a expansão das componentes do campo $f^+(x)$ em torno da origem e que $\dot{f}^+(0) = f^{+'}(\gamma^+(t))\gamma^{+'}(t) \Big|_{t=0}$, obtêm-se

A função G é de classe C^1 , $G(0,0) = 0$ e $G_t(0,0) = B(0) \neq 0$ ou seja, G satisfaz as hipóteses do teorema da função implícita. Logo existe $V_0 \subset \mathbb{R}^n$ ($V_0 =$ vizinhança de zero) e $t = g(x)$ de classe C^1 tal que

$$G(x, g(x)) = 0 \iff g(0) = 0$$

ou seja,

$$t = g(x) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_{n-1} x_{n-1} + \theta(x)$$

onde $\theta(x)$ é formada por termos de ordem maior ou igual a dois.

Mais ainda

$$g_{x_1}(0) = - \frac{G_{x_1}(0)}{G_t} = - \frac{2c_{n1}^+}{c_1^+ c_{n1}^+} = - \frac{2}{c_1^+} = a_1$$

e

$$g_{x_i}(0) = - \frac{G_{x_i}(0)}{G_t} = 0, \quad \forall i = 2, \dots, n-1$$

pois f_n^+ não depende de x_2, \dots, x_{n-1} . Assim $a_i = 0, \forall i = 2, \dots, n-1$

$$e t = - \frac{2x_1}{c_1^+}.$$

Substituindo em (2.5) obtêm-se as fórmulas para G_1 ,

$$\begin{aligned}
y_j &= x_j + \left(-\frac{2x_1}{c_1^+}\right) f_j^+(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) + \left(-\frac{2x_1}{c_1^+}\right)^2 f_j^+(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) + \dots \\
&= x_j - \frac{2x_1}{c_1^+} \left[c_j^+ + \sum_{k=1}^{n-1} c_{jk}^+ x_k + \dots \right] + \left(-\frac{2x_1}{c_1^+}\right)^2 f_j^+(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) + \dots \\
&= x_j - \frac{2c_j^+}{c_1^+} x_1 + x_1 \left[-\frac{2}{c_1^+} \sum_{k=1}^{n-1} c_{jk}^+ x_k + \dots \right] + \\
&\quad + \frac{4x_1}{c_1^{+2}} f_j^+(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) + \dots \\
&= x_j + b_j x_1 + x_1 \varphi_j(x).
\end{aligned}$$

Fazendo $p_1 = 1 + b_1$ as fórmulas anteriores podem ser escritas como:

$$(2.6) \quad \begin{cases} y_1 = p_1 x_1 + x_1 \varphi_1(x) \\ y_j = b_j x_1 + x_j + x_1 \varphi_j(x) \end{cases}$$

onde as funções $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}$ tem expansão em série de potências que inicia com termos lineares (não constantes).

Em (2.6) temos:

$$(2.7) \quad b_j = -\frac{2c_j^+}{c_1^+}, \quad j = 2, \dots, n-1.$$

As fórmulas (2.6) após um tempo τ_1 transformam um ponto do semiplano $x_1 \geq 0, x_n = 0$ em um ponto do semiplano $x_1 \leq 0, x_n = 0$.

Por outro lado estas fórmulas podem ser aplicadas também para pontos no semiplano $x_1 \leq 0, x_n = 0$ e então as trajetórias dirigem-se no passado para pontos iniciais no semiplano $x_1 \geq 0, x_n = 0$.

Assim a transformação (2.6) pode ser considerada uma transformação do plano em si próprio envolvendo somente as trajetórias do sistema (2.1⁺). Esta transformação é uma "involução" i.é., coincide com sua inversa. Portanto

$$(2.8) \quad \begin{cases} x_1 = p_1 y_1 + y_1 \varphi_1(y) \\ x_j = b_j y_1 + y_j + y_1 \varphi_j(y) \end{cases}, \quad j = 2, \dots, n-1.$$

Como $p_1 = 1 + b_1$ por (2.7), obtém-se $p_1 = -1$.

$$\begin{aligned} \text{Logo} \quad & y_1 = -x_1 + x_1 \varphi_1(x) \\ \text{e} \quad & x_1 = -y_1 + y_1 \varphi_1(y). \end{aligned}$$

Pela comparação das duas equações vem que $x_1 \varphi_1(x) = y_1 \varphi_1(y)$.

Mais ainda

$$\varphi_1(x) = \varphi_1(y) [\varphi_1(x) - 1] .$$

Quando $x_1 = 0$ tem-se $x = y$ pois todo ponto de Γ é fixo por G_1 .

Assim para $x_1 = 0$, $2\varphi_1(x) = (\varphi_1(x))^2$, ou seja, $\varphi_1(x) = 2$ ou $\varphi_1(x) = 0$. A possibilidade $\varphi_1(x) = 2$ é excluída, pois $\varphi_1(x)$ não possui termos constantes, logo para $x_1 = 0$ tem-se $\varphi_1(x) = 0$.

Agora as fórmulas (2.6) transformam-se em

$$(2.9) \quad \begin{cases} y_1 = -x_1 + x_1^2 \psi(x) \\ y_j = b_j x_1 + x_j + x_1 \varphi_j(x), \quad j = 2, \dots, n-1 \end{cases}$$

onde a expansão de $\psi(x)$ pode iniciar com termo constante.

A transformação G_2 é construída de modo análogo e é dada pelas fórmulas

$$(2.10) \quad \begin{cases} x_1^{(1)} = -y_1 + y_1^2 \phi^0(y) \\ x_j^{(1)} = b_j^0 y_1 + y_j + y_1 \phi_j^0(y), \quad j = 2, \dots, n-1 . \end{cases}$$

Pela combinação de (2.9) e (2.10) segue as seguintes fórmulas para $G = G_1 G_2$:

$$(2.11) \quad \begin{cases} x_1^{(1)} = x_1 + x_1^2 g_1(x) \\ x_j^{(1)} = s_j x_1 + x_j + x_1 g_j(x) ; j = 2, \dots, n-1 \end{cases}$$

onde

$$(2.12) \quad s_j = b_j - b_j^0, \quad j = 2, \dots, n-1$$

$$(2.13) \quad \begin{cases} g_1(x) = -\psi(x) + [x_1 \psi(x) - 1]^2 \phi^0(y) \\ g_j(x) = \varphi_j(x) + b_j^0 x_1 \psi(x) + [x_1 \psi(x) - 1] \varphi_j^0(y) \\ j = 2, \dots, n-1 \end{cases}$$

Aqui y é dado em função de x por (2.9). As expansões de $g_2(x), \dots, g_{n-1}(x)$ são dadas com termos lineares e $g_1(0)$ pode ser diferente de zero.

Através de (2.7) e uma fórmula análoga para b_j^0 a equação (2.12) é equivalente a

$$(2.14) \quad s_j = -2 \left(\frac{c_j^+}{c_1^+} - \frac{c_j^-}{c_1^-} \right), \quad j=2, \dots, n-1.$$

Lembremos que a transformação primeiro retorno G do semiplano $x_1 \geq 0, x_n = 0$ em si próprio envolve o caso crítico,

uma vez que todas as raízes da equação característica relativa a parte linear de G são iguais a unidade.

A transformação primeiro retorno G pode ser obtida de uma maneira mais geométrica utilizando-se teoria das singularidades de aplicações diferenciáveis. (Ver T.4).

3. DISCUSSÃO DE ESTABILIDADE EM X_0

Provaremos aqui que a posição de equilíbrio $x = 0$ é instável quando os vetores $f^+(0)$ e $f^-(0)$ são não colineares (i. é., existe j tal que $S_j \neq 0$). Se todos os vetores são colineares ($S_j = 0, \forall j$) daremos uma condição de estabilidade e uma de instabilidade.

LEMA 2.1. Se o ponto fixo $x = 0$ da transformação primeiro retorno do semiplano $x_1 \geq 0, x_n = 0$ em si próprio é estável e a primeira das equações que definem esta transformação é

$$(2.15) \quad x_1^{(1)} = x_1 + x_1^2 g_1(x)$$

então

$$(2.16) \quad x_1^{(0)} + x_1^{(1)} + \dots = \infty \quad (x_1^{(0)} = x_1 > 0)$$

DEMONSTRAÇÃO. Como $g_1(x)$ é analítica podemos escolher $M > 0$

suficientemente grande tal que

$$(2.17) \quad |g_1(x)| < M \quad e$$

$$|x^{(k)}| < \frac{1}{2M} \quad (k = 0, 1, \dots)$$

sempre que $|x| < \Delta$, $x_1 \geq 0$.

Para $x_1 > 0$, por (2.15) e (2.17), tem-se

$$(2.18) \quad x_1^{(1)} = x_1 + x_1^2 g_1(x) > x_1 - Mx_1^2 = x_1(1 - Mx_1) > 0$$

Consideremos a transformação escalar auxiliar

$$(2.19) \quad \alpha_1 = \alpha_0 (1 - M\alpha_0)$$

e sua seqüência de iterações

$$(2.20) \quad \alpha_{m+1} = \alpha_m (1 - M\alpha_m)$$

Fazendo $\alpha_0 = x_1 > 0$ e comparando (2.18) com (2.19) ob-
têm-se $x_1^{(1)} > \alpha_1$. Ainda mais $\alpha_1 > 0$. Isto acontece pois $\alpha_0 =$
 $x_1 < \frac{1}{2M}$ e $\alpha_1 = \alpha_0 (1 - M\alpha_0) > 0 \iff 1 - M\alpha_0 > 0 \iff \alpha_0 < \frac{1}{2M}$.

Como

$$\frac{d}{dx_1} (x_1 - Mx_1^2) = 1 - 2Mx_1 > 0 \quad \text{para } 0 < x_1 < \frac{1}{2M}$$

a função $x_1 - Mx_1^2$ cresce em relação a x_1 ou seja $x_1^{(2)} > x_1^{(1)} - M(x_1^{(1)})^2 > \alpha_1 - M\alpha_1^2 = \alpha_2 > 0$ e em geral

$$(2.21) \quad x_1^{(m)} > \alpha_m > 0 \quad (m = 1, 2, \dots).$$

A sequência (α_m) é monótona e limitada, logo existe o limite

$$\ell = \lim_{m \rightarrow \infty} \alpha_m = \lim_{m \rightarrow \infty} \alpha_0 \prod_{k=0}^{m-1} (1 - M\alpha_k) = x_1 \prod_{k=0}^{\infty} (1 - M\alpha_k)$$

Fazendo $m \rightarrow \infty$ em (2.20) vem que $\ell = \ell(1 - M\ell)$, isto é, $\ell = 0$.

$$\text{Portanto } \prod_{k=0}^{\infty} (1 - M\alpha_k) = 0.$$

Para concluirmos a demonstração do lema falta mostrar que

$$\prod_{k=0}^{\infty} (1 - M\alpha_k) = 0 \implies \alpha_0 + \alpha_1 + \dots = \infty$$

ou o equivalente:

$$\text{Se dado } \varepsilon_1 > 0, \exists n_1 \text{ tal que } \prod_{k=0}^{n_1} (1 - M\alpha_k) < \varepsilon_1 \text{ então}$$

dados $\varepsilon_2 > 0$ $\exists n_2$ tal que $\sum_{k=0}^{n_2} \alpha_k > \varepsilon_2$.

Tem-se que

$$0 < \prod_{k=0}^{n_1} (1 - M\alpha_k) = -M \sum_{k=0}^{n_1} \alpha_k + Q < \varepsilon_1$$

$$\Rightarrow -M \sum_{k=0}^{n_1} \alpha_k < \varepsilon_1 - Q$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n_1} \alpha_k > \frac{Q - \varepsilon_1}{M}.$$

Assim dado qualquer ε_2 existe $\varepsilon_1 = Q - M\varepsilon_2 > 0$. Para

$\varepsilon_1 = Q - M\varepsilon_2$ $\exists n_1$ tal que $\prod_{k=0}^{n_1} (1 - M\alpha_k) < \varepsilon_1$. Logo dado ε_2 $\exists n_2 = n_1$

tal que $\sum_{k=0}^{n_1} \alpha_k > \varepsilon_2$.

Portanto $\alpha_0 + \alpha_1 + \dots = \infty$.

TEOREMA 2.2. Se em X_0 os vetores $f^+(0)$ e $f^-(0)$ são não colineares então a posição de equilíbrio $x = 0$ é instável.

DEMONSTRAÇÃO. Como $f^+(0)$ e $f^-(0)$ são não colineares nas fórmulas (2.12) existe pelo menos um j tal que $S_j \neq 0$. Suponhamos $S_2 \neq 0$ e $S_2 > 0$ pois o caso $S_2 < 0$ pode ser transformado neste pela inversão do eixo x_2 .

Por (2.12)

$$x_2^{(1)} = S_2 x_1 + x_2 + x_1 g_2(x)$$

$$= x_2 + x_1 (S_2 + g_2(x))$$

$$> x_2 + 1/2 S_2 x_1 \iff g_2(x) > -\frac{S_2}{2}$$

Como $g_2(0) = 0$ e g_2 é uma função contínua, existe $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$|x| < \varepsilon \implies |g_2(x)| < \frac{S_2}{2}.$$

Logo para ε suficientemente pequeno

$$(2.22) \quad x_2^{(1)} > x_2 + \frac{1}{2} S_2 x_1$$

sempre que $|x| < \varepsilon$.

Suponhamos que a posição de equilíbrio considerada é estável. Isto significa que dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que para $x_1 \geq 0$, $|x| < \delta$ temos $|x^{(k)}| < \varepsilon$, $x_1^{(k)} \geq 0$ ($k = 0, 1, \dots$).

Assim, iterando-se (2.22) obtêm-se

$$\begin{aligned}
 x_2^{(2)} &> x_2^{(1)} + \frac{1}{2} S_2 x_1^{(1)} \\
 &= x_2 + 1/2 S_2 x_1 + 1/2 S_2 x_1^{(1)} \\
 &= x_2 + \frac{1}{2} S(x_1 + x_1^{(1)})
 \end{aligned}$$

e por indução

$$\epsilon > x_2^{(m)} > x_2 + \frac{1}{2} S_2 \sum_{k=0}^{m-1} x_1^{(k)} \quad (m=0,1,\dots)$$

Logo $\sum_{k=0}^{\infty} x_1^{(k)} < \infty$, contradizendo o lema 2.1.

Portanto $x = 0$ é posição de equilíbrio instável. ■

Vamos agora supor que

$$(2.23) \quad S_j = 0 \quad (j = 2, \dots, n-1)$$

isto é, os vetores $f^+(0)$ e $f^-(0)$ são colineares. Neste caso as fórmulas (2.11) podem ser escritas na forma matricial

$$(2.24) \quad x^{(1)} = x + x_1 (Ax + z(x))$$

onde

$$(2.25) \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pp} \end{bmatrix}, \quad a_{11} = g_1(0),$$

$z(x)$ é uma soma de termos em x de ordem maior ou igual a dois e $p = n-1$. Os elementos da matriz A podem ser dados em termos dos coeficientes da expansão em série de potências das funções f_j^\pm ($i = 1, \dots, n$), da seguinte maneira

$$a_{11} = - \left[\frac{1}{3c_1^2 c_{n1}} (c_1 c_{n1} c_{11} + c_1 c_{n1} c_{nn} - c_1^2 c_{n1} - 2c_1 \sum_{k=2}^{n-1} c_k c_{1k} + 4c_{n1} \sum_{k=2}^{n-1} c_k c_{1k}) \right]_-^+$$

$$a_{jk} = \left[\frac{2}{c_1} (c_j c_{1k} - c_1 c_{jk}) \right]_-^+, \quad (j, k = 2, 3, \dots, n-1)$$

onde $[\phi(c)]_-^+ = \phi(c^+) - \phi(c^-)$.

A expressão para os elementos a_{k1} com $k > 1$ não foi escrita pois esses elementos não influenciam nos autovalores da matriz.

TEOREMA 2.3. O ponto fixo $x = 0$ da função G (do semi-plano $x_1 \geq 0$ em si próprio) dada por (2.24) e a correspondente posição de equilíbrio $x = 0$ são estáveis quando todos os autovalores da matriz A possuem parte real negativa.

A posição de equilíbrio $x = 0$ é assintoticamente estável se o ponto fixo $x = 0$ da transformação é assintoticamente estável.

PROVA. Todo autovalor λ da matriz A possui parte real negativa, logo pelo teorema 0.10 independentemente da escolha de uma forma quadrática $W(x,x)$ negativa definida, existe uma única forma quadrática $V(x,x)$ positiva definida satisfazendo $\dot{V} = -W$. Lembremos que \dot{V} é a derivada da forma quadrática $V(x,x)$ tomada de acordo com o sistema $\dot{x} = Ax$.

Em particular tomemos $W(x,x) = 2V(x,Ax)$ negativa definida com $V(x,Ax) = (x,BAx)$ e B uma matriz simétrica. A hipótese de que todos os autovalores da matriz A tem parte real negativa juntamente com $W(x,x)$ negativa definida implicam que $V(x,x) = (x,Bx)$ é positiva definida. Assim pelo teorema 0.10 $V(x,x) = (x,Bx)$ é a única forma quadrática positiva definida satisfazendo $\dot{V} = 2V(x,Ax) = -W(x,x)$.

Seja $V(x,z)$ a forma bilinear correspondente a forma quadrática $V(x,x)$.

Para todo vetor x temos que

$$V(x, Ax) \leq -rV(x, x), \quad r > 0$$

É suficiente escolher $r = -\frac{\lambda'_n}{\lambda'_1}$ onde λ'_1 e λ'_n são respectivamente o menor autovalor da forma quadrática $V(x, x)$ e o maior autovalor da forma quadrática $V(x, Ax)$.

Seja $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon^*$. Então

$$\begin{aligned} (2.26) \quad & V[(x + \varepsilon(Ax + z(x)), x + \varepsilon(Ax + z(x))) \\ & \leq V(x, x) + 2\varepsilon V(x, Ax + z(x)) + \varepsilon\varepsilon^* V(Ax + z(x), Ax + z(x)) \\ & = V(x, x) + 2\varepsilon\{V(x, Ax) + \frac{1}{2}\varepsilon^* V(Ax, Ax) + V(x, z(x)) + \\ & \quad \varepsilon^* V(Ax, z(x)) + \frac{1}{2}\varepsilon^* V(z(x), z(x))\} \end{aligned}$$

Sejam $\varepsilon^* > 0$ e $\Delta > 0$ tão pequenos que

$$V(x, Ax) + \frac{1}{2}\varepsilon^* V(Ax, Ax) \leq -(r - \eta)V(x, x)$$

onde $0 < \eta < \frac{1}{2}r$ e para $V(x, x) < \Delta$ tem-se

$$1- \quad |x| < \varepsilon^*$$

$$\begin{aligned} 2- \quad & V(x, Ax) + \frac{1}{2}\varepsilon^* V(Ax, Ax) + V(x, z(x)) + \varepsilon^* V(Ax, z(x)) + \\ & + \frac{1}{2}\varepsilon^* V(z(x), z(x)) \leq -(r - 2\eta)V(x, x) \end{aligned}$$

$$3- \quad x_1 \geq 0 \implies x_1^{(1)} \geq 0$$

Fazendo $q = r - 2\eta > 0$ a desigualdade (2.26) implica que

$$\begin{aligned}
 (2.27) \quad & V(x + \varepsilon(Ax + z(x)), x + \varepsilon(Ax + z(x))) \\
 & \leq (1 + 2\varepsilon(-r + 2\eta))V(x, x) \\
 & = (1 - 2\varepsilon r + 4\varepsilon\eta)V(x, x) \\
 & = (1 - 2\varepsilon q)V(x, x)
 \end{aligned}$$

quando $V(x, x) < \Delta$ e $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon^*$.

Trocando ε por x_1 em (2.27) e lembrando que $x + x_1(Ax + z(x)) = x^{(1)}$ obtêm-se

$$V(x^{(1)}, x^{(1)}) \leq (1 - 2qx_1)V(x, x)$$

e mais geralmente

$$(2.28) \quad V(x^{(m)}, x^{(m)}) \leq V(x, x) \prod_{k=0}^{m-1} (1 - 2qx_1^{(k)})$$

Como $1 - 2qx_1^{(k)} \leq 1$,

$$V(x^{(m)}, x^{(m)}) \leq V(x, x) < \Delta$$

ou seja $|x^{(m)}| < \varepsilon^*$, $x_1^{(m)} \geq 0$ para Δ suficientemente pequeno. Portanto $x = 0$ é ponto fixo estável de G ou, equivalentemente, a origem é posição de equilíbrio estável de $\dot{x} = f(x)$. A primeira parte da prova deste teorema está completa.

Suponhamos agora que o ponto fixo $x = 0$ da transformação G é assintoticamente estável. Isto implica que a sequência $(x^{(m)})$, $m = 0, 1, \dots$ é monótona e limitada logo existe o limite

$$l = \lim_{m \rightarrow \infty} V(x^{(m)}, x^{(m)}) \leq \lim_{m \rightarrow \infty} V(x, x) \prod_{k=0}^{m-1} (1 - 2qx_1^{(k)}).$$

Mais ainda, a estabilidade da posição de equilíbrio $x = 0$ implica que

$$x_1^{(0)} + x_1^{(1)} + \dots = \infty$$

$$\Rightarrow \prod_{k=0}^{\infty} (1 - 2qx_1^{(k)}) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} V(x^{(m)}, x^{(m)}) = 0$$

$$\Rightarrow |x^{(m)}| \rightarrow 0 \text{ quando } m \rightarrow \infty \text{ e } x_1 > 0.$$

Portanto $x = 0$ é posição de equilíbrio assintoticamente estável do sistema $\dot{x} = f(x)$. ■

TEOREMA 2.4. O ponto fixo $x = 0$ da transformação dada por (2.24) e a correspondente posição de equilíbrio $x = 0$ são instáveis quando pelo menos um dos autovalores da matriz A tem parte real positiva.

PROVA. Se $\operatorname{Re} \lambda > 0$ para algum autovalor λ de A , independentemente da escolha de uma forma quadrática $W(x,x)$ positiva definida e nula num conjunto M que não contém trajetórias inteiras, existem uma forma quadrática $V(x,x)$ que assume valores positivos em alguns pontos e $\alpha > 0$ tais que

$$2V(x, Ax) = \alpha V(x, x) + W(x, x) \quad (\text{Ver Teorema 0.11})$$

Tomando $\mu = \frac{\alpha}{2}$ e $r = \frac{\lambda_1}{2}$ onde λ_1 é o menor autovalor da forma quadrática $W(x,x)$ tem-se

$$(2.29) \quad V(x, Ax) \geq \mu V(x, x) + r|x|^2.$$

Consideremos agora dois casos:

1º) Suponhamos $V(Ax + z(x), Ax + z(x)) \leq 0$ e $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon^*$. Vem que

$$\begin{aligned} & V(x + \varepsilon(Ax + z(x)), x + \varepsilon(Ax + z(x))) \\ & \geq V(x, x) + 2\varepsilon\{V(x, Ax) + \frac{1}{2} \varepsilon^* V(Ax, Ax) + V(x, z(x)) + \\ & + \varepsilon^* V(Ax, z(x)) + \frac{1}{2} \varepsilon^* V(z(x), z(x))\} \end{aligned}$$

ou seja, a desigualdade (2.26) com o sinal \leq trocado por \geq .

Procedendo analogamente a prova do teorema 2.3, para ε^* e Δ suficientemente pequenos, $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon^*$ e $|x| < \Delta < \varepsilon^*$ obtêm-se

$$(2.30) \quad V[x + \varepsilon(Ax + z(x)), x + \varepsilon(Ax + z(x))] \geq \\ \geq (1 + 2\mu\varepsilon)V(x, x) + \varepsilon q |x|^2$$

onde q é um número positivo satisfazendo $q < 2r$.

$$2^\circ) \quad V(Ax + z(x), Ax + z(x)) > 0$$

Neste caso

$$V[x + \varepsilon(Ax + z(x)), x + \varepsilon(Ax + z(x))] = V(x, x) + 2\varepsilon V(x, Ax + z(x)) + \\ + V(Ax + z(x), Ax + z(x)) \\ > V(x, x) + 2\varepsilon V(x, Ax + z(x)) \\ = V(x, x) + 2\varepsilon V(x, Ax) + 2\varepsilon V(x, z(x)).$$

Assim para $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon^*$, $|x| < \Delta < \varepsilon^*$, ε^* e Δ suficientemente pequenos temos

$$V[x + \varepsilon(Ax + z(x)), x + \varepsilon(Ax + z(x))] \geq V(x, x) + 2\varepsilon V(x, Ax) .$$

Através desta desigualdade e de (2.29) obtêm-se a desigualdade (2.30).

Seja x tal que $V(x, x) > 0$ e $x_1 > 0$. Segue que

$$(2.31) \quad V[x + \varepsilon(Ax + z(x)), x + \varepsilon(Ax + z(x))] > V(x, x) + \varepsilon q |x|^2 .$$

Trocando ε por x_1 ,

$$(2.32) \quad V(x^{(1)}, x^{(1)}) > V(x, x) + q x_1 |x|^2 .$$

Seja $M = \max_{x \neq 0} \frac{V(x, x)}{|x|^2}$. Fazendo $h = \frac{q}{M}$ segue que

$$\begin{aligned} h x_1 V(x, x) &= \frac{q x_1 V(x, x)}{\max_{x \neq 0} \frac{V(x, x)}{|x|^2}} \\ &\leq \frac{q x_1 V(x, x)}{V(x, x)} |x|^2 \\ &= q x_1 |x|^2 . \end{aligned}$$

Logo

$$(2.33) \quad V(x^{(1)}, x^{(1)}) > (1 + hx_1)V(x, x) \quad (h = \frac{q}{M} > 0)$$

Suponhamos agora que o ponto fixo $x = 0$ da transformação G é estável. Então dado $\Delta > 0$ existe $\delta > 0$ suficientemente pequeno tal que para $|x| < \delta$ e $x_1 > 0$ para todo k tem-se $|x^{(k)}| < \Delta$, $x_1^{(k)} > 0$.

De (2.33) segue que

$$(2.34) \quad V(x^{(m)}, x^{(m)}) \geq V(x, x) \prod_{k=0}^{m-1} (1 + hx_1^{(k)})$$

Mas de acordo com o lema (2.1)

$$x_1^{(0)} + x_1^{(1)} + \dots + x_1^{(k)} + \dots = \infty$$

logo

$$\prod_{k=0}^{\infty} (1 + hx_1^{(k)}) = \infty$$

Como $V(x, x) > 0$ tem-se que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} V(x^{(m)}, x^{(m)}) = \infty$$

contradizendo o fato do ponto fixo $x = 0$ da transformação G ser estável. Portanto $x = 0$ é posição de equilíbrio instável do sistema $\dot{x} = f(x)$. ■

CAPÍTULO III

EXEMPLOS

1. Consideremos os sistemas de equações diferenciais em \mathbb{R}^2

$$(3.1^+) \quad \dot{x} = f^+(x)$$

$$(3.1^-) \quad \dot{x} = f^-(x)$$

onde, para constantes arbitrárias a , b e k , $k > 0$, temos

$$f^+(x_1, x_2) = (x_2, -bx_1 - ax_2 - kx_1)$$

e

$$f^-(x_1, x_2) = (x_2, -bx_1 - ax_2 + kx_1).$$

Estudaremos aqui a estabilidade em torno da solução trivial do sistema descontínuo

$$(3.1^\pm) \quad \dot{x} = \begin{cases} f^+(x) & \text{se } x_1(Ax_1 + x_2) > 0 \\ f^-(x) & \text{se } x_1(Ax_1 + x_2) < 0 \end{cases}$$

onde A é uma constante qualquer.

As retas $x_1 = 0$ e $Ax_1 + x_2 = 0$ dividem o espaço de fase em quatro regiões:

$$(G_1): \quad x_1 > 0 \quad \text{e} \quad Ax_1 + x_2 > 0$$

$$(G_2): \quad x_1 < 0 \quad \text{e} \quad Ax_1 + x_2 > 0$$

$$(G_3): \quad x_1 < 0 \quad \text{e} \quad Ax_1 + x_2 < 0$$

$$(G_4): \quad x_1 > 0 \quad \text{e} \quad Ax_1 + x_2 < 0$$

Estas linhas, $x_1 = 0$ e $Ax_1 + x_2 = 0$, são as "linhas de descontinuidade" nas quais é feita a transição de trajetórias pertencentes a um sistema para as trajetórias pertencentes ao outro sistema.

Como na reta $x_1 = 0$ temos $\dot{x}_1 > 0$ se $x_2 > 0$ e $\dot{x}_1 < 0$ se $x_2 < 0$ as trajetórias dos sistemas (3.1^+) e (3.1^-) cortam $x_1 = 0$ no sentido horário, i.ê., todos os pontos de $x_1 = 0$ (exceto $x_2 = 0$) são pontos de "costura" pertencentes ao domínio regular P (figura 2b) citado no capítulo II.

Investigaremos agora o comportamento das trajetórias na reta S determinada por $F(x_1, x_2) = Ax_1 + x_2 = 0$.

$$\dot{F} = \begin{cases} Ax_2 + (-bx_1 - ax_2 + K)x_1 & \text{se } (x_1, x_2) \in G_1 \quad \text{ou} \quad (x_1, x_2) \in G_3 \\ Ax_2 + (-bx_1 - ax_2 - K)x_1 & \text{se } (x_1, x_2) \in G_2 \quad \text{ou} \quad (x_1, x_2) \in G_4 \end{cases}$$

Na reta $Ax_1 + x_2 = 0$ temos $x_2 = -Ax_1$ logo

$$\lim_{F \rightarrow +0} \dot{F} = \begin{cases} -(A^2 - aA + b + K)x_1 & \text{se } x_1 > 0 \\ -(A^2 - aA + b - K)x_1 & \text{se } x_1 < 0 \end{cases}$$

e

$$\lim_{F \rightarrow -0} \dot{F} = \begin{cases} -(A^2 - aA + b - K)x_1 & \text{se } x_1 > 0 \\ -(A^2 - aA + b + K)x_1 & \text{se } x_1 < 0 \end{cases}$$

A condição para a existência de deslize em S, dada no capítulo II, tem a forma

$$\lim_{F \rightarrow +0} \dot{F} \geq 0 \quad \text{e} \quad \lim_{F \rightarrow -0} \dot{F} \leq 0$$

que neste caso é equivalente as condições

$$A^2 - aA + b + K \geq 0$$

(3.2)

$$A^2 - aA + b - K \leq 0$$

As condições (3.2) podem ser escritas como

$$(3.3) \quad |A^2 - aA + b| \leq K .$$

Logo (3.3) é a condição necessária e suficiente para a existência de deslize no sistema (3.1[±]) em S. Pela escolha de um K suficientemente grande podemos assegurar a validade desta condição.

Vamos agora investigar o sistema (3.1[±]) em cada região G_i ($i = 1, 2, 3, 4$).

Nas regiões G_1 e G_3 o sistema (3.1⁺) é satisfeito. A equação característica do sistema tem a forma

$$\lambda^2 + a\lambda + b + K = 0 .$$

Se K é suficientemente grande as raízes desta equação serão complexas resultando trajetórias espiraladas, assim a origem será um ponto singular do tipo foco. Se $a > 0$ e $t \rightarrow \infty$ as trajetórias se aproximam da origem ou seja a origem é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável (figura 6).

Se $a < 0$ e $t \rightarrow \infty$ as trajetórias se afastam da origem.

Nas regiões G_2 e G_4 o sistema (3.1⁻) é satisfeito, logo, a equação característica tem a forma

$$(3.4) \quad \mu^2 + a\mu + b - K = 0 .$$

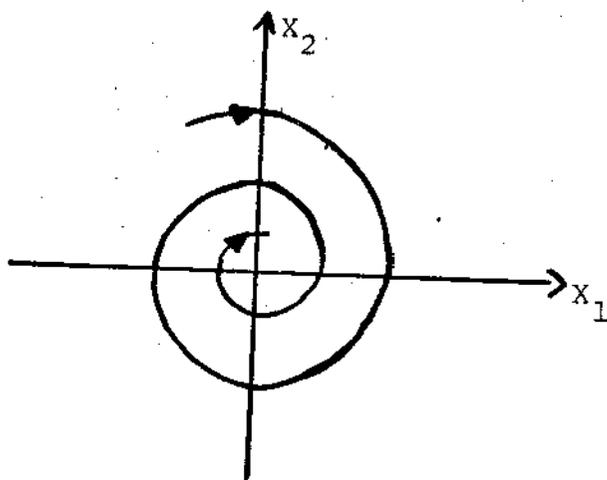


Figura 6

Trajetoária do sistema (3.1⁺)

Se K   suficientemente grande as raízes desta equa o,

$$\mu_1 = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b + K} \quad \text{e} \quad \mu_2 = \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b + K}$$

serão reais e de sinais opostos. Neste caso a origem será um ponto de sela. Entre as trajetórias do sistema (3.1⁻) existirão duas retas $x_2 = \mu_1 x_1$ e $x_2 = \mu_2 x_1$, um fato que pode ser demonstrado substituindo estas fun es na equa o

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{bx_1}{x_2} - a + \frac{Kx_1}{x_2}$$

que   equivalente ao sistema (3.1⁻). As trajetórias restantes que são hiperbólicas, aproximam-se assintoticamente destas retas

(figura 7).

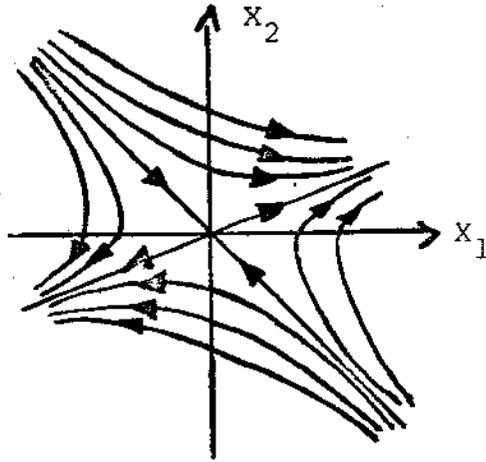


Figura 7

Trajetoórias do sistema (3.1)

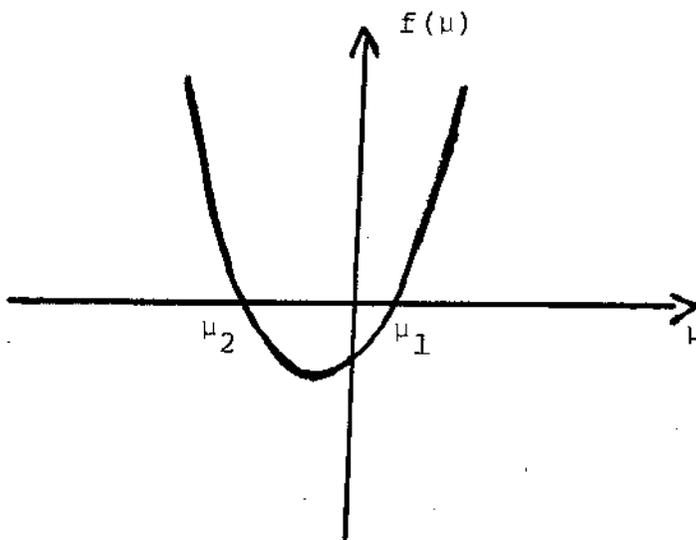


Figura 8

Gráfico da fun o $f(\mu) = \mu^2 + a\mu + b - K$

Observemos que o gráfico da função

$$f(\mu) = \mu^2 + a\mu + b - K$$

é uma parábola interceptando o eixo μ nos pontos $\mu = \mu_1$ e $\mu = \mu_2$ (figura 8).

Se $\mu_2 \leq \mu \leq \mu_1$ então $f(\mu) \leq 0$. Assumindo agora que $A > 0$ e supondo que $-A = \mu \geq \mu_2$ obtém-se

$$f(-A) = A^2 - aA + b - K \leq 0 .$$

Assim a segunda desigualdade (3.2) vale se $\mu_2 \leq -A$, i.é., se o ângulo entre a reta S e o eixo x_1 é maior que o ângulo entre a reta $x_2 = \mu_2 x_1$ e o eixo x_1 .

A primeira desigualdade (3.2) será válida se escolhermos K suficientemente grande.

Assim quando $0 < A \leq -\mu_2$ e K é suficientemente grande podemos garantir a presença de deslize em todos os pontos de S ou seja todo ponto em S pertence ao domínio C (figura 2a) citado no capítulo II.

Pela figura 9 podemos ver que dado o retrato de fase do sistema (3.1[†]) qualquer trajetória cairá em S e deslizará ao longo da mesma. Determinemos o vetor velocidade de deslize em S , dado no capítulo II. As funções

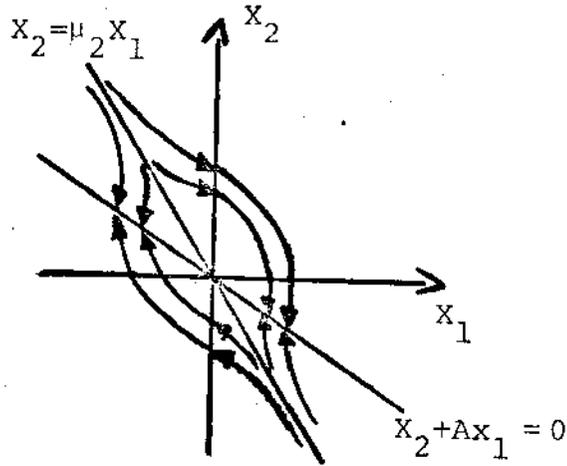


Figura 9

Trajetoórias do sistema (3.1⁺) sob as condições impostas.

$$f^+(x_1, x_2) = (x_2, -bx_1 - ax_2 - Kx_1)$$

e

$$f^-(x_1, x_2) = (x_2, -bx_1 - ax_2 + Kx_1)$$

para todo ponto $M \in S$ tem projeções no eixo x_1 iguais a x_2 .

Segue que o vetor \overline{MP} também tem ordenada igual a x_2 ou seja $\dot{x}_1 = x_2$. Por outro lado $x_2 = -Ax_1$ em S . Logo a equação diferencial para o processo de deslize   $\dot{x}_1 + Ax_1 = 0$ com solução

$x_1 = x_{10} e^{-A(t-t_0)}$. Assim para $A > 0$ o deslize será em direção a origem.

Para concluirmos mostraremos que quando $a > 0$ pode-se aplicar o método das funções de Liapunov na investigação da estabilidade do sistema considerado. Consideremos a função $v = (b + K)x_1^2 + x_2^2$ cuja derivada tomada de acordo com o sistema (3.1[±]) é $\dot{v} = 2ax_2^2$ nas regiões G_1 e G_2 e $\dot{v} = -2ax_2^2 + 4x_1x_2$ nas regiões G_3 e G_4 .

Como nas regiões G_2 e G_4 $x_1x_2 < 0$ tem-se que $\dot{v} \leq 0$ em todo retrato de fase. Se $|b| < K$ temos v positiva definida. Ainda mais, o conjunto $\{(x_1, x_2) \mid x_2 = 0\}$, no qual $\dot{v} = 0$, não contém trajetórias inteiras, exceto a origem. Como v é infinitamente global segue, pelo teorema 0.17, que a posição equilíbrio é globalmente estável.

Analisando a prova deste teorema veremos que podemos ignorar a descontinuidade da derivada \dot{v} na reta S .

Consideremos agora a função

$$v = \begin{cases} (b + K)x_1^2 + x_2^2 & \text{se } (x_1, x_2) \in G_1 \text{ ou } (x_1, x_2) \in G_3 \\ (b - K)x_1^2 + x_2^2 & \text{se } (x_1, x_2) \in G_2 \text{ ou } (x_1, x_2) \in G_4 \end{cases}$$

Esta função é descontínua em S .

Se $0 \leq K < b$ em ambos os casos V será positiva definida e infinitamente global pois dado $A > 0$, existe $R = A/\lambda_1$ com $\lambda_1 = \min\{b + \alpha K, 1\}$ ($\alpha = \text{sign}\{Ax_1 + x_2\}x_1$) tal que no exterior da esfera $x_1^2 + x_2^2 = R$ tem-se $V(x_1, x_2) \geq A$.

Se $K \geq b$ essas propriedades são mantidas com $A > \sqrt{k-b}$.

Obtém-se $\dot{V} = -2ax_2^2$ no complementar de S . Quando a trajetória cruza S a função V sofre um salto discreto decrescente de $2Kx_1^2$. Usando os argumentos da prova do teorema 0.17 conclui-se que qualquer trajetória vai diretamente para a origem ou cai em S e desliza ao longo da mesma até a origem.

2. Investigaremos agora a estabilidade em torno da origem do sistema dado por

$$(3.5^+) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 - 4x_3 - 20 \\ \dot{x}_2 = -x_2 \\ \dot{x}_3 = -x_1 - x_3 \end{cases} \quad \text{se } x_3 > 0$$

$$(3.5^-) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = -4x_1 + 4x_3 + 20 \\ \dot{x}_2 = -x_2 \\ \dot{x}_3 = -x_1 - 4x_3 \end{cases} \quad \text{se } x_3 < 0$$

Os sistemas (3.5⁺) e (3.5⁻) satisfazem as condições de existência e unicidade de solução. As funções

$$f^+(x) = (-x_1 - 4x_3 - 20, -x_2, -x_1 - x_3)$$

e

$$f^-(x) = (-4x_1 + 4x_3 + 20, -x_2, -x_1 - 4x_3)$$

não possuem pontos críticos na superfície de descontinuidade S dada pela equação $x_3 = 0$.

As soluções do sistema (3.5⁺) e (3.5⁻) são respectivamente

$$\begin{cases} x_1^+(t) = \rho^+ e^{-t} [\cos(\omega^+ + 2t)] - 4 \\ x_2^+(t) = K_1^+ e^{-t} \\ x_3^+(t) = -\frac{\rho^+}{2} e^{-t} [\sin(\omega^+ + 2t)] + 4 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} x_1^-(t) = \rho^- e^{-4t} [\cos(\omega^- + 2t)] + 4 \\ x_2^-(t) = K_1^- e^{-t} \\ x_3^-(t) = -\frac{\rho^-}{2} e^{-4t} [\sin(\omega^- + 2t)] - 1 \end{cases}$$

onde ρ^+ , ρ^- , K_1^+ , K_1^- , ω^+ e ω^- são constantes. (Ver figuras 10 e 11).

Observemos que as trajetórias de ambos os sistemas são tangentes a superfície S em todos os pontos do conjunto $\Gamma = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1 = x_3 = 0\}$. Isto acontece pois para todo ponto neste conjunto temos f^+ e f^- contidos em S . A tangência é parabólica e a origem é posição de equilíbrio do sistema (3.5[±]) (figura 12).

A seguir determinaremos a transformação primeiro retorno G , vista no capítulo II, para o sistema (3.5[±]). É fácil verificar

que o termo $S_2 = -2 \left[\frac{c_2^+}{c_1^+} - \frac{c_2^-}{c_1^-} \right]$ da transformação é nulo, ou seja, os vetores $f^+(0)$ e $f^-(0)$ são colineares. Logo a transformação G será dada por

$$x^{(1)} = x + x_1 (Ax + z(x)), \quad x_1 \geq 0$$

onde A é uma matriz quadrada de ordem dois com elementos determinados pelas fórmulas dadas no capítulo II e $z(x)$ é uma soma de termos em x de ordem maior ou igual a dois.

Os autovalores da matriz A na transformação determinada pelo sistema (3.5[±]) são $\lambda_1 = \frac{-46}{3}$ e $\lambda_2 = \frac{-1}{5}$, portanto todos com parte real negativa. Assim, pelo teorema 2.3, a posição de equilíbrio situada na origem é estável.

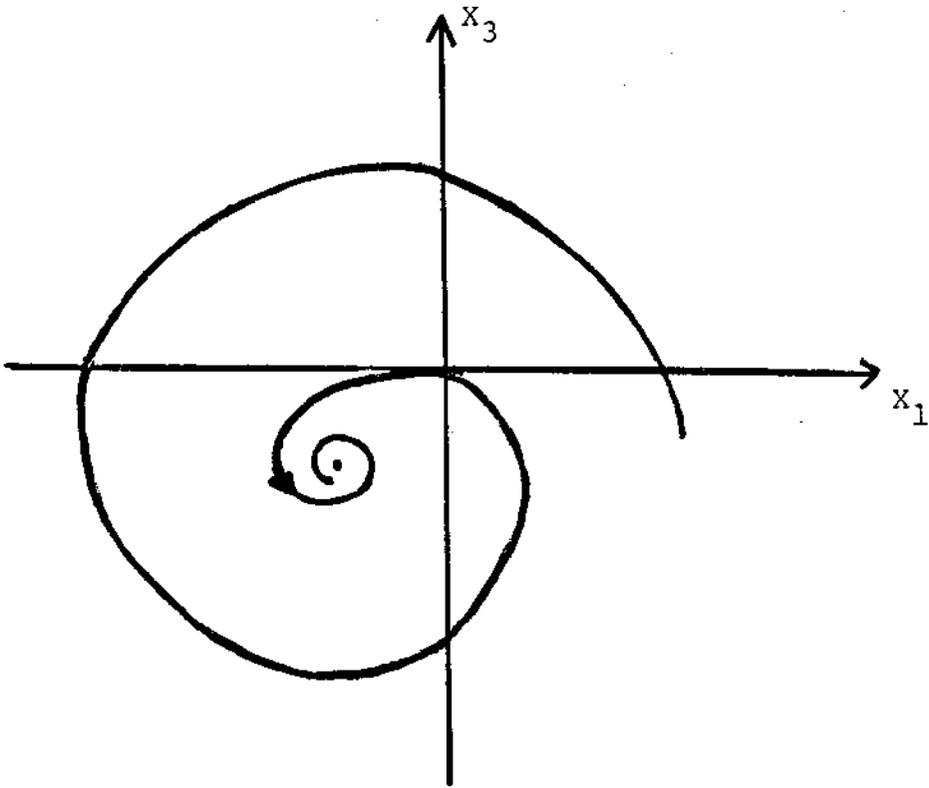


Figura 10

Trajetoária do sistema (3.5⁺) projetada
no plano $x_2 = 0$

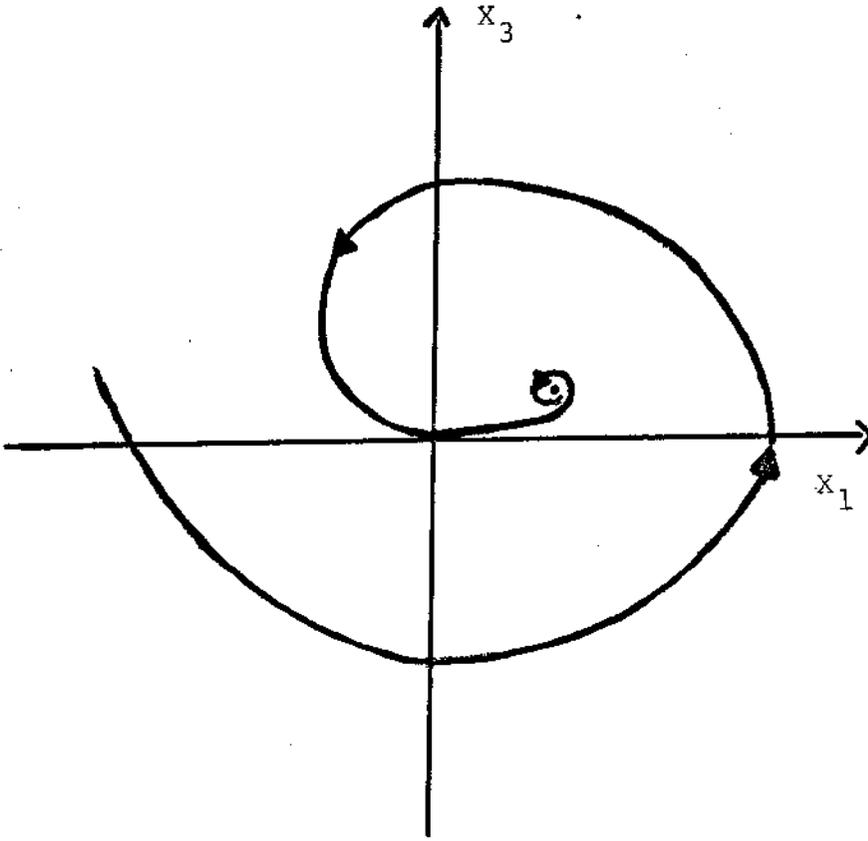


Figura 11

Trajetoária do Sistema (3.5⁻) projetada
no plano $x_2 = 0$.

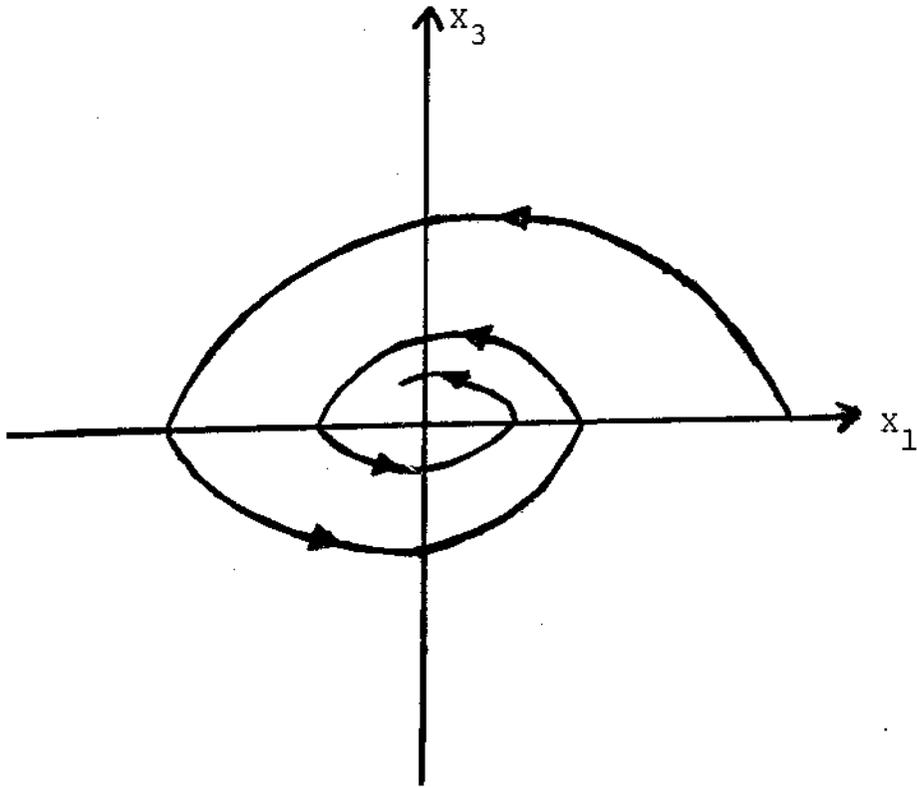


Figura 12

Trajetoária do Sistema (3.5[±]) projetada
no plano $x_2 = 0$

CAPÍTULO IV

ESTABILIDADE DE SOLUÇÕES PERIÓDICAS DE UM SISTEMA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DESCONTÍNUO

Neste capítulo estudaremos a estabilidade de uma solução periódica $z = z^0(t)$ (com período $T > 0$) do sistema

$$(4.1) \quad \dot{z} = f(z, t) \text{ onde } f(z, t+T) = f(z, t) ,$$

$$z = (z_1, \dots, z_n) \text{ e } f(z, t) = (f_1(z, t), \dots, f_n(z, t)).$$

A investigação desta estabilidade será feita através da investigação da estabilidade da solução $x = 0$ da equação

$$(4.2) \quad \dot{x} = \left[\frac{\partial f}{\partial z} \right]_{z=z^0(t)} x$$

Investigaremos a estabilidade da solução periódica $z = z^0(t)$ ($z^0(t+T) = z^0(t)$) do sistema (4.1) quando a função f tem descontinuidades em alguns pontos da trajetória $z = z^0(t)$.

1. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA E TEOREMAS BÁSICOS

Para definir as condições impostas sobre as funções $f_i(z,t)$ ($i = 1, \dots, n$) consideremos um cilindro C cujo eixo é a trajetória $z = z^0(t)$ em \mathbb{R}^{n+1} .

Seja a sequência infinita de hipersuperfícies (superfícies de descontinuidade)

$$(4.3) \quad F_\alpha(z,t) = 0, \quad \alpha \in \mathbb{Z}$$

dividindo o cilindro C em domínios H_α e a trajetória $z = z^0(t)$ interceptando as superfícies de descontinuidade nos pontos M_α quando $t = t_\alpha$. (Ver figura 13).

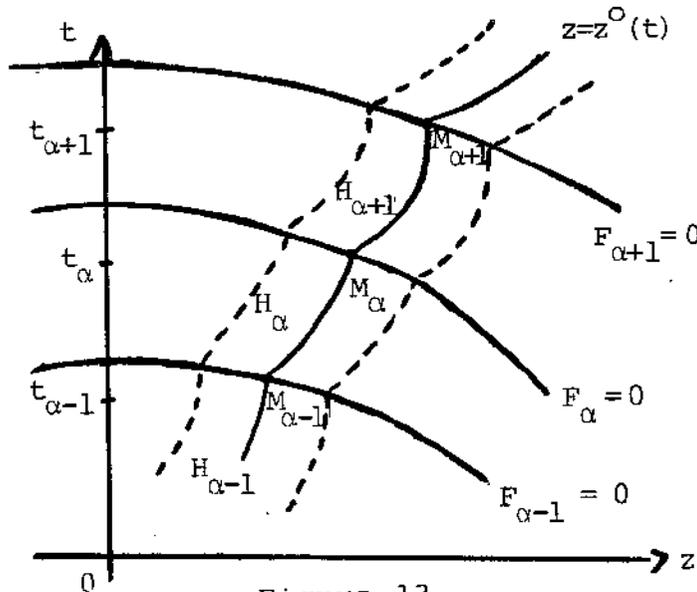


Figura 13

Trajetória periódica do sistema (4.1)

Suponhamos que o sistema (4.1) satisfaz as seguintes condições:

- 1º) As funções f_i são periódicas em t com período $T > 0$;
- 2º) As funções f_i são contínuas em cada domínio H_α entre as fronteiras $F_{\alpha-1} = 0$ e $F_\alpha = 0$ e podem ter descontinuidades de primeira espécie na passagem pelas superfícies $F_\alpha = 0$;
- 3º) As funções f_i são diferenciáveis com respeito a z em cada ponto de H_α e em pontos de $z = z^0(t)$ a diferenciabilidade com respeito a t é uniforme, i.é.,

$$(4.4) \quad f_i(z, t) = f_i(z^0, t) + \sum_j \left[\frac{\partial f_i}{\partial z_j} \right]_{z=z^0(t)} (z - z^0) + O(\rho)$$

onde $\rho = \left[\sum_j (z_j - z_j^0)^2 \right]^{1/2}$ e $\frac{O(\rho)}{\rho}$ converge para zero quando ρ converge para zero uniformemente com respeito a t em cada intervalo $[t_{\alpha-1}, t_\alpha]$.

- 4º) As soluções de (4.1) satisfazem as condições de existência e unicidade em cada domínio H_α (sob condições iniciais específicas) e vale a dependência contínua das trajetórias nas condições iniciais. Supõe-se que as trajetórias do sistema (4.1) são contínuas em toda parte de C incluindo os pontos de intersecção com a superfície de descontinuidade;

59) As superfícies $F_\alpha = 0$ são tais que F_α é de classe C^∞ em todos os pontos M_α ;

69) Junto a trajetória $z = z^0(t)$ as derivadas $\left[\frac{dF_\alpha}{dt}\right]^+$ e $\left[\frac{dF_\alpha}{dt}\right]^-$

são não nulas e de mesmo sinal. Aqui $\frac{dF_\alpha}{dt} = \left[\sum_k \frac{\partial F_\alpha}{\partial z_k} f_k + \frac{\partial F_\alpha}{\partial t} \right]_{z=z^0(t)}$ e os sinais $+$ e $-$ indicam respectivamente os valores de $\frac{dF_\alpha}{dt}$ para $t > t_\alpha$ e $t < t_\alpha$;

79) A família de superfícies (4.3) satisfaz:

Existe $K \in \mathbb{Z}$ tal que para todo $\alpha \in \mathbb{Z}$ têm-se

$$F_\alpha(z, t) = F_{\alpha+K}(z, t).$$

Analisemos agora o sistema linear de equações diferenciais

$$(4.5) \quad \dot{x} = \left[\frac{\partial f}{\partial z} \right]_{z=z^0(t)} x$$

considerando funções $x(t)$ contínuas em cada intervalo $(t_{\alpha-1}, t_\alpha)$, que satisfazem (4.5) e tem uma descontinuidade em $t = t_\alpha$.

Seja $\xi = f^+(z, t) - f^-(z, t)$ a grandeza de descontinuidade da função f passando pelo ponto $(z, t) \in F_\alpha$ do lado negativo para o positivo (de $H_{\alpha-1}$ para H_α). Aqui

$f^+(z,t) = \lim_{F_\alpha(z,t) \rightarrow +0} f(z,t)$ e $f^-(z,t) = \lim_{F_\alpha(z,t) \rightarrow -0} f(z,t)$ definidas no

capítulo I deste trabalho.

Consideremos ainda $h^\pm = (h_1^\pm, \dots, h_n^\pm)$ onde

$$(4.6) \quad h_k^\pm = \left[\frac{\partial F_\alpha}{\partial z_k} / \left(\frac{dF_\alpha}{dt} \right)^\pm \right]_{M_\alpha}$$

e observemos que ξ e h_k^\pm dependem do índice α .

Para simplificar a notação este índice será omitido no que segue.

Vamos definir a descontinuidade das funções $x(t)$ em $t = t_\alpha$ pelas fórmulas:

$$(4.7.1) \quad x^+ - x^- = B^+ x^+$$

$$(4.7.2) \quad x^+ - x^- = B^- x^-$$

onde

$$B^+ = \xi h^{+t} = \begin{bmatrix} \xi_1 h_1^+ & \dots & \xi_1 h_n^+ \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_n h_1^+ & \dots & \xi_n h_n^+ \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B^- = \xi h^{-t} = \begin{bmatrix} \xi_1 h_1^- & \dots & \xi_1 h_n^- \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_n h_1^- & \dots & \xi_n h_n^- \end{bmatrix}$$

Chamaremos (4.7.1) e (4.7.2) de "condições de descontinuidade" e brevemente provaremos a equivalência das mesmas.

Consideremos o sistema linear (4.5) e as condições de descontinuidade (4.7). A importância da aproximação linear dada desta maneira esta no seguinte teorema, cuja demonstração será feita no final deste capítulo.

TEOREMA 4.1. Se a solução nula da aproximação linear (4.5)+(4.7) é assintoticamente estável então a solução periódica $z = z^0(t)$ do sistema não linear original (4.1) é também assintoticamente estável.

Consideremos uma matriz $X(t)$ cujas colunas são n soluções linearmente independentes do sistema (4.5)+(4.7). Chamaremos $X(t)$ de matriz fundamental do sistema (4.5)+(4.7). A seguinte identidade é satisfeita

$$(4.8) \quad X(t + T) = X(t) \cdot U$$

onde U é uma matriz constante não singular.

A equação característica da aproximação linear é determinada como no caso contínuo e é dada por

$$\det(U - \rho E) = 0$$

onde ρ é uma variável e E a matriz identidade.

TEOREMA 4.2. Se pelo menos uma das raízes da equação característica da aproximação linear tem valor absoluto maior que um, então a solução periódica $z = z^0(t)$ de (4.1) é instável.

2. OBSERVAÇÕES PRELIMINARES

1º) Nos teoremas 4.1 e 4.2, o estudo das trajetórias do sistema (4.1) será feito através do estudo das trajetórias da aproximação linear (4.5)+(4.7). Para tais trajetórias as definições de estabilidade e estabilidade assintótica são similares às aquelas dadas por Liapunov no caso contínuo.

2º) Vamos agora provar a equivalência das condições de descontinuidade (4.7.1) e (4.7.2). Tem-se que

$$x^+ = x^- + B^- x^- = (E + B^-) x^-$$

e

$$x^+ = (E - B^+)^{-1} x^- .$$

Logo basta mostrar que $(E + B^-) = (E + B^+)^{-1}$ que reduz-se a igualdade

$$B^- - B^+ - B^- B^+ = 0.$$

Ainda por (4.7.1) e (4.7.2) temos que

$$\begin{aligned}
 B^+ x^+ &= B^- x^- \\
 \Rightarrow B^+ x^+ &= B^- x^+ + B^- x^- - B^- x^+ \\
 &= B^- x^+ + B^- (x^- - x^+) \\
 &= B^- x^+ + B^- (-B^+ x^+) \\
 &= B^- x^+ + B^- B^+ x^+ \\
 \Rightarrow B^- - B^+ &= B^- B^+ .
 \end{aligned}$$

Fazendo $S = E + B^- = (E - B^+)^{-1}$ podemos escrever as condições de descontinuidade na forma

$$(4.9) \quad x^+ = Sx^- .$$

Seja $T_{M_\alpha} F_\alpha$ o plano tangente a F_α em M_α e P_α o plano $t = t_\alpha$. Consideremos $K = T_{M_\alpha} F_\alpha \cap P_\alpha$. Podemos supor, genericamente, que K é uma superfície de dimensão $(n-1)$.

Qualquer vetor $y \in \mathbb{R}^{n+1}$ com $y \notin K$ é gerado pelos vetores $(1, 0, \dots, 0)$ e $\text{grad } F_\alpha(M_\alpha) = (a_0, a_1, \dots, a_n)$, i.é., $y = (r + s_0 a_0, s_1 a_1, \dots, s_n a_n)$ onde $r, s_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$. É fácil ver que $y \cdot x = 0$ para todo $x \in K$ e $y \notin K$. Em particular o vetor h^-_t pertence ao conjunto dos vetores $y \in \mathbb{R}^{n+1}$ gerados por (a_0, a_1, \dots, a_n) e $(1, 0, 0, \dots, 0)$. Logo $h^-_t \cdot x = 0$ para todo $x \in K$.

Seja

$$(4.10) \quad \gamma = \frac{\left[\frac{dF_\alpha}{dt} \right]_{M_\alpha}^+}{\left[\frac{dF_\alpha}{dt} \right]_{M_\alpha}^-} = 1 + h^{-t} \xi.$$

Verifiquemos que
$$\frac{\left[\frac{dF_\alpha}{dt} \right]_{M_\alpha}^+}{\left[\frac{dF_\alpha}{dt} \right]_{M_\alpha}^-} = 1 + h^{-t} \xi.$$

Essa igualdade é verdadeira pois,

$$\begin{aligned} & \frac{\left[\frac{dF_\alpha}{dt} \right]_{M_\alpha}^+}{\left[\frac{dF_\alpha}{dt} \right]_{M_\alpha}^-} = \frac{\sum_k \frac{\partial F_\alpha}{\partial z_k} f_k^+ + \frac{\partial F_\alpha}{\partial t}}{\sum_k \frac{\partial F_\alpha}{\partial z_r} f_k^- + \frac{\partial F_\alpha}{\partial t}} \\ & = 1 + \frac{\sum_k \frac{\partial F_\alpha}{\partial z_k} f_k^+ - \sum_k \frac{\partial F_\alpha}{\partial z_k} f_k^-}{\sum_k \frac{\partial F_\alpha}{\partial z_k} f_k^- + \frac{\partial F_\alpha}{\partial t}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 1 + \frac{\sum_k \frac{\partial F_\alpha}{\partial z_k} (f_k^+ - f_k^-)}{\sum_k \frac{\partial F_\alpha}{\partial z_k} f_k^- + \frac{\partial F_\alpha}{\partial t}} \\
 &= 1 + \frac{\sum_k \frac{\partial F_\alpha}{\partial z_k} \xi_k}{\left[\frac{dF_\alpha}{dt} \right]^-} \\
 &= 1 + h_1^- \xi_1 + \dots + h_n^- \xi_n \\
 &= 1 + h^- \xi .
 \end{aligned}$$

Pela condição 6º), no início deste capítulo, temos que

$\left[\frac{dF_\alpha}{dt} \right]^+$ e $\left[\frac{dF_\alpha}{dt} \right]^-$ são diferentes de zero e de mesmo sinal. Logo

$$\text{go } \gamma = \frac{\left[\frac{dF_\alpha}{dt} \right]^+}{\left[\frac{dF_\alpha}{dt} \right]^-} > 0.$$

Consideremos os seguintes casos:

1º CASO. $\gamma \neq 1$. Neste caso $h^- \xi \neq 0$ e $\xi \notin K$. Para todo vetor $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ existe uma expansão $x = x_\xi + x_k$ onde x_ξ é um vetor paralelo a ξ e x_k é tangente ao plano K .

$$\begin{aligned}
 \text{Como } S\xi &= (E + B^-)\xi \\
 &= \xi + B^- \xi
 \end{aligned}$$

$$= \xi + \xi h^{-t}$$

$$= \gamma \xi \quad e$$

$$x_{\xi} // \xi \quad \text{têm-se que} \quad Sx_{\xi} = \gamma x_{\xi} .$$

Por outro lado $Sx_k = x_k + \xi(h^{-t} x_k) = x_k$. Portanto a transformação $x^+ = Sx^-$ não transforma os vetores tangentes a K e multiplica por γ os vetores paralelos a ξ . Logo

$$x_{\xi}^+ = \gamma x_{\xi}^-, \quad x_k^+ = x_k^-$$

e a transformação S possui dois autovalores distintos:

- γ com multiplicidade um.
- 1 com multiplicidade $(n-1)$.

2º CASO: $\gamma = 1$, $\xi \neq 0$, $h^{-t} \neq 0$. Neste caso $\xi \in K$. Todo autovalor de S é igual a 1 mas $S \neq E$. A matriz S tem um divisor elementar de segundo grau e todos os restantes de primeiro grau.

3º CASO: $\gamma = 1$ e $\xi = 0$ ou $h^{-t} = 0$. Neste caso $S = E$ e $x^+ = x^-$. Logo se $f(z, t)$ é contínua no ponto $M_{\alpha} \in F_{\alpha}$ ou $F_{\alpha} = 0$ é tangente ao plano $t = t_{\alpha}$ em M_{α} tem-se que as trajetórias da aproximação linear são contínuas no intervalo $[t_{\alpha-1}, t_{\alpha}]$.

49) Consideremos agora a função $h(t) = (h_1(t), \dots, h_n(t))$ descontínua em $t = t_\alpha$:

$$h(t) = \left[\frac{\partial F_\alpha / \partial z}{dF_\alpha / dt} \right]_{z=z^0(t)}$$

onde $h_k(t) = \left[\frac{\partial F_\alpha / z_k}{dF_\alpha / dt} \right]_{z=z^0(t)}$.

A função $h(t) \cdot x(t)$ é contínua em $t = t_\alpha$ (ver condições (4.7.1) e (4.7.2)).

Assim a aproximação linear do sistema (4.1) pode ser escrita como

$$(4.11) \quad Dx = \left[\left[\frac{\partial f}{\partial z} \right]_{z=z^0(t)} + \xi h^t(t) \delta(t - t_\alpha) \right] x$$

onde $\xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}$, $h^t(t) = (h_1(t), h_2(t), \dots, h_n(t))$,

$\delta(t)$ é a função de Dirac e $Dx = (Dx_1, \dots, Dx_n)$ com Dx_i sendo a derivada generalizada da função $x_i(t)$. (Ver definição 0.18).

Por outro lado a expressão entre colchetes é a derivada parcial generalizada da função f com respeito a z_k em $z = z^0(t)$:

$$(4.12) \quad D_k f = \left[\frac{\partial f}{\partial z} \right]_{z=z^0(t)} + \xi h^t(t) \delta(t - t_\alpha) .$$

Consequentemente a aproximação linear (4.5)+(4.7) pode ser escrita na forma

$$(4.13) \quad Dx = [D_k f] x$$

que difere de (4.2) somente na troca das derivadas usuais $\frac{dx}{dt}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ pelas derivadas generalizadas Dx e $D_k f$.

5º) Fazendo

$$(4.14) \quad x = z - z^0(t)$$

e reescrevendo (4.1) têm-se

$$(4.15) \quad \dot{x} = p(x, t)$$

onde $p(x, t) = f(z^0(t) + x, t) - f(z^0(t), t)$.

As equações das superfícies de descontinuidade são agora

$$(4.16) \quad P_\alpha(x, t) = 0 \quad \text{com} \quad P_\alpha(x, t) = F_\alpha(z^0(t) + x, t) .$$

No espaço x, t as superfícies de descontinuidade podem apresentar "quebras" (descontinuidades de direção) na intersecção com o plano $t = t_\alpha$. Isto acontece pois

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_\alpha}{\partial t}(x, t) &= \frac{\partial F_\alpha}{\partial z} z'(t) + \frac{\partial F_\alpha}{\partial t} = \\ &= \frac{dF_\alpha}{dt} \end{aligned}$$

tem descontinuidades em $t = t_\alpha$.

Devido ao segundo termo em (4.15) a função $p(x, t)$ além de possuir descontinuidades em pontos de $P_\alpha(x, t) = 0$ poderá possuir descontinuidades nos planos $t = t_\alpha$.

As soluções do sistema (4.15) são contínuas assim como as soluções do sistema (4.1).

A transformação do espaço z, t no espaço x, t leva o ponto de intersecção do plano $t = \text{const.}$ com a trajetória $z = z^0(t)$ num ponto do eixo t . No espaço x, t o eixo t é o eixo de um cilindro C . As superfícies $P_\alpha = 0$ e os planos $t = t_\alpha$ dividem o cilindro C em domínios centrais e angulares (ver figura 14). Os domínios angulares situam-se entre as superfícies $P_\alpha = 0$ e os planos correspondentes $t = t_\alpha$. Chamaremos de domínio angular superior ou inferior se a superfície limitante $P_\alpha = 0$ deste domínio passa acima ou abaixo do plano $t = t_\alpha$ respectivamente.

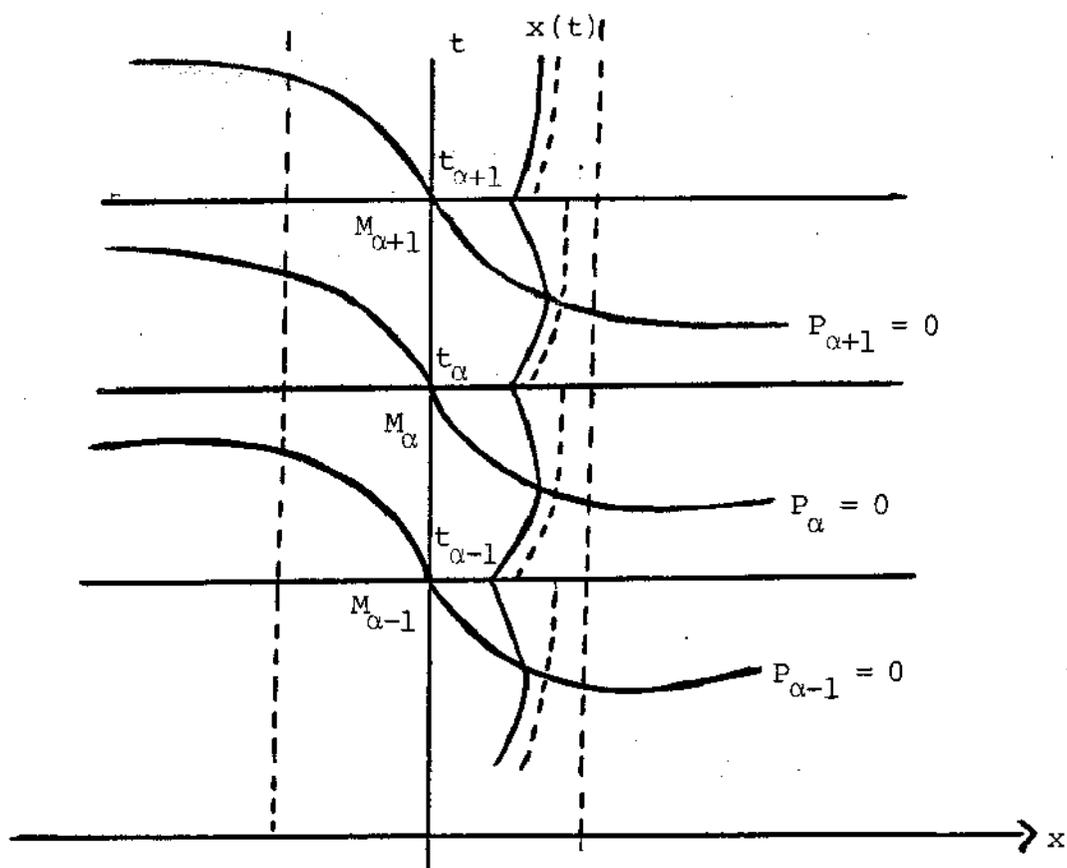


Figura 14

Trajetoira do sistema (4.1) no espaço (x, t)

A função $p(x, t)$ é igual a zero em todo ponto do eixo t diferente de M_{α} . Quando (t, x) aproxima-se do ponto M_{α} tem-se que:

(i) Se $(t, x) \rightarrow M_{\alpha}$ no domínio central

$$\lim_{(t, x) \rightarrow M_{\alpha}} p(x, t) = \lim_{(t, x) \rightarrow M_{\alpha}} f(z^0(t) + x, t) - f(z^0(t), t) = 0 ;$$

(ii) Se $(t, x) \rightarrow M_\alpha$ no domínio angular inferior

$$\lim_{(t, x) \rightarrow M_\alpha} p(x, t) = \xi ;$$

(iii) Se $(t, x) \rightarrow M_\alpha$ no domínio angular superior

$$\lim_{(t, x) \rightarrow M_\alpha} p(x, t) = -\xi ;$$

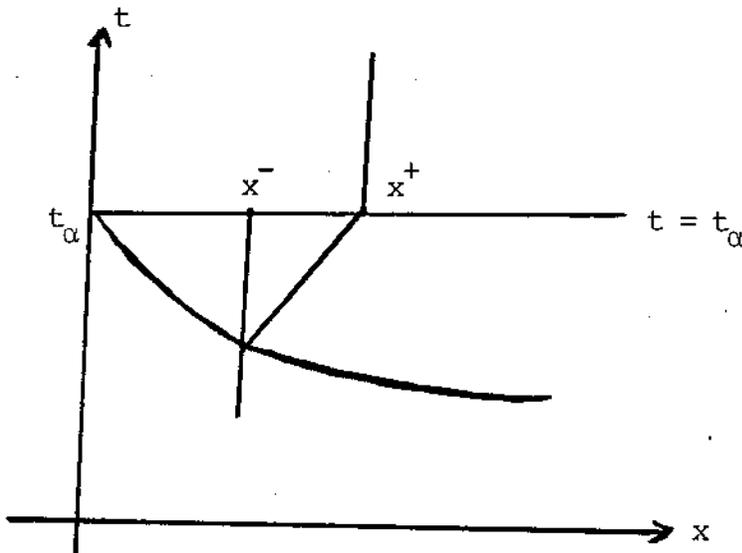


Figura 15

Construção geométrica das condições de descontinuidade

69) Daremos agora uma interpretação geométrica para as condições de descontinuidade.

Seja $x(t)$ uma trajetória do sistema não linear (4.15) tal que:

- (i) $x(t)$ está contida numa vizinhança pequena da origem;
- (ii) $x(t)$ intercepta o domínio angular inferior junto ao plano $t = t_\alpha$;
- (iii) a direção de $x(t)$ é ligeiramente vertical.

Seja (t_1, x_1) o ponto em que $x(t)$ entra no domínio angular inferior. Denotemos por x^+ o ponto de intersecção entre a trajetória $x(t)$ e o plano $t = t_\alpha$. Consideremos agora a reta paralela ao eixo t passando pelo ponto (t_1, x_1) . Ao ponto de intersecção desta reta com o plano $t = t_\alpha$ chamaremos de x^- .

Partindo desta construção obteremos as condições de descontinuidade (4.7).

Trocaremos agora a equação da superfície de descontinuidade $P_\alpha = 0$ pela equação do plano tangente, ou seja

$$\left[\frac{\partial P_\alpha}{\partial x} \right]_{M_\alpha} x + \left[\frac{\partial P_\alpha}{\partial t} \right] (t - t_\alpha) = 0$$

De acordo com (4.16) temos

$$\left[\frac{\partial P_\alpha}{\partial x} \right]_{M_\alpha} = \left[\frac{\partial F_\alpha}{\partial z} \right]_{M_\alpha} \quad e \quad \left[\frac{\partial P_\alpha}{\partial t} \right]_{M_\alpha} = \left[\frac{dF_\alpha}{dt} \right]_{M_\alpha}^-$$

Substituindo-se na equação do plano tangente obtêm-se

$$\left[\frac{\partial F_\alpha}{\partial z} \right]_{M_\alpha}^x = - \left[\frac{dF_\alpha}{dt} \right]^- (t - t_\alpha)$$

$$\Rightarrow \frac{\left[\frac{\partial F_\alpha}{\partial z} \right]_{M_\alpha}^x}{\left[\frac{dF_\alpha}{dt} \right]_{M_\alpha}^-} = -(t - t_\alpha)$$

$$\Rightarrow h^- t x = t_\alpha - t .$$

Para uma maior precisão consideremos a declividade da trajetória no domínio angular igual a ξ . Assim

$$x^+ - x^- = \xi (t_\alpha - t_1)$$

onde t_1 é o valor de t para o qual a trajetória entra no domínio angular, isto é, quando $x = x^-$.

Portanto

$$(4.17) \quad x^+ - x^- = \xi h^- t x^- .$$

3. TRANSFORMAÇÃO DE LIAPUNOV

Aplicaremos a transformação de Liapunov

$$(4.18) \quad x = L(t) \cdot y \quad , \quad L(t) = X(t)e^{-tA} \quad , \quad A = \frac{1}{T} \ln U$$

ã aproximação linear do sistema. Aqui L é a matriz transformação, $X(t)$ a matriz fundamental da aproximação linear (4.5)+(4.7), U a matriz constante encontrada em (4.8) e y uma coluna composta por novas variáveis y_i .

Se $Y(t)$ denota a matriz fundamental de (4.5)+(4.7) transformado para variáveis y_i , então por (4.18)

$$X(t) = L(t) \cdot Y(t)$$

$$\Rightarrow X(t) = X(t) \cdot e^{-tA} \cdot Y(t)$$

$$\Rightarrow Y(t) = e^{tA} \quad .$$

Como $x = L(t) \cdot y$ vem que

$$(4.19) \quad \dot{y} = Ay.$$

As trajetórias da aproximação linear (4.5)+(4.7) transformadas para variáveis y_i são contínuas, logo no espaço y, t não existem as condições de descontinuidade. A definição de transformação de Liapunov é dada para o caso em que as matrizes $L(t)$ e $\frac{dL}{dt}(t)$ são contínuas. Aqui $L(t)$ é descontínua e uma definição análoga de transformação de Liapunov pode ser dada trocando-se

a derivada $\frac{dL}{dt}(t)$ pela derivada generalizada de $L(t)$.

A matriz $L(t)$ é descontínua em $t = t_\alpha$ pois $L(t) = X(t)e^{-tA}$ onde $X(t)$ é descontínua em $t = t_\alpha$.

De acordo com (4.9) $X^+ = SX^-$ para $t = t_\alpha$, portanto $L^+ = X^+e^{-tA} = SX^-e^{-tA} = SL^-$.

Aplicando a mesma transformação de Liapunov ao sistema não linear original $\dot{x} = p(x,t)$ obtêm-se

$$y \frac{dL}{dt} + L(t) \frac{dy}{dt} = p(L(t).y, t)$$

ou seja

$$(4.20) \quad \dot{y} = q(y, t)$$

onde $q = L^{-1}p - L^{-1} \frac{dL}{dt} Y$.

As superfícies $P_\alpha(x, t)$ são transformadas nas superfícies $Q_\alpha(y, t) = 0$ onde $Q_\alpha(y, t) = P_\alpha(Ly, t)$.

As superfícies $P_\alpha(x, t)$ na linha de intersecção com os planos $t = t_\alpha$ tem "quebras" (descontinuidades de direção) enquanto que as superfícies $Q_\alpha(y, t) = 0$ tem descontinuidades ao longo destas linhas de intersecção. Elas consistem de duas partes contínuas ($t > t_\alpha$ e $t < t_\alpha$) que interceptam o plano $t = t_\alpha$ ao longo de curvas diferentes passando pelo mesmo ponto $t = t_\alpha$

no eixo t (correspondente a M_α).

As trajetórias do sistema (4.15) são contínuas no espaço x, t enquanto que as trajetórias do sistema (4.20) são descontínuas em $t = t_\alpha$. Isto acontece porque a matriz $L(t)$ é descontínua em $t = t_\alpha$.

Para $t = t_\alpha$ tem-se

$$(4.21) \quad x = L^+ y^+ = L^- y^- .$$

Assim a trajetória do movimento não perturbado coincide com o eixo t no espaço y, t exatamente como no espaço x, t .

As trajetórias do movimento perturbado, no espaço y, t , tem uma "quebra" nas superfícies $Q_\alpha = 0$ e são ainda descontínuas nos planos $t = t_\alpha$. Estas discontinuidades são definidas pelas fórmulas (4.21).

As trajetórias da aproximação linear são contínuas e determinadas pelo sistema de equações diferenciais lineares (4.19). Assim como o espaço x, t , o espaço y, t é separado pelas superfícies $Q_\alpha = 0$ e os planos $t = t_\alpha$ em domínios centrais e angulares.

4. PROVA DOS TEOREMAS

TEOREMA 4.1. Seja a solução nula da aproximação linear

assintoticamente estável. Pelo teorema 0.21 vem que a solução $y = 0$ do sistema (4.19) é assintoticamente estável e portanto todos os autovalores da matriz A tem parte real negativa.

Pelo teorema 0.22 existe uma forma quadrática $V(y,y)$ positiva definida tal que sua derivada $(\frac{dV}{dt})^o$ de acordo com o sistema (4.19) é negativa definida, ou seja

$$V(y,y) > 0 \quad , \quad (\frac{dV}{dt})^o < 0 \quad \text{para } y \neq 0.$$

Vamos analisar a mudança dos valores de $V(y,y)$ junto as trajetórias descontínuas do sistema não linear (4.20). As trajetórias passam pelo domínio central e angular e tem descontinuidades nos planos $t = t_\alpha$.

Mostraremos que a função V ao longo das trajetórias decrescerá no domínio central e daremos uma estimativa deste decrescimento. O valor de V poderá crescer no domínio angular, mas este crescimento será cancelado por saltos na função V durante a passagem pelo plano $t = t_\alpha$.

No domínio central o sistema não linear (4.20) tem o sistema (4.19) como sua aproximação linear. Consequentemente, no domínio central

$$\dot{q} = Ay + \theta |y|^2$$

onde $\theta|y|^2$ é uma soma de termos cuja ordem com respeito a y é maior ou igual a dois.

Então

$$(4.22) \quad \frac{1}{V} \left(\frac{dV}{dt}\right)^{\infty} = \frac{1}{V} \left(\frac{dV}{dt}\right)^0 + \frac{1}{V} \theta|y|^3$$

onde as derivadas $\left(\frac{dV}{dt}\right)^{\infty}$ e $\left(\frac{dV}{dt}\right)^0$ são de acordo com os sistemas (4.20) e (4.19) respectivamente. O termo $\frac{1}{V} \left(\frac{dV}{dt}\right)^0$ é uma função homogênea e contínua que toma valores negativos e tem um máximo negativo $-\mu^2$.

O segundo termo, $\frac{1}{V} \theta|y|^3$ vai a zero quando y tende a zero, assim para $\mu_1^2 < \mu^2$ e y suficientemente pequeno

$$(4.23) \quad \frac{1}{V} \left(\frac{dV}{dt}\right)^{\infty} \leq -\mu_1^2$$

Logo

$$(4.24) \quad V \leq V^* e^{-\mu_1^2(t-t^*)}$$

onde V e V^* são os valores de V nos instantes t e t^* ($t^* < t$) em que os pontos da trajetória estão num dado domínio central. A fórmula (4.24) define a velocidade do decrescimento da

função V ao longo da trajetória no domínio central.

A função q tem limites finitos quando $(y,t) \rightarrow (0, t_\alpha)$ no domínio angular, mais precisamente

$$\lim_{(y,t) \rightarrow (0, t_\alpha)} q(y,t) = (L^-)^{-1} \xi$$

quando $(y,t) \rightarrow (0, t_\alpha)$ no domínio angular inferior e

$$\lim_{(y,t) \rightarrow (0, t_\alpha)} q(y,t) = -(L^+)^{-1} \xi$$

quando $(y,t) \rightarrow (0, t_\alpha)$ no domínio angular superior.

Conseqüentemente no domínio angular

$$\frac{1}{\sqrt{V}} \left(\frac{dV}{dt} \right)^\infty = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k \frac{\partial V}{\partial y_k} q_k = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k \frac{\partial V}{\partial y_k} \eta_k + \frac{1}{\sqrt{V}} \theta |y|^2$$

e para y suficientemente pequeno tem-se

$$\left| \frac{1}{\sqrt{V}} \frac{dV}{dt} \right| < 2K .$$

Assim $|\sqrt{V} - \sqrt{V'}| < K|t - t'|$ onde V e V' são os valores de V nos instantes t e t' ($t' < t$) contidos no mesmo domínio angular, respectivamente.

Como $|t - t'|$ é uma quantidade de pelo menos primeira ordem em y vem que

$$\frac{\sqrt{V}}{\sqrt{V'}} = 1 + \frac{\sqrt{V} - \sqrt{V'}}{\sqrt{V'}} < 1 + K \frac{|t - t'|}{\sqrt{V'}}$$

é também limitada para y suficientemente pequeno, i.é., existe N tal que

$$(4.25) \quad V \leq NV'$$

Logo o coeficiente de crescimento de V no domínio angular é finito. Como o número de domínios angulares essencialmente diferentes é finito, podemos escolher o mesmo N para todos os domínios angulares.

Mostraremos agora que a variação de V no domínio angular é cancelada pelo correspondente salto $V(y^+, y^+) - V(y^-, y^-)$. Consideremos a trajetória que intercepta o domínio angular inferior e que transforma os pontos (x_1, t_1) e (y_1, t_1) das superfícies de descontinuidade (nos espaços x, t e y, t respectivamente) nos pontos (x, t) e (y, t) no plano $t = t_\alpha$ (figura 16).

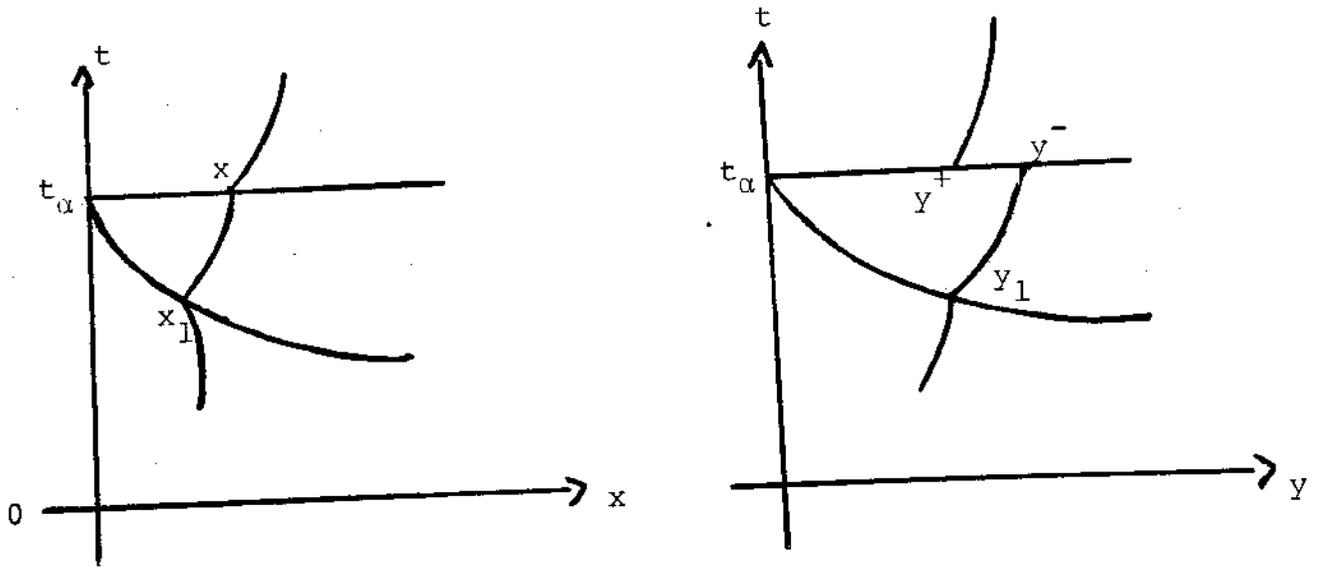


Figura 16

Trajetórias dos sistemas (4.15) e (4.20) que transformam (x_1, t_1) e (y_1, t_1) nos pontos (x, t_α) e (y, t_α) respectivamente.

Representaremos as equações das superfícies $P_\alpha(x, t)$ na forma resolvida com respeito a t

$$(4.26) \quad t_\alpha - t = h^{-t} x$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0} p(x, t) = \xi$ quando $x \rightarrow 0$ no domínio angular inferior vem que

$$x - x_1 = \int_{t_1}^{t_\alpha} p dt = \xi(t_\alpha - t_1) + \theta|x|^2 = \xi h^{-t} x_1 + \theta|x|^2$$

ou seja

$$x - x_1 = B^- x_1 + \theta |x|^2 .$$

Logo

$$(4.27) \quad x = B^- x_1 + x_1 + \theta |x|^2 = (B^- + E)x_1 + \theta |x|^2 = Sx_1 + \theta |x|^2 .$$

Por outro lado

$$(4.28) \quad x_1 = L(t_1)y_1 = L^- y_1 + [L(t_1) - L(t_a - 0)]y_1 = L^- y_1 + \theta |y|^2 .$$

Observemos que $x = L(t)y$ e $y = L^{-1}(t)x$, onde as matrizes $L(t)$ e $L^{-1}(t)$ tem coeficientes limitados. Assim as quantidades pequenas em x serão infinitamente pequenas em y , de mesma ordem e reciprocamente.

Assim $\theta |y|^2$ e $\theta |y|^3$ serão usadas para a variável y como foram para x .

Sabendo-se que $L^+ = SL^-$ por (4.21), (4.27) e (4.28) tem-se que

$$(4.29) \quad L^+ y^+ = x = Sx_1 + \theta |x|^2 = SL^- y_1 + \theta |x|^2 = L^+ y_1 + \theta |x|^2 .$$

Multiplicando a esquerda por $(L^+)^{-1}$ obtém-se

$$(4.30) \quad y^+ = y_1 + \theta |y|^2 , \quad v(y^+, y^+) = v(y_1, y_1) + \theta |y|^3$$

e assim para y suficientemente pequeno

$$(4.31) \quad e^{-\eta} < \frac{V(y^+, y^+)}{V(y_1, y_1)} = 1 + \frac{1}{V(y_1, y_1)} \theta |y|^3 < e^{\eta}$$

onde η é um número positivo tão pequeno quanto desejado. Assim o crescimento de V no domínio angular é cancelado por um salto da função V na passagem pelo plano $t = t_{\alpha}$.

Seja $T = \min_{\alpha} (t_{\alpha+1} - t_{\alpha})$ e r um número positivo arbitrário tal que $r < \mu_1 < \mu$. Tomemos $\eta < 1/2(\mu_1^2 - r^2)T$. Escolhere-mos $\epsilon > 0$ tão pequeno de forma que as desigualdades (4.24), (4.25) e (4.31) sejam satisfeitas dentro do cilindro $V = \epsilon$ e

$$\Delta t < \frac{(\mu_1^2 - r^2)T}{2\mu_1^2}$$

onde Δt é a variação do tempo em qualquer domínio angular contido no cilindro $V = \epsilon$. Tal escolha de ϵ é possível pois o número de domínios centrais e angulares sujeitos a análise é finito em vista da periodicidade e da propriedade 7^a) dada no início deste capítulo.

Vamos examinar a sequência de tempos $t_{\alpha}^* = 1/2(t_{\alpha} + t_{\alpha+1})$. Os correspondentes planos $t = t_{\alpha}^*$ não interceptam os domínios angulares no interior do cilindro $V = \epsilon$. Isto pela determinação

de t_α^* e pela condição $\Delta t < \frac{(\mu_1^2 - r^2)T}{2\mu_1^2}$.

Seja $\delta = \varepsilon/N$. Tomemos o ponto inicial da trajetória, para $t = t_1^*$, no interior do cilindro $V = \delta$. Este ponto pertence ao domínio central. Com t variando no intervalo $[t_1^*, t_2^*]$ a função V começa decrescendo ao longo da trajetória, depois ela cresce e seu crescimento é cancelado por um salto e em seguida ela decresce novamente. Como o coeficiente de crescimento de V no domínio angular não excede N a trajetória permanece no interior do cilindro $V = \varepsilon$ no intervalo $t_1^* \leq t \leq t_2^*$.

Fazendo

$$V_\alpha = V_{t=t_\alpha^*}$$

teremos

$$V_2 \leq V_1 e^{-\mu_1^2(T - \Delta t)} \cdot e^\eta < V_1 e^{-r^2 T}$$

Como $e^{-r^2 T} < 1$ segue que $V_2 < V_1$ e para $t = t_2^*$ a trajetória está novamente no interior do cilindro $V = \delta$. Assim é possível repetir o que fizemos acima para o próximo segmento da trajetória ($t_2^* \leq t \leq t_3^*$).

Conclui-se então que qualquer trajetória do sistema não linear com condição inicial (para $t = t_1^*$) no interior do cilindro

$V = \delta$ permanecerá no cilindro $V = \varepsilon$ para todo t e

$$V_\alpha \leq V_1 e^{-(\alpha-1)r^2 T}.$$

Assim

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} V_\alpha \leq \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} V_1 e^{-(\alpha-1)r^2 T} = 0$$

ou seja $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} V_\alpha = 0$.

Como a desigualdade $V < NV_\alpha$ vale no intervalo $t_\alpha^* < t < t_{\alpha+1}^*$ tem-se que $\lim_{t \rightarrow +\infty} V(y(t), y(t)) = 0$. Assim a solução nula do sistema não linear $\dot{y} = q(y, t)$ é assintoticamente estável. Pelo teorema (0.21) tem-se que a solução nula do sistema não linear $\dot{x} = p(x, t)$ é também assintoticamente estável. Portanto a solução periódica $z = z^0(t)$ do sistema original $\dot{z} = f(z, t)$ é assintoticamente estável. ■

TEOREMA 4.2. Se pelo menos uma das raízes da equação característica da aproximação linear do sistema, em valor absoluto é maior que um tem-se que pelo menos uma das raízes da equação característica da matriz A tem parte real positiva. (Aqui $A = \frac{1}{T} \ln U$).

Assim existe uma forma quadrática $V(y, y)$ que toma valor positivo num certo y_0 e tem a derivada tomada de acordo com o sistema (4.19) positiva definida

$$V_0 = V(y_0, y_0) > 0, \quad \left(\frac{dV}{dt}\right)^0 > 0.$$

Seja $K^2 = \min \frac{1}{V} \left(\frac{dV}{dt}\right)^0$ ($V \geq V_0$). Em qualquer domínio central, ao longo de um segmento da trajetória onde $V \geq V_0$, para η suficientemente pequeno têm-se

$$(4.33) \quad \frac{1}{V} \left(\frac{dV}{dt}\right)^{\infty} \geq K_1^2 > 0$$

onde $K_1 < K$ e $\left(\frac{dV}{dt}\right)^{\infty}$ é a derivada de V de acordo com o sistema (4.20).

Novamente seja $T = \min_{\alpha} (t_{\alpha+1} - t_{\alpha})$ e $0 < \beta < K_1^2$. Escolhamos um $\epsilon > 0$ tão pequeno tal que as desigualdades (4.31) e (4.33) sejam satisfeitas no cilindro $V = \epsilon$ e $\Delta t < \frac{T(K_1^2 - \beta)}{2K_1^2}$, ($\Delta t =$ variação do tempo em qualquer domínio angular contido no cilindro). Mais ainda, seja $\epsilon > 0$ tal que a desigualdade $\eta < 1/2 T(K_1^2 - \beta)$ seja válida no interior de $V = \epsilon$.

Assim

$$V_2 \geq V_1 e^{\beta T}.$$

Esta desigualdade é válida se a trajetória está no interior do cilindro $V = \epsilon$ para $t_1^* \leq t \leq t_2^*$. Assim $V_2 \geq V_1$ e

pode-se repetir o processo para o segundo segmento da trajetória, etc. Num certo instante a trajetória sairá do cilindro $V = \varepsilon$ pois os valores de V_α crescem mais rapidamente que os termos de uma progressão geométrica com razão $q = e^{\beta t} > 1$.

Assim a solução periódica $z = z^0(t)$ do sistema (0.1) é instável e a prova do teorema está completa. ■

BIBLIOGRAFIA

- [AG1] M.A. AIZERMAN § F. GANTMACHER, On the stability of the equilibrium positions for discontinuous systems;PMM vol. 24, n^o 2, 1960, pp. 283-293.
- [AG2] M.A. AIZERMAN § F. GANTMACHER, Stability in a linear approximation of periodic solution of a system of differential equation with discontinuous right sides; AM. MATH, Soc. Translaction, (2), 26, 1963, (339-351).
- [B] E.A. BARBASHIN, Introduction to the theory of stability; Edited by T. Lukes - Noorhoff, 1970.
- [F] A.F. FILIPOV. Differential equations with 2nd members ; Mat. Sb., 51, n^o 1, 1960.
- [G] F.R. GANTMACHER, The theory of matrices; vol. II, Chelsea Publishing Company, New York.
- [H1] C. HENRY, Differential Equations with discontinuous right-hand side for planning procedure; Journal of Economic Theory 4, 545-551, 1972.

- [H2] C. HENRY, An existence theorem for a class of differential equations with multivalued right-hand side; Journal of Mathematical Analysis and Applications 41, 179-186, 1983.
- [I] T. ITO, Stability with regime switching center for Economic Research; University of Minnesota, Discussion Paper nº 80 -130, Feb., 1980.
- [L1] E.L. LIMA, Curso de Análise; vol. 2, Rio de Janeiro, IMPA, CNPq, 1981.
- [L2] E.L. LIMA, Análise no espaço \mathbb{R}^n ; Brasília, Ed. Universidade de Brasília, São Paulo, Ed. Blücher Ltda, 1970.
- [M] N. MINORSKI, Nonlinear oscillations; D. Van Nostrand Company, Inc., New York, 1962.
- [S] J. SOTOMAYOR, Structural Stability in manifolds with boundary; Global Analyses and its Applications, vol. III, IAEA, Viena, 1974.
- [T1] M.A. TEIXEIRA, Generic singularities of discontinuous vector fields; An. Acad. Bras. Ciênc., vol. 32 (2), 1981.

- [T2] M.A. TEIXEIRA, On critical points of certain planar vector fields; An. Acad. Bras. Ciênc., vol. 56 (3), 231-235, 1984.
- [T3] M.A. TEIXEIRA, On topological stability of divergent diagrams of folds; Math. Z.180, 361-371, 1982.
- [T4] M.A. TEIXEIRA, A topological invariant for discontinuous vector fields; Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications, vol. 9, nº 10, pp. 1073-1080, 1985.
- [W] J.L. WILLEMS, Stability Theory of Dynamical Systems; Copyright, Great Britain, 1970.