

O PROBLEMA DE PLATEAU
NÃO PARAMÉTRICO

LÚCIA HELENA MEZZACAPPA MORAES DE TOLEDO

Dissertação apresentada ao Instituto de
Matemática, Estatística e Ciência da Com
putação da Universidade Estadual de Cam
pinas como requisito parcial para a ob
tenção do título de Mestre em Matemática

ORIENTADOR: Prof. Dr. Rodney Carlos Bassanezi

CAMPINAS
1979

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

AGRADECIMENTOS

Apresentamos os nossos agradecimentos a todas as pessoas que contribuíram de forma direta, ou simplesmente por meio de incentivos para a realização desse trabalho, com destaque

ao Prof. Dr. Rodney Carlos Bassanezi que com sua orientação segura, estímulo e amizade, contribuiu de maneira fundamental para a realização deste trabalho.

ao Prof. Dr. Mario Miranda com o qual tivemos oportunidade de aprimorar e ampliar nossos conhecimentos através de suas claras e objetivas exposições.

aos Professores Ivam Resina e Ricardo Bacci que nos auxiliaram com sugestões oportunas.

ao Sr. Raul dos Santos por seu excelente trabalho de datilografia do manuscrito.

Campinas, 1979

Lúcia H.M.M. de Toledo

Para Guilherme

Í N D I C E

INTRODUÇÃO	i
Capítulo 1 - PROBLEMA DE PLATEAU COM DADO LIPSCHITZIANO	1
Capítulo 2 - PROBLEMA DE PLATEAU COM DADO SATISFAZENDO BOUNDED SLOP. CONDITION	43
Capítulo 3 - PROBLEMA DE PLATEAU EM DOMÍNIOS CUJA FRON TEIRA POSSUI CURVATURA MÉDIA NÃO NEGATIVA	59
Capítulo 4 - PROBLEMA DE PLATEAU COM DADO CONTÍNUO	77
Bibliografia	106

INTRODUÇÃO

A partir da década dos '30 o tratamento do Cálculo das Variações foi revitalizado pela aplicação de métodos de dualidade sobretudo através dos trabalhos de L.C. Young e R. Caccioppoli. A partir dos anos '50, através dos trabalhos do mesmo L.C. Young e de E. de Giorgi, H. Federer e W. Fleming, mediante a utilização da Teoria da medida com fortes componentes geométricos, o Cálculo das Variações recebeu enorme impulso, permitindo o estabelecimento de teoremas bastantes gerais de existência e regularidade de problemas clássicos do Cálculo das Variações em dimensões superiores. Particularmente importantes, foram os resultados obtidos no chamado problema de Plateau, que consiste em:

Fixado um contorno Γ encontrar uma superfície S que tenha Γ como fronteira e "minimiza" a área na classe das superfícies que têm o bordo Γ . Este é o Problema de Plateau Clássico - se se impõe que Γ e S sejam cartesianas (isto é, Γ e S são gráficos de funções), tem-se o Problema de Plateau não paramétrico (ou cartesiano), enunciado mais exatamente como:

"Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, e limitado e $\gamma: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Encontrar uma função contínua $u: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que:

a) $u = \gamma$ sobre $\partial\Omega$

b) u minimiza a "área" entre todas as funções contínuas que assumem o valor γ sobre $\partial\Omega$ "

Convém destacar ainda que quando $n = 2$, existe solução do problema para toda função $\gamma \in C^0(\partial\Omega)$ desde que Ω seja convexo - a prova deste resultado foi obtida sucessivamente por Bernstein (1910),

Haar (1927), J. Douglas (1930) e Rodó (1930) demonstrou que o problema tem solução única para toda função $\gamma \in C^0(\partial\Omega)$ desde que Ω seja convexo.

Em 1965, Finn mostrou que para todo domínio, não convexo de $\mathbb{R}^2$ existe um dado contínuo γ para o qual o problema não tem solução (veja exemplo - cap. 4).

Assim para $n = 2$ o problema com dados contínuos tem solução se, e somente se, Ω é convexo.

Em dimensão maior que 2, Gilbary e Stampacchia (1963) mostraram que o problema tem solução para domínio Ω uniformemente convexo (isto é, com curvaturas principais positivas) com fronteira $\partial\Omega$ suave, $\partial\Omega \in C^3$.

Em 1968, Jenkins e Serrin provaram Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado e $\partial\Omega \in C^2$, então o Problema de Plateau tem solução para dados $\gamma \in C^2(\partial\Omega)$ se, e somente se, a curvatura média de $\partial\Omega$ é não negativa em todo $x \in \partial\Omega$.

Em 1971, o problema de Plateau ganhou novo enfoque quando M. Miranda introduziu a teoria dos Perímetros. Miranda enfraqueceu a hipótese da regularidade sobre $\partial\Omega$, mostrando que o problema tem solução única com $\partial\Omega$ lipschitziana e Ω localmente convexo.

Esta hipótese é uma generalização da curvatura média não negativa, no caso em que a fronteira é apenas Lipschitziana.

Em 1977 R. Bassanezi e U. Massari resolveram o problema de Plateau em domínios limitados $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ localmente pseudo-convexos, sem a hipótese de que a fronteira $\partial\Omega$ seja lipschitziana.

Nosso objetivo neste trabalho foi o de apresentar os resultados principais do Problema de Plateau não paramétrico até 1971, obedecendo uma sequência natural sob o ponto de vista das generali

zações. Assim é que no capítulo 1 desenvolvemos o problema de Plateau com dado Lipschitziano, no capítulo 2 com dado satisfazendo a condição Bounded Slope Condition (B.S.C.), no capítulo 3 em domínios cuja fronteira possui curvatura média não negativa e finalmente no capítulo 4 com dado contínuo.

Em todas estas etapas analisamos o problema de existência e unicidade de solução do referido problema, procurando tornar as ideias o mais claro possível.

xxx-xxx

1 - PROBLEMA DE PLATEAU COM DADO LIPSCHITZIANO

Fixado um contorno Γ (uma curva simples e fechada) encontrar uma superfície S que tenha Γ como fronteira e "minimiza" a área na classe das superfícies que têm bordo Γ . Este é o Problema de Plateau Clássico.

Se se impõe que Γ e S sejam cartesianos (i. e: Γ e S são gráficos de funções), tem-se o problema de Plateau não paramétrico (ou cartesiano) que se pode enunciar mais exatamente como:

Problema de Plateau não-paramétrico

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado e $\gamma: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Encontrar uma função contínua $u: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

- a) $u = \gamma$ sobre $\partial\Omega$,
- b) u minimiza a "área" entre todas as funções contínuas que assumem o valor γ sobre $\partial\Omega$.

Como área de $u(x)$ se entende a área de Lebesgue da superfície

$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1}, x \in \bar{\Omega}, y = u(x)\}$, que é definida por:

$$a(u) = \inf \left\{ \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla u_n|^2} \, dx, u_n \in \text{Lip}(\bar{\Omega}), \right.$$

$u_n \rightarrow u$ uniformemente em $\bar{\Omega}$ }, onde $u_n = \text{grad } u_n$.

A área de $a(u)$ é um funcional sobre $C^0(\bar{\Omega})$ que pode valer também $+\infty$.

Notações: $a(u)$, $|\text{graf}_{\Omega}(u)|$ que se lê área do gráfico de u ou medida do gráfico de u . Daqui por diante diremos apenas área de u em vez de área do gráfico de u .

E notaremos $u_n \rightarrow u$ uniformemente em Ω por $u_n \rightrightarrows u$ em Ω . Ainda, $\text{Lip}(\bar{\Omega})$ denota a classe das funções Lipschitzianas definidas em $\bar{\Omega}$ e $C_0^1(\Omega)$ as funções de classe C^1 e suporte compacto em Ω .

PROPOSIÇÃO 1.1 - Se $u \in \text{Lip}(\bar{\Omega})$, então $a(u) = \int_{\Omega} \sqrt{1 + |Du|^2} dx$.

Para a demonstração desse fato necessitamos de alguns resultados preliminares.

LEMA 1.2 - Se $u \in \text{Lip}(\bar{\Omega})$, então

$$\int_{\Omega} \sqrt{1 + |Du|^2} dx = \sup_g \left\{ \int_{\Omega} \left(g_0 + \sum_{i=1}^n g_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) dx, \quad g_i \in C_0^1(\Omega); \right.$$

$$\left. i = 0, 1, \dots, n, \quad |g(x)| \leq 1, \quad \forall x \right\}.$$

Prova (A): Provemos primeiramente que

$$\int_{\Omega} \sqrt{1 + |Du|^2} dx \geq \int_{\Omega} \left(g_0 + \sum_{i=1}^n g_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) dx.$$

Seja $g = (g_0, g_1, \dots, g_n)$ uma função qualquer com $|g(x)| \leq 1, \forall x$ e $g_i \in C_0^1(\Omega)$.

Desse modo

$$\begin{aligned} g_0 + \sum_{i=1}^n g_i \frac{\partial u}{\partial x_i} &= g_0 \cdot 1 + g_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + \dots + g_n \frac{\partial u}{\partial x_n} = \\ &= (g_0, g_1, \dots, g_n) \cdot (1, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}) \leq \\ &\leq \sqrt{g_0^2 + \dots + g_n^2} \sqrt{1 + (\frac{\partial u}{\partial x_1})^2 + \dots + (\frac{\partial u}{\partial x_n})^2} \leq \sqrt{1 + |\nabla u|^2} . \end{aligned}$$

Integrando sobre Ω , temos:

$$\int_{\Omega} (g_0 + \sum_{i=1}^n g_i \frac{\partial u}{\partial x_i}) dx \leq \int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla u|^2} dx .$$

(B): Resta provarmos que a desigualdade não se verifica, o mesmo que provar que:

$\forall \varepsilon > 0, \exists g_{0,\varepsilon}, g_{1,\varepsilon}, \dots, g_{n,\varepsilon}$ tal que

$$\int_{\Omega} (g_{0,\varepsilon} + \sum_{i=1}^n g_{i,\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial x_i}) dx > \int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla u|^2} dx - \varepsilon .$$

Uma maneira de se considerar os $\tilde{g}_i$ seria:

$$\tilde{g}_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}}, \quad \tilde{g}_1 = \frac{\frac{\partial u}{\partial x_1}}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}}, \quad \dots, \quad \tilde{g}_n = \frac{\frac{\partial u}{\partial x_n}}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}}$$

e

$$|\tilde{g}| = \frac{1 + |\nabla u|^2}{(\sqrt{1 + |\nabla u|^2})^2} = 1 .$$

temos

$$\tilde{g}_0 + \tilde{g}_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + \dots + \tilde{g}_n \frac{\partial u}{\partial x_n} = \frac{1 + |\nabla u|^2}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} = \sqrt{1 + |\nabla u|^2},$$

entretanto esta escolha não é aceitável uma vez que os $\tilde{g}_i \notin C_0^1(\Omega)$.

Com tal escolha dos $\tilde{g}_i$ temos

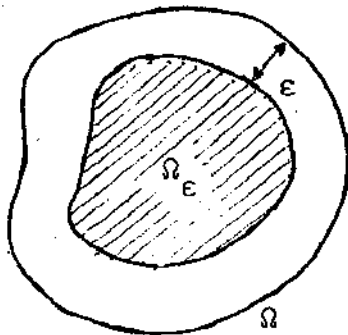
$$\int_{\Omega} (\tilde{g}_0 + \sum_{i=1}^n \tilde{g}_i \frac{\partial u}{\partial x_i}) dx = \int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla u|^2} dx \quad (1)$$

Devemos agora regularizar as funções $\tilde{g}_i$; para isso consideremos

$\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega: d(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$ e funções ψ_ε ,

$\psi_\varepsilon \in C_0^1(\Omega)$ que vale 1 sobre Ω_ε e $0 \leq \psi_\varepsilon \leq 1$ em Ω .

As funções $\tilde{g}_0 \psi_\varepsilon, \tilde{g}_1 \psi_\varepsilon, \dots, \tilde{g}_n \psi_\varepsilon$ têm suporte compacto.



Então

$$\int_{\Omega} \psi_\varepsilon (\tilde{g}_0 + \tilde{g}_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + \dots + \tilde{g}_n \frac{\partial u}{\partial x_n}) dx \stackrel{(1)}{=} \int_{\Omega} \psi_\varepsilon \sqrt{1 + |\nabla u|^2} dx.$$

$$\text{Ainda } \int_{\Omega} \psi_\varepsilon \sqrt{1 + |\nabla u|^2} dx \geq \int_{\Omega_\varepsilon} \sqrt{1 + |\nabla u|^2} dx \quad (2)$$

$$\text{e } \int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla u|^2} dx \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla u|^2} dx.$$

Mas ainda as funções $\tilde{g}_i \psi_\epsilon$ não são de classe C^1 . A etapa final é substituir as funções $\tilde{g}_i \psi_\epsilon$ que são $L^1_0(\Omega)$ (funções integráveis com suporte compacto em Ω), por funções $g_{i,\epsilon} \in C^1_0(\Omega)$, satisfazendo:

$$a) \quad \sum_{i=1}^u g_{i,\epsilon}^2 \leq 1$$

$$b) \quad \int_{\Omega} |g_{i,\epsilon} - \tilde{g}_i \psi_\epsilon| dx < \epsilon, \quad \forall i \quad (1)$$

$$\text{Cálculo final: } \int_{\Omega} (g_{0,\epsilon} + g_{1,\epsilon} \frac{\partial u}{\partial x_1} + \dots + g_{n,\epsilon} \frac{\partial u}{\partial x_n}) dx =$$

$$= \int_{\Omega} (\tilde{g}_0 \psi_\epsilon + \tilde{g}_1 \psi_\epsilon \frac{\partial u}{\partial x_1} + \dots + \tilde{g}_n \psi_\epsilon \frac{\partial u}{\partial x_n}) dx +$$

$$+ \int_{\Omega} [(g_{0,\epsilon} - \tilde{g}_0 \psi_\epsilon) + (g_{1,\epsilon} - \tilde{g}_1 \psi_\epsilon) \frac{\partial u}{\partial x_1} + \dots + (g_{n,\epsilon} - \tilde{g}_n \psi_\epsilon) \frac{\partial u}{\partial x_n}] dx$$

agora,

$$\left| \int_{\Omega} [(g_{0,\epsilon} - \tilde{g}_0 \psi_\epsilon) + (g_{1,\epsilon} - \tilde{g}_1 \psi_\epsilon) \frac{\partial u}{\partial x_1} + \dots + (g_{n,\epsilon} - \tilde{g}_n \psi_\epsilon) \frac{\partial u}{\partial x_n}] dx \right| \leq$$

(1) Se $f \in L^1_0(\Omega)$, então existe $f_h \in C^1_0(\Omega)$, tal que

$$\int_{\Omega} |f_h - f| dx \rightarrow 0$$

cf. teor. 2.6, p. 5.7 de [3]

$$\leq \int_{\Omega} [|g_{0,\varepsilon} - \tilde{g}_0 \psi_{\varepsilon}| + |g_{1,\varepsilon} - \tilde{g}_1 \psi_{\varepsilon}| + \dots + |g_{n,\varepsilon} - \tilde{g}_n \psi_{\varepsilon}|] dx \quad (L+1) \leq$$

$$\leq (u+1) \varepsilon \quad (L+1).$$

E finalmente quando $\varepsilon \rightarrow 0$, temos

$$\int_{\Omega} (g_{0,\varepsilon} + g_{1,\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial x_1} + \dots + g_{n,\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial x_n}) dx =$$

$$= \int_{\Omega} \psi_{\varepsilon} (\tilde{g}_0 + \tilde{g}_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + \dots + \tilde{g}_n \frac{\partial u}{\partial x_n}) dx \stackrel{(2)}{\geq} \int_{\Omega_{\varepsilon}} \sqrt{1+|\nabla u|^2} dx$$

Portanto

$$\int_{\Omega} (g_{0,\varepsilon} + g_{1,\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial x_1} + \dots + g_{n,\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial x_n}) dx > \int_{\Omega} \sqrt{1+|\nabla u|^2} dx - \varepsilon$$

Logo de (A) e (B) temos

$$\int_{\Omega} \sqrt{1+|\nabla u|^2} dx = \sup_g \int_{\Omega} (g_0 + \sum_{i=1}^n g_i \frac{\partial u}{\partial x_i}) dx .$$

C.Q.D.

PROVA DA PROPOSIÇÃO 1.1

Seja $u_h \in \text{Lip}(\tilde{\Omega})$ com $u_h \rightarrow u$ em Ω .

Tomemos $g = (g_0, g_1, \dots, g_n)$ função qualquer tal que $g_i \in C^1_0(\Omega)$ com $|g(x)| \leq 1, \forall x$. Então,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(g_0 + \sum_{i=1}^n g_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) dx &\stackrel{(2)}{=} \int_{\Omega} \left(g_0 - \sum_{i=1}^n u \frac{\partial g_i}{\partial x_i} \right) dx = \\ &= \lim_{h \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \left(g_0 - \sum_{i=1}^n u_h \frac{\partial g_i}{\partial x_i} \right) dx \leq \\ &\leq \liminf_{h \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla u_h|^2} dx. \end{aligned}$$

Então para qualquer $g = (g_0, g_1, \dots, g_n)$ temos

$$\int_{\Omega} \left(g_0 + \sum_{i=1}^n g_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) dx \leq \liminf_{h \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla u_h|^2} dx$$

Aplicando Sup g ,

$$\sup_g \int_{\Omega} \left(g_0 + \sum_{i=1}^n g_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) dx \leq \liminf_{h \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla u_h|^2} dx$$

e pelo lema 1.2

$$\int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla u|^2} dx \leq \liminf_{h \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla u_h|^2} dx.$$

② Teorema de Green:

$$\int_{\Omega} f \frac{\partial g}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} g \frac{\partial f}{\partial x_i} dx \iff \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} (f \cdot g) dx = 0$$

(a condição necessária para esse teorema é que f ou g tenham suporte compacto em Ω).

Portanto

$$\int_{\Omega} \sqrt{1+|\nabla u|^2} dx \leq a(u)$$

Seja agora $u_h = u$, $u_h \not\rightarrow u$ em Ω , então

$$\liminf_{h \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \sqrt{1+|\nabla u_h|^2} dx = \int_{\Omega} \sqrt{1+|\nabla u|^2} dx$$

Portanto

$$\int_{\Omega} \sqrt{1+|\nabla u|^2} dx \geq a(u)$$

Donde concluímos que

$$a(u) = \int_{\Omega} \sqrt{1+|\nabla u|^2} dx \text{ quando } u \in \text{Lip}(\bar{\Omega}).$$

C.Q.D.

PROPOSIÇÃO 1.3 - Seja $u \in \text{Lip}(\bar{\Omega})$, $u_n \in \text{Lip}(\bar{\Omega})$ com $u_n \not\rightarrow u$ em Ω . Então o funcional da área $a(u)$ é semicontínuo inferiormente em relação à convergência uniforme, isto é, Se $u_n \not\rightarrow u$ em Ω , então $a(u) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} a(u_n)$.

PROVA: Devido a compacidade de $\bar{\Omega}$, para cada n fixado, existe uma sequência $u_k^{(n)} \in \text{Lip}(\bar{\Omega})$, tal que $u_k^{(n)} \rightarrow u_n$.

E pela definição de ínfimo:

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla u_k^{(n)}|^2} < a(u_n) + \frac{1}{n} \quad (1)$$

Pela convergência uniforme, temos:

dado $\varepsilon = \frac{1}{n}$, existe $v_n \in \mathbb{N}$, tal que

$$\|u_k^{(n)} - u_n\|_{\zeta} < \frac{1}{n}, \quad \forall k > v_n \quad (2)$$

E usando a definição de limite inferior:

$$\text{existe } \bar{k}_n > v_n, \text{ tal que } \int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla u_{\bar{k}_n}^{(n)}|^2} dx < a(u_n) + \frac{1}{n} \quad (3)$$

Fazendo

$$\gamma_n = u_{\bar{k}_n}^{(n)}, \text{ resulta}$$

$$\begin{aligned} \|\gamma_n - u\| &\leq \|\gamma_n - u_n\| + \|u_n - u\| \stackrel{(2)}{<} \frac{1}{n} + \\ &+ \|u_n - u\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Portanto $\|\gamma_n - u\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, ou seja $\gamma_n \rightarrow u$.

Assim

$$a(u) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla \gamma_n|^2} \stackrel{(3)}{\leq} \liminf_{n \rightarrow \infty} (a(u_n) + \frac{1}{n})$$

Portanto $a(u) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} a(u_n)$

C.Q.D.

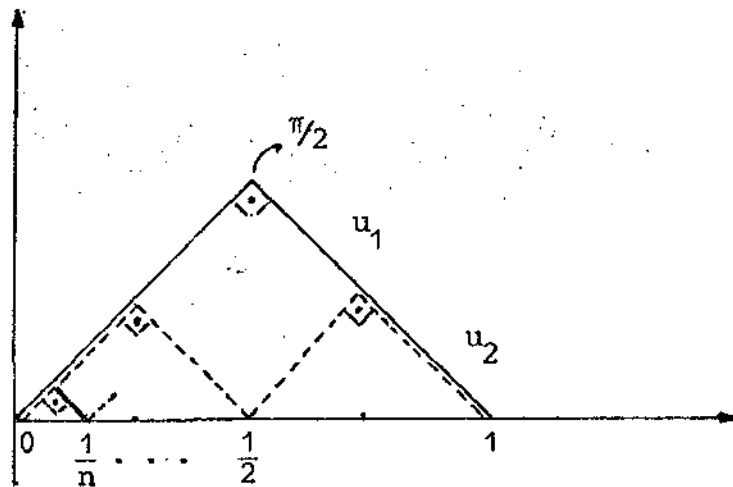
Observação - Podemos ter casos onde a desigualdade se verifica.

Exemplo 1:

Seja u a função identicamente nula em $[0,1]$ e seja u_n a sequência definida em $[0,1]$ pela expressão:

$$u_n(x) = \begin{cases} x - \frac{k}{n}, & \text{se } \frac{k}{n} \leq x \leq \frac{k+1/2}{n} \\ \frac{k+1}{n} - x, & \text{se } \frac{k+1/2}{n} \leq x \leq \frac{k+1}{n} \end{cases}$$

com $k = 0, 1, \dots, n-1$.



Nesse exemplo observamos que $u_n \rightarrow u \equiv 0$ em $[0,1]$ com $u_n(x) \geq 0, \forall x$.

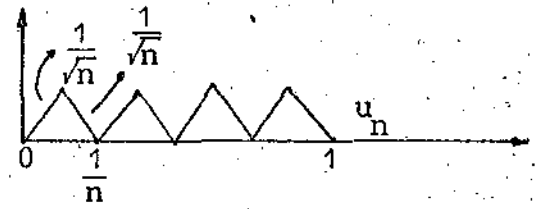
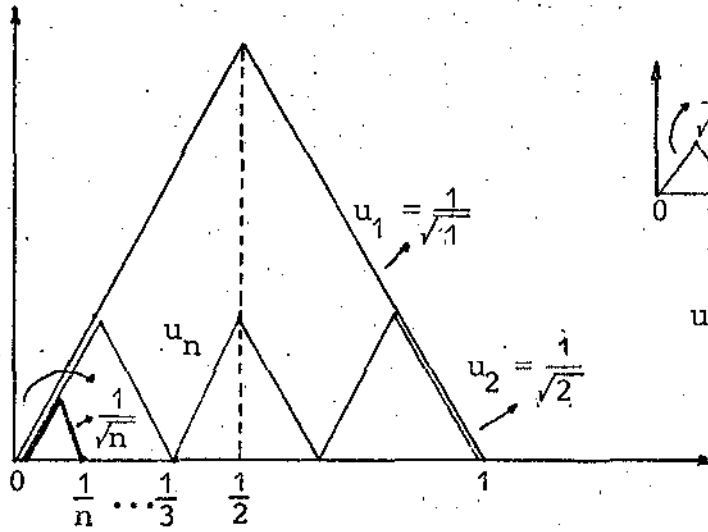
Ainda $a(u_n) = \sqrt{2}, \forall n$ e $a(u) = 1$

Portanto $a(u) = 1 < \sqrt{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} a(u_n)$

Exemplo 2:

Seja u_n a sequência definida em $[0,1]$ como na figura abaixo

e $u \equiv 0$ em $[0,1]$.



$u_n \rightrightarrows 0 \equiv u$ em $[0,1]$

$$a(u_n) = n \frac{2}{\sqrt{n}} = 2\sqrt{n}$$

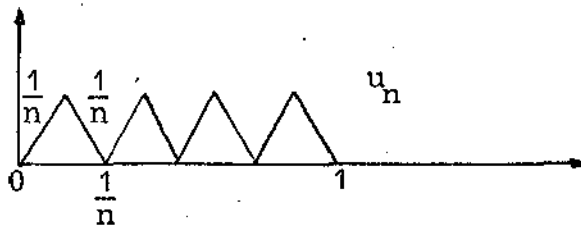
$$a(u_n) = \sqrt{2} n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$$

$$a(u) = 1$$

Portanto $a(u) = 1 < +\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} a(u_n)$

Exemplo 3:

Seja u_n a sequência definida em $[0,1]$ como figura abaixo e $u \equiv 0$ em $[0,1]$.



$u_n \rightrightarrows 0 \equiv u$ em $[0,1]$

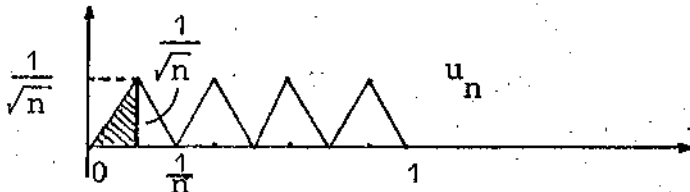
$$a(u_n) = n \frac{2}{n} = 2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2$$

$$a(u) = 1$$

Portanto $a(u) = 1 < 2 = \lim_{n \rightarrow \infty} a(u_n)$

Exemplo 4;

Seja u_n a sequência definida em $[0,1]$ como figura abaixo e $u \equiv 0$ em $[0,1]$.



$$u_n \not\equiv 0 \equiv u \text{ em } [0,1]$$

$$a(u_n) = \sqrt{4n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$$

$$a(u) = 1$$

$$\text{Portanto } a(u) = 1 < +\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} a(u_n)$$

Portanto o funcional $a(u) = \int_{\Omega} \sqrt{1+|\nabla u|^2} dx$ não é contínuo.

DEFINIÇÃO - Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado. Seja $C^0(\bar{\Omega})$ o espaço de Banach das funções contínuas em $\bar{\Omega}$ com a norma usual

$$(\|f\| = \sup_{x \in \bar{\Omega}} |f(x)|), \text{ e}$$

$\text{Lip}(\bar{\Omega})$ a classe das funções Lipschitzianas sobre $\bar{\Omega}$. Indicamos com $|u|_1$ a seminorma:

$$|u|_1 = \sup_{\substack{x, y \in \bar{\Omega} \\ x \neq y}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|}$$

e com $\text{Lip}_K(\bar{\Omega}) = \{u \in \text{Lip}(\bar{\Omega}) : |u|_1 \leq K\}$

DEFINIÇÃO - Dada a função $\gamma: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ dizemos que $\gamma \in \text{Lip}(\partial\Omega)$ se, e somente se, existe $f \in \text{Lip}(\bar{\Omega})$, tal que $f|_{\partial\Omega} = \gamma$.

OBSERVAÇÃO - Quando Ω é convexo tal extensão existe.

Indicamos com

$$K_\gamma = \inf_f \{ \|f\|_1 : f \in \text{Lip}(\bar{\Omega}), f|_{\partial\Omega} = \gamma \}.$$

A semicontinuidade inferior do funcional área a é o Teorema de Arzela Ascoli nos permite enunciar o primeiro teorema para o problema de Plateau não paramétrico.

TEOREMA 1.4 - (Primeiro teorema de existência)

Para toda função $\gamma \in \text{Lip}(\partial\Omega)$ e para todo $K > K_\gamma$, existe uma função $u_0 \in \text{Lip}_K(\bar{\Omega})$ que minimiza o funcional área na classe

$$L_K = \{w \in \text{Lip}_K(\bar{\Omega}) : w = \gamma \text{ sobre } \partial\Omega\}$$

PROVA - Seja $m = \inf\{a(u), u \in L_K\}$.

(Observe que m sempre existe, pois $a(u)$ é um conjunto de números positivos e todo conjunto de números positivos admite ínfimo. E pela estrita convexidade do funcional área^③ pode-se afir-

③ Funcional da área é estritamente convexo, i.e.,

$\forall u, v \in \text{Lip}(\bar{\Omega})$, temos

$a[\lambda u + (1-\lambda)v] < \lambda a(u) + (1-\lambda) a(v), \forall \lambda \in [0,1]$.

(mostrado mais adiante)

mar que o mínimo é único).

Portanto $L_K \neq \emptyset$.

Seja u_n sequência minimizante, isto é, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a(u_n) = m$, $u_n \in L_K$.

Então $u_n \in \text{Lip}_K(\bar{\Omega})$, i.e., $|u_n|_1 \leq K$,

$$\sup_{\substack{x, y \in \bar{\Omega} \\ x \neq y}} \frac{|u_n(x) - u_n(y)|}{|x - y|} \leq K, \text{ ou seja,}$$

$$|u_n(x) - u_n(y)| \leq K|x - y| \quad (1)$$

Logo u_n é equicontínua em $\bar{\Omega}$ ④

Basta provar que $|u_n(x)| \leq M$, $\forall n$, $x \in \bar{\Omega}$, i.e., mostrar que u_n é uma sequência equilimitada.

Suponhamos:

a) Se $x \in \partial\Omega$, nesse caso temos

$$|u_n(x)| = |\gamma(x)| \leq M, \forall n$$

b) Se $x \in \Omega$, consideremos $x_0 \in \partial\Omega$

$$(u_n(x_0) = \gamma(x_0), \text{ pois } x_0 \in \partial\Omega)$$

$$|u_n(x) - u_n(x_0)| = |u_n(x) - \gamma(x_0)| \stackrel{(1)}{\leq} K|x - x_0|$$

$$\text{Portanto } |u_n(x)| - |\gamma(x_0)| \leq |u_n(x) - \gamma(x_0)| \leq K|x - x_0|.$$

④ Seja $u_n: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ sequência de funções, dizamos que u_n é equicontínua se, e somente se,

$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0: |x - y| < \delta, x, y \in \bar{\Omega} \Rightarrow |u_n(x) - u_n(y)| < \epsilon, \forall n \in \mathbb{N}$

$$|u_n(x)| \leq |\gamma(x_0)| + K |x-x_0|$$

Seja $M = |\gamma(x_0)| + K|x-x_0|$ que independe de n . Logo,

$$|u_n(x)| \leq M, \forall n.$$

Então de (a) e (b) temos que

$$|u_n(x)| \leq M, \forall n \text{ e } \forall x \in \bar{\Omega}$$

Portanto pelo teorema de Arzelà - Ascoli^⑤ existe uma subseqüência $\{u_{n_j}\}$ que converge uniformemente a uma função $u_0 \in L_K$, i.e.,

$$u_{n_j} \rightrightarrows u_0 \text{ em } \bar{\Omega}$$

De fato: a) Mostremos que $u_0 \in \text{Lip}_K(\bar{\Omega})$. Como $u_n \in \text{Lip}_K(\bar{\Omega})$, temos que $u_{n_j} \in \text{Lip}_K(\bar{\Omega})$, i.e.,

$$|u_{n_j}(x) - u_{n_j}(y)| \leq K |x-y|$$

Além disso

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} |u_{n_j}(x) - u_{n_j}(y)| \leq \lim_{j \rightarrow +\infty} K |x-y|$$

⑤ Teorema de Arzelà - Ascoli -

Se u_n é uma seqüência de funções definidas num compacto $\bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^n$, aberto e limitado) equicontínuas e equilimitada, então existe uma subsequência que converge uniformemente a uma função contínua.

Donde obtemos

$$|u_0(x) - u_0(y)| \leq K |x-y| ,$$

$$\sup_{\substack{x, y \in \bar{\Omega} \\ x \neq y}} \frac{|u_0(x) - u_0(y)|}{|x - y|} \leq K .$$

Portanto $|u_0|_1 \leq K$, logo $u_0 \in \text{Lip}_K(\bar{\Omega})$

b) Agora $u_0|_{\partial\Omega} = \gamma$, pois:

Como $u_n \rightharpoonup u_0$ ($u_0 \in \text{Lip}_K(\bar{\Omega})$), então $\forall x \in \partial\Omega$, temos que $u_0 = \gamma$ em $\partial\Omega$.

Pela Semicontinuidade inferior do funcional área, vem

$$a(u_0) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} a(u_n) = m,$$

$$a(u_0) \leq m .$$

Portanto $a(u_0) = m$

C.Q.D.

OBSERVAÇÕES:

Para o ponto de mínimo $u_0 \in L_K$ pode-se apresentar 2 casos:

- 1) Se $|u_0| = K$, então u_0 seria um ponto de mínimo em $\text{Lip}_K(\bar{\Omega})$.
- 2) Se $|u_0| < K$, então u_0 seria um ponto de mínimo em $\text{Lip}(\bar{\Omega})$.

PROVA DO 2º CASO - Seja $v \in \text{Lip}(\bar{\Omega})$ qualquer, tal que $v = \gamma$ sobre $\partial\Omega$.

Devemos provar que $a(u_0) \leq a(v)$.

Seja a função ψ_t definida por:

$$\psi_t = u_0 + t(v - u_0) \text{ para } t \in [0, 1]$$

Temos que $\psi_t \in \text{Lip}(\bar{\Omega})$. Notemos ψ_t por ψ , i. é., $\psi_t = \psi$.

Assim

$$\begin{aligned} \frac{\psi(x) - \psi(y)}{x-y} &= \frac{u_0(x) + t(v(x) - u_0(x))}{x-y} - \\ &\quad - \frac{u_0(y) + t(v(y) - u_0(y))}{x-y} = \\ &= (1-t) \frac{u_0(x) - u_0(y)}{x-y} + t \frac{v(x) - v(y)}{x-y} \end{aligned}$$

Tomando agora $|\psi|_1$, vem:

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{x, y \in \bar{\Omega} \\ x \neq y}} \left| \frac{\psi(x) - \psi(y)}{x-y} \right| &\leq (1-t) \sup_{\substack{x, y \in \bar{\Omega} \\ x \neq y}} \left| \frac{u_0(x) - u_0(y)}{x-y} \right| + \\ &\quad + t \sup_{\substack{x, y \in \bar{\Omega} \\ x \neq y}} \left| \frac{v(x) - v(y)}{x-y} \right| \end{aligned}$$

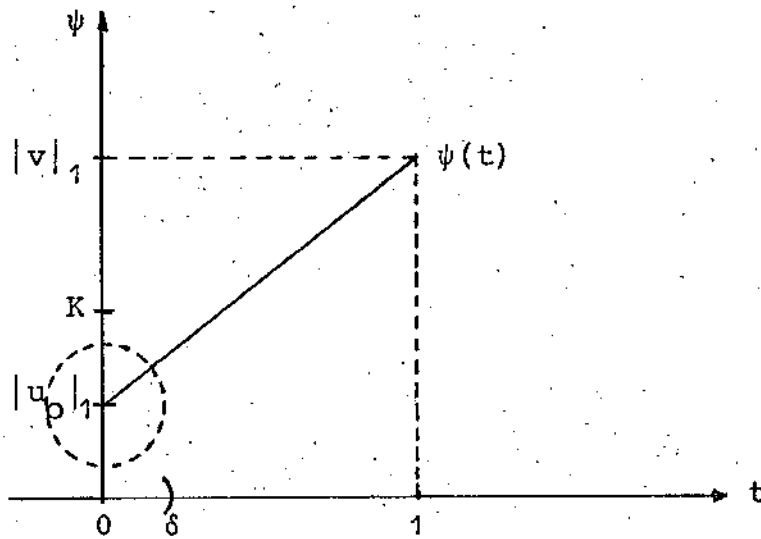
Portanto $|\psi|_1 \leq (1-t) |u_0|_1 + t |v|_1$ é um segmento de reta.

Ou seja

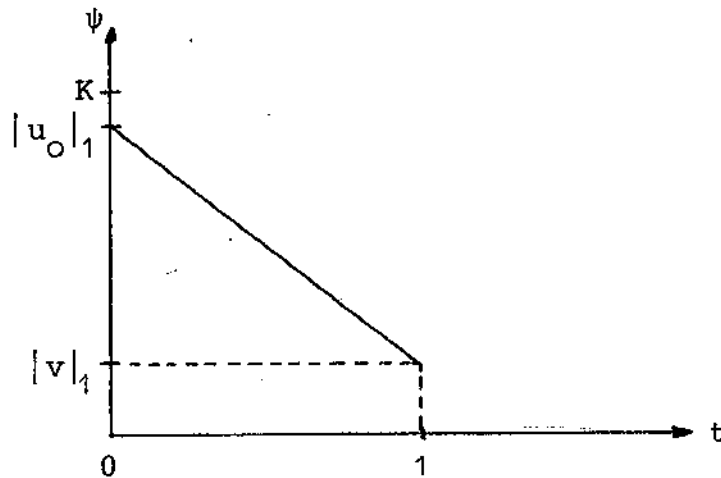
$$|\psi|_1 \leq (|v|_1 - |u_0|_1)t + |u_0|_1$$

Por hipótese $|u_0|_1 \leq K$.

Se $|v|_1 > |u_0|_1$, então existe $\delta > 0$, tal que se $|t| \leq \delta$ temos $|\psi|_1 < K$.



Se $|u_0|_1 > |v|_1$, então $|\psi|_1 < K, \forall t \in [0, 1]$.



Analisemos ψ sobre $\partial\Omega$.

$$\psi = u_0 + t(v - u_0) \text{ para } t \in [0, 1]$$

$a(u_0)$ = mínimo na classe $\text{Lip}_K(\bar{\Omega})$.

$$\psi|_{\partial\Omega} = u_0|_{\partial\Omega} + t(v|_{\partial\Omega} - u_0|_{\partial\Omega})$$

$$\psi|_{\partial\Omega} = \gamma + t(\gamma - \gamma)$$

$$\psi|_{\partial\Omega} = \gamma = u_0|_{\partial\Omega}$$

Portanto $a(u_0) \leq a(\psi) = a(u_0 + t(v - u_0))$, $\forall t, |t| \leq \delta$.

Logo temos um mínimo local em $a(u_0)$, i.e., u_0 é um mínimo local em $\text{Lip}(\bar{\Omega})$.

C.Q.D.

Mostraremos também que $a(u_0)$ é mínimo global.

Em seguida mostraremos que se $u \in \text{Lip}(\bar{\Omega})$, então

$a(u) = \int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla u|^2} \, dx$ é um funcional *estritamente convexo*, isto é,

$\forall u, v \in \text{Lip}(\bar{\Omega})$, temos:

$$a[\lambda u + (1-\lambda)v] < \lambda a(u) + (1-\lambda)a(v), \quad \forall \lambda \in [0, 1];$$

ou equivalente quando

$$\frac{d^2}{dt^2} a(\psi_t) > 0, \quad \forall t \in [0, 1]$$

OBSERVAÇÃO: Se u é superfície de área mínima e $u \in \text{Lip}(\bar{\Omega})$, então $u \in C^2(\Omega)$ ⑥

Usando este resultado mostraremos a seguinte proposição.

PROPOSIÇÃO 1.5 - Se $u \in \text{Lip}(\bar{\Omega})$, u é superfície de área mínima se, e somente se,

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\frac{\partial u}{\partial x_i}}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} \right) = 0.$$

PROVA - Seja $v \in \text{Lip}(\bar{\Omega})$ qualquer com $u \neq v$ em Ω e $u = v$ em $\partial\Omega$.

Definamos a função

$$\psi_t = u + t(v-u) \text{ para } t \in [0,1]$$

Portanto $\psi_t \in \text{Lip}(\bar{\Omega})$ e

$$a(\psi_t) = \int_{\Omega} \sqrt{1+|\nabla[u+t(v-u)]|^2} dx.$$

Observe que quando $t = 0$ temos $\psi_0 = u$.

E ainda $\frac{d}{dt} a(\psi_t) \Big|_{t=0} = 0$.

De fato:

$$a(\psi_t) = \int_{\Omega} \sqrt{1 + \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial}{\partial x_i} (u + t(v-u)) \right]^2} dx$$

⑥ Prova de tal observação é não trivial, fugindo do objetivo de nosso texto.
cf. teor. 5.1, p. 2.14 de [3].

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} a(\psi_t) &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \sqrt{1 + \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial}{\partial x_i} (u+t(v-u)) \right]^2} dx = \\
 &= \int_{\Omega} \frac{d}{dt} \sqrt{1 + \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial}{\partial x_i} (u+t(v-u)) \right]^2} dx = \\
 &= \int_{\Omega} \frac{d}{dt} \sqrt{1 + \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (u+t(v-u)) \right]^2 + \dots + \left[\frac{\partial}{\partial x_n} (u+t(v-u)) \right]^2} dx = \\
 &= \int_{\Omega} \frac{\frac{\partial}{\partial x_1} (u+t(v-u)) \frac{\partial}{\partial x_1} (v-u) + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} (u+t(v-u)) \frac{\partial}{\partial x_n} (v-u)}{\sqrt{1 + \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial}{\partial x_i} (u+t(v-u)) \right]^2}} dx = \\
 &= \int_{\Omega} \frac{\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (u+t(v-u)) \frac{\partial}{\partial x_i} (v-u)}{\sqrt{1 + \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial}{\partial x_i} (u+t(v-u)) \right]^2}} dx .
 \end{aligned}$$

Para $t = 0$, temos

$$\frac{d}{dt} a(\psi_t) \Big|_{t=0} = \int_{\Omega} \frac{\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} u \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} (v-u)}{\sqrt{1 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^2}} dx$$

= 0 pois $v = u$ em $\partial\Omega$ e $v \neq u$ em Ω . ⁽⁷⁾

Integrando por partes (para $i = 1, 2, \dots, n$) e depois somando, temos:

$$\int_{\Omega} \frac{\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} u \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} (v-u)}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} dx = - \int_{\Omega} (v-u) \sum_{i=1}^n \left(\frac{\frac{\partial u}{\partial x_i}}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) dx = 0,$$

para toda $v \in \text{Lip}(\bar{\Omega})$, $v \neq u$ em Ω e $v = u$ sobre $\partial\Omega$.

(7) a) Teorema de Gauss -

Seja $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$ n-funções $\phi_i: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto.

Então

$$\int_{\Omega} \text{div } \phi \, dx = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \frac{\partial \phi_i}{\partial x_i} \, dx = \int_{\partial\Omega} \phi \cdot v \, dH_{n-1}$$

onde v = vetor normal exterior.

b) com H_n se indica a medida de Hausdorff n-dimensional definida por:

$$H_n(F) = 2^{-n} w_n \lim_{\rho \rightarrow 0} \inf \left(\sum_{h=1}^{\infty} (\text{diam } F_h)^n \right); \quad \bigcup_{h=1}^{\infty} F_h \supset F \text{ e } \text{diam } F_h < \rho$$

No caso d H_{n-1} é o elemento de superfície sobre $\partial\Omega$.

c) w_n = medida de esfera unitária em $\mathbb{R}^n$ (conf. rodapé (10)).

Portanto

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\frac{\partial u}{\partial x_i}}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} \right) = 0, \quad \forall x \in \Omega.$$

Para outro lado suponhamos $\sum_{i=1}^n \left(\frac{\frac{\partial u}{\partial x_i}}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} \right) = 0, \quad \forall x \in \Omega.$

É claro que $\frac{d}{dt} a(\psi_t) \Big|_{t=0} = 0$

De fato:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} a(\psi_t) \Big|_{t=0} &= \int_{\Omega} \frac{\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} u \frac{\partial}{\partial x_i} (v-u)}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} dx = \\ &= - \int_{\Omega} (v-u) \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\frac{\partial u}{\partial x_i}}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} \right) dx = 0. \end{aligned}$$

Calculemos agora $\frac{d^2}{dt^2} a(\psi_t)$, sabendo que

$$\frac{d}{dt} a(\psi_t) = \int_{\Omega} \frac{\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (u+t(v-u)) \frac{\partial}{\partial x_i} (v-u)}{\sqrt{1 + \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial}{\partial x_i} (u+t(v-u)) \right]^2}}$$

Então

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2}{dt^2} a(\psi_t) &= \int_{\Omega} \frac{\frac{d}{dt} \left[\frac{\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (u+t(v-u)) \frac{\partial}{\partial x_i} (v-u)}{\sqrt{1 + \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial}{\partial x_i} (u+t(v-u)) \right]^2}} \right]}{dx} = \\
 &= \int_{\Omega} \frac{\left[\left(\frac{\partial}{\partial x_1} (v-u) \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial}{\partial x_n} (v-u) \right)^2 \right] \sqrt{1 + |\nabla(u+t(v-u))|^2} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (u+t(v-u)) \frac{\partial}{\partial x_i} (v-u) \frac{d}{dt} a(\psi_t)}{1 + |\nabla(u+t(v-u))|^2} dx = \\
 &= \int_{\Omega} \frac{\sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial}{\partial x_i} (v-u) \right]^2 \sqrt{1 + |\nabla(u+t(v-u))|^2} - \frac{\left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (u+t(v-u)) \frac{\partial}{\partial x_i} (v-u) \right]^2}{\sqrt{1 + |\nabla(u+t(v-u))|^2}}}{1 + |\nabla(u+t(v-u))|^2} dx = \\
 &= \int_{\Omega} \frac{\left[1 + |\nabla(u+t(v-u))|^2 \right] \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_i} (v-u) \right)^2 - \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (u+t(v-u)) \frac{\partial}{\partial x_i} (v-u) \right]^2}{\left[1 + |\nabla(u+t(v-u))|^2 \right]^{3/2}} dx
 \end{aligned}$$

E teremos $\frac{d^2}{dt^2} a(\psi_t) =$

$$\int_{\Omega} \frac{\left\{ 1 + \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial}{\partial x_i} (u+t(v-u)) \right]^2 \right\} \cdot \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_i} (v-u) \right)^2 - \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (u+t(v-u)) \frac{\partial}{\partial x_i} (v-u) \right]^2}{\left\{ 1 + \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial}{\partial x_i} (u+t(v-u)) \right]^2 \right\}^{3/2}} dx$$

Sabemos que

$$\begin{aligned} & \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (u+t(v-u)) \frac{\partial}{\partial x_i} (v-u) \right]^2 \leq \quad (8) \\ & \leq \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_i} (u+t(v-u)) \right)^2 - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_i} (v-u) \right)^2 \end{aligned}$$

Portanto usando o resultado acima, temos:

$$\frac{d^2}{dt^2} a(\psi_t) \geq \int_{\Omega} \frac{\sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial}{\partial x_i} (v-u) \right]^2}{\left\{ 1 + \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial}{\partial x_i} (u+t(v-u)) \right]^2 \right\}^{3/2}} dx > 0$$

pois $v-u \neq 0$ em Ω .

Logo u é superfície de área mínima.

C.Q.D.

E como consequência imediata de

$$\frac{d^2}{dt^2} a(\psi_t) > 0, \quad \forall t \in [0,1] \text{ mostramos que o funcional área é}$$

estritamente convexo.

⑧ Desigualdade de Schwartz -

Se $x, y \in \mathbb{R}^n$, então $x \cdot y \leq \|x\| \cdot \|y\|$.

Além disso, se $x \neq y$ ou $x \neq 0$ e $y \neq 0$, então a igualdade ocorre se, e somente se, existe $c \in \mathbb{R}^+$, tal que $x = cy$.

$$\text{A equação } \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\frac{\partial u}{\partial x_i}}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} \right) = 0 \quad \text{é}$$

chamada equação das superfícies mínimas ou equação de Euler.

OBSERVAÇÃO - Pela convexidade do funcional área um mínimo local é também mínimo global.

De fato: Seja $u_0 \in \text{Lip}(\bar{\Omega})$ a superfície de área mínima; u_0 é mínimo local.

Queremos mostrar que $a(u_0) \leq a(v)$, para toda $v \in \text{Lip}(\bar{\Omega})$.

Seja $v \in \text{Lip}(\bar{\Omega})$ qualquer, tal que $v = \gamma = u_0$ sobre $\partial\Omega$ e $v \neq u_0$.

Consideremos a função

$$\psi_t = u_0 + t(v - u_0) \text{ para } t \in [0, 1]$$

Vemos que $\psi_1 = v$

$$\psi_0 = u_0$$

e $\psi_t|_{\partial\Omega} = \gamma = u_0|_{\partial\Omega}$ (mostrado anteriormente), i.e., ψ_t tem valores iguais a u_0 em $\partial\Omega$.

Para t próximo de zero, existe $\delta > 0$, tal que $a(\psi_t) \leq a(u_0)$, para todo t , com $|t| \leq \delta$ (já visto).

$$a(\psi_t): [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$t \longmapsto a(\psi_t) = \int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla(u_0 + t(v - u_0))|^2} dx$$

$a(\psi_t)$ é uma função convexa, i.e., $\frac{d}{dt} a(\psi_t)|_{t=0} = 0$ e $\frac{d^2}{dt^2} a(\psi_t) > 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Assim $a(\psi_t) \in C^2([0,1])$ e desenvolvendo por Taylor ^⑨ para $t=1$, existe $\zeta \in (0,1)$ tal que:

$$a(\psi_1) = a(\psi_0) + \frac{d}{dt} a(\psi_t) \Big|_{t=0} \cdot \frac{1}{1!} + \frac{d^2}{dt^2} a(\psi_t) \Big|_{t=\zeta} \cdot \frac{1}{2!}$$

Portanto

$$a(\psi_1) - a(\psi_0) > 0$$

$$a(v) - a(u_0) > 0 \implies a(u_0) < a(v).$$

Logo u_0 é mínimo absoluto

C.Q.D.

Até agora provamos que existe um mínimo global, falta-nos mostrar sua unicidade.

TEOREMA 1.6 - Sejam $u, v \in Lip_K(\bar{\Omega})$ (ou $Lip(\bar{\Omega})$) duas funções minimizantes do funcional área nas classes

$$\{w \in Lip_K(\bar{\Omega}) : w|_{\partial\Omega} = u|_{\partial\Omega} = \gamma_1\}$$

$$\{w \in Lip_K(\bar{\Omega}) : w|_{\partial\Omega} = v|_{\partial\Omega} = \gamma_2\} \text{ respectivamente, Se}$$

$u \leq v$ em $\partial\Omega$ (i.e.: $\gamma_1 \leq \gamma_2$), então $u \leq v$ em $\bar{\Omega}$.

⑨ Teorema de Taylor -

Seja $n \in \mathbb{N}$ e $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ função com derivadas $f', f'', \dots, f^{(n-1)}$ definidas e contínuas em $J = [a,b]$, e $f^{(n)}$ existe em (a,b) .

Se $\alpha, \beta \in J$, então existe γ , γ entre α e β , tal que:

$$f(\beta) = f(\alpha) + \frac{f'(\alpha)}{1!} (\beta-\alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!} (\beta-\alpha)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(\alpha)}{(n-1)!} (\beta-\alpha)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\gamma)}{n!} (\beta-\alpha)^n.$$

PROVA - Seja $a(u) = a(v) = m = \text{mínimo}$.

Suponhamos que o aberto

$$A = \{x \in \Omega: u(x) > v(x)\} \neq \emptyset.$$

Sejam $w_+ = \max\{u, v\}$

e

$$w_- = \min\{u, v\}.$$

Então

$$w_+ \in \text{Lip}_K(\bar{\Omega}), w_+ = v \text{ em } \partial\Omega \text{ e } w_- \in \text{Lip}_K(\bar{\Omega}), w_- = u \text{ em } \partial\Omega$$

Escrevemos $\Omega = A \cup (\Omega - A)$ união disjunta e teremos:

$$a_\Omega(v) \leq a_\Omega(w_+) = a_A(u) + a_{\Omega-A}(v)$$

$$a_\Omega(u) \leq a_\Omega(w_-) = a_A(v) + a_{\Omega-A}(u)$$

Ou ainda

$$a_A(v) + a_{\Omega-A}(v) \leq a_A(u) + a_{\Omega-A}(v) \Rightarrow a_A(v) \leq a_A(u)$$

$$a_A(u) + a_{\Omega-A}(u) \leq a_A(v) + a_{\Omega-A}(u) \Rightarrow a_A(u) \leq a_A(v).$$

Portanto $a_A(u) = a_A(v)$.

Em ∂A temos $u(x) = v(x)$ e se u e v minimizam o funcional da área na classe:

$$L = \{w \in \text{Lip}_K(\bar{A}) : w = u = v \text{ sobre } \partial A\} ,$$

como $u \neq v$ em A e pela estrita convexidade do funcional área, temos

$$a_A\left(\frac{u+v}{2}\right) < \frac{1}{2} a_A(u) + \frac{1}{2} a_A(v) = m ,$$

o que é absurdo, pois $\frac{u+v}{2} \in L$.

Portanto $A = \emptyset$, ou seja, $u \leq v$ em $\bar{\Omega}$.

C.Q.D.

COROLÁRIO 1.7 - (Unicidade do mínimo)

Sejam $u, v \in \text{Lip}_K(\bar{\Omega})$ (ou $\text{Lip}(\bar{\Omega})$) duas funções minimizantes do funcional área nas classes

$$\{w \in \text{Lip}_K(\bar{\Omega}) : w|_{\partial\Omega} = u|_{\partial\Omega} = \gamma_1\}$$

$$\{u \in \text{Lip}_K(\bar{\Omega}) : w|_{\partial\Omega} = v|_{\partial\Omega} = \gamma_2\} \text{ respectivamente.}$$

Então temos:

$$\max_{\bar{\Omega}} |u-v| = \max_{\partial\Omega} |u-v|$$

PROVA - a função $u + \max_{\partial\Omega} |u-v|$ minimiza o funcional área na classe:

$$\{w \in \text{Lip}_K(\bar{\Omega}) : w|_{\partial\Omega} = \gamma_1 + \max_{\partial\Omega} |u-v|\} \text{ e}$$

$$u + \max_{\partial\Omega} |u-v| \geq v \text{ em } \partial\Omega.$$

Portanto pelo teorema 1.6,

como $v-u \leq \max_{\partial\Omega} |u-v|$ em $\partial\Omega$, temos

$$v-u \leq \max_{\partial\Omega} |u-v| \text{ em } \bar{\Omega} \quad (1)$$

Analogamente a função $v + \max_{\partial\Omega} |u-v|$ minimiza o funcional área na classe:

$$\{w \in \text{Lip}_K(\bar{\Omega}) : w|_{\partial\Omega} = \gamma_2 + \max_{\partial\Omega} |u-v|\} \quad e$$

$$v + \max_{\partial\Omega} |u-v| \geq u \text{ em } \partial\Omega.$$

Do mesmo modo pelo teorema 1.6 temos

$$u - v \leq \max_{\partial\Omega} |u-v| \text{ em } \bar{\Omega} \quad (2)$$

Portanto de (1) e (2) obtemos

$$|u-v| \leq \max_{\partial\Omega} |u-v| \text{ em } \bar{\Omega},$$

$$\max_{\bar{\Omega}} |u-v| = \max_{\partial\Omega} |u-v|.$$

C.Q.D.

Do corolário 1.7 se escreve a unicidade da solução do Problema na classe $\text{Lip}(\bar{\Omega})$.

COROLÁRIO 1.8 - (Princípio do Máximo).

Se u minimiza $a(w)$ na classe

$$\{w \in \text{Lip}_K(\bar{\Omega}) \text{ ou } \text{Lip}(\bar{\Omega}): w \equiv u \text{ em } \partial\Omega\}$$

Então
$$\max_{\bar{\Omega}} |u| = \max_{\partial\Omega} |u|$$

Em resumo podemos dizer o seguinte

Se $\gamma \in \text{Lip}(\partial\Omega)$ e $K > K_\gamma$, existe uma única função $u_0 \in \text{Lip}_K(\bar{\Omega})$ que minimiza o funcional área na classe

$$L_K = \{w \in \text{Lip}_K(\bar{\Omega}): w = \gamma \text{ sobre } \partial\Omega\} \quad (\text{teor. 1.4})$$

O Problema de Plateau Cartesiano ou não paramétrico (ou Problema de Dirichlet para equação das superfícies mínimas) pode ser ainda escrito da seguinte forma:

Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado e uma função $g \in C^0(\partial\Omega)$. O Problema é provar a existência e eventualmente a unicidade de uma função $f \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ que satisfaz:

$$(1) \quad \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)}{\sqrt{1 + |\nabla f(x)|^2}} \right) = 0, \quad \forall x \in \Omega.$$

$$(2) \quad f(x) = g(x), \quad \forall x \in \partial\Omega.$$

Tal Problema pode não ter solução mesmo que Ω e g sejam bem "regulares".

Vejamos um exemplo:

$$\text{Sejam } \Omega = \{x \in \mathbb{R}^n: 0 < a < |x| < b < +\infty\} \quad \text{e}$$

$$g(x) = \begin{cases} A = \text{cte}, \forall x, |x| = a \\ B = \text{cte}, \forall x, |x| = b \quad \text{com } A > B (A, B \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

Para tais Ω e g , suponhamos que exista $f \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ satisfazendo (1) e (2). Para tal tem-se o seguinte:

OBSERVAÇÃO 1:

$$(3) \quad |\text{graf}_{\Omega} f| \leq 2(|A| + |B|) b^{n-1} n w_n + b^n w_n < +\infty \quad (10)$$

Para provar a desigualdade (3) notemos antes que:

a) $\max_{\bar{\Omega}} |f| = \max_{\partial\Omega} |f|$, pois f é suposta de área mínima, logo vale o princípio do máximo (corol. 1.8).

$$\max_{\bar{\Omega}} |f| = \max_{\partial\Omega} |f| = \max(|A|, |B|) \leq |A| + |B|$$

b) Para todo $\varepsilon \in (0, \frac{b-a}{2})$ tem-se,

dado $\Omega_{\varepsilon} = \{x \in \mathbb{R}^n; a + \varepsilon < |x| < b - \varepsilon\}$ que $|\text{graf}_{\Omega_{\varepsilon}} f| < +\infty$.

(10) $w_n =$ medida da esfera unitária em $\mathbb{R}^n = \text{med}\{x \in \mathbb{R}^n; |x| \leq 1\}$.

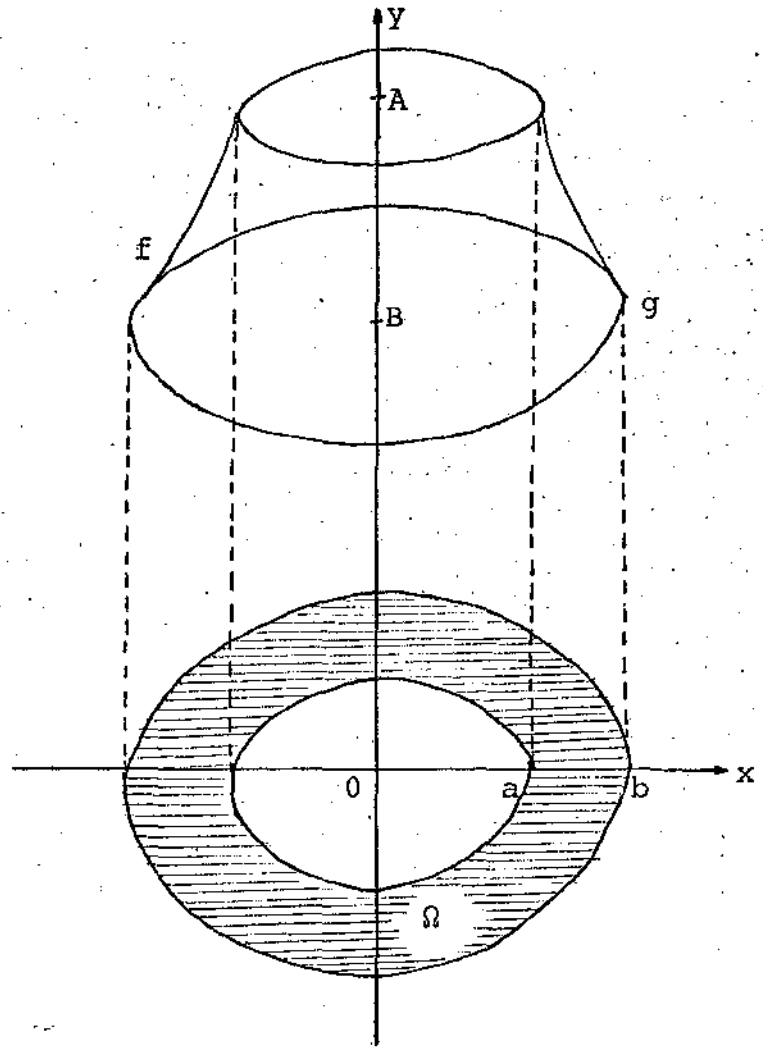
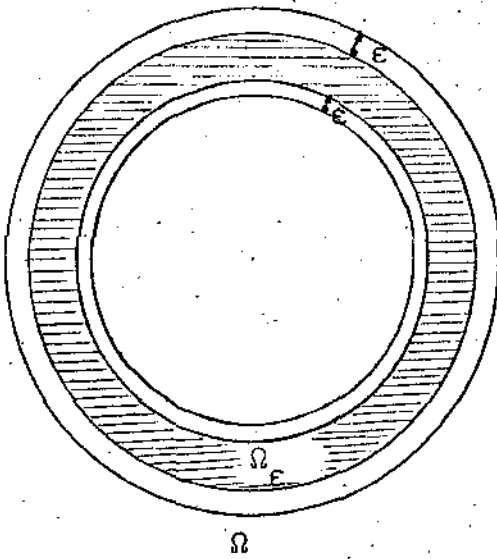
$$n w_n = H_{n-1} \{x \in \mathbb{R}^n; |x| = 1\}$$

$$w_n r^n = \text{med} \{x \in \mathbb{R}^n; |x| \leq r\}$$

$$n w_n r^{n-1} = H_{n-1} \{x \in \mathbb{R}^n; |x| = r\}$$

$$w_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{2 \Gamma(\frac{n}{2})} \quad \text{onde } \Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt.$$

De fato ,



Definamos a função

$$F(t) = |\text{graf}_{\Omega_\epsilon} [f+t(\gamma - f)]| , \text{ onde}$$

γ é finita e limitada, $\gamma = f$ em $\partial\Omega_\epsilon$ $|\text{graf}_{\Omega_\epsilon} \gamma| < +\infty$.

$$F(t) = |\text{graf}_{\Omega_\epsilon} [f+t(\gamma-f)]| = |\text{graf}_{\Omega_\epsilon} f| \text{ em } \partial\Omega_\epsilon$$

Nesse caso, $F(t)$ é convexa, isto é, $F''(t) > 0$, $\forall t$ (pois a área é sempre convexa) e $F(t)$ é estacionária, isto é, $F'(t)|_{t=0} = 0$.

Donde concluímos que F assume um mínimo local em $t = 0$;

$f(0) = |\text{graf}_{\Omega_\epsilon} f|$ é o valor de mínimo de f em Ω_ϵ

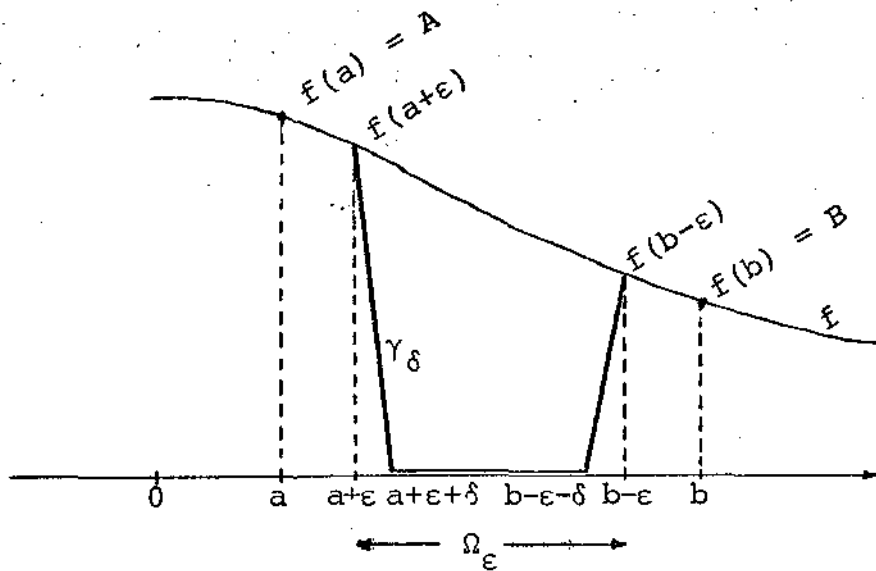
Isto significa

$$(4) \quad |\text{graf}_{\Omega_\epsilon} f| \leq |\text{graf}_{\Omega_\epsilon} \gamma| < +\infty, \text{ para toda } \gamma, \gamma = f \text{ em } \partial\Omega_\epsilon.$$

Seja

$$\gamma_\delta = \begin{cases} f(x), & \text{se } |x| = a+\epsilon, |x| = b-\epsilon \\ 0, & \text{se } a+\epsilon+\delta < |x| < b-\epsilon-\delta \\ \text{linear}, & \text{se } a+\epsilon < |x| < a+\epsilon+\delta \text{ ou} \\ & b-\epsilon-\delta < |x| < b-\epsilon \end{cases}$$

com $\delta \in (0, \frac{b-a-2\epsilon}{2})$.



A função γ_δ é um caso particular de γ , isto é,

γ_δ é finita, pois $\max |f| \leq |A| + |B|$,

$\gamma_\delta = f$ em $\partial\Omega_\epsilon$, pois $\gamma = f$ em $\partial\Omega_\epsilon$ e

$|\text{graf}_{\Omega_\epsilon} \gamma_\delta| < +\infty$. De fato: De (4) temos,

$|\text{graf}_{\Omega_\epsilon} f| \leq |\text{graf}_{\Omega_\epsilon} \gamma_\delta|$, para toda γ_δ e passando $\lim_{\delta \rightarrow 0}$, vem:

$$\begin{aligned} |\text{graf}_{\Omega_\epsilon} f| &\leq \lim_{\delta \rightarrow 0} |\text{graf}_{\Omega_\epsilon} \gamma_\delta| \leq \\ &\leq n w_n a^{n-1} |A| + n w_n b^{n-1} |B| + w_n (b^n - a^n) \leq \\ &\leq n w_n b^{n-1} \max\{|A|, |B|\} + n w_n b^{n-1} \max\{|A|, |B|\} + \\ &+ w_n b^n = 2(n w_n b^{n-1}) \max\{|A|, |B|\} + w_n b^n \leq \\ &\leq 2(|A| + |B|) n w_n b^{n-1} + w_n b^n. \end{aligned}$$

Portanto

$$(5) \quad |\text{graf}_{\Omega_\epsilon} f| \leq 2(|A| + |B|) b^{n-1} n w_n + w_n b^n.$$

De (5) se obtém (3) fazendo $\epsilon \rightarrow 0$:

$$|\text{graf}_\Omega f| < +\infty$$

OBSERVAÇÃO 2 - ϕ depende somente de $|x|$.

Temos por hipótese que f satisfaz (1), isto é,

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \right) = 0, \quad \forall x \in \Omega.$$

Dizer que f depende somente de $|x|$ é o mesmo que escrever

$$f(x) = \phi(\rho) \quad \text{onde} \quad \rho = |x| \quad (a \leq \rho \leq b).$$

Assim

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \phi'(\rho) \frac{x_i}{\rho}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}}{\sqrt{1 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2}} \right) &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\phi'(\rho) \frac{x_i}{\rho}}{\sqrt{1 + \phi'^2(\rho)}} \right) = \\ &= \frac{\phi''(\rho) \frac{x_i}{\rho^2}}{\sqrt{1 + \phi'^2(\rho)}} + \frac{\phi'(\rho) \left(-\frac{1}{\rho} - \frac{x_i^2}{\rho^3} \right)}{\sqrt{1 + \phi'^2(\rho)}} - \frac{\phi'^2(\rho) \frac{x_i}{\rho^2} \phi''(\rho)}{(\sqrt{1 + \phi'^2(\rho)})^3} \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}}{\sqrt{1 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2}} \right) = \frac{\sum_{i=1}^n \phi''(\rho) \frac{x_i}{\rho^2}}{\sqrt{1 + \phi'^2(\rho)}} + \frac{\phi'(\rho) \frac{n}{\rho}}{\sqrt{1 + \phi'^2(\rho)}} - \\ &\quad - \frac{\sum_{i=1}^n \phi'(\rho) \frac{x_i^2}{\rho^3}}{\sqrt{1 + \phi'^2(\rho)}} - \frac{\sum_{i=1}^n \phi'^2(\rho) \frac{x_i}{\rho^2} \phi''(\rho)}{(\sqrt{1 + \phi'^2(\rho)})^3}, \end{aligned}$$

$$\frac{(1 + \phi'^2) \phi'' - \phi'^2 \phi''}{(\sqrt{1 + \phi'^2})^3} + \frac{\phi' \left(\frac{n}{\rho} - \frac{1}{\rho} \right)}{\sqrt{1 + \phi'^2}} = 0$$

$$\frac{\phi''}{(\sqrt{1 + \phi'^2})^3} + \frac{\phi' \frac{n-1}{\rho}}{\sqrt{1 + \phi'^2}} = 0.$$

E finalmente obtemos,

(6)

$$\rho \phi'' + (n-1) \phi' (1 + \phi'^2) = 0$$

Para resolver o Problema sobre a coroa se tem que encontrar uma função $\phi(\rho)$ tal que:

$$\begin{cases} \phi(a) = A \\ \phi(b) = B \\ \rho \phi'' + (n-1) \phi' (1 + \phi'^2) = 0. \end{cases}$$

Um simples cálculo mostre que devemos ter:

$$(7) \quad \frac{\phi'(\rho)}{\sqrt{1 + \phi'^2(\rho)}} = \frac{k}{\rho^{n-1}} \text{ (com } k \text{ constante, } |k| \leq a^{n-1}).$$

De fato:

$$\text{Seja } \left[\frac{\rho^{n-1} \phi'}{\sqrt{1 + \phi'^2(\rho)}} \right]' = 0$$

$$\frac{\rho^{n-1} \phi''}{\sqrt{1 + \phi'^2}} + \frac{(n-1) \rho^{n-2} \phi'}{\sqrt{1 + \phi'^2}} - \frac{\rho^{n-1} \phi' \phi' \phi''}{(\sqrt{1 + \phi'^2})^3} = 0$$

$$(1+\phi'^2)\rho^{n-1}\phi'' + (1+\phi'^2)(n-1)\rho^{n-2}\phi' - \rho^{n-1}\phi'^2\phi'' = 0 ,$$

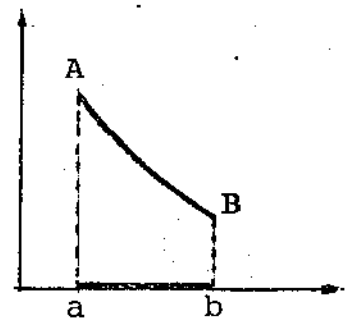
$$\rho^{n-1}\phi'' + (n-1)\rho^{n-2}(1+\phi'^2)\phi' = 0 ,$$

e dividindo por $\rho^{n-2} \neq 0$, temos:

$$\rho\phi'' + (n-1)(1+\phi'^2)\phi' = 0 \text{ (que é a expressão (6))} .$$

Portanto se $\left[\frac{\rho^{n-1}\phi'}{\sqrt{1+\phi'^2}} \right]' = 0$, então

$$\frac{\rho^{n-1}\phi'}{\sqrt{1+\phi'^2}} = k \Rightarrow \frac{\phi'}{\sqrt{1+\phi'^2}} = \frac{k}{\rho^{n-1}}$$



Vejamos agora para que valores de k vale a expressão acima.

$$\frac{\phi'}{\sqrt{1+\phi'^2}} = \frac{k}{\rho^{n-1}} ,$$

elevando ao quadrado, vem

$$\frac{\phi'^2}{1+\phi'^2} = \frac{k^2}{\rho^{2n-2}} .$$

E ainda,

$$\frac{1+\phi'^2}{\phi'^2} = \frac{\rho^{2(n-1)}}{k^2}$$

$$\frac{1}{\phi'^2} + 1 = \frac{\rho^{2(n-1)}}{k^2}$$

$$\frac{1}{\phi'^2} = \frac{\rho^{2(n-1)} - k^2}{k^2} .$$

Portanto $\phi'^2 = \frac{k^2}{\rho^{2(n-1)} - k^2}$ se $k^2 \leq \rho^{2(n-1)}$,

ou $|k| \leq a^{n-1}$. ($a \leq \rho \leq b$) .

E extraíndo a raiz quadrada temos;

$$(8) \quad |\phi'| = \frac{|k|}{\sqrt{\rho^{2(n-1)} - k^2}}$$

O que implica

$$(9) \quad \int_a^b |\phi'| d\rho = \int_a^b \frac{|k|}{\sqrt{\rho^{2(n-1)} - k^2}} d\rho .$$

Desde que $|k| \leq a^{n-1}$, segue

$$(10) \quad \int_a^b |\phi'(\rho)| d\rho \leq \int_a^b \frac{a^{n-1}}{\sqrt{\rho^{2(n-1)} - a^{2(n-1)}}} d\rho < +\infty .$$

De fato:

$$\begin{aligned} \rho^{2(n-1)} - a^{2(n-1)} &= (\rho-a) \cdot (\rho^{2(n-1)-1} + \rho^{2(n-1)-2} + \dots + a^{2(n-1)-1}) \geq \\ &= (\rho-a) \cdot \underbrace{(a^{2(n-1)-1} + \dots + a^{2(n-1)-1})}_{2(n-1) \text{ termos}} \end{aligned}$$

Portanto

$$\rho^{2(n-1)} - a^{2(n-1)} \geq (\rho-a)^{2(n-1)} a^{2(n-1)-1} \geq 0,$$

então

$$\frac{1}{\rho^{2(n-1)} - a^{2(n-1)}} \leq \frac{1}{(\rho-a)^{2(n-1)} a^{2(n-1)-1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\rho^{2(n-1)} - a^{2(n-1)}}} \leq \frac{1}{\sqrt{\rho-a}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2(n-1) a^{2(n-1)-1}}}.$$

Assim

$$\boxed{\int_a^b \frac{a^{n-1}}{\sqrt{\rho^{2(n-1)} - a^{2(n-1)}}} d\rho \leq \int_a^b \frac{1}{\sqrt{\rho-a}} \cdot \frac{a^{n-1}}{\sqrt{2(n-1) a^{2(n-1)-1}}} d\rho.}$$

E finalmente

$$\int_a^b \frac{a^{n-1}}{\sqrt{\rho-a}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2(n-1) a^{2(n-1)-1}}} d\rho = \frac{a^{n-1}}{\sqrt{2(n-1) a^{2(n-1)-1}}} \int_a^b \frac{1}{\sqrt{\rho-a}} d\rho.$$

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{\rho-a}} d\rho = \lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b \frac{1}{\sqrt{\rho-a}} d\rho =$$

$$= \lim_{c \rightarrow a^+} (2\sqrt{\rho-a} \Big|_c^b) = \lim_{c \rightarrow a^+} (\sqrt{b-a} - \sqrt{c-a}) = 2\sqrt{b-a}.$$

Portanto

$$\int_a^b \frac{a^{n-1}}{\sqrt{\rho-a}} \cdot \frac{1}{\sqrt{-(n-1)a^{2(n-1)-1}}} d\rho = \frac{a^{n-1}}{\sqrt{2(n-1)a^{2(n-1)-1}}} 2\sqrt{b-a}.$$

Donde concluimos

$$\int_a^b \frac{a^{n-1}}{\sqrt{\rho^{2(n-1)} - a^{2(n-1)}}} d\rho \leq \frac{2a^{n-1}\sqrt{b-a}}{\sqrt{2(n-1)a^{2(n-1)-1}}} < +\infty.$$

Seja $A = \phi(a)$

$B = \phi(b)$

$$\int_a^b \phi'(\rho) d\rho = B-A.$$

$$|B-A| = \left| \int_a^b \phi'(\rho) d\rho \right| \leq \int_a^b |\phi'(\rho)| d\rho.$$

E usando a expressão (10) temos,

$$|B-A| \leq \int_a^b |\phi'(\rho)| d\rho \leq \int_a^b \frac{a^{n-1}}{\sqrt{\rho^{2(n-1)} - a^{2(n-1)}}} d\rho < +\infty$$

Se $|B-A| > \int_a^b \frac{a^{n-1}}{\sqrt{\rho^{2(n-1)} - a^{2(n-1)}}} d\rho$ então ϕ não existe.

Portanto a condição necessária de solubilidade do Problema sobre o aberto $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n: 0 < a < |x| < b < +\infty\}$ com dado

$$g(x) = \begin{cases} A, & \forall x, |x| = a \\ B, & \forall x, |x| = b \end{cases}$$

com $A > B$, é que

$$(11) \quad |B-A| \leq \int_a^b \frac{a^{n-1}}{\sqrt{\rho^{2(n-1)} - a^{2(n-1)}}} d\rho < +\infty$$

OBSERVAÇÃO - A solução deve ser $\phi(|x|)$, devido a simetria do problema.

RESUMO:

$$\text{Se existe } \phi \text{ tal que } \begin{cases} \phi(a) = A \\ \phi(b) = B \\ \rho\phi'' + (n-1)\phi'(1+\phi'^2) = 0 \end{cases}$$

$$\text{então } |B-A| \leq \int_a^b \frac{a^{n-1}}{\sqrt{\rho^{2(n-1)} - a^{2(n-1)}}} d\rho < +\infty.$$

Se a solução existe e depende de $|x|$

$$(f(x) = \phi(\rho), \text{ onde } \rho = |x|)$$

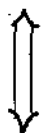


a equação da superfície mínima se escreve

$$\rho\phi'' + (n-1)\phi'(1+\phi'^2) = 0$$



$$\left(\frac{\rho^{n-1}\phi'}{\sqrt{1+\phi'^2}} \right)' = 0$$



$$\frac{\rho^{n-1}\phi'}{\sqrt{1+\phi'^2}} = k = \text{cte}.$$

No que se segue veremos condições mais gerais sobre fronteira de Ω para que o Problema de Plateau tenha solução.

2 - PROBLEMA DE PLATEAU COM DADO SATISFAZENDO BOUNDED SLOP CONDITION

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado, diremos que uma função $\gamma: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz B.S.C. (Bounded Slop Condition) sobre $\partial\Omega$ com constante k , se para todo $x \in \partial\Omega$ existem $a, b \in \mathbb{R}^n$ com $|a| \leq K$ e $|b| \leq K$ tal que,

$$\sum_{i=1}^n a_i (y_i - x_i) + \gamma(x) \leq \gamma(y) \leq \sum_{i=1}^n b_i (y_i - x_i) + \gamma(x), \quad \forall y \in \partial\Omega.$$

Em outras palavras se para qualquer $x \in \partial\Omega$, existem dois hiperplanos passando por $(x, \gamma(x))$ com declividades não superiores a K , que delimitam o gráfico de γ .

OBSERVAÇÕES:

1) Seja $g: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ função que verifica B.S.C., com constante K , então para todo $x \in \partial\Omega$, existem $a(x) \in \mathbb{R}^n$, $b(x) \in \mathbb{R}^n$; com

$$g(x) + b(x) \cdot (y - x) \leq g(y) \leq a(x) \cdot (y - x) + g(x), \quad \forall y \in \partial\Omega$$

e

$$\max\left\{\sup_{x \in \partial\Omega} |a(x)|, \sup_{x \in \partial\Omega} |b(x)|\right\} \leq K < +\infty$$

O gráfico de g está compreendido entre dois planos passando por $(x, g(x))$ com coeficientes angulares $|a(x)| \leq K$ e $|b(x)| \leq K$.

$$2) \quad f \in \text{Lip}(\bar{\Omega}) \iff \sup_{\substack{x, y \in \bar{\Omega} \\ x \neq y}} \frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|} < +\infty$$

3) Seja $L(y)$ uma função linear com $L(y) \geq g(y)$ para todo $y \in \partial\Omega$, com $g: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo B.S.C.

Seja $\gamma \in \text{Lip}(\bar{\Omega})$ com $\gamma(y) = g(y)$, $\forall y \in \partial\Omega$.

Então $(\gamma \wedge L)(x) = \min(\gamma(x), L(x))$, $(\gamma \wedge L) \in \text{Lip}(\bar{\Omega})$ e

$$(\gamma \wedge L)(y) = g(y), \quad \forall y \in \partial\Omega,$$

e ainda

$$a_{\Omega}(\gamma \wedge L) \leq a_{\Omega}(\gamma).$$

Como consequência temos:

$$\inf_{\substack{\gamma \in \text{Lip} \\ \gamma = g \text{ em } \partial\Omega}} a_{\Omega}(\gamma) = \inf_{\substack{\psi \in \text{Lip} \\ \psi = g \text{ em } \partial\Omega \\ \psi \leq L}} a_{\Omega}(\psi)$$

4) Seja $\ell(y)$ uma função linear com $\ell(y) \leq g(y)$ para todo $y \in \partial\Omega$, com $g: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo B.S.C.

Seja $\gamma \in \text{Lip}(\bar{\Omega})$ com $\gamma(y) = g(y)$, $\forall y \in \partial\Omega$.

Então $(\gamma \vee \ell)(x) = \max(\gamma(x), \ell(x))$, $(\gamma \vee \ell) \in \text{Lip}(\bar{\Omega})$ e $(\gamma \vee \ell)(y) = g(y)$, $\forall y \in \partial\Omega$.

e ainda

$$a_{\Omega}(\gamma \vee \ell) \leq a_{\Omega}(\gamma)$$

Como consequência temos:

$$\inf_{\substack{\gamma \in \text{Lip} \\ \gamma = g \text{ em } \partial\Omega}} a_{\Omega}(\gamma) = \inf_{\substack{\psi \in \text{Lip} \\ \psi = g \text{ em } \partial\Omega \\ \psi \geq \ell}} a_{\Omega}(\psi).$$

5) De (3) e (4) temos

$$\inf_{\substack{\gamma \in \text{Lip} \\ \gamma = g \text{ em } \partial\Omega}} a_{\Omega}(\gamma) = \inf_{\substack{\psi \in \text{Lip} \\ \psi = g \text{ em } \partial\Omega \\ \ell \leq \psi \leq L}} a_{\Omega}(\gamma)$$

6) Se g satisfaz B.S.C., então g é contínua em $\partial\Omega$.

7) Se g verifica B.S.C e g é não linear, então

$$[b(x) - a(x)] \cdot (y-x) \geq 0, \forall y \in \partial\Omega \text{ e } a(x) \neq b(x).$$

Portanto Ω é convexo.

De fato: Suponhamos que g verifica B.S.C. com constante K , ie: para todo $x \in \partial\Omega$, existem $a, b \in \mathbb{R}^n$ com $|a| \leq K, |b| \leq K$, tal que

$$a \cdot (y-x) + g(x) \leq g(y) \leq b \cdot (y-x) + g(x), \forall y \in \partial\Omega$$

Então

$$a \cdot (y-x) \leq g(y) - g(x) \leq b \cdot (y-x), \forall y \in \Omega$$

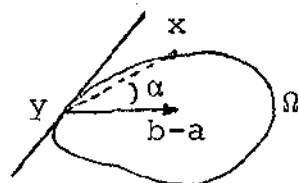
$$a \cdot (y-x) \leq b \cdot (y-x), \forall y \in \partial\Omega$$

Como g não linear

$$(b-a) \cdot (y-x) \geq 0, \forall y \in \partial\Omega \text{ e } a(x) \neq b(x),$$

ou ainda

$$|b-a| \cdot |y-x| \cos \alpha \geq 0 \Rightarrow \cos \alpha \geq 0 \Rightarrow 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$$



Sejam $\ell = a \cdot (y-x) + g(x)$ e $L = b \cdot (y-x) + g(x)$, $L \neq \ell$. E a interseção $L \cap \ell$ é uma "reta" e a projeção sobre Ω é uma "reta".

Portanto para todo $y \in \partial\Omega$ o segmento $[xy]$ está inteiramente contido em $\bar{\Omega}$, i e, Ω é convexo.

8) g contínua e Ω convexo $\nRightarrow g$ verifica B.S.C.

9) $g \in C^2$ e Ω estritamente convexo $\Rightarrow g$ verifica B.S.C.

PROPOSIÇÃO 2.1 - Seja $\gamma: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função que verifica B.S.C. com constante K , então a classe L_K não é vazia.

PROVA: Queremos mostrar que a classe

$$L_K = \{v \in \text{Lip}_K(\bar{\Omega}), v|_{\partial\Omega} = \gamma\} \neq \emptyset.$$

Para todo $x \in \partial\Omega$ indiquemos com π_x a aplicação afim que satisfaz

$$\begin{cases} \pi_x(y) \geq \gamma(y), \forall y \in \partial\Omega & \text{e} \\ |\pi_x|_1 \leq K & (\pi_x: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}). \end{cases}$$

Desde que π_x é linear, temos $\pi_x \in \text{Lip}$ e com $|\pi_x|_1 \leq K$ vem $\pi_x \in \text{Lip}_K(\mathbb{R}^n)$.

Consideremos agora a função

$$V(y) = \inf_{x \in \partial\Omega} \{\pi_x(y), x \in \partial\Omega\}, y \in \bar{\Omega}.$$

$$V(y) \neq \emptyset. (V: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}).$$

a) Se $x_0 \in \partial\Omega$ temos $V(x_0) = \gamma(x_0)$. De fato,

Seja $P = \{\pi: \pi \text{ linear sobre } \mathbb{R}^n, |\pi|_1 \leq K \text{ e } \pi(y) \geq \gamma(y), \forall y \in \partial\Omega\},$

$$\inf\{\pi(x): \pi \in P, x \in \bar{\Omega}\} = V(x),$$

portanto $V \in \text{Lip}_K(\bar{\Omega})$, pois para toda $\pi \in P$ temos $\pi \in \text{Lip}_K(\mathbb{R}^n)$.

Fixado $x_0 \in \partial\Omega$, existe $\pi_{x_0}(y)$ com $\pi_{x_0}(x_0) = \gamma(x_0)$, $|\pi_{x_0}|_1 \leq K$ e

$$V(x_0) \leq \pi_{x_0}(x_0) = \gamma(x_0) \Rightarrow V(x_0) \leq \gamma(x_0) \quad (1)$$

ainda

$$\pi(x_0) \geq \gamma(x_0) \text{ (da definição de P)}$$

logo

$$V(x_0) = \inf \pi(x_0) \geq \gamma(x_0) \Rightarrow V(x_0) \geq \gamma(x_0) \quad (2)$$

De (1) e (2) temos que $V(x_0) = \gamma(x_0)$ para $x_0 \in \partial\Omega$

b) Sejam $y_1, y_2 \in \bar{\Omega}$ ($y_1 \neq y_2$).

Como $V(y)$ é o ínfimo temos,

para todo $\varepsilon > 0$, existem $x_1, x_2 \in \partial\Omega$ tais que

$$\pi_{x_1}(y_1) \leq V(y_1) + \varepsilon \leq \pi_{x_2}(y_1) + \varepsilon \quad (3)$$

$$\pi_{x_2}(y_2) \leq V(y_2) + \varepsilon \leq \pi_{x_1}(y_2) + \varepsilon \quad (4)$$

Fazendo (3)-(4), obtemos

$$\pi_{x_2}(y_1) - \pi_{x_2}(y_2) + \varepsilon \geq V(y_1) - V(y_2) \geq \pi_{x_1}(y_1) - \pi_{x_1}(y_2) - \varepsilon$$

Como $y_1 \neq y_2$, $y_1 - y_2 \neq 0$ e dividindo a expressão acima por $|y_1 - y_2| > 0$, vem

$$\frac{\pi_{x_1}(y_1) - \pi_{x_1}(y_2) - \varepsilon}{|y_1 - y_2|} \leq \frac{v(y_1) - v(y_2)}{|y_1 - y_2|} \leq \frac{\pi_{x_2}(y_1) - \pi_{x_2}(y_2) + \varepsilon}{|y_1 - y_2|}.$$

Desde que $\pi_x \in \text{Lip}_K(\bar{\Omega})$, podemos escrever

$$-K - \frac{\varepsilon}{|y_1 - y_2|} \leq \frac{v(y_1) - v(y_2)}{|y_1 - y_2|} \leq K + \frac{\varepsilon}{|y_1 - y_2|}$$

e como ε é arbitrário temos

$$-K \leq \frac{v(y_1) - v(y_2)}{|y_1 - y_2|} \leq K \Rightarrow |v(y)|_1 \leq K.$$

Logo de (a) e (b) temos que $v(y) \in \text{Lip}_K(\bar{\Omega})$ e $v|_{\partial\Omega} = \gamma$

Donde concluimos que $v \in L_K$.

Portanto $L_K \neq \emptyset$.

C.Q.D.

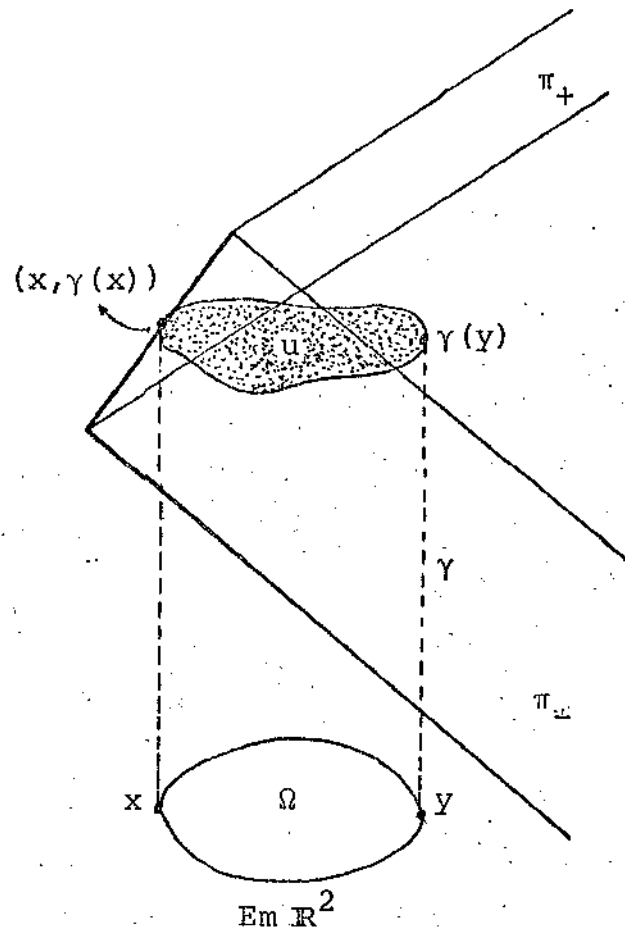
PROPOSIÇÃO 2.2 - Se γ verifica B.S.C. com constante K e $u \in \text{Lip}(\bar{\Omega})$ minimiza o funcional área na classe $L_{K+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$.

Então $u \in \text{Lip}_K(\bar{\Omega})$ (i.e., u é mínimo em L_K)

PROVA - O problema está em encontrar a diferença $|u(x) - u(x')|$

Sabemos que

$$L_{K+\varepsilon} = \{w \in \text{Lip}(\bar{\Omega}) : |w|_1 \leq K + \varepsilon, w|_{\partial\Omega} = \gamma\}$$



a) Calculemos inicialmente $|u(x) - u(x')|$ com $x \in \partial\Omega$

Se $x, x' \in \partial\Omega$ então pela condição B.S.C.,

$$\pi_-(x') = a \cdot (x' - x) + \gamma(x) \leq \gamma(x') \leq b \cdot (x' - x) + \gamma(x) = \pi_+(x'),$$

$\forall x \in \partial\Omega$.

Observe que

$$u \in L_{K+\varepsilon} \text{ e } u|_{\partial\Omega} = \gamma, \text{ assim}$$

$$a \cdot (x' - x) \leq u(x') - u(x) \leq b \cdot (x' - x), \quad \forall x' \in \partial\Omega$$

ou ainda

$$|u(x') - u(x)| \leq \max\{|a|, |b|\} |x' - x|, \quad \forall x' \in \partial\Omega$$

$$|u(x') - w(x)| \leq K |x' - x|, \quad \forall x' \in \partial\Omega$$

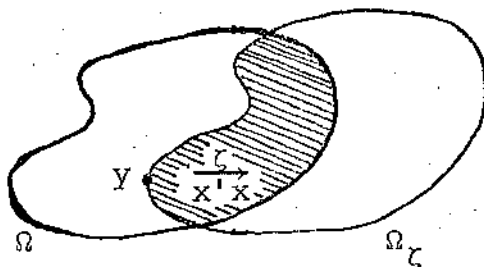
Portanto $u \in \text{Lip}_K(\bar{\Omega})$ para $x \in \partial\Omega$

b) Suponhamos agora $x, x' \in \Omega$.

Calculemos $|u(x') - u(x)|$, usando a técnica de Rodó.

Posto $\zeta = x - x'$, seja $\Omega_\zeta = \{z \in \mathbb{R}^n : z = u + \zeta, y \in \Omega\}$ e seja $u_\zeta : \Omega_\zeta \rightarrow \mathbb{R}$ função definida por:

$$u_\zeta(z) = u(z - \zeta)$$



Tendo em conta que o aberto $\Omega \cap \Omega_\zeta \neq \emptyset$, para $x = x' + \zeta \in \Omega_\zeta$

Em $\Omega \cap \Omega_\zeta$, u e u_ζ ambas minimizam a área

$\left(\int_{\Omega \cap \Omega_\zeta} \sqrt{1 + |\nabla v|^2} dx = \text{mínimo}, v = u \text{ ou } v = u_\zeta \right)$ respectivamente nas

classes:

$$\{w \in \text{Lip}_{K+\varepsilon}(\Omega \cap \Omega_\zeta) : w = u \text{ sobre } \partial(\Omega \cap \Omega_\zeta)\}$$

$$\{w \in \text{Lip}_{K+\varepsilon}(\Omega \cap \Omega_\zeta) : w = u_\zeta \text{ sobre } \partial(\Omega \cap \Omega_\zeta)\}$$

Em virtude do corolário: 1.7 a diferença $u - u_\zeta$ assume seu má

xímo em $\Omega \cap \Omega_\zeta$ sobre a fronteira, i.e.:

$$\max_{\Omega \cap \Omega_\zeta} |u - u_\zeta| = \max_{\partial(\Omega \cap \Omega_\zeta)} |u - u_\zeta|.$$

Então existe $y \in \partial(\Omega \cap \Omega_\zeta)$ tal que

$$|u(x) - u_\zeta(x)| \leq |u(y) - u_\zeta(y)| = |u(y) - u(y - \zeta)|$$

Da outra parte pelo menos um dos pontos y , $y - \zeta$ está sobre $\partial\Omega$ e portanto

$$|u(y) - u(y - \zeta)| \leq K |\zeta|, \text{ logo}$$

$$|u(x) - u_\zeta(x)| \leq K |\zeta| = K |x - x'|$$

$$|u(x) - u(x')| \leq K |x - x'|$$

Portanto $u \in \text{Lip}_K(\bar{\Omega})$ para $x \in \Omega$

E de (a) e (b) temos que $u \in \text{Lip}_K(\bar{\Omega})$.

C.Q.D.

Esta proposição mostra que para $h > K$ (K constante da B.S.C.) temos $|u_0^{(h)}| < h$. Isto nos permite enunciar o teorema da existência em $\text{Lip}(\bar{\Omega})$.

TEOREMA 2.3 - (a existência e unicidade para o Problema da área em $\text{Lip}(\bar{\Omega})$).

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado, $\gamma: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função que veri

ca B.S.C.. Então existe uma única função $u \in \text{Lip}(\bar{\Omega})$ que minimiza o funcional da área na classe

$$\{z \in \text{Lip}(\bar{\Omega}) : z \equiv \gamma \text{ sobre } \partial\Omega\}$$

PROVA - Segue da suposição 2.2 e da unicidade da solução na classe L_K . (teorema 1.4), que se u é solução em L_K é também solução em $L_{K'}$, para todo $K' > K$.

Em outras palavras queremos provar que se γ verifica B.S.C. então a solução $u \in \text{Lip}_K(\bar{\Omega})$ é a mesma solução em $\text{Lip}(\bar{\Omega})$.

Fixado qualquer K' , $K' > K$. Seja u_1 a solução em $L_{K'}$, então (pela prop: 2.2) u_1 é solução em L_K . Logo $u_1 \in \text{Lip}_K(\bar{\Omega})$.

Além disso, $u \in \text{Lip}(\bar{\Omega})$ é solução em L_K .

Donde concluímos que $u_1 = u$.

Se u é solução em L_K , então u é solução em $L_{K'}$, para todo $K' > K$.

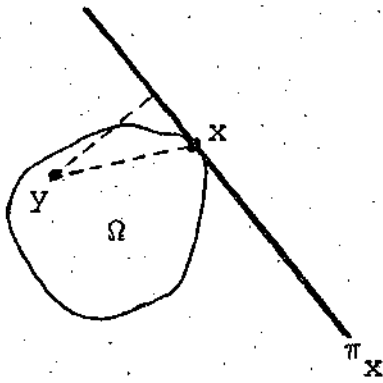
Portanto u é solução em $\text{Lip}(\bar{\Omega})$.

C.Q.D.

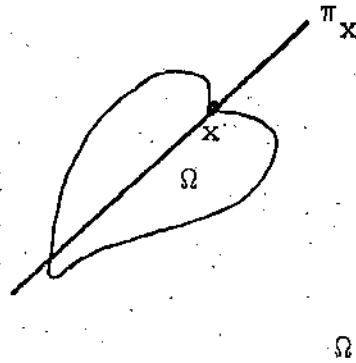
Queremos agora determinar uma classe bastante ampla de funções que verificam B.S.C.

DEFINIÇÃO - Dizemos que um aberto e limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) é uniformemente convexo se existe uma constante $K > 0$ e para todo $x \in \partial\Omega$ um hiperplano $\pi_x \in \mathbb{R}^n$ passando por x , tal que Ω esteja em um dos dois semi-espacos determinados por π_x , e para o qual vale

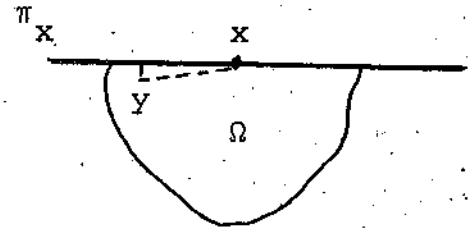
$$\sup_{y \in \Omega} \frac{|x-y|^2}{d(y, \pi_x)} \leq K. \quad (*)$$



Ω é uniformemente convexo em $\mathbb{R}^2$



Ω não é uniformemente convexo em $\mathbb{R}^2$



Exemplos:

Ex. 1 - Sejam $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > |x|, y \leq M\}$,

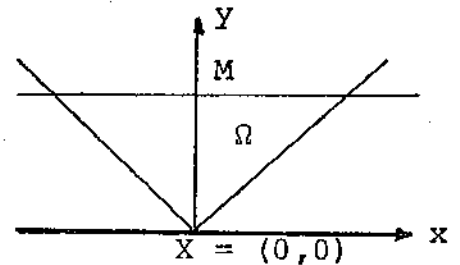
$x = (0,0)$ e π_x o eixo- x .

Seja $Y = (x,y)$ com $y > |x|$. (i.e.: $Y \in \Omega$).

Temos $0 \leq |x| < y \Rightarrow x^2 < y^2$

$$\frac{|x-y|^2}{d(Y, \pi_x)} = \frac{x^2+y^2}{y} < \frac{y^2+y^2}{y} = 2y < +\infty$$

$$\text{Portanto } \sup_{Y \in \Omega} \frac{|x-y|^2}{d(Y, \pi_x)} < 2M < +\infty$$



Logo x satisfaz a condição $(*)$.

Observe que o conjunto Ω do exemplo anterior não é uniformemente convexo, pois qualquer outro ponto x_0 da fronteira de Ω , diferente da origem não satisfaz a condição $(*)$. De fato:

se tomarmos $Y \in \Omega$, tal que $|x_0 - Y| = K$,

teremos $\sup_{Y \in \Omega} \frac{|x_0 - Y|^2}{d(Y, \pi_{x_0})} \rightarrow +\infty$ quando $d(Y, \pi_{x_0}) \rightarrow 0$.

Ex. 2 - Sejam $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > x^2 \text{ e } y \leq M\}$, $X = (0,0)$
e π_X o eixo- x .

Seja $Y = (x,y)$ em $y > x^2$. (i.e.: $Y \in \Omega$)

$$\frac{|X-Y|^2}{d(Y, \pi_X)} = \frac{x^2+y^2}{y} < \frac{y+y^2}{y} = 1 + y < +\infty$$

$$\text{Portanto } \sup_{Y \in \Omega} \frac{|X-Y|^2}{d(Y, \pi_X)} \leq 1 + M < +\infty$$

Logo X satisfaz a condição $\textcircled{*}$.

Ex. 3 - Sejam $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y > x^4 \text{ e } y \leq M\}$,

$X = (0,0)$ e π_X o eixo- x .

Seja $Y \in S$ onde

$$S = \{(x,y) \in \Omega : y = \frac{1}{2^n} \text{ e } x = \frac{1}{2^{3n}}\}$$

$$\frac{|X-Y|^2}{d(Y, \pi_X)} = \frac{\frac{1}{2^{4n}} + \frac{1}{2^{6n}}}{\frac{1}{2^{3n}}} = \frac{2^{4n} + 1}{2^{3n}} = 2^n + \frac{1}{2^{3n}}$$

$$\text{Portanto } \sup_{Y \in S} \frac{|X-Y|^2}{d(Y, \pi_X)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (2^n + \frac{1}{2^{3n}}) = +\infty$$

Logo X não satisfaz a condição $\textcircled{*}$.

PROPOSIÇÃO 2.4 - Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado e uniformemen
te convexo e seja $\gamma \in C^2(\mathbb{R}^n)$. Então $\gamma|_{\partial\Omega}$ verifica a condição B.S.C.

PROVA - Seja $x \in \partial\Omega$ e suponhamos $x = 0$, $\gamma(0) = 0$ e o plano

$$\pi_x = \{x \in \mathbb{R}^n: x_n = 0\}.$$

Então a condição de convexidade uniforme pode ser escrito co
mo

$$0 \leq \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{x_n} \leq K, \forall x \in \bar{\Omega} - \{0\}$$

Seja o hiperplano de $\mathbb{R}^n$ dado por:

$$\begin{cases} x_n = 0 \\ x_{n+1} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial \gamma(0)}{\partial x_i} x_i = 0 \end{cases}$$

e consideremos agora o feixe de hiperplanos em $\mathbb{R}^{n+1}$ gerado pelo anterior:

$$x_{n+1} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \gamma}{\partial x_i}(0) x_i + (\lambda - \frac{\partial \gamma}{\partial x_n}(0)) x_n = 0 \quad (1)$$

Seja $\bar{x} \in \partial\Omega - \{0\}$ e consideremos o plano do feixe passando por $(\bar{x}, \gamma(\bar{x}))$, que será:

$$\gamma(\bar{x}) - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \gamma}{\partial x_i}(0) \bar{x}_i + (\lambda - \frac{\partial \gamma}{\partial x_n}(0)) \bar{x}_n = 0.$$

$$\text{Daí} \quad -\lambda = \frac{1}{\bar{x}_n} \left[\gamma(\bar{x}) - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \gamma}{\partial x_i}(0) \bar{x}_i - \frac{\partial \gamma}{\partial x_n}(0) \bar{x}_n \right]$$

e substituindo em (1), temos:

$$x_{n+1} = - \left(\lambda - \frac{\partial \gamma}{\partial x_n}(0) \right) x_n + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \gamma}{\partial x_i}(0) x_i$$

$$x_{n+1} = \left[\frac{1}{\bar{x}_n} \left(\gamma(\bar{x}) - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \gamma}{\partial x_i}(0) \bar{x}_i - \frac{\partial \gamma}{\partial x_n}(0) \bar{x}_n \right) \right] x_n + \frac{\partial \gamma}{\partial x_n}(0) x_n + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \gamma}{\partial x_i}(0) x_i .$$

e portanto a equação de tal hiperplano será

$$x_{n+1} = \frac{1}{\bar{x}_n} \left[\gamma(\bar{x}) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial \gamma}{\partial x_i}(0) \bar{x}_i \right] x_n + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \gamma}{\partial x_i}(0) x_i$$

Temos que $\gamma \in C^2(\mathbb{R}^n)$ e aplicando o teorema de Taylor ⁽¹¹⁾ ao segmento de reta que une 0 a $\bar{x}$, existe um ponto $\xi \in [0\bar{x}]$, tal que

$$\gamma(\bar{x}) = \gamma(0) + \frac{1}{1!} D\gamma(0) \bar{x} + \frac{1}{2!} D^{(2)}\gamma(\xi) \bar{x}^2 ,$$

$$\gamma(\bar{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \gamma}{\partial x_i}(0) \bar{x}_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x_i \partial x_j}(\xi) \bar{x}_i \bar{x}_j$$

⁽¹¹⁾ Teorema de Taylor -

Seja $f: \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e suponhamos que f tenha derivadas parciais contínuas de ordem n numa vizinhança de todo ponto sobre o segmento de reta que une 2 pontos u e $v \in \mathcal{O}$.

Então existe um ponto $\bar{u}$ sobre este segmento de reta, tal que

$$f(v) = f(u) + \frac{1}{1!} Df(u) (v-u) + \frac{1}{2!} D^2 f(u) (v-u)^2 + \dots$$

$$+ \frac{1}{(n-1)!} D^{(n-1)} f(u) (v-u)^{n-1} + \frac{1}{n!} D^{(n)} f(\bar{u}) (v-u)^n .$$

$$\gamma(\bar{x}) - \sum_{i=1}^u \frac{\partial \gamma}{\partial x_i}(0) \bar{x}_i = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x_i \partial x_j}(\xi) \bar{x}_i \bar{x}_j$$

Indiquemos agora com

$$M = \sum_{i=1}^u \sup_{\bar{\Omega}} \left| \frac{\partial \gamma}{\partial x_i} \right| + \sum_{i,j=1}^n \sup_{\bar{\Omega}} \left| \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x_i \partial x_j} \right|$$

e temos:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\bar{x}_n} (\gamma(\bar{x}) - \sum_{i=1}^u \frac{\partial \gamma}{\partial x_i}(0) \bar{x}_i) \right| &= \left| \frac{1}{\bar{x}_n} \left(\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x_i \partial x_j}(\xi) \bar{x}_i \bar{x}_j \right) \right| \leq \\ &\leq \frac{M}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{|\bar{x}_i| |\bar{x}_j|}{\bar{x}_n} \leq \frac{M}{2} K. \end{aligned}$$

Portanto

$$- \frac{M}{2} K \leq \frac{1}{\bar{x}_n} (\gamma(\bar{x}) - \sum_{i=1}^u \frac{\partial \gamma}{\partial x_i}(0) \bar{x}_i) \leq \frac{M}{2} K.$$

Ou ainda

$$- \frac{M}{2} K \bar{x}_n + \sum_{i=1}^u \frac{\partial \gamma}{\partial x_i}(0) \bar{x}_i \leq \gamma(\bar{x}) \leq \frac{M}{2} K \bar{x}_n + \sum_{i=1}^u \frac{\partial \gamma}{\partial x_i}(0) \bar{x}_i$$

Donde temos que γ verifica B.S.C.

C.Q.D.

Na demonstração de existência para o problema da área a hipótese " γ verifica B.S.C." dá a majoração do gradiente da solução sobre o bordo, entretanto a técnica de Rado [prop: 2.2] permite es

tender esta majoração a todo Ω .

É portanto claro que toda vez que se tem uma majoração do gradiente sobre o bordo se pode repetir a mesma técnica.

A seguir daremos uma majoração do gradiente sobre $\partial\Omega$ em hipóteses mais gerais e portanto teremos um teorema de existência mais geral.

3 - PROBLEMA DE PLATEAU EM DOMÍNIO CUJA FRONTEIRA POSSUI CURVATURA MÉDIA NÃO NEGATIVA

Uma função $w \in \text{Lip}(\bar{\Omega})$ se diz uma sobresolução (respectivamente subsolução) para o funcional da área se:

$$a(w) \leq a(v), \text{ para toda } v \in \text{Lip}(\bar{\Omega}), w \leq v$$

(respectivamente $w \geq v$) e com $\text{supp}(v-w) \subset\subset \Omega$ ⁽¹²⁾

LEMA 3.1 - Seja $u \in \text{Lip}_K(\bar{\Omega})$ (ou $\text{Lip}(\bar{\Omega})$) uma função mínimizante de $a(w)$ na classe

$$F = \{w \in \text{Lip}_K(\bar{\Omega}) \text{ ou } \text{Lip}(\bar{\Omega}) : w|_{\partial\Omega} = \gamma\}$$

e seja w^* uma sobresolução para o funcional da área em $\text{Lip}_K(\bar{\Omega})$ (ou $\text{Lip}(\bar{\Omega})$).

Se $\gamma \leq w^*$ sobre $\partial\Omega$, então $u \leq w^*$ em $\bar{\Omega}$.

(12) Dizemos que A é relativamente compacto em relação a B , se:

A aberto,

$\bar{A}$ compacto,

$\bar{A} \subset B$.

Notação: $A \subset\subset B$.

PROVA - Suponhamos (como no teor: 1.6) que o conjunto

$$A = \{x \in \Omega: u(x) > w^*(x)\} \neq \emptyset.$$

Sejam $w_+ = \max\{u, w^*\}$; $w_+ \in \text{Lip}_K(\bar{\Omega})$.

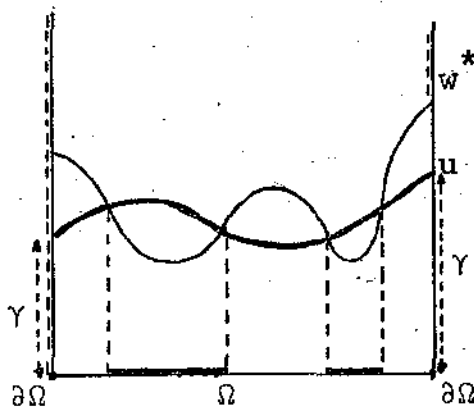
e

$$w_- = \min\{u, w^*\} ; w_- \in \text{Lip}_K(\bar{\Omega}).$$

Sabemos que $w_+ \geq w^*$, $w_+ = w^*$ sobre $\partial\Omega$ e

$$w_- = \gamma = u \text{ sobre } \partial\Omega,$$

portanto $a_\Omega(w^*) \leq a_\Omega(w_+)$.



Escrevamos $\Omega = A \cup (\Omega - A)$, união disjunta e teremos :

$$a_\Omega(w^*) \leq a_\Omega(w_+) = a_A(u) + a_{\Omega-A}(w^*)$$

$$a_\Omega(u) \leq a_\Omega(w_-) = a_A(w^*) + a_{\Omega-A}(u)$$

ou ainda

$$a_A(w^*) + a_{\Omega-A}(w^*) \leq a_A(u) + a_{\Omega-A}(w^*) \Rightarrow a_A(w^*) \leq a_A(u)$$

$$a_A(u) + a_{\Omega-A}(u) \leq a_A(w^*) + a_{\Omega-A}(u) \Rightarrow a_A(u) \leq a_A(w^*)$$

Portanto $a_A(u) = a_A(w^*)$

Como $w^* = u$ em ∂A , então (pelo teor: 1.6) $u = w^*$ em A , o que é absurdo.

Logo $A = \emptyset$, ou seja, $u \leq w^*$ em $\bar{\Omega}$.

C.Q.D.

Analogamente vale para subsolução.

LEMA 3.2 - Seja $u \in \text{Lip}_K(\bar{\Omega})$ (ou $\text{Lip}(\bar{\Omega})$) uma função minimizante de $a(w)$ na classe

$$F = \{w \in \text{Lip}_K(\bar{\Omega}) \text{ ou } \text{Lip}(\bar{\Omega}) : w|_{\partial\Omega} = \gamma\} \text{ e}$$

seja w_* uma subsolução para o funcional da área em $\text{Lip}_K(\bar{\Omega})$ (ou $\text{Lip}(\bar{\Omega})$).

Se $w_* \leq \gamma$ em $\partial\Omega$, então $w_* \leq u$ em $\bar{\Omega}$.

É claro que a existência de uma sobresolução e de uma subsolução para o funcional da área que vale γ sobre $\partial\Omega$, dá a majoração do gradiente sobre $\partial\Omega$.

Usando esses lemas e o corolário: 1.7 se demonstra a proposição seguinte como no parágrafo 2.

PROPOSIÇÃO 3.3 - Sejam $w_1(x)$ e $w_2(x)$ respectivamente uma sobresolução e uma subsolução para o funcional da área, tal que

$$w_1(x) = \gamma(x) = w_2(x), \text{ para todo } x \in \partial\Omega.$$

Sejam $K = \max\{|w_1|_1, |w_2|_1\}$ e u uma função minimizante da área na classe $L_{K+\epsilon}$ (com $\epsilon > 0$). Então $u \in \text{Lip}_K(\bar{\Omega})$ (i.e, u é mínimo em L_K).

PROVA - Como w_1 é sobresolução em $\text{Lip}(\bar{\Omega})$, $w_1 \in \text{Lip}(\bar{\Omega})$ e $a(w_1) \leq a(v)$, para toda $v \in \text{Lip}(\bar{\Omega})$, $w_1 \leq v$.

Como w_2 é subsolução em $\text{Lip}(\bar{\Omega})$, $w_2 \in \text{Lip}(\bar{\Omega})$ e $a(w_2) \geq a(v)$, para toda $v \in \text{Lip}(\bar{\Omega})$, $w_2 \geq v$.

De fato de

$$w_1 \in \text{Lip}(\bar{\Omega}) \Rightarrow \exists K_1: |w_1(x) - w_1(y)| \leq K_1 |x-y|, \forall x, y \in \bar{\Omega}.$$

$$w_2 \in \text{Lip}(\bar{\Omega}) \Rightarrow \exists K_2: |w_2(x) - w_2(y)| \leq K_2 |x-y|, \forall x, y \in \bar{\Omega}.$$

$$\begin{aligned} \text{Portanto} \quad |w_1|_1 &\leq k_1 \\ |w_2|_1 &\leq k_2 \end{aligned}$$

$$\text{Seja} \quad K = \max\{|w_1|_1, |w_2|_1\}$$

Assim

$$|w_1|_1 \leq k_1 \Rightarrow w_1 \in \text{Lip}_{k_1}(\bar{\Omega}) \Rightarrow w_1 \in \text{Lip}_K(\bar{\Omega})$$

$$|w_2|_1 \leq k_2 \Rightarrow w_2 \in \text{Lip}_{k_2}(\bar{\Omega}) \Rightarrow w_2 \in \text{Lip}_K(\bar{\Omega})$$

É claro que w_1 (e w_2) é sobresolução (subsolução) em $\text{Lip}_{K+\varepsilon}(\bar{\Omega})$, pois o é em $\text{Lip}_K(\bar{\Omega})$.

$$w_1 \in \text{Lip}_{K+\varepsilon}(\bar{\Omega}), \varepsilon > 0.$$

$$w_2 \in \text{Lip}_{K+\varepsilon}(\bar{\Omega}), \varepsilon > 0.$$

Usando lemas (3.1) e (3.2) temos ;

se $w_1 = \gamma = w_2$ em $\partial\Omega$, então $w_2 \leq u \leq w$ em $\bar{\Omega}$.

a) Sejam $x, x' \in \partial\Omega$ e consideremos

$$w_2(x) - w_2(x') \leq u(x) - u(x') \leq w_1(x) - w_1(x').$$

$$\begin{aligned} |u(x) - u(x')| &\leq \max\{|w_2(x) - w_2(x')|, |w_1(x) - w_1(x')|\} \leq \\ &\leq K |x - x'|. \end{aligned}$$

Portanto $u \in \text{Lip}_K(\bar{\Omega})$ para $x \in \partial\Omega$.

b) Sejam $x, x' \in \Omega$ e calculando $|u(x) - u(x')|$ usando a técnica de Rodó (prop: 2.2) obtemos:

$$|u(x) - u(x')| \leq K |x - x'|, \text{ para todo } x, x' \in \Omega$$

De (a) e (b) concluímos que

$$u \in \text{Lip}_K(\bar{\Omega})$$

C.Q.D.

Assim se u é solução em L_K , u é ainda em $L_{K'}$, para todo $K' > K$ e portanto

$$|u|_1 < K', \text{ para todo } K' > K.$$

A demonstração do teorema da existência para o problema da área é portanto reconduzida à construção de uma sobresolução e uma subsolução verificando as hipóteses da proposição 3.3. .

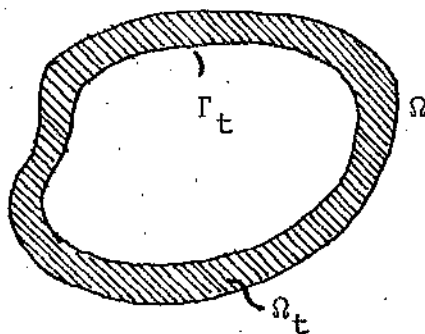
Vamos agora nos dedicar a esta construção.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado, com bordo $\partial\Omega$ de classe C^3 .

Indiquemos por:

$$\Omega_t = \{x \in \Omega: d(x, \partial\Omega) < t\} \text{ e}$$

$$\Gamma_t = \{x \in \Omega: d(x, \partial\Omega) = t\} \text{ com } t > 0.$$



Os seguintes resultados são verdadeiros:

(a.1) Existe $\varepsilon_0 > 0$, tal que para cada $x \in \Omega_{\varepsilon_0}$, existe um único $y \in \partial\Omega$ com $d(x, \partial\Omega) = |x-y|$.

(a.2) A função $d(x) = d(x, \partial\Omega) = \inf\{d(x, y), y \in \partial\Omega\}$ é de classe C^2 em Ω_{ε_0} e $|\text{grad } d(x)| = 1$.

(a.3) Indiquemos com $\Lambda(x)$ a curvatura média em x da curva de nível de Γ_t passando por x . Então

$$\begin{aligned} (n-1)\Lambda(x) &= -\Delta d(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{K_i(y)}{1-K_i(y)d(x)} \geq \sum_{i=1}^{n-1} K_i(y) = \\ &= (n-1)\Lambda(y), \end{aligned}$$

onde $y \in \partial\Omega$ é o ponto correspondente a x em $\partial\Omega$, $K_i(y)$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$) são as curvaturas principais de $\partial\Omega$ em y e $\Delta d = \text{div}(\text{grad } d) =$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 d}{\partial x_i^2}.$$

DEFINIÇÃO - Seja $\gamma: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Chamamos *barreira superior* em Ω_ϵ (relativa a γ) uma função $\mu: \bar{\Omega}_\epsilon \rightarrow \mathbb{R}$, com $0 < \epsilon < \epsilon_0$, tal que:

$$(\mu 1) \quad \mu \in C^2(\Omega_\epsilon) \cap \text{Lip}(\bar{\Omega}_\epsilon) ,$$

$$(\mu 2) \quad \mu = \gamma \text{ sobre } \partial\Omega; \quad \mu \geq 1 + \max_{\partial\Omega} |\gamma| \text{ sobre } \Gamma_\epsilon ,$$

$$(\mu 3) \quad \mathcal{E}(\mu) = (1 + |\nabla \mu|^2) \Delta \mu - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial \mu}{\partial x_i} \frac{\partial \mu}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \mu}{\partial x_i \partial x_j} \leq 0$$

em Ω_ϵ .

$$\text{Observe que } \Delta \mu = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \mu}{\partial x_i^2}$$

DEFINIÇÃO - Seja $\gamma: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função chamamos *barreira inferior* em Ω_ϵ (relativa a γ) uma função $\eta: \bar{\Omega}_\epsilon \rightarrow \mathbb{R}$, com $0 < \epsilon < \epsilon_0$, tal que:

$$(\eta 1) \quad \eta \in C^2(\Omega_\epsilon) \cap \text{Lip}(\bar{\Omega}_\epsilon) ,$$

$$(\eta 2) \quad \eta = \gamma \text{ sobre } \partial\Omega; \quad \eta \leq -1 - \max_{\partial\Omega} |\gamma| \text{ sobre } \Gamma_\epsilon ,$$

$$(\eta 3) \quad \mathcal{E}(\eta) \geq 0 \text{ em } \Omega_\epsilon .$$

Indicamos por $\mathcal{E}(\cdot)$ o operador de Euler relativo ao funcional da área.

PROPOSIÇÃO 3.4 - Sejam $\partial\Omega$ de classe C^3 e $\gamma(x)$ uma função C^2 sobre $\partial\Omega$. Suponhamos que a curvatura média de $\partial\Omega$ seja não negativa. Então existem barreiras superiores e inferiores.

PROVA - Construiremos somente uma barreira superior. De modo análogo se encontra barreira inferior.

Estendemos γ a uma função C^2 sobre $\bar{\Omega}$ ⁽¹³⁾ ($\gamma: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\tilde{\gamma} = \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$) e indicamos essa extensão acima com γ . (notação: $\tilde{\gamma} = \dot{\gamma}$).

Procuremos uma barreira do tipo:

$$\begin{aligned} \mu(x) &= \gamma(x) + f(d(x)) \text{ , onde} \\ f(s) &\in C^2([0, \varepsilon]) \text{ é tal que,} \\ [3.4] \quad \left\{ \begin{array}{l} f(0) = 0 \text{ ,} \\ f(\varepsilon) \geq 1 + 2 \max_{\bar{\Omega}} |\gamma| = F_1 \text{ em } \Gamma_\varepsilon \text{ ,} \\ f'(s) \geq 1 + |\gamma|_1 = F_2 \text{ em } [0, \varepsilon] \text{ ,} \\ f''(s) < 0 \text{ em } [0, \varepsilon] \text{ .} \end{array} \right. \end{aligned}$$

As condições $(\mu 1)$ e $(\mu 2)$ são facilmente verificadas

$(\mu 1)$ $\mu \in C^2(\Omega_\varepsilon) \cap \text{Lip}(\bar{\Omega}_\varepsilon)$, pois γ , f e d o são

$(\mu 2)$ $\mu = \gamma$ sobre $\partial\Omega$, $\mu \geq 1 + \max_{\partial\Omega} |\gamma|$ sobre Γ_ε .

De fato: Sabemos que $f(0) = 0$, logo $d(x) = d(x, \partial\Omega) = 0$ portanto $x \in \partial\Omega$.

Assim $\mu = \gamma$ em $\partial\Omega$.

⁽¹³⁾ Teorema de Extensão Tietze -

Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ fechado e seja $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ função limitada e contínua, então existe uma função $\tilde{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, tal que $\tilde{f}(x) = f(x)$, $\forall x \in D$ e tal que $\sup \{|f(x)|, x \in \mathbb{R}^n\} = \sup \{|f(x)|, x \in D\}$.

$$\begin{aligned} E \quad \mu(x) &= \gamma(x) + f(d(x)) \geq \gamma + 1 + 2 \max_{\bar{\Omega}} |\gamma| = \\ &= \gamma + \max_{\bar{\Omega}} |\gamma| + 1 + \max_{\bar{\Omega}} |\gamma| \geq 1 + \max_{\bar{\Omega}} |\gamma|. \end{aligned}$$

Portanto $\mu \geq 1 + \max_{\bar{\Omega}} |\gamma|$ sobre Γ_ε .

Verifiquemos agora a condição (μ_3) .

Devemos mostrar que

$$\xi(\mu) = (1 + |\nabla \mu|^2) \Delta \mu - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial \mu}{\partial x_i} \frac{\partial \mu}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \mu}{\partial x_i \partial x_j} \leq 0$$

em $[0, \varepsilon]$.

Se $\mu(x) = \gamma(x) + f(d(x))$, resulta:

$$\frac{\partial \mu}{\partial x_i} = \frac{\partial \gamma}{\partial x_i} + f'(d) \frac{\partial d}{\partial x_i}$$

$$\frac{\partial^2 \mu}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x_i^2} + f''(d) \left(\frac{\partial d}{\partial x_i} \right)^2 + f'(d) \frac{\partial^2 d}{\partial x_i^2}$$

$$\frac{\partial^2 \mu}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x_i \partial x_j} + f''(d) \frac{\partial d}{\partial x_i} \frac{\partial d}{\partial x_j} + f'(d) \frac{\partial^2 d}{\partial x_i \partial x_j}$$

$$\Delta \gamma = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x_i^2}, \quad \Delta d = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 d}{\partial x_i^2}$$

e calculemos a expressão

$$\xi(\mu) = (1 + |\nabla \mu|^2) \Delta \mu - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial \mu}{\partial x_i} \frac{\partial \mu}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \mu}{\partial x_i \partial x_j}$$

Notemos por

$$\boxed{1} = (1 + |\nabla \mu|^2) \Delta \mu$$

$$\boxed{2} = \sum_{i=1}^u \frac{\partial \mu}{\partial x_i} \frac{\partial \mu}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \mu}{\partial x_i \partial x_j}$$

$$\begin{aligned} \boxed{1} &= \left[1 + \left| \left(\frac{\partial Y}{\partial x_1} + f' \frac{\partial d}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial Y}{\partial x_n} + f' \frac{\partial d}{\partial x_n} \right) \right|^2 \right] (\Delta Y + \Delta f) = \\ &= \left\{ 1 + \left[\left(\frac{\partial Y}{\partial x_1} \right)^2 + 2f' \frac{\partial Y}{\partial x_1} \frac{\partial d}{\partial x_1} + f'^2 \left(\frac{\partial d}{\partial x_1} \right)^2, \dots, \left(\frac{\partial Y}{\partial x_n} \right)^2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2f' \frac{\partial Y}{\partial x_n} \frac{\partial d}{\partial x_n} + f'^2 \left(\frac{\partial d}{\partial x_n} \right)^2 \right] \right\} \cdot \left[\sum_{i=1}^u \frac{\partial^2 Y}{\partial x_i^2} + \sum_{i=1}^u \left(f'' \left(\frac{\partial d}{\partial x_i} \right)^2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + f' \frac{\partial^2 d}{\partial x_i^2} \right) \right] = \\ &= (1 + |\nabla Y|^2 + 2f' \sum_{i=1}^n \frac{\partial Y}{\partial x_i} \frac{\partial d}{\partial x_i} + f'^2) (\Delta Y + f'' + f' \Delta d) = \\ &= f''(1 + |\nabla Y|^2) + f' \left[2 \sum_{i=1}^n \frac{\partial Y}{\partial x_i} \frac{\partial d}{\partial x_i} \Delta Y + \Delta d (1 + |\nabla Y|^2) \right] + \\ &\quad + (f')^2 \left[\Delta Y + 2 \sum_{i=1}^n \frac{\partial Y}{\partial x_i} \frac{\partial d}{\partial x_i} \Delta d \right] + (f')^3 \Delta d + \Delta Y + \\ &\quad + |\nabla Y|^2 \Delta Y + 2f' f'' \sum_{i=1}^n \frac{\partial Y}{\partial x_i} \frac{\partial d}{\partial x_i} + (f')^2 f'' . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boxed{2} &= \sum_{i,j=1}^u \frac{(Y+f)}{\partial x_i} \frac{\partial (Y+f)}{\partial x_j} \frac{\partial^2 (Y+f)}{\partial x_i \partial x_j} = \\ &= \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial Y}{\partial x_i} + f' \frac{\partial d}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial Y}{\partial x_j} + f' \frac{\partial d}{\partial x_j} \right) \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial x_i \partial x_j} + f'' \frac{\partial d}{\partial x_i} \frac{\partial d}{\partial x_j} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + f' \frac{\partial^2 d}{\partial x_i \partial x_j} = \\
 & = f' \left[2 \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial \gamma}{\partial x_i} \frac{\partial d}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x_i \partial x_j} \right) + \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial \gamma}{\partial x_i} \frac{\partial \gamma}{\partial x_j} \frac{\partial^2 d}{\partial x_i \partial x_j} \right) \right] + \\
 & + (f')^2 \left[\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial d}{\partial x_i} \frac{\partial d}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x_i \partial x_j} + 2 \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial d}{\partial x_i} \frac{\partial \gamma}{\partial x_j} \frac{\partial^2 d}{\partial x_i \partial x_j} \right] + \\
 & + (f')^3 \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial d}{\partial x_i} \frac{\partial d}{\partial x_j} \frac{\partial^2 d}{\partial x_i \partial x_j} + f'' \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial \gamma}{\partial x_i} \frac{\partial \gamma}{\partial x_j} \frac{\partial d}{\partial x_i} \frac{\partial d}{\partial x_j} + \\
 & + 2f'f'' \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial \gamma}{\partial x_i} \frac{\partial d}{\partial x_j} \left(\frac{\partial d}{\partial x_j} \right)^2 + (f')^2 f'' \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial d}{\partial x_i} \right)^2 \left(\frac{\partial d}{\partial x_j} \right)^2 + \\
 & + \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial \gamma}{\partial x_i} \frac{\partial \gamma}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x_i \partial x_j}
 \end{aligned}$$

Fazendo agora [1] - [2], obtemos:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(\mu) & = f'' \left[1 + |\nabla \gamma|^2 - \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \gamma}{\partial x_i} \frac{\partial d}{\partial x_i} \right)^2 \right] + \\
 & + f' \left[2 \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \gamma}{\partial x_i} \frac{\partial d}{\partial x_i} \right) \Delta \gamma + \Delta d (1 + |\nabla \gamma|^2) - 2 \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial \gamma}{\partial x_i} \frac{\partial d}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x_i \partial x_j} - \right. \\
 & - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial \gamma}{\partial x_i} \frac{\partial \gamma}{\partial x_j} \frac{\partial^2 d}{\partial x_i \partial x_j} \left. \right] + (f')^2 \left[\Delta \gamma + 2 \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \gamma}{\partial x_i} \frac{\partial d}{\partial x_i} \right) \Delta d - \right. \\
 & - \sum_{i,j=1}^u \frac{\partial d}{\partial x_i} \frac{\partial d}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x_i \partial x_j} - 2 \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial \gamma}{\partial x_i} \frac{\partial d}{\partial x_j} \frac{\partial^2 d}{\partial x_i \partial x_j} \left. \right] +
 \end{aligned}$$

$$+ (f')^3 \left[\Delta d - \sum_{i,j=1}^u \frac{\partial d}{\partial x_i} \frac{\partial d}{\partial x_j} \frac{\partial^2 d}{\partial x_i \partial x_j} \right] + \xi(\gamma)$$

Por outro lado se $x \in \Omega_\epsilon$

$$\sum_{i,j=1}^u \frac{\partial d}{\partial x_i} \frac{\partial d}{\partial x_j} \frac{\partial^2 d}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{i,j=1}^u \frac{\partial \gamma}{\partial x_i} \frac{\partial d}{\partial x_j} \frac{\partial^2 d}{\partial x_i \partial x_j} = 0.$$

enquanto tais quantidades são invariantes com respeito a rotação e translação.

Resulta $\nabla d = (0, 0, \dots, 0, 1)$

e

$$\frac{\partial^2 d}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \begin{pmatrix} \frac{k_1}{1-dk_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{k_2}{1-dk_2} & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & \dots & \frac{k_{n-1}}{1-dk_{n-1}} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ora } \Delta d(x) = - \sum_{i=1}^n \frac{k_i(y)}{1-d(x)k_i(y)} \leq -\Lambda(y) \leq 0$$

Tendo $\partial\Omega$ curvatura média não negativa se tem por (a.3) que $\Delta d < 0$ e sendo $f'' < 0$, $f' \geq 1 + |\gamma|_1 \geq 1$

Temos que

$$\xi(\mu) \leq f'' + f' \left[2 \Delta \gamma \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \gamma}{\partial x_i} \frac{\partial d}{\partial x_i} \right) + \Delta d (1 + |\nabla \gamma|^2) \right] -$$

$$\begin{aligned}
 & - 2 \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial \gamma}{\partial x_i} \frac{\partial d}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x_i \partial x_j} - 2 \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial \gamma}{\partial x_i} \frac{\partial \gamma}{\partial x_j} \frac{\partial^2 d}{\partial x_i \partial x_j} \Big] + \\
 & + (f')^2 \left[\Delta \gamma + 2 \Delta d \sum_{i=1}^n \frac{\partial \gamma}{\partial x_i} \frac{\partial d}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial d}{\partial x_i} \frac{\partial d}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x_i \partial x_j} \right] + \\
 & + (f')^3 \Delta d + \zeta(\gamma) \leq
 \end{aligned}$$

$$\leq f'' + f' [] + (f')^2 [] + \zeta(\gamma) \leq$$

$$\leq f'' + C_1 (f')^2 \leq 0 \quad \text{se} \quad f'' > C_1 (f')^2 \quad \text{onde}$$

C_1 ($C_1 > 0$) é uma constante que depende da norma em C^2 das funções γ e d .

Portanto μ é barreira superior

C.Q.D.

Exemplo de aplicação da proposição:

Seja $f(S) = \frac{1}{A} \lg(BS+1)$, com $A, B > 0$.

Então

$$f'(S) = \frac{B}{A(BS+1)}, \quad f''(S) = - \frac{B^2}{A(BS+1)^2}$$

e

$$\begin{aligned}
 f''(S) + C_1 [f'(S)]^2 &= - \frac{B^2}{A(BS+1)^2} + C_1 \frac{B^2}{A^2(BS+1)^2} = \\
 &= \frac{B^2}{A(BS+1)} \left(\frac{C_1}{A} - 1 \right).
 \end{aligned}$$

Portanto se $A \geq C_1$ temos $\mathcal{E}(\mu) \leq 0$.

$$\mathcal{E}(\mu) \leq f'' + C_1 f'^2.$$

Vejamos que condições devemos ter sobre A e B para que f verifique a condição [3.4] da prop: 3.4:

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(\varepsilon) \geq 1 + 2 \max_{\bar{\Omega}} |\gamma| = F_1 \text{ em } \Gamma_\varepsilon \\ f'(S) \geq 1 + |\gamma|_1 = F_2 \text{ em } [0, \varepsilon] \\ f''(S) < 0 \text{ em } [0, \varepsilon] \end{cases}$$

Se $A = C_1$ devemos ter:

$$f(0) = \frac{1}{A} \lg 1 = 0$$

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{A} \lg(B\varepsilon+1) = \frac{\lg(B\varepsilon+1)}{C_1} \geq F_1 \quad (1)$$

$$f'(S) = \frac{B}{A(BS+1)} = \frac{B}{C_1(BS+1)} \geq F_2 \text{ em } [0, \varepsilon_0] \quad (2)$$

e sendo:

$$\frac{B}{C_1(BS+1)} \geq \frac{B}{C_1(B\varepsilon_0+1)} \geq F_2$$

basta que $B \geq F_2 C_1 (B\varepsilon_0+1)$ (de (2))

$$\lg B \geq \lg F_2 C_1 + \lg(B\varepsilon_0+1) \stackrel{(1)}{\geq} \lg F_2 C_1 + C_1 F_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lg(B\varepsilon_0+1) \geq C_1 F_1 \Rightarrow B\varepsilon_0+1 \geq e^{C_1 F_1}$$

portanto

$$B \geq \frac{e^{C_1 F_1} - 1}{\varepsilon_0}$$

temos ainda,

$$\lg B \geq \lg F_2 C_1 + \lg(B \varepsilon_0 + 1) \geq \lg F_2 C_1 + C_1 F_1$$

$$\Rightarrow \lg B \geq \lg F_2 C_1 + C_1 F_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lg\left(\frac{B}{F_2 C_1}\right) \geq C_1 F_1 \Rightarrow \frac{B}{F_2 C_1} \geq e^{C_1 F_1}$$

portanto

$$B \geq F_2 C_1 e^{C_1 F_1}$$

E portanto basta tomarmos:

$$B = \max\{F_2 C_1 e^{C_1 F_1}; \frac{e^{C_1 F_1} - 1}{\varepsilon_0}\}$$

ainda

$$\lg(B \varepsilon + 1) \geq C_1 F_1 \quad (\text{de (1)})$$

$$B \varepsilon + 1 \geq e^{C_1 F_1} \Rightarrow \varepsilon > \frac{e^{C_1 F_1} - 1}{B}$$

PROPOSIÇÃO 3.5 - Uma barreira superior μ em Ω_ε é uma sobresol
lução em Ω_ε .

PROVA - Dado $\lambda \in \text{Lip}(\bar{\Omega}_\varepsilon)$ e $\text{supp } \lambda \subset \subset \Omega_\varepsilon$

Consideremos a função

$$g(t) = \int_{\Omega_\varepsilon} \sqrt{1 + |\nabla(\mu + t\lambda)|^2} \, dx = a_{\Omega_\varepsilon}(\mu + t\lambda)$$

pois $\mu + t\lambda \in \text{Lip}(\bar{\Omega}_\varepsilon)$ (para $t \in [0, 1]$).

Nesse caso temos:

$$\begin{aligned} g'(0) &= \int_{\Omega_\varepsilon} \left(\sum_{i=1}^u \frac{\partial \mu}{\partial x_i} \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} \right) (1 + |\nabla \mu|^2)^{-1/2} \, dx = \\ &= - \int_{\Omega_\varepsilon} \lambda(x) \sum_{i=1}^u \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\frac{\partial \mu}{\partial x_i}}{\sqrt{1 + |\nabla \mu|^2}} \right) \, dx = \\ &= - \int_{\Omega_\varepsilon} \lambda(x) \cdot \frac{\zeta(\mu)}{(\sqrt{1 + |\nabla \mu|^2})^3} \, dx \end{aligned}$$

Como μ é barreira superior em Ω_ε temos

$$\frac{\zeta(\mu)}{(\sqrt{1 + |\nabla \mu|^2})^3} \leq 0.$$

Portanto se $\lambda \geq 0$ então $g'(0) \geq 0$.

E além disso g é estritamente convexa, pois a área 0 é (i.e: $g''(t) > 0, \forall t \in \mathbb{R}$).

$$\left. \begin{aligned} g'(0) &\geq 0 \\ g''(t) &> 0, \forall t \end{aligned} \right\} \Rightarrow g \text{ é crescente.}$$

Ou seja $g(0) \leq g(1)$, isto é,

$$a(\mu) \leq a(\mu + \lambda), \text{ para todo } \mu + \lambda \in \text{Lip}(\bar{\Omega}_\varepsilon),$$

$$\mu \leq \mu + \lambda \text{ (pois } \lambda \geq 0 \text{)}.$$

e

$$\text{Supp } (\mu + \lambda - \mu) = \text{Supp } \lambda \subset \subset \Omega_\varepsilon \text{ (por hipótese).}$$

Logo μ é sobressolução em Ω_ε .

C.Q.D.

Veremos agora que se μ é uma barreira superior em Ω_ε , então existe uma sobressolução w em Ω , tal que $w = \gamma$ sobre $\partial\Omega$.

PROPOSIÇÃO 3.6 - Suponhamos que μ é barreira superior em Ω_ε .

Seja

$$w(x) = \begin{cases} \min \{ \mu, \max_{\partial\Omega} |\gamma| \} & \text{em } \Omega_\varepsilon \\ \max_{\partial\Omega} |\gamma| & \text{em } \Omega - \Omega_\varepsilon. \end{cases}$$

Então w é sobressolução em Ω que vale γ sobre $\partial\Omega$.

PROVA - Seja $v \in \text{Lip}(\bar{\Omega})$, $w \leq v$ e $\text{Supp}(v-w) \subset \subset \Omega$ e considere

mos

$$\tilde{v} = \min \{ v, \max_{\partial\Omega} |\gamma| \}$$

observando que $a(\tilde{v}) \leq a(v)$.

Em Ω_ε temos $w \leq v$ e w é sobresolução em Ω_ε ⁽¹⁴⁾ (pois μ é sobresolução).

Em $\Omega - \Omega_\varepsilon$ temos,

$$w = \max_{\partial\Omega} |\gamma| \leq \min\{v, \max_{\partial\Omega} |\gamma|\} = \max_{\partial\Omega} |\gamma| = \tilde{v}$$

$$w \leq \tilde{v} \Rightarrow a(w) \leq a(\tilde{v}) \text{ em } \Omega - \Omega_\varepsilon$$

Além disso, $u = \gamma$ sobre $\partial\Omega_\varepsilon$ (pois μ é barreira superior).

Em $\partial\Omega_\varepsilon$

$$w = \min\{\mu, \max_{\partial\Omega} |\gamma|\} = \min\{\gamma, \max_{\partial\Omega} |\gamma|\} = \gamma = \mu.$$

Portanto $w = \gamma$ sobre $\partial\Omega_\varepsilon$ ($\partial\Omega_\varepsilon = \partial\Omega \cup \Gamma_\varepsilon$).

Logo $w = \gamma$ sobre $\partial\Omega$.

Donde concluímos que w é uma sobresolução em Ω que vale γ sobre $\partial\Omega$.

C.Q.D.

TEOREMA 3.7 - Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado com $\partial\Omega$ de classe C^3 e seja $\gamma \in C^2(\partial\Omega)$. Suponhamos que a curvatura média de $\partial\Omega$ seja não negativa. Então existe uma única função $u \in \text{Lip}(\bar{\Omega})$ tendo área mínima na classe

$$\{z \in \text{Lip}(\bar{\Omega}) : z = \gamma \text{ sobre } \partial\Omega\}$$

(14) Dado duas sobresoluções, então o mínimo entre as duas é ainda uma sobresolução.

OBSERVAÇÃO - O teorema 3.7 para dimensão $n = 2$ se resume substancialmente no teorema 2.3 ou num teorema análogo que se obtém da suposição 2.4; pois para $n = 2$, curvatura média de $\partial\Omega$ não negativa é equivalente a convexidade do domínio.

Entretanto para $n > 2$ este resultado permite resolver o problema de Plateau num domínio Ω não convexo.

Nota-se que no teorema 3.7 se tem a hipótese de $\partial\Omega$ ser de classe C^3 , entretanto no teorema 2.3, $\partial\Omega$ é localmente Lipschitziana.

4 - PROBLEMA DE PLATEAU COM DADO CONTÍNUO

Vamos agora estudar o Problema de Plateau (não paramétrico) no caso em que a dada função γ seja contínua e demonstrar que sob as hipóteses feitas sobre Ω (Ω uniformemente convexo ou $\partial\Omega \in C^3$ e curvatura média de $\partial\Omega$ não negativa) existe uma função contínua sobre $\bar{\Omega}$ que minimiza a área (de Lebesgue) na classe

$$\{z \in C^0(\bar{\Omega}) : z = \gamma \text{ sobre } \partial\Omega\}$$

Para demonstrar este resultado usaremos um procedimento de aproximação. Mostraremos que se $\{\gamma_n\}$ é uma sequência de funções regulares (funções de classe C^1) que converge uniformemente a γ , então a solução do Problema de Plateau com dado γ_n converge uniformemente a uma função u que é solução com dado γ .

Para fazer isto é útil o seguinte lema que dá uma majoração

da área de uma função Lipschitziana, solução do Problema de Plateau, em termos da área de uma função contínua sobre $\bar{\Omega}$.

LEMA 4.1 - Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto com $\partial\Omega$ de classe C^3 e seja $u \in \text{Lip}(\bar{\Omega})$ uma função de área mínima na classe:

$$\{z \in \text{Lip}(\bar{\Omega}), \quad z = \gamma \text{ sobre } \partial\Omega\}$$

Então para toda $v \in C^0(\bar{\Omega})$ temos:

$$[4.1] \quad a(u) \leq a(v) + \int_{\partial\Omega} |v-u| dH_{n-1}$$

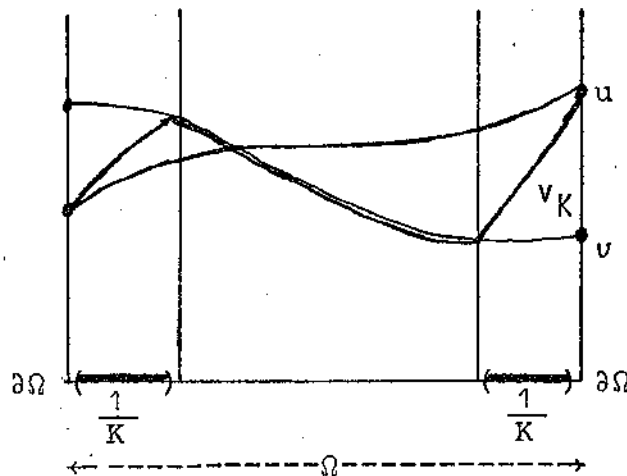
PROVA - Basta provar [4.1] no caso $v \in \text{Lip}(\bar{\Omega})$.

Seja $\eta_K(x) = \max \{0, 1 - K d(x)\}$, $K \in \mathbb{Z}^{++}$ e consideremos $v_K(x) = v + (u-v)\eta_K = v(1-\eta_K) + \eta_K u$.

Se $d(x, \partial\Omega) > \frac{1}{K}$, então $\eta_K(x) = 0 \Rightarrow v_K(x) = v(x)$.

Se $x \in \partial\Omega$, então $d(x, \partial\Omega) = 0 \Rightarrow \eta_K(x) = 1 \Rightarrow v_K(x) = u(x)$.

Temos que $v_K \in \text{Lip}(\bar{\Omega})$ e $v_K = u$ sobre $\partial\Omega$



portanto

$$\begin{aligned}
 a(u) &\leq a(v_K) = \int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla[v + (u-v) \cdot \eta_K]|^2} \, dx = \\
 &= \int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla v + \nabla[(u-v) \cdot \eta_K]|^2} \, dx \leq \quad (15) \\
 &\leq \int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla v|^2} \, dx + \int_{\Omega} |\nabla[(u-v) \cdot \eta_K]| \, dx = \\
 &= a(v) + \int_{\Omega} |\nabla[(u-v) \cdot \eta_K]| \, dx .
 \end{aligned}$$

$$\boxed{a(u) \leq a(v) + \int_{\Omega} |\nabla[(u-v) \cdot \eta_K]| \, dx} \quad (*)$$

$$\begin{aligned}
 &\int_{\Omega} |\nabla[(u-v) \cdot \eta_K]| \, dx = \\
 &= \int_{\Omega} |\eta_K \nabla(u-v) + (u-v) \nabla \eta_K| \, dx \leq \\
 &\leq \int_{\Omega} |\eta_K| |\nabla(u-v)| \, dx + \int_{\Omega} |u-v| |\nabla \eta_K| \, dx
 \end{aligned}$$

a) Então para $K \rightarrow +\infty$, temos

(15) Se $a, b \in \mathbb{R}^n$ temos $\sqrt{1 + |a+b|^2} \leq \sqrt{1 + |a|^2} + |b|$.

$$\lim_{K \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \eta_K |\nabla(u-v)| dx = 0 .$$

De fato: como $\{\eta_K(x) \nabla(u-v)(x)\}$ é sequência de funções integráveis,

$$|\eta_K(x) \nabla(u-v)(x)| \leq 1 |\nabla(u-v)(x)| \leq M, \text{ para todo } K \in \mathbb{Z}^{++}$$

e para todo $x \in \bar{\Omega}$ e

$$\lim_{K \rightarrow +\infty} \eta_K(x) = 0 \text{ para cada } x \in \bar{\Omega} .$$

Então pelo teorema da convergência Dominada de Lebesgue ⁽¹⁵⁾ segue-se que:

$$\lim_{K \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \eta_K |\nabla(u-v)| dx = \int_{\Omega} 0 = 0$$

b) A integral $\int_{\Omega} |u-v| |\nabla \eta_K| dx = K \int_{\Omega_1} |u-v| dx$, pois

$$|\nabla \eta_K| = \begin{cases} K |\nabla d(x)| = K & \text{em } \Omega_1 \\ 0 & \text{em } \Omega - \Omega_1 \end{cases}$$

⁽¹⁵⁾ Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue -

Seja $\{f_n\}$ sequência de funções somáveis definidas num conjunto E de medida finita e suponhamos que exista um número M , tal que $|f_n(x)| \leq M$, $\forall n$, $\forall x$.

Se $f_n \rightarrow f$ para cada $x \in E$, então $\int_E f_n \rightarrow \int_E f$.

$$(\Omega = \Omega_{\frac{1}{K}} \cup (\Omega - \Omega_{\frac{1}{K}}))$$

Então para $K \rightarrow +\infty$ temos:

$$\lim_{K \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} |u-v| |\nabla \eta_K| dx = \lim_{K \rightarrow +\infty} K \int_{\Omega_{\frac{1}{K}}} |u-v| dx$$

$$\text{mas, } \lim_{K \rightarrow +\infty} K \int_{\Omega_{\frac{1}{K}}} |u-v| dx = \int_{\partial \Omega} |u-v| dH_{n-1}$$

logo

$$\lim_{K \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} |u-v| |\nabla \eta_K| dx = \int_{\partial \Omega} |u-v| dH_{n-1}$$

Então de (a) e (b) temos:

$$\lim_{K \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} |\nabla [(u-v) \eta_K]| dx \leq \int_{\partial \Omega} |u-v| dH_{n-1}$$

Voltando a expressão $\textcircled{*}$ e fazendo $K \rightarrow +\infty$, chegamos a expressão

$$a(u) \leq a(v) + \int_{\partial \Omega} |u-v| dH_{n-1} \text{ para } v \in \text{Lip}(\bar{\Omega})$$

Seja agora $v \in C^0(\bar{\Omega})$. Por definição temos

$$a(v) = \inf \left\{ \lim_{n \rightarrow +\infty} \{ \inf a(v_n), v_n \in \text{Lip}(\bar{\Omega}), v_n \neq v \text{ em } \bar{\Omega} \} \right.$$

ou equivalentemente

para todo $\varepsilon > 0$, existe uma sequência $\{v_n\} \subset \text{Lip}(\bar{\Omega})$, tal que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a(v_n) < a(v) + \varepsilon \text{ e}$$

$v_n \neq v$ em $\bar{\Omega}$.

Como $v_n \in \text{Lip}(\bar{\Omega})$, vale [4.1], isto é,

$$a(u) \leq a(v_n) + \int_{\partial\Omega} |u - v_n| dH_{n-1}$$

e portanto

$$a(u) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \inf a(v_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\partial\Omega} |u - v_n| dH_{n-1},$$

$$a(u) \leq a(v) + \varepsilon + \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\partial\Omega} |u - v_n| dH_{n-1},$$

$$a(u) \leq a(v) + \int_{\partial\Omega} |u - v| dH_{n-1} + \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

como ε é arbitrário, temos

$$a(u) \leq a(v) + \int_{\partial\Omega} |u - v| dH_{n-1} \text{ para}$$

toda $v \in C^0(\bar{\Omega})$.

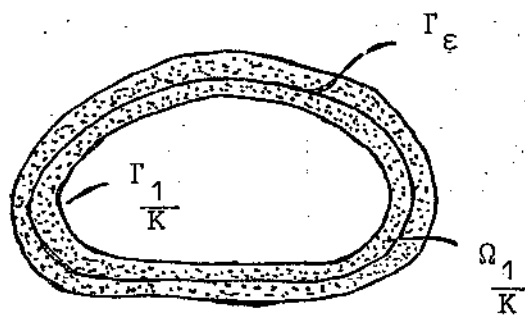
C.Q.D.

Observação: Mostraremos aqui o resultado citado na demonstração anterior, ou seja,

$$\lim_{K \rightarrow +\infty} K \int_{\Omega_{\frac{1}{K}}} |u-v| dx = \int_{\partial\Omega} |u-v| dH_{n-1}$$

De fato: Podemos escrever

$$K \int_{\Omega} |u-v| dx = K \int_0^{\frac{1}{K}} \left[\int_{\Gamma_\varepsilon} |u-v| dH_{n-1} \right] d\varepsilon$$



Seja $\psi(\varepsilon) = \int_{\Gamma_\varepsilon} |u-v| dH_{n-1}$, então pelo teorema do valor médio, existe $\varepsilon_K \in (0, \frac{1}{K})$, tal que

$$K \int_0^{\frac{1}{K}} \left[\int_{\Gamma_\varepsilon} |u-v| dH_{n-1} \right] d\varepsilon = K \int_{\Gamma_{\varepsilon_K}} |u-v| dH_{n-1} \frac{1}{K}$$

E agora passando ao limite quando $K \rightarrow +\infty$, temos

$$\frac{1}{K} \rightarrow 0, \text{ portanto } \varepsilon_K \rightarrow 0 \quad e$$

consequentemente $\Gamma_{\epsilon_K} \rightarrow \Gamma_0 = \partial\Omega$.

E finalmente

$$\lim_{K \rightarrow +\infty} K \int_{\Gamma_{\epsilon_K}}^1 |u-v| dH_{n-1} = \int_{\partial\Omega} |u-v| dH_{n-1}$$

Ou ainda

$$\lim_{K \rightarrow +\infty} K \int_{\Omega_{\frac{1}{K}}} |u-v| dx = \int_{\partial\Omega} |u-v| dH_{n-1}$$

C.Q.D

TEOREMA 4.2 - (da existência para o problema da área em $C^0(\bar{\Omega})$).

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^3 e seja γ função contínua sobre $\partial\Omega$. Suponhamos que a curvatura média de $\partial\Omega$ seja não negativa.

Então existe uma função $u \in C^0(\bar{\Omega})$ que minimiza funcional da área na classe

$$\{z \in C^0(\bar{\Omega}) : z = \gamma \text{ sobre } \partial\Omega\}$$

PROVA - Dado $\gamma : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, então pelo teorema de Tietze existe $\tilde{\gamma} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, tal que $\tilde{\gamma}(x) = \gamma(x)$, para todo $x \in \partial\Omega$.

Temos então $\tilde{\gamma}$ a extensão de γ em $\bar{\Omega}$, contínua em $\bar{\Omega}$, então pe

pelo teorema da aproximação polinomial ⁽¹⁷⁾ podemos aproximar $\tilde{\gamma}$ uniformemente por meio de polinômios γ_n , é claro $\gamma_n \in C^2(\mathbb{R}^n)$, para todo n .

A sequência γ_n restrita a $\partial\Omega$ converge uniformemente a $\tilde{\gamma} = \gamma$, isto é,

$$\gamma_n \rightarrow \tilde{\gamma} \text{ em } \partial\Omega \text{ ou } \max_{\partial\Omega} |\gamma_n - \tilde{\gamma}| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Então pelo teorema 3.7 existe uma única $u_n \in \text{Lip}(\bar{\Omega})$ que minimiza o funcional da área na classe

$$\{z \in \text{Lip}(\bar{\Omega}) : z = \gamma_n \text{ sobre } \partial\Omega\}$$

E pelo corolário 1.7, vem

$$\begin{aligned} \max_{\bar{\Omega}} |u_n - u_m| &= \max_{\partial\Omega} |u_n - u_m| = \\ &= \max_{\partial\Omega} |\gamma_n - \gamma_m| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Assim pelo critério de Cauchy para a convergência uniforme ⁽¹⁸⁾,
como

⁽¹⁷⁾ Teorema de Aproximação Polinomial -

Sejam $K \subset \mathbb{R}^p$, K compacto, e $f: K \rightarrow \mathbb{R}^q$ função contínua.

Então, existe uma função polinomial $p: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$, tal que $|f(x) - p(x)| < \varepsilon$, $\forall x \in K$.

⁽¹⁸⁾ Critério de Cauchy para convergência uniforme -

Seja $D \subset \mathbb{R}^p$ e seja $\{f_n\}$ uma sequência de funções limitadas, $f_n: D \rightarrow \mathbb{R}^q$.

Então existe uma função para a qual $\{f_n\}$ converge uniformemente em D se, e somente se,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M(\varepsilon) \in \mathbb{N} : m, n \geq M(\varepsilon) \Rightarrow \|f_n - f_m\|_D < \varepsilon.$$

$u_n: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ são contínuas $\forall n$, portanto u_n são limitadas, $\forall n$.

E para todo $\varepsilon > 0$, existe $M \in \mathbb{N}$, tal que se $m, n \geq M$, temos $\max_{\bar{\Omega}} |u_n - u_m| = \|u_n - u_m\|_{\bar{\Omega}} < \varepsilon$. Então existe uma função contínua ⁽¹⁹⁾ u para a qual u_n converge uniformemente em $\bar{\Omega}$, ou seja,

$$u_n \rightarrow u, \quad u \in C^0(\bar{\Omega}).$$

Obviamente $u = \gamma$ sobre $\partial\Omega$ (u é a solução procurada).

De fato:

Seja agora $z \in C^0(\bar{\Omega})$, tal que $z = \gamma$ sobre $\partial\Omega$. Então pelo lema 4.1 temos

$$a(u_n) \leq a(z) + \int_{\partial\Omega} |u_n - z| dH_{n-1}$$

mas, $u_n = \gamma_n$ sobre $\partial\Omega$ e $z = \gamma$ sobre $\partial\Omega$.

Agora passando ao limite,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a(u_n) \leq a(z) + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\partial\Omega} |\gamma_n - \gamma| dH_{n-1}$$

e usando a semicontinuidade inferior do funcional área, vem

$$a(u) \leq a(z)$$

⁽¹⁹⁾ Teorema —

Seja $\{f_n\}$ uma sequência de funções contínuas, $f_n: D \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$, tal que $f_n \rightrightarrows f$ sobre D . Então f é contínua.

Portanto existe $u \in C^0(\bar{\Omega})$ de área mínima na classe

$$\{z \in C^0(\bar{\Omega}) : z = \gamma \text{ sobre } \partial\Omega\}$$

C.Q.D.

OBSERVAÇÃO - Por enquanto não provamos a unicidade da solução. O que podemos observar é que as soluções que obtemos como limite de pontos de mínimo sobre o problema aproximante são únicas.

É claro que não é possível deduzir a unicidade da solução com os mesmos métodos do caso de pontos de mínimos na classe das funções Lipschitzianas.

Vamos agora provar que a condição "curvatura média de $\partial\Omega$ não negativa" é necessária para a existência do mínimo em $C^0(\bar{\Omega})$ ou em $Lip(\bar{\Omega})$.

O resultado de regularidade: ⁽²⁰⁾

"Seja u um ponto de mínimo para o funcional $a(u)$ na classe

$$\{z \in C^0(\bar{\Omega}) : z = \gamma \text{ sobre } \partial\Omega\} \text{ ou na classe}$$

$$\{z \in Lip(\bar{\Omega}) : z = \gamma \text{ sobre } \partial\Omega\}.$$

$$\text{Então } u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}),"$$

nos permite afirmar que u minimiza o funcional $a(u)$ em qualquer das classes acima é equivalente a dizer que u é solução do Problema de Dirichlet para a equação das superfícies mínimas:

⁽²⁰⁾ cf. teor. 3. de [5] .

$$(1) \quad \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)}{\sqrt{1+|\nabla u(x)|^2}} \right) = 0, \quad \forall x \in \Omega.$$

$$(2) \quad u(x) = \gamma(x), \quad \forall x \in \partial\Omega.$$

isto é, $u \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ e u verifica (1) e (2).

Indicamos com M o operador das superfícies mínimas, isto é,

$$M(.) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\frac{\partial}{\partial x_i}(.)}{\sqrt{1+|\nabla .|^2}} \right)$$

e com $\Lambda(y)$ = curvatura da fronteira $\partial\Omega$ em y .

OBSERVAÇÃO - Já vimos que se $M(u) = 0$, então u é superfície de área mínima (Prop: 1.5).

Calculemos agora $M(u)$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\frac{\partial u}{\partial x_i}}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} \right) &= \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} - \sum_{i=1}^n \frac{\frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} (\sqrt{1+|\nabla u|^2})}{1+|\nabla u|^2} = \end{aligned}$$

$$= \frac{\Delta u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_j}}{(\sqrt{1+|\nabla u|^2})^3} =$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{1+|\nabla u|^2})^3} \left[(1+|\nabla u|^2) \Delta u - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right]$$

Portanto temos

$$M(u) = \frac{\xi(u)}{(1+|\nabla u|^2)^{3/2}}$$

Logo se $\xi(u) \leq 0$, então $M(u) \leq 0$ ou vice-versa.

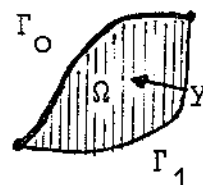
PROPOSIÇÃO 4.3 - Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado e seja $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, com Γ_0 e Γ_1 fechados e $\Gamma_1 \in C^1$. Seja $u \in C^2(\Omega)$ uma função, tal que

$$\begin{cases} M(u) = 0 \text{ em } \Omega \\ u \text{ contínua sobre } \Gamma_0 \\ u \text{ de classe } C^1 \text{ sobre } \Gamma_1 \end{cases}$$

Seja $w \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ uma sobre-resolução, tal que $\frac{dw}{dn} = -\infty$ nos pontos internos a Γ_1 .

Se $u \leq w$ sobre Γ_0 , então $u \leq w$ em $\bar{\Omega}$.

PROVA - Dado $M(u) = 0$ em Ω , temos que u é superfície de área mínima



$$\left. \begin{array}{l} u \in C^2(\Omega) \\ u \in C^0(\Gamma_0) \\ u \in C^1(\Gamma_1), \Gamma_1 \in C^1 \end{array} \right\} \Rightarrow u \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u \in C^0(\bar{\Omega}) \cap \text{Lip}(\bar{\Omega})$$

a) Se $u \leq w$ em Γ_1 . Como temos $u \leq w$ em Γ_0 (por hipótese), podemos escrever

$u \leq w$ em $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, e portanto pelo lema 3.1, $u \leq w$ em $\bar{\Omega}$.

b) Suponhamos agora que

$$\gamma = \max_{\Gamma_1} (u-w) > 0$$

$$0 < u-w \leq \max_{\Gamma_1} (u-w) = \gamma$$

$$u(x) \leq w(x) + \gamma \text{ em } \Gamma_1$$

$$u(x) \leq w(x) \text{ em } \Gamma_0 \Rightarrow u(x) \leq w(x) + \gamma \text{ em } \Gamma_0$$

Nesse caso

$$u(x) \leq w(x) + \gamma \text{ em } \partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \text{ e portanto pelo lema 3.1,}$$

$$u \leq w + \gamma \text{ em } \bar{\Omega}.$$

Do fato de Γ_1 ser fechado existe um ponto $y \in \overset{\circ}{\Gamma}_1$ ($\overset{\circ}{\Gamma}_1$ = interior

de Γ_1), tal que

$$u(y) = w(y) + \gamma$$

Segue agora que

$$\begin{aligned} \frac{du}{dn}(y) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{u(y+hn) - u(y)}{h} \leq \\ &\leq \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{w(y+hn) - w(y)}{h} = \frac{dw}{dn}(y) = -\infty, \end{aligned}$$

o que é absurdo, pois $u \in C^1(\Gamma_1)$.

Portanto de (a) e (b) temos que

$$u \leq w \text{ sobre } \bar{\Omega}.$$

C.Q.D.

Usando a proposição 4.3 veremos a seguir que se em $y \in \partial\Omega$ se tem $\Lambda(y) < 0$, existe então um contorno Γ_1 em $\partial\Omega$ de y , tal que se u é solução da equação da superfície mínima em Ω e $u = \gamma$ sobre $\partial\Omega$, então $|u|$ se majora em termos de $|\gamma|$ restrita a $\partial\Omega - \Gamma_1$.

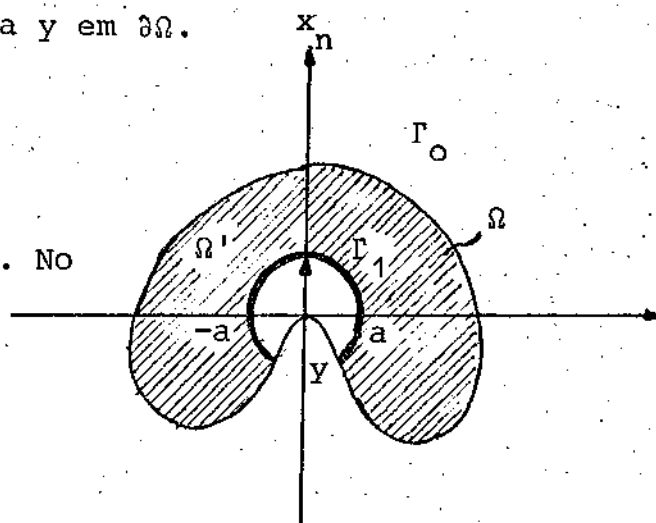
LEMA 4.4 - Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado com $\partial\Omega$ de classe C^3 e seja $y \in \partial\Omega$ em ponto onde $\Lambda(y) < 0$. Então para cada $\varepsilon > 0$, existe um contorno Γ_1 de y sobre $\partial\Omega$, tal que se $u \in C^0(\bar{\Omega})$ tem área mínima em Ω e $u = \gamma$ sobre $\partial\Omega$, então:

$$|u(x)| < \max_{\partial\Omega - \Gamma_1} |\gamma| + \varepsilon, \text{ para todo } x \in \Omega.$$

PROVA - Podemos supor $y = 0$ e o eixo x_n dirigido segundo a normal a y em $\partial\Omega$.

Seja $a > 0$ (bem pequeno). No conjunto $\Omega' = \Omega \cap \{x: |x| > a\}$ consideremos a função

$$V(x) = b - a \operatorname{arc} \cosh \frac{|x|}{a}$$



Resulta

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = -a \frac{\frac{x_i}{|x|}}{\sqrt{|x|^2 - a^2}},$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_j} \frac{x_i}{x_j} = -a \frac{\frac{\partial_{ij}}{|x|} - \frac{x_i x_j}{|x|^3}}{\sqrt{|x|^2 - a^2}} + a \frac{x_i x_j}{|x| (\sqrt{|x|^2 - a^2})^3},$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (|x|) = \frac{x_i}{|x|},$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{x_i}{|x|} \right) = \frac{\partial_{ij} |x| - \frac{x_i x_j}{|x|}}{|x|^2}$$

$$\Delta V = \text{div}(\text{grad } V) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2}$$

Como

$$\xi(V) = (1 + |\nabla V|^2) \Delta V - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{\partial V}{\partial x_j} \frac{\partial^2 V}{\partial x_j \partial x_i}$$

obtemos

$$\boxed{\xi(V) = - \frac{(n-2) a |x|}{(|x|^2 - a^2)^{3/2}}}$$

De fato:

Sejam $\boxed{1} = (1 + |\nabla V|^2) \Delta V$

$$\boxed{2} = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{\partial V}{\partial x_j} \frac{\partial^2 V}{\partial x_j \partial x_i}$$

Desenvolvemos temos:

$$\boxed{1} = \left\{ 1 + a^2 \left[\frac{\left(\frac{x_1}{|x|}\right)^2 + \dots + \left(\frac{x_n}{|x|}\right)^2}{|x|^2 - a^2} \right] \right\} \Delta V =$$

$$= \left[1 + \frac{a^2}{|x|^2 - a^2} \right] \Delta V = \frac{|x|^2}{|x|^2 - a^2} \Delta V$$

$$\begin{aligned}
 \Delta V &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2} = \sum_{i=1}^n \left[-a \frac{\frac{1}{|x|} - \frac{x_i^2}{|x|^3}}{\sqrt{|x|^2 - a^2}} + a \frac{x_i^2}{|x| (|x|^2 - a^2)^{3/2}} \right] = \\
 &= -a \left[\frac{\frac{1}{|x|} - \frac{x_1^2}{|x|^3}}{\sqrt{|x|^2 - a^2}} + \frac{\frac{1}{|x|} - \frac{x_2^2}{|x|^3}}{\sqrt{|x|^2 - a^2}} + \dots + \frac{\frac{1}{|x|} - \frac{x_n^2}{|x|^3}}{\sqrt{|x|^2 - a^2}} \right] + \\
 &+ a \left[\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{|x| (|x|^2 - a^2)^{3/2}} \right] \\
 &= -a \frac{\left(\frac{n}{|x|} - \frac{1}{|x|} \right)}{\sqrt{|x|^2 - a^2}} + a \frac{|x|}{(\sqrt{|x|^2 - a^2})^3} = \\
 &= -\frac{(n-1)a}{|x| \sqrt{|x|^2 - a^2}} + \frac{a|x|}{(\sqrt{|x|^2 - a^2})^3} = \\
 &= -\frac{(n-1)a(|x|^2 - a^2) + a|x|^2}{|x| (\sqrt{|x|^2 - a^2})^3}
 \end{aligned}$$

Logo

$$\boxed{1} = \frac{a|x|}{|x|^2 - a^2} \left(- \frac{(n-1)(|x|^2 - a^2) + |x|^2}{(\sqrt{|x|^2 - a^2})^3} \right)$$

$$\begin{aligned} \boxed{2} &= \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{\partial V}{\partial x_j} \frac{\partial^2 V}{\partial x_j \partial x_i} = \\ &= \sum_{i,j=1}^n \frac{a^2 x_i x_j}{|x|^2 (|x|^2 - a^2)} \left[-a \left(\frac{\partial_{ij}}{|x|} - \frac{x_i x_j}{|x|^3} \right) + \frac{a x_i x_j}{|x| (|x|^2 - a^2)^{3/2}} \right] = \\ &= \frac{a^3}{|x|^3 (|x|^2 - a^2)^{5/2}} \sum_{i,j=1}^n x_i x_j = \frac{a^3 |x|}{(|x|^2 - a^2)^{5/2}} \end{aligned}$$

Subtraindo $\boxed{2}$ de $\boxed{1}$, temos:

$$\begin{aligned} \boxed{1} - \boxed{2} &= - \frac{a|x| (n-2) (|x|^2 - a^2)}{(|x|^2 - a^2)^{5/2}} = \\ &= - \frac{a|x| (n-2)}{(|x|^2 - a^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

Portanto $\boxed{\zeta(V) = - \frac{a|x| (n-2)}{(|x|^2 - a^2)^{3/2}}}$

E portanto em Ω' , $\zeta(V) \leq 0$.

Logo V é barreira superior em Ω' , donde temos que V é sobre-solução em Ω' .

Por outro lado $\frac{dV}{dn} = -\infty$ nos pontos internos a $\Gamma_1 = \bar{\Omega} \cap \{x: |x|=a\}$

Observe que $V(x) = b$ em Γ_1 .

Enfim sejam $\Gamma_0 = \partial\Omega \cap \{x: |x| \geq a\}$ e $b = \max_{\Gamma_0} |\gamma| + a \operatorname{arc} \cosh \frac{\delta}{a}$;

$\delta = \operatorname{diam}(\Omega)$.

$(\operatorname{diam}(\Omega) \geq |x|)$

Então

$$V(x) = b - a \operatorname{arc} \cosh \frac{|x|}{a} = \max_{\Gamma_0} |\gamma| +$$

$$+ a \operatorname{arc} \cosh \frac{\delta}{a} - a \operatorname{arc} \cosh \frac{|x|}{a} \geq$$

$$\geq \max_{\Gamma_0} |\gamma| + a \operatorname{arc} \cosh \frac{\delta}{a} - a \operatorname{arc} \cosh \frac{\delta}{a} =$$

$$= \max_{\Gamma_0} |\gamma| \geq u(x).$$

Portanto $V \geq u$ em Γ_0 .

Da proposição 4.3 segue agora que

$$u \leq V \text{ em } \bar{\Omega}' = \{x: |x| \geq a\} \quad (1)$$

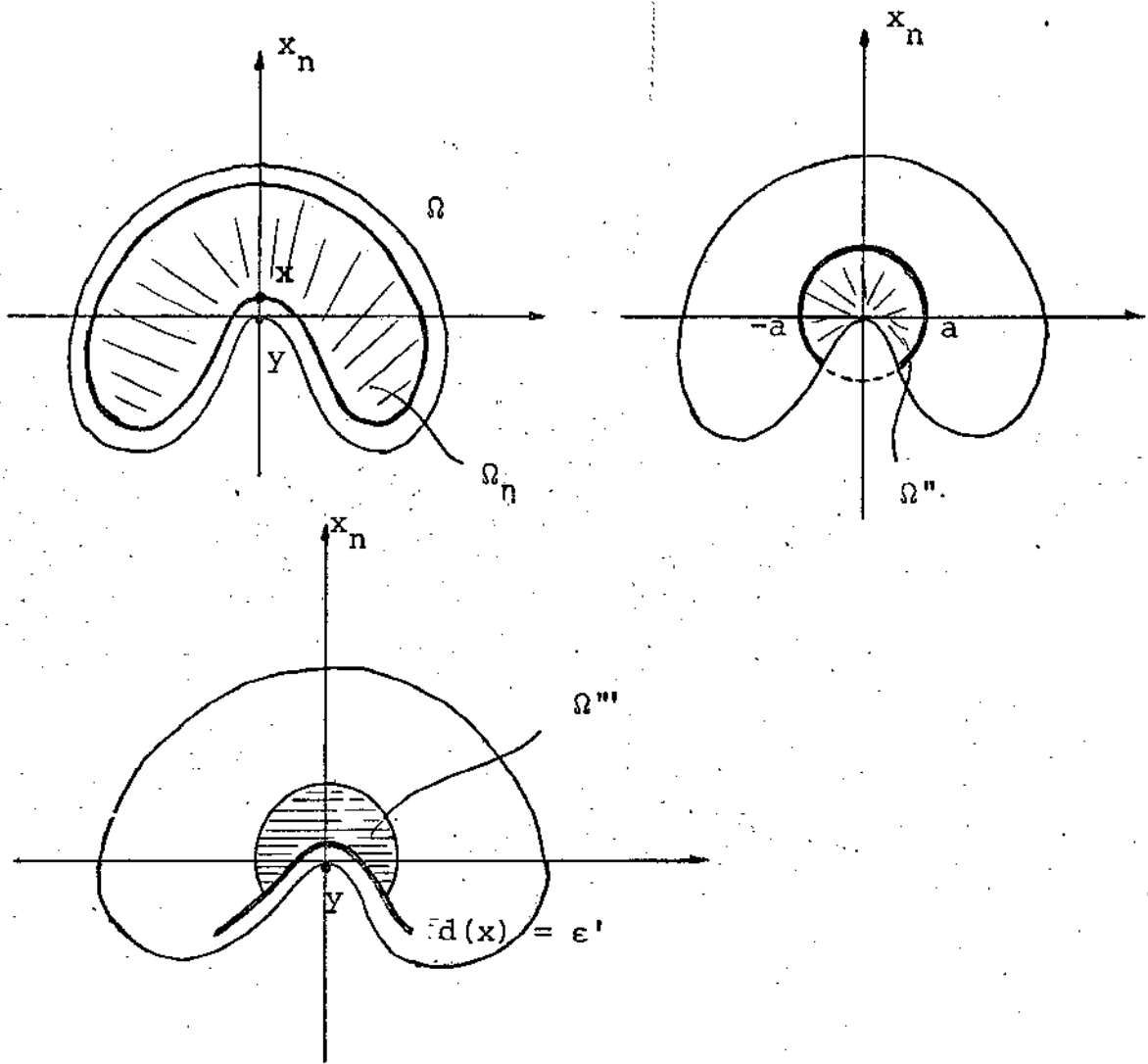
Observamos que a função

$$\Lambda(x) = -\frac{1}{n-1} \Delta d(x) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{K_i(\pi(x))}{1-d(x)K_i(\pi(x))}$$

é uma função contínua sobre $\bar{\Omega}_\eta$ ($\eta < \varepsilon_0$) e sendo $(\pi(x) = y) \Lambda(y) < 0$

se $\underline{a}$ é "bem pequeno" temos

$$\Lambda(x) < -\lambda < 0, \quad \forall x \in \Omega \cap \{x: |x| < a\} = \Omega''$$



Seja agora $\epsilon' > 0$ no conjunto

$\Omega'' \cap \{x: d(x) > \epsilon'\} = \Omega'''$ e consideremos a função

$$w(x) = f(d(x)) = A (\sqrt{2a} - \sqrt{d(x) - \epsilon'}) + b$$

com $A > 0$.

Observemos que $w(x) \geq b$.

Resulta:

$$\frac{\partial w}{\partial x_i} = f' \frac{\partial d}{\partial x_i},$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} = f' \frac{\partial^2 d}{\partial x_i \partial x_j} + f'' \frac{\partial d}{\partial x_i} \frac{\partial d}{\partial x_j},$$

Como

$$\zeta(w) = (1 + |\nabla w|^2) \Delta w - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_j} \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j}$$

temos

$$\begin{aligned} (1 + |\nabla w|^2) \Delta w &= \left[1 + \sum_{i=1}^n f'^2 \left(\frac{\partial d}{\partial x_i} \right)^2 \right] \cdot \left[\sum_{i=1}^n \left(f' \frac{\partial^2 d}{\partial x_i^2} + \right. \right. \\ &\left. \left. + f'' \left(\frac{\partial d}{\partial x_i} \right)^2 \right) \right] = (1 + f'^2) \cdot (f' \Delta d + f'') \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_j} \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} &= \\ &= \sum_{i,j=1}^n f'^2 \frac{\partial d}{\partial x_i} \frac{\partial d}{\partial x_j} \left(f' \frac{\partial^2 d}{\partial x_i \partial x_j} + f'' \frac{\partial d}{\partial x_i} \frac{\partial d}{\partial x_j} \right) = \\ &= (f')^3 \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial d}{\partial x_i} \frac{\partial d}{\partial x_j} \frac{\partial^2 d}{\partial x_i \partial x_j} + f'^2 f'' \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial d}{\partial x_i} \right)^2 \left(\frac{\partial d}{\partial x_j} \right)^2 = (f')^2 f''. \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}\xi(w) &= (1+f'^2)(f'\Delta d + f'') - f'^2 f'' = \\ &= f'' + (f')^3 \Delta d + f' d \quad (\text{veja proposição 3.4})\end{aligned}$$

Ora

$$f'(s) = -\frac{A}{2\sqrt{s-\varepsilon'}} < 0,$$

$$f''(s) = \frac{A}{4(s-\varepsilon')\sqrt{s-\varepsilon'}} \quad e$$

$$\Delta d = - (n-1) \Lambda(x) > \lambda(n-1) > 0$$

Portanto

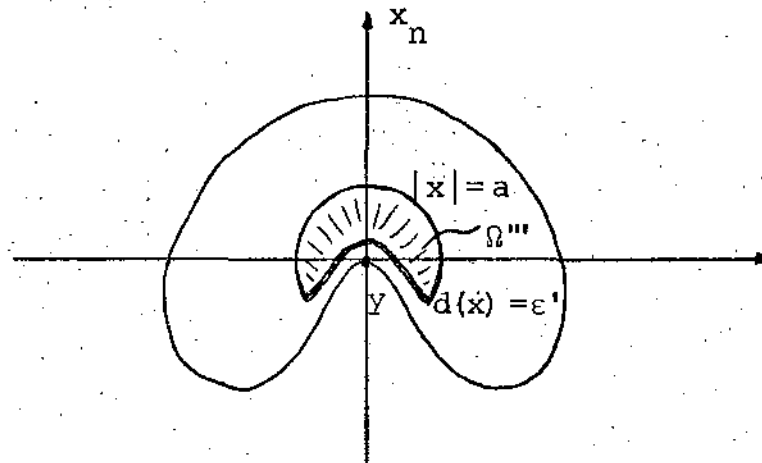
$$\xi(w) \leq f'' + f'^3 \Delta d < \frac{A}{4(d-\varepsilon')^{3/2}} \left(1 - \frac{A^2 \lambda(n-1)}{2}\right)$$

Daqui se segue que

$$\xi(w) \leq 0 \quad \text{se} \quad A^2 \geq \frac{2}{\lambda(n-1)}$$

Então w é uma barreira superior em seu domínio, donde temos que w é sobresolução em seu domínio (Ω''').

O bordo de $\Omega''' = \Omega'' \cap \{x: d(x) > \varepsilon'\}$ consiste de duas partes.



Por outro lado se $x \in \bar{\Omega}'' \cap \{x: |x| = a\}$ temos $w(x) \geq b = V(x) \geq u(x)$ (1)

Portanto

$$u(x) \leq w(x) \text{ em } \bar{\Omega}'' \cap \{x: |x| = a\}$$

E ainda sobre a outra parte da fronteira onde $d(x) = \epsilon'$, temos

$$\frac{dw}{dn} = -\infty.$$

E portanto pela proposição 4.3 segue-se que:

$$u(x) \leq w(x) \text{ em } \bar{\Omega}''' = \bar{\Omega}'' \cap \{x: d(x) \geq \epsilon'\}$$

Fazendo $\epsilon' \rightarrow 0$, obtemos:

$$(2) \quad u(x) \leq b + A\sqrt{2a'} \text{ em } \Omega \cap \{x: |x| \leq a\} = \bar{\Omega}''$$

Portanto de (1) e (2) temos:

$u(x) \leq b + A\sqrt{2a'} \text{ em } \Omega$
--

Repetindo o raciocínio para $\underline{-u}$ obtemos

$$|u| \leq b + A\sqrt{2a} \text{ em } \Omega$$

isto é ,

$$|u| \leq \max_{\Gamma_0} |\gamma| + a \operatorname{arc} \cosh \frac{\delta}{a} + A\sqrt{2a} ,$$

(observe que Γ_0 depende de a)

Portanto

$$\forall \varepsilon > 0, \exists a > 0: a \operatorname{arc} \cosh \frac{\delta}{a} + A\sqrt{2a} < \varepsilon$$

Assim para todo $\varepsilon > 0$, temos

$$|u| \leq \max_{\Gamma_0} |\gamma| + \varepsilon, \forall x \in \Omega .$$

Observe que $\Gamma_1 = \partial\Omega - \Gamma_0$.

C.Q.D.

Em outras palavras o lema que acabamos de provar diz:

"Se $0 \in \partial\Omega$ e $\Lambda(0) < 0$, então para todo $\varepsilon > 0$, existe $a > 0$, tal que

$$\max_{\Omega} |u| \leq \max_{\partial\Omega - B_a(0)} |\gamma| + \varepsilon ,$$

se u é solução em Ω .

TEOREMA 4.5 - Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado com $\partial\Omega$ de classe C^3 . Suponhamos que exista $y \in \partial\Omega$ com $\Lambda(y) < 0$. Então existe γ regular de valor absoluto tão pequeno quanto se queira para o qual o problema de área mínima com dado γ não tem solução.

Com as notações do lema 4.4, o problema com dado $\gamma \in C^0(\partial\Omega)$ definido por:

$$\gamma = \begin{cases} 0 & \text{em } \partial\Omega - \Gamma_1 = \Gamma_0 \\ 2\varepsilon & \text{em } \gamma \end{cases}$$

não pode ter solução.

De fato:

Devemos ter

$$\Gamma_0 = \partial\Omega - B_a(0)$$

e

$$|u| \leq \max_{\Gamma_0} |\gamma| + \varepsilon, \quad \forall x \in \Omega.$$

$$\text{mas, } \max_{\Gamma_0} |\gamma| \equiv 0$$

$$\text{logo } |u| \leq \varepsilon, \quad \forall x \in \Omega$$

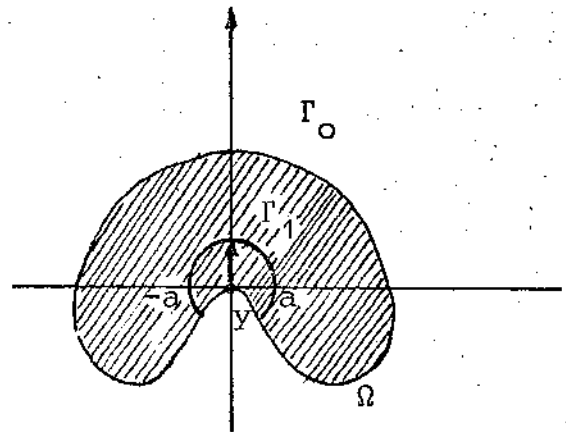
$$\text{Além disso temos, } \max_{\bar{\Omega}} |u| \geq 2\varepsilon \quad (1)$$

E deveríamos ter

$$\max_{\bar{\Omega}} |u| \leq \max_{\Gamma_0} |\gamma| + \varepsilon$$

ou seja

$$\max_{\bar{\Omega}} |u| \leq \varepsilon \quad (2)$$



De (1) e (2) temos o absurdo.

Portanto não existe $\underline{u}$.

OBSERVAÇÃO: Se $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é aberto e limitado não convexo, existe um dado no bordo, regular, com módulo tão pequeno quanto se queira para o qual o problema de Plateau (não paramétrico) não tem solução.

As soluções dos problemas considerados são de classe $C^2(\Omega)$ como já dissemos anteriormente.

TEOREMA 4.6 - (Teorema de Unicidade)

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado e u, v funções tal que $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$.

Se u, v são soluções da equação das superfícies mínimas em Ω com $u(x) = v(x)$, para todo $x \in \partial\Omega$.

Então $u(x) = v(x)$, para todo $x \in \Omega$.

PROVA - As funções u e v minimizam o funcional da área

$$a(w) = \int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla w|^2} \, dx, \text{ onde o}$$

mínimo é tomado na classe de todas as funções w contínuas em $\bar{\Omega}$, com valores sobre $\partial\Omega$ iguais aos de $\underline{u}$ e $\underline{v}$.

Então

$$\int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla u|^2} \, dx = \int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla v|^2} \, dx$$

Agora consideremos a função $\frac{u+v}{2}$

$$\int_{\Omega} \sqrt{1 + \left| \nabla \left(\frac{u+v}{2} \right) \right|^2} dx \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla u|^2} dx + \\ + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla v|^2} dx ,$$

onde vale a igualdade se, e somente se,

$$\nabla u(x) = \nabla v(x), \text{ para todo } x \in \Omega \quad (1)$$

Este resultado vem da convexidade do funcional área.

Além disso $\frac{u+v}{2}(x) = \frac{u(x)+v(x)}{2} = u(x)$ se $x \in \partial\Omega$.

Então o valor da integral $\int_{\Omega} \sqrt{1 + \left| \nabla \left(\frac{u+v}{2} \right) \right|^2} dx$ não pode ser menor que o mínimo, portanto

$$\int_{\Omega} \sqrt{1 + \left| \nabla \left(\frac{u+v}{2} \right) \right|^2} dx = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla u|^2} dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla v|^2} dx$$

Logo de (1), temos:

$$\nabla u(x) = \nabla v(x), \quad \forall x \in \Omega$$

$$\nabla (u-v)(x) = 0, \quad \forall x \in \Omega$$

Donde concluimos que $u-v$ é constante sobre as componentes conexas de Ω .

Então para qualquer componente conexa Ω_j de Ω temos $\partial\Omega_j \subset \partial\Omega$ e como $(u-v)(x) = 0, \forall x \in \partial\Omega$ (por hipótese).

Portanto

$$(u-v)(x) = 0, \forall x \in \partial\Omega_j.$$

Devido a continuidade de u e v em $\bar{\Omega}$, temos

$$(u-v)(x) = 0, \forall x \in \Omega_j$$

Este resultado vale para qualquer componente conexa Ω_j de Ω .

Portanto $(u-v)(x) = 0$, para todo $x \in \Omega$.

C.Q.D.

O problema de Plateau não paramétrico ganhou novo enfoque quando em 1971 M. Miranda introduziu a teoria dos Perímetros em sua solução (cf. [5]), mais precisamente com o seguinte

TEOREMA DE MIRANDA - "Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, limitado e localmente pseudo-convexo com fronteira lipschitziana e seja $\gamma: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Então, existe uma única $u \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^w(\Omega)$, solução do problema de Plateau".

Tal resultado contém os demonstrados por Jenkins & Serrin (1968) que consideravam Ω aberto localmente pseudo-convexos de classe C^2 , além de generalizar também o caso em que Ω é aberto e uniformemente convexo (resultado demonstrado por Miranda em 1965).

Em 1977 - Bassanezi e Massari, com o mesmo aparato de Miranda, demonstraram este teorema sem levar em conta o fato da fronteira de Ω ser lipschitziana.⁽²¹⁾

⁽²¹⁾ cf. Bassanezi - Massari, Teor. 3.1 in "The Dirichlet Problem for the Minimal Surface Equation in Non-Regular Domains" - Ann. Univ. Ferrara - Sez VII - Sc. Mat. Vol. XXIV (1978).

B I B L I O G R A F I A

- [1] Fimm, R. - "Remarks Relevant to Minimal Surfaces and to surfaces of constant mean curvature", in Journ. d'Analyse Math., vol 14 (1965), 139-160.
- [2] Jonkins, H e Serrin, J - "The Dirichlet Problem for the Minimal Surface Equation in Higher Dimension", in J. Reine Angew - Math., vol 229 (1968), 170-187.
- [3] Giaguianta, M e outros - *Note sul Problema di Plateau* - Ed. Tecnico Scientifica, Pisa (1974).
- [4] Miranda, M - "Un Teorema di Esistenza e Unicità per il Problema dell' area Minima in n variabili - Ann. Scuola, Norm. Sup. Pisa, vol. 19 (1965), 233-249.
- [5] _____ "Un Principio di Massimo Forte per le frontiere minimali e una sua applicazione alla risoluzione del problema al contorno per l'equazione delle superfici di area minima", in Rend. Sem. Mat. Univ. Padova (1971).
- [6] Nitsche, J.C.C. - On New results in the theory of minimal surfaces - Bull. An. Math. Soc., vol. 71 (1965), 195-270.

[7] Radó, T. - On the problem of Plateau - Verlag von J. Springer
(1933).