

IVÁN ITALO GONZÁLES GARGATE

**UM PRINCÍPIO DE MÉDIAS EM FOLHEAÇÕES
COMPACTAS**

CAMPINAS

2012

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA
E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA**

IVÁN ITALO GONZÁLES GARGATE

**UM PRINCÍPIO DE MÉDIAS EM FOLHEAÇÕES
COMPACTAS**

**TESE DE DOUTORADO APRESENTADA AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA
E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA DA UNICAMP
PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
DOUTOR EM MATEMÁTICA.**

ORIENTADOR: PAULO REGIS CARON RUFFINO

**ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA TESE DEFENDIDA PELO ALUNO IVÁN
ITALO GONZÁLES GARGATE, E ORIENTADA PELO PROF. DR. PAULO REGIS CARON RUFFINO.**



ASSINATURA DO ORIENTADOR

CAMPINAS, 2012

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA POR
MARIA FABIANA BEZERRA MULLER - CRB8/6162
BIBLIOTECA DO INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E
COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA - UNICAMP

Gonzáles Gargate, Iván Italo, 1981-
G589p Um princípio de médias em folheações compactas / Iván Italo
Gonzáles Gargate. – Campinas, SP : [s.n.], 2012.

Orientador: Paulo Regis Caron Ruffino.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas,
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Princípio da média. 2. Sistemas dinâmicos diferenciais. 3.
Análise estocástica. 4. Folheações (Matemática). I. Ruffino, Paulo
Regis Caron, 1967-. II. Universidade Estadual de Campinas.
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III.
Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em inglês: An averaging principle in compact foliations

Palavras-chave em inglês:

Averaging principle

Differentiable dynamical systems

Foliations (Mathematics)

Stochastic analysis

Área de concentração: Matemática

Titulação: Doutor em Matemática

Banca examinadora:

Paulo Regis Caron Ruffino [Orientador]

Edson Alberto Coayla Teran

Ryuichi Fukuoka

Pedro José Catuogno

Diego Sebastian Ledesma

Data de defesa: 31-07-2012

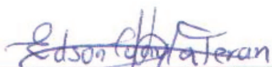
Programa de Pós-Graduação: Matemática

Tese de Doutorado defendida em 31 de julho de 2012 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof(a). Dr(a). PAULO REGIS CARON RUFFINO



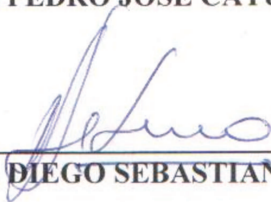
Prof(a). Dr(a). EDSON ALBERTO COAYLA TERAN



Prof(a). Dr(a). RYUICHI FUKUOKA



Prof(a). Dr(a). PEDRO JOSÉ CATUOGNO



Prof(a). Dr(a). DIEGO SEBASTIAN LEDESMA

Agradecimentos

Ao pedacinho de céu que ilumina minha vida, Luana Camila.

Aos meus pais, Nicolas e Felicitas, por todo o esforço que fizeram para ser a pessoa que sou agora.

Ao meu amor, Nadia Rios, companheira e amiga. Pela paciência e encorajamento durante estes últimos anos.

Aos meus irmãos Michael, Karen e Renzo, sei que sempre contarei com vocês em tudo.

Ao meu orientador Paulo Ruffino, pelo respeito e a amizade nestes 4 anos de orientação.

Aos meus amigos Luiz, Thiago, Eduardo, Grasielle, Nelson, Carol e Alisson, pela amizade que continua crescendo.

Ao prof. Luiz Antonio Pareja (in memoriam), pelo apoio constante desde minha formação.

À CAPES e ao CNPq pelo auxílio financeiro.

Resumo

Nesta tese, estudamos um princípio de médias em equações diferenciais estocásticas sobre variedades folheadas com folhas compactas. Começaremos introduzindo o princípio de médias sobre equações diferenciais ordinárias reais.

A título de comparação vamos rever conceitos básicos de variedade simplética com a finalidade de comparar/estender os resultados obtidos por Xue-Mei Li sobre um princípio de médias para um sistema Hamiltoniano estocástico completamente integrável.

Nosso principal resultado é generalizar estas idéias para o caso de uma variedade $M = (-a, a)^n \times N$, onde N é uma variedade compacta sem bordo. Em particular mostraremos nossos resultados para o caso que a folheação é gerada por uma submersão de M sobre $\mathbb{R}^n$. Finalmente apresentamos alguns exemplos.

Abstract

In this thesis, we study the averaging principle for stochastic differential equations on foliated manifolds with compact leaves. We begin by introducing the averaging principle over real ordinary differential equations.

For comparison we will review basic concepts of symplectic manifold in order to compare/extend the results obtained by Xue-Mei Li about a averaging principle for a completely integrable stochastic Hamiltonian system.

Our main result is to generalize these ideas to the case of a manifold $M = (-a, a)^n \times N$, where N is a compact manifold without boundary. In particular our results show for the case that foliation is generated by an submersion of M over $\mathbb{R}^n$. Finally we present some examples.

Índice

Introdução	1
1 Preliminares	7
1.1 Equações estocásticas sobre variedades	7
1.1.1 EDE sobre $\mathbb{R}^n$	8
1.1.2 EDE sobre variedades	11
1.2 Desigualdades	12
1.3 Introdução à Geometria Simplética	13
1.3.1 Mecânica Hamiltoniana	14
1.3.2 Ação Simplética	16
1.3.3 Campos vetoriais Hamiltonianos e Variedades Simpléticas	17
1.4 O princípio de médias em EDO	18
2 Introdução à Teoria de Perturbação sobre variedades simpléticas	23
2.1 Sistemas Integráveis	24
2.1.1 Teorema de Liouville	24
2.1.2 Coordenadas ação-ângulo	25
2.1.3 Coordenadas de ação-ângulo no caso $\mathbb{R}^2$	26
2.1.4 Coordenadas de ação-ângulo em $\mathbb{R}^{2n}$	27

2.2	Princípio de Médias	27
2.3	Um princípio de médias para um sistema Hamiltoniano estocástico	31
3	Um princípio de Médias para um sistema estocástico sobre folheações	34
3.1	Caso $M = (-a, a)^n \times N$	34
3.2	Caso particular de folheação gerada por uma submersão	52
3.3	Exemplos	54
	Referências	58

Introdução

Métodos de perturbação para equações diferenciais começaram a ter importância quando os cientistas do século XVIII tentaram relacionar a teoria da gravitação de Newton com as observações do movimento de planetas e satélites. As primeiras tentativas ocorreram na primeira metade deste século e envolve o cálculo numérico dos incrementos das variáveis de posição e velocidade durante sucessivos intervalos pequenos de tempo.

Novas idéias surgiram na segunda metade deste século com os trabalhos de Clairaut, Lagrange e Laplace. A teoria de perturbação desenvolvida por eles tem sido utilizada como uma coleção de técnicas formais. Esta teoria pode ser encontrada em muitos trabalhos de mecânica celeste e dinâmica. Ver por exemplo J. A. Sanders F. Verlust e J. Murdock [15] para uma referência mais detalhada.

A teoria de perturbação consiste em um conjunto de métodos para encontrar soluções aproximadas de problemas *perturbados* as quais são próximas às soluções de problemas *não perturbados* cuja resolução é mais acessível. Estes métodos podem ser utilizados sobre pequenos intervalos de tempo.

O princípio de médias aparece como uma alternativa para poder estimar soluções aproximadas a problemas perturbados introduzindo o conceito de dois movimentos, rápido e lento. Estes dois movimentos aparecem quando fazemos uma mudança no tempo de ordem $O(\epsilon^{-1})$, obtendo um intervalo de tempo longo. A natureza autônoma da equação de médias implica um comportamento bastante uniforme das médias locais das variáveis originais.

Estimar o erro é o objetivo principal desta teoria. Exemplos ao respeito podem ser encontrados em V. I. Arnold [1], M. I. Freidlin and A. D. Wentzell [6] e J.A. Sanders, F. Verhulst e J. Murdock [15],

No livro de Arnold [1] encontramos um princípio de médias para um sistema Hamiltoniano integrável. Tal sistema pode ser considerado como uma família de equações diferenciais ordinárias dependendo de um pequeno parâmetro $\epsilon > 0$. Xue-Mei Li [16], generaliza estas idéias para um sistema estocástico Hamiltoniano completamente integrável que pode ser considerado como uma família de equações diferenciais ordinárias com os campos vetoriais dependentes do tempo aleatório.

A título de estabelecer notação e terminologia, vamos rapidamente rever noções básicas de cálculo estocástico sobre variedades, geometria simplética e do princípio de médias sobre equações diferenciais ordinárias. Na primeira seção deste capítulo encontramos o teorema fundamental do cálculo estocástico : *A Fórmula de Itô*. Esta ferramenta nos permite levar todo o cálculo estocástico conhecido em $\mathbb{R}^n$ para variedades diferenciáveis. Na segunda seção encontramos algumas desigualdades de Gronwall, muito utilizadas nas equações diferenciais ordinárias, e a desigualdade de Chebychev, que aparece na teoria de probabilidades. Na terceira seção daremos uma breve introdução à mecânica Hamiltoniana que é o ponto de partida da geometria simplética. Na quarta seção introduzimos o princípio de médias para equações diferenciais ordinárias e estudamos a equação de Van Der Pool. Aqui observamos a vantagem de se dividir a solução de tal sistema em dois movimentos, rápido e lento.

Recomendamos a leitura de J.A. Sanders, F. Verhulst e J. Murdock [15] para observar os distintos princípios de médias segundo a equação diferencial estudada, assim como conhecer o desenvolvimento histórico desta teoria.

No segundo capítulo, apresentamos os resultados de V.I. Arnold [1] e Xue-Mei Li [16]. Na primeira parte estudamos os sistemas integráveis sobre variedades simpléticas. Dadas certas condições nos campos vetoriais sobre a variedade simplética M , o teorema de Liouville garante a existência de uma folheação sobre tal variedade cujas folhas são

toros de dimensão n , ainda mais, garante existência de um sistema de coordenadas chamadas *ação-ângulo*. A equação diferencial ordinária sobre a variedade simplética M nestas coordenadas possui uma expressão bem mais simples, oferecendo dois movimentos, um movimento rápido, que age sobre as folhas, e um outro movimento lento que provem de um sistema de evolução. V. I. Arnold apresenta nestas coordenadas um princípio de médias, obtendo as médias sobre cada folha.

Com base neste resultado, Xue-Mei Li considerou um sistema estocástico completamente integrável sobre a variedade simplética M . Fazendo uso das coordenadas de *ação-ângulo* consegue obter a divisão da solução em dois movimentos, rápido e lento, ambos definidos por equações diferenciais estocásticas representadas nestas coordenadas. Desde que os campos vetoriais associados a este sistema estocástico completamente integrável são geradas por funções Hamiltonianas, obtém-se um princípio de médias cujas médias são consideradas sobre os toros. O sistema de médias obtida em [16] gera uma equação diferencial ordinária, que oferece uma estimativa da solução da nossa equação estocástica inicial.

Estudando estes trabalhos, observamos que, se consideramos uma variedade M com uma folheação cujas folhas são difeomorfas a uma variedade compacta sem bordo N podemos obter uma versão (local) do princípio de médias de equações diferenciais estocásticas sobre M . Por exemplo, se consideramos a variedade $M = (-a, a)^n \times N$, onde N é uma variedade diferenciável compacta sem bordo, e sejam $V, X_1, \dots, X_r$ campos vetoriais tangentes às folhas $\{s\} \times N$, com $s \in (-a, a)^n$. Dado um ponto $y_0 \in M$, e um aberto $U = (-b, b)^n \times U_N$ contendo y_0 , com $0 < b < a$ e U_N aberto em N , defina a equação diferencial estocástica

$$\begin{cases} dx_t = \sum_{i=1}^r X_i(x_t) \circ dB_t^i + V(x_t)dt. \\ x_0 = y_0. \end{cases}$$

Se K é um campo vetorial em M , podemos definir a perturbação da equação es-

tocástica acima, por

$$\begin{cases} dy_t^\epsilon = \sum_{i=1}^r X_i(y_t^\epsilon) \circ dB_t^i + V(y_t^\epsilon)dt + \epsilon K(y_t^\epsilon)dt. \\ y_0^\epsilon = y_0. \end{cases}$$

Considerando coordenadas (u, v) sobre o aberto U , podemos representar a equação estocástica perturbada neste sistema de coordenadas. Assim, obtemos

$$\begin{cases} du_t^{\epsilon,i} = \sum_{k=1}^r b_k^i(u_r^\epsilon, v_r^\epsilon) \circ dB_r^k + b_0^i(u_r^\epsilon, v_r^\epsilon)dt + \epsilon K_u^i(u_r^\epsilon, v_r^\epsilon)dr, \\ dv_t^{\epsilon,j} = \epsilon K_v^j(u_t^\epsilon, v_t^\epsilon)dt, \end{cases}$$

com $i = 1, 2, \dots, n$ e $j = 1, 2, \dots, m$, onde $u_t = (u_t^1, \dots, u_t^n)$, $v_t = (v_t^1, \dots, v_t^m)$, $u_t^\epsilon = (u_t^{\epsilon,1}, \dots, u_t^{\epsilon,n})$, $v_t^\epsilon = (v_t^{\epsilon,1}, \dots, v_t^{\epsilon,m})$.

Considere $\pi(u, v) = u$ a projeção na primeira variável. Seja T^ϵ o primeiro tempo no qual a solução y_t^ϵ , começando em y_0 , sai do aberto U e defina $\pi^\epsilon(t) = \pi(y_t^\epsilon) = (\pi_1^\epsilon(t), \pi_2^\epsilon(t), \dots, \pi_n^\epsilon(t))$.

Com esta terminologia, no Lema 3.1.1 vemos que, se τ^ϵ denota o primeiro tempo tal que a solução y_t^ϵ começando em y_0 sai do aberto U e dada uma função diferenciável $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ temos para todo $p > 1$

$$\left[\mathbb{E} \left(\sup_{s \leq t \wedge \tau^\epsilon} |f(y_s^\epsilon) - f(x_s)|^p \right) \right]^{\frac{1}{p}} \leq C \epsilon t H(t),$$

onde $H(t) = \exp(C_0(t^2 + t))$ e C_0, C são constantes que dependem da função f e dos campos vetoriais $K, V, X_1, \dots, X_r$. O Lema 3.1.1 apresenta uma primeira estimativa de proximidade exponencial entre as soluções das equações diferenciais acima descritas.

Ainda mais sejam $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ função diferenciável, U o aberto como acima, e $\varphi : (-b, b)^n \times U_0 \rightarrow (-b, b)^n \times U_N$ a carta local, com U_0 aberto em $\mathbb{R}^m$ tal que para cada $s \in (-b, b)^n$ fixo, $\varphi(s, \cdot) : U_0 \rightarrow U_N$ é um difeomorfismo. Então podemos definir a função $\tilde{g} : (-b, b)^n \times U_0 \rightarrow \mathbb{R}$, por $\tilde{g} = g \circ \varphi$.

Definamos $Q^g : (-b, b)^n \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$Q^g(u) = \int_N \tilde{g}(u, v) d\mu,$$

onde μ é uma medida invariante sobre N para o sistema não perturbado. Denote por $\pi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\pi(u, v) = u$ a projeção na primeira variável, assim obtemos no Lema 3.1.2 a seguinte estimativa

$$\int_{s \wedge T^\epsilon}^{(s+t) \wedge T^\epsilon} g(y_{\frac{\epsilon}{t}}^\epsilon) dr = \int_{s \wedge T^\epsilon}^{(s+t) \wedge T^\epsilon} Q^g(\pi^\epsilon(r)) dr + \delta(g, \epsilon, t),$$

onde T^ϵ denota o primeiro tempo que $y_{t/\epsilon}^\epsilon$ começando em y_0 sai de U , $\tau^\epsilon = T^\epsilon/\epsilon$ e tal que, para qualquer $p > 1$

$$\left(\mathbb{E} \sup_{s \leq t} |\delta(g, \epsilon, s)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \sqrt{t} \epsilon^q (-\ln \epsilon)^{\frac{q}{2}} h(t, \epsilon)$$

onde C é uma constante, e a função $h(t, \epsilon)$ é contínua e converge para zero quando $\epsilon \rightarrow 0$, para todo $q \in (0, 1)$.

Por outro lado, denote por $M(\alpha(t))$ a folha $\{\alpha(t)\} \times N$ e considere a seguinte equação diferencial ordinária

$$\begin{cases} \frac{d\alpha_i}{dt}(t) = \int_{M_{\alpha(t)}} d\pi_i(K)(\alpha(t), u) d\mu_{\alpha_i}(u). \\ \alpha(0) = \pi(y_0). \end{cases}$$

onde $\alpha(t) = \alpha_t = (\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t))$ e $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n)$. Observe que estas equações diferenciais são determinísticas.

O resultado principal do nosso trabalho, enunciado no Teorema 3.1.7, é o seguinte :

Seja T_0 o primeiro tempo que $\alpha(t)$ sai de $(-b, b)^n$. Então, para todo $0 < t < T_0$, $p > 1$, existe uma constante C tal que

$$\left[\mathbb{E} \left(\sup_{s \leq t} \|\pi^\epsilon(s \wedge T^\epsilon) - \alpha(s \wedge T^\epsilon)\|^p \right) \right]^{\frac{1}{p}} \leq C \epsilon^q (-\ln \epsilon)^{\frac{q}{2}}.$$

Na demonstração desta afirmação vemos que a constante C depende de t e ϵ , ainda mais, que é contínua e converge para zero quando $\epsilon \rightarrow 0$, para $q \in (0, 1)$. Segundo

este resultado, a solução $\alpha(t)$ se compara com a projeção vertical da solução da equação diferencial estocástica perturbada, assim a última desigualdade retrata o princípio de média no nosso caso.

Como consequência deste resultado, se temos $F : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma submersão, tais que as subvariedades $F^{-1}(a)$ são compactas sem bordo e difeomorfas a uma variedade N . Com isto, fixado y_0 , podemos supor que os campos vetoriais $V, X_1, \dots, X_r$ são tangentes às folhas $F^{-1}(a)$, $a \in \mathbb{R}^n$, e seja K um campo vetorial sobre M . Com isto, podemos considerar um aberto U da forma $(-b, b)^n \times N$ e obter um princípio de médias para este caso.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo faremos uma listagem e introduziremos as notações para os resultados que usaremos de cálculo estocástico e geometria simplética, assim como introduziremos o princípio de médias sobre uma equação diferencial ordinária em $\mathbb{R}$.

1.1 Equações estocásticas sobre variedades

Nesta seção apresentamos os requisitos básicos para poder introduzir o estudo das equações diferenciais estocásticas sobre $\mathbb{R}^n$ e a sua posterior generalização para o caso de variedades diferenciais M . As demonstrações dos resultados enunciados, assim como as definições podem ser encontradas em muitos livros clássicos, entre eles citamos K. D. Elworthy [3], E. Hsu [9], H. Kunita [11] e B. Oksendal [14].

Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade munido de uma filtração $\mathcal{F}_* = \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ tal que $\mathcal{F} = \lim_{t \uparrow \infty} \mathcal{F}_t$. Neste caso diremos que $(\Omega, \mathcal{F}_*, \mathbb{P})$ é um espaço de probabilidade filtrado. Assumiremos que

- 1) Os $\mathcal{F}_t$ são *completos* com respeito a $\mathbb{P}$, isto é todo subconjunto de um conjunto de medida nula está contido em $\mathcal{F}_t$.
- 2) $\mathcal{F}_*$ é contínua a direita, isto é $\mathcal{F}_t = \cap_{s > t} \mathcal{F}_s$, para todo $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

1.1.1 EDE sobre $\mathbb{R}^n$

Sejam $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m) : \mathbb{R}^n \rightarrow M(n, m)$ e $b : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ funções definidas sobre $\mathbb{R}^n$, onde $M(n, m)$ é o espaço de matrizes $n \times m$, e considere $W_t = (W_t^1, \dots, W_t^m)$ um movimento Browniano sobre $\mathbb{R}^m$. Sejam $x_0 \in \mathcal{F}_0$ uma variável aleatória e τ um $\mathcal{F}_*$ -tempo de parada. A equação integral

$$x_t = x_0 + \int_0^t \sigma(x_t) dW_t + \int_0^t b(x_t) dt, \quad 0 \leq t < \tau, \quad (1.1.1)$$

é chamada de *equação diferencial estocástica*, onde a integral estocástica é no sentido de Itô. Denotamos a equação (1.1.1) pela expressão mais familiar

$$dx_t = \sigma(x_t) dW_t + b(x_t) dt. \quad (1.1.2)$$

No caso que $\sigma^* = (\sigma, b)$ é localmente Lipschitz, então a equação integral (1.1.2) define um semimartingale $x = \{x_t, 0 \leq t < \tau\}$ sobre $\mathbb{R}^n$, até o tempo de parada τ . Neste caso dizemos que x_t é *solução* da equação diferencial estocástica (1.1.2).

Observe que é possível que a solução da equação diferencial estocástica (1.1.2) pode explodir num tempo finito, é por tal motivo que apresentamos a continuação teoremas de existência e unicidade da solução da equação diferencial estocástica até seu tempo de explosão.

No caso que não temos tempo de explosão, temos o seguinte teorema:

Teorema 1.1.1 (Existência e unicidade). *Suponha que σ é globalmente Lipschitz e x_0 é quadrado integrável. Então a equação diferencial estocástica (1.1.2) possui uma única solução $x = \{x_t, 0 \leq t\}$.*

Demonstração: Ver por exemplo E. Hsu [9], K. D. Elworthy [3], N. Ikeda e S. Watanabe [10] e B. Oksendal [14]. □

A condição que a matriz σ seja globalmente Lipschitz implica que o crescimento de σ seja no máximo linear. No caso que σ seja localmente Lipschitz, a solução pode explodir

num tempo finito. Para poder enunciar o teorema de existência e unicidade da equação diferencial estocástica (1.1.2) no caso que σ quando seja localmente Lipschitz definimos o tempo de explosão de uma trajetória num espaço métrico localmente compacto M . Denotemos por $\hat{M} = M \cup \{\partial M\}$ a compactificação de M por um ponto.

Um caminho x sobre M com *tempo de explosão* $e = e(x) > 0$ é uma aplicação contínua $x : [0, \infty) \rightarrow \hat{M}$ tal que $x_t \in M$ para $0 \leq t < e$ e $x_t \in \partial M$ para todo $t \geq e$ se $e < \infty$.

Agora apresentamos o teorema sobre a existência e unicidade da solução da equação diferencial estocástica (1.1.2) no caso que σ seja localmente Lipschitz.

Teorema 1.1.2. *Suponha que σ seja localmente Lipschitz e x_0 uma variável aleatória sobre $\mathbb{R}^n$. Então existe uma única solução $x = \{x_t, 0 \leq t\}$ da equação diferencial estocástica (1.1.2) até o seu tempo de explosão $e(x)$.*

A título de comparação, dada uma função diferenciável f , pelo teorema fundamental do cálculo temos que

$$df(x) = f'(x)dx$$

ou o que é equivalente:

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt.$$

Note que, isto é falso no *cálculo de Itô*, pois se isto fosse verdade, teríamos que

$$f(W_t) - f(W_0) = \int_0^t f'(W_s)dW_s \quad (1.1.3)$$

o que equivale a

$$df(W_t) = f'(W_t)dW_t.$$

Mas, tomemos por exemplo $f(x) = x^2$, e sabendo que

$$f(W_t) = W_t^2 = 2 \int_0^t W_s dW_s + t$$

que é equivalente a

$$df(W_t) = d(W_t^2) = 2W_t dW_t + dt,$$

diferente de (1.1.3). A aparição do termo extra dt como também do coeficiente 2, é devido a uma regra análoga ao teorema fundamental do cálculo chamada de *fórmula de Itô*.

Teorema 1.1.3 (Fórmula de Itô). *Seja $X = \{x_t, t \geq 0\}$, solução da equação diferencial estocástica*

$$dx_t = \sigma(x_t)dW_t + b(x_t)dt,$$

e seja $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$. Então o processo $f(x_t)$ confere a equação

$$\begin{aligned} df(x_t) &= f'(x_t)dx_t + \frac{1}{2}\sigma_t^2 f''(x_t)dt \\ &= \sigma_t f'(x_t)dW_t + (b_t f''(x_t) + \frac{1}{2}\sigma_t^2 f''(x_t))dt. \end{aligned}$$

Demonstração : Ver E. Hsu [9]. □

Agora, consideremos a formulação de Stratonovich de equações diferenciais estocásticas geradas por campos de vetores. Suponha que V_i , $i = 0, 1, 2, \dots, m$ são campos vetoriais sobre $\mathbb{R}^n$. Cada V_i pode ser vista como funções $V_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Sejam $V = (V_1, V_2, \dots, V_m)$, $W = (W_t^1, W_t^2, \dots, W_t^m)$ e x_0 como acima. Assim consideremos a equação diferencial estocástica no sentido de Stratonovich

$$x_t = x_0 + \int_0^t V(x_s) \circ dW_s + \int_0^t V_0(x_s)ds. \quad (1.1.4)$$

Também podemos escrever a equação (1.1.4) em forma de somatórias

$$x_t = x_0 + \sum_{i=1}^m \int_0^t V_i(x_s) \circ dW_s^i + \int_0^t V_0(x_s)ds. \quad (1.1.5)$$

Denotamos a expressão dada pela equação (1.1.5) por

$$dx_t = \sum_{i=1}^m V_i(x_s) \circ dW_s^i + V_0(x_s)ds, \quad (1.1.6)$$

a qual é chamada de *equação diferencial estocástica* (no sentido de Stratonovich).

A grande vantagem desta formulação é a simplicidade da fórmula de Itô :

Teorema 1.1.4 (Fórmula de Itô). *Seja $x = \{x_t, t \geq 0\}$ solução da equação diferencial estocástica (1.1.6), e seja $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$. Então*

$$f(x_t) = f(x_0) + \sum_{i=1}^n \int_0^t V_i f(x_s) \circ dW_s^i + V_0 f(x_s)ds.$$

para $0 < t < \tau$.

Demonstração : Ver E. Hsu [9], K. D. Elworthy [3], B. Oksendal [14]. $\square$

A fórmula de Itô nos permite estender facilmente, sem considerações sobre a geometria, as equações diferenciais estocásticas de $\mathbb{R}^n$ para variedades diferenciáveis. Neste caso usaremos a formulação de Stratonovich usando campos vetoriais.

1.1.2 EDE sobre variedades

Para isto, precisamos generalizar a definição de semimartingale sobre variedades.

Definição 1.1.5. *Seja M uma variedade diferenciável e $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade com uma filtração. Seja τ um tempo de parada. Um processo contínuo x definido sobre $[0, \tau)$ com valores sobre M é chamado de M -semimartingale se $f(x)$ é um semimartingale real com $t \in [0, \tau)$ para todo $f \in C^\infty(M)$.*

Segundo a fórmula de Itô podemos observar que quando $M = \mathbb{R}^n$, esta definição equivale à definição de semimartingale sobre $\mathbb{R}^n$.

Consideremos agora $V_1, V_2, \dots, V_m$ campos vetoriais sobre M , e seja $x_0 \in \mathcal{F}_0$ uma variável aleatória com valores sobre M . A expressão

$$\left\{ \begin{aligned} dx_t = & \sum_{i=1}^m V_i(x_t) \circ dW_t^i + V_0(x_t)dt \end{aligned} \right. \quad (1.1.7)$$

é chamada de uma equação diferencial estocástica sobre M com valor inicial x_0 .

Definição 1.1.6. *Um M -semimartingale x definido até o tempo de parada τ é dito solução da equação diferencial estocástica (1.1.7) até o tempo de parada τ , com valor inicial x_0 , se para todo $f \in C^\infty(M)$,*

$$f(x_t) = f(x_0) + \int_0^t \sum_{i=1}^m V_i f(x_t) \circ dW_t^i + \int_0^t V_0 f(x_t) dt, \quad 0 \leq t < \tau. \quad (1.1.8)$$

Com a finalidade de garantir a existência e unicidade da solução da equação diferencial estocástica (1.1.8) sobre M , usamos o Teorema de Whitney para obter um mergulho da variedade M sobre $\mathbb{R}^n$, assim podemos considerar M como sendo uma subvariedade fechada de $\mathbb{R}^n$, com isto, os campos vetoriais V_i podem ser visto como funções diferenciais definidas sobre M com valores em $\mathbb{R}^n$. Assim, podemos estender os campos vetoriais V_i de M para campos vetoriais $\bar{V}_i$ em $\mathbb{R}^n$ usando o teorema da vizinhança tubular.

Considere agora a equação diferencial estocástica

$$x_t = x_0 + \sum_{i=1}^m \int_0^t \bar{V}_i(x_s) \circ dW_t^i + \int_0^t \bar{V}_0(x_s) ds, \quad (1.1.9)$$

que possui uma única solução sobre $\mathbb{R}^n$ até seu tempo de explosão $e(x)$, então podemos esperar que se $x = \{x_t, 0 \leq t\}$ começa em M e os campos vetoriais $\bar{V}_i$ são tangentes em M , então x_t permanece em M até o seu tempo de explosão.

Com tudo isto, temos a seguinte proposição

Proposição 1.1.7. *Seja $x = \{x_t, 0 \leq t\}$ a solução da equação estendida (1.1.9) até seu tempo de explosão $e(x)$ com $x_0 \in M$. Então, $x_t \in M$ para todo $t \in [0, e(x))$. Com isto $x = \{x_t, 0 \leq t\}$ é solução da equação diferencial estocástica (1.1.7).*

É possível mostrar que a solução independe do mergulho de M e da extensão dos campos vetoriais V_i de M , finalmente enunciamos o teorema de existência e unicidade para a nossa equação diferencial estocástica.

Teorema 1.1.8. *Existe uma única solução da equação diferencial estocástica (1.1.7) até seu tempo de explosão.*

Demonstração : Ver E. Hsu [9]. □

1.2 Desigualdades

Enunciamos algumas desigualdades clássicas na teoria de equações diferenciais ordinárias e na teoria de probabilidades.

Lema 1.2.1 (Gronwall-Versão 1). *Seja $x(t)$ uma função real, contínua e não negativa sobre o intervalo $[c, d]$ tal que*

$$x(t) \leq a(t) + b(t) \int_c^t K(t, s)x(s)ds$$

onde $a(t), b(t), k(t, s)$ são funções não negativas e contínuas para $c \leq s \leq t \leq d$. Então

$$x(t) \leq A(t) \exp(B(t) \int_0^t K(t, s)ds)$$

onde : $A(t) = \sup_{c \leq s \leq t} a(s)$, $B(t) = \sup_{c \leq s \leq t} b(s)$ e $K(t, s) = \sup_{s \leq \alpha \leq t} k(\alpha, s)$.

Demonstração: Ver S. Dragomir [7]. □

Lema 1.2.2 (Gronwall-Versão 2). *Sejam $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$ e $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas definidas num intervalo $I = [a, b)$ com $a < b$. Suponha que $\beta(t) \geq 0$, $t \in I$, e que $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua que satisfaz*

$$u(t) \leq \alpha(t) + \int_0^t \beta(s)u(s)ds \quad (1.2.1)$$

para $t \in I$, então

$$u(t) \leq \alpha(t) + \int_0^t \alpha(s)\beta(s) \exp\left(\int_s^t \beta(r)dr\right)ds.$$

Demonstração: Ver J. Dieudonné [5]. □

Proposição 1.2.3 (Desigualdade de Chebychev). *Se a função $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é crescente sobre $(0, \infty)$, $\varphi(x) \leq 0$, $\varphi(-x) = \varphi(x)$, então*

$$\mathbb{P}(|X| \geq \epsilon) \leq \frac{\mathbb{E}(\varphi(X))}{\varphi(\epsilon)}.$$

Demonstração: Ver por exemplo B. Oksendal [14].

1.3 Introdução à Geometria Simplética

Nesta seção apresentaremos uma breve introdução a geometria simplética. Para uma referência mais abrangente desta teoria recomendamos por exemplo os livros V. I.

Arnold [1], H. Hofer and E. Zehnder [8] e D. McDuff and D. Salamon [13]. Esses conceitos são apresentados para se entender a estrutura dos resultados obtidos por Xue-Mei Li [16], os quais serão generalizados.

1.3.1 Mecânica Hamiltoniana

Consideremos um sistema cujas configurações são descritas por pontos x em $\mathbb{R}^n$ os quais se movimentam ao longo de trajetórias $x(t)$. Se supormos que estes caminhos minimizam alguma ação então dará lugar a um sistema de n -equações diferenciais de segunda ordem chamadas as *Equações de Euler-Lagrange* do problema variacional. Mostramos que estas equações podem ser transformadas em um sistema de $2n$ -equações *Hamiltonianas* de primeira ordem.

Ao estudar a estrutura destes sistemas observamos que os conceitos de geometria simplética lentamente emergem.

Seja $L = L(t, x, v)$ uma função de classe C^2 nas variáveis $(t, x_1, x_2, \dots, x_n, v_1, v_2, \dots, v_n)$ onde identificamos $v \in \mathbb{R}^n = T_x \mathbb{R}^n$ como um vetor tangente no ponto $x \in \mathbb{R}^n$, o qual representa a velocidade $\dot{x}$.

Considere o problema de minimizar a *ação integral*

$$I(x) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x, \dot{x}) dt, \quad (1.3.1)$$

sobre o conjunto dos caminhos $x \in C^1([t_0, t_1]; \mathbb{R}^n)$ que satisfazem as condições de fronteira

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1.$$

A função L é chamada de *Lagrangiano* do problema variacional.

Definição 1.3.1. Um caminho $x : [t_0, t_1] \mapsto \mathbb{R}^n$ é chamado *mínimo* se $I(x) \leq I(x + \xi)$ para toda variação $\xi \in C^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ com $\xi(t_0) = \xi(t_1) = 0$; assim observamos que ξ mantém os extremos fixos.

Lema 1.3.2. *Um caminho minimal $x : [t_0, t_1] \mapsto \mathbb{R}^n$ é uma solução da equação de Euler-Lagrange*

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v} = \frac{\partial L}{\partial x} \quad (1.3.2)$$

onde $\frac{\partial L}{\partial v} = (\frac{\partial L}{\partial v_1}, \frac{\partial L}{\partial v_2}, \dots, \frac{\partial L}{\partial v_n})$. Analogamente para $\frac{\partial L}{\partial x}$.

Demonstração: Ver D. McDuff e D. Salamon [13]. $\square$

Considere a condição de *Legendre*

$$\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial v_j \partial v_k}\right) \neq 0. \quad (1.3.3)$$

Assim, com esta condição, o sistema (1.3.2) define um sistema regular de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem nas variáveis $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Defina

$$y_k = \frac{\partial L}{\partial v_k}(x, v), \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (1.3.4)$$

então

$$\dot{y}_k = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_k} = \frac{\partial L}{\partial x_k}$$

desde que x seja uma solução de (1.3.2). Esta mudança de variáveis é chamada *transformação de Legendre*, ver McDuff e Salamon [13].

Da condição (1.3.3) junto com o teorema da função implícita obtemos que v pode ser localmente expressada como uma função das variáveis t, x e y a qual denotamos por $v_k = G_k(t, x, y)$. Por outro lado se definimos uma função chamado de *Hamiltoniano*:

$$H = \sum_{j=1}^n y_j v_j - L, \quad (1.3.5)$$

e considere H como função de t, x e y , então

$$\frac{\partial H}{\partial x_k} = -\frac{\partial L}{\partial x_k}, \quad \frac{\partial H}{\partial y_k} = G_k.$$

Assim, as equações de *Euler-Lagrange* são transformadas nas *equações diferenciais Hamiltonianas*

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}. \quad (1.3.6)$$

Portanto, obtemos o seguinte resultado

Lema 1.3.3. *Sejam $x : [t_0, t_1] \mapsto \mathbb{R}^n$ um caminho diferenciável e $y : [t_0, t_1] \mapsto \mathbb{R}^n$ as novas variáveis dadas por (1.3.4). Então x é uma solução de (1.3.2) se e somente se as funções x e y satisfazem o sistema Hamiltoniano (1.3.6).*

Observação 1.3.1. O processo anterior pode ser revertido sob a condição

$$\det\left(\frac{\partial^2 H}{\partial y_i \partial y_k}\right) \neq 0.$$

para o sistema Hamiltoniano (1.3.6).

1.3.2 Ação Simplética

Assuma que o Lagrangiano L satisfaz a condição de Legendre (1.3.3) e seja $H(t, x, y)$ o Hamiltoniano definido segundo (1.3.5). Considere $x : [t_0, t_1] \mapsto \mathbb{R}^n$ um caminho diferenciável, seja $y : [t_0, t_1] \mapsto \mathbb{R}^n$ dada pela equação (1.3.4) com $v = \dot{x}$ e denotamos $z(t) = (x(t), y(t))$. Então a integral $I(x)$ definida em (1.3.1) se transforma numa ação integral $\phi_H(z)$ definida por

$$\phi_H(z) = \int_{t_0}^{t_1} (\langle y, \dot{x} \rangle - H(t, x, y)) dt \quad (1.3.7)$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto interno usual no $\mathbb{R}^n$. Esta é a integral da *forma de ação*

$$\omega_H = \sum_{j=1}^n y_j dx_j - H dt$$

ao longo do caminho $z(t)$.

Lema 1.3.4. *Uma curva $z : [t_0, t_1] \mapsto \mathbb{R}^{2n}$ é um ponto crítico de ϕ_H (com respeito às variações com os extremos fixos) se e somente se satisfaz as equações Hamiltonianas (1.3.6).*

Demonstração: Ver o Lema 1.8 do livro de D. McDuff e D. Salamon [13]. □

1.3.3 Campos vetoriais Hamiltonianos e Variedades Simpléticas

Definição 1.3.5. *Uma estrutura simplética sobre uma variedade diferenciável M de dimensão par é uma 2-forma ω sobre M tal que*

- 1.) $d\omega = 0$, isto é a forma ω é fechada.
- 2.) ω é não degenerada, isto é se $u \in T_x M$ e $\forall v \in T_x M$ tem-se $\omega_x(u, v) = 0$, então $u = 0$.

O par (M, ω) é chamado de variedade simplética.

Exemplo: Considere $M = \mathbb{R}^{2n}$ e $\omega_0(u, v) = \langle Ju, v \rangle$ com $u, v \in \mathbb{R}^{2n}$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto interno euclidiano, onde

$$J = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}$$

sendo I a matriz identidade de ordem $n \times n$. Assim, o par $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ é uma variedade simplética. $\square$

O seguinte teorema afirma que localmente a estrutura simplética gerada pela 2-forma diferenciável ω é equivalente à 2-forma ω_0 .

Teorema 1.3.6 (Darboux). *Seja ω uma 2-forma não degenerada sobre uma variedade M , $\dim M = 2n$. Então $d\omega = 0$ se e só se em cada ponto $p \in M$ existe uma carta local (U, φ) tal que $\varphi^*\omega = \omega_0$.*

Demonstração: Ver Teorema 3.15 de D. McDuff e D. Salamon [13] ou o Teorema 1 da seção 1.3 de H. Hofer e E. Zehnder [8]. $\square$

Neste caso $T_x M$ é um espaço vetorial simplético com relação à forma bilinear ω_x no ponto $x \in M$.

Um exemplo de variedade simplética é $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$, aqui ω_0 é uma forma constante e assim $d\omega_0 = 0$.

Toda variedade diferenciável M de dimensão finita é paracompacta portanto possui uma métrica Riemanniana, mas nem toda variedade de dimensão par admite uma estrutura simplética.

Definição 1.3.7. *Uma aplicação diferenciável $f : M_1 \mapsto M_2$ entre duas variedades simpléticas (M_1, ω_1) e (M_2, ω_2) é dita simplética se $f^*\omega_2 = \omega_1$.*

Quando $M_1 = M_2 = M$ a estrutura simplética define um isomorfismo entre os campos vetoriais X e as 1-formas diferenciáveis sobre M dada por

$$X \mapsto \omega(X, \cdot).$$

Em particular, se $H : M \mapsto \mathbb{R}$ é diferenciável então dH é uma 1-forma sobre M e assim junto com ω determina um campo vetorial X_H dada pela identidade

$$\omega(X_H(x), \cdot) = dH(x), \quad \forall x \in M,$$

assim chamamos ao campo vetorial X_H como *campo vetorial Hamiltoniano*.

Dado o campo vetorial Hamiltoniano X_H , podemos definir o seu *fluxo Hamiltoniano* φ_t pela equação

$$\frac{d}{dt}\varphi_t(x) = X_H(\varphi_t(x)).$$

1.4 O princípio de médias em EDO

Nesta seção apresentamos os preliminares para o princípio de médias em equações diferenciais ordinárias. O princípio de médias é um método de aproximação à uma equação diferencial ordinária com uma pequena perturbação. Os enunciados e as demonstrações

dos resultados aqui apresentados podem ser encontradas em M. I. Freidlin and A. D. Wentzell [6].

Consideremos a seguinte equação diferencial ordinária em $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} \dot{Z}_t^\epsilon = \epsilon b(Z_t^\epsilon, \xi_t), \\ Z_0^\epsilon = x_0, \end{cases} \quad (1.4.1)$$

onde ξ_t , $t \geq 0$, é uma função assumindo valores em $\mathbb{R}^m$, ϵ é um pequeno parâmetro e $b : U \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$b(x, y) = (b^1(x, y), \dots, b^n(x, y)),$$

com U aberto em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Suponhamos que as funções $b^i(x, y)$ não crescem rapidamente tais que permite que a solução da equação (1.4.1) converge para $Z_t^0 \equiv x_0$ quando $\epsilon \rightarrow 0$, uniformemente sobre intervalos de tempo finito.

Em muitas aplicações é de muito interesse estudar o desenvolvimento de Z_t^ϵ sobre intervalos de tempo de ordem ϵ^{-1} . No estudo de sistemas sobre intervalos da forma $[0, T\epsilon^{-1}]$, é conveniente fazer uma mudança de coordenadas tal que o intervalo de tempo não dependa do ϵ . Se fazemos $X_t^\epsilon = Z_{t/\epsilon}^\epsilon$, então a equação para X_t^ϵ assume a forma

$$\begin{cases} \dot{X}_t^\epsilon = b(X_t^\epsilon, \xi_{t/\epsilon}), \\ X_0^\epsilon = x_0. \end{cases} \quad (1.4.2)$$

O estudo deste sistema sobre um intervalo de tempo finito é equivalente ao estudo do sistema (1.4.1) sobre intervalos de ordem ϵ^{-1} .

Seja $b(x, y)$ uma função contínua e limitada em x e y , e tal que

$$|b(x_1, y) - b(x_2, y)| \leq K |x_1 - x_2|.$$

Assumindo que o limite

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T b(x, \xi_s) ds = \bar{b}(x) \quad (1.4.3)$$

existe para $x \in \mathbb{R}^n$, então a função $\bar{b}(x)$ é limitada e também satisfaz a condição de Lipschitz com a mesma constante K .

O deslocamento da trajetória X_t^ϵ sobre um tempo pequeno Δ pode ser escrito como segue

$$\begin{aligned} X_\Delta^\epsilon - x_0 &= \int_0^\Delta b(X_s^\epsilon, \xi_{s/\epsilon}) ds \\ &= \int_0^\Delta b(x_0, \xi_{s/\epsilon}) ds + \int_0^\Delta [b(X_s^\epsilon, \xi_{s/\epsilon}) - b(x_0, \xi_{s/\epsilon})] ds \\ &= \Delta \left(\frac{\epsilon}{\Delta} \int_0^{\Delta/\epsilon} b(x_0, \xi_s) ds \right) + \rho_\epsilon(\Delta). \end{aligned}$$

O coeficiente de Δ na última igualdade converge para $\bar{b}(x)$ quando $\epsilon/\Delta \rightarrow 0$, isto por (1.4.3). O segundo termo satisfaz a desigualdade $|\rho_\epsilon(\Delta)| < K\Delta^2$. Consequentemente, o deslocamento da trajetória X_t^ϵ sobre intervalos de tempo pequeno difere do deslocamento da trajetória $\bar{x}_t$ da equação diferencial

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_t = \bar{b}(\bar{x}_t), \\ \bar{x}_0 = x_0, \end{cases} \quad (1.4.4)$$

por uma quantidade infinitamente pequena comparada a Δ (com $\Delta \rightarrow 0$), se $\epsilon/\Delta \rightarrow 0$. Se assumimos que o limite em (1.4.3) é uniforme em x , então nós obtemos uma prova do fato que a trajetória X_t^ϵ converge pra solução da equação (1.4.4), uniformemente sobre todo intervalo de tempo finito quando $\epsilon \rightarrow 0$.

A afirmação que a trajetória X_t^ϵ é próxima a $\bar{x}_t$ é o que chamamos de **Princípio de Médias**.

Podemos formular um princípio análogo numa situação mais geral, por exemplo, consideremos o sistema

$$\begin{cases} \dot{X}_t^\epsilon = b_1(X_t^\epsilon, \xi_t^\epsilon), & X_0^\epsilon = x_0 \\ \dot{\xi}_t^\epsilon = \epsilon^{-1} b_2(X_t^\epsilon, \xi_t^\epsilon), & \xi_0^\epsilon = y_0. \end{cases} \quad (1.4.5)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$, $\xi \in \mathbb{R}^m$, b_1 e b_2 são funções diferenciáveis e limitadas sobre $\mathbb{R}^{n+m}$ com valores em $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$ respectivamente. A velocidade de movimento da variável ξ possui ordem ϵ^{-1} quando $\epsilon \rightarrow 0$, daqui, os ξ são chamadas de *variáveis rápidas*, o espaço $\mathbb{R}^m$ é dito o espaço de movimento rápido e os x são chamadas de *variáveis lentas*.

Considere o movimento rápido $\xi_t(x)$ fixado sobre uma variável lenta $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_t = b_2(x, \xi_t(x)), \\ \xi_0(x) = y_0, \end{cases}$$

e suponhamos que o limite

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T b_1(x, \xi_s(x)) ds = \bar{b}_1(x). \quad (1.4.6)$$

existe. Por simplicidade, suponha que este limite seja independente do ponto inicial y_0 da trajetória $\xi_s(x)$. O princípio de médias para o sistema (1.4.5) é a afirmação que sob certas hipóteses, o deslocamento no espaço do movimento lento pode ser aproximado pela trajetória do sistema de médias:

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_t = \bar{b}_1(\bar{x}_t), \\ \bar{x}_0 = x_0. \end{cases}$$

Da equação (1.4.2), o papel do movimento rápido é desempenhado por $\xi_t^\epsilon = \xi_{t/\epsilon}$. Neste caso a velocidade do movimento rápido não depende das variáveis lentas.

Exemplo 1.4.1 (Equação de Van der Pol). Consideremos

$$\ddot{x} + \epsilon(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0 \quad (1.4.7)$$

que é a perturbação da equação do oscilador harmônico

$$\ddot{x} + x = 0. \quad (1.4.8)$$

Considere a transformação canônica da forma

$$\begin{aligned} x(t) &= A(t) \cos(\psi), \quad \psi = t + \varphi(t) \\ \dot{x}(t) &= \dot{A} \cos \psi - A(t) \sin(\psi) \dot{\psi}. \end{aligned}$$

A partir desta transformação, obtemos a equação equivalente à (1.4.7)

$$\begin{cases} \dot{A} = \epsilon \sin(\psi)(1 - A^2 \cos^2(\psi))(A \sin(\psi)) \\ \dot{\varphi} = \epsilon \frac{1}{A} \cos(\psi)(1 - A^2 \cos^2(\psi))(A \sin(\psi)). \end{cases}$$

Definamos o operador de médias

$$\langle * \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} * dt.$$

Assim, obtemos

$$\begin{aligned} \langle \sin^2(\psi) \rangle &= 1/2 \\ \langle \sin(\psi) \cos(\psi) \rangle &= 0 \\ \langle \sin(\psi) \cos^3(\psi) \rangle &= 0 \\ \langle \sin^2(\psi) \cos^2(\psi) \rangle &= 1/8 \end{aligned}$$

obtendo a equação de médias

$$\begin{cases} \dot{\hat{A}} = \frac{\epsilon}{8} \hat{A}(4 - \hat{A}^2) \\ \dot{\hat{\varphi}} = 0. \end{cases} \quad (1.4.9)$$

No caso que $\hat{A}(0) = 2$ que é o ponto fixo da equação acima então $\hat{A}(t) = 2$ para todo t . Daqui $A = \hat{A}$ para $t = O(\epsilon^{-1})$, assim temos uma aproximação assintótica do ciclo limite do problema original, isto é

$$x(t) \approx 2 \cos(t), \quad t = O(\epsilon^{-1}).$$

Ainda mais, observando o sinal da derivada $\dot{\hat{A}}$ para $\hat{A} > 2$ e $\hat{A} < 2$ o ciclo limite é estável. Portanto, tecnicamente encontramos uma aproximação assintótica do ciclo limite. O uso de médias deste jeito pode ser formalizado para mostrar a existência de ciclos limites para um ϵ suficientemente pequeno. $\square$

Capítulo 2

Introdução à Teoria de Perturbação sobre variedades simpléticas

Apresentamos neste capítulo um princípio de médias sobre variedades simpléticas. Começaremos enunciando o teorema de Liouville que garante a existência de uma folheação sobre a variedade simplética. Esta folheação nos revela a existência de um novo sistema de coordenadas (simpléticas) chamadas coordenadas ação-ângulo. Se consideramos uma equação diferencial ordinária completamente integrável sobre a variedade simplética, a sua representação neste novo sistema de coordenadas (ação-ângulo) fica mais simples, permitindo dividi-la em dois movimentos, um movimento rápido (fast motion) sobre as folhas e um movimento lento (slow motion). Esta divisão em dois movimentos nos permite introduzir um princípio de médias sobre variedades simpléticas. Recomendamos para este capítulo a leitura de V. Arnold [1].

Na última parte deste capítulo apresentaremos a versão estocástica do princípio de médias em variedades simpléticas realizada por Xue-Mei Li [16] que generalizamos no capítulo seguinte.

A finalidade deste capítulo, portanto é servir de base e comparação para os nossos resultados.

2.1 Sistemas Integráveis

2.1.1 Teorema de Liouville

Seja (M, ω) uma variedade simplética. O espaço de todas as funções diferenciáveis sobre M possui uma estrutura de *álgebra de Lie* dada pelo colchete de Poisson

$$\{F_1, F_2\} = \omega(X_{F_1}, X_{F_2}) = dF_1(X_{F_2})$$

com $F_1, F_2 \in C^\infty(M)$.

Definição 2.1.1. *Uma função $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ é dita a integral primeira de um sistema com função Hamiltoniana H se $\{H, F\} = 0$. Duas funções F_1 e F_2 estão em involução se $\{F_1, F_2\} = 0$.*

Teorema 2.1.2 (Liouville). *Seja M^{2n} uma variedade simplética e $F_1, F_2, \dots, F_n$ são funções em involução, i.e. $\{F_i, F_j\} = 0$, $i, j = 1, 2, \dots, n$.*

Seja

$$M_a = \{x : F_i(x) = a_i, \ i = 1, 2, \dots, n\},$$

onde $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, o conjunto de nível das funções F_i . Suponha que as funções F_i são independentes sobre M_a , (i.e. : as 1-formas diferenciáveis dF_i são linearmente independentes em cada ponto de M_a). Então :

1. *M_a é uma variedade diferenciável, invariante sobre o fluxo de fase com função Hamiltoniana $H = F_1$.*
2. *Se M_a é uma variedade compacta e conexa, então ela é difeomorfa ao Toro n -dimensional*

$$T^n = \{(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n) \mod 2\pi\}$$

3. O fluxo gerado pela função Hamiltoniana H determina um movimento condicionalmente periódico sobre M_a , i.e, em coordenadas angulares $\phi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ temos

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega, \quad \omega = \omega(a).$$

Demonstração: Ver pág. 272 de V. I. Arnold [1]. □

2.1.2 Coordenadas ação-ângulo

Sejam $F_1, \dots, F_n$ funções em involução. Lembre que $M_a = \{x \in M : F(x) = a\}$, com $F = (F_1, F_2, \dots, F_n)$, é um toro n -dimensional, invariante em relação ao fluxo solução. Escolhendo coordenadas angulares φ_i sobre M tal que os fluxos com função Hamiltoniana $H = F_1$ toma uma forma simples

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = \omega(a), \\ \varphi(t) = \varphi(0) + \omega t. \end{cases} \quad (2.1.1)$$

Sobre um aberto U de M_a as coordenadas (F, φ) definem um difeomorfismo de U com $T^n \times D^n$, sendo D^n o disco n -dimensional. Nestas coordenadas, o fluxo solução com função Hamiltoniana $H = F_1$ pode ser escrito como sendo

$$\frac{dF}{dt} = 0, \quad \frac{d\phi}{dt} = \omega(F),$$

que é facilmente integrável,

$$F(t) = F(0), \quad \phi(t) = \phi(0) + \omega(F(0))t.$$

Em geral, o par (F, ϕ) podem não gerar coordenadas simpléticas, é por isto que nos perguntamos o seguinte : “Existem funções de F , isto é, $I = I(F)$ com $I = (I_1, I_2, \dots, I_n)$ tal que o par (I, ϕ) gere coordenadas simpléticas?”.

Se isto for possível, a estrutura simplética original ω é expressada pela fórmula usual

$$\omega = \sum dI_i \wedge d\varphi_i.$$

As variáveis I são chamadas de *variáveis de ação* e as variáveis ϕ são chamadas de *variáveis ângulo*.

Considerando a existência destas coordenadas I , então podemos expressar a equação diferencial (2.1.1) na forma

$$\frac{dI}{dt} = 0, \quad \frac{d\phi}{dt} = \omega(I).$$

2.1.3 Coordenadas de ação-ângulo no caso $\mathbb{R}^2$

Consideremos a função Hamiltoniana $H(p, q)$ nas coordenadas (p, q) , assim neste caso a variável de ação pode ser calculada pela fórmula

$$I(a) = \frac{1}{2\pi} A(a)$$

onde $A(a)$ é a área fechada pela curva M_a .

Exemplo 2.1.3. Consideremos o oscilador harmônico $H = \frac{1}{2}(c_1)^2 p^2 + \frac{1}{2}(c_2)^2 q^2$. Assim a curva dada por M_a , $a \in \mathbb{R}$ é a elipse com área $A(a) = \frac{2\pi a}{c_1 c_2}$.

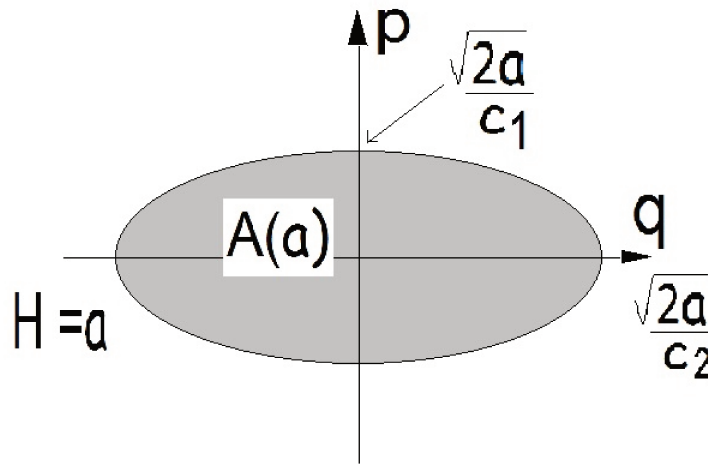


Figura 2.1: Oscilador Harmônico

2.1.4 Coordenadas de ação-ângulo em $\mathbb{R}^{2n}$

Consideremos agora o espaço $\mathbb{R}^{2n} = \{(p, q)\}$, a função Hamiltoniana $H(p, q)$ e n integrais primeiras em involução $F_1 = H, F_2, \dots, F_n$. Sejam $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ a base para os ciclos 1-dimensionais sobre o toro $M_a \approx S^1 \times S^1 \times \dots \times S^1$. Podemos definir

$$I_i(a) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_i} pdq, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Neste caso $I_1(F), I_2(F), \dots, I_n(F)$ são chamadas de variáveis *ação*.

Se assumimos que $\det \left(\frac{\partial I}{\partial a} \right) \Big|_a \neq 0$, então numa vizinhança tubular do toro M_a o par (I, ϕ) gera uma carta local, ainda mais, a transformação $(p, q) \rightarrow (I, \phi)$ é canônica, isto é

$$\sum dp_i \wedge dq_i = \sum dI_i \wedge d\phi_i.$$

2.2 Princípio de Médias

Os resultados apresentados nesta seção podem ser encontrados em V. I. Arnold [1].

Sejam (I, ϕ) as coordenadas ação-ângulo num sistema (não perturbado) com função Hamiltoniana $H_0(I)$.

$$\begin{cases} \dot{I} = 0, \\ \dot{\phi} = \omega(I), \text{ onde } \omega(I) = \frac{\partial H_0}{\partial I}. \end{cases}$$

Consideremos o sistema perturbado

$$\begin{cases} \dot{I} = \epsilon g(I, \phi), \\ \dot{\phi} = \omega(I) + \epsilon f(I, \phi), \quad 0 < \epsilon \ll 1. \end{cases} \quad (2.2.1)$$

O *princípio de médias* para o sistema (2.2.1) consiste em aproximar trajetórias de ordem ϵ^{-1} ao *sistema de médias*:

$$\dot{J} = \epsilon \bar{g}(J) \quad (2.2.2)$$

onde $\bar{g}(J) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} g(J, \phi) d\phi_1 \cdots d\phi_n$, é definida na região n -dimensional $G \subseteq \mathbb{R}^n = \{J = (J_1, J_2, \dots, J_n)\}$.

Vejamos em que sentido o sistema (2.2.2) é uma boa aproximação do sistema (2.2.1).

Exemplo 2.2.1. Consideremos o caso $n = 1$. Neste caso temos o sistema perturbado

$$\begin{cases} \dot{I} = \epsilon g(\xi), \\ \dot{\xi} = \omega \neq 0 \end{cases} \quad (2.2.3)$$

e o sistema de médias

$$\dot{J} = \epsilon \bar{g}(J) \quad (2.2.4)$$

Então, para $0 < t < 1/\epsilon$, temos que, a solução de (2.2.4), é

$$J(t) = I(0) + \epsilon \bar{g}t.$$

Logo, escrevendo $g = \bar{g} + \tilde{g}$ em função de I e ξ temos que

$$\begin{aligned} I(t) - I(0) &= \int_0^t \epsilon g(\xi_0 + \omega t) dt \\ &= \int_0^t \epsilon (\bar{g} + \tilde{g})(I, \xi) dt \\ &= \int_0^t \epsilon \bar{g} dt + \frac{\epsilon}{\omega} \int_0^{\omega t} \tilde{g}(\xi) d\xi \\ &= \epsilon \bar{g}t + \frac{\epsilon}{\omega} h(\omega t) \end{aligned}$$

onde $h(\xi) = \int_0^\xi \tilde{g}(\xi) d\xi$ é periódico e portanto limitada, assim

$$\begin{aligned} |I(t) - J(t)| &= |I(t) - I(0) - \epsilon \bar{g}t| \\ &= \left| \frac{\epsilon}{\omega} h(\omega t) \right| < c\epsilon \end{aligned}$$

Assim, a variação de I com respeito ao tempo consiste de duas partes

a.) Uma oscilação de ordem ϵ dependente de $\bar{g}$.

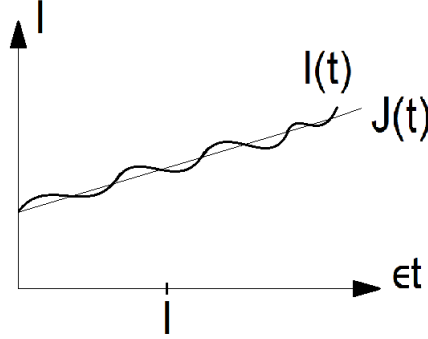


Figura 2.2: Evolução e Oscilação

b.) Uma *evolução* sistemática com velocidade $\epsilon \bar{g}$.

O princípio de médias é baseada na afirmação que em geral, o movimento do sistema (2.2.3) pode ser dividido numa *evolução* (slow motion) e pequenas oscilações (fast motion).

Apresentamos o teorema justificando este princípio no caso particular que temos uma única frequência de oscilação.

Considere o sistema de $n + 1$ equações diferenciais

$$\begin{cases} \dot{I} = \epsilon g(I, \phi), \\ \dot{\phi} = \omega(I) + \epsilon f(I, \phi), \quad \phi \mod 2\pi \in S^1, I \in G \subset \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (2.2.5)$$

onde $f(I, \phi + 2\pi) = f(I, \phi)$ e $g(I, \phi + 2\pi) = g(I, \phi)$. Considere o sistema médio de n equações:

$$\dot{J} = \epsilon \bar{g}(J), \quad \text{onde} \quad \bar{g}(J) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(J, \phi) d\phi. \quad (2.2.6)$$

O teorema seguinte mostra que o princípio de médias descreve corretamente a evolução sobre um longo intervalo de tempo $[0, 1/\epsilon]$. Denotamos por $(I(t), \phi(t))$ a solução de (2.2.5) com condição inicial $(I(0), \phi(0))$, e por $J(t)$ a solução do sistema (2.2.6) com condição inicial $J(0) = I(0)$.

Teorema 2.2.2. *Suponha que*

- 1.) As funções ω, f e g são definidas por I numa região G limitada, e nesta região estas mesmas são limitadas junto com suas derivadas de até segunda ordem,

$$\|\omega, f, g\|_{C^2(G \times S^1)} < C_1.$$

- 2.) Na região G temos $\omega(I) > c > 0$.

- 3.) Para $0 \leq t \leq 1/\epsilon$, um entorno de raio d do ponto $J(t)$ pertence a G ,

$$J(t) \in G - d$$

Então, para ϵ muito pequeno

$$|I(t) - J(t)| < C_q \epsilon, \quad 0 \leq t \leq 1/\epsilon,$$

com $C_q > 0$ constante.

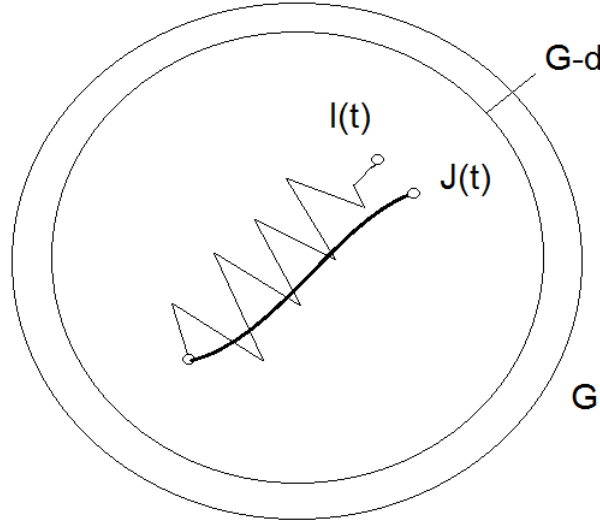


Figura 2.3: Princípio de Médias

Demonstração: Ver pág. 294 de V. I. Arnold [1]. □

O teorema acima garante a boa aproximação do nosso sistema de médias, dada pela equação (2.2.6), com o sistema de equações perturbadas dadas pelas equações (2.2.5).

2.3 Um princípio de médias para um sistema Hamiltoniano estocástico

Nesta seção apresentamos sem demonstração os resultados obtidos por Xue-Mei Li [16].

Consideramos M^{2n} uma variedade simplética. Seja $\{H_i\}_{i=1}^n$ uma família de Hamiltonianos sobre M que formam um *sistema completamente integrável*, isto é, os Hamiltonianos H_i estão em involução dois a dois e seus correspondentes campos vetoriais X_{H_i} são linearmente independentes, e seja V um campo Hamiltoniano comutando com os campos $\{X_{H_i}\}$ no sentido que $\omega(X_{H_i}, V) = 0$.

Considere o sistema estocástico Hamiltoniano completamente integrável

$$dx_t = \sum_{i=1}^n X_{H_i}(x_t) \circ dB_t^i + V(x_t)dt \quad (2.3.1)$$

A solução do sistema (2.3.1) preserva as energias H_i , para cada $i = 1, 2, \dots, n$.

Fixado um ponto $y_0 \in M$, consideremos uma perturbação do sistema (2.3.1) via um campo vetorial ϵK com $\epsilon > 0$:

$$\begin{cases} dy_t^\epsilon = \sum_{i=1}^n X_{H_i}(y_t^\epsilon) \circ dB_t^i + V(y_t^\epsilon)dt + \epsilon K(y_t^\epsilon)dt \\ y_t^\epsilon = y_0. \end{cases} \quad (2.3.2)$$

assim, a solução do sistema (2.3.2) pode não conservar as energias.

Assumiremos nesta parte que a seguinte condição é válida:

CONDIÇÃO (α) : Assumamos que $\omega(V, X_{H_i}) = 0$. Seja $y_0 \in M$ um ponto regular de $H = (H_1, H_2, \dots, H_n)$ e U_0 uma vizinhança de y_0 que é o domínio das coordenadas de ação-ângulo

$$\varphi^{-1} : U_0 \rightarrow D \times T^n, \quad D \text{ aberto em } \mathbb{R}^n.$$

Sob estas hipóteses, observaremos inicialmente que as soluções dos sistemas dadas pelas equações (2.3.1) e (2.3.2) estão próximas *fracamente* no sentido de comparação via funções $f \in C^\infty(M)$.

Se consideramos $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, então denotamos por $\bar{f} = f \circ \varphi$ a representação de f em $T^n \times D$.

Lema 2.3.1. *Seja τ_ϵ o primeiro tempo de saída da solução y_t^ϵ no aberto U_0 . Então para cada $f \in C^\infty(M)$ temos*

$$\left[\mathbb{E} \left(\sup_{s \leq t \wedge \tau^\epsilon} |f(y_s^\epsilon) - f(x_s)|^p \right) \right]^{1/p} \leq C\epsilon(t + t^2).$$

com C constante dependendo dos campos vetoriais e dos limites superiores das funções $|df|, |\partial^2 \bar{H}_i / \partial I_i \partial I_j|, |d\bar{V}|, |\bar{K}|$ sobre $T^n \times D$.

O seguinte lema nos dá uma alternativa sobre como um princípio de médias pode ser encontrado segundo nossos sistemas estudados. Observe que para isso é necessário integrar em M_a , é por isso que precisamos que as variedades invariantes possuam volume finito.

Lema 2.3.2. *Seja $g \in C^\infty(M)$ e considere $\varphi^{-1} : U_0 \rightarrow D \times T^n$ as coordenadas de ação-ângulo. Defina $Q^g : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ como sendo*

$$Q^g(a) = \int_{T^n} \tilde{g}(a, z) d\mu(z), \quad (2.3.3)$$

a média de g sobre o toro T^n .

Considere $H_i^\epsilon(s) = H_i(y_{s/\epsilon}^\epsilon)$, $H^\epsilon(s) = (H_1^\epsilon, \dots, H_n^\epsilon(s))$. Então

$$\int_{s \wedge T^\epsilon}^{(s+t) \wedge T^\epsilon} g(y_{r/\epsilon}^\epsilon) dr = \int_{s \wedge T^\epsilon}^{(s+t) \wedge T^\epsilon} Q^g(H^\epsilon(r)) dr + \delta(g, \epsilon, t)$$

onde,

$$\left[\mathbb{E} \sup_{s \leq t} |\delta(g, \epsilon, s)|^\beta \right]^{1/\beta} \leq c(t)\epsilon^{1/3}$$

onde $T^\epsilon = \epsilon\tau^\epsilon$.

Se consideramos algumas funções especiais $g_i = \omega(X_{H_i}, K)$, $i = 1, 2, \dots, n$, então poderemos enunciar finalmente o princípio de médias para o sistema Hamiltoniano estocástico completamente integrável da equação (2.3.2).

Teorema 2.3.3. *Considere a equação diferencial estocástica (2.3.2) satisfazendo a condição (α) . Seja T_ϵ o primeiro tempo de saída da solução $y_{t/\epsilon}^\epsilon$, começando de y_0 , sai de U_0 . Seja $H_i^\epsilon(t) = H_i(y_{t/\epsilon}^\epsilon)$ e considere o sistema de equações determinísticas*

$$\frac{d}{dt}\bar{H}_i(t) = \int_{M_{\bar{H}(t)}} \omega(X_{H_i}, K)(\bar{H}(t), z) d\mu_{\bar{H}_i}(z) \quad (2.3.4)$$

com condição inicial $\bar{H}(0) = H(y_0)$. Seja T_0 o primeiro tempo de saída que $\bar{H}(t)$ sai de U_0 . Então, para todo $t < T_0$, $\beta > 1$, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\mathbb{E} \left(\sup_{s \leq t} \|H^\epsilon(s \wedge T^\epsilon) - \bar{H}(s \wedge T^\epsilon)\|^\beta \right)^{1/\beta} \leq C\epsilon^{1/3}.$$

Ainda mais, seja $r > 0$ tal que $U = \{x : \|H(x) - H(y_0)\| \leq r\} \subset U_0$ e defina

$$T_\delta = \inf_t \{|\bar{H}(t) - H(y_0)| \geq r - \delta\}.$$

Então, para todo $\beta > 1$, $\delta > 0$ existe uma constante C que depende de T_δ tal que

$$\mathbb{P}(T^\epsilon < T_\delta) \leq C(T_\delta)\delta^{-\beta}\epsilon^{\beta/3}.$$

Apresentados estes resultados, formularemos a sua generalização no seguinte capítulo.

Capítulo 3

Um princípio de Médias para um sistema estocástico sobre folheações

Neste capítulo apresentamos uma versão do princípio de médias sobre folheações geradas por imagem inversa de uma função diferenciável, generalizando assim os resultados obtidos por Xue-Mei Li [16] no caso de variedades simpléticas.

O princípio de médias vai ser obtido sobre uma vizinhança tubular de uma folha compacta.

3.1 Caso $M = (-a, a)^n \times N$

Consideremos inicialmente $M = (-a, a)^n \times N$, onde N é uma variedade compacta sem bordo de dimensão m , $a > 0$, assim $\dim M = n + m$. Sejam $V, X_1, X_2, \dots, X_r$ campos vetoriais tangentes às folhas $\{s\} \times N$, $s \in (-a, a)^n$.

Considere a equação diferencial estocástica

$$\begin{cases} dx_t = \sum_{i=1}^r X_i(x_t) \circ dB_t^i + V(x_t)dt. \\ x_0 = y_0 \end{cases} \quad (3.1.1)$$

onde os $B_1, B_2, \dots, B_r$ são movimentos Brownianos unidimensionais independentes e

$y_0 = (s_0, n_0)$ um ponto sobre M .

Observe que, segundo a escolha dos campos vetoriais, a solução da equação diferencial estocástica (3.1.1) pertence à folha $\{s_0\} \times N$. Seja K um campo vetorial em M , com isto defina a perturbação do sistema (3.1.1) como sendo

$$\begin{cases} dy_t^\epsilon = \sum_{i=1}^r X_i(y_t^\epsilon) \circ dB_t^i + V(y_t^\epsilon)dt + \epsilon K(y_t^\epsilon)dt. \\ y_0^\epsilon = y_0. \end{cases} \quad (3.1.2)$$

para $\epsilon > 0$.

Considere U aberto em M , contendo y_0 , da forma $(-b, b)^n \times U_N$ com U_N aberto em N e $0 < b < a$. Denote por $\varphi : (-b, b)^n \times U_0 \rightarrow (-b, b)^n \times U_N$ a carta local, com U_0 aberto em $\mathbb{R}^m$. Denote por (u, v) as coordenadas de $(-b, b)^n \times U_0$. Segundo estas hipóteses obtemos nossa versão do Lema 2.3.1.

Lema 3.1.1. *Seja τ^ϵ o primeiro tempo tal que a solução y_t^ϵ , começando de y_0 , sai do aberto U . Então, dada uma função diferenciável $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ temos*

$$\left[\mathbb{E} \left(\sup_{s \leq t \wedge \tau^\epsilon} |f(y_s^\epsilon) - f(x_s)|^p \right) \right]^{\frac{1}{p}} \leq C \epsilon t H(t),$$

onde $H(t) = \exp(C_0(t^2 + t))$ e C_0, C são constantes que dependem da função f e dos campos vetoriais $K, V, X_1, \dots, X_r$.

Demonstração:

Denotemos as soluções das equações diferenciais estocásticas (3.1.1) e (3.1.2) como sendo $x_t = \varphi(u_t, v_t)$ e $y_t^\epsilon = \varphi(u_t^\epsilon, v_t^\epsilon)$ respectivamente, e seja $\tilde{f} = f \circ \varphi$, então

$$\begin{aligned} |f(y_t^\epsilon) - f(x_t)| &= \left| \tilde{f}(u_t^\epsilon, v_t^\epsilon) - \tilde{f}(u_t, v_t) \right| \\ &\leq C |u_t^\epsilon - u_t| + C |v_t^\epsilon - v_t|. \end{aligned}$$

Denote por $u_t = (u_t^1, \dots, u_t^n)$, $v_t = (v_t^1, \dots, v_t^m)$, $u_t^\epsilon = (u_t^{\epsilon,1}, \dots, u_t^{\epsilon,n})$, $v_t^\epsilon = (v_t^{\epsilon,1}, \dots, v_t^{\epsilon,m})$ e $\tilde{K} = (K_u, K_v)$ com $K_u = (K_u^1, \dots, K_u^n)$ e $K_v = (K_v^1, \dots, K_v^m)$. Dado que os campos

vetoriais são tangentes às folhas, salvo o campo K , obtemos uma equação diferencial estocástica sobre $(-b, b)^n \times N$ da forma

$$du_t^{\epsilon, i} = \sum_{k=1}^r b_k^i(u_r^\epsilon, v_r^\epsilon) \circ dB_r^k + b_0^i(u_r^\epsilon, v_r^\epsilon) dt + \epsilon K_u^i(u_r^\epsilon, v_r^\epsilon) dr, \quad (3.1.3)$$

$$dv_t^{\epsilon, j} = \epsilon K_v^j(u_t^\epsilon, v_t^\epsilon) dt, \quad (3.1.4)$$

com $i = 1, 2, \dots, n$ e $j = 1, 2, \dots, m$. Observe que da equação (3.1.4) temos

$$\begin{aligned} \sup_{s \leq t \wedge \tau^\epsilon} |v_s^\epsilon - v_s| &\leq \epsilon \sup_{s \leq t \wedge \tau^\epsilon} \int_0^s |K_v(u_s^\epsilon, v_s^\epsilon)| ds \\ &\leq \epsilon t \sup_{(-b, b)^n \times U_N} |K_v|. \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

Agora, da equação (3.1.3), calcularemos a seguinte estimativa. Para $s < \tau^\epsilon$ temos :

$$\begin{aligned} u_s^{\epsilon, i} - u_s^i &= \sum_{k=1}^r \int_0^s (b_k^i(u_r^\epsilon, v_r^\epsilon) - b_k^i(u_r, v_r)) \circ dB_r^k + \\ &\quad \int_0^s (b_0^i(u_r^\epsilon, v_r^\epsilon) - b_0^i(u_r, v_r)) dr + \epsilon \int_0^s K_u^i(u_r^\epsilon, v_r^\epsilon) dr \end{aligned}$$

Observando que o termo de correção de Stratonovich fica na forma seguinte :

$$\begin{aligned} \int_0^s (b_k^i(u_r^\epsilon, v_r^\epsilon) - b_k^i(u_r, v_r)) \circ dB_r^k &= \int_0^s (b_k^i(u_r^\epsilon, v_r^\epsilon) - b_k^i(u_r, v_r)) dB_r^k \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^s (b_k^i(u_r^\epsilon, v_r^\epsilon) \frac{\partial b_k^i}{\partial v}(u_r^\epsilon, v_r^\epsilon) - b_k^i(u_r, v_r) \frac{\partial b_k^i}{\partial v}(u_r, v_r)) dr. \end{aligned}$$

Então, passando para módulo obtemos :

$$\begin{aligned} |u_s^{\epsilon, v} - u_s^i| &\leq \left| \sum_{k=1}^r \int_0^s (b_k^i(u_r^\epsilon, v_r^\epsilon) - b_k^i(u_r, v_r)) dB_r^k \right| + \\ &\quad \frac{1}{2} \sum_{k=1}^r \left| \int_0^s (b_k^i(u_r^\epsilon, v_r^\epsilon) \frac{\partial b_k^i}{\partial v}(u_r^\epsilon, v_r^\epsilon) - b_k^i(u_r, v_r) \frac{\partial b_k^i}{\partial v}(u_r, v_r)) dr \right| \\ &\quad + \left| \int_0^s (b_0^i(u_r^\epsilon, v_r^\epsilon) - b_0^i(u_r, v_r)) dr \right| + \epsilon \left| \int_0^s K_u^i(u_r^\epsilon, v_r^\epsilon) dr \right| \end{aligned}$$

Desde que as funções b_k^i são limitadas com derivadas também limitadas, então, existem constantes K_1, K_2 tais que

$$\begin{aligned} |u_s^{\epsilon, i} - u_s^i| &\leq \left| \sum_{k=1}^r \int_0^s (b_k^i(u_r^\epsilon, v_r^\epsilon) - b_k^i(u_r, v_r)) dB_r^k \right| + \\ &\quad K_1 \int_0^s |v_r^\epsilon - v_r| dr + K_2 \int_0^s |u_r^\epsilon - u_r| dr + \epsilon \sup_{(-b, b) \times N} |K_u| . s \end{aligned}$$

Assim , de (3.1.5) :

$$\begin{aligned} |u_s^{\epsilon,i} - u_s^i| &\leq \left| \sum_{k=1}^r \int_0^s (b_k^i(u_r^\epsilon, v_r^\epsilon) - b_k^i(u_r, v_r)) dB_r^k \right| + K_1 \epsilon s^2 \sup_{(-b,b) \times N} |K_v| \\ &\quad + K_2 \int_0^s |u_r^\epsilon - u_r| dr + \epsilon s K_3 \end{aligned}$$

com $K_3 = \sup_{(-b,b)^n \times N} |K_u|$. Lembrando a desigualdade : $|a + b|^p \leq Cte(|a|^p + |b|^p)$, para $p \geq 1$, se $p = 2$ obtemos neste caso :

$$\begin{aligned} |u_s^{\epsilon,i} - u_s^i|^2 &\leq C \left| \sum_{k=1}^r \int_0^s (b_k^i(u_r^\epsilon, v_r^\epsilon) - b_k^i(u_r, v_r)) dB_r^k \right|^2 + \bar{K}_1^2 \epsilon^2 s^4 \\ &\quad + K_2^2 \left\{ \int_0^s |u_r^\epsilon - u_r| dr \right\}^2 + \epsilon^2 s^2 K_3^2. \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

Onde $\bar{K}_1 = K_1 \sup_{(-b,b)^n \times N} |K_v|$. Lembrando que :

$$\int_0^s |f| dr \leq \left\{ \int_0^s |f|^2 dr \right\}^{\frac{1}{2}} s^{\frac{1}{2}},$$

temos então

$$\begin{aligned} |u_s^{\epsilon,i} - u_s^i|^2 &\leq C \left| \sum_{k=1}^r \int_0^s (b_k^i(u_r^\epsilon, v_r^\epsilon) - b_k^i(u_r, v_r)) dB_r^k \right|^2 + \bar{K}_1^2 \epsilon^2 s^4 \\ &\quad + K_2^2 s \int_0^s |u_r^\epsilon - u_r|^2 dr + \epsilon^2 s^2 K_3^2. \end{aligned}$$

Aplicando $\sup_{s \leq t \wedge \tau^\epsilon}$ e logo aplicando a esperança $\mathbb{E}$, obtemos

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \sup_{s \leq t \wedge \tau^\epsilon} |u_s^{\epsilon,i} - u_s^i|^2 &\leq C \mathbb{E} \sup_{s \leq t \wedge \tau^\epsilon} \left| \sum_{k=1}^r \int_0^s (b_k^i(u_r^\epsilon, v_r^\epsilon) - b_k^i(u_r, v_r)) dB_r^k \right|^2 + \bar{K}_1^2 \epsilon^2 t^4 \\ &\quad + K_2^2 t \mathbb{E} \sup_{s \leq t \wedge \tau^\epsilon} \int_0^s |u_r^\epsilon - u_r|^2 dr + \epsilon^2 t^2 K_3^2 \\ &\leq C \mathbb{E} \sup_{s \leq t \wedge \tau^\epsilon} \left| \sum_{k=1}^r \int_0^s (b_k^i(u_r^\epsilon, v_r^\epsilon) - b_k^i(u_r, v_r)) dB_r^k \right|^2 + \bar{K}_1^2 \epsilon^2 t^4 \\ &\quad + K_2^2 t \int_0^t \mathbb{E} \left(\sup_{s \leq r \wedge \tau^\epsilon} |u_r^\epsilon - u_r|^2 \right) dr + \epsilon^2 t^2 K_3^2. \end{aligned}$$

Por outro lado, pela isometria de Itô , $\mathbb{E}((\int_0^t H_s dB_s)^2) = \mathbb{E}(\int_0^t H_s^2 ds)$, obtemos que

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \sup_{s \leq t \wedge \tau^\epsilon} \left| \sum_{i,k=1}^r \int_0^s (b_k^i(u_r^\epsilon, v_r^\epsilon) - b_k^i(u_r, v_r)) dB_r^k \right|^2 \\ & \leq C_2 \left(\sum_{i,k=1}^r \sup_{s \leq t \wedge \tau^\epsilon} \mathbb{E} \left| \int_0^s (b_k^i(u_r^\epsilon, v_r^\epsilon) - b_k^i(u_r, v_r)) dB_r^k \right|^2 \right) \\ & \leq C_2 \left(\sum_{i,k=1}^r \sup_{s \leq t \wedge \tau^\epsilon} \mathbb{E} \int_0^s (b_k^i(u_r^\epsilon, v_r^\epsilon) - b_k^i(u_r, v_r))^2 dr \right) \end{aligned}$$

Daqui, existem constantes α_1, α_2 e $\bar{\alpha}_1$ tais que :

$$\begin{aligned} & C_2 \left(\sum_{i,k=1}^r \sup_{s \leq t \wedge \tau^\epsilon} \mathbb{E} \int_0^s (b_k^i(u_r^\epsilon, v_r^\epsilon) - b_k^i(u_r, v_r))^2 dr \right) \\ & \leq \sup_{s \leq t \wedge \tau^\epsilon} \mathbb{E} \left(\alpha_1 \int_0^s |v_r^\epsilon - v_r|^2 dr + \alpha_2 \int_0^s |u_r^\epsilon - u_r|^2 dr \right) \\ & \leq \alpha_1 \sup_{s \leq t \wedge \tau^\epsilon} \mathbb{E} \left(\int_0^s |v_r^\epsilon - v_r|^2 dr \right) + \alpha_2 \sup_{s \leq t \wedge \tau^\epsilon} \mathbb{E} \left(\int_0^s |u_r^\epsilon - u_r|^2 dr \right) \\ & \leq \alpha_1 \sup_{s \leq t \wedge \tau^\epsilon} \mathbb{E} \left(\int_0^s (\epsilon^2 s^2 K_1) dr \right) + \alpha_2 \int_0^t \mathbb{E} \sup_{s \leq r \wedge \tau^\epsilon} |u_r^\epsilon - u_r|^2 dr \\ & \leq \bar{\alpha}_1 \epsilon^2 t^3 + \alpha_2 \int_0^t \mathbb{E} \sup_{s \leq r \wedge \tau^\epsilon} |u_r^\epsilon - u_r|^2 dr. \end{aligned}$$

Seja $m(t) = \mathbb{E} \left(\sup_{s \leq t \wedge \tau^\epsilon} |u_r^\epsilon - u_r|^2 \right)$, assim substituindo todas as estimativas na desigualdade (3.1.6), obtemos o seguinte, em função do $m(t)$:

$$m(t) \leq \bar{\alpha}_1 \epsilon^2 t^3 + \alpha_2 \int_0^t m(r) dr + \bar{K}_1^2 \epsilon^2 t^4 + K_2 t \int_0^t m(r) dr + K_3^2 \epsilon^2 t^2$$

$$m(t) \leq (\bar{\alpha}_1 \epsilon^2 t^3 + \bar{K}_1^2 \epsilon^2 t^4 + K_3^2 \epsilon^2 t^2) + (\alpha_2 + K_2 t) \int_0^t m(r) dr$$

Usando a *desigualdade de Gronwall* (1.2.1) obtemos :

$$\begin{aligned} m(t) & \leq (\bar{\alpha}_1 \epsilon^2 t^3 + \bar{K}_1^2 \epsilon^2 t^4 + K_3^2 \epsilon^2 t^2) \exp((\alpha_2 + K_2 t)t) \\ & \leq C \epsilon^2 t^2 (t^2 + t + 1) \exp(C_3(t^2 + t)) \end{aligned}$$

Portanto

$$\mathbb{E} \left(\sup_{s \leq t \wedge \tau^\epsilon} |u_s^\epsilon - u_s|^2 \right) \leq C \epsilon^2 t^2 (t^2 + t + 1) \exp(C_3(t^2 + t)). \quad (3.1.7)$$

Lembrando que, se X é uma variável aleatória, usando a desigualdade de Hölder

$$\mathbb{E}(|X|^p)^{\frac{1}{p}} \leq \mathbb{E}(|X|^2)^{\frac{1}{2}}$$

ou

$$\mathbb{E}(|X|^p) \leq \mathbb{E}(|X|^2)^{\frac{p}{2}},$$

aplicando a desigualdade anterior em (3.1.7) temos

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\sup_{s \leq t \wedge \tau^\epsilon} |u_s^\epsilon - u_s|^p \right) &\leq \left[\mathbb{E} \left(\sup_{s \leq t \wedge \tau^\epsilon} |u_s^\epsilon - u_s|^2 \right) \right]^{\frac{p}{2}} \\ &\leq [C \epsilon^2 t^2 (t^2 + t + 1) \exp(C_3(t^2 + t))]^{\frac{p}{2}} \\ &\leq \bar{C} \epsilon^p t^p (t^2 + t + 1)^{\frac{p}{2}} \exp(\bar{C}_3 p (t^2 + t)) \end{aligned}$$

para certas constantes $\bar{C}$ e $\bar{C}_3$. Agora, finalmente, da desigualdade :

$$|f(y_t^\epsilon) - f(x_t)|^p \leq C |v(y_t^\epsilon) - v(x_t)|^p + C |u(y_t^\epsilon) - u(x_t)|^p$$

podemos aplicar $\sup_{s \leq t \wedge \tau^\epsilon}$, e logo a esperança $\mathbb{E}$, obtendo :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\sup_{s \leq t \wedge \tau^\epsilon} |f(y_s^\epsilon) - f(x_s)|^p \right) &\leq C \mathbb{E} \sup_{s \leq t \wedge \tau^\epsilon} |v_s^\epsilon - v_s|^p + C \mathbb{E} \sup_{s \leq t \wedge \tau^\epsilon} |u_s^\epsilon - u_s|^p \\ &\leq C_1 \epsilon^p t^p + \bar{C} \epsilon^p t^p (t^2 + t + 1)^{\frac{p}{2}} \exp(\bar{C}_3 p (t^2 + t)) \\ &\leq C \epsilon^p t^p (1 + (t^2 + t + 1)^{\frac{p}{2}} \exp(\bar{C}_3 p (t^2 + t))). \end{aligned}$$

Isto é :

$$\mathbb{E} \left(\sup_{s \leq t \wedge \tau^\epsilon} |f(y_s^\epsilon) - f(x_s)|^p \right) \leq C \epsilon^p t^p \left(1 + (t^2 + t + 1)^{\frac{p}{2}} \exp(\bar{C}_3 p (t^2 + t)) \right),$$

finalmente

$$\left[\mathbb{E} \left(\sup_{s \leq t \wedge \tau^\epsilon} |f(y_s^\epsilon) - f(x_s)|^p \right) \right]^{\frac{1}{p}} \leq C\epsilon t \left(1 + (t^2 + t + 1)^{\frac{p}{2}} \exp(\bar{C}_3 p(t^2 + t)) \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\left[\mathbb{E} \left(\sup_{s \leq t \wedge \tau^\epsilon} |f(y_s^\epsilon) - f(x_s)|^p \right) \right]^{\frac{1}{p}} \leq C\epsilon t \exp(C_0(t^2 + t))$$

Para certas constantes C, C_0 . □

Observação 3.1.1. Os coeficientes que aparecem na equação diferencial estocástica (3.1.3) dependem das variáveis u e v , o que não acontece quando o sistema era gerado por campos vetoriais Hamiltonianos completamente integráveis. Segundo o artigo de Xue-Mei Li [16], tais coeficientes só dependem da variável ação. Ainda mais, é por tal motivo que nossa estimativa neste caso é de ordem exponencial diferente da estimativa de Xue-Mei Li que era polinomial. Isto mostra que, quando garantimos a existência das coordenadas ação-ângulo podemos melhorar a nossa aproximação. É claro que, para a existência de tal sistema de coordenadas, precisamos de mais ferramentas sobre a geometria da variedade, assim como hipóteses adicionais nos campos vetoriais que geram nosso sistema inicial (não-perturbado). □

Consideramos agora uma função $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável. Seja U o aberto como acima, e $\varphi : (-b, b)^n \times U_0 \rightarrow (-b, b)^n \times U_N$ a carta local, com U_0 aberto em $\mathbb{R}^m$ tal que para cada $s \in (-b, b)^n$ fixo, $\varphi(s, \cdot) : U_0 \rightarrow U_N$ é um difeomorfismo. Então podemos definir a função $\tilde{g} : (-b, b)^n \times U_0 \rightarrow \mathbb{R}$, por $\tilde{g} = g \circ \varphi$.

Definamos $Q^g : (-b, b)^n \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$Q^g(u) = \int_N \tilde{g}(u, v) d\mu,$$

onde μ é uma medida invariante sobre N para o sistema não perturbado. O objetivo agora é **comparar** as funções g e Q^g no aberto U . Para isso, denote por $\pi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\pi(u, v) = u$ a projeção na primeira variável. Obtemos neste contexto a versão generalizada do Lema 2.3.2.

Lema 3.1.2. *Sejam g e Q^g como acima. Denote por T^ϵ o primeiro tempo que $y_{t/\epsilon}^\epsilon$ começando em y_0 sai de U e $\tau^\epsilon = T^\epsilon/\epsilon$. Seja $\pi^\epsilon(t) = \pi(y_{t/\epsilon}^\epsilon)$. Então*

$$\int_{s \wedge T^\epsilon}^{(s+t) \wedge T^\epsilon} g(y_{r/\epsilon}^\epsilon) dr = \int_{s \wedge T^\epsilon}^{(s+t) \wedge T^\epsilon} Q^g(\pi^\epsilon(r)) dr + \delta(g, \epsilon, t).$$

Tal que, para qualquer $p > 1$

$$\left(\mathbb{E} \sup_{s \leq t} |\delta(g, \epsilon, s)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \sqrt{t} \epsilon^q (-\ln \epsilon)^{\frac{q}{2}} h(t, \epsilon)$$

onde $h(t, \epsilon) = \epsilon^{1-q} \sqrt{t} + \epsilon^{1-q} \sqrt{t} (-\ln \epsilon)^{\frac{1}{2}} \exp C(\ln \epsilon + (-\ln \epsilon)^{\frac{q}{2}} t + (-\ln \epsilon)^q t^2) + \epsilon^{1-q} (-\ln \epsilon)^{\frac{1}{2} - \frac{3q}{8}} + \epsilon^{1-q} \sqrt{t} (-\ln \epsilon)^{\frac{1}{2} - \frac{q}{2}}$ é contínua e converge para zero quando $\epsilon \rightarrow 0$, com $q \in (0, 1)$.

Demonstração:

A ideia da demonstração é aproximar $g(y_r^\epsilon)$ por $g(y_r)$ sobre intervalos suficientemente pequenos.

Fixados s e t , vamos considerar uma partição, para isso seja τ^ϵ o primeiro tempo que y_r^ϵ sai de U . Para $q \in (0, 1)$ defina a função $f(\epsilon) = (-\ln \epsilon)^{-q/2}$. Assumamos que $0 < \epsilon < \exp(-1)$ assim observe que $0 < f(\epsilon) < 1$.

Definamos o incremento

$$\Delta t = \frac{t+s}{f(\epsilon)} \wedge \tau^\epsilon - \frac{s}{f(\epsilon)} \wedge \tau^\epsilon$$

Observe que o seguinte limite é válido:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon^\delta}{f(\epsilon)} = 0, \quad \forall \delta > 0. \quad (3.1.8)$$

Seja $N = N(\epsilon) = [(-\ln \epsilon)^{-\frac{q-1}{2}}] + 1$ que é de ordem $(-\ln \epsilon)^{-\frac{q-1}{2}}$, onde $[x]$ é a parte inteira de x . Observe que todos estes termos dependem das trajetórias em ω

Considere $t_n = \frac{s}{\epsilon} \wedge \tau^\epsilon + n \Delta t$, para $1 \leq n \leq N-1$, tal que

$$\frac{s}{\epsilon} \wedge \tau^\epsilon = t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} < \frac{s+t}{\epsilon} \wedge \tau^\epsilon.$$

Dado $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ temos então

$$\int_{s \wedge T^\epsilon}^{(s+t) \wedge T^\epsilon} g(y_r^\epsilon) dr = \epsilon \int_{\frac{s}{\epsilon} \wedge \tau^\epsilon}^{\frac{s+t}{\epsilon} \wedge \tau^\epsilon} g(y_r^\epsilon) dr = \epsilon \sum_{n=0}^{N-1} \int_{t_n}^{t_{n+1}} g(y_r^\epsilon) dr + \epsilon \int_{t_N}^{\frac{s+t}{\epsilon} \wedge \tau^\epsilon} g(y_r^\epsilon) dr$$

Por outro lado, temos na somatória, que

$$\begin{aligned} \epsilon \sum_{n=0}^{N-1} \int_{t_n}^{t_{n+1}} g(y_r^\epsilon) dr &= \epsilon \sum_{n=0}^{N-1} \int_{t_n}^{t_{n+1}} [g(y_r^\epsilon) - g(R_{r-t_n}(y_{t_n}^\epsilon, \Theta_{t_n}(\omega)))] dr \\ &\quad + \epsilon \sum_{n=0}^{N-1} \int_{t_n}^{t_{n+1}} g(R_{r-t_n}(y_{t_n}^\epsilon, \Theta_{t_n}(\omega))) dr \end{aligned}$$

Daqui, obtemos a igualdade:

$$\begin{aligned} \int_{s \wedge T^\epsilon}^{(s+t) \wedge T^\epsilon} g(y_r^\epsilon) dr &= \underbrace{\epsilon \sum_{n=0}^{N-1} \int_{t_n}^{t_{n+1}} [g(y_r^\epsilon) - g(R_{r-t_n}(y_{t_n}^\epsilon, \Theta_{t_n}(\omega)))] dr}_{(A1)} \\ &\quad + \underbrace{\epsilon \sum_{n=0}^{N-1} \int_{t_n}^{t_{n+1}} g(R_{r-t_n}(y_{t_n}^\epsilon, \Theta_{t_n}(\omega))) dr}_{(A2)} + \underbrace{\epsilon \int_{t_N}^{\frac{s+t}{\epsilon} \wedge \tau^\epsilon} g(y_r^\epsilon) dr}_{(A3)}, \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

onde Θ_t é o operador shift sobre o espaço de probabilidade canônico (i.e : $\Theta_t(\omega)(\cdot) = \omega(\cdot + t) - \omega(t)$), e $\{R_t(x, \omega), t \geq 0\}$ é o fluxo solução do sistema não perturbado, com ponto inicial x .

Agora, segundo a igualdade

$$\int_{s \wedge T^\epsilon}^{(s+t) \wedge T^\epsilon} g(y_r^\epsilon) dr = \int_{s \wedge T^\epsilon}^{(s+t) \wedge T^\epsilon} Q^g(\pi^\epsilon(r)) dr + \delta(g, \epsilon, t),$$

faremos uma estimativa de $\delta(g, \epsilon, t)$. Para isso, observe que

$$\begin{aligned} |\delta(g, \epsilon, t)| &= \left| \int_{s \wedge T^\epsilon}^{(s+t) \wedge T^\epsilon} g(y_r^\epsilon) dr - \int_{s \wedge T^\epsilon}^{(s+t) \wedge T^\epsilon} Q^g(\pi^\epsilon(r)) dr \right| \\ &= \left| \int_{s \wedge T^\epsilon}^{(s+t) \wedge T^\epsilon} g(y_r^\epsilon) dr - \epsilon \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \int_{M_{\pi^\epsilon(\epsilon t_n)}} g(\pi^\epsilon(\epsilon t_n), v) d\mu \right. \\ &\quad \left. + \epsilon \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \int_{M_{\pi^\epsilon(\epsilon t_n)}} g(\pi^\epsilon(\epsilon t_n), v) d\mu - \int_{s \wedge T^\epsilon}^{(s+t) \wedge T^\epsilon} Q^g(\pi^\epsilon(r)) dr \right| \end{aligned}$$

onde $M_s = \{s\} \times N$, e μ é a medida invariante sobre N gerada pela equação (2.3.1), que sempre existe por compacidade.

Daqui da igualdade (3.1.9) obtemos

$$\begin{aligned}
|\delta(g, \epsilon, t)| &= \left| (A1) + (A2) + (A3) - \epsilon \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \int_{M_{\pi^\epsilon(\epsilon t_n)}} g(\pi^\epsilon(\epsilon t_n), v) d\mu \right. \\
&\quad \left. + \epsilon \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \int_{M_{\pi^\epsilon(\epsilon t_n)}} g(\pi^\epsilon(\epsilon t_n), v) d\mu - \int_{s \wedge T^\epsilon}^{(s+t) \wedge T^\epsilon} Q^g(\pi^\epsilon(r)) dr \right| \\
&\leq \underbrace{|(A1)|}_{(I)} + \underbrace{\left| (A2) - \epsilon \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \int_{M_{\pi^\epsilon(\epsilon t_n)}} g(\pi^\epsilon(\epsilon t_n), v) d\mu \right|}_{(II)} + \underbrace{|(A3)|}_{(III)} + \\
&\quad + \underbrace{\left| \epsilon \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \int_{M_{\pi^\epsilon(\epsilon t_n)}} g(\pi^\epsilon(\epsilon t_n), v) d\mu - \int_{s \wedge T^\epsilon}^{(s+t) \wedge T^\epsilon} Q^g(\pi^\epsilon(r)) dr \right|}_{(IV)} \quad (3.1.10)
\end{aligned}$$

Para concluir a demonstração do Lema (3.1.2) usaremos os seguintes resultados sobre cada uma das expressões I, II, III e IV que aparecem na Equação (3.1.10):

Lema 3.1.3. *A expressão (I) definida na desigualdade (3.1.10) converge para zero quando $\epsilon \rightarrow 0$.*

Demonstração: Fazemos as contas em norma p . Se $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$, temos

$$\begin{aligned}
\left[\mathbb{E} \sup_{s \leq t} ((A1))^p \right]^{\frac{1}{p}} &\leq \epsilon \left[\mathbb{E} \sup_{s \leq t} \left(\sum_{n=0}^{N-1} \int_{t_n}^{t_{n+1}} |g(y_r^\epsilon) - g(R_{r-t_n}(y_{t_n}^\epsilon, \Theta_{t_n}(\omega)))| dr \right)^p \right]^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \epsilon \left[\mathbb{E} \sup_{s \leq t} \left(\sum_{n=0}^{N-1} \left(\int_{t_n}^{t_{n+1}} dr \right)^{\frac{1}{q}} \times \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left(\int_{t_n}^{t_{n+1}} |g(y_r^\epsilon) - g(R_{r-t_n}(y_{t_n}^\epsilon, \Theta_{t_n}(\omega)))|^p dr \right)^{\frac{1}{p}} \right)^p \right]^{\frac{1}{p}},
\end{aligned}$$

usando a desigualdade de Hölder e lembrando que $\Delta t < \frac{t}{f(\epsilon)}$ temos

$$\begin{aligned}
&\leq \epsilon \left[\mathbb{E} \sup_{s \leq t} \left(\left(\sum_{n=0}^{N_1} \left(\int_{t_n}^{t_{n+1}} dr \right)^{\frac{\bar{q}}{q}} \right)^{\frac{1}{\bar{q}}} \times \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left(\sum_{n=0}^{N_1-1} \left(\int_{t_n}^{t_{n+1}} |g(y_r^\epsilon) - g(R_{r-t_n}(y_{t_n}^\epsilon, \Theta_{t_n}(\omega)))|^p dr \right)^{\frac{p}{p}} \right)^{\frac{1}{p}} \right)^p \right]^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \epsilon \left[\mathbb{E} \sup_{s \leq t} \left((N \Delta t)^{\frac{1}{\bar{q}}} \left(\sum_{n=0}^{N_1} \left(\int_{t_n}^{t_{n+1}} |g(y_r^\epsilon) - g(R_{r-t_n}(y_{t_n}^\epsilon, \Theta_{t_n}(\omega)))|^p dr \right)^{\frac{1}{p}} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \right] \\
&\leq \epsilon N^{\frac{1}{\bar{q}}} \left(\frac{t}{f(\epsilon)} \right)^{\frac{1}{\bar{q}}} \left[\mathbb{E} \sup_{s \leq t} \left(\sum_{n=0}^{N_1} \int_{t_n}^{t_{n+1}} |g(y_r^\epsilon) - g(R_{r-t_n}(y_{t_n}^\epsilon, \Theta_{t_n}(\omega)))|^p dr \right)^{\frac{1}{p}} \right] \\
&\leq \epsilon N^{\frac{1}{\bar{q}}} \left(\frac{t}{f(\epsilon)} \right)^{\frac{1}{\bar{q}}} \left[\sum_{n=0}^{N_1} \mathbb{E} \sup_{s \leq t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} |g(y_r^\epsilon) - g(R_{r-t_n}(y_{t_n}^\epsilon, \Theta_{t_n}(\omega)))|^p dr \right]^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \epsilon N^{\frac{1}{\bar{q}}} \left(\frac{t}{f(\epsilon)} \right)^{\frac{1}{\bar{q}}} \left[\sum_{n=0}^{N_1} \mathbb{E} \sup_{s \leq t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \sup_{t_n \leq u \leq t_{n+1}} |g(y_u^\epsilon) - g(R_{u-t_n}(y_{t_n}^\epsilon, \Theta_{t_n}(\omega)))|^p dr \right]^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \epsilon N^{\frac{1}{\bar{q}}} \left(\frac{t}{f(\epsilon)} \right)^{\frac{1}{\bar{q}}} \left[\sum_{n=0}^{N_1} \mathbb{E} \sup_{s \leq t} \Delta t \sup_{0 \leq u \leq \Delta t} |g(y_u^\epsilon) - g(R_{u-t_n}(y_{t_n}^\epsilon, \Theta_{t_n}(\omega)))|^p \right]^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \epsilon N^{\frac{1}{\bar{q}}} \left(\frac{t}{f(\epsilon)} \right)^{\frac{1}{\bar{q}}} \left[\sum_{n=0}^{N_1} \sup_{s \leq t} \frac{t}{f(\epsilon)} \mathbb{E} \sup_{0 \leq u \leq \Delta t} |g(y_u^\epsilon) - g(R_{u-t_n}(y_{t_n}^\epsilon, \Theta_{t_n}(\omega)))|^p \right]^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Por outro lado, pelo Lema 3.1.1, temos que

$$\mathbb{E} \left(\sup_{0 \leq \bar{u} \leq \Delta t} |g(y_{\bar{u}}^\epsilon) - g(R_{\bar{u}-t_n}(y_{t_n}^\epsilon, \Theta_{t_n}(\omega)))|^p \right) \leq C \epsilon^p \left(\frac{t}{f(\epsilon)} \right)^p H \left(\frac{t}{f(\epsilon)} \right)^p,$$

onde $H(t) = \exp(C_0(t^2 + t))$ que é uma função crescente.

Portanto,

$$\begin{aligned}
\left[\mathbb{E} \sup_{s \leq t} ((A1))^p \right]^{\frac{1}{p}} &\leq \epsilon N^{\frac{1}{\bar{q}}} \left(\frac{t}{f(\epsilon)} \right)^{\frac{1}{\bar{q}}} \left[\sum_{n=0}^{N_1} \sup_{s \leq t} \frac{t}{f(\epsilon)} C \epsilon^p \left(\frac{t}{f(\epsilon)} \right)^p H \left(\frac{t}{f(\epsilon)} \right)^p \right]^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \epsilon N^{\frac{1}{\bar{q}}} \left(\frac{t}{f(\epsilon)} \right)^{\frac{1}{\bar{q}}} \left[N \frac{t}{f(\epsilon)} C \epsilon^p \left(\frac{t}{f(\epsilon)} \right)^p H \left(\frac{t}{f(\epsilon)} \right)^p \right]^{\frac{1}{p}} \\
&\leq C \epsilon^2 N \left(\frac{t}{f(\epsilon)} \right)^2 H \left(\frac{t}{f(\epsilon)} \right).
\end{aligned}$$

Como N é de ordem $(-\ln \epsilon)^{-\frac{q-1}{2}}$, então obtemos que

$$\begin{aligned} \left[\mathbb{E} \sup_{s \leq t} ((A1))^p \right]^{\frac{1}{p}} &\leq C \epsilon^2 (-\ln \epsilon)^{-\frac{q-1}{2}} \left(\frac{t}{f(\epsilon)} \right)^2 H\left(\frac{t}{f(\epsilon)} \right) \\ &\leq C t^2 \epsilon^2 \frac{(-\ln \epsilon)^{-\frac{q-1}{2}}}{(-\ln \epsilon)^{-\frac{q}{2}}} \frac{1}{(-\ln \epsilon)^{-\frac{q}{2}}} H\left(\frac{t}{f(\epsilon)} \right) \\ &\leq C t^2 [\epsilon (-\ln \epsilon)]^{\frac{1}{2}} [\epsilon (-\ln \epsilon)^q]^{\frac{1}{2}} [\epsilon H\left(\frac{t}{f(\epsilon)} \right)]. \end{aligned}$$

Agora, procuremos uma estimativa para $\epsilon H\left(\frac{t}{f(\epsilon)} \right)$:

$$\begin{aligned} \epsilon H\left(\frac{t}{f(\epsilon)} \right) &= \epsilon \exp\left(C_0 \left(\frac{t}{f(\epsilon)} + \frac{t^2}{f(\epsilon)^2} \right) \right) \\ &\leq \exp\left(C \left(\ln \epsilon + \frac{t}{f(\epsilon)} + \frac{t^2}{f(\epsilon)^2} \right) \right) \\ &\leq \exp\left(C \left(\ln \epsilon + (-\ln \epsilon)^{\frac{q}{2}} t + (-\ln \epsilon)^q t^2 \right) \right). \end{aligned}$$

Se $q \in (0, 1)$, o polinômio dentro da exponencial tende para $-\infty$, se $\epsilon \rightarrow 0$. Assim a expressão $\epsilon H\left(\frac{t}{f(\epsilon)} \right) \rightarrow 0$ quando ϵ vai para zero. Com tudo isto e segundo o limite (3.1.8) obtemos que

$$\begin{aligned} \left[\mathbb{E} \sup_{s \leq t} ((A1))^p \right]^{\frac{1}{p}} &\leq C t^2 [\epsilon (-\ln \epsilon)]^{\frac{1}{2}} [\epsilon (-\ln \epsilon)^q]^{\frac{1}{2}} (\epsilon H\left(\frac{t}{f(\epsilon)} \right)) \\ &\leq C t^2 [\epsilon (-\ln \epsilon)]^{\frac{1}{2}} [\epsilon (-\ln \epsilon)^q]^{\frac{1}{2}} (\exp C (\ln \epsilon + (-\ln \epsilon)^{\frac{q}{2}} t + (-\ln \epsilon)^q t^2)), \end{aligned}$$

que converge para zero, quando $\epsilon \rightarrow 0$. □

Lema 3.1.4. *A estimativa (II) dada na desigualdade (3.1.10) converge para zero quando $\epsilon \rightarrow 0$.*

Demonstração: Segundo (II):

$$\begin{aligned} \left[\mathbb{E} \sup_{s \leq t} \left| (A2) - \epsilon \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \int_{M_{\pi^\epsilon(\epsilon t_n)}} g(\pi^\epsilon(\epsilon t_n), v) d\mu \right|^p \right]^{\frac{1}{p}} &= \\ \left[\mathbb{E} \sup_{s \leq t} \left| \epsilon \sum_{n=0}^{N-1} \int_{t_n}^{t_{n+1}} g(R_{r-t_n}(y_{t_n}^\epsilon, \Theta_{t_n}(\omega))) dr - \epsilon \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \int_{M_{\pi^\epsilon(\epsilon t_n)}} g(\pi^\epsilon(\epsilon t_n), v) d\mu \right|^p \right]^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Mas, fazendo uma mudança de variável obtemos

$$\epsilon \sum_{n=0}^{N-1} \int_{t_n}^{t_{n+1}} g(R_{r-t_n}(y_{t_n}^\epsilon, \Theta_{t_n}(\omega))) dr = \epsilon \sum_{n=0}^{N-1} \int_0^{\Delta t} g(R_r(y_{t_n}^\epsilon, \Theta_{t_n}(\omega))) dr.$$

Com isto, obtemos que

$$\begin{aligned} & \left[\mathbb{E} \sup_{s \leq t} \left| \epsilon \sum_{n=0}^{N-1} \int_{t_n}^{t_{n+1}} g(R_{r-t_n}(y_{t_n}^\epsilon, \Theta_{t_n}(\omega))) dr - \epsilon \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \int_{M_{\pi^\epsilon(\epsilon t_n)}} g(\pi^\epsilon(\epsilon t_n), v) d\mu \right|^p \right]^{\frac{1}{p}} \\ &= \left[\mathbb{E} \sup_{s \leq t} \left| \epsilon \sum_{n=0}^{N-1} \int_0^{\Delta t} g(R_r(y_{t_n}^\epsilon, \Theta_{t_n}(\omega))) dr - \epsilon \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \int_{M_{\pi^\epsilon(\epsilon t_n)}} g(\pi^\epsilon(\epsilon t_n), v) d\mu \right|^p \right]^{\frac{1}{p}} \\ &\leq N \sup_{0 \leq n \leq N} \left[\mathbb{E} \sup_{s \leq t} \left| \epsilon \int_0^{\Delta t} g(R_r(y_{t_n}^\epsilon, \Theta_{t_n}(\omega))) dr - \epsilon \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \int_{M_{\pi^\epsilon(\epsilon t_n)}} g(\pi^\epsilon(\epsilon t_n), v) d\mu \right|^p \right]^{\frac{1}{p}} \\ &\leq N \left(\epsilon \frac{t}{f(\epsilon)} \right) \sup_{0 \leq n \leq N} \underbrace{\left[\mathbb{E} \sup_{s \leq t} \left| \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} g(R_r(y_{t_n}^\epsilon, \Theta_{t_n}(\omega))) dr - \sum_{n=0}^{N-1} \int_{M_{\pi^\epsilon(\epsilon t_n)}} g(\pi^\epsilon(\epsilon t_n), v) d\mu \right|^p \right]^{\frac{1}{p}}}_{\text{Lei dos grandes Números}} \end{aligned}$$

Usando o mesmo argumento da lei dos grandes números e a propriedade de Markov dos fluxos, como em Xue-Mei Li, pág 814-815, temos que $\frac{1}{t} \int_s^{s+t} f(x_r) dr$ converge para $\int_M f(z) dz$ quanto $t \rightarrow \infty$, com taxa $\frac{1}{\sqrt{t}}$ e a convergência é uniforme sobre intervalos compactos de tempo em L^p para todo $p > 1$, assim com isto obtemos do anterior que

$$\begin{aligned} &\leq N \left(\epsilon \frac{t}{f(\epsilon)} \right) C \frac{1}{\sqrt{\frac{t}{f(\epsilon)}}} \\ &\leq CN \epsilon^{\frac{t}{(-\ln \epsilon)^{-\frac{q}{2}}}} \frac{1}{\sqrt{\frac{t}{(-\ln \epsilon)^{-\frac{q}{2}}}}} \\ &\leq Ct \epsilon (-\ln \epsilon)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{(-\ln \epsilon)^{-\frac{q}{2}}}{t}} \\ &\leq Ct \epsilon \frac{(-\ln \epsilon)^{\frac{1}{2}(1-\frac{q}{2})}}{\sqrt{t}}. \end{aligned}$$

Portanto

$$\left[\mathbb{E} \sup_{s \leq t} \left| (A2) - \epsilon \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \int_{M_{\pi^\epsilon(\epsilon t_n)}} g(\pi^\epsilon(\epsilon t_n), v) d\mu \right|^p \right]^{\frac{1}{p}} \leq C \sqrt{t} \epsilon (-\ln \epsilon)^{\frac{1}{2}(1-\frac{q}{4})},$$

que converge para zero quando $\epsilon \rightarrow 0$. $\square$

Lema 3.1.5. *A estimativa (III) definida na desigualdade (3.1.10) converge para zero quando ϵ vai para zero.*

Demonstração: Temos que

$$\begin{aligned} (III) &= |(A3)| \\ &= \epsilon \left| \int_{t_N}^{\frac{s+t}{\epsilon} \wedge \tau^\epsilon} g(y_r^\epsilon) dr \right| \\ &\leq C \epsilon \left(\left(\frac{s+t}{\epsilon} \right) \wedge \tau^\epsilon - t_N \right) \\ &\leq C \epsilon \Delta t \\ &\leq C t \frac{\epsilon}{f(\epsilon)} \\ &\leq C t \epsilon (-\ln \epsilon)^{\frac{q}{2}}, \end{aligned}$$

o que demonstra o lema. $\square$

Lema 3.1.6. *A estimativa (IV) dada na desigualdade (3.1.10) converge para zero quando ϵ vai para zero.*

Demonstração: Substituindo o valor de Q^g na equação (IV) obtemos que

$$\begin{aligned} &\left| \epsilon \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \int_{M_{\pi^\epsilon(\epsilon t_n)}} g(\pi^\epsilon(\epsilon t_n), V) d\mu - \int_{s \wedge T^\epsilon}^{(s+t) \wedge T^\epsilon} Q^g(\pi^\epsilon(r)) dr \right| = \\ &\left| \epsilon \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \int_{M_{\pi^\epsilon(\epsilon t_n)}} g(\pi^\epsilon(\epsilon t_n), v) d\mu - \int_{s \wedge T^\epsilon}^{(s+t) \wedge T^\epsilon} \int_{M_{\pi^\epsilon(r)}} g(\pi^\epsilon(r), v) d\mu \right| \quad (3.1.11) \end{aligned}$$

Denotemos por $s_n = \epsilon t_n$ e assim $\Delta s_n = \epsilon \Delta t_n$ e consideramos $s_0 < s_1 < \dots < s_n$. Assim Δs_n é de ordem $O(\epsilon^{q-1})$, com isto obtemos da igualdade (3.1.11) que

$$\begin{aligned}
&= \left| \Delta s \sum_{n=0}^{N-1} \int_{M_{\pi^\epsilon(s_n)}} g(\pi^\epsilon(s_n), v) d\mu - \int_{s \wedge T^\epsilon}^{(s+t) \wedge T^\epsilon} \int_{M_{\pi^\epsilon(r)}} g(\pi^\epsilon(r), v) d\mu dr \right| \\
&\leq \sum_{n=0}^{N-1} \left| \Delta s \int_{M_{\pi^\epsilon(s_n)}} g(\pi^\epsilon(s_n), v) d\mu - \int_{s_n \wedge T^\epsilon}^{(s_{n+1}) \wedge T^\epsilon} \int_{M_{\pi^\epsilon(r)}} g(\pi^\epsilon(r), v) d\mu dr \right| \\
&\leq 2 \sum_{n=0}^{N-1} \Delta s \text{Vol}(M_{\pi^\epsilon(s_n)}) \sup_U |g| \\
&\leq C \Delta s N \\
&\leq C \epsilon \Delta t N \\
&\leq C \epsilon t (-\ln \epsilon)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Portanto concluímos que

$$\left| \epsilon \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \int_{M_{\pi^\epsilon(\epsilon t_n)}} g(\pi^\epsilon(\epsilon t_n), v) d\mu - \int_{s \wedge T^\epsilon}^{(s+t) \wedge T^\epsilon} Q^g(\pi^\epsilon(r)) dr \right| \leq C \epsilon t (-\ln \epsilon)^{\frac{1}{2}},$$

o que conclui a demonstração do lema. $\square$

Agora, voltando ao lema principal, segue-se dos Lemas 3.1.3, 3.1.4, 3.1.5 e 3.1.6 finalmente que

$$\begin{aligned}
\left[\mathbb{E} \sup_{s \leq t} |\delta(g, \epsilon, t)|^p \right]^{\frac{1}{p}} &\leq \underbrace{C t^2 [\epsilon (-\ln \epsilon)]^{\frac{1}{2}} [\epsilon (-\ln \epsilon)^q]^{\frac{1}{2}} (\exp C(\ln \epsilon + (-\ln \epsilon)^{\frac{q}{2}} t + (-\ln \epsilon)^q t^2))}_{\text{CASO (I)}} + \\
&\quad \underbrace{C \sqrt{t} \epsilon (-\ln \epsilon)^{\frac{1}{2}(1-\frac{q}{4})}}_{\text{CASO (II)}} + \underbrace{C t \epsilon (-\ln \epsilon)^{\frac{q}{2}}}_{\text{CASO (III)}} + \underbrace{C \epsilon t (-\ln \epsilon)^{\frac{1}{2}}}_{\text{CASO (IV)}}.
\end{aligned}$$

Portanto

$$\left[\mathbb{E} \sup_{s \leq t} |\delta(g, \epsilon, t)|^p \right]^{\frac{1}{p}} \leq C \sqrt{t} \epsilon^q (-\ln \epsilon)^{\frac{q}{2}} h(t, \epsilon),$$

onde

$$\begin{aligned}
h(t, \epsilon) &= \epsilon^{1-q} \sqrt{t} + \epsilon^{1-q} \sqrt{t} (-\ln \epsilon)^{\frac{1}{2}} \exp C(\ln \epsilon + (-\ln \epsilon)^{\frac{q}{2}} t + (-\ln \epsilon)^q t^2) + \\
&\quad \epsilon^{1-q} (-\ln \epsilon)^{\frac{1}{2} - \frac{3q}{8}} + \epsilon^{1-q} \sqrt{t} (-\ln \epsilon)^{\frac{1}{2} - \frac{q}{2}},
\end{aligned}$$

que é contínua para $t > 0$ e converge para zero quando $\epsilon \rightarrow 0$, com $q \in (0, 1)$. $\square$

Observação 3.1.2. Podemos mudar a estimativa do Lema 3.1.2 se consideramos uma outra função f com as seguintes condições

- 1.) $0 < f(\epsilon) < 1$.
- 2.) A função f satisfaz : $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon^\delta}{f(\epsilon)} = 0$, para $\delta > 0$.

Nós consideramos $f(\epsilon) = (\ln \epsilon)^{-q/2}$ por questão de cálculo. Observe que, segundo a escolha da função f , também é modificado o tamanho do ϵ , isto é, no nosso caso, para que $f(\epsilon) < 1$, então consideramos $\epsilon \in (0, \exp(-1))$. $\square$

A continuação apresentamos o teorema principal do nosso trabalho.

Teorema 3.1.7. *Seja T^ϵ o primeiro tempo no qual a solução y_t^ϵ , começando em y_0 , sai do aberto U . Considere*

$$\pi^\epsilon(t) = \pi(y_t^\epsilon) = (\pi_1^\epsilon(t), \pi_2^\epsilon(t), \dots, \pi_n^\epsilon(t)).$$

1. *Seja $\alpha(t) = \alpha_t = (\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t))$ a solução do seguinte sistema de equações diferenciais determinísticas*

$$\frac{d\alpha_i}{dt}(t) = \int_{M_{\alpha(t)}} d\pi_i(K)(\alpha(t), v) d\mu_{\alpha_i}(v) \quad (3.1.12)$$

com condição inicial $\alpha(0) = \pi(y_0)$, sendo $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n)$. Seja T_0 o primeiro tempo que $\alpha(t)$ sai de $(-b, b)^n$. Então, para todo $0 < t < T_0$, $p > 1$, existe uma função $C = C(t, \epsilon)$ tal que

$$\left[\mathbb{E} \left(\sup_{s \leq t} \|\pi^\epsilon(s \wedge T^\epsilon) - \alpha(s \wedge T^\epsilon)\|^p \right) \right]^{\frac{1}{p}} \leq C(t, \epsilon) \epsilon^q (-\ln \epsilon)^{\frac{q}{2}},$$

onde, $C(t, \epsilon)$ é contínua e converge para zero quando $\epsilon \rightarrow 0$, para $q \in (0, 1)$.

2. *Seja $r > 0$ tal que $U = \{x : \|\pi(x) - \pi(y_0)\| \leq r\} \subset (-b, b)^n$ e defina*

$$T_\delta = \inf\{\|\alpha(t) - \pi(y_0)\| \geq r - \delta\}.$$

Então, para qualquer $p > 1$, $\delta > 0$, existe uma função contínua C dependendo do T_δ e do ϵ tal que

$$\mathbb{P}(T^\epsilon < T_\delta) \leq C(T_\delta, \epsilon)^p \delta^{-p} \epsilon^{pq} (-\ln \epsilon)^{\frac{pq}{2}}.$$

Para qualquer $q \in (0, 1)$.

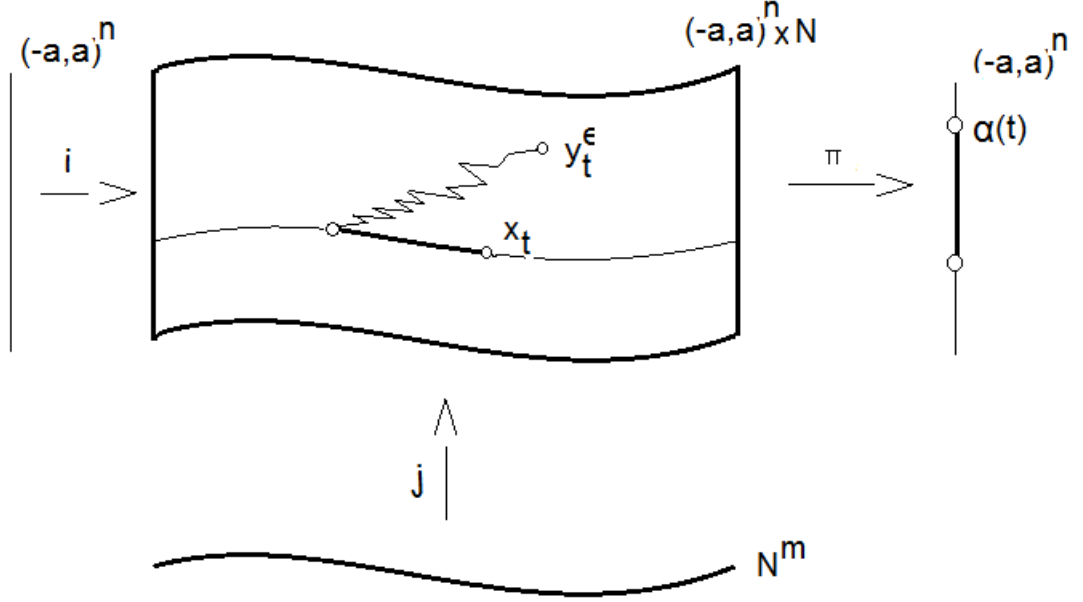


Figura 3.1: Princípio de Médias

Demonstração:

Lembrando que a equação para y_t^ϵ é da forma

$$dy_t^\epsilon = X_0(y_t^\epsilon)dt + \sum_{i=1}^r X_i(y_t^\epsilon) \circ dB_t^i + \epsilon K(y_t^\epsilon)dt,$$

fazendo uma mudança no tempo, para o novo tempo t/ϵ e usando a fórmula de Itô para os π_i , se $t < T_0 \wedge T^\epsilon$:

$$\pi_i^\epsilon(t) = \pi_i(y_{\frac{t}{\epsilon}}^\epsilon) = \pi_i(y_0) + \int_0^t d\pi_i(K)(y_{\frac{s}{\epsilon}}^\epsilon)ds.$$

Para i fixo, defina $g_i = d\pi_i(K)$, neste caso só precisamos estimar

$$|\pi_i^\epsilon(t) - \alpha_i(t)| = \left| \int_0^t g_i(y_{\frac{s}{\epsilon}}^\epsilon)ds - \alpha_i(t) \right|.$$

Usando a notação do lema anterior, a Equação (3.1.12) pode ser escrita da seguinte

forma :

$$\begin{cases} \frac{d\alpha_i}{dt}(t) = Q^{g_i}(\alpha_i(t)) \\ \alpha_i(0) = \pi_i(y_0). \end{cases}$$

para cada $i = 1, 2, \dots, n$. Assim, aplicando o lema anterior para as funções g_i temos, para $t < T^\epsilon$, que

$$\begin{aligned} |\pi_i^\epsilon(t \wedge T^\epsilon) - \alpha_i(t \wedge T^\epsilon)| &\leq \int_0^{t \wedge T^\epsilon} |Q^{g_i}(\pi^\epsilon(s)) - Q^{g_i}(\alpha(s))| ds + \delta(g_i, \epsilon, t) \\ &\leq C(g, \varphi) \int_0^t \|\pi^\epsilon(s) - \alpha(s)\| ds + \delta(g_i, \epsilon, t). \end{aligned}$$

Pelo Lema de Gronwall 1.2.2, obtemos o seguinte:

$$\begin{aligned} |\pi_i^\epsilon(t \wedge T^\epsilon) - \alpha_i(t \wedge T^\epsilon)| &\leq \delta(g_i, \epsilon, t) + \int_0^t \delta(g_i, \epsilon, s) C(g, \varphi) \exp\left(\int_0^s C(g, \varphi) dr\right) ds \\ &\leq \delta(g_i, \epsilon, t) + C(g, \varphi) \exp(tC(g, \varphi)) \int_0^t \delta(g_i, \epsilon, s) ds \\ &\leq \delta(g_i, \epsilon, t) + C_1(t) \sup_{s \leq t} |\delta(g_i, \epsilon, s)| t \\ &\leq \sup_{s \leq t} |\delta(g_i, \epsilon, s)| (1 + tC_1(t)) \\ &\leq (1 + tC_1(t)) \sup_{s \leq t} |\delta(g_i, \epsilon, s)| \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} \left[\mathbb{E} \left(\sup_{s \leq t} \|\pi^\epsilon(s \wedge T^\epsilon) - \alpha(s \wedge T^\epsilon)\|^p \right) \right]^{\frac{1}{p}} &\leq (1 + tC_1(t)) \left[\mathbb{E} \sup_{s \leq t} |\delta(g_i, \epsilon, s)|^p \right]^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C(1 + tC_1(t)) \sqrt{t} \epsilon^q (-\ln \epsilon)^{\frac{q}{2}} h(t, \epsilon) \\ &\leq C(t, \epsilon) \epsilon^q (-\ln \epsilon)^{\frac{q}{2}} \end{aligned}$$

Onde $C(t, \epsilon) = C(1 + tC_1(t)) \sqrt{t} h(t, \epsilon)$ é uma função contínua.

A segunda parte segue-se finalmente observando que, por definição T_δ é o primeiro tempo que

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n |\alpha_i(T_\delta) - \pi_i(y_0)|^2} \geq r - \delta.$$

Então, usando a desigualdade de Chebychev, obtemos as seguintes estimativas

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T^\epsilon < T_\delta) &\leq \mathbb{P}\left(\sup_{s \leq T_\delta \wedge T^\epsilon} \|\alpha(s) - \pi^\epsilon(s)\| > \delta\right) \\
&\leq \delta^{-p} \mathbb{E} \left(\sup_{s \leq t} \|\pi^\epsilon(s \wedge T^\epsilon) - \alpha(s \wedge T^\epsilon)\|^p \right) \\
&\leq \delta^{-p} \left(C(t, \epsilon) \epsilon^q (-\ln \epsilon)^{\frac{q}{2}} \right)^p \\
&\leq \delta^{-p} C(t, \epsilon)^p \epsilon^{pq} (-\ln \epsilon)^{\frac{pq}{2}}
\end{aligned}$$

Concluindo assim a demonstração do teorema. $\square$

3.2 Caso particular de folheação gerada por uma submersão

Consideremos uma função diferenciável $F : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que F gera uma folheação sobre M , cujas as folhas $F^{-1}(a)$ são difeomorfas a uma variedade compacta sem bordo N de dimensão n e sejam $V, X_1, X_2, \dots, X_r$, campos vetoriais tangentes às folhas $F^{-1}(a)$, com $a \in \mathbb{R}^n$. Fixado um ponto $y_0 \in M$, defina a equação diferencial estocástica (3.1.2) :

$$\begin{cases} dx_t = \sum_{i=1}^r X_i(x_t) \circ dB_t^i + V(x_t)dt. \\ x_0 = y_0. \end{cases}$$

Seja K um campo vetorial sobre M , assim defina a perturbação da equação diferencial estocástica (3.1.1) :

$$\begin{cases} dy_t^\epsilon = \sum_{i=1}^r X_i(y_t^\epsilon) \circ dB_t^i + V(y_t^\epsilon)dt + \epsilon K(y_t^\epsilon)dt. \\ y_0^\epsilon = y_0. \end{cases}$$

Denotemos por $M_a = F^{-1}(a)$ e por μ_a a medida invariante sobre a folha M_a . Observe que a solução da equação diferencial estocástica (3.1.1) pertence à folha $M_{(F(y_0))}$. Assim, podemos considerar uma vizinhança U da forma $(-b, b)^n \times U_N$, contendo y_0 como na seção anterior. Com estas hipóteses obtemos o seguinte teorema :

Teorema 3.2.1. *Seja T^ϵ o primeiro tempo que a solução $y_{\frac{t}{\epsilon}}^\epsilon$ começando em y_0 sai do U . Defina*

$$F_i^\epsilon(t) = F_i(y_{t/\epsilon}^\epsilon).$$

1.) *Seja $\alpha(t) = \alpha_t = (\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t))$ a solução do seguinte sistema de equações diferenciais determinísticas*

$$\frac{d\alpha_i}{dt}(t) = \int_{M_{\alpha(t)}} dF_i(K)(\alpha(t), v) d\mu_{\alpha_i}(v) \quad (3.2.1)$$

com condição inicial $\alpha(0) = F(y_0)$. Seja T_0 o primeiro tempo que $\alpha(t)$ sai de $(-b, b)^n$. Então para todo $t < T_0$ e $p > 1$, existe uma função $C = C(t, \epsilon)$ tal que

$$\left[\mathbb{E} \left(\sup_{s \leq t} \|F^\epsilon(s \wedge T^\epsilon) - \alpha(s \wedge T^\epsilon)\|^p \right) \right]^{\frac{1}{p}} \leq C(t, \epsilon) \epsilon^q (-\ln \epsilon)^{\frac{q}{2}},$$

onde, $C(t, \epsilon)$ é contínua para $t > 0$ e converge para zero quando $\epsilon \rightarrow 0$, para todo $q \in (0, 1)$.

2.) *Seja $r > 0$ tal que $U = \{x : \|F(x) - F(y_0)\| \leq r\} \subset (-b, b)^n$ e defina*

$$T_\delta = \inf\{\|\alpha(t) - F(y_0)\| \geq r - \delta\}.$$

Então, para qualquer $p > 1$, $\delta > 0$, existe uma função contínua dependendo do T_δ e do ϵ tal que

$$\mathbb{P}(T^\epsilon < T_\delta) \leq C(T_\delta, \epsilon) p \delta^{-p} \epsilon^{pq} (-\ln \epsilon)^{\frac{pq}{2}}.$$

Para qualquer $q \in (0, 1)$.

Demonstração: Podemos usar coordenadas $(-b, b)^n \times F^{-1}(\cdot)$ na variedade M e do Teorema 3.1.7, segue o resultado. $\square$

3.3 Exemplos

Exemplo 3.3.1. Consideremos o espaço $\mathbb{R}^2 - \{0\}$, o plano menos a origem. Considere o campo vetorial $V(x, y) = (-y, x)$, assim definamos a equação diferencial estocástica

$$dx(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x \circ dB_t \quad (3.3.1)$$

Observe que o campo vetorial V é tangente às circunferências de raio r sobre $\mathbb{R}^2$. Ainda mais, fixado o raio r , definamos a imersão isométrica (canônica)

$$j : S^1(r) \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{0\}$$

assim, nesta imersão, o campo vetorial V é igual à $X(x)(e) = \nabla \langle j(x), e \rangle$, com $e \in \mathbb{R}^2$. Assim, o sistema (3.3.1) restrito para $S^1(r)$ é chamado de *rotação Browniana*.

Consideremos agora um outro campo vetorial $K(x, y) = (x, y)$. Defina a perturbação do sistema (3.3.1),

$$\begin{cases} dx^\epsilon(t) = -y^\epsilon(t) \circ dB_t + \epsilon x^\epsilon(t) dt \\ dy^\epsilon(t) = x^\epsilon(t) \circ dB_t + \epsilon y^\epsilon(t) dt \end{cases} \quad (3.3.2)$$

Definamos a função $F : \mathbb{R}^2 - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^+ - \{0\}$, $F(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Observe que a função F gera uma folhação sobre $\mathbb{R}^2 - \{0\}$, cujas folhas são circunferências de raio r , isto é , $F^{-1}\{r\} = S^1(r)$, com $r > 0$.

Parametrizando $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ via *coordenadas polares*, neste caso temos a carta local definida por $\varphi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$, para $r > 0$, e $\theta \in (0, 2\pi)$. Considere um ponto inicial (x_0, y_0) e seja $(r_0, \theta_0) = \varphi^{-1}(x_0, y_0)$.

Aplicando a fórmula de Itô no sistema (3.3.2), para a função F acima definida, e

observando que $dF(V) = 0$, temos

$$\begin{aligned} F(x^\epsilon(t/\epsilon), y^\epsilon(t/\epsilon)) &= F(x^\epsilon(0), y^\epsilon(0)) + \epsilon \int_0^{t/\epsilon} dF(K)(x^\epsilon(t), y^\epsilon(t)) dt \\ &= F(x^\epsilon(0), y^\epsilon(0)) + \int_0^t dF(K)(x^\epsilon(s/\epsilon), y^\epsilon(s/\epsilon)) ds \\ &= F(x^\epsilon(0), y^\epsilon(0)) + \int_0^t r^2(s/\epsilon) ds \end{aligned}$$

sendo $r^2(s/\epsilon)$ o processo radial da solução $(x^\epsilon(t/\epsilon), y^\epsilon(t/\epsilon))$.

Calculemos agora o *sistema de médias*. Observe que $dF(x, y) = (\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}})$, assim $dF(K)(x, y) = r$, onde r denota o raio da circunferência, com centro na origem, que contém o ponto (x, y) . Neste caso, segundo o Teorema (3.2.1) obtemos o sistema

$$\begin{cases} \frac{d\alpha}{dt}(t) = \int_{S^1(\alpha(t))} dF(K)(\alpha(t), \theta) d\mu_{S^1(\alpha(t))}(\theta) \\ \alpha(0) = r_0 \end{cases} \quad (3.3.3)$$

Simplificando o sistema (3.3.3) e usando o fato que o integrando é constante em θ e usando a medida normalizada de Lebesgue temos

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt}(t) &= \int_{S^1(\alpha(t))} \alpha(t) d\mu_{S^1(\alpha(t))}(\theta) \\ &= \alpha(t) \mu(S^1(\alpha(t))) \\ &= \alpha(t) \end{aligned}$$

Finalmente obtemos

$$\frac{1}{\alpha(t)} d\alpha(t) = dt.$$

Integrando

$$\ln \alpha(t) - \ln \alpha(0) = t.$$

Daqui

$$\alpha(t) = \alpha(0) \exp t.$$

Segundo o nosso teorema principal, temos que

$$F(x^\epsilon(t/\epsilon), y^\epsilon(t/\epsilon)) \approx r_0 \exp t.$$

Isto significa que, a medida que o tempo avança, a solução do sistema perturbado (3.3.2) explode exponencialmente. $\square$

Exemplo 3.3.2. Consideremos o espaço $M = \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$. Defina a equação diferencial estocástica

$$dx_t = X(x_t) \circ dB_t. \quad (3.3.4)$$

onde para cada $x \in \mathbb{R}^{n+1}$, $X(x) : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow T_x S^n(\|x\|)$, isto é, X é um a projeção de $\mathbb{R}^{n+1}$ no espaço tangente no ponto x das esferas $S^n(\|x\|)$, e B_t , $t \geq 0$, é um movimento Browniano sobre $\mathbb{R}^{n+1}$. A equação diferencial estocástica (3.3.4) é chamada de *sistema Browniano gradiente*.

Dado o ponto $x = (x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in M$, podemos considerar os campos vetoriais

$$X^i(x) = X(x)(e_i)$$

com $e_1, e_2, \dots, e_{n+1}$ a base canônica de $\mathbb{R}^{n+1}$. Observe que segundo a definição de $X(x)$, temos que

$$X^i(x) = X(x)(e_i) = e_i - \frac{x_i}{\|x\|^2} \cdot x.$$

para cada $i = 1, 2, \dots, n+1$. Assim a equação diferencial estocástica (3.3.4) pode ser representada como

$$dx_t = \sum_{i=1}^{n+1} X_i(x_t) \circ dB_t^i. \quad (3.3.5)$$

Defina a função $F(x) = \|x\|$, observe que tal função F gera uma folhação de esferas de dimensão n no espaço $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$. Observe que, fixado x_0 , a solução do sistema (3.3.5) pertence à esfera de raio $\|x\|$.

Agora, consideremos o campo vetorial $K(x) = x$, com isto definimos a perturbação do sistema (3.3.5) :

$$dy_t^\epsilon = \sum_{i=1}^{n+1} X_i(y_t^\epsilon) \circ dB_t^i + \epsilon K(y_t^\epsilon) dt. \quad (3.3.6)$$

Analogamente ao exemplo anterior, segundo o Teorema (3.2.1), temos que a solução do sistema de médias é da forma

$$\begin{aligned}\frac{d\alpha}{dt}(t) &= \alpha(t) \text{Vol}(S^n(\alpha(t))) \\ &= \alpha(t)\end{aligned}$$

Com isto temos que $\alpha(t) = \alpha(0) \exp t$. □

Exemplo 3.3.3. Seja $M = (-1, 1) \times S^1$, e carta local $\varphi : (-1, 1) \times (0, 2\pi) \rightarrow M$. Considere a equação diferencial nas coordenadas $(u, v) \in (-1, 1) \times (0, 2\pi)$:

$$\begin{cases} du_t = 0 \\ dv_t = \omega_0(u, v)dt. \end{cases} \quad (3.3.7)$$

Considere a perturbação do sistema (3.3.7) :

$$\begin{cases} du_t^\epsilon = \epsilon dt \\ dv_t^\epsilon = \omega_0(u_t^\epsilon, v_t^\epsilon)dt. \end{cases} \quad (3.3.8)$$

sendo $y_0 = (u_0, v_0)$, e $\omega_0(u, v) = uv$. A solução da equação diferencial (3.3.7) é da forma

$$\begin{aligned}u_t &= u_0 \\ v_t &= v_0 \exp u_0 t.\end{aligned}$$

Igualmente, a solução da equação diferencial (3.3.8) é

$$\begin{aligned}u_t^\epsilon &= u_0 + \epsilon t \\ v_t^\epsilon &= v_0 \exp u_0 t \exp \frac{\epsilon t^2}{2}.\end{aligned}$$

Observe que

$$|u_t^\epsilon - u_t| = \epsilon t$$

e também

$$v_t^\epsilon - v_t = v_0 \exp(u_0 t) \left(\exp\left(\frac{\epsilon t^2}{2}\right) - 1 \right),$$

lembrando que $\exp(t) - 1 \geq t$ para todo $t \in \mathbb{R}$, então, da última igualdade obtemos

$$v_t^\epsilon - v_t \geq v_0 \exp(u_0 t) \left(\frac{\epsilon t^2}{2} \right),$$

Considere a função diferenciável $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, $f(u, v) = v$, temos

$$|f(u_t^\epsilon, v_t^\epsilon) - f(u_t, v_t)| \geq v_0 \exp(u_0 t) \left(\frac{\epsilon t^2}{2} \right),$$

mostrando assim que a estimativa exponencial obtida no Lema 3.1.1 é correta. □

Referências

- [1] Arnold V. I.: *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Graduate Texts in Mathematics, volume **60**, 2nd Edition. Springer: Berlin, 1989.
- [2] S. S. Chern, W. H. Chen and K. S. Lam: *Lectures on Differential Geometry*. Series on University Mathematics-Vol. 1. World Scientific. 2000.
- [3] Elworthy, K. D.: *Stochastic Differential Equations on Manifolds*. Cambridge University Press, 1982.
- [4] Emery, Michel: *Stochastic Calculus in Manifolds*. Springer-Verlag 1989.
- [5] J. Dieudonné: *Foundations of Modern Analysis*. Academic Press. Vol I. 1969.
- [6] M. I. Freidlin and A. D. Wentzell: *Random Perturbations of Dynamical Systems*. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol 260. 2nd Edition. Springer: New York, 1998.
- [7] Sever S. Dragomir: *Some Gronwall Type Inequalities and Applications*. Hauppauge, NY: Nova Science Publishers. viii, 193 p. 2003.
- [8] H. Hofer and E. Zehnder : *Symplectic Invariants and Hamiltonian Dynamics*. Birkhauser Advanced Texts, 1994.
- [9] Elton P. Hsu: *Stochastic Analysis on Manifolds*. Graduate Studies in Mathematics, volume **38**, 2002.

-
- [10] N. Ikeda and S. Watanabe: *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes*. North-Holland/Kodansha. 2nd edition, 1989.
 - [11] H. Kunita: *Stochastic flows and stochastic differential equations*. Cambridge University Press, 1990.
 - [12] Abraham R. and Marsden J. E.: *Foundations of Mechanics*. New York: Benjamin/Cummings 2nd edition, 1978.
 - [13] McDuff D. and Salamon D.: *Introduction to Symplectic Topology*. Oxford Mathematical Monographs. New York, 1995.
 - [14] B. Oksendal: *Stochastic Differential Equations, An Introduction with Applications*. Springer Verlag. Sixth Edition, 2003.
 - [15] J.A. Sanders F. Verhulst J. Murdock: *Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems*. Springer. 2nd edition, 2007.
 - [16] Xue-Mei Li: *An averaging principle for a completely integrable stochastic Hamiltonian system*. Nonlinearity **21**, 803-822, 2008.