

JOÃO TIAGO ASSUNÇÃO GOMES

FORMALISMOS GIBBSIANOS PARA  
SISTEMAS DE *SPINS* UNIDIMENSIONAIS

CAMPINAS  
2012

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

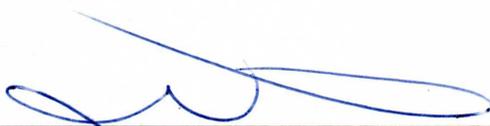
JOÃO TIAGO ASSUNÇÃO GOMES

FORMALISMOS GIBBSIANOS PARA SISTEMAS DE  
*SPINS* UNIDIMENSIONAIS

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO APRESENTADA AO INS-  
TITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTA-  
ÇÃO CIENTÍFICA DA UNICAMP, PARA A OBTENÇÃO DO  
TÍTULO DE MESTRE EM MATEMÁTICA.

ORIENTADOR: PROF. DR. EDUARDO GARIBALDI

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELO  
ALUNO JOÃO TIAGO ASSUNÇÃO GOMES, E ORIENTADA PELO PROF. DR. EDUARDO  
GARIBALDI.



---

Assinatura do Orientador

CAMPINAS, 2012

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA POR  
ANA REGINA MACHADO - CRB8/5467  
BIBLIOTECA DO INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E  
COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA - UNICAMP

Gomes, João Tiago Assunção, 1986-  
G585f Formalismos Gibbsianos para sistemas de spins  
unidimensionais / João Tiago Assunção Gomes. – Campinas, SP :  
[s.n.], 2012.

Orientador: Eduardo Garibaldi.  
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas,  
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Mecânica estatística - Modelos matemáticos. 2. Teoria  
ergódica. 3. Otimização ergódica. I. Garibaldi, Eduardo, 1977-. II.  
Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática,  
Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

**Título em inglês:** Gibbsian formalisms for one dimensional spin systems

**Palavras-chave em inglês:**

Statistical mechanics - Mathematical models

Ergodic theory

Ergodic optimization

**Área de concentração:** Matemática

**Titulação:** Mestre em Matemática

**Banca examinadora:**

Eduardo Garibaldi [Orientador]

Fábio Armando Tal

Pedro José Catuogno

**Data de defesa:** 27-07-2012

**Programa de Pós-Graduação:** Matemática

**Dissertação de Mestrado defendida em 27 de julho de 2012 e aprovada**

**Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.**



---

**Prof.(a). Dr(a). EDUARDO GARIBALDI**



---

**Prof.(a). Dr(a). PEDRO JOSÉ CATUOGNO**



---

**Prof.(a). Dr(a). FÁBIO ARMANDO TAL**



---

## Dedicatória

---

*Dedico este trabalho aos meus pais, Joanésio e Diva, à minha madrinha Dilma e ao meu irmão Jonas. Pela compreensão nos momentos ausentes e principalmente devido a todo apoio, carinho e incentivo, sempre.*



---

## Agradecimento

---

*“A vida é assim: esquenta e esfria,  
aperta e daí afrouxa, sossega e depois  
desinquieta. O que ela quer da gente  
é coragem...”*

---

*Grande Sertão Veredas*  
João Guimarães Rosa

Primeiramente, agradeço ao Prof. Dr. Eduardo Garibaldi, por sua orientação e por seus ensinamentos, os quais foram fundamentais para minha formação. Pelo incentivo a explorar diversas ideias e problemas, essenciais para a concretização deste texto. Gostaria de destacar também sua dedicação e disponibilidade, durante todo o período, e principalmente a paciência para com a finalização deste trabalho. Sou imensamente grato à confiança que tem depositado em mim durante estes três últimos anos. Muito obrigado.

Ao Cléber e ao Lino pelo aprendizado em conjunto e pelas frutíferas discussões dentre os seminários, minicursos e matérias. Além da ótima companhia.

Agradeço ao CNPQ<sup>1</sup> pelo apoio financeiro que viabiliza aprimoramento acadêmico de grande parcela dos pós-graduandos no país, incluindo o autor. À UNICAMP, que se tornou minha segunda casa ao longo destes seis últimos anos. Aos ensinamentos e conselhos dos professores do IMECC, principais responsáveis pela formação de excelência deste instituto.

Aos meus pais, Joanésio e Diva, ao meu irmão Jonas, e à minha madrinha Dilma, pelo apoio, carinho e incentivo, sempre. Por saber que, apesar da distância e dos meus longos períodos de ausência, estarão sempre dispostos a ajudar e contribuir para o meu desenvolvimento. Melhor do que ninguém, vocês sabem que merecem todo o mérito por tudo que conquistei até hoje e pelo que ainda hei de conquistar. Sou eternamente grato por isto; muito obrigado.

Aos amigos de casa/república pelas conversas, vivências e momentos juntos. Além do companheirismo, desde os momentos mais difíceis aos de descontração. Aos colegas de curso não só pelas discussões e aprendizados, mas, principalmente, pela companhia, apoio mútuo e prazer de suas amizades.

Às pedras pelo caminho, sempre nos desafiando e transformando. Por nos fazer cada vez mais fortes e serem as principais responsáveis por sonharmos cada vez mais alto.

---

1. Suporte financeiro de: Bolsa do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) (processo 131908/2010-3) 2010–2012.

---

## Epígrafe

---

*“...the beauty of mathematics lies in uncovering the hidden simplicity and complexity that coexist in the rigid logical framework that the subject imposes.”*

---

*The Mathematician's Brain*

David Ruelle



Exibir os estados de Gibbs e os estados de equilíbrios para certos sistemas de *spins* sobre reticulados é um problema de grande interesse para mecânica estatística. Com este intuito, apresentamos para o caso unidimensional dois formalismos existentes para tais sistemas: o formalismo DLR (enfoque mecânico-estatístico) e o formalismo SRB (enfoque dinamicista). Apesar das particularidades próprias aos contextos nos quais cada um dos formalismos se aplica, investigam-se aqui as relações existentes entre estes através da energia livre de Gibbs e da pressão topológica. Discute-se também o comportamento assintótico dos estados de Gibbs/equilíbrio quando levados ao congelamento do sistema. Tal fenômeno nos conduz ao estudo dos estados maximizantes via teoria de otimização ergódica. Ao fim, comparam-se algumas ideias da álgebra *max/min-plus* e o conceito de subação, as quais serão fundamentais para análise do comportamento assintótico da pressão topológica.

**Palavras-chave:** Álgebra *Max/Min-Plus*, *Shift*, Especificação, Estados Congelados, Estados de Equilíbrios, Estados de Gibbs, Modelo *Clock*, Operador de Ruelle, Otimização Ergódica, Sistemas de *Spins*, Subações.



---

## Abstract

---

*To exhibit Gibbs states and equilibrium states for certain kind of lattice spin systems is a problem with great interest for statistical mechanics. To that end, we introduce two existing formalisms for one-dimensional systems: DLR formalism (statistical-mechanical approach) and SRB formalism (dynamical-systems approach). In spite of their distinct applications, we analyse the relation between them through the notions of Gibbs free energy and topological pressure. We discuss also the asymptotic behaviour of Gibbs/equilibrium states when the system is frozen. This phenomenon leads us to the study of maximizing states in the context of ergodic optimization. Finally, we compare some ideas of max/min-plus algebra and the notion of sub-action, which will be essential to investigate the asymptotic behaviour of the topological pressure.*

**Keywords:** *Clock Model, Equilibrium States, Ergodic Optimization, Frozen States, Gibbs States, Max/Min-Plus Algebra, Ruelle Operator, Shift, Specification, Spins Systems, Sub-actions.*



<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Sistemas de <i>Spins</i> Unidimensionais</b>	<b>7</b>
1.1 Conjunto de <i>Spins</i> . . . . .	7
1.2 Espaço de Configurações . . . . .	8
1.3 Observáveis . . . . .	12
1.4 Estados . . . . .	16
1.5 Interação e Potencial . . . . .	22
<b>2 Formalismos</b>	<b>33</b>
2.1 Formalismo DLR . . . . .	33
2.1.1 Especificações . . . . .	35
2.1.2 Estados de Gibbs . . . . .	38
2.1.3 Abordagem Variacional . . . . .	43
2.2 Transição entre os Formalismos . . . . .	48
2.3 Formalismo SRB . . . . .	53
2.3.1 Princípio Variacional . . . . .	59
2.3.2 Estados de Equilíbrio . . . . .	60
2.4 Relações entre os Formalismos . . . . .	61
2.5 Unicidade . . . . .	76
<b>3 Congelamento do Sistema</b>	<b>81</b>
3.1 Otimização Ergódica . . . . .	83
3.1.1 Subações e Conjunto de Aubry . . . . .	85

3.1.2	Subações Calibradas e Barreira de Peierls . . . . .	89
3.2	Comportamento Assintótico da Pressão . . . . .	93
3.2.1	Álgebra <i>Max/Min-Plus</i> . . . . .	94
3.2.2	Caracterização Assintótica da Pressão . . . . .	99
	<b>Bibliografia</b>	<b>107</b>
	<b>A Resultados Suplementares</b>	<b>111</b>

---

## Introdução

---

A compreensão do comportamento de sistemas que possuem grande quantidade de partículas constitui uma questão recorrente a uma série de problemas na atualidade. Por exemplo, analisar a agitação de moléculas de um gás ou o fenômeno de magnetização de materiais para uma dada temperatura são problemas nos quais tal questão se impõe. Em geral, assume-se que todas as partículas interagem mutuamente e que cada qual possui certas características intrínsecas (posição, momento magnético etc). Isto significa que tais sistemas possuem uma grande quantidade de graus de liberdade que estão correlacionados, o que dificulta uma caracterização através de tratamentos clássicos, via teorias mecânicas ou eletromagnéticas.

Problemas relacionados a tal questão intrigam a humanidade desde o século 17, com a obtenção da lei de Boyle-Mariotte e o posterior desenvolvimento da teoria cinética de gases por Bernoulli, Joule, Krönig, Clausius, Maxwell, entre outros. Por sua vez, estas culminaram ao final do século 19 nas equações de Boltzman e nos *ensembles* de Gibbs, possibilitando o surgimento da mecânica estatística clássica.

Na década de 1920, Ising introduziu um modelo focando o fenômeno de magnetização de um metal. Em tal proposta teórica, as partículas são pontos distribuídos como o reticulado  $\mathbb{Z}$ , as quais podem assumir dois valores de momento magnético (*spins*)  $-1$  ou  $+1$ , havendo interação somente entre as vizinhas mais próximas no reticulado. Entende-se assim o fenômeno de magnetização como a permanência de certo alinhamento entre os *spins* associados a cada partícula do material.

A distinção dada a este modelo deve-se à suposição de que o sistema possui infinitas partículas que estão distribuídas estaticamente como um reticulado. Trata-se de uma simplificação, a qual não necessariamente exprime a realidade física do sistema. Esta não impede, porém, uma análise apurada do fenômeno a ser tratado. Assim, sucedem destas

ideias diversos modelos da mecânica estatística do equilíbrio, denominados de sistemas de *spins*, com generalizações sobre: a quantidade de *spins*, a estrutura e/ou geometria do reticulado, a interação entre partículas etc.

Convém também enfatizar que, além das evidentes aplicações tanto à física quanto à química, áreas de procedência da mecânica estatística, as ferramentas matemáticas presentes em tal descrição obtiveram muito êxito dentro da teoria de sistemas dinâmicos desenvolvida desde o final da década de 1960. Por este motivo, constitui um tópico de grande discussão e estudo também para a matemática.

### Sistemas de *Spins* de Volume Finito

Com o intuito de apresentar as ideias essenciais da mecânica estatística do equilíbrio, iniciamos tal estudo a partir de sistemas cuja quantidade de partículas é finita, denominados de volume finito. Estes possuem uma descrição completa. Considere o número de partículas  $N \in \mathbb{N}$  e indexe cada partícula a um elemento do conjunto  $\{1, 2, \dots, N\}$ . Sejam  $\mathcal{S}$  um conjunto finito valores, que associa a cada partícula uma certa característica intrínseca (massa, momento, *spins* etc), e  $\Sigma = \mathcal{S}^N$  o conjunto de todas as configurações possíveis para o sistema.

**Observação 0.0.1.** Perceba que uma configuração  $\omega \in \Sigma$  é, neste caso, o mesmo que um vetor  $N$ -dimensional  $\vec{\omega}$  cujas entradas estão em  $\mathcal{S}$ .

A energia do sistema é descrita por uma função  $\mathcal{H} : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  denominada de hamiltoniano. Sabemos que qualquer função em  $\Sigma$  possui uma decomposição em termos de funções específicas, cuja principal característica é depender somente dos valores em certas entradas de cada configuração/vetor. Desta forma, obtemos que

$$\mathcal{H}(\omega) = \sum_{X \subset \{1, 2, \dots, N\}} \Phi_X(\omega),$$

para uma família de funções  $\Phi = \{\Phi_X\}_{X \subset \{1, 2, \dots, N\}}$ , também denominada de interação, dada por

$$\Phi_X : \Sigma \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{tal que} \quad \Phi_X(\omega) := \sum_{\omega'|_X = \omega|_X} \mathcal{H}(\omega') - \frac{1}{|\mathcal{S}|} \sum_{\substack{Y \subset X, \\ |Y|=|X|-1}} \sum_{\omega'|_Y = \omega|_Y} \mathcal{H}(\omega').$$

Em particular,  $\Phi_X$  não depende das entradas cujos índices pertencem a  $X^c$ . Desta maneira, tais funções representariam, de forma intuitiva, a contribuição à energia obtida da interação das partículas indexadas em  $X$ , justificando a denominação dada à família  $\Phi$ .

Um estado é uma medida de probabilidade sobre  $\Sigma$ . O conjunto de todos os estados para o sistema é denotado por  $\mathcal{P}(\Sigma)$ .

**Observação 0.0.2.** No contexto que estamos tratando, qualquer medida é discreta. Assim, um estado  $\mu$  pode ser representado por um vetor  $|\Sigma|$ -dimensional  $\vec{\mu} = (\mu)_{\omega \in \Sigma}$  com entradas em  $[0, 1]$ , satisfazendo  $\sum_{\omega \in \Sigma} \mu(\omega) = 1$ .

Atribuindo um estado  $\mu$  ao espaço  $\Sigma$ , podemos definir

$$\text{(Energia Média)} \quad \langle \mathcal{H} \rangle_{\mu} = \sum_{\omega \in \Sigma} \mu(\omega) \mathcal{H}(\omega),$$

a qual é claramente limitada, já que  $\min_{\omega \in \Sigma} \mathcal{H}(\omega) \leq \langle \mathcal{H} \rangle_{\mu} \leq \max_{\omega \in \Sigma} \mathcal{H}(\omega)$  para todo  $\mu \in \mathcal{P}(\Sigma)$ .

A energia média vem a ser uma das funções termodinâmicas, classe de funções que dependem de um hamiltoniano e/ou estado, na qual também estão inclusas as funções

$$\text{(Entropia)} \quad H(\mu) := - \sum_{\omega \in \Sigma} \mu(\omega) \log \mu(\omega),$$

$$\text{(Pressão)} \quad P(\mathcal{H}) := \log Z_{\mathcal{H}, N} = \log \sum_{\omega \in \Sigma} e^{-\mathcal{H}(\omega)}.$$

Estas três formam as peças fundamentais para uma abordagem termodinâmica do sistema a ser analisado.

Devido à concavidade da função logarítmica, tais funções estão vinculadas pela seguinte desigualdade

$$\begin{aligned} H(\mu) - \langle \mathcal{H} \rangle_{\mu} &= \sum_{\omega \in \Sigma} \mu(\omega) \left[ \log \frac{1}{\mu(\omega)} - \mathcal{H}(\omega) \right] \\ &= \sum_{\omega \in \Sigma} \mu(\omega) \log \frac{e^{-\mathcal{H}(\omega)}}{\mu(\omega)} \\ &\leq \log \sum_{\omega \in \Sigma} \mu(\omega) \frac{e^{-\mathcal{H}(\omega)}}{\mu(\omega)} \\ &= P(\mathcal{H}). \end{aligned}$$

Por sua vez, esta dá razão ao seguinte princípio variacional

$$P(\mathcal{H}) = \max_{\mu \in \mathcal{P}(\Sigma)} \{H(\mu) - \langle \mathcal{H} \rangle_{\mu}\},$$

pois o estado que verifica a igualdade é dado explicitamente pela fórmula,

$$\mu_{BG}(A) = \frac{1}{Z_{\mathcal{H}, N}} \sum_{\omega \in A} e^{-\mathcal{H}(\omega)} \quad \text{com} \quad Z_{\mathcal{H}, N} := \sum_{\omega \in \Sigma} e^{-\mathcal{H}(\omega)}$$

e recebe as denominações de estado de Boltzmann-Gibbs ou *ensemble* canônico.

Desta forma, a análise do fenômeno de equilíbrio para os sistemas de *spins* de volume finito concentra-se em investigar estados com propriedades específicas sobre o espaço de configurações. Tal afirmação justifica a importância dada aos estados e a necessidade de uma caracterização mensurável para os sistemas tratados.

Um problema relevante a ser explorado é o fenômeno de congelamento do sistema. Considere a família  $\{\mu_\beta\}_{\beta>0}$  formada pelos estados de Boltzmann-Gibbs dos hamiltonianos  $\beta\mathcal{H}$  para  $\beta > 0$  dados por

$$\mu_\beta(A) = \frac{1}{Z_{\mathcal{H},N}(\beta)} \sum_{\omega \in A} e^{-\beta\mathcal{H}(\omega)}.$$

O parâmetro  $\beta$  é igual ao inverso do produto da temperatura  $T$  multiplicado pela constante de Boltzmann  $\kappa$ , isto é,  $\beta = \frac{1}{\kappa T}$ . Assim, há interesse em analisar o comportamento assintótico de tal família quando o parâmetro  $\beta \rightarrow \infty$ , ou melhor, quando a temperatura  $T \rightarrow 0$ .

Note que o conjunto dos estados  $\mathcal{P}(\Sigma)$  pode ser identificado com o subconjunto fechado da esfera unitária de  $\mathbb{R}^{|\Sigma|}$  com a norma da soma e, por compacidade, qualquer ponto de acumulação  $\zeta$  para a família  $\{\mu_\beta\}_{\beta>0}$  também é um estado, o qual será denominado de estado de congelado. Ademais, sejam  $\omega$  e  $\omega' \in \Sigma$  tais que  $\mathcal{H}(\omega) > \mathcal{H}(\omega')$ . Obtemos do seguinte limite

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{\mu_\beta(\omega)}{\mu_\beta(\omega')} = \lim_{\beta \rightarrow \infty} e^{\beta[\mathcal{H}(\omega') - \mathcal{H}(\omega)]} = 0$$

que o suporte de um estado congelado  $\zeta$  se concentra sobre o conjunto das configurações que minimizam o hamiltoniano. Resulta daí e do fato que energia média é limitada inferiormente que os estados congelados possuem uma característica fundamental, que é a de minimizar o valor da energia média do hamiltoniano, já que

$$\langle \mathcal{H} \rangle_\zeta = \min_{\omega \in \Sigma} \mathcal{H}(\omega) \leq \min_{\mu \in \mathcal{P}(\Sigma)} \langle \mathcal{H} \rangle_\mu \implies \langle \mathcal{H} \rangle_\zeta = \min_{\mu \in \mathcal{P}(\Sigma)} \langle \mathcal{H} \rangle_\mu.$$

**Observação 0.0.3.** Atente que tal desenvolvimento poderia ser escrito em termos do hamiltoniano  $-\mathcal{H}$  e, desta forma, teríamos a maximização de configurações e estados.

Para mais detalhes sobre os sistemas de volume finito, veja [47, 46, 32].

## Sistemas de *Spins* de Volume Infinito

Motivado pelos trabalhos desenvolvidos por Gibbs, um mecanismo muito importante em mecânica estatística do equilíbrio vem a ser o limite termodinâmico. Resumidamente, energia livre de Gibbs para sistemas com grande quantidade de partículas pode ser suposto como sendo valor assintótico da densidade da pressão, isto é, o limite de  $\frac{1}{N} \log Z_{\mathcal{H},N}$  quando

a quantidade  $N$  de partículas tende a infinito. A partir da transformada de Legendre de tal limite, é possível apresentar os análogos da entropia e da energia média, relacionando-os com as noções termodinâmicas clássicas. Este é um argumento recorrente na literatura física de tal tópico e, apesar de não ser o foco deste trabalho, motiva muitos dos conceitos utilizados pelo formalismo existentes. Para uma referência clássica, veja [47].

Investindo na proposta teórica de Ising e fixando a atenção nos argumentos utilizados pela caracterização anterior, o primeiro formalismo (denominado de DLR) para o tratamento dos sistemas de *spins* de volume infinito em equilíbrio assume que cada parcela finita de partículas possui comportamento descrito como anteriormente, por intermédio de estados de Boltzmann-Gibbs para um hamiltoniano que está associado a esta parcela e a uma condição exterior. Assim, focamo-nos em encontrar os estados de Gibbs cuja restrição às parcelas finitas coincidam com os respectivos estados de Boltzmann-Gibbs.

O segundo formalismo (denominado de SRB), por sua vez, visa generalizar as funções termodinâmicas – energia média, entropia e pressão – de forma que continuem satisfazendo o princípio variacional. De modo análogo, os estados de equilíbrio são apresentados como os estados que atingem o valor supremo da entropia menos a energia média, o qual coincidirá com a pressão pelo princípio variacional.

O fenômeno de congelamento do sistema poderá ser tratado também no contexto de volume infinito, permitindo apresentar os estados congelados como um subconjunto dos estados que maximizam a energia média.

## Resumo Esquemático da Dissertação

Dissertaremos especificamente sobre os sistemas de *spins* unidimensionais, que nada mais são que modelos clássicos e discretos da mecânica estatística do equilíbrio em volume infinito. Vêm a ser clássicos, no sentido de que não necessitam da análise quântica para descrevê-los (na realidade, são modelos simplificados pelo processo de quantização), e discretos, pois as partículas são supostas dispostas como  $\mathbb{N}$  ou  $\mathbb{Z}$ .

Sob um ponto de vista matemático, temos por meta apresentar os estados de Gibbs e de equilíbrio, bem como os estados maximizantes e congelados, que podem ser associados a tal sistema. Com esta intenção, a dissertação é organizada em três capítulos.

- (1) O primeiro capítulo disserta sobre os sistemas de *spins* unidimensionais, enfocando em seus aspectos fundamentais: o espaço de configuração, os observáveis, os estados e o hamiltoniano (obtido de uma interação ou potencial).
- (2) O segundo capítulo introduz dois formalismos existentes para tais sistemas: o formalismo DLR (enfoque mecânico-estatístico) e o formalismo SRB (enfoque dinamicista). Tais formalismos possibilitam caracterizar, respectivamente, os estados de Gibbs e os estados de equilíbrio para o sistema. Com o intuito de aproximá-

los, apresentamos um dicionário entre os formalismos. Ao término, estabelecemos relações entre estes (consequentemente, entre os estados de Gibbs e os estados de equilíbrio) através da análise das respectivas funções termodinâmicas.

- (3) No terceiro capítulo, apresenta-se o problema de congelamento do sistema, introduzindo os estados congelados e os maximizantes. Desenvolve-se a teoria de otimização ergódica e exploram-se as conexões dessa com a álgebra *max/min-plus*, com o intuito de caracterizar o comportamento assintótico da pressão para certos potenciais.

Além disso, a fim de preencher lacunas referentes a certos pré-requisitos, expõe-se no apêndice um compêndio de definições e teoremas, devidamente referenciados, sobre as áreas básicas que fundamentam tal estudo: teoria da medida, topologia, análise funcional, sistemas dinâmicos e teoria de matrizes não negativas.

No decorrer da dissertação, restringir-nos-emos à análise de sistemas unidimensionais, já que os modelos analisados possuem esta característica e algumas ferramentas utilizadas não possuem extensão multidimensional. Além disso, as demonstrações de alguns resultados serão omitidas visando maior fluidez na apresentação dos conteúdos. Tal fato manifesta-se com maior frequência no segundo e no terceiro capítulos, para os resultados recorrentes na literatura clássica ou provindos de artigos mais recentes. Apesar disso, os resultados estarão sempre acompanhados pelas devidas referências.

---

## Sistemas de *Spins* Unidimensionais

---

Este capítulo tem por objetivo introduzir os sistemas de *spins* para uma quantidade infinita de partículas (volume infinito). Supõe-se que tais partículas estão distribuídas como pontos de um reticulado e interagem mutuamente. Tal formalização acarretará naturais generalizações, principalmente sobre a extensão do conceito de hamiltoniano, e uma série de novos conceitos, intimamente relacionados à noção de invariância das configurações para a dinâmica de translações sobre o reticulado.

### 1.1 Conjunto de *Spins*

**Definição 1.1.1.** Seja  $(\mathcal{S}, +, \tau)$  um grupo topológico compacto munido de uma métrica  $d_{\mathcal{S}}$  compatível com a topologia  $\tau$ . Denote por  $\mathcal{B}$  a respectiva  $\sigma$ -álgebra dos borelianos. Os elementos de  $\mathcal{S}$  são chamados de *spins* ou símbolos, conseqüentemente  $\mathcal{S} = (\mathcal{S}, +, d_{\mathcal{S}}, \mathcal{B})$  recebe a denominação de conjunto de *spins* ou alfabeto.

Alguns conceitos apresentados na seção seguinte necessitarão explicitamente de uma métrica sobre o conjunto de *spins*. Critérios que garantem a existência de uma métrica associada a um grupo topológico são dados pelo Teorema de Birkhoff-Kakutani (veja o teorema A.0.13 na seção de Topologia do apêndice A).

Uma particularidade fundamental dos grupos topológicos compactos, que em parte justifica a escolha desta estrutura, vem a ser a existência uma única medida de probabilidade de Haar, ou seja, uma probabilidade  $\nu_{\mathcal{S}}$  sobre os borelianos de  $\mathcal{S}$  com as seguintes propriedades:

- (i)  $\nu_{\mathcal{S}}$  é uma probabilidade de Radon (neste caso, equivalente a regular);  
(ii)  $\nu_{\mathcal{S}}$  é invariante, isto é,  $\nu_{\mathcal{S}}(A + x) = \nu_{\mathcal{S}}(A)$  para todo  $x \in \mathcal{S}$  e  $A \in \mathcal{B}$ .

Tal probabilidade recebe a designação de *medida de referência*.

**Exemplo 1.1.1.** Os conjuntos de *spins* que aparecerão no decorrer do texto estão listados abaixo.

- (1) *Inteiros Módulo  $n$* : Dado  $\mathbb{Z}_n = \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} = \{0, 1, \dots, n-1\} \subset \mathbb{R}$  munido da métrica 0–1 (topologia discreta) e  $\sigma$ -álgebra de Borel  $\mathcal{B}$  gerada pela coletânea  $\{\{p\} : p = 1, \dots, n\}$ , a probabilidade de Haar é dada pela medida de contagem normalizada  $\nu$ , isto é,  $\nu(\{i\}) = \frac{1}{n}, \forall i \in \mathbb{Z}_n$ ;
- (2) *Raízes  $n$ -ésimas da Unidade*: Trata-se de

$$\mathbb{U}_n := \left\{ e^{\frac{2\pi i p}{n}} : p = 1, \dots, n \right\} \simeq \left\{ \left( \cos \frac{2\pi p}{n}, \sin \frac{2\pi p}{n} \right) : p = 1, \dots, n \right\} \subset \mathbb{R}^2, \quad (1.1)$$

com a métrica 0 – 1. Logo, é um conjunto discreto e possui probabilidade de Haar análoga à do exemplo anterior.

- (3) *Esfera  $d$ -dimensional*: Considere o conjunto  $\mathbb{S}^d = \{x \in \mathbb{R}^{d+1} : \|x\| = 1\}$  munido com a métrica induzida de  $\mathbb{R}^{d+1}$  e cuja probabilidade de Haar é exatamente a medida de hipersuperfície.  $\diamond$

Perceba que os exemplos de conjuntos de *spins* citados podem ser classificados como um conjunto finito de pontos isolados ou um conjunto não enumerável sem pontos isolados. Na realidade, tal caracterização é válida para o contexto em que estamos lidando, mais precisamente para o caso de grupos topológicos compactos munidos de métrica. Discutiremos tal fato com detalhes na seção 2.4 do segundo capítulo.

**Observação 1.1.1.** Uma característica da probabilidade de Haar reside no fato desta ser “uniforme”, ou seja, todo ponto possui a mesma “massa”. Assim não existiria qualquer predileção natural entre os *spins* a serem considerados. Escolher medidas com tal característica reflete somente a necessidade de manter o modelo em contato com uma certa realidade física dos problemas a serem propostos. Por outro lado, do ponto de vista estritamente matemático, e também para determinadas aplicações, não há nenhum empecilho quanto à utilização de outras medidas como *medida de referência*.

## 1.2 Espaço de Configurações

Considere o reticulado<sup>1</sup>  $\mathcal{L}$ , que neste trabalho designará  $\mathbb{N}$  ou  $\mathbb{Z}$ . Cada ponto  $i \in \mathcal{L}$  será chamado de sítio ou partícula. A coletânea de subconjuntos finitos (diferentes do  $\emptyset$ )

1. Este termo diverge de seu sentido usual, devido ao fato de  $\mathbb{N}$  não ser um reticulado, já que é semigrupo aditivo em  $\mathbb{R}$ . É importante que conjunto a ser considerado tenha propriedades adequadas à seguinte situação: as partículas são fixas no espaço e estão relacionadas através de uma estrutura aditiva.

sobre o reticulado  $\mathcal{L}$  é denotada por  $\mathcal{P}_F := \mathcal{P}_F(\mathcal{L})$  e os intervalos são os conjuntos

$$[m, n) := \{k \in \mathcal{L} : m \leq k < n\} = \{m, \dots, n-1\}$$

para qualquer  $m, n \in \mathcal{L}$  com  $m < n$ . Uma sequência muito importante em  $\mathcal{P}_F$  é

$$\Lambda_n := \begin{cases} \{0, 1, 2, \dots, n-1\}, & \text{caso } \mathcal{L} = \mathbb{N}; \\ \{-n+1, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, n-1\}, & \text{caso } \mathcal{L} = \mathbb{Z}. \end{cases}$$

A cardinalidade de qualquer conjunto  $\Lambda \in \mathcal{P}_F$  será denotada por  $|\Lambda|$ .

**Definição 1.2.1.** O espaço de configurações ou espaço de fase associado a um conjunto de *spins*  $\mathcal{S}$  é o conjunto

$$\Sigma_{\mathcal{S}} := \mathcal{S}^{\mathcal{L}} = \{(\omega_i)_{i \in \mathcal{L}} : \omega_i \in \mathcal{S}, \forall i \in \mathcal{L}\}.$$

Seus elementos  $\omega$  são chamados de configurações e, devido à estrutura unidimensional, serão representados pelas sequências de *spins*

$$\omega = \begin{cases} (\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots), & \text{caso } \mathcal{L} = \mathbb{N}; \\ (\dots, \omega_{-2}, \omega_{-1}, \omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots), & \text{caso } \mathcal{L} = \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Além disso,  $\Sigma_{\mathcal{S}}$  desfruta de propriedades topológicas e mensuráveis quando munido, respectivamente, da topologia produto  $\tau^{\mathcal{L}}$  e da  $\sigma$ -álgebra produto  $\mathcal{B}^{\mathcal{L}}$ .

**Notação 1.2.1.** Quando necessário, far-se-á explícita a escolha pelo reticulado  $\mathbb{N}$  através do símbolo “+” sobrescrito sobre a notação padrão. Por exemplo,  $\Sigma_{\mathcal{S}}^+ = \mathcal{S}^{\mathbb{N}}$  e  $\Lambda_n^+ = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$  serão empregados para distinguir o caso  $\mathcal{L} = \mathbb{N}$ .

Dado um subconjunto qualquer  $\Lambda \subset \mathcal{L}$ , identificaremos  $\omega|_{\Lambda} \in \mathcal{S}^{\Lambda}$  simplesmente por  $\omega_{\Lambda}$ . Além disso, dadas duas configurações  $\omega, \omega' \in \Sigma_{\mathcal{S}}$ , sua concatenação é descrita por

$$\omega_{\Lambda} \omega'_{\Lambda^c} := \begin{cases} \omega_i, & \text{se } i \in \Lambda; \\ \omega'_i, & \text{se } i \in \Lambda^c. \end{cases}$$

Os abertos que geram a topologia produto em questão (e, conseqüentemente, a  $\sigma$ -álgebra produto) são denominados de cilindros e dados por

$$\{\omega \in \Sigma_{\mathcal{S}} : \omega_i \in A_i, \text{ para todo } i \in \Lambda\}$$

para algum  $\Lambda \in \mathcal{P}_F$  e  $\{A_i\}_{i \in \Lambda}$  abertos de  $\mathcal{S}$ . Do ponto de vista mensurável, a coletânea de tais conjuntos, denotada por  $Cil(\Sigma_{\mathcal{S}})$ , é um anel.

**Observação 1.2.1.** Destacamos a subcoletânea de cilindros do tipo

$$[\omega]_{\Lambda, \varepsilon} := \left\{ \omega' \in \Sigma_{\mathcal{S}} : \max_{i \in \Lambda} d_{\mathcal{S}}(\omega_i, \omega'_i) < \varepsilon \right\} \quad (1.2)$$

para  $\omega \in \Sigma_{\mathcal{S}}$ ,  $\Lambda \in \mathcal{P}_F$  e  $\varepsilon > 0$ . Esta satisfaz as seguintes propriedades:

- (i) dada uma configuração  $\omega \in \Sigma_{\mathcal{S}}$ , temos que  $\omega \in [\omega]_{\Lambda, \varepsilon}$  para qualquer  $\Lambda \in \mathcal{P}_F$  e  $\varepsilon > 0$ , de modo que a união dos cilindros desta subcoletânea cobre  $\Sigma_{\mathcal{S}}$ ;
- (ii) se  $\omega \in [\bar{\omega}]_{\bar{\Lambda}, \bar{\varepsilon}} \cap [\bar{\omega}]_{\bar{\Lambda}, \bar{\varepsilon}}$ , pondo  $\varepsilon = \min\{d_{\mathcal{S}}(\omega, \bar{\omega}), \bar{\varepsilon} - d_{\mathcal{S}}(\omega, \bar{\omega}), d_{\mathcal{S}}(\omega, \bar{\omega}), \bar{\varepsilon} - d_{\mathcal{S}}(\omega, \bar{\omega})\}$ , obtemos que

$$\omega \in [\omega]_{\bar{\Lambda} \cup \bar{\Lambda}, \varepsilon} \subset [\bar{\omega}]_{\bar{\Lambda}, \bar{\varepsilon}} \cap [\bar{\omega}]_{\bar{\Lambda}, \bar{\varepsilon}};$$

as quais caracterizam-na como base para topologia produto, devido ao lema A.0.12. Desta maneira, todo aberto de  $\Sigma_{\mathcal{S}}$  pode ser apresentado como união de cilindros do tipo (1.2).

O fato de  $\mathcal{S}$  ser espaço métrico compacto implica que  $\mathcal{S}$  é também um espaço de Hausdorff separável que satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade. Através da topologia produto,  $\Sigma_{\mathcal{S}}$  herda a separabilidade, a propriedade de Hausdorff e o segundo axioma de enumerabilidade. Além disso, devido ao Teorema de Tychonoff,  $\Sigma_{\mathcal{S}}$  é um espaço compacto. Consequentemente, como corolário do Teorema de Metrização da Urysohn, obtemos que  $\Sigma_{\mathcal{S}}$  é metrizável e uma métrica compatível com a topologia produto pode ser definida por

$$d_{\Sigma_{\mathcal{S}}}(\omega, \omega') := \sum_{i \in \mathcal{L}} \frac{1}{2^{|i|}} \frac{d_{\mathcal{S}}(\omega_i, \omega'_i)}{\text{diam}(\mathcal{S})}, \quad \omega, \omega' \in \Sigma_{\mathcal{S}}.$$

Ademais, a separabilidade de  $\mathcal{S}$  faz com que a  $\sigma$ -álgebra produto (enumerável)  $\mathcal{B}^{\mathcal{L}}$ , que é gerada pelos cilindros, coincida com a  $\sigma$ -álgebra dos borelianos de  $\Sigma_{\mathcal{S}}$ .

**Observação 1.2.2.** O reticulado  $\mathcal{L}$  pode ser substituído por um conjunto qualquer, como, por exemplo,  $\mathbb{N}^d$  ou  $\mathbb{Z}^d$ , para  $d \geq 2$ , ou ainda um conjunto finito (este último caso será tratado no exemplo 1.5.13). A discussão anterior sobre a compacidade de  $\Sigma_{\mathcal{S}}$  depende somente do Teorema de Tychonoff, o qual independe da cardinalidade do conjunto  $\mathcal{L}$ . Em contrapartida, caso o substituto de  $\mathcal{L}$  seja não enumerável, nem sempre é possível satisfazer o segundo axioma de enumerabilidade (veja o contraexemplo 103 da referência [54]) e a separabilidade não é suficiente para garantir que as  $\sigma$ -álgebras citadas anteriormente coincidam (consulte a seção 7.6 da referência [8]).

Incorporam-se propriedades dinâmicas ao espaço de configuração, fazendo uso das características algébricas intrínsecas a  $\mathcal{L}$ . O intuito será apresentar a noção de invariância e, nas próximas seções, a noção macroscópica para os observáveis e estados.

**Definição 1.2.2.** Seja a ação do (semi)grupo  $\mathcal{L}$  sobre o espaço de configurações  $\Sigma_{\mathcal{S}}$  definida por

$$\sigma : \mathcal{L} \times \Sigma_{\mathcal{S}} \longrightarrow \Sigma_{\mathcal{S}} \quad \text{tal que} \quad (n, \omega) \longmapsto (\sigma^n(\omega))_j = \omega_{j+n}.$$

Denominamos  $\sigma := \sigma^1 : \Sigma_{\mathcal{S}} \longrightarrow \Sigma_{\mathcal{S}}$  de operador de *shift* e o sistema dinâmico associado  $(\Sigma_{\mathcal{S}}, \sigma)$  de *shift* completo.

O destaque dado ao *shift*  $\sigma$  deve-se ao fato de este gerar o (semi)grupo de operadores  $\{\sigma^n : \Sigma_{\mathcal{S}} \longrightarrow \Sigma_{\mathcal{S}}\}_{n \in \mathcal{L}}$ , o qual define a ação de  $\mathcal{L}$  sobre o espaço de configurações, pois  $\sigma(n, \cdot) = \sigma^n(\cdot)$ . Além disso, tal operador é contínuo, já que

$$\sigma^{-1} \left( [\omega]_{\Lambda, \varepsilon} \right) = \left\{ \omega' \in \Sigma_{\mathcal{S}} : \max_{i \in \Lambda+1} d_{\mathcal{S}}(\omega_{i-1}, \omega'_i) < \varepsilon \right\} = [\bar{\omega}]_{\Lambda+1, \varepsilon}$$

para uma configuração  $\bar{\omega} \in \sigma^{-1}(\omega)$ , e para qualquer  $\varepsilon > 0$  e todo  $\Lambda \in \mathcal{P}_F$ .

**Exemplo 1.2.1.** *Shift completo unilateral sobre alfabeto finito:* Seja  $\mathcal{L} = \mathbb{N}$ . Dado um alfabeto finito  $\mathcal{S} = \mathbb{Z}_n$ , temos o espaço de configurações

$$\Sigma_{\mathbb{Z}_n}^+ := \{0, 1, \dots, n-1\}^{\mathbb{N}}$$

formando assim o *shift* completo unilateral  $(\Sigma_{\mathbb{Z}_n}^+, \sigma)$ .

Devido à topologia discreta, a métrica é dada por  $d_{\Sigma_{\mathbb{Z}_n}^+}(\omega, \omega') = 2^{-\max\{n \in \mathbb{N} : \omega_i = \omega'_i \ \forall i \in \Lambda_n^+\}}$  e, para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno, os cilindros básicos possuem a seguinte forma

$$[\omega]_{\Lambda} := \{\omega' \in \Sigma_{\mathcal{S}} : \omega'_i = \omega_i \ \forall i \in \Lambda\} = [\omega]_{\Lambda, \varepsilon}.$$

Por sua vez, estes são conjuntos fechados, o que torna o espaço totalmente desconexo.  $\diamond$

**Exemplo 1.2.2.** *Shift completo bilateral sobre um conjunto de spins finito:* Considere o conjunto de *spins* finito  $\mathcal{S} = \mathbb{U}_n$ . Para  $\mathcal{L} = \mathbb{Z}$ , temos o espaço de configurações

$$\Sigma_{\mathbb{U}_n} := \left\{ \left( \cos \frac{2\pi p}{n}, \sin \frac{2\pi p}{n} \right) : p = 1, \dots, n \right\}^{\mathbb{Z}}$$

e o *shift* completo bilateral  $(\Sigma_{\mathbb{U}_n}, \sigma)$ . Pelo mesmo argumento do exemplo 1.2.1,  $[\omega]_{\Lambda}$  é um cilindro básico e tal espaço é totalmente desconexo.  $\diamond$

**Observação 1.2.3.** Nos exemplos anteriores, poderíamos considerar  $\mathcal{S} = \mathbb{Z}_n$  ou  $\mathcal{S} = \mathbb{U}_n$  indistintamente. A predileção por cada um destes nos respectivos exemplos deve-se aos modelos apresentados na seção 1.5 deste capítulo.

**Exemplo 1.2.3.** *Shift completo sobre a esfera unitária:* Considere a esfera  $d$ -dimensional como conjunto de *spins*  $\mathcal{S} = \mathbb{S}^d$ . Temos o espaço de configurações  $\Sigma_{\mathcal{S}} := (\mathbb{S}^d)^{\mathcal{L}}$  e o *shift* completo  $(\Sigma_{\mathcal{S}}, \sigma)$ . Como mostrado anteriormente, trata-se de um espaço métrico compacto e um espaço mensurável munido da  $\sigma$ -álgebra de Borel, diferindo dos exemplos anteriores quanto ao fato de que seus cilindros  $[\omega]_{\Lambda, \varepsilon}$  são dados pela equação (1.2) e consequentemente  $\{\omega' \in \Sigma_{\mathcal{S}} : \omega'_i = \omega_i \ \forall i \in \Lambda\}$  não são abertos da topologia.  $\diamond$

Um conjunto  $A \subset \Sigma_{\mathcal{S}}$  é dito  $\sigma$ -invariante ou invariante se  $\sigma^{-1}(A) = A$ . Um exemplo típico de conjunto com essa propriedade são as órbitas associadas a um ponto  $\omega \in \Sigma_{\mathcal{S}}$

$$\mathcal{O}_{\sigma}(\omega) := \{\sigma^k(\omega) : k \in \mathcal{L}\}.$$

Alguns problemas possuem modelagens sobre as quais o espaço de configurações apresentado anteriormente pode oferecer mais de um representante para a mesma configuração física ou mesmo a existência de configurações que não são fisicamente possíveis. Nestes casos, reduz-se o espaço de configuração a um subconjunto fechado invariante  $\Sigma'_{\mathcal{S}} \subset \Sigma_{\mathcal{S}}$ . Tal escolha específica garante que o novo espaço de configurações seja condizente com a dinâmica de *shift* apresentada anteriormente e ao par  $(\Sigma'_{\mathcal{S}}, \sigma|_{\Sigma'_{\mathcal{S}}})$  é dada a denominação de espaço de *shift*. Uma classe de particular importância para os modelos estudados é apresentada a seguir.

**Definição 1.2.3.** Considere uma coletânea finita  $\mathcal{P} \subset \bigcup_{k=2}^{\infty} \mathcal{S}^k$  tida como um conjunto de palavras permitidas. Denominamos de *subshift* de tipo de finito (referentes a exclusões do tipo caroço duro em termos da mecânica estatística) o espaço de *shift*  $(\Sigma^{\mathcal{P}}_{\mathcal{S}}, \sigma|_{\Sigma^{\mathcal{P}}_{\mathcal{S}}})$  onde

$$\Sigma^{\mathcal{P}}_{\mathcal{S}} := \{\omega \in \Sigma_{\mathcal{S}} : \forall n \in \mathcal{L}, \exists k \in \mathcal{L}, \text{ com } \sigma^n(\omega)|_{\Lambda_k} \in \mathcal{P}\}.$$

**Notação 1.2.2.** A condição de invariância e fechamento para um espaço de *shift* permitirá que  $\Sigma'_{\mathcal{S}}$  goze das mesmas propriedades topológicas, mensuráveis e dinâmicas que o *shift* completo. Assim, por um abuso de notação, trataremos indistintamente o *shift* completo, um espaço de *shift* e um *subshift* de tipo de finito por  $(\Sigma_{\mathcal{S}}, \sigma)$ .

### 1.3 Observáveis

O termo observável deriva da noção física de relatar uma certa informação para cada uma das possíveis configurações do sistema em termos quantitativos. Em termos físicos, está intimamente relacionado com uma resposta obtida devido à realização de um experimento sobre o sistema.

**Definição 1.3.1.** Uma função  $f : \Sigma_{\mathcal{S}} \rightarrow \mathbb{R}$  é dita um observável de  $\Sigma_{\mathcal{S}}$  se é limitada e mensurável com respeito a  $\sigma$ -álgebra de Borel  $\mathcal{B}^{\mathcal{L}}$ .

**Exemplo 1.3.1.** Qualquer função contínua em  $\Sigma_{\mathcal{S}}$  é limitada, devido à compacidade, e mensurável, pois trata-se da  $\sigma$ -álgebra de Borel, logo é um observável.  $\diamond$

O conjunto dos observáveis de  $\Sigma_{\mathcal{S}}$  é indicado por  $B(\Sigma_{\mathcal{S}})$  e o conjunto dos observáveis contínuos é denotado por  $C(\Sigma_{\mathcal{S}})$ . Ambos são espaços de Banach, para as operações de soma ponto a ponto e multiplicação por escalar real, munidos pela norma uniforme  $\|f\|_{\infty} = \sup_{\omega \in \Sigma_{\mathcal{S}}} |f(\omega)|$ .

**Exemplo 1.3.2.** *Observável de campo externo:* Para os espaços de *shift* apresentados nos exemplos 1.2.2 e 1.2.3, seja  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  o produto interno usual, onde  $d = 2$  para  $\mathcal{S} = \mathbb{U}_n$  e  $d = n + 1$  para  $\mathcal{S} = \mathbb{S}^n$ . Um campo externo  $h \in \mathbb{R}^d$  agindo sobre um dado sítio  $i \in \mathcal{L}$  é dado por

$$\langle \cdot, h \rangle_{\{i\}}(\omega) := \langle \omega_i, h \rangle. \quad (1.3)$$

É fácil ver que se trata de um observável contínuo.  $\diamond$

**Exemplo 1.3.3.** *Observável de interação entre vizinhos mais próximos:* Nos mesmos contextos do exemplo anterior, a seguinte função

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\{i, i+1\}}(\omega) := \langle \omega_i, \omega_{i+1} \rangle \quad (1.4)$$

é um observável contínuo para qualquer sítio  $i \in \mathcal{L}$ .  $\diamond$

Para os observáveis apresentados no exemplo anterior, alterar *spins* de uma configuração sobre sítios em  $\{i, i + 1\}^{\mathbb{G}}$  não modifica o valor da função. Tal particularidade motiva a definição a seguir.

**Definição 1.3.2.** Um observável  $f$  é dito local se depende apenas das entradas  $\omega_i$  com  $i \in \Lambda$  para algum  $\Lambda \in \mathcal{P}_F$ . Equivalentemente,  $f \in B(\Sigma_{\mathcal{S}})$  satisfaz

$$f(\omega) = f(\omega') \text{ sempre que } \omega|_{\Lambda} = \omega'|_{\Lambda}, \text{ para algum } \Lambda \in \mathcal{P}_F,$$

ou seja,  $\sup_{\omega|_{\Lambda} = \omega'|_{\Lambda}} |f(\omega) - f(\omega')| = 0$ .

Outra forma de caracterizar esta propriedade é a partir da mensurabilidade sobre sub- $\sigma$ -álgebras locais.

**Definição 1.3.3.** Dado  $\Lambda \subset \mathcal{L}$ , definimos  $\mathcal{B}^{\Lambda}$  como a sub- $\sigma$ -álgebra de  $\mathcal{B}^{\mathcal{L}}$  gerada pelos cilindros  $[\omega]_{\Lambda', \varepsilon}$  para  $\Lambda' \subset \Lambda$  e  $\varepsilon > 0$ . Quando  $\Lambda \in \mathcal{P}_F$ ,  $\mathcal{B}^{\Lambda}$  é dita ser uma sub- $\sigma$ -álgebra local.

**Proposição 1.3.1.** *Um observável  $f$  é local em  $\Lambda \in \mathcal{P}_F$  se, e somente se,  $f$  é  $\mathcal{B}^{\Lambda}$ -mensurável.*

*Demonstração.* ( $\Rightarrow$ ). Para  $A$  aberto em  $\mathbb{R}$ , suponha, sem perda de generalidade, que  $f^{-1}(A) = [\omega]_{\Lambda', \varepsilon}$  para algum  $\Lambda' \in \mathcal{P}_F$  tal que  $\Lambda' \cap \Lambda^{\mathfrak{c}} \neq \emptyset$ . A hipótese local implica que  $f([\omega]_{\Lambda' \cap \Lambda, \varepsilon}) \subset A$  e portanto teríamos a seguinte contradição:  $[\omega]_{\Lambda' \cap \Lambda, \varepsilon} \subset f^{-1}(A) = [\omega]_{\Lambda', \varepsilon}$ .

( $\Leftarrow$ ). Suponha que existam configurações  $\omega$  e  $\omega' \in \Sigma_S$  satisfazendo  $\omega|_{\Lambda} = \omega'|_{\Lambda}$  com  $f(\omega) \neq f(\omega')$ . Dado  $\varepsilon < |f(\omega) - f(\omega')|$ , considere o intervalo  $I = (f(\omega) - \varepsilon, f(\omega) + \varepsilon)$ , o qual é mensurável em  $\mathbb{R}$ . Da hipótese  $\mathcal{B}^{\Lambda}$ -mensurável para o observável  $f$  obtemos, sem perda de generalidade, que  $f^{-1}(I) = [\omega]_{\Lambda', \varepsilon}$  para algum  $\Lambda' \subset \Lambda$ . Em particular,  $\omega' \in [\omega]_{\Lambda', \varepsilon}$  e conseqüentemente  $|f(\omega') - f(\omega)| < \varepsilon$ , o que é uma contradição.  $\square$

Indicam-se o subespaço dos observáveis locais (contínuos) em  $\Lambda \in \mathcal{P}_F$  e o subespaço de todos os observáveis locais (contínuos), respectivamente, por

$$B_{\Lambda}(\Sigma_S) := \{f \in B(\Sigma_S) : f \text{ é } \mathcal{B}^{\Lambda}\text{-mensurável}\} \quad e \quad B_{loc}(\Sigma_S) := \bigcup_{\Lambda \in \mathcal{P}_F} B_{\Lambda}(\Sigma_S);$$

$$C_{\Lambda}(\Sigma_S) := \{f \in C(\Sigma_S) : f \text{ é } \mathcal{B}^{\Lambda}\text{-mensurável}\} \quad e \quad C_{loc}(\Sigma_S) := \bigcup_{\Lambda \in \mathcal{P}_F} C_{\Lambda}(\Sigma_S).$$

Em oposição à noção anterior, apresentamos o seguinte observável.

**Exemplo 1.3.4.** *Observável não local:* Para o *shift* completo unilateral (ver exemplo 1.2.1), considere uma configuração  $\omega' \in \Sigma_S$  e defina o observável contínuo  $d_{\Sigma_S}(\cdot, \omega')$ . Verifica-se que, para todo  $\Lambda \in \mathcal{P}_F$  e para algum  $i \in \Lambda^{\mathfrak{c}}$ ,

$$0 = d_{\Sigma_S}(\omega', \omega') < d_{\Sigma_S}(\omega, \omega') = \frac{1}{2^i},$$

para qualquer configuração  $\omega \in \Sigma_S$  que difere de  $\omega'$  apenas no sítio  $i$ . Isto contradiz a propriedade local, pois sempre é possível achar duas configurações que coincidem localmente e cujos valores dados pelo observável diferem.  $\diamond$

No caso contínuo, tal oposição pode ser ignorada devido à seguinte proposição.

**Proposição 1.3.2.** *Os observáveis locais contínuos são densos entre os observáveis contínuos, isto é,  $\overline{C_{loc}(\Sigma_S)} = C(\Sigma_S)$ . Em particular,  $f \in C(\Sigma_S)$  se, e somente se,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\omega|_{\Lambda_n} = \omega'|_{\Lambda_n}} |f(\omega) - f(\omega')| = 0. \quad (1.5)$$

*Demonstração.* Fixe uma configuração  $\bar{\omega} \in \Sigma_S$ . Considere os observáveis locais  $\{f_{\Lambda_n, \bar{\omega}}\}_{n \in \mathbb{N}}$  dados pelo “truncamento” do observável de  $f$  em  $\Lambda_n$ , isto é,  $f_{\Lambda_n, \bar{\omega}}(\omega) := f(\omega_{\Lambda_n} \bar{\omega}_{\Lambda_n^{\mathfrak{c}}})$  para todo  $\omega \in \Sigma_S$ . Tais observáveis são locais e contínuos, já que são restrições de  $f$  aos subconjuntos  $\{\omega' \in \Sigma_S : \omega'|_{\Lambda_n^{\mathfrak{c}}} = \bar{\omega}|_{\Lambda_n^{\mathfrak{c}}}\}$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Devido à continuidade de  $f$ , temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f(\omega) - f_{\Lambda_n, \bar{\omega}}(\omega)\|_{\infty} = 0,$$

donde obtemos a densidade de  $C_{loc}(\Sigma_S)$  sobre  $C(\Sigma_S)$ .

Note que a relação acima vale para qualquer  $\tilde{\omega} \in \Sigma_S$ . Desta forma, a equação (1.5) segue direto da seguinte relação

$$\sup_{\tilde{\omega} \in \Sigma_S} \|f(\omega) - f_{\Lambda_n, \tilde{\omega}}(\omega)\|_\infty = \sup_{\omega|_{\Lambda_n} = \omega'|_{\Lambda_n}} |f(\omega) - f(\omega')|.$$

□

**Observação 1.3.1.** No caso em que o conjunto de *spins* não é compacto, define-se o espaço das funções quase-locais por  $C_{ql}(\Sigma_S) := \overline{C_{loc}(\Sigma_S)}$ , que é equivalente ao conjunto de funções que satisfazem a equação (1.5). Atentamos ao fato de que, em geral, quase-localidade não é equivalente a continuidade e que a equivalência obtida na proposição 1.3.2 está intrinsecamente relacionada à compacidade do espaço.

A definição a seguir introduz outra classe muito importante de observáveis.

**Definição 1.3.4.** Um observável  $f$  é dito global ou macroscópico se alterações nas entradas  $\omega_i$  com  $i \in \Lambda$ , para todo  $\Lambda \in \mathcal{P}_F$ , não alteram o resultado da observação. Equivalentemente,  $f \in B(\Sigma_S)$  cumpre

$$f(\omega) = f(\omega') \text{ sempre que } \omega|_{\Lambda^c} = \omega'|_{\Lambda^c}, \text{ para todo } \Lambda \in \mathcal{P}_F.$$

Analogamente à proposição 1.3.1, temos o seguinte resultado.

**Proposição 1.3.3.** *Um observável  $f$  é global se, e somente se,  $f$  é mensurável para a  $\sigma$ -álgebra*

$$\mathcal{B}^\infty := \bigcap_{\Lambda \in \mathcal{P}_F} \mathcal{B}^{\Lambda^c},$$

a qual é denominada de  $\sigma$ -álgebra caudal.

O espaço dos observáveis globais (contínuos), denotado  $B_\infty(\Sigma_S)$  ( $C_\infty(\Sigma_S)$ ), representa a coletânea de inspeções sobre sistema para as quais configurações distintas por um conjunto finito de sítios são indistinguíveis. Isto significa intuitivamente que, para um determinado experimento, alterações em uma parcela finita de partículas do reticulado não são perceptíveis.

A dinâmica de *shift* atua de maneira semelhante, definindo observáveis que não distinguem uma configuração  $\omega \in \Sigma_S$  de qualquer elemento de sua órbita  $\mathcal{O}_\sigma(\omega)$ .

**Definição 1.3.5.** Um observável é dito  $\sigma$ -invariante ou invariante por translação se  $f \circ \sigma = f$ . O espaço dos observáveis  $\sigma$ -invariantes é indicado por  $B_\sigma(\Sigma_S)$ .

Relembramos que um conjunto  $A$  é invariante se satisfaz  $\sigma^{-1}(A) = A$ . Desta forma, tais funções caracterizam-se por serem mesuráveis para a coletânea de todos os borelianos invariantes

$$\mathcal{B}^\sigma := \{A \in \mathcal{B}^\mathcal{L} : \sigma^{-1}(A) = A\},$$

a qual é uma sub- $\sigma$ -álgebra de  $\mathcal{B}^\mathcal{L}$ . Investigaremos como se relacionam as sub- $\sigma$ -álgebras  $\mathcal{B}^\infty$  e  $\mathcal{B}^\sigma$  na proposição 1.4.2 da próxima seção.

**Exemplo 1.3.5.** *Média macroscópica ou média de Birkhoff:* Dado um observável de  $\Sigma_S$ , a média de Birkhoff associada é definida por

$$\hat{f}(\omega) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\Lambda_n|} \sum_{i \in \Lambda_n} f \circ \sigma^i(\omega)$$

quando tal limite existe. Veremos condições para existência destes limites e para a  $\sigma$ -invariância de tal observável na próxima seção.  $\diamond$

## 1.4 Estados

As peças fundamentais para teoria a ser desenvolvida são os estados associados a  $\Sigma_S$ , os quais carregam toda a informação necessária para caracterização do fenômeno de equilíbrio. Nesta seção, discutiremos apenas a natureza desta estrutura e propriedades relevantes, adiando para o próximo capítulo a caracterização dos estados de equilíbrio e de Gibbs no contexto dos sistemas de *spins* unidimensionais.

**Definição 1.4.1.** Um estado em  $\Sigma_S$  é uma medida de probabilidade  $\mu$  para espaço mensurável  $(\Sigma_S, \mathcal{B}^\mathcal{L})$ . Denotaremos por  $\mathcal{P}(\Sigma_S)$  o conjunto dos estados para  $\Sigma_S$ .

Por meio da integração, um estado  $\mu$  age linearmente sobre um observável  $f$ :

$$\langle f \rangle_\mu := \int_{\Sigma_S} f d\mu.$$

Note que todo observável  $f$  é integrável, já que por definição  $f$  é limitado. Consequentemente,  $f \in L^p$  para todo  $p \geq 1$ .

**Notação 1.4.1.** Quando não houver especificação com respeito ao conjunto sobre o qual se está integrando, ficará subentendido que a integral é realizada sobre todo espaço de configurações, ou seja,  $\int f d\mu := \int_{\Sigma_S} f d\mu$ .

**Exemplo 1.4.1.** *Estado de Bernoulli:* Dada uma medida de probabilidade  $\mu_{\mathcal{S}}$  sobre  $(\mathcal{S}, \mathcal{B})$ , define-se (ver resultado A.0.10 do apêndice A) o estado  $\mu_{\Sigma_{\mathcal{S}}}$ , denominado de Bernoulli, colocando

$$\mu_{\Sigma_{\mathcal{S}}}(E_{i_1} \times \dots \times E_{i_k}) = \prod_{j=1}^k \mu_{\mathcal{S}}(E_{i_j}), \quad \forall k > 0,$$

onde  $E_{i_j} \in \mathcal{B}$  para todo  $1 \leq j \leq k$  e  $\{i_1, \dots, i_k\} \in \mathcal{P}_F$ .  $\diamond$

**Exemplo 1.4.2.** *Estado de Markov ou cadeia de Markov:* Considere o *shift* completo sobre um conjunto de *spins* finito (veja o exemplo 1.2.2). Dada uma matriz  $P = (P(x, y))_{x, y \in \mathcal{S}}$  positiva e estocástica, ou seja, que satisfaz, respectivamente,

$$P(x, y) > 0, \quad \forall x, y \in \mathcal{S} \quad \text{e} \quad \sum_{x \in \mathcal{S}} P(x, y) = 1 = \sum_{y \in \mathcal{S}} P(x, y),$$

para quaisquer configuração  $\omega \in \Sigma_{\mathcal{S}}$  e inteiros positivos  $m < n$ , o estado de Markov associado a tal matriz é definido sobre os cilindros  $[\omega]_{[m, n]}$  por

$$\mu_P([\omega]_{[m, n]}) := (\vec{r}_P)_{\omega_m} P(\omega_m, \omega_{m+1}) P(\omega_{m+1}, \omega_{m+2}) \cdots P(\omega_{n-2}, \omega_{n-1}),$$

onde  $\vec{r}_P$  é autovetor positivo à direita associado ao autovalor unitário da matriz  $P$  (isto é,  $\vec{r}_P P = \vec{r}_P$ ), normalizado por  $\sum_{x \in \mathcal{S}} (\vec{r}_P)_x = 1$ , cuja existência é garantida pelo Teorema de Perron-Frobenius (veja A.0.16).  $\diamond$

**Observação 1.4.1.** O conceito de cadeia de Markov pode ser introduzido também para o contexto compacto, sendo essencial para teoria de processos estocásticos. Aqui nos restringimos ao caso particular de conjunto de *spins* finito devido aos resultados que obteremos na seção 2.1 do próximo capítulo.

O fato de os estados serem probabilidades borelianas sobre um espaço compacto permite-nos caracterizá-los facilmente por sua ação sobre as funções contínuas.

**Teorema 1.4.1.** *Sejam  $\mu_1$  e  $\mu_2$  estados em  $\Sigma_{\mathcal{S}}$ . Se*

$$\langle f \rangle_{\mu_1} = \int f d\mu_1 = \int f d\mu_2 = \langle f \rangle_{\mu_2}, \quad \text{para todo } f \in C(\Sigma_{\mathcal{S}}),$$

então  $\mu_1 = \mu_2$ .

Além disso, a compacidade do espaço  $\Sigma_{\mathcal{S}}$  torna toda medida finita para  $\sigma$ -álgebra de Borel  $\mathcal{B}^{\mathcal{S}}$  em uma medida de Radon (ver A.0.8). Devido ao Teorema de Representação de Riesz (ver A.0.9), o conjunto das medidas de Radon para  $(\Sigma_{\mathcal{S}}, \mathcal{B}^{\mathcal{S}})$ , denotado por  $\mathcal{M}(\Sigma_{\mathcal{S}})$ , é isometricamente isomorfo ao conjunto dos funcionais lineares limitados sobre  $C(\Sigma_{\mathcal{S}})$ .

Desta forma, temos uma identificação dual entre o espaço de medidas  $\mathcal{M}(\Sigma_S)$  e o espaço de observáveis  $C(\Sigma_S)$ , que possibilita munir o conjunto de estados  $\mathcal{P}(\Sigma_S)$  da topologia fraca\*, cujos abertos básicos são

$$[\mu]_{f,\varepsilon} := \left\{ \mu' \in \mathcal{P}(\Sigma_S) : \left| \langle f \rangle_\mu - \langle f \rangle_{\mu'} \right| < \varepsilon \right\},$$

sendo a convergência descrita por

$$\mu_n \longrightarrow \mu \quad \text{se} \quad \langle f \rangle_{\mu_n} \longrightarrow \langle f \rangle_\mu, \quad \forall f \in C(\Sigma_S).$$

Assinalamos o seguinte resultado, que é uma consequência do Teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki (ver A.0.15) e cuja prova pode ser encontrada nas referências [9, 24, 56].

**Proposição 1.4.1.**  $\mathcal{P}(\Sigma_S)$  herda a compacidade de  $\mathcal{S}$ .

**Observação 1.4.2.** Em contextos mais abstratos, como sistemas de *spins* quânticos, um estado é um funcional linear sobre uma  $C^*$ -álgebra de observáveis, o qual é contínuo, positivo e tem norma 1. Para mais detalhes, consulte [47, 28].

De um ponto de vista probabilista,  $\Sigma_S$  munido de um estado  $\mu$  é um espaço de probabilidade. Por sua vez, os conjuntos mensuráveis estão relacionados com os eventos deste espaço. Os conjuntos de  $\mathcal{B}^\infty$  caracterizam os eventos que podem ser analisados macroscopicamente, assim é importante destacar os estados com comportamento determinístico sobre tais eventos.

**Definição 1.4.2.** Um estado  $\mu$  é dito macroscópico se é trivial para  $\sigma$ -álgebra caudal  $\mathcal{B}_\infty$ , isto é, se para qualquer conjunto  $A \in \mathcal{B}_\infty$  vale

$$\mu(A) = 1 \quad \text{ou} \quad \mu(A) = 0. \quad (1.6)$$

**Observação 1.4.3.** Outra forma equivalente de caracterizar o fenômeno acima é através da propriedade de *cluster* para o estado  $\mu$ , ou melhor,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{B \in \mathcal{B}_n^c} |\mu(A \cap B) - \mu(A)\mu(B)| = 0, \quad \forall A \in \mathcal{B}^\mathcal{L}. \quad (1.7)$$

O significado da fórmula acima é que os eventos possuem correlação de curto alcance, isto é, eventos “espacialmente distantes” são assintoticamente independentes.

Aproveitando-se da possível influência que a dinâmica do *shift* pode ter sobre os estados, consideramos também sobre estes a noção de invariância.

**Definição 1.4.3.** Um estado  $\mu$  é dito  $\sigma$ -invariante se  $\mu(\sigma^{-1}(A)) = \mu(A)$  para todo  $A \in \mathcal{B}^{\mathcal{L}}$ , ou equivalentemente se

$$\int f \circ \sigma d\mu = \int f d\mu, \quad \text{para todo } f \in C(\Sigma_S).$$

Além disso, um estado  $\sigma$ -invariante é dito ergódico se é trivial sobre a  $\sigma$ -álgebra dos conjuntos invariantes  $\mathcal{B}_\sigma$ , isto é, se para qualquer conjunto  $A \in \mathcal{B}_\sigma$  vale

$$\mu(A) = 1 \quad \text{ou} \quad \mu(A) = 0.$$

Denotam-se, respectivamente, por  $\mathcal{P}^\infty(\Sigma_S)$ ,  $\mathcal{P}_\sigma(\Sigma_S)$  e  $\mathcal{Erg}(\Sigma_S)$  o conjunto dos estados macroscópicos, dos estados  $\sigma$ -invariantes e dos estados ergódicos. Não é uma tarefa fácil obter relações entre os conjuntos  $\mathcal{P}^\infty(\Sigma_S)$  e  $\mathcal{Erg}(\Sigma_S)$ , apesar da semelhança entre suas definições. Neste intuito, considerar o conjunto dos estados macroscópicos  $\sigma$ -invariantes, denotado por  $\mathcal{P}_\sigma^\infty(\Sigma_S) := \mathcal{P}^\infty(\Sigma_S) \cap \mathcal{P}_\sigma(\Sigma_S)$ , é mais adequado.

**Proposição 1.4.2.** Para qualquer  $\mu \in \mathcal{P}_\sigma(\Sigma_S)$ , a inclusão  $\mathcal{B}^\sigma \subset \mathcal{B}^\infty$  é válida  $\mu$ -q.t.p., isto é, para cada  $A \in \mathcal{B}^\sigma$  existe  $B \in \mathcal{B}^\infty$  tal que

$$\mu(A \Delta B) = 0.$$

Assim,  $\mathcal{P}_\sigma^\infty(\Sigma_S) \subset \mathcal{Erg}(\Sigma_S)$ , já que todo estado macroscópico  $\sigma$ -invariante é ergódico.

*Demonstração.* Seja  $A$  um conjunto invariante. Segue do corolário A.0.5, no apêndice A, que existe uma sequência de cilindros  $\{C_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \text{Cil}(\Sigma_S)$  tal que  $\mu(A \Delta C_n) \leq 2^{-n}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Devido às invariâncias do estado  $\mu$  e do conjunto  $A$ , obtemos que

$$\mu(A \Delta \sigma^{-i}(C_n)) = \mu(\sigma^{-i}(A) \Delta \sigma^{-i}(C_n)) = \mu(A \Delta C_n) \leq 2^{-n} \quad (1.8)$$

para todo  $i \in \mathbb{N}$ .

Como  $C_n$  é um cilindro, temos que existe  $i(n) \in \mathbb{N}$  tal que  $C_n \in \mathcal{B}^{\Lambda_{i(n)}}$ . Além disso, como  $\Lambda_{i(n)} \cap (\Lambda_{i(n)} + 2i(n)) = \emptyset$ , temos  $\sigma^{2i(n)}(C_n) \in \mathcal{B}^{\Lambda_{i(n)} + 2i(n)} \subset \mathcal{B}^{\Lambda_{i(n)}^c}$ . Devido a estes fatos, o conjunto  $B := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq k} \sigma^{2i(n)}(C_n) \in \mathcal{B}^\infty$  e, devido à desigualdade (1.8), este satisfaz

$$\mu(A \Delta B) = \mu\left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq k} (A \Delta \sigma^{i(n)}(C_n))\right) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n \geq k} \frac{1}{2^n} = 0.$$

□

O conjunto dos estados macroscópicos  $\mathcal{P}^\infty(\Sigma_S)$  não possui propriedades estruturais muito marcantes além das citadas anteriormente. Por outro lado, dedicamos a continuação desta seção a uma coletânea de resultados para os estados  $\sigma$ -invariantes e ergódicos. Tais fatos em conjunto com a proposição 1.4.2 explicam uma predileção por se trabalhar no contexto invariante e ergódico, como veremos na seção 2.3.

**Proposição 1.4.3.**

(i) (Krylov-Bogoliubov) Dada uma sequência de estados  $\{m_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\Sigma_S)$ , qualquer ponto de acumulação para a sequência  $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  definida por

$$\mu_n(A) := \frac{1}{|\Lambda_n|} \sum_{i \in \Lambda_n} m_n(\sigma^{-i}(A)), \text{ para todo } A \in \mathcal{B}^{\mathcal{L}},$$

é um estado  $\sigma$ -invariante. A compacidade de  $\Sigma_S$  garante então que  $\mathcal{P}_\sigma(\Sigma_S)$  é não vazio.

(ii) O conjunto dos estados  $\sigma$ -invariantes  $\mathcal{P}_\sigma(\Sigma_S)$  é um compacto convexo de  $\mathcal{M}(\Sigma_S)$ .

Um dos resultados clássicos mais importantes, o qual garante a existência dos observáveis macroscópicos do exemplo 1.3.5, é enunciado a seguir. Sua demonstração pode ser obtida nas referências [57, 44].

**Teorema 1.4.2** (Teorema Ergódico de Birkhoff). *Sejam  $f$  um observável e  $\mu$  um estado  $\sigma$ -invariante. Então*

$$\hat{f}(\omega) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\Lambda_n|} \sum_{i \in \Lambda_n} f \circ \sigma^i(\omega) \quad \text{existe } \mu\text{-q.t.p. } \omega \quad e$$

$$\int_A \hat{f} d\mu = \int_A f d\mu \quad \text{para todo } A \in \mathcal{B}_\sigma, \quad (1.9)$$

sendo  $\hat{f}$  uma versão da  $\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_\sigma)$ . Quando  $\mu$  é um estado ergódico, então

$$\hat{f} \equiv \int f d\mu.$$

Estendendo o teorema anterior, registra-se o seguinte resultado:

**Teorema 1.4.3** (Teorema Ergódico Subaditivo de Kingman). *Seja uma família de observáveis  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  que satisfaz a propriedade subaditiva, isto é,*

$$f_{n+m} \leq f_n + f_m \circ \sigma^n \quad \text{para todo } n, m \in \mathbb{N}.$$

Considere  $\mu$  um estado  $\sigma$ -invariante. Então

$$\hat{f}(\omega) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} f_n(\omega) \quad \text{existe } \mu\text{-q.t.p. } \omega \quad e$$

$$\int \hat{f} d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int f_n d\mu = \inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n} \int f_n d\mu. \quad (1.10)$$

Além disso, se  $\mu$  é um estado ergódico, então

$$\hat{f} \equiv \inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n} \int f_n d\mu.$$

**Observação 1.4.4.** Apresentamos apenas dois dentre vários teoremas de convergência, denominados de teoremas ergódicos, os quais supõem hipótese de invariância ou ergodicidade.

O Teorema Ergódico de Birkhoff foi originalmente apresentado no artigo [7], para equações diferenciáveis em variedades. Indicamos [32, 36] para extensões de tal teorema em contextos mais abrangente do que o apresentado nesta dissertação, por exemplo, para o caso de ações de  $\mathbb{Z}^d$  e de grupos mais gerais.

Já o Teorema Ergódico Subaditivo, primeiramente demonstrado por Kingman em [33], possui diferentes argumentos e demonstrações. Por exemplo, para um ponto de vista estocástico, veja [35]. Para uma perspectiva dinamicista, na qual nos baseamos, consulte [1, 53, 41]. Neste último contexto, atentamos para uma importante hipótese do Teorema Subaditivo de Kingman, que não foi enunciada:  $f_1^+ := \max\{0, f_1\}$  deve ser integrável. Como já foi afirmado, todo observável pertence a  $L^p$  para  $p \geq 1$ , o que implica que tal hipótese é trivialmente satisfeita no nosso caso.

Sobre os estados ergódicos, destacamos a próxima proposição.

**Proposição 1.4.4.** *São equivalentes:*

- (i)  $\mu$  é um estado ergódico;
- (ii)  $\mu$  satisfaz a propriedade

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\Lambda_n|} \sum_{i \in \Lambda_n} \mu(\sigma^{-1}(A) \cup B) = \mu(A)\mu(B), \quad \forall A, B \in \mathcal{B}^{\mathcal{L}}; \quad (1.11)$$

- (iii)  $\mu$  é um ponto extremal de  $\mathcal{P}_\sigma(\Sigma_S)$ .

Ademais, se  $\mu_1$  e  $\mu_2$  são estados ergódicos, então ou  $\mu_1 = \mu_2$  ou são mutuamente singulares.

Atentamos para a semelhança entre o item (ii) acima e a propriedade de *cluster* para estados macroscópicos, dada pela condição (1.7) da observação 1.4.3. Neste caso, contudo, são os eventos  $\sigma^{-i}(A)$  que se tornam, em média, assintoticamente independentes de qualquer evento  $B$ .

Outro fato importante, relativo ao item (iii) e à última asserção da proposição anterior, está associado a uma representação geométrica para o conjunto convexo  $\mathcal{P}_\sigma(\Sigma_S)$  a partir de seus pontos extremais, ou seja, com o emprego dos estados ergódicos. O teorema que se segue é um caso particular do clássico Teorema de Representação de Choquet (ver A.0.11 no apêndice A) sobre o convexo compacto  $\mathcal{P}_\sigma(\Sigma_S)$ .

**Teorema 1.4.4** (Teorema de Decomposição Ergódica). *Para cada estado  $\sigma$ -invariante  $\mu$ , existe uma única medida de Borel  $\eta$  sobre o espaço  $\mathcal{P}_\sigma(\Sigma_S)$  tal que*

$$\eta(\text{Erg}(\Sigma_S)) = 1 \quad e$$

$$\mu(f) = \int f d\mu = \int_{\text{Erg}(\Sigma_S)} \left( \int f dm \right) d\eta(m).$$

Toda a discussão anterior decorre do intuito de se guardar certa imparcialidade quanto à imposição de um estado ao sistema, já que os problemas a serem considerados resumem-se a buscar estados com propriedades específicas sobre os subconjuntos apresentados. Por maior empenho que se tenha, a noção de um estado subjacente ao sistema é mais natural do que se imagina e estará presente principalmente no segundo capítulo deste trabalho.

**Definição 1.4.4.** O estado básico é dado pelo estado de Bernoulli  $\nu := \nu_{\Sigma_S}$  (ver exemplo 1.4.1) para a probabilidade de Haar sobre os borelianos de  $\mathcal{S}$ , isto é, para a medida de referência  $\nu_S$ .

**Observação 1.4.5.** Mais geralmente, existem outros estados (além do estado básico) para os quais resultados subsequentes continuarão válidos. São exemplos os próprios estados de Gibbs e de equilíbrio que serão definidos no próximo capítulo.

## 1.5 Interação e Potencial

A noção de energia de um sistema para uma dada configuração é um conceito normativo em física, essencial para construção e análise dos modelos matemáticos associados. No caso de volume finito, vimos, na Introdução, que a energia é representada pelo hamiltoniano do sistema. Para a mecânica estatística de volume infinito, ficará claro que não é factível discutir tal noção simplesmente como uma função sobre o espaço de configurações. Na verdade, torna-se fundamental considerar hamiltonianos associados às parcelas finitas do reticulado  $\mathcal{L}$ , examinando assim o conceito de energia no nível de partículas e suas interações entre si.

**Notação 1.5.1.** Convencionamos, nesta seção, que  $X, Y$  e  $\Lambda$  indicam subconjuntos finitos de  $\mathcal{L}$ , isto é,  $X, Y, \Lambda \in \mathcal{P}_F$ .

**Definição 1.5.1.** Seja  $\Sigma_S$  um espaço de configurações.

- (i) Uma interação é dada por uma família de funções  $\Phi = \{\Phi_X : \Sigma_S \rightarrow \mathbb{R}\}_{X \in \mathcal{P}_F}$  tal que cada  $\Phi_X$  é um observável local em  $X$ .
- (ii) Um potencial é dado por uma família de observáveis  $\Psi = \{\Psi_n : \Sigma_S \rightarrow \mathbb{R}\}_{n \in \mathcal{L}}$ .

Em particular, uma interação ou um potencial é dito contínuo (Lipschitz ou Hölder contínuo) se cada um dos observáveis da respectiva família é contínuo (Lipschitz ou Hölder contínuo).

**Notação 1.5.2.** Por uma questão de concisão e para evitar equívocos, as interações sempre serão denotadas por  $\Phi$  e os potenciais, por  $\Psi$ .

A diferença conceitual na definição anterior consiste no fato de que uma interação investiga, para cada coletânea finita de sítios  $\Lambda$ , o comportamento de interação entre estes sítios isoladamente, ou seja, a energia de cada subsistema de *spins* de volume finito independente do exterior  $\Lambda^c$  de uma dada configuração. Por outro lado, um potencial informa como um dado sítio  $i \in \mathcal{L}$  interage com todos os outros sítios do sistema de *spins*, isto é, qual a contribuição à energia deste sítio para uma configuração do sistema.

**Observação 1.5.1.** Classicamente, um potencial é definido somente por um observável  $\psi : \Sigma_{\mathcal{S}} \rightarrow \mathbb{R}$  que representa a contribuição da origem ( $0 \in \mathcal{L}$ ) para energia do sistema. Veremos no exemplo 1.5.11 que esta noção concorda com o caso  $\sigma$ -invariante da definição 1.5.1, para a qual é possível recuperar um potencial  $\Psi = \{\Psi_n\}_{n \in \mathcal{L}}$  somente conhecendo o observável  $\Psi_0$ .

Lembre-se que as interações já foram apresentadas na introdução para o caso de volume finito. Neste contexto, obtém-se que todo hamiltoniano pode ser escrito em termos de uma interação. Motivado por tal decomposição, partimos de uma interação e procedemos de modo a recuperar, para cada parcela finita de partículas, um hamiltoniano associado. Para isto, será necessário impor uma condição de regularidade.

**Definição 1.5.2.** É dita absolutamente somável uma interação  $\Phi$  que satisfaz

$$\sup_{i \in \mathcal{L}} \sum_{X \ni i} \|\Phi_X\|_{\infty} < \infty.$$

Denota-se o conjunto de todas as interações absolutamente somáveis por  $\mathcal{B}(\Sigma_{\mathcal{S}})$ .

Não é difícil perceber que  $\mathcal{B}(\Sigma_{\mathcal{S}})$  é um espaço vetorial, cuja soma de interações é dada pela soma de cada observável em seus respectivos índices, e a multiplicação por escalar, pela multiplicação de cada observável.

**Exemplo 1.5.1.** *Hamiltonianos de uma interação:* Seja  $\Phi$  uma interação absolutamente somável. A família de hamiltonianos  $\{\mathcal{H}_{\Lambda}^{Int}\}_{\Lambda \in \mathcal{P}_F}$  proveniente desta é dada por

$$\mathcal{H}_{\Lambda}^{Int}(\omega) := \sum_{X \cap \Lambda \neq \emptyset} \Phi_X(\omega),$$

para cada  $\Lambda \in \mathcal{P}_F$ . Temos a seguinte decomposição  $\mathcal{H}_\Lambda^{Int} = \mathcal{H}_{\Lambda^\circ}^{Int} + \mathcal{H}_{\partial\Lambda}^{Int}$ , onde

$$\mathcal{H}_{\Lambda^\circ}^{Int} := \sum_{X \subset \Lambda} \Phi_X(\omega) \quad \text{e} \quad \mathcal{H}_{\partial\Lambda}^{Int} := \sum_{\substack{X \cap \Lambda \neq \emptyset \\ X \cap \Lambda^c \neq \emptyset}} \Phi_X(\omega),$$

para cada  $\Lambda \in \mathcal{P}_F$ . Dizemos que  $\mathcal{H}_{\Lambda^\circ}^{Int}$  é parte livre e  $\mathcal{H}_{\partial\Lambda}^{Int}$  é parte de fronteira do hamiltoniano  $\mathcal{H}_\Lambda^{Int}$ .  $\diamond$

**Observação 1.5.2.** Não há dúvida de que os somatórios envolvidos no exemplo anterior estão bem definidos, já que

$$\left\| \sum_{X \cap \Lambda \neq \emptyset} \Phi_X \right\|_\infty \leq \sum_{i \in \Lambda} \sup_{i \in \mathcal{L}} \sum_{X \ni i} \|\Phi_X\|_\infty < \infty.$$

Por este motivo, aqui nos restringiremos a interações pertencentes a  $\mathcal{B}(\Sigma_S)$ , ou seja, sempre que nos reportamos deste ponto em diante à palavra interação, fica subentendido que se trata de uma interação absolutamente somável.

Ainda sobre o hamiltoniano de uma interação, temos a seguinte propriedade.

**Exemplo 1.5.2.** *Comportamento do hamiltoniano de uma interação:* Fixe uma coletânea de sítios  $\Delta \in \mathcal{P}_F$ . Sejam quaisquer configurações  $\omega, \omega' \in \Sigma_S$  que coincidem em  $\Delta^c$ , isto é,  $\omega|_{\Delta^c} = \omega'|_{\Delta^c}$ . Considere uma interação  $\Phi$ . A propriedade local de  $\Phi_X$  obriga  $\Phi_X(\omega) - \Phi_X(\omega') = 0$  sempre que  $X \cap \Delta = \emptyset$ . Assim, temos que, para todo  $\Lambda \supset \Delta$ ,

$$\mathcal{H}_\Lambda^{Int}(\omega') - \mathcal{H}_\Lambda^{Int}(\omega) = \sum_{X \cap \Delta \neq \emptyset} \Phi_X(\omega') - \Phi_X(\omega) = \mathcal{H}_\Delta^{Int}(\omega') - \mathcal{H}_\Delta^{Int}(\omega). \quad (1.12)$$

$\diamond$

Intuitivamente,  $\mathcal{H}_\Lambda^{Int}(\cdot | \omega_{\Lambda^c})$  representa a energia associada a um subsistema finito, constituído pelas partículas  $i \in \Lambda$ , onde  $\omega_{\Lambda^c}$  é a disposição das partículas  $i \in \Lambda^c$  para algum  $\omega \in \Sigma_S$ . Assim, conhecendo-se a família  $\{\mathcal{H}_\Lambda^{Int}\}_{\Lambda \in \mathcal{P}_F}$ , veremos que será possível descrever, de maneira análoga à da Introdução (veja os exemplos 1.5.13, no final deste capítulo, e 2.1.1, no início do Capítulo 2), o estado de Boltzman-Gibbs associado a cada parcela finita e a cada condição externa. Por sua vez, conhecer tais estados será suficiente para a descrição do primeiro formalismo gibbsiano a ser analisado na seção 2.1.

Para os potenciais, toda a discussão anterior perde significado, devido às diferenças já apresentadas entres os dois conceitos. Apesar disso, a noção de energia de um subsistema finito partindo de um dado potencial permanece.

**Exemplo 1.5.3.** *Hamiltonianos de um potencial:* A família de hamiltonianos  $\{\mathcal{H}_\Lambda^{Pot}\}_{\Lambda \in \mathcal{P}_F}$  associada a um potencial  $\Psi$  é dada por

$$\mathcal{H}_\Lambda^{Pot}(\omega) := \sum_{i \in \Lambda} \Psi_i(\omega),$$

para cada  $\Lambda \in \mathcal{P}_F$ . ◇

Deste modo, os modelos de mecânica estatística para volume infinito se apoiam sobre a noção de energia para as parcelas finitas de  $\mathcal{L}$ , isto é, hamiltonianos associados a  $\Lambda \in \mathcal{P}_F$ .

**Definição 1.5.3.** Seja  $\Sigma_S$  um espaço de configurações. Um hamiltoniano sobre  $\Sigma_S$  é uma família de observáveis  $\mathcal{H} = \{\mathcal{H}_\Lambda\}_{\Lambda \in \mathcal{P}_F}$ . Além disso, o hamiltoniano  $\mathcal{H}$  é dito contínuo se cada um dos  $\mathcal{H}_\Lambda$  é um observável contínuo.

As famílias de funções nos exemplos 1.5.1 e 1.5.3 são formadas por observáveis, sendo a continuidade uma propriedade herdada da interação ou do potencial (no caso das interações, o argumento na observação 1.5.2 também garante convergência uniforme).

**Notação 1.5.3.** Ainda sobre os respectivos exemplos, denotam-se:

- (i) o hamiltoniano de interação por  $\mathcal{H}^{Int} = \{\mathcal{H}_\Lambda^{Int}\}_{\Lambda \in \mathcal{P}_F}$ , o qual possui decomposição em hamiltoniano livre  $\mathcal{H}_\circ^{Int} = \{\mathcal{H}_{\Lambda_\circ}^{Int}\}_{\Lambda \in \mathcal{P}_F}$  e em hamiltoniano de fronteira  $\mathcal{H}_\partial^{Int} = \{\mathcal{H}_{\partial\Lambda}^{Int}\}_{\Lambda \in \mathcal{P}_F}$ ;
- (ii) o hamiltoniano de potencial por  $\mathcal{H}^{Pot} = \{\mathcal{H}_\Lambda^{Pot}\}_{\Lambda \in \mathcal{P}_F}$ .

Estamos aptos a introduzir alguns modelos clássicos da literatura da mecânica estatística, começando por modelos sobre o conjunto de *spins* finito do exemplo 1.2.2.

**Exemplo 1.5.4.** *Modelo Ising com campo externo:* Considere o espaço de *shift*  $\Sigma_{\mathbb{U}_2} = \{(-1, 0), (1, 0)\}^{\mathbb{Z}}$ . Para  $h \in \mathbb{R}$ , os observáveis são dados pelas equações (1.4) (vizinhos mais próximos) e (1.3) (campo externo). A interação  $\{\Phi_\Lambda\}_{\Lambda \in \mathcal{P}_F}$  associada a tal modelo é definida por

$$\begin{aligned} \Phi_\Lambda(\omega) &= \begin{cases} -J, & \text{se } \omega_i = \omega_{i+1} \text{ e } \Lambda = \{i, i+1\} \\ J, & \text{se } \omega_i \neq \omega_{i+1} \text{ e } \Lambda = \{i, i+1\} \\ -h, & \text{se } \omega_i = (1, 0) \text{ e } \Lambda = \{i\} \\ h, & \text{se } \omega_i = (-1, 0) \text{ e } \Lambda = \{i\} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \\ &= \begin{cases} -J \langle \cdot, \cdot \rangle_{\{i, i+1\}}(\omega), & \text{se } \Lambda = \{i, i+1\} \\ -\langle \omega_i, (h, 0) \rangle_{\{i\}}(\omega), & \text{se } \Lambda = \{i\} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \end{aligned}$$

para uma constante  $J \in \mathbb{R}$ , a qual qualifica esta interação da seguinte maneira:

- (i)  $\Phi$  é dita ferromagnética se  $J > 0$ ;  
(ii)  $\Phi$  é dita antiferromagnética se  $J < 0$ .

O modelo da Ising poderá também ser descrito pelo potencial  $\{\Psi_n\}_{n \in \mathcal{L}}$

$$\Psi_n(\omega) = \frac{\Phi_{\{n-1,n\}} + \Phi_{\{n,n+1\}}}{2} + \Phi_{\{n\}}. \quad (1.13)$$

◇

**Observação 1.5.3.** O modelo de Ising é classicamente apresentado para o conjunto de *spins*  $\{-1, 1\}$ , o qual foi aqui identificado com o conjunto  $\mathbb{U}_2$ .

**Exemplo 1.5.5.** *Modelo clock ou modelo Potts com campo externo:* Para o *shift* completo  $\Sigma_{\mathbb{U}_n}$ , sejam  $\vec{h} \in \mathbb{R}^2$  e uma função  $J : \mathbb{U}_n \times \mathbb{U}_n \rightarrow \mathbb{R}$ . Para quaisquer  $x, y \in \mathbb{U}_n \subset \mathbb{R}^2$ , denote por  $\arg(x, y)$  o menor ângulo entre eles. A interação  $\Phi$  deste modelo também leva em consideração os observáveis (1.4) e (1.3), sendo definida por

$$\Phi_\Lambda(\omega) = \begin{cases} -J(\omega_i, \omega_{i+1}) \cos(\arg(\omega_i, \omega_{i+1})), & \text{se } \Lambda = \{i, i+1\} \\ -\|\vec{h}\| \cos\left(\arg\left(\omega_i, \vec{h}\right)\right), & \text{se } \Lambda = \{i\} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -J(\omega|_{\{i,i+1\}} \langle \cdot, \cdot \rangle_{\{i,i+1\}}(\omega), & \text{se } \Lambda = \{i, i+1\} \\ -\langle \cdot, \vec{h} \rangle_{\{i\}}(\omega), & \text{se } \Lambda = \{i\} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Note que a igualdade é obtida devido à identificação (1.1) entre  $\mathbb{U}_n$  e um subconjunto de  $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$ . O potencial que descreve tal modelo também é dada pela equação (1.13).

Em geral a função  $J$  é constante. Assim temos

$$\Phi_\Lambda(\omega) = \begin{cases} -J \langle \cdot, \cdot \rangle_{\{i,i+1\}}(\omega), & \text{se } \Lambda = \{i, i+1\} \\ -\langle \cdot, \vec{h} \rangle_{\{i\}}(\omega), & \text{se } \Lambda = \{i\} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}. \quad (1.14)$$

Perceba que o caso particular  $n = 2$  é exatamente o modelo de Ising (veja o exemplo 1.5.4). ◇

Para os próximos modelos, utiliza-se o espaço de *shift*  $\Sigma_{\mathbb{S}^d}$ .

**Exemplo 1.5.6.** *Modelo XY com campo externo:* Fixando  $d = 2$ , sejam  $\vec{h} \in \mathbb{R}^2$  e  $J \in \mathbb{R}$ . Considere então a interação

$$\Phi_\Lambda(\omega) = \begin{cases} -J \langle \vec{\omega}_i, \vec{\omega}_{i+1} \rangle, & \text{se } \Lambda = \{i, i+1\} \\ -\langle \vec{\omega}_i, \vec{h} \rangle, & \text{se } \Lambda = \{i\} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Perceba que a interação acima possui mesma escritura que a equação (1.14) e o potencial será dado pela equação (1.13).  $\diamond$

**Exemplo 1.5.7.** *Modelo clássico de Heisenberg ou modelo XYZ com campo externo:* Para  $d = 3$ , tome  $\vec{h} \in \mathbb{R}^3$  e  $J \in \mathbb{R}$ . O potencial é novamente dado pela equação (1.13), sendo a interação descrita pela equação (1.14)

$$\Phi_\Lambda(\omega) = \begin{cases} -J \langle \cdot, \cdot \rangle_{\{i, i+1\}}(\omega), & \text{se } \Lambda = \{i, i+1\} \\ -\langle \cdot, \vec{h} \rangle_{\{i\}}(\omega), & \text{se } \Lambda = \{i\} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} .$$

$\diamond$

Para mais informações sobre estes e outros modelos clássicos da mecânica estatística, veja as referências [50, 9]. Afastando-se um pouco da fonte prioritariamente física, apresentamos um modelo dinamicista.

**Notação 1.5.4.** Lembre-se que as configurações de  $\Sigma_{\mathcal{S}}^+$  podem ser escritas como  $\omega = (\omega_0, \omega_1, \dots)$ . Denotaremos por  $k^\infty$  a configuração  $(k, k, k, \dots) \in \Sigma_{\mathcal{S}}^+$ , onde  $k \in \mathcal{S}$ .

**Exemplo 1.5.8.** Considere o *shift* unilateral  $\Sigma_{\mathbb{Z}_n}^+$ , apresentado no exemplo 1.2.1. Fixe constantes positivas  $\{\alpha_k\}_{0 \leq k < n}$  e tome  $r \in \{2, 3, \dots, n-1\}$ .

A partir do observável  $d_{\Sigma_{\mathcal{S}}^+}(\cdot, \omega)$ , definimos o potencial  $\Psi$  colocando

$$\Psi_i(\omega) = \begin{cases} -\alpha_0 d_{\Sigma_{\mathcal{S}}^+}(\omega, 0^\infty), & \text{se } \omega_i = 0 \\ -\alpha_1 d_{\Sigma_{\mathcal{S}}^+}(\omega, 1^\infty), & \text{se } \omega_i = 1 \\ \vdots & \vdots \\ -\alpha_{r-1} d_{\Sigma_{\mathcal{S}}^+}(\omega, (r-1)^\infty), & \text{se } \omega_i = r-1 \\ -\alpha_r, & \text{se } \omega_i = r \\ \vdots & \vdots \\ -\alpha_{n-1}, & \text{se } \omega_i = n-1 \end{cases} .$$

Em particular, caso  $r = n-1$  temos  $\Psi_i(\omega) = \sum_{k=0}^{n-1} \chi_{[k^\infty]_{\{i\}}}(\omega) \alpha_k d_{\Sigma_{\mathcal{S}}^+}(\omega, k^\infty)$ .  $\diamond$

Com exceção deste último exemplo, reconhece-se dependência das interações anteriores com relação ao diâmetro do subconjunto em  $\mathcal{P}_F$ , já que  $\Phi_X \equiv 0$  para todo  $X \neq \{i, i+1\}$  e  $X \neq \{i\}$  para algum  $i \in \mathcal{L}$ . Este fenômeno motiva uma classificação particularmente comum na literatura, a qual indica o quão distantes, no reticulado, duas partículas podem interagir entre si.

**Definição 1.5.4.** Denomina-se de curto alcance

(i) a interação  $\Phi$  para a qual

$$\exists L \in \mathbb{N} \text{ tal que } \Phi_X \equiv 0 \text{ sempre que } \text{diam}(X) > L;$$

(ii) o potencial  $\Psi$  para o qual

$$\exists L \in \mathbb{N} \text{ tal que } \sup_{\omega|_{\Lambda_L} = \omega'|_{\Lambda_L}} |\Psi_n(\omega) - \Psi_n(\omega')| = 0 \text{ para todo } n \in \mathcal{L},$$

isto é,  $\Psi_n$  é local em  $\Lambda_L$  para todo  $n \in \mathcal{L}$ .

Denotamos por  $\text{Alc}(\Phi)$  (respectivamente  $\text{Alc}(\Psi)$ ) o menor valor de  $L$  que torna  $\Phi$  (respectivamente  $\Psi$ ) de curto alcance. Uma interação ou um potencial é dito de longo alcance se não for de curto alcance. Em tal caso, convencionam-se  $\text{Alc}(\Phi) = \infty$  (respectivamente  $\text{Alc}(\Psi) = \infty$ ).

É fácil ver que o potencial do exemplo 1.5.8 é o de longo alcance, pois é definido pelo observável do exemplo 1.3.4, que não satisfaz a propriedade local.

Retornando aos hamiltonianos, apresentamos o seguinte exemplo.

**Exemplo 1.5.9.** *Hamiltonianos associados aos modelos anteriores:* Tomamos como base o modelo *clock* (exemplo 1.5.5), cujos respectivos hamiltonianos são

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\Lambda^{\text{Int}}(\omega) &= -J \sum_{\{i,i+1\} \cap \Lambda \neq \emptyset} \langle \cdot, \cdot \rangle_{\{i,i+1\}}(\omega) - \sum_{\{i\} \cap \Lambda \neq \emptyset} \langle \cdot, \vec{h} \rangle_{\{i\}}(\omega); \\ \mathcal{H}_\Lambda^{\text{Pot}}(\omega) &= -\frac{J}{2} \sum_{i \in \Lambda} \left( \langle \cdot, \cdot \rangle_{\{i-1,i\}} + \langle \cdot, \cdot \rangle_{\{i,i+1\}} \right) (\omega) - \sum_{i \in \Lambda} \langle \cdot, \vec{h} \rangle_{\{i\}}(\omega). \end{aligned}$$

Em particular, os hamiltonianos estão associados a menos de um fator de fronteira,

$$\mathcal{H}_{\Lambda_n}^{\text{Int}} - \mathcal{H}_{\Lambda_n}^{\text{Pot}} = \frac{\Phi_{\{-n-1,-n\}}}{2} + \frac{\Phi_{\{n,n+1\}}}{2} \quad \diamond$$

No final do segundo capítulo, semelhantemente ao exemplo acima, os hamiltonianos de uma interação e de um potencial estarão relacionados por noções de equivalências apresentadas pelos formalismos a serem estudados. Desta forma, será possível apresentar várias descrições para um mesmo problema.

A noção dinâmica está presente em nosso contexto da seguinte forma.

**Definição 1.5.5.** Seja  $(\Sigma_S, \sigma)$  um espaço de *shift*.

(i) Um hamiltoniano  $\mathcal{H}$  é  $\sigma$ -invariante se  $\mathcal{H}_{\Lambda+i} = \mathcal{H}_\Lambda \circ \sigma^i$  para todo  $\Lambda \in \mathcal{P}_F$  e  $i \in \mathcal{L}$ ;

(ii) Uma interação  $\Phi$  é  $\sigma$ -invariante se  $\Phi_{X+i} = \Phi_X \circ \sigma^i$  para todo  $X \in \mathcal{P}_F$  e  $i \in \mathcal{L}$ ;

(iii) Um potencial  $\Psi$  é  $\sigma$ -invariante se  $\Psi_{n+i} = \Psi_n \circ \sigma^i$  para todo  $n, i \in \mathcal{L}$ .

Note que todos os exemplos anteriores são  $\sigma$ -invariantes. Além disso, potenciais ou interações  $\sigma$ -invariantes evidentemente induzem hamiltonianos  $\sigma$ -invariantes.

Para as interações,  $\mathcal{B}_\sigma(\Sigma_S)$  denotará o subespaço de  $\mathcal{B}(\Sigma_S)$  das interações absolutamente somáveis, contínuas e  $\sigma$ -invariantes, munido da norma

$$\|\Phi\|_{\mathcal{B}_\sigma(\Sigma_S)} = \sup_{i \in \mathcal{L}} \sum_{X \ni i} \|\Phi_X\|_\infty = \sum_{X \ni 0} \|\Phi_X\|_\infty. \quad (1.15)$$

Examinaremos de forma mais detalhada a noção de invariância sobre os potenciais.

**Exemplo 1.5.10.** *Hamiltonianos de potencial  $\sigma$ -invariante:* Um potencial  $\sigma$ -invariante  $\Psi$  é formado por cópias transladadas do observável da origem  $\Psi_0$ , isto é,  $\Psi = \{\Psi_0 \circ \sigma^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . O hamiltoniano associado coincide com

$$\mathcal{H}_{\Lambda_n}^{Pot} = \sum_{i \in \Lambda_n} \Psi_0 \circ \sigma^i =: S_n(\Psi_0)$$

(na literatura dinamicista,  $S_n(f)$  é conhecido como a soma de Birkhoff associada a uma função  $f$ ).

Para qualquer estado  $\sigma$ -invariante  $\mu \in \mathcal{P}_\sigma(\Sigma_S)$ , aplicando o Teorema Ergódico de Birkhoff (ver teorema 1.4.2) para o observável  $\Psi_0$ , tem-se

$$\widehat{\Psi}_0(\omega) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\Lambda_n|} S_n(\Psi_0)(\omega) \quad \text{existe } \mu\text{-q.t.p. } \omega \quad \text{e}$$

$$\int_A \widehat{\Psi}_0 d\mu = \int_A \Psi_0 d\mu \quad \text{para todo } A \in \mathcal{B}_\sigma.$$

Conseqüentemente, é possível obter o comportamento assintótico médio da energia do sistema para uma dada configuração, já que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\Lambda_n|} \mathcal{H}_{\Lambda_n}^{Pot}(\omega) = \widehat{\Psi}_0(\omega) \quad \mu\text{-q.t.p. } \omega \quad \text{e} \quad \langle \widehat{\Psi}_0 \rangle_\mu = \langle \Psi_0 \rangle_\mu.$$

Ainda, se  $\mu$  é um estado ergódico, então  $\widehat{\Psi}_0 \equiv \langle \Psi_0 \rangle_\mu$ . Além disso, discussão similar é válida para  $\mathcal{L} = \mathbb{Z}$ .  $\diamond$

Motivado pelo exemplo anterior, a ação dos estados sobre os hamiltonianos será introduzida da seguinte maneira.

**Definição 1.5.6.** Dado um estado  $\mu$ , a energia média ou densidade de energia associada a um hamiltoniano é

$$\langle \mathcal{H} \rangle_\mu := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\Lambda_n|} \int \mathcal{H}_{\Lambda_n} d\mu, \quad (1.16)$$

quando este limite existe.

**Observação 1.5.4.** No caso invariante, a ação de um estado  $\sigma$ -invariante sobre um hamiltoniano de potencial  $\sigma$ -invariante reduz-se à ação deste mesmo estado sobre o observável da origem (veja exemplo 1.5.10). Tal fato justifica que a notação utilizada seja a mesma. Além disso, possibilita uma identificação entre os potenciais  $\sigma$ -invariantes e os observáveis da origem, dada por  $\Psi \mapsto \Psi_0$ , a qual permitirá um tratamento a partir somente de observáveis do formalismo gibbsiano a ser discutido na seção 2.3.

Não é uma tarefa fácil garantir que a energia média para hamiltonianos não necessariamente  $\sigma$ -invariantes seja finita. Condições para a existência do limite (1.16), em geral, são descritas a partir da atuação da dinâmica sobre os hamiltonianos e sobre os estados, como no caso invariante. Com este intuito, introduzimos a seguinte noção quando  $\mathcal{L} = \mathbb{N}$ .

**Definição 1.5.7.** Um hamiltoniano  $\mathcal{H}$  é dito subaditivo, se satisfaz

$$\mathcal{H}_{\Lambda_{n+m}^+} \leq \mathcal{H}_{\Lambda_n^+} + \mathcal{H}_{\Lambda_m^+} \circ \sigma^n \text{ para todo } n, m \in \mathbb{N},$$

Quando vale a igualdade, o hamiltoniano é dito aditivo.

Uma condição necessária para subaditividade, devido a um simples argumento de indução, é dada pela seguinte desigualdade

$$\mathcal{H}_{\Lambda_n^+} \leq \mathcal{H}_{\Lambda_{n-1}^+} + \mathcal{H}_{\Lambda_1^+} \circ \sigma^{n-1} \implies \mathcal{H}_{\Lambda_n^+} \leq \sum_{i \in \Lambda_n^+} \mathcal{H}_{\Lambda_1^+} \circ \sigma^i \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

**Exemplo 1.5.11.** *Hamiltonianos aditivos:* Considere  $\mathcal{L} = \mathbb{N}$ . Um hamiltoniano associado a um potencial  $\sigma$ -invariante  $\Psi$  sempre satisfaz a propriedade aditiva, pois

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\Lambda_{n+m}^+}^{Pot}(\omega) &= \sum_{i \in \Lambda_n^+} \Psi_0 \circ \sigma^i(\omega) + \left( \sum_{i \in \Lambda_m^+} \Psi_0 \circ \sigma^i \right) \circ \sigma^n(\omega) \\ &= \mathcal{H}_{\Lambda_n^+}^{Pot}(\omega) + \mathcal{H}_{\Lambda_m^+}^{Pot} \circ \sigma^n(\omega) \quad \text{para todo } n, m \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Reciprocamente, dado um hamiltoniano  $\mathcal{H}$  que satisfaz tal propriedade, é possível obter a seguinte redução

$$\mathcal{H}_{\Lambda_n^+} = \mathcal{H}_{\Lambda_{n-1}^+} + \mathcal{H}_{\Lambda_1^+} \circ \sigma^{n-1} \implies \mathcal{H}_{\Lambda_n^+} = \sum_{i \in \Lambda_n^+} \mathcal{H}_{\Lambda_1^+} \circ \sigma^i \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Logo, todo hamiltoniano aditivo  $\mathcal{H}$  provém de um potencial  $\sigma$ -invariante dado por  $\Psi := \left\{ \mathcal{H}_{\Lambda_1^+} \circ \sigma^n \right\}_{n \in \mathcal{L}}$  e, devido ao exemplo 1.5.10, obtemos

$$\langle \mathcal{H} \rangle_\mu = \int \mathcal{H}_{\Lambda_1^+} d\mu = \left\langle \mathcal{H}_{\Lambda_1^+} \right\rangle_\mu. \quad (1.17)$$

◇

Procedendo de forma análoga ao exemplo 1.5.10, ao se utilizar o Teorema Ergódico Subaditivo 1.4.3, obtém-se o seguinte resultado.

**Proposição 1.5.1.** *Seja  $\mathcal{H}$  um hamiltoniano subaditivo. Então, para qualquer estado  $\sigma$ -invariante  $\mu$  em  $\Sigma_S^+$ , tem-se*

$$\widehat{\mathcal{H}}(\omega) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\Lambda_n^+|} \mathcal{H}_{\Lambda_n^+}(\omega) \quad \text{existe } \mu\text{-q.t.p. } \omega \quad e$$

$$\langle \mathcal{H} \rangle_\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\Lambda_n^+|} \int \mathcal{H}_{\Lambda_n^+} d\mu = \inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{|\Lambda_n^+|} \int \mathcal{H}_{\Lambda_n^+} d\mu = \int \widehat{\mathcal{H}} d\mu.$$

Se  $\mu$  é um estado ergódico, então  $\widehat{\mathcal{H}} \equiv \langle \mathcal{H} \rangle_\mu$ .

Não é difícil notar que, para todo estado  $\sigma$ -invariante  $\mu$ , a energia média  $\langle \cdot \rangle_\mu$  é uma função linear sobre os hamiltonianos subaditivos e no caso aditivo ou de potenciais  $\sigma$ -invariantes é sempre finita.

A noção central deste capítulo é dada pela próxima definição.

**Definição 1.5.8.** Dados um conjunto de *spins*  $\mathcal{S}$ , um hamiltoniano  $\mathcal{H}$  e um estado básico  $\nu$  em  $\Sigma_S$  (ou em  $\Sigma_S^+$ ), denominamos  $(\Sigma_S, \mathcal{H}, \nu)$  (ou  $(\Sigma_S^+, \mathcal{H}, \nu)$ ) de sistema de *spins* unidimensionais.

**Notação 1.5.5.** Quando for necessário destacar a dinâmica de *shift* e as noções de invariância, alternamos a notação para  $(\Sigma_S, \sigma, \mathcal{H}, \nu)$  (ou  $(\Sigma_S^+, \sigma, \mathcal{H}, \nu)$ ).

**Exemplo 1.5.12.** *Sistema de spins para o modelo clock:* Tal modelo possui espaço de configurações  $\Sigma_{\mathbb{U}_n}$  (ver exemplo 1.2.2), hamiltoniano dado pela interação (ou pelo potencial) do exemplo 1.5.5, e estado básico obtido a partir da medida de contagem normalizada.  $\diamond$

Já foi observado anteriormente que, sem perda de generalidade, o reticulado  $\mathcal{L}$  poderia ser substituído por um conjunto finito. Concluimos o presente capítulo explicitando a relação entre os sistemas de *spins* de volume finito e volume infinito, e como vários dos conceitos apresentados até então não são perceptíveis quando o volume é finito.

**Exemplo 1.5.13.** *Sistemas de spins de volume finito:* Para  $\mathcal{L}$  conjunto finito, com  $|\mathcal{L}| = N$ , e conjunto de *spins*  $\mathcal{S}$ , obtém-se o espaço de configurações  $\Sigma_S := \mathcal{S}^N$ , que obviamente é compacto. O estado básico é dado pela medida produto da *medida de referência*, ou seja,  $\nu := \prod_{i=1}^N \nu_S$ . Em particular, toda informação sobre a energia do sistema está resumida no observável  $\mathcal{H}_{\mathcal{L}}$  (para reduzir notação denota-se  $\mathcal{H} := \mathcal{H}_{\mathcal{L}}$ ).

Devido à liberdade dada ao conjunto  $\mathcal{L}$ , já que não necessariamente possui uma estrutura de (semi)grupo, não estamos aptos a apresentar uma dinâmica de *shift*. Desta forma, denotaremos os sistemas de *spins* de volume finito por  $(\Sigma_S, \mathcal{H}, \nu)$ .

A  $\sigma$ -álgebra caudal  $\mathcal{B}_\infty$  coincide com a  $\sigma$ -álgebra trivial  $\{\emptyset, \Sigma_S\}$ . Todos os observáveis são locais e os únicos observáveis globais são as funções constantes. Além disso, todo estado sobre o sistema é macroscópico, isto é,  $\mathcal{P}^\infty(\Sigma_S) = \mathcal{P}(\Sigma_S)$ .

Em síntese, a noção macroscópica/global, quando o volume é finito, corresponde aos casos triviais de conjuntos mensuráveis, de observáveis e de estados. Isto justifica o fato de tal noção não obter qualquer destaque na descrição apresentada na Introdução.

Uma forma de estender as funções termodinâmicas para um conjunto de *spins* compacto é fazendo uso do estado básico  $\nu$ :

$$\begin{aligned} \text{(Energia Média)} \quad \langle \mathcal{H} \rangle_\mu &= \int \mathcal{H} d\mu; \\ \text{(Entropia)} \quad H_\nu(\mu) &:= \begin{cases} \int \left( \frac{d\mu}{d\nu} \log \frac{d\mu}{d\nu} \right) d\nu = \int \log \frac{d\mu}{d\nu} d\mu, & \text{se } \mu \ll \nu; \\ \infty, & \text{caso contrário;} \end{cases} \\ \text{(Pressão)} \quad P_\nu(\mathcal{H}) &:= \log Z_\mathcal{H} = \log \int e^{-\mathcal{H}} d\nu. \end{aligned}$$

Atentamos que a diferença crucial com relação à descrição apresentada na introdução é o fato de agora o conjunto de *spins* não ser necessariamente finito. Se fosse finito, pelo exemplo 1.1.1, a *medida de referência* seria a medida de contagem normalizada. Consequentemente, o estado básico também seria uma medida de contagem normalizada sobre o espaço de configurações  $\Sigma_S$ , pois

$$\nu(\omega) = \prod_{i=1}^N \nu_S(\omega_i) = \frac{1}{|\mathcal{S}|^N}, \quad \text{para todo } \omega \in \Sigma_S.$$

Portanto, a pressão e a entropia anteriores distinguem-se daquelas que foram apresentadas na introdução apenas por um fator de  $-|S| \log N$ .

Procedendo de forma análoga, pela desigualdade de Jensen (ver A.0.7 no apêndice A), temos

$$H(\mu) - \langle \mathcal{H} \rangle_\mu = \int \log \left( e^{-\mathcal{H}} \frac{d\mu}{d\nu} \right) d\mu \leq \log \int e^{-\mathcal{H}} \frac{d\nu}{d\mu} d\mu = P_\nu(\mathcal{H}).$$

Sendo assim, enunciemos o princípio variacional

$$P_\nu(\mathcal{H}) = \sup_{\mu \in \mathcal{P}(\Sigma)} \{H(\mu) - \langle \mathcal{H} \rangle_\mu\}$$

cujo supremo é atingido pelo estado de Boltzmann-Gibbs, caracterizado explicitamente por

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \frac{1}{Z_{\mathcal{H},N}} \int_A e^{-\mathcal{H}(\omega)} d\nu(\omega), \quad \text{com} \\ \text{(Função de Partição)} \quad Z_{\mathcal{H},N} &:= \int_{\Sigma_S} e^{-\mathcal{H}(\omega)} d\nu(\omega). \quad \diamond \end{aligned}$$

Introduzidos no primeiro capítulo, os modelos de Ising, *clock*, XY e Heisenberg pertencem à vasta classe de modelos de mecânica estatística denominados de sistemas de *spins* unidimensionais. Estendendo a análise feita para volume finito, o fenômeno de equilíbrio sobre um sistema *spins* com volume infinito também será descrito via estados sobre o espaço de configuração, denominados de estados de Gibbs e de estados de equilíbrio. Estes são caracterizados através de duas formulações: o formalismo DLR e o formalismo SRB. O objetivo principal deste capítulo será introduzir ambas as formulações e ao término apresentar um dicionário entre elas e possíveis equivalências. Relembramos que o tratamento dos respectivos formalismos será limitado a sistemas de *spins* compactos unidimensionais (isto é, sobre os reticulados  $\mathbb{N}$  ou  $\mathbb{Z}$ ), embora se trate de construções que se estendem muito além deste contexto, como pode ser visto, por exemplo, em [32, 24, 56, 28, 9] para generalizações em mecânica estatística e, por exemplo, em [48, 49, 30, 37] para situações mais gerais em dinâmica.

### 2.1 Formalismo DLR

Também denominado de abordagem mecânico-estatística, tal formalismo, desenvolvido por Dobrushin [15, 16, 17], Lanford-Ruelle [34], adequa-se ao contexto de hamiltonianos provindos de interações. Sua proposta é descrever os estados de Gibbs para sistemas de *spins* de volume infinito por meio da análise dos subsistemas associados às coletâneas finitas de sítios. Para cada um destes subsistemas, aplica-se a caracterização clássica para o volume finito, apresentada na Introdução e no exemplo 1.5.13, donde se obtém o estado

de Boltzmann-Gibbs associado. Desta forma, os estados de Gibbs para volume infinito serão aqueles estados cujo comportamento quando condicionado a uma coletânea finita de sítios coincide com o estado de Boltzmann-Gibbs correspondente a este subsistema.

Considere o sistema de *spins* unidimensional  $(\Sigma_S, \mathcal{H}^{Int}, \nu)$ .

**Exemplo 2.1.1.** *Subsistemas de spins para volume finito:* Dados  $\Lambda \in \mathcal{P}_F$  e uma configuração  $\omega \in \Sigma_S$ , o sistema de *spins* associado ao volume  $\Lambda$  e à condição exterior  $\omega_{\Lambda^c}$  possui espaço de configurações

$$\Sigma_S^{\Lambda, \omega} := \{\omega' \in \Sigma_S : \omega'_{\Lambda^c} = \omega_{\Lambda^c}\} \simeq \mathcal{S}^{|\Lambda|},$$

hamiltoniano dado por  $\mathcal{H}_\Lambda^{Int}|_{\Sigma_S^{\Lambda, \omega}} \equiv \mathcal{H}_\Lambda^{Int}(\cdot, \omega_{\Lambda^c})$  e estado básico  $\nu_\Lambda = \prod_{\Lambda} \nu_S$ . Como descrito no exemplo 1.5.13, o estado de Boltzmann-Gibbs associado a  $(\Sigma_S^{\Lambda, \omega}, \mathcal{H}_\Lambda^{Int}|_{\Sigma_S^{\Lambda, \omega}}, \nu_\Lambda)$  cumpre, para todo  $A \in \mathcal{B}^\Lambda$ ,

$$\mu_{\Lambda, \omega}^{\mathcal{H}_\Lambda^{Int}}(A) = \frac{1}{Z_{\mathcal{H}_\Lambda^{Int}}(\omega)} \int \chi_A(\omega'_\Lambda, \omega_{\Lambda^c}) e^{-\mathcal{H}_\Lambda^{Int}(\omega'_\Lambda, \omega_{\Lambda^c})} d\nu_\Lambda(\omega'_\Lambda) \quad \text{com}$$

$$\text{(Função de Partição)} \quad Z_{\mathcal{H}_\Lambda^{Int}}(\omega) = \int_{\Sigma_S^{\Lambda, \omega}} e^{-\mathcal{H}_\Lambda^{Int}(\omega'_\Lambda, \omega_{\Lambda^c})} d\nu_\Lambda(\omega'_\Lambda). \quad (2.1)$$

(Note que  $\mu_{\Lambda, \omega}^{\mathcal{H}_\Lambda^{Int}}$  pode ser naturalmente estendida sobre a  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{B}^\mathcal{L}$ .) ◇

**Notação 2.1.1.** Os estados de Boltzmann-Gibbs  $\mu_{\Lambda, \omega}^{\mathcal{H}_\Lambda^{Int}}$  serão denotados também por  $\mu_\Lambda^{Int}(\cdot | \omega)$  ou  $\mu_\Lambda^{Int}(\omega, \cdot)$ . O destaque dado à configuração  $\omega \in \Sigma_S$  que determina a condição exterior, colocando-a como variável, exprime uma representação de tais estados em termos de núcleos de probabilidades (ver definição A.0.11 no apêndice A). Em particular, daremos predileção a esta última notação.

Investigando a família  $\{\mu_\Lambda^{Int}(\cdot, \cdot)\}_{\Lambda \in \mathcal{P}_F}$  de tais núcleos para cada subsistema *spins* de volume finito, destacam-se três propriedades

- (i) fixado um conjunto  $A \in \mathcal{B}^\mathcal{L}$ , temos  $\mu_\Lambda^{Int}(\cdot, A)$  é  $\mathcal{B}^{\Lambda^c}$ -mensurável;
- (ii)  $\mu_\Lambda^{Int}(\omega, B) = \chi_B(\omega)$  sempre que  $B \in \mathcal{B}^{\Lambda^c}$ ;
- (iii) para  $X \subset Y$ , tem-se

$$\mu_Y^{Int}(\omega, A) = \int \mu_X^{Int}(\omega', A) d\mu_{Y, \omega}^{Int}(\omega') \quad \text{para quaisquer } \omega \in \Sigma_S \text{ e } A \in \mathcal{B}^\mathcal{L}.$$

(Para mais detalhes sobre o item (iii) acima, veja o exemplo 2.1.3 a seguir.)

Perceba que a dependência da condição exterior nos conduziu a uma alteração do paradigma, que antes era baseado nos estados e a partir deste ponto será ditado pelos núcleos de probabilidades. Este ponto de vista facilita a representação de argumentos de convergência que serão utilizados e se mostrará fundamental para apresentar o estado de Gibbs, cujo comportamento quando “restrito” a uma coletânea finita de partículas é idêntico ao do estado de Boltzmann-Gibbs associado ao subsistema destas partículas.

### 2.1.1 Especificações

A discussão anterior serve de base para a definição a seguir.

**Definição 2.1.1.** Uma especificação  $\Gamma$  é uma família de núcleos de probabilidade para o espaço  $(\Sigma_S, \mathcal{B}^{\mathcal{L}})$ ,

$$\Gamma := \{\gamma_\Lambda\}_{\Lambda \in \mathcal{D}_F} \quad \text{onde} \quad \gamma_\Lambda : \Sigma_S \times \mathcal{B}^{\mathcal{L}} \longrightarrow [0, 1],$$

satisfazendo as condições:

- (i) para cada  $A \in \mathcal{B}^{\mathcal{L}}$ , o observável  $\gamma_\Lambda(\cdot, A)$  é  $\mathcal{B}^{\Lambda^c}$ -mensurável;
- (ii) para cada  $\omega \in \Sigma_S$ , o estado  $\gamma_\Lambda(\omega, \cdot)|_{\mathcal{B}^{\Lambda^c}} = \delta_\omega$ ;
- (iii) para  $\Lambda \subset \Lambda'$ , tem-se

$$\begin{aligned} \gamma_{\Lambda'} \gamma_\Lambda(\omega, A) &:= \int \gamma_\Lambda(\omega', A) \gamma_{\Lambda'}(\omega, d\omega') \\ &= \gamma_{\Lambda'}(\omega, A). \end{aligned}$$

Pormenorizando, as condições (i) e (ii) afirmam que o núcleo de probabilidade, visto tanto como um observável quanto como um estado, só depende dos sítios  $i \in \Lambda^c$ , isto é, a variável que se reporta ao espaço de configurações comporta-se como uma condição de fronteira. A condição (iii) nada mais é que uma propriedade de compatibilidade entre tais núcleos.

Apesar de estar implícito na condição de compatibilidade, é possível definir o comportamento de uma especificação diante de observáveis, de estados e até mesmo de outras especificações.

**Definição 2.1.2.** Sejam as especificações  $\Gamma := \{\gamma_\Lambda\}_{\Lambda \in \mathcal{D}_F}$  e  $\Gamma' := \{\gamma'_\Lambda\}_{\Lambda \in \mathcal{D}_F}$ , um observável  $f$  e um estado  $\mu$ .

- (i) A especificação  $\Gamma$  age sobre o observável  $f$  da seguinte forma

$$\gamma_\Lambda f(\omega) := \int f(\omega') \gamma_{\Lambda'}(\omega, d\omega'). \quad (2.2)$$

- (ii) A especificação  $\Gamma$  atua sobre o estado  $\mu$  através de

$$\mu \gamma_\Lambda(A) := \int \gamma_\Lambda(\omega', A) d\mu(\omega'). \quad (2.3)$$

- (iii) O produto de duas especificações  $\Gamma$  e  $\Gamma'$  é dado pela especificação

$$\Gamma'' := \{(\gamma\gamma')_\Lambda\}_{\Lambda \in \mathcal{D}_F} \quad \text{onde} \quad (\gamma\gamma')_\Lambda(\omega, A) := \int \gamma'_\Lambda(\omega', A) \gamma_\Lambda(\omega, d\omega'). \quad (2.4)$$

Um mecanismo simples que exemplifica a noção de especificação é dado abaixo.

**Exemplo 2.1.2.**  *$\mu_S$ -especificação:* Sejam  $\mu_S$  medida de probabilidade sobre o conjunto de *spins*  $\mathcal{S}$  e suas respectivas medidas produto  $\mu_\Lambda = \prod_\Lambda \mu_S$  para cada  $\Lambda \in \mathcal{P}_F$ . Considere os núcleos de probabilidade

$$\begin{aligned} \mu_\Lambda(\omega, A) &:= \int \chi_A(\omega'_\Lambda \omega_{\Lambda^c}) d\mu_\Lambda(\omega'_\Lambda) \\ &= \mu_\Lambda(\{\omega'|_\Lambda : \omega' \in A \text{ e } \omega'|_{\Lambda^c} = \omega|_{\Lambda^c}\}) \end{aligned}$$

A família formada por tais núcleos  $\Gamma_{\mu_S} := \{\mu_\Lambda(\cdot, \cdot)\}_{\Lambda \in \mathcal{P}_F}$  satisfaz as condições (i), (ii) e (iii) da definição anterior e é denominada de  $\mu_S$ -especificação.  $\diamond$

Do exemplo 2.1.1, obtém-se a seguinte classe de especificações.

**Exemplo 2.1.3.** *Especificação gibbsiana:* Dado o hamiltoniano  $\mathcal{H}^{Int}$  associado à interação  $\Phi$ , naturalmente associa-se uma especificação  $\Gamma_\Phi = \Gamma_{\mathcal{H}^{Int}} = \{\mu_\Lambda^{Int}\}_{\Lambda \in \mathcal{P}_F}$ , onde  $\mu_\Lambda^{Int}$  é o estado de Boltzman-Gibbs dado pela equação (2.1). Atentamos que a condição de compatibilidade é equivalente a

$$\mathcal{H}_\Lambda^{Int}(\omega) + \mathcal{H}_{\Lambda'}^{Int}(\omega') = \mathcal{H}_\Lambda^{Int}(\omega') + \mathcal{H}_{\Lambda'}^{Int}(\omega),$$

para todo  $\omega, \omega' \in \Sigma_S$  tal que  $\omega|_{\Lambda^c} = \omega'|_{\Lambda^c}$  e para todo  $\Lambda \subset \Lambda'$ . Esta, por sua vez, segue trivialmente da equação (1.12).  $\diamond$

Perceba que uma  $\mu_S$ -especificação (exemplo 2.1.2) nada mais é que uma especificação gibbsiana para o hamiltoniano identicamente nulo. Temos ainda que os modelos baseados em interações (exemplos 1.5.4, 1.5.5, 1.5.6 e 1.5.7) possuem especificação gibbsiana associada.

Em particular, o modelo *clock* satisfaz a seguinte propriedade adicional.

**Definição 2.1.3.** Considere  $\mathcal{S} = \mathbb{U}_n$  e o *shift* completo  $\Sigma_{\mathbb{U}_n}$ . Uma especificação  $\Gamma = \{\gamma_\Lambda\}_{\Lambda \in \mathcal{P}_F}$  sobre este espaço é dita markoviana se existe uma função positiva  $g : \mathcal{S} \times \mathcal{S} \times \mathcal{S} \rightarrow (0, \infty)$  tal que, para todo  $i \in \mathbb{Z}$ ,

$$\gamma_{\{i\}}(\omega, [\omega']_{\{i\}}) = g(\omega_{i-1}, \omega'_i, \omega_{i+1}). \quad (2.5)$$

**Exemplo 2.1.4.** *Especificação para o modelo clock:* Seja o sistema de *spins* associado ao modelo *clock*, introduzido no exemplo 1.5.12. A função positiva que torna a especificação gibbsiana para tal modelo em markoviana é dada por

$$g(x, y, z) := \frac{e^{\langle x, y \rangle + \langle y, z \rangle + \langle y, \vec{h} \rangle}}{\sum_{r \in \mathcal{S}} e^{\langle x, r \rangle + \langle r, z \rangle + \langle r, \vec{h} \rangle}}. \quad (2.6)$$

Para verificar a equação (2.5), primeiramente note que  $-\mathcal{H}_{\{i\}}^{Int}(\omega''_{\{i\}}\omega_{\{i\}}\mathfrak{G}) = \langle \omega_{i-1}, \omega''_i \rangle + \langle \omega''_i, \omega_{i+1} \rangle + \langle \omega''_i, \vec{h} \rangle$ . Utilizando-se da equação (2.1) que define da especificação gibbsiana, temos assim

$$\begin{aligned} \gamma_{\{i\}}(\omega, [\omega']_{\{i\}}) &= \frac{\int \chi_{[\omega']_{\{i\}}}(\omega''_{\{i\}}\omega_{\{i\}}\mathfrak{G}) e^{\langle \omega_{i-1}, \omega''_i \rangle + \langle \omega''_i, \omega_{i+1} \rangle + \langle \omega''_i, \vec{h} \rangle} d\nu_{\mathcal{S}}(\omega''_{\{i\}})}{\int_{\mathcal{S}} e^{\langle \omega_{i-1}, \omega''_i \rangle + \langle \omega''_i, \omega_{i+1} \rangle + \langle \omega''_i, \vec{h} \rangle} d\nu_{\mathcal{S}}(\omega''_{\{i\}})} \\ &= \frac{e^{\langle \omega_{i-1}, \omega'_i \rangle + \langle \omega'_i, \omega_{i+1} \rangle + \langle \omega'_i, \vec{h} \rangle}}{\sum_{\omega''_i \in \mathcal{S}} e^{\langle \omega_{i-1}, \omega''_i \rangle + \langle \omega''_i, \omega_{i+1} \rangle + \langle \omega''_i, \vec{h} \rangle}} \\ &= g(\omega_{i-1}, \omega'_i, \omega_{i+1}). \end{aligned}$$

◇

**Observação 2.1.1.**

- (i) O argumento anterior pode ser adaptado a qualquer interação  $\Phi$  entre vizinhos mais próximos, ou seja, quando  $Alc(\Phi) = 2$ ;
- (ii) A noção markoviana apresentada refere-se somente ao caso particular do *shift* completo sobre um conjunto de *spins* finito (exemplo 1.2.2). A importância deste deve-se a um resultado de unicidade para o estado de Gibbs, que será tratado na subseção 2.1.2. Apesar disso, tal noção pode ser discutida de maneira mais geral como está apresentada na parte II da referência [24].

Apesar dos exemplos apresentados até então serem do tipo gibbsiano, não existe uma relação unívoca entre hamiltonianos e especificações. Tal fato é confirmado devido aos seguintes argumentos.

**Exemplo 2.1.5.** *Hamiltonianos com mesma especificação gibbsiana:* Sejam as interações  $\Phi$  e  $\Phi'$  e seus respectivos hamiltonianos  $\mathcal{H}^{Int}$  e  $\mathcal{H}^{Int'}$ , os quais se distinguem a menos de uma constante,

- (i) ou  $\Phi_X - \Phi_{X'} = c_X$ , para todo  $X \in \mathcal{P}_F$ ;
- (ii) ou  $\mathcal{H}_{\Lambda}^{Int} - \mathcal{H}_{\Lambda}^{Int'} = c_{\Lambda}$ , para todo  $\Lambda \in \mathcal{P}_F$ .

Qualquer uma destas condições implica

$$\frac{e^{-\mathcal{H}_{\Lambda}^{Int}(\omega'_{\Lambda}\omega_{\Lambda}\mathfrak{G})}}{Z_{\mathcal{H}_{\Lambda}^{Int}}(\omega)} = \frac{e^{-\mathcal{H}_{\Lambda}^{Int'}(\omega'_{\Lambda}\omega_{\Lambda}\mathfrak{G})}}{Z_{\mathcal{H}_{\Lambda}^{Int'}}(\omega)}$$

e conseqüentemente as respectivas especificações gibbsianas coincidem. ◇

Em termos gerais, temos a seguinte definição.

**Definição 2.1.4.** Os hamiltonianos  $\mathcal{H}^{Int}$  e  $\mathcal{H}^{Int'}$  são ditos DLR-equivalentes ou equivalentes por Dobrushin se  $\mathcal{H}_{\Lambda}^{Int} - \mathcal{H}_{\Lambda}^{Int'}$  é  $\mathcal{B}^{\Lambda\mathfrak{G}}$ -mensurável, para todo  $\Lambda \in \mathcal{P}_F$ .

A próxima proposição decorre da definição de uma especificação gibbsiana.

**Proposição 2.1.1.** *Dois hamiltonianos para interações contínuas  $\Phi$  e  $\Phi'$  são DLR-equivalentes se, e somente se, possuem as mesmas especificações gibbsianas.*

*Demonstração.* Sejam as interações  $\Phi$  e  $\Phi'$ , seus respectivos hamiltonianos  $\mathcal{H}^{Int}$  e  $\mathcal{H}^{Int'}$  e suas respectivas especificações gibbsianas  $\Gamma_\Phi = \{\mu_\Lambda^{Int}\}_{\Lambda \in \mathcal{P}_F}$  e  $\Gamma_{\Phi'} = \{\mu_\Lambda^{Int'}\}_{\Lambda \in \mathcal{P}_F}$ .

( $\Rightarrow$ ). Para cada  $\Lambda \in \mathcal{P}_F$  e quaisquer  $\omega$  e  $\omega' \in \Sigma_S$ , observe que

$$e^{-\mathcal{H}_\Lambda^{Int}(\omega)} = e^{(\mathcal{H}_\Lambda^{Int'} - \mathcal{H}_\Lambda^{Int})(\omega)} e^{-\mathcal{H}_\Lambda^{Int'}(\omega)} \quad \text{e} \quad Z_{\mathcal{H}_\Lambda^{Int}}(\omega) = e^{(\mathcal{H}_\Lambda^{Int'} - \mathcal{H}_\Lambda^{Int})(\omega'_\Lambda \omega_\Lambda \mathfrak{C})} Z_{\mathcal{H}_\Lambda^{Int'}}(\omega),$$

já que  $\mathcal{H}_\Lambda^{Int} - \mathcal{H}_\Lambda^{Int'}$  é  $\mathcal{B}^{\Lambda^c}$ -mensurável. Consequentemente, obtemos

$$\frac{e^{-\mathcal{H}_\Lambda^{Int}(\omega'_\Lambda \omega_\Lambda \mathfrak{C})}}{Z_{\mathcal{H}_\Lambda^{Int}}(\omega)} = \frac{e^{-\mathcal{H}_\Lambda^{Int'}(\omega'_\Lambda \omega_\Lambda \mathfrak{C})}}{Z_{\mathcal{H}_\Lambda^{Int'}}(\omega)}, \quad (2.7)$$

donde segue que as respectivas especificações gibbsianas coincidem.

( $\Leftarrow$ ). A igualdade entre as especificações gibbsianas, isto é,  $\mu_\Lambda^{Int}(\cdot, \omega) = \mu_\Lambda^{Int'}(\cdot, \omega)$  para todo  $\omega \in \Sigma_S$  e  $\Lambda \in \mathcal{P}_F$ , implica que o aberto

$$D = \left\{ \omega' \in \Sigma_S : \frac{e^{-\mathcal{H}_\Lambda^{Int}(\omega'_\Lambda \omega_\Lambda \mathfrak{C})}}{Z_{\mathcal{H}_\Lambda^{Int}}(\omega)} \neq \frac{e^{-\mathcal{H}_\Lambda^{Int'}(\omega'_\Lambda \omega_\Lambda \mathfrak{C})}}{Z_{\mathcal{H}_\Lambda^{Int'}}(\omega)} \right\}$$

tem medida nula segundo o estado básico  $\nu$ . Em particular, como é um conjunto  $\mathcal{B}^\Lambda$ -mensurável, temos que  $\nu(D) = \nu_\Lambda(D) = 0$ . Isso contradiz, porém, o fato de a medida de referência  $\nu_S$ , e consequentemente  $\nu_\Lambda$  (a qual coincide com a medida produto de  $\prod_\Lambda \nu_S$ ) ser positiva para qualquer aberto não vazio (já que  $\nu$  é uma medida de Haar). Logo,  $D$  é o conjunto vazio, a igualdade (2.7) é satisfeita e portanto  $\mathcal{H}_\Lambda^{Int} - \mathcal{H}_\Lambda^{Int'}$  é  $\mathcal{B}^{\Lambda^c}$ -mensurável.  $\square$

**Observação 2.1.2.** Ainda sobre a relação entre especificações e hamiltonianos, é possível obter interações, não necessariamente satisfazendo a hipótese de aditividade absoluta, a partir de especificações. Para isto, torna-se fundamental acrescentar a hipótese de quase-localidade sobre a especificação (consulte [56, 55, 24]). Para não adentrar nos detalhes mais técnicos desta questão, já que este é um dos pontos de partida para o estudo da teoria dos grupos de renormalização, aqui nos restringiremos somente às especificações gibbsianas.

## 2.1.2 Estados de Gibbs

Como já destacado, o formalismo DLR propõe definir o estado de Gibbs delegando que “restrições” a subsistemas finitos possuem comportamento caracterizado pelos estados de

Boltzman-Gibbs associados aos subsistemas destas partículas. Adaptando tal afirmação em termos de especificações, dada  $\Gamma = \{\gamma_\Lambda\}_{\Lambda \in \mathcal{P}_F}$ , gostaríamos de obter um estado sobre  $\Sigma_S$  para o qual suas “restrições” a parcelas finitas  $\Lambda \in \mathcal{P}_F$  são dadas pelos estados  $\{\gamma_\Lambda(\omega, \cdot)\}_{\substack{\omega \in \Sigma_S \\ \Lambda \in \mathcal{P}_F}}$ .

Matematicamente, o que queremos dizer por “restrições” de um estado a subsistemas pode ser representado pela noção de probabilidade condicional de funções indicadoras sobre sub- $\sigma$ -álgebras, isto é, no nosso caso por  $\mathbb{E}_\mu(\chi_A | \mathcal{B}^\Lambda)$  (veja definição A.0.10 no apêndice A). Desta forma, estamos aptos a apresentar a generalização dos estados de Boltzman-Gibbs para os sistemas de *spins* de volume infinito.

**Definição 2.1.5.** Dizemos que  $\mu$  é um estado de Gibbs, ou um estado consistente para uma dada especificação  $\Gamma = \{\gamma_\Lambda\}_{\Lambda \in \mathcal{P}_F}$ , se todo boreliano  $A$  satisfaz

$$\mathbb{E}_\mu(\chi_A | \mathcal{B}^\Lambda)(\cdot) = \gamma_\Lambda(\cdot, A) \quad \mu\text{-q.t.p.} \quad (2.8)$$

para todo  $\Lambda \in \mathcal{P}_F$ . O conjunto dos estados de Gibbs associados a uma especificação é denotado por  $\mathcal{G}(\Gamma)$ .

**Notação 2.1.2.** No caso gibbsiano, o conjunto dos estados de Gibbs será denotado por  $\mathcal{G}(\Phi)$  ou  $\mathcal{G}(\mathcal{H}^{Int})$ .

A equação (2.8) possui a seguinte caracterização equivalente.

**Proposição 2.1.2.** *Seja  $\Gamma = \{\gamma_\Lambda\}_{\Lambda \in \mathcal{P}_F}$  uma especificação. O estado  $\mu$  é consistente para  $\Gamma$  se, e somente se, satisfaz a equação (conhecida como equação DLR)*

$$\mu\gamma_\Lambda = \mu, \quad (2.9)$$

para todo  $\Lambda \in \mathcal{P}_F$ .

*Demonstração.* Este resultado é uma consequência direta das definições de consistência e de esperança condicional, já que

$$\mu\gamma_\Lambda(A) = \int \gamma_\Lambda(\omega', A) d\mu(\omega') \quad \text{e} \quad \int \mathbb{E}_\mu(\chi_A | \mathcal{B}^\Lambda)(\omega') d\mu(\omega') = \mu(A).$$

□

Formas explícitas da equação DLR para os exemplos anteriores são apresentadas a seguir.

**Exemplo 2.1.6.** *Equação DLR e o estado de Gibbs para uma  $\mu_S$ -especificação:* Seja  $\Gamma_{\mu_S} = \{\mu_\Lambda(\cdot, \cdot)\}_{\Lambda \in \mathcal{P}_F}$  uma  $\mu_S$ -especificação (ver exemplo 2.1.2). A equação DLR (2.9) associada é dada por

$$\mu \mu_\Lambda(A) = \mu(A), \quad \forall \Lambda \in \mathcal{P}_F \quad \Longleftrightarrow \quad \mu(A) = \int \int \chi_A(\omega'_\Lambda \omega''_{\Lambda^c}) d\mu_\Lambda(\omega'_\Lambda) d\mu(\omega'').$$

Ainda mais, para os cilindros  $[\omega]_{\Lambda, \varepsilon}$ , a relação acima garante que  $\mu([\omega]_{\Lambda, \varepsilon}) = \mu_\Lambda([\omega]_{\Lambda, \varepsilon})$ .

Tal propriedade para os cilindros sugere que o estado de Bernoulli  $\mu_{\Sigma_S}$  para a medida de probabilidade  $\mu_S$  (veja exemplo 1.4.1) seja um candidato a estado de Gibbs para a  $\mu_S$ -especificação. Isto de fato ocorre. Além disso, qualquer outro estado de Gibbs para esta especificação deverá coincidir com  $\mu_{\Sigma_S}$  sobre os cilindros, de modo que, pela unicidade do estado de Bernoulli, temos  $\mathcal{G}(\Gamma_{\mu_S}) = \{\mu_{\Sigma_S}\}$   $\diamond$

**Exemplo 2.1.7.** *Equação DLR para uma especificação gibbsiana:* Dada uma especificação gibbsiana  $\Gamma_{\mathcal{H}^{Int}}$  associada a um hamiltoniano de interação  $\mathcal{H}^{Int}$  (ver exemplo 2.1.3), temos que a equação DLR (2.9) é dada da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \mu \mu_\Lambda^{Int}(A) &= \mu(A), \quad \forall \Lambda \in \mathcal{P}_F \quad \Longleftrightarrow \\ \mu(A) &= \int \frac{1}{Z_{\mathcal{H}_\Lambda^{Int}}(\omega)} \int \chi_A(\omega'_\Lambda \omega_{\Lambda^c}) e^{-\mathcal{H}_\Lambda^{Int}(\omega'_\Lambda \omega_{\Lambda^c})} d\nu_\Lambda(\omega'_\Lambda) d\mu(\omega) \quad \text{com} \\ Z_{\mathcal{H}_\Lambda^{Int}}(\omega) &= \int_{\Sigma_S^{\Lambda, \omega}} e^{-\mathcal{H}_\Lambda^{Int}(\omega'_\Lambda \omega_{\Lambda^c})} d\nu_\Lambda(\omega'_\Lambda). \end{aligned} \quad (2.10)$$

$\diamond$

**Observação 2.1.3.** Historicamente, as equações DLR são dadas por

$$\frac{d(\mu|_\Lambda)}{d\nu_\Lambda}(\omega_\Lambda) = \int \frac{e^{-\mathcal{H}_\Lambda(\omega_\Lambda \omega'_\Lambda)}}{Z_{\mathcal{H}_\Lambda^{Int}}(\omega')} d\mu(\omega') \quad \nu_\Lambda\text{-q.t.p. } \omega.$$

Atentamos que se trata de uma condição suficiente porém não necessária para que seja válido (2.9).

## Existência do Estado de Gibbs

Motivado pelo exemplo 2.1.6, pretendemos apresentar condições suficientes para a existência de estados de Gibbs. Atente que, até o presente momento, só necessitamos de características mensuráveis para definir a noção de especificação. Não foi ainda discutida a possibilidade de associar-lhe propriedades topológicas. Sendo assim, introduzimos a seguinte definição e logo após o teorema de existência.

**Definição 2.1.6.** Uma especificação  $\Gamma$  é dita Feller se a ação da especificação  $\Gamma$  sobre um observável contínuo  $f$  retorna observáveis contínuos, isto é, se para cada  $\Lambda \in \mathcal{P}_F$ ,  $\gamma_\Lambda f$  é contínuo, sempre que  $f$  for um observável contínuo.

É fácil ver que a propriedade Feller para uma especificação gibbsiana é uma propriedade herdada da continuidade de uma interação.

**Teorema 2.1.1.** *Seja  $\Gamma = \{\gamma_\Lambda\}_{\Lambda \in \mathcal{P}_F}$  uma especificação Feller e considere a sequência de estados  $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , onde  $\mu_n := \gamma_{\Lambda_n}(\bar{\omega}, \cdot)$  para alguma configuração  $\bar{\omega} \in \Sigma_{\mathcal{S}}$ . Temos então que qualquer ponto de acumulação  $\mu$  para  $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  é um estado de Gibbs. Em particular, devido à compacidade de  $\mathcal{S}$ , segue que  $\mathcal{G}(\Gamma) \neq \emptyset$ .*

*Demonstração.* Seja  $\mu$  um ponto de acumulação para a sequência de estados  $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dada como na hipótese. Queremos obter que  $\langle f \rangle_{\mu\gamma_\Lambda} = \langle f \rangle_\mu$  para todo  $f \in C(\Sigma_{\mathcal{S}})$  e para qualquer  $\Lambda \in \mathcal{P}_F$ , de onde segue pelo teorema 1.4.1 que  $\mu\gamma_\Lambda = \mu$  para qualquer  $\Lambda \in \mathcal{P}_F$ . Como  $\Lambda$  foi tomando de forma arbitrária, temos a equação DLR.

Em particular, a condição de compatibilidade da especificação  $\Gamma$  nos dá a identidade

$$\langle f \rangle_{\mu_n\gamma_\Lambda} = \int f d\gamma_\Lambda\gamma_{\Lambda_n} = \langle f \rangle_{\mu_n} \quad (2.11)$$

para todo  $f \in C(\Sigma_{\mathcal{S}})$  e para qualquer  $\Lambda \in \mathcal{P}_F$ . É claro que o lado direito desta equação converge na topologia fraca\* para  $\langle f \rangle_\mu$ , já que  $\mu$  é um ponto de acumulação para  $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Por outro lado, temos que

$$\langle f \rangle_{\mu_n\gamma_\Lambda} = \int f d\gamma_\Lambda\gamma_{\Lambda_n} = \int \gamma_\Lambda f d\gamma_{\Lambda_n} = \langle \gamma_\Lambda f \rangle_{\mu_n}.$$

A hipótese Feller sobre a especificação garante que  $\gamma_\Lambda f$  é um observável contínuo. Assim, pelo mesmo argumento de convergência utilizado anteriormente, o lado esquerdo da equação (2.11) converge para  $\langle \gamma_\Lambda f \rangle_\mu = \langle f \rangle_{\mu\gamma_\Lambda}$ , donde obtemos o resultado.

A proposição 1.4.1 garante que compacidade de  $\mathcal{S}$  implica a compacidade de  $\mathcal{P}(\Sigma_{\mathcal{S}})$ . Como  $\mathcal{P}(\Sigma_{\mathcal{S}})$  é um espaço métrico compacto, então também será sequencialmente compacto, e assim a sequência de estados  $\{\mu_n := \gamma_{\Lambda_n}(\bar{\omega}, \cdot)\}_{n \in \mathbb{N}}$  para qualquer  $\bar{\omega} \in \Sigma_{\mathcal{S}}$ , possui estado  $\mu$  como ponto de acumulação.  $\square$

Conhecidas as condições de existência de um estado de Gibbs, outro questionamento muito importante concerne a sua unicidade. Exibiremos, ao final deste capítulo, certas condições sob as quais é possível garantir tal fato. A literatura clássica deste tópico possui vários exemplos para os quais tal fenômeno não ocorre. Para mais detalhes, veja [24, 56].

Retomamos a noção de equivalência e obtemos o seguinte resultado como corolário da proposição 2.1.1.

**Corolário 2.1.2.** *Se os hamiltonianos de interação  $\mathcal{H}^{Int}$  e  $\mathcal{H}^{Int'}$  são DLR-equivalentes e ao menos um deles é contínuo (o que implica,  $\mathcal{G}(\mathcal{H}^{Int}) \cup \mathcal{G}(\mathcal{H}^{Int'}) \neq \emptyset$ ), então*

$$\mathcal{G}(\mathcal{H}^{Int}) = \mathcal{G}(\mathcal{H}^{Int'}).$$

A discussão sobre a estrutura do espaço dos estados de Gibbs  $\mathcal{G}(\Gamma)$  resume-se à seguinte proposição cuja demonstração encontra-se em [56, 24].

**Proposição 2.1.3.** *Dada uma especificação  $\Gamma$ , o conjunto  $\mathcal{G}(\Gamma)$  dos estados de Gibbs é um convexo fechado. Além disso, as seguintes afirmações são válidas:*

- (i) *um estado  $\mu \in \mathcal{G}(\Gamma)$  é unicamente determinado sobre os conjuntos da  $\sigma$ -álgebra caudal  $\mathcal{B}_\infty$ ;*
- (ii)  *$\mu_1$  e  $\mu_2$  são estados de Gibbs absolutamente contínuos se, e somente se, existe algum observável global  $f \geq 0$  tal que  $\mu_1 = f\mu_2$ ;*
- (iii) *os estados de Gibbs extremais são macroscópicos;*
- (iv) *dois estados de Gibbs extremais distintos  $\mu_1$  e  $\mu_2$  são mutuamente singulares sobre a  $\sigma$ -álgebra caudal  $\mathcal{B}_\infty$ , ou seja, existe  $A \in \mathcal{B}_\infty$  tal que  $\mu_1(A) = 1$  e  $\mu_2(A) = 0$ .*

Os estados de Gibbs extremais podem ser descritos pela propriedade *cluster*, devido ao item (iii) da proposição anterior e à observação 1.4.3. Estes destacam-se na mecânica estatística do equilíbrio, pois caracterizam as fases associadas ao sistema de *spins*. Em particular quando  $|\mathcal{G}(\Phi)| > 1$  para alguma interação  $\Phi$ , isto é, não há unicidade, o sistema de *spins* é dito possuir fenômeno de transição de fase.

Perceba que a dinâmica do operador de *shift* sequer foi mencionada no formalismo DLR. Sendo assim, considere o sistema de *spins* unidimensional  $(\Sigma_S, \sigma, \mathcal{H}^{Int}, \nu)$ .

**Definição 2.1.7.** Uma especificação  $\Gamma = \{\gamma_\Lambda\}_{\Lambda \in \mathcal{P}_F}$  é dita  $\sigma$ -invariante caso

$$\gamma_{\Lambda+i}(\sigma^i(\omega), \sigma^i(A)) = \gamma_\Lambda(\omega, A)$$

para todo  $\Lambda \in \mathcal{P}_F$ ,  $i \in \mathcal{L}$ ,  $\omega \in \Sigma_S$  e  $A \in \mathcal{B}^{\mathcal{L}}$ .

É fácil obter que tal propriedade é herdada de hamiltonianos  $\sigma$ -invariantes.

A inserção da propriedade  $\sigma$ -invariante sobre as especificações possibilita obter um resultado de existência mais específico. Retornando à demonstração do teorema 2.1.1, o qual garante a existência de um estado de Gibbs, considere a seguinte sequência de estados  $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ :

$$\mu_n := \frac{1}{|\Lambda_n|} \sum_{i \in \Lambda_n} \gamma_{\Lambda_n+i}(\bar{\omega}, \cdot)$$

para alguma configuração  $\bar{\omega} \in \Sigma_S$ . Empregando argumentação semelhante à da demonstração, é possível obter existência de estado de Gibbs para o caso de uma especificação

$\sigma$ -invariante a partir desta sequência  $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Além disso, devido ao item (i) da proposição 1.4.3, temos que qualquer ponto de acumulação da sequência anterior é  $\sigma$ -invariante, donde resulta o seguinte corolário.

**Corolário 2.1.3.** *Seja  $\Gamma$  uma especificação Feller  $\sigma$ -invariante. Então*

$$\mathcal{G}(\Gamma) \cap \mathcal{P}_\sigma(\Sigma_S) \neq \emptyset. \quad (2.12)$$

Denotaremos por  $\mathcal{G}_\sigma(\Gamma)$  o conjunto dos estados de Gibbs  $\sigma$ -invariantes,  $\mathcal{G}(\Gamma) \cap \mathcal{P}_\sigma(\Sigma_S)$ . O corolário anterior apresenta condições para que tal conjunto seja não vazio. Note que  $\mathcal{G}_\sigma(\Gamma)$ , por ser intersecção de convexos fechados, também é o conjunto convexo fechado. Dedicaremos a próxima seção ao estudo de uma caracterização particularmente interessante para tal conjunto. Veremos que, assim como o caso de volume finito, os estados de Gibbs  $\sigma$ -invariantes podem ser definidos como os estados que verificam um dado princípio variacional.

**Notação 2.1.3.** No caso gibbsiano, o conjunto dos estados de Gibbs  $\sigma$ -invariantes será denotado por  $\mathcal{G}_\sigma(\mathcal{H}^{Int})$  ou  $\mathcal{G}_\sigma(\Phi)$ .

Atente que invariância de uma especificação não proíbe a existência de estados de Gibbs que não são  $\sigma$ -invariantes. Quando isto ocorre, diz-se introduzido o fenômeno de quebra de simetria sobre o sistema de *spins*. Além disso, tal fato é responsável por uma grande quantidade de exemplos com fenômeno de transição de fase; veja [24].

### 2.1.3 Abordagem Variacional

Utilizando-se das propriedades dinâmicas do sistema de *spins*, temos o intuito de generalizar as funções termodinâmicas e, a partir destas, caracterizar estados de Gibbs  $\sigma$ -invariantes associados a um sistema de *spins* de volume infinito. Inicialmente introduzida pelos trabalhos de Gallavotti e Miracle-Sole [20], de Ruelle [45] e de Dobrushin [15], para interações  $\sigma$ -invariantes, tal abordagem pode ser obtida através de dois argumentos. O primeiro, descrito pela referência [24], apresenta o princípio variacional para tais funções termodinâmicas com respeito a uma especificação. O outro argumento define os estados de Gibbs  $\sigma$ -invariantes pela noção de funcional tangente à pressão sobre o conjunto de interações  $\sigma$ -invariantes, sendo descrita pela referência [28]. Na tentativa de apresentar uma síntese da abordagem variacional, destacando ambos os argumentos, restringimos nosso contexto às especificações gibbsianas  $\sigma$ -invariantes, isto é, interações contínuas  $\sigma$ -invariantes, assim como é feito na referência [56].

Iniciaremos tal discussão apresentando as generalizações das três funções termodinâmicas: energia média, entropia e pressão. O ponto crucial desta extensão é perceber que

a noção dinâmica permite apresentar versões de tais funções por unidade de volume, isto é, garante que o limite das densidades destas funções sobre cada parcela finita  $\Lambda \in \mathcal{P}_F$  está bem definido.

Sendo assim, dada  $\Phi$  uma interação contínua  $\sigma$ -invariante, considere o sistema de *spins* unidimensional  $(\Sigma_S, \sigma, \mathcal{H}^{Int}, \nu)$ .

**Definição 2.1.8** (Energia média ou densidade de energia). Definimos a energia média associada a um hamiltoniano  $\sigma$ -invariante pondo

$$\langle \mathcal{H}^{Int} \rangle_\mu := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\Lambda_n|} \int \mathcal{H}_{\Lambda_n}^{Int} d\mu.$$

Lembre-se de que esta definição já foi introduzida no capítulo anterior (veja definição 1.5.6), sempre que o respectivo limite existisse. Para garantir que a energia média esteja bem definida no caso de interações  $\sigma$ -invariantes, necessitaremos da seguinte função

$$\Psi_0^\Phi(\omega) := \sum_{X \ni 0} \frac{\Phi_X(\omega)}{|X|}, \quad (2.13)$$

a qual, devido à propriedade absolutamente somável (definição 1.5.2), está bem definida, já que

$$\left\| \sum_{X \ni 0} \frac{\Phi_X}{|X|} \right\|_\infty \leq \sup_{i \in \mathcal{L}} \sum_{X \ni i} \frac{1}{|X|} \|\Phi_X\|_\infty \leq \sup_{i \in \mathcal{L}} \sum_{X \ni i} \|\Phi_X\|_\infty < \infty. \quad (2.14)$$

Assim,  $\Psi_0^\Phi$  é um observável e, além disso, é contínuo por ser limite uniforme de observáveis contínuos. O corolário abaixo, cuja demonstração segue do resultado mais geral dado pela proposição 2.2.1 da próxima seção, junto com a integrabilidade de  $\Psi_0^\Phi$  garante que a primeira função termodinâmica também está bem definida para as interações  $\sigma$ -invariantes.

**Corolário 2.1.4.** *Dados  $\Phi$  uma interação contínua  $\sigma$ -invariante e um estado  $\mu$   $\sigma$ -invariante, temos  $\langle \mathcal{H}^{Int} \rangle_\mu = \langle \Psi_0^\Phi \rangle_\mu$ .*

Prosseguimos com as demais funções termodinâmicas e suas respectivas propriedades.

**Definição 2.1.9** (Entropia relativa). Sejam  $\mu$  e  $\mu'$  estados  $\sigma$ -invariantes. Definimos, quando o limite existir, a entropia relativa de  $\mu$  com respeito a  $\mu'$  por

$$h(\mu|\mu') := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\Lambda_n|} H_n(\mu|\mu'),$$

$$\text{onde } H_n(\mu|\mu') := \begin{cases} - \int \left( \frac{d\mu|_{\Lambda_n}}{d\mu'|_{\Lambda_n}} \log \frac{d\mu|_{\Lambda_n}}{d\mu'|_{\Lambda_n}} \right) d\mu'|_{\Lambda_n} = - \int \log \frac{d\mu|_{\Lambda_n}}{d\mu'|_{\Lambda_n}} d\mu|_{\Lambda_n}, & \text{se } \mu \ll \mu'; \\ -\infty, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Em particular, quando  $\mu'$  é dado pelo estado básico  $\nu$  sobre o espaço de configurações, denominaremos  $h_\nu(\mu) := h(\mu|\nu)$  somente de entropia.

**Observação 2.1.4.** A função  $H_n(\mu|\mu')$  tem sua origem na teoria da informação, onde é conhecida pela denominação de *divergência de Kullback-Leibler*. Não é difícil perceber que esta é uma extensão da entropia para volume finito  $H_\nu(\mu)$  apresentada no exemplo 1.5.13.

Não é uma tarefa fácil argumentar a favor da existência do limite que define a entropia relativa. Um contraexemplo pode ser encontrado na referência [56]. No entanto, a função entropia  $h_\nu$  está bem definida como pode ser visto pela seguinte proposição, cuja demonstração encontra-se nas referências [32, 24, 56].

**Proposição 2.1.4.** *Sejam  $\mu$  um estado  $\sigma$ -invariante e  $\nu$  o estado básico. Então o limite que define a entropia  $h_\nu$  existe, sendo válido*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\Lambda_n|} H_n(\mu|\nu) = \inf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\Lambda_n|} H_n(\mu|\nu).$$

Além disso, entropia  $h_\nu$  satisfaz as seguintes propriedades:

- (i)  $\log \inf_{\omega \in \Sigma, \varepsilon > 0} \nu([\omega]_{\{0\}, \varepsilon}) \leq h_\nu(\mu) \leq 0$ ;
- (ii)  $h_\nu$  é um função afim, ou seja, dados estados  $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n \in \mathcal{P}_\sigma(\Sigma_S)$  e constantes  $c_0, c_1, \dots, c_n > 0$  tais que  $\sum_{i=0}^n c_i = 1$ , temos

$$h_\nu \left( \sum_{i=0}^n c_i \mu_i \right) = \sum_{i=0}^n c_i h_\nu(\mu_i);$$

- (iii)  $h_\nu$  é uma função semicontínua superiormente para a topologia fraca\*, isto é, para  $\mu \in \mathcal{P}_\sigma(\Sigma_S)$  e  $\varepsilon > 0$ , existe vizinhança  $U$  de  $\mu$  tal que, para todo estado  $\mu' \in U$ , temos  $h_\nu(\mu') < h_\nu(\mu) + \varepsilon$ .

Por fim, introduzimos a última função termodinâmica fundamental para a abordagem variacional, a qual generaliza o conceito de pressão.

**Definição 2.1.10** (Energia livre de Gibbs). Seja  $\mathcal{H}$  um hamiltoniano contínuo  $\sigma$ -invariante. Definimos, quando o limite existir, a energia livre de Gibbs colocando

$$p_\nu(\mathcal{H}) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\Lambda_n|} \log P_{\nu, n}(\mathcal{H}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\Lambda_n|} \log \int e^{-\mathcal{H}\Lambda_n} d\nu.$$

**Observação 2.1.5.**  $P_{\nu, n}(\mathcal{H})$  é o análogo da função de partição  $Z_{\mathcal{H}}$  para volume finito.

Perceba que, nesta definição, não fizemos menção explícita quanto à natureza do hamiltoniano, se obtido de um potencial contínuo  $\sigma$ -invariante ou de uma interação contínua  $\sigma$ -invariante. Uma justificativa para tal abrangência será dada, na próxima seção, pela proposição 2.2.1 e pela discussão que desta segue.

No caso em que o hamiltoniano  $\mathcal{H}^{Int}$  advém de  $\Phi$  uma interação contínua  $\sigma$ -invariante, a existência do limite que define a energia livre de Gibbs  $p_\nu(\mathcal{H}^{Int})$  é assegurada a seguir pelo teorema 2.1.6. Por enquanto, apresentamos a seguinte propriedade:

**Lema 2.1.5.** *Para quaisquer interações contínuas  $\Phi$  e  $\Phi'$ , sejam  $\mathcal{H}^{Int}$  e  $\mathcal{H}^{Int'}$  os respectivos hamiltonianos. Então*

$$\left| \log P_{\nu,n}(\mathcal{H}^{Int}) - \log P_{\nu,n}(\mathcal{H}^{Int'}) \right| \leq \left\| \mathcal{H}_{\Lambda_n}^{Int'} - \mathcal{H}_{\Lambda_n}^{Int} \right\|_{\infty}.$$

*Demonstração.* Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , escolha configurações  $\bar{\omega}^{(n)}$  e  $\underline{\omega}^{(n)}$  satisfazendo

$$e^{-\mathcal{H}_{\Lambda_n}^{Int}(\bar{\omega}^{(n)})} = \max_{\omega \in \Sigma_S} e^{-\mathcal{H}_{\Lambda_n}^{Int}(\omega)} \quad \text{e} \quad e^{-\mathcal{H}_{\Lambda_n}^{Int'}(\underline{\omega}^{(n)})} = \min_{\omega \in \Sigma_S} e^{-\mathcal{H}_{\Lambda_n}^{Int'}(\omega)}.$$

O resultado é imediato de

$$\begin{aligned} \frac{P_{\nu,n}(\mathcal{H}^{Int})}{P_{\nu,n}(\mathcal{H}^{Int'})} &= \frac{\int e^{-\mathcal{H}_{\Lambda_n}^{Int}} d\nu}{\int e^{-\mathcal{H}_{\Lambda_n}^{Int'}} d\nu} \leq e^{\mathcal{H}_{\Lambda_n}^{Int'}(\underline{\omega}^{(n)}) - \mathcal{H}_{\Lambda_n}^{Int}(\bar{\omega}^{(n)})} \\ &\leq e^{\mathcal{H}_{\Lambda_n}^{Int'}(\underline{\omega}^{(n)}) - \mathcal{H}_{\Lambda_n}^{Int'}(\bar{\omega}^{(n)})} e^{\|\mathcal{H}_{\Lambda_n}^{Int'} - \mathcal{H}_{\Lambda_n}^{Int}\|_{\infty}} \leq e^{\|\mathcal{H}_{\Lambda_n}^{Int'} - \mathcal{H}_{\Lambda_n}^{Int}\|_{\infty}} \end{aligned}$$

e do papel permutável dos hamiltonianos em tal desigualdade.  $\square$

## Princípio Variacional

Definidas as funções termodinâmicas para os sistemas de *spins* unidimensionais, gostaríamos de obter um princípio variacional para tais funções que caracterizasse os estados de Gibbs  $\sigma$ -invariantes. Com esta intenção, investigamos no próximo teorema as relações entre a entropia relativa e o conjunto dos estados de Gibbs  $\sigma$ -invariantes.

**Teorema 2.1.6.** *Seja  $(\Sigma_S, \sigma, \mathcal{H}^{Int}, \nu)$  um sistema de spins unidimensional para uma interação  $\Phi$  contínua  $\sigma$ -invariante. As seguintes afirmações são válidas:*

- (i) *para qualquer estado de Gibbs  $\sigma$ -invariante  $\mu \in \mathcal{G}_{\sigma}(\mathcal{H}^{Int})$ , a entropia relativa  $h(\cdot, \mu)$  existe para todo estado  $\sigma$ -invariante  $\eta \in \mathcal{P}_{\sigma}(\Sigma_S)$ . Além disso, a seguinte relação é satisfeita*

$$h(\eta|\mu) = h_{\nu}(\eta) - p_{\nu}(\mathcal{H}^{Int}) - \langle \mathcal{H}^{Int} \rangle_{\mu};$$

- (ii) *se  $\mu \in \mathcal{G}_{\sigma}(\mathcal{H}^{Int})$  é um estado de Gibbs  $\sigma$ -invariante e  $\eta \in \mathcal{P}_{\sigma}(\Sigma_S)$  é um estado  $\sigma$ -invariante tais que  $h(\eta|\mu) = 0$ , então  $\eta \in \mathcal{G}_{\sigma}(\mathcal{H}^{Int})$ .*

Enfatizamos que este é um dos resultados fundamentais da teoria. Referenciamos [24, 56] para a demonstração deste teorema. A ideia principal da prova é a análise assintótica dos termos da seguinte relação

$$H_n(\eta|\mu_{\Lambda_n}^{Int}(\omega, \cdot)) = H_n(\eta|\nu) - \log P_{\nu,n}(\mathcal{H}^{Int}) - \int \mathcal{H}_{\Lambda_n}^{Int} d\eta,$$

a qual é válida para todo  $\omega \in \Sigma_S$  e para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Numa primeira etapa, garante-se a convergência quando  $n \rightarrow \infty$  para todos os termos divididos por  $|\Lambda_n|$  com exceção de  $\log P_{\nu,n}(\mathcal{H}^{Int})$ , sendo então a existência do respectivo limite (trata-se da energia livre de Gibbs para  $\mathcal{H}^{Int}$ ) garantida nesta passagem. Como  $\mu_{\Lambda_n}^{Int}(\omega, \cdot)$  caracteriza qualquer estado de Gibbs  $\sigma$ -invariante quando condicionado à sub- $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{B}^{\Lambda_n}$ , o argumento segue utilizando-se de resultados técnicos sobre a convergência dos termos na relação anterior.

Como consequência direta do teorema 2.1.6, obtemos uma caracterização variacional para os estados de Gibbs  $\sigma$ -invariantes.

**Corolário 2.1.7** (Princípio variacional). *Seja  $(\Sigma_S, \sigma, \mathcal{H}^{Int}, \nu)$  um sistema de spins unidimensional para uma interação  $\Phi$  contínua  $\sigma$ -invariante. Então é válido o seguinte princípio*

$$p_\nu(\mathcal{H}^{Int}) = \sup \left\{ h_\nu(\mu) - \langle \mathcal{H}^{Int} \rangle_\mu : \mu \in \mathcal{P}_\sigma(\Sigma_S) \right\}. \quad (2.15)$$

Além disso, o conjunto de estados que atinge tal supremo é exatamente  $\mathcal{G}_\sigma(\mathcal{H}^{Int})$ , o conjunto dos estados de Gibbs  $\sigma$ -invariantes.

### Funcional Tangente

Perceba que o corolário anterior também caracteriza de forma variacional a energia livre de Gibbs, sendo esta dada pelo valor que maximiza o funcional  $h_\nu(\cdot) - \langle \mathcal{H}^{Int} \rangle_{(\cdot)}$  sobre  $\mathcal{P}_\sigma(\Sigma_S)$ . Isto nos motiva a uma investigação mais detalhada do comportamento de  $p_\nu$  e de sua relação com os estados de Gibbs  $\sigma$ -invariantes para uma dada interação  $\Phi$ . Em particular, destacaremos algumas propriedades da energia livre de Gibbs quando vista como uma função em  $\mathcal{B}_\sigma(\Sigma_S)$ .

**Notação 2.1.4.** A partir deste momento, será mais conveniente denotar  $p_\nu(\mathcal{H}^{Int})$  e  $P_{\nu,n}(\mathcal{H}^{Int})$ , respectivamente, por  $p_\nu(\Phi)$  e  $P_{\nu,n}(\Phi)$ .

O resultado abaixo segue do lema 2.1.5.

**Proposição 2.1.5.** *Sejam  $\Phi$  e  $\Phi'$  interações contínuas  $\sigma$ -invariantes. A função  $p_\nu : \mathcal{B}_\sigma(\Sigma_S) \rightarrow \mathbb{R}$  é convexa, isto é,  $p_\nu(t\Phi + (1-t)\Phi') \leq tp_\nu(\Phi) + (1-t)p_\nu(\Phi')$ , para todo  $0 \leq t \leq 1$ , e satisfaz*

$$|p_\nu(\Phi) - p_\nu(\Phi')| \leq \|\Phi' - \Phi\|_{\mathcal{B}_\sigma(\Sigma_S)},$$

onde  $\mathcal{H}^{Pot}$  e  $\mathcal{H}^{Pot'}$  são os respectivos hamiltonianos associados.

Sendo assim, usufruindo das propriedades do espaço  $\mathcal{B}_\sigma(\Sigma_S)$  e da convexidade da energia livre de Gibbs, introduzimos as seguintes noções geométricas.

**Definição 2.1.11.** Seja  $L : \mathcal{B}_\sigma(\Sigma_S) \rightarrow \mathbb{R}$  uma função linear.

- (i)  $L$  é  $p_\nu$ -limitada se existe uma constante  $C \in \mathbb{R}$  tal que  $L(\Phi') \leq p_\nu(\Phi') + C$  para todo  $\Phi' \in \mathcal{B}_\sigma(\Sigma_S)$
- (ii)  $L$  é dita ser um funcional tangente à energia livre de Gibbs  $p_\nu$  em  $\Phi$  se, para toda interação  $\sigma$ -invariante  $\Phi'$ , temos

$$p_\nu(\Phi + \Phi') - p_\nu(\Phi) \geq L(\Phi'). \quad (2.16)$$

O conjunto de todos os funcionais tangentes a  $p_\nu$  em  $\phi$  é denotado por  $t_\phi(\Sigma_S)$ .

**Exemplo 2.1.8.** *Funcional associado a um estado  $\mu$ :* Para qualquer estado  $\sigma$ -invariante  $\mu \in \mathcal{P}_\sigma(\Sigma_S)$  com entropia  $h_\nu(\mu)$  finita, considere a função linear dada por

$$L_\mu(\Phi) := \int - \sum_{X \ni 0} \frac{\Phi_X(\omega)}{|X|} d\mu = \langle -\Psi_0^\Phi \rangle_\mu$$

para qualquer interação  $\Phi \in \mathcal{B}_\sigma(\Sigma_S)$ . Segue do princípio variacional que a desigualdade

$$p_\nu(\Phi) - h_\nu(\mu) \geq \langle -\mathcal{H}^{Int} \rangle_\mu$$

é válida para qualquer interação  $\Phi \in \mathcal{B}_\sigma(\Sigma_S)$  e seu respectivo hamiltoniano associado  $\mathcal{H}^{Int}$ . Veremos no corolário 2.2.1 da próxima seção que  $\langle -\mathcal{H}^{Int} \rangle_\mu = \langle -\Psi_0^\Phi \rangle_\mu$ . Este fato e a desigualdade acima nos permitem concluir que o funcional  $L_\mu$  é  $p_\nu$ -limitado com constante  $C = -h_\nu(\mu)$ .  $\diamond$

As noções de funcional  $p_\nu$ -limitado e tangente à energia livre de Gibbs permitem apresentar uma caracterização geométrica para os conjuntos  $\mathcal{P}_\sigma(\Sigma_S)$  e  $\mathcal{G}_\sigma(\Phi)$  da seguinte maneira:

**Teorema 2.1.8.**

- (i) Se  $L$  é  $p_\nu$ -limitado, então existe um único estado  $\sigma$ -invariante  $\mu$  tal que  $L = L_\mu$ ;
- (ii) O estado  $\sigma$ -invariante  $\mu$  é de Gibbs para uma interação  $\sigma$ -invariante  $\Phi$  se, e somente se, o funcional  $L_\mu$  é tangente à energia livre de Gibbs em  $\Phi$ .

Tal descrição geométrica dos estados de Gibbs  $\sigma$ -invariantes não é o foco de estudo desta dissertação e foi apresentada apenas a um título de complementaridade. Para uma descrição mais detalhada deste tópico, veja as referências [28, 24].

## 2.2 Transição entre os Formalismos

Apesar de a abordagem variacional do formalismo DLR ser edificada sobre hamiltonianos obtidos de interações, algumas passagens, como, por exemplo, a existência da energia

média de uma interação e o exemplo 2.1.8, dão razão a uma associação entre interações e potenciais. O pivô desta relação é dado pelo observável  $\Psi_0^\Phi$  (veja equação (2.13)), o qual pode ser interpretado como o observável da origem que define um potencial  $\sigma$ -invariante  $\Psi^\Phi = \{\Psi_0^\Phi \circ \sigma^n\}_{n \in \mathcal{L}}$ . Desenvolvendo tal construção, obtemos os seguintes potenciais.

**Exemplo 2.2.1.** *Potencial obtido de uma interação:* O potencial  $\Psi^\Phi := \{\Psi_n^\Phi : \Sigma_{\mathcal{S}} \rightarrow \mathbb{R}\}_{n \in \mathcal{L}}$  associado a uma interação  $\Phi$  é dado por

$$\Psi_n^\Phi(\omega) := \sum_{\Lambda \ni n} \frac{\Phi_\Lambda(\omega)}{|\Lambda|}, \text{ para todo } n \in \mathcal{L}.$$

Pelo mesmo argumento fornecido pela equação (2.14), temos que cada  $\Psi_n$  está bem definido, tratando-se de um observável. Além disso, verifica-se que a continuidade e  $\sigma$ -invariância são propriedades herdadas da interação  $\Phi$ . Perceba que tal potencial aparece em todos os exemplos de interações presentes no primeiro capítulo.  $\diamond$

Obtemos a seguinte proposição para o caso invariante.

**Proposição 2.2.1.** *Dada uma interação  $\sigma$ -invariante  $\Phi$ , seja seu potencial  $\Psi^\Phi$ . Considere  $\mathcal{H}^{Int}$  e  $\mathcal{H}^{Pot}$  os respectivos hamiltonianos associados. Então*

$$\|\mathcal{H}_{\Lambda_n}^{Int} - \mathcal{H}_{\Lambda_n}^{Pot}\|_\infty = o(|\Lambda_n|). \quad (2.17)$$

*Demonstração.* Reescrevendo o hamiltoniano  $\mathcal{H}^{Pot}$  associado ao potencial  $\Psi^\Phi$  em termos dos elementos de  $\mathcal{P}_F$ , encontramos

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\Lambda^{Pot} &= \sum_{n \in \Lambda} \Psi_n^\Phi = \sum_{n \in \Lambda} \sum_{X \ni n} \frac{\Phi_X}{|X|} = \sum_{X \cap \Lambda \neq \emptyset} \frac{|X \cap \Lambda|}{|X|} \Phi_X \\ &= \sum_{X \subset \Lambda} \Phi_X + \sum_{\substack{X \cap \Lambda \neq \emptyset \\ X \cap \Lambda^c \neq \emptyset}} \frac{|X \cap \Lambda|}{|X|} \Phi_X. \end{aligned}$$

Perceba que o primeiro somatório da segunda linha da equação anterior é a parte livre  $\mathcal{H}_0^{Int}$  do hamiltoniano de interação. Devido à decomposição do hamiltoniano de interação

$\mathcal{H}^{Int}$  em suas partes livre  $\mathcal{H}_\circ^{Int}$  e de fronteira  $\mathcal{H}_\partial^{Int}$ , temos

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{H}_\Lambda^{Int} - \mathcal{H}_\Lambda^{Pot}\|_\infty &\leq \|\mathcal{H}_{\Lambda^\circ}^{Int} - \mathcal{H}_\Lambda^{Pot}\|_\infty + \|\mathcal{H}_{\partial\Lambda}^{Int}\|_\infty \\
&\leq \sum_{\substack{X \cap \Lambda \neq \emptyset \\ X \cap \Lambda^c \neq \emptyset}} \frac{|X \cap \Lambda|}{|X|} \|\Phi_X\|_\infty + \sum_{\substack{X \cap \Lambda \neq \emptyset \\ X \cap \Lambda^c \neq \emptyset}} \|\Phi_X\|_\infty \\
&\leq \sum_{n \in \Lambda} \sum_{\substack{X \ni n \\ X \cap \Lambda^c \neq \emptyset}} \frac{1}{|X|} \|\Phi_X\|_\infty + \sum_{n \in \Lambda} \sum_{\substack{X \ni n \\ X \cap \Lambda^c \neq \emptyset}} \|\Phi_X\|_\infty \\
&= \sum_{n \in \Lambda} \sum_{\substack{X \ni n \\ X \cap \Lambda^c \neq \emptyset}} \frac{(1 + |X|)}{|X|} \|\Phi_X\|_\infty.
\end{aligned}$$

Utilizando então a invariância, estabelecemos

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{H}_\Lambda^{Int} - \mathcal{H}_\Lambda^{Pot}\|_\infty &\leq \sum_{n \in \Lambda} \sum_{\substack{Y \ni 0 \\ (Y+n) \cap \Lambda^c \neq \emptyset}} 2 \|\Phi_{(Y+n)}\|_\infty = \sum_{n \in \Lambda} \sum_{\substack{Y \ni 0 \\ (Y+n) \cap \Lambda^c \neq \emptyset}} 2 \|\Phi_Y\|_\infty \\
&= \sum_{Y \ni 0} 2 \left| (\Lambda^c - Y) \cap \Lambda \right| \|\Phi_Y\|_\infty,
\end{aligned}$$

onde  $\Lambda^c - Z = \{k - j \in \mathcal{L} : k \in \Lambda^c \text{ e } j \in Z\}$ , para  $Z \subset \mathcal{L}$ . Dividindo por  $|\Lambda|$ , vemos que

$$\frac{1}{|\Lambda|} \|\mathcal{H}_\Lambda^{Int} - \mathcal{H}_\Lambda^{Pot}\|_\infty \leq \sum_{Y \ni 0} 2 \frac{|(\Lambda^c - Y) \cap \Lambda|}{|\Lambda|} \|\Phi_Y\|_\infty.$$

Seja um espaço mensurável formado pelo conjunto enumerável  $\Upsilon = \{Y \in \mathcal{P}_F : 0 \in Y\}$  munido da  $\sigma$ -álgebra de partes  $\mathcal{P}(\Upsilon)$ . Como  $\Phi$  é uma interação  $\sigma$ -invariante e absolutamente somável, definimos a medida  $\mu_\Upsilon : \mathcal{P}(\Upsilon) \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$\mu_\Upsilon(\mathcal{J}) := \sum_{Y \in \mathcal{J}} 2 \|\Phi_Y\|, \quad \forall \mathcal{J} \in \mathcal{P}(\Upsilon).$$

Em particular, esta medida é finita já que  $\mu_\Upsilon(\Upsilon) = 2 \|\Phi\|_{\mathcal{B}(\Sigma_S)}$ . Considere a sequência de funções  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  definidas por  $f_n(Y) = \frac{|(\Lambda_n^c - Y) \cap \Lambda_n|}{|\Lambda_n|}$  para cada  $Y \in \Upsilon$ . Note que cada função  $f_n$  é integrável, pois

$$\int f_n d\mu_\Upsilon = \sum_{Y \ni 0} f_n(Y) \mu_\Upsilon(Y) = \sum_{Y \ni 0} 2 \frac{|(\Lambda_n^c - Y) \cap \Lambda_n|}{|\Lambda_n|} \|\Phi_Y\| < \infty.$$

Para cada  $Y \in \Upsilon$ , verificamos que

$$f_n(Y) = \frac{|(\Lambda_n^c - Y) \cap \Lambda_n|}{|\Lambda_n|} \leq \sum_{j \in Y} \frac{|(\Lambda_n^c - \{j\}) \cap \Lambda_n|}{|\Lambda_n|} = \sum_{j \in Y} \frac{|\Lambda_n \setminus (\Lambda_n - \{j\})|}{|\Lambda_n|}.$$

Observe que a cota superior na desigualdade acima tende a zero quando  $n \rightarrow \infty$  e, portanto,  $f_n \rightarrow 0$  pontualmente.

Como  $\frac{|(\Lambda_n^c - Y) \cap \Lambda|}{|\Lambda|} \leq 1$ , obtemos que a função constante e igual a 1 domina a sequência  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , isto é,  $|f_n| \leq 1$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Um vez que  $\mu_\Upsilon$  é uma medida finita, funções constantes são funções integráveis.

Assim, devido ao Teorema da Convergência Dominada (consulte o teorema A.0.6 no apêndice A), temos que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\Lambda_n|} \|\mathcal{H}_{\Lambda_n}^{Int} - \mathcal{H}_{\Lambda_n}^{Pot}\|_\infty &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{Y \geq 0} 2 \frac{|(\Lambda_n^c - Y) \cap \Lambda_n|}{|\Lambda_n|} \|\Phi_Y\|_\infty \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu_\Upsilon = 0, \end{aligned}$$

donde concluímos que  $\|\mathcal{H}_{\Lambda_n}^{Int} - \mathcal{H}_{\Lambda_n}^{Pot}\|_\infty = o(|\Lambda_n|)$ .  $\square$

Tal relação assintótica entre os hamiltonianos possui as seguintes implicações sobre a energia média e a energia livre de Gibbs.

**Corolário 2.2.1.** *Sob as mesmas hipóteses anteriores, temos*

$$\langle \mathcal{H}^{Int} \rangle_\mu = \langle \mathcal{H}^{Pot} \rangle_\mu = \langle \Psi_0^\Phi \rangle_\mu \quad e \quad p_\nu(\mathcal{H}^{Int}) = p_\nu(\mathcal{H}^{Pot}).$$

*Demonstração.* Atente que

$$\langle \mathcal{H}^{Pot} \rangle_\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\Lambda_n|} \int \sum_{i \in \Lambda_n} (\Psi_0^\Phi \circ \sigma^n) d\mu = \langle \Psi_0^\Phi \rangle_\mu,$$

devido às  $\sigma$ -invariâncias do potencial  $\Psi^\Phi$  e do estado  $\nu$ . Além disso, considere a seguinte desigualdade válida para a energia média

$$\left| \langle \mathcal{H}^{Int} \rangle_\mu - \langle \mathcal{H}^{Pot} \rangle_\mu \right| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\Lambda_n|} \left| \int (\mathcal{H}_{\Lambda_n}^{Int} - \mathcal{H}_{\Lambda_n}^{Pot}) d\mu \right| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\Lambda_n|} \|\mathcal{H}_{\Lambda_n}^{Int} - \mathcal{H}_{\Lambda_n}^{Pot}\|_\infty.$$

Com relação à energia livre de Gibbs, procedemos como na prova do lema 2.1.5 e obtemos

$$e^{-\|\mathcal{H}_{\Lambda_n}^{Pot} - \mathcal{H}_{\Lambda_n}^{Int}\|_\infty} \leq \frac{P_{\nu,n}(\mathcal{H}^{Int})}{P_{\nu,n}(\mathcal{H}^{Pot})} \leq e^{\|\mathcal{H}_{\Lambda_n}^{Pot} - \mathcal{H}_{\Lambda_n}^{Int}\|_\infty},$$

donde segue que

$$\begin{aligned} |p_\nu(\mathcal{H}^{Int}) - p_\nu(\mathcal{H}^{Pot})| &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\Lambda_n|} |\log P_{\nu,n}(\mathcal{H}^{Int}) - \log P_{\nu,n}(\mathcal{H}^{Pot})| \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\Lambda_n|} \|\mathcal{H}_{\Lambda_n}^{Int} - \mathcal{H}_{\Lambda_n}^{Pot}\|_\infty. \end{aligned}$$

Assim, as igualdades tanto entre energias médias quanto entre energias livres de Gibbs são consequência direta da proposição 2.2.1.  $\square$

Um fato que se destaca no corolário anterior é a possibilidade de descrever as funções termodinâmicas que dependem explicitamente da interação  $\sigma$ -invariante  $\Phi$  – a energia média e a energia livre de Gibbs – através do potencial  $\sigma$ -invariante  $\Psi^\Phi$  associado. Motivado por tal relação propõe-se, portanto, uma reescritura da abordagem variacional, empregando os potenciais  $\sigma$ -invariantes associados.

**Notação 2.2.1.** Sabe-se que um potencial  $\sigma$ -invariante é unicamente determinado pelo observável da origem  $\Psi_0$ . Desta forma,  $\Psi$  denotará indistintamente a coletânea de observáveis  $\{\Psi_0 \circ \sigma^n\}_{n \in \mathbb{N}}$  que forma um potencial  $\sigma$ -invariante ou o observável da origem  $\Psi_0$  que define a família anterior. Por sua vez, o conjunto de todos os potenciais contínuos  $\sigma$ -invariantes será representado por  $C(\Sigma_S)$ . Quando for conveniente, denotaremos  $p_\nu(\mathcal{H}^{Pot})$  e  $P_{\nu,n}(\mathcal{H}^{Pot})$ , respectivamente, por  $p_\nu(\Psi)$  e  $P_{\nu,n}(\Psi)$ .

A energia livre de Gibbs vista como uma função sobre o conjunto dos potenciais contínuos  $\sigma$ -invariantes  $C(\Sigma_S)$  apresenta as seguintes propriedades.

**Proposição 2.2.2.** *Sejam  $\Psi$  um potencial contínuo  $\sigma$ -invariante e  $\mathcal{H}^{Pot}$  seu hamiltoniano associado. Então, existe o limite que define a energia livre de Gibbs*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\Lambda_n|} \log \int e^{-\mathcal{H}_{\Lambda_n}^{Pot}} d\nu.$$

*Temos que  $p_\nu : C(\Sigma_S) \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função convexa e Lipschitz contínua, isto é, dados  $\Psi$  e  $\Psi'$  potenciais contínuos  $\sigma$ -invariantes, vale*

$$p_\nu(t\Psi + (1-t)\Psi') \leq tp_\nu(\Psi) + (1-t)p_\nu(\Psi'), \quad \forall 0 \leq t \leq 1$$

$$e \quad |p_\nu(\Psi) - p_\nu(\Psi')| \leq \|\Psi' - \Psi\|_\infty.$$

*Além disso, esta função satisfaz*

- (i)  $p_\nu(0) = 0$ ;
- (ii)  $\Psi \leq \Psi' \implies p_\nu(\Psi') \leq p_\nu(\Psi)$ ;
- (iii)  $\inf(-\Psi) \leq p_\nu(\Psi) \leq \sup(-\Psi)$ ;
- (iv)  $|p_\nu(\Psi)| \leq p_\nu(|\Psi|)$ ;
- (v)  $p_\nu(\Psi + c) = p_\nu(\Psi) - c$ ;
- (vi)  $p_\nu(\Psi + \Psi' \circ \sigma - \Psi') = p_\nu(\Psi)$ ;
- (vii)  $c \geq 1 \implies p_\nu(c\Psi) \leq cp_\nu(\Psi)$  e  $c \leq 1 \implies p_\nu(c\Psi) \geq cp_\nu(\Psi)$ .

Tal mudança de ponto de vista para a abordagem variacional possibilita reenunciar o princípio variacional em termos do potencial  $\Psi^\Phi$  associado a uma interação  $\Phi$ .

**Corolário 2.2.2** (Princípio Variacional). *Sejam  $\Phi$  interação contínua  $\sigma$ -invariante e  $(\Sigma_S, \sigma, \mathcal{H}^{Int}, \nu)$  sistema de spins unidimensional. Então,*

$$p_\nu(\Psi^\Phi) = \sup \left\{ h_\nu(\mu) - \langle \Psi^\Phi \rangle_\mu : \mu \in \mathcal{P}_\sigma(\Sigma_S) \right\}. \quad (2.18)$$

Além disso,  $\mathcal{G}_\sigma(\Phi)$  é caracterizado como o conjunto de estados que atinge o supremo anterior.

Ademais, os itens (v) e (vi) da proposição 2.2.2 motivam outra noção de equivalência.

**Definição 2.2.1.** Duas interações contínuas  $\sigma$ -invariantes  $\Phi$  e  $\Phi'$  são ditas equivalentes por Ruelle se

$$\Psi^\Phi - \Psi^{\Phi'} \in \overline{\{f \circ \sigma - f : f \in C(\Sigma_S)\}} + c$$

para alguma constante  $c \in \mathbb{R}$ , sendo o fecho tomado com respeito à topologia uniforme.

**Observação 2.2.1.** Um investigação mais detalhada do Teorema Ergódico de Birkhoff caracteriza o conjunto  $\overline{\{f \circ \sigma - f : f \in C(\Sigma_S)\}}$  como o núcleo para o operador média temporal. Em particular, qualquer observável  $g$  contido neste conjunto satisfaz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\Lambda_n|} \left\| \sum_{i \in \Lambda_n} g \circ \sigma^i \right\|_\infty = 0.$$

Como consequência direta dos itens (v) e (vi) da proposição 2.2.2 e do corolário 2.2.2, temos o resultado seguir.

**Proposição 2.2.3.** *Se as interações contínuas  $\sigma$ -invariantes  $\Phi$  e  $\Phi'$  são equivalentes por Ruelle, então  $\mathcal{G}_\sigma(\Phi) = \mathcal{G}_\sigma(\Phi')$ .*

## 2.3 Formalismo SRB

Os trabalhos de Sinai [51, 52] e de Ruelle-Bowen [11] transportaram os argumentos da abordagem variacional do formalismo DLR de uma teoria focada em sistemas de *spins* e respectivas interações, para a análise dos sistemas de Anosov e difeomorfismo do tipo Axioma A. Denominado de formalismo de Sinai-Ruelle-Bowen (SRB), esta vertente da teoria ergódica diferencial transformou-se numa poderosa ferramenta para a teoria de sistemas dinâmicos. Um excelente tratamento de tal formalismo, com as devidas aplicações ao contexto dinamicista, é apresentado pela referência [10].

O alicerce desta construção é perceber que tanto a energia média como a energia livre de Gibbs podem ser introduzidas em termos de um observável contínuo, como foi feito na seção anterior através do potencial da origem  $\Psi_0^\Phi$ , porém ignorando sua possível associação

com uma interação  $\sigma$ -invariante  $\Phi$ . Por sua vez, a rigidez do espaço de configurações  $\Sigma_{\mathcal{S}} = \mathcal{S}^{\mathcal{L}}$ , dada pelo produto cartesiano enumerável do conjunto de *spins*, é dispensável, já que não seria necessário definir observáveis locais  $\Phi_X$  associados a uma interação.

Tal ponto de vista possibilitou um desenvolvimento teórico em grande parte dissociado da mecânica estatística, introduzindo desta forma uma nova vertente, sob uma feição dinamicista, para as ideias variacionais anteriormente apresentadas.

Portanto, formalismo SRB é atualmente descrito sobre sistemas dinâmicos topológicos  $(\Sigma, \sigma)$ , isto é,  $\Sigma$  é um espaço métrico compacto e  $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$  é um mapa contínuo, compartilhando assim importantes propriedades topológicas e mensuráveis do espaço de configurações  $\Sigma_{\mathcal{S}}$ . Além disso, consideramos uma função  $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  contínua que geralmente recebe a denominação de potencial. Um caso particular são os próprios sistemas de *spins*  $(\Sigma_{\mathcal{S}}, \sigma, \mathcal{H}^{Pot}, \nu)$ , cujo hamiltoniano provém de um potencial contínuo  $\sigma$ -invariante definido a partir do observável da origem  $f$ , ou seja,  $\Psi = \{f \circ \sigma^n\}_{n \in \mathbb{N}}$  e  $\mathcal{H}_{\Lambda_n}^{Pot} = \sum_{i \in \Lambda_n} f \circ \sigma^i = S_n(f)$ .

**Notação 2.3.1.** Devido a esta consideração inicial, denotaremos nesta seção o sistema de *spins* unidimensional  $(\Sigma_{\mathcal{S}}, \sigma, \mathcal{H}^{Pot}, \nu)$  somente  $(\Sigma_{\mathcal{S}}, \sigma, \mathcal{H}^{Pot})$ . A justificativa para ausência de uma menção explícita ao estado básico  $\nu$  será dada a seguir e na seção 2.4. Além disso, como já foi feito na seção anterior,  $\Psi$  denotará indistintamente a coletânea de observáveis  $\{\Psi_0 \circ \sigma^n\}_{n \in \mathbb{N}}$  ou o observável da origem  $\Psi_0$ , e assim conjunto de todos os potenciais contínuos  $\sigma$ -invariantes será representado por  $C(\Sigma_{\mathcal{S}})$ .

Considere então  $\Psi$  um potencial contínuo  $\sigma$ -invariante e o sistema de *spins* unidimensional  $(\Sigma_{\mathcal{S}}, \sigma, \mathcal{H}^{Pot})$ . Procedendo de modo semelhante ao da subseção 2.1.3, a primeira função termodinâmica a ser apresentada é a energia média, a qual já foi introduzida no capítulo anterior, pela definição 1.5.6, e no caso de potencial  $\sigma$ -invariante possui a redução dada pelo exemplo 1.5.11.

**Definição 2.3.1** (Energia média ou densidade de energia). A energia média de um hamiltoniano  $\mathcal{H}^{Pot}$  associado a um potencial  $\sigma$ -invariante  $\Psi = \{\Psi_0 \circ \sigma^n\}_{n \in \mathbb{N}}$  é dada por

$$\langle \mathcal{H}^{Pot} \rangle_{\mu} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\Lambda_n|} \int S_n(\Psi_0) d\mu = \langle \Psi_0 \rangle_{\mu}.$$

Outra alteração marcante no formalismo SRB está associada à definição das funções termodinâmicas que generalizam a entropia e a pressão para o contexto dinamicista. Antes de defini-las, necessitaremos dos seguintes detalhes técnicos.

**Definição 2.3.2.**

- (i) Uma partição em  $\Sigma_{\mathcal{S}}$  é uma coletânea de conjuntos  $\alpha \subset \mathcal{B}^{\mathcal{L}}$  tal que  $\cup_{A \in \alpha} A = \Sigma_{\mathcal{S}}$  e  $A \cap B = \emptyset$  para todos  $A, B \in \alpha$  com  $A \neq B$ .

(ii) Seja  $\mu$  um estado de  $\Sigma_S$ . Uma  $\mu$ -partição em  $\Sigma_S$  é uma coletânea  $\alpha \subset \mathcal{B}^{\mathcal{L}}$  cujos conjuntos possuem medida positiva para o estado  $\mu$  e satisfazem

$$\mu(\Sigma_S - (\cup_{A \in \alpha} A)) = 0 \quad \text{e} \quad \mu(A \cap B) = 0, \forall A, B \in \alpha \text{ e } A \neq B.$$

(iii) Uma cobertura aberta em  $\Sigma_S$  é uma coletânea  $\beta \subset \tau^{\mathcal{L}}$  tal que  $(\cup_{A \in \beta} A) = \Sigma_S$ .

**Notação 2.3.2.** A menos de menção explícita,  $\alpha$  sempre denotará uma partição ou uma  $\mu$ -partição, para algum estado  $\mu \in \mathcal{P}(\Sigma_S)$ , assim como  $\beta$ , uma cobertura aberta. Além disso, ficará subentendido que toda cobertura é aberta.

A pré-imagem de uma  $\mu$ -partição  $\alpha$  (ou de uma cobertura  $\beta$ ) para  $\sigma$  é dada pela coletânea  $\sigma^{-1}(\alpha) := \{\sigma^{-1}(A) : A \in \alpha\}$  (analogamente,  $\sigma^{-1}(\beta) := \{\sigma^{-1}(B) : B \in \beta\}$ ), a qual também é uma  $\mu$ -partição (respectivamente, uma cobertura). Dada a coletânea de  $\mu$ -partições  $\alpha_i$  (ou de coberturas  $\beta_i$ ) indexadas em  $i \in I$ , o refinamento destas é dado por  $\bigvee_{i \in I} \alpha_i := \{\bigcap_{i \in I} A_i : A_i \in \alpha_i\}$  (analogamente,  $\bigvee_{i \in I} \beta_i := \{\bigcap_{i \in I} B_i : B_i \in \beta_i\}$ ), o qual também é uma  $\mu$ -partição (respectivamente, uma cobertura). Assim o refinamento das  $\Lambda_n$ -pré-imagens é dado por  $\alpha^{\Lambda_n} := \bigvee_{i \in \Lambda_n} \sigma^{-i}(\alpha)$  (analogamente,  $\beta^{\Lambda_n} = \bigvee_{i \in \Lambda_n} \sigma^{-i}(\beta)$ ).

**Definição 2.3.3.**

- (i) Uma  $\mu$ -partição  $\alpha$  é dita ser geradora para  $\sigma$  se  $\mathcal{B}^{\mathcal{L}}$  coincide com a  $\sigma$ -álgebra gerada por  $\bigvee_{i \in \mathcal{L}} \sigma^{-i}(\alpha)$ .
- (ii) Uma cobertura  $\beta$  é dita ser geradora para  $\sigma$  se, para toda coletânea  $\{B_i\}_{i \in \mathcal{L}}$  de elementos de  $\beta$ , o conjunto  $\bigcap_{i \in \mathcal{L}} \sigma^{-i}(B_i)$  contém no máximo um ponto.

Temos a seguinte propriedade decorrente da condição geradora de uma cobertura.

**Proposição 2.3.1.** *Seja  $\beta$  uma cobertura geradora para  $\sigma$ . Então, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe inteiro  $N > 0$ , tal que*

$$\text{diam}(\beta^{\Lambda_N}) := \sup \{ \text{diam}(B) : B \in \beta^{\Lambda_N} \} < \varepsilon.$$

**Exemplo 2.3.1.**  $\nu$ -partição e cobertura aberta para o caso de conjunto de spins finito: Seja  $\mathcal{S}$  um conjunto de spins finito. Considere a partição/cobertura de  $\mathcal{S}$  dada pelos conjuntos unitários  $\{i\}_{i \in \mathcal{S}}$ , cujas pré-imagens pela projeção da origem  $\pi_0 : \Sigma_S \rightarrow \mathcal{S}$  induz para  $\Sigma_S$  a seguinte ( $\nu$ -)partição/cobertura

$$\beta_F = \{ [j^\infty]_{\{0\}} : j \in \mathcal{S} \}. \quad (2.19)$$

(Recorde a notação 1.5.4) Analisando o refinamento das  $\Lambda_n$ -pré-imagens, vemos que

$$\beta_F^{\Lambda_n} = \left\{ [\omega]_{\Lambda_n} : \omega \in \Sigma_S \text{ com } \omega|_{\Lambda_n^c} = j^\infty|_{\Lambda_n^c} \text{ para algum } j \in \mathcal{S} \right\}.$$

Não é difícil perceber que  $\bigcap_{i \in \mathcal{L}} \sigma^{-i}([\omega_i^\infty]_{\{0\}}) = \{\omega\}$ , conseqüentemente  $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(\beta_F^{\Lambda_n}) = 0$ , bem como que  $\mathcal{B}^{\mathcal{L}}$  é a  $\sigma$ -álgebra gerada por  $\bigvee_{i \in \mathcal{L}} \sigma^{-i}(\beta_F)$ . Logo,  $\beta_F$  é geradora tanto como cobertura quanto como  $\mu$ -partição.  $\diamond$

Prosseguimos com as demais funções termodinâmicas e suas respectivas propriedades.

**Definição 2.3.4** (Entropia de Kolmogorov-Sinai). Seja  $\mu$  um estado  $\sigma$ -invariante. Definimos a entropia de  $\mu$  pondo

$$h(\mu) := \sup \{h(\mu, \alpha) : \alpha \text{ é uma } \mu\text{-partição finita para } \Sigma_S\},$$

$$\text{com } h(\mu, \alpha) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\Lambda_n|} H(\mu, \alpha^{\Lambda_n}),$$

onde  $H(\mu, \theta) := -\sum_{B \in \theta} \mu(B) \log \mu(B)$  para qualquer  $\mu$ -partição  $\theta$  em  $\Sigma_S$ .

**Observação 2.3.1.** A entropia de Kolmogorov-Sinai tem grande importância por ser um invariante por conjugação entre sistemas dinâmicos mensuráveis. Mais detalhes podem ser obtidos, por exemplo, em [57, 44].

**Proposição 2.3.2.** A entropia de Kolmogorov-Sinai  $h$  é uma função afim, ou seja, dados estados  $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n \in \mathcal{P}_\sigma(\Sigma_S)$  e constantes  $c_0, c_1, \dots, c_n > 0$  tais que  $\sum_{i=0}^n c_i = 1$ , temos

$$h\left(\sum_{i=0}^n c_i \mu_i\right) = \sum_{i=0}^n c_i h(\mu_i).$$

Além disso, quando existe uma  $\mu$ -partição geradora  $\alpha$  para  $\Sigma_S$ ,

- (i)  $h$  é uma função semicontínua superiormente para a topologia fraca\*;
- (ii)  $h(\mu) = h(\mu, \alpha)$ .

Perceba que existe certa semelhança entre tais resultados e a proposição 2.1.4, por exemplo; ambas  $h_\nu$  e  $h$  são afins. Apesar disso, não é válida em geral a condição de semicontinuidade superior para  $h$ , devido ao seguinte contraexemplo.

**Exemplo 2.3.2.** *Contraexemplo para semicontinuidade superior de  $h$ :* Considere o espaço de shift  $\Sigma_S$  para o conjunto de spins  $\mathcal{S} = \{0\} \cup \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ . Seja o  $\mu_{\Sigma_S}^j$ , para algum inteiro  $j > 0$ , o estado de Bernoulli obtido do estado sobre  $\mathcal{S}$

$$\mu_{\mathcal{S}}^j(k) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{se } k = \frac{1}{j-1} \text{ ou } \frac{1}{j}; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Note que a sequência  $\{\mu_{\Sigma_S}^j\}_{j>0}$  converge fracamente para o estado delta de Dirac no ponto  $0^\infty$  dado por

$$\delta_{0^\infty}(A) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0^\infty \in A; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Pode-se mostrar que, para todo  $j > 0$ , a dinâmica  $(\Sigma_S, \sigma, \mu_{\Sigma_S}^j)$  é conjugada ao sistema dinâmico  $(\Sigma_{\{0,1\}}, \sigma, \nu)$ , onde  $\nu$  é o estado de Bernoulli para a medida de referência em

$\{0, 1\}$ . Isto significa que existem subconjuntos mensuráveis  $X \subset \Sigma_{\mathcal{S}}$  e  $Y \subset \Sigma_{\{0,1\}}$ , tais que  $\mu_{\Sigma_{\mathcal{S}}}^j(X) = 1 = \nu(Y)$ , e uma bijeção mensurável  $\pi : X \rightarrow Y$  (com inversa também mensurável) satisfazendo  $\sigma \circ \pi = \pi \circ \sigma$ , de modo que, para todo conjunto mensurável  $A$ , vale  $\nu(\pi^{-1}(A)) = \mu_{\Sigma_{\mathcal{S}}}^j(A)$ .

Uma consequência da existência desta conjugação é que  $h(\mu_{\Sigma_{\mathcal{S}}}^j) = h(\nu)$ . É bem sabido também que  $h(\nu) = \log 2$  e  $h(\delta_{0^\infty}) = 0$ . Assim obtemos

$$\lim_{j \rightarrow \infty} h(\mu_{\Sigma_{\mathcal{S}}}^j) = 2 > 0 = h(\delta_{0^\infty}),$$

o que impossibilita que a entropia seja semicontinuidade superiormente. Para mais detalhes sobre a argumentação apresentada, indicamos a referência [57].  $\diamond$

Por outro lado, assinalamos que, quando o conjunto de *spins*  $\mathcal{S}$  é finito, a existência de uma  $\mu$ -partição geradora dada pela equação (2.19) garante que a entropia de Kolmogorov-Sinai é semicontínua superiormente sobre os estados  $\sigma$ -invariantes de  $\Sigma_{\mathcal{S}}$ .

**Definição 2.3.5** (Pressão topológica). Sejam  $\Psi$  um potencial  $\sigma$ -invariante e  $\mathcal{H}^{Pot}$  seu hamiltoniano associado. Para qualquer sequência de coberturas abertas  $\{\beta_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ , com  $\text{diam}(\beta_k) \rightarrow 0$  quando  $k \rightarrow \infty$ , definimos a pressão topológica por

$$p(\mathcal{H}^{Pot}) := \lim_{k \rightarrow \infty} p(\mathcal{H}^{Pot}, \beta_k), \quad \text{com} \quad p(\mathcal{H}^{Pot}, \beta_k) := \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\Lambda_n|} \log P_n(\mathcal{H}^{Pot}, \beta_k),$$

onde  $P_n(\mathcal{H}^{Pot}, \beta) := \inf \left\{ \sum_{B \in \theta} \sup_{\omega \in B} e^{\mathcal{H}_{\Lambda_n}^{Pot}(\omega)} : \theta \text{ subcobertura finita de } \beta^{\Lambda_n} \right\}$  para qualquer cobertura aberta  $\beta$  em  $\Sigma_{\mathcal{S}}$ .

É possível assegurar que a definição anterior é independente da sequência de coberturas  $\{\beta_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  a ser escolhida.

**Observação 2.3.2.** A pressão topológica pode ser apresentada por outras definições, as quais são muito úteis para demonstrar o princípio variacional. Uma em particular, a qual utilizaremos ainda neste capítulo, na seção 2.4, é dada pela substituição de  $P_n(\mathcal{H}^{Pot}, \beta)$  por

$$Q_n(\mathcal{H}^{Pot}, \beta) := \inf \left\{ \sum_{B \in \theta} \inf_{\omega \in B} e^{\mathcal{H}_{\Lambda_n}^{Pot}(\omega)} : \theta \text{ subcobertura finita de } \beta^{\Lambda_n} \right\},$$

onde  $\beta$  é cobertura aberta em  $\Sigma_{\mathcal{S}}$ . Para outras definições e respectivas equivalências, o leitor pode consultar, por exemplo, as referências [32, 57].

**Notação 2.3.3.** Quando for conveniente, denotaremos  $p(\mathcal{H}^{Pot})$ ,  $p(\mathcal{H}^{Pot}, \beta)$ ,  $P_n(\mathcal{H}^{Pot}, \beta)$  e  $Q_n(\mathcal{H}^{Pot}, \beta)$ , respectivamente, por  $p(\Psi)$ ,  $p(\Psi, \beta)$ ,  $P_n(\Psi, \beta)$  e  $Q_n(\Psi, \beta)$ .

**Exemplo 2.3.3.** *Entropia topológica:* Dado o potencial nulo  $\Psi \equiv 0$ , temos que

$$P_n(0, \beta) = \inf \{ |\theta| : \theta \text{ subcobertura finita de } \beta^{\Lambda_n} \} =: N(\beta^{\Lambda_n})$$

torna-se uma função de contagem da menor subcobertura do refinamento das  $\Lambda_n$ -pré-imagens de  $\beta$ . É muito bem sabido em sistemas dinâmicos que a análise assintótica do crescimento da cardinalidade minimal de subcobertura do refinamento das  $\Lambda_n$ -pré-imagens fornece o valor

$$h_{Top}(\sigma) := p(0) = \sup \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\Lambda_n|} \log N(\beta^{\Lambda_n}) : \beta \text{ cobertura aberta para } \Sigma_{\mathcal{S}} \right\},$$

que vem a ser a entropia topológica associada ao sistema dinâmico  $(\Sigma_{\mathcal{S}}, \sigma)$ .

Existem muitos resultados dedicados ao cálculo explícito de tal valor para diversos tipos de contextos dinâmicos. Em particular, destacamos a entropia topológica associada aos seguintes casos:

- (i) para qualquer sistema dinâmico  $(X, T)$  cujas órbitas  $\{T^n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$  são todas periódicas, verifica-se  $h_{Top}(T) = 0$ ;
- (ii) para qualquer *shift* completo  $(\Sigma_{\mathcal{S}}, \sigma)$  com conjunto de *spins*  $\mathcal{S}$  finito, temos  $h_{Top}(\sigma) = \log |\mathcal{S}|$ .

Mais detalhes podem ser encontrados, por exemplo, em [57, 44]. ◇

**Observação 2.3.3.** Para a teoria de sistemas dinâmicos, a entropia topológica mede de forma quantitativa a complexidade das órbitas do sistema. Tal conceito tem grande destaque por ser um invariante por conjugações entre sistemas dinâmicos topológicos.

De forma análoga à proposição 2.2.2, temos que a pressão topológica satisfaz as propriedades abaixo listadas.

**Proposição 2.3.3.** *Sejam  $\Psi$  e  $\Psi'$  potenciais contínuos  $\sigma$ -invariantes e  $c \in \mathbb{R}$  uma constante. Se  $p(C(\Sigma_{\mathcal{S}})) < \infty$ , então é uma função convexa e Lipschitz contínua, isto é,*

$$p(t\Psi + (1-t)\Psi') \leq tp(\Psi) + (1-t)p(\Psi'), \text{ para todo } 0 \leq t \leq 1$$

$$\text{e } |p(\Psi) - p(\Psi')| \leq \|\Psi - \Psi'\|_{\infty}.$$

Além disso, a pressão topológica  $p$  satisfaz

- (i)  $p(0) = h_{Top}(\sigma)$ ;
- (ii)  $\Psi \leq \Psi' \implies p(\Psi) \leq p(\Psi')$ ;
- (iii)  $h_{Top}(\sigma) + \inf \Psi \leq p(\Psi) \leq h_{Top}(\sigma) + \sup \Psi$ ;
- (iv)  $|p(\Psi)| \leq p(|\Psi|)$ ;
- (v)  $p(\Psi + c) = p(\Psi) + c$ ;

- (vi)  $p(\Psi + \Psi' \circ \sigma - \Psi') = p(\Psi)$ ;  
 (vii)  $c \geq 1 \implies p(c\Psi) \leq cp(\Psi)$  e  $c \leq 1 \implies p(c\Psi) \geq cp(\Psi)$ .

Em particular, quando  $\beta$  é uma cobertura geradora, temos que  $p(\Psi) = p(\Psi, \beta)$ .

A argumentação que garante que cada uma das funções termodinâmicas introduzidas está bem definida e as demonstrações das proposições aqui enunciadas podem ser encontradas nas referências [32, 57, 44].

Intuitivamente, uma ( $\mu$ -)partição/cobertura pode ser vista como uma “discretização” do espaço em parcelas finitas para a qual poderíamos calcular a entropia e a pressão de forma análoga à realizada para os sistemas de volume finito. O refinamento das pré-imagens significaria um refinamento desta “discretização” baseado no comportamento do operador de *shift*. Desta forma, da entropia de Kolmogorov-Sinai e da pressão topológica obteríamos o comportamento limite das densidades da entropia e da pressão quando sujeitas ao refinamento de uma “discretização” sobre o espaço.

### 2.3.1 Princípio Variacional

Com a mesma intenção da abordagem variacional, gostaríamos de obter, para o contexto dinamicista, um princípio envolvendo as funções termodinâmicas anteriormente apresentadas e, desta forma, caracterizar certos estados  $\sigma$ -invariantes sobre o sistema de *spins* de volume infinito.

**Teorema 2.3.1** (Princípio Variacional). *Sejam  $\Psi$  um potencial contínuo  $\sigma$ -invariante e  $(\Sigma_S, \sigma, \mathcal{H}^{Pot})$  um sistema de spins unidimensional. Então, sendo  $\mathcal{H}^{Pot}$  hamiltoniano associado ao potencial  $\Psi$ , temos que*

$$p(\mathcal{H}^{Pot}) = p(\Psi) = \sup \left\{ h(\mu) + \langle \mathcal{H}^{Pot} \rangle_\mu : \mu \in \mathcal{P}_\sigma(\Sigma_S) \right\}. \quad (2.20)$$

Devido à caracterização geométrica do espaço  $\mathcal{P}_\sigma(\Sigma_S)$  como um compacto convexo cujos pontos extremais são os estados ergódicos, apresentada ao final da seção 1.4 do primeiro capítulo, sob as mesmas hipóteses do teorema anterior, temos o seguinte corolário:

**Corolário 2.3.2.** *Vale a igualdade*

$$p(\mathcal{H}^{Pot}) = \sup \left\{ h(\mu) + \langle \mathcal{H}^{Pot} \rangle_\mu : \mu \in \mathcal{Erg}(\Sigma_S) \right\}.$$

Adotando um ponto de vista dual, temos o próximo resultado.

**Teorema 2.3.3.** *Sejam  $\Psi$  um potencial contínuo  $\sigma$ -invariante e  $(\Sigma_S, \sigma, \mathcal{H}^{Pot})$  um sistema de spins unidimensional. A entropia  $h$  é um função semicontínua superiormente se, e somente se,*

$$h(\mu) = \sup \left\{ p(\Psi) - \langle \Psi \rangle_\mu : \Psi \in C(\Sigma_S) \right\}.$$

As demonstrações de tais resultados são apresentadas, por exemplo, nas referências [32, 57, 44].

**Observação 2.3.4.** Extensões do princípio variacional são obtidas em diversos contextos. Por exemplo, as referências [38, 32] provam tal resultado para ações em  $\mathbb{Z}^d$  e [39] estende tal princípio para grupos mais gerais. Sob outro ponto de vista, o artigo [13] estende o princípio variacional para um potencial  $\{\Psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  que satisfaz uma propriedade subaditiva, relacionada com a definição 1.5.7. Este último segue os argumentos apresentados por [38, 57], tomando os devidos cuidados técnicos com relação à convergência das funções termodinâmicas.

## 2.3.2 Estados de Equilíbrio

**Definição 2.3.6.** Os estados de equilíbrio para um potencial contínuo  $\sigma$ -invariante  $\Psi$  são os estados  $\sigma$ -invariantes que atingem o supremo da equação (2.20), isto é,

$$p(\mathcal{H}^{Pot}) = h(\mu) + \langle \mathcal{H}^{Pot} \rangle_\mu,$$

onde  $\mathcal{H}^{Pot}$  é o hamiltoniano associado ao potencial  $\Psi$ .

Os estados de equilíbrio são os análogos dos estados de Gibbs  $\sigma$ -invariantes para o contexto do formalismo SRB. Na próxima seção, discutiremos sobre as possíveis relações entre estes.

Sobre conjunto dos estados de equilíbrio, denotado por  $\mathcal{E}(\mathcal{H})$ , podemos garantir os seguintes fatos.

### Proposição 2.3.4.

- (i)  $\mathcal{E}(\mathcal{H})$  é um conjunto convexo e, quando  $h_{Top}(\sigma) < \infty$ , seus pontos extremais são exatamente os estados ergódicos de  $\mathcal{E}(\mathcal{H}) \cap \text{Erg}(\Sigma_S)$ ;
- (ii) Se  $h_{Top}(\sigma) < \infty$  e a entropia  $h$  é um função semicontínua superiormente, então  $\mathcal{E}(\mathcal{H})$  é não vazio e compacto.

Ademais, a noção de equivalência por Ruelle fica mais clara neste contexto.

**Definição 2.3.7.** Dois potenciais contínuos  $\sigma$ -invariantes  $\Psi$  e  $\Psi'$  são ditos equivalentes por Ruelle se

$$\Psi - \Psi' \in \overline{\{f \circ \sigma - f : f \in C(\Sigma_S)\}} + c$$

para alguma constante  $c \in \mathbb{R}$ , sendo o fecho tomado com respeito à topologia uniforme.

O próximo resultado decorre de imediato dos itens (v) e (vi) da proposição 2.3.3

**Proposição 2.3.5.** Se os potenciais contínuos  $\sigma$ -invariantes  $\Psi$  e  $\Psi'$  são equivalentes por Ruelle, então  $\mathcal{E}(\Psi) = \mathcal{E}(\Psi')$ .

### Funcional Tangente

No encaixo da descrição geométrica apresentada ao final da seção 2.1.3, destacamos os seguintes fatos com respeito a estados de equilíbrio.

**Definição 2.3.8.** Suponha que  $h_{Top}(\sigma) < \infty$ . O estado  $\mu$  é dito ser um funcional tangente à pressão topológica  $p$  em um potencial contínuo  $\sigma$ -invariante  $\Psi$  se, para todo potencial contínuo  $\sigma$ -invariante  $\Psi' \in C(\Sigma_S)$ , temos

$$p(\Psi + \Psi') - p(\Psi) \geq \langle \Psi' \rangle_\mu.$$

O conjunto de todos os funcionais tangentes a  $p$  em  $\Psi$  é denotado por  $t_\Psi(\Sigma_S)$ .

Analogamente ao teorema 2.1.8, registra-se na literatura o seguinte resultado:

**Teorema 2.3.4.** *Suponha que  $h_{Top}(\sigma) < \infty$  e que a entropia  $h$  é uma função semicontínua superiormente. Então  $t_\Psi(\Sigma_S) = \mathcal{E}(\Psi)$ .*

Tal descrição geométrica dos estados de equilíbrio não é o foco de estudo desta dissertação e foi apresentada apenas a título de complementaridade. Para a demonstração do resultado anterior, veja [57].

## 2.4 Relações entre os Formalismos

Apresentadas as teorias que norteiam a análise dos sistemas de *spins*, focamo-nos em particular nas semelhanças entre a abordagem variacional do formalismo DLR e o formalismo SRB. Apesar da origem em comum, cada uma destas áreas desenvolveu-se de forma diferenciada, adaptando seus argumentos aos contextos mecânico-estatístico e dinamicista, respectivamente, nos quais estavam inseridos.

Ambas as áreas baseiam-se na busca de caracterização de certos estados, definidos a partir de um princípio variacional que depende de uma interação  $\sigma$ -invariante ou de um potencial  $\sigma$ -invariante. Na seção 2.2, conseguimos que a abordagem variacional do formalismo DLR transitasse das interações  $\sigma$ -invariantes para os potenciais  $\sigma$ -invariantes. Portanto, podemos argumentar sobre uma possível conexão entre estes formalismos, preferencialmente em termos de potenciais  $\sigma$ -invariantes.

Por outro lado, o princípio variacional é sempre definido a partir de funções termodinâmicas que generalizam os conceitos energia média, entropia e pressão apresentados para sistemas de *spins* em volume finito. À primeira vista, apenas a energia média é compartilhada entre as duas áreas, enquanto as generalizações da entropia e da pressão são propostas de formas distintas.

Perceba que, no formalismo SRB, utilizamo-nos da estrutura topológica e mensurável do espaço de configurações para definir a entropia de Kolmogorov-Sinai (por  $\mu$ -partições) e a pressão topológica (por coberturas abertas). Isto possibilitou deixar de lado o papel do estado básico, o qual é fundamental para definir a entropia relativa e a energia livre de Gibbs na abordagem variacional do formalismo DLR. Desta forma, necessitaremos encontrar relações que aproximem os conceitos de  $\mu$ -partições e de coberturas abertas da função desempenhada pelo conceito de estado básico.

Ao seguir esta estratégia, destacamos que a argumentação desenvolvida nesta seção é original. Primeiramente, explicitamos tal conexão para um contexto mais específico, o qual inclui os exemplos 1.2.1 e 1.2.2.

**Proposição 2.4.1.** *Sejam  $\Psi$  um potencial contínuo  $\sigma$ -invariante e  $(\Sigma_S, \sigma, \mathcal{H}^{Pot})$  um sistema de spins unidimensional. Suponha que o conjunto de spins  $\mathcal{S}$  é finito. Então, temos as seguintes igualdades*

$$p(\Psi) + \log |\mathcal{S}|^{-1} = p_\nu(-\Psi) \quad e \quad h(\mu) + \log |\mathcal{S}|^{-1} = h_\nu(\mu).$$

*Caso o potencial seja obtido de uma interação contínua  $\sigma$ -invariante  $\Phi$  pela igualdade  $\Psi = -\Psi^\Phi$ , obtemos que os conceitos de estado de Gibbs  $\sigma$ -invariante e de estado de equilíbrio são equivalentes, ou seja,  $\mathcal{E}(-\Psi^\Phi) = \mathcal{G}_\sigma(\Phi)$ .*

*Demonstração.* Verificadas as relações enunciadas na proposição, é fácil conectar os princípios variacionais do corolário 2.2.2 e do teorema 2.3.1, já que

$$\begin{aligned} p_\nu(\Psi^\Phi) &= h_\nu(\mu) - \langle \Psi^\Phi \rangle_\mu \\ \iff p(-\Psi^\Phi) + \log |\mathcal{S}|^{-1} &= h(\mu) + \log |\mathcal{S}|^{-1} - \langle \Psi^\Phi \rangle_\mu \\ \iff p(-\Psi^\Phi) &= h(\mu) + \langle -\Psi^\Phi \rangle_\mu, \end{aligned}$$

donde segue a igualdade  $\mathcal{E}(-\Psi^\Phi) = \mathcal{G}_\sigma(\Psi^\Phi) = \mathcal{G}_\sigma(\Phi)$ .

Para obter que  $p(\Psi) + \log |\mathcal{S}|^{-1} = p_\nu(\Psi)$ , tome  $\beta_F$  a cobertura/partição de  $\Sigma_S$  dada pelo exemplo 2.3.1. Como é uma cobertura geradora, pela proposição 2.3.3, temos que  $p(\Psi) = p(\Psi, \beta_F)$ . Sabemos também que  $\beta_F^{\Lambda_n}$  é formada pelos cilindros  $[\omega]_{\Lambda_n}$ ,  $\omega \in \Sigma_S$ , sendo assim uma cobertura/partição de  $\Sigma_S$ . Note que, por ser uma partição, a única subcobertura de  $\beta_F^{\Lambda_n}$  é a própria cobertura. Logo, obtemos as seguintes reduções

$$Q_n(\Psi, \beta_F) = \sum_{B \in \beta_F^{\Lambda_n}} \inf_{\omega \in B} e^{\mathcal{H}_{\Lambda_n}^{Pot}(\omega)} \quad e \quad P_n(\Psi, \beta_F) = \sum_{B \in \beta_F^{\Lambda_n}} \sup_{\omega \in B} e^{\mathcal{H}_{\Lambda_n}^{Pot}(\omega)}.$$

Defina as funções simples

$$f_n(\omega) = \sum_{B \in \beta_F^{\Lambda_n}} \inf_{\omega \in B} e^{\mathcal{H}_{\Lambda_n}^{Pot}(\omega)} \chi_B(\omega) \quad e \quad g_n(\omega) = \sum_{B \in \beta_F^{\Lambda_n}} \sup_{\omega \in B} e^{\mathcal{H}_{\Lambda_n}^{Pot}(\omega)} \chi_B(\omega).$$

É fácil ver que, para o estado básico  $\nu$ , as integrais de tais funções estão associadas com  $Q_n$  e  $P_n$  a menos do fator multiplicativo  $\nu([\omega]_{\Lambda_n}) = |\mathcal{S}|^{-|\Lambda_n|}$ , já que

$$\int f_n d\nu = \sum_{B \in \beta_F^{\Lambda_n}} \inf_{\omega \in B} e^{\mathcal{H}_{\Lambda_n}^{Pot}(\omega)} \nu(B) = \left( \sum_{B \in \beta_F^{\Lambda_n}} \inf_{\omega \in B} e^{\mathcal{H}_{\Lambda_n}^{Pot}(\omega)} \right) \frac{1}{|\mathcal{S}|^{|\Lambda_n|}} = Q_n(\Psi, \beta_F) |\mathcal{S}|^{-|\Lambda_n|},$$

$$\int g_n d\nu = \sum_{B \in \beta_F^{\Lambda_n}} \sup_{\omega \in B} e^{\mathcal{H}_{\Lambda_n}^{Pot}(\omega)} \nu(B) = \left( \sum_{B \in \beta_F^{\Lambda_n}} \sup_{\omega \in B} e^{\mathcal{H}_{\Lambda_n}^{Pot}(\omega)} \right) \frac{1}{|\mathcal{S}|^{|\Lambda_n|}} = P_n(\Psi, \beta_F) |\mathcal{S}|^{-|\Lambda_n|}.$$

Por outro lado, temos que  $f_n \leq e^{\mathcal{H}_{\Lambda_n}^{Pot}} \leq g_n$ , o que implica

$$Q_n(\Psi, \beta_F) |\mathcal{S}|^{-|\Lambda_n|} = \int f_n d\nu \leq \int e^{\mathcal{H}_{\Lambda_n}^{Pot}} d\nu \leq \int g_n d\nu = P_n(\Psi, \beta_F) |\mathcal{S}|^{-|\Lambda_n|}.$$

O limite das médias dos logaritmos de tais funções nos fornece a relação

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\Lambda_n|} (\log Q_n(\Psi, \beta_F) + |\Lambda_n| \log |\mathcal{S}|^{-1}) &\leq \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\Lambda_n|} \log \int e^{\mathcal{H}_{\Lambda_n}^{Pot}} d\nu \leq \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\Lambda_n|} (\log P_n(\Psi, \beta_F) + |\Lambda_n| \log |\mathcal{S}|^{-1}). \end{aligned}$$

Pelas definições da energia livre de Gibbs e da pressão topológica (ver também observação 2.3.2), obtemos

$$p(\Psi) + \log |\mathcal{S}|^{-1} = p(\Psi, \beta_F) + \log |\mathcal{S}|^{-1} = p_\nu(-\Psi).$$

Para obter a igualdade  $h(\mu) + \log |\mathcal{S}|^{-1} = h_\nu(\mu)$ , primeiramente perceba que a derivada de Radon-Nikodym presente na definição da entropia pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{d\mu|_{\Lambda_n}}{d\nu|_{\Lambda_n}}(\omega) = \frac{\mu([\omega]_{\Lambda_n})}{\nu([\omega]_{\Lambda_n})} = |\mathcal{S}|^{|\Lambda_n|} \mu([\omega]_{\Lambda_n}) \quad \forall \omega \in \Sigma_{\mathcal{S}},$$

onde  $[\omega]_{\Lambda_n}$  é o menor conjunto da sub- $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{B}^{\Lambda_n}$  que contém  $\omega \in \Sigma_{\mathcal{S}}$ . Desta forma, obtemos

$$\begin{aligned} H_n(\mu|\nu) &= - \int \log \frac{d\mu|_{\Lambda_n}}{d\nu|_{\Lambda_n}} d\mu|_{\Lambda_n} = - \sum_{[\omega]_{\Lambda_n} : \forall \omega \in \Sigma_{\mathcal{S}}} \left( \log \mu([\omega]_{\Lambda_n}) - \log \frac{1}{|\mathcal{S}|^{|\Lambda_n|}} \right) \mu([\omega]_{\Lambda_n}) \\ &= - \sum_{[\omega]_{\Lambda_n} : \forall \omega \in \Sigma_{\mathcal{S}}} \mu([\omega]_{\Lambda_n}) \log \mu([\omega]_{\Lambda_n}) + \log |\mathcal{S}|^{-|\Lambda_n|}. \end{aligned}$$

O conjunto  $\{[\omega]_{\Lambda_n} : \forall \omega \in \Sigma_{\mathcal{S}}\}$ , o qual indexa o somatório acima, é idêntico à partição  $\beta_F^{\Lambda_n}$ . Logo, a igualdade anterior resume-se a  $H_n(\mu|\nu) = H(\mu, \beta_F^{\Lambda_n}) + |\Lambda_n| \log |\mathcal{S}|^{-1}$  e o limite das médias por  $|\Lambda_n|$  é igual a

$$h_\nu(\mu) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\Lambda_n|} H_n(\mu|\nu) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\Lambda_n|} (H(\mu, \beta_F^{\Lambda_n}) + |\Lambda_n| \log |\mathcal{S}|^{-1}) = h(\mu, \beta_F) + \log |\mathcal{S}|^{-1}.$$

Por sua vez,  $\beta_F$  é uma partição geradora e, pela proposição 2.3.2, obtemos que  $h(\mu) = h(\mu, \beta_F)$ , donde segue o resultado.  $\square$

Considerando que ambas as teorias surgiram como generalizações do contexto no qual o conjunto de *spins* é finito, o resultado acima não é inusitado. Uma particularidade deste caso, a qual é fundamental para demonstração da proposição, é a existência de uma cobertura que também é uma partição. Isto é reflexo da simplicidade da topologia e da  $\sigma$ -álgebra associadas ao conjunto de *spins*.

Desta forma, introduziremos nesta seção um conjunto de ferramentas que possibilitam aproximar, para conjuntos de *spins* mais gerais, a abordagem variacional do formalismo DLR a do formalismo SRB. Motivados pelo teorema anterior, iniciamos esta investigação com intuito de estabelecer relação geral entre a energia livre de Gibbs  $p_\nu$  e a pressão topológica  $p$  para um potencial  $\sigma$ -invariante.

Primeiramente discutiremos certos detalhes técnicos sobre coberturas e partições.

**Notação 2.4.1.** Exclusivamente nesta seção, utilizaremos as seguintes notações:

(i) A cada cobertura/partição  $\alpha$  de  $\mathcal{S}$ , associamos uma cobertura/partição em  $\Sigma_{\mathcal{S}}$  dada por

$$[\alpha] := \{\pi_0^{-1}(A) : A \in \alpha\},$$

onde o mapa  $\pi_0 : \Sigma_{\mathcal{S}} \rightarrow \mathcal{S}$  é a projeção da origem. Sempre que utilizarmos tal notação, ficará subentendida a existência de  $\alpha$  em  $\mathcal{S}$ .

(ii) Dada a coletânea indexada  $\xi = \{C_k\}_{k \in \Lambda}$  de conjuntos mensuráveis de  $\mathcal{S}$ , denotaremos

$$[\xi]_{\Lambda} := \bigcap_{k \in \Lambda} \pi_k^{-1}(C_k) = \prod_{k \in \Lambda} C_k \times \prod_{k \in \Lambda^c} \mathcal{S},$$

onde o mapa  $\pi_k : \Sigma_{\mathcal{S}} \rightarrow \mathcal{S}$  é a projeção canônica do sítio  $k$ .

Quando a coletânea  $\{C_k\}_{k \in \Lambda}$  é formada por abertos de  $\mathcal{S}$ , temos que  $[\xi]_{\Lambda}$  é um cilindro básico da topologia. Note também que esta notação permite descrever de forma concisa os elementos do refinamento das  $\Lambda_n$ -pré-imagens de qualquer cobertura/partição  $[\alpha]^{\Lambda_n}$ , já que, dada uma coletânea indexada  $\xi = \{A_k\}_{k \in \Lambda_n}$  de  $\alpha$ , um elemento de  $[\alpha]^{\Lambda_n}$  formado por tais conjuntos escreve-se da seguinte forma

$$\bigcap_{i \in \Lambda_n} \sigma^{-i}(\pi_0^{-1}(A_i)) = \bigcap_{i \in \Lambda_n} \pi_i^{-1}(A_i) = [\xi]_{\Lambda_n}.$$

**Exemplo 2.4.1.** *Cilindros de diâmetro menor que  $\varepsilon$ :* Dado  $\varepsilon > 0$ , gostaríamos de obter um cilindro cujo diâmetro é menor que  $\varepsilon$ . Temos que existe  $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$  tal que  $n \geq N_\varepsilon$  implica  $\sum_{i \in \Lambda_n^c} \frac{1}{2^{|i|}} < \varepsilon$ . Definimos

$$\delta_\varepsilon := \frac{\varepsilon - \sum_{i \in \Lambda_{N_\varepsilon}^c} \frac{1}{2^{|i|}}}{\sum_{i \in \Lambda_{N_\varepsilon}} \frac{1}{2^{|i|}}} \text{diam}(\mathcal{S}).$$

Para qualquer coletânea  $\xi = \{B_k\}_{k \in \Lambda_n}$  formada por conjuntos abertos com  $\text{diam}(B_k) < \delta_\varepsilon$ , temos que o cilindro  $[\xi]_{\Lambda_n}$  cumpre

$$\text{diam}([\xi]_{\Lambda_n}) < \sum_{i \in \Lambda_n} \frac{1}{2^{|i|}} \frac{\delta_\varepsilon}{\text{diam}(\mathcal{S})} + \sum_{i \in \Lambda_n^c} \frac{1}{2^{|i|}} \leq \sum_{i \in \Lambda_{N_\varepsilon}} \frac{1}{2^{|i|}} \frac{\delta_\varepsilon}{\text{diam}(\mathcal{S})} + \sum_{i \in \Lambda_n \cap \Lambda_{N_\varepsilon}^c} \frac{1}{2^{|i|}} + \sum_{i \in \Lambda_n^c} \frac{1}{2^{|i|}} = \varepsilon,$$

para todo  $n \geq N_\varepsilon$ .  $\diamond$

**Notação 2.4.2.** Sempre que utilizarmos  $N_\varepsilon$  ou  $\delta_\varepsilon$ , ficará subentendido que estas constantes foram obtidas como anteriormente. Em particular, perceba que  $\delta_\varepsilon \leq \varepsilon \text{diam}(\mathcal{S})$ .

Observe que, para o caso em que o conjunto de *spins*  $\mathcal{S}$  é finito (veja o exemplo 2.3.1), os cilindros  $[\xi]_{\Lambda_n}$  acima são os elementos da cobertura  $\beta_F^{\Lambda_{N_\varepsilon}}$ . Prosseguindo de forma similar, construiremos, a partir destes cilindros, coberturas que serão muito úteis para a obtenção de resultados posteriores.

**Exemplo 2.4.2.** *Cobertura de cilindros cujo diâmetro é menor que  $\varepsilon$ :* Dados  $\varepsilon > 0$  e uma cobertura  $\beta$  em  $\mathcal{S}$  cujos elementos possuem diâmetros menores que  $\delta_\varepsilon$ , temos que  $[\beta]^{\Lambda_{N_\varepsilon}}$  é uma cobertura para  $\Sigma_{\mathcal{S}}$  tal que  $\text{diam}([\beta]^{\Lambda_{N_\varepsilon}}) < \varepsilon$ .

O refinamento das  $\Lambda_n$ -pré-imagens desta cobertura, isto é,  $([\beta]^{\Lambda_{N_\varepsilon}})^{\Lambda_n}$ , possui conjuntos da seguinte forma

$$\begin{aligned} \bigcap_{i \in \Lambda_n} \sigma^{-i}([\xi_i]_{\Lambda_{N_\varepsilon}}) &= \bigcap_{i \in \Lambda_n} \bigcap_{k \in \Lambda_{N_\varepsilon}} \sigma^{-i}(\pi_k^{-1}(B_k^i)) = \bigcap_{i \in \Lambda_n} \bigcap_{k \in \Lambda_{N_\varepsilon}} \pi_{k+i}^{-1}(B_k^i) \\ &= \bigcap_{j \in \Lambda_{N_\varepsilon} + \Lambda_n} \pi_j^{-1} \left( \bigcap_{\substack{i \in \Lambda_n, k \in \Lambda_{N_\varepsilon} \\ i+k=j}} B_k^i \right) = [\bar{\xi}]_{\Lambda_{N_\varepsilon} + \Lambda_n}, \end{aligned}$$

para as coletâneas  $\xi_i = \{B_k^i\}_{k \in \Lambda_{N_\varepsilon}} \subset \beta$ , com  $i \in \Lambda_n$ , e  $\bar{\xi} = \{B_j^i\}_{j \in \Lambda_n + \Lambda_{N_\varepsilon}}$ , onde  $B_j^i = \bigcap_{\substack{i \in \Lambda_n, k \in \Lambda_{N_\varepsilon} \\ i+k=j}} B_k^i$ . Perceba que não necessariamente  $\bar{\xi} \subset \beta$ , já que  $\beta$  é uma cobertura e seus elementos não são necessariamente disjuntos. Isto implica que em geral  $([\beta]^{\Lambda_{N_\varepsilon}})^{\Lambda_n} \neq [\beta]^{\Lambda_{N_\varepsilon} + \Lambda_n}$ . Ainda assim é possível relacionar estas duas coberturas, como veremos na próxima proposição.

Lembre-se que o estado básico  $\nu$  é um estado de Bernoulli. Logo,  $\nu([\bar{\xi}]_{\Lambda_{N_\varepsilon} + \Lambda_n}) = \prod_{j \in \Lambda_{N_\varepsilon} + \Lambda_n} \nu_S(B'_j)$  e, como  $B'_j \subset B_k^i$  para certos  $i$  e  $k$  tais que  $i + k = j$ , pode-se obter uma cota superior para a medida destes conjuntos dada por

$$\nu(B) \leq \left( \max_{B' \in \beta} \nu_S(B') \right)^{|\Lambda_{N_\varepsilon} + \Lambda_n|}, \quad (2.21)$$

para todo  $B \in [\beta]^{\Lambda_{N_\varepsilon} + \Lambda_n}$ .  $\diamond$

**Proposição 2.4.2.** *Dada uma cobertura  $\beta$  em  $\mathcal{S}$ , temos que  $[\beta]^{\Lambda_{N_\varepsilon} + \Lambda_n} \subset ([\beta]^{\Lambda_{N_\varepsilon}})^{\Lambda_n}$ . Consequentemente,  $[\beta]^{\Lambda_{N_\varepsilon} + \Lambda_n}$  é uma subcobertura de  $([\beta]^{\Lambda_{N_\varepsilon}})^{\Lambda_n}$ .*

*Demonstração.* Já sabemos que o  $[\beta]$  é um cobertura em  $\Sigma_{\mathcal{S}}$  e que o refinamento das  $\Lambda_n$ -pré-imagens de qualquer cobertura é uma cobertura, logo basta provar que  $[\beta]^{\Lambda_{N_\varepsilon} + \Lambda_n} \subset ([\beta]^{\Lambda_{N_\varepsilon}})^{\Lambda_n}$ . Seja  $[\bar{\xi}]_{\Lambda_{N_\varepsilon} + \Lambda_n} \in [\beta]^{\Lambda_{N_\varepsilon} + \Lambda_n}$  para a coletânea  $\bar{\xi} = \{B'_j\}_{j \in \Lambda_n + \Lambda_{N_\varepsilon}}$ , com  $B'_j \in \beta$  para todo  $j \in \Lambda_n + \Lambda_{N_\varepsilon}$ . Defina as coletâneas  $\xi_i = \{B_k^i\}_{k \in \Lambda_{N_\varepsilon}} \subset \beta$ , com  $i \in \Lambda_n$ , tomando  $B_k^i = B'_j$  para quaisquer  $i + k = j$ . Em particular, temos que  $B'_j = \bigcap_{\substack{i \in \Lambda_n, k \in \Lambda_{N_\varepsilon} \\ i+k=j}} B_k^i$  e assim

$$[\bar{\xi}]_{\Lambda_{N_\varepsilon} + \Lambda_n} = \bigcap_{i \in \Lambda_n} \sigma^{-i}([\xi_i]_{\Lambda_{N_\varepsilon}}) \in ([\beta]^{\Lambda_{N_\varepsilon}})^{\Lambda_n}.$$

Logo,  $[\beta]^{\Lambda_{N_\varepsilon} + \Lambda_n} \subset ([\beta]^{\Lambda_{N_\varepsilon}})^{\Lambda_n}$ .  $\square$

**Observação 2.4.1.** Devido ao exemplo 2.4.1, a discussão anterior também é válida para qualquer cobertura do tipo  $[\beta]^{\Lambda_m}$  para  $m \geq N_\varepsilon$ , onde  $\beta$  é uma cobertura em  $\mathcal{S}$  cujos elementos possuem diâmetros menores que  $\delta_\varepsilon$ .

Em contraponto ao caso finito, uma cobertura por cilindros em geral não caracteriza uma partição para  $\Sigma_{\mathcal{S}}$ , devido à possibilidade de intersecções entre os elementos de uma cobertura em  $\mathcal{S}$ . Desta forma, faz-se necessário descrever as partições de forma análoga às coberturas. Assim, procuraremos obter partições em  $\Sigma_{\mathcal{S}}$  a partir de partições em  $\mathcal{S}$ , sendo estas obtidas de coberturas em  $\mathcal{S}$

**Exemplo 2.4.3.** *Partição de cilindros cujo diâmetro é menor que  $\varepsilon$ :* Dados  $\varepsilon > 0$  e uma partição  $\alpha$  em  $\mathcal{S}$  cujos elementos possuem diâmetros menores que  $\delta_\varepsilon$ , temos a partição  $[\alpha]^{\Lambda_{N_\varepsilon}}$  para  $\Sigma_{\mathcal{S}}$  cumprindo  $\text{diam}([\alpha]^{\Lambda_{N_\varepsilon}}) < \varepsilon$ .

Analogamente ao que foi feito no exemplo anterior, o refinamento das  $\Lambda_n$ -pré-imagens  $([\alpha]^{\Lambda_{N_\varepsilon}})^{\Lambda_n}$  possui os conjuntos

$$\bigcap_{i \in \Lambda_n} \sigma^{-i}([\xi_i]_{\Lambda_{N_\varepsilon}}) = \bigcap_{j \in \Lambda_{N_\varepsilon} + \Lambda_n} \pi_j^{-1} \left( \bigcap_{\substack{i \in \Lambda_n, k \in \Lambda_{N_\varepsilon} \\ i+k=j}} A_k^i \right) = [\bar{\xi}]_{\Lambda_{N_\varepsilon} + \Lambda_n},$$

para as coletâneas  $\xi_i = \{A_k^i\}_{k \in \Lambda_{N_\varepsilon}} \subset \alpha$ , com  $i \in \Lambda_n$ , e  $\bar{\xi} = \{A_j'\}_{j \in \Lambda_n + \Lambda_{N_\varepsilon}}$ , onde  $A_j' = \bigcap_{\substack{i \in \Lambda_n, k \in \Lambda_{N_\varepsilon} \\ i+k=j}} A_k^i$ . Devido ao fato de  $\alpha$  ser partição de  $\mathcal{S}$ , atente que

$$\bigcap_{\substack{i \in \Lambda_n, k \in \Lambda_{N_\varepsilon} \\ i+k=j}} A_k^i = \begin{cases} A_k^i, & \text{se } A_k^i = A_{k'}^{i'} \text{ para quaisquer } i', k' \text{ com } i' + k' = j = i + k; \\ \emptyset, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Isto implica que  $\bar{\xi} \subset \alpha$  e assim obtemos  $([\alpha]^{\Lambda_{N_\varepsilon}})^{\Lambda_n} = [\alpha]^{\Lambda_{N_\varepsilon} + \Lambda_n}$ . Além disso, não é difícil ver que tal igualdade só é válida se  $\alpha$  for uma partição.

A medida de tais conjuntos com relação ao estado básico  $\nu$  pode ser estimada por

$$\left( \min_{A' \in \alpha} \nu_S(A') \right)^{|\Lambda_{N_\varepsilon} + \Lambda_n|} \leq \nu(A) \leq \left( \max_{A' \in \alpha} \nu_S(A') \right)^{|\Lambda_{N_\varepsilon} + \Lambda_n|}, \quad (2.22)$$

para todo  $A \in [\alpha]^{\Lambda_{N_\varepsilon} + \Lambda_n}$ .  $\diamond$

Os seguintes lemas serão fundamentais para os resultados a seguir, que buscam estabelecer relações entre os formalismos, e também para o caso de conjuntos infinitos de *spins*.

**Lema 2.4.1** (Majoração). *Seja  $\Psi$  um potencial contínuo  $\sigma$ -invariante para um sistema de spins unidimensional  $(\Sigma_S, \sigma, \mathcal{H}^{Pot}, \nu)$ . Dados  $\varepsilon > 0$ , considere  $\beta$  uma cobertura finita aberta para  $\mathcal{S}$  tal que  $\text{diam}(\beta) < \delta_\varepsilon$ . Então obtemos a seguinte desigualdade*

$$\int e^{\mathcal{H}_{\Lambda_n}^{Pot}} d\nu \leq P_n(\mathcal{H}^{Pot}, [\beta]^{\Lambda_{N_\varepsilon}}) \left( \max_{B \in \beta} \nu_S(B) \right)^{|\Lambda_{N_\varepsilon} + \Lambda_n|}.$$

*Demonstração.* Pela discussão anterior, obtemos a partir da cobertura  $\beta$  em  $\mathcal{S}$  a cobertura  $[\beta]^{\Lambda_{N_\varepsilon}}$  em  $\Sigma_S$ . Lembre-se que

$$P_n(\mathcal{H}^{Pot}, [\beta]^{\Lambda_{N_\varepsilon}}) = \inf \left\{ \sum_{B \in \theta} \sup_{\omega \in B} e^{\mathcal{H}_{\Lambda_n}^{Pot}(\omega)} : \theta \text{ subcobertura finita de } ([\beta]^{\Lambda_{N_\varepsilon}})^{\Lambda_n} \right\}.$$

Seja  $\theta = \{B_1, \dots, B_m\}$  uma subcobertura finita para  $([\beta]^{\Lambda_{N_\varepsilon}})^{\Lambda_n}$ . Defina a partição  $\bar{\alpha}$  formada pelos conjuntos não vazios da seguinte construção:

$$A_1 = B_1, \quad A_i = B_i - \left( \bigcup_{1 \leq k < i} A_k \right), \quad \text{para todo } 1 < i \leq m. \quad (2.23)$$

Tal partição satisfaz as condições abaixo:

- (i) para cada  $A \in \bar{\alpha}$ , existe aberto  $B_A \in \theta$  que satisfaz  $A \subset B_A$ ;
- (ii) além disso,  $B_A \neq B_{A'}$  sempre que  $A \neq A'$ .

Para verificar (i) e (ii), basta ver que para  $A_i \neq \emptyset$  é suficiente tomar  $B_{A_i} = B_i$ .

Assim, para a partição  $\bar{\alpha}$ , associamos a função simples

$$g_n(\omega) := \sum_{A \in \bar{\alpha}} \sup_{\omega \in A} e^{\mathcal{H}_{\Lambda_n}^{Pot}(\omega)} \chi_A(\omega),$$

para a qual temos claramente que  $e^{\mathcal{H}_{\Lambda_n}^{Pot}} \leq g_n$ . Logo, para qualquer estado  $\mu \in \mathcal{P}(\Sigma_S)$  e para cada  $n \in \mathbb{N}$ , temos

$$\begin{aligned} \int e^{\mathcal{H}_{\Lambda_n}^{Pot}} d\mu &\leq \int g_n d\mu = \sum_{A \in \bar{\alpha}} \sup_{\omega \in A} e^{\mathcal{H}_{\Lambda_n}^{Pot}(\omega)} \mu(A) \\ &\leq \left( \sum_{A \in \bar{\alpha}} \sup_{\omega \in A} e^{\mathcal{H}_{\Lambda_n}^{Pot}(\omega)} \right) \left( \max_{A \in \bar{\alpha}} \mu(A) \right). \end{aligned}$$

Como  $\sup_{\omega \in A} e^{\mathcal{H}_{\Lambda_n}^{Pot}(\omega)} \leq \sup_{\omega \in B_A} e^{\mathcal{H}_{\Lambda_n}^{Pot}(\omega)}$ , onde  $B_A$  é um aberto da subcobertura  $\theta$  tal que  $A \subset B_A$ , pela condição (ii) acima obtemos

$$\sum_{A \in \bar{\alpha}} \sup_{\omega \in A} e^{\mathcal{H}_{\Lambda_n}^{Pot}(\omega)} \leq \sum_{B_A : A \in \bar{\alpha}} \sup_{\omega \in B_A} e^{\mathcal{H}_{\Lambda_n}^{Pot}(\omega)} \leq \sum_{B \in \theta} \sup_{\omega \in B} e^{\mathcal{H}_{\Lambda_n}^{Pot}(\omega)}.$$

Além disso, devido ao fato de que  $\mu(A) \leq \mu(B_A)$  para qualquer estado  $\mu \in \mathcal{P}(\Sigma_S)$ , sendo  $\theta$  uma subcobertura de  $(\lfloor \beta \rfloor^{\Lambda_{N_\varepsilon}})^{\Lambda_n}$ , temos que

$$\max_{A \in \bar{\alpha}} \mu(A) \leq \max_{A \in \bar{\alpha}} \mu(B_A) \leq \max_{B \in \theta} \mu(B) \leq \max_{B \in (\lfloor \beta \rfloor^{\Lambda_{N_\varepsilon}})^{\Lambda_n}} \mu(B).$$

Consequentemente,

$$\int e^{\mathcal{H}_{\Lambda_n}^{Pot}} d\mu \leq \left( \sum_{B \in \theta} \sup_{\omega \in B} e^{\mathcal{H}_{\Lambda_n}^{Pot}(\omega)} \right) \left( \max_{B \in (\lfloor \beta \rfloor^{\Lambda_{N_\varepsilon}})^{\Lambda_n}} \mu(B) \right).$$

A desigualdade acima vale para qualquer subcobertura finita  $\theta$  de  $(\lfloor \beta \rfloor^{\Lambda_{N_\varepsilon}})^{\Lambda_n}$ . O resultado segue deste fato e de que, quando  $\mu$  é o estado básico  $\nu$ , conseguimos majorar (equação (2.21)) a medida dos elementos de  $(\lfloor \beta \rfloor^{\Lambda_{N_\varepsilon}})^{\Lambda_n}$ .  $\square$

**Lema 2.4.2** (Minoração). *Seja  $\Psi$  um potencial contínuo  $\sigma$ -invariante para um sistema de spins unidimensional  $(\Sigma_S, \sigma, \mathcal{H}^{Pot}, \nu)$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , considere que existem uma cobertura finita aberta  $\beta$  para  $\mathcal{S}$  com  $\text{diam}(\beta) < \delta_\varepsilon$  e uma partição finita  $\underline{\alpha}$  em  $\mathcal{S}$  satisfazendo as condições:*

- (i) para cada  $B \in \beta$ , existe  $A_B \in \underline{\alpha}$  que satisfaz  $A_B \subset B$ ;
- (ii) além disso,  $A_B \neq A_{B'}$  sempre que  $B \neq B'$ .

Então, obtemos a seguinte desigualdade:

$$Q_n(\mathcal{H}^{Pot}, [\beta]^{\Lambda_{N_\varepsilon}}) \left( \min_{A \in \underline{\alpha}} \nu_S(A) \right)^{|\Lambda_{N_\varepsilon} + \Lambda_n|} \leq \int e^{\mathcal{H}_{\Lambda_n}^{Pot}} d\mu.$$

*Demonstração.* Lembre-se que

$$Q_n(\mathcal{H}^{Pot}, [\beta]^{\Lambda_{N_\varepsilon}}) := \inf \left\{ \sum_{B \in \theta} \inf_{\omega \in B} e^{\mathcal{H}_{\Lambda_n}^{Pot}(\omega)} : \theta \text{ subcobertura finita de } ([\beta]^{\Lambda_{N_\varepsilon}})^{\Lambda_n} \right\}.$$

Na proposição 2.4.2, mostramos que  $[\beta]^{\Lambda_{N_\varepsilon} + \Lambda_n}$  é uma subcobertura para  $([\beta]^{\Lambda_{N_\varepsilon}})^{\Lambda_n}$ , portanto é suficiente majorar o somatório acima para  $\theta = [\beta]^{\Lambda_{N_\varepsilon} + \Lambda_n}$ .

Primeiramente, verificamos que as hipóteses (i) e (ii) sobre  $\underline{\alpha}$  e  $\beta$  são herdadas por  $[\underline{\alpha}]^{\Lambda_{N_\varepsilon} + \Lambda_n}$  e  $[\beta]^{\Lambda_{N_\varepsilon} + \Lambda_n}$ .

(i)' Para cada  $B \in [\beta]^{\Lambda_{N_\varepsilon} + \Lambda_n}$ , existe  $A_B \in [\underline{\alpha}]^{\Lambda_{N_\varepsilon} + \Lambda_n}$  tal que  $A_B \subset B$ : dado  $B = [\xi]_{\Lambda_{N_\varepsilon} + \Lambda_n}$ , onde  $\xi = \{B_k\}_{k \in \Lambda_{N_\varepsilon} + \Lambda_n} \subset \beta$ , basta tomar conjunto  $A_B := [\underline{\xi}]_{\Lambda_{N_\varepsilon} + \Lambda_n} \subset [\underline{\alpha}]^{\Lambda_{N_\varepsilon} + \Lambda_n}$ , onde  $\underline{\xi} = \{A_{B_k}\}_{k \in \Lambda_{N_\varepsilon}} \subset \underline{\alpha}$  com  $A_{B_k}$ 's coerentes com as condições (i) e (ii) da hipótese.

(ii)' Ademais,  $A_B \neq A_{B'}$  sempre que  $B \neq B'$ : segue devido ao fato de a construção anterior levar em consideração a condição (ii) da hipótese.

Argumentando de forma semelhante à do lema anterior, definimos para a partição  $[\underline{\alpha}]^{\Lambda_{N_\varepsilon} + \Lambda_n}$  a função simples

$$f_n(\omega) := \sum_{A \in [\underline{\alpha}]^{\Lambda_{N_\varepsilon} + \Lambda_n}} \inf_{\omega \in A} e^{\mathcal{H}_{\Lambda_n}^{Pot}(\omega)} \chi_A(\omega),$$

a qual claramente satisfaz  $e^{\mathcal{H}_{\Lambda_n}^{Pot}} \geq f_n$ . Logo, para qualquer estado  $\mu \in \mathcal{P}(\Sigma_S)$  e para cada  $n \in \mathbb{N}$ , temos

$$\begin{aligned} \int e^{\mathcal{H}_{\Lambda_n}^{Pot}} d\mu &\geq \int f_n d\mu = \sum_{A \in [\underline{\alpha}]^{\Lambda_{N_\varepsilon} + \Lambda_n}} \inf_{\omega \in A} e^{\mathcal{H}_{\Lambda_n}^{Pot}(\omega)} \mu(A) \\ &\geq \left( \sum_{A \in [\underline{\alpha}]^{\Lambda_{N_\varepsilon} + \Lambda_n}} \inf_{\omega \in A} e^{\mathcal{H}_{\Lambda_n}^{Pot}(\omega)} \right) \left( \min_{A \in [\underline{\alpha}]^{\Lambda_{N_\varepsilon} + \Lambda_n}} \mu(A) \right). \end{aligned}$$

Como  $\inf_{\omega \in A_B} e^{\mathcal{H}_{\Lambda_n}^{Pot}(\omega)} \geq \inf_{\omega \in B} e^{\mathcal{H}_{\Lambda_n}^{Pot}(\omega)}$ , onde  $A_B$  é um elemento da partição  $[\underline{\alpha}]^{\Lambda_{N_\varepsilon} + \Lambda_n}$  tal que  $A_B \subset B \in [\beta]^{\Lambda_{N_\varepsilon} + \Lambda_n}$ , pela condição (ii)' acima obtemos

$$\sum_{A \in [\underline{\alpha}]^{\Lambda_{N_\varepsilon} + \Lambda_n}} \inf_{\omega \in A} e^{\mathcal{H}_{\Lambda_n}^{Pot}(\omega)} \geq \sum_{A_B : B \in [\beta]^{\Lambda_{N_\varepsilon} + \Lambda_n}} \inf_{\omega \in A_B} e^{\mathcal{H}_{\Lambda_n}^{Pot}(\omega)} \geq \sum_{B \in [\beta]^{\Lambda_{N_\varepsilon} + \Lambda_n}} \inf_{\omega \in B} e^{\mathcal{H}_{\Lambda_n}^{Pot}(\omega)}.$$

Aplicando esta desigualdade e a estimativa dada pela equação (2.22), quando  $\mu$  é o estado básico  $\nu$ , temos

$$\left( \sum_{B \in [\beta]^{\Lambda_{N_\varepsilon} + \Lambda_n}} \inf_{\omega \in B} e^{\mathcal{H}_{\Lambda_n}^{Pot}(\omega)} \right) \left( \min_{A \in \underline{\alpha}} \nu_{\mathcal{S}}(A) \right)^{|\Lambda_{N_\varepsilon} + \Lambda_n|} \leq \int e^{\mathcal{H}_{\Lambda_n}^{Pot}} d\mu,$$

donde segue o resultado.  $\square$

Para que as hipóteses (i) e (ii) do lema anterior não sejam vazias, construiremos para qualquer conjunto de *spins* uma partição  $\underline{\alpha}_\varepsilon$  e uma cobertura  $\beta(\underline{\alpha}_\varepsilon)$ , com  $diam(\beta(\underline{\alpha})) \leq \delta_\varepsilon$ , satisfazendo-as. Para isto, considere o seguinte conceito.

**Definição 2.4.1.** Uma cobertura  $\beta$  é dita minimal se não possui nenhuma subcobertura própria, isto é, se  $\theta$  é uma subcobertura de  $\beta$  então  $\theta = \beta$ . Equivalentemente, para cada aberto da cobertura, sempre é possível garantir a existência de ao menos um ponto que não seja coberto por mais nenhum outro aberto desta cobertura.

Enfatizamos que a compacidade de  $\mathcal{S}$  nos permite sempre tomar uma subcobertura finita. Ademais, por eliminação de uma quantidade finita de conjuntos em tal subcobertura, é possível obter uma subcobertura minimal e finita. Além disso, a minimalidade de uma cobertura  $\beta$  é herdada pela cobertura  $[\beta]^{\Lambda_{N_\varepsilon}}$ , mas não necessariamente é herdada pelo refinamento  $([\beta]^{\Lambda_{N_\varepsilon}})^{\Lambda_n}$ . Tais fatos simplificarão bastante os argumentos e as construções a serem desenvolvidos.

**Exemplo 2.4.4.** Partição  $\underline{\alpha}_\varepsilon$  em  $\mathcal{S}$ : Dado  $\varepsilon > 0$ , seja  $\{B(x, \frac{\delta_\varepsilon}{8}) : x \in \mathcal{S}\}$  a coletânea de todas de bolas abertas de raio  $\frac{\delta_\varepsilon}{8}$  em  $\mathcal{S}$ . Tome uma subcobertura finita minimal  $\{B_1, \dots, B_k\}$  desta coletânea. A minimalidade nos garante a existência dos pontos  $\{x_1, \dots, x_k\}$  satisfazendo  $x_i \in B_i - (\cup_{j \neq i} B_j)$ , para todo  $1 \leq i \leq k$ . Em particular, qualquer ponto  $y$  no conjunto de *spins*  $\mathcal{S}$  está contido em algum  $B_j$  e portanto

$$d(y, \{x_1, \dots, x_k\}) \leq diam(B_j) = \frac{\delta_\varepsilon}{4}. \quad (2.24)$$

Além disso, por se tratar de um conjunto finito de pontos, temos que  $\{B(x_i, r_{min}) : 1 \leq i \leq k\}$ , para  $r_{min} := \min_{i \neq j} \frac{d_{\mathcal{S}}(x_i, x_j)}{2} > 0$ , é uma coletânea de conjuntos dois a dois disjuntos.

Considere a coletânea de conjuntos  $\{A'_1, \dots, A'_k\}$  com

$$A'_i := \{x \in \mathcal{S} : d_{\mathcal{S}}(x, x_i) = \min\{d_{\mathcal{S}}(x, x_j) : 1 \leq j \leq k\}\} \quad \forall 1 \leq i \leq k,$$

os quais são claramente mensuráveis. Para transformar esta coletânea em uma partição, basta fazer com que os pontos que pertencem à intersecção entre conjuntos escolham o

conjunto de menor índice. Com este intuito, definimos a partição  $\underline{\alpha}_\varepsilon = \{A_1, \dots, A_k\}$  aplicando o mesmo processo descrito em (2.23) a  $\{A'_1, \dots, A'_k\}$ .

Não é difícil obter desta construção que

$$x_i \in B(x_i, r_{min}) \subset A_i \subset A'_i \quad \text{para todo } 1 \leq i \leq k,$$

bem como, graças a (2.24), que  $diam(\underline{\alpha}_\varepsilon) \leq \frac{\delta_\varepsilon}{2} < \delta_\varepsilon$ .  $\diamond$

**Observação 2.4.2.** Perceba que, caso o conjunto de *spins* seja finito,  $\lfloor \underline{\alpha}_\varepsilon \rfloor$  acima coincide com  $\beta_F$  em (2.19) para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno. Além disso, o processo descrito em (2.23) no lema de majoração, quando aplicado à cobertura/partição  $\beta_F$  produz a própria  $\beta_F$ . Isto indica a coerência entre os lemas acima e a proposição 2.4.1.

**Exemplo 2.4.5.** Cobertura  $\beta(\underline{\alpha}_\varepsilon)$  em  $\mathcal{S}$ : Dada a partição  $\underline{\alpha}_\varepsilon$  construída no exemplo anterior, considere a coletânea

$$\left\{ \bigcup_{x \in A} B\left(x, \frac{\delta_\varepsilon}{4}\right) : A \in \underline{\alpha}_\varepsilon \right\}.$$

É fácil ver que os conjuntos da forma  $\bigcup_{x \in A} B\left(x, \frac{\delta_\varepsilon}{4}\right)$ , para  $A \in \underline{\alpha}_\varepsilon$ , são abertos, contêm  $A$  e, como  $\underline{\alpha}_\varepsilon$  é uma partição, definem, por sua vez, uma cobertura.

Defina assim  $\beta(\underline{\alpha}_\varepsilon)$  como uma subcobertura minimal da cobertura anterior. Note que  $diam(\underline{\alpha}_\varepsilon) \leq \frac{\delta_\varepsilon}{2}$  implica que  $diam(\beta(\underline{\alpha}_\varepsilon)) < \delta_\varepsilon$ . Em particular, dado  $B \in \beta$ , existe pelo menos um conjunto  $A \in \underline{\alpha}$  para o qual

$$B = \bigcup_{x \in A} B\left(x, \frac{\delta_\varepsilon}{4}\right).$$

Assim, para cada  $B \in \beta$ , escolha um representante em  $\underline{\alpha}_\varepsilon$  que satisfaz a igualdade acima e denote-o por  $A_B$ . Tal escolha nos permite verificar as condições do lema 2.4.2.

(i) Para cada  $B \in \beta$ , evidentemente

$$A_B \subset \bigcup_{x \in A_B} B\left(x, \frac{\delta_\varepsilon}{4}\right) = B.$$

(ii) Dados  $B \neq B'$ , temos que  $A_B \neq A_{B'}$ . Isto porque, caso contrário, devido à forma como foram escolhidos os respectivos elementos da partição, teríamos

$$B = \bigcup_{x \in A_B} B\left(x, \frac{\delta_\varepsilon}{4}\right) = \bigcup_{x \in A_{B'}} B\left(x, \frac{\delta_\varepsilon}{4}\right) = B',$$

o que é uma contradição.  $\diamond$

Na construção de  $\underline{\alpha}_\varepsilon = \{A_1, \dots, A_k\}$ , asseguramos a propriedade  $B(x_i, r_{min}) \subset A_i$ , para todo  $1 \leq i \leq k$ . Este fato, por sua vez, garante que

$$\left( \min_{A \in \underline{\alpha}_\varepsilon} \nu_S(A) \right)^{|\Lambda_{N_\varepsilon} + \Lambda_n|} \geq \left( \min_{A \in \underline{\alpha}_\varepsilon} \nu_S(B(x_i, r_{min})) \right)^{|\Lambda_{N_\varepsilon} + \Lambda_n|} > 0.$$

para todo  $1 \leq i \leq k$ , já que a medida de Haar é positiva para qualquer aberto. Considerando que a próxima etapa nesta análise consiste em tomar o logaritmo nas desigualdades dadas pelos lemas de majoração e minoração, a informação precedente mostra-se essencial.

Obtemos, portanto, um dos principais resultados desta seção.

**Teorema 2.4.3.** *Seja  $\Psi$  um potencial contínuo  $\sigma$ -invariante para um sistema de spins unidimensional  $(\Sigma_S, \sigma, \mathcal{H}^{Pot}, \nu)$ . Então, dado  $\varepsilon > 0$ , valem as seguintes desigualdades*

$$\log \left( \min_{A \in \underline{\alpha}_\varepsilon} \nu_S(A) \right) \leq p_\nu(-\mathcal{H}^{Pot}) - p(\mathcal{H}^{Pot}, [\beta(\underline{\alpha}_\varepsilon)]^{\Lambda_{N_\varepsilon}}) \leq \log \left( \max_{B \in \beta(\underline{\alpha}_\varepsilon)} \nu_S(B) \right), \quad (2.25)$$

onde a partição  $\underline{\alpha}_\varepsilon$  e a cobertura  $\beta(\underline{\alpha}_\varepsilon)$  para o conjunto  $\mathcal{S}$  são apresentadas, respectivamente, nos exemplos 2.4.4 e 2.4.5.

*Demonstração.* Sejam a partição  $\underline{\alpha}_\varepsilon$  e a cobertura  $\beta(\underline{\alpha}_\varepsilon)$  para o conjunto  $\mathcal{S}$  como no enunciado do teorema. Devido às discussões anteriores, sabemos que  $\text{diam}(\beta(\underline{\alpha}_\varepsilon)) < \delta_\varepsilon$  e que  $\beta(\underline{\alpha}_\varepsilon)$  e  $\underline{\alpha}_\varepsilon$  satisfazem as condições (i) e (ii) do lema 2.4.2. Logo, os lemas de majoração 2.4.1 e minoração 2.4.2 são válidos e assim obtemos

$$\begin{aligned} Q_n(\mathcal{H}^{Pot}, [\beta(\underline{\alpha}_\varepsilon)]^{\Lambda_{N_\varepsilon}}) \left( \min_{A \in \underline{\alpha}_\varepsilon} \nu(A) \right)^{|\Lambda_{N_\varepsilon} + \Lambda_n|} &\leq \int e^{\mathcal{H}_{\Lambda_n}^{Pot}} d\nu \leq \\ &\leq P_n(\mathcal{H}^{Pot}, [\beta(\underline{\alpha}_\varepsilon)]^{\Lambda_{N_\varepsilon}}) \left( \max_{B \in \beta(\underline{\alpha}_\varepsilon)} \nu_S(B) \right)^{|\Lambda_{N_\varepsilon} + \Lambda_n|}. \end{aligned}$$

Lembre que a pressão topológica com relação a uma cobertura  $p(\mathcal{H}^{Pot}, \cdot)$  pode ser obtida a partir da função  $Q_n$  ou da função  $P_n$  (ver observação 2.3.2).

Desta forma, tomando  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\Lambda_n|} \log$  na relação acima, obtemos

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|\Lambda_{N_\varepsilon} + \Lambda_n|}{|\Lambda_n|} \log \left( \min_{A \in \underline{\alpha}_\varepsilon} \nu(A) \right) &\leq \\ &\leq p_\nu(-\mathcal{H}^{Pot}) - p(\mathcal{H}^{Pot}, [\beta(\underline{\alpha}_\varepsilon)]^{\Lambda_{N_\varepsilon}}) \leq \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|\Lambda_{N_\varepsilon} + \Lambda_n|}{|\Lambda_n|} \log \left( \max_{B \in \beta(\underline{\alpha}_\varepsilon)} \nu_S(B) \right). \end{aligned}$$

O resultado segue observando que  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|\Lambda_{N_\varepsilon} + \Lambda_n|}{|\Lambda_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\Lambda_{N_\varepsilon} + \Lambda_n|}{|\Lambda_n|} = 1$ .  $\square$

**Observação 2.4.3.** Atente que, devido à observação 2.4.1, os resultados anteriores continuam válidos se  $\Lambda_{N_\varepsilon}$  for substituído por  $\Lambda_m$  para qualquer  $m \geq N_\varepsilon$ .

O próximo passo na tentativa de estabelecer relação entre a energia livre de Gibbs e a pressão topológica seria tomar o limite de  $p(\mathcal{H}^{Pot}, \beta_k)$ , quando  $k \rightarrow \infty$ , onde  $\{\beta_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  é uma sequência de coberturas em  $\Sigma_S$  tal que  $diam(\beta_k) \rightarrow 0$ , quando  $k \rightarrow \infty$ . Para que este procedimento possa vir a fazer sentido tendo em vista a desigualdade (2.25), introduzimos uma sequência de coberturas convenientes.

**Exemplo 2.4.6.** *Sequência de coberturas  $\{\beta_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  em  $\Sigma_S$ :* Considere a família de partições  $\{\underline{\alpha}_{\frac{1}{k}}\}_{k \in \mathbb{N}}$  sobre  $\mathcal{S}$ , onde cada partição  $\underline{\alpha}_{\frac{1}{k}}$  é dada pelo exemplo 2.4.4. Associada a tal família, temos a sequência de coberturas  $\{\beta(\underline{\alpha}_{\frac{1}{k}})\}_{k \in \mathbb{N}}$ , construídas no exemplo 2.4.5. Um fato conhecido é que  $diam(\beta(\underline{\alpha}_{\frac{1}{k}})) < \delta_{\frac{1}{k}}$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ .

Defina, portanto, a sequência  $\{\beta_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  em  $\Sigma_S$  tal que  $\beta_k := [\beta(\underline{\alpha}_{\frac{1}{k}})]^{\Lambda_{N\frac{1}{k}}}$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Da discussão do parágrafo anterior e da construção dos cilindros de diâmetro menor que  $\varepsilon$  (no exemplo 2.4.1) temos que

$$diam(\beta(\underline{\alpha}_{\frac{1}{k}})) < \delta_{\frac{1}{k}} \implies diam(\beta_k) < \frac{1}{k}$$

para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Logo  $diam(\beta_k) \rightarrow 0$ , quando  $k \rightarrow \infty$ .  $\diamond$

Apesar de apresentarmos uma sequência de coberturas condizentes com o teorema 2.4.3, os extremos em (2.25) nos obrigam a conhecer o comportamento assintótico da massa dos conjuntos em  $\underline{\alpha}_\varepsilon$  e em  $\beta(\underline{\alpha}_\varepsilon)$  segundo a medida de referência  $\nu_S$ . Com este intuito, primeiramente retornamos à discussão inicial desta dissertação, apresentando a seguinte classificação para os conjuntos de *spins*.

**Proposição 2.4.3.** *Seja  $\mathcal{S}$  grupo topológico compacto metrizável. Então,*

- (i) *ou  $\mathcal{S}$  é um conjunto finito de pontos isolado (munido da topologia discreta), com medida de Haar dada pela medida uniforme;*
- (ii) *ou  $\mathcal{S}$  é um conjunto não enumerável sem pontos isolados e, portanto, todo ponto possui massa nula para a medida de Haar.*

*Demonstração.* Independentemente da cardinalidade de  $\mathcal{S}$ , observamos que a propriedade Hausdorff garante que os conjuntos  $\{x\}$ , com  $x \in \mathcal{S}$ , são mensuráveis. Devido à transitividade da ação do grupo sobre si mesmo e à invariância da medida de Haar com relação a esta ação, temos que, para quaisquer  $x$  e  $y \in \mathcal{S}$ ,

$$\mu(\{x\}) = \mu((yx^{-1})\{x\}) = \mu(\{y\})$$

ou seja, todos os pontos têm mesma massa. Além disso, já foi comentado que medida de Haar é positiva sobre os abertos, isto é, para todo aberto  $A \subset \mathcal{S}$  temos  $\mu(A) > 0$ .

Caso o conjunto  $\mathcal{S}$  seja finito, é imediato da propriedade de metrização que a topologia associada é a topologia discreta, portanto todos os pontos são isolados. Por sua vez,  $\{\{x\} : x \in \mathcal{S}\}$  é uma coletânea de abertos de mesma medida que particiona  $\mathcal{S}$ , consequentemente  $\mu(\{x\}) = \frac{1}{|\mathcal{S}|}$ , para todo  $x \in \mathcal{S}$ , donde segue que a medida de Haar é a medida uniforme.

Suponha que  $\mathcal{S}$  é um conjunto infinito. Primeiramente, atentamos que  $\mathcal{S}$  não pode ser um conjunto enumerável, caso contrário,  $\mathcal{S} = \{x_i : i \in \mathbb{N}\}$  poderia ser escrito como uma união disjunta de conjuntos mensuráveis, isto é,  $\mathcal{S} = \cup_{i \in \mathbb{N}} \{x_i\}$ , donde obteríamos a seguinte contradição

$$1 = \mu(\mathcal{S}) = \mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{x_i\}\right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(\{x_i\}) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(\{e\}),$$

onde  $e$  é o elemento neutro do grupo. O argumento anterior também pode ser utilizado para garantir que todo subconjunto enumerável de  $\mathcal{S}$  tem medida nula. Por sua vez, todo ponto  $x \in \mathcal{S}$  tem massa nula, o que implica que  $\{x\}$  não é aberto, portanto nenhum ponto é isolado.  $\square$

Devido a tal classificação e como já determinamos, na proposição 2.4.1, a relação entre energia livre de Gibbs e pressão topológica para o caso em que o conjunto de *spins* é finito, resta-nos averiguar o caso em que o conjunto de *spins* é não enumerável. Neste caso, as informações dadas pela proposição anterior são suficientes para demonstrar o principal resultado desta seção.

**Teorema 2.4.4.** *Seja  $\Psi$  um potencial contínuo  $\sigma$ -invariante para um sistema de spins unidimensional  $(\Sigma_{\mathcal{S}}, \sigma, \mathcal{H}^{Pot}, \nu)$  cujo conjunto de spins  $\mathcal{S}$  é não enumerável. Então*

$$p(\mathcal{H}^{Pot}) = \infty.$$

*Demonstração.* Por contradição, suponha que  $p(\mathcal{H}^{Pot}) \in \mathbb{R}$ . Logo,  $p_{\nu}(-\mathcal{H}^{Pot}) - p(\mathcal{H}^{Pot}) \in \mathbb{R}$ . Considere a sequência de coberturas  $\{\beta_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  em  $\Sigma_{\mathcal{S}}$  dada pelo exemplo 2.4.6. Como  $\beta_k = [\beta(\underline{\alpha}_{\frac{1}{k}})]^{\wedge_{N_{\frac{1}{k}}}}$  deriva da partição  $\underline{\alpha}_{\frac{1}{k}}$  e da cobertura  $\beta(\underline{\alpha}_{\frac{1}{k}})$ , aplicando o teorema 2.4.3, obtemos

$$\log\left(\min_{A \in \alpha_{\frac{1}{k}}} \nu_{\mathcal{S}}(A)\right) \leq p_{\nu}(-\mathcal{H}^{Pot}) - p(\mathcal{H}^{Pot}, \beta_k) \leq \log\left(\max_{B \in \beta(\alpha_{\frac{1}{k}})} \nu_{\mathcal{S}}(B)\right)$$

para todo  $k \in \mathbb{N}$ .

Fixaremos apenas na segunda desigualdade acima. Tomando limite quando  $k \rightarrow \infty$ , obtemos

$$p_\nu(-\mathcal{H}^{Pot}) - p(\mathcal{H}^{Pot}) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \log \left( \max_{B \in \beta(\underline{\alpha}_{\frac{1}{k}})} \nu_S(B) \right).$$

Note que  $\text{diam}(\beta(\underline{\alpha}_{\frac{1}{k}})) < \delta_{\frac{1}{k}} \leq \frac{\text{diam}(\mathcal{S})}{k}$  implica que cada  $B \in \beta(\underline{\alpha}_{\frac{1}{k}})$  está contido na bola  $B\left(x, \frac{\text{diam}(\mathcal{S})}{k}\right)$  para qualquer  $x \in B$ . Devido à invariância da medida de Haar, temos

$$\nu_S(B) \leq \nu_S\left(B\left(x, \frac{\text{diam}(\mathcal{S})}{k}\right)\right) = \nu_S\left(B\left(e, \frac{\text{diam}(\mathcal{S})}{k}\right)\right),$$

onde  $e$  é o elemento neutro de  $\mathcal{S}$ . Por sua vez, a desigualdade acima é válida para todo  $B \in \beta(\underline{\alpha}_{\frac{1}{k}})$  e, portanto,

$$\left( \max_{B \in \beta(\underline{\alpha}_{\frac{1}{k}})} \nu_S(B) \right) \leq \nu_S\left(B\left(e, \frac{\text{diam}(\mathcal{S})}{k}\right)\right),$$

para todo  $k \in \mathbb{N}$ .

É imediato que  $B\left(e, \frac{\text{diam}(\mathcal{S})}{k}\right) \downarrow \{e\}$ , quando  $k \rightarrow \infty$ . A hipótese de  $\mathcal{S}$  ser não enumerável garante que  $\nu_S(\{e\}) = 0$ , devido ao item (ii) da proposição 2.4.3. Assim,  $\nu_S\left(B\left(e, \frac{\text{diam}(\mathcal{S})}{k}\right)\right) \rightarrow 0$  quando  $k \rightarrow \infty$  e conseqüentemente

$$\begin{aligned} \liminf_{k \rightarrow \infty} \log \left( \max_{B \in \beta(\underline{\alpha}_{\frac{1}{k}})} \nu_S(B) \right) &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \log \left( \max_{B \in \beta(\underline{\alpha}_{\frac{1}{k}})} \nu_S\left(B\left(e, \frac{\text{diam}(\mathcal{S})}{k}\right)\right) \right) = -\infty \\ &\implies p_\nu(-\mathcal{H}^{Pot}) - p(\mathcal{H}^{Pot}) = -\infty, \end{aligned}$$

o que é uma contradição com a suposição inicial de que  $p_\nu(-\mathcal{H}^{Pot}) - p(\mathcal{H}^{Pot}) \in \mathbb{R}$ .  $\square$

Tal resultado mostra limitações de nossa estratégia em obter relação entre a abordagem variacional do formalismo DLR e o formalismo SRB via igualdade entre funções termodinâmicas. O fato de a entropia ser uma função semicontínua superiormente, enquanto que a entropia de Kolmogorov-Sinai necessita da hipótese de existência de uma  $\mu$ -partição geradora para apresentar tal propriedade (proposição 2.3.2, item (i)), já era uma primeira indicação de que tal estratégia não fosse sempre exitosa, porém não concretizava um argumento formal.

Em síntese, é possível mostrar a equivalência entre a abordagem variacional do formalismo DLR e o formalismo SRB sempre que o conjunto de *spins*  $\mathcal{S}$  é finito. Portanto, os estados de Gibbs  $\sigma$ -invariantes e os estados de equilíbrios são noções idênticas neste contexto. Por outro lado, demonstramos que as funções termodinâmicas podem ter comportamentos distintos quando se considera um conjunto de *spins* mais geral.

Apesar disso, segue imediatamente do teorema anterior um corolário útil para a teoria de sistemas dinâmicos.

**Corolário 2.4.5.** *É infinita a entropia topológica  $h_{\text{Top}}(\sigma)$  associada a um shift completo  $(\Sigma_{\mathcal{S}}, \sigma, \nu)$  sobre qualquer alfabeto (grupo topológico metrizável)  $\mathcal{S}$  não enumerável.*

*Demonstração.* Lembre-se do exemplo 2.3.3. Basta então considerar o potencial nulo no teorema anterior.  $\square$

Nossa verdadeira intenção com este capítulo é a de aproximar os tratamentos mecânico-estatístico e dinamicista a partir de sua origem comum: o caso de conjunto de *spins*  $\mathcal{S}$  é finito. A decisão por apresentar distintamente estas funções termodinâmicas justifica-se (de fato, são distintas para conjuntos de *spins* mais gerais), sobretudo pela necessidade de se manter fiel à literatura clássica das respectivas áreas. Desta forma, possibilitamos ao leitor o entendimento do formalismo SRB, independentemente da sua associação com mecânica estatística. Além disso, quando apresentamos um potencial como uma família de observáveis  $\Psi = \{\Psi_n\}_{n \in \mathcal{L}}$  em vez de um único observável  $\Psi$ , como é canônico do formalismo SRB, queríamos oferecer ao leitor um significado físico para tal noção, como a energia de contribuição de cada sítio.

Portanto, se nos mantivermos no caso onde o conjunto de *spins*  $\mathcal{S}$  é finito, o que será feito de agora em diante, poderemos usufruir de todas as técnicas e ferramentas introduzidas pelos contextos mecânico-estatística e dinamicista, como também dos distintos pontos de vista desenvolvidos em cada um destes. Como forma de destacar qual abordagem, mecânico estatístico ou dinamicista, será utilizada, manteremos as respectivas denominações de estado de Gibbs  $\sigma$ -invariantes e de estado de equilíbrios.

## 2.5 Unicidade

Para finalizar este capítulo, examinamos para o contexto no qual o conjunto de *spins*  $\mathcal{S}$  é finito certas condições que garantem a unicidade dos estados de Gibbs/equilíbrio associados a um sistema de *spins* unidimensional. Seguindo o molde deste capítulo, faremos tal caracterização em duas etapas.

1. A primeira retoma os conceitos iniciais do formalismo DLR, apresentando uma formulação estocástica (markovina) para o fenômeno de unicidade.
2. Sob a perspectiva dinamicista, o segundo tratamento introduz o operador de Ruelle-Perron-Frobenius e obtém a unicidade a partir da exigência de uma certa regularidade sobre os potenciais.

Ambas as apresentações estão intimamente associadas ao resultado clássico da teoria de matrizes não negativas denominado de Teorema de Perron-Frobenius (veja teorema

A.0.16 do apêndice A), que garante a existência e unicidade de autovalor maximal para tais matrizes, sob certas hipóteses.

### Especificação Markoviana

De forma concisa, o formalismo DLR busca obter estados a partir de uma família de núcleos de probabilidade, que caracterizam uma especificação. Isto remete à teoria de processos estocásticos e à existência de estado de Markov associado a uma probabilidade de transição, como foi introduzido no exemplo 1.4.2. Na realidade, tais conceitos não só estão associados como se trata do mesmo fenômeno.

Considere o *shift* completo com conjunto de *spins*  $\mathcal{S} = \mathbb{U}_n$ . Recordamos que uma especificação  $\Gamma = \{\gamma_\Lambda\}_{\Lambda \in \mathcal{P}_F}$  é markoviana se existe função positiva  $g : \mathcal{S} \times \mathcal{S} \times \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\gamma_{\{i\}}(\omega, [\omega']_{\{i\}}) = g(\omega_{i-1}, \omega'_i, \omega_{i+1})$  para todo  $i \in \mathbb{Z}$ .

Neste contexto, os seguintes resultados são fundamentais.

#### Teorema 2.5.1.

(i) *Dados uma especificação markoviana  $\Gamma$  e um spin  $s \in \mathcal{S}$ , tem-se uma matriz positiva estocástica  $P = (P(x, y))_{x, y \in \mathcal{S}}$  definida por*

$$P(x, y) = \frac{Q(x, y)\vec{v}(y)}{\lambda\vec{v}(x)},$$

onde  $Q = (Q(x, y))_{x, y \in \mathcal{S}} = \left( \frac{g(s, x, y)}{g(s, s, y)} \right)_{x, y \in \mathcal{S}}$ ,  $\lambda$  é o maior autovalor positivo da matriz  $Q$  e  $\vec{v} = (\vec{v}(x))_{x \in \mathcal{S}}$  é autovetor com entradas positivas associado a  $\lambda$ . Além disso, o estado de Markov associado  $\mu_P$  é o estado de Gibbs para  $\Gamma$ , ou melhor,  $\mathcal{G}(\Gamma) = \{\mu_P\}$ .

(ii) *Dados uma matriz positiva estocástica  $P = (P(x, y))_{x, y \in \mathcal{S}}$  e seu respectivo estado de Markov associado  $\mu_P$ , tem-se uma especificação markoviana  $\Gamma = \{\gamma_\Lambda\}_{\Lambda \in \mathcal{P}_F}$  definida por*

$$\gamma_\Lambda(\omega, [\omega']_\Lambda) := \mu_P([\omega_\Lambda \omega'_\Lambda]_{\Lambda + \Lambda_2})$$

para quaisquer  $\Lambda \in \mathcal{P}_F$  e  $\omega, \omega' \in \Sigma_{\mathcal{S}}$ .

**Corolário 2.5.2.** *Uma especificação  $\Gamma$  é markoviana se, e somente se, é uma especificação gibbsiana para alguma interação  $\Phi$  de vizinhos mais próximos, isto é, tal que  $\text{Alc}(\Phi) = 2$ .*

**Observação 2.5.1.** A interação  $\Phi = \{\Phi_\Lambda\}_{\Lambda \in \mathcal{P}_F}$  garantida pelo corolário anterior é dada explicitamente por

$$\Phi_\Lambda(\omega) = \begin{cases} -\log P(\omega_i, \omega_{i+1}), & \text{se } \Lambda = \{i, i+1\}, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Para as demonstrações destes e de outros resultados que relacionam as cadeias de Markov à teoria de especificações, consulte o terceiro capítulo da referência [24].

**Exemplo 2.5.1.** *Estado de Markov/Gibbs associado ao modelo clock:* Aplicando o teorema 2.5.1 à especificação gibbsiana/markoviana do modelo *clock* apresentada no exemplo 2.1.4, temos que  $\mathcal{G}(\Gamma) = \{\mu_P\}$  para o estado de Markov  $\mu_P$  associado à matriz  $P$ . Fixando  $1 \in \mathbb{U}_n$ , tal matriz é dada por

$$\begin{aligned} P(x, y) &= \frac{Q(x, y)\vec{v}(y)}{\lambda\vec{v}(x)} = \frac{g(1, x, y)}{g(1, 1, y)} \frac{\vec{v}(y)}{\lambda\vec{v}(x)} \\ &= \frac{e^{\langle 1, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle x, \vec{h} \rangle}}{e^{\langle 1, 1 \rangle + \langle 1, y \rangle + \langle 1, \vec{h} \rangle}} \frac{\vec{v}(y)}{\lambda\vec{v}(x)} \end{aligned}$$

onde  $\lambda$  é o autovalor positivo da matriz  $Q = (Q(x, y))_{x, y \in \mathcal{S}}$  e  $\vec{v} = (\vec{v}(x))_{x \in \mathcal{S}}$  é autovetor associado a  $\lambda$ .  $\diamond$

### Potenciais Regulares

Resultados em [18, 27] mostram, assim como outros trabalhos, que a hipótese de continuidade sobre os potenciais  $\sigma$ -invariantes não é suficiente para garantir a unicidade do estado de equilíbrio. Apresentamos de forma concisa um exemplo para este fato.

**Exemplo 2.5.2.** *Potencial contínuo com mais de um estado de equilíbrio:* Sejam  $\mathcal{S} = \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$  e  $\Sigma_{\mathcal{S}}^+$  o *shift* unilateral. Dada uma sequência  $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  de números reais negativos com  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$ , defina o potencial contínuo  $\sigma$ -invariante

$$\Psi(\omega) = \begin{cases} a_k, & \text{se } \omega \in [1, \dots, 1, 0]_{\Lambda_k^+}, \\ 0, & \text{se } \omega = 1^\infty. \end{cases}$$

No artigo [27], mostra-se que, se a sequência  $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  satisfaz as condições

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{\sum_{i=0}^k a_i} = 1 \quad \text{e} \quad \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)e^{\sum_{i=0}^k a_i} < \infty,$$

então a pressão topológica do potencial  $\Psi$  é nula e existem ao menos dois estados de equilíbrio, sendo um destes o estado  $\delta_{1^\infty}$ .  $\diamond$

Desta forma, teremos que considerar uma classe mais restrita de potenciais  $\sigma$ -invariantes.

**Definição 2.5.1.** Um potencial  $\sigma$ -invariante  $\Psi$  é dito regular se cumpre

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup\{|\Psi(\omega) - \Psi(\omega')| : \omega_{\Lambda_n^+} = \omega'_{\Lambda_n^+}\} < \infty.$$

Em particular, qualquer potencial  $\sigma$ -invariante  $\Psi$  que for Lipschitz ou Hölder contínuo também é regular, já que  $\sup\{|\Psi(\omega) - \Psi(\omega')| : \omega_{\Lambda_n^+} = \omega'_{\Lambda_n^+}\} < C_\Psi(2^{n-1})^{a_\Psi}$  para constantes  $a_\Psi \in (0, 1]$  e  $C_\Psi > 0$ .

Considere então os seguintes conceitos.

**Notação 2.5.1.** Sejam  $a_i(\omega)$  e  $b_i(\omega)$  coletâneas de funções em  $\Sigma_{\mathcal{S}}$  indexadas sobre um conjunto  $I$ . A notação  $a_i(\omega) \asymp b_i(\omega)$  significa que existe uma constante  $C > 0$  tal que  $C^{-1}a_i(\omega) \leq b_i(\omega) \leq Ca_i(\omega)$  para todo  $i \in I$  e  $\omega \in \Sigma_{\mathcal{S}}$ .

**Definição 2.5.2.** Dizemos que um estado  $\mu \in \mathcal{P}(\Sigma_{\mathcal{S}}^+)$  satisfaz a propriedade Gibbs para um potencial  $\sigma$ -invariante se

$$\mu([\omega]_{\Lambda_n^+}) \asymp e^{\frac{\mathcal{H}^{Pot} - np(\mathcal{H}^{Pot})}{\Lambda_n^+}},$$

onde  $\mathcal{H}^{Pot} = \{\mathcal{H}_{\Lambda}^{Pot}\}_{\Lambda \in \mathcal{D}_F}$  é o hamiltoniano associado a  $\Psi$ .

**Observação 2.5.2.** Na literatura dinamicista, os estados que satisfazem a propriedade Gibbs são denominados simplesmente de estados de Gibbs. Para evitar confusão com os estados de Gibbs definidos para o formalismo DLR, preferimos apresentar esta noção como uma propriedade.

Com as devidas definições à disposição, podemos enunciar o seguinte resultado cuja demonstração pode ser encontrada em [11]:

**Teorema 2.5.3** (Unicidade do estado de equilíbrio). *Seja  $\Psi$  um potencial regular  $\sigma$ -invariante para um sistema de spins unidimensional  $(\Sigma_{\mathcal{S}}^+, \sigma, \mathcal{H}^{Pot}, \nu)$  sobre conjunto de spins  $\mathcal{S}$  finito. Então, existe um único estado  $\sigma$ -invariante  $\mu_{\Psi} \in \mathcal{P}_{\sigma}(\Sigma_{\mathcal{S}})$  que satisfaz a propriedade Gibbs. Além disso,  $\mu_{\Psi}$  é o único estado de equilíbrio para o potencial  $\Psi$ , sendo portanto ergódico.*

**Observação 2.5.3.** Repare que estamos tratando do contexto de *shift* completo unilateral  $\Sigma_{\mathcal{S}}^+$  sobre um conjunto de *spins*  $\mathcal{S}$  finito, porém lembramos que tal teorema é demonstrado na referência [11] para um contexto mais geral, dado pelos *subshifts* de tipo finito em  $\Sigma_{\mathcal{S}}^+$ .

## Operador de Ruelle-Perron-Frobenius

Historicamente este operador foi introduzido para o contexto mecânico-estatístico de gás de reticulado, onde era representado através de uma matriz irredutível indexada em  $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$ , para  $\mathcal{S}$  finito, denominada de matriz de transferência associada a um potencial  $\Psi$  de vizinhos mais próximos.

A estratégia desta proposta resume-se a encontrar pontos fixos de um certo operador e de seu dual (os quais serão introduzidos a seguir) e, a partir destes pontos fixos, construir o estado de equilíbrio desejado.

**Definição 2.5.3.** O operador de transferência ou operador de Ruelle-Perron-Frobenius (RPF) ou operador de Ruelle associado a um potencial  $\sigma$ -invariante  $\Psi$  é definido da seguinte maneira:

$$\mathcal{L}_\Psi : \mathcal{C}(\Sigma_S^+) \longrightarrow \mathcal{C}(\Sigma_S^+) \quad \text{é dado por} \quad (\mathcal{L}_\Psi(f))(\omega) := \sum_{\omega' \in \sigma^{-1}(\omega)} e^{\Psi(\omega')} f(\omega').$$

Por sua vez, o operador dual de Ruelle  $\mathcal{L}_\Psi^* : \mathcal{M}(\Sigma_S^+) \longrightarrow \mathcal{M}(\Sigma_S^+)$  é definido por

$$(\mathcal{L}_\Psi^*(\mu))(f) := \int \mathcal{L}_\Psi(f) d\mu = \int \sum_{\omega' \in \sigma^{-1}(\omega)} e^{\Psi(\omega')} f(\omega') d\mu(\omega).$$

Neste contexto, a generalização do Teorema de Perron-Frobenius (teorema A.0.16) é enunciada da seguinte forma:

**Teorema 2.5.4** (Teorema de Ruelle-Perron-Frobenius). *Sejam  $\Psi$  um potencial regular  $\sigma$ -invariante para um sistema de spins unidimensional  $(\Sigma_S^+, \sigma, \mathcal{H}^{Pot}, \nu)$  sobre conjunto de spins  $\mathcal{S}$  finito e  $\mathcal{L}_\Psi$  seu respectivo operador de Ruelle. Então, as seguintes afirmações válidas:*

- (i) *existe um autovalor positivo maximal para  $\mathcal{L}_\Psi$  dado por  $\lambda_\Psi = e^{P(\mathcal{H}^{Pot})}$ ;*
- (ii) *o autovalor  $\lambda_\Psi$  é simples tanto para  $\mathcal{L}_\Psi$  quanto para  $\mathcal{L}_\Psi^*$ , isto é, existem uma única autofunção positiva  $\mathfrak{g}_\Psi \in C(\Sigma_S^+)$  e um único autoestado (autovetor para  $\mathcal{L}_\Psi^*$ )  $\nu_\Psi \in \mathcal{P}(\Sigma_S^+)$  tais que  $\langle \mathfrak{g}_\Psi \rangle_{\nu_\Psi} = 1$ ,*

$$\mathcal{L}_\Psi(\mathfrak{g}_\Psi) = \lambda_\Psi \mathfrak{g}_\Psi \quad e \quad \mathcal{L}_\Psi^*(\nu_\Psi) = \lambda_\Psi \nu_\Psi;$$

- (iii) *para todo observável  $f \in C(\Sigma_S^+)$ , temos*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \lambda_\Psi^{-n} \mathcal{L}_\Psi^n(f) - \mathfrak{g}_\Psi \int f d\nu_\Psi \right\|_\infty = 0;$$

- (iv) *o estado  $\sigma$ -invariante  $\mathfrak{g}_\Psi \nu_\Psi$  é o único a atingir o supremo do princípio variacional; logo o estado de equilíbrio associado a  $\Psi$  é  $\mu_\Psi = \mathfrak{g}_\Psi \nu_\Psi$ .*

Relevantes referências sobre o operador de Ruelle, nos quais se encontra a demonstração do resultado anterior, são [42, 3]. Ambas estudam o operador de Ruelle e suas inúmeras aplicações para a teoria de sistemas dinâmicos, destacando assim a importância deste tópico.

---

## Congelamento do Sistema

---

Após estudar os estados de Gibbs e de equilíbrio para um dado sistema de *spins* unidimensional, analisamos neste capítulo o processo de congelamento. Um argumento heurístico conhecido indica que a energia associada às configurações, exceto às que maximizam o hamiltoniano, anula-se quando a temperatura tende a zero. Apesar de o zero absoluto ser fisicamente inatingível, nossa principal intenção com relação a tal análise é obter resultados sobre o conjunto de configurações que maximizam o hamiltoniano, caracterizando-o como suporte de certos estados associados à maximização da energia.

Estudaremos tal fenômeno do ponto de vista dinâmico, tratando-o como um tópico subsequente ao formalismo SRB. Por este motivo, esta seção lida com potenciais contínuos  $\sigma$ -invariantes, satisfazendo o princípio variacional, para a pressão topológica e a entropia de Kolmogorov-Sinai, dado pelo teorema 2.3.1.

Com o intuito de que o contexto mecânico-estatístico ainda sirva como base para aplicação dos resultados deste capítulo, aqui nos restringiremos ao caso em que o conjunto de *spins*  $\mathcal{S}$  é finito. Como mostramos no capítulo anterior, devido à equivalência das funções termodinâmicas e conseqüentemente dos estados de Gibbs  $\sigma$ -invariantes e dos estados de equilíbrio, a abordagem variacional do formalismo DLR coincide com o formalismo SRB neste caso.

Lembre-se de que os estados congelados foram apresentados na introdução desta dissertação para os sistemas de volume finito como pontos de acumulação, quando  $\beta \rightarrow \infty$ , para a família de estados de Boltzmann-Gibbs  $\{\mu_\beta\}_{\beta>0}$  associada à família de hamiltonianos  $\{\beta\mathcal{H}\}_{\beta>0}$ . Considerando sistemas de volume infinito, investigaremos o congelamento dos sistemas de *spins* unidimensionais de forma análoga. Para isso, faz-se necessário

introduzir a seguinte notação:

**Notação 3.0.2.** O parâmetro  $\beta$  denotará o inverso da temperatura  $T$  multiplicado pela constante de Boltzmann  $\kappa$ , isto é,  $\beta = \frac{1}{\kappa T}$ . Este atua sobre os potenciais e respectivos hamiltonianos por meio de multiplicação

$$\beta\Psi := \{\beta\Psi_n\}_{n \in \mathcal{L}} \quad \text{e} \quad \beta\mathcal{H}^{Pot} := \{\beta\mathcal{H}_\Lambda^{Pot}\}_{\Lambda \in \mathcal{D}_F}.$$

Portanto, fica implícito que congelar o sistema significa analisar seu comportamento quando a temperatura  $T \rightarrow 0$ , ou, equivalentemente, quando  $\beta \rightarrow \infty$ .

Este parâmetro também será agregado a outros conceitos; por exemplo, à pressão topológica, ao estado de equilíbrio, ao operador de Ruelle etc.

Considere a família de potenciais  $\sigma$ -invariantes  $\{\beta\Psi\}_{\beta>0}$ , obtida a partir do potencial  $\sigma$ -invariante  $\Psi$ . Caso  $\Psi$  seja um potencial Hölder  $\sigma$ -invariante, temos que os resultados de unicidade para o estado de equilíbrio, apresentados no final do capítulo anterior, garantem a associação, para cada  $\beta > 0$ , de um estado de equilíbrio  $\mu_\beta := \mu_{\beta\Psi}$  para o sistema de *spins* unidimensional  $(\Sigma_S^+, \sigma, \beta\mathcal{H}^{Pot}, \nu)$  sobre conjunto de *spins*  $\mathcal{S}$  finito.

Desta forma, introduzimos o principal conceito deste capítulo.

**Definição 3.0.4.** Seja  $\Psi$  um potencial Hölder  $\sigma$ -invariante para um sistema de *spins* unidimensional  $(\Sigma_S^+, \sigma, \mathcal{H}^{Pot}, \nu)$  sobre conjunto de *spins*  $\mathcal{S}$  finito. Ao fazer  $\beta \rightarrow \infty$ , denominamos estado congelado a qualquer ponto de acumulação  $\zeta$  para a família  $\{\mu_\beta\}_{\beta>0}$  (segundo a topologia fraca\*), onde  $\mu_\beta$  é o estado de equilíbrio associado ao potencial  $\beta\Psi$ .

Das propriedades do espaço  $\mathcal{P}_\sigma(\Sigma_S^+)$ , é fácil obter que  $\zeta \in \mathcal{P}_\sigma(\Sigma_S^+)$ . Além disso, observe que não afirmamos nada sobre unicidade do estado congelado.

### Caracterização Maximizante

Uma propriedade notável dos estados congelados para sistemas de *spins* de volume finito está no fato de que estes minimizam a energia média do hamiltoniano associado. Sinalizamos que tal característica não é particular do volume finito.

**Teorema 3.0.5.** *Se  $\Psi$  é um potencial Hölder  $\sigma$ -invariante, então qualquer estado congelado  $\zeta$  maximiza a energia média, isto é,*

$$\langle \Psi \rangle_\zeta = \langle \mathcal{H}^{Pot} \rangle_\zeta = \max_{\mu \in \mathcal{P}_\sigma(\Sigma_S^+)} \langle \Psi \rangle_\mu.$$

*Demonstração.* Sejam  $\beta > 0$  e  $\eta \in \mathcal{P}(\Sigma_S^+)$ . Devido ao princípio variacional, temos que

$$\beta \langle \Psi \rangle_\eta \leq h(\eta) + \langle \beta\Psi \rangle_\eta \leq p(\beta\Psi) = h(\mu_\beta) + \langle \beta\Psi \rangle_{\mu_\beta} \leq h_{Top}(\sigma) + \beta \langle \Psi \rangle_{\mu_\beta}.$$

Além disso, é imediato ver que

$$\beta \langle \Psi \rangle_{\mu_\beta} \leq \beta \max_{\mu \in \mathcal{P}_\sigma(\Sigma_S^+)} \langle \Psi \rangle_\mu \leq h_{Top}(\sigma) + \beta \max_{\mu \in \mathcal{P}_\sigma(\Sigma_S^+)} \langle \Psi \rangle_\mu.$$

Sendo assim, tomando  $\eta$  satisfazendo  $\langle \Psi \rangle_\eta = \max_{\mu \in \mathcal{P}_\sigma(\Sigma_S^+)} \langle \Psi \rangle_\mu$ , obtemos

$$\left| \langle \Psi \rangle_{\mu_\beta} - \max_{\mu \in \mathcal{P}_\sigma(\Sigma_S^+)} \langle \Psi \rangle_\mu \right| \leq \frac{1}{\beta} h_{Top}(\sigma).$$

Como um estado congelado  $\zeta$  é um ponto de acumulação para a família  $\{\mu_\beta\}_{\beta>0}$ , obtemos o resultado fazendo  $\beta \rightarrow \infty$ .  $\square$

Concluimos, desta maneira, que o problema de encontrar os estados congelados para um sistema de *spins* unidimensional é reduzido a um problema de seleção sobre o conjunto dos estados maximizantes para o potencial  $\Psi$ . Este conjunto, por sua vez, será o objeto de estudo da próxima seção.

**Observação 3.0.4.** Lembre-se da seção 2.2 do capítulo anterior, especificamente do princípio variacional enunciado no corolário 2.2.2, no qual a transição da noção de interação para a de potencial é realizada por intermédio do potencial  $-\Psi^\Phi$  associado à interação  $\Phi$ . Esta convenção de sinal negativo tem por consequência agora o foco em maximização relacionada aos estados congelados, em contraponto à caracterização por minimização apresentada para o caso de volume finito na introdução deste trabalho.

**Observação 3.0.5.** Outra maneira de discutir o fenômeno de congelamento do sistema resume-se em observar o comportamento limite, quando  $\beta \rightarrow \infty$ , dos núcleos de probabilidade das respectivas especificações. Dadas as especificações gibbsianas  $\Gamma_{\beta\Phi} = \{\mu_{\beta,\Lambda}^{Int}\}_{\Lambda \in \mathcal{P}_F}$ , para  $\beta > 0$ , define-se a especificação de temperatura zero

$$\Gamma_0 := \{\mu_{0,\Lambda}\}_{\Lambda \in \mathcal{P}_F} \quad \text{com} \quad \mu_{0,\Lambda}(\omega, A) := \lim_{\beta \rightarrow \infty} \mu_{\beta,\Lambda}^{Int}(\omega, A), \quad \forall \Lambda \in \mathcal{P}_F.$$

Trata-se de uma caracterização mecânico-estatística, onde os estados de Gibbs associados a tal especificação de temperatura zero, denominados, neste caso, de estados fundamentais, são os análogos aos estados congelados tratados anteriormente. Para uma discussão detalhada sobre tal construção, consulte a referência [56].

## 3.1 Otimização Ergódica

Prosseguimos o estudo dos estados congelados, investigando as ferramentas da teoria de otimização ergódica, especialmente aquelas obtidas da abstração de ideias e conceitos

propostos pela teoria KAM-fracca e pela teoria de Aubry-Mather para contextos dinâmicos completamente distintos ao qual estamos lidando.

A otimização ergódica vem sendo desenvolvida em uma coletânea de artigos publicados durante as duas últimas décadas. Entre estes podemos referenciar, por exemplo, [14, 29, 21, 22]. A maioria dos resultados a serem apresentados neste capítulo encontram-se nos artigos [23, 5].

Iniciamos tal estudo com o seguinte conceito:

**Definição 3.1.1.**

(i) O valor ergódico maximizante para um dado observável contínuo  $f$  é definido por

$$\langle f \rangle_{max} := \max \{ \langle f \rangle_{\mu} : \mu \in \mathcal{P}_{\sigma}(\Sigma_{\mathcal{S}}) \}.$$

(ii) Sejam  $\Psi$  potencial contínuo  $\sigma$ -invariante e  $\mathcal{H}^{Pot}$  o hamiltoniano de potencial associado. Um estado  $\mu \in \mathcal{P}_{\sigma}(\Sigma_{\mathcal{S}})$  é dito  $\Psi$ -maximizante se

$$\langle \Psi \rangle_{\mu} = \langle \mathcal{H}^{Pot} \rangle_{\mu} = \langle \Psi \rangle_{max}.$$

O conjunto dos estados  $\Psi$ -maximizantes é denotado por  $\mathcal{P}_{max}(\Sigma_{\mathcal{S}}, \Psi)$ .

**Proposição 3.1.1.** *O valor ergódico maximizante associado a um potencial contínuo  $\sigma$ -invariante  $\Psi$  possui os seguintes formulações equivalentes*

$$\begin{aligned} \langle \Psi \rangle_{max} &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\Lambda_n|} \sup_{\omega \in \Sigma_{\mathcal{S}}} \mathcal{H}_{\Lambda_n}^{Pot}(\omega) \\ &= \sup_{\omega \in \Sigma_{\mathcal{S}}} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\Lambda_n|} \mathcal{H}_{\Lambda_n}^{Pot}(\omega) \\ &= \sup_{\omega \in \text{Reg}(\Psi)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\Lambda_n|} \mathcal{H}_{\Lambda_n}^{Pot}(\omega), \end{aligned}$$

onde  $\text{Reg}(\Psi)$  denota o conjunto de pontos  $\omega \in \Sigma_{\mathcal{S}}$  tal que o limite  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\Lambda_n|} \mathcal{H}_{\Lambda_n}^{Pot}$  existe.

**Proposição 3.1.2.** *O conjunto dos estados  $\Psi$ -maximizantes  $\mathcal{P}_{max}(\Sigma_{\mathcal{S}}, \Psi)$  é um compacto convexo.*

**Observação 3.1.1.** A demonstração de tais resultados é apresentada, por exemplo, em [29], que aborda o tópico de maximização de medidas para sistemas dinâmico arbitrários. A necessidade da hipótese de compacidade sobre o espaço é investigada, entre outros artigos, em [31].

Investigamos os estados maximizantes associados ao potencial do exemplo 1.5.8.

**Exemplo 3.1.1.** Dadas constantes positivas  $\{\alpha_k\}_{0 \leq k < n}$ , fixe  $r \in \{2, \dots, n-1\}$ . Considere o sistema de *spins*  $(\Sigma_S^+, \sigma, \mathcal{H}^{Pot}, \nu)$ , sendo o potencial contínuo  $\sigma$ -invariante  $\Psi$  dado por

$$\Psi(\omega) = \begin{cases} -\alpha_0 d_{\Sigma_S^+}(\omega, 0^\infty), & \text{se } \omega_0 = 0 \\ -\alpha_1 d_{\Sigma_S^+}(\omega, 1^\infty), & \text{se } \omega_0 = 1 \\ \vdots & \vdots \\ -\alpha_{r-1} d_{\Sigma_S^+}(\omega, (r-1)^\infty), & \text{se } \omega_i = r-1 \\ -\alpha_r, & \text{se } \omega_0 = r \\ \vdots & \vdots \\ -\alpha_{n-1}, & \text{se } \omega_0 = n-1 \end{cases} .$$

Claramente temos que  $\Psi$  é um observável não positivo. Além disso,  $\Psi$  satisfaz a propriedade Lipchitz para cada uma das restrições  $\Psi|_{[i^\infty]_0}$ ,  $0 \leq i < n$ , e portanto é um observável Lipchitz.

Como  $\Psi \leq 0$ , obtemos que  $\langle \Psi \rangle_\mu \leq 0$  para qualquer estado  $\mu \in \mathcal{P}_\sigma(\Sigma_S^+)$ . Não é difícil perceber que qualquer estado  $\delta_{i^\infty}$ , com  $i \leq r$ , é  $\Psi$ -maximizante, já que neste caso

$$\langle \Psi \rangle_{\delta_{i^\infty}} = \Psi(i^\infty) = \alpha_i d_{\Sigma_S^+}(i^\infty, i^\infty) = 0.$$

Ademais, qualquer combinação convexa de tais estados também será maximizante.

Perceba que não necessariamente caracterizamos o conjunto  $\mathcal{P}_{max}(\Sigma_S^+, \Psi)$ , apenas apresentamos alguns estados pertencentes a este.  $\diamond$

Como forma de exemplificar os conceitos que serão introduzidos, retornaremos a este exemplo diversas vezes e prosseguiremos sua análise. Serão apresentados a seguir alguns resultados adicionais, restritos ao modelo 1.5.8, tornando este o exemplo base deste capítulo.

**Observação 3.1.2.** O potencial acima baseia-se no potencial

$$\Psi(\omega) = \begin{cases} -d_{\Sigma_S^+}(\omega, 0^\infty), & \text{se } \omega_0 = 0 \\ -3d_{\Sigma_S^+}(\omega, 1^\infty), & \text{se } \omega_0 = 1 \\ -\alpha, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.1)$$

para o *shift* unilateral com três valores de *spins*  $\Sigma_{\mathbb{Z}_3}^+$  apresentado pela referência [5]. Neste artigo, faz-se um estudo completo do estado congelado associado a  $\Psi$ , caracterizando-o e explicitando sua dependência com relação ao parâmetro  $\alpha$ .

### 3.1.1 Subações e Conjunto de Aubry

Prosseguimos apresentando uma caracterização do conjunto  $\mathcal{P}_{max}(\Sigma_S, \Psi)$  baseada no suporte de seus estados. Com este intuito, considere o seguinte subconjunto do conjunto não errante (veja definição A.0.19 no apêndice A).

**Definição 3.1.2.** O conjunto de Aubry (ou conjunto não errante  $\Psi$ -maximizante) é formado pelos pontos  $\omega \in \Sigma_S^+$  para os quais: dado  $\varepsilon > 0$ , existem  $n \geq 1$  e  $\omega' \in \Sigma_S^+$  tais que  $d_{\Sigma_S^+}(\omega, \omega') < \varepsilon$ ,  $d_{\Sigma_S^+}(\sigma^n(\omega'), \omega) < \varepsilon$  e  $\left| \mathcal{H}_{\Lambda_n^+}^{Pot}(\omega') - |\Lambda_n^+| \langle \Psi \rangle_{max} \right| < \varepsilon$ .

Não é difícil obter que  $\Omega(\Psi) = \Omega(\Psi + f \circ \sigma - f - c)$ , com  $f \in C(\Sigma_S)$  e  $c \in \mathbb{R}$ . Portanto, tal conjunto é invariante para potenciais  $\Psi$  e  $\Psi'$  cuja diferença pertence ao conjunto  $\{f \circ \sigma - f : f \in C(\Sigma_S)\} + c$ , para alguma constante  $c \in \mathbb{R}$ . Relembrando a definição 2.3.7, trata-se de um caso particular da equivalência por Ruelle. Além disso,  $\Omega(\Psi)$  é não vazio, compacto e  $\sigma$ -invariante (ver [14] para uma prova destes fatos).

A importância deste conjunto para a teoria de maximização de estados justifica-se pelo resultado fundamental do teorema a seguir, cuja estratégia para demonstração será descrita nas próximas páginas.

**Teorema 3.1.1.** *Dado um potencial Hölder  $\sigma$ -invariante  $\Psi$ , temos que*

$$\mathcal{P}_{max}(\Sigma_S, \Psi) = \{\mu \in \mathcal{P}_\sigma(\Sigma_S) : \text{supp}(\mu) \subset \Omega(\Psi)\},$$

ou seja, um estado é  $\Psi$ -maximizante se, e só se, seu suporte está contido no conjunto de Aubry.

De agora em diante exploraremos certas particularidades do conjunto de Aubry, as quais tornarão possível a análise posterior do comportamento assintótico da pressão para o exemplo base. Sendo assim, considere as seguintes noções.

**Definição 3.1.3.** Um observável contínuo  $u : \Sigma_S^+ \rightarrow \mathbb{R}$  é dito ser uma subação para o potencial Hölder  $\sigma$ -invariante  $\Psi$  se

$$(\Psi + u - u \circ \sigma)(\omega) \leq \langle \Psi \rangle_{max} \quad \forall \omega \in \Sigma_S^+.$$

Equivalentemente, se  $u(\omega) \geq \max_{\sigma(\omega')=\omega} \{\Psi(\omega') + u(\omega') - \langle \Psi \rangle_{max}\}$  para todo  $\omega \in \Sigma_S^+$ .

Denota-se por  $S(\Sigma_S^+, \Psi) \subset C(\Sigma_S^+)$  o conjunto das subações associadas ao potencial  $\Psi$ .

O local de contato de uma subação  $u$  para um potencial  $\Psi$  é definido por

$$\mathbb{M}_\Psi(u) := (\Psi + u - u \circ \sigma)^{-1}(\langle \Psi \rangle_{max}).$$

O conceito de subação é substancial para as ideias e as construções que se seguem. Uma discussão mais detalhada sobre a existência de tais observáveis será apresentada na próxima subseção.

Inicialmente observamos que a noção de local de contato associado a uma subação é suficiente para se obter um resultado semelhante ao teorema 3.1.1.

**Proposição 3.1.3.** *Dado  $\Psi$  um potencial Hölder  $\sigma$ -invariante, suponha que existe uma subação  $u$  para  $\Psi$ . Então,*

$$\mathcal{P}_{max}(\Sigma_S, \Psi) = \{\mu \in \mathcal{P}_\sigma(\Sigma_S) : \text{supp}(\mu) \subset \mathbb{M}_\Psi(u)\}.$$

*Demonstração.* Seja  $\mu \in \mathcal{P}_{max}(\Sigma_S, \Psi)$ . Pelas definições de subação e de estado  $\Psi$ -maximizante, temos que o observável  $\widehat{\Psi} := (\Psi + u - u \circ \sigma - \langle \Psi \rangle_{max})$  satisfaz

$$\widehat{\Psi} \leq 0 \quad \text{e} \quad \int \widehat{\Psi} d\mu = 0.$$

Portanto,  $\widehat{\Psi} \equiv 0$   $\mu$ -q.t.p., donde obtemos

$$\text{supp}(\mu) \subset \widehat{\Psi}^{-1}(0) = (\Psi + u - u \circ \sigma)^{-1}(\langle \Psi \rangle_{max}) = \mathbb{M}_\Psi(u).$$

Reciprocamente, considere  $\mu$  um estado  $\sigma$ -invariante tal que  $\text{supp}(\mu) \subset \mathbb{M}_\Psi(u) = (\Psi + u - u \circ \sigma)^{-1}(\langle \Psi \rangle_{max})$ . Resulta que

$$\langle \Psi \rangle_\mu = \int \Psi d\mu = \int_{\Sigma_S^+} (\Psi + u - u \circ \sigma) d\mu = \int_{\text{supp}(\mu)} (\Psi + u - u \circ \sigma) d\mu = \langle \Psi \rangle_{max}.$$

□

**Corolário 3.1.2.** *Supondo que exista uma subação  $u$  para o potencial Hölder  $\sigma$ -invariante  $\Psi$ , segue que*

$$\mathcal{P}_{max}(\Sigma_S, \Psi) = \left\{ \mu \in \mathcal{P}_\sigma(\Sigma_S) : \text{supp}(\mu) \subset \bigcap_{u \in S(\Sigma_S^+, \Psi)} \mathbb{M}_\Psi(u) \right\}.$$

Na realidade, a semelhança do teorema 3.1.1 com a proposição anterior não é uma mera coincidência. Antes de explicitarmos a relação existente, considere o seguinte fato.

**Proposição 3.1.4.** *Supondo que exista uma subação  $u$  para o potencial Hölder  $\sigma$ -invariante  $\Psi$ , temos que*

$$\Omega(\Psi) \subset \bigcap_{u \in S(\Sigma_S^+, \Psi)} \mathbb{M}_\Psi(u).$$

*Demonstração.* Basta demonstrar que qualquer subação  $u$  satisfaz  $\Omega(\Psi) \subset \mathbb{M}_\Psi(u)$ . Seja  $\omega \in \Omega(\Psi)$ . Para cada  $k \in \mathbb{N}$ , a continuidade de  $u$  garante que existe  $\varepsilon_k \in (0, \frac{1}{k})$  tal que

$$d_{\Sigma_S^+}(\omega, \omega') < \varepsilon_k \quad \text{implica} \quad |u(\omega) - u(\omega')| < \frac{1}{k}.$$

Pela definição do conjunto de Aubry, existem  $n_k \geq 1$  e  $\omega^{(k)} \in \Sigma_S^+$  tais que

$$d_{\Sigma_S^+}(\omega, \omega^{(k)}) < \varepsilon_k, \quad d_{\Sigma_S^+}(\sigma^{n_k}(\omega^{(k)}), \omega) < \varepsilon_k$$

$$\text{e } |S_{n_k}(\Psi)(\omega^{(k)}) - |\Lambda_{n_k}^+| \langle \Psi \rangle_{max}| = \left| \sum_{i \in \Lambda_{n_k}^+} \Psi \circ \sigma^i(\omega^{(k)}) - |\Lambda_{n_k}^+| \langle \Psi \rangle_{max} \right| < \varepsilon_k.$$

Para o observável  $\widehat{\Psi} := (\Psi + u - u \circ \sigma - \langle \Psi \rangle_{max})$ , obtemos então

$$\begin{aligned} 0 \geq S_{n_k}(\widehat{\Psi})(\omega^{(k)}) &= \sum_{i \in \Lambda_{n_k}^+} (\Psi + u - u \circ \sigma - \langle \Psi \rangle_{max}) \circ \sigma^i(\omega^{(k)}) \\ &= \sum_{i \in \Lambda_{n_k}^+} (\Psi - \langle \Psi \rangle_{max}) \circ \sigma^i(\omega^{(k)}) + \sum_{j \in \Lambda_{n_k}^+} (u - u \circ \sigma) \circ \sigma^j(\omega^{(k)}) \\ &= S_{n_k}(\Psi - \langle \Psi \rangle_{max})(\omega^{(k)}) + u(\omega^{(k)}) + [-u(\omega) + u(\omega)] - u \circ \sigma^{n_k}(\omega^{(k)}) \\ &> -\varepsilon_k - \frac{2}{k} > -\frac{3}{k}. \end{aligned}$$

Devido à continuidade de  $\widehat{\Psi}$ , temos

$$(\Psi + u - u \circ \sigma - \langle \Psi \rangle_{max})(\omega) = \widehat{\Psi}(\omega) = \lim_{k \rightarrow \infty} \widehat{\Psi}(\omega^{(k)}) = 0.$$

Portanto,  $\omega \in \mathbb{M}_\Psi(u)$ . □

Motivado pela demonstração anterior, refina-se a noção de subação.

**Definição 3.1.4.** Uma subação  $u$  para o potencial Hölder  $\sigma$ -invariante  $\Psi$  é dita ser separante se  $\Omega(\Psi) = \mathbb{M}_\Psi(u)$ .

A existência de subação separante para o potencial  $\Psi$  é demonstrada no artigo [22] sob hipótese de regularidade Hölder do potencial  $\sigma$ -invariante e está enunciada a seguir.

**Teorema 3.1.3.** *Existe uma subação separante para o potencial Hölder  $\sigma$ -invariante  $\Psi$ .*

Note que o teorema 3.1.1 pode ser obtido diretamente da proposição 3.1.4 e do teorema anterior. Antes de prosseguirmos com outras noções da teoria de otimização ergódica, retomamos o exemplo base deste capítulo.

**Exemplo 3.1.2.** Não é difícil ver que o observável nulo é uma subação para  $\Psi$ , já que  $(\Psi + 0 - 0 \circ \sigma) = \Psi \leq 0 = \langle \Psi \rangle_{max}$ . Além disso,  $\mathbb{M}_\Psi(0) = \Psi^{-1}(0) = \{i^\infty : 0 \leq i < r\}$ . Pela proposição 3.1.3, concluímos que

$$\mathcal{P}_{max}(\Sigma_S^+, \Psi) = \{\mu \in \mathcal{P}_\sigma(\Sigma_S^+) : \text{supp}(\mu) \subset \{i^\infty : 0 \leq i < r\}\}.$$

Perceba que o conjunto de estados  $\Psi$ -maximizantes, como está caracterizado acima, é formado por qualquer combinação convexa dos estados  $\delta_{i^\infty}$ , com  $0 \leq i < r$ .

Em particular,  $\Omega(\Psi) = \{i^\infty : 0 \leq i < r\}$  e o observável nulo é uma subação separante para  $\Psi$ . ◇

### 3.1.2 Subações Calibradas e Barreira de Peierls

Discutiremos nesta subseção a questão de existência de subações para um potencial Hölder  $\sigma$ -invariante  $\Psi$ . Com tal objetivo, introduzimos uma noção mais restritiva que a de subação, a qual será de fundamental importância para os próximos resultados.

**Definição 3.1.5.** Um observável contínuo  $u : \Sigma_S^+ \rightarrow \mathbb{R}$  é dito ser uma subação calibrada para o potencial Hölder  $\sigma$ -invariante  $\Psi$  se

$$u(\omega) = \max_{\sigma(\omega')=\omega} \{ \Psi(\omega') + u(\omega') - \langle \Psi \rangle_{max} \} \quad \forall \omega \in \Sigma_S^+.$$

Em particular, devido à segunda forma de se apresentar as subações (ver definição 3.1.3), temos que toda subação calibrada é uma subação. Por outro lado, a relação entre este dois conceitos é particularmente estreita.

**Proposição 3.1.5.** *Qualquer subação  $u$  para o potencial Hölder  $\sigma$ -invariante  $\Psi$  comporta-se como uma subação calibrada sobre o conjunto de Aubry, isto é,*

$$u(\omega) = \max_{\sigma(\omega')=\omega} \{ \Psi(\omega') + u(\omega') - \langle \Psi \rangle_{max} \} \quad \forall \omega \in \Omega(\Psi).$$

Para a prova desta proposição, consulte [21].

Motivado pela definição de subação calibrada, introduzimos o seguinte operador.

**Definição 3.1.6.** O operador de Lax-Oleinik  $\mathcal{T}_\Psi : C(\Sigma_S^+) \rightarrow C(\Sigma_S^+)$  associado a um potencial contínuo  $\sigma$ -invariante  $\Psi$  é definido por

$$\mathcal{T}_\Psi(f)(\omega) := \max_{\sigma(\omega')=\omega} \{ \Psi(\omega') + f(\omega') \} \quad \forall \omega \in \Sigma_S^+.$$

Através da análise do problema de ponto fixo para o operador induzido de Lax-Oleinik sobre  $C(\Sigma_S^+)/\mathbb{R}$ , é possível garantir a existência de subações calibradas, solucionando-se, portanto, a questão de existência de subações para potencial Hölder  $\sigma$ -invariante  $\Psi$ . Tal discussão é resumida no enunciado abaixo.

**Teorema 3.1.4.** *Seja  $\Psi$  um potencial Hölder  $\sigma$ -invariante. Então existe observável contínuo  $u$  tal que*

$$\mathcal{T}_\Psi(u) = u + \langle \Psi \rangle_{max}.$$

*Consequentemente,  $u$  é uma subação calibrada para  $\Psi$ .*

Para extrair mais informações sobre a propriedade de calibração para as subações, necessitaremos da seguinte noção:

**Definição 3.1.7.** Denomina-se por barreira de Peierls  $\mathbf{h}_\Psi : \Sigma_S^+ \times \Sigma_S^+ \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  a função

$$\mathbf{h}_\Psi(\omega, \omega') = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} S_n^\varepsilon(\omega, \omega'),$$

onde  $S_n^\varepsilon(\omega, \omega') := \sup \left\{ \mathcal{H}_{\Lambda_n^+}^{Pot}(\bar{\omega}) - |\Lambda_n^+| \langle \Psi \rangle_{max} : d_{\Sigma_S^+}(\omega, \bar{\omega}) < \varepsilon \text{ e } d_{\Sigma_S^+}(\sigma^n(\bar{\omega}), \omega') < \varepsilon \right\}$ .

Frisamos as principais características da barreira de Peierls.

**Proposição 3.1.6.**

- (i) A função  $\mathbf{h}_\Psi : \Sigma_S^+ \times \Sigma_S^+ \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  é semicontínua superiormente.
- (ii) Se  $\omega \in \Omega(\Psi)$ , então  $\mathbf{h}_\Psi(\omega, \cdot)$  é um observável Hölder e finito.
- (iii) Para quaisquer configurações  $\omega, \omega', \omega'' \in \Sigma_S^+$ , vale

$$\mathbf{h}_\Psi(\omega, \omega') + \mathbf{h}_\Psi(\omega', \omega'') \leq \mathbf{h}_\Psi(\omega, \omega'').$$

- (iv) Para qualquer  $\omega \in \Sigma_S^+$  com  $\sigma^n(\omega) \in \Omega(\Psi)$ , é satisfeita a relação

$$\mathbf{h}_\Psi(\omega, \sigma^n(\omega)) = \mathcal{H}_{\Lambda_n^+}^{Pot}(\omega) - |\Lambda_n^+| \langle \Psi \rangle_{max}.$$

- (v)  $\omega \in \Omega(\Psi)$  se, e só se,  $\mathbf{h}_\Psi(\omega, \omega) = 0$ .

Com relação às subações e subações calibradas, obtemos os seguintes resultados.

**Proposição 3.1.7.**

- (i) Para qualquer subação  $u$  temos  $\mathbf{h}_\Psi(\omega, \omega') \leq u(\omega') - u(\omega)$ .
- (ii) Se  $\omega \in \Omega(\Psi)$ , então  $\mathbf{h}_\Psi(\omega, \cdot)$  é uma subação calibrada.
- (iii) Toda subação calibrada pode ser representada da seguinte forma

$$u(\omega) = \max_{\omega' \in \Omega(\Psi)} \{u(\omega') + \mathbf{h}_\Psi(\omega', \omega)\}, \quad \forall \omega \in \Sigma_S^+.$$

**Observação 3.1.3.** As demonstrações do teorema 3.1.4 e das proposições anteriores podem ser encontradas, por exemplo, no artigo [23] e nas referências lá indicadas.

Para o exemplo base, os conceitos apresentados nesta subseção são explicitados a seguir.

**Exemplo 3.1.3.** Como  $\Omega(\Psi) = \{i^\infty : 0 \leq i < r\}$ , as subações calibradas possuem, neste caso, as seguintes representações:

$$u(\omega) = \max_{i \in \mathcal{S}} \{\Psi(i\omega) + u(i\omega)\} = \max_{0 \leq j < r} \{u(j^\infty) + \mathbf{h}_\Psi(j^\infty, \omega)\} \quad \forall \omega \in \Sigma_S^+.$$

◇

Ademais, especificamente para este caso, a barreira de Peierls satisfaz propriedades adicionais listadas abaixo.

**Proposição 3.1.8.**

- (i) Para quaisquer  $\omega$  e  $\omega' \in \Sigma_{\mathcal{S}}^+$ ,  $h_{\Psi}(\omega, \omega') \leq 0$ .
- (ii) Para quaisquer  $0 \leq j < r$  e  $\omega \notin \Omega(\Psi)$ ,  $h_{\Psi}(j^{\infty}, \omega) < 0$ .
- (iii) Para quaisquer  $0 \leq j < r$  e  $i \in \mathcal{S} - \{j\}$ ,  $h_{\Psi}(j^{\infty}, i^{\infty}) \geq -\alpha_j$ .

*Demonstração.* (i). É consequência direta do fato de o potencial ser não positivo.

(ii). Pelo item (ii) da proposição 3.1.7 e pelo item anterior, sabemos que  $h_{\Psi}(j^{\infty}, \cdot)$  é uma subação calibrada não positiva, para todo  $0 \leq j < r$ . Logo, pela definição de subação calibrada, temos, para qualquer  $\omega \notin \Omega(\Psi)$  e todo  $0 \leq j < r$ ,

$$\begin{aligned} h_{\Psi}(j^{\infty}, \omega) &= \max_{i \in \mathcal{S}} [\Psi(i\omega) + h_{\Psi}(j^{\infty}, i\omega)] \leq \max_{i \in \mathcal{S}} \Psi(i\omega) \\ &= \max \left\{ -\alpha_i d_{\Sigma_{\mathcal{S}}^+}(i\omega, i^{\infty}) : 0 \leq i < r \right\} \cup \{-\alpha_j : r \leq j < n\} < 0. \end{aligned}$$

(iii) Novamente, como  $h_{\Psi}(j^{\infty}, \cdot)$  é uma subação calibrada para  $0 \leq j < r$ , temos que se  $i \in \mathcal{S} - \{j\}$

$$\begin{aligned} h_{\Psi}(j^{\infty}, i^{\infty}) &= \max_{k \in \mathcal{S}} \{ \Psi(ki^{\infty}) + h_{\Psi}(j^{\infty}, ki^{\infty}) \} \\ &\geq \Psi(ji^{\infty}) + h_{\Psi}(j^{\infty}, ji^{\infty}) \\ &\geq \Psi(ji^{\infty}) + \Psi(jji^{\infty}) + h_{\Psi}(j^{\infty}, jji^{\infty}) \\ &\quad \vdots \\ &\geq \sum_{l=1}^n \Psi(j^l i^{\infty}) + h_{\Psi}(j^{\infty}, j^n i^{\infty}) \\ &= \sum_{l=1}^n -\alpha_j d_{\Sigma_{\mathcal{S}}^+}(j^l i^{\infty}, j^{\infty}) + h_{\Psi}(j^{\infty}, j^n i^{\infty}) \\ &= \sum_{l=1}^n -\frac{\alpha_j}{2^l} + h_{\Psi}(j^{\infty}, j^n i^{\infty}) \end{aligned}$$

para todo  $n$  inteiro positivo. Pelo item (ii) da proposição 3.1.6,  $h_{\Psi}(j^{\infty}, \cdot)$  é Hölder. Portanto, tomando o limite quando  $n \rightarrow \infty$  na equação anterior, temos, para  $0 \leq j < r$  e  $i \in \mathcal{S} - \{j\}$ ,

$$\begin{aligned} h_{\Psi}(j^{\infty}, i^{\infty}) &\geq \sum_{l=1}^{\infty} -\frac{\alpha_j}{2^l} + \lim_{n \rightarrow \infty} h_{\Psi}(j^{\infty}, j^n i^{\infty}) \\ &= -\alpha_j + h_{\Psi}(j^{\infty}, j^{\infty}) \\ &= -\alpha_j, \end{aligned}$$

já que  $j^n i^{\infty} \rightarrow j^{\infty}$  em  $\Sigma_{\mathcal{S}}^+$  e  $h_{\Psi}(j^{\infty}, j^{\infty}) = 0$  pelo item (v) da proposição 3.1.6.  $\square$

Temos ainda, neste caso, uma útil propriedade da barreira de Peierls.

**Proposição 3.1.9.** *Para todo  $0 \leq j < r$ , vale  $\mathbf{h}_\Psi(j^\infty, \cdot) = -\alpha_j d_{\Sigma_S^+}(\cdot, j^\infty)$ .*

*Demonstração.* Primeiramente, afirmamos que  $-\alpha_j d_{\Sigma_S^+}(\cdot, j^\infty)$  é uma subação calibrada, para todo  $0 \leq j < r$ . Perceba que, se  $\omega_0 = \omega'_0$ , então  $d_{\Sigma_S^+}(\omega, \omega') = \frac{1}{2}d_{\Sigma_S^+}(\sigma(\omega), \sigma(\omega'))$ . Observe então que

$$\begin{aligned} \max_{i \in \mathcal{S}} \left[ \Psi(i\omega) + \left( -\alpha_j d_{\Sigma_S^+}(i\omega, j^\infty) \right) \right] &= \\ &= \max \left\{ -\alpha_i d_{\Sigma_S^+}(i\omega, i^\infty) - \alpha_j d_{\Sigma_S^+}(i\omega, j^\infty) : 0 \leq i < r \right\} \\ &\quad \cup \left\{ -\alpha_i - \alpha_j d_{\Sigma_S^+}(i\omega, j^\infty) : r \leq i < n \right\} \\ &= \max \left\{ -\frac{\alpha_i}{2} d_{\Sigma_S^+}(\omega, i^\infty) - \alpha_j d_{\Sigma_S^+}(i\omega, j^\infty) : 0 \leq i < r \text{ e } i \neq j \right\} \\ &\quad \cup \left\{ -\frac{\alpha_j}{2} d_{\Sigma_S^+}(\omega, j^\infty) - \alpha_j d_{\Sigma_S^+}(j\omega, j^\infty) \right\} \cup \left\{ -\alpha_i - \alpha_j : r \leq i < n \right\} \\ &= \max \left\{ -\frac{\alpha_i}{2} d_{\Sigma_S^+}(\omega, i^\infty) - \alpha_j : 0 \leq i < r \text{ e } i \neq j \right\} \\ &\quad \cup \left\{ -\alpha_j d_{\Sigma_S^+}(\omega, j^\infty) \right\} \cup \left\{ -\alpha_i - \alpha_j : r \leq i < n \right\}. \end{aligned}$$

As parcelas desta decomposição podem ser facilmente comparadas:

$$-\alpha_i - \alpha_j \leq -\frac{\alpha_i}{2} d_{\Sigma_S^+}(\omega, i^\infty) - \alpha_j \leq -\alpha_j \leq -\alpha_j d_{\Sigma_S^+}(\omega, j^\infty)$$

para qualquer  $i \in \mathcal{S}$ . Portanto,  $\max_{i \in \mathcal{S}} \left\{ \Psi(i\omega) + \left( -\alpha_j d_{\Sigma_S^+}(i\omega, j^\infty) \right) \right\} = -\alpha_j d_{\Sigma_S^+}(\omega, j^\infty)$  para todo  $0 \leq j < r$ , como queríamos.

Sendo assim, para cada  $0 \leq j < r$ , considere a reescritura da subação calibrada  $-\alpha_j d_{\Sigma_S^+}(\cdot, j^\infty)$  em termos da barreira de Peierls

$$\begin{aligned} -\alpha_j d_{\Sigma_S^+}(\omega, j^\infty) &= \max_{0 \leq i < r} \left\{ -\alpha_j d_{\Sigma_S^+}(i^\infty, j^\infty) + \mathbf{h}_\Psi(i^\infty, \omega) \right\} \\ &= \max \left\{ -\alpha_j + \mathbf{h}_\Psi(i^\infty, \omega) : 0 \leq i < r \text{ e } i \neq j \right\} \cup \left\{ \mathbf{h}_\Psi(j^\infty, \omega) \right\}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Há três casos para analisar:

- (i) se  $\omega = j^\infty$ , temos  $\mathbf{h}_\Psi(j^\infty, j^\infty) = 0 = -\alpha_j d_{\Sigma_S^+}(j^\infty, j^\infty)$ ;
- (ii) se  $\omega = k^\infty$  para  $k \in \mathcal{S} - \{j\}$ , devido aos itens (i) e (iii) da proposição 3.1.8, temos que

$$\mathbf{h}_\Psi(j^\infty, k^\infty) \geq -\alpha_j \geq \max \left\{ -\alpha_j + \mathbf{h}_\Psi(i^\infty, k^\infty) : 0 \leq i < r \text{ e } i \neq j \right\};$$

- (iii) se  $\omega \neq k^\infty$  para  $k \in \mathcal{S}$ , temos que

$$-\alpha_j d_{\Sigma_S^+}(\omega, j^\infty) \geq -\alpha_j > \max \left\{ -\alpha_j + \mathbf{h}_\Psi(i^\infty, \omega) : 0 \leq i < r \text{ e } i \neq j \right\},$$

já que o item (ii) da proposição 3.1.8 garante  $\mathbf{h}_\Psi(i^\infty, \omega) < 0$ .

As condições apresentadas nestes casos são suficientes para obter o resultado desejado a partir da identidade (3.2).  $\square$

Tais resultados mostrar-se-ão muito úteis para a última seção deste capítulo.

### Comportamento Assintótico das Autofunções do Operador de Ruelle

Finalizamos esta breve introdução à teoria de otimização ergódica com um resultado que estreita ainda mais a relação entre a noção de subação e a de estados congelados.

Seja a família  $\{\mu_\beta\}_{\beta>0}$  formada pelos estados de equilíbrio  $\mu_\beta = \mu_{\beta\Psi}$  associados aos potenciais  $\beta\Psi$ , a partir da qual os estados congelados são obtidos com ponto de acumulação quando  $\beta \rightarrow \infty$ . Lembre-se do Teorema de Ruelle-Perron-Frobenius, o qual caracteriza os estados de equilíbrio como  $\mu_{\beta\Psi} = \mathbf{g}_{\beta\Psi} \nu_{\beta\Psi}$ , onde  $\mathbf{g}_{\beta\Psi} \in C(\Sigma_{\mathcal{S}}^+)$  é a única autofunção estritamente positiva para o operador de Ruelle, e  $\nu_{\beta\Psi} \in \mathcal{P}(\Sigma_{\mathcal{S}}^+)$  é o único autoestado para o operador dual de Ruelle, associados ao autovalor  $e^{p(\beta\mathcal{H}^{Pot})}$  e normalizados por  $\langle \mathbf{g}_{\beta\Psi} \rangle_{\nu_{\beta\Psi}} = 1$ . Considere a família de observáveis  $\{\mathbf{u}_{\beta\Psi}\}_{\beta>0}$  definida por

$$\mathbf{u}_{\beta\Psi} := \frac{1}{\beta} \log \mathbf{g}_{\beta\Psi}.$$

A informação que fornece os pontos de acumulação de tal família descreve o comportamento assintótico em escala exponencial da família de autofunções  $\{\mathbf{g}_{\beta\Psi}\}_{\beta>0}$ . Tal informação está resumida no teorema abaixo, podendo uma demonstração ser encontrada em [14].

**Teorema 3.1.5.** *Seja  $\Psi$  um potencial Hölder  $\sigma$ -invariante. Então a família de funções  $\{\mathbf{u}_{\beta\Psi}\}_{\beta>0}$  é uniformemente limitada e possui norma Hölder uniforme. Além disso, seus pontos de acumulação quando  $\beta \rightarrow \infty$  são subações calibradas para  $\Psi$ .*

## 3.2 Comportamento Assintótico da Pressão

Sabendo agora que o comportamento assintótico das autofunções do operador de Ruelle pode ser caracterizado por intermédio de subações calibradas, concluímos este trabalho descrevendo o comportamento assintótico da pressão topológica para potenciais que satisfazem certas hipóteses sobre seu conjunto de Aubry. Para isto, além de todo o aparato apresentado pela teoria de otimização ergódica, utilizaremos ferramentas fornecidas pela álgebra *max/min-plus*.

### 3.2.1 Álgebra *Max/Min-Plus*

Nas definições apresentadas neste capítulo, destacaram-se os conceitos relacionados à maximização e à minimização. Propomos então uma alteração de paradigma no qual maximização e minimização podem ser tratados de forma operacional. A estrutura algébrica que se presta a tal proposta vem a ser a álgebra *max/min-plus*. Façamos, portanto, um estudo conciso de tal estrutura e de suas ferramentas. Para detalhes mais específicos, consulte [26, 2, 25].

**Definição 3.2.1.** Uma operação binária  $\star$  em um conjunto  $\mathbb{K}$  é dita idempotente se

$$x \star x = x \quad \text{para todo } x \in \mathbb{K}.$$

O trio ordenado  $(\mathbb{K}, \oplus_{\mathbb{K}}, \otimes_{\mathbb{K}})$ , o qual denotaremos simplesmente por  $\mathbb{K}$ , formado pelo conjunto  $\mathbb{K}$  munido de duas operações binárias  $\oplus_{\mathbb{K}}$  e  $\otimes_{\mathbb{K}}$ , é denominado de semicorpo idempotente comutativo se

(i)  $\oplus_{\mathbb{K}}$  é associativa, comutativa, idempotente e possui elemento neutro  $0_{\mathbb{K}}$ , isto é,

$$\begin{aligned} x \oplus_{\mathbb{K}} (y \oplus_{\mathbb{K}} z) &= (x \oplus_{\mathbb{K}} y) \oplus_{\mathbb{K}} z, & x \oplus_{\mathbb{K}} y &= y \oplus_{\mathbb{K}} x, \\ x \oplus_{\mathbb{K}} x &= x & \text{e} & \quad x \oplus_{\mathbb{K}} 0_{\mathbb{K}} = 0_{\mathbb{K}} \oplus_{\mathbb{K}} x = x, \end{aligned}$$

para quaisquer  $x, y$  e  $z \in \mathbb{K}$ ;

(ii)  $\otimes_{\mathbb{K}}$  é associativa, comutativa, invertível e possui elemento unitário  $1_{\mathbb{K}}$ , ou seja,

$$\begin{aligned} x \otimes_{\mathbb{K}} (y \otimes_{\mathbb{K}} z) &= (x \otimes_{\mathbb{K}} y) \otimes_{\mathbb{K}} z, & x \otimes_{\mathbb{K}} y &= y \otimes_{\mathbb{K}} x, \\ x \otimes_{\mathbb{K}} x^{-1} &= 1_{\mathbb{K}} & \text{e} & \quad x \otimes_{\mathbb{K}} 1_{\mathbb{K}} = 1_{\mathbb{K}} \otimes_{\mathbb{K}} x = x, \end{aligned}$$

para quaisquer  $x, y$  e  $z \in \mathbb{K}$ ;

(iii)  $\otimes_{\mathbb{K}}$  é distributiva com respeito a  $\oplus_{\mathbb{K}}$  e  $0_{\mathbb{K}}$  é neutralizador para  $\otimes_{\mathbb{K}}$ , isto é,

$$x \otimes_{\mathbb{K}} (y \oplus_{\mathbb{K}} z) = (x \otimes_{\mathbb{K}} y) \oplus_{\mathbb{K}} (x \otimes_{\mathbb{K}} z) \quad \text{e} \quad x \otimes_{\mathbb{K}} 0_{\mathbb{K}} = 0_{\mathbb{K}} \otimes_{\mathbb{K}} x = 0_{\mathbb{K}},$$

para quaisquer  $x, y$  e  $z \in \mathbb{K}$ .

Nossa intenção é explicitar quais são as relações válidas e as operações permitidas. Aqui nos restringiremos unicamente aos próximos dois casos.

**Exemplo 3.2.1.** *Semicorpo max-plus:* Considere o semicorpo  $(\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \max, +)$  com  $0_{\mathbb{R}} = -\infty$  e  $1_{\mathbb{R}} = 0$ . Apresentamos algumas operações sobre esta estrutura

$$\begin{aligned} 2 \oplus_{\mathbb{R}} 2 &= \max\{2, 2\} = 2, & 2 \otimes_{\mathbb{R}} 3 &= 5, & x \otimes_{\mathbb{R}} 0_{\mathbb{R}} &= x + (-\infty) = -\infty, \\ 3 \otimes_{\mathbb{R}} (4 \oplus_{\mathbb{R}} 5) &= (3 \otimes_{\mathbb{R}} 4) \oplus_{\mathbb{R}} (3 \otimes_{\mathbb{R}} 5) = \max\{7, 8\} = 8, \\ x^{\oplus_{\mathbb{R}n}} &:= \underbrace{x \oplus_{\mathbb{R}} \dots \oplus_{\mathbb{R}} x}_n = x & \text{e} & \quad x^{\otimes_{\mathbb{R}n}} := \underbrace{x \otimes_{\mathbb{R}} \dots \otimes_{\mathbb{R}} x}_n = nx. \end{aligned}$$

◇

**Exemplo 3.2.2.** *Semicorpo min-plus:* Em analogia ao exemplo anterior, só que desta vez utilizando a operação de min, definimos o semicorpo  $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \min, +)$ , com  $0_{\mathbb{R}} = +\infty$  e  $1_{\mathbb{R}} = 0$ . Este semicorpo constitui a estrutura algébrica em destaque na teoria de geometria tropical.  $\diamond$

Necessitaremos então das seguintes operações.

**Definição 3.2.2.** Sejam os conjuntos

$$\mathbb{K}^{n \times m} := \{A = \{a_{i,j}\}_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} : a_{i,j} \in \mathbb{K}, \forall 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$$

para  $n, m \in \mathbb{N}$ . Considere as operações

$$\begin{aligned} \odot : \mathbb{K} \times \mathbb{K}^{n \times m} &\longrightarrow \mathbb{K}^{n \times m} & \text{dada por} & \quad (c, A) \longmapsto (c \odot A)_{i,j} = c \otimes_{\mathbb{K}} a_{i,j}; \\ \oplus : \mathbb{K}^{n \times m} \times \mathbb{K}^{n \times m} &\longrightarrow \mathbb{K}^{n \times m} & \text{dada por} & \quad (A, B) \longmapsto (A \oplus B)_{i,j} = a_{i,j} \oplus_{\mathbb{K}} b_{i,j}, \\ \otimes : \mathbb{K}^{n \times l} \times \mathbb{K}^{l \times m} &\longrightarrow \mathbb{K}^{n \times m} & \text{dada por} & \quad (A, B) \longmapsto (A \otimes B)_{i,j} = \bigoplus_{1 \leq k \leq l} (a_{i,k} \otimes_{\mathbb{K}} b_{k,j}). \end{aligned}$$

A partir desta definição, certos subconjuntos destacam-se, fornecendo estruturas algébricas que desejamos investigar.

**Definição 3.2.3.** Para  $\mathbb{K}^{n \times 1} = \{v = (v_i)_{1 \leq i \leq n} : v_i \in \mathbb{K}, \forall 1 \leq i \leq n\}$ , a operação binária  $\oplus$  e a operação por escalar  $\odot$  satisfazem

- (i)  $\oplus$  é associativa, idempotente e possui elemento neutro  $\mathbf{0} = (0_{\mathbb{K}}, \dots, 0_{\mathbb{K}})$ ;
- (ii)  $\odot$  satisfaz

$$b \odot (c \odot v) = (b \otimes_{\mathbb{K}} c) \odot v \quad \text{e} \quad c \odot \mathbf{0} = \mathbf{0}_{\mathbb{K}} \odot v = \mathbf{0},$$

para quaisquer  $b, c \in \mathbb{K}$  e  $v \in \mathbb{K}^{n \times 1}$ ;

- (iii)  $\odot$  é distributiva com respeito a  $\oplus$ .

Em particular, estas são as propriedades que caracterizam  $\mathbb{K}^n := (\mathbb{K}^n, \odot, \oplus)$  como um semimódulo idempotente.

Além disso,  $(\mathbb{K}^{n \times n}, \odot, \oplus, \otimes)$  verifica

- (i)  $\oplus$  é associativa, idempotente e possui elemento neutro  $\mathbf{0} = (0_{\mathbb{K}})_{1 \leq i, j \leq n}$ ;
- (ii)  $\otimes$  é associativa e possui elemento unitário  $\mathbf{1} = (1_{\mathbb{K}})_{1 \leq i, j \leq n}$ ;
- (iii)  $\odot$  satisfaz

$$b \odot (c \odot A) = (b \otimes_{\mathbb{K}} c) \odot A \quad \text{e} \quad c \odot \mathbf{0} = \mathbf{0}_{\mathbb{K}} \odot A = \mathbf{0},$$

para quaisquer  $b, c \in \mathbb{K}$  e  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ ;

- (iv)  $\odot$  e  $\otimes$  são distributivas com respeito a  $\oplus$ , bem como

$$c \odot (A \otimes B) = (c \odot A) \otimes B \quad \text{e} \quad A \otimes \mathbf{0} = \mathbf{0} \otimes A = \mathbf{0},$$

para quaisquer  $c \in \mathbb{K}$  e  $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ .

Sendo assim  $(\mathbb{K}^{n \times n}, \odot, \oplus, \otimes)$  é a álgebra das transformações lineares em  $\mathbb{K}^n$ .

Retornando ao exemplos anteriores, obtemos a principal estrutura desta subseção.

**Exemplo 3.2.3.** *Álgebra max-plus:* Considere o semicorpo

$$(\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \oplus_{\mathbb{R}} := \max, \otimes_{\mathbb{R}} := +), \quad \text{com } 0_{\mathbb{R}} = -\infty \text{ e } 1_{\mathbb{R}} = 0.$$

Temos que

(i) o semimódulo *max-plus* é dado por  $(\mathbb{R}^n \cup \{0\}, \odot_{\mathbb{R}^n}, \oplus_{\mathbb{R}^n})$ , com  $0 := (-\infty, \dots, -\infty)$  seu elemento neutro, sendo suas operações descritas por

$$(c \odot_{\mathbb{R}^n} v)_i = c + v_i \quad \text{e} \quad (v \oplus_{\mathbb{R}^n} u)_i = \max\{v_i, u_i\};$$

(ii) a álgebra matricial *max-plus* é dada por  $(\mathbb{R}^{n \times n} \cup \{0\}, \odot, \oplus, \otimes)$ , sendo suas operações descritas por

$$\begin{aligned} (c \odot A)_{i,j} &= c + a_{i,j}, & (A \oplus B)_{i,j} &= \max\{a_{i,j}, b_{i,j}\}, \\ (A \otimes B)_{i,j} &= \max_{1 \leq k \leq n} \{a_{i,k} + b_{k,j}\}, \end{aligned}$$

e seus elementos básicos determinados por

$$\mathbf{0} := \begin{pmatrix} -\infty & -\infty & \dots & -\infty \\ -\infty & -\infty & \dots & -\infty \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\infty & -\infty & \dots & -\infty \end{pmatrix} \quad \mathbf{1} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Note que estas estruturas algébricas nos permitem transcrever sistemas da forma

$$\begin{cases} \max\{(a_{1,1} + x_1), (a_{1,2} + x_2), \dots, (a_{1,n} + x_n)\} &= \lambda + x_1; \\ \max\{(a_{2,1} + x_1), (a_{2,2} + x_2), \dots, (a_{2,n} + x_n)\} &= \lambda + x_2; \\ \vdots & \vdots \\ \max\{(a_{n,1} + x_1), (a_{n,2} + x_2), \dots, (a_{n,n} + x_n)\} &= \lambda + x_n; \end{cases}$$

como sistemas lineares do tipo

$$\begin{cases} (a_{1,1} \otimes_{\mathbb{R}} x_1) \oplus_{\mathbb{R}} (a_{1,2} \otimes_{\mathbb{R}} x_2) \oplus_{\mathbb{R}} \dots \oplus_{\mathbb{R}} (a_{1,n} \otimes_{\mathbb{R}} x_n) &= \lambda \otimes_{\mathbb{R}} x_1; \\ (a_{2,1} \otimes_{\mathbb{R}} x_1) \oplus_{\mathbb{R}} (a_{2,2} \otimes_{\mathbb{R}} x_2) \oplus_{\mathbb{R}} \dots \oplus_{\mathbb{R}} (a_{2,n} \otimes_{\mathbb{R}} x_n) &= \lambda \otimes_{\mathbb{R}} x_2; \\ \vdots & \vdots \\ (a_{n,1} \otimes_{\mathbb{R}} x_1) \oplus_{\mathbb{R}} (a_{n,2} \otimes_{\mathbb{R}} x_2) \oplus_{\mathbb{R}} \dots \oplus_{\mathbb{R}} (a_{n,n} \otimes_{\mathbb{R}} x_n) &= \lambda \otimes_{\mathbb{R}} x_n; \end{cases}$$

os quais, sob a notação matricial, reduzem-se simplesmente a um problema de autovalor e autovetor segundo esta álgebra, dado por

$$A \otimes v = \lambda \odot_{\mathbb{R}^n} v, \quad \text{com } (A)_{i,j} = a_{i,j} \text{ e } v = (x_1, \dots, x_n).$$

◇

**Observação 3.2.1.** Apesar da distinção feita entre as operações do semicorpo idempotente,  $(\oplus_{\mathbb{K}}, \otimes_{\mathbb{K}})$ , e as operações do semimódulo ou da álgebra idempotente,  $(\oplus, \otimes)$ , o índice  $\mathbb{K}$  será abolido como forma de simplificar a notação. Sendo assim, ficará subentendido pelo contexto sobre qual estrutura a operação estará agindo.

### Problema da Máxima Média de Ponderação sobre Ciclos

Vários problemas podem ser abordados empregando-se a estrutura idempotente apresentada, mais especificamente, transformando-os em problemas lineares para a álgebra *max/min-plus*. Este é o caso, por exemplo, de problemas de gestão de uma produção industrial ou de problemas de fila. Escolhemos, em particular, uma aplicação à teoria de grafos, cuja linguagem mostra-se mais adequada ao tratamento posterior do comportamento assintótico da pressão.

**Definição 3.2.4.** Um grafo ponderado é dado pelo trio ordenado  $(\mathcal{V}, \mathcal{E}, A)$ , onde  $\mathcal{V} := \{1, \dots, n\}$  é denominado de conjunto de vértices,  $\mathcal{E} \subset \mathcal{V} \times \mathcal{V}$  é dito conjunto de arestas e  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  é uma matriz para álgebra *max-plus* tal que

$$a_{i,j} \neq -\infty \iff (i,j) \in \mathcal{E}.$$

Denominaremos  $A$  por matriz de adjacência ponderada, sendo cada valor  $a_{i,j}$  o peso correspondente à aresta  $(i,j)$ .

Estamos interessados em obter, a partir de manipulações algébricas sobre a matriz de adjacência ponderada  $A$ , propriedades para o grafo  $(\mathcal{V}, \mathcal{E}, A)$  associado. Com este intuito, introduzimos as seguinte noções.

**Definição 3.2.5.** Um caminho  $\rho$  é um seqüência de vértices  $i_1, \dots, i_k \in \mathcal{V}$  para algum  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $(i_j, i_{j+1}) \in \mathcal{E}$  para todo  $1 \leq j < k$ . Dizemos que  $\rho$  é um ciclo se  $i_1 = i_k$ . Associado a um caminho  $\rho$ , temos os seguintes conceitos:

- (i) comprimento:  $|\rho|_w := \sum_{j=1}^{k-1} a_{i_j, i_{j+1}}$ ;
- (ii) tamanho:  $|\rho|_l = k$ .

Não é difícil perceber que as entradas da  $k$ -ésima potência da matriz  $A$  com relação à operação  $\otimes$  nos fornecem o maior comprimento dentre caminhos de tamanho  $k$  que conectam um vértice  $i$  a um vértice  $j$  em tal grafo. De fato,

$$\begin{aligned} (A^{\otimes n})_{i,j} &= \bigoplus_{r_1, \dots, r_{k-1}=1}^n (a_{i,r_1} \otimes \dots \otimes a_{r_{k-1},j}) \\ &= \max_{1 \leq r_1, \dots, r_{k-1} \leq n} \{a_{i,r_1} + \dots + a_{r_{k-1},j}\} \\ &= \max\{|\rho|_w : \rho \text{ caminho entre } i \text{ e } j \text{ com } |\rho|_l = k\}. \end{aligned}$$

Um problema importante envolve encontrar a maior média de ponderação entre os ciclos de um dado grafo, ou melhor, caracterizar explicitamente o valor introduzido abaixo.

**Definição 3.2.6.** A máxima média de ponderação sobre os ciclos do grafo ponderado  $(\mathcal{V}, \mathcal{E}, A)$  é

$$\max \left\{ \frac{|\rho|_w}{|\rho|_l} : \rho \text{ ciclo de } (\mathcal{V}, \mathcal{E}, A) \right\}.$$

Considere os conceitos apresentados a seguir.

**Definição 3.2.7.**

(i) Um grafo ponderado  $(\mathcal{V}, \mathcal{E}, A)$  é dito conexo se, para todo par  $(i, j) \in \mathcal{E}$ , existe um caminho  $\rho$  que conecta o vértice  $i$  ao vértice  $j$ .

(ii) Uma matriz  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$  é dita irredutível para a álgebra *max-plus* se, para todo par  $(i, j)$ , com  $1 \leq i, j \leq n$ , existe um inteiro  $t(i, j)$  tal que  $(A^{t(i,j)})_{i,j} \neq -\infty$ .

Em particular, tratam-se de noções equivalentes. Explorando a noção de irredutibilidade para a álgebra *max-plus* é possível apresentar uma solução completa para o problema de autovalor nesta álgebra, além de fornecer uma interpretação deste como um problema de otimização da média de ponderação sobre ciclos de um grafo.

**Proposição 3.2.1.** *Qualquer matriz irredutível para a álgebra max-plus possui um único autovalor finito. Ademais, dado um grafo ponderado  $(\mathcal{V}, \mathcal{E}, A)$ , com matriz de adjacência ponderada  $A$  irredutível, temos que a máxima média de ponderação sobre os ciclos coincide com o único autovalor  $\lambda$  associado à matriz  $A$ , isto é,*

$$\lambda = \max \left\{ \frac{|\rho|_w}{|\rho|_l} : \rho \text{ ciclo de } (\mathcal{V}, \mathcal{E}, A) \right\}.$$

O resultado anterior, cuja prova pode ser encontrada em [26, 2], exemplifica como as ferramentas da álgebra *max-plus* estão intrinsecamente relacionadas com a teoria de grafos. Além disso, percebe-se certa semelhança entre a proposição 3.2.1 e o Teorema de Perron-Frobenius da teoria de matrizes não negativas (veja o teorema A.0.16 do apêndice A).

Finalizamos esta subseção com a seguinte caracterização explícita.

**Teorema 3.2.1** (Algoritmo de Karp). *Sejam  $M$  uma matriz  $n \times n$  irredutível para álgebra max-plus e  $\lambda$  seu respectivo autovalor. Então,*

$$\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \min_{0 \leq k \leq n-1} \frac{(M^{\otimes n})_{i,j} - (M^{\otimes k})_{i,j}}{n - k} \quad \forall 1 \leq j \leq k,$$

onde as operações de divisão e subtração são as usuais do corpo  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ .

A demonstração de tal algoritmo, assim como uma discussão sobre os aspectos computacionais envolvidos, pode ser também encontrada nas referências [26, 2].

### 3.2.2 Caracterização Assintótica da Pressão

Todo aparato teórico tendo sido introduzido, dedicamo-nos à caracterização do seguinte limite

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} \log [p(\beta\Psi) - \beta\langle\Psi\rangle_{max}], \quad (3.3)$$

o qual nos informa sobre o comportamento assintótico em escala exponencial de  $p(\beta\Psi) - \beta\langle\Psi\rangle_{max}$  quando  $\beta \rightarrow \infty$ .

Em particular, dado  $\Psi$  um potencial Hölder  $\sigma$ -invariante com  $\langle\Psi\rangle_{max} = 0$ , temos que tal limite claramente caracteriza o comportamento assintótico da pressão topológica. Além disso, sempre é possível associar a  $\Psi$  um potencial Hölder  $\sigma$ -invariante  $\widehat{\Psi} := \Psi - \langle\Psi\rangle_{max}$  tal que  $\langle\widehat{\Psi}\rangle_{max} = 0$  e, pelo item (v) da proposição 2.3.3, temos que  $p(\beta\widehat{\Psi}) = p(\beta\Psi) - \beta\langle\Psi\rangle_{max}$ , para todo  $\beta > 0$ . Portanto,

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} \log p(\beta\widehat{\Psi}) = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} \log [p(\beta\Psi) - \beta\langle\Psi\rangle_{max}].$$

Ademais, note que  $\Omega(\widehat{\Psi}) = \Omega(\Psi)$ .

Primeiramente, garantimos a seguinte convergência.

**Lema 3.2.2.** *Sejam  $\Psi$  um potencial Hölder  $\sigma$ -invariante associado ao sistema de spins  $(\Sigma_S^+, \sigma, \mathcal{H}^{Pot})$  e a  $\{\mu_\beta\}_{\beta>0}$  família formada pelos estados de equilíbrio  $\mu_\beta = \mu_{\beta\Psi}$  associados aos potenciais  $\beta\Psi$ . Então,*

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} [p(\beta\Psi) - \beta\langle\Psi\rangle_{max}] = \lim_{\beta \rightarrow \infty} h(\mu_{\beta\Psi}) = \max_{\mu \in \mathcal{P}_{max}(\Sigma_S^+, \Psi)} h(\mu) = h_{Top}(\sigma|_{\Omega(\Psi)}).$$

*Demonstração.* Note que a última igualdade segue de uma aplicação direta do princípio variacional da entropia topológica para o sistema dinâmico  $(\Omega(\Psi), \sigma|_{\Omega(\Psi)})$ ,

$$h_{Top}(\sigma|_{\Omega(\Psi)}) = \max_{\mu \in \mathcal{P}_\sigma(\Omega(\Psi))} h(\mu) = \max_{\substack{\mu \in \mathcal{P}_\sigma(\Sigma_S^+) \\ \text{supp}(\mu) \subset \Omega(\Psi)}} h(\mu) = \max_{\mu \in \mathcal{P}_{max}(\Sigma_S^+, \Psi)} h(\mu).$$

Para as outras relações, considere  $\beta > 0$ ,  $\mu$  estado  $\Psi$ -maximizante e  $\mu_\beta$  estado de equilíbrio associado a  $\beta\Psi$ . Temos então

$$h(\mu) + \beta\langle\Psi\rangle_{max} \leq p(\beta\Psi) \leq h(\mu_\beta) + \beta\langle\Psi\rangle_{max}.$$

Segue disto que

$$\begin{aligned} \limsup_{\beta \rightarrow \infty} h(\mu_\beta) &\leq \max_{\mu \in \mathcal{P}_{max}(\Sigma_S^+, \Psi)} h(\mu) \leq \liminf_{\beta \rightarrow \infty} [p(\beta\Psi) - \beta\langle\Psi\rangle_{max}] \\ &\leq \limsup_{\beta \rightarrow \infty} [p(\beta\Psi) - \beta\langle\Psi\rangle_{max}] \leq \liminf_{\beta \rightarrow \infty} h(\mu_\beta), \end{aligned}$$

donde a primeira desigualdade é consequência da semicontinuidade superior da entropia de Kolmogorov-Sinai. O resultado é daí imediatamente obtido.  $\square$

**Notação 3.2.1.** Os conjuntos dos pontos fixos, dos pontos periódicos de ordem  $n$  e dos pontos periódicos para a dinâmica  $\sigma$  estão, respectivamente, apresentados abaixo

$$\begin{aligned} \text{Fix}(\sigma) &:= \{\omega \in \Sigma_{\mathcal{S}}^+ : \sigma(\omega) = \omega\} = \{i^\infty : i \in \mathcal{S}\}; \\ \text{Per}^n(\sigma) &:= \{\omega \in \Sigma_{\mathcal{S}}^+ : \sigma^n(\omega) = \omega\} = \text{Fix}(\sigma^n); \\ \text{Per}(\sigma) &:= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{Per}^n(\sigma). \end{aligned}$$

Além disso, o período de um ponto  $\omega \in \text{Per}(\sigma)$  é dado por  $\text{per}(\omega) := \min\{n \in \mathbb{N} : \sigma^n(\omega) = \omega\}$  e, para um subconjunto finito  $B \subset \text{Per}(\sigma)$ , definimos o período deste subconjunto por  $\text{per}(B) := \text{mmc}\{\text{per}(\omega) : \omega \in B\}$ .

O principal resultado deste capítulo é apresentado a seguir.

**Teorema 3.2.3** (Comportamento Assintótico da Pressão). *Seja  $\Psi$  um potencial Hölder  $\sigma$ -invariante para o sistema de spins  $(\Sigma_{\mathcal{S}}^+, \sigma, \mathcal{H}^{Pot})$  tal que o conjunto de Aubry associado  $\Omega := \Omega(\Psi)$  é finito (o que implica  $\Omega \subset \text{Per}(\sigma)$ ). Dados  $r = \text{per}(\Omega)$  e uma enumeração para os elementos de  $\Omega = \{\omega^{(1)}, \dots, \omega^{(|\Omega|)}\}$ , defina a coletânea  $\{B_i := \sigma^{-r}(\omega^{(i)}) - \{\omega^{(i)}\}\}_{1 \leq i \leq |\Omega|}$  e considere  $A_\Psi$  matriz  $|\Omega| \times |\Omega|$  cujas entradas são*

$$(A_\Psi)_{i,j} := \bigoplus_{\bar{\omega} \in B_i} \left[ \left( \mathcal{H}_{\Lambda_r^+}^{Pot}(\bar{\omega}) - r \langle \Psi \rangle_{max} \right) \otimes \mathbf{h}_\Psi(\omega^{(j)}, \bar{\omega}) \right].$$

Então, o comportamento assintótico da pressão topológica para o potencial  $\Psi$  é dado por

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} \log [p(\beta\Psi) - \beta \langle \Psi \rangle_{max}] = \max_{1 \leq i \leq |\Omega|} \min_{0 \leq k < |\Omega|} \frac{(A_\Psi^{\otimes |\Omega|})_{i,j} - (A_\Psi^{\otimes k})_{i,j}}{|\Omega| - k}, \quad \forall 1 \leq j \leq |\Omega|.$$

*Demonstração.* Sabemos que o conjunto de Aubry é invariante, o que implica que qualquer elemento  $\omega \in \Omega$  possui órbita  $\mathcal{O}_\sigma(\omega) \subset \Omega$ . Deste fato e da finitude de  $\Omega$ , segue que  $\mathcal{O}_\sigma(\omega)$  também é um subconjunto finito, donde concluímos que todas as configurações em  $\Omega$  são periódicas.

Com isto,  $\Omega = \{\omega^{(1)}, \dots, \omega^{(|\Omega|)}\}$  é um subconjunto finito de  $\text{Per}(\sigma)$ . Da forma como foi definido  $r = \text{per}(\Omega)$ , temos que  $\sigma^r(\omega^{(i)}) = \omega^{(i)}$ , para todo  $1 \leq i \leq |\Omega|$ . Logo, sem perda de generalidade, temos  $\Omega \subset \text{Per}^r(\sigma)$ .

Tome  $1 \leq i \leq |\Omega|$ . Devido ao teorema 3.1.1, o estado  $\sigma$ -invariante

$$\nu^{(i)} := \sum_{k=0}^{r-1} \frac{1}{r} \delta_{\sigma^k(\omega^{(i)})}$$

é  $\Psi$ -maximizante, já que  $\text{supp}(\nu^{(i)}) = \mathcal{O}_\sigma(\omega^{(i)}) \subset \Omega$ . Assim, obtemos, para todo  $1 \leq i \leq |\Omega|$ ,

$$\langle \Psi \rangle_{max} = \int \Psi d\nu^{(i)} = \frac{1}{r} H_{\Lambda_r^+}^{Pot}(\omega^{(i)}). \quad (3.4)$$

Considere o operador de Ruelle (relembre a definição 2.5.3) associado ao potencial  $\beta\Psi$ , para  $\beta > 0$ . Pelo teorema 2.5.4 (Teorema de Ruelle-Perron-Frobenius), tal operador possui um autovalor simples, positivo e maximal dado por  $e^{p(\beta\Psi)}$ , cuja autofunção associada  $\mathfrak{g}_{\beta\Psi}$  é positiva. Assim, temos que  $\mathcal{L}_{\beta\Psi}^r(\mathfrak{g}_{\beta\Psi}) = e^{rp(\beta\Psi)}\mathfrak{g}_{\beta\Psi}$  implica  $\mathcal{L}_{\beta\Psi}^r(\mathfrak{g}_{\beta\Psi}) = e^{rp(\beta\Psi)}\mathfrak{g}_{\beta\Psi}$ . Este último fato, por sua vez, motiva-nos a investigar a forma explícita da  $r$ -ésima iterada do operador de Ruelle. Obtemos então

$$\begin{aligned}
 e^{rp(\beta\Psi)}\mathfrak{g}_{\beta\Psi}(\omega) &= \mathcal{L}_{\beta\Psi}^r(\mathfrak{g}_{\beta\Psi})(\omega) = \sum_{\omega' \in \sigma^{-1}(\omega)} e^{\beta\Psi(\omega')} \mathcal{L}_{\beta\Psi}^{r-1}(\mathfrak{g}_{\beta\Psi})(\omega') \\
 &= \sum_{\omega' \in \sigma^{-1}(\omega)} \sum_{\omega'' \in \sigma^{-1}(\omega')} e^{\beta\Psi(\omega')} e^{\beta\Psi(\omega'')} \mathcal{L}_{\beta\Psi}^{r-2}(\mathfrak{g}_{\beta\Psi})(\omega'') \\
 &= \sum_{\omega' \in \sigma^{-1}(\omega)} \sum_{\omega'' \in \sigma^{-1}(\omega')} e^{\beta\Psi(\sigma(\omega'')) + \beta\Psi(\omega'')} \mathcal{L}_{\beta\Psi}^{r-2}(\mathfrak{g}_{\beta\Psi})(\omega'') \\
 &= \sum_{\omega'' \in \sigma^{-2}(\omega)} e^{\beta[\Psi(\omega'') + \Psi(\sigma(\omega''))]} \mathcal{L}_{\beta\Psi}^{r-2}(\mathfrak{g}_{\beta\Psi})(\omega'') \\
 &= \sum_{\omega''' \in \sigma^{-3}(\omega)} e^{\beta[\Psi(\omega''') + \Psi(\sigma(\omega''')) + \Psi(\sigma^2(\omega'''))]} \mathcal{L}_{\beta\Psi}^{r-3}(\mathfrak{g}_{\beta\Psi})(\omega''') \\
 &\quad \vdots \\
 &= \sum_{\bar{\omega} \in \sigma^{-r}(\omega)} e^{\beta \sum_{i=0}^{r-1} \Psi \circ \sigma^i(\bar{\omega})} \mathfrak{g}_{\beta\Psi}(\bar{\omega}) \\
 &= \sum_{\bar{\omega} \in \sigma^{-r}(\omega)} e^{\beta \mathcal{H}_{\Lambda_r^+}^{Pot}(\bar{\omega})} \mathfrak{g}_{\beta\Psi}(\bar{\omega})
 \end{aligned}$$

Devido ao fato que  $\Omega \subset \text{Per}^r(\sigma)$ , temos que  $\omega^{(i)} \in \sigma^{-r}(\omega^{(i)})$  para qualquer  $1 \leq i \leq |\Omega|$ . Desta forma, a equação anterior resulta na seguinte identidade para as configurações do conjunto de Aubry  $\omega^{(i)}$ ,  $1 \leq i \leq |\Omega|$ ,

$$\begin{aligned}
 e^{rp(\beta\Psi)}\mathfrak{g}_{\beta\Psi}(\omega^{(i)}) &= e^{\beta \mathcal{H}_{\Lambda_r^+}^{Pot}(\omega^{(i)})} \mathfrak{g}_{\beta\Psi}(\omega^{(i)}) + \sum_{\bar{\omega} \in B_i} e^{\beta \mathcal{H}_{\Lambda_r^+}^{Pot}(\bar{\omega})} \mathfrak{g}_{\beta\Psi}(\bar{\omega}) \iff \\
 &\iff \left( e^{rp(\beta\Psi)} - e^{\beta \mathcal{H}_{\Lambda_r^+}^{Pot}(\omega^{(i)})} \right) \mathfrak{g}_{\beta\Psi}(\omega^{(i)}) = \sum_{\bar{\omega} \in B_i} e^{\beta \mathcal{H}_{\Lambda_r^+}^{Pot}(\bar{\omega})} \mathfrak{g}_{\beta\Psi}(\bar{\omega}).
 \end{aligned}$$

Aplicando  $\frac{1}{\beta} \log$  na equação anterior, obtém-se

$$\frac{1}{\beta} \log \left[ \left( e^{rp(\beta\Psi)} - e^{\beta \mathcal{H}_{\Lambda_r^+}^{Pot}(\omega^{(i)})} \right) \mathfrak{g}_{\beta\Psi}(\omega^{(i)}) \right] = \frac{1}{\beta} \log \left( \sum_{\bar{\omega} \in B_i} e^{\beta \mathcal{H}_{\Lambda_r^+}^{Pot}(\bar{\omega})} \mathfrak{g}_{\beta\Psi}(\bar{\omega}) \right), \quad (3.5)$$

para todo  $1 \leq i \leq |\Omega|$ .

Analisaremos separadamente cada um dos lados da igualdade. Primeiramente, utilizando a equação (3.4), verificamos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\beta} \log \left[ \left( e^{rp(\beta\Psi)} - e^{\beta\mathcal{H}_{\Lambda_r^+}^{Pot}(\omega^{(i)})} \right) \mathfrak{g}_{\beta\Psi}(\omega^{(i)}) \right] &= \frac{1}{\beta} \log \left[ \left( e^{rp(\beta\Psi)} - e^{r\beta\langle\Psi\rangle_{max}} \right) \mathfrak{g}_{\beta\Psi}(\omega^{(i)}) \right] \\
&= \frac{1}{\beta} \log e^{r\beta\langle\Psi\rangle_{max}} \left( e^{rp(\beta\Psi) - r\beta\langle\Psi\rangle_{max}} - 1 \right) \\
&\quad + \frac{1}{\beta} \log \mathfrak{g}_{\beta\Psi}(\omega^{(i)}) \\
&= \frac{1}{\beta} \log \left( e^{r[p(\beta\Psi) - \beta\langle\Psi\rangle_{max}]} - 1 \right) \\
&\quad + r\langle\Psi\rangle_{max} + \frac{1}{\beta} \log \mathfrak{g}_{\beta\Psi}(\omega^{(i)}) \\
&= \frac{1}{\beta} \log [p(\beta\Psi) - \beta\langle\Psi\rangle_{max}] \\
&\quad + \frac{1}{\beta} \log \left( \frac{e^{r[p(\beta\Psi) - \beta\langle\Psi\rangle_{max}]} - 1}{p(\beta\Psi) - \beta\langle\Psi\rangle_{max}} \right) \\
&\quad + r\langle\Psi\rangle_{max} + \frac{1}{\beta} \log \mathfrak{g}_{\beta\Psi}(\omega^{(i)}).
\end{aligned}$$

Para o lado direito, considere  $M_i := \max_{\bar{\omega} \in B_i} \left\{ e^{\beta\mathcal{H}_{\Lambda_r^+}^{Pot}(\bar{\omega})} \mathfrak{g}_{\beta\Psi}(\bar{\omega}) \right\} > 0$ . Temos então

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\beta} \log \left( \sum_{\bar{\omega} \in B_i} e^{\beta\mathcal{H}_{\Lambda_r^+}^{Pot}(\bar{\omega})} \mathfrak{g}_{\beta\Psi}(\bar{\omega}) \right) &= \frac{1}{\beta} \log \left( \frac{M_i}{M_i} \sum_{\bar{\omega} \in B_i} e^{\beta\mathcal{H}_{\Lambda_r^+}^{Pot}(\bar{\omega})} \mathfrak{g}_{\beta\Psi}(\bar{\omega}) \right) \\
&= \frac{1}{\beta} \log \max_{\bar{\omega} \in B_i} \left\{ e^{\beta\mathcal{H}_{\Lambda_r^+}^{Pot}(\bar{\omega})} \mathfrak{g}_{\beta\Psi}(\bar{\omega}) \right\} \\
&\quad + \frac{1}{\beta} \log \left( \sum_{\bar{\omega} \in B_i} M_i^{-1} e^{\beta\mathcal{H}_{\Lambda_r^+}^{Pot}(\bar{\omega})} \mathfrak{g}_{\beta\Psi}(\bar{\omega}) \right) \\
&= \max_{\bar{\omega} \in B_i} \left\{ \mathcal{H}_{\Lambda_r^+}^{Pot}(\bar{\omega}) + \frac{1}{\beta} \log \mathfrak{g}_{\beta\Psi}(\bar{\omega}) \right\} \\
&\quad + \frac{1}{\beta} \log \left( \sum_{\bar{\omega} \in B_i} M_i^{-1} e^{\beta\mathcal{H}_{\Lambda_r^+}^{Pot}(\bar{\omega})} \mathfrak{g}_{\beta\Psi}(\bar{\omega}) \right).
\end{aligned}$$

Devido ao teorema 3.1.5, sabemos que qualquer ponto de acumulação quando  $\beta \rightarrow \infty$  da família  $\{\mathbf{u}_{\beta\Psi} = \frac{1}{\beta} \log \mathfrak{g}_{\beta\Psi}\}_{\beta>0}$  é uma subação calibrada. Assim, podemos considerar uma subsequência  $\{\mathbf{u}_{\beta_l\Psi}\}_{\beta_l}$  tal que

$$\mathbf{u} = \lim_{l \rightarrow \infty} \mathbf{u}_{\beta_l\Psi} = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta_l} \log \mathfrak{g}_{\beta_l\Psi}.$$

Para não carregar ainda mais as notações, ficará subentendido daqui em diante que os limites quando  $\beta \rightarrow \infty$  são tomados com respeito à subsequência  $\{\beta_l\}_{l \in \mathbb{N}}$  quando  $l \rightarrow \infty$ .

Investigaremos agora a convergência dos outros termos presentes nas equações anteriores. Na primeira equação, temos o seguinte termo

$$\frac{1}{\beta} \log \left( \frac{e^{r[p(\beta\Psi) - \beta\langle\Psi\rangle_{max}] - 1}}{p(\beta\Psi) - \beta\langle\Psi\rangle_{max}} \right). \quad (3.6)$$

Pelo lema 3.2.2, temos que  $p(\beta\Psi) - \beta\langle\Psi\rangle_{max}$  tende a  $h_{Top}(\sigma|\Omega)$  quando  $\beta \rightarrow \infty$ , a qual é nula, já que, por hipótese, o conjunto de Aubry  $\Omega$  é composto por órbitas periódicas com relação ao operador de *shift* (veja exemplo 2.3.3). Assim, como a função  $\frac{e^{rx}-1}{x}$  é limitada em qualquer vizinhança de 0, segue que o termo (3.6) vai a 0 para  $\beta \rightarrow \infty$ .

Segue da definição de  $M_i$  que, na segunda equação,

$$\begin{aligned} 1 &\leq \sum_{\bar{\omega} \in B_i} M_i^{-1} e^{\beta \mathcal{H}_{\Lambda_r^+}^{Pot}(\bar{\omega})} \mathfrak{g}_{\beta\Psi}(\bar{\omega}) \leq |B_i| \implies \\ &\implies 0 \leq \frac{1}{\beta} \log \left( \sum_{\bar{\omega} \in B_i} M_i^{-1} e^{\beta \mathcal{H}_{\Lambda_r^+}^{Pot}(\bar{\omega})} \mathfrak{g}_{\beta\Psi}(\bar{\omega}) \right) \leq \frac{1}{\beta} \log \max_{1 \leq i \leq |\Omega|} |B_i|, \end{aligned}$$

e portanto tal termo também vai a 0 quando  $\beta \rightarrow \infty$ .

O único limite que ainda não foi analisado é

$$\lambda := \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} \log [p(\beta\Psi) - \beta\langle\Psi\rangle_{max}].$$

Devido aos argumentos anteriores, os quais explicitam os limites dos outros termos, podemos garantir a existência de tal limite, já que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta} \log [p(\beta\Psi) - \beta\langle\Psi\rangle_{max}] &= \max_{\bar{\omega} \in B_i} \left\{ \mathcal{H}_{\Lambda_r^+}^{Pot}(\bar{\omega}) + \frac{1}{\beta} \log \mathfrak{g}_{\beta\Psi}(\bar{\omega}) \right\} - r\langle\Psi\rangle_{max} \\ &\quad + \frac{1}{\beta} \log \left( \sum_{\bar{\omega} \in B_i} M_i^{-1} e^{\beta \mathcal{H}_{\Lambda_r^+}^{Pot}(\bar{\omega})} \mathfrak{g}_{\beta\Psi}(\bar{\omega}) \right) \\ &\quad - \frac{1}{\beta} \log \left( \frac{e^{r[p(\beta\Psi) - \beta\langle\Psi\rangle_{max}] - 1}}{p(\beta\Psi)} \right) - \frac{1}{\beta} \log \mathfrak{g}_{\beta\Psi}(\omega^{(i)}), \end{aligned}$$

donde concluímos que

$$\lambda = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} \log [p(\beta\Psi) - \beta\langle\Psi\rangle_{max}] = \max_{\bar{\omega} \in B_i} \left\{ \mathcal{H}_{\Lambda_r^+}^{Pot}(\bar{\omega}) + \mathbf{u}(\bar{\omega}) \right\} - r\langle\Psi\rangle_{max} - \mathbf{u}(\omega^{(i)}).$$

Portanto, toda esta análise nos possibilita escrever uma versão assintótica (tomando o limite de  $\beta \rightarrow \infty$ ) para a equação (3.5), a saber:

$$\begin{aligned} \lambda + \mathbf{u}(\omega^{(i)}) &= \max_{\bar{\omega} \in B_i} \left\{ \mathcal{H}_{\Lambda_r^+}^{Pot}(\bar{\omega}) + \mathbf{u}(\bar{\omega}) \right\} - r\langle\Psi\rangle_{max} \\ &= \max_{\bar{\omega} \in B_i} \left\{ \left( \mathcal{H}_{\Lambda_r^+}^{Pot}(\bar{\omega}) - r\langle\Psi\rangle_{max} \right) + \mathbf{u}(\bar{\omega}) \right\} \end{aligned}$$

para todo  $1 \leq i \leq |\Omega|$ . Ademais, podemos tirar proveito do fato de que o observável  $\mathbf{u}$  é uma subação calibrada. Devido ao item (iii) da proposição 3.1.7, é do nosso conhecimento que  $\mathbf{u}(\omega) = \max_{\omega' \in \Omega} \{\mathbf{u}(\omega') + \mathbf{h}_\Psi(\omega', \omega)\}$  e, desta forma, obtemos

$$\lambda + \mathbf{u}(\omega^{(i)}) = \max_{\bar{\omega} \in B_i} \left\{ \left( \mathcal{H}_{\Lambda_r^+}^{Pot}(\bar{\omega}) - r \langle \Psi \rangle_{max} \right) + \max_{1 \leq j \leq |\Omega|} \{ \mathbf{u}(\omega^{(j)}) + \mathbf{h}_\Psi(\omega^{(j)}, \bar{\omega}) \} \right\}, \quad (3.7)$$

para todo  $1 \leq i \leq |\Omega|$ .

À primeira vista, esta última passagem pode não parecer ter simplificado tal equação. Ela possibilitou, porém, apresentar um sistema de equações para as operações de soma e máximo indexado pelos elementos do conjunto de Aubry. Isto nos motiva a reescrever cada equação anterior na linguagem da álgebra *max-plus*

$$\begin{aligned} \lambda \otimes \mathbf{u}(\omega^{(i)}) &= \bigoplus_{\bar{\omega} \in B_i} \left[ \left( \mathcal{H}_{\Lambda_r^+}^{Pot}(\bar{\omega}) - r \langle \Psi \rangle_{max} \right) \otimes \bigoplus_{1 \leq j \leq |\Omega|} \{ \mathbf{u}(\omega^{(j)}) \otimes \mathbf{h}_\Psi(\omega^{(j)}, \bar{\omega}) \} \right] \\ &= \bigoplus_{\bar{\omega} \in B_i} \bigoplus_{1 \leq j \leq |\Omega|} \left[ \left( \mathcal{H}_{\Lambda_r^+}^{Pot}(\bar{\omega}) - r \langle \Psi \rangle_{max} \right) \otimes \mathbf{h}_\Psi(\omega^{(j)}, \bar{\omega}) \otimes \mathbf{u}(\omega^{(j)}) \right] \\ &= \bigoplus_{1 \leq j \leq |\Omega|} \bigoplus_{\bar{\omega} \in B_i} \left[ \left( \mathcal{H}_{\Lambda_r^+}^{Pot}(\bar{\omega}) - r \langle \Psi \rangle_{max} \right) \otimes \mathbf{h}_\Psi(\omega^{(j)}, \bar{\omega}) \right] \otimes \mathbf{u}(\omega^{(j)}) \\ &= \bigoplus_{1 \leq j \leq |\Omega|} \left[ \bigoplus_{\bar{\omega} \in B_i} \left( \mathcal{H}_{\Lambda_r^+}^{Pot}(\bar{\omega}) - r \langle \Psi \rangle_{max} \right) \otimes \mathbf{h}_\Psi(\omega^{(j)}, \bar{\omega}) \right] \otimes \mathbf{u}(\omega^{(j)}), \end{aligned}$$

cuja representação matricial é dada por

$$\lambda \odot \vec{\mathbf{u}} = A_\Psi \otimes \vec{\mathbf{u}},$$

onde

$$\vec{\mathbf{u}} := (\mathbf{u}(\omega^{(1)}), \dots, \mathbf{u}(\omega^{(|\Omega|)})) \quad \text{e} \quad (A_\Psi)_{i,j} := \bigoplus_{\bar{\omega} \in B_i} \left[ \left( \mathcal{H}_{\Lambda_r^+}^{Pot}(\bar{\omega}) - r \langle \Psi \rangle_{max} \right) \otimes \mathbf{h}_\Psi(\omega^{(j)}, \bar{\omega}) \right].$$

Portanto, conseguimos reduzir nosso problema de caracterizar o limite assintótico da pressão a um problema de encontrar autovalor segundo a álgebra *max-plus* para a matriz  $A_\Psi$ . Vimos na seção anterior que tal problema de autovalor para álgebra *max-plus* tem solução completa caso a matriz em questão seja irredutível. Em particular, trata-se do nosso caso, já que as entradas de  $A_\Psi$  são

$$(A_\Psi)_{i,j} = \bigoplus_{\bar{\omega} \in B_i} \left[ \left( \mathcal{H}_{\Lambda_r^+}^{Pot}(\bar{\omega}) - r \langle \Psi \rangle_{max} \right) \otimes \mathbf{h}_\Psi(\omega^{(j)}, \bar{\omega}) \right] \neq -\infty$$

(Note que  $\mathcal{H}_{\Lambda_r^+}^{Pot}$  é definido a partir do potencial  $\Psi$  que é limitado e que as funções  $\mathbf{h}_\Psi(\omega^{(j)}, \cdot)$ , para  $1 \leq j \leq |\Omega|$ , são Hölder e finitas devido ao item (ii) da proposição

3.1.6.) Consequentemente  $A_\Psi$  é irredutível para álgebra *max-plus* (Outra forma de ver que  $A_\Psi$  é irredutível é perceber que o grafo associado é completo.)

Deste modo, o resultado segue da aplicação do teorema 3.2.1 (algoritmo de Karp) para a matriz  $A_\Psi$ .  $\square$

Encerramos este trabalho analisando as implicações de tal teorema sobre nosso exemplo base.

**Exemplo 3.2.4.** Como foi visto nos exemplos 3.1.1, 3.1.2 e 3.1.3, o conjunto de Aubry é dado por

$$\Omega(\Psi) = \{\omega^{(i+1)} := i^\infty : 0 \leq i < r - 1\} \subset \text{Fix}(\sigma).$$

Logo,  $\text{per}(\Omega) = 1$  e  $B_i = \sigma^{-1}(\omega^{(i+1)}) - \{\omega^{(i+1)}\} = \{ki^\infty := (k, i, i, i, \dots) \in \Sigma_S^+ : 0 \leq k \leq n - 1 \text{ e } k \neq i\}$ , para  $0 \leq i \leq r - 1$ . Além disso, lembre que  $\mathcal{H}_{\Lambda_1^+}^{\text{Pot}}(\omega) = \Psi(\omega)$ ,  $\langle \Psi \rangle_{\text{max}} = 0$  e, pela proposição 3.1.9, obtemos

$$\mathbf{h}_\Psi(j^\infty, \omega) = -\alpha_j d_{\Sigma_S^+}(\omega, j^\infty),$$

para  $0 \leq j \leq r - 1$  e  $\omega \in \Sigma_S^+$ .

Analisando as entradas da matriz  $A_\Psi$ , temos:

(i) para  $0 \leq i \neq j \leq r - 1$ ,

$$\begin{aligned} (A_\Psi)_{i+1, j+1} &= \bigoplus_{ki^\infty \in B_i} [(\Psi(ki^\infty) - \langle \Psi \rangle_{\text{max}}) \otimes \mathbf{h}_\Psi(j^\infty, ki^\infty)] \\ &= \bigoplus_{\substack{0 \leq k \leq r-1 \\ k \neq i}} \left( -\alpha_k d_{\Sigma_S^+}(ki^\infty, k^\infty) - \alpha_j d_{\Sigma_S^+}(ki^\infty, j^\infty) \right) \\ &\quad \oplus \bigoplus_{r \leq k \leq n-1} \left( -\alpha_k - \alpha_j d_{\Sigma_S^+}(ki^\infty, j^\infty) \right) \\ &= \bigoplus_{\substack{0 \leq k \leq r-1 \\ k \neq i, j}} \left( -\frac{\alpha_k}{2} - \alpha_j \right) \oplus (-\alpha_j) \oplus \bigoplus_{r \leq k \leq n-1} (-\alpha_k - \alpha_j) \\ &= -\alpha_j; \end{aligned}$$

(ii) para  $0 \leq i \leq r - 1$ ,

$$\begin{aligned} (A_\Psi)_{i+1, i+1} &= \bigoplus_{ki^\infty \in B_i} [(\Psi(ki^\infty) - \langle \Psi \rangle_{\text{max}}) \otimes \mathbf{h}_\Psi(i^\infty, ki^\infty)] \\ &= \bigoplus_{\substack{0 \leq k \leq n-1 \\ k \neq i}} \left( \Psi(ki^\infty) - \alpha_i d_{\Sigma_S^+}(ki^\infty, i^\infty) \right) \\ &= -\alpha_i + \max_{\substack{0 \leq k \leq n-1 \\ k \neq i}} \Psi(ki^\infty). \end{aligned}$$

Aplicando o teorema 3.2.3, o comportamento assintótico da pressão é caracterizado pela seguinte identidade

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} \log p(\beta \Psi) = \max_{0 \leq i \leq r-1} \min_{0 \leq l < r} \frac{(A_{\Psi}^{\otimes r})_{i+1, j+1} - (A_{\Psi}^{\otimes l})_{i+1, j+1}}{r-l}, \quad \forall 0 \leq j \leq r-1,$$

sendo a matriz  $A_{\Psi}$  dada por

$$\begin{pmatrix} -\alpha_0 + \max_{k0^{\infty} \in B_0} \Psi(k0^{\infty}) & -\alpha_1 & \dots & -\alpha_{r-1} \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 + \max_{k1^{\infty} \in B_1} \Psi(k1^{\infty}) & \dots & -\alpha_{r-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \dots & -\alpha_{r-1} + \max_{k(r-1)^{\infty} \in B_{r-1}} \Psi(k(r-1)^{\infty}) \end{pmatrix}.$$

Portanto, basta conhecer os coeficientes  $\alpha_k$ , com  $0 \leq k \leq n-1$ , os quais definem o potencial  $\Psi$ , para caracterizar o comportamento assintótico da pressão.  $\diamond$

**Observação 3.2.2.** Esta caracterização do comportamento assintótico da pressão para o caso do exemplo base é, na realidade, uma generalização do resultado enunciado abaixo, apresentado no artigo [5], o qual caracteriza tal comportamento para o potencial apresentado na observação 3.1.2.

**Proposição 3.2.2.** *O comportamento assintótico da pressão topológica para o potencial (3.1) é dado por*

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} \log p(\beta \Psi) = \begin{cases} -2, & \text{se } \alpha > 1; \\ -(1 + \alpha), & \text{se } 0 < \alpha \leq 1. \end{cases}$$

Como se trata de um contexto mais simples (o alfabeto possui apenas três símbolos e foram fixados os parâmetros  $\alpha_0 = 1$  e  $\alpha_1 = 3$ ), a análise do termo maximizante da equação (3.7) no teorema 3.2.3 pode ser feita por comparação direta termo a termo. Note que neste caso

$$A_{\Psi} = \begin{pmatrix} -1 + \max\{-\frac{3}{2}, -\alpha\} & -3 \\ -1 & -3 + \max\{-\frac{1}{2}, -\alpha\} \end{pmatrix},$$

sendo seu autovalor associado  $\lambda = \max\{-2, -(1 + \alpha)\}$ .

O objetivo em [5] é caracterizar de forma explícita o estado congelado para o potencial (3.1) e o seu comportamento com relação à variação do parâmetro  $\alpha$ , sendo a proposição 3.2.2 uma das peças fundamentais para alcançá-lo.

---

## Referências Bibliográficas

---

- [1] A. Avila e J. Bochi. *On the subadditive ergodic theorem*. 2009. <http://www.mat.puc-rio.br/~jairo/docs/kingbirk.pdf>.
- [2] F. L. Baccelli, G. Cohen, G. J. Olsder e J. P. Quadrat. *Synchronization and Linearity: An Algebra for Discrete Event Systems*. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics. Wiley, 1992.
- [3] V. Baladi. *Positive Transfer Operators and Decay of Correlations*. Advanced Series in Nonlinear Dynamics. World Scientific Publishing Company, 2000.
- [4] R. B. Bapat e T. E. S. Raghavan. *Nonnegative Matrices and Applications*. Encyclopedia of Mathematics and Its Applications. Cambridge University Press, 1997.
- [5] A. T. Baraviera, R. Leplaideur e A. O. Lopes. Selection of ground states in the zero temperature limit for a one-parameter family of potentials. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 11(1):243-260, 2012.
- [6] S. K. Berberian. *Lectures in functional analysis and operator theory*. Graduate texts in mathematics. Springer Verlag, 1974.
- [7] G. D. Birkhoff. Proof of the ergodic theorem. *Proceedings Of The National Academy Of Sciences Of The United States Of America*, 17(12), 1931.
- [8] V.I. Bogachev. *Measure Theory*, Vol. 01 e 02. Springer, 2006.
- [9] A. Bovier. *Statistical Mechanics of Disordered Systems: A Mathematical Perspective*. Cambridge Series on Statistical and Probabilistic Mathematics. Cambridge University Press, 2006.
- [10] R. Bowen. *Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphisms*. Lecture Notes in Mathematics. Springer, 2008.

- [11] R. Bowen e D. Ruelle. The ergodic theory of axiom A flows. *Inventiones Mathematicae*, 29:181–202, 1975.
- [12] H. Brézis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Universitext Series. Springer, 2010.
- [13] Y. Cao, D. Feng e W. Huang. The thermodynamic formalism for sub-additive potentials. *Discrete And Continuous Dynamical Systems*, 20(3):639–657, 2008.
- [14] G. Contreras, A. O. Lopes e P. Thiullen. Lyapunov minimizing measures for expanding maps of the circle. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 21:1379–1409, 2001.
- [15] R. L. Dobrushin. The description of the random field by its conditional distributions and its regularity conditions. *Teoriya Veroyatnostei i ee Primeneniya*, 13:201–229, 1968.
- [16] R. L. Dobrushin. Gibbsian random fields for lattice systems with pairwise interactions. *Functional Analysis and Its Applications*, 2:292–301, 1968.
- [17] R. L. Dobrushin. Gibbsian random fields - the general case. *Functional Analysis and Its Applications*, 3:22–28, 1969.
- [18] M. E. Fisher e B. U. Felderhof. Phase transitions in one-dimensional cluster-interaction fluids IA. Thermodynamics. *Annals of Physics*, 58(1):176–216, 1970.
- [19] G. B. Folland. *Real analysis: modern techniques and their applications*. Pure and applied mathematics. Wiley, 1999.
- [20] G. Gallavotti e S. Miracle-Sole. Statistical mechanics of lattice systems. *Communications in Mathematical Physics*, 5:317–323, 1967.
- [21] E. Garibaldi e A. O. Lopes. On the Aubry-Mather theory for symbolic dynamics. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 28:791–815, 2008.
- [22] E. Garibaldi, A. O. Lopes e P. Thiullen. On calibrated and separating sub-actions. *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society*, 40:577–602, 2009.
- [23] E. Garibaldi e P. Thiullen. Description of some ground states by Puiseux techniques. *Journal of Statistical Physics*, 146:125–180, 2012.
- [24] H. O. Georgii. *Gibbs Measures and Phase Transitions*. De Gruyter Studies in Mathematics. De Gruyter, Second Edition, 2011.
- [25] J. Gunawardena, J. M. Taylor e M. Atiyah. *Idempotency*. Publications of the Newton Institute. Cambridge University Press, 2008.
- [26] B. Heidergott, G. J. Olsder e J. W. van der Woude. *Max Plus at Work - Modeling and Analysis of Synchronized Systems: a Course on Max-Plus Algebra and Its Applications*. Princeton Series in Applied Mathematics. Princeton University Press, 2006.

- [27] F. Hofbauer. Examples for the nonuniqueness of the equilibrium state. *Transactions of the American Mathematical Society*, 228:223–241, 1977.
- [28] R. B. Israel. *Convexity in the theory of lattice gases*. Princeton series in physics. Princeton University Press, 1979.
- [29] O. Jenkinson. Ergodic optimization. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 15:197–224, 2006.
- [30] O. Jenkinson, R. D. Mauldin e M. Urbański. Zero temperature limits of Gibbs-equilibrium states for countable alphabet subshifts of finite type. *Journal Of Statistical Physics*, 119:765–776, 2005.
- [31] O. Jenkinson, R. D. Mauldin e M. Urbański. Ergodic optimization for noncompact dynamical systems. *Dynamical Systems*, 22(3):379–388, 2007.
- [32] G. Keller. *Equilibrium States in Ergodic Theory*. London Mathematical Society Student Texts. Cambridge University Press, 1998.
- [33] J. F. C. Kingman. Subadditive ergodic theory. *The Annals of Probability*, 883–899, 1973.
- [34] O. E. Lanford e D. Ruelle. Observables at infinity and states with short range correlations in statistical mechanics. *Communications in Mathematical Physics*, 13:194–215, 1969.
- [35] T. M. Liggett. An improved subadditive ergodic theorem. *The Annals of Probability*, 13(4):1279–1285, 1985.
- [36] E. Lindenstrauss. Pointwise theorems for amenable groups. *Inventiones Mathematicae*, 146:259–295, 2001.
- [37] R. D. Mauldin e M. Urbański. *Graph Directed Markov Systems: Geometry and Dynamics of Limit Sets*. Cambridge Tracts in Mathematics. Cambridge University Press, 2003.
- [38] M. Misiurewicz. A short proof of the variational principle for a  $\mathbb{Z}_+^n$  action on a compact space. *Astérisque*, 40:147–157, 1976.
- [39] J. Moulin-Ollagnier. *Ergodic Theory and Statistical Mechanics*. Springer-Verlag, 1985.
- [40] J. R. Munkres. *Topology*. Prentice Hall, Incorporated, 2000.
- [41] J. Neveu. Courte démonstration du théorème ergodique sur-additif. *Annales de l’Institut Henri Poincaré*, 19(1):87–90, 1983.
- [42] W. Parry e M. Pollicott. Zeta functions and the periodic orbit structure of hyperbolic dynamics. *Astérisque*, 187–188, 1990.

- [43] R. R. Phelps. *Lectures on Choquet's Theorem*. Lecture Notes in Mathematics. Springer, 2001.
- [44] M. Pollicott e M. Yuri. *Dynamical Systems and Ergodic Theory*. London Mathematical Society Student Texts. Cambridge University Press, 1998.
- [45] D. Ruelle. A variational formulation of equilibrium statistical mechanics and the Gibbs phase rule. *Communications in Mathematical Physics*, 5:324–329, 1967.
- [46] D. Ruelle. *Statistical Mechanics: Rigorous Results*. World Scientific, 1999.
- [47] D. Ruelle. *Thermodynamic Formalism: The Mathematical Structures of Equilibrium Statistical Mechanics*. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, 2004.
- [48] O. M. Sarig. Thermodynamic formalism for countable Markov shifts. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 19:1565–1593, 1999.
- [49] O. M. Sarig. Characterization of existence of Gibbs measures for countable Markov shifts. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 131:1751–1758, 2003.
- [50] B. Simon. *The Statistical Mechanics of Lattice Gases*. Princeton Series in Physics. Princeton University Press, 1993.
- [51] Y. G. Sinai. Markov partitions and c-diffeomorphisms. *Functional Analysis and Its Applications*, 2:61–82, 1968.
- [52] Y. G. Sinai. Gibbs measures in ergodic theory. *Russian Mathematical Surveys*, 27(4):21, 1972.
- [53] J. M. Steele. Kingman's subadditive ergodic theorem. *Annales de l'Institut Henri Poincaré*, 25(1):93–98, 1989.
- [54] L. A. Steen e J. A. Seebach. *Counterexamples in Topology*. Dover Books on Mathematics. Dover Publications, 1995.
- [55] W. G. Sullivan. Potentials for almost Markovian random fields. *Communications in Mathematical Physics*, 33:61–74, 1973.
- [56] A. van Enter, R. Fernández e A. Sokal. Regularity properties and pathologies of position-space renormalization-group transformations: Scope and limitations of Gibbsian theory. *Journal of Statistical Physics*, 76(5-6):879–1167, 1993.
- [57] P. Walters. *An Introduction to Ergodic Theory*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2000.

---

## Resultados Suplementares

---

Este apêndice tem por objetivo apresentar uma coletânea de definições, teoremas, corolários etc, os quais são de fundamental importância para os capítulos anteriores. O intuito é preencher lacunas referentes a pré-requisitos específicos utilizados no decorrer desta dissertação. O fato de não estarem inseridos dentro do texto principal justifica-se pela intenção de tentar não atrapalhar o foco no fluxo dos conteúdos apresentados.

Dividimos tal apêndice nos seguintes tópicos: teoria da medida, topologia, análise funcional, sistemas dinâmicos e teoria de matrizes não negativas. Isso facilitará a busca por detalhes específicos de cada resultado na literatura de cada tópico. Além disso, os resultados estão devidamente referenciados para agilizar consulta do leitor que esteja procurando pelas respectivas demonstrações.

### Teoria da Medida

**Definição A.0.8.** A família  $\mathcal{R}$  de subconjuntos de  $X$  é dita ser um anel se possui o conjunto vazio, as uniões e interseções finitas e todos os respectivos complementares.

**Teorema A.0.4** (Teorema de Extensão de Carathéodory, [8], 1.11.9). *Sejam  $\mathcal{R}$  um anel e uma função  $\mu_0 : \mathcal{R} \rightarrow [0, \infty]$  finitamente aditiva, então existe uma extensão  $\sigma$ -aditiva  $\mu$  sobre a  $\sigma$ -álgebra gerada a partir do anel.*

Durante a demonstração do resultado acima é possível obter o seguinte corolário.

**Corolário A.0.5.** *Para qualquer  $A$  pertencente à  $\sigma$ -álgebra gerada pelo anel  $\mathcal{R}$ , existe uma sequência de conjuntos  $\{C_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  do anel  $\mathcal{R}$  tal que  $\mu(A \Delta C_n) \leq 2^{-n}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .*

**Teorema A.0.6** (Teorema da Convergência Dominada, [19], 2.24). *Seja  $(X, \mathcal{A})$  um espaço mensurável munido da medida  $\mu$ . Considere  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  uma seqüência de funções  $\mu$ -integráveis satisfazendo*

- (i)  $f_n \rightarrow f$   $\mu$ -q.t.p.;
- (ii) *existe uma função  $g$  não negativa e  $\mu$ -integrável que domina a seqüência  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , isto é,  $|f_n| \leq g$   $\mu$ -q.t.p. para todo  $n \in \mathbb{N}$ .*

Então  $f$  é uma função integrável e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

**Definição A.0.9.** *Seja  $C$  um conjunto convexo em um espaço vetorial  $V$ . Uma função  $F : C \rightarrow \mathbb{R}$  é dita côncava se  $tF(u) + (1-t)F(v) \leq F(tu + (1-t)v)$ .*

**Teorema A.0.7** (Desigualdade de Jensen, [8], 2.12.19). *Sejam  $\mu$  uma medida de probabilidade no espaço mensurável  $(X, \mathcal{A})$  e  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  uma função integrável, cuja imagem está contida no domínio de uma função côncava  $F$ . Se  $F \circ f$  é integrável, então*

$$\int F \circ f d\mu \leq F \left( \int f d\mu \right).$$

**Definição A.0.10.** *Sejam  $\mu$  uma medida para o espaço mensurável  $(X, \mathcal{A})$ ,  $\mathcal{B}$  uma sub- $\sigma$ -álgebra de  $\mathcal{A}$  e  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  uma função integrável. A esperança condicional de  $f$  com respeito à  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{B}$  e à medida  $\mu$  é dada por uma função  $\mathbb{E}(f|\mathcal{B})$  que é  $\mathcal{B}$ -mensurável,  $\mu$ -integrável e satisfaz*

$$\int_B f d\mu = \int_B \mathbb{E}(f|\mathcal{B}) d\mu,$$

para todo conjunto  $B \in \mathcal{B}$ .

**Proposição A.0.3** ([57], §0.4 e [8], 10.1.5).

- (i) *Se  $f$  é integrável, então existe  $\mathbb{E}(f|\mathcal{B})$ .*
- (ii)  *$\mathbb{E}(\cdot|\mathcal{B})$  é linear.*
- (iii) *Se  $f \geq 0$ , então  $\mathbb{E}(f|\mathcal{B}) \geq 0$ .*
- (iv) *Para toda função  $f$  integrável,  $|\mathbb{E}(f|\mathcal{B})| = \mathbb{E}(|f||\mathcal{B})$ .*
- (v) *Se  $f$  é integrável e  $g$  é  $\mathcal{B}$ -mensurável e limitada, então  $\mathbb{E}(fg|\mathcal{B}) = g\mathbb{E}(f|\mathcal{B})$ .*
- (vi) *Se  $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2$ , então  $\mathbb{E}(\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_1)|\mathcal{B}_2) = \mathbb{E}(f|\mathcal{B}_2)$ .*

**Definição A.0.11.** *Sejam  $(X, \mathcal{A})$  e  $(X', \mathcal{A}')$  espaços mensuráveis. Denomina-se de núcleo de probabilidade ou probabilidade de transição de  $(X, \mathcal{A})$  para  $(X', \mathcal{A}')$  à aplicação  $\gamma : X \times \mathcal{A}' \rightarrow [0, 1]$  satisfazendo as seguintes propriedades:*

- (i) *para cada  $x \in X$ ,  $\gamma(x, \cdot)$  é uma probabilidade para  $(X', \mathcal{A}')$ ;*
- (ii) *para cada  $A \in \mathcal{A}'$ ,  $\gamma(\cdot, A)$  é uma função  $\mathcal{A}$ -mensurável.*

**Definição A.0.12.**

- (i) Uma medida de Borel  $\mu$  em um espaço topológico  $X$  é dita ser de Radon se é finita sobre os compactos e, para qualquer boreliano  $B$  e todo  $\varepsilon > 0$ , existe um conjunto compacto  $K_\varepsilon \subset B$  tal que  $\mu(B - K_\varepsilon) < \varepsilon$ .
- (ii) Uma medida de Borel  $\mu$  em um espaço topológico  $X$  é dita ser regular se, para qualquer boreliano  $B$  e todo  $\varepsilon > 0$ , existem um conjunto aberto  $U_\varepsilon \supset B$  e um conjunto fechado  $F_\varepsilon \subset B$  tal que  $\mu(U_\varepsilon - F_\varepsilon) < \varepsilon$ .

**Teorema A.0.8** ([19], 7.8). *Seja  $X$  um espaço topológico localmente compacto e Hausdorff. Então toda medida de Borel em  $X$  que é finita sobre os compactos é de Radon e regular.*

**Teorema A.0.9** (Teorema de Representação de Riesz, [8], 7.10.4). *Seja  $X$  um espaço topológico compacto. Então, para todo funcional linear  $L$  contínuo e positivo no espaço de Banach  $C(X)$ , existe uma única medida de Radon  $\mu_L$  tal que*

$$L(f) = \int f d\mu_L, \quad \forall f \in C(X).$$

**Teorema A.0.10** ([19], 7.28). *Sejam  $A$  um conjunto arbitrário e, para cada  $\alpha \in A$ ,  $\mu_\alpha$  uma probabilidade de Radon para os espaços de Hausdorff compactos  $X_\alpha$ . Então existe uma única probabilidade de Radon  $\mu$  em  $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$  tal que*

$$\mu(E_{\alpha_1} \times \dots \times E_{\alpha_k}) = \mu_{\alpha_1}(E_{\alpha_1}) \dots \mu_{\alpha_k}(E_{\alpha_k}),$$

para todo  $k > 0$  e qualquer aberto  $E_{\alpha_i}$  de  $X_i$ , com  $1 \leq i \leq k$ .

**Teorema A.0.11** (Teorema de Representação de Choquet, [43]). *Seja  $X$  um subconjunto compacto, convexo e metrizável de um espaço localmente convexo  $E$ . Dado um ponto  $x \in X$ , existe então uma medida de probabilidade  $\mu_x$  em  $X$  que representa  $x$  e é suportada pelos pontos extremos de  $X$ .*

## Topologia

**Definição A.0.13.** A coletânea  $\mathcal{B}$  de subconjuntos de  $X$  é dita ser uma base para uma topologia em  $X$ , se

- (i)  $X = \cup_{A \in \mathcal{B}} A$ ;
- (ii)  $x \in B_1 \cap B_2$ , com  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ , existe um elemento  $B' \in \mathcal{B}$  tal que  $x \in B' \subset B_1 \cap B_2$ .

**Lema A.0.12** ([40], 13.3). *Sejam  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{B}'$  bases para as topologias  $\tau$  e  $\tau'$ , respectivamente, em  $X$ . São equivalentes:*

- (i)  $\tau \subset \tau'$ ;
- (ii) para cada  $x \in X$  e  $B \in \mathcal{B}$ , com  $x \in B$ , existe um elemento  $B' \in \mathcal{B}'$  tal que  $x \in B' \subset B$ .

**Definição A.0.14.** Um espaço topológico é dito possuir a propriedade Hausdorff se pontos distintos possuem vizinhanças disjuntas.

**Definição A.0.15.** Um espaço topológico é dito satisfazer

- (i) o primeiro axioma de enumerabilidade se todo ponto possui base de vizinhança enumerável;
- (ii) o segundo axioma de enumerabilidade caso sua topologia possua uma base de abertos enumerável.

**Teorema A.0.13** (Teorema de Birkhoff-Kakutani, [6], 6.3). *Seja  $G = (G, *, \tau)$  um grupo topológico. Então  $G$  é metrizável se, e somente se,  $G$  satisfaz a propriedade Hausdorff e o primeiro axioma de enumerabilidade.*

**Definição A.0.16.** Um espaço topológico é dito ser compacto se, para toda cobertura aberta, existe uma subcobertura finita.

**Teorema A.0.14** (Teorema de Tychonoff, [40], 37.3). *O produto arbitrário de espaços topológicos compactos é um espaço topológico compacto.*

## Análise Funcional

**Definição A.0.17.** A topologia fraca\* para espaço dual  $E^*$ , associado a um espaço de Banach  $E$ , é a menor topologia que torna as funções da coletânea  $\{ev_x\}_{x \in E}$  definidas por

$$ev_x(f) := f(x), \quad \forall f \in E^*,$$

em funções contínuas.

**Proposição A.0.4** ([12], 3.12). *Sejam  $\bar{f} \in E^*$ ,  $\{x_1, \dots, x_k\} \subset E$  e  $\varepsilon > 0$ . Considere os conjuntos*

$$V_{\bar{f}}(x_1, \dots, x_k; \varepsilon) := \{f \in E^* : |f(x_i) - \bar{f}(x_i)| \leq \varepsilon, \forall 1 \leq i \leq k\}.$$

*Então  $V_{\bar{f}}(x_1, \dots, x_k; \varepsilon)$  é uma vizinhança de  $\bar{f}$  em  $E^*$ . Além disso, a coletânea de conjuntos da forma acima, para quaisquer  $f \in E^*$ ,  $\{x_1, \dots, x_r\} \subset E$  e  $\varepsilon > 0$ , gera a topologia fraca\*.*

**Teorema A.0.15** (Teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki, [12], 3.16). *Seja  $E$  um espaço de Banach com espaço dual  $E^*$ . Então a bola unitária fechada em  $E^*$ , dada por*

$$\bar{B}_E := \{f \in E^* : \|f\|_{E^*} \leq 1\},$$

*é compacta para a topologia fraca\*.*

## Sistemas Dinâmicos

**Definição A.0.18.** Um sistema dinâmico  $(X, T) = (X, d, T)$  é dito topológico se  $(X, d)$  é um espaço métrico compacto e  $T : X \rightarrow X$  é uma aplicação contínua.

**Definição A.0.19.** Dado um sistema dinâmico topológico  $(X, T)$ , denomina-se de conjunto não errante o conjunto formado pelos pontos  $x \in X$  para os quais: dado  $\varepsilon > 0$ , existem  $n \geq 1$  e  $y \in X$  tais que  $d(x, y) < \varepsilon$  e  $d(T^n(y), x) < \varepsilon$ . Este conjunto é denotado por  $\Omega_T$ .

## Teoria de Matrizes Não Negativas

**Definição A.0.20.**

- (i) Uma matriz  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$  é dita não negativa se  $a_{ij} \geq 0$  para todo  $1 \leq i, j \leq n$ . Denotamos tal propriedade escrevendo simplesmente  $A \geq 0$ .
- (ii) Uma matriz não negativa  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$  é dita irredutível se, para todo par  $(i, j)$ , com  $1 \leq i, j \leq n$ , existe um inteiro  $t(i, j)$  tal que  $(A^{t(i,j)})_{i,j} > 0$ .

**Teorema A.0.16** (Teorema de Perron-Frobenius, [4], 1.44 e [3], 1.1). *Seja  $A \geq 0$  uma matriz  $n \times n$  irredutível. Então*

- (i) *existem uma constante  $\lambda > 0$  e um vetor  $v$ , cujas entradas são positivas, tais que  $Av = \lambda v$ ;*
- (ii) *o autovalor  $\lambda$  é geometricamente e algebricamente simples;*
- (iii) *o autovalor  $\lambda$  é maximal em módulo dentre todos os autovalores de  $A$ , isto é, para qualquer outro autovalor  $\lambda' \in \mathbb{C}$  temos que  $|\lambda'| < \lambda$ ;*
- (iv) *os únicos autovetores de  $A$  com entradas não negativas são os múltiplos de  $v$  por escalares positivos.*

- $\mu$ -partição, 55
  - geradora, 55
- $\mu_S$ -especificação, 36
- $\sigma$ -álgebra
  - caudal, 15
  - local, 13
- Álgebra
  - idempotente, 96
  - max-plus*, 96
- Alfabeto, 7
- Algoritmo de Karp, 98
- Barreira de Peierls, 90
- Cadeia de Markov, 17
- Ciclo, 97
- Cilindros, 9
- Cobertura, 55
  - geradora, 55
  - minimal, 70
- Comportamento assintótico
  - da pressão, 99
  - das autofunções, 93
- Conjunto
  - de Aubry, 86
  - de *Spins*, 7
  - não errante, 115
- Desigualdade de Jensen, 112
- Energia Livre de Gibbs, 45
- Energia Média, 29, 32, 44, 54
- Entropia, 32, 44
  - de Kolmogorov-Sinai, 56
  - relativa, 44
  - topológica, 58
- Equação DLR, 39
- Equivalentes
  - por Dobrushin, 37, 42
  - por Ruelle, 53, 60
- Espaço
  - de *shift*, 12
  - de configurações, 9
- Especificação, 35
  - $\sigma$ -invariante, 42
  - de temperatura zero, 83
  - Gibbsiana, 36
  - Markoviana, 36, 77
  - para o Modelo *Clock*, 36
- Esperança condicional, 112
- Estado, 16
  - $\Psi$ -maximizante, 84
  - $\sigma$ -invariante, 19
  - básico, 22
  - congelado, 82

- de Bernoulli, 17
- de Boltzmann-Gibbs, 32
- de equilíbrio, 60
- de Gibbs, 39
- de Gibbs  $\sigma$ -invariantes, 43
- de Markov, 17
- ergódico, 19
  - macroscópico, 18
- Exclusões do tipo caroço, 12
- Função de Partição, 32, 34
- Funcional tangente, 48, 61
  
- Grafo ponderado, 97
  
- Hamiltoniano, 25
  - $\sigma$ -invariante, 28
  - aditivo, 30
  - de fronteira, 24, 25
  - de uma interação, 23
  - de uma potencial, 25
  - livre, 24, 25
  - subaditivo, 30
  
- Interação, 22
  - $\sigma$ -invariante, 28
  - absolutamente somável, 23
  - de curto alcance, 28
  - de longo alcance, 28
  
- Lema
  - majoração, 67
  - minoração, 68
- Local de contato, 86
  
- Máxima média de ponderação sobre os ciclos, 98
- Média de Birkhoff, 16
- Matriz
  - de adjacência ponderada, 97
  - irredutível, 115
  - irredutível para a álgebra *max-plus*, 98
  
- Medida
  - de Haar, 7
  - de Radon, 113
  - de referência, 8
  - regular, 113
  
- Modelo
  - Clock* ou Potts, 26
  - de Heisenberg ou XYZ, 27
  - de Ising, 25
  - XY, 26
  
- Núcleo de Probabilidade, 35, 112
- Norma uniforme, 13
  
- Observável, 12
  - $\sigma$ -invariante, 15
  - de campo externo, 13
  - de interação entre vizinhos mais próximos, 13
  - global, 15
  - local, 13
  - não local, 14
  
- Operador
  - de Lax-Oleinik, 89
  - de Ruelle, 80, 101
  - de *shift*, 11
  
- Partição, 54
  
- Pontos
  - fixos, 100
  - periódicos, 100
  
- Potencial, 22
  - $\sigma$ -invariante, 28
  - de curto alcance, 28
  - de longo alcance, 28
  - regular, 78
  
- Pressão, 32
  - topológica, 57

- Princípio Variacional, 52, 59
- Propriedade
- cluster*, 18
  - Feller, 41
  - Gibbs, 79
- Refinamento, 55
- Reticulado, 8
- Símbolos, 7
- Semicorpo
- idempotente, 94
  - max-plus*, 94
  - min-plus*/*min-plus*, 95
- Semimódulo idempotente, 95
- Shift* completo, 11
- bilateral, 11
  - sobre a esfera unitária, 12
  - unilateral, 11
- Sistema de *Spins*
- de volume finito, 31, 34
  - para o modelo Clock, 31
  - unidimensional, 31
- Sistema dinâmico topológico, 115
- Spins*, 7
- Subação, 86
- calibrada, 89
  - separante, 88
- Subshift* de tipo de finito, 12
- Teorema
- da convergência dominada, 51, 112
  - de Banach-Alaoglu-Bourbaki, 18, 114
  - de Birkhoff-Kakutani, 7, 114
  - de decomposição ergódica, 21
  - de extensão de Carathéodory, 111
  - de Krylov-Bogoliubov, 20
  - de Perron-Frobenius, 17, 115
  - de representação
    - de Choquet, 21, 113
    - de Riesz, 17, 113
  - de Ruelle-Perron-Frobenius, 80, 93
  - de Tychonoff, 114
  - ergódico
    - de Birkhoff, 20
    - subaditivo de Kingman, 20
- Topologia fraca\*, 18, 114
- Valor ergódico maximizante, 84